

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХӨБӨРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

3

1970

·ЕЛМ· НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ·ЭЛМ·
БАҚЫ — БАКУ

Г. М. ГАСАНОВ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЭРМИТА—ФЕЙЕРА В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

1. Цель настоящей работы заключалась в исследовании порядка сходимости интерполяционных процессов Эрмита—Фейера для p -нормальных матриц узлов относительно хаусдорфовой метрики. Отметим, что наиболее существенные исследования при изучении приближений функций относительно хаусдорфовой метрики принадлежат Бл. Сендову [1–3].

Пусть $y = f(x)$ — функция, заданная на отрезке Δ . Назовем дополнительным графиком $\bar{f}$ функции $f(x)$ пересечение всех замкнутых и выпуклых относительно оси y точечных множеств на плоскости, которые содержат график функции $f(x)$. Дополненный график непрерывной функции совпадает с ее графиком. Хаусдорфово расстояние [1] $r(f, g)$ между двумя ограниченными функциями $f(x)$ и $g(x)$, заданными на Δ , определяется следующим образом:

$$r(f, g) = \max_{\{x \in \bar{f}\}} \{ \max_{\{y \in \bar{g}\}} \min \|T - Y\|_0, \max_{\{x \in \bar{g}\}} \min \|X - Y\|_0 \},$$

где

$$\|X - Y\|_0 = \|X(x_1, y_1) - Y(x_2, y_2)\|_0 = \max \{x_1 - x_2, |y_1 - y_2|\}.$$

Как в [1] определим понятие модуль немонотонности $\mu(\delta) = \mu_f(\delta)$ функции $f(x)$ следующим образом:

$$\mu(\delta) = \sup_{\{x_1 - x_2\} < \delta} \{ \sup_{\{x_1 < x < x_2\}} [|f(x_1) - f(x)| + |f(x_2) - f(x)|] - |f(x_1) - f(x_2)| \}.$$

Модуль немонотонности $\mu(\delta)$ играет относительно хаусдорфовского расстояния роль, аналогичную роли модуля непрерывности относительно равномерного расстояния. Функция $f(x)$ называется локально монотонной, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = \mu(0) = 0.$$

Необходимое и достаточное условие [1] для того, чтобы $f(x)$ была локально монотонной, состоит в следующем: $f(x)$ может иметь только разрывы первого рода и для каждого x значение $f(x)$ находится между $f(x-0)$ и $f(x+0)$.

Определение [3]. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-1, 1]$, принадлежит классу $M[-1, 1]$, если $|f(x)| \leq M$ ($M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$), $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mu(\delta) = 0$ и $|f(-1) - f(x)| \leq \mu(|-1 - x|)$.

$$|f(1) - f(x)| \leq \mu(|1 - x|).$$

В класс $M[-1, 1]$ входят, кроме всех непрерывных, еще и разрыв-

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (главный редактор), З. И. Халилов (зам. гл. редактора), Ю. М. Сеидов (зам. гл. редактора), Г. Н. Агаев, М. И. Алиев, Ю. А. Амензаде, Б. М. Аскеров, Н. А. Гулиев, А. И. Гусейнов, М. А. Джавадов, И. И. Ибрагимов, Л. М. Иманов, Ф. Г. Максудов, Э. И. Манафлы (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)*“.

Сдано в набор 30/III 1970 г. Подписано к печати 21/X 1970 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,63. Печ. лист. 12,67. Уч.-изд. лист. 11,9. ФГ 01328. Заказ 117. Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного комитета Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Баку, Ази Асланова, 80.

ные функции, например, все монотонные функции, для которых только $f(-1+0) = f(-1)$ и $f(1-0) = f(1)$.

2. Пусть задана матрица узлов

$$-1 \leq x_{1n} < x_{2n} < \dots < x_{nn} \leq 1 \quad (1)$$

и пусть для всякой функции $f(x)$, определенной на $[-1, 1]$, $H_n(f, x)$ — соответствующий ей интерполяционный полином Эрмита—Фейера степени $(2n-1)$, однозначно определяемый из условий

$$H_n(f, x_{kn}) = f(x_{kn}), \quad H'_n(f, x_{kn}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Как известно,

$$H_n(f, x) = \sum_{k=1}^n f(x_{kn}) v_{kn}(x) l_{kn}^2(x), \quad (2)$$

где

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{\omega'_n(x_{kn})}{\omega'_n(x)} (x - x_{kn}),$$

$$l_{kn}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_{kn}) (x - x_{kn})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_{kn}).$$

Отметим, что при исследовании интерполяционного процесса Эрмита—Фейера важную роль играют ρ -нормальные матрицы узлов (1), для которых при некотором $0 < \rho \leq 1$ и $-1 \leq x \leq 1$ [4–5]

$$v_{kn}(x) \geq \rho, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Имеет место.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in M[-1, 1]$ и пусть $H_n(f, x)$ построен для n -ой строки ρ -нормальной матрицы. Тогда для всякого числа $\delta > 0$ на отрезке $[-1, 1]$

$$r(f, H_n) \leq \inf_{\delta > 0} \max \left[\delta, 2\rho(4\delta) + \frac{4MC(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}} \right], \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая величина, $C(\varepsilon)$ зависит лишь от ε , $M = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Для доказательства теоремы докажем несколько лемм.

Лемма 1. Пусть узлы интерполяции образуют ρ -нормальную матрицу. Тогда для каждого n , $\delta > 0$ и $x \in [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k \in \Delta(x)} v_{kn} l_{kn}^2(x) = \frac{2C(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}},$$

где $\Delta(x)$ обозначает совокупность тех значений k от 1 до n , для которых выполняется неравенство $|x - x_{kn}| \geq \delta$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое и $C(\varepsilon)$ зависит лишь от ε .

Действительно, учитывая известную оценку для ρ -нормальных матриц [5]

$$\sum_{k=1}^n |x - x_{kn}| l_{kn}^2(x) \leq \frac{C(\varepsilon)}{n^{\rho-\varepsilon}}$$

и равенство

$$\sum_{k=1}^n |x - x_{kn}|^s v_{kn}(x) l_{kn}^2(x) = s \sum_{k=1}^n |x - x_{kn}|^{s-1} l_{kn}^2(x),$$

где s — любое натуральное число, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Delta(x)} v_{kn}(x) l_{kn}^2(x) &\leq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=1}^n (x - x_{kn})^2 v_{kn}(x) l_{kn}^2(x) = \\ &= \frac{2}{\delta^2} \sum_{k=1}^n |x - x_{kn}| l_{kn}^2(x) \leq \frac{2C(\varepsilon)}{n^{\rho-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $f(x) \in M[-1, 1]$. Если $X(x_1, y_1)$ — произвольная точка от f , то для каждого $\delta > 0$ можно найти точку $Y(x_2, y_2)$ на графике полинома $H_n(f, x)$ такую, что

$$\|X - Y\|_0 \leq \max \left[\delta, 2\rho(4\delta) + \frac{4MC(\varepsilon)}{n^{\rho-\varepsilon} \delta^2} \right],$$

где $C(\varepsilon)$ — константа в лемме 2, а $M = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Лемма 3. Если $X(x_1, y_1)$ — произвольная точка на графике $H_n(f, x)$ в интервале $[-1, 1]$, то для каждого $\delta > 0$ можно найти точку $Y(x_2, y_2) \in \bar{f}$ такую, что

$$\|X - Y\|_0 \leq \max \left[\delta, \frac{4MC(\varepsilon)}{n^{\rho-\varepsilon} \delta^2} \right].$$

Леммы 2 и 3 доказываются аналогично леммам 3 и 4 из работы [3], соответственно, причем при этом существенно используется лемма 1.

Переходим к доказательству теоремы 1. Согласно лемме 2 для каждой точки $X \in \bar{f}$ имеем

$$\min_{Y \in H_n} \|X - Y\|_0 \leq \max \left[\delta, 2\rho(4\delta) + \frac{4MC(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}} \right]$$

и

$$\max_{X \in \bar{f}} \min_{Y \in H_n} \|X - Y\|_0 \leq \left[\delta, 2\rho(4\delta) + \frac{4MC(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}} \right]. \quad (4)$$

Согласно лемме 3 аналогично имеем

$$\max_{X \in H_n} \min_{Y \in \bar{f}} \|X - Y\|_0 \leq \left[\delta, 2\rho(4\delta) + \frac{4MC(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}} \right]. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует (3).

Теорема 2. Пусть $f(x) \in M[-1, 1]$ и пусть n -я строка матрицы (1) составлена из корней полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($-1 \leq \alpha, \beta < 0$)*. Тогда справедливо неравенство (5) при $\rho = \min\{-\alpha, -\beta\}$.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы 1, ибо корни полиномов $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($-1 \leq \alpha, \beta < 0$) образуют

ρ -нормальную матрицу (1). Если в (5) подставить $\delta = n^{-\frac{\rho-\varepsilon}{3}}$, то легко получим следующее:

Теорема 3. Пусть $f(x) \in M[-1, 1]$. Тогда

$$r(f, H_n) \leq \begin{cases} C\rho \left(n^{-\frac{\rho-\varepsilon}{3}} \right), & \text{если } \rho(\delta) \geq \delta, \\ Cn^{-\frac{\rho-\varepsilon}{3}}, & \text{если } \rho(\varepsilon) \leq \delta, \end{cases}$$

где C — константа, не зависящая от n .

* Под $P_n^{(-1, -1)}(x)$ мы понимаем $\int_1^x P_{n-1}(t) dt$, где $P_n(t)$ — полином Лежандра n -й степени.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in M[-1, 1]$ и пусть модуль немонотонности $\mu(t)$ функции $f(x)$ удовлетворяет условию $\mu(t) \leq C \varphi(t)$, где C —константа и $\varphi(t)$ такая, что $\tau = t^3 \varphi'(t)$ имеет обратную функцию $\psi(\tau)$. Тогда

$$r(f, H_n) \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \psi \left(\frac{C_1}{n^{\rho-\varepsilon}} \right), 2C \varphi \left[\psi \left(\frac{C_1}{n^{\rho-\varepsilon}} \right) \right] + \frac{4}{n^{\rho-\varepsilon}} \psi^{-2} \left(\frac{C_1}{n^{\rho-\varepsilon}} \right) \right\},$$

$$\text{где } C_1 = \frac{64MC(\varepsilon)}{C}.$$

Доказательство этой теоремы следует из оценки (3), так как при условии теоремы функция $\varphi(4\delta) + \frac{2MC(\varepsilon)}{\delta^2 n^{\rho-\varepsilon}}$ достигает своего минимума при

$$\delta = \frac{1}{4} \psi \left(\frac{C_1}{n^{\rho-\varepsilon}} \right).$$

В частности, если в теореме 4 предполагать, что $\varphi(t) = t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) то имеем

$$r(f, H_n) \leq C_2 n^{-\frac{\alpha(\rho-\varepsilon)}{\alpha+2}},$$

где C_2 —константа, не зависящая от n .

3. Пусть n -я строчка матрицы (1) составлена из корней полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($-1 < \alpha, \beta \leq 0$). При этом, учитывая известную оценку [6]:

$$\sum_{k \in \Delta(x)} v_{kn}(x) l_{kn}(x) < \frac{C_3}{n \delta^2}, \quad x \in [-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon] \quad (0 < \varepsilon < 1), \quad (6)$$

где C_3 —константа, не зависящая от n , доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ определена на $[-1, 1]$ и принадлежит классу $M[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$). Пусть n -я строчка матрицы (1) составлена из корней полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($-1 < \alpha, \beta \leq 0$). Тогда для всякого числа $\delta > 0$ на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ справедливо неравенство

$$r(f, H_n) \leq \inf_{\delta > 0} \max \left[\delta, 2\mu(4\delta) + \frac{2MC_3}{\delta^2 n} \right], \quad (7)$$

где $M = \sup_{-1 < x < 1} |f(x)|$, C_3 —константа неравенства (6).

Если в (7) подставить $\delta = n^{-\frac{1}{3}}$, то легко получаются следующие неравенства:

$$r(f, H_n) \leq \begin{cases} C_4 \mu \left(n^{-\frac{1}{3}} \right), & \text{если } \mu(\delta) \geq \delta, \\ C_4 n^{-\frac{1}{3}}, & \text{если } \mu(4) \leq \delta, \end{cases}$$

где C_4 —константа, не зависящая от n .

Если $f(x)$ —непрерывная функция, то, используя тот факт, что сходимость непрерывных функций относительно хаусдорфова расстояния влечет за собой равномерную сходимость, если известно, что предел этой последовательности является непрерывной функцией [3]. Из вышеуказанных результатов следует равномерная сходимость интерполяционных процессов Эрмита—Фейера. Эти результаты перенесены также и двумерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов Бл. Год на Соф. Унив. Мат. фак., 58 (1963/64).
2. Сендов Бл. Матем. заметки, 3, № 4, 1968.
3. Сендов Бл. Изв. на мат. инст. при БАН. т. IX, 133—143.
4. Fejer L. Math. Ann., 106, 1, 1932.
5. Grunwald G. Acta Math., 75, 219, 1943.
6. Джафаров А. С., Гасанов Г. М. Материалы научной конференции молодых ученых и аспирантов АН Азерб. ССР (серия физ.-техн. и матем. наук). Баку, 1966.

Институт математики
и механики

Поступило 16. IX 1969

Н. М. Гасанов

Хаусдорф метрикасында Ермит—Фејер интерполјасија просесинин јығылма тәртиби һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ρ -нормал дүјүн нөгтәләри үчүн гурулмуш Ермит—Фејер интерполјасија чоһәдлисинин Хаусдорф метрикасында јығылмасы тәртиби һаггында теоремләр исбат олуңмушдур. Мәсәлән, $f(x) \in M[-1, 1]$ вә (2) ифадәси илә тәјин олуңан Ермит—Фејер интерполјасија чоһәдлиси үчүн $[-1, 1]$ парчасында (3) бәрабәрсизлијинин доғрулуғу исбат едилмишдир.

Мәгаләнин сонунда, дүјүн нөгтәләри оларағ $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($-1 < \alpha, \beta \leq 0$) Јакоби чоһәдлисинин көкләрини көтүрмәклә, $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$) парчасында (3) бәрабәрсизлијинә нисбәтән даһа дәгиг олан (7) бәрабәрсизлији исбат олуңмушдур.

УДК 517.512

Р. А. АББАСОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОРЯДКА НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СТЕПАНОВА С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ

1. Обозначим через B класс S^p ($p \geq 1$) почти-периодических функций Степанова, показатели Фурье которых $\{\Lambda_n\}$ имеют единственную предельную точку $\Lambda^* \neq \infty$. Не нарушая общности, можно принять $\Lambda^* = 0$, $M\{f(x)\} = 0$, ибо в противном случае достаточно рассмотреть функцию

$$f(x)e^{-i\Lambda^*x} - M\{f(x)e^{-i\Lambda^*x}\},$$

поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением класса B почти-периодических функций Степанова, ряды Фурье которых имеют вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x} \quad (1)$$

$$(\Lambda_0 = 0, \quad 0 < \Lambda_{n+1} < \Lambda_n, \quad \Lambda_{-n} = -\Lambda_n \text{ при } n \geq 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n = 0).$$

Будем считать, что S^p -почти-периодическая функция $f_0(x)$ принадлежит классу B_r ($r = 1, 2, \dots$), если найдутся функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_r(x)$, обладающие следующими свойствами:

$$f_0(x) = f(x), \quad f'_{k+1}(x) = f_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r-1), \quad f_k(x) \in B \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r).$$

Очевидны включения $B \supset B_1 \supset B_2 \supset \dots$.

S^p -почти-периодическая функция $f(x)$, принадлежащая классу B , принадлежит классу B_1 в том и только в том случае, если неопределенный интеграл ее ограничен, тогда

$$f_1(x) = \varphi(x) - M\{\varphi(x)\}, \quad \text{где } \varphi(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

S^p -почти-периодическая функция $f(x)$, принадлежащая классу B_k ($k \geq 1$), принадлежит классу B_{k+1} в том и только в том случае, если неопределенный интеграл функции

$$f_k(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n}{(i\Lambda_n)^k} e^{i\Lambda_n x}$$

ограничен, тогда

$$f_{k+1}(x) = \varphi_k(x) - M\{\varphi_k(x)\}, \quad \text{где } \varphi_k(x) = \int_0^x f_k(t) dt.$$

Введем обозначения:

$$\|f(x)\|_{SP} = \sup_t \left(\int_t^{t+1} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$e_{1/\varepsilon}(f)_{SP} = \inf_{C_k} \left\| f(x) - \sum_{|\Lambda_n| > \varepsilon} C_n e^{i\Lambda_n x} \right\|_{SP},$$

$$E_{1/\varepsilon}(f)_{SP} = \inf_{F(x) \in Q_\varepsilon} \|f(x) - F(x)\|_{SP},$$

где Q_ε — класс S^p почти-периодических функций, показатели Фурье которых $\{\Lambda_n\}$ удовлетворяют условию $|\Lambda_n| > \varepsilon > 0$. Положим

$$\Omega_f(N)_{SP} = \begin{cases} \sup_{|t| > N} \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(x+u) du \right|_{SP}, & N > 0, \\ \|f(x)\|_{SP}, & N = 0. \end{cases}$$

Для любой S^p почти-периодической функции $f(x)$ $\Omega_f(N)_{SP}$ является непрерывной, ограниченной, невозрастающей функцией N ; для $f(x) \in B$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Omega_f(N)_{SP} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем нам будут необходимы некоторые свойства монотонной функции $\varphi(\delta)$, мажорирующей наилучшие приближения. Основные свойства этой функции были изучены С. Н. Бернштейном, Н. К. Бари, С. М. Лозинским, С. Б. Стечкиным и др. Говорят, что $\varphi(\delta)$ принадлежит классу Φ и пишут $\varphi(\delta) \in \Phi$, если удовлетворены следующие условия: $\varphi(\delta)$ непрерывна на отрезке $[0, \infty)$; $\varphi(\delta) \geq 0$; $\varphi(\delta) \neq 0$ для любого δ ($0 < \delta < \infty$); $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +\infty$.

Функцию $\varphi(\delta)$ называют почти-возрастающей (соответственно убывающей) на $[0, \infty)$, если существует такое постоянное число A , что $\varphi(\delta_1) \leq A\varphi(\delta_2)$ для $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 < \infty$ в случае почти-возрастания и соответственно $\varphi(\delta_1) \geq A\varphi(\delta_2)$ для $0 \leq \delta_1 \leq \delta_2 < \infty$ в случае почти-убывания.

Кроме этого, на функцию $\varphi(\delta) \in \Phi$ можно налагать различные условия, равносильность которых подробно рассмотрена в работе Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [1]. Мы будем пользоваться условиями S и S_k С. Б. Стечкина [4], которым удовлетворяет функция $\varphi(\delta) \in \Phi$.

S . Существует константа α ($0 < \alpha < 1$) такая, что функция $\delta^{-\alpha}(\varphi)\delta$ почти возрастает.

S_1 . Существует константа α ($0 < \alpha < 1$) такая, что функция $\varphi(\delta)\delta^{\alpha-1}$ почти убывает.

В некоторых случаях в условиях S и S_1 константа α будет играть существенную роль, т. е. полученные при этих условиях результаты будут различны с изменением α , тогда эти условия будем обозначать соответственно через $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$ (впервые они использовались А. С. Джафаровым с целью изучения теорем вложения для почти-периодических функций).

Введем следующее определение, которое необходимо для дальнейших исследований. Последовательность $\{\Lambda_n\}$ обладает плотной подпоследовательностью $L(b; m)$ ($b > 1$, m — натуральное число), если выполняются следующие условия: $\Lambda_1 \geq b^{-1}$; для каждого натурального $v \geq 1$ существует элемент $l_v \in \{\Lambda_n\}$ такой, что $b^{-v} \leq l_v < b^{-(v-1)m}$.

Пусть на вещественной оси определена вещественная непрерывная функция $g(t)$, обладающая следующими свойствами:

$$g(t) = 1 \text{ при } |t| \leq 1; \quad (3)$$

$$g(t) = 0 \text{ при } |t| \geq \theta > 1; \quad (4)$$

$$G(u) \in L(-\infty, \infty), \quad (5)$$

где

$$G(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-int} dt.$$

Введем в рассмотрение функцию $g_\varepsilon(t) = g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ и ее преобразование Фурье

$$G_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) e^{-int} dt = \varepsilon G(\varepsilon u).$$

В данной статье даются оценки наилучшего приближения $E_{1/3}(f)_{SP}$ функции $f(x)$, принадлежащей классу B_κ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$), посредством функций класса Q_ε . В отличие от 2π -периодического случая и случая почти-периодической функции, показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности, порядок убывания наилучшего приближения функции $f(x) \in B$ определяется не дифференциальными, а интегральными свойствами приближаемой функции. Кроме этого, устанавливается обратная связь, когда наилучшие приближения этих функций имеют заданную мажоранту, показывая, что прямые теоремы не всегда полностью обращаются, так как это зависит от плотности распределения их показателей Фурье. Доказанные теоремы усиливают результаты Е. А. Бердихиной [3].

II. Лемма 1. Если S^p -почти-периодическая функция $f(x) \in B$, то

$$\rho_\varepsilon(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+u) G_\varepsilon(u) du \quad (6)$$

является равномерной почти-периодической функцией и

$$\rho_\varepsilon(f; x) \sim \sum_{|\Lambda_n| < \varepsilon} A_n e^{i\Lambda_n x} + \sum_{|\Lambda_n| > \varepsilon} A_n g\left(\frac{\Lambda_n}{\varepsilon}\right) e^{i\Lambda_n x}.$$

Теперь положим

$$\sigma_\varepsilon(f; x) = \sum_{|\Lambda_n| > \varepsilon} \left[1 - g\left(\frac{\Lambda_n}{\varepsilon}\right)\right] A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

Тогда на основании (1) и (6)

$$f(x) - \sigma_\varepsilon(f; x) = \rho_\varepsilon(f; x). \quad (7)$$

Теорема 1. Для любой функции $f(x) \in B$ имеет место неравенство

$$\|f(x) - \sigma_\varepsilon(f; x)\|_{SP} \leq C_1 e_{1/\theta_\varepsilon}(f)_{SP}, \quad (8)$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от ε и f .

Лемма 2. Пусть

$$F(u, x) = \int_0^u f(x+t) dt.$$

Тогда при любом вещественном c

$$\|F(cu, x)\|_{SP} \leq (2 + |c|) |u| \mathcal{Q}_f(|n|). \quad (9)$$

На основании лемм 1 и 2, пользуясь методикой работы [2], можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. Для любой функции $f(x) \in B$ имеет место неравенство

$$e_{1/\varepsilon}(f)_{SP} \leq C_2 \mathcal{Q}_f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{SP}, \quad (10)$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от ε и f .

Теорема 3. Для любой функции $f(x) \in B_r$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) справедливо неравенство

$$e_{1/\varepsilon}(f)_{SP} \leq C_3 \varepsilon^r \mathcal{Q}_f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)_{SP}, \quad (11)$$

где C_3 — постоянная, не зависящая от ε и f .

В силу очевидного неравенства $E_{1/\varepsilon}(f)_{SP} \leq e_{1/\varepsilon}(f)_{SP}$ в оценках (10) и (11) $e_{1/\varepsilon}(f)_{SP}$ можно заменить на $E_{1/\varepsilon}(f)_{SP}$.

III. В дальнейшем нам потребуется оценка неопределенного интеграла S^p — почти-периодической функции $f(x) \in Q_\varepsilon$. Эту оценку можно получить, пользуясь основными моментами доказательства теоремы Фавара ([3], стр. 88—92) или леммы 6 работы [2]. Пусть

$$F(x) \sim \sum_{\kappa} a_{\kappa} e^{i\Lambda_{\kappa} x} \quad (|\Lambda_{\kappa}| > \varepsilon > 0),$$

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+u) G(u) du,$$

$$G(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Lambda) e^{-i\Lambda u} d\Lambda,$$

$$g(\Lambda) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{i\varepsilon^2}, & 0 \leq \Lambda \leq \varepsilon, \\ \frac{1}{i\Lambda}, & \Lambda > \varepsilon, \end{cases}$$

$$I(x) \sim \sum_{\kappa} \frac{1}{i\Lambda_{\kappa}} a_{\kappa} e^{i\Lambda_{\kappa} x},$$

$$I(x) - I(0) = \int_0^x F(t) dt. \quad (12)$$

Имеет место следующая

Лемма 3. Пусть $f(x) \in Q_\varepsilon$. Тогда при $\varepsilon \leq 1$

$$\|I(x)\|_{SP} \leq \frac{A \|F(x)\|_{SP}}{\varepsilon}, \quad (13)$$

$$\left\| \int_0^x F(t) dt \right\|_{SP} \leq \frac{2A \|F(x)\|_{SP}}{\varepsilon}, \quad (14)$$

где A — абсолютная постоянная.

Теорема 4. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяет условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_j\}$ обладает плотной подпоследовательностью $L(b; t)$ и

$$E_{1/\Lambda_j}(f)_{SP} \leq \varphi(\Lambda_j) \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

то для любого $N > 0$

$$\Omega_f(N)_{SP} \leq A_1(\alpha, m, b) \varphi\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \psi_1(N), \quad (16)$$

где $A_1(\alpha, m, b)$ зависит только от α, m, b , а $\psi_1(N)$ — такая неубывающая функция, что $\varphi\left(\frac{1}{N}\right) \psi_1(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Доказательство. Из последовательности $\{\Lambda_j\}$ выделим $L(b, m)$ — плотную подпоследовательность $\{l_v\}$ такую, что

$$l_1 = \Lambda_1 > l_2 > l_3 > \dots, \\ b^{-\gamma^m} \leq l_v < b^{-(b-1)^m}.$$

Далее пусть $t_{l_n}(x) = \sum_{|\Lambda_j| > l_n} C_j e^{i\Lambda_j x}$ — почти-периодический много-

член такой, что

$$\|f(x) - t_{l_n}(x)\|_{SP} = E_{1/l_n}(f)_{SP}.$$

Положим $u_1(x) = t_{l_1}(x)$, $u_v(x) = t_{l_{v+1}}(x) - t_{l_v}(x)$ ($v = 2, 3, \dots$).

Тогда

$$f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} u_v(x).$$

Фиксируем некоторое $T(|T|)$ и выберем натуральное q такое, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{l_q} \leq |T| < \frac{1}{l_{q+1}}. \quad (17)$$

В силу неравенства Минковского

$$\left\| \int_0^T f(x+t) dt \right\|_{SP} \leq \left\| \sum_{v=1}^q \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} + \left\| \int_0^T \sum_{v=q+1}^{\infty} u_v(x+t) dt \right\|_{SP}.$$

Оценим $\|u_v(x)\|_{SP}$ и $\left\| \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP}$;

$$\|u_v(x)\|_{SP} \leq \|f(x) - t_{l_v}(x)\|_{SP} + \|f(x) - t_{l_{v+1}}(x)\|_{SP} \leq \\ \leq E_{1/l_v}(f)_{SP} + E_{1/l_{v+1}}(f)_{SP} \leq 2E_{1/l_v}(f)_{SP} \leq 2\varphi(l_v). \quad (18)$$

В силу леммы 3 (см. (14)) имеем

$$\left\| \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq \frac{2A\|u_v(x)\|_{SP}}{l_{v+1}} \leq \frac{4A\varphi(l_v)}{l_{v+1}}. \quad (19)$$

Учитывая (19), (17) и условие $(S_1)_\alpha$, находим

$$\left\| \sum_{v=1}^q \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq 4AT^{1-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{T}\right) \sum_{v=1}^q b^{(v+1)^m + (\alpha-1)(v-1)^m}.$$

Рассмотрим случай четного и нечетного m .

Если m — нечетное число, то под знаком суммы оставим член $b^{\alpha m^v}$, а при m четном — $b^{\frac{1}{2}\alpha m(m-1)v^2}$. Следовательно, при m нечетном

$$\left\| \sum_{v=1}^q \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq$$

$$\leq A_2 T^{1-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{T}\right) b^{\sum_{j=1}^m [1+(-1)^{j+1}] \binom{m}{j} q^{m-j} + \alpha \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} q^{m-j}}$$

а при m четном

$$\left\| \sum_{v=0}^q \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq \\ \leq A_3 T^{1-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{T}\right) \left\{ b^{\sum_{j=1}^m [1+(-1)^{j+1}] \binom{m}{j} q^{m-j} + \alpha \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} q^{m-j}} - \right. \\ \left. - b^{\frac{1}{2}\alpha m(m-1)q} \right\} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}\alpha m(m-1)q} - 1}.$$

Объединяя последние два неравенства и подставляя значение $q < 1 + \sqrt[m]{\log_b |T|}$, получим

$$\left\| \sum_{v=1}^q \int_0^T u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq \\ \leq A_4 T^{1-\alpha} \varphi\left(\frac{1}{T}\right) \left\{ b^{\sum_{j=1}^m [1+(-1)^{j+1}] \binom{m}{j} (1 + \sqrt[m]{\log_b |T|})^{m-j}} \times \right. \\ \times b^{\alpha \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (1 + \sqrt[m]{\log_b |T|})^{m-j}} - b^{\frac{1}{2}\alpha m(m-1)(1 + \sqrt[m]{\log_b |T|})} \left. \right\} \times \\ \times \frac{1}{b^{\frac{1}{2}\alpha m(m-1)(1 + \sqrt[m]{\log_b |T|})} - 1}. \quad (20)$$

Вследствие обобщенного неравенства Минковского, топологической эквивалентности расстояний в смысле Степанова ([3], стр. 198), неравенств (17), (18) и условия $(S)_\alpha$ имеем

$$\left\| \int_0^T \sum_{v=q+1}^{\infty} u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq A_5 T \sum_{v=q+1}^{\infty} l_v^\alpha l_v^{-\alpha} \varphi(l_v) < \\ < A_6 T^{1+\alpha} \varphi\left(\frac{1}{T}\right) \sum_{v=q+1}^{\infty} l_v^\alpha \leq A_6 T^{1+\alpha} \times \\ \times \varphi\left(\frac{1}{T}\right) \sum_{v=q+1}^{\infty} b^{-\alpha \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} v^{m-1}}$$

Теперь вновь рассмотрим случай четного и нечетного m . Если m — нечетное число, то под знаком суммы оставим член $b^{-\alpha \binom{m}{m-1} v}$, а при m четном — $b^{-\frac{1}{2}\alpha m(m-1)v^2}$, вычислив эти суммы в отдельности, получим

$$\sum_{v=q+1}^{\infty} b^{-\alpha \binom{m}{m-1} v} = \frac{b^{-\alpha \binom{m}{m-1} (q+1)}}{1 - b^{-\alpha m}},$$

$$\sum_{v=q+1}^{\infty} b^{-\frac{1}{2} \alpha m (m-1) v} \leq \frac{b^{-\frac{1}{2} \alpha m (m-1) (q+1)}}{1 - b^{-\frac{1}{2} \alpha m (m-1) (q+1)}}.$$

Следовательно,

$$\left\| \int_0^T \sum_{v=q+1}^{\infty} u_v(x+t) dt \right\|_{SP} \leq A_7 \varphi \left(\frac{1}{T} \right) T^{1+\sigma} \times \\ \times \frac{b^{-\alpha \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} (2 + \sqrt{\log_b |T|})^{m-j}}}{1 - b^{-\frac{1}{2} \alpha m (m-1) (2 + \sqrt{\log_b |T|})}}. \quad (21)$$

Объединяя (20) и (21), окончательно получим

$$\mathcal{Q}_f(N) \leq A_1(\alpha, m, b) \cdot \left(\frac{1}{N} \right) \psi_1(N),$$

где $A_1(\alpha, m, b)$ — постоянная, зависящая только от α, m, b , а функция $\psi_1(N) = \psi_1(\alpha, m, b, N)$ имеет конкретный вид.

Отметим следующее

Следствие. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяет условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_j\}$ обладает плотной подпоследовательностью $L(b; 1)$ и

$$E_{1/\Lambda_j}(f)_{SP} \leq \varphi(\Lambda_j),$$

то для любого $N > 0$

$$\mathcal{Q}_f(N)_{SP} \leq C_1(\alpha, b) \varphi \left(\frac{1}{N} \right),$$

где $C_1(\alpha, b)$ зависит только от α и b .

Теорема 5. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяет условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_q\}$ обладает плотной подпоследовательностью $L(b; m)$ и

$$E_{1/\Lambda_q}(f)_{SP} \leq \Lambda_q^r \varphi(\Lambda_q) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

то для любой S^p — почти-периодической функции $f(x) \in B_r$ справедливо неравенство

$$E_{1/\Lambda_q}(f_r)_{SP} \leq A_2(\alpha, m, b, \varphi(\Lambda_q)) \psi_2 \left(\frac{1}{\Lambda_q} \right),$$

где $A_2(\alpha, m, b)$ зависит только от α, m, b , а функции $\psi_2(N)$ подобна $\psi_1(N)$.

Эта теорема доказывается аналогично теореме 4 из работы [2].

Следствие. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяет условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_q\}$ обладает $L(b; 1)$ — плотной подпоследовательностью и

$$E_{1/\Lambda_q}(f)_{SP} \leq \Lambda_q^r \varphi(V_q) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

то для любой S^p — почти-периодической функции $f(x) \in B_r$ справедливо неравенство

$$E_{1/\Lambda_q}(f_r)_{SP} \leq C_2(\alpha, b) \varphi(V_q),$$

где $C_2(\alpha, b)$ зависит от α и b . Учитывая следствие теоремы 5 и применяя следствие теоремы 4 к функции $f_r(x)$, получим следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяют условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_j\}$ обладает $L(b; 1)$ — плотной подпоследовательностью и

$$E_{1/\Lambda_j}(f)_{SP} \leq \Lambda_j^r \varphi(\Lambda_j) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

то для любой S^p — почти-периодической функции $f(x) \in B_r$ и для любого $N > 0$ справедливо неравенство

$$\mathcal{Q}_{f_r}(N)_{SP} \leq C_3(\alpha, b) \varphi \left(\frac{1}{N} \right),$$

где $C_3(\alpha, b)$ зависит только от α и b .

Вообще говоря, имеет место

Теорема 7. Пусть $\varphi(\delta) \in \Phi$ удовлетворяет условиям $(S)_\alpha$ и $(S_1)_\alpha$. Если последовательность $\{\Lambda_j\}$ обладает $L(b, m)$ — плотной подпоследовательностью и

$$E_{1/\Lambda_j}(f)_{SP} \leq \Lambda_j^r \varphi(\Lambda_j) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

то для любой S^p — почти-периодической функции $f(x) \in B_r$ и любого $N > 0$ справедлива оценка

$$\mathcal{Q}_f(N)_{SP} \leq A_3(\alpha, m, b) \varphi \left(\frac{1}{N} \right) \psi_3(N),$$

где $A_3(\alpha, m, b)$ зависит только от α, m, b , а $\psi_3(N)$ — функция, подобная $\psi_1(N)$ и $\psi_2(N)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. и Стечкин С. Б. Тр. Московского матем. об-ва, т. 5, 1956.
2. Левитан Б. М. Почти-периодические функции. ГИТЛ, М., 1953.
3. Бредихина Е. А. Матем. сб., т. 56(98), 1, 1962.
4. Стечкин С. Б. "Изв. АН СССР, серия матем.", т. 15, 1951.

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. IX 1969

Р. Э. Аббасов

Мəhdud спектрли санки-дөvrү Степанов функциjаларынын
эн jахшы jахынлашма тəртибинин тəдгиги haггында

ХҮЛАСƏ

Тəдгигатда сонлу мəсафəдə Фурjе кəстəричилəринин jеканə лимит нəгтəси олан санки-дөvrү Степанов функциjаларынын эн jахшы jахынлашмасынын азалма тəртиби өjрəнилмишдир. Эн jахшы jахынлашманын азалма тəртиби jахынлашдырылан функциjанын интеграл хассəлəриндэн асылы олараг мjүəjjэн едилмишдир. Бундан башга, верилмиш функциjаларын эн jахшы jахынлашмасы мjүəjjэн можаранта малик олдугда тəрс мjүнасибəт гурулмуш вə кəстəрилмишдир ки, дjүз теоремлəрин тəрси нəмишə тамамилə мjүмкүн деjилдир. Бу, функциjаларын Фурjе кəстəричилəринин jерлəшмə сыхлыгындан асылыдыр.

С. Я. ЯКУБОВ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, I

Статья посвящена исследованию разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения

$$u''(t) + A(t, u(t))u(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H . В линейном случае $A(t, u) \equiv A(t)$ она рассматривалась в работах [1—4] и полностью изучена С. Г. Крейном [5]. Впервые задача (1) была рассмотрена в работе [6], где без доказательства сформулирована одна теорема о разрешимости. В настоящей работе задача (1) методом, предложенным в [6], исследуется при менее ограниченных условиях, более глубоко рассматривается ее специальный вид:

$$u''(t) + g(t, u(t))Au(t) = f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \quad (2)$$

где $g(t, u)$ — функционал в H . Для этого случая устанавливается теорема разрешимости.

При исследовании (1) основная трудность заключается в том, что задача первого порядка:

$$u'(t) = A(t, u(t))u(t) + f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (3)$$

тесно связанная с задачей (1), в случае, когда при замороженных коэффициентах задача (3) становится равномерно корректной [5], совершенно не изучена. Однако нам удается обойти (3) и исследовать (1) с помощью вспомогательной задачи:

$$u'(t) = A(t, [Cu](t))u(t) + B(t, [Cu](t))u(t) + f(t), \quad u(t_0) = u_0, \quad (4)$$

где $[Cu](t) = v_0 + \int_{t_0}^t Pu(\tau) d\tau$, которая легче поддается исследованию.

Далее, применяя полученную теорему, устанавливается разрешимость смешанных задач для одного специального класса нелинейных гиперболических уравнений в частных производных. Разрешимость задачи (4) можно получить при различных условиях. Однако в данном случае главной целью является установление таких теорем, которые в дальнейшем были бы пригодны при исследовании (1) и (2). Именно этим вызвано наложение на уравнение (4) не слишком естественных на первый взгляд условий.

Решением (4) на $[t_0, T]$ будем называть непрерывно дифференцируемую на $[t_0, T]$ функцию $u(t)$, если функции $A(t, [Cu](t))u(t)$ и $B(t, [Cu](t))u(t)$ непрерывны на $[t_0, T]$ и уравнение (4) удовлетворяется на $[t_0, T]$.

Положим $A_0 = A(t_0, v_0)$ и сформулируем теорему разрешимости для вспомогательной задачи (4).

Теорема 1. Пусть:

1°. При любом $t \in [t_0, T]$, $u \in D(A_0)$ оператор $A(t, u)$ является линейным замкнутым в E и имеет не зависящую от (t, u) всюду плотную область определения $D(A(t, u)) = D(A) = D(A_0)$; при всех $t \in [t_0, T]$ и $u \in D(A)$ и $\lambda > -1$ имеет место оценка

$$\|R(\lambda, A(t, u))\| \leq (\lambda + 1)^{-1};$$

оператор $A^2(t, u)$ имеет не зависящую от (t, u) область определения $D(A^2(t, u)) = D(A^2)$;

2°. Операторы $A(t, u)A_0^{-1}$ и $A^2(t, u)A_0^{-2}$ действуют из $[t_0, T] \times E(A)^*$ в $B(E)$ и сильно непрерывно дифференцируемы;

3°. Для любой непрерывно дифференцируемой в $E(A)$ на $[t_0, a] \subset [t_0, T]$ функции $u(t)$ операторы $B(t, u(t))$, $A_0 B(t, u(t))A_0^{-1}$, $A_0^2 B \times (t, u(t))A_0^{-2}$ сильно непрерывны на $[t_0, a]$ и $\|B(t, u(t))\| \leq C(R)$, $\|A_0 B(t, u(t))A_0^{-1}\| \leq C(R)$, $\|A_0^2 B(t, u(t))A_0^{-2}\| \leq C(R)$, коль скоро $\|A_0 u(t)\| + \|A_0 u'(t)\| \leq R$; для любой пары таких функций $u_1(t)$, $u_2(t)$ имеет место неравенство

$$\|A_0 [B(t_1, u_1(t)) - B(t, u_2(t))]A_0^{-1}\| \leq \\ \leq C(R) [\|A_0(u_1(t) - u_2(t))\| + \|A_0(u_1'(t) - u_2'(t))\|];$$

4°. Имеет место одно из двух условий:

а) функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема в $E(A)$,

б) функция $f(t)$ непрерывна в $E(A^2)$.

5°. $u_0 \in D(A^2)$, $v_0 \in D(A)$; P и $A_0 P A_0^{-1}$ — ограниченные операторы.

Тогда задача (4) имеет единственное решение на некотором отрезке $[t_0, t_0 + h] \subset [t_0, T]$.

Предварительно приведем несколько лемм.

Лемма 1. Если операторы $K(t, s)$ и $H(t, s)$ сильно непрерывны при $a \leq s \leq t \leq b$, то интегральное уравнение

$$U(t, \tau) = H(t, \tau) + \int_{\tau}^t K(t, s) U(s, \tau) ds, \quad (5)$$

имеет единственное решение $U(t, \tau)$, которое сильно непрерывно при $a \leq \tau \leq t \leq b$.

Доказательство леммы отличается от доказательства соответствующей леммы для обычных функций только тем, что вместо модуля стоят нормы.

Лемма 2. Если операторы $A_0 K(t, s)A_0^{-1}$ и $A_0 H(t, s)A_0^{-1}$ сильно непрерывны при $a \leq s \leq t \leq b$, то решение $U(t, \tau)$ уравнения (5) обладает тем свойством, что оператор $A_0 U(t, \tau)A_0^{-1}$ также сильно непрерывен и удовлетворяет уравнению

$$V(t, \tau) = A_0 H(t, \tau)A_0^{-1} + \int_{\tau}^t A_0 K(t, s)A_0^{-1} V(s, \tau) ds. \quad (6)$$

Доказательство. В силу леммы 1 интегральное уравнение (6) имеет единственное сильно непрерывное решение $V(t, \tau)$. Подействовав оператором A_0^{-1} слева и оператором A_0 справа, установим, что $U(t, \tau)u = A_0^{-1}V(t, \tau)A_0 u$ при любом $u \in D(A)$ (в силу единственности решения (5)).

* Через $E(A^k)$ обозначим банахово пространство, состоящее из элементов $D(A^k)$ с нормой $\|u\|_{A^k} = \|A_0^k u\|$.

Лемма 3. Пусть $A(t)$ и $A^2(t)$ — операторы с не зависящими от $t \in [0, T]$ областями определения $D(A(t)) = D(A)$ и $D(A^2(t)) = D(A^2)$. Пусть операторы $A(t) A^{-1}(0)$ и $A^2(t) A^{-2}(0)$ сильно непрерывно дифференцируемы. Тогда оператор $A(t) A'(t) A^{-2}(t)$ сильно непрерывен и имеет место равенство

$$A(t) A'(t) A^{-2}(t) = [A^2(t)]' A^{-2}(t) - A'(t) A^{-1}(t).$$

Доказательство этой леммы см. в [5].

Через $C^n([s, l], E(A))$ обозначим пространство всех непрерывно дифференцируемых в $E(A)$ на $[s, l]$ функций $u(t)$, с обычной нормой $\|u(\cdot)\|_n = \max_{s \leq t \leq l} \sum_{k=0}^n \|A_0 u^{(k)}(t)\|$. Через $S_A^n(R, [s, l])$ обозначим шар радиуса R с центром в нуле пространства $C^n([s, l], E(A))$. Очевидно, оператор $[Cu](t) = v_0 + \int_{t_0}^t Pu(\tau) d\tau$ в силу условия 5° отображает

$S_A^0(R, [t_0, l])$ в $S_A^1(R, [t_0, l])$. Тогда в силу условий 1° и 2°, при любом $u(\cdot) \in S_A^1(R, [t_0, t_0 + h])$ оператор $A_u(t) = A(t, [Cu](t))$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$ по $t \in [t_0, T]$, а в силу условий 2° и 3° операторы $B_u(t) = B(t, [Cu](t))$ и

$$A_u(t) B_u(t) A_u^{-1}(t) = A_u(t) A_0^{-1} \cdot A_0 B_u(t) A_0^{-1} \cdot A_0 A_u^{-1}(t)$$

сильно непрерывны. Значит, в силу результатов Т. Като [7] и С. Г. Крейна [5] линейная задача

$$v_u(t) = A_u(t) v_u(t) + B_u(t) v_u(t) + f(t), \quad v_u(t_0) = u_0. \quad (7)$$

имеет единственное решение на $[t_0, t_0 + h]$.

Лемма 4. Пусть выполнены условия 1°–5°. Тогда для всех $u(\cdot) \in S_A^1(R, [t_0, t_0 + h])$ имеют место неравенства

$$\|A_0 U_u(t, \tau) A_0^{-1}\| \leq C(R), \quad \|A_0^2 U_u(t, \tau) A_0^{-2}\| \leq C(R),$$

$$\|A_0^2 v_u(t)\| \leq C(R)$$

в области $t_0 \leq \tau \leq t \leq t_0 + h \leq T$, где $U_u(t, \tau)$ — эволюционный оператор, соответствующий оператору $A_u(t)$.

Доказательство. В силу работы Т. Като [7], при всех $u(\cdot) \in S_A^1(R, [t_0, t_0 + h])$, имеет место оценка $\|U_u(t, \tau)\| \leq e^{-(t-\tau)} \leq 1$ и сильно непрерывный оператор $W_u(t, \tau) = A_u(t) U_u(t, \tau) A_u^{-1}(\tau)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$W_u(t, \tau) = U_u(t, \tau) + \int_{\tau}^t U_u(t, s) [A_u(s)]' A_u^{-1}(s) W_u(s, \tau) ds. \quad (8)$$

Так как операторы $A_0 A^{-1}(t, u)$ и $A_0^2 A^{-2}(t, u)$ являются обратными соответственно к $A(t, u) A_0^{-1}$ и $A^2(t, u) A_0^{-2}$, то из условия 2° вытекает, что отображения $A(t, u) A_0^{-1}$, $A^2(t, u) A_0^{-2}$, $A_0 A^{-1}(t, u)$ и $A_0^2 A^{-2}(t, u) \times \times (t, u)$, действующие из $[t_0, T] \times E(A)$ в $B(E)$, непрерывны и ограничены. Значит,

$$\|[A_u(s)]' A_u^{-1}(s)\| \leq \|[A_u(s)]' A_0^{-1}\| \|A_0 A_u^{-1}(s)\| \leq C(R)$$

и имеет место интегральное неравенство

$$\|W_u(t, \tau)\| \leq 1 + C(R) \int_{\tau}^t \|W_u(s, \tau)\| ds.$$

Отсюда следует неравенство $\|W_u(t, \tau)\| \leq C(R)$, а затем и

$$\|A_0 U_u(t, \tau) A_0^{-1}\| \leq \|A_0 A_u^{-1}(t)\| \|W_u(t, \tau)\| \|A_u(\tau) A_0^{-1}\| \leq C(R). \quad (9)$$

В силу леммы 3 и условия 2° оператор $A_0 A_u(t) A_0^{-2}$ сильно непрерывно дифференцируем и

$$= A_0 [A_u(t)]' A_0^{-2} \leq \|A_0 A_u^{-1}(t)\| \|A_u(t) [A_u(t)]' A_u^{-2}(t)\| \|A_u^2(t) A_0^{-2}\| \leq \\ \leq C(R) (\|[A_u^2(t)]' A_u^{-2}(t)\| + \|[A_u(t)]' A_u^{-1}(t)\|) \leq C(R).$$

Значит, оператор

$$A_0 U_u(t, s) A_u'(s) A_u^{-1}(s) A_0^{-1} = A_0 U_u(t, s) A_0^{-1} \cdot A_0 A_u'(s) A_0^{-2} \cdot A_0^2 A_u^{-2}(s) \cdot A_u(s) A_0^{-1}$$

сильно непрерывен и имеет место неравенство

$$\|A_0 U_u(t, s) A_u'(s) A_u^{-1}(s) A_0^{-1}\| \leq C(R). \quad (10)$$

Итак, к интегральному уравнению (8) применима лемма 2, откуда следует, что оператор $A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1}$ сильно непрерывен и

$$A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1} = A_0 U_u(t, \tau) A_0^{-1} + \\ + \int_{\tau}^t A_0 U_u(t, s) A_u'(s) A_u^{-1}(s) A_0^{-1} \cdot A_0 W_u(s, \tau) A_0^{-1} ds.$$

Из (9) и (10), в свою очередь, следует оценка

$\|A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1}\| \leq C(R)$. Таким образом имеет место и вторая требуемая оценка:

$$\|A_0^2 U_u(t, \tau) A_0^{-2}\| \leq \\ \leq \|A_0^2 A_u^{-2}(t)\| \|A_u(t) A_0^{-1}\| \|A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1}\| \|A_0 A_u^{-1}(\tau)\| \|A_u^2(\tau) A_0^{-2}\| \leq \\ \leq C(R).$$

С другой стороны, известно [5], что решение (7) удовлетворяет интегральному уравнению

$$v_u(t) = U_u(t, t_0) u_0 + \int_{t_0}^t U_u(t, \tau) [B_u(\tau) v_u(\tau) + f(\tau)] d\tau.$$

Поддействовав оператором A_0^2 , получим

$$A_0^2 v_u(t) = A_0^2 U_u(t, t_0) A_0^{-2} \cdot A_0^2 u_0 + \int_{t_0}^t A_0^2 U_u(t, \tau) A_0^{-2} \cdot A_0^2 B_u(\tau) A_0^{-2} \times \\ \times A_0^2 v_u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A_0^2 U_u(t, \tau) A_0^{-2} \cdot A_0^2 f(\tau) d\tau \quad (11)$$

Отсюда, учитывая полученные оценки и условия 3° и 4°, получим интегральное неравенство относительно $\|A_0^2 v_u(t)\|$.

Итак, имеет место и оценка $\|A_0^2 v_u(t)\| \leq C(R)$.

З а м е ч а н и е. Как видно из (11), оценка $\|A_0^2 v_u(t)\| \leq C(R)$ зависит от $\|A_0^2 u_0\|$.

* Интегральное неравенство относительно $\|A_0^2 v_u(t)\|$ получено при наличии условия 4° (б). Если же имеет место 4° (а), то следует использовать равенство

$$A_0^2 \int_{t_0}^t U_u(t, \tau) f(\tau) d\tau = A_0^2 A_u^{-1}(t) [W_u(t, t_0) f(t_0) - f(t) - \\ - \int_{t_0}^t W_u(t, \tau) A_u'(\tau) A_u^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t W_u(t, \tau) f'(\tau) d\tau] = \\ = A_0^2 A_u^{-2}(t) A_u(t) A_0^{-1} [A_0 W_u(t, t_0) A_0^{-1} \cdot A_0 f(t_0) - A_0 f(t) - \\ - \int_{t_0}^t A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1} \cdot A_0 A_u'(\tau) A_u^{-1}(\tau) \cdot A_0^{-1} A_0 f(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A_0 W_u(t, \tau) A_0^{-1} \cdot A_0 f'(\tau) d\tau],$$

которое получается из [7, 5].

Доказательство теоремы. Определим в пространстве $C^0([t_0, t_0 + h], E(A))$ оператор K по формуле $v_u(t) = [Ku](t)$, где $v_u(t)$ — решение задачи (7). Покажем, что при некотором $h > 0$ оператор K удовлетворяет принципу сжатых отображений. Как выше отмечено, имеют место равенства

$$v_u(t) = U_u(t, t_0) u_0 + \int_{t_0}^t U_u(t, \tau) [B_u(\tau) v_u(\tau) + f(\tau)] d\tau$$

и

$$\begin{aligned} A_0 v_u(t) &= A_0 A_u^{-1}(t) W_u(t, t_0) A_0 u_0 + \\ &+ \int_{t_0}^t A_0 U_u(t, \tau) A_0^{-1} \cdot A_0 B_u(\tau) A_0^{-1} \cdot A_0 v_u(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t A_0 U_u(t, \tau) A_0^{-1} \cdot A_0 f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как отображение $(t, u) \rightarrow A_0 A^{-1}(t, u)$ из $[t_0, T] \times E(A)$ в $B(E)$ непрерывно, то отображение $t \rightarrow A_0 A_u^{-1}(t) = A_0 A^{-1}(t, [Cu](t))$ из $[t_0, T]$ в $B(E)$ непрерывно равномерно относительно $u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$. Значит, $\lim_{t \rightarrow t_0} \|A_0 A_u^{-1}(t)\| = 1$, причем стремление равномерно относительно $u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$.

Покажем, что оператор $W_u(t, t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ сильно сходится к единичному оператору равномерно относительно $u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$. Так как $U_u(t, \tau)$ — эволюционный оператор, соответствующий оператору $A_u(t)$, то при любом $v \in D(A)$

$$[U_u(t, t_0) - I]v = \int_{t_0}^t A_u(\tau) U_u(\tau, t_0) v d\tau.$$

Значит,

$$\|[U_u(t, t_0) - I]v\| \leq \int_{t_0}^t \|W_u(\tau, t_0)\| \|A_0 v\| d\tau \leq (t - t_0) C(R) \|A_0 v\|,$$

т. е. $\lim_{t \rightarrow t_0} U_u(t, t_0)v = v$, при любом $v \in D(A)$, равномерно относительно $u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$. Но так как $D(A)$ всюду плотна в E и $\|U_u(t, t_0)\| \leq 1$, то, повторяя рассуждения теоремы Банаха — Штейнгауза, устанавливаем требуемый факт относительно $U_u(t, t_0)$.

С другой стороны, из (8) следует, что $\lim_{t \rightarrow t_0} \|W_u(t, t_0) - U_u(t, t_0)\| = 0$ равномерно относительно $u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$. Значит, $W_u(t, t_0)$ при $t \rightarrow t_0$ сильно сходится к единичному оператору равномерно относительно

$$u(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h]).$$

Выберем $R > \|A_0 u_0\| = R_0$. Тогда на некотором отрезке $[t_0, t_0 + h(R_0)]$ из (12) следует неравенство $\|A_0 v_u(t)\| \leq \frac{R + R_0}{2} + \int_{t_0}^t C(R) \times$

$$\times \|A_0 v_u(\tau)\| d\tau + C(R)(t - t_0).$$

Значит, $\|A_0 v_u(t)\| \leq \frac{R + R_0 + C(R)h}{2} e^{hC(R)} \leq R$. Итак, оператор

K при некотором $h(R_0)$ действует из $S_A(R, [t_0, t_0 + h(R_0)])$ в себя.

Пусть $u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in S_A(R, [t_0, t_0 + h])$.

Решение задачи (4) соответственно обозначим через $v_1(t), v_2(t)$. Тогда

$$v'_i(t) = A_i(t) v_i(t) + B_i(t) v_i(t) + f(t), \quad v_i(0) = u_0.$$

Значит, функция $v_1(t) - v_2(t)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} (v_1(t) - v_2(t))' = A_1(t)(v_1 - v_2) + (A_1 - A_2)v_2 + \\ + B_1(v_1 - v_2) + (B_1 - B_2)v_2, \\ v_1(0) - v_2(0) = 0. \end{cases}$$

В силу [5, 7] имеем

$$\begin{aligned} v_1(t) - v_2(t) &= \int_{t_0}^t U_1(t, \tau) [(A_1(\tau) - A_2(\tau))v_2(\tau) + B_1(\tau)(v_2(\tau) - \\ &- v_1(\tau)) + (B_2(\tau) - B_1(\tau))v_2(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A_0(v_1(t) - v_2(t)) &= \int_{t_0}^t A_0 U_1(t, \tau) A_0^{-1} [A_0(A_1(\tau) - \\ &- A_2(\tau)) A_0^{-2} \cdot A_0^2 v_2(\tau) + A_0 B_1(\tau) A_0^{-1} \cdot A_0(v_2(\tau) - v_1(\tau)) + \\ &+ A_0(B_2(\tau) - B_1(\tau)) A_0^{-1} \cdot A_0 v_2(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $A_0 A(t, u) A_0^{-2} = A_0 A^{-1}(t, u) \cdot A^2(t, u) A_0^{-2}$, то в силу 2° отображение $(t, u) \rightarrow A_0 A(t, u) A_0^{-2}$ из $[t_0, T] \times E(A)$ в $B(E)$ удовлетворяет условию Липшица в каждом ограниченном множестве. Значит,

$$\begin{aligned} \|A_0(A_1(t) - A_2(t)) A_0^{-2}\| &\leq C(R) \|A_0([Cu_1](t) - \\ &- [Cu_2](t))\| \leq C(R) \|A_0(u_1(t) - u_2(t))\|. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и учитывая условие 3°, а также лемму 4, получим неравенство

$$\|A_0(v_1(t) - v_2(t))\| \leq C(R) \int_{t_0}^t \|A_0(u_1(\tau) - u_2(\tau))\| d\tau.$$

Значит, оператор K при некотором h в множестве $S_A(R, [t_0, t_0 + h])$ удовлетворяет принципу сжатых отображений. Значит, оператор K имеет единственную неподвижную точку, и она удовлетворяет задаче

$$u'(t) = A_u(t)u(t) + B_u(t)u(t) + f(t), \quad u(t_0) = u_0,$$

на отрезке $[t_0, t_0 + h]$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Так как h зависит от R_0 и $\|A_0^2 u_0\|$, то нелокальное решение существует, если имеет место априорная оценка $\|A_0^2 u(t)\| \leq C$ для решения задачи (4).

Результаты, полученные в данной работе, носят вспомогательный характер. Основная часть результатов будет опубликована в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Ю. Л. Исследования, связанные с операторными эволюционными уравнениями. Автореф. докт. дисс. МГУ, 1962.
2. Якубов С. Я. „ДАН Азерб. ССР“, XX, 4, 1964.
3. Якубов С. Я. „ДАН СССР“, 168, 4, 1966.
4. Соболевский П. Е., Погореленко В. А. „Сибирский матем. ж.“, VIII, 1, 1967.
5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Н., 1967.
6. Якубов С. Я. „ДАН СССР“, 176, 1, 1967.
7. Кагто Т. Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. Math. soc. Japan, 5, 1953.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 16. IV 1969

Гејри-хәтти икинчи тәртиб гиперболик тәнликләр үчүн
Коши мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда H нилберт фәзасында

$$u''(t) + A(t, u(t)) u(t) = f(t), u(t_0) = u_0, u'(t_0) = u_1$$

мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији өјрәнилмишдир. Алын-
нан абстракт нәтичә бир синиф гејри-хәтти гиперболик тип хусуси
төрәмәли дифференциал тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләни
ајдынлашдырмаға имкан верир.

Д. А. АХУНДОВ

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного дифференциаль-
ного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве:

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t, u(t)), u(0) = u_0 \in D(A). \quad (1)$$

Настоящая статья посвящена исследованию задачи рассеяния для
решений $u(t)$ задачи (1), непрерывно дифференцируемых в H и не-
прерывных в $H(A)$ ($H(A)$ — гильбертово пространство, состоящее из
элементов $u \in D(A)$ с метрикой $\|u\|_{H(A)} = \|Au\|$).

Задача рассеяния для (1) изучалась И. Сигалом в работе [1], где
относительно A и $f(t, u)$ предполагалось следующее:

A — замкнутый линейный оператор с плотной в B -пространстве E -об-
ластью определения $D(A)$, порождающий равномерно ограниченную
группу e^{tA} ($t \in T = (-\infty, \infty)$); $f(t, u)$ — нелинейный оператор, дейст-
вующий из $T \times E$ в E и удовлетворяющий по u локальному условию
Липшица равномерно на каждом конечном отрезке $[t_0, t'] \subset T$. При
этих предположениях И. Сигалом сначала доказана разрешимость на
некотором $[0, \bar{t}]$ при любом $u_0 \in E$ интегрального уравнения $u(t) = e^{(t-t_0)A} \times$

$\times u_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds$, соответствующего задаче (1). Затем, пред-

полагая, что существуют ограниченные на T решения задачи (1), он
доказал существование волновых операторов W_-, W_+ .

Далее задача рассеяния для уравнения (1) в гильбертовом про-
странстве H исследовалась А. Бродским [2]. Основным условием, на-
кладываемым на $f(t, u)$, было условие Липшица:

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \sigma(t) \|u - v\|, u, v \in H,$$

которое обеспечивало нелокальную разрешимость интегрального урав-
нения, соответствующего задаче (1). Относительно A предполага-
лось, что он порождает унитарную группу e^{tA} ($t \in T$). Отметим, что в
обеих вышеуказанных работах исследовалась задача рассеяния для сла-
бых решений, т. е. решений в интегральном смысле. Пусть $u(t)$ — ре-
шение задачи (1), о котором говорилось выше. Тогда $u(t)$ удовлет-
воряет интегральному уравнению [3, 4]:

$$u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds. \quad (2)$$

* Здесь и всюду ниже через $\sigma(t)$, $\sigma(t, R)$ будем обозначать ограниченные и
интегрируемые на $T = (-\infty, \infty)$ функции.

В работе С. Я. Якубова [5, 6] доказана теорема о разрешимости задачи (1) в случае, когда $f(t, u)$ действует из $T \times H(A)$ в H , из которой, в частности, следует

Теорема А. Пусть:

1) Замкнутый линейный оператор A имеет всюду плотную в H область определения $D(A)$ и существует ограниченный обратный A^{-1} ;

2) Оператор A порождает сильно непрерывную равномерно ограниченную группу операторов e^{tA} ;

3) $f(t, u)$ действует из $T \times H(A)$ в $H(A)$ и, как оператор из $T \times H(A)$ в H , имеет H -расширенную производную Фреше $D_u f(t, u)^*$ и непрерывную производную $D_t f(t, u)$, которые удовлетворяют по u условию Липшица в каждом шаре пространства $H(A)$:

$$\|D_u f(t, u) - D_u f(t, v)\|_{B(H)} \leq \sigma(t, R) \|u - v\|_{H(A)}; \quad (3)$$

$$\|D_t f(t, u) - D_t f(t, v)\|_H \leq \sigma(t, R) \|u - v\|_{H(A)} \quad (4)$$

для любых $u, v \in S_{H(A)}(R)$ ($S_{H(A)}(R)$ — шар в пространстве $H(A)$ радиуса R с центром в нуле);

4) $u_0 \in D(A)$;

5) Для всех $u \in D(A)$ имеют место неравенства

$$\|D_t f(t, u)\|_H \leq \sigma(t) (1 + \|Au\|), \quad \|D_u f(t, u)\|_{B(H)} \leq \sigma(t)$$

Тогда задача (1) или (2) имеет единственное решение $u(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A))$.

Замечание 1. В работе С. Я. Якубова [5] показано, что при наличии условия 3) имеет место следующее неравенство:

$$\left\| \frac{d}{dt} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] \right\| \leq \sigma(t, R) \left[\|A(u(t) - v(t))\| + \left\| \frac{du(t)}{dt} - \frac{dv(t)}{dt} \right\| \right], \quad (5)$$

где $u(t), v(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A))$, для которых $\|Au(t)\| + \|u'(t)\| \leq R$, $\|Av(t)\| + \|v'(t)\| \leq R$.

Очевидно, из (5) вытекает, что

$$\left\| \frac{d}{dt} f(t, u(t)) \right\| \leq \sigma(t) (1 + \|Au(t)\| + \|u'(t)\|) \quad (6)$$

при всех $u(t) \in C(T, H(A)) \cap C^1(T, H)$.

Определение. $W_- D(W_+)$ есть оператор, действующий из подмножества $D_-(D_+)$ пространства $H(A)$, в подмножество $R_-(R_+)$ пространства $H(A)$, определенный следующим образом: элемент $u_0 \in D_-(D_+)$, если $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-tA} u(t)$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA} u(t)$) существует, где $u(t)$ — решение уравнение (2) с начальным условием $u(0) = u_0$; $w_0 = W_- u_0 = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-tA} u(t)$ ($w_0 = W_+ u_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tA} u(t)$).

Предел понимается в метрике пространства $H(A)$.

Замечание 2. Все доказательства будем проводить для W_- , D_- , R_- . Подобные доказательства с очевидным изменением будут верны и для W_+ , D_+ , R_+ .

Замечание 3. Если $u_0 \in D_-$ и $w_0 = W_- u_0 \in R_-$, то $e^{tA} w_0$

* Пусть оператор $f(t, u)$, действующий из $T \times H(A)$ в H , имеет производную Фреше $D_u f(t, u)$ в каждой точке $u \in H(A)$ (т. е. $D_u f(t, u) \in B(H(A), H)$). Расширение $\tilde{D}_u f(t, u)$ оператора $D_u f(t, u)$ на все H называется H -расширенной производной Фреше оператора $f(t, u)$ (т. е. $\tilde{D}f(t, u) \in B(H, H)$).

удовлетворяет уравнению $u'(t) = Au$ с начальными данными $u_0(0) = w_0$. Более того, $\|e^{tA} w_0 - u(t)\|_{H(A)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Действительно $\|e^{tA} w_0 - u(t)\|_{H(A)} \leq M \|Aw_0 - Ae^{-tA} u(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

Теорема 1 Пусть $w_0 \in H(A)$ и существует функция $v(t)$, $T \rightarrow H(A)$ такая что:

$$a) \int_{-\infty}^0 \|Af(s, e^{sA} v(s))\| ds < \infty \left(\int_0^{\infty} \|Af(s, e^{sA} v(s))\| ds < \infty \right);$$

$$b) v(t) = w_0 + \int_{-\infty}^t e^{-sA} f(s, e^{sA} v(s)) ds, t \leq 0 \left(v(t) = w_0 - \int_t^{\infty} e^{-sA} f(s, e^{sA} v(s)) ds, t \geq 0 \right).$$

Тогда

$$w_0 \in R_-^0(R_+), v(0) \in D_-(D_+) \text{ и } W_- v(0) = w_0 (W_+ v(0) = w_0).$$

Доказательство. Положим $u(t) = e^{tA} v(t)$. Тогда $u(0) = v(0)$.

$$\begin{aligned} \text{Из (в) имеем } u(t) &= e^{tA} v(t) = e^{tA} w_0 + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds = \\ &= e^{tA} \left[v(0) - \int_{-\infty}^0 e^{-sA} f(s, u(s)) ds \right] + \int_{-\infty}^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds = \\ &= e^{tA} v(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds, \text{ т. е. } u(t) \text{ — решение уравнения} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ с начальными данными } u(0) = v(0); \|e^{-tA} u(t) - w_0\|_{H(A)} = \|Av(t) - Aw_0\| \leq M \int_{-\infty}^t \|Af(s, e^{sA} v(s))\| ds \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty.$$

Следствие. Пусть $u_0 \in H(A)$ такой, что существует решение уравнения $u(t) = e^{tA} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds$. Тогда, если $\int_{-\infty}^0 \|Af(s, u(s))\| ds < \infty$ ($\int_0^{\infty} \|Af(s, u(s))\| ds < \infty$), то $u_0 \in D_-(D_+)$

$$\text{и } W_- u_0 = u_0 - \int_{-\infty}^0 e^{-sA} f(s, u(s)) ds \left(W_+ u_0 = u_0 + \int_0^{\infty} e^{-sA} f(s, u(s)) ds \right).$$

Приведем без доказательства лемму, которая будет использована в доказательстве теоремы 2.

Лемма Пусть $\rho, \delta, \varepsilon$ — положительные функции, ρ и ε ограничены и δ интегрируемая и такая, что

$$\rho(t) \leq \varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t \delta(s) \rho(s) ds.$$

$$\text{Тогда } \rho(t) \leq \varepsilon(t) + \exp\left(\int_{-\infty}^t \sigma(s) ds\right) \int_{-\infty}^t \varepsilon(s) \sigma(s) \exp\left(\int_{-\infty}^s \sigma(\alpha) d\alpha\right) ds.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы А. Пусть далее: (б) оператор $f(t, u)$ действует из $T \times H(A)$ в $H(A)$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|f(t, u) - f(t, v)\|_{H(A)} \leq \sigma(t) \|u - v\|_{H(A)}, \quad u, v \in H(A) \quad (7)$$

и $f(t, 0) = 0$ для $\forall t \in T$.

Тогда $D_- = R_- = H(A)$; оператор W_- отображает $H(A)$ на $H(A)$ взаимно однозначно, удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства $H(A)$. Кроме того, W_-^{-1} удовлетворяет условию Липшица в пространстве $H(A)$.

Доказательство. Известно [3], что если $u(t)$ — решение уравнения (2) такое, что $u(t) \in C^1(T, H) \cap C(T, H(A))$, то имеют место формулы:

$$u'(t) = e^{tA} f(0, u_0) + \int_0^t e^{(t-s)A} \frac{d}{ds} f(s, u(s)) ds + e^{tA} Au_0, \quad (8)$$

$$Au(t) = e^{tA} f(0, u_0) + \int_0^t e^{(t-s)A} \frac{d}{ds} f(s, u(s)) ds + e^{tA} Au_0 - f(t, u(t)). \quad (9)$$

Пусть $u_0 \in H(A)$ и $u(t)$ — решение уравнения (2). Из (8) и (9) имеем

$$\|Au(t)\| + \|u'(t)\| \leq 2M (\|f(0, u_0)\| + \|Au_0\|) + 2M \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} f(s, u(s)) \right\| ds + \|f(t, u(t))\|. \quad (10)$$

Используя неравенство (6), имеем

$$\|f(t, u(t))\| \leq \int_0^t \left\| \frac{d}{ds} f(s, u(s)) \right\| ds \leq \tilde{C} + \int_0^t \sigma(s) [\|Au(s)\| + \|(u'(s))\|] ds.$$

(где $\tilde{C} = \int_{-\infty}^0 \sigma(s) ds$). Учитывая последнее неравенство, из (10) получаем

$$\|Au(t)\| + \|u'(t)\| \leq 2M (\|f(0, u_0)\| + \|Au_0\|) + C + 3M \int_0^t \sigma(s) [\|Au(s)\| + \|u'(s)\|] ds.$$

Применяя лемму, из последнего неравенства находим

$$\|Au(t)\| + \|u'(t)\| \leq C. \quad (11)$$

Далее

$$\int_{-\infty}^0 \|Af(s, u(s))\| ds \leq \int_{-\infty}^0 \sigma(s) \|Au(s)\| ds < C < \infty.$$

В силу следствия из теоремы 1 получаем $u_0 \in D_-$ и W_- существует. Таким образом $H(A) \subset D_-$. Поэтому $D_- = H(A)$.

Покажем, что W_- удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$. Пусть $u_0, v_0 \in S_{H(A)}(R)$ и $u(t), v(t)$ — соответствующие им решения уравнения (2). Тогда из (11) следует, что $\|Au(t)\| + \|u'(t)\| \leq C(R)$ и $\|Av(t)\| + \|v'(t)\| \leq C(R)$. Значит, в силу (8), (9) и (5), имеем $\|Au(t) - Av(t)\| + \|u'(t) - v'(t)\| \leq [(2M+1)C\sigma$

$$(0, R) + 2M] \|Au_0 - Av_0\| + (2M+1) \int_0^t \sigma(s, R) [\|Au(s) - Av(s)\| +$$

$\|u'(s) - v'(s)\|] ds$. Применяя к последнему неравенству лемму, получаем $\|Au(t) - Av(t)\| + \|u'(t) - v'(t)\| \leq C(R) \|Au_0 - Av_0\|$. Из этого неравенства следует, что $\|Ae^{-tA} u(t) - Ae^{-tA} v(t)\| \leq \tilde{C}(R) \|Au_0 - Av_0\|, t \leq 0$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу, при $t \rightarrow -\infty$ получаем

$$\|W_- u_0 - W_- v_0\|_{H(A)} \leq \tilde{C}(R) \|u_0 - v_0\|_{H(A)}.$$

Таким образом волновой оператор W_- удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре $S_{H(A)}(R)$.

Теперь предположим $W_- u_0 = W_- v_0$. Докажем, что в этом случае $u_0 = v_0$. Возьмем $T < t$. При этом имеем:

$$Au(t) = Ae^{(t-T)A} u(T) + \int_T^t Ae^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds,$$

$$Av(t) = Ae^{(t-T)A} v(T) + \int_T^t Ae^{(t-s)A} f(s, v(s)) ds,$$

$$\|Au(t) - Av(t)\| \leq M \|Au(T) - Av(T)\| + M \int_T^t \|Af(s, u(s)) -$$

$$- Af(s, v(s))\| ds \leq M \|Au(T) - Av(T)\| + M \int_T^t \sigma(s) \|Au(s) -$$

$- Av(s)\| ds$. Из последнего неравенства, в силу леммы, вытекает

$$\|Au(t) - Av(t)\| \leq C \|Au(T) - Av(T)\| \quad (T < t \leq 0). \quad (12)$$

С другой стороны, $\lim_{T \rightarrow -\infty} \|Au(T) - Av(T)\| = 0$. Действительно,

$$\|Au(T) - Av(T)\| \leq M \|Ae^{-TA} u(T) - Ae^{-TA} v(T)\| \xrightarrow{T \rightarrow -\infty}$$

$$\rightarrow M \|A[W_- u_0 - W_- v_0]\| = 0.$$

Поэтому, переходя к пределу при $T \rightarrow -\infty$, в неравенстве (12) получаем $\|Au(t) - Av(t)\| = 0, t \leq 0$.

В частности, $Au_0 = Av_0$, т. е. $u_0 = v_0$.

Пусть $w_0 \in H(A)$. Выберем $T \leq 0$ так, чтобы $\int_{-\infty}^T \sigma(s) ds = C <$

$\frac{1}{M^2}$. Определим рекуррентно

$$u_0(t) = w_0, \quad u_n(t) = w_0 + \int_{-\infty}^t e^{-sA} f(s, u_{n-1}^s(s)) ds, \quad t \leq T$$

$$(n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно,

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_{H(A)} \leq \int_{-\infty}^t \|Ae^{-sA} f(s, e^{sA} w_0)\| ds \leq$$

$$\leq M \int_{-\infty}^t \|Af(s, e^{sA} w_0)\| ds \leq M^2 \int_{-\infty}^t \sigma(s) \|Aw_0\| ds \leq M^2 C \|Aw_0\|.$$

$$\|u_2(t) - u_1(t)\|_{H(A)} \leq \int_{-\infty}^t \|Ae^{-sA} [f(s, e^{sA} u_1(s)) - f(s, e^{sA} w_0)]\| ds \leq$$

$$\leq M^2 \int_{-\infty}^t \sigma(s) \|u_1(s) - u_0(s)\|_{H(A)} ds \leq (M^2 C)^2 \|Aw_0\|.$$

Вообще

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)\|_{H(A)} \leq (M^2 C)^n \|A w_0\| \quad (13)$$

и

$$\|u_n(t)\|_{H(A)} \leq \|A w_0\| \sum_{k=0}^n (M^2 C)^k.$$

Из неравенства (13) следует равномерная сходимость $u_n(t)$ в интервале $(-\infty, T]$ в метрике $H(A)$ к некоторой функции $v(t)$. Таким образом $v(t)$ является решением интегрального уравнения

$$v(t) = W_0 + \int_{-\infty}^t e^{-sA} f(s, e^{sA} v(s)) ds, \quad t \leq T. \quad (14)$$

Тогда из (14) и теоремы А следует, что интегральное уравнение

$$u(t) = e^{tA} V(T) + \int_T^t e^{(t-s)A} f(s, u(s)) ds \text{ имеет решение из } C(T, H(A)) \cap C^1(T, H).$$

Очевидно, что при $t < T$ $e^{tA} v(t) = u(t)$.

Положим $\tilde{v}(t) = e^{-tA} u(t)$ ($t \in T = (-\infty, \infty)$). Тогда $\tilde{v}(t)$ будет удовлетворять условия теоремы 1, из которой следует, что $w_0 \in R_-$. Следовательно, $R_- = H(A)$. Из (12) имеем $\|u(t) - v(t)\|_{H(A)} \leq C \|W_- u_0 - W_- v_0\|_{H(A)}$. При $t = 0$ $\|u_0 - v_0\|_{H(A)} \leq C \|W_- u_0 - W_- v_0\|_{H(A)}$; $u, v \in H(A)$.

Обозначим $W_- u_0 = u'_0$, $W_- v_0 = v'_0$. Тогда $\|W_-^{-1} u'_0 - W_-^{-1} v'_0\|_{H(A)} \leq C \|u'_0 - v'_0\|_{H(A)}$.

Таким образом W_-^{-1} липшицево непрерывен.

Следствие. Оператор рассеяния $S = W_+ W_-^{-1}$ существует, действует из $H(A)$ в $H(A)$ и удовлетворяет Липшица в каждом шаре.

Замечание 4. Отметим, что аналогичные результаты могут быть получены в банаховом пространстве.

Замечание 5. Если неравенство (5) выполняется в более сильной форме, т. е.

$$\left\| \frac{d}{dt} [f(t, u(t)) - f(t, v(t))] \right\| \leq \sigma(t) [\|A[u(t) - v(t)]\| + \|u'(t) - v'(t)\|],$$

то волновые операторы W_- , W_+ удовлетворяют условию Липшица во всем пространстве $H(A)$.

2. В качестве приложения рассмотрим в цилиндре $Q = T \times \Omega$, где Ω — область изменения $x = (x_1, \dots, x_n)$ в R^n ($n \leq 3$), первую краевую задачу для уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + i \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(t, x, |u(t, x)|^2), \\ u(t, x)|_{\Gamma} = 0, \\ u(t, x)|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (15)$$

Теорема 3 Пусть выполнены следующие условия:

1°. $n \leq 3$, функции $a_{ij}(x)$ вещественны, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_{ij}(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ и при любом вещественном $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (\alpha = \text{const}, \alpha > 0).$$

2°. Граница Γ области Ω дважды непрерывно дифференцируема,

3°. Функция $f(t, x, r)$ определена в области $\{t \in T, x \in \bar{\Omega}, r \in [0, \infty)\}$, имеет непрерывные производные $f_t(t, x, r)$, $f_{x_i x_j r}(t, x, r)$; $f(t, x, 0) =$

$= 0$. Кроме того: а) производные $f_t(t, x, r)$ и $f_r(t, x, r)$ удовлетворяют условию Липшица по r с коэффициентом $\sigma(t, R)$, $|r| \leq R$; б) функции $f_t(t, x, r)$, $f_r(t, x, r)$, $f_{x_i r}(t, x, r)$, $r^{1/2}$, $f_{x_i x_j r}(t, x, r) r^{1/2}$ ограничены по модулю функцией $\sigma(t)$ равномерно относительно x, r . 4°. $u_0(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$.

Тогда задача (15) имеет единственное решение $u(t, x) \in C^1(T, L_2(\Omega)) \cap C(T, W_{2,0}^2(\Omega))$, оператор рассеяния $S = W_+ W_-^{-1}$ существует, действует из $W_{2,0}^2(\Omega)$ в $W_{2,0}^2(\Omega)$ и удовлетворяет условию Липшица в каждом шаре пространства $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Доказательство. Известно, что оператор S , порожденный дифференциальным выражением

$$Su = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)$$

и граничным условием Дирихле $u(x)|_{\Gamma} = 0$ в пространстве $L_2(\Omega)$, является самосопряженным, положительно определенным. Далее известно, что $D(S) = W_{2,0}^2(\Omega)$. Легко видеть, что оператор $A = iS$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы А.

Покажем, что оператор $f(t, u)$, определенный равенством

$$f(t, u) = f(t, x, |u(x)|^2), \quad (16)$$

удовлетворяет условиям 3), 4) теоремы А и условию 6) теоремы 2 в пространстве $L_2(\Omega)$. При $n \leq 3$, в силу теоремы вложения Соболева, $W_{2,0}^2(\Omega) \subset C(\Omega)$. Поэтому $f(t, u)$ будет действовать из $T \times W_{2,0}^2(\Omega)$ в $W_{2,0}^2(\Omega)$, если он действует из $T \times C(\Omega)$ в $W_{2,0}^2(\Omega)$, а это следует из условий 3° теоремы. Далее, так как $f(t, x, r)$ дважды непрерывно дифференцируема, $f(t, x, 0) = 0$ и $n \leq 3$, то $f(t, x, |u(x)|^2) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ при $u(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$.

Действительно, как видно, из выражений производных $D_{x_i} f$, $D_{x_i x_j}^2 f$, для того, чтобы $f(t, x, |u(x)|^2) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ при $u(x) \in W_{2,0}^2(\Omega)$, необходимо потребовать $u_{x_i}^1 \in L_4(\Omega)$, $u_{x_i x_j}^2 \in L_2(\Omega)$, а это следует из вложения $W_{2,0}^2(\Omega) \subset W_4^1(\Omega)$. Следовательно, $f(t, u)$ действует из $T \times W_{2,0}^2(\Omega)$ в $W_{2,0}^2(\Omega)$. Вычислив производную Фреше от оператора $f(t, u)$, определенного равенством (16), получим

$$D_u f(t, u) h = 2 f_r \operatorname{Re} [u(x) h(x)] \quad (u \in W_{2,0}^2(\Omega), h \in W_{2,0}^2(\Omega)). \quad (17)$$

Из формулы (17) и условий 3° настоящей теоремы следует, что $f(t, u)$, как оператор из $T \times W_{2,0}^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, имеет $L_2(\Omega)$ — расширенную производную Фреше. Далее, так как $f(t, x, r)$ непрерывно дифференцируема по t , $D_t f(t, u)$ существует и непрерывна. Легко видеть, что производные $D_u f(t, u)$ и $D_t f(t, u)$ удовлетворяют условиям Липшица (3) и (4) теоремы А. Подобным образом, используя условие 3° а), можно показать, что производные $D_t f(t, u)$, $D_u f(t, u)$ удовлетворяют условию 5) теоремы А. Затем, применяя неравенство Лагранжа и учитывая условия 3° а), 3° в), можно показать, что $f(t, u)$ удовлетворяет условию 6) теоремы 2. Теорема полностью доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю С. Я. Якубову за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Segal. I. Annals of Mathematics. vol. 78, 1963, № 2.
2. Brodsky. A. Pacific journal of Mathematics, vol. 19, 1966, № 1.
3. Kato T. Сб. "Математика", 2:4 (1958).

4. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е. „ДАН СССР“, III, 1956, № 1.
 5. Якубов С. Я. „ДАН Азерб. ССР“, XXII, 1966, № 8.
 6. Якубов С. Я. Тр. Московск. матем. об-ва, XXIII, 1970.

Институт математики
и механики АН Азерб. ССР

Поступило 6. X 1969

Ч. Ә. Ахундов

Биринчи тәртиб гејри-хәтти тәнликләр үчүн сәпилмә мәсәләси вә онун тәтбиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) тәнлији үчүн һилб рт фәзасында сәпилмә мәсәләсиндән бәһс едилмишдир. Далға вә сәпилмә операторларынын варлығы вә хассәләри арашдырылмышдыр. Алынған абстракт нәтичәләр (15) тәнлији үчүн гојулмуш ујғун мәсәләләрин өјрәнилмәсиндә тәтбиг олунур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1970, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 3.

УДК 917. 512. 7

Б. И. АЛИЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИИ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

Пусть $L^2_{P(x)}[a, b]$ — пространства суммируемых с квадратом по весу $P(x)$ $\{\varphi_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — полная ортогональная система $L^2_{P(x)}[a, b]$
 Пусть $f(x) \in L^2_{P(x)}[a, b]$;

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} C_n(f) \varphi_n(x). \quad (1)$$

где

$$C_n(f) = \frac{1}{A_n} \int_a^b P(t) f(t) \varphi_n(t) dt, \quad A_n = \int_a^b P(t) \varphi_n^2(t) dt,$$

ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Пусть далее $\{\psi_n(x)\}$ — последовательность функций, для которых при всех $h \geq 0$

$$|\psi_n(h)| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

С помощью ряда (1) и этих функций составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(h) C_n(f) \varphi_n(x) \quad (3)$$

Очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n [\psi_n(h) C_n(f)]^2 < \infty.$$

По теореме Рисса—Фишера ряд (3) будет рядом Фурье некоторой функции

$$\{f(x)\}_h \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(h) C_n(f) \varphi_n(x). \quad (3')$$

Рассмотрим далее следующий вопрос. Пусть известно поведение ряда Фурье функции $f(x)$. Как поведет себя ряд Фурье функции $g(x) \in L^2_{P(x)}[a, b]$, связанной с $f(x)$ соотношением

$$\|g - \{g\}_h\|_{L^2_{P(x)}[a, b]} \leq \|f - \{f\}_h\|_{L^2_{P(x)}[a, b]} \quad (4)$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что функции $\psi_n(h)$ удовлетворяют, кроме (2), еще и другие условия. Существуют числа

$$m_1 > 0, m_2 > 0 \text{ и константы } A_1 > 0, A_2 > 0 \text{ такие, что}$$

$$|1 - \psi_\kappa(h)| \leq A_1 (\kappa h)^{m_1} \quad (5)$$

$$\text{при всех } \kappa, h;$$

$$|1 - \psi_\kappa(h)| \geq A_2 (\kappa h)^{m_2} \text{ при } 0 \leq \kappa h \leq \mu, \quad (6)$$

где $\mu \geq 1$ — некоторое число.

Теорема 1. Пусть $f(x), g(x) \in L^2_{p(x)}[a, b]$ — функции, связанные между собой соотношением (4), и пусть $\sqrt{A_n} |C_n(f)| \leq \gamma_n$. Тогда, если при некотором $\alpha \in (0, 2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^{2(1+m_1-m_2)} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{3}{2} - m_2\right)\alpha} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2(1-m_2)} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} < \infty, \quad (7)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{\alpha}{2}} |C_n(g)|^\alpha < \infty. \quad (8)$$

Доказательство этой теоремы опускаем. Нам понадобятся следующие леммы (см. [1]).

Лемма 1. Пусть $n^{-\tau} d_n \downarrow 0, \tau > 0, d_n \geq 0$. Тогда если $0 < \beta < 1$ и $c > 1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{-c} \left\{ \sum_{k=1}^n d_k \right\}^\beta \leq D \sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} (n d_n)^\beta,$$

где D — постоянная, не зависящая от последовательности $\{d_n\}$.

Лемма 2. Пусть $d_n \downarrow 0$. Тогда, если $0 < \beta < 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} d_k \right\}^\beta \leq D_1(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} d_n^\beta,$$

где $D_1(\beta)$ — постоянная, зависящая лишь от β .

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции из $L^2_{p(x)}[a, b]$, связанные между собой соотношением (4), и пусть $\sqrt{A_n} |C_n(g)| \geq \gamma_n$, причем

$$\gamma_n \downarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^\alpha < \infty, \left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)^{-1} < \alpha < 2, m_2 \geq 1, m_2 - m_1 \leq 1.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{\frac{\alpha}{2}} |C_n(g)|^\alpha < \infty.$$

Доказательство. Покажем, что если $\gamma_n \downarrow 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^\alpha < \infty$,

$\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)^{-1} < \alpha < 2, m_2 \geq 1, m_2 - m_1 \geq 1$, то условие (7) выполнено.

Для доказательства сходимости первого ряда в (7) воспользуемся леммой 1, полагая

$$d_n = n^{2(1+m_1-m_2)} \gamma_n^2, \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$c = \left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)\alpha$. Так как $\gamma_n \downarrow 0$, то

$$n^{-2(1+m_1-m_2)} d_n = \gamma_n^2 \downarrow 0.$$

Кроме того, поскольку $\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)^{-1} < \alpha < 2$, то $0 < \beta < 1, c > 1$.

Итак, лемма 1 дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-c} \left\{ \sum_{k=1}^n d_k \right\}^\beta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^n \kappa^{2(1+m_1-m_2)} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \leq$$

$$\geq D \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)\alpha} \left\{ n \cdot n^{2(1+m_1-m_2)} \gamma_n^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= D \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^\alpha < \infty.$$

Следовательно, первый ряд в (7) сходится.

Теперь покажем сходимость второго ряда в (7). Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{3}{2} - m_2\right)\alpha} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2(1-m_2)} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \leq$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \kappa^{2(m_2-1)} \kappa^{2(1-m_2)} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Воспользуемся леммой 2, полагая при этом $d_k = \gamma_k^2, \beta = \frac{\alpha}{2}$. По ус-

ловию $\gamma_k \downarrow 0$, значит $d_k \downarrow 0, d_k \geq 0$. Кроме того, так как $\left(\frac{3}{2} + m_1 - m_2\right)^{-1} < \alpha < 2$, то $0 < \beta < 1$, и поэтому из леммы 2 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right\}^{-\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}} \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_k^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^\alpha < \infty.$$

Стало быть, второй ряд в (7) тоже сходится. Итак, из условий $\gamma_n \downarrow 0$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^\alpha < \infty$ вытекает, что условие (7) выполнено, тогда теорема 2

следует из теоремы 1. Применим полученные результаты к безусловной сходимости ортогональных рядов Фурье. Известна следующая

Теорема (Меньшов, см. [2], стр. 200). Если для некоторого

$\varepsilon (0 < \varepsilon < 2)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} < \infty$, то ортогональный ряд сходится при любом порядке членов почти всюду, т. е. безусловно сходится почти всюду.

С помощью этой теоремы из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. При условии теоремы 2 ряд Фурье функции $g(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ безусловно сходится почти всюду на $[a, b]$.

Теперь остановимся на некоторых ортогональных системах.

Пример 1. Рассмотрим систему e^{ikx} , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \infty$. Пусть $\Delta_h^m f(x)$ — симметричная разность m -го порядка 2π -периодической функции $f(x)$, т. е.

$$\Delta_h^m f(x) = \sum_{k=1}^m (-k)^k \binom{m}{k} f[x + (m - 2k)h].$$

Положим $f_h(x) = \Delta_h^m f(x) + f(x)$.

Тогда, если

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}, \text{ где } C_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

то

$$f(x) - f_h(x) \sim - (2i)^m \sum_{-\infty}^{\infty} C_k(f) e^{ikx} \sin^m kh.$$

И стало быть, если взять

$$1 - \psi_k(h) = - (2i)^m \sin^m kh, \text{ то } \{f(x)\}_n = f_n(x).$$

Так как $|\sin x| \leq |x|$, то

$$|1 - \psi_k(h)| = 2^m |\sin^m kh| \leq 2^m (\kappa h)^m \text{ при всех } \kappa \text{ и } h > 0, \text{ т. е. } m_1 = m.$$

С другой стороны, ввиду того, что $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

получаем

$$|1 - \psi_k(h)| \geq 2^m |\sin^m kh| \geq 2^m \left(\frac{2}{\pi}\right)^m (\kappa h)^m$$

$$\text{при } 0 \leq \kappa h \leq \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } m_2 = m.$$

Выполнение условия (2) очевидно.

Таким образом в случае тригонометрических рядов Фурье справедливы теоремы 1, 2 и 3, в которых $m_1 = m_2 = m$ и условие (4) заменено условием

$$\|\Delta_h^m g\|_{L_2} \leq \|\Delta_h^m f\|_{L_2}.$$

Замечание. Этот результат при $m = 1$ в случае вещественных 2π -периодических функций принадлежит В. И. Прохоренко [3], схемой доказательства которого мы воспользовались в настоящей работе.

Пример 2. Положим $\varphi_k(x) \equiv P_k$, где $P_k(x)$ — полином Лежандра порядка k и пусть для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-1, 1]$,

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta, \quad h > 0.$$

Известно, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_k(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta = P_k(x) P_k(\cosh).$$

Поэтому, если предположить, что $g(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье—Лежандра:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(f) P_k(x), \text{ где } C_k(f) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(t) P_k(t) dt,$$

то

$$f_h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(f) P_k(x) P_k(\cosh).$$

И, стало быть, если взять $\psi_k(h) = P_k(\cosh)$, то $\{f(x)\}_h = f_h(x)$. С другой стороны, известно [4], что $1 - P_k(\cosh) \leq \frac{\kappa^2 h^2}{2}$ при всех k и h ,

$1 - P_k(\cosh) \geq \frac{4}{3\pi^3} \kappa^2 h^2$ при $0 \leq \kappa h \leq \pi$. Выполнение условия (2) очевидно. Таким образом в случае рядов Фурье—Лежандра справедливы теоремы 1, 2 и 3, в которых $m_1 = m_2 = 2$, $A_h = \frac{2}{2n+1}$ и рассматриваемые

функции разлагаются в равномерно сходящийся ряд Фурье—Лежандра, а условие (4) заменено условием

$$\|\Delta_h g\|_{L_2[-1,1]} \leq \|\Delta_h f\|_{L_2[-1,1]},$$

где

$$\Delta_h f(x) = f(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta.$$

Пример 3. Теперь рассмотрим ортогональную систему сферических функций:

$$P_n(\cos \theta), \quad P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (9)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots, n),$$

где $P(x)$ и $P_n^m(x)$ — соответственно, обычный и присоединенный полиномы Лежандра.

Обозначим через $a_n(f)$, $a_{nm}(f)$ и $b_{nm}(f)$ коэффициенты Фурье функции $f(\theta, \varphi)$ по системе (9). Тогда сферический ряд Фурье функции $f(\theta, \varphi)$ запишется в виде

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(f; \theta, \varphi),$$

где

$$Y_n(f; \theta, \varphi) = a_n(f) P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n [a_{nm}(f) \cos m\varphi + b_{nm}(f) \sin m\varphi] P_n^m(\cos \theta).$$

Положим

$$\{f(\theta, \varphi)\}_h = f_h(P) = \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{C(P,h)} f(Q) ds_Q,$$

где $C(P, h)$ — окружность с центром в точке P со сферическим радиусом h на s — единичной сфере. Известно, что

$$\{Y_n(f; \theta, \varphi)\}_h = Y_n(f; \theta, \varphi) P_n(\cosh).$$

Поэтому, если предположить, что $f(\theta, \varphi)$ разлагается в равномерно сходящийся сферический ряд Фурье, то

$$\{f(\theta, \varphi)\}_h^* = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(f; \theta, \varphi) P_n(\cosh).$$

И, стало быть, если взять

$$\psi_k(h) = P_k(\cosh),$$

то так же, как и в предыдущем примере, можно заключить, что в случае сферических рядов Фурье справедливы теоремы 1, 2 и 3, в которых $m_1 = m_2 = 2$, условие $\sqrt{A_n} |C_n(f)| \leq \gamma_n$ заменено условием

$\rho_n(f) \leq \gamma_n$, где

$$\rho_n^2(f) = \bar{A}_n a_n^2(f) + \sum_{m=1}^n [a_{nm}^2(f) + b_{nm}^2(f)]^2 \bar{A}_{nm},$$

$$\bar{A}_n = \frac{4\pi}{2n+1}, \quad \bar{A}_{nm} = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

рассматриваемые функции разлагаются в равномерно сходящийся сферический ряд Фурье, а условие (4) заменено условием

$$\|\Delta_h g\|_{L_2(s)} \leq \|\Delta_h f\|_{L_2(s)},$$

где

$$\Delta_h f(P) = f(P) - \frac{1}{2\pi \sin h} \int_{c(P,h)} f(Q) ds_Q,$$

Этот результат получен в работе [5].

Кроме упомянутых, укажем работы [6, 7, 8], которые близки к теме данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюшков А. А. „Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье“. Матем. сб., 44(86), 53—87, 1958.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
3. Прохоренко В. И. „Вестник МГУ“, 6, 51—60, 1964.
4. Жидков Г. В. „ДАН СССР“, т. 169, 1966, № 5.
5. Джафаров Ар. С. „ДАН СССР“, т. 3, 1968, № 1.
6. Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions „Acta Math.“, 81, 225—238, 1949.
7. Boas R. Beurling's test for absolute convergence of Fourier series. „Bull. Amer. Math. soc.“, 66, № 1, 44—47, 1960.
8. Watari Chinami Contraction of Walsh Fourier Series. „Pros. Amer. Math. soc.“, 1964, 15, № 2, 189—192.

Институт математики и механики АН Азерб. СССР

Поступило 12. V 1969

Б. И. Әлијев

Ортогонал системләр үзрә функцијанын Фурје эмсалларыны бәзи хассәләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бир-бири илә (4) бәрабәрсизлији васитәсилә бағлы олан функцијаларын там ортогонал системләр үзрә Фурје эмсаллары арасындакы мүүјән әлагәдән бәһс едилмишдир.

УДК. 519. 45.

Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

ИДЕАЛЫ ПОЛУГРУДЫ ГОМОМОРФИЗМОВ ГРАФА

Пусть ρ_1, ρ_2 — рефлексивные отношения на непересекающихся множествах A_1, A_2 ; $A = A_1 \cup A_2$, $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$. S_1 (соответственно S_2) — совокупность всех отображений множества A_1 в A_2 (соответственно A_2 в A_1); $S = S(A_1, A_2) = S_1 \times S_2$ — множество всех пар (φ, ψ) , где $\varphi \in S_1, \psi \in S_2$. Множество $S(A_1, A_2)$ является, как известно [1, 2], полугрудной относительно действия:

$$(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3) = (\varphi_3 \cdot \psi_2 \cdot \varphi_1, \psi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \psi_3) \quad (1)$$

Если $(A_1, \rho_1), (A_2, \rho_2)$ — пара графов, то обозначим через $\Gamma_j = \Gamma_{\rho_j}(A_j, A_i)$ совокупность всех гомоморфизмов графа (A_j, ρ_j) в граф (A_i, ρ_i) , где $i, j = 1, 2$; $i \neq j$. Подмножество I полугруды S называется ее идеалом [2], если

$$[SSI] \subseteq I, \quad [ISS] \subseteq I, \quad [SIS] \subseteq I.$$

В настоящей работе изучались плотно вложенные идеалы скрещенной полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$ гомоморфизмов графа (A, ρ) [4] — подполугруды полугруды $S(A_1, A_2)$, состоящей из всех пар (φ, ψ) , где φ и ψ — гомоморфизмы графа (A_1, ρ_1) в (A_2, ρ_2) и соответственно графа (A_2, ρ_2) в (A_1, ρ_1) . Все не приведенные здесь обозначения и определения можно найти в работах [4, 5].

1. Гомоморфизм f полугруды S называется собственным если он отличен от изоморфизма. Если E — подполугруда полугруды S , f_E — гомоморфизм полугруды S , f_E — гомоморфизм полугруды E и $f x = f_E x$ для любого элемента $x \in E$, то говорят, что f индуцирует на E гомоморфизм f_E . Идеал E полугруды S называется плотно вложенным [2], если:

1) всякий собственный гомоморфизм полугруды S индуцирует собственный гомоморфизм на полугруде E ;

2) для всякой полугруды C , содержащей E в качестве идеала такой, что $S \subset C$, $S \neq C$, существует собственный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм на E .

Пусть μ, ν — некоторые числа; $\mu \leq \nu$. Обозначим через $S_{\mu, \nu} = S_{\mu, \nu}(A_1, A_2)$ подмножество $S(A_1, A_2)$, состоящее из всех пар (φ, ψ) таких, что $|\varphi A_1| < \mu$, $|\psi A_2| < \nu$; или, наоборот, $|\varphi A_1| < \nu$, $|\psi A_2| < \mu$. Обозначим далее $S_{\rho, \mu, \nu}(A_1, A_2) = S_{\mu, \nu} \cap S_{\rho}(A_1, A_2)$. Известно [2], что $S_{\mu, \nu}$ и только они являются идеалами полугруды $S(A_1, A_2)$. Если $\mu \leq \mu', \nu \leq \nu'$, то $S_{\mu, \nu} \subseteq S_{\mu', \nu'}$.

Предложение 2. 1. Если $\Delta_1 \subseteq \rho_1$, $\rho_2 \neq \Delta_2$, то $(a, a') \in \rho_1 \cap \rho_1^{-1} \iff$
 $\iff \forall A' \subseteq A_1. \psi_{a, a'} \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1).$

Предложение 2. 2. Пусть $\Delta_1 \subseteq \rho_1$, $(a, a^1) \notin \rho_1 \cap \rho_1^{-1}$. Для того, чтобы $\psi_{a, a^1, A'} \in \text{Gr}_1(A_2, A_1)$, необходимо и достаточно, чтобы совокупность $\{A_2, A_2/A^1\}$ была ρ_2 -разбиением множества A_2 .

Предложение 2. 3. Пусть σ_1 — произвольные отношения на множествах Σ^1 такие, что $|\Sigma^1| \neq 1$. Для того, чтобы $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2) = S(\Sigma_1, \Sigma_2)$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: 1) $\sigma = \emptyset$; 2) $\sigma = \Delta$; 3) $\sigma = \Sigma_1^2 \cup \Sigma_2^2$. Необходимость

3. Пусть (X, σ) — некоторый граф. Подмножество $X^1 \subseteq X$ называется *идеалом* (антиидеалом) графа (X, σ) , если из $x \in X^1$, $(y, x) \in \sigma$ (соответственно $x \in X$, $(x, y) \in \sigma$) следует $y \in X^1$. Если X^1 , X'' — идеал и соответственно антиидеал графа (X, σ) , $(x, y) \in \bar{\sigma}$ и $x \in X''$ (соответственно $y \in X^1$), то и $y \in X''$ (соответственно $x \in X^1$). В самом деле, если $(x, y) \in \bar{\sigma}$, то существуют элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in X''$ такие, что $x_1 = x$, $x_n = y$, $(x_i, x_{i+1}) \in \sigma$. Если, например, $x_1 \in X''$, то по индукции заключаем, что $x_n \in X''$.

Предложение 3. 1. Пусть $\Delta_1 \subseteq \rho_1$, $(a, a') \in \rho_1 \rho_1^{-1}$. Для того, чтобы $\psi_{a, a'} \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$, необходимо и достаточно, чтобы A^1 был идеалом, а $A_2 \cup A'$ — антиидеалом графа (A_2, ρ_2) ,

Пусть теперь, наоборот, ψ — гомоморфизм из $\Gamma_1(A_2, A_1)$ такой, что $\psi A_2 = [a, a']$, $\psi^{-1} a = A'$, $\psi^{-1} a' = A''$, $x \in A''$, $y \in A_2$, $(x, y) \in \rho_2$. Допустим, что $y \in A'$. Тогда из $(x, y) \in \rho_2$ следует, что $(a', a) = (\psi_x, \psi_y) \in \rho_1$, а это про-

4. Теорема Пусть ρ_1, ρ_2 — не тривиальные рефлексивные отношения на множествах A_1, A_2 . Если ρ_i симметричны или транзитивны, то полугруда $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ является плотно вложенным идеалом полугруды $S_\rho(A_1, A_2)$.

5. Подмножество $\Phi \subseteq S_1$ называется слабо транзитивным, если $\bigcup_{\varphi \in \Phi} \varphi(A_1) = A_2$.

В работе [2] показано:

2) Пусть T — слабо транзитивная сепаративная подполугруда полугруды $S(A_1, A_2)$ такая, что $T^3 = T$. Тогда T является плотно вложенным идеалом своего идеализатора $\overline{T}$ в $S(A_1, A_2)$.

Пусть $\psi \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$, $|\psi A_2| \leq 2$. Покажем, что существуют $\psi_1, \psi_3 \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$ и $\varphi_2 \in \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$ такие, что $\psi = \psi_1 \varphi_2 \psi_3$ и $|\psi_1 A_2| \leq 2, |\varphi_2 A_1| \leq 2, |\psi_3 A_2| \leq 2$. Допустим сначала, что $\psi = \psi_{a, a' A'} (п. 2.)$. Существуют элементы $b, b' \in A_2 (b' \neq b)$ такие, что $(b, b') \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$. Обозначим через A'_i, A''_i пару подмножеств множества A_1 таких, что $A'_i \cap A''_i = \emptyset$; $A'_i \cup A''_i = A_1$; $a \in A'_i, a' \in A''_i$; $b \in A'_2, b' \in A''_2$. Пусть далее $\varphi_2 = \varphi_{b, b' A'}$; $\psi_1 = \psi_{a, a, A'_2}$. Нетрудно проверить, что $\psi = \psi_1 \varphi_2 \psi_3$. Если же $|\psi A_2| = 1$, то ψ ото-

Пусть (φ, ψ) — произвольный элемент из $S_{\varphi_1}(A_1, A_2)$; для определенности будем считать, что $|\varphi A_1| = 1, |\psi A_2| = 2$. Тогда $(\varphi, \psi) = (\varphi_3 \psi_2 \varphi_1, \psi_1 \varphi_2 \psi_3) = (\varphi_1, \psi_1) (\varphi_2, \psi_2) (\varphi_3, \psi_3)$, где $|\varphi_1 A_1| = |\psi_2 A_2| = |\varphi_3 A_1| = 1, |\psi_1 A_2| = |\varphi_2 A_1| = |\psi_3 A_2| = 2$ и, следовательно, $(\varphi_i, \psi_i) \in M$. Это и означает, что $M^3 = M$. Таким же способом проверяется сепаративность полугруды $S_{\varphi_2}(A_1, A_2)$. Если, например, b, b' — любые элементы из множества A_2 ($b \neq b'$), то выберем произвольные элементы $a, a' \in A_1$ и подмножество $A' \subseteq A_2$ такие, что $b \in A'; b' \in A_2/A'$. Если $\psi = \psi_{a, a', A'}$, то $\psi b = a \neq a' = \psi b'$.

Пусть T — идеализатор полугруды M в $S\rho(A_1, A_2)$; $S\rho(A_1, A_2) \in T$, поскольку M является идеалом в полугруды $S\rho(A_1, A_2)$. Пусть теперь (φ, ψ) — произвольный элемент из T ; $x_i, y_i \in A_i$, $x_i \neq y_i$, $(x_i, y_i) \in \rho_i$. Из предложения 2.1 следует, что всякое отображение $\varphi_1 \in S_1$ ($\psi_2 \in S_2$

такое, что $\varphi_1 A_1 = \{x_2, y_2\}$ (соответственно $\psi_2 A_2 = \{x_1, y_1\}$), является гомоморфизмом графа (A_1, ρ_1) (соответственно графа (A_2, ρ_2)). Если $\psi_1 \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$, $\varphi_2 \in \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$, то $(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi, \psi) \in M$, поскольку (φ, ψ) по предположению содержится в T . Из (1) следует тогда, что $\varphi' = \varphi\psi_2\varphi_1 \in \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$. Если $\varphi x = x'$, $\varphi y = y'$, то φ' является продолжением отображением множества A_1 на $\{x', y'\}$ (в силу произвола в выборе ψ_2, φ_1). Но тогда из предложения 2.1 следует, что $(x', y') = (\varphi x, \varphi y) \in \rho_2$ и $\varphi \in \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$. Аналогично, рассматривая произведение $(\varphi, \psi)(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3) \in M$, можно показать, что $\psi \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$, т. е. $T \subseteq S_{\rho}(A_1, A_2)$. Из п. 5 следует, что $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ является плотно вложенным идеалом полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$.

7. Изучим теперь случай, когда ρ_1 — несимметрические отношения квази порядка. Пусть $\psi = \psi_{a, a', A'} \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$, где $(a, a') \in \rho_1$ ($a' \neq a$). Если $(a, a') \in \rho_1 \cap \rho_1^{-1}$ (в частности, если $a = a'$), то поступаем, как в п. 6.

Пусть теперь $(a, a') \notin \rho_1^{-1}$. Существует пара элементов $b, b' \in A_2$ такая, что $(b, b') \in \rho_2 / \rho_2^{-1}$. Далее, пользуясь предложением 3.1, как и в п. 6, строим гомоморфизмы $\varphi_2, \psi_1, \psi_3$ такие, что $\psi = \psi_1\varphi_2\psi_3$. Дальнейшее доказательство идентично п. 6.

8. Пусть ω_i — нетривиальные симметричные рефлексивные отношения на множествах $\mathcal{Q}_i$; σ_i — произвольные отношения на множествах Σ_i ($i = 1, 2$). В работе [5] (теорема 5) найдены условия, при которых полугруды $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ и $S\omega(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ изоморфны. Дополнением к указанной теореме служат два следующих предложения.

Предложение 8.1. Пусть $|\mathcal{Q}_1| \neq 1$, $\omega_1 = \Delta_1$, ω_2 — отличное от Δ_2 рефлексивное отношение на множестве $\mathcal{Q}_2$; σ_i — произвольные отношения на множествах Σ_i . Для того, чтобы полугруды $S\omega(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы графы $(\mathcal{Q}_1, \omega_1)$ и (Σ_1, σ_1) , $(\mathcal{Q}_2, \omega_2)$ и (Σ_2, σ_2) были попарно изоморфны.

Предложение 8.2. Пусть $|\mathcal{Q}_1| \neq 1$, $\omega_1 = \mathcal{Q}_1^2$, ω_2 — отличное от $\mathcal{Q}_2^2$ рефлексивное отношение на множестве $\mathcal{Q}_2$; σ_i — произвольные отношения на множествах Σ_i . Для того, чтобы полугруды $S\omega(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы графы $(\mathcal{Q}_1, \omega_1)$ и (Σ_1, σ_1) , $(\mathcal{Q}_2, \omega_2 \cap \omega_2^{-1})$ и $(\Sigma_2, \sigma_2 \cap \sigma_2^{-1})$ были попарно изоморфны.

Достаточность условий в обоих предложениях вытекает из пп. 2.1 и 2.2. Необходимость этих предложений доказывается как и в теореме 5 [5].

9. Теорема. Пусть $|A_1| \neq 1$, ρ_2 — рефлексивное отношение на множестве A_2 . Если $\rho_1 = \Delta_1$, $\rho_2 \neq A_2^2$ или $\rho_1 = A_1^2$, $\rho_2 \cap \rho_2^{-1} \neq \Delta_2$, то $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ является плотно вложенным идеалом полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$.

Доказательство. Если $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 = \Delta$ или $\rho = A_1^2 \cup A_2^2$, то из предложения 2.3 следует, что $S_{\rho}(A_1, A_2) = S(A_1, A_2)$, а значит, $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2) = S_{23}(A_1, A_2)$. В работе [2] показано, что всякий идеал полугруды $S(A_1, A_2)$ (в частности $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$) является плотно вложенным. Если $\rho_1 = \Delta_1$, то множество $\Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2) = S_2$, очевидно, сепаративно. Однако при $\rho_2 \neq \Delta_2$ множество $\Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$ не является сепаративным: если x, y — различные элементы из одной и той же компоненты графа (A_2, ρ_2) , то не существует гомоморфизма ψ графа (A_2, ρ_2) в (A_1, ρ_1) , отображающего x, y в различные точки. Поэтому случай $\rho_1 = \Delta_1$, $\rho_2 \neq \Delta_2$ (и аналогично $\rho_1 = A_1^2$, $\rho_2 \neq A_2^2$) требует отдельного рассмотрения; сослаться на п. 5 мы теперь не можем. Итак, надо доказать, что $M = S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ является плотно вложенным идеалом полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$, если ρ_2 нетривиально, а $\rho_1 = \Delta_1$ или

$\rho_1 = A_1^2$. Из п. 8 следует, что при $\rho_1 = \Delta_1$ (соответственно $\rho_1 = A_1^2$) полугруда $S_{\rho}(A_1, A_2)$ изоморфна полугруде $S\sigma(A_1, A_2)$, где $\sigma_1 = \rho_1$, $\sigma_2 = \rho_2$ (соответственно $\sigma_2 = \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$). Поэтому можно в дальнейшем считать отношение ρ_2 симметрическим.

Мы ограничимся рассмотрением случая $\rho_1 = \Delta_1$ (случай $\rho_1 = A_1^2$ рассматривается аналогично). Как и в п. 6, можно показать, что M слабо транзитивна, $M^3 = M$ и идеализатор T полугруды M совпадает с $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$.

Пусть $(\varphi_i, \psi_i), (\varphi'_i, \psi'_i) \in M$; $x_2, y_2 \in A_2$, $\varphi_3 \psi_2 x_2 = \varphi'_3 \psi'_2 y_2$. Выберем произвольные элементы $x_1, y_1 \in A_1$. Очевидно, что $x_2 = \alpha_{x_2} x_1$, $y_2 = \alpha_{y_2} x_1$ и $\varphi_3 \psi_2 \alpha_{x_2} = \varphi'_3 \psi'_2 \alpha_{y_2}$ ($= \alpha_{\varphi_3 \psi_2 x_1}$). Аналогично $\beta_{x_1} \varphi_2^2 \psi_3 = \beta_{x_1} \varphi'_2 \psi'_3$. Вместе с (1) это дает

$$(\alpha_{x_2}, \beta_{x_1})(\varphi_2, \psi_2)(\varphi_3, \psi_3) = (\alpha_{y_2}, \beta_{x_1})(\varphi'_2, \psi'_2)(\varphi'_3, \psi'_3). \quad (2)$$

Если же $\psi_1 \varphi_2 x_1 = \psi'_1 \varphi'_2 y_1$, то точно так же $y_1 = \beta_{y_1} x_2$, $x_1 = \beta_{x_1} x_2$ и

$$(\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2)(\alpha_{x_2}, \beta_{x_1}) = (\varphi'_1, \psi'_1)(\varphi'_2, \psi'_2)(\alpha_{y_2}, \beta_{y_1}) \quad (3)$$

По теореме 4.2 статьи [2] M является плотно вложенным идеалом полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$. Теорема доказана.

Заметим, что в исключенном случае ($\rho = \Delta_1 \cup A_1^2$ или $\rho = A_1^2 \cup \Delta_1$) $M^3 \neq M$, и поэтому нельзя пользоваться результатами п. 5. Приведенное здесь видоизменение метода п. 6 можно было бы использовать (вместо условия сепаративности) и для доказательства теоремы п. 4. Однако условия (2), (3) значительно менее прозрачны, чем сепаративность. Поэтому желательно всюду, где это возможно, обойтись без них.

10. В приведенных ниже теоремах (пп. 10.1—10.4) предполагается, что отношения ρ_1, ρ_2 удовлетворяют условиям одной из теорем пп. 4 или 9.

10.1. Теорема. Для того, чтобы некоторая полугруда S была изоморфна полугруде $S_{\rho}(A_1, A_2)$, необходимо и достаточно, чтобы S содержала плотно вложенный идеал, изоморфный $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$.

10.2. Если некоторый идеал B полугруды S содержит ее плотно вложенный идеал C , то он, как известно [2], также является плотно вложенным идеалом полугруды S . Поскольку всякий, отличный от $S_{\rho_{22}}(A_1, A_2)$ идеал $S_{\rho_{\mu\nu}}(A_1, A_2)$ полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$ содержит $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ (п. 1), то из п. 4 вытекает

Теорема. Множество $S_{\rho_{\mu\nu}}(A_1, A_2)$ (при $\mu \geq 2, \nu \geq 3$) является плотно вложенным идеалом полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$.

Из общих теорем о плотных вложениях алгебраических систем [3] и из пп. 4 и 9 вытекают следующие две теоремы.

10.3. Теорема. Пусть C — плотно вложенный идеал некоторой полугруды S ; f — изоморфизм полугруды $S_{\rho_{\mu\nu}}(A_1, A_2)$ ($\mu \geq 2, \nu \geq 3$) на C . Существует (и притом единственный) изоморфизм f' полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$ на S , являющийся продолжением изоморфизма f .

10.4. Теорема. Всякий автоморфизм полугруды $S_{\rho_{\mu\nu}}(A_1, A_2)$ (при $\mu \geq 2, \nu \geq 3$) можно однозначно продолжить до автоморфизма полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$.

11. Распространить теорему п. 4 на случай, когда одно из отношений ρ_i нетривиально и симметрично, а другое несимметрично, в отличие от п. 9, нельзя. Это видно из приведенной ниже конструкции.

Пусть ρ_1 (соответственно ρ_2) — нетривиальные рефлексивные отношения на множестве A_1 (соответственно A_2); ρ_1 симметрично, а ρ_2 — несимметрично, причем $\rho_2 \subseteq \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$ *. Обозначим $\omega_1 = \rho_1$, $\omega_2 = \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$. Тогда

* $\bar{\rho}$ — транзитивное замыкание отношения ρ [5].

УДК 519.45

Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

БИИДЕАЛЫ ПОЛУГРУД

Известно [7], что теория полугрупп является абстрактным учением о суперпозиции преобразований (отображений множества в себя). Аналогичным аппаратом для изучения суперпозиции отображений, одного множества в другое являются полугруды [1, 3] — алгебраические системы S с одной тернарной операцией $[s_1 s_2 s_3] = s$, ($s_1 s \in S$), подчиненной косоассоциативному закону:

$$V_{s_1 \in S} [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 s_3] s_4 s_5.$$

В настоящей работе исследовано плотное вложение [2] в полугрудах, определенное с помощью понятия биидеала. Полученные результаты использованы, во первых, для получения абстрактной характеристики полугруд отображений и бинарных отношений, во вторых, — для изучения полугруд гомоморфизмов графов.

1. *Бинарным отношением* между элементами множеств A, B называется произвольное подмножество ρ декартова произведения $A \times B$. Срезом бинарного отношения ρ через элемент $a \in A$ называется подмножество $\rho < a > \subseteq B$, состоящее из всех элементов $b \in B$ таких, что $(a, b) \in \rho$. Если $A' \subseteq A$, то через $\rho < A' >$ обозначают $\bigcup_{a \in A'} \rho < a >$. Отношение $\rho^{-1} \subseteq B \times A$:

$$\forall a \in A, b \in B \quad (a, b) \in \rho^{-1} \leftrightarrow (b, a) \in \rho$$

называется обратным к ρ . Введем, кроме того, обозначения

$$pr_1 \rho = \rho^{-1} < B >, pr_2 \rho = \rho < A >.$$

Иногда вместо $(A, B) \in \rho$ будем писать $A \rho B$ или $B \in \rho < A >$. Пусть ρ, σ — бинарные отношения из $A \times B$ и соответственно $B \times C$. Произведением их называется следующее бинарное отношение $\rho \circ \sigma \subseteq A \times C$:

$$(a, b) \in \rho \circ \sigma \rightarrow \exists x \in B \quad (a, x) \in \rho \wedge (x, b) \in \sigma. \quad (1)$$

Каждое бинарное отношение $\rho \subseteq A \times B$ можно трактовать как многозначное отображение множества $pr_1 \rho$ на $pr_2 \rho$ (чаще говорят о многозначном *частичном отображении* множества A в B : образами элемента $a \in pr_1 \rho$ при этом отображении служат все элементы множества $\rho < a >$). Тогда действие (1) есть не что иное, как суперпозиция отображений;

$$(\rho \circ \sigma) < a > = \rho < \sigma < a > >.$$

2. Гомоморфизм φ полугруды S называется *тождественным* на подполугруде $A \subseteq S$, если $\varphi a = a$ для любого элемента $a \in A$, и *собственным*, если он не является изоморфизмом. Предположим, что

да, очевидно, $\omega_2 \neq \rho_2$, $\bar{\omega}_2 = \bar{\rho}_2$. Пусть φ — произвольное отображение из $\Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$; поскольку ρ_1 симметрично, то для любых $x_1, y_1 \in A_1$ из $(x_1, y_1) \in \rho_1$ следует $(\varphi x_1, \varphi y_1) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1} = \omega_2$, и $\varphi \in \Gamma_{\omega_2}(A_1, A_2)$; из $\omega_2 \subset \rho_2$, $\omega_1 = \rho_1$ имеем $\Gamma_{\omega_2}(A_1, A_2) \subset \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$. Таким образом $\Gamma_{\omega_2}(A_1, A_2) = \Gamma_{\rho_2}(A_1, A_2)$.

Аналогично из $\omega_1 = \rho_1$, $\omega_2 \subset \rho_2$ вытекает $\Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1) \subseteq \Gamma_{\omega_1}(A_2, A_1)$. Если $\psi \in \Gamma_{\omega_1}(A_2, A_1)$ и $|\psi A_2| \leq 2$, то из предложений 2.1—2.2 следует $\psi \in \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$. В то же время при $|\psi A_2| \geq 3$ возможны случаи, когда $\psi \notin \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$.

Приведем пример. Пусть $A_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, $\sigma_i = \{(x_i, y_i), (y_i, z_i)\}$ ($i = 1, 2$); $\omega_1 = \rho_1 = \Delta_1 \cup \sigma_1 \cup \sigma_1^{-1}$; $\omega_2 = \Delta_2 \cup \sigma_2 \cup \sigma_2^{-1} \cup \{(x_2, z_2)\}$; $\psi x_2 = x_1$, $\psi y_2 = y_1$, $\psi z_2 = z_1$. Нетрудно проверить, что ρ_i, ω_i удовлетворяют всем приведенным выше условиям и $\psi \in \Gamma_{\omega_1}(A_2, A_1) \setminus \Gamma_{\rho_1}(A_2, A_1)$. Таким образом

$$S_{\rho_{23}}(A_1, A_2) = S_{\omega_{23}}(A_1, A_2), \quad (4)$$

$$S_{\omega}(A_1, A_2) \subset S_{\rho}(A_1, A_2). \quad (5)$$

Полугруда $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ не является плотно вложенным идеалом в $S_{\rho}(A_1, A_2)$. В самом деле, в противном случае из теорем 4 и 10.2 следовало бы, что тождественный изоморфизм (4) полугруды $S_{\omega_{23}}(A_1, A_2)$ на $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ можно было бы продолжить до изоморфизма полугруды $S_{\omega}(A_1, A_2)$ на $S_{\rho}(A_1, A_2)$; это противоречило бы строгому включению (5). Аналогичную конструкцию можно дать для случая, когда ρ_1 — несимметричное отношение квазипорядка, а ρ_2 — нетривиальное нетранзитивное отношение.

11.1. Рассмотрения п. 11 указывают также, что условия теоремы 5 [5] являются необходимыми, но недостаточными для изоморфизма полугруд $S_{\rho}(A_1, A_2)$ и $S_{\omega}(A_1, A_2)$.

11.2. Теорема п. 10.1 дает абстрактную характеристику полугруды $S_{\rho}(A_1, A_2)$ с помощью полугруды $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$. В силу [4], [5] вся информация о графах (A_i, ρ_i) заключена таким образом в полугруде $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$. В другой работе будет показано, как по внутренним свойствам этой полугруды можно восстановить исходную пару графов (A_i, ρ_i) . При этом $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ мы будем рассматривать как абстрактную полугруд, а не как полугруд отображений.

Очень признателен проф. Л. М. Глускину за ценные указания и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Теория обобщенных групп и обобщенных групп. Матем. сб. 32, № 3, 1953.
2. Глушкин Л. М. Идеалы полугруд. Сб. "Теория полугрупп и ее приложения", Саратов, 1965.
3. Глушкин Л. М. О плотных вложениях. Матем. сб., 61 (103), № 2, 1963.
4. Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук*, 1969, № 4.
5. Глушкин Л. М., Фейзуллаев Р. Б. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук*, 1969, № 5.

Институт математики и механики

Поступило 12. XI 1969

Р. Б. Фейзуллаев

ГОМОМОРФИЗМЫ ГРАФЛАР ЯРЫМГРУДУНУН ИДЕАЛЛАРЫ НАГГЫНДА ХҮЛАСƏ

Тəдгигатларда $S_{\rho}(A_1, A_2)$ жарымгрудунун сых дахил олан идеаллар ɵјрəнилмишдир. Əсас нəтичələr мəгалəнин 4-чү вə 8-чи бөлмələrиндəки теоремлəрдə ифадə олунмушдур. Бу теоремлэр васитəсилə $S_{\rho}(A_1, A_2)$ жарымгрудунун $S_{\rho_{23}}(A_1, A_2)$ минимал сых дахил олан идеаллары ајрылмышдур. Мүəјјан едилмишдир ки, бə'зи əсас граф синифилə тə'јин олунур.

отношение ρ в некотором классе T алгебраических систем (например, полугруд) удовлетворяет при любых $A, B, E \in T$ и произвольном изоморфизме f условиям:

$$\left. \begin{aligned} B \in \rho \langle A \rangle &\rightarrow A \subseteq B, \\ B \in \rho \langle A \rangle \wedge A \subseteq E \subseteq B &\rightarrow E \in \rho \langle A \rangle, \\ B \in \rho \langle A \rangle &\rightarrow fB \in \rho \langle fA \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть A — подполугруда полугруды $S, S \in \rho \langle A \rangle$. Полугруда A называется ρ -плотной в S [2], если: 1) всякий эндоморфизм полугруды S , тождественный на A , является тождественным на S ; 2) для всякой полугруды $E \in \rho \langle A \rangle$ существует гомоморфизм в S , тождественный на A . A называется ρ^* -плотной в S , если: 1) всякий собственный гомоморфизм φ полугруды S такой, что $\varphi S \in \rho \langle \varphi A \rangle$ индуцирует собственный гомоморфизм на полугруде A и 2) для всякой полугруды $E \in \rho \langle A \rangle$ такой, что $S \subseteq E (S \neq E)$, существует собственный гомоморфизм φ такой, что $\varphi S \in \rho \langle \varphi A \rangle$, и индуцирующий изоморфизм на A .

Из общих результатов о плотных вложениях [2] вытекают следующие теоремы о ρ -плотных и ρ^* -плотных подполугрудах:

Теорема 1. Пусть A — ρ -плотная подполугруда полугруды B . Для того, чтобы полугруда E была изоморфна полугруде B , необходимо и достаточно, чтобы E содержала ρ -плотную подполугруду, изоморфную A .

Теорема 2. Пусть A — ρ -плотная подполугруда полугруды B . A' — ρ^* -плотная подполугруда полугруды E . f — изоморфизм полугруды A' на A . Существует, притом единственный, изоморфизм ψ полугруды E на B , являющийся продолжением изоморфизма f .

Теорема 3. Если A — ρ -плотная подполугруда полугруды B , то всякий автоморфизм полугруды A можно, притом единственным образом, продолжить до автоморфизма полугруды B .

3. Элемент x^* полугруды S называется регулярно сопряженным с элементом x , если

$$[xx^*x] = x, [x^*xx^*] = x^*.$$

Полугруду S назовем инверсной, если для каждого ее элемента x существует единственный регулярно сопряженный с ним элемент x^* . Пусть S — некоторая полугруда с нулем 0 , Q — ее подполугруда. Назовем Q ω -подполугрудой в S , если полугруда Q инверсна и

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in S [x_1 x_2 x_3 = 0 \rightarrow \exists q_1 \in Q [x_1 q_1 q_1^* x_2 q_2 q_2^* x_3] = 0].$$

Иначе говоря, Q является ω -подполугрудой в S , когда

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in S [x_1 x_2 x_3 \neq 0 \rightarrow \exists q_1, q_2 \in Q [x_1 q_1 q_1^* x_2 q_2 q_2^* x_3] \neq 0] \quad (3)$$

4. Непустое подмножество A полугруды S называется ее би-идеалом, если $[ASA] \subseteq A$.

Если S — полугруда с нулем, A — би-идеал полугруды S , то $0 \in A$: $\{0\} = [AOA] \subseteq [ASA] \subseteq A$.

Введем бинарное отношение ρ_b в классе T_0 всех полугруд с нулем: $S \in \rho_b \langle A \rangle$ тогда и только тогда, когда: 1) A является би-идеалом полугруды S и 2) всякая ω -подполугруда полугруды A является ω -подполугрудой в S . Можно проверить, что отношение ρ_b удовлетворяет условиям (2).

5. Пусть A_1, A_2 — некоторые два множества; обозначим через $C(A_1, A_2)$ множество всех пар (φ, ψ) , где $\varphi \subseteq A_1 \times A_2$, $\psi \subseteq A_2 \times A_1$. Множество $C(A_1, A_2)$ является, как известно [1, 5], полугрудой относительно действия:

$$(\varphi_1, \psi_1) (\varphi_2, \psi_2) (\varphi_3, \psi_3) = (\varphi_3 \circ \psi_2 \circ \varphi_1, \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3). \quad (4)$$

Для любых $a \in A, b \in B$ обозначим через γ_{ab} бинарное отношение, состоящее из одной пары (a, b) ; пусть, далее $q_{a_1 a_2} = (\gamma_{a_1 a_2}, 0)^*$, $q_{a_2 a_1} = (0, \gamma_{a_2 a_1})$, где $a_i \in A_i$. Обозначим через $Q = Q(A_1, A_2)$ подмножество $C(A_1, A_2)$, состоящее из нуля $0 = (0, 0)$ и всех элементов $q_{a_1 a_2}, q_{a_2 a_1}$. Из (4) следует, что для любых $(\varphi, \psi) \in C(A_1, A_2)$, $a_1, b_1 \in A_1$

$$\left. \begin{aligned} q_{a_2 a_1} \cdot (\varphi, \psi) \cdot q_{b_1 b_2} &= (0, 0), \\ q_{a_1 a_2} \cdot (\varphi, \psi) \cdot q_{b_2 b_1} &= (0, 0), \\ q_{a_1 a_2} \cdot (\varphi, \psi) \cdot q_{b_1 b_2} &= \begin{cases} (0, 0), & \text{если } a_1 \notin \psi \langle b_2 \rangle, \\ (\gamma_{b_1 a_2}, 0) & \text{если } a_1 \in \psi \langle b_2 \rangle, \end{cases} \\ q_{a_2 a_1} \cdot (\varphi, \psi) \cdot q_{b_2 b_1} &= \begin{cases} (0, 0), & \text{если } b_2 \notin \varphi \langle a_1 \rangle, \\ (0, \gamma_{a_2 b_1}) & \text{если } b_2 \in \varphi \langle a_1 \rangle. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом $Q = Q(A_1, A_2)$ является би-идеалом полугруды $C(A_1, A_2)$. Из (5) следует, что для каждого $q \in Q$ существует единственный регулярно сопряженный с ним элемент $q^*: 0^* = 0, q_{a_2 a_1}^* = q_{a_1 a_2}, q_{a_1 a_2}^* = q_{a_2 a_1}$. Следовательно, полугруда Q инверсна. Из (5), в частности, имеем:

$$\left. \begin{aligned} q_{a_1 b_2} q_{b_2 a_1} q_{b_1 a_2} &= q_{a_1 a_2}, \\ q_{b_2 a_1} q_{b_1 b_2} q_{a_2 b_1} &= q_{a_2 a_1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Покажем теперь, что Q — ω -подполугруда в $C(A_1, A_2)$. В самом деле, пусть (φ_1, ψ_1) — любые элементы из $C(A_1, A_2)$, $q_1 \in Q$ и

$$(\varphi, \psi) = (\varphi_1, \psi_1) q_1 q_1^* (\varphi_2, \psi_2) q_2 q_2^* (\varphi_3, \psi_3).$$

Если: 1) хотя бы одно из $q_1 = 0$ ($i = 1, 2$) или 2) $q_1 = (\gamma_{a_1 a_2}, 0)$,

$$q_2^* = (0, \gamma_{b_2 b_1}) \text{ или 3) } q_1 = (0, \gamma_{a_2 a_1}), q_2^* = (\gamma_{b_1 b_2}, 0), \text{ то в силу (5)} \quad (7)$$

$$(\varphi, \psi) = 0.$$

Пусть теперь $q_1 = q_{a_1 a_2}$ и $q_2^* = q_{b_1 b_2}$; тогда $q_1^* = q_{a_2 a_1}$, $q_2 = q_{b_2 b_1}$ и в силу (4)

$$(\varphi, \psi) = (0, \psi_1 \circ \gamma_{a_1 a_2} \circ \gamma_{a_2 a_1} \circ \varphi_2 \circ \gamma_{b_2 b_1} \circ \gamma_{b_1 b_2} \circ \psi_3) \quad (7)$$

Из (1) следует:

$$\left. \begin{aligned} (x_2, x_1) \in \psi &\rightarrow \exists z_1 \in A_1 (x_2, z_1) \in \psi_3 \wedge (z_1, z_2) \in \gamma_{b_1 b_2} \wedge (z_2, z_3) \in \gamma_{b_2 b_1} \wedge \\ &\wedge (z_3, z_4) \in \varphi_2 \wedge (b_1, a_2) \in \gamma_{a_2 a_1} \wedge (z_5, z_6) \in \gamma_{a_1 a_2} \wedge (z_6, x_1) \in \psi_1 \rightarrow \\ &\rightarrow \exists a_1, b_1 \in A_1 (x_2, b_1) \in \psi_3 \wedge (b_1, a_2) \in \varphi_2 \wedge (a_2, x_1) \in \psi_1 \rightarrow \\ &\rightarrow (x_2, x_1) \in \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (8) и (1) имеем $\psi \neq 0 \rightarrow \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3 \neq 0$. Обратно, пусть $\psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3 \neq 0$, тогда, выбрав в качестве a_1, b_1 элемента из A_1 , входящие в соотношение (8), получим $\psi \neq 0$. Вместе с (7) q и (4) это дает

$$\psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3 \neq 0 \rightarrow \exists a_1, b_1 \in A_1 (\varphi_1, \psi_1)_{a_1 a_2} q_{a_2 a_1} (\varphi_2, \psi_2) q_{b_2 b_1} q_{b_1 b_2} (\varphi_3, \psi_3) \neq 0. \quad (9)$$

Аналогично

$$\varphi_3 \circ \psi_2 \circ \varphi_1 \neq 0 \rightarrow \exists a_1, b_1 \in A_1 (\varphi_1, \psi_1) q_{b_2 b_1} q_{b_1 b_2} (\varphi_2, \psi_2) q_{a_1 a_2} q_{a_2 a_1} (\varphi_3, \psi_3) \neq 0. \quad (10)$$

Из (8), (10) и определения Q следует

$$(\varphi_1, \psi_1) (\varphi_2, \psi_2) (\varphi_3, \psi_3) \neq 0 \rightarrow \exists q_1 \in Q (\varphi_1, \psi_1) q_1 q_1^* (\varphi_2, \psi_2) q_2 q_2^* (\varphi_3, \psi_3) \neq 0;$$

* Через o обозначено „пустое“ бинарное отношение:

$$pr_1 o = pr_2 o = \emptyset.$$

в силу п. 3 это и означает, что $Q = Q(A_1, A_2)$ является ω -подполугрудой в $C(A_1, A_2)$.

6. Пусть E — подполугруда полугруды C . Обозначим через $\{C, E\}_b$ подмножество C , состоящее из всех элементов $x \in C$ таких, что $E \times E \subseteq E$. Очевидно, что $B \subseteq \{C, E\}_b$ для всякой полугруды $B \subseteq C$, содержащей E в качестве биндеала. Если E не биндеал полугруды C , то $\{C, E\}_b$, вообще говоря, не является даже подполугрудой в C .

Теорема. Пусть E — подполугруда полугруды $C = C(A_1, A_2)$, содержащая $Q = Q(A_1, A_2)$. Если $\{C, E\}_b$ является подполугрудой в

C , то $E \rho_b$ -плотна в $E^* = \{C, E\}_b$.

Доказательство. Пусть S — любая полугруда из $\rho_b \langle E \rangle$. Для всякого элемента $s \in S$ введем бинарные отношения $s' \subseteq A_1 \times A_2$, $s'' \subseteq A_2 \times A_1$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \in s' &\leftrightarrow \exists x_1 \in A_1 \ q'_{a_2 x_1} s \ q'_{x_2 a_1} \neq 0, \\ (a_2, a_1) \in s'' &\leftrightarrow \exists x_1 \in A_1 \ q_{x_1 a_2} s \ q_{a_1 x_2} \neq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть далее $s = (s', s'') = fs$. Если $q = q'_{a_2 x_1} s \ q'_{x_2 a_1} \neq 0$, то из (6) имеем

$$q = q'_{a_2 x_1} q_{x_1 a_2} q_{a_2 x_1} s \ q'_{x_2 a_1} q_{a_1 x_2} q_{x_2 a_1} = q'_{a_2 x_1} q_{x_1 a_2} q \ q_{a_1 x_2} q_{x_2 a_1}$$

и в силу (1), (4) $q = (0, \psi)$, где

$$\psi = \gamma_{a_2 x_1} \gamma_{x_1 a_2} \psi \gamma_{a_1 x_2} \gamma_{x_2 a_1} \quad (12)$$

Из (1) и (12) при $q \neq 0$ следует $\psi = \gamma_{x_2 x_1}$. Вместе с (11) это дает

$$(a_1, a_2) \in s' \leftrightarrow \forall z_1 \in A_1 \ q'_{a_2 z_1} s \ q'_{z_2 a_1} = q'_{z_2 z_1} \quad (13)$$

и точно так же

$$(a_2, a_1) \in s'' \leftrightarrow \forall z_1 \in A_1 \ q_{z_1 a_2} s \ q_{a_1 z_2} = q_{z_1 z_2} \quad (14)$$

Для любых $s_1 \in S$ из (11), (13), (14), (4) и (1) имеем:

$$(a_1, a_2) \in [s_1 s_2 s_3] \leftrightarrow \exists x_1 \in A_1 \ [q'_{a_2 x_1} [s_1 s_2 s_3] \cdot q'_{x_2 a_1}] = [q'_{a_2 x_1} s_3 s_2 s_1 q'_{x_2 a_1}] \neq$$

$$0 \leftrightarrow \exists x_1, y_1, z_1 \in A_1 \ [q'_{a_2 x_1} s_3 q'_{z_2 y_1} q_{y_1 z_2} s_2 q_{y_2 z_1} q'_{z_1 y_2} s_1 q'_{x_2 a_1}] \neq 0$$

$$\leftrightarrow \exists x_1, y_1, z_1 \in A_1 \ q'_{z_1 y_2} s_1 q'_{x_2 a_1} \neq 0 \wedge q_{y_2 z_1} s_2 q_{y_1 z_2} \neq 0 \wedge q'_{a_2 x_1} s_3 q'_{z_2 y_1} \neq 0 \rightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists y_1 \in A_1 \ (a_1, y_2) \in s'_1 \wedge (y_2, y_1) \in s''_2 \wedge (y_1, a_2) \in s'_3$$

$$\leftrightarrow (a_1, a_2) \in s'_3 \circ s''_2 \circ s'_1.$$

Аналогично

$$(a_2, a_1) \in [s_1 s_2 s_3]'' \leftrightarrow (a_2, a_1) \in s''_1 \circ s'_2 \circ s''_3.$$

Вместе с (4) это дает

$$f(s_1 s_2 s_3) = fs_1 \cdot fs_2 \cdot fs_3 = (s'_1, s''_1) (s'_2, s''_2) (s'_3, s''_3),$$

т.е. отображение f является гомоморфизмом S в $C(A_1, A_2)$. Если $e = (\varphi, \psi)$ — произвольный элемент из полугруды E , то из (1), (5) и (11) следует

$$(a_1, a_2) \in e' \leftrightarrow \exists x_1 \in A_1 \ q'_{a_2 x_1} e \ q'_{x_2 a_1} \neq 0 \rightarrow (a_1, a_2) \in \varphi;$$

аналогично $(a_2, a_1) \in e'' \rightarrow (a_2, a_1) \in \psi$, т.е.

$$\forall e \in E \ fe = e. \quad (15)$$

Таким образом гомоморфизм f является тождественным на E . Для произвольных элементов $s \in S$, $a, b \in E$ имеем $asb \in E$, $f(asb) = asb$. Следовательно, $a \cdot fs \cdot b = fa \cdot fs \cdot fb = f(asb) = asb$ и $fs \in \{C, E\}_b$. Таким образом $fS \subseteq \{C, E\}_b$. Если $x = (\varphi, \psi) \in E^* = \{C, E\}_b$, $fx = (\varphi', \psi') \in E^*$, то из (11), (15) следует для любых $a_1 \in A_1$:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \in \varphi' &\rightarrow [q'_{a_2 a_1} \cdot fx \cdot q'_{a_2 a_1}] = [fq'_{a_2 a_1} \cdot fx \cdot fq'_{a_2 a_1}] = \\ &= f[q'_{a_2 a_1} x q'_{a_2 a_1}] \rightarrow [q'_{a_2 a_1} x q'_{a_2 a_1}] \neq 0 \quad (a_1, a_2) \in \varphi \text{ и } \varphi = \varphi'. \end{aligned}$$

Аналогично получим $\psi = \psi'$, т.е. $fx = x$; f является тождественным эндоморфизмом полугруды E^* . Теорема доказана.

7. Пусть m, n — некоторые кардинальные числа ≥ 2 . Обозначим через $P_m^n(A_1 \times A_2)$ подмножество $P(A_1 \times A_2)$, состоящее из всех бинарных отношений $\varphi \in P(A_1 \times A_2)$ таких, что $pr_1 \varphi < n$, $pr_2 \varphi < m$. Пусть далее $C_{m,n}^{p,v}(A_2, A_2) = P_m^n(A_1 \times A_2) \times P_v^n(A_2 \times A_1)$. Все $C_{m,n}^{p,v}(A_1, A_2)$ являются в силу (1), (4) биндеалами полугруды $C(A_1, A_2)$, содержащими $Q(A_1, A_2)$ при $n, v \geq 2$. Из теоремы п. 6 вытекает следующая

Теорема. Все $C_{m,n}^{p,v}(A_1, A_2)$ при $n, v \geq 2$ являются ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $C(A_1, A_2)$.

8. Из пп. 4, 6 вытекает

Теорема. Для того, чтобы полугруда S была изоморфна скрещенной полугруде $C(A_1, A_2)$ всех пар бинарных отношений между элементами множеств A_1, A_2 , необходимо и достаточно, чтобы S содержала ρ_b^* -плотную подполугруду, изоморфную полугруде $C_{22}^{22}(A_1, A_2)$.

8.1. Подмножество I полугруды S называется ее левым (правым, латеральным) идеалом, если $SSI \subseteq I$ (соответственно $ISS \subseteq I$, $SIS \subseteq I$). Если левый идеал I полугруды S является одновременно ее правым (соответственно правым и латеральным) идеалом, то I называется двусторонним идеалом (соответственно идеалом). Ненулевой левый (двусторонний) идеал L полугруды S называется минимальным, если он не содержит отличных от L и 0 левых (двусторонних) идеалов полугруды S . Полугруда S называется вполне простой [3, 4], если: 1) она не содержит отличных от S и 0 идеалов; 2) отлична от полугруды $E = \{0, a\}$, где 0 — нуль и $a^3 = 0$; 3) является объединением своих минимальных левых идеалов.

В [3, 4] показано, что всякая вполне простая полугруда S либо не содержит отличных от 0 и S двусторонних идеалов, либо является объединением двух своих минимальных двусторонних идеалов. В последнем случае строение полугруды S можно описать следующим образом.

Пусть $I_1, I_2, \Lambda_1, \Lambda_2$ — некоторые попарно непересекающиеся множества; $G_0 = G \cup \{0\}$ — группа с внешне присоединенным нулем [6, 7]; $P = (p_{\lambda\mu})$ и $Q = (q_{ij})$ — $\Lambda\Lambda$ -матрица и II -матрица над полугруппой G_0 ; ζ — антиавтоморфизм полугруппы G_0 такой, что $\zeta^2 x = s \cdot x \cdot s^{-1}$ ($s \in G$) для всякого $x \in G_0$.

Пусть

$$\forall \lambda, \kappa \in \Lambda \ \exists i, j \in I \ p_{\lambda\kappa} i j \neq 0 \wedge p_{\lambda j} \neq 0, \quad (\kappa, j = 1, 2; \kappa \neq j) \quad (16)$$

$$\forall i, \kappa \in I \ \exists i, j \in I \ q_{\kappa i j} \neq 0 \wedge q_{i j \kappa} \neq 0,$$

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \ p_{\lambda\mu} = s^{-1} \cdot \zeta p_{\mu\lambda}, \quad \forall i, j \in I \ q_{ji} = \zeta q_{ij} \cdot s.$$

Обозначим через S множество всех троек (a, ix) , где $a \in G_0$, $(ix) \in (I_1 \times \Lambda_1 \cup I_2 \times \Lambda_2)$, причем все тройки $0 = (0, ix)$ отождествляются между собой. S является вполне простой полугрудой относительно действия:

$$(a, ix) (b, j\lambda) (c, \kappa\mu) = (a \cdot p_{\lambda\mu} \cdot \zeta b \cdot q_{ij}, i\mu).$$

Обратно, любая вполне простая полугруда с двумя минимальными двусторонними идеалами изоморфна полугруде S описанного выше вида.

Всякий гомоморфизм такой полугруды S может быть по учен в результате суперпозиции гомоморфизмов трех следующих типов:

- 1) $f(a, ix) = (f'a, ix)$, где f' — гомоморфизм полугруппы G_0 на некоторую группу с нулем;
 2) отождествление при любых $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, $a \in G$ элементов (a, ix) и $(a, i'x)$, где $q_{ij} = q_{i'j}$ при любом $j \in I_1 \cup I_2$;
 3) отождествление при любых $a \in G$, $i \in I_1 \cup I_2$ элементов (a, ix) , (a, ix') , где $p_{x\lambda} = p_{x'\lambda}$ при любом $\lambda \in \Delta$.

8.2. Приведенная ниже теорема вместе с теоремой п. 9 дает абстрактную характеристику полугруды $S(A_1, A_2)$.

Теорема. Для того, чтобы полугруда S была изоморфна полугруде $Q = C_{22}^{22}(A_1, A_2)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) S — вполне простая полугруда, свержащая два различных ненулевых двусторонних идеала;

2) S не обладает нетривиальными гомоморфизмами;

3) S инверсна.

Доказательство. Из п. 2 следует, что полугруда Q удовлетворяет условиям 1 и 3, где $I_1 = A_1$, $\Delta_1 = A_2$; I_2 и Δ_2 — множества, равномощные A_1 и A_2 (их элементы мы будем обозначать через a'_i , b'_i в отличие от $a_i, b_i \in A_i$); G — единичная группа; $p_{a'_i a'_i} = p_{a'_i a'_i} = q_{a'_i a'_i} = q_{a'_i a'_i} = 1$ при любых $a'_i \in A_i$; $p_{ab} = q_{ab} = 0$ при $b \neq a'$ или $a \neq b'$.

Но тогда в силу п. 8.1 Q не обладает нетривиальными гомоморфизмами. Необходимость условий теоремы доказана. Докажем их достаточность.

Пусть S — полугруда, удовлетворяющая условиям 1—3. Из п. 8.2 следует тогда, что группа G единичная, т. е. $S = \{0\} \cup I_1 \times \Delta_1 \cup I_2 \times \Delta_2$ и для любых $i_k, j_k \in I_k$, $\lambda_k, \lambda'_k \in \Delta_k$

$$(i_1, \lambda_1)(i_2, \lambda_2)(j_1, \lambda_1) = \begin{cases} (i_1, \lambda_1), & \text{если } p_{\lambda_2 \lambda_1} = q_{\lambda_2 \lambda_1} = 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (17)$$

Элементы (i_1, λ_1) , $(i_2, \lambda_2) \in S$, удовлетворяющие условиям (16), регулярно сопряжены между собой в силу (17). Поскольку полугруда S инверсна, формулы (16) устанавливают взаимно однозначное соответствие между множествами I_1 и I_2 , Δ_1 и Δ_2 : $i_2 = i'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_1$. Отображение $f(i, \lambda_1) = q_{i, \lambda_1}$, $f(i'_1, \lambda'_1) = q_{\lambda_1, i'_1}$ вследствие (6), (17) является изоморфизмом S на $Q(I_1, \Delta_1)$. Теорема доказана.

9. Бинарное отношение $\varphi \subseteq A \times B$ называется *однозначным*, если $|\varphi \langle a \rangle| \leq 1$ для любого элемента $a \in A$. Такое бинарное отношение отождествляют с (однозначным) отображением множества $pr_1 \varphi$ на $pr_2 \varphi$; обычно его называют *частичным отображением* множества A в B . Для всякого (однозначного) частичного отображения φ вместо $\varphi \langle a \rangle$ будем писать $\varphi(a)$, поскольку его непустые срезы содержат один элемент. Частичное отображение φ называется *обратимым*, если φ^{-1} (см. п. 1) является частичным отображением множества B в A . Обозначим через $W(A_1 \times A_2)$ и $V(A_1 \times A_2)$ подмножества $P(A_1 \times A_2)$, состоящие из всех частичных отображений и соответственно из всех обратимых частичных отображений множества A_1 в A_2 . Пусть далее $F(A_1, A_2) = W(A_1 \times A_2) \times W(A_2 \times A_1)$ и $K(A_1, A_2) = V(A_1 \times A_2) \times V(A_2 \times A_1)$. $F(A_1, A_2)$ и $K(A_1, A_2)$ являются подполугрудами полугруды $C(A_1, A_2)$ относительно действия (4). Всюду в дальнейшем будем считать, что $|A_i| > 1$, т. е. $F(A_1, A_2)$ и $K(A_1, A_2)$ — собственные подполугруды полугруды $C(A_1, A_2)$. Обозначим

$$F_{\text{пл}}^{nv}(A_1, A_2) = C_{\text{пл}}^{nv}(A_1, A_2) \cap F(A_1, A_2).$$

Теорема. $F_{\text{пл}}^{nv}(A_1, A_2)$ являются при $n, v \geq 3$ ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $F(A_1, A_2)$.

Доказательство. Пусть $n, v \geq 3$, $F(A_1, A_2) = F$, $F_{\text{пл}}^{nv}(A_1, A_2) = F'$, $\{C, F'\}^* = B$, (φ, ψ) — произвольная пара из B . Допустим, что $(\varphi, \psi) \in C(A_1, A_2) \setminus F'$. Тогда по крайней мере одно из отображений φ или ψ (предположим для определенности ψ) не является однозначным. Существуют элементы $a_1, b_1 \in A_1$, $a_1 \neq b_1$, такие, что $a_1, b_1 \in \psi \langle a_2 \rangle$, и пусть далее $\varphi_1 = \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$; тогда $(\varphi, \varphi) \in F'$, $q_{a_1 a_2} = (q_{a_1 a_2}, \varphi) \in F'$ и в силу $(\varphi, \psi) \in B$ имеем $[q_{a_1 a_2}(\varphi, \psi)(\varphi_1, \varphi)] \in F'$. Вместе с (4) это дает $(\varphi_1 \psi \gamma_{a_1 a_2}, \varphi) \in F'$ (18)

Но из определения φ_1 и из (1) имеем $(a_1, a_2), (a_1, b_2) \in \varphi_1 \psi \gamma_{a_1 a_2}$, что противоречит (18) и определению $F(A_1, A_2)$. Следовательно, $B \subseteq F(A_1, A_2)$. С другой стороны, $F(A_1, A_2) \subseteq B$, поскольку все $F_{\text{пл}}^{nv}(A_1, A_2)$ являются бидеалами полугруды $F(A_1, A_2)$. Остается воспользоваться теоремой п. 6.

9.1. Из свойств плотных вложений (п. 2) следует

Теорема. Для того, чтобы S была изоморфна полугруде $F(A_1, A_2)$, необходимо и достаточно, чтобы она содержала ρ_b^* -плотную подполугруду, изоморфную полугруде $F_{33}^{33}(A_1, A_2)$.

10. Полугруда $K_{nv}(A_1, A_2) = F_{nv}^{nv}(A_1, A_2) \cap K(A_1, A_2)$ (п. 9) является идеалом (следовательно, и бидеалом) полугруды $K(A_1, A_2)$. Из п. 9 следует, что $K^* = \{C(A_1, A_2), K_{nv}(A_1, A_2)\}_b \subseteq F(A_1, A_2)$. Если $n, v \geq 3$ и $(\varphi, \psi) \in K^* \setminus K(A_1, A_2)$, то отображение φ (либо ψ не является взаимно однозначным, но в этом случае поступим аналогично) не является взаимно однозначным. Существуют элементы $a_i, b_i \in A_i$ ($i=1, 2$) такие, что $\varphi(a_i) = \varphi(b_i) = a'_2$, $a_i \neq b_i$. Обозначим $\varphi_1^{-1} = \{(a_2, a_1), (b_2, b_1)\}$ (см. п. 9). Из $(\varphi, \varphi_1^{-1}) \in K_{nv}(A_1, A_2)$, $(\varphi, \psi) \in K^*$ и (4) имеем

$$(\varphi, \varphi_1^{-1} \varphi \gamma_{a_2 a_1}) = q_{a_2 a_1}(\varphi, \psi)(\varphi, \varphi_1^{-1}) \in K_{nv}(A_1, A_2).$$

С другой стороны, $(a_2, a_1), (b_2, a_1) \in \varphi_1^{-1} \varphi \gamma_{a_2 a_1}$ вследствие (1); значит, $\varphi_1^{-1} \varphi \gamma_{a_2 a_1} \notin K_{nv}(A_1, A_2)$. Полученное противоречие показывает, что $K^* \subseteq K(A_1, A_2)$. Из теоремы п. 6 вытекает следующая теорема.

Теорема. $K_{nv}(A_1, A_2)$ является при $n, v \geq 3$ ρ_b -плотной подполугрудой полугруды $K(A_1, A_2)$.

11. Пусть $(A_1, \sigma_1), (A_2, \sigma_2)$ — некоторые графы. Бинарное отношение $\varphi \in P(A_1 \times A_2)$ называется (*многозначным*) *частичным гомоморфизмом* графа (A_1, σ_1) в (A_2, σ_2) , если для любых $a_1, b_1 \in A_1$

$$(a_1, b_1) \in \sigma_1 \rightarrow \varphi \langle a_1 \rangle \times \varphi \langle b_1 \rangle \subseteq \sigma_2.$$

Множество всех частичных многозначных гомоморфизмов графа (A_1, σ_1) в (A_2, σ_2) обозначим через $P\sigma(A_1 \times A_2)$. Пусть далее $C\sigma(A_1, A_2) = P\sigma(A_1 \times A_2) \times P\sigma(A_2 \times A_1)$, т. е. $C\sigma(A_1, A_2)$ множество всех пар (φ, ψ) , где $\varphi \in P\sigma(A_1 \times A_2)$, $\psi \in P\sigma(A_2 \times A_1)$; $F\sigma(A_1, A_2) = F(A_1, A_2) \cap C\sigma(A_1, A_2)$, $K\sigma(A_1, A_2) = K(A_1, A_2) \cap C\sigma(A_1, A_2)$ (см. п. 9), $X_{\text{пл}}^{nv}\sigma(A_1, A_2) = C_{\text{пл}}^{nv}\sigma(A_1, A_2) \cap X\sigma(A_1, A_2)$, где $X = C, F$ или K . Все $X\sigma(A_1, A_2)$ и $X_{\text{пл}}^{nv}\sigma(A_1, A_2)$ являются, как нетрудно проверить, подполугрудами полугруды $C(A_1, A_2)$.

Пусть σ — бинарное отношение на множестве A . Для всякого подмножества $B \subseteq A$ обозначим $\sigma|_B = (B \times B) \cap \sigma$. Существует всего 10 попарно неизоморфных графов $(B, \sigma|_B)$, где $|B| = 2$. Отношение σ_1 назовем *однотипным*, если для каждого двухэлементного подмножества $B_1 \subseteq A_1$ ($B_2 \subseteq A_2$) найдется такое подмножество $B_2 \subseteq A_2$ ($B_1 \subseteq A_1$), что графы $(B_1, \sigma_1|_{B_1})$ и $(B_2, \sigma_2|_{B_2})$ изоморфны.

Теорема. Пусть σ_i — однотипные отношения на множествах A_i ($i = 1, 2$). При $\mu, m, v, n \geq 3$ все $C_{\text{пл}}^{nv}\sigma(A_1, A_2)$ является ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $C\sigma(A_1, A_2)$.

Доказательство. Пусть $E = C_{m,p,n}^{\nu} \sigma(A_1, A_2)$, где $m, p, n, \nu \geq 3$ и $C' = \{C(A_1, A_2), E\}_b$. Покажем, что $C' = C\sigma(A_1, A_2)$, и воспользуемся затем теоремой п. 6. Если φ — какое-либо бинарное отношение из $P(A_1 \times A_2) \setminus P\sigma(A_1 \times A_2)$, то существуют элементы $a_1, b_1 \in A_1$ такие, что $a_2 \in \varphi < a_1 >, b_2 \in \varphi < b_1 >$ и

$$(a_1, b_1) \in \sigma_1 \wedge (a_2, b_2) \notin \sigma_2.$$

Допустим, что $(\varphi, \psi) \in C'$ при некотором $\psi \in P(A_2 \times A_1)$. По условию теоремы найдутся такие элементы $c_1, d_1 \in A_1$ и отображения $\varphi_1 \in P_3^3 \sigma(A_1 \times A_2), \psi_1 \in P_3^3 \sigma(A_2 \times A_1)$ такие, что $\psi_1 a_2 = c_1, \psi_1 b_2 = d_1, \varphi_1 c_2 = a_1, \varphi_1 d_2 = b_1, (c_1, d_1) \in \sigma_1, (c_2, d_2) \in \sigma_2$. Тогда $(\varphi_1, o), (o, \psi_1) \in C$ и в силу $(\varphi, \psi) \in C'$ имеем

$$(o, \psi_1 \varphi \psi_1) = (o, \psi_1) (\varphi, \psi) (o, \psi_1) \in C.$$

Следовательно, $\psi' = \psi_1 \psi_2 \varphi \in P_3^3 \sigma(A_2 \times A_1)$. Но по построению

$$c_1 \in \psi' < c_2 >, d_1 \in \psi' < d_2 >, (c_2, d_2) \in \sigma_2, (c_1, d_1) \in \sigma_1.$$

Аналогичны рассуждения и для

$$\psi \in P(A_2 \times A_1) \setminus P\sigma(A_2 \times A_1).$$

Полученное противоречие показывает, что $C' \subseteq C\sigma(A_1, A_2)$. С другой стороны, очевидно, что $C\sigma(A_1, A_2) \subseteq C'$, и, следовательно, $C' = C\sigma(A_1, A_2)$. Теорема доказана.

11. 1. Теорема. Пусть σ_1 — однотипные отношения на множествах $A_i (i = 1, 2)$. При $\nu, m, p, n \geq 3$ все $C_{m,p,n}^{\nu} \sigma(A_1, A_2)$ являются ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $F\sigma(A_1, A_2)$, а $K_{n,\nu} \sigma(A_1, A_2)$ — ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $K\sigma(A_1, A_2)$.

Доказательство ведется как и в п. 11.

12. Известно [1, 5], что множество $P(A_1 \times A_2)$ (п. 7) является полугрудой относительно действия

$$[\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3] = \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1,$$

а множество $V(A_1 \times A_2)$ всех обратимых частичных отображений множества A в C — подполугрудой полугруды $P(A_1 \times A_2)$. Более того, $V(A_1 \times A_2)$ является обобщенной грудой [1, 5]. Нетрудно проверить, что все множества $P_m^n(A_1 \times A_2)$ являются биидеалами полугруды $P(A_1 \times A_2)$, а $V_n(A_1 \times A_2) = P_n^n(A_1 \times A_2) \cap V(A_1 \times A_2)$ — биидеалами полугруды $V(A_1 \times A_2)$.

Теорема. Пусть E и $E' = \{P(A_1 \times A_2), E\}_b$ — подполугруды полугруды $P(A_1 \times A_2)$. Если E содержит $P_2^2(A_1 \times A_2)$, то E_{ρ_b} — плотна в E' .

Доказательство этой теоремы аналогично п. 6. Если S — полугруда, содержащая E и $(E, S) \in \rho_b$, то гомоморфизм f полугруды S в E' строится следующим образом:

$$(a_1, a_2) \in fs \text{ — } \gamma_{a_1 a_2} S \gamma_{a_1 a_2} \neq 0.$$

12. 1. Как и в п. 7, из теоремы п. 12 следует

Теорема. Все $P_m^n(A_1 \times A_2)$ являются ρ -плотными подполугрудами полугруды $P(A_1 \times A_2)$.

12. 2. Теорема. Для того, чтобы полугруда S была изоморфна полугруде $P(A_1 \times A_2)$, необходимо и достаточно, чтобы она содержала ρ_b -плотную полугруду, изоморфную $P_2^2(A_1 \times A_2)$.

Справедливость этой теоремы следует из п. 5. Она дает новую абстрактную характеристику полугруды $P(A_1 \times A_2)$ с помощью полугруды $P_2^2(A_1 \times A_2)$. Абстрактная характеристика полугруды $P_2^2(A_1 \times A_2)$ известна [3, 5]: это вполне простая обобщенная груда без нетривиальных гомоморфизмов, для которой мощность множества минимальных

левых и соответственно правых идеалов равна $[A_1]$ и $[A_2]$. Другая ее абстрактная характеристика приведена в работе [8].

12. 3. Приведенная ниже теорема дает еще одну абстрактную характеристику полугруды $P_2^2(A_1 \times A_2)$. Доказательство ее приводится как и в п. 8. 2 и опирается на результаты работ [3, 4].

Теорема. Для того, чтобы полугруда S была изоморфна полугруде $P_2^2(A_1 \times A_2)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) S — вполне простая полугруда с нулем, не содержащая отличных от S и $\{O\}$ двусторонних идеалов;

2) S не обладает нетривиальными гомоморфизмами.

3) S инверсна.

13. Как и в п. 10, из теоремы п. 12 следует

Теорема. Все $V_n(A_1 \times A_2)$ при $n \geq 3$ являются ρ -плотными подполугрудами $V(A_1 \times A_2)$.

14. Пусть $(A_1, \sigma_1), (A_2, \sigma_2)$ — пара однотипных графов (п. 11). Обозначим через $V\sigma(A_1 \times A_2)$ множество всех обратимых частичных отображений $\varphi \in V(A_1 \times A_2)$ таких, что $\varphi \in P\sigma(A_1 \times A_2)$ и $\varphi^{-1} \in P\sigma(A_2 \times A_1)$. Будем называть такие отображения φ частичными изоморфизмами графа (A_1, ρ_1) в (A_2, ρ_2) . Множество $V\sigma(A_1 \times A_2)$ всех обратимых частичных изоморфизмов графа (A_1, ρ_1) в (A_2, ρ_2) является, очевидно, подполугрудой полугруды $V(A_1 \times A_2)$. Обозначим $V_n\sigma(A_1 \times A_2) = V(A_1 \times A_2) \cap V_n(A_1 \times A_2)$. Подобно пп. 11 и 11. 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема. Все $V_n\sigma(A_1 \times A_2)$ являются ρ_b -плотными подполугрудами полугруды $V\sigma(A_1 \times A_2)$.

В заключение выражаю благодарность проф. Л. М. Глускину за помощь и советы в процессе работы над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Теория обобщенных груд и обобщенных групп. Матем. сб. 32, № 3, 1953.
2. Глускин Л. М. О плотных вложениях. Матем. сб., 61, № 2, 1963.
3. Глускин Л. М. Вполне простые полугруды. Сб. "Теория полугрупп и ее приложения". Саратов, 1965.
4. Глускин Л. М. "ДАН СССР", 151, № 3, 1963.
5. Глускин Л. М. Идеалы полугруд. Сб. "Теория полугрупп к ее приложения", Саратов, 1965.
6. Clifford. A. H., Preston. G. B. "The algebraic theory of semigroups", Providence, 1961.
7. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., 1960.
8. Шайн Б. М. Симметрические обобщенные группы. Научн. доклады высшей школы, физ.-матем. науки, № 1, 1959.

Институт математики и механики АН Азерб. ССР

Поступило 25. XII 1969

Р. Б. Феязллаев

Жарымгрудларын биидеаллары наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гомоморфизм жарымгрудлары васитәсилә верилмиш (A, ρ) графынын структур гурулушундан бәһс едилмишдир.

Л. М. Глускин тәрәфиндән ишләмиш сых дахилолма үсулу васитәсилә верилмиш графы сәчијјәләндирән мұхтәлиф ийкәсләр жарымгрудлары арасындакы изоморфизмин давамы алынмышдыр.

Дж. А. АББАСОВ

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение гиперболического типа в замкнутом прямоугольнике

$$R = \{0 \leq x \leq r_1, 0 \leq y \leq r_2\}:$$

$$L(u) = u_{xy}(x, y) + a(x, y)u_x(x, y) + b(x, y)u_y(x, y) + c(x, y)u(x, y) = d(x, y), \quad (1)$$

где коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $d(x, y)$ — действительные функции от x и y , определенные в R .

Целью настоящей работы является нахождение решения уравнения (1), непрерывного в R , вместе со своими частными производными u_x , u_y , u_{xx} , u_{yy} , удовлетворяющего граничным условиям:

$$u_{xx}(x, y) = \sigma_0(x)u(x, y) + \alpha_1(x)u_x(x, y) + \alpha_2(x)u_y(x, y) + o(x) + \int_{x^*}^x \delta_1(\eta)u(x, \eta)d\eta \text{ на } y = \Gamma_1, \quad (2)$$

$$U_{yy}(x, y) = \beta_0(y)U(x, y) + \beta_1(y)U_x(x, y) + \beta_2(y)U_y(x, y) + \tau(y) + \int_{y^*}^y \delta_2(\xi)U(\xi, y)d\xi \text{ на } x = \Gamma_2(y),$$

$$U(x^*, x^*) = \gamma_1, \quad U_x(x^*, y^*) = \gamma_2, \quad U_y(x^*, y^*) = \gamma_3.$$

Здесь $\sigma_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\sigma(x)$, $\Gamma_1(x)$, $\delta_2(\xi)$ — заданные непрерывные функции в $[0, r_1]$; $\beta_0(y)$, $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$, $\tau(y)$, $\Gamma_2(y)$, $\delta_1(\eta)$ — заданные непрерывные функции в $[0, r_2]$, а C_1 и C_2 — две кривые с уравнениями $y = \Gamma_1(x)$ и $x = \Gamma_2(y)$, соответственно, целиком лежащие внутри R ; γ_1 , γ_2 , γ_3 — постоянные числа.

В данной статье в отличие от работ [2], [3], [4] граничные условия (2) содержат производные высокого порядка и интегральный член.

Существование и единственность решения

Известно [1], что решение уравнения (1) в R дается формулой Римана:

$$U(x, y) = G(x, y) + \int_{x^*}^x \varphi(\xi)V(\xi, y^*; x, y)d\xi + \int_{y^*}^y \psi(\eta)V(x^*, \eta; x, y)d\eta, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= U_x(x, y^*) + b(x, y^*)U(x, y^*), \\ \psi(y) &= U_y(x^*, y) + a(x^*, y)U(x^*, y), \\ G(x, y) &= U(x^*, y^*)V(x^*, y^*; x, y) + \\ &+ \int_{x^*}^x \int_{y^*}^y d(\xi, \eta)V(\xi, \eta; x, y)d\xi d\eta \end{aligned}$$

и $V(\xi, \eta; x, y)$ является функцией Римана для однородного уравнения $L(u) = 0$.

Граничная задача (1) — (2) эквивалентна системе функционально-интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x^*) + \int_{x^*}^x \alpha_1(\xi_1)\varphi(\xi_1)d\xi_1 + \int_{x^*}^x g(\xi_1)d\xi_1 + \int_{x^*}^x \alpha(\xi_1)\psi(\Gamma_1(\xi_1))d\xi_1 + \\ &+ \int_{x^*}^x \int_{x^*}^x K_1(\xi, y^*; \xi_1)\varphi(\xi)d\xi d\xi_1 + \int_{x^*}^x \int_{y^*}^{\Gamma_1(\xi_1)} K_1(x^*, \eta; \xi_1)\psi(\eta)d\eta d\xi_1 + \\ &+ \int_{x^*}^x \int_{x^*}^{\xi_1} \delta_1(\eta)(G(\xi_1, \Gamma_1(\xi_1, 1)) + \int_{x^*}^{\xi_1} V(\xi, y^*; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1))\varphi(\xi)d\xi + \\ &+ \int_{y^*}^{\Gamma_1(\xi_1)} V(x^*, \eta; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1))\psi(\eta)d\eta)d\eta d\xi; \\ \psi(y) &= \psi(y^*) + \int_{y^*}^y \alpha_2(\eta_1)\psi(\eta_1)d\eta_1 + \int_{y^*}^y h(\eta_1)d\eta_1 + \\ &+ \int_{y^*}^y \beta(\eta_1)\varphi(\Gamma_2(\eta_1))d\eta_1 + \int_{y^*}^y \int_{x^*}^{\Gamma_2(\eta_1)} K_2(\xi_1 y^*; \eta_1)\varphi(\xi)d\xi d\eta_1 + \\ &+ \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} K_2(x^*, \eta; \eta_1)\psi(\eta)d\eta d\eta_1 + \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} \delta_2(\xi)(G(\Gamma_2(\eta_1), \eta_1) + \\ &+ \int_{x^*}^{\Gamma_2(\eta_1)} V(\xi_1 y^*; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1)\varphi(\xi)d\xi + \int_{y^*}^{\eta_1} V(x^*, \eta; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1)\psi(\eta)d\eta)d\xi d\eta_1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g(x) &= [\sigma_0(x)G(x, \Gamma_1(x)) + \alpha_1(x)G_x(x, \Gamma_1(x)) + \alpha_2(x)G_y(x, \Gamma_1(x)) - \\ &- G_{xx}(x, \Gamma_1(x)) + \sigma(x)][V(x^*, y; x, \Gamma_1(x))]^{-1}, \\ h(y) &= [\beta_0(y)G(\Gamma_2(y), y) + \beta_1(y)G_y(\Gamma_2(y), y) + \beta_2(y)G_y(\Gamma_2(y), y) - \\ &- G_{yy}(\Gamma_2(y), y) + \tau(y)][V(x, y^*; \Gamma_2(y), y)]^{-1}, \\ \alpha(x) &= [\alpha_2(x)V(x^*, \Gamma_1(x); x, \Gamma_1(x))][V(x, y^*; x, \Gamma_1(x))]^{-1}, \\ \beta(y) &= [\beta_1(y)V(\Gamma_2(y), y^*; \Gamma_2(y), y)][V(x^*, y; \Gamma_2(y), y)]^{-1}, \\ K_1(\xi, \eta; x) &= [\alpha_0(x)V(\xi, \eta; x, \Gamma_1(x)) + \alpha_1(x)V(\xi, \eta; x, \Gamma_1(x)) + \\ &+ \alpha_2(x)V_y(\xi, \eta; x, \Gamma_1(x)) - V_{xx}(\xi, \eta; x, \Gamma_1(x))][V(x, \eta, x, \Gamma_1(x))]^{-1}, \\ K_2(\xi, \eta; y) &= [\beta_0(y)V(\xi, \eta; \Gamma_2(y), y) + \beta_1(y)V_x(\xi, \eta; \Gamma_2(y), y) + \\ &+ \beta_2(y)V_y(\xi, \eta; \Gamma_2(y), y) - V_{yy}(\xi, \eta; \Gamma_2(y), y)][V(x^*, y; \Gamma_2(y), y)]^{-1}, \\ \alpha_1(x) &= [\alpha_1(x)V(x, y^*; x, \Gamma_1(x)) - 2V_x(x, y^*; x, \Gamma_1(x)) \times \\ &\times [V(x^*, y^*; \Gamma_1(x), x)]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\alpha_2(y) = [\beta_2(y)V(x^*, y; \Gamma_2(y), y) - 2V_y(x^*, y, \Gamma_2(y), y)][V(x^*, y; \Gamma_2(y), y)]^{-1}.$$

Так как задача (1) — (2) эквивалентна системе (4), то достаточно установить существование и единственность решения системы (4).

Пусть $C(I_1)$, $C(I_2)$ обозначают пространства непрерывных функций на интервалах $I_1[0, r_1]$ и $I_2 = [0, r_2]$, соответственно.

Рассмотрим банахово пространство:

$$C = \{f = (\varphi, \psi); \varphi \in C(I_1), \psi \in C(I_2), f = \max(\|\varphi\|, \|\psi\|)\},$$

где

$$\|\varphi\| = \max_{x \in I_1} |\varphi(x)|, \quad \|\psi\| = \max_{y \in I_2} |\psi(y)|.$$

Пусть

$$\begin{aligned} f_0 &= \left(\varphi(x^*) + \int_{x^*}^x g(\xi_1) d\xi_1 + \int_{x^*}^x \int_{x^*}^{\xi_1} \delta_1(\eta) G(\xi_1, \Gamma_1(\xi_1)) d\eta d\xi_1, \right. \\ &\quad \left. \psi(y^*) + \int_{y^*}^y h(\eta_1) d\eta_1 + \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} \delta_2(\xi) G(\Gamma_2(\eta_1), \eta_1) d\xi d\eta_1, \right. \\ &\quad \left. Hf = \left(\int_{x^*}^x z_1(\xi_1) \varphi(\xi_1) d\xi_1 + \int_{x^*}^x \alpha(\xi_1) \psi(\Gamma_1(\xi_1)) d\xi_1, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{y^*}^y z_2(\eta_1) \psi(\eta_1) d\eta_1 + \int_{y^*}^y \beta(\eta_1) \varphi(\Gamma_2(\eta_1)) d\eta_1 \right), \right. \\ I_1 f &= \left(\int_{x^*}^x \int_{x^*}^{\xi_1} K_1(\xi, y^*; \xi_1) \varphi(\xi) d\xi d\xi_1 + \int_{x^*}^x \int_{y^*}^{\Gamma_1(\xi_1)} K_1(x^*, \eta; \xi_1) \psi(\eta) d\eta d\xi_1, \right. \\ &\quad \left. \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} K_2(x^*, \eta; \eta_1) \psi(\eta) d\eta d\eta_1 + \int_{y^*}^y \int_{x^*}^{\Gamma_2(\eta_1)} K_2(\xi, y^*; \eta_1) \varphi(\xi) d\xi d\eta_1 \right), \\ I_2 f &= \left(\int_{x^*}^x \int_{x^*}^{\xi_1} \int_{x^*}^{\xi_1} \delta_1(\eta) \varphi(\xi) V(\xi, y^*; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1)) d\xi d\eta d\xi_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x^*}^x \int_{x^*}^{\xi_1} \int_{x^*}^{\Gamma_1(\xi_1)} \psi(\eta) \delta_1(\eta) V(x^*, \eta; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1)) d\eta d\xi d\xi_1, \right. \\ &\quad \left. \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} \int_{y^*}^{\eta_1} \psi(\eta) \delta_2(\xi) V(x^*, \eta; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1) d\eta d\xi d\eta_1 + \right. \\ &\quad \left. + \int_{y^*}^y \int_{y^*}^{\eta_1} \int_{x^*}^{\Gamma_2(\eta_1)} \varphi(\xi) \delta_2(\xi) V(\xi, y^*; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1) d\xi d\eta_1 d\eta \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} K_3(\xi, \eta; \xi) &= \delta_1(\eta) V(\xi, y^*; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1)), \\ K_4(\eta, \xi_1) &= \delta_1(\eta) V(x^*, \eta; \xi_1, \Gamma_1(\xi_1)), \\ K_5(\xi, \eta; \eta_1) &= \delta_2(\xi) V(x^*, \eta; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1), \\ K_6(\xi, \eta) &= \delta_2(\xi) V(\xi, y^*; \Gamma_2(\eta_1), \eta_1). \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью этих обозначений система сводится к операторному уравнению

$$f = f_0 + (H + I_1 + I_2)f. \quad (8)$$

Для доказательства существования и единственности решения операторного уравнения (8) достаточно доказать, что оператор T , определенный формулой (9):

$$Tf = f_0 + (H + I_1 + I_2)f, \quad f_0, f \in C, \quad (9)$$

имеет единственную неподвижную точку в C .

Доказательство. Очевидно, что оператор T отображает C в себе. Чтобы доказать, что T имеет единственную неподвижную точку, достаточно показать, что T^2 является сжатым отображением.

Рассмотрим $f, \bar{f} \in C$, тогда из (9) получим

$$\|T^2 f - T^2 \bar{f}\| \leq Q \|f - \bar{f}\|,$$

где

$$Q = 4M^2 L^2 + (9MN + M\bar{M})L^3 + (5M\bar{M} + 5N^2 + N\bar{M})L^4 + (MN + 4M\bar{M})L^5 + 4L^6 \bar{M}^2,$$

$$M(r_1, r_2) = \max\{|\alpha_1(\xi)|, |\alpha_2(\eta)|, |\alpha_2(\Gamma_1(\xi))|, |\alpha(\xi)|, |\beta(\eta)|\},$$

$$\bar{M} = \max\{|\bar{K}_3|, |\bar{K}_4|, |\bar{K}_5|, |\bar{K}_6|\},$$

$$N = \max_{\substack{\xi, x \in I_1 \\ \eta, y \in I_2}} \{ |K_1(\xi, y^*; \xi_1)|, |K_1(x^*, \eta; \xi_1)|, |K_2(x^*, \eta; \eta_1)|, |K_2(\xi, y^*; \eta_1)| \}$$

$$L = \max\{r_1, r_2\},$$

$Q < 1$ при достаточно малых L .

Поэтому при $Q < 1$ оператор T^2 является сжатым отображением и T , имеет единственную неподвижную точку, т. е. существует единственная $f \in C$ такое, что $Tf = f$. Таким образом нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть:

I. $a(x, y)$, $b(x, y)$ — непрерывные дифференцируемые, $c(x, y)$ и $d(x, y)$ — непрерывные функции в R ;

II. $K_1(\xi, y^*; \xi_1) \in C(I_1 \times I_1)$, $K_1(x^*, \eta; \xi_1) \in C(I_2 \times I_1)$;
 $K_2(x^*, \eta; \eta_1) \in C(I_2 \times I_2)$, $K_2(\xi, y^*; \eta_1) \in C(I_1 \times I_2)$;
 $K_3(\xi_1, \eta; \xi) \in C(I_2 \times I_1)$, $K_4(\eta, \xi_1) \in C(I_2 \times I_1)$;
 $K_5(\xi, \eta; \xi_1) \in C(I_1 \times I_2)$, $K_6(\xi, \eta_1) \in C(I_1 \times I_1)$;

III. $\alpha(x)$, $g(x)$, $z_1(x)$, $\Gamma_1(x) \in C(I_1)$ и $0 \leq \Gamma_1(x) \leq r_2$,
 $\beta(y)$, $h(y)$, $z_2(y)$, $\Gamma_2(y) \in C(I_2)$ и $0 \leq \Gamma_2(y) \leq r_1$,
 $x^*, y^* \in R = I_1 \times I_2$;

IV. $Q < 1$.

Тогда существует единственное решение системы (4).

Так как система (4) эквивалентна задаче (1) — (2), то тем самым доказано существование и единственность решения задачи (1) — (2).

В заключение выражаю глубокую благодарность доценту Г. К. Намазову за руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики, М, 1966.
2. Aziz A. K. and Diaz I. B. On a Mixed Boundary value problem for Linear Hyperbolic partial differential Equations in two Independent Variables, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol 10, 1962, pp. 1—28.
3. Aziz A. K. A Functional-integral equation with applications to Hyperbolic partial differential equations.
4. Chu S. C. and Diaz I. B. Remarks on a Mixed Boundary-Value problem for Linear Hyperbolic partial differential Equations in two Independent Variables, Archive for Rational Mechanics and Analysis, vol 16 1964, pp. 187—195.

Ин-т математики и механики
АН Азерб. ССР

Поступило 12. V 1969

Ч. А. Аббасов

гиперболик тип икинчи тәртіб дифференсиал тәнлик
үчүн Гурса мәсәләсинин һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда (1) — (2) мәсәләси үчүн варлыг вә јеканәлик теоремі исбат едилмишдир. Теоремин исбатында сыхылмыш инкас принципдән истифадә олунамудур.

С. Х. БАБАЕВ, З. Ш. КАРАЕВ, А. Г. РУСТАМОВ

СИНТЕЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ $GdGaSe_3$

В последнее время поиски новых полупроводниковых материалов, особенно пригодных для применения при высоких температурах, естественно, привели к широкому исследованию свойств соединений редкоземельных металлов (р. з. м.). В результате интенсивных исследований в этой области как в СССР, так и в зарубежных странах у халькогенидов р. з. м. были обнаружены подходящие электрические свойства и достаточная термическая стабильность. Так, например, исследования ряда авторов показали, что многие из этих соединений являются полупроводниками с широкой запрещенной зоной порядка около 2 эв и обладают высокими температурами плавления, превышающими в ряде случаев 1500—2000°C. Имеются сведения об использовании их в качестве термоэлектрических материалов.

В настоящее время для удовлетворения все возрастающих требований современной полупроводниковой техники синтезированы и тройные аналоги халькогенидов р. з. м. [1—4]. Одной из групп соединений этого типа являются халькогаллаты и халькоиндаты р. з. м. с общей формулой ABX_3 (A—элементы подгруппы церия; B—Ga, In; X—халькогены).

Исследование свойств этих соединений вызывает значительный интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Практический интерес заключается в том, что плавное изменение размеров ионов р. з. м. в этих соединениях может привести к аналогичному изменению электрических свойств данного класса соединений, что исключительно важно при установлении оптимального сочетания практически важных характеристик. Однако при получении указанных тройных соединений обычно ограничиваются использованием лишь элементов подгруппы церия. Привлечение элементов подгруппы иттрия дало бы возможность увеличить количество подобных соединений.

В настоящей работе впервые было синтезировано новое тройное соединение $GdGaSe_3$, так называемый селеногаллат гадолиния, и проведено его комплексное исследование, охватывающее вопросы изучения электрических и некоторых других свойств.

Селеногаллат гадолиния был синтезирован как из элементов, так и из селенидов (Gd_2Se_3 , Ga_2Se_3) в откаченных ($\sim 10^{-3}$ мм рт. ст.) кварцевых ампулах при максимальной температуре 1200°C. После установления фазового и химического состава поликристаллических образцов были определены некоторые физико-химические и кристаллографические параметры $GdGaSe_3$, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Соединение	Цвет		$T_{пл}, ^\circ C$	Микротвердость, $KГ/мм^2$ (20 г)	Плотность, $г/см^3$		Сингония и парам. решетки, $^\circ A$	Кол-во мол. в эл. яч.	Об. мол., Å^3		T образца, $^\circ C$
	слитка	порошок			пикном	рент			практич.	теор.	
$GdGaSe_3$	темно-серый	темно-красный	> 1200	273	5,59	5,45	гексагональная $a = 10,27$ $c = 6,22$	4,1 = 4	142,03	140,01	880

Измерение электрофизических свойств $GdGaSe_3$ производилось на прессованных образцах (холодное прессование под давлением $3 \frac{T}{см^2}$), спеченных при $\sim 1000^\circ C$ и отожженных при $800^\circ C$ в течение 50 часов. Электропроводность и термо-э. д. с. $GdGaSe_3$ измерялись в вакууме порядка $\sim 10^{-3}$ мм рт. ст. Электропроводность $GdGaSe_3$ измерялась компенсационным методом [5]. При комнатной температуре величина ее составляла $1,4 \cdot 10^{-6} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$.

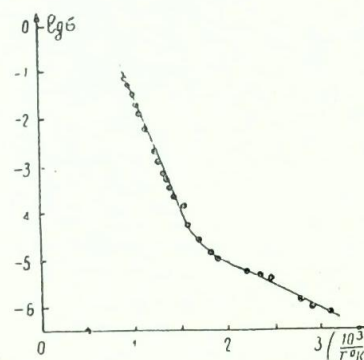


Рис. 1. Температурная зависимость электропроводности $GdGaSe_3$.

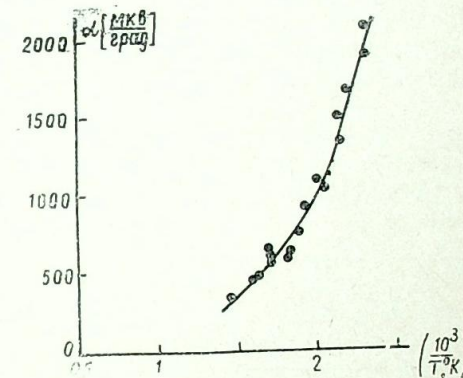


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициента термо-э. д. с. $GdGaSe_3$.

Измерение электропроводности (σ) и коэффициента термо-э. д. с. (α) показало, что в температурной области 300—1100°K изученное нами соединение $GdGaSe_3$ обладает полупроводниковым ходом проводимости (рис. 1, 2). На рис. 1, где приведены кривые зависимости $\lg \sigma = f\left(\frac{10^3}{T^\circ K}\right)$, можно выделить два прямолинейных участка, которые соответствуют областям примесной и собственной проводимости $GdGaSe_3$. Переход из области примесной проводимости в область собственной осуществляется при 625°K. Энергия активации примеси и ширина запрещенной зоны, определенные на основе кривой $\lg \sigma = f\left(\frac{10^3}{T^\circ K}\right)$, составляют, соответственно, 0,8 и 2 эв.

Известно, что для полупроводника с одним типом носителей тока коэффициент термо-э. д. с. в области примесной проводимости описывается формулой [6]:

$$\alpha = \frac{\kappa}{e} \left(A + \frac{\Delta E_1}{2\kappa} \cdot \frac{1}{T} \right), \text{ где } A = 2 + \ln \frac{2^{\frac{1}{2}} (2\pi m_p^* kT)^{3/4}}{h^{3/2} P^{1/2}}. \quad (1)$$

Из этого видно, что зависимость $\alpha = f\left(\frac{10^3}{T^0, K}\right)$ изображается прямой с тангенсом угла наклона $\frac{\Delta E_1}{2K}$. Нами из температурной зависимости

коэффициента термо-э. д. с. в примесной области определено значение $\Delta E_1 = 0,79$ (энергия активации примесей). В пределах ошибки $\Delta E_a = \Delta E_s$ (ΔE_a — энергия активации примесей, определенная из

$\alpha = f\left(\frac{10^3}{T^0, K}\right)$, а ΔE_s — из $\lg \sigma = f\left(\frac{10^3}{T^0, K}\right)$. Такое близкое совпадение

говорит о том, что в области примесной проводимости температурная зависимость коэффициента термо-э. д. с. хорошо описывается формулой (1).

Предполагая $m_p^* = m_0$, а также $r = 2$, из выражения коэффициента термо-э. д. с. вычисляем концентрацию и дрейфовую подвижность $\left(u_D = \frac{\sigma}{pe}\right)$ носителей тока. Результаты вычисления показали, что с изменением температуры от 500 до 667°K концентрация носителей тока меняется от $1,7 \cdot 10^{11}$ до $7,1 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, а подвижность — от 371,5 до 0,002 см/в.сек. Отсюда видно, что увеличение электропроводности при повышении температуры в основном связано с ростом концентрации носителей тока. Необходимо отметить, что вышеуказанный выбор m^* и r не влияет на температурный ход подвижности и GdGaSe_3 образуется благодаря участию в химической связи, кроме обычных валентных sp -электронов, электронов d -подуровней гадолиния (табл. 2).

Таблица 2

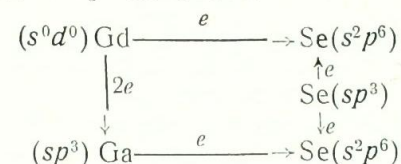
Элементы	Электронная конфигурация	Потенциал ионизации валентных электронов, эв		
		I	II	III
Gd	4 t^7 5d ¹ 6s ²	6,16	(12)	(23)
Ga	4 s ² 4 p ¹	6,00	20,51	30,70
Se	4 s ² 4 p ⁴	9,75	21,50	32,00

Из табл. 2. следует, что первый ионизационный потенциал гадолиния очень близок к соответствующей величине для галлия, но значительно меньше, чем первый ионизационный потенциал селена. По величине второго ионизационного потенциала наблюдается близость между селеном и галлием, но у гадолиния значение соответствующего ионизационного потенциала примерно в два раза меньше. Приблизительно такая же картина наблюдается и в отношении третьего потенциала ионизации этих элементов.

В связи с указанными положениями о строении электронной конфигурации и об энергетических характеристиках составляющих GdGaSe_3 представляется возможность полагать, что на первом этапе возбуждения атомов происходит переход по одному электрону гадолиния и галлия к двум атомам селена (при статическом рассмотрении), у которых в определенных условиях имеется склонность к образованию электронной конфигурации криптона — $4s^2 4p^6$. Теперь отметим, что галлий имеет валентные sp -электроны с конфигурацией в состоянии изолированного атома $s^2 p$. При объединении изолированных атомов

в кристалле, как правило, сначала происходит преобразование конфигурации $s^2 p$ в sp^2 , а затем по мере возможности — в более энергетически устойчивую конфигурацию sp^3 . По-видимому, в рассматриваемом случае это и происходит в результате очередного вероятного перехода s -электронов гадолиния к атому галлия, поскольку второй и третий потенциалы ионизации гадолиния меньше, чем соответствующие потенциалы ионизации галлия. Далее, в связи со стремлением атомов селена, принявших конфигурации $s^2 p^5$, к образованию устойчивой $s^2 p^6$ возможна передача электронов от третьего атома селена ($s^2 p^4$) к двум другим атомам ($s^2 p^5$) его с образованием устойчивой sp^3 -конфигурации.

Таким образом в соответствии с указанными вероятными переходами электронов можно полагать, что три атома селена, входящие в состав GdGaSe_3 , неравноценны: два из них имеют электронные конфигурации $s^2 p^6$, а один — sp^3 по схеме:



Предполагаемое электронное распределение у компонентов, как правило, должно определить характер межатомной связи в GdGaSe_3 . Поскольку остовы атома галлия и одного из атомов селена в GdGaSe_3 имеют sp^3 -конфигурацию, между ними должна быть ковалентная связь, что наблюдается в GdGaSe_3 .

Характер электронного строения остовов других атомов селена ($4s^2 4p^6$) и гадолиния ($5d^0 6s^0$) указывает на наличие преимущественно ионной связи между этими компонентами GdGaSe_3 . Следовательно, в GdGaSe_3 происходит наложение двух типов связи, т. е. он является гетеродесмическим соединением.

Предположение о наличии ковалентно-ионной связи в GdGaSe_3 подтверждается обнаруженными у него полупроводниковыми свойствами и некоторыми другими положениями. Так, например, рассчитанные межатомные расстояния Gd—Se и Ga—Se оказались меньше суммы атомных радиусов этих элементов, но больше их ионных радиусов. Кроме того, расшифровка структуры других представителей (LaInSe_3 , PrInSe_3) данного класса соединений указывает на неодинаковость положения различных атомов серы в элементарной ячейке этих соединений и на их различную зарядность [4].

Выводы

1. Впервые синтезирован селеногаллат гадолиния CdGaSe_3 и исследованы его свойства.
2. Установлено, что GaGdSe_3 обладает полупроводниковыми свойствами.
3. На основании энергетических характеристик и особенности строения валентных электронов изолированных атомов гадолиния, галлия и селена высказано предположение об электронных конфигурациях компонентов GdGaSe_3 , указывающее на наличие в рассматриваемом соединении ковалентно-ионной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфендиев Г. Х., Рустамов П. Г., Караев З. Ш. Введение в химию редких элементов (монография на азерб. яз.). Азербешр, 1964.
2. Самсонов Г. В., Падерно Ю. Б., Мургузов М. И., Федорченко В. П., Караев З. Ш. „Порошковая металлургия“, 1967, № 1.

3. Самсонов Г. В., Падерно Ю. Б., Караев З. Ш., Мургузов М. И., Федорченко В. П. „Азерб. хим. ж.“, 1967, № 4.
 4. Гадымов А. М., Гамидов Р. С., Мамедов Х. С., Караев З. Ш. О кристаллической структуре халькоиндатов редкоземельных элементов типа TRInS_3 ($\text{TR} = \text{La, Ce, Pr, Nd, Sm}$).
 5. Валиев Л. М., Рустамов А. Г., Керимов И. Г. „ДАН Азерб. ССР“, 22, 13, 1966.
 6. Иоффе А. Ф. Полупроводниковые термоэлементы. Изд. АН СССР, М.—Л., 1960.

Институт физики
 АН Азерб. ССР

Поступило

С. Х. Бабаев, З. Ш. Гараев, Э. Н. Рустамов

GdGaSe₃-үн синтези вэ электрик хассэлэринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә гадолиний селеногаллат бирләшмәсинин синтези вэ электрик хассэлэринин тэдгиги нәтичәлэри верилмишдир.

Кристаллохимияви тэдгигатлар кәстәрмишдир ки, GdGaSe_3 гексагонал гурулушда кристаллашыр. Электрик кечирмәнин вэ термо ЭГ-нин температур асылылыгы өйрәниләрәк, јени алынмыш үчгәт бирләшмәнин јарымкечиричилији мүәјјәнләшдирилмишдир. Электрик-кечирмәнин температур асылылыгы әјрисиндән ашгарларын активләшмә енерјиси вэ гадаған олунмуш золагын ени һесаблинмышдыр (үј-гун олараг 0,8 вэ 2 ев).

Гадолиний, галлий вэ селен атомлары валент электронларынын гурулуш хүсусијјәти, енеркетик характеристикаларына әсасланараг, GdGaSe_3 -үн ковалент—ион рабитәсинин олмасы күман едилир.

АЗЕРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-техника вэ ријазийәт елмләри сәријасы, 1970, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 3.

К. У. РЗАЕВ

ВАРИАЦИОННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Настоящая статья является развитием работы [1], в отличие от которой здесь ставятся и решаются новые не только вариационные, но и краевые задачи. Вариационные задачи решаются в более общей форме, благодаря чему несколько меняется доказательство* и расширяется класс задач.

Так же, как и в [1], исследование ведется в областях типа регулярных, в состав границы которых могут входить многообразия меньшего числа измерений, чем $(n-1)$, и граничные условия берутся как типа С. Л. Соболева и В. И. Кондрашова [2, 3, 4], так и с граничными условиями типа С. М. Никольского [5, 6]. Устанавливается единственность вариационной задачи.

Для некоторого класса функционалов при определенных дополнительных условиях исследуются дифференциальные свойства соответствующих обобщенных решений интегро-дифференциальных уравнений. Дается обоснование вариационного принципа решения краевых задач для класса функционалов, отвечающих нелинейным интегро-дифференциальным уравнениям в указанных областях. Необходимо сослаться также на работы А. С. Фохта [7], О. А. Ладыженской [8] и Ю. Д. Салманова [9], которые имеют отношение ко второму параграфу настоящей статьи. Основные понятия в § 1 те же, что в [1].

§ 1. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТЯХ ТИПА РЕГУЛЯРНЫХ

1. Области, функционалы и основные условия.

Как и в [1], в n -мерном евклидовом пространстве выделяется некоторая ограниченная регулярная (С. М. Никольский) область G . Вместе с тем предполагается, что G есть область с границей вырожденного типа, т. е. граница ее Γ может содержать конечное число достаточно гладких многообразий $S_{n-2}, \dots, S_0$ соответственно размерности $n-2, \dots, 0$, в окрестности которых применимы теоремы вложения W_p^r .

Подобные области с границей вырожденного типа рассматривались ранее С. Л. Соболевыми и В. И. Кондрашовым [2, 3, 4] с той лишь основной разницей, что если убрать многообразия $S_{n-2}, \dots, S_0$, то получится область, регулярная в смысле С. М. Никольского с границей Γ_{n-1} . Таким образом

$$\Gamma = \Gamma_{n-1} + S_{n-2} + \dots + S_0.$$

* Теорема 1.

Также предполагаем, что некоторая часть Γ_{n-1} границы Γ может состоять из достаточно гладких многообразий размерности $(n-1)$. Рассмотрим функционал вида

$$\hat{I}(\varphi) = \sum_{\tau \in EUL} \sum_{\substack{\{m_\tau\} \\ \{P_\tau, m_\tau\}}} \left(\int_G a_{\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau} |\varphi^{(\tau)}|^{m_\tau} d\Omega \right)^{P_\tau, m_\tau} + \sum_{\tau \in E} \int_G f_\tau \varphi^{(\tau)} d\Omega, \quad (1)$$

где φ и их обобщенные производные $\varphi^{(\tau)}$ (С. М. Никольский [4], С. Л. Соболев [5]) определены в G . Условия, накладываемые на индексы функционала $\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau, P_\tau$, а также на суммируемость коэффициентов $a_{\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau}, f_\tau, P_\tau$, те же, что и в [1].

Функционал (1) окажется связанным со вспомогательным функционалом $D(\varphi)$ вида

$$D(\varphi) = D_p(\varphi) = \alpha \cdot \int_G |\varphi|^p d\Omega + \sum_{s=1}^N \int_G |\varphi^{(\kappa_s)}|^p d\Omega,$$

где $1 < p < \infty$; $\alpha = 0, 1$; $\kappa_s \neq 0, s = \overline{1, N}$ — база векторного множества E . Аналогично в $D(\varphi)$ всегда предполагаем: 1) $\alpha = 1$ или 2) $\alpha = 0$, но φ содержится в функционале (1) в некоторой степени $m^0 > 1$, которая является максимальной степенью у φ в (1), причем $a_{0, m^0, P_{0, m^0}, m^0} > \varepsilon$, для некоторого P_{0, m^0} и некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$, или 3) если $\alpha = 0$, но 2) не выполняется, то в этом случае считаем $L = 0$ и все $m_\kappa \leq p$.

2. Определение класса функций $M(\varphi)$. Положим

$$I(\varphi) = \hat{I}(\varphi) - \sum_{\tau \in E} \int_G f_\tau \varphi^{(\tau)} d\Omega.$$

Через $M(\varphi)$ обозначим некоторое линейное многообразие всех тех функций φ , для которых имеют место неравенства $I(\varphi) < \infty$ и

$$\tilde{f}(I(\varphi)) \geq D(\varphi), \quad (2)$$

где $\tilde{f}$ — неотрицательная, конечная на $(0, \infty)$, непрерывная в нуле функция, равная нулю в нуле и удовлетворяющая условию

$$\tilde{f}(x) \leq \left(\frac{x + \kappa}{c} \right)^p; \quad (3)$$

κ — некоторая $\text{const} > 0, c = \sum_{\tau \in E} \|f_\tau\|_{L_{p'}(G)} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, M(\varphi) \neq \emptyset$.

Функционалы такого типа представляют собой довольно широкий класс. Примером может служить класс функционалов (1), коэффициенты которого удовлетворяют условию

$$\sum_{\tau \in EUL} \int_G a_{\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau} \cdot |\varphi^{(\tau)}|^{m_\tau} d\Omega \geq x \cdot D(\varphi), \quad x > 0, \varphi \in \{\varphi | I(\varphi) < \infty\}.$$

Вторым примером может служить функционал (1) с условием $I(\varphi) \geq x \cdot D_1(\varphi), x > 0, \varphi \in \{\varphi | I(\varphi) < \infty\}$, где

$$D_1(\varphi) = \alpha \cdot \left(\int_G |\varphi|^p d\Omega \right)^{P_0} + \sum_{s=1}^N \left(\int_G |\varphi^{(\kappa_s)}|^p d\Omega \right)^{P_{\kappa_s}}, \quad 1 < p < \infty; \alpha = 0, 1; \kappa_s \neq 0, s = \overline{1, N} \text{ — база векторного множества } E; P_0, P_{\kappa_s} \geq 1. \text{ Можно по-}$$

казать, что для этих классов функционалов (1) выполняются условия (2) и (3) и общим для них будет класс функционалов (1) вида

$$I_1(\varphi) = \alpha \cdot \left(\int_G a_0 \cdot |\varphi|^p d\Omega \right)^{P_0} + \sum_{s=1}^N \left(\int_G a_{\kappa_s} |\varphi^{(\kappa_s)}|^p d\Omega \right)^{P_{\kappa_s}} + \hat{I}(\varphi),$$

где

$a_0 > \varepsilon, a_{\kappa_s} > \varepsilon, \varepsilon > 0$ — некоторое произвольно заданное число, $P_0, P_{\kappa_s} \geq 1$. Очевидно, для этого общего класса функционалов $M(\varphi) = \{\varphi | I_1(\varphi) < \infty\}$.

3. Краевые условия. Граничные условия зададим здесь аналогично, как и в работе [1]. Множество функций $\varphi \in M(\varphi)$, удовлетворяющих так определенным краевым условиям на границе $\Gamma = \Gamma_{n-1} + S_{n-1} \dots + S_0$, обозначим через $M = M(G, \Phi)$.

4. Вариационная задача 1. В классе функции $M = M(G, \Phi)$ требуется найти такую функцию u , которая давала бы минимум функционалу $\hat{I}$:

$$\min_{\varphi \in M} \hat{I}(\varphi) = \hat{I}(u).$$

Теорема 1. Вариационная задача 1 имеет смысл, т.е. существует нижняя граница для функционала $\hat{I}(\varphi)$ в классе рассматриваемых функций.

Действительно, оценивая неположительную часть функционала (1) $\sum_{\kappa \in E} \int_G f_\kappa \varphi^{(\kappa)} d\Omega$ и применяя неравенства (2) и (3), получаем утверждение теоремы. Обозначим $\inf_{\varphi \in M} \hat{I}(\varphi) = d$.

Теорема 2. Вариационная задача 1 разрешима, т.е. существует функция $u \in M(G, \Phi)$, для которой $\min_{\varphi \in M} \hat{I}(\varphi) = \hat{I}(u)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично, как и в [1], с применением неравенств

$$\left| \frac{u_\mu - u_\nu}{2} \right|_{L_p(G)}^p \leq C_1 \cdot D \left(\frac{u_\mu - u_\nu}{2} \right) \leq \tilde{f} \left(I \left(\frac{u_\mu - u_\nu}{2} \right) \right).$$

Здесь также имеет место

Теорема 3 (Теорема единственности).

Вариационная задача 1 имеет единственное решение.

§ 2. О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАССМАТРИВАЕМЫХ ОБЛАСТЯХ

1. Краевая задача 1 для интегро-дифференциального уравнения. В области G рассматривается уравнение

$$\sum_{\tau \in EUL} \sum_{\substack{\{m_\tau\} \\ \{P_\tau, m_\tau\}}} P_{\tau, m_\tau} \cdot \left(\int_G a_{\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau} |u^{(\tau)}|^{m_\tau} d\Omega \right)^{P_\tau, m_\tau - 1} \cdot m_\tau \cdot (-1)^{|\tau|} \times \\ \times D^{(\tau)}(a_{\tau, m_\tau, P_\tau, m_\tau} \cdot |u^{(\tau)}|^{m_\tau - 2} \cdot u^{(\tau)}) + \\ + \sum_{\tau \in EUL} \sum_{\{P_\tau\}} P_\tau \cdot \left| \int_G f_{\tau, P_\tau} u^{(\tau)} d\Omega \right|^{P_\tau - 2} \cdot \int_G f_{\tau, P_\tau} u^{(\tau)} d\Omega \cdot (-1)^{|\tau|} \cdot f_{\tau, P_\tau} +$$

$$+ \sum_{\tau \in E} (-1)^{|\tau|} f_{\tau}^{(\tau)} = 0, \quad D^{(\tau)}(\quad) = (\quad)^{(\tau)},$$

$$|\tau| = \sum_{i=1}^n \tau_i, \quad \tau = (\tau_1 \cdots \tau_n),$$

с граничными условиями, определяемыми некоторым классом $M(G, \Phi)$ (см. п. 3, § 1.).

Краевая задача 1. В классе функций $M(G, \Phi)$ требуется найти такую функцию u , которая удовлетворяла бы уравнению (4).

Теорема 4. Решение вариационной задачи 1 является одновременно обобщенным решением соответствующей краевой задачи 1. Краевая задача 1 имеет обобщенное решение*. Действительно, методом дифференцирования или же определенными оценками можно убедиться, что решение вариационной задачи 1 удовлетворяет соответствующему вариационному уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau \in EUL} \sum_{\{m_{\tau}\}} P_{\tau, m_{\tau}} \left(\int_G a_{\tau, m_{\tau}, P_{\tau, m_{\tau}}} \cdot |u^{(\tau)}|^{m_{\tau}} d\Omega \right)^{P_{\tau, m_{\tau}}-1} \cdot m_{\tau} \times \\ & \times \int_G a_{\tau, m_{\tau}, P_{\tau, m_{\tau}}} \cdot |u^{(\tau)}|^{m_{\tau}-2} \cdot u^{(\tau)} \cdot v^{(\tau)} d\Omega + \\ & + \sum_{\tau \in EUL} \sum_{\{P_{\tau}\}} P_{\tau} \cdot \left| \int_G f_{\tau, P_{\tau}} d\Omega \right|^{P_{\tau}} \cdot \int_G f_{\tau, P_{\tau}} u^{(\tau)} d\Omega \times \\ & \times \int_G f_{\tau, P_{\tau}} \cdot v^{(\tau)} d\Omega + \sum_{\tau \in EG} \int_G f_{\tau} v^{(\tau)} d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$v \in \overline{M}_0(G)$, где через $\overline{M}_0(G)$ обозначено множество функций $\varphi \in M(\varphi)$, имеющих нулевые граничные значения (см. п. 3, § 1.). Это все и означает, что краевая задача 1 имеет обобщенное решение $u \in M(G, \Phi)$.

2. О дифференциальных свойствах обобщенных решений некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений. Как и в работе [9], рассмотрим частный случай множества E — множество E' (определение E' и основные положения см. в [9]). Будем теперь полагать

$$D(\varphi) = D'_G(\varphi) = \int_G \sum_{j=1}^n |\varphi^{(r_j e_j)}|^2 d\Omega,$$

где $\varphi^{(r_j e_j)} \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ и e_j — единичный вектор, имеющий положительное направление оси x_j . Рассмотрим функционал (1), вариационную задачу 1 и краевую задачу 1 при $L=0$, $\varepsilon = \varepsilon'$, $m_{\tau} = 2$ для всех $\tau \in E'$, при этом класс $M(\varphi)$, по которому определяется $M(G, \Phi)$, зададим равенством $M(\varphi) = \{\varphi | I(\varphi) < \infty\}$.

Соответствующие вариационную и краевую задачи назовем вариационной задачей 1' и краевой задачей 1'. Для функционалов $\hat{I}(\varphi)$ и $I(\varphi)$ оставим прежние обозначения.

Краевая задача 1'. В классе функций $M(G, \Phi)$ требуется найти такую функцию u , которая удовлетворяла бы уравнению

* Автором данной статьи на основе неравенств В. И. Кондрашова [3] доказываются также единственность обобщенного решения ($m_{\tau} \geq 2$).

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in E'} \sum_{\{P_k\}} 2P_k \left(\int_G a_{k, P_k} |u^{(k)}|^2 d\Omega \right)^{P_k-1} \cdot (-1)^{|k|} \times \\ & \times D^{(k)} \left(a_{k, P_k} u^{(k)} \right) + \sum_{k \in E'} \sum_{\{P_k\}} P_k \cdot \left| \int_G f_{k, P_k} u^{(k)} d\Omega \right|^{P_k-2} \times \\ & \times \int_G f_{k, P_k} u^{(k)} d\Omega \cdot (-1)^{|k|} \cdot f_{k, P_k}^{(k)} + \sum_{k \in E'} (-1)^{|k|} f_k^{(k)} = 0, \end{aligned}$$

$$D^{(k)}(\quad) = (\quad)^{(k)}$$

(здесь через $\bar{P}_k$ обозначены $P_{k,2}$, соответствующие P_{k,m_k} при $m_k = 2$).

Приведенные в нижеследующих теоремах условия 2) и 2)' достаточны для разрешимости вариационной задачи в том смысле, что из них следует выполнение условий (2) и (3). Они также могут служить примерами некоторых классов рассматриваемых в § 1 функционалов (1).

Теорема 5. Пусть $f_{k, P_k}, f_k \in \{\varphi | D_{G'}(\varphi) < \infty\}$, $k \in E'$, $G' \subset G' \subset G$. Пусть все коэффициенты $a_{k, \bar{P}_k}$ удовлетворяют следующим двум условиям:

1) имеют на G непрерывные производные до порядка $(r_j - 1)$ включительно по x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющие на любой области $G', G' \subset G' \subset G$, условию Липшица:

$a_{k, \bar{P}_k}^{((r_j-1)e_j)}(x + he_j) - a_{k, \bar{P}_k}^{((r_j-1)e_j)}(x) \leq M_{G'}^{(1)} \cdot |h|$, где постоянная $M_{G'}^{(1)}$ не зависит от x , $x + h \in G'$;

2) обозначим через (E') некоторое подмножество E' и также $(\bar{p}_k) \subseteq \{\bar{p}_k\}$, предполагаем, что все коэффициенты $a_{k, \bar{P}_k}$ при $k \in (E')$ и $\bar{p}_k \in (\bar{p}_k)$ почти везде отличны от нуля и выполняется неравенство

$$\sum_{k \in (E')} \sum_{\bar{p}_k \in (\bar{p}_k)} \int_G a_{k, \bar{P}_k} \cdot |\varphi^{(k)}|^2 d\Omega \geq \kappa \cdot D'(\varphi), \quad \kappa > 0 — постоянная, не завися-$$

щая от $\varphi \in \overline{M}_0(G)$, а $\overline{M}_0(G)$ соответствует введенному ранее обозначению. Тогда обобщенное решение и краевой задачи 1', принадлежащее $M(G, \Phi)$, будет классическим решением краевой задачи 1'.

Доказательство. В процессе доказательства теоремы будем иметь в виду, что на интегралы от u и его производных, входящих в соответствующее уравнение (5), можно смотреть как на постоянные коэффициенты. Это замечание позволяет проводить доказательство по той же схеме, которая была приведена в рукописи С. М. Никольского, применявшейся также О. А. Ладыженской [8], А. С. Фохтом [7] и Ю. Д. Салмановым [9]. Аналогичным образом получаем представление выражения

$$\begin{aligned} I_c &= \int \sum_{\Delta_2 k \in E'} \sum_{\{P_k\}} \left(\int_G a_{k, \bar{P}_k} |u^{(k)}|^2 d\Omega \right)^{P_k-1} \times \\ & \times a_{k, \bar{P}_k}(x + she_j) \cdot \left[\left(\eta \frac{\Delta^{se_j} u}{h^s} \right)^{(k)} \right]^2 dx \end{aligned}$$

через остальные интегралы.

Используя вышеуказанные замечания и условие 3) теоремы (см. также [9]), получим

$$\kappa \cdot CD'(\varphi) \leq \sqrt{D'} + C, \quad D' = D_{\Delta_2} \left(\eta \frac{\Delta^{e_n} u}{h} \right).$$

Далее доказательство производится по известной схеме.
Теорема 6. Теорема 5 останется верной, если условие 2) теоремы заменить нижеследующим условием 2').

Пусть $I = I_0 + I_1$ и пусть в I_0 вошли какие-то интегралы в степенях $P_1, \dots, P_n$, где $1 \leq P_i < 2P_0$, и только в этих степенях, а в I_1 — остальная часть функционала I .

Условие 2') таково:

$$I_0 \geq \kappa D_0, \quad D_0 = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^v \left(\int_G |\varphi^{(\kappa_s)}|^2 d\Omega \right)^{P_i},$$

$$\varphi \in \{\varphi | I < \infty\} \text{ или } \varphi \in \overline{M}_0(G),$$

$$\kappa_s = r_s e_s, \quad s = 1, n.$$

Предполагаем при этом, что все коэффициенты a_{κ, P_i} , входящие в I_0 , почти всюду в G отличны от нуля. Доказательство проводится по той же схеме, что и в предшествующей теореме. При этом используется также неравенство

$$\sum_{i=1}^n (I_0)^{P_i} \geq \kappa \cdot c \cdot D_0, \text{ где } c \text{ не зависит от области } G \text{ и } \varphi \in \overline{M}_0(G). \text{ В результате получаем } c \sum D_{\kappa_s}^{P_i} - c \sum D_{\kappa_s}^{P_i/2} - c \leq 0, \text{ где через } D_{\kappa_s} \text{ обозначены интегралы, входящие в } D_0 \text{ без степеней. Далее доказательство аналогично.}$$

Дифференциальные свойства обобщенных решений могут быть получены и другими методами [3, 10, 11]. В заключение статьи автор выражает глубокую благодарность проф. В. И. Кондрашову за постановку задачи и постоянное руководство работами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рзаев К. У. "ДАН Азерб. ССР", 1970, № 8.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, Изд-во Сибирского отд. АН СССР, 1962.
3. Кондрашов В. И. Теория краевых задач. Докт. дис., 1948.
4. Кондрашов В. И. "ДАН СССР", 1950, № 6.
5. Никольский С. М. Матем. сб., 61 (103); 2, 1963.
6. Никольский С. М. Матем. сб., 62 (104); 1, 1963.
7. Фохт А. С. "ДАН СССР" 154, 1964, № 6.
8. Ладыженская О. А. "ДАН СССР", 120, 1958, № 5.
9. Салманов Ю. Д. "Дифференциальные уравнения", т. 1, 1965, № 10.
10. Кашенко Ю. Д. "Дифференциальные уравнения", т. 3, 1967, № 7.
11. Кондрашов В. И. "ДАН СССР", 165, 1963, № 6.

Институт математики и
механики АН Азерб. ССР

Поступило 12 V 1969

К. Н. Рзаев

Вариасија вə сəрһəd мəсələsi

ХҮЛАСƏ

Мəгалədə бир синиф функционаллар $I(1)$ үчүн јени вариасија мəсələsi гојулмуш вə һəлл едилмишдир. Бунларын Ејлер тəнлији гејри-хəтти интегродиференсирал тəнликлэр олур (4).

Исбат едилмишдир ки, вариасија мəсələсинин һəлли јеканəдир вə о, гејри-хəтти интегродиференсирал тəнликлэрин үмүмилəшмиш ујғун сəрһəd мəсələсинин һəллидир (теорем 4). Ајдылашдырылмыш-дыр ки, мүəјјəн синиф үчүн үмүмилəшмиш һəлл ејни заманда классик һəллидир (теорем 5 вə 6). Вариасија вə сəрһəd мəсələsi регулар типли областларда һəлл олунур.

К. П. МАМЕДОВ, М. Я. БАКИРОВ, С. Б. БАГИРОВ

ТЕКСТУРООБРАЗОВАНИЕ ПРИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ СЕЛЕНА И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ХАРАКТЕРИСТИКУ СЕЛЕНОВЫХ ВЕНТИЛЕЙ

Известно, что механической и термической обработкой можно создать преимущественную ориентацию в поликристаллическом материале. Естественно, возникновение текстуры может проявляться в анизотропии основных физических свойств (механических, магнитных, электрических) материала. Текстуру в гексагональном селене можно создать, в частности, подбором температурного режима при кристаллизации. Так как поликристаллический гексагональный селен широко применяется для изготовления фотоэлементов и выпрямителей, то представляет интерес исследование текстурообразования в селене и его влияния на характеристику селеновых приборов.

В литературе пока еще мало работ, посвященных изучению текстурообразования в селене и его влияния на фотоэлектрические свойства селеновых фотоэлементов. В работе [1] показано, что при кристаллизации селена в прессованном состоянии возникает текстура сжатия, кристаллы ориентируются плоскостями $(11\bar{2}0)$ в плоскости прессования. При изучении ориентации слоев селена, полученных напариванием в вакууме на подкладки при различных температурах, установлено, что при осаждении его на горячей пластине слои имеют текстуру с плоскостью $(11\bar{2}0)$, а при осаждении на холодной пластине образуется текстура с плоскостью $(10\bar{1}0)$ [2]. В работе [3] изучено изменение характеристики селеновых фотоэлементов в зависимости от состояния поверхности селена и показано, что вентильные свойства существенно зависят от последнего.

Настоящая статья посвящена исследованию текстурообразования при кристаллизации слоя селена и его влияния на характеристику селеновых фотоэлементов.

Изготовление образцов и методика исследования

Исследуемые образцы изготавливались путем вакуумного нанесения слоя селена толщиной 40—80 м на висмутированную алюминиевую подложку. Кристаллизация заготовок производилась при трех режимах:

а) предварительная кристаллизация при 130°C в течение двух часов с последующей вторичной кристаллизацией при 217°C в течение 40 мин, со скоростью нагрева $4 \frac{\text{град}}{\text{мин}}$ (группа А).

б) предварительная кристаллизация при 130°C в течение двух часов с последующим медленным возрастанием температуры до 217°C (скорость нагрева $7 \frac{\text{град}}{\text{час}}$) и вторичной кристаллизацией при этой температуре в течение 12 часов (группа Б).

в) предварительная кристаллизация при 130°C в течение 20 мин с последующей вторичной кристаллизацией, аналогично предыдущему случаю (группа В).

Рентгеновское исследование полученных образцов проводилось на установке УРС 50ИМ (Си-излучение). Помимо этого, получены текстурогаммы на УРС 50ИМ, снабженной специальной текстурной подставкой [4], на кобальтовом излучении с железным фильтром, методом „на отражение“ [5], а также дебаегаммы методом отражения от шлифа (угол падения равен 24° Со-излучения).

С целью изучения вентильных свойств на поверхность селена путем возгонки в вакууме наносили верхний электрод из кадмия, при этом предполагалось, что в переходной области между селеном и селенидом кадмия, образующейся в результате реактивной диффузии, структурных изменений не происходит.

Результаты исследования

На рис. 1а представлена интерференционная картина образца селена из группы А (в интервале углов $2\theta - 20 \div 70^\circ$). Интенсивность всех интерференционных линий почти соответствует вычислениям

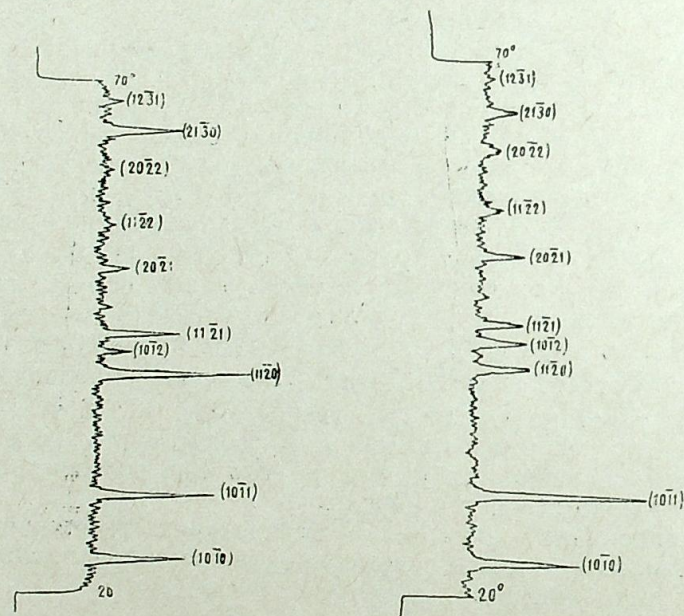


Рис. 1. а—Интерференционная картина нетекстурованного образца; б—интерференционная картина текстурованного образца.

для структуры, предложенной Бредлеем [6], при значениях параметра $x = 0,22$. Рис. 1б отражает интерференционную картину образца селена группы Б. Идентичная картина получается от образцов группы В. Характерная особенность последних двух типов записей заключается в резком усилении линий (1120) и (2130), а также в некоторых расхождении в интенсивностях остальных линий, хотя положения всех линий отвечают решетке гексагонального селена, т. е. квадратичная форма остается неизменной. Это дает основание предположить, что

изменение интерференционной картины образцов из групп Б и В вызвано возникновением текстуры.

Для большей убедительности в том, что получается гексагональный селен, а отклонение картины интенсивности вызвано текстурой слоя, были получены дебаегаммы селена, соскобленного с пластинки и растертого в порошок. При этом картина интенсивности получалась такой же, как и для обычного нетекстурованного селена. Как на рис. 1б, так и на дебаегамме видно, что линия, соответствующая плоскости с дифракционными индексами (1120), усилена при одновременном ослаблении линии (1012). Характер текстуры был определен из предположения, что плоскость (1120) перпендикулярна оси аксиальной текстуры.

Расчеты соответствующей текстуры приведены в таблице, где θ —угол отражения; φ —угол между вышеупомянутой плоскостью (1120) и плоскостями (h, k, l), вычисленный по формуле:

$$\cos \varphi = 0,23(h + k)d;$$

δ —угол падения между первичным пучком и отражающими плоскостями:

$$\delta = 24 \pm \varphi,$$

а $\Delta = |\delta - \theta|$; чем меньше Δ отличается от нуля, тем больше должно быть усиление интенсивности линий из-за эффекта текстуры. В графе 7 дано отклонение интенсивности линий образцов с текстурой и без нее. Как видно, картина интенсивности укладывается в расчетные данные.

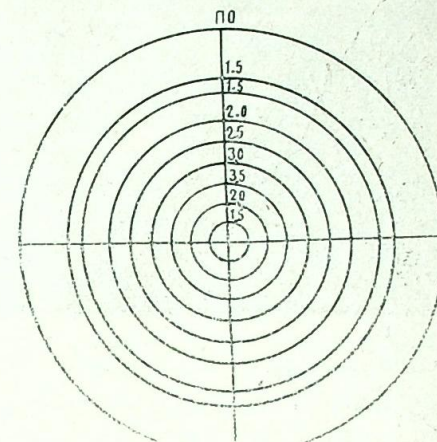


Рис. 2. Полюсная фигура плоскости (1010).

Расчеты текстуры слоя селена

№ пп	hkl	θ	φ	δ	Δ	Отклонение интенсивности
1	1010	13°45'	90° — 30°	54°	40°	Постоян.
2	1011	17°20'	90° — 45°30'	72°30'	55°	"
3	1120	24°22'	60° — 0°	84° — 24°	60° — 0°	Усилена.
4	1012	25°35'	90° — 61°30'	85°30'	60°	Ослабл.
5	1121	26°50'	63° — 24°	87° — 48°	60° — 21°	Усилена.
6	2020	28°20'	90° — 30°	54°	28°	Постоян.
7	2021	30°30'	90° — 36°	60°	30°	"
8	0003	32°45'	90°	—	—	Ослабл.
9	1122	33°15'	68° — 41°	65°	32°	"
10	1013	36°10'	90° — 70°	—	—	"
11	2022	36°30'	90° — 46°30'	72°30'	36°	"
12	2130	38°50'	71° — 49°10'	73°34'	24°5'	Усилена
13	2131	40°55'	72° — 51°20'	75°44'	34°3'	"

На основе полученных текстурогамм построена полюсная фигура плоскости (1010), приведенная на рис. 2. Как из таблицы, так и из анализа полюсной фигуры следует, что плоскости (1120) различных кристалликов параллельны плоскости подложки и ориентированы в этой плоскости любым образом.

Исследования вентильных свойств указанных образцов показали, что фоточувствительность и вольтамперная характеристика существ-

венно зависят от режима термообработки при кристаллизации, т. е. от состояния поверхности селенового слоя. На рис. 3 представлены

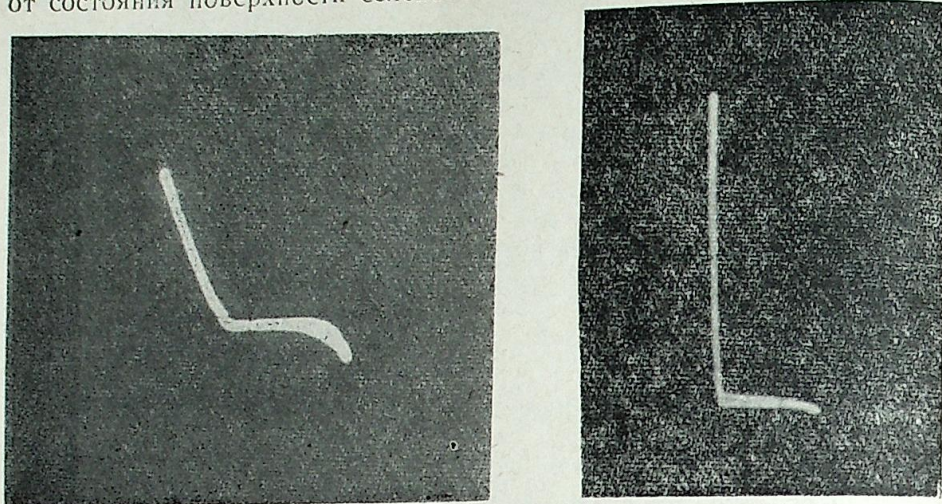


Рис. 3. а—осциллограмма нетекстурированного образца; б—осциллограмма текстурированного образца. Масштаб: 1 дел. по горизонтали—0,6 в, 1 дел. по вертикали—0,34 в.

динамические вольтамперные характеристики при частоте приложенного переменного напряжения 50 *Гц* нетекстурированного (а) и текстурированного (б) образцов. В текстурированных образцах вольтамперная характеристика значительно улучшается как за счет увеличения плотности прямого тока, так и уменьшения плотности обратного тока. Плотность фототока, измеренная в идентичных условиях, оказалась равной в нетекстурированных образцах $45 \frac{\text{мкА}}{\text{см}^2}$, а в текстурирован-

ных $85 \frac{\text{мкА}}{\text{см}^2}$.

Обсуждение полученных результатов

Образование текстуры при кристаллизации на образцах групп Б и В можно объяснить следующим образом. Кристаллизация при 130°C слоя аморфного селена, нанесенного на подложку, приводит к предельному числу зародышей. Вторичная кристаллизация при 217°C приводит к их росту. Согласно [7] в селене имеет место одномерный рост зерен, причем скорость роста мала из-за механизма ориентационной рекристаллизации. Этим можно объяснить, что 40-минутная вторичная кристаллизация не приводит к текстурированности.

Так как структура селена состоит из спиралей, вытянутых вдоль гексагональной оси, то медленное повышение температуры и длительная выдержка образцов вблизи температуры плавления (217°C), по-видимому, приводят к тому, что спиральная цепочка атомов, расположенных параллельно поверхности, имеет достаточное время для ориентации. Таким образом медленное повышение температуры до вторичной кристаллизации и длительная выдержка образцов в области, близкой к температуре плавления, приводят к ориентационному росту зародышей.

Область объемного заряда селеновых фотоэлементов расположена между селеном и слоем CdSe, образующимся на поверхности селена в результате реактивной диффузии. Следовательно, свойства области объемного заряда определяются поверхностью селена. Р—п-переход, сформированный на поверхности селена, обладает весьма разнообразной характеристикой в зависимости от концентрации кристалликов в

единице поверхности и от их расположения. Исследование методом дифракции электронов поверхности селена [8] показывает, что в первой стадии кристаллизации, соответствующей образованию и росту сферолитов, образуются крупные кристаллики. При дальнейшей термообработке в результате рекристаллизации получается мелкозернистая структура.

В формировании р—п-перехода и в изменении характеристики фотоэлемента вносит вклад и слой электронного полупроводника CdSe, связанный с переходом его из крупнодисперсного состояния в кристаллическое. При напылении кадмия на слой селена, закристаллизованного при низких температурах, за небольшой промежуток времени образуется крупнодисперсное соединение CdSe, обладающее большим удельным сопротивлением, а при напылении кадмия на слой селена, закристаллизованного вблизи температуры плавления, длительное время образующийся CdSe является мелкозернистым с низким удельным сопротивлением. Вследствие этого на р—п-переходе, созданном на текстурированных образцах, падение напряжения в прямом направлении больше, а чувствительность фотоэлементов низкая. Кроме того, в текстурированных образцах из-за направленного расположения кристалликов уменьшаются барьеры между отдельными кристаллическими зернами, что приводит к увеличению подвижности свободного носителя. Все эти факты обуславливают увеличение плотности фототока в режиме фотоэлемента и плотности прямого тока в режиме диода в текстурированных образцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жданов Г. С., Шарвин Ю. В. ЖТХ, 19, 3, 1945.
2. Наследов Д. Н., Дорин В. А. и Дикина И. М. ЖТФ, т. XXV, вып. 1, 1955.
3. Blankenburg, C. Dietree, Görlich P., Rrohs A. Jenaer. Jarhp. 1958, т. 2, 115.
4. Бородин М. М. „Заводская лаборатория“, 1958, № 5.
5. Schulz L. G. J. appl. phys., 1949, 20, р. 1030.
6. Bradley A. J. Phil. Mag., 48, 477, 1924.
7. Мамедов К. П., Нуриева З. Д. Рост кристаллов, 5, 327, 1965.
8. Султанов Р. С., Талиби М. А., Касумов И. А. Неорганические материалы, 5, 3, 585, 1969.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 6. X 1969

К. П. Мамедов, М. Ј. Бакиров, С. Б. Багыров

Кристаллашма заманы селендә текстуранын эмәлә кәлмәси вә онун селен вентилләринин характеристикаларына тәсири

ХҮЛАСӘ

Кристаллашма заманы селендә текстуранын эмәлә кәлмәси вә онун селен чиһазларынын характеристикаларына тәсири өйрәнилмишдир. Мүәјјән едилмишдир ки, селени әримә температуру әтрафында узун мүддәт кристаллашдырдыгда „аксиал“ текстура алыныр. Текстуралы нүмунәләрдән һазырланмыш р—п кечидләриндә дүзләндирмә әмсалы вә фотоһәссаслыг ади нүмунәләрә нисбәтән даһа чохдур.

А. Б. АГАЕВ, Т. Х. АЗИЗОВ, А. Х. МУРАТОВ, Ю. Р. НАГДАЛИЕВА,
К. А. ШАРИФОВ

УПРОЩЕННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНТАЛЬПИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ В КАЛОРИМЕТРЕ

Определение энтальпии химических процессов, которые протекают с достаточной скоростью лишь при высоких температурах, нередко осуществляется в калориметрах, снабженных электрической печью. Одним из наиболее ответственных звеньев является точное измерение электрической энергии, подаваемой на печь. Для этой цели применяются прецизионные ваттметры [1], счетчики [2] или сборные схемы, позволяющие при значительном изменении сопротивления нагревательного элемента определить количество электрической энергии с точностью до 0,01—0,02% [3, 4].

Труднодоступность первых и громоздкость вторых, а также в ряде случаев неоправданность в такой высокой точности определения электрической энергии вызывают необходимость в сравнительно простых схемах.

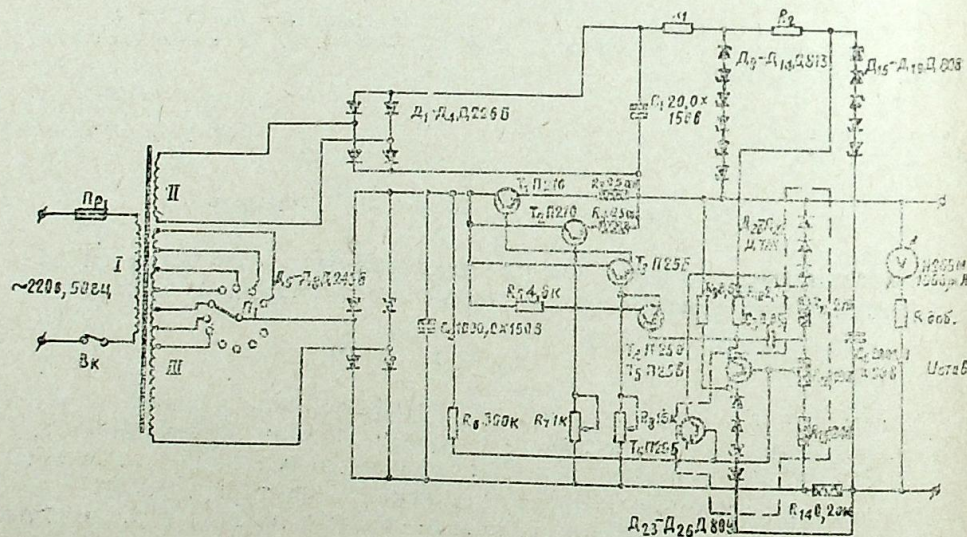


Рис.

На рисунке приводится схема, с помощью которой делается попытка дать ответ на поставленную задачу и объяснить ход калориметрического опыта. В целях упрощения задачи на нагрузку подается постоянное напряжение. В качестве источника постоянного напряже-

ния можно взять батарею аккумуляторов и стабилизировать ее напряжение с помощью дополнительного устройства. Однако такой путь нам кажется менее удобным, т. к. не составляет большого труда собрать стабилизатор напряжения с достаточно высоким коэффициентом стабилизации. Ниже приводятся технические данные стабилизатора, использованного в наших опытах: выходное сопротивление 0,006 ом; выходное напряжение 41,60 в; коэффициент стабилизации 8000; нагрузочный ток $0 \div 2,5$ а; суммарный временной и температурный дрейф ($\tau = 1$ час, $t = +20 \div 35^\circ\text{C}$) 0,0073%; допустимое колебание сетевого напряжения $\pm 10\%$. Это устройство имеет небольшой габарит ($450 \times 220 \times 150$ мм) и является высококачественным источником напряжения, обладающим широким нагрузочным диапазоном и устойчивостью.

Улучшение коэффициента стабилизации и выходного сопротивления достигается питанием усилителя обратной связи (УОС) вспомогательным параметрическим стабилизатором, введением обратной связи через резистор R_6 (превращающий данный стабилизатор в устройство с комбинированным регулированием, осуществляющее полную компенсацию изменений входного напряжения) и дополнительной положительной обратной связи по току через резистор R_{14} .

Значительное уменьшение температурного дрейфа напряжения достигнуто применением термокомпенсации $p-n$ -переходами опорных элементов и делителя УОС, а также термостатированием последнего и элементов схемы сравнения. Подбор транзисторов T_5 и T_6 обуславливает значительную нейтрализацию влияния $I_{ко}$ транзистора УОС T_5 .

Применение переключателя II, дающего возможность ступенчато менять напряжение на входе стабилизатора, позволяет работать в легчайшем режиме регулирующих транзисторов при значительных токах нагрузки, что существенно сказывается на характеристиках стабилизатора и повышает его надежность. Отдельными опытами был установлен дрейф напряжения во времени, который происходит в основном в первые 50 сек после включения и составляет примерно 100 мВ.

Из значения общего приложенного напряжения вычитывается падение напряжения на нормальном сопротивлении в 0,1 ом, включенном в цепь печи, и таким образом определяется величина напряжения, приложенного к нагревательному элементу. Отсчеты производятся через каждые три секунды, таким образом вся процедура измерения сводится к фиксации показания полуавтоматического потенциометра, подсоединенного к клеммам нормального сопротивления. Время нагрева печи измеряется электрическим секундомером с ценой деления 0,01 сек, включенным синхронно в цепь. Время подачи энергии 285—300 сек.

Проверка описанного метода была осуществлена на калориметре с изотермической оболочкой марки В-04. Калориметрическая бомба снабжена электрической печью в виде спирали из нихромовой проволоки диаметром 0,3 мм и сопротивлением $18 \div 24$ ом, которая находится в неглубоких пазах цилиндрического стакана, сделанного из глины, содержащей 5—7% асбеста. В печь (ее внутренний диаметр 8—12 мм, длина 45—50 мм) вставляется откачанная и запаянная кварцевая ампула со стехиометрической смесью компонентов вещества, отверстие ее закрывается асбестом. Температура калориметра измеряется при помощи трех параллельно присоединенных термисторов марки КМТ-4 [5].

Результаты четырех последовательных опытов по определению теплового значения калориметра (с пустой ампулой) приведены в табл. 1.

Таблица 1

Время пропускания тока τ , сек	Начальное напряжение U , в	Начальная сила тока I , а	Подъем темп. ΔT , °C	Тепловое значение калориметра W , дж/град
298,86	41,408	1,880	1,7424	12941,94
299,84	41,407	1,884	1,7640	12969,49
298,88	41,407	1,886	1,5724	12952,20
299,75	41,407	1,894	1,7661	12972,96

$$W_{\text{ср}} = 12959,15 \pm 12,06 \text{ дж/град}^*$$

Расхождение на 0,1% для многих задач можно считать вполне приемлемым, если учесть, что, кроме измерения электрической энергии, неизбежны и другие серьезные источники ошибок. Покажем это на примере определения энтальпии образования PbSe, послужившем для проверки описанной методики.

Кварцевая ампула содержала $3 \div 4,5$ г смеси компонентов PbSe. Сопротивление нихромовой спирали печи 24 ом. Время подачи электрической энергии 285 сек. Через 50 сек в печи достигается температура около 800°*. Начальная температура опыта 24°; подъем температуры калориметра 1,7°. Здесь следует отметить одну деталь, которой мы придаем большое значение. Печка с ампулой при помощи маленького электромотора и червячно-шатунового механизма приводится в качательное движение (15 качаний в минуту). Электромотор мощностью 0,36 вт питается от отдельного аккумулятора*** с напряжением 5,80 в, работает во время нагрева ампулы и энергия, потребляемая им, составляет 25 кал. Опыты показали, что без качания реакция в ампуле протекает неполностью.

Между печкой и электромотором помещен латунный экран, который передает тепло стенкам бомбы и защищает электромотор от нагрева. Калориметрическая бомба заполняется азотом до 15 атм**** для предотвращения возможного взрыва ампулы и уменьшения главного периода калориметрического опыта до 30 мин [6]. Тепловой эффект химической реакции 200 кал, что составляет $1/25$ часть балластной электрической энергии. Следовательно, неточность в определении теплового эффекта реакции из-за неточности измерения электрической энергии составит $\pm 2,5\%$.

К этому следует прибавить еще неточность примерно того же порядка, связанную с неопределенностью в установлении конечного состояния. Оно, по-видимому, не является ни отоженным, ни закаленным [7], возможно, даже неоднородным. Установить количественный состав продуктов синтеза химическим анализом затруднительно. Рентгеновский же анализ показал только наличие линий, принадлежащих PbSe. Все эти неопределенности могут внести ошибку не менее 3—5%. Поэтому точность в определении стандартной энтальпии образования PbSe можно оценить 6—8% (табл. 2).

* Один абсолютный джоуль соответствует 0,2389 кал.

** В зависимости от объекта исследования эту температуру можно увеличить путем укорочения спирали до 1100—1150° (максимальной для нихрома).

*** Питание электромотора от источника нагрева печи затрудняет отсчеты показаний потенциометра.

**** В зависимости от давления паров летучего компонента количество азота можно увеличивать до 30 атм.

Величина $\Delta H_{298}^0(\text{PbSe}) = -18,92 \pm 1,20 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$ хорошо согласуется с литературными данными [8]. Таким образом этот прямой метод определения теплового эффекта может быть применен в тех случаях,

Таблица 2

Колич. PbSe, г	Поправка на теплообмен $\Sigma \gamma$, град	Общий подъем темп. ΔT , град	Колич. тепла Q , дж		ΔH_{298}^0 , дж/моль
			за счет электр. энергии	за счет химич. реакции	
4,3726	0,0164	1,7482	21329,35	1325,83	86772,70
3,0221	0,0124	1,7420	21814,52	760,32	71199,66
3,6183	0,0182	1,7515	21700,34	997,61	78903,30

Среднее значение $\Delta H_{298}^0 = -78955,22 \div -5208,32 \text{ дж/моль}$ или $-1892 \pm 1,20 \text{ ккал/моль}$.

когда химическая реакция при кратковременном нагреве до 1100°C протекает до конца и точность определения будет тем выше, чем больше величина теплового эффекта и чем меньше неопределенности в состоянии продуктов плавления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kröger C., Janetzko W. Z. anorgan. allgem. chem. 284, 83, 1956.
2. Вострокнутов Н. Г., Корнилов А. Н., Гальченко Г. Л., Скуратов С. М., Тимофеев Б. И. ЖФХ, 33, 1883, 1959.
3. Васильев Я. В., Соболева М. С. ЖФХ, 36, 907, 1962.
4. Тимофеев Б. И., Гедакян Д. А., Гальченко Г. Л. Третья Всесоюзная конференция по калориметрии (тезисы докладов), 1966.
5. Шарифов К. А., Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я. ЖФХ, 37, 2368, 1963.
6. Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. ДАН СССР, 136, 6, 1339, 1961.
7. Ария С. М., Морозова М. П., Столярова Т. А., Селезнева Л. Н. ЖФХ, 40, 1604, 1966.
8. Chikaga Hirayama I. Chem. Eng. Data 965, 1964.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 25.X 1969

А. Б. Агајев, Т. Х. Эзизов, А. Х. Муратов, Ј. Р. Нағдәлијева, К. Ә. Шәрифов

Јүксәк температурлу просесләрин әмәләкәлмә энталпијасы
тәјининин садәләшмиш үсулу

ХҮЛАСӘ

Јалныз јүксәк температурларда кифәјәт гәдәр сүр'әтлә кедән кимјәви просесләрин әмәләкәлмә энталпијасы електрик печләри илә тәһһиз едилмиш калориметрләрдә өлчүлүр. Бу һалда ән әсас мәрһәләләрдән бири нечә верилән електрик енерјисинин дәгиг өлчүлмәсидир.

Бунун үчүн сабитләшмә әмсалы 8000 олан, кәркинлији сабитләшдирән чиһазла тә'мин олунмуш гурғу јығылмышдыр. Бу гурғу чох садәлији илә характеризә едилир вә $\pm 0,1\%$ дәгигликлә ишләјир. Гургунун көмәји илә В-04 маркалы изотермик көјнәкли калориметрдә PbSe-нин әмәләкәлмә энталпијасы тәјин едилмиш вә $\Delta H_{298}^0 = -18,92 \pm 1,20 \text{ ккал/мол}$ алынмышдыр. Бу әдәд әдәбијатларда көс-тәрилән гијмәтә чох ујғун кәлир.

К. И. РЗАЕВ, Ш. О. БРУДЖЕВА

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ УПРУГИХ КОНСТАНТ МОНОКРИСТАЛЛОВ TlSe и GaSe

Упругие свойства твердого тела представляют интерес как с прикладной, так и с научной точек зрения. Определение упругих постоянных монокристаллов в зависимости от температуры весьма важно, так как эти данные могут быть приведены в соответствие с другими физическими измерениями и тем самым пролить свет на природу атомных сил в твердом теле.

Настоящая статья посвящена исследованию температурных зависимостей упругих постоянных монокристаллов TlSe и GaSe на основе наших данных по скорости распространения ультразвука, а также по плотности, вычисленной из данных по тепловому расширению (1). На основе данных теплового расширения монокристалла TlSe: $\alpha_a = 41,2 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ (в интервале 10—40°C) и $\sigma_c = 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ (в интервале 20—100°C) вычислена температурная зависимость плотности по формуле

$$\rho = \frac{(z_1 M_1 + z_2 M_2) \cdot 1,65 \cdot 10^{-24}}{a^2 c}$$

Для монокристалла GaSe $\alpha_a = 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$, $\sigma_c = 10,1 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ (в интервале 20—200°C) и

$$\rho = \frac{(z_1 M_1 + z_3 M_3) \cdot 1,65 \cdot 10^{-24}}{a^2 c \cdot \sin 120^\circ}$$

Здесь z_1, z_2, z_3 —число атомов Se, Tl и Ga в элементарной ячейке; M_1, M_2, M_3 —их атомные веса; a и c —постоянные решетки; число $1,65 \cdot 10^{-24}$ —масса (г) одной водородной единицы.

Остальные точки для плотности, скорость ультразвука в которых нами измерена, были получены экстраполированием прямой. Таким образом определены температурные зависимости упругих констант для монокристаллов TlSe (—160 + 250°C) и GaSe (—60 + 400°C).

Из рис. 1 (а, б) видно, что упругие константы монокристалла TlSe в исследуемом температурном интервале с ростом температуры линейно уменьшаются. Из сравнения кривых 1 и 2 рис. 1 (а) явствует, что упругие константы, определенные по данным скорости распространения ультразвуковых волн вдоль направления [110], почти в 2,7 раза быстрее уменьшаются с ростом температуры, чем вычисленные по данным скорости распространения ультразвуковых волн вдоль [001]. На рис. 1 (б) по кривым 3 и 4 видно, что упругие константы,

определенные по данным скорости распространения поперечных ультразвуковых волн вдоль [001], в 2 раза меньше по сравнению с распространением их вдоль [110]. Это связано с тем, что монокристалл TlSe с тетрагональной решеткой пространственной группы D_{4h}^{18} вдоль кристаллографического направления [001] имеет ковалентную, а вдоль [110] ван-дер-ваальсову связь между атомами.

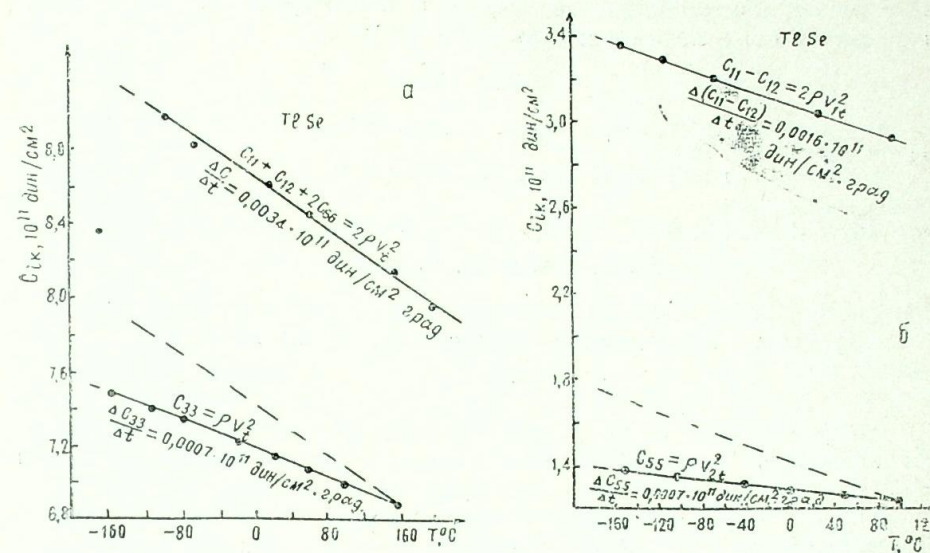


Рис. 1 (а, б). Зависимости упругих констант монокристалла TlSe от температуры

Из рис. 2 (а, б) видно, что упругие константы монокристалла GaSe с ростом температуры линейно уменьшаются и притом более резко, чем у TlSe.

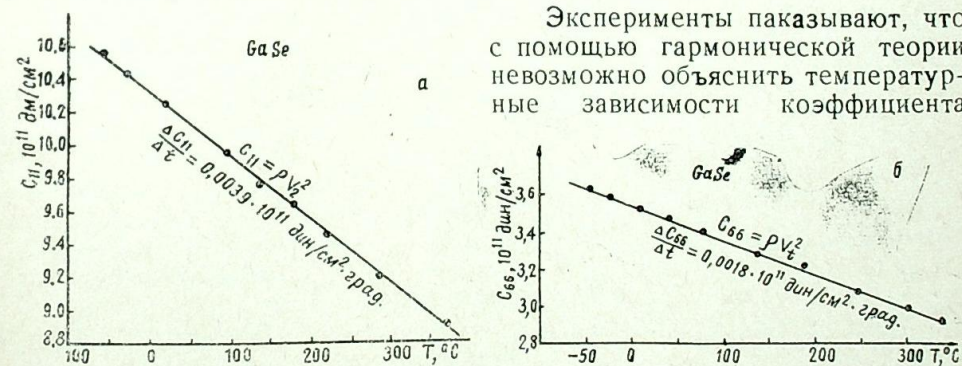


Рис. 2. (а, б). Зависимости упругих констант монокристалла GaSe от температуры.

теплового расширения, удельной теплоемкости, скорости звука и упругих модулей. Поэтому необходим более строгий подход к рассмотрению уравнения состояния кристаллов, что достигается применением теории ангармоничности. Согласно этой теории коэффициент теплового расширения кристаллов не равен нулю, а адиабатические и изотермические модули упругости не равны друг другу и зависят от температуры и давления. Естественно, скорость распространения ультразвуковых волн в кристаллах также зависит от температуры и давления.

Учитывая известное соотношение между скоростью распространения ультразвуковых волн, модулями упругости и плотностью:

$$V^2(T) = C(T) \rho(T),$$

можно сказать, что V в кристаллах в области высоких температур линейно меняется с ростом T . По теории ангармоничности, чем слабее связь атомов и меньше их массы, тем сильнее влияние ангармонизма. Последнее хорошо видно на кривых температурной зависимости упругих постоянных монокристаллов TiSe и GaSe .

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов К. П., Багиров С. Б. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967, № 1.
2. Хантингтон Г. УФН, т. 74, вып. 2 и 3, 1961.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 21. X 1969

К. И. Рзаев, Ш. О. Оручова

TiSe və GaSe монокристалларынын эластик сабитлэринин температур асылылыгы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә TiSe və GaSe монокристалларында мұхтәлиф кристаллографик истигамәтләрдә ултрасәс далғаларынын јајылма сүр'әтинин температур асылылыгынын нәтичәлэри верилмишдир.

Көстәрилән кристалларда ултрасәс далғаларынын јајылма сүр'әти вә сыхлыға әсасән эластиклик сабити һесаблинмышдыр.

Алынән нәтичәләр бәрк чисимләрдә анһармоник нәзәријјәсинә әсасән изаһ едилир.

М. М. АЛИЕВ, М. А. ТАЛИБИ

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСИ ХЛОРА НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА n -СЛОЯ В ПЕРЕХОДАХ Se—CdSe

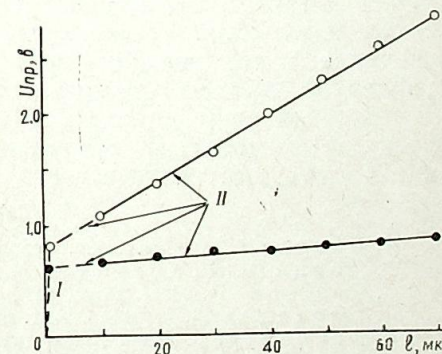
Исследование распределения потенциала в полупроводниковых выпрямителях [1—9] позволяет определить ряд параметров выпрямительного элемента и p — n -перехода. В литературе нет данных о распределении потенциала в селеновых выпрямительных элементах на базе селена высокой чистоты (99,9999%).

Зондовые характеристики распределения потенциала вдоль Se—CdSe с различным содержанием Cl и без Cl при $T_{\text{ком}}$ измерялись по методу [1, 2, 4—7]. Установлено, что в элементе с Cl большая часть приложенного в прямом направлении напряжения $U_{\text{пр}}$ падает на область p — n -перехода. На слой Se приходится не более 30% $U_{\text{пр}}$ при $I_{\text{пр}}=300 \text{ ма}$. В элементах же, не содержащих хлора, основная доля (70%) $U_{\text{пр}}$ приходится на слой Se . При этом значительная часть $U_{\text{пр}}$ падает на слой n — CdSe (0,30 в).

На рисунке по вертикальной оси отложено $U_{\text{пр}}$, отсчитываемое от Al —основания, прилегающего к n -слою (CdSe) и запирающему слою элемента, по оси x —расстояние от того же электрода до зонда в момент измерения. Крайняя правая точка соответствует потенциалу II электрода (Al —фольги) относительно I электрода (Al —основания). Для анализа зондовой характеристики $U_{\text{общ}}$ целесообразно разбить на два участка. Участок I характеризует падение напряжения на n -слое и на запирающем слое ($U_{\text{CdSe}} + U_{\text{отс}}^i$). Согласно [10, 11] падением напряжения между Al —основанием и CdSe можно пренебречь. Участок II расположен в Se и характеризуется линейным возрастанием потенциала.

В описанных измерениях точное распределение потенциала в области p — n -перехода и n -слоя неизвестно, так как толщина запирающего слоя плюс толщина слоя CdSe в элементах (табл. 4) значительно меньше расстояния между двумя точками, в которых производится измерение. Поэтому в указанных областях соответствующие части кривой на рисунке отмечены пунктиром.

Принимая для I участка $U_1 = U_{\text{отс}}^i + U_{\text{CdSe}}$, по известным $U_{\text{отс}}$



Распределение потенциала в элементе Se—CdSe при прямом смещении, $T_{\text{ком}}$: $\circ$ —без Cl , $\bullet$ —с Cl .

Образец Se—CdSe	$U_{\text{отс}}, \text{В}$	$S, \text{см}^2$	$L_{\text{CdSe}}, \text{мк}$	$L_{\text{Se}}, \text{мк}$	$d_{p-n}, \text{мк}, \text{при } U=0$	$n_A, \text{см}^{-3}$	$n_D, \text{см}^{-3}$
Без Cl	0,5	10	0,38	70	0,18	$1,0 \cdot 10^{16}$	$1,4 \cdot 10^{16}$
С Cl	0,6	10	0,19	70	0,11	$3,5 \cdot 10^{16}$	$4,4 \cdot 10^{16}$

[12] и U_I (рис.) вычислим U_{CdSe} . Зная J , U_{CdSe} , U_{Se} , определим R_{CdSe} и R_{Se} . По известным R_{CdSe} , R_{Se} и S , L_{CdSe} , L_{Se} [12] вычисляем ρ_{Se} и ρ_{CdSe} (табл.) В [1, 13] для серийного селенового элемента типа „Г“ (с Cl) найдено значение $\rho_{\text{Se}} = 2 \cdot 10^3 \text{ ом} \cdot \text{см}$, с которым хорошо согласуются и наши данные (табл.).

Наши данные ρ_{CdSe} (табл.) близки к данным [14], где для CdSe толщиной 0,19 и 0,45 мк $\rho = 1,1 \cdot 10^5$ и $6 \cdot 10^5 \text{ ом} \cdot \text{см}$, соответственно. Сравнение R_{Se} , R_{CdSe} , ρ_{Se} и ρ_{CdSe} показывает, что при легировании Se примесью галоида (Cl) в элементах Se—CdSe уменьшаются R и ρ как p -так и n -слоя селеновых p - n -структур. Уменьшение ρ_{CdSe} при наличии Cl в p -слое однозначно доказывает, что примесь Cl в элементах входит в n -слой и увеличивает его σ . Последнее подтверждается и ростом n_D [12] при наличии примеси Cl в Se—CdSe.

Вхождение атомов галоида в слой CdSe и действие их в нем как доноров, может быть подтверждено также и данными [15], согласно которым для Se—CdSe с ростом содержания Br в Se растет n_D в CdSe. Таким образом, можно заключить, что при изготовлении селеновых выпрямителей n -слой выпрямительных элементов легируется примесью галоида и последняя ведет себя в CdSe как донор. Из этого заключения вытекает, что примесь галоида, вводимая в селен, уменьшает также и ρ n -слоя. Установление нами этого факта имеет техническое значение: путем введения примеси галоида (Cl, Br) в n -слой можно управлять характеристиками селеновых выпрямителей.

В заключение авторы выражают благодарность акад. Г. Б. Абдуллаеву за руководство работой и проф. Д. Н. Наследову за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- Бакаев А. В. и др. „Изв. вузов СССР, серия физич.“, 1963, № 1.
- Дорин В. А., Козлов М. М. „Изв. вузов СССР, серия физич.“, 1964, № 3.
- Pearson G. et al. Phys. rev., 85, 1055, 1952.
- Наследов Д. Н. и др. Авт. свид. СССР, № 140915, 20.09, 1961.
- Бакаев А. В. и др. „Заводская лаборатория“, 27, 1240, 1961.
- Дорин В. А., Козлов М. М. „Радиотехника и электроника“, 10, 1518, 1965.
- Соловьев Р. А. Автореф. канд. дисс., Вильнюс, 1967.
- Roganski S. „АЕС—mit“, 54, 157, 1964. Пер. в экспресс-информация. „Электроника“, ВИНТИ, № 34, 7, 1964.
- Геллер И. Х., Дорин В. А. „Изв. вузов СССР, серия физич.“, 1968, № 6.
- Consigny R. L., Madigan J. R. Solid—State Communs, 7, 189, 1969, (Экспресс-информация. „Электроника“, ВИНТИ, М., № 18,8, 1969).
- Реф. журн. „Электроника и ее применение“, 2Б70, 1967.
- Алиев М. М., Талиби М. А., Крутенюк В. А. ФТП, 2, 1387, 1968.
- Трофимов К. Г. „ДАН Узбек. ССР“, № 12, 13, 1956.
- Moriguchi Y. J. Phys. soc. Japan, 14, 152, 1959.
- Lang J. u. a. Acta phys. et chem. Szeged., 12, 103, 1966.

Институт физики АН Азерб. ССР

Поступило 12. XI 1969

$I_{\text{пр}}, \text{мА}$	$U_{\text{общ}}, \text{В}$	$U_I = U_{\text{отс}} + U_{\text{CdSe}}, \text{В}$	$U_{II} = U_{\text{Se}}, \text{В}$	$U_{\text{CdSe}}, \text{В}$	$R_{\text{CdSe}}, \text{ом}$	$R_{\text{Se}}, \text{ом}$	$\rho_{\text{CdSe}}, \text{ом} \cdot \text{см}$	$\rho_{\text{Se}}, \text{ом} \cdot \text{см}$
300	2,88	0,80	2,08	0,30	0,95	6,93	$2,5 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^4$
300	0,85	0,62	0,23	0,02	0,07	0,78	$3,5 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^3$

М. М. Әлиев, М. Ә. Талиби

Хлор ашгарынын Se—CdSe кечидләрində n -тәбәгәнин электрик хассәләринә тәсири

ХҮЛАСӘ

Хлорла ашгарланмыш вә тәмиз Se—CdSe дүзләндиричи элементләрində бир зонд үсулу илә дүз истигамәтдә потенциал пайланмасы тәдгиг олунмушдур.

Әдәбијат мәлуматы [12] вә бизим алдығымыз нәтичәләрә әсасән мүйәјжәд едилмишдир ки, Se—CdSe элементләрində Cl ашгары n -тәбәгәјә дахил олур вә онун хүсуси кечиричилијини (σ) артырыр. σ -нын артмасы Cl ашгарынын өзүнү CdSe-дә донор ролунда апармасы вә әсас јүкдашыјычыларын консентрасијасыны артырмасы илә әлағәдардыр. Бурадан белә нәтичә чыхыр ки, n -тәбәгәјә һалонд ашгары (Cl, Br) вурмагла Se дүзләндиричиләринин характеристикасыны идәрә етмәк олар.

М. И. ШАХТАХТИНСКАЯ, Д. С. ТОМТИЕВ

КОНЦЕНТРАЦИОННОЕ ПЕРЕОХЛАЖДЕНИЕ РАСПЛАВА ПРИ ВЫТАГИВАНИИ МОНОКРИСТАЛЛОВ

В процессе кристаллизации из расплава бинарных систем в результате сегрегационных явлений у фронта кристаллизации возникает слой, обогащенный одним из компонентов. Это приводит к возможности возникновения концентрационного переохлаждения, являющегося причиной микроликваций и нарушения монокристалличности. В работе [1] мы рассматривали преимущества метода вытягивания из расплава по сравнению с методом зонного выравнивания с точки зрения предотвращения этого явления, ограничиваясь при этом лишь очевидными качественными результатами, позволяющими судить о предпочтительности метода вытягивания из расплава.

Данная статья посвящена количественному исследованию условий возникновения концентрационного переохлаждения при вытягивании монокристаллов и сравнению экспериментальных результатов с существующей теорией этого явления; имелось в виду также получение практических рекомендаций по выбору режимов, предотвращающих концентрационное переохлаждение при вытягивании монокристаллов систем с сильно сегрегирующими в процессе кристаллизации компонентами.

Из рассмотрения процесса кристаллизации бинарных систем с коэффициентом сегрегации, заметно отличающимся от единицы, проведенного в работах [2, 3], следует, что для предотвращения концентрационного переохлаждения градиент температуры в расплаве должен отвечать неравенству

$$G \geq \frac{V\Delta T}{D}, \quad (1)$$

где ΔT — разность температур ликвидуса и солидуса при заданной концентрации.

Знак равенства в этом выражении соответствует границе возникновения переохлаждения. Необходимо отметить, что при выводе этого соотношения предполагалось отсутствие конвекционного перемешивания расплава, т. е. считалось, что выравнивание состава жидкой фазы происходит только за счет диффузии.

По известному коэффициенту диффузии и градиенту температур, согласно выражению (1), можно рассчитать максимально допустимую скорость вытягивания, при которой еще не будет наблюдаться переохлаждения. При зонном выравнивании оценка температурного градиента сопряжена с особыми трудностями, так как распределение температур в зоне весьма неравномерно. Введение же в расплавленную

зону термопар для непосредственного измерения температурного поля должно изменять температурный режим.

Тем не менее такая оценка с определенными допущениями проведена в работе [4], значительная часть которой посвящена изучению влияния концентрационного переохлаждения на качество выращиваемых зонным выравниванием монокристаллов твердых растворов висмут—сурьма. Рассчитанная в этой работе зависимость максимальной скорости кристаллизации в отсутствие перемешивания расплава представлена вместе с нашими расчетными и экспериментальными данными на рис. 2. Однако надо отметить, что полного отсутствия перемешивания в расплаве ожидать нельзя, и поэтому правильнее было бы вместо коэффициента диффузии в жидкой фазе подставлять некоторое его эффективное значение $D_{эф}$, учитывающее перемешивание. Такой эффективный коэффициент диффузии должен зависеть от методики выращивания монокристаллов и может быть определен лишь из непосредственных экспериментов по их выращиванию.

Ниже описывается разработанная методика, позволяющая непосредственно определять максимальные скорости вытягивания, при которых не наблюдается концентрационного переохлаждения. Эксперименты проводились на установке для вытягивания монокристаллов, разработанной в нашей лаборатории [5] и позволяющей программно изменять скорость вытягивания в процессе роста кристалла.

Сначала производят вытягивание монокристалла из расплава определенной состава при минимальной скорости, для которой концентрационного переохлаждения заведомо не будет. Затем фиксируют длину уже вытянутого слитка (точная фиксация производится по положению штока затравки, вне рабочей камеры) и включают программное устройство с линейным изменением скорости в зависимости от времени.

Диаметр растущего кристалла поддерживается постоянным. Для этого по мере роста кристалла и убывания количества расплава постепенно снижают температуру у дна тигля, которая фиксируется в зависимости от времени. Таким образом каждой координате вдоль растущего кристалла соответствуют определенная скорость вытягивания и температура у дна тигля. При достижении максимально допустимой (с точки зрения концентрационного переохлаждения) скорости вытягивания монокристалличность вытягиваемого слитка нарушается. Опытный оператор замечает это визуально. Однако точная фиксация участка, на котором нарушена монокристалличность, производится не визуально, а лишь по окончании вытягивания, которое продолжают еще некоторое время.

Следует отметить, что при вытягивании монокристаллов с постоянной скоростью, даже несколько превышающей допустимую, с точки зрения устранения переохлаждения нарушение монокристалличности происходит не сразу, перед этим наблюдается дендритный рост кристаллов с изменяющимся в междендритной области составом. Подобное явление при получении монокристаллов зонным выравниванием подробно рассматривается в работе [4]. Начало такого дендритного роста даже при очень точном анализе зафиксировать трудно. Однако при выращивании кристалла с постоянно нарастающей скоростью участок с дендритной структурой резко сокращается и в пределах точности измерений (порядка долей мм) наступает блочный рост кристалла, который очень легко фиксируется. Определение градиента температуры, соответствующего моменту нарушения монокристалличности, поясняется простейшей схемой вытягивания монокристалла (рис. 1).

Полагая приблизительно линейное распределение температуры в расплаве, определяют градиент по разности температуры на дне тигля и температуры солидуса того состава, при котором произошло нарушение монокристалличности слитка, и делят его на уровень заполнения тигля l , соответствующий этому моменту. Необходимо отметить, что на участке роста монокристалла относительно постоянного состава понижение температуры нагревателя для поддержания постоянства диаметра кристалла является причиной практически постоянного градиента температуры в расплаве.

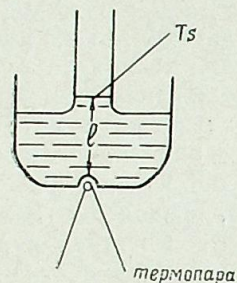


Рис. 1. К определению градиента температуры в расплаве.

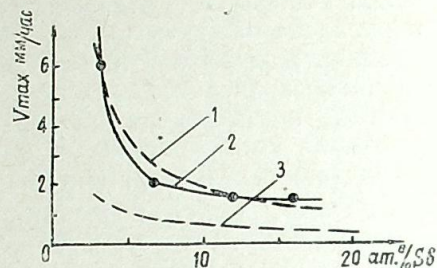


Рис. 2. Зависимости максимальных скоростей кристаллизации от содержания сурьмы: 1 — расчетная; 2 — экспериментальная; 3 — вычисленная в [4].

Состав твердого раствора в области, соответствующей нарушению монокристалличности, определялся химическим и рентгенографическим анализами. По значению максимальной скорости вытягивания монокристалла твердого раствора висмут—сурьма, содержащего 3 ат.% Sb, согласно выражению (1) был определен эффективный коэффициент диффузии сурьмы в жидком висмуте:

$$D_{эф} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Значения ΔT при расчете взяты из диаграммы состояния [6]. По вычисленному $D_{эф}$, изменению ΔT согласно диаграмме состояния для постоянного градиента температур $G = 50 \frac{\text{град}}{\text{см}}$ построена зависимость

(рис. 2). Как видно из рисунка, вычисленная зависимость (пунктирная линия) хорошо согласуется с экспериментальными данными. Последнее свидетельствует о применимости теории концентрационного переохлаждения [2 и 3] для вычисления максимально допустимых скоростей вытягивания монокристаллов твердых растворов с сильно сегрегирующими при кристаллизации компонентами. При этом нужно использовать эффективный коэффициент диффузии с учетом перемешивания расплава.

Как видно из сравнения полученной нами зависимости с вычисленной в работе [4] для зонного выравнивания, вытягивание из расплава оказывается более предпочтительным по сравнению с зонным выравниванием. Надо отметить, однако, что в работе [4] расчеты про-

изводились для градиента $G = 20 \frac{\text{град}}{\text{см}}$, но для меньших значений ΔT , полученных не из диаграммы состояния, приводимой в [6], а из собственных уточненных результатов автора. Пересчет его данных на градиент температуры в расплаве $50 \frac{\text{град}}{\text{см}}$ со значениями ΔT , взятыми из [6], показывает, что соотношение между максимально допусти-

мыми скоростями вытягивания из расплава и зонного выравнивания не изменяется и приведенный выше вывод о преимуществе метода вытягивания из расплава остается в силе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахтахтинская М. И., Томтиев Д. С., Мусаев А. А., Шахтахтинский М. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук* (в печати).
2. Эльбаум К. Успехи физики металлов, т. 5. Металлургиздат, 1963.
3. Brown D. M. and Neumann F. K. J. Appl. Phys., 35, 6, 1964.
4. Налетов В. Л. Канд. дисс. ЛГПИ им. А. И. Герцена.
5. Шилкин А. И., Кулиев А. А. ПТЭ, 5, 1961.
6. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. Металлургиздат, М., 1962.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 17.XI 1969

М. И. Шахтахтинская, Ч. С. Томтиев

Монокристалларын көјәрдилмәси заманы эринтидә
концентрациянын дәјишмәси нәтичәсиндә јаранан ифрат сојума

ХҮЛАСӘ

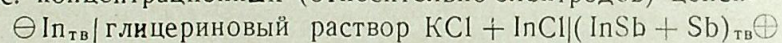
Тәдғигатда кристаллашма заманы күчлү сегрегасија едән бисмут-сүрмә бәрк мәһлулу монокристалларын көјәрдәркән эринтидә консентрасија дәјишмәси нәтичәсиндә јаранан ифрат сојуманын мејданахыма шәранти өјрәнилмишдир. Эринтидә гарышманын јалнызи диффузија јолу илә олмасы фәрзијјәсини гәбул етмәклә, көјәрдилмә сүр'әтинин јухары сәрһәдди тапылмышдыр. Сүр'әтин бу сәрһәддән ашағы гијмәтләриндә микроликвасија вә монокристаллылығын позулмасы мүшәһидә едилмир.

А. С. АББАСОВ, К. Н. МАМЕДОВ СИСТЕМА ИНДИЙ—СУРЬМА

Индий и сурьма образуют одно интерметаллическое соединение с температурой плавления $530 \pm 5^\circ$ [1]. Антимонид индия относится к группе полупроводниковых соединений типа $A^{III}B^V$, обладающих структурой цинковой обманки. В связи с полупроводниковыми свойствами многие физические характеристики этого соединения изучались довольно широко [2].

Исследованы термодинамические свойства антимонида индия [3—8, 10, 13], изучена [3, 4] теплота образования этого соединения методом оловянной калориметрии. В работе [4] приведены также стандартные изобарно-изотермический потенциал (ΔG°) и энтропия образования (ΔS°), полученные авторами расчетным путем. Работа [5] посвящена изучению теплоемкости антимонида индия в интервале $20-500^\circ\text{C}$ и определению теплоты плавления соединения. Изучены теплоемкости ряда полупроводниковых соединений [6, 13], в том числе и антимонида индия; исследование проводилось в интервале $80-300^\circ\text{K}$ [6] и $11-300^\circ\text{K}$ [7].

Целью нашего исследования был расчет термодинамических свойств антимонида индия на основе экспериментально полученных величин электродвижущих сил электрохимических цепей. Изучались э. д. с. концентрационных (относительно электродов) цепей:



Изменение изобарно-изотермического потенциала ΔG° в результате протекающей в ячейке реакции $\text{In}_{\text{TB}} + \text{Sb}_{\text{TB}} = \text{InSb}_{\text{TB}}$ пропорционально величине э. д. с. ячейки:

$$\Delta G^\circ = -zFE, \quad (1)$$

где F —число Фарадея, равное 23062 кал/г-экв ; E —э. д. с. в вольтах и z —валентность иона (In^{+}), в данном случае $z_{\text{In}} = 1$. Изучение зависимости э. д. с. от температуры позволяет установить функциональную зависимость ΔG° от T , а следовательно, найти изменение энтальпии и энтропии при образовании InSb по уравнениям:

$$\Delta S = - \frac{d(\Delta G)}{dT} = zF \left(\frac{dE}{dT} \right), \quad (2a)$$

$$\Delta H = \Delta G + T\Delta S. \quad (26)$$

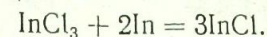
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Исследование проводилось в интервале $390-490^\circ\text{C}$. Были изучены сплавы 57,4 и 69,2 ат% Sb, относящиеся к гетерогенной области $\text{InSb}-\text{Sb}$. Сплавы индия с сурьмой готовились сплавлением навесок металлов.

В нашей работе сплавление проводилось в эвакуированных кварцевых ампулах при $635-650^\circ\text{C}$. Использовались металлы чистотой 99,99%. Ампулу с расплавленными металлами для лучшего смешивания при $635-650^\circ\text{C}$ охлаждали до температуры 450°C , при которой выдерживали ее несколько часов.

Полученный сплав тщательно растирали в яшмовой ступке и из порошка запрессовывали электроды, при этом в сплав запрессовывали токоподвод—вольфрамовую проволоку диаметром 0,5 мм. Форма электродов цилиндрическая, длина цилиндра 10—15 мм, диаметр 6 мм. Электродом служил глицериновый раствор хлорида калия с небольшой добавкой (0,1%) однохлористого индия (InCl).

Монохлорид индия изготавливали согласно методике, описанной в [9]. Вначале готовили трихлорид индия путем сжигания металлического индия в токе хлора, а затем смесь трихлорида индия и металлического индия сплавляли в эвакуированной кварцевой ампуле, при этом протекала реакция:



Ячейка и методика эксперимента описаны в работе [10].

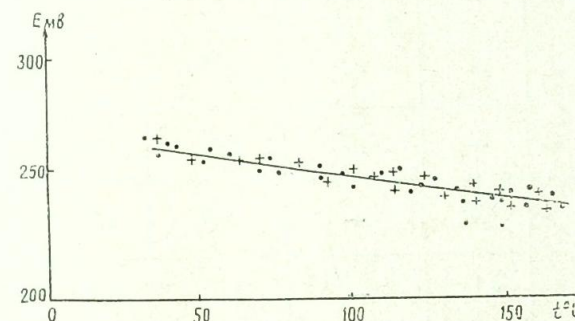


Рис.

Зависимость э. д. с.—температура изучалась при циклическом изменении температуры. Воспроизводимость данных лежит в пределах $\pm 2,0$. Экспериментальные результаты показаны на рисунке. Опытные данные обрабатывались методом наименьших квадратов. При этом получено уравнение:

$$E = (0,354 - 0,264 \cdot 10^{-3} \cdot T) b,$$

из которого с учетом (1) и (2) вычисляются изменения изобарно-изотермического потенциала, энтальпии и энтропии, соответствующие образованию одного моля InSb из твердых индия и сурьмы.

Используя полученные нами экспериментальные данные, теплоемкость чистых металлов [11] и антимонида индия [6, 13], а также теплоту плавления индия [11], мы произвели расчет стандартных значений термодинамических функций:

$$\Delta G_{298}^\circ = -3,2 \pm 0,02 \text{ ккал/г-ат},$$

$$\Delta H_{298}^\circ = -4,1 \pm 0,20 \text{ ккал/г-ат},$$

$$\Delta S_{298}^\circ = -3,0 \pm 0,3 \text{ э. е/г-ат},$$

$$\Delta S_{298}^\circ = 9,4 \pm 0,3 \text{ э. е/г-ат}.$$

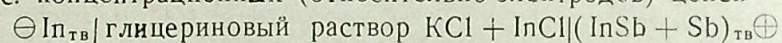
В таблице сопоставлены результаты нашей работы и литературные данные для антимонида индия. В первой строке значение ΔH_{723}° получено Клеппа методом оловянной калориметрии, ΔH_{298}° рассчитано нами на основе величины Клеппа с использованием тех же литературных данных о теплоемкостях, которые мы приняли при расчете резуль-

А. С. АББАСОВ, К. Н. МАМЕДОВ СИСТЕМА ИНДИЙ—СУРЬМА

Индий и сурьма образуют одно интерметаллическое соединение с температурой плавления $530 \pm 5^\circ$ [1]. Антимонид индия относится к группе полупроводниковых соединений типа $A^{III}B^V$, обладающих структурой цинковой обманки. В связи с полупроводниковыми свойствами многие физические характеристики этого соединения изучались довольно широко [2].

Исследованы термодинамические свойства антимонида индия [3—8, 10, 13], изучена [3, 4] теплота образования этого соединения методом оловянной калориметрии. В работе [4] приведены также стандартные изобарно-изотермический потенциал (ΔG°) и энтропия образования (ΔS°), полученные авторами расчетным путем. Работа [5] посвящена изучению теплоемкости антимонида индия в интервале $20-500^\circ\text{C}$ и определению теплоты плавления соединения. Изучены теплоемкости ряда полупроводниковых соединений [6, 13], в том числе и антимонида индия; исследование проводилось в интервале $80-300^\circ\text{K}$ [6] и $11-300^\circ\text{K}$ [7].

Целью нашего исследования был расчет термодинамических свойств антимонида индия на основе экспериментально полученных величин электродвижущих сил электрохимических цепей. Изучались э. д. с. концентрационных (относительно электродов) цепей:



Изменение изобарно-изотермического потенциала ΔG° в результате протекающей в ячейке реакции $\text{In}_{\text{TB}} + \text{Sb}_{\text{TB}} = \text{InSb}_{\text{TB}}$ пропорционально величине э. д. с. ячейки:

$$\Delta G^\circ = -zFE, \quad (1)$$

где F —число Фарадея, равное 23062 кал/г-экв ; E —э. д. с. в вольтах и z —валентность иона (In^{+}), в данном случае $z_{\text{In}} = 1$. Изучение зависимости э. д. с. от температуры позволяет установить функциональную зависимость ΔG° от T , а следовательно, найти изменение энтальпии и энтропии при образовании InSb по уравнениям:

$$\Delta S = -\frac{d(\Delta G)}{dT} = zF\left(\frac{dE}{dT}\right), \quad (2a)$$

$$\Delta H = \Delta G + T\Delta S. \quad (26)$$

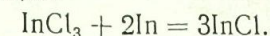
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Исследование проводилось в интервале $390-490^\circ\text{C}$. Были изучены сплавы 57,4 и 69,2 ат% Sb, относящиеся к гетерогенной области $\text{InSb}-\text{Sb}$. Сплавы индия с сурьмой готовились сплавлением навесок металлов.

В нашей работе сплавление проводилось в эвакуированных кварцевых ампулах при $635-650^\circ\text{C}$. Использовались металлы чистотой 99,99%. Ампулу с расплавленными металлами для лучшего смешивания при $635-650^\circ\text{C}$ охлаждали до температуры 450°C , при которой выдерживали ее несколько часов.

Полученный сплав тщательно растирали в яшмовой ступке и из порошка запрессовывали электроды, при этом в сплав запрессовывали токоподвод—вольфрамовую проволоку диаметром 0,5 мм. Форма электродов цилиндрическая, длина цилиндра 10—15 мм, диаметр 6 мм. Электродом служил глицериновый раствор хлорида калия с небольшой добавкой (0,1%) однохлористого индия (InCl).

Монохлорид индия изготавливали согласно методике, описанной в [9]. Вначале pripravляли трихлорид индия путем сжигания металлического индия в токе хлора, а затем смесь трихлорида индия и металлического индия сплавляли в эвакуированной кварцевой ампуле, при этом протекала реакция:



Ячейка и методика эксперимента описаны в работе [10].

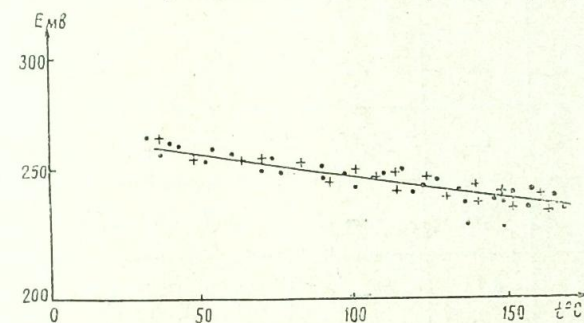


Рис.

Зависимость э. д. с.—температура изучалась при циклическом изменении температуры. Воспроизводимость данных лежит в пределах $\pm 2,0$. Экспериментальные результаты показаны на рисунке. Опытные данные обрабатывались методом наименьших квадратов. При этом получено уравнение:

$$E = (0,354 - 0,264 \cdot 10^{-3} \cdot T) \text{ в},$$

из которого с учетом (1) и (2) вычисляются изменения изобарно-изотермического потенциала, энтальпии и энтропии, соответствующие образованию одного моля InSb из твердых индия и сурьмы.

Используя полученные нами экспериментальные данные, теплоемкость чистых металлов [11] и антимонида индия [6, 13], а также теплоту плавления индия [11], мы произвели расчет стандартных значений термодинамических функций:

$$\Delta G_{298}^\circ = -3,2 \pm 0,02 \text{ ккал/г-ат},$$

$$\Delta H_{298}^\circ = -4,1 \pm 0,20 \text{ ккал/г-ат},$$

$$\Delta S_{298}^\circ = -3,0 \pm 0,3 \text{ э. е/г-ат},$$

$$\Delta S_{298}^\circ = 9,4 \pm 0,3 \text{ э. е/г-ат}.$$

В таблице сопоставлены результаты нашей работы и литературные данные для антимонида индия. В первой строке значение ΔH_{723}° получено Клеппа методом оловянной калориметрии, ΔH_{298}° рассчитано нами на основе величины Клеппа с использованием тех же литературных данных о теплоемкостях, которые мы приняли при расчете резуль-

татов нашей работы, и стандартной температуре, вторая и третья строки содержат результаты расчета стандартного изобарно-изотермического потенциала двумя независимыми путями [4]. Во второй строке расчет произведен по методу Вагнера [12]; используется кривая ликвидуса диаграммы системы In—Sb, соответствующая равновесию с твердой фазой InSb. В расчет входят также теплота и температура плавления соединения, причем теплота плавления определена авторами экспериментально, калориметрическим путем. В третьей строке — результаты расчета, произведенного по основному уравнению $\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$; в этом расчете использованы теплота образования, найденная авторами при калориметрических измерениях, и значение стандартной энтропии образования, вычисленное по литературным данным из абсолютных энтропий.

№ пп	$-\Delta H_{723}^0$ ккал/г-ат	$-\Delta H_{298}^0$ ккал/г-ат	$-\Delta H_{323}^0$ ккал/г-ат	$-\Delta G_{298}^0$ ккал/г-ат	$-\Delta S$ э. е./г-ат	Метод	Автор
1	4,30	4,00	—	—	—	калориметр.	[3]
2	—	—	—	3,02	—	расчет по [12]	
3	—	—	3,47	2,88	1,99	калориметр. расчет	[4]
4	3,98	3,67	—	3,07	2,01	э. д. с.	[8]
5	—	4,1	—	3,20	3,00	настоящее исслед.	

Последняя величина для InSb найдена из табличных данных для Θ/T , где Θ — температура Дебая, принятая авторами равной $200 \pm 5^\circ$. Из таблицы видно, что полученные нами значения теплоты образования антимонида индия совпадают в пределах точности нашего опыта с результатами, полученными в [3, 8], изменение свободной энергии — с данными э. д. с., а также довольно хорошо совпадают с расчетом Шоттки и Бевера [4]. Величина энтропии находится в согласии с результатами Писбергера [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen M., Anderko K. Constitution of Binary Alloys. № 4. London, 1958.
2. Новые полупроводниковые материалы. Сб. перев. с англ. под ред. В. Т. Коломийца, ИЛ, 1958.
3. Kleppa O. J. J. Amer. chem. soc. 77, 897 (1955).
4. Schottky W. Bever M. Acta Metal. 6, № 5, 5320 (1958).
5. Nachtrieb N. H., Clement N. J. Phys. chem. 62, № 7, 876 (1958).
6. Гульятеев П. В., Петров А. В. ФТТ, 1, 1959, № 3.
7. Breckendridge R. C., Blunt R. F. et al. Phys. rev., 96 (3). 571, 1954.
8. Никольская А. В., Гейдерих В. А., Герасимов Я. И. „ДАН СССР“, 130, 1960, № 5.
9. Руководство по препаративной органической химии под ред. Г. Брауэра. ИЛ, 1956.
10. Аббасов А. С., Никольская А. В., Герасимов Я. И. „ДАН СССР“, 147, 1962, № 1.
11. Кубашевский О., Эванс Э. Термохимия в металлургии. ИЛ, 1954.
12. Wagner C. Acta Metal., 6, № 5. 309, 1958.
13. Piesbergen U. Zs. Naturf., 18 a, 141, 1963.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

А. С. Аббасов, К. Н. Маммадов

Индиум-стибиум системинин термодинамик тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Индиум-стибиум системи бир бирлэшмэ илэ характеризэ олунур. Тэдгигатда индиум антимонид бирлэшмэсинин эсас термодинамик функциялары (сэрбэст энерги, энтропија вэ энтропија дэјишмэлэри) өјрәнилмишдир. Бу параметрлэр һәм јухары температур интервалында, һәм дэ отаг температурунда һесабыланмыш вэ мөгаләдә чәдвәл шәк-линдә верилмишдир.

Ф. М. МУСТАФАЕВ, А. С. АББАСОВ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУЛЬФИДА СЕРЕБРА (Ag_2S)

Диаграмма состояния системы серебро—сера (1) характеризуется единственным соединением Ag_2S (рис. 1), обладающим полупроводниковыми свойствами. Широкое применение этот полупроводник получил в производстве термисторов, фотоэлементов, а также фотосопротивлений [2].

Перспективностью Ag_2S объясняется наличие обширного в литературе материала, посвященного изучению его физических свойств. Однако физико-химические свойства, в частности термодинамические, изучены крайне слабо [3, 4, 5]. Последние важны и необходимы при

восстановлении чистых металлов из сульфидных руд, для установления некоторых законов в распределении сульфидных руд в земной коре [6], а также для суждения о стабильности соединения.

Настоящая статья посвящена исследованию термодинамических

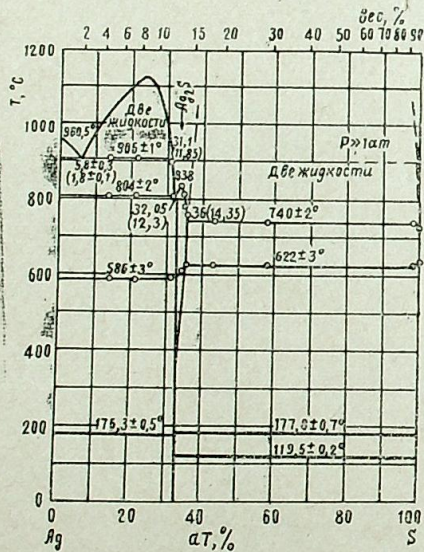


Рис. 1.

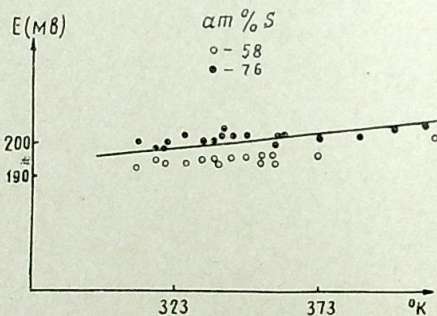
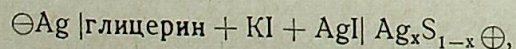


Рис. 2.

функций образования сульфида серебра методом электродвижущих сил с жидким электролитом. Сплавы валового состава готовились сплавлением компонентов, эвакуированных и запаенных в кварцевых ампулах.

В температурном интервале 310—400°K были изучены э. д. с. электрохимических цепей (концентрационных относительно электродов) вида:



где x —молярная доля Ag в сплаве $\text{Ag}_x\text{S}_{1-x}$, а также температурные зависимости э. д. с. для сплавов валового состава (58,00 и 76 ат % S): $E = 0,160 + 0,12 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 0,005$ в, результаты показаны на рис. 2. Методика эксперимента и приборы описаны в работе [7].

Фаза	$-\Delta G_{298}^0 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$-\Delta H_{298}^0 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$-\Delta S_{298}^0 \frac{\text{э. е.}}{\text{моль}}$	$S_{298}^0 \frac{\text{э. е.}}{\text{моль}}$
Ag_2S	$9,1 \pm 0,2$ 9,67 [3]	$7,4 \pm 0,7$ 7,6 [5]	$5,5 \pm 1,0$	$33,7 \pm 1,0$ 35,1 [4] 34,7 [5] 33,5 [5]

На основании соотношений термодинамики вычислены основные термодинамические функции образования (ΔG —свободная энергия Гиббса, ΔS —энтропия, ΔH —энтальпия) в указанном температурном интервале для реакций $\text{Ag} + 0,5\text{S} = 0,5 \text{Ag}_2\text{S}$. Полученные результаты позволили рассчитать стандартные значения указанных величин, а также абсолютную энтропию путем использования энтропии компонентов [8, 9]. В таблице приведены результаты настоящей работы в сопоставлении с литературными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. ИЛ, 1962.
2. Угай Я. А. Введение в химию полупроводников. Изд-во „Высшая школа“, М., 1965.
3. Жук Н. П. ЖФХ, 28. 1523, 1954.
4. Kelley K. K., Bull. U. S. Bur. Mines, 477, 1950.
5. Kubaschewski O., Evans E. Metallurgical thermochemistry, Pergamon Press, London—№ 4.—Paris, 1958.
6. Маколкин И. А., Куликов А. И., Яницкая М. Е. Тр. Московского ин-та народного хозяйства им. Г. В. Плеханова, вып. 46. 1968.
7. Аббасов А. С., Никольская А. В., Герасимов Я. И. „ДАН СССР“, т. 147, 1962.
8. Карапетьянц М. Х. Карапетьянц М. Е. Таблицы основных термодинамических величин. М., 1969.
9. Кубашевский О., Эванс Э. Термохимия в металлургии. ИЛ, 1954.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

Ф. М. Мустафаев, А. С. Аббасов

Күмүш сулфидин термодинамик хассэлэри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ЕНГ методу илә күмүш сулфидин әмәләкәлмә термодинамик функцијаларындан бәһс едилмишдир. 310—400°K температур интервалында электрохимик дөврәниң ЕНГ, тәркиби 58,00 вә 76 ат % S олан әринтинин ЕНГ-нин температур асылылығы өрнәнилмишдир.

Көстәрилмиш температур интервалында әсас термодинамик функцијалар (ΔG_{298}^0 —Киббсин сәрбәст енергисин, ΔH_{298}^0 —энталпија вә ΔS_{298}^0 —энтропијаның дәјишмәси һесапланмышдыр.

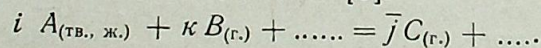
А. Б. АГАЕВ, Н. З. ДЖАЛИЛОВ

ИЗМЕРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ МОНОКРИСТАЛЛОВ Cd_2Se_3 , ВЫРАЩЕННЫХ ГАЗОТРАНСПОРТНЫМ МЕТОДОМ

Современная электронная и полупроводниковая техника требует получения различных химических соединений, обладающих широким диапазоном и разнообразным сочетанием физических свойств. В этом отношении, как показывают результаты исследований [1, 3], халькогениды редкоземельных металлов представляют определенный интерес. Применение их в современной технике все более возрастает, что требует, в свою очередь, дальнейшего улучшения методов синтеза и выращивания их монокристаллов. Одним из интересных соединений халькогенидов редкоземельных металлов является система $\text{Cd}-\text{Se}$. В работе [5] указывается на замечательные термоэлектрические свойства этой системы. Причем в [4] отмечается, что только соединение Cd_2Se_3 системы $\text{Cd}-\text{Se}$ обладает полупроводниковыми свойствами.

Настоящая статья посвящена вопросу выращивания монокристаллов Cd_2Se_3 методом химических транспортных реакций и исследованию их электрических и термоэлектрических свойств. Синтез поликристаллического полупроводника селенида гадолиния Cd_2Se_3 производился импульсным методом непосредственно из компонентов в бомбе, как описано в работе [8].

Основным методом выращивания монокристаллов полупроводника селенида гадолиния являлся диффузионный вариант газотранспортных реакций, предложенный в [6, 7]. Сущность химических транспортных реакций заключается в том, что твердое или жидкое вещество А, взаимодействуя по обратной реакции с каким-либо газообразным веществом В, образует только газообразные продукты, которые после переноса в другую часть системы при изменении условий равновесия разлагаются с выделением вещества А [6]:



Перенос вещества происходит с участием химических реакций. Исходным продуктом для выращивания монокристаллов являлся синтезированный непосредственно из компонентов поликристаллический Cd_2Se_3 , а также свободные компоненты (Gd и Se), взятые в стехиометрическом соотношении. В обоих случаях переносчиком являлся йод, прошедший предварительно трехкратную возгонку.

В опытах температура измерялась с помощью платино-платинородиевых термпар, показания которых регистрировались электронным автоматическим потенциометром. Перенос газообразных продуктов происходил из зоны t_2 в зону t_1 ($t_2 > t_1$). Продолжитель-

ность опыта была не менее 120 часов. Концентрация переносчика (I_2) менялась от 1 до 16 мг/см^3 , диаметры ампулы—от 12 до 22 мм . Монокристалличность подтверждалась методом Лауэ [8].

Электропроводность и термо-э.д.с. монокристаллов стехиометрического состава соединения Cd_2Se_3 , выращенных вышеописанным методом, исследовались в температурном интервале $100 \div 500^\circ\text{K}$. Омические контакты создавались на торцевой стороне образцов испарением никеля в вакууме. Электропроводность измерялась компенсационным методом. Для измерения термо-э.д.с. был использован усилитель типа У4-1.

Результаты измерений электропроводности в зависимости от температуры показаны на рис. 1. Электропроводность монокристаллов Cd_2Se_3 с повышением температуры возрастает, достигая насыщения.

Из наклона кривой зависимости $\lg \sigma \sim \frac{1}{T}$ для энергии активации найдено значение $\Delta E \sim 0,07 \text{ эВ}$, что указывает на несобственную проводимость, которая, как отмечалось в [4], связана с дефектом в структуре Cd_2Se_3 .

Температурная зависимость термо-э.д.с. монокристаллов Cd_2Se_3 представлена на рис. 2. При низких температурах она имеет положительный знак, а с повышением температуры принимает отрицательное значение, достигая в дальнейшем насыщения. Такой ход термо-э.д.с. в зависимости от температуры показывает, что проводимость Cd_2Se_3 носит смешанный характер: в проводимости участвуют и электроны, и дырки.

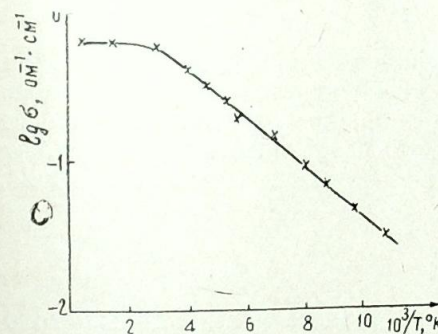


Рис. 1. Зависимость электропроводности монокристаллов Cd_2Se_3 от температуры.

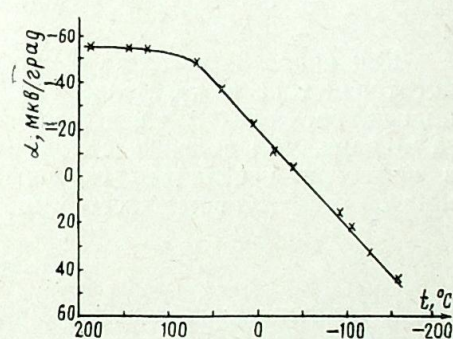


Рис. 2. Зависимость термо-э. д. с. монокристаллов Cd_2Se_3 от температуры.

Если допустить, что при $\sim 100^\circ\text{K}$ в проводимости участвуют только дырки (а при 345°K только электроны), т. е. при этой температуре считать Cd_2Se_3 дырочным полупроводником, то концентрацию дырок можно определить по формуле Писаренко для полупроводника с одним видом носителей тока:

$$\alpha = \frac{\kappa}{e} \left(r + 2 + \ln \frac{(2 \pi m^* \kappa T)^{3/2}}{h^3 n} \right),$$

где κ —постоянная Больцмана,

h —постоянная Планка,

n —концентрация носителей тока,

e —заряд электрона или дырки,

m^* —эффективная масса,

r —показатель степени, который в зависимости от длины свободного пробега и энергии носителя определяется типом кристаллической структуры и дебаевской температурой. Так как пря-

мых определений дебаевских температур θ для Gd_2Se_3 в нашем распоряжении не было, мы воспользовались формулой Линдемана:

$$\theta = C_L T_{пл}^{1/2} A^{-5/6} \rho^{1/3},$$

где $T_{пл}$ — температура плавления вещества,

ρ — плотность в г/см³,

C_L — константа для данной кристаллической структуры (равная примерно 120),

A — средний атомный (молекулярный) вес.

Для оценки применимости значения r в нашем случае вычислено значение θ , которое составляет ~83°K. Наши измерения проводились при $T > \theta$, поскольку между атомами соединения Gd_2Se_3 в основном действуют ионно-ковалентные связи [4], что, делает более вероятным рассеяние носителей на тепловых колебаниях решетки. При этом $r=1$. Значения концентраций носителей тока вычислены для двух температур при известных значениях (для $m^* \approx m_0$) величин, входящих в формулу Писаренко, а подвижности — по формуле

$$\sigma = ne\mu.$$

Полученные данные сведены в таблицу.

$T, ^\circ K$	$n, см^{-3}$	$\mu, \frac{см^2}{в \cdot сек}$
102	$1,2 \cdot 10^{20}$	0,024
345	$7,9 \cdot 10^{20}$	0,040

Как видно из таблицы, с повышением температуры концентрация носителей тока в кристалле Gd_2Se_3 увеличивается. Таким образом подвижность электронов полупроводника гадолиния в ~1,7 раза больше, чем подвижность дырок. Это свидетельствует о том, что в полупроводнике гадолиния эффективная масса электронов меньше эффективной массы дырок.

Выводы

1. Найден оптимальный режим для переноса и выращены монокристаллы Gd_2Se_3 методом газотранспортных реакций.

2. Измерены электропроводность и термо-э.д.с. монокристаллов Gd_2Se_3 и установлено:

а) электропроводность полупроводника гадолиния с повышением температуры возрастает, достигая насыщения;

б) термо-э.д.с. монокристаллов Gd_2Se_3 также с температурой возрастает. При низких температурах она имеет положительный знак, а при высоких принимает отрицательное значение. Такой ход термо-э.д.с. с температурой показывает, что проводимость Gd_2Se_3 носит смешанный характер.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность акад. АН Азерб. ССР Г. Б. Абдуллаеву и доктору химических наук К. А. Шарифову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жузе В. П. и др. ФТГ, 1964, 6, 1, 257.
2. Miller J. F. и др. J. Electrochem. soc., 106, 1043 (1959).
3. Лашкарев Г. В. и др. Укр. физ. ж., 1965, 5, 521.
4. Виккери, Мьюр. В. кн. "Новые исследования редкоземельных металлов". Изд-во "Мир", М., 1964.

5. Оболончик В. А., Лашкарев Г. В. Селениды и теллуриды редкоземельных металлов и актиноидов. Киев, 1966.
 6. Шефер Г. Химические транспортные реакции. Изд-во "Мир". М., 1964.
 7. Сб. "Кристаллизация из газовой фазы", под ред. Н. Н. Шефталы. Изд-во "Мир", М., 1965.
 8. Агаев А. Е., Джалилов Н. З., Аббасов А. С. "АН Азерб. ССР".
- Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

А. Б. Агаев, Н. З. Чалилов

Газотранспорт үсүлү илэ алынмыш Gd_2Se_3 монокристалларынын бэзи физики параметрлеринин өлчүлмэси

ХУЛАСА

Газотранспорт үсүлү илэ Gd_2Se_3 -үн монокристаллары алынмышдыр. Бу монокристалларын электриккечиричилији вэ термоэлектрик хэрэкэт гүввэси 100÷500°K температур интервалында тэдгиг едилмишдир.

Мүэјјән олунмушдур ки, Gd_2Se_3 -үн электриккечиричилији температур јүксәлдикчә артыр вэ дојма хәддинә чатыр; хәмчинин термоэлектрик хэрэкэт гүввэси дә температурун галхмасы илэ артыр. Термоэлектрик хэрэкэт гүввэси ашағы температурда мүсбәт, јүксәк температурда исә мәнфи гијмәтә маликдир. Термоэлектрик хэрэкэт гүввәсинин температурдан асылы олараг бу чүр дәјишмәси кестәрир ки, Gd_2Se_3 -үн кечиричилији гарышыг характер дашыјыр, јә'ни кечиричиликдә хәм электронлар, хәм дә мүсбәт јүклү дешикләр иштирак едир.

З. А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, М. Р. АХУНДОВ О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИФфуЗИОННЫХ КРЕМНИЕВЫХ ДИОДОВ С РАЗЛИЧНОЙ ДЛИНОЙ БАЗЫ

В последнее время интерес исследователей к реактивным свойствам полупроводниковых диодов усилился [1, 2], что объясняется как необходимостью создания новых миниатюрных управляемых реактивных элементов, так и более полного и всестороннего изучения физических процессов в $p-n$ -переходах. Теоретическое исследование реактивных свойств полупроводниковых диодов [3–5] показало, что индуктивный эффект выражен наиболее сильно при некоторой оптимальной длине базы, и в длинных диодах можно получить индуктивный эффект с относительно высокой добротностью. В этом свете интересно исследовать токовые и реактивные свойства диодов с произвольной длиной базы и выяснить возможность их использования в качестве регулируемых индуктивных элементов.

Нами были исследованы вольтамперные и вольтемкостные характеристики диодов, созданных на основе $n-Si$ с $\rho = 20 \text{ ом} \cdot \text{см}$, сплавно-диффузионной технологией. Длина базовой области изменялась от 0,3 до 2,8 мм. Измерения производились в интервале $80 \div 443^\circ \text{K}$.

Вольтамперные характеристики (ВАХ) на постоянном токе при 300°K для образцов с различной длиной базы представлены на рис. 1а. При малых уровнях инжекции ($U_{пр} < 0,5 \text{ в}$), когда преобладает сопротивление самого $p-n$ -перехода над сопротивлением базы, все ВАХ ложатся на прямую, определяемую формулой:

$$I_{пр} = 6,5 \cdot 10^{-9} \cdot \exp \frac{qU}{\beta kT}, \quad (1)$$

где $\beta = 1,6 \div 1,7$. Такая зависимость тока от напряжения указывает на рекомбинационный механизм прохождения тока через $p-n$ -переход и объясняется теорией Саа [6]. Начиная с прямых токов $\sim 1 \text{ ма}$, ВАХ разветвляются, и в зависимости от длины базы меняется вид характеристики.

Для обычных диодов ($d = 0,3 \text{ мм}$) исследование ВАХ показывает, что при малых уровнях инжекции с повышением температуры величина β уменьшается до $1 \div 1,2$, т. е. основную роль в прямом токе играет диффузионный ток. В области средних прямых смещений как при низких, так и при повышенных температурах наблюдается замедление роста прямого тока с напряжением, где $I_{пр} \sim \exp \frac{qU}{2kT}$, т. е. прямой ток обусловлен диффузионным током Холла [7]. Для остальных диодов прямой ток при средних и высоких уровнях инжекции огра-

ничивается сопротивлением базы. В случае длинных диодов ($d \geq 1 \text{ мм}$), даже при малых уровнях инжекции, при всех измеренных температурах величина $\beta = 1,5 \div 2,0$, что объясняется влиянием сопротивления длины базы [8] (так как технология изготовления диодов с различной длиной базы одинакова, то влияние других факторов в данном случае отпадает).

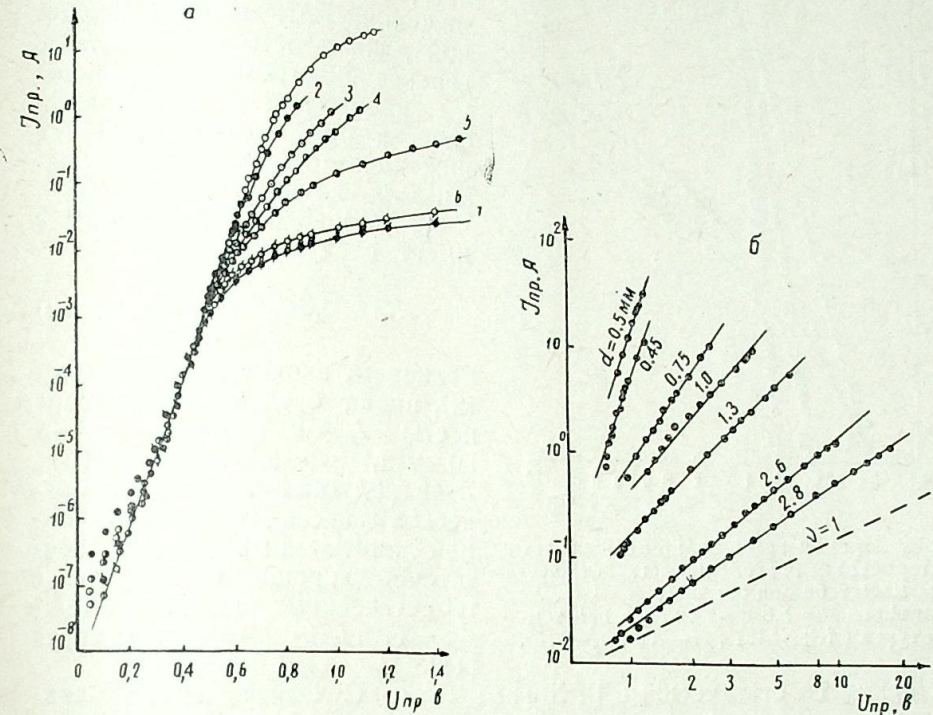


Рис 1. а) Прямая ветвь вольтамперной характеристики в полулогарифмическом масштабе при $T = 300^\circ \text{K}$ для образцов, имеющих длину (d) базовой области в мм: 1—0,3; 2—0,45; 3—0,75; 4—1,0; 5—1,3; 6—2,6; 7—2,8.

б) Прямая ветвь вольтамперной характеристики в двойном логарифмическом масштабе при $T = 300^\circ \text{K}$. Цифры над кривыми указывают длину образцов.

При высоких уровнях инжекции прямой ток изменяется с напряжением по степенному закону: $I_{пр} \sim U^\gamma$, где показатель степени γ в зависимости от эффективной длины базы изменяется от 6 (для $d = 0,3 \text{ мм}$) до 1,5 (для $d = 2,8 \text{ мм}$) (рис. 1б). В предельном случае длинной базы ВАХ в области больших прямых токов выпрямляется до закона Ома (пунктирная линия на графике). С изменением температуры вид зависимости $I_{пр}(U)$ не меняется.

В области высоких уровней инжекции при некотором пороговом напряжении ВАХ, снятые при различных температурах, пересекаются, ниже этого $U_{кр}$ токи с повышением температуры возрастают, выше — убывают (рис. 2). Для обычного диода $U_{кр} \approx 1,1 \text{ в}$, а для «длинного» — $U_{кр} \approx 0,8 \div 0,9 \text{ в}$, что хорошо согласуется с теорией Стафеева [8], согласно которой уменьшение прямого тока с температурой при $U_{пр} > U_{кр}$ определяется увеличением сопротивления толщи диодов. Учитывая, что в исследованном интервале температур концентрация основных носителей не меняется, уменьшение величины прямого тока может быть обусловлено уменьшением подвижности носителей. Действительно, температурная зависимость величины прямого тока при высоких уровнях инжекции имеет вид $I_{пр} \sim T^{-2}$. Такая зависимость $I_{пр}(T)$ достаточно хорошо согласуется с температурной зависимостью подвижности носителей тока в исследованном интервале температур

[12]. Зависимость величины прямого тока при фиксированном значении $U_{пр}$ от длины базы аппроксимируется выражением $I_{пр} \sim d^{-x}$, где $x = 2,8 \div 3,0$ и не зависит от температуры.

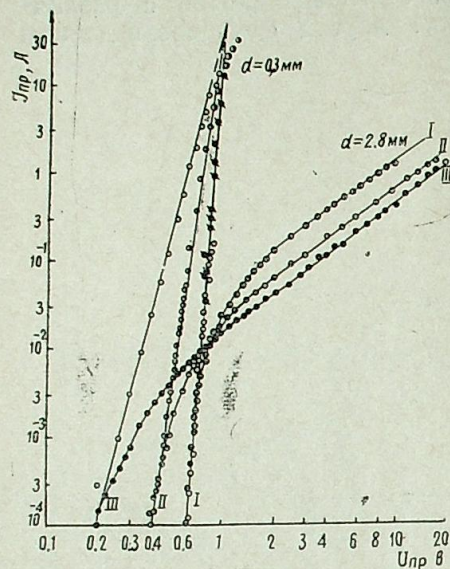


Рис. 2. Прямая ветвь вольтамперной характеристики в двойном логарифмическом масштабе для обычного ($d=0,3$ мм) и длинного ($d=2,8$ мм) диодов при температурах (°K): I—197°; II—300°; III—373°.

Наряду со статическими ВАХ нами было исследовано полное сопротивление диодов на малом переменном сигнале. Измерения емкости и индуктивности производились на мосте полных проводимостей. На рис. 3б представлена зависимость емкости от напряжения в прямом направлении в полулогарифмическом масштабе для диодов с различной длиной базы при T_k и на частоте малого переменного сигнала 100 кГц, а эквивалентная схема диода показана на рис. 3а. Как и в случае обычных диодов, при некотором прямом смещении емкостный характер реактивности переходит в индуктивный, что объясняется модуляцией проводимости базы [1, 2].

До напряжения инверсии диод имеет емкостную реактивность, т. е. между напряжением на диоде и током через диод существует отрицательный сдвиг фаз. При $U_{пр} = U_{инв}$ емкостное сопротивление равно индуктивному, полное сопротивление диода не имеет реактивной составляющей. При $U_{пр} > U_{инв}$ начинает преобладать индуктивное сопротивление диода, т. е. между напряжением на диоде и током через диод существует положительный сдвиг фаз.

Напряжение инверсии возрастает с увеличением длины базы, что объясняется перераспределением приложенного напряжения между базой и $p-n$ -переходом. В зависимости от длины базы изменяются также максимальные значения емкости и индуктивности (рис. 3б). Зависимость $U_{инв}$ от длины базы при $f = 100$ кГц можно представить в виде прямой:

$$U_{инв} = U_{инв}^0 + Ed, \quad (3)$$

где $E = (0,8 \div 1,0)$ в/см. Величина $U_{инв}^0$, как и $U_{инв}$, зависит от температуры: при T_k $U_{инв}^0 = 490$ мВ, а при 380°K— $U_{инв}^0 = 270$ мВ (рис. 4). Эту величину можно принять за падение напряжения на $p-n$ -пере-

ходе, так как она мало отличается от диффузионной разности потенциалов, определенной по измерениям барьерной емкости (при T_k $U_d = 450$ мВ, при 380°K $U_d = 230$ мВ).

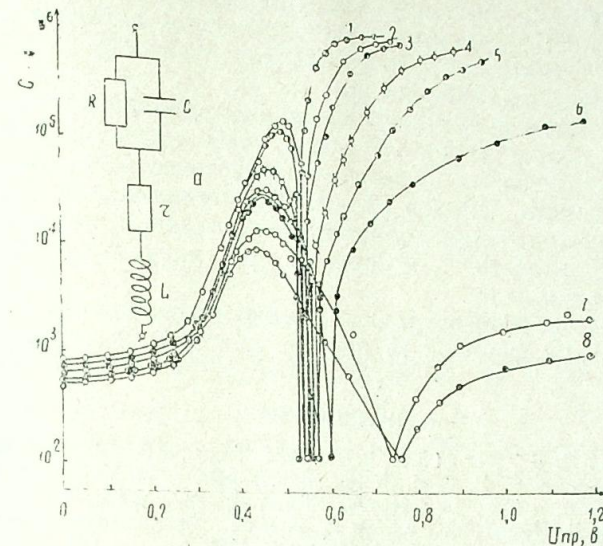


Рис. 3. а) Эквивалентная схема полупроводникового диода. б) Зависимость емкости от величины прямого смещения для диодов с различной длиной базы, измеренная при 300°K и $f=100$ кГц. Кривые относятся к образцам с d , равным (мм): 1—0,3; 2—0,45; 3—0,6; 4—0,75; 5—1,0; 6—1,3; 7—2,6; 8—2,8.

С повышением частоты переменного сигнала зависимость $U_{инв}(d)$ ослабляется и при $f = 600$ кГц почти отсутствует. Отсутствие зависимости $U_{инв}$ от d на относительно высоких частотах, вероятно обусловлено тем, что индуктивный эффект вызван модуляцией проводимости области базы, непосредственно примыкающей к $p-n$ -переходу. Такая закономерность $U_{инв}(d)$ остается в силе и при других температурах (рис. 4). Из сравнения значений диффузионной разности потенциалов при различных температурах и значений $U_{инв}$, измеренных при сравнительно высоких частотах ($f = 500 \div 600$ кГц), видно, что независимо от длины базы диодов эти значения совпадают.

Исходя из этого факта, можно предложить новый метод определения диффузионной разности потенциалов на $p-n$ -переходе диодов, основанный на измерении напряжения инверсии при относительно высоких частотах. При больших значениях прямого смещения величина отрицательной емкости (соответствующая ей величина индуктивности) определяется по формуле $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, а добротность индуктивности $Q = \frac{1}{R\omega C}$ достигает насыщения. Для исследованных диодов индуктивность достигает своей установившейся величины при плотности пря-

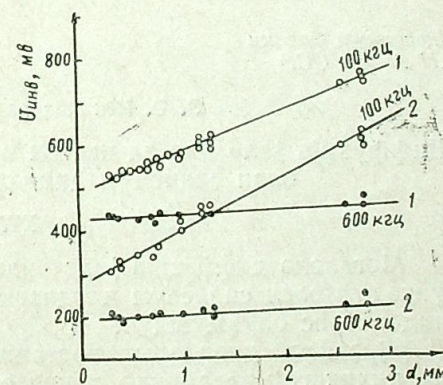


Рис. 4. Зависимость напряжения инверсии при 300°K (1) и 380°K (2) от длины базы.

При больших значениях прямого смещения величина отрицательной емкости (соответствующая ей величина индуктивности) определяется по формуле $L = \frac{1}{\omega^2 C}$, а добротность индуктивности $Q = \frac{1}{R\omega C}$ достигает насыщения. Для исследованных диодов индуктивность достигает своей установившейся величины при плотности пря-

мого тока $\sim 80 \div 100$ ма/см². Значения индуктивности и добротности исследованных кремниевых диодов экспоненциально растут с увеличением длины базы. Для обычных промышленных диодов индуктивность составляет 2—3 мкГн, а добротность $Q \leq 1$. Для длинных диодов индуктивность на три порядка больше (3—4 мГн), а добротность достигает 50. Отметим, что значения индуктивности и ее добротность почти не зависят от температуры.

Таким образом индуктивность длинных диодов обладает большей величиной и большей добротностью, чем индуктивность обычных диодов, что находится в согласии с теоретическими исследованиями реактивных свойств диодов [3—5]. Значительный индуктивный эффект и большие значения добротности у длинных диодов дают возможность использовать их в качестве регулируемых твердотельных индуктивных элементов.

В заключение выражаем искреннюю благодарность Г. Б. Абдуллаеву и Э. А. Джафаровой за ценные советы и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nordman J. E., Greiner R. A. IEEE Trans., ED—10, 1963, № 3, p. 171.
2. Abdullayev G. B. et al. Solid—State Elect., v. 11, 1968, № 2, p. 233.
3. Прима Н. А. и Тхорик Ю. А. ФТП, т. 1, 1967, № 4.
4. Баранов Л. И. и Самсонов А. В. В сб. „Физика полупроводников и полупроводниковая электроника“, вып. 1. Саратов, 1968.
5. Аронов Д. А., Котов Я. П., Рын Э. т. 12, № 8, стр. 1469, 1967; ФТП, т. 2, № 3, стр. 404, т. 2, № 1, стр. 176, 1968.
6. Sah C. T. Proc. JRE, v. 49, 1967, № 7, p. 603.
7. Hall R. N. Proc. JRE, v. 40, 1952, № 11, p. 1512.
8. Стафеев В. И. ЖТФ, т. 28 вып. 8, 1958.
9. Shockley W. Bell. Syst. Techn. J., v. 29, 1949, № 3, p. 435.
10. Рашба Э. И., Толпыго К. Б. ЖТФ, т. 26, 1956, № 7.
11. Lampert M. A., Rose A. Phys. Rev., v. 121, 1961, № 1, p. 26.
12. Смит Р. „Полупроводники“. Изд. ИЛ, 1962.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

З. Э. Искандерзаде, М. Р. Ахундов

Диффузија јолу илэ алынмыш вэ базасынын узунлуғу мүхтэлиф олан силисиум диодларынын бэ'зи хассэлэри

ХУЛАСЭ

Мэгалэдэ диффузија јолу илэ алынмыш вэ базасынын узунлуғу мүхтэлиф олан силисиум диодларынын волтампер вэ тутум хассэлэриндэн бэһс олунмушдур.

Өјрэнилэн диодларын волтампер характеристикасы дүзүнэ чэрэјанын кичик гіјмэтлэриндэ кечид областындакы кенерасија-рекомбина сија просеси, чэрэјанын бөјүк гіјмэтлэриндэ исэ база областыны мүгавимэти илэ мүјјэн едилір.

Реактивлијин тутум характериндэн индуктив характеринэ кечидији кэркинлик базанын узунлуғу илэ хэтти олараг артыр. Бу факт тэдгиг олунан кэркинлијин $p-n$ кечид илэ база арасында пајланмасы илэ изаһ едилір. Диодларын индуктивлији базанын узунлуғу илэ экспоненсиал олараг артыр вэ узун диодлар үчүн индуктивлијин гіјмэти ади диодлардакына нисбэтэн чох олур.

А. А. АБДУРАХМАНОВ, Э. И. ВЕЛИЮЛИН

О ПОВОРОТНОМ ИЗОМЕРИЗМЕ МОЛЕКУЛЫ Н-БУТАНОЛА

При решении вопросов поворотного изomerизма в сложных молекулах большую важность приобретает энергетический расчет конформаций, получаемых при вращении одной группы атомов относительно другой. Метод, основанный на двух эффектах—обменных взаимодействиях электронов в связях, примыкающих к той связи, относительно которой имеет место внутреннее вращение, и взаимодействиях валентно не связанных атомов позволяет рассчитать барьеры внутреннего вращения в этаноподобных молекулах [1]. В простом квантовомеханическом рассмотрении барьер этана образуется только вследствие эффекта ориентации связей, т. е. обменными взаимодействиями. Другой подход к этому вопросу состоит в том, чтобы приписать барьер только несвязанным, или свободным, взаимодействиям, причем расчет производится по полуэмпирическим формулам [2]. Более полный расчет показал относительно маленькие вклады (около 15%) свободных взаимодействий в барьер этана.

В настоящем рассмотрении для обменных взаимодействий использована теория Полинга [3, 4]. Свободные же взаимодействия складываются из Ван-дер-Ваальсовских и диполь-дипольных взаимодействий. Расчет обменных взаимодействий, учитывающий только s - и p -электроны, дает очень маленькую высоту барьера. Полинг ввел в рассмотрение 4% электронов d -типа и 2% электронов f -типа в дополнение к s - и p -электронам. Это привело к большей плотности орбитали связи по сравнению с орбиталью sp^3 и к увеличению прочности связи на 38%. Включение в расчет электронов d - и f -типа также приводит к барьеру с 3 π и 3 π и к высоте барьера, пропорциональной количеству d - и f -электронов и кратности связи. Для ординарной связи Полинг получил барьер около 3 ккал/моль, что хорошо согласуется с экспериментом.

Другим важным результатом теории Полинга является то, что для молекул, имеющих орбитали гибридного типа, высота барьера должна быть постоянной частью энергии связи. Это подтвердилось экспериментом: большинство замещенных этана со связью $C-C$ имеют барьер около 3 ккал/моль, а молекулы, содержащие более слабые связи ($C-Si$, $C-Ge$ и т. д.), имеют более низкие барьеры. Оболочки, содержащие неподеленные пары электронов, не имеют. Оболочки, содержащие неподеленные пары электронов, не имеют. Оболочки, содержащие неподеленные пары электронов, не имеют. В электронов d - и f -типа, поэтому они не вносят вклада в барьер. В ряде случаев в первом приближении действительно можно считать, что потенциалы внутреннего вращения определяются полностью эффектом ориентации связей или обменными взаимодействиями. При наличии симметрии (этан) все шахматные конфигурации эквивалентны,

поскольку ориентация связей и стерические взаимодействия для них одинаковы. Нарушение такой симметрии в результате замещения одного или нескольких атомов водорода метильных групп другими, по всей вероятности, не изменит энергии обменных взаимодействий, тогда как энергия свободных взаимодействий валентно не связанных атомов при этом должна измениться. В данном случае более устойчивой будет та конфигурация, для которой энергия стерических взаимодействий минимальна. Таким образом различие в барьерах молекул одного класса Полинг приписывает стерическим эффектам.

Рассматриваемый метод расчета потенциалов внутреннего вращения предложен Скоттом и Шерага [1] для молекулы вида $(x_1 x_2 x_3) \cdot x_4 - x_5 (x_6 x_7 x_8)$, в которой в общем случае все атомы x_i могут быть различными, а в частных случаях некоторые могут отсутствовать. Связь $x_4 - x_5$ единственная, вокруг которой рассматривается внутреннее вращение. Здесь имеют место обменные взаимодействия электронных орбит $x_1 - x_4$, $x_2 - x_4$ и $x_3 - x_4$ с орбитами $x_5 - x_6$, $x_5 - x_7$ и $x_5 - x_8$ и несвязанные взаимодействия атомов x_1 , x_2 и x_3 с атомами x_6 , x_7 и x_8 .

Если не учитывать изменения длин связей и деформации валентных углов, то энергия взаимодействия, учитывающая два указанных эффекта, может быть записана следующим образом:

$$u(\omega) = \frac{u_0}{2} (1 + \cos 3\omega) + \sum_{k=1}^m \left\{ a_k \exp(-v_k r_k) - \frac{c_k}{r_k^6} + \frac{d_k}{r_k} \right\}.$$

Угол внутреннего вращения ω взят равным нулю в затененной конфигурации.

Согласно теории Полинга u_0 , входящее в выражение для обменных взаимодействий, постоянно для каждого класса молекул, имеющих одинаковые атомы x_4 и x_5 . Второй член позволяет рассчитать несвязанные взаимодействия (m — число взаимодействующих пар атомов).

Полуэмпирические параметры a_k , v_k , c_k и d_k для пар одинаковых атомов получены из кристаллографических и термодинамических данных: a_k найден при помощи минимизации потенциальной функции свободных взаимодействий, когда расстояние между атомами равно сумме их Ван-дер-Ваальсовских радиусов; v_k для пар одинаковых атомов получен из графика зависимости v_k от атомного номера, построенного по данным Вестеймера [5], Амдура и Харкниса [7], Амдура и Масона [6] для инертных газов; c_k определен с помощью уравнения Слейгера—Кирквуда [8]:

$$c_k = \frac{3/2 e^2 (h/2\pi m)^{1/2} \alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1/N_2)^{1/2} + (\alpha_2/N_1)^{1/2}},$$

где α_1 и α_2 — поляризуемость атомов;

e и m — заряд и масса электрона, соответственно;

N_1 , N_2 — «эффективные» значения числа электронов внешней оболочки, которые получены из графика зависимости $N_{эфф}$ от атомного номера, построенного по данным Питзера [8] для инертных газов.

Значения коэффициентов d_k , входящих в член $\frac{d_k}{r_k}$, учитывающий

диполь-дипольные взаимодействия, для большинства случаев равны нулю. Дело в том, что если дипольные моменты вращающихся связей невелики, то с изменением расстояний r_k диполь-дипольные взаимодействия изменяются малозаметно по сравнению с экспоненциальным

членом и членом $\frac{c_k}{r_k^6}$. Для случаев больших вращающихся диполей значения d_k отличны от нуля.

Пространственная модель молекулы нормального бутилового спирта $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ (рис. 1) является модификацией модели молекулы этана, в которой атом водорода одной метильной группы заменен радикалом $(\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH})$, а другой — радикалом (OH) . Это позволяет использовать описанный метод расчета потенциалов внутреннего вращения для энергетического расчета конформаций, получаемых при вращении группы CH_2R_2 относительно CH_2R_1 вокруг единичной свя-

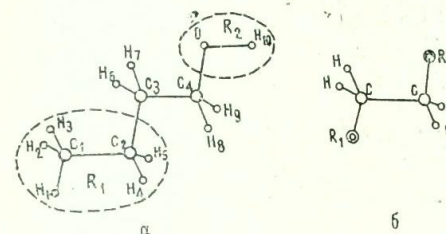


Рис. 1. Молекула нормального бутилового спирта (а) и ее упрощенная модель (б).

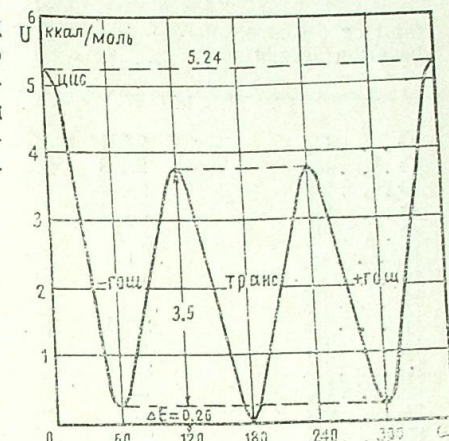


Рис. 2. Потенциальная кривая вращения группы CH_2OH относительно остова $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2$ вокруг связи C—C .

зи C—C (рис. 1). Обменные взаимодействия орбит $\text{H}_6 - \text{C}_3$, $\text{H}_7 - \text{C}_3$ и $\text{C}_2 - \text{C}_3$ с орбитами $\text{C}_4 - \text{H}_8$, $\text{C}_4 - \text{H}_9$ и $\text{C}_4 - \text{O}$ описываются выражением $u_{\text{обмен}} = \frac{u_0}{2} (1 + \cos 3\omega)$. Значение u_0 принято равным 3,11 ккал/моль

(среднее значение барьера для класса молекул типа этана и его замещенных).

Параметры несвязанных взаимодействий a_k , v_k и c_k для пар одинаковых атомов взяты из работы Скотта и Шерага [4], а их значения для пар неодинаковых атомов получены с помощью простого комбинаторного принципа [9]:

$$a_{12} = \sqrt{a_{11} \cdot a_{22}}; \quad b_{12} = \frac{1}{2} (b_{11} + b_{22}); \quad c_{12} = \sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}.$$

Расстояния r_k между валентно не связанными атомами найдены по предварительно вычисленным координатам рассматриваемых атомов в произвольной системе координат.

Все использованные для различных пар свободного взаимодействия значения параметров a_k , v_k , c_k , и d_k приведены в табл. 1.

Таблица 1

Взаимодействие	a_k	v_k	c_k	d_k
H . . . H	$9,17 \times 10^3$	4,54	45,2	0
H . . . O	$2,68 \times 10^4$	4,57	90,4	0
O . . . O	$1,35 \times 10^5$	4,59	217	0
C . . . C	$3,77 \times 10^4$	3,52	47,4	0
C . . . O	$7,13 \times 10^4$	4,05	101,42	0
H . . . C	$1,86 \times 10^4$	4,03	46,29	0

Расчет энергий взаимодействия производился для значений углов внутреннего вращения $\omega = 0^\circ$ (цис-конфигурация), 60° (гош-конфигурация), 120° (барьер между транс- и гош-конфигурациями) и 180°

(транс-конфигурация). Пары свободно взаимодействующих атомов и вычисленные расстояния r_k между ними для указанных углов поворота группы CH_2OH сведены в табл. 2.

Таблица 2

Пары свободного взаимодействия	r_k (в Å)			
	$\omega = 0^\circ$	60°	120°	180°
O . . . C ₂	2,531	2,886	3,493	—
O . . . H ₄	2,400	2,507	3,402	—
O . . . H ₅	2,400	3,246	—	—
O . . . H ₆	3,113	2,607	2,307	2,591
O . . . H ₇	3,113	—	3,093	2,591
H ₈ . . . C ₂	3,271	2,781	2,505	2,781
H ₈ . . . H ₄	—	3,103	2,458	2,536
H ₈ . . . H ₅	—	2,536	—	3,103
H ₈ . . . H ₆	2,231	—	—	2,467
H ₈ . . . H ₇	2,853	2,467	—	—
H ₉ . . . C ₂	3,271	—	3,262	2,781
H ₉ . . . H ₄	—	—	—	3,103
H ₉ . . . H ₅	—	—	3,226	2,536
H ₉ . . . H ₆	2,853	2,454	—	—
H ₉ . . . H ₇	2,231	2,454	2,232	2,467

Полученные значения относительных энергий для рассмотренных величин угла ω (положительных и отрицательных) также табулированы (табл. 3). Эти результаты даны относительно транс-формы ($\omega = 180^\circ$).

Таблица 3

Угол внутреннего вращения ω (град)	U (ккал/моль)
0	5,24
60	0,26
120	3,77
180	0
240	3,77
300	0,26
360	5,24

По результатам расчета построена потенциальная кривая вращения группы CH_2OH вокруг единичной связи $\text{C}-\text{C}$ (рис. 2). Полученная форма кривой указывает на энергетическую устойчивость *гош*- и *транс*-изомеров. Разность энергий *гош*- и *транс*-форм составляет около 260 ккал/моль, а барьер между ними равен примерно 3,51 ккал/моль. Это дает основание полагать, что в микроволновом спектре молекулы *н*-бутанола будут наблюдаться переходы, связанные с *транс*- и *гош*-формами молекулы, причем, поскольку различие в энергиях изомеров невелико, статистический вес двух *гош*-форм ($\omega = 60^\circ$ и $\omega = 300^\circ$) примерно вдвое выше *транс*-формы. В связи с этим можно говорить о большей „стабильности“ *гош*-формы и считать, что интенсивность линий *гош*-спектра окажется выше.

Примерный расчет расщеплений за счет туннелирования через барьер между *транс*- и *гош*-положениями (для $u = 3,51$ ккал/моль) показал, что в основном колебательном состоянии расщепления столь незначительны, что их обнаружение в спектре невозможно. Таким образом энергетический расчет конформаций молекулы *н*-бутанола указал наиболее вероятные изомерные формы и дал возможность предопределить некоторые важные свойства спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott R. A. and Scheraga H. A. J. chem. phys., 42, 6, (1965).
2. Mason E. A. and Kreevoy. M. M. J. Am. chem. soc., 77, 5808, (1955).
3. Pauling L. Proc. Nat. acad. sci. (U. S), 44, 211, (1958).
4. Pauling L. The Nature of the Chemical Bond. (Cornell University Press, Ithaca N. Y. (1960).
5. Westheimer F. H. In Steric Effects in Organic chemistry, N. Y., (1956).
6. Amdur I. and Mason. E. A. J. chem. prys., 23, 415, (1955).
7. Amdur I. and Harkness A. L. J. chem phys., 22, 664, (1954).
8. Pitzer K. S. Ref., 1 p., 59.
9. Hendrickson I. B. J. Am. chem. soc., 83, 4537, (1961).
10. Горди В., Смит В., Трамбаруло Р. „Радиоспектроскопия“, ИЛ, 1955.
11. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Оптика и спектроскопия“, т. 25, 954, 1968.
12. Аббасов А. А. Дисс. Баку, 1969.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

А. А. Эбдуррəһманов, Е. И. Вəлијулин

Нормал бутил спирти молекулунда дəнмə изомеризми

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə молекулун дахили фырланмасынын ики ефектə—електрон орбитлəринин мұбадилə гаршылыглы тəсиринə вə валент əлə гэси олмəјан атомларын сəрбəст гаршылыглы тəсиринə əсасланан потенциал енержинин һесапланма методу вə $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ молекулунда CH_2OH атом групунун $\text{C}-\text{C}$ рабитəси əтрафында фырланмасы нəтичəсиндə алынан конформасијаларын һесапланмасы верилмишдир.

Бундан башга, нəзəри һесабламанын нəтичəсиндə һəмин молекул үчүн потенциал əјри гурулмушдур.

М. Н. АБДУЛЛАЕВ

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ФЕРРОМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ С ПРИМЕСЬЮ

В работах [1—3] рассматривается поглощение электромагнитного излучения в магнитоупорядоченных кристаллах. Выяснено, что поглощение приводит к одновременному возбуждению двух магнонов в различных магнитных подрешетках с противоположными волновыми векторами. Эти процессы описываются гамильтонианами, содержащими электрический дипольный момент, который обязан обменно-связанным парам, относящимся к магнитным подрешеткам с противоположными спинами. Поэтому двухмагнонное возбуждение в ферромагнитных кристаллах невозможно [4].

В данной работе показано, что электрический дипольный момент обменно-связанных пар в ферромагнитных кристаллах возможен, если он содержит примесный атом с отрицательным обменным взаимодействием. В этом случае примесные атомы играют роль подрешетки со спином, противоположным спину подрешетки ферромагнитной матрицы.

Для нахождения спектра двухмагнонного возбуждения исходим из гамильтониана

$$\begin{aligned} H &= H_1 - \vec{E} \vec{P}; \\ H_1 &= I \sum_{i \Delta} \vec{S}_i \vec{S}_{i+\Delta} + 2I' \sum_{\Delta} \vec{S}_1 \vec{S}_{\Delta}, \\ \vec{P} &= \pi \sum_{\Delta} \vec{S}_1 \vec{S}_{\Delta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\vec{E}$ — электрический вектор электромагнитного излучения; $\vec{P}$ — электрический дипольный момент, возникающий в результате введения примесного атома с отрицательным обменным взаимодействием в ферромагнитный кристалл. С помощью метода двухвременной функции Грина вычисляется диэлектрическая восприимчивость на основе гамильтониана (1). Так как мнимая часть диэлектрической восприимчивости связана с коэффициентом поглощения [5]:

$$A_{\text{sec}}(\omega) = 8\pi\omega \text{Im} \epsilon, \quad (2)$$

то вычисление диэлектрической восприимчивости позволяет нам определить энергетический спектр элементарных возбуждений при поглощении электромагнитного излучения.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Как показано в работе [6], диэлектрическая восприимчивость выражается через функции Грина следующим образом:

$$\epsilon = -2\pi i \ll P(t) | P(t') \gg, \quad (3)$$

где $P(t)$ — электрический дипольный момент. Используя преобразования Холстейна—Примакова [7], можно выразить операторы $\vec{S}$ через операторы a_i и a_i^+ , т. е.

$$\begin{aligned} S_i^+ &= (2S)^{1/2} a_i, \quad S_i^- = (2S')^{1/2} a_i^+, \\ S_i^- &= (2S)^{1/2} a_i^+, \quad S_i^+ = (2S')^{1/2} a_i, \\ S_i^z &= S - a_i^+ a_i, \quad S_i^z = -S' + a_i^+ a_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в (1), получаем выражение для гамильтониана и электрического дипольного момента:

$$\begin{aligned} H_1 &= IS \sum_{i \Delta} (a_i^+ a_i + a_{i+\Delta}^+ a_{i+\Delta} - a_i^+ a_{i+\Delta} - a_i a_{i+\Delta}^+) + \\ &+ 2I' S' \sum_{\Delta} a_{1+\Delta}^+ a_{1+\Delta} + 2I' S \sum_{\Delta} a_1^+ a_1 + \\ &+ 2I' \sqrt{SS'} \sum_{\Delta} (a_1^+ a_{1+\Delta}^+ + a_1 a_{1+\Delta}); \\ \vec{P} &= \pi \sum_{n \Delta} (a_n^+ a_{n+\Delta}^+ + a_n a_{n+\Delta}) (S'S)^{1/2} \delta_{n\Delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Явное выражение диэлектрической восприимчивости имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \epsilon &= -2\pi i \pi \sum_{n \Delta} S'S' \delta_{n1} \delta_{n1'} \{ G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^I(t-t') + G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{II}(t-t') + \\ &+ G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{III}(t-t') + G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{IV}(t-t') \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^I(t-t') &= \ll a_n(t) a_{n+\Delta}(t) | a_{n'}^+(t') a_{n'+\Delta}^+(t') \gg, \\ G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{II}(t-t') &= \ll a_n(t) a_{n+\Delta}(t) | a_{n'}(t') a_{n'+\Delta}(t') \gg, \\ G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{III}(t-t') &= \ll a_n^+(t) a_{n+\Delta}^+(t) | a_{n'}(t') a_{n'+\Delta}(t') \gg, \\ G_{nn+\Delta; n'n'+\Delta}^{IV}(t-t') &= \ll a_n^+(t) a_{n+\Delta}^+(t) | a_{n'}^+(t') a_{n'+\Delta}^+(t') \gg. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления функции Грина (7) составим уравнения для операторов a_n и a_n^+ на основе гамильтониана (5):

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} a_n &= 2IS \sum_{\Delta} (a_n - a_{n+\Delta}) + 2IS \sum_p V_{np}^I a_p + 2IS \sum_p V_{np}^{II} a_p^+, \\ -i \frac{d}{dt} a_n^+ &= 2IS \sum_{\Delta} (a_n^+ - a_{n+\Delta}^+) + 2IS \sum_p V_{np}^I a_p^+ + 2IS \sum_p V_{np}^{II} a_p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_{np}^I &= \frac{I'}{I} \sum_{\Delta} \delta_{n1} \delta_{p1} + \frac{I'}{I} \frac{S'}{S} \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p,1+\Delta}, \\ V_{np}^{II} &= \frac{I'}{I} \left(\frac{S'}{S} \right)^{1/2} \sum_{\Delta} (\delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta} + \delta_{p1} \delta_{n,1+\Delta}). \end{aligned}$$

Уравнение движения в матричной форме для функции Грина имеет вид:

$$(\hat{V}_0 + 2\hat{V}) \begin{pmatrix} \hat{G}^I \\ \hat{G}^{IV} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

здесь возмущение $\hat{V}$ определяется следующим образом:

$$\hat{V} = -2IS \begin{pmatrix} V_{np}^I - \lambda_{np} \lambda_{np} \\ -\lambda_{np} - (V_{np}^I + \lambda_{np}) \end{pmatrix}; \lambda_{np} = 2IS \sum_q V_{np}^{II} (+ \omega^{-1} V^{II})_{qp}.$$

При $V = 0$ из (8) получаем уравнение, подобное уравнениям для идеального ферромагнетика, т. е.

$$\hat{V}_0 \hat{G}_{01}^I = \frac{1}{2\pi} L, \quad (9)$$

где

$$\hat{G}_{01}^I(E) = N^{-1} \sum_k \frac{L}{\omega - 2\varepsilon_k} e^{ik[(n+m) - (n' + m')]}.$$

$$\varepsilon_k = 2IS \sum_{\Delta} (1 - e^{i\Delta k}).$$

Систему (8) можно записать также в виде, позволяющем выразить функции Грина для реального кристалла через функции Грина идеального кристалла:

$$(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}) \begin{pmatrix} \hat{G}^I \\ \hat{G}^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}_{01}^I \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

С помощью матричной алгебры можно показать, что указанные функции Грина определяются следующим образом:

$$G_{n_1 m; n' m'}^I = \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_1 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} \hat{G}_{01}^I \\ 0 \end{pmatrix}_{pm},$$

$$G_{n_2 m; n' m'}^{IV} = \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_2 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} \hat{G}_{01}^I \\ 0 \end{pmatrix}_{pm; n' m'}. \quad (11)$$

Аналогично можно вычислить функции типа

$$G_{n_1 m; n' m'}^{II} = \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_1 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{G}_{02}^{II} \end{pmatrix}_{pm; n' m'},$$

$$G_{n_2 m; n' m'}^{III} = \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_2 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{G}_{02}^{II} \end{pmatrix}_{pm; n' m'}. \quad (12)$$

Здесь G_{02}^{II} — функция идеального ферромагнетика;

$$G_{02}^{II} = -N^{-1} \sum_k \frac{L}{\omega + 2\varepsilon_k} e^{ik[(n+m) - (n' + m')]}, \quad (13)$$

Согласно (6) и (11), (12) диэлектрическую восприимчивость можно выразить через функцию Грина идеального ферромагнитного кристалла:

$$\varepsilon = -2\pi i \frac{\vec{\pi}}{\pi} \frac{\vec{\pi}'}{\pi} S' S' \sum_{n \Delta} \delta_{n_1} \delta_{n'_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_1 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} \hat{G}_{01}^I \\ 0 \end{pmatrix}_{pm; n' m'} + \right.$$

$$+ \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_2 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} \hat{G}_{01}^I \\ 0 \end{pmatrix}_{pm; n' m'} +$$

$$+ \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_1 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{G}_{02}^{II} \end{pmatrix}_{pm; n' m'} +$$

$$+ \sum_p \frac{[(\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{n_2 p}}{\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{G}_{02}^{II} \end{pmatrix}_{pm; n' m'} \Big\}, \quad (14)$$

где n_1 и n_2 связаны друг с другом равенством:

$$n_1 + n_2 = n. \quad (15)$$

ПРИМЕСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ

Энергия примесного поглощения определяется знаменателем последнего:

$$\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}| = 0. \quad (15')$$

С помощью простых вычислений для $z=2$ уравнение (15') можно записать в несколько более явном виде:

$$\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}| = \{1 + 2[2IS(G_{22}^{01} - G_{23}^{01})V_{22}^I] \times$$

$$\times \{1 + 2[2IS(V_{11}^I + \lambda_{11})G_{11}^{01} + (V_{22}^I + 2\lambda_{22})2IS(G_{22}^{01} + G_{23}^{01})] +$$

$$+ 4[(2IS)^2(V_{11}^I + \lambda_{11})(V_{22}^I + 2\lambda_{22})G_{11}^{01}(G_{22}^{01} + G_{23}^{01} - 2G_{12}^{01})]\} = 0. \quad (16)$$

Если концентрация примеси мала, то можно пренебречь в уравнении (16) квадратичными членами относительно примесного параметра. В этом случае (16) переходит в более простое уравнение:

$$\det|\hat{I} + 2\hat{V}_0^{-1} \hat{V}| = [1 + 2[2IS(V_{22}^{01} - G_{23}^{01})V_{22}^I] \times$$

$$\times \{1 + 2[2IS(V_{11}^I + \lambda_{11})G_{22}^{01} + (V_{22}^I + 2\lambda_{22})2IS(G_{22}^{01} + G_{23}^{01})]\} = 0. \quad (17)$$

Из последнего уравнения видно:

$$a) 1 + 2[2ISV_{22}^I(G_{22}^{01} - G_{23}^{01})] = 0, \quad (18)$$

$$b) 1 + 2[2IS(V_{11}^I + \lambda_{11})(G_{11}^{01} + (V_{22}^I + 2\lambda_{22}) \cdot 2IS(G_{22}^{01} + G_{23}^{01}))] = 0.$$

С помощью (9) уравнение (a) в (18) можно записать в виде

$$-1 = 2 \left[2ISV_{22}^I N^{-1} \sum_k \frac{L}{\omega - 2\varepsilon_k} e^{2i\Delta k} \right]. \quad (19)$$

Здесь N — число магнитных ионов в ферромагнитном кристалле, ε_k — энергия одного ферромагнона.

Путем простых вычислений из (19) можно получить:

$$\omega = 2\varepsilon_0 \cdot \frac{V_{22}^I}{1 - V_{22}^I}, \quad \varepsilon_0 = 2IS. \quad (20)$$

Из выражения (19) видно, что появление примесных уровней связано с возбуждением двухмагнонного спектра, т. е. примесные уровни являются уровнями не одномагнонного непрерывного спектра, а двухмагнонного. При отсутствии примесей исчезает поглощение.

В заключение выражаю искреннюю благодарность старшему научному сотруднику Ю. М. Сеидову за интерес к работе при обсуждении результатов и старшему научному сотруднику Ф. М. Гашимзаде за просмотр рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Moriia T. J. Phys. Soc. Japan 6, 926, 1966.
2. Сеидов Ю. М., Абдуллаев М. Н. „Изв. АН Азерб. ССР. серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 1.
3. Сеидов Ю. М. и Абдуллаев М. И. „АН Азерб. ССР“.
4. Moriia S. J. J. applied phys., vol. 39, № 2, 1042 (1968).
5. Shozo Takeno. Prog. theor. phys., vol. 38, № 5, 995 (1967).
6. Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М., 1965.
7. Holstein T., Primakoff H. Phys. rev., 58, 1098 (1940).

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 3. XII 1969

М. Н. Абдуллаев

Ашгарлы ферромагнит кристалларда оптик удулма нэзэријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Магнит мәддәләрин оптик хассәләринин өјрәнилмәси нәтичәсиндә мә'лум олмушдур ки, бә'зи низамлы магнит кристалларында електромагнит шүаланмасынын удулмасы ики магнунун бурахылмасына кәтирир. Бу магнунлардан һәр биринин, спинләри бир-биринин әксинә јөнәлмиш јарыммагнит кристаллара аид олдуғу кәстәрилмишдир. Ферромагнит мәддәләрдә атомларын спинләри бир истигамәтә јөнәлдијиндән бу һадисә һәмин мәддәләрдә мүшәһидә едилмир. Әкәр ферромагнит мәддәјә, спинин пројексијасынын истигамәти әсас кристал атомлары спинләринин пројексијаларынын әксинә јөнәлмиш ашгар атом-вуруларса, һәмин кристалда ики магнунлу удулма мүмкүн ола биләр. Тәдгигатда ашгар вурулмуш ферромагнит кристалларда ики магнунлу просес үчүн енержи спектри һесаблинмышдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1970, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 3.

Т. Г. ГАДЖИЕВ, Э. М. АЛИЕВ, С. А. АЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ НЕРНСТА—ЭТТИНГСГАУЗЕНА И РИГИ—ЛЕДЮКА В n -HgTe

Исследование поперечного эффекта Нернста—Эттингсгаузена (Н.—Э.) в полупроводниках с вырожденным газом носителей тока представляет интерес по следующим соображениям. Известно, что этот эффект является самым чувствительным к механизмам рассеяния носителей тока [1], поэтому, исследуя его в широком интервале температур, концентраций и магнитных полей, можно получить достоверные результаты о механизме рассеяния.

В работе [2] показана связь между коэффициентом Н.—Э. в слабом магнитном поле $Q_{\perp}$ и магнитотермо-э. д. с. $\Delta\sigma_{\infty}$ в сильном поле $\left(\Delta\sigma_{\infty} = \frac{Q_{\perp}}{u}\right)$. Здесь $u = R\epsilon$ —холловская подвижность. Следовательно, исследование коэффициента Н.—Э. в слабых магнитных полях позволяет определять эффективную массу плотности состояния [3]. В некоторых конкретных случаях такой способ определения m^* может оказаться либо более точным (в сильно легированных образцах), либо экспериментально доступным, когда не имеется сильных магнитных полей.

Наконец отметим, что исследование эффекта Н.—Э. в широком интервале магнитных полей может дать непосредственно сведения о характере рассеяния носителей тока. Известно, что безразмерное поле $\left(\epsilon_y = \frac{e}{k_0} H Q_{\perp}\right)$ поперечного эффекта Н.—Э. проходит через максимум при $\frac{uH}{c} = 1$ [1].

В теоретической работе [4] показано, что при неупругом характере рассеяния носителей тока от степени неупругости максимум ϵ_y смещается в сторону больших значений $\frac{uH}{c}$. Необходимо отметить,

что при измерении эффекта Н.—Э. условие эксперимента играет существенную роль. Во многих работах, измеряя эффект Н.—Э. в условиях, близких к адиабатическому, считая малым отношение электрон-ной доли теплопроводности к общей, пренебрегают поправкой на неизотермичность. Естественно, это может привести к ошибочным выводам о механизме рассеяния носителей тока. В случае чисто адиабатического условия поправку можно вычислить согласно формуле

$$Q_{\perp}^{из} = Q_{\perp}^{ад} - \alpha \frac{L \sigma T}{\chi_{00}}, \quad (1)$$

где второе слагаемое связано с влиянием эффекта Р.—Л. [1]. Здесь α —термо-э. д. с., L —число Лоренца, χ_{00} —общая теплопроводность. Труднее обстоит дело, если не выполняется и условие адиабатичности. В этом случае для учета поправки на неизотермичность необходимо на зондах Н.—Э. измерять и перепад температуры:

$$V_{\perp}^{\text{из.}} = V_{\perp}^{\text{экс.}} - \Delta T_y \alpha. \quad (2)$$

С целью получения данных о механизме и характере рассеяния электронов в $n = \text{HgTe}$ нами было проведено комплексное исследование кинетических эффектов. Исследование эффекта Р.—Л. позволяло точно учитывать влияние неизотермичности условия эксперимента на эффект Н.—Э.

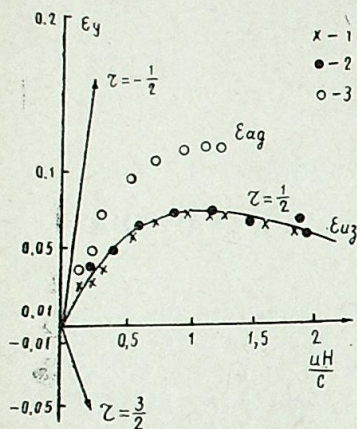


Рис. 1. Зависимость безразмерного поля ϵ_y от $\frac{uH}{c}$ в HgTe :
1— $n = 1,16 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 2— $n = 0,65 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$; 3— $n = 1,16 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

На рис. 1 для двух образцов HgTe с $n = 0,65 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и $1,16 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ при $T = 300^\circ\text{K}$ представлена зависимость безразмерного ϵ_y от $\frac{uH}{c}$. Для образца с $n = 1,16 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ приведено также значение

адиабатического $\epsilon_y^{\text{ад}}$. Из этого рисунка видно, что адиабатический эффект существенно отличается от изотермического. Максимумы ϵ_y как для адиабатического так и для изотермического эффектов

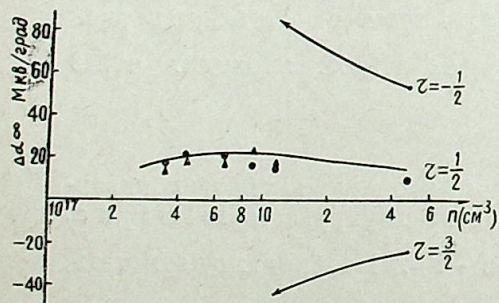


Рис. 3. Зависимость $\Delta\alpha_{\infty}$ и $\frac{Q_{\perp}^{\text{из.}}}{u}$ от концентрации электронов в HgTe .

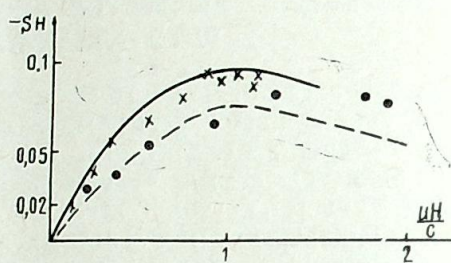


Рис. 2. Зависимость безразмерного коэффициента (Р.—Л.) от $\frac{uH}{c}$.

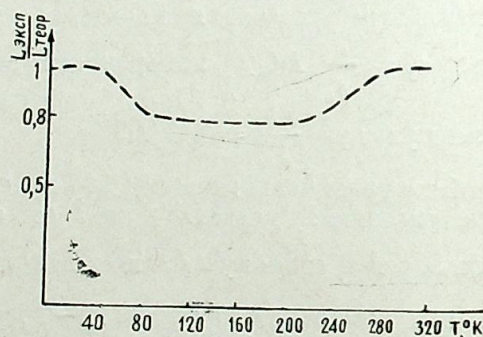


Рис. 4. Зависимость $\frac{L_{\text{экс.}}}{L_{\text{теор.}}}$ от температуры.

соответствуют $\frac{uH}{c} \approx 1$, что указывает в основном на упругий характер рассеяния [4]. На этом рисунке сплошные кривые соответствуют теории, учитывающей неквадратичность закона дисперсии в случае

упругого характера рассеяния и при

$$r = \frac{1}{2} \left(\tau \sim \epsilon^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (5)$$

Согласно этой теории.

$$\epsilon_y^{\text{из.}} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\kappa_0 T}{\xi^*} \right) \frac{\frac{uH}{c} \gamma_r}{1 + \left(\frac{uH}{c} \right)^2}. \quad (3)$$

Здесь γ_r определялось по формулам

$$\gamma_r = \frac{2}{3} (r - 1 - \gamma) \text{ и } \gamma_r = \frac{\frac{\Delta\alpha}{\alpha}}{\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \left(1 + \frac{\left(\frac{uH}{c} \right)^2}{1 + \left(\frac{uH}{c} \right)^2} \right)},$$

а $\left(\frac{\kappa_0 T}{\xi^*} \right)$ —через значение α [5]. Как видно, экспериментальные данные удовлетворительно укладываются в теоретические кривые.

На рис. 2 для тех же образцов при $T = 300^\circ\text{K}$ представлена полевая зависимость эффекта Р.—Л. Данные по этому эффекту также указывают на упругий характер рассеяния электронов в HgTe . Это видно из того факта, что экспериментальные точки соответствуют теоретическим кривым, рассчитанным по формуле, справедливой для упругого рассеяния [4]:

$$-SH = \frac{\frac{uH}{c}}{1 + \frac{\chi_p}{L \sigma T} \left[1 + \left(\frac{uH}{c} \right)^2 \right]}, \quad (4)$$

где χ_p —решеточная теплопроводность*.

При $L = L_0 - \alpha^2$ автоматически учитывались поправки на слабое вырождение и непараболичность зоны проводимости [6]. С целью получения дополнительных данных о механизме и характере рассеяния на рис. 3 представлена концентрационная зависимость $\Delta\alpha_{\infty}$ и $\frac{Q_{\perp}^{\text{из.}}}{u}$, где кружочки соответствуют $\Delta\alpha_{\infty}$, определенной в некоторых случаях по формуле

$$\Delta\alpha_{\infty} = \Delta\alpha \cdot \frac{1 + \left(\frac{uH}{c} \right)^2}{\left(\frac{uH}{c} \right)^2}. \quad (5)$$

Сплошная кривая и здесь соответствует теории, справедливой при упругом рассеянии [2]. Таким образом комплексное исследование кинетических эффектов в $n = \text{HgTe}$ указывает на тот факт, что в этом кристалле, несмотря на некоторую долю неупругости ($\sim 20\%$) при температурах $80-200^\circ\text{K}$ [7], при $T = 300^\circ\text{K}$ электроны рассеиваются в основном упруго, а главным механизмом рассеяния можно считать рассеяние на оптических фононах. Вывод о характере рассеяния электронов в HgTe находится в согласии с нашим выводом, сделан-

* По нашим данным, значение χ_p при 300°K равно $0,03 \text{ вт/см} \cdot \text{град}$.

ным в работе [8] косвенным путем, из сопоставления результатов о концентрационной зависимости $\alpha(n)$ и термомагнитных эффектов ($\Delta\alpha_\infty$). А вывод относительно механизма рассеяния находится в согласии с нашими и некоторыми другими литературными данными [8, 7, 11].

В работах [12, 13] подобные исследования проводились для HgSe. Комплексное изучение кинетических эффектов в HgSe указывало на существенную роль неупругости столкновений электронов в широком интервале температур (40—400°K). Однако с повышением температуры уже при $T \sim 450\text{—}500^\circ\text{K}$ неупругость исчезает [14]. Если учесть, что температура Дебая и доля неупругости при 80—200°K в HgTe намного меньше (~ 2 раза), чем в HgSe, то полученный результат можно считать обоснованным [4]. Поэтому температурную зависимость $\frac{L}{L_0}$, приведенную в работе [7], можно продолжить до 300°K и тогда она будет иметь вид, как на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цидильковский И. М. Термомагнитные явления в полупроводниках. М., 1960.
2. Kolodziejczak J., Sosnowski L. Acta phys. Pol., XXI, 4, 399, 1962.
3. Кесаманлы Ф. П., Коршак Н. М. „Неорг. материалы“, 3, 490, 1967.
4. Коренблит Л. Л., Шерстобитов В. Е. ФТП, 2, 688, 1968.
5. Askerov B. M. and Gashimzade F. M. Phys. stat. sol. 21, K155, 1967.
6. Муждаба В. М., Шалыт С. С., Голецкая А. Д. ФТТ, 10, 1277, 1968.
7. Муждаба В. М., Огородников В. К., Алиев С. А. и Шалыт С. С. ФТТ, 11, 545, 1969.
8. Алиев С. А., Гаджиев Т. Г., Алиев Э. М. „Алиев М. И. ФТП, № 6, 1970.
9. Алиев С. А., Гаджиев Т. Г., Алиев Э. М., Алиев М. И. „Изв. АН Азерб. ССР. серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 6.
10. Dziuba Z., Zakrzewski T. Phys. stat. sol., 7, 1019, 1964.
11. Wagini H., Reiss V. Phys. stat. sol., 15, 457, 1966.
12. Алиев С. А., Коренблит Л. Л., Шалыт С. С. ФТТ, 8, 3, 705, 1966.
13. Алиев С. А., Дубровская И. Н., Коренблит Л. Л., Мойжес Б. Я., Муждаба В. М., Равич Ю. И., Смирнов И. А., Тамарин В. И., Шалыт С. С. Тезисы докладов на IX Междунар. конф. по физике полупроводников. М., 1968.
14. Смирнов И. А., Алиев С. А. ФТТ, 10, 2643, 1968.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 12. I 1970

Т. Н. Начыев, Е. М. Алиев, С. А. Алиев

n -Hg Те маддәсиндә Нернст-Еттингсхаузен вә Риги-Леджук эффектләринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда HgTe маддәсиндә $T = 300^\circ\text{K}$ -дә Нернст-Еттингсхаузен вә Риги-Леджук эффектләри, јүксәк магнит сәһәсиндә магнитотермо $E_H \Delta\alpha_\infty$ өјрәнилмишдир. Нәтичәләрә әсасән демәк олар ки, бу маддәләрдә $T = 300^\circ\text{K}$ -дә електронларын оптик фононлардан сәпилмәси еластикидир.

К. Р. АЛЛАХВЕРДИЕВ, А. Н. АЛИЕВА

ОБРАТИМОЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕ НА КОНТАКТЕ МЕТАЛЛ—МОНОКРИСТАЛЛ CdIn_2S_4

При исследовании вольтамперных характеристик (ВАХ) прижимного контакта между металлическим зондом и монокристаллической пластинкой легированного CdIn_2S_4 обнаружена характеристика с участками отрицательного сопротивления в прямой и обратной ветвях и эффектом памяти. При этом прямым условно считается направление, при котором отрицательное напряжение подается на кристалл CdIn_2S_4 n -типа проводимости.

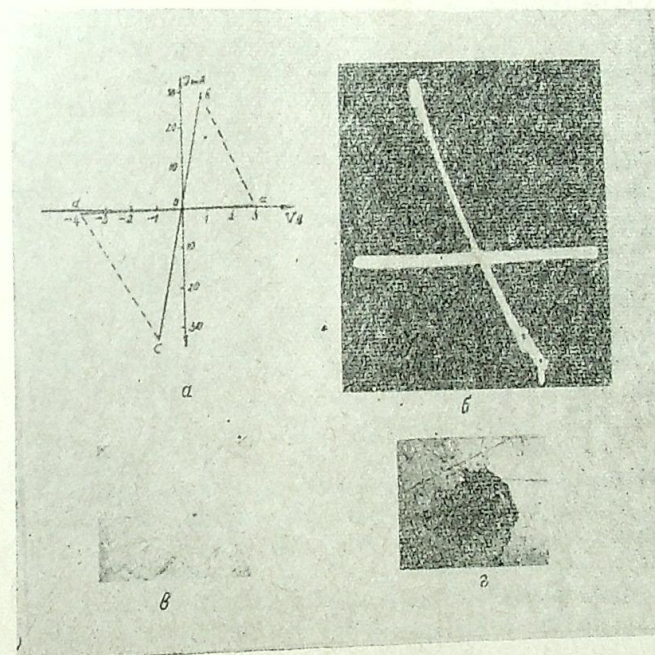


Рис.

Эффект переключения наблюдается как при постоянном, так и при переменном токе. Наиболее характерный вид статической ВАХ серии исследованных образцов показан на рисунке (а). Состояние низкой проводимости имеет место до напряжений порядка 3—3,5 в (ветвь oa на рис., а). В точке a наблюдается скачкообразное увеличение тока до величин порядка нескольких десятков

миллиампер, сопровождающееся падением напряжения примерно до одного вольта. Для того, чтобы перейти в исходное низкопроводящее состояние, необходимо приложить напряжение обратной полярности определенной величины (ветвь *ос*). Отношение токов в „открытом“ и „закрытом“ состояниях составляет величину $\sim 5 \cdot 10^3$. Одно из двух устойчивых состояний может существовать практически как угодно долго, даже при отсутствии напряжения. На рисунке (б) представлена осциллограмма динамической ВАХ при синусоидальном напряжении с частотой 50 Гц.

Эффект переключения наиболее устойчиво наблюдается при работе на прямоугольных импульсах. Длительность импульса, необходимая для переключения, при этом составляет величину менее микросекунды. Установлено, что необходимым условием возникновения переключающей характеристики является „первичный пробой“ точечного контакта, приводящий к существенному изменению приконтактной области поверхности кристалла. Типичные микрофотографии приконтактной области до и после возникновения переключающей характеристики показаны на рисунке (в, г) ($\times 200$).

Механизм наблюдаемого явления в настоящее время остается неясным, однако можно предположить, что при „первичном пробое“ происходит оплавление или иное изменение приконтактной области кристалла, приводящее к образованию некоторой прослойки, что, в свою очередь, приводит к образованию сложной структуры, по-видимому, ответственной за возникновение переключающей характеристики.

В заключение считаем приятным долгом выразить признательность акад. Г. Б. Абдуллаеву и В. Б. Антонову за ценные советы и руководство работой.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 24. XII 1969

М. Х. АЛИЕВА, Г. Л. БЕЛЕНЬКИЙ, А. З. МАМЕДОВА,
Т. И. АЛИЕВ, Ф. К. ИСАЕВ

О ФОТОПРОВОДИМОСТИ МОНОКРИСТАЛЛОВ GaSe и GaTe, ЛЕГИРОВАННЫХ ОЛОВОМ

Монокристаллы GaSe и GaTe обладают широкой запрещенной зоной, слоистой структурой и являются интересными объектами для изучения ряда физических процессов. Фотопроводимость низкоомных специально легированных кристаллов GaSe и GaTe изучалась в [1—3].

Объектом исследования в настоящей работе явились кристаллы *p*-GaSe и *p*-GaTe, легированные примесью Sn. Для определения параметров рекомбинационных центров, механизма рекомбинации носителей были проведены комплексные исследования стационарной фотопроводимости и ее кинетики, термостимулированной проводимости, подвижности носителей тока и примесной фотопроводимости.

Полученные методом Бриджмена образцы GaSe вырезались из блоков перпендикулярно оси *c*, а GaTe—параллельно той же оси, омические контакты наносились наплавлением индия. Выбирались фоточувствительные образцы с удельным темновым сопротивлением $\rho_t = 5 \cdot 10^5$ и 10^6 ом·см при комнатной температуре для GaSe и GaTe, соответственно. Для спектральных исследований использовались монохроматоры УМ-2, ИКС-12, ДМР-4, импульсное возбуждение создавалось на основе ламп вспышек ИСШ-15 ($2 \cdot 10^{-5}$ сек) и ИСШ-100 ($6 \cdot 10^{-5}$ сек). Все исследования проводились в металлическом криостате, позволяющем изменять температуру образца от 100 до 500°K.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Легирование кристаллов GaSe и GaTe примесью олова приводит к увеличению их темнового сопротивления в $100 \div 1000$ раз и повышает их фоточувствительность. На рис. 1 показаны спектральные зависимости фотопроводимости для кристаллов GaTe:Sn. При 300°K собственный максимум фотопроводимости расположен в области 0,75 мкм. Кроме основного, проявляется примесный максимум фотопроводимости с $\lambda = 1,6$ мкм. При повышении температуры до комнатной фотоувствительность образцов GaTe:Sn в области собственного поглощения резко падает (рис. 1), а в области примесного поглощения примесного слабо. Ширина запрещенной зоны и глубина залегания примесного уровня для кристаллов GaTe:Sn, определенные по положению полупе спада соответствующих максимумов, равны 1,65 и 0,57 эв.

На рис. 2 представлены температурные зависимости фототока $I_f(T)$, возбуждаемого светом из соответствующих областей собствен-

ного поглощения для монокристаллов GaSe (кривая 1) и GaTe (кривая 3). Существенно, что во всех кристаллах при понижении температуры от комнатной до 200°K фотопроводимость возрастает. Чтобы выяснить, с чем связан ход зависимости $I_{\phi}(T)$ в образцах GaSe, была исследована зависимость $\mu_p = f(T)$, где μ_p — подвижность неравновесных дырок. Из хода $\mu_p(T)$ видно, что (рис. 2, кривая 4) изменение фотопроводимости в области температур 100–400°K не связано с зависимостью μ_p и может определяться изменением времени жизни дырок τ_p ($\sigma_{\phi} = A \mu_p \tau_p$, здесь σ_{ϕ} — величина фотопроводимости, A — некоторая постоянная). Для выявления причин,

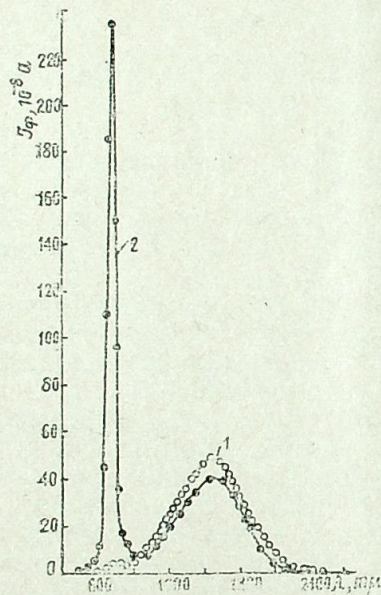


Рис. 1. Спектральное распределение фототока для кристаллов GaTe:Sn, легированных оловом при 300°K (кривая 1) и 77°K (кривая 2).

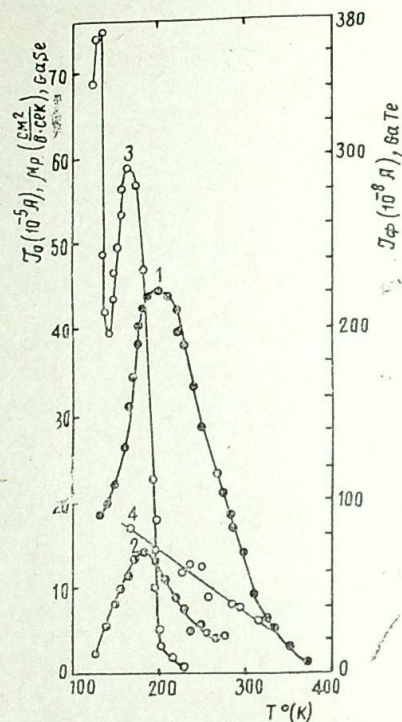


Рис. 2. Температурные зависимости фототока кристаллов GaSe:Sn (кривая 1) и GaTe:Sn (кривая 3), возбуждаемого светом из области собственного поглощения подвижности дырок (кривая 4) для GaSe:Sn и примесной фотопроводимости для кристаллов GaTe:Sn.

обуславливающих такой сложный вид температурной зависимости τ_p , необходимо было установить схему рекомбинации, имеющую место в исследуемых образцах.

Изучение стационарной фотопроводимости и ее кинетики показало, что в кристаллах GaSe, легированных оловом, имеют место температурное (Т) и инфракрасное (ИК) гашение фотопроводимости. В этих кристаллах также была обнаружена сверхлинейность люксамперной характеристики (ЛАХ) в области Т-гашения фотопроводимости, а при температуре 200°K ЛАХ состояла из трех участков ($I_{\phi} \sim L^1$; $I_{\phi} \sim L^{0.5}$; $I_{\phi} \sim L^{-0.5}$, где L — интенсивность возбуждения). На кривой релаксации фототока после освещения образца коротким слабым собственным импульсом на фоне собственной подсветки наблюдались два резко различных по времени участка спада.

Вышеприведенные факты, согласно [5–8], свидетельствуют о том, что в легированных оловом кристаллах GaSe и, по-видимому, в GaTe рекомбинация носителей тока проходит по нескольким различным каналам рекомбинации — быстрому (s) и медленному (r). Предположе-

ние о наличии в запрещенной зоне GaSe:Sn и GaTe:Sn центров рекомбинации, по крайней мере двух классов, позволяет объяснить вид зависимостей $I_{\phi}(T)$ и $\tau_p(T)$.

Из исследований стационарной фотопроводимости и ее кинетики для кристаллов GaSe:Sn были определены основные параметры очувствляющих рекомбинационных r-центров [4]. Энергетическое расстояние r-центров от дна зоны проводимости (термическое значение), определенное методами Бьюба [9], $\frac{\Delta L}{L_0}$ [6] и Δq [6], оказалось равным

$E_{cr}^r = 0,58 \text{ эв}$ [4]. Сечение захвата дырки S_{pr} r-центром ($S_{pr} = 3 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$) и сечение захвата электрона r-центром ($S_{nr} = 5 \cdot 10^{-14} \text{ см}^2$), "собственного" [7], короткого "собственного" и "инфракрасного" импурсов [5] при $T = 230^\circ\text{K}$. Исследования оптического (ИК) гашения фотопроводимости позволили определить оптическую величину энергетического расстояния r-центров от дна зоны проводимости: $E_{cr}^0 = 0,78 \text{ эв}$.

Поскольку время фотоотвеса, его форма определяются наличием в запрещенной зоне полупроводника уровней прилипания для основных носителей (в нашем случае дырок), мы изучали параметры таких уровней методом термостимулированной проводимости (ТСП) [9, 10]. На рис. 3 показаны кривые ТСП кристаллов GaSe:Sn (кривая 1) и GaTe:Sn (кривая 2), легированных оловом. Глубина залегания E_t — уровней прилипания для кристаллов GaSe:Sn оказалась 0,13 и 0,22 эв, а концентрация их — порядка $n_t = 10^{15} \div 10^{16} \text{ см}^{-3}$. В запрещенной зоне для кристаллов GaTe:Sn обнаружен уровень прилипания для дырок с энергией активации $E_t = 0,27 \text{ эв}$.

Использование комплекса фотоэлектрических методов исследования дало возможность установить схему рекомбинации в кристаллах GaSe:Sn, определить основные параметры центров рекомбинации. Энергетическое расстояние от v-зоны примесного уровня, ответственного за фоточувствительность GaTe:Sn в ИК области спектра, определенное по красной границе примесного фотоэффекта, оказалось равным 0,57 эв.

Определению параметров соответствующего центра рекомбинации, выяснению рекомбинационной схемы образцов GaTe:Sn будут посвящены специальные исследования.

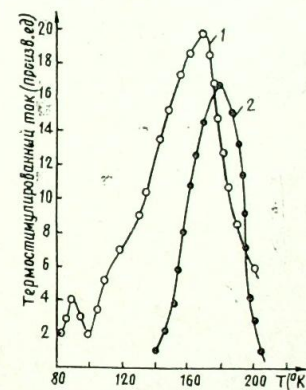


Рис. 3. Кривые термостимулированного тока для монокристаллов GaTe:Sn (кривая 1) и GaSe:Sn (кривая 2) при скорости нагрева 0,15 град/сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdullaev G. B., Mekhtiev R. F., Mamedova A. Z., Guseinova E. S. Phys. stat. sol., 14, К 127, 1966.
2. Мехтиев Р. Ф., Парицкий Л. Г. ФТТ, 11, 1, 222, 1962.
3. Bube R. H., Lind E. Phys. rev., 115, 1159, 1959.
4. Громацкий В. И. и Мушинский В. П. Изв. АН СССР, серия физич., т. XXVIII, 1964, № 6; Исследования по полупроводникам. Новые полупроводниковые материалы. "Корты молдовеняске", Кишинев, 1964.
5. Abdullaev G. B., Alieva M. Kh., Belenky G. L., Mamedova A. Z. Phys. stat. sol., 2, 1970.
6. Лашкарев В. Е., Любченко А. В., Шейнкман М. К. ФТТ, 7, 1717 1965.

6. Laschkarev V. E., Sheinkman M. K. Phys. stat. sol., 5, 397, 1963.
7. Саньков Е. А., Шейнкман М. К. ФТТ, 5, 397, 1963.
8. Роуз. Основы теории фотопроводимости. ИЛ, М., 1966.
9. Бьюб Р. Фотопроводимость твердых тел. ИЛ, М., 1962.
10. Шейнкман М. К., Корсунская Н. Е. УФЖ, 12, 2042, 1967.

Институт физики
АН Азерб. ССР

Поступило 21.1 1970

[М. Х. Әлијева, Г. Л. Беленки, А. З. Мәммәдова, Т. И. Әлијев, Ф. К. Исајев

Галај ашгарды GaSe вә CaTe монокристалларынын фотокечиричилији

ХҮЛАСӘ

Галајла ашгарланмыш p -GaSe вә p -GaTe монокристалларында стационар фотокечиричилик вә онун кинетијасы, термостимуллашмыш кечиричилик, јукдашыјычыларын јүрүклүјү вә ашгар кечиричилик тәдгиг едилмишдир. Бу кристалларда фоточәрәјанын температур вә инфрагырмызы сөнмәси ашкар олунмушдур.

CaSe:Sn кристалларында рекомбинасија схеми мүүјјәнләшдирилмиш, һәссаслашдырычы r -рекомбинасија мәркәзинин мүнһүм параметрләри: енеркетик мәсафәси ($E_{gr}^r = 0,58$ ev), концентрасијасы ($n_r = 3 \cdot 10^{14}$ см⁻³), дешији тутма ен кәсији ($S_{pr} \approx 10^{-20}$ см²) вә GaTe:Sn кристалларында гадаған олунмуш золағын ени, ашгар мәркәзинин дәринлији—ујғун олараг 1,65 ev вә 0,57 ev тәјин едилмишдир.

Бу кристалларда термостимуллашмыш кечиричилик өјрәнилмиш вә јапышма мәркәзләринин енеркетик дәринлији үчүн GaSe:Sn-да 0,13—0,22 ev; GaTe:Sn-да 0,27 ev гијмәтләри алынмышдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1970, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 3.

Б. И. КУЛИЕВ, Г. М. НЕДЛИН

ХАРАКТЕР КОЛЕБАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ВЕТКИ ФЕРРИТОВ В НЕКОЛЛИНЕАРНОЙ ФАЗЕ

1. Как известно [1, 2], в изотропном двухподрешеточном феррите при полях $H_1 = A(M_1 - M_2)$ (A — обменная постоянная) нарушается коллинеарность магнитных моментов подрешеток M_1 и M_2 . Отклонение от антипараллельности подрешеток происходит непрерывным образом, как фазовый переход второго рода по величине магнитного поля $h = H - H_1$. Частота низкочастотной ветви колебаний намагниченности при поле $H = H_1$ обращается в нуль.

В [3] было показано, что в отсутствие магнитной анизотропии эта частотная ветвь оаается равной нулю во всем интервале полей

$$H_1 \leq H \leq H_2, \text{ где } H_2 = A(M_1 + M_2).$$

Там же была вычислена низкочастотная ветвь для феррита с одноосной магнитной анизотропией.

В настоящей статье рассматривается характер (поляризация) низкочастотной ветви колебаний одноосного феррита в неколлинеарной фазе.

2. Свободная энергия одноосного феррита имеет вид

$$F = A M_1 M_2 + \frac{1}{2} [a_1 (n M_1)^2 + 2 a_{12} (n M_1) (n M_2) + a_2 (n M_2)^2] - H (M_1 + M_2), \quad (1)$$

где n — единичный вектор вдоль оси кристалла, a_1 , a_2 , a_{12} — константы анизотропии, A — обменная постоянная ($A > 0$). Если M_{i0} — равновесное значение M_i , то уравнение движения для малых колебаний ($M_i = M_{i0} + m_i$) имеет вид.

$$\frac{d m_i}{dt} = \gamma_i [M_{i0}, h_i + \lambda_i m_i]. \quad (2)$$

Здесь γ_i — гиромагнитное отношение для i -ой подрешетки,

$h_i = - \left(\frac{dF}{dM_i} \right)_1$ — линейная по m_j часть эффективного поля

$\left(- \frac{dF}{dM_i} \right)$, λ_i — множители Лагранжа при определении равновесного

состояния $\left(\frac{dF}{dM_{i0}} = \lambda_i M_{i0} \right)$. Значения M_{i0} и λ_i определены [3].

Поскольку m_i перпендикулярны к M_{i0} , то имеется всего четыре перпендикулярных, в качестве которых естественно выбрать проекции векто-

ров m_i на оси координат, связанные с M_{10} , как это показано на рисунке.

Систему (2) можно переписать в виде

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^4 T_{ij} u_j \quad (3)$$

где

$$u_1 = m_{ix}, u_2 = m_{iy}, u_3 = m_{2x}, u_4 = m_{2y};$$

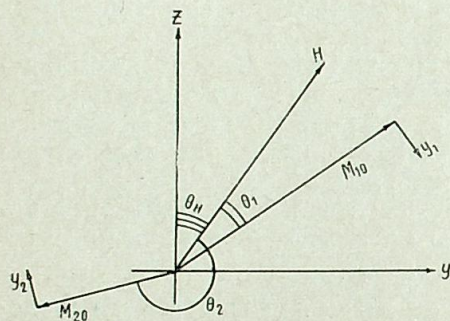
$\hat{T}$ — четырехрядная матрица, имеющая вид

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 M_1 \tilde{\gamma}_1 & 0 & \gamma_1 M_1 \tilde{A} \\ \gamma_1 M_1 \lambda_1 & 0 & -\lambda_1 M_1 A & 0 \\ 0 & \lambda_2 M_2 \tilde{A} & 0 & -\lambda_2 M_2 \lambda_2 \\ -\gamma_2 M_2 A & 0 & \gamma_2 M_2 \lambda_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Здесь } \tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - a_1 \sin^2 (\theta_1 + \theta_n),$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 - a_2 \sin^2 (\theta_2 + \theta_n),$$

$$\tilde{A} = A \cos (\theta_2 - \theta_1) + Q_{12} \sin (\theta_1 + \theta_n) \sin (\theta_2 + \theta_n).$$



Равновесная конфигурация в неколлинеарной фазе:

ось z совпадает с осью кристалла;

y_i перпендикулярны M_{10} ;

x_i совпадают с осью x .

Для диагонализации (3) вводим новые переменные по формуле

$$u_i = \sum_j c_{ij} \mu_j. \quad (6)$$

Подставив (6) в (3) и умножив на $C^{\Lambda-1}$, справа получим

$$\dot{\mu}_j = -i \omega_j \mu_j, \quad (7)$$

где $-i \omega_j$ — собственные значения матрицы $\hat{T}$, определенные в [3], а матрица $\hat{C}$ определяется из условия

$$\hat{T} \hat{C} = -i \hat{\omega} \hat{C} \quad (8)$$

и имеет вид

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} -i \frac{\delta_1}{D_1} & -i \frac{\delta_2}{D_2} & i \frac{\delta_1}{D_1} & i \frac{\delta_2}{D_2} \\ \frac{\delta_4}{D_1} & \frac{\delta_3}{D_2} & \frac{\delta_4}{D_1} & \frac{\delta_3}{D_2} \\ -\frac{\delta i_6}{D_1} & -i \frac{\delta_5}{D_2} & i \frac{\delta_6}{D_1} & i \frac{\delta_5}{D_2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= B_1 + \gamma_1 M_1 \tilde{A} \omega_1^2; & B_0 &= \gamma_1 M_1 (\gamma_1 M_1 \tilde{\lambda}_1 + \gamma_2 M_2 \tilde{A} A); \\ \delta_1 &= B_1 + \gamma_1 M_1 \tilde{A} \omega_2^2; & B_1 &= (\gamma_1 M_1)^2 \gamma_2 M_2 (\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - \tilde{A}^2) A; \\ \delta_3 &= B_2 \omega_2; & & \\ \delta_4 &= B_2 \omega_1; & B_2 &= \gamma_1 M_1 (\gamma_1 M_1 \tilde{\lambda}_1 \tilde{A} + \gamma_2 M_2 \tilde{A} \lambda_2); \\ \delta_5 &= B_3 - \gamma_2 M_2 \tilde{\lambda}_2 \omega_2^2; & B_3 &= (\gamma_1 M_2)^2 \gamma_2 M_2 (\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 - \tilde{A}^2) \lambda_1; \\ \delta_6 &= B_3 - \gamma_2 M_2 \tilde{\lambda}_2 \omega_1^2; & & \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \omega_1 (B_0 - \omega_1^2); \\ D_2 &= \omega_2 (B_0 - \omega_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В (10) учтено, что ввиду вещественности уравнение движения (3) существуют две пары собственных значений ω_j , отличающихся только знаками, причем выбрано $\omega_3 = -\omega_1$, $\omega_4 = -\omega_2$; $\omega_{1,2}$ — положительные и их выражения приведены в [3].

3. В k -ой ветви $\mu_j = \delta_{jk}$ из (6) имеем

$$u_i^{(k)} = c_{ik}, \quad (11)$$

то есть поляризация колебаний k -ой ветви определяется k -ым столбцом матрицы $\hat{C}$. Чтобы получить конкретные результаты, необходимо подставить значения $\lambda_{1,2}$ и соответствующие значения ω_k , вычисленные в [3], в матрицу $\hat{C}$.

Поскольку нас интересует поляризация низкочастотной ветви ($\omega = \omega_2$), то достаточно рассмотреть второй столбец матрицы $\hat{C}$. Допустим, что отклонение магнитного поля от H_1 мало ($H - H_1 \ll H_1$). Это означает, что [3]:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \Delta \theta_1, \\ \theta_2 &= \pi + \Delta \theta_2 \\ \Delta \theta_{1,2} &\ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и

$$\lambda_i = -A + \delta \lambda_i, \quad \delta \lambda_1 = -\frac{M_2}{M_1} \delta \lambda_2 = \frac{H_1}{2M_2} \left(\Delta \theta_1^2 - 2 \frac{h}{H_1} \frac{M_2}{M_1} \right). \quad (13)$$

В соответствии с полученными в [3] результатами здесь надо различать две области полей

а) $|H - H_1| \ll H_{1t} \ll H_1$.

$$H_{1t} = \frac{1}{2} (M_1 M_1)^{1/3} (M_1 - M_2)^{-2/3} (\sin 2\theta_n)^{2/3} [(h_{1A} + h_{2A}) H_1]^{1/3} \quad (14)$$

$$h_{1,2A} = (a_{1,1} - a_{1,2}) M_{1,2}.$$

Тогда [3]

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1 &= \frac{M_2}{M_1} \Delta \theta_2 = \left(2 \frac{M_2}{M_1} \frac{H_{1t}}{H_1} \right)^{1/2}, \\ \delta \lambda_1 &= \frac{H_1}{2M_2} \Delta \theta_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

б) $H - H_1 \ll H_{1t}$.

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1 &= \left(2 \frac{M_2}{M_1} \frac{h}{H_1} \right)^{1/2}, \\ \delta \lambda_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где

$$h = H - H_1.$$

Поэтому, разлагая соответствующие выражения c_{ij} и ограничиваясь первыми не исчезающими членами, получим:

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= -i \sqrt{3}, \\ c_{22} &= 1, \\ c_{32} &= i \sqrt{3}, \\ c_{42} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } |h| \ll H_{1t} \quad (17)$$

и

$$\left. \begin{aligned} c_{12} &= -i \sqrt{2} \left(\frac{h}{H_{it}} \right)^{3/4}, \\ c_{22} &= 1, \\ c_{32} &= i \sqrt{2} \left(\frac{h}{H_{it}} \right)^{3/4}, \\ c_{42} &= 1 \end{aligned} \right| \text{при } h \gg H_{it}. \quad (18)$$

Поскольку при $h \ll H_1$ моменты почти антипараллельны, то $y_1 = -y_2$ и поэтому, как следует из (17), (18), (11), (3),

$$m_1 + m_2 \approx 0. \quad (19)$$

Из этих формул следует также, что концы магнитных моментов описывают эллипсы в плоскостях, перпендикулярных соответствующей равновесной намагниченности (практически совпадающих с плоскостью, перпендикулярной к H). При $h \ll H_{it}$ эти эллипсы лишь слегка вытянуты в направлении оси x (отношение соответствующих полуосей равно $\sqrt{3}$). При $h \gg H_{it}$ эллипсы резко вытягиваются в направлении оси x , так что поляризация становится близкой к линейной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тябликов С. В. ФММ, 3, 1956, № 3.
2. Schlömann E. I. J. appl. phys., 30, 177 S, 1959.
3. Кулиев Б. И., Недлин Г. М. ФТТ, 9, 2678, 1967.

Азгосунцверситет

Поступило 8.VI 1969

Б. И. Гулијев, Г. М. Недлин

Бирохлу ферритләрде ашағы тезликли рәгсләрин гејри-коллинеар фазада рәгс характери

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бирохлу ферритләрде гејри-коллинеар фазада алчаг тезликли рәгсләрин полјаризасијасы һесаблинмышдыр.

Мүәјјән олунмушдур ки, полјаризасија еллиптикдир вә о, магнит саһәсинин артмасы илә хәтти полјаризасијаја чеврилир.

Р. М. ГАНИЕВ, Р. М. АБУЗАРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОГО СПОСОБА ВОДОХОЗЯЙСТВЕННОГО РАСЧЕТА ВНУТРИГОВОДОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОННО- ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН (НА ПРИМЕРЕ ГИДРОУЗЛА АРАКС) НА УРОВНЕ 1970, 1975 И 1980 гг.

Для проектирования Нахичеванского водохранилища и ГЭС необходимо произвести водохозяйственные расчеты, которые являются основной частью проекта. Этому вопросу посвящена данная статья. Водохозяйственные расчеты Нахичеванского водохранилища очень сложны, так как при этом требуется учитывать боковую приточность р. Аракс ниже ГЭС, а также переменные водоподачи. По существующим методам учет переменной водоподачи не дает результатов. В связи с этим весьма важное значение имеет применение эффективной методики установления оптимальных параметров строящихся водохранилищ и правил регулирования стока существующими водохранилищами.

Расчеты регулирования речного стока обычно производятся двумя основными методами: балансовым таблично-цифровым и вероятностным, требующими больших затрат труда и времени. В настоящее время в практике применяется ряд новых методов расчета водохранилищ. Перед нами стояла задача—выбрать применительно к условиям Закавказья такой метод, который дал бы наибольшую полноту и точность водохозяйственного расчета с целью установления оптимальных параметров водохранилища, правил регулирования стока.

Известно, что оптимальные параметры водохранилища и правила регулирования стока определяются путем последовательных расчетов многочисленных вариантов. Так как эти расчеты производятся небольшой группой специалистов, то для их выполнения требуется много времени. При расчете многочисленных водохозяйственных вариантов изменяются лишь некоторые исходные данные, поэтому для расчетов можно с успехом применять электронно-вычислительные машины, так как использование последних не только сильно сокращает время, затрачиваемое на вычислительные работы, но и увеличивает надежность и точность определения водохозяйственных характеристик и параметров.

Из многочисленных методов расчета, основанных на теории вероятности, существует вероятностный метод многолетнего регулирования стока А. Д. Саваренского (1938). Этот метод позволяет изучить вероятность не только перебоев водопотребления, но и других элементов водохозяйственных характеристик (конечное наполнение сбросов и т. д.).

Р. М. Абузаров [2, 3, 4] разработал основы графоаналитического способа расчета внутригодового регулирования на основе метода А. Д. Саваренского [1] с применением электронно-вычислительных машин.

При проектировании рационального использования крупных и средних водохранилищ комплексного назначения весьма важно оценить возможные водохозяйственные варианты их эксплуатации.

Регулирование стока р. Аракс Нахичеванским водохранилищем преследует задачи—создать рациональный режим подачи воды на орошение земель ниже плотины Нахичеванской ГЭС, срезать пики паводков, создать благоприятные условия использования нижнего течения р. Аракс и обеспечить регулярную работу самой Нахичеванской ГЭС.

При расчетах регулирования по водохранилищу гидроузла „Аракс“ был применен табличный цифровой способ и графоаналитический способ Р. М. Абузарова. Графоаналитический расчет многолетнего регулирования стока на электронно-вычислительных машинах выполнен по нижеследующим формулам.

Конечное наполнение водохранилища

$$V_{ГМО} \leq V_{кпРм} = V_{к(п-1)Рм} + (M_{Рм} - U_n - L_{п,м}) \leq V_{НПУ}.$$

Сброс из водохранилища

$$S_{пРм} = V_{к(п-1)Рм} + (M_{Рм} - U_n - L_{п,м}) - V_{НПУ}.$$

Фактическая водоотдача

с условием, если $V_{НПУ} > V_{кпРм} > V_{ГМО}$,

$U_{пФРм} = U_{Рм}$; если $U_{кпРм} = V_{ГМО}$, то $U_{фРм} = M_{Рм} + L_{Рм}$; если $V_{кпРм} = V_{НПУ}$, то $U_{фРм} = U_{Рм} + S_{Рм}$.

Дефицит воды $D_{пРм} = U_n - U_{пФм}$, энергоотдача ГЭС $\mathcal{E} = A \cdot U_{пФм} \cdot H \cdot V_{кпРм}$.

В формулах введены следующие обозначения:

$K_{пРм}$ — конечное наполнение за рассматриваемый период с заданной обеспеченностью;

$V_{кп-1Рм}$ — конечное наполнение за предыдущий период с заданной обеспеченностью;

$M_{Рм}$ — сток при заданной обеспеченности;

U_n — водоотдача заданного периода;

$L_{п,м}$ — потери из водохранилища, зависящие от средних наполнений;

$V_{ГМО}$ — объем водохранилища при ГМО;

$V_{НПУ}$ — объем водохранилища при НПУ;

$A = 9,8 \eta$, где η — к.п.д. гидроагрегата;

$H_{кпРм}$ — напор, соответствующий заданной обеспеченности.

После вычисления на электронно-вычислительных машинах строятся номограммы (рис.), в результате чего получают графики зависимости $V_{кпРм}$, $S_{пРм}$, $U_{пФм}$, $D_{пРм} = f(p)$ и энергоотдача рассматриваемого периода заданной обеспеченности зависимости от $V_{ин}$, P_m , t_n .

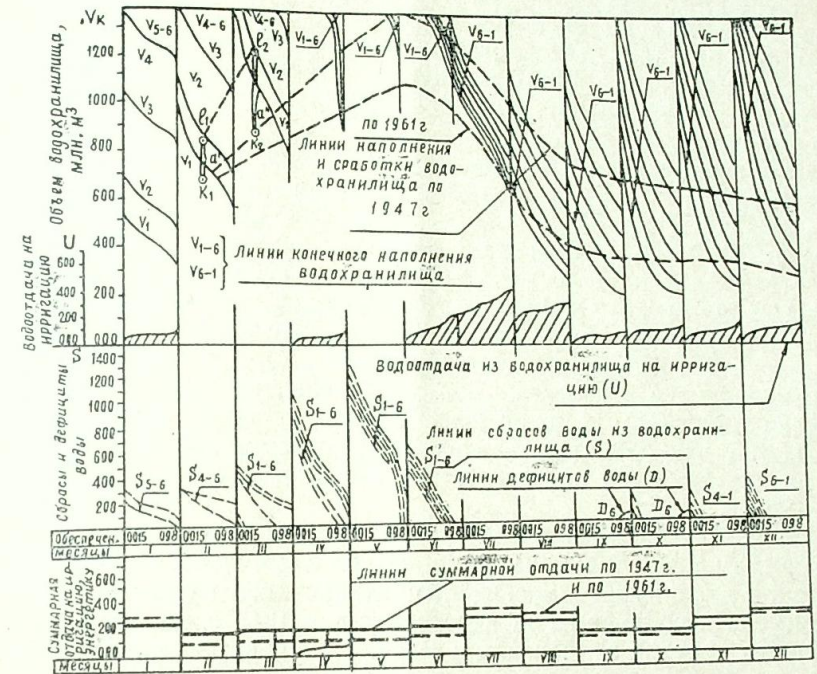
Принимая для каждого отрезка времени (например, месяца) поочередно разные обеспеченности P_m и разные значения начального наполнения $V_{ин}$, строим номограммы, по которым определяем результаты регулирования. Номограммы дают возможность при наличии прогноза стока и известном начальном направлении определить все водохозяйственные характеристики и дать обоснованные рекомендации по правилам регулирования в период эксплуатации водохранилища. При отсутствии прогноза стока номограммы позволяют быстро оценить возможные варианты хода эксплуатации водохранилища установить целесообразные правила регулирования.

Потери из водохранилища (L) заранее неизвестны, так как они зависят от наполнения, поэтому сначала определяется фиктивное конечное наполнение без учета потерь:

$$V_{кф} = V_n + M_p - U.$$

затем фиктивное конечное наполнение без ограничения величинами НПУ и ГМО. Далее определяются средние за месяц объемы наполнения водохранилища

$$V_{ср} = \frac{V_n + V_p}{2}$$



Номограмма многолетнего регулирования стока водохранилищем „Аракс“ на уровне 1970—1975 гг.

и по ним по интерполяционной формуле—потери из водохранилища:

$$L = L_6 + \frac{L_a - V_a}{L_6 - V_6} (V_{ср} - V_6),$$

где L — потери из водохранилища при заданных объемах наполнения $V_{ср}$; L_a и V_a — ближайшие большие по таблице значения объема потерь и наполнений; L_6 и V_6 — ближайшие меньшие по таблице значения объема потерь и наполнений.

Конечное наполнение водохранилища определяется с учетом следующих логических условий:

если $V_{кф} \geq V_{НПУ}$, то $V_k = V_{НПУ}$;

если $V_{ГМО} < V_{кф} < V_{НПУ}$, то $V_k = V_{кф}$;

если $V_{кф} \leq V_{ГМО}$, то $V_k = V_{ГМО}$.

После этого определяются фиктивные конечные наполнения с учетом потерь воды: $V'_{кф} = V_{кф} - L$. Сбросы воды появляются при $V'_{кф} > V_{НПУ}$ и равны $S = V'_{кф} - V_{НПУ}$. Дефицит воды появляется при $V'_{кф} < V_{Омг}$ и равен $D = V_{Омг} - V'_{кф}$.

Энергоотдача определяется фактической водоотдачей и напором. На заключительном этапе производится расчет вероятности конечных наполнений, сбросов, дефицитов, водоотдачи и энергоотдачи и построение номограмм. Для расчетов использовались следующие исходные данные:

1. Кривая объемов и площадей водохранилища;
2. График потери воды из водохранилища;
3. Кривые обеспеченности зависимости располагаемого стока $M = f(P)$ в створе плотины; которые строятся по многолетнему ряду наблюдений для каждого месяца.

4. Кривые обеспеченности, зависимости водотдачи из водохранилища на ирригацию и водоснабжение $U = f(p)$, которые в условиях компенсированного регулирования, имеющего место на гидроузле „Аракс“, являются обязательными пропусками из водохранилища; строятся по многолетнему ряду наблюдений за стоком в створе водосбросной плотины для каждого месяца.

Номограмма построена для трех проектных периодов (1970—1975, 1975—1980 и 1980 гг.), а в статье представлена только для уровня 1970—1975 гг. (рис. 5). В табл. 2, охватывающей три проектных периода (1970—1975, 1975—1980 и 1980 гг.), показаны основные водохозяйственные характеристики, результаты расчетов регулирования стока Нахичеванского водохранилища года обеспеченности 0.90 в 1947 и 0.99 в 1961 гг. На номограмму нанесены для каждого месяца кривые конечного наполнения водохранилища (V) для нескольких значений начального наполнения водохранилища, кривые водоотдачи из водохранилища (U) на ирригацию, кривые сбросов (S) и дефицита воды (D). В нижней части номограммы показана суммарная водоотдача на энергетику и ирригацию по расчетному 1947 г. и маловодному 1961 г.

Для нанесения хода наполнения и сработки водохранилища по номограммам необходимо иметь данные по водоотдаче и обеспеченности стоков для каждого месяца рассматриваемого периода. В качестве примера рассмотрим ход построения для 1947 г. на уровне 1970—1975 гг. на отрезке за февраль и март. Полученные данные приведены в табл. 1.

Таблица 1

Месяцы	I	II	III
Обеспеченность месячного стока в долях единицы	0,22	0,40	0,30
Водоотдача на ирригацию в млн. м ³	40	0	0
Водоотдача на ирригацию и энергетику в млн. м ³	270	165	170

Наполнение водохранилища начинается с 1 февраля, при емкости его 550 млн. м³. Сперва определяется ход наполнения водохранилища при работе только по ирригационному графику. Конечное наполнение в феврале определяется по формуле: $V_k = V_n + M - U$ и получается равным 825 млн. м³.

На ординате со значением $P = 0,40$ находится точка, l_1 , имеющая $V_k = 825$ млн. м³; l_1 определяется между кривыми V_1 и V_2 . После этого определяем конечное наполнение в марте, которое будет находиться на ординате с $p = 0,30$, между кривыми V_1 и V_2 получим точку l_2 . Линия $l_1 l_2$ является линией наполнения водохранилища при работе только по ирригационному графику.

Действительное наполнение будет происходить иначе, так как кривая водоотдачи построена для 1947 г. (см. нижнюю часть номо-

граммы где дана суммарная для ирригации и энергетики). Разница в водоотдаче составляет величину a_1, a_2, a_3 и т. д. Конечное наполнение за февраль исправляется на величину $a' = a_1 + a_2$, и таким образом получаем точки k_1 и k_2 . Отрезок $k_1 k_2$ является линией наполнения водохранилища по водоотдаче 1947 г. Имеет место совпадение в пределах точности расчетов между линиями наполнения и сработки водохранилища, полученных в результате регулирования табличными цифровыми способами и при пользовании номограммами, что указывает на правильность заложенной логической схемы для программирования расчетов на электронно-вычислительных машинах.

Линия наполнения 1947 и 1961 гг. является диспетчерской линией 1947 г. и обеспечивает гарантированную отдачу на ирригацию и энергетику. Зона выше линии 1947 г. дает повышенную отдачу на энергетику, а ниже линии 1947 г. — урезанную отдачу. Зона ниже линии наполнения 1961 г. является зоной перебойной подачи. В период эксплуатации водохранилища, имея начальное наполнение в начале года и прогноз (долгосрочный) стока предстоящего года, пользуясь номограммами, можно наметить порядок эксплуатации водохранилища (регулируя ход наполнения, целесообразно использовать избытки воды и предотвратить урезку гарантированной отдачи или допустить ее минимальную возможность размеров).

При использовании краткосрочных прогнозов стока, зная наполнение водохранилища и имеющиеся в нем запасы воды, можно наметить порядок использования водохранилища на предстоящий короткий период времени. Номограммы можно использовать и для выбора параметров водохранилища, для чего они должны быть построены в границе максимально возможных значений НПУ и минимально возможных значений ГМО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саваренский А. Д. Регулирование речного стока водохранилищами. Изд. АН СССР, М., 1951.
2. Абузаров Р. М. „Вестник сельскохозяйственных наук“, 1964, № 9.
3. Абузаров Р. М. „Гидротехника и мелиорация“, 1965, № 1.
4. Абузаров Р. М. Программирование водохозяйственных и водоэнергетических расчетов при помощи логической схемы. „Науч. зап. МГМИ“, т. 29, 1965.
5. Абузаров Р. М., Ганиев Р. М. Расчет водохранилища с применением электронно-вычислительных машин. Аннотации докладов научной конференции по итогам выполнения научно-исследовательских кафедральных работ за 1967 г. Часть II. Азербайджанский ордена Трудового Красного Знамени институт нефти и химии им. Азизбекова. Баку, 1968.

Институт водных проблем

Поступило 15. VII 1969

Р. М. Гәнијев, Р. М. Абузаров

1970, 1975 və 1980-чы ил сәвijiјәләрindә электрон һесаблајычы машинындан истифадә етмәклә су тәсәррүфаты һесабынын илләр үзрә тәнзиминдә графоаналитик методун тәтбиғи (Араз су говшағы тимсалында)

ХҮЛАСӘ

Һаггында данышылан су анбары Араз чајы үзәриндә гурулуру вә Нахчыван су анбары адыны дашыјыр. Су анбары гаршылыглы низамлама вәзифәсини көрүр. Бу чүр низамлама истәнилән вахт әрзиндә

Основные водохозяйственные характеристики, результаты расчетов регулирования стока Нахичеванского водохранилища
года обеспеченности 0.90 в 1947 г. и 0.99 в 1961 г. на уровень развития 1970, 1975, 1980 гг.

Месяцы		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Мощность в тыс квт	1970	17,5	12	12	14,9	15,3	18,6	23,6	19,0	9,0	9,0	15,1	17,6
	1975	15,1	7	7	7	7	10,3	22,7	16	7,0	7,0	9,9	14,0
	1980	13,6	8,0	8,0	9,4	11,8	9,2	28,4	21,0	6,0	11,7	12,2	13,6
	1970	8,9	6,0	6,0	6,0	6,0	11,0	22,3	14,0	6,0	6,0	6,3	8,2
	1975	10,0	4,5	4,5	9,2	8,5	13,6	29,7	22,7	5,8	10	9,6	10,5
	1980	4,9	4,5	4,5	7,5	6,4	12,7	21	15,1	4,7	6,2	7,3	9,4

1947	1970	103	68	71	67	81	110	97	48	50	63	85	102
	1975	81,2	45,3	42	44,5	52,1	40,0	132,1	109,0	32,4	65,0	70,0	80,5
	1980	58	23,9	22	42,6	37,2	59,5	141,2	121,5	32,8	59,3	56,3	62,0
млн. м³	1970	276	165	169	184	180	210	295	260	124	134	220	237
	1975	218	110	113	115	140	104	354	292	84	174	181	216
	1980	155	58	59	110	100	154	378	326	85	159	146	166

отд а ч а

В о д о

1961	1970	109	40	37	35	33	52	125	98	46	46	68	100
	1975	76	34	32	30	30	56	126	95	46	49	53	67
	1980	277	24	23	36	*30	62	114	93	32	52	50	63
млн. м³	1970	292	97	99	91	80	135	335	263	119	123	176	268
	1975	202	82	85	79	79	144	336	262	119	131	138	184
	1980	92	58	61	93	81	161	304	248	82	139	129	170

1947	1970	550	663	848	1145	1380	1273	993	744	675	644	612	558
	1975	550	681	840	1211	1350	1324	983	703	669	609	567	550
	1980	648	822	988	1214	1350	1284	926	622	586	552	550	550
1961	1970	200	692	822	932	1053	963	643	405	338	335	316	266
	1975	200	678	790	871	912	820	502	276	216	200	200	200
	1980	662	802	937	980	1011	901	615	397	372	350	350	350

Объем водохранилища в млн. м³

көрүлдүүндөн hesabatда бә'зи чәтинликләр ярадыр вә ишин һәчмини артыр. Нахчыван су анбарынын hesabatында һазыркы су тәсәррүфаты hesaby методларыны тәтбиг етмәклә истәнилән нәтичәни әлдә етмәк мүмкүн олмур. Бунун үчүн электрон hesablajычы машиналарә мурачиәт етмәк лазым кәлир. А. Д. Саваренскинин тәклиф етдији еһти-мал методундан вә электрон hesablajычы машинындан истифадә едәрәк Р. М. Абузәров өзүнүн графоаналитик үсулуну вермишдир. Мәгаләдә Р. Абузәровун тәтбиг етдији үсулдан вә чәдвәл үсулундан истифадә едиләрәк, лајиһә сәвијјәси 1970—1975, 1980-чы илләр олан Нахчы-ван су анбарынын су тәсәррүфаты hesaby верилмишдир. Гејд етмәк лазымдыр ки, С. Л. Жук адына Москва гидролајиһә Елми-Тәдгигат Институтунун филиалы олан Бақы гидролајиһә Елми-Тәдгигат Институтунун су тәсәррүфаты hesaby шә'бәси дә һәмин су анбары-нын hesabатыны чәдвәл үсулу илә ејни лајиһә сәвијјәси илләринә көрә апармышдыр. 1970—1975-чи илләрин лајиһә сәвијјәсиндән алынмыш нәтичәләр конкрет олан 1947 вә 1961-чи илләрә көрә мүгајисә едил-миш вә там мә'насы илә һәмин нәтичәләрә ујғун кәлмишдир. Әлдә олан нәтичәләрә көрә тәртиб едилмиш номограм (5-чи шәкил) су анбарынын вә истәнилән гидроложн нормаја әсасән су-електрик стан-сијасынын иш режимини ән садә јолла тәјин етмәјә имкан верир. Ејни заманда, номограмын үстүнлүјү ондадыр ки, о, су анбарынын истисмар мүддәтиндә, еләчә дә гаршыда дуран илләр әрзиндә истәр узун вә истәрсә дә гысамүддәтли әсаслара көрә мәгсәдәујғун истига-мәт верир. Мүхтәлиф илләрә көрә су анбарынын көстәричиләрини 2-чи чәдвәлдән ајдын көрмәк олар,

Ю. А. РЗА-КУЛИЕВ

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ТЕРМОХИМИЧЕСКОГО СПОСОБА УМЯГЧЕНИЯ МОРСКОЙ ВОДЫ

В настоящее время глубокое умягчение морской воды производится при 160°C, исключительно термохимическим способом, заключающимся в обработке воды известью в целях ее декарбонизации и перевода сульфата магния в сульфат кальция, в смешении с паром и последующем натрий-катионировании. Регенерация катионитовых фильтров осуществляется продувочной водой выпарных аппаратов, работающих на умягченной воде. Перед поступлением на установку вода декарбонизируется известью в вихревых реакторах, что позволяет устранить образование карбонатной накипи в поверхностных подогревателях перед термоумягчителем.

Основными схемами термохимического умягчения, которые могут быть практически реализованы, являются:

а) осуществленная в промышленных масштабах схема с введением извести в реактор до термоумягчителя при температуре не более 70°C. Дальнейшее повышение температуры недопустимо, так как это приводит к образованию сульфатной накипи;

б) схема с введением извести непосредственно в термоумягчитель, удалением гидроокиси магния совместно с сульфатом кальция из термоумягчителя и высоким поверхностным подогревом воды перед термоумягчителем (до 120—130°C);

в) схема с вводом извести в термоумягчитель—спирактор и удалением гидроокиси магния из воды после термоумягчителя.

Первая схема имеет недостаток, состоящий в большом расходе пара на умягчение. Тепло этого пара не теряется, но большой расход его на смешивающий подогрев термоумягчителя приводит к увеличению температуры умягченной (катионированной) морской воды, что вызывает затруднения, связанные с ее дальнейшим использованием на вытес-тепловых электростанциях и испарительных установках, так как вытес-няется тепло низкого потенциала (отборный пар последних ступеней турбин и пар последних ступеней испарительных установок), а это приводит к потере тепла.

Кроме того, большая величина разбавления воды конденсатом греющего пара уменьшает фактическую производительность термо-умягчителей (по морской воде), поскольку подъемные скорости в тер-моумягчителе мало зависят от величины разбавления. Помимо этого, уменьшается эффект термического умягчения, запас соли, а следова-тельно, и емкость поглощения катионита, вследствие чего увеличива-

ется жесткость катионированной воды, а также расход ее на собственные нужды.

При втором варианте расход пара на смешивающий подогрев в термоумягчителе уменьшается приблизительно вдвое, что существенно снижает влияние перечисленных недостатков. Схема третьего варианта представлена на рисунке.

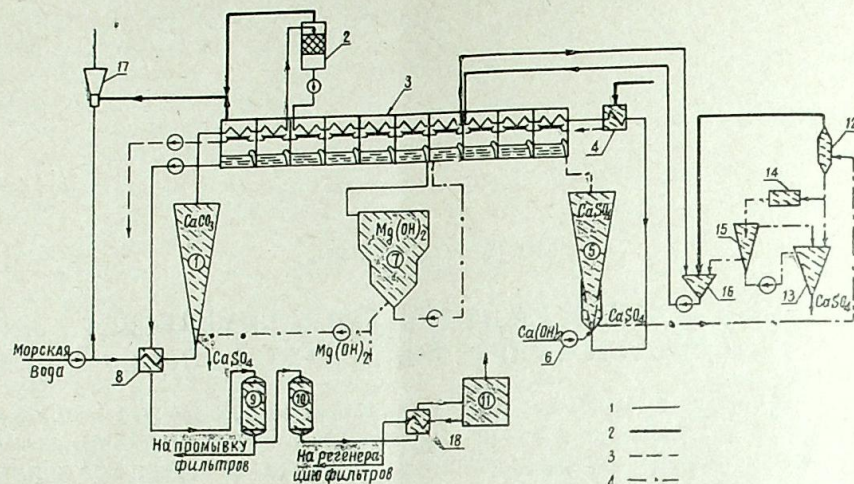


Рис. 1—морская и умягченная вода; 2—пар и парогазовая смесь; 3—конденсат; 4—вода со шламом.

Предварительно нагретая до 25—30°C морская вода декарбонизируется гидроокисью магния в декарбонизаторе [1]. После декарбонизации и дополнительного нагрева до 40—50°C вода деаэрируется в деаэризаторе [2], а затем нагревается в поверхностных подогревателях многоступенчатой адиабатной испарительной установки [3] за счет тепла пара, образовавшегося при расширении термоумягченной воды. Окончательный нагрев до температуры термического умягчения (125—130°C) осуществляется в подогревателе [4] за счет постороннего тепла. Нагретая вода поступает в термоумягчитель [5], где смешивается с известковым молоком, подаваемым насосом-дозатором [6].

Термоумягчитель работает по принципу контактного кристаллизатора со взвешенным слоем из мелких зерен ангидрита, на которых происходит кристаллизация сульфата кальция. Избыток присадки выводится из нижней части аппарата. Часть этой присадки вместе с водой поступает вначале на паровую мельницу [12], а затем в гидравлический сепаратор [13], где отделяются частички со средним размером 0,2 мм и подаются на прием насоса перед термоумягчителем.

Образовавшаяся в термоумягчителе гидроокись магния удаляется вместе с термоумягченной водой, которая после охлаждения до 100°C в адиабатном испарителе [3] подается в осветлитель [7], где отделяется от гидроокиси магния. Осветленная вода поступает сначала в вакуумную часть многоступенчатой адиабатной установки, а затем в водоводяной подогреватель [8]. Холодная вода подается на механический [9] и натрий-катионитовый фильтры [10]. Глубоко умягченная вода идет на питание парогенератора [11], продувка которого служит по обычной схеме регенерационным рассолом катионитовых фильтров.

Все узлы этой схемы проверены испытаниями на промышленных аппаратах, за исключением работы термоумягчителя типа спирактора, который был проверен в полупромышленных условиях. Промышлен-

ный декарбонизатор указанной конструкции смонтирован и испытывается на ТХУ ГРЭС „Северная“. Дегазация воды предусматривается обычными методами, апробированными в промышленности. Отсутствует отложений сульфата кальция при нагреве воды до 125—130°C подтверждается опытом работы испарительных установок. Возможность осветления воды от гидроокиси магния при 100°C была проверена также в промышленных масштабах на термоумягчителе ТХУ ГРЭС „Северная“ при испытаниях его в качестве осветлителя известкованной воды. Работа остальных узлов проверена опытом длительной эксплуатации ТХУ ГРЭС „Северная“ и Красноводской ТЭЦ.

Описанная схема обладает рядом преимуществ по сравнению с двумя первыми вариантами схем ТХУ. Высокий предварительный подогрев и сниженная температура термического умягчения значительно сокращают расход пара (до 4% от расхода воды) и позволяют выдавать умягченную воду с учетом потерь тепла на установке при температуре всего на 10—15°C выше температуры исходной морской воды. Поскольку нет потерь конденсата греющего пара, необходимая производительность ТХУ уменьшается на 20—25% (по умягченной воде). Осаждение в термоумягчителе только сульфата кальция позволяет увеличить подъемные скорости в нем до 25—30 м/час против существующих 7 м/час. Снижение температуры в термоумягчителе и наличие значительного количества присадки резко уменьшает скорость обрастания его внутренних поверхностей. Малый угол конусности спирактора, большие скорости воды и удаление осадка из нижней части аппарата предотвращают возможность оседания взвешенного слоя. Это приводит к значительному увеличению межремонтного пробега термоумягчителя. Описанная схема упрощает регулирование в термоумягчителе, так как отпадает необходимость в регулировании уровня воды и точного поддержания давления в термоумягчителе. Необходимо только поддерживать температуру воды перед термоумягчителем, при этом большой точности не требуется.

При непосредственном известковании в термоумягчителе отпадает необходимость в промежуточном аппарате—реакторе. Осветление воды от гидроокиси магния при атмосферном давлении и температуре 100°C позволяет применять осветлители большой единичной площади при достаточно высокой допустимой подъемной скорости (2,5÷3 м/час).

При существующей схеме для установок такой производительности необходимо 15 термоумягчителей (ТХУ Красноводской ТЭЦ). Уменьшение количества аппаратов приводит к упрощению коммуникаций трубопроводов, сокращению количества арматуры и, следовательно, упрощению обслуживания и удешевлению текущего ремонта. Раздельное осаждение сульфата кальция и гидроокиси магния позволяет использовать их в качестве минерального сырья и упрощает процесс удаления шлама с установок.

Недостатком предлагаемой схемы является необходимость постоянного ввода мелкой присадки в спирактор. Однако потребное количество такой присадки невелико. При удалении из спирактора частиц среднего диаметра 1 мм мелкие частицы обрабатываемой воды, что необходимо вводить 0,00217% от количества обрабатываемой воды, что для установки производительностью 400 тонн воды в час составляет всего 11 кг/час присадки. Приготовление такого количества присадки, очевидно, не вызывает технических затруднений.

Предварительный сравнительный расчет капитальных затрат на установку, работающую по существующей схеме и рассматриваемой, показал следующее: термоумягчитель ТХУ Красноводской ТЭЦ (без монтажа, арматуры и автоматики) диаметром 3 м и производительностью 40—50 т/час термоумягченной воды стоит 12800 руб. Учиты-

вая, что спирактор в 2 раза выше термоумягчителя, стоимость его составит около 19000 руб.

Таким образом уменьшение затрат за счет уменьшения числа термоумягчителей составит:

$$15 \times 12800 - 4 \times 19000 = 116000 \text{ руб.}$$

Стоимость осветлителя ЦНИИ МПС диаметром 9 м и объемом 385 м³ составляет 9000 руб. Стоимость трех таких осветлителей составит 27000 руб. Следовательно, только по стоимости оборудования экономия составит 89000 руб. Если учесть дополнительную экономию за счет уменьшения количества автоматики и КИП, коммуникационных трубопроводов и арматуры, строительной части, отсутствия реакторов и т. д., то общая экономия будет еще выше и составит значительную величину по отношению к капитальным затратам осуществленных установок (ТХУ Красноводской ТЭЦ стоит 1450 тыс. руб.).

Хотя данный расчет имеет приближенный характер, он показывает, что рассматриваемая схема по капитальным затратам оказывается по крайней мере не дороже осуществленных. Исходя из изложенного, данная схема является наилучшей из рассмотренных.

Существенным недостатком осуществленных термохимических установок является небольшая единичная производительность термоумягчителей и катионитовых фильтров, что затрудняет создание установок большой производительности (1000 м³/час и более).

Как было отмечено ранее, большое количество аппаратов усложняет коммуникации трубопроводов, увеличивает количество арматуры, а следовательно, и капитальные затраты на строительство, текущий ремонт и обслуживание.

Применение термоумягчителей, работающих по принципу спирактора (рис.), позволяет резко увеличить единичную производительность термоумягчителя. Так, если принять диаметр термоумягчителя равным 3,4 м (по максимальному диаметру стандартных днищ), то при подъемной скорости 30 м/час такой термоумягчитель будет иметь производительность 273 м³/час, т. е. достаточно большую. При освоении нашими заводами серийного выпуска днищ большого диаметра или при изготовлении их на месте производительность термоумягчителей соответственно возрастет, что касается катионитовых фильтров, то наша промышленность выпускает вертикальные напорные фильтры диаметром до 3,4 м. Применение вместо них горизонтальных или открытых фильтров мало что дает в смысле увеличения емкости поглощения фильтра, так как в таких фильтрах необходимо применять меньшие высоты слоя. Данная задача наиболее правильно разрешается применением фильтров непрерывного действия. Такие фильтры разработаны как за рубежом, так и в СССР. Возможно применение таких фильтров, включенных по двух- и трехступенчатой схеме. Возможна и комбинированная схема, при которой фильтр непрерывного действия работает в качестве первой ступени, снимая основную жесткость термоумягченной воды, а доумягчение осуществляется, как обычно, в фильтрах с фиксированным слоем. Последние регенерируются редко и поэтому не усложняют эксплуатацию.

В настоящее время проводится работа по установке такого фильтра на ТХУ ГРЭС „Северная“. Достигнутая в промышленных условиях глубина умягчения составляет 0,03 ÷ 0,05 мгэкв/л.

В настоящее время в Азглавэнерго совместно с АЗИНефтехимом проводятся работы по доумягчению морской воды карбоксильным катионитом, регенерируемым по схеме кислота—щелочь. При этом жесткость воды снижается до величины меньше 0,005 мгэкв/л, т. е.

практически до нулевой. Значительно увеличивается емкость поглощения катионита и повышается надежность эксплуатации, декарбонизация продувочной воды испарителей, поскольку при большой карбонатной щелочности рассола происходит кристаллизация карбоната кальция в катионите в период регенерации. В результате этого ухудшается гидродинамика фильтрации, а в процессе умягчения дополнительной воды. Легко видеть, что описанный процесс приводит к прогрессирующему увеличению щелочности воды, а следовательно, и к непрерывному росту закарбонирования катионита.

В настоящее время в Азглавэнерго разработан и применяется способ борьбы с этими явлениями, состоящий в переводе карбонатной щелочности рассола в бикарбонатную путем циркуляции части рассола через анионитовый фильтр, отрегенированный кислотой. Длительная эксплуатация дала очень хорошие результаты. Наконец, большое значение имеет рациональная организация известкового хозяйства. Азглавэнерго совместно с АЗИНефтехимом разработало оригинальную и высокопроизводительную схему известкового хозяйства, простую и надежную в эксплуатации, позволяющую получать известковое молоко высокой чистоты и просто разрешающую проблему удаления отходов даже из исходной извести самого низкого качества.

Реализация всех описанных разработок позволит значительно уменьшить капитальные затраты на сооружение установок, повысить надежность их в эксплуатации и снизить расходы на обслуживание. Можно утверждать, что если использовать только гидроокись магния, которая в схеме (рис.) получается высокой степени чистоты, то себестоимость воды станет равной нулю.

Государственный комитет
по энергетике и электрификации

Поступило 15. X 1969

М. Ю. АХУНД-ЗАДЕ, З. М. ШАБАНБЕКОВ, Х. И. МУСАЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ХАРАКТЕРНЫХ СЕЧЕНИЯХ НЕКРУГОВЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Наиболее эффективной конструктивной формой сооружения является такая, которая при достаточной прочности и жесткости требует наименьшей затраты материала. Лучше всего этим условиям обычно удовлетворяет тонкостенная конструкция, широко применяемая в судостроении, авиации и ракетостроении, а также в различных областях современной строительной техники.

В настоящей статье освещены главным образом физические основы явлений, происходящих при загрузке железобетонных оболочек покрытия, и лишь отчасти выяснены вопросы архитектуры, экономики и производства работ. Разработка новых форм сборных железобетонных конструкций современных промышленных зданий, как показали исследования, должна идти по пути уменьшения размеров поперечных сечений и изготовления более тонкостенных деталей и конструкций. Решение указанных задач должно происходить в стадии проектирования конструкций, для чего первым делом необходимо стремиться к снижению веса бетона на единицу его прочности.

Обычно при расчете железобетонных цилиндрических оболочек предполагают, что однородный материал оболочки подчиняется закону Гука по всей высоте сечения. При вертикальных нагрузках в однопролетной непологой цилиндрической оболочке, в пролете в верхних частях поперечного сечения оболочки возникает сжатие, в нижних — растяжение.

Рассмотрим расчет прочности непологих цилиндрических оболочек кругового симметричного профиля на вертикальную симметричную нагрузку по стадии предельного равновесия. Сначала выводятся основные уравнения непологих цилиндрических оболочек. Применяя метод разложения по малым параметрам, уравнения равновесия сводятся к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами. Закрепление непологой цилиндрической оболочки в продольном направлении предполагается шарнирным, а на поперечных краях можно представить произвольные условия.

Как известно, уравнение равновесия непологих цилиндрических оболочек В. В. Новожилова можно записать следующим образом:

$$\varphi [\rho \Delta (\tilde{T})] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = i 2 b^2 h \left[\varphi (\rho \tilde{q}_n) + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right], \quad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа,
 ρ — безразмерный радиус кривизны,
 T — основная комплексная функция,
 ξ, η — безразмерные координаты,
 h — некоторый характерный размер оболочки,
 q_1, q_2, q_n — компоненты поверхностной нагрузки.

$$\text{Разложим } \frac{1}{\rho} \text{ в ряд } \frac{1}{\rho} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n)^n; \\ \bar{T} = \bar{T}_0 + v \bar{T}_1 + v^2 \bar{T}_2 + \dots, \quad (2)$$

где v — малый параметр.

Сравнивая коэффициент при одинаковой степени, получим систему зацепляющихся уравнений:

$$\Delta \Delta \tilde{T}_0 + \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \eta^2} + i \lambda \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \xi^2} = \tilde{F}_0(\xi, \eta), \\ \Delta \Delta \tilde{T}_1 + \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \eta^2} + i \lambda \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \xi^2} = \tilde{F}_1(\xi, \eta), \\ \vdots \\ \Delta \Delta \tilde{T}_n + \frac{\partial^2 \tilde{T}_n}{\partial \eta^2} + i \lambda \frac{\partial^2 \tilde{T}_n}{\partial \xi^2} = \tilde{F}_n(\xi, \eta). \quad (3)$$

Таким образом основные уравнения равновесия непологих цилиндрических оболочек можно представить в виде

$$\Delta \Delta \tilde{T} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} + i \lambda \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \xi^2} = \tilde{F}(\xi, \eta), \quad (4)$$

где $\tilde{F}$ — заданная функция.

Методом малого параметра, используя одинарный тригонометрический ряд, после некоторых математических решений определяем основную функцию $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}_{km}(\xi) = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} [a_{kn} (\cos d_n \xi + i \sin d_n \xi) - b_{kn} (\sin d_n \xi + i \cos d_n \xi)]. \quad (5)$$

В этих формулах

a_{kn}, b_{kn} — восемь вещественно-произвольных постоянных,
 c_n, d_n — корни характеристического уравнения.

При помощи основной функции $\tilde{T}$ легко можно определить изгибающие моменты, нормальные силы и перемещения. Для этого принимаем краевые условия.

а) абсолютно заделанный край:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = w' = 0. \quad (6)$$

б) свободный край:

$$T_1 = 0, \quad T_{12} + \frac{M_{12}}{r} = 0, \quad N_1 + \frac{1}{h} \frac{\partial M_{12}}{\partial \xi} = 0, \quad M_1 = 0, \\ M_1 = A_4^0 \left[\sum_{n=1}^4 (a_{kn} A'_{kn} + b_{kn} B'_{kn}) + M_{1k}^1 \right] \sin \lambda_m \eta, \\ M_2 = A_5^0 \left[\sum_{n=1}^4 (a_{kn} A'_{kn} + b_{kn} B'_{kn}) + M_{2k}^1 \right] \sin \lambda_m \eta, \quad (7)$$

$$T_1 = \left[\sum_{n=1}^4 (a_{\kappa n} y'_{\kappa n} + b_{\kappa n} n'_{\kappa n}) + T_{1\kappa}^r \right] \sin \lambda_m \eta,$$

$$T_2 = \left[\sum_{n=1}^4 (a_{\kappa n} z'_{\kappa n} + b_{\kappa n} m'_{\kappa n}) + T_{2\kappa}^r \right] \sin \lambda_m \eta, \quad (8)$$

$$\bar{w}_\kappa = A_6^0 \left[\sum_{n=1}^4 (a_{\kappa n} A'_{\kappa n} + b_{\kappa n} B'_{\kappa n}) - \bar{w}_{2n}^r \right] \sin \lambda_m \eta$$

$$(\kappa = 0, 1, 3, 4, \dots), (\kappa' = 0, 1, 2, 3, 4, \dots).$$

здесь

$$A'_{\kappa n} = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} (A_{1n} \cos d_n \xi + B_{1n} \sin d_n \xi),$$

$$B'_{\kappa n} = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} (B_{1n} \cos d_n \xi - A_{1n} \sin d_n \xi),$$

$$y'_{\kappa n} = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} [(1 - 2c_n d_n) \cos d_n \xi - z_{1n} \sin d_n \xi],$$

$$n'_{\kappa n} = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} [(1 + 2c_n d_n) \sin d_n \xi + z_{1n} \cos d_n \xi],$$

$$m'_{\kappa n} = \sum_{n=1}^4 e^{c_n \xi} [z_{1n} \cos d_n \xi + 2c_n d_n \sin d_n \xi],$$

$$A_4^0 = \kappa \frac{1 - \mu}{\lambda_m^2 - 1} \lambda_m, \quad A_5^0 = \kappa \frac{\lambda_m^2}{1 - \lambda_m^2},$$

$$A_6^0 = \kappa \frac{1}{\lambda_m^2 - 1}, \quad \kappa = \frac{h}{E\delta}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{\eta_1};$$

E — модуль упругости,

δ — толщина оболочки.

Параметры ξ и η изменяются в пределах

$\xi = 0 \div \xi_1; \quad \eta = 0 \div \eta_1$ (см. рис. 1).

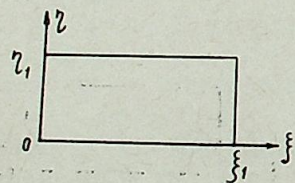


Рис. 1.

Непологая оболочка из сборного железобетона к бортовым элементам укрепляется путем сварки в некоторых точках в продольном направлении. В поперечном направлении укрепление в опорах жесткое. В этом случае определяем изгибающие моменты:

$$M = M_{01} + \nu M_{11} + \dots \quad (10)$$

Для практического применения вышеуказанных формул приведем такой пример:

$$q = 1 \text{ м/м} \quad \mu = 0,1 \text{ м}$$

$$\delta = 0,1 \text{ м}, \quad E = 2,3 \cdot 10^6 \text{ м/м}^2,$$

$$l_2 = 20 \text{ м}, \quad \nu = 0,04,$$

$$S = 11,7 \text{ м},$$

$$u = v = w = w' = 0$$

$$\xi = 0; \quad \eta = \frac{1}{2} \eta_1; \quad \lambda_1 = \frac{\pi h}{l_2} = 2,064, \quad \eta_1 = 0,891,$$

$$2b^2 = 452,81,$$

$$M_{01} = A_4^0 [a_{01} A_{01}(\xi) + a_{02} A_{02}(\xi) + a_{03} A_{03}(\xi) + a_{04} A_{04}(\xi) + b_{01} B_{01}(\xi) + b_{02} B_{02}(\xi) + b_{03} B_{03}(\xi) + b_{04} B_{04}(\xi) - M_{01}^r] \sin \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} \eta_1, \quad (11)$$

где

$$A_{01}(\xi) = e^{c_1 \xi} (A_{11} \cos d_1 \xi + B_{11} \sin d_1 \xi) = +9317,002;$$

$$A_{02}(\xi) = e^{c_2 \xi} (A_{12} \cos d_2 \xi - B_{12} \sin d_2 \xi) = +9317,002;$$

$$A_{03}(\xi) = e^{c_3 \xi} (A_{13} \cos d_3 \xi - B_{13} \sin d_3 \xi) = +8138,131;$$

$$A_{04}(\xi) = e^{c_4 \xi} (A_{14} \cos d_4 \xi + B_{14} \sin d_4 \xi) = +8138,131;$$

$$B_{01}(\xi) = e^{c_1 \xi} (B_{11} \cos d_1 \xi - A_{11} \sin d_1 \xi) = -7261,160;$$

$$B_{02}(\xi) = e^{c_2 \xi} (B_{12} \cos d_2 \xi + A_{12} \sin d_2 \xi) = -7261,160;$$

$$B_{03}(\xi) = e^{c_3 \xi} (B_{13} \cos d_3 \xi - A_{13} \sin d_3 \xi) = +6366,864;$$

$$B_{04}(\xi) = e^{c_4 \xi} (B_{14} \cos d_4 \xi + A_{14} \sin d_4 \xi) = +6366,864;$$

$$a_{01} = -0,0237; \quad a_{02} = +0,4674; \quad a_{03} = -0,1111; \quad a_{04} = 0,2449;$$

$$b_{01} = -0,0153; \quad b_{02} = -0,0170; \quad b_{03} = -0,0006; \quad b_{04} = -0,1674;$$

$$c_{1,2} = \pm 6,38; \quad c_{3,4} = \pm 2,64; \quad d_{1,2} = \pm 2,44; \quad d_{3,4} = \pm 5,87.$$

$$A_{1n} = (\mu - 2b^2 \lambda_m) + \frac{\mu + 1}{\lambda_m} 2c_n d_n + \frac{2b^2}{\lambda_m} (c_n^2 + d_n^2);$$

$$A_{11} = +9317,002; \quad A_{12} = +9317,002; \quad A_{13} = +8138,15$$

$$A_{14} = +8138,15.$$

$$B_{1n} = \frac{\mu + 1}{\lambda_m} (c_n^2 + d_n^2) - (2b^2 + \mu \lambda_m + \lambda_m) - \frac{4b^2}{\lambda_m} c_n d_n;$$

$$B_{11} = -7261,16; \quad B_{12} = -7261,16; \quad B_{13} = +6366,86; \quad B_{14} = +6366,86.$$

$$M_{01}^r = -24531,938;$$

$$M_{01} = -0,3209;$$

$$M_{11} = A_4^0 [a_{11} A_{11}^*(\xi) + a_{12} A_{12}^*(\xi) + a_{13} A_{13}^*(\xi) + a_{14} A_{14}^*(\xi) + b_{11} B_{11}^*(\xi) + b_{12} B_{12}^*(\xi) + b_{13} B_{13}^*(\xi) + b_{14} B_{14}^*(\xi) + M_{11}^r] \sin \lambda_1 \cdot \frac{1}{2} \eta_1. \quad (12)$$

Здесь

$$a_{11} = +0,249; \quad a_{12} = -0,1903; \quad a_{13} = +0,0288; \quad a_{14} = -0,1888.$$

$$b_{11} = +0,0035; \quad b_{12} = +0,0004; \quad b_{13} = +0,0006; \quad b_{14} = +0,1410.$$

$$A_{11}^*(\xi) = e^{c_1 \xi} (A_{21} \cos d_1 \xi + B_{21} \sin d_1 \xi) = +14089,64;$$

$$A_{12}^*(\xi) = e^{c_2 \xi} (A_{22} \cos d_2 \xi - B_{22} \sin d_2 \xi) = +14089,64;$$

$$A_{13}^*(\xi) = e^{c_3 \xi} (A_{23} \cos d_3 \xi - B_{23} \sin d_3 \xi) = -14059,80;$$

$$A_{14}^*(\xi) = e^{c_4 \xi} (A_{24} \cos d_4 \xi + B_{24} \sin d_4 \xi) = -14059,80;$$

$$A_{2n} = \mu \lambda_m^2 (1 + \lambda_m) + \left(2b^2 + \frac{1}{\lambda_m} \right) 2c_n d_n - \mu \lambda_m (c_n^2 + d_n^2).$$

$$B_{2n} = \left(2b^2 + \frac{1}{\lambda_m} \right) (c_n^2 + d_n^2) - (2b^2 \lambda_m^2 + \lambda_m + 2b^2) + 2\mu \lambda_m c_n d_n.$$

$$A_{21} = +14089,64; \quad A_{22} = +14089,64; \quad A_{23} = -14059,80;$$

$$A_{24} = -14059,80.$$

$$B_{21} = +18769,48; \quad B_{22} = +18769,48; \quad B_{23} = +16390,40;$$

$$B_{24} = +16390,40.$$

$$M_{11}^r = -20198,48; \quad M_{11} = -0,2344.$$

Подставляя значения (11), (12) в уравнение (10), получим опорный момент оболочки в точке жесткого присоединения:

$$M_1 = M_{01} + \nu M_{11} = -0,3303.$$

Таким же методом определяются усилия в характерных сечениях железобетонных цилиндрических оболочек. После определения всех параметров строим эпюры моментов, нормальных сил и перемещений. По полученным данным изгибающих моментов, нормальных сил и перемещений можно легко найти необходимое сечение арматуры.

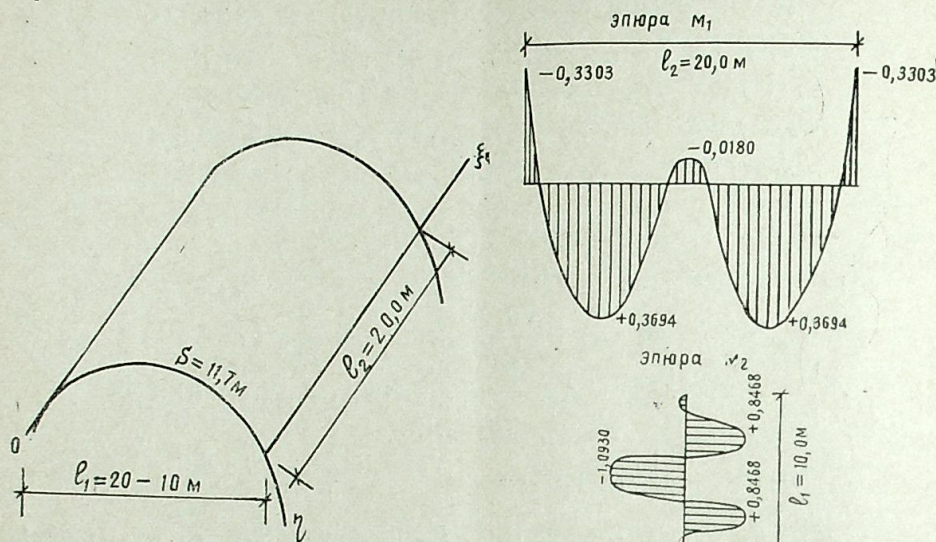


Рис. 2.

Рис. 3.

Рассмотрим расчет прочности непологих цилиндрических оболочек эллиптического симметричного профиля на вертикальную симметричную нагрузку по стадии предельного равновесия. Оболочка рассчитывается как железобетонная балка. На рис. 4 изображена схема расчетного напряженного состояния в поперечном сечении оболочки.

Обозначения:

- F_a — полная площадь сечения растянутой арматуры,
- θ_1 — половина центрального угла дуги оболочки,
- θ_p — " " " сжатой зоны,
- δ и r — толщина и радиус цилиндрической части оболочки.

По предложению П. Л. Постернака для расчета прочности момент внутренних сил, действующих в сечении оболочки, удобно взять относительно центра круговой части сечения:

$$M_{сек} = 2R_{np} \delta r^2 \sin \theta_p - 2c F_a R_a; \quad (13)$$

условие прочности имеет вид

$$M \leq M_{сек}, \quad (14)$$

где M — момент внешних сил относительно той же точки. Положение нейтральной оси находится из уравнения

$$R_{np} \ell_p r \delta = R_a F_a. \quad (15)$$

При подборе арматуры выражения (13), (14), (15) объединяются в одно уравнение:

$$\sin \theta_p - \frac{c}{r} \theta_p - \frac{M}{2R_{np} \delta r^2} = 0, \quad (16)$$

которое можно решить методом последовательного приближения. Первоначально можно принять $\sin \theta_p = \theta_p$.

Определив θ_p , из равенства (15) находим сечение арматуры:

$$F_a = \frac{R_{np} \theta_p r \delta}{R_a}. \quad (17)$$

Принимаем бетон марки 300, арматуру проволочную по ГОСТу 8480—63 диаметром 5 мм, ст. чему соответствуют:

$$\begin{aligned} R_a &= 10200 \text{ кг/см}^2, \\ R_{np} &= 130 \text{ кг/см}^2, \\ \delta &= 10 \text{ см}, \\ r &= 243 \text{ см}, \\ c &= 82 \text{ см}. \end{aligned}$$

Однако значение θ_p определяем, пользуясь номограммой, для этого вычисляем:

$$\frac{M_p}{2R_{np} \delta r^2} = \frac{1850,00}{2 \cdot 1300 \cdot 0,1 \cdot 24,2^2} = 0,122;$$

$$\theta_p = 0,19;$$

$$F_a = \frac{R_{np} \theta_p r \delta}{R_a} = \frac{130 \cdot 0,19 \cdot 242 \cdot 10}{10200} = 5,86 \text{ см}^2,$$

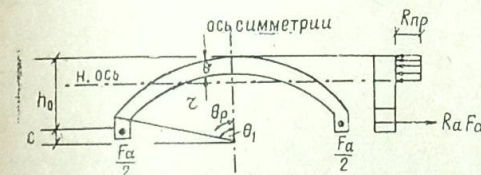


Рис. 4.

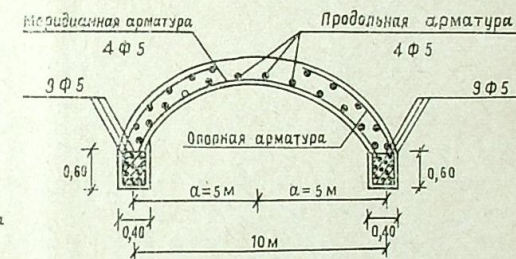


Рис. 5.

принимая 30 Ф 5 мм ($F_a = 5,88 \text{ см}^2$); 80% указанной площади размещаем в сечении бортовых элементов, причем 60% укладываем по низу сечения (несмотря на увеличения плеча внутренней пары, площадь арматуры оставляем без уменьшения на 10%). Остальную часть арматуры (20%) размещаем при опорных зонах оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. Терия тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
2. Ахундзаде М. Ю. и Тагиев И. Т. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1963, № 4.
3. Ахундзаде М. Ю. Приближенные методы решения краевых задач теории произвольных цилиндрических оболочек. Материалы к VI всеююз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку, 1966.
9. Мусаев Х. И. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1968, № 3.

Поступило 12.XI 1969

Азгоспроект

Дәмир-бетондан һазырланмыш даирәви олмајан цилиндрик
өртүкләрин мөһкәмлијинин тәјин едилмәси

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда даирәви олмајан цилиндрик өртүкләрин дәмир-бетондан һазырланмасы нәзәрдә тутулмушдур. Өртүјүн галынлығы 10 см, өлчүләри исә 1000 × 2000 см гәбул олунмушдур. Сәчијјәви кәсик-ләрде әјичи момент, нормал гүввә вә јердәјишмәләрин гијмәтләри тапылмышдыр. Һәмин гијмәтләрдән истифадә едиләрәк, арматурун ен кәсик саһәси вә өртүјүн конструксијасы асанлыгла тәјин едилмишдир.

УДК 518 : 517. 944/947

АННОТАЦИЯ

Г. Ф. АЛИЕВ

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА*

Рассматривается задача

$$a(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)u + F(x, t, u)$$

$$(0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t \leq T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2)$$

где непрерывные функции $a(x, t) > 0$ и $g(x, t)$ ($0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$) непрерывно дифференцируемые по x , непрерывная функция $F(x, t, u)$, $(x, t, u) \in D = [0, l] \times [0, T] \times [-L, L]$, непрерывно дифференцируема по t, u .

По схеме метода прямых строятся приближения

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{n+1}(x) [\tilde{u}_{n+1}(x) - \tilde{u}_n(x)] &= h \tilde{u}_{n+1}''(x) + h \tilde{u}_n''(x) + h g_{n+1}(x) \tilde{u}_{n+1}(x) + \\ &+ h g_n(x) \tilde{u}_n(x) + h F(x, t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1}) + h F(x, t_n, \tilde{u}_n), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) &= 0, \quad \tilde{u}_{n+1}(0) = 0, \quad \tilde{u}_{n+1}(l) = 0 \quad (0 \leq x \leq l), \\ n &= 0, 1, \dots, N = T/h, \quad h > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

аппроксимирующие задачу (1)–(2).

Показано, что порядок среднеквадратичной и равномерной сходимости рассматриваемой схемы метода прямых есть h^2 .

Поступило 6. II 1970

* Статья депонирована во ВИНТИ (Москва, А-219, ул. Балтийская, 14, отдел справочной информации ВИНТИ).

МҮНДӘРИЧАТ

И. М. Нәсәнов. Хаусдорф метрикасында Ермит—Фејер интерполјасија просесинин йығылма тәртиби һаггында	3
Р. Ә. Аббасов. Мәһдуд спектрли санки-дөврү Степанов функцијаларынын ән јахшы жахынлашма тәртибинин тәдгиги һаггында	8
С. Ј. Јагубов. Гејри-хәтти икинчи тәртиб гиперболик тәнликләр үчүн Коши мәсәләси	16
Ч. Ә. Ахундов. Биринчи тәртиб гејри-хәтти-тәнликләр үчүн сәпилмә мәсәләси вә онун тәтбиги	23
Б. И. Әлијев. Ортогонал системләр үзрә функцијанын Фурје әмсалларынын бәзи хассәләри һаггында	31
Р. Б. Фејзуллајев. Номоморфизмли графлар јарымгрудунун идеаллары һаггында	37
Р. Б. Фејзуллајев. Јарымгрудларын бнидеаллары һаггында	43
Ч. А. Аббасов. Гиперболик тип икинчи тәртиб диференсиал тәнлик үчүн Гурса мәсәләсинин һәлли һаггында	52
С. Х. Бабајев, З. Ш. Гарајев, Ә. Н. Рүстәмов. $GdGaSe_3$ -үн синтези вә електрик хассәләринин тәдгиги	56
К. Н. Рзајев. Вариасија вә сәрһәд мәсәләси	61
К. П. Мәммәдов, М. Ј. Бәкиров, С. Б. Бағыров. Кристаллашма заманы селендә текстуранын әмәлә кәлмәси вә онун селен вентилләринин характеристикаларына тәсири	67
А. Б. Ағајев, Т. Х. Әзизов, А. Х. Муратов, Ј. Р. Нағдәлијева, К. Ә. Шәрифов. Јүксәк температурлу просесләрин әмәләкәлмә енталпијады тәјининин сәләләшмиш үсулу	72
К. И. Рзајев, Ш. О. Оручова. $TlSe$ вә $CaSe$ монокристалларынын еластик сабитләринин температур асылылығы	76
М. М. Әлијев, М. Ә. Талиби. Хлор аштарынын $Se-GdSe$ кечидләриндә n -тәбәгәнин електрик хассәләринә тәсири	79
М. И. Шаһтахтинскаја, Ч. С. Томтијев. Монокристалларын көјәрдилмәси заманы әринтидә концентрасијанын дәјишмәси нәтичәсиндә јаранан ифрат сојума	82
А. С. Аббасов, К. Н. Мәммәдов. Индиум-стибнум системинин термодинамик тәдгиги	86
Ф. М. Мустафајев, А. С. Аббасов. Күмүш сулфидин термодинамик хассәләри	90
А. Б. Ағајев, Н. З. Чәлилов. Газотранспорт үсулу илә алынмыш Cd_2Se_3 монокристалларынын бәзи физики параметрләринин өлчүлмәси	92
З. Ә. Искәндәрзадә, М. Р. Ахундов. Диффузија јолу илә алынмыш вә базасынын узунлуғу мұхтәлиф олан силиснум диодларынын бәзи хассәләри	96
А. А. Әбдүррәһманов, Е. И. Вәлијулин. Нормал бутил спирти молекулуна дөнмә изомеризми	101
М. Н. Абдуллајев. Ашгарлы ферромагнит кристалларда оптик удулма нәзәријәсинә даир	106
Т. Н. Нәчијев, Е. М. Әлијев, С. А. Әлијев. $n-HgTe$ маддәсиндә Нернст-Эттингһаузен вә Риги-Ледјук эффектләринин тәдгиги	111
К. Р. Аллаһвердијев, А. Н. Әлијева. Металл. монокристалл $CdIn_2S_4$ контактында дөнән чевирмә	115

М. Х. Әлијева, Г. Л. Беленки, А. З. Мәммәдова, Т. И. Әлијев, Ф. К. Исәјев. Галај ашгарлы $GaSe$ вә $CaTe$ монокристалларынын фотокечиричилији	117
Б. И. Гулијев, Г. М. Недлин. Бирохлу ферритләрдә ашағы тезликли рәгсләрин гејри-коллинеар фазада рәгс характери	121
Р. М. Гәнијев, Р. М. Абузәров. 1970, 1975 вә 1980-чы ил сәвијјәләриндә електрон һесаблајычы машынындан истифадә етмәклә су тәсәррүфаты һесабынын илләр үзрә тәнзиминдә графоаналитик методун тәтбиги (Араз су говшағы тимсалында)	125
Ј. А. Рзагулијев. Дәниз сујунун термокијәви үсулла јумшалдылмасынын инкишаф перспективләри	135
М. Ј. Ахундзадә, З. М. Шабанбәјов, Х. И. Мусајев. Дәмир-бетондан һазырланмыш даирәви олмајан цилиндрик өртүкләрин мөһкәмлијинин тәјин едиlmәси	138

Сифариш көзләјән мәгаләләр

Г. Ф. Әлијев. Параболик типин квази хәтли тәнликләр үчүн сәрһәд мәсәләләринин һәллиндә дүз хәтләр үсулунун ошарлығы һаггында	145
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Г. М. Гасанов. О порядке сходимости интерполяционных процессов Эрмита-Фейера в хаусдорфовой метрике	3
Р. А. Аббасов. Исследование порядка наилучшего приближения почти-периодических функций Степанова с ограниченным спектром	8
С. Я. Якубов. Задача Коши для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка, I	16
Д. А. Ахундов. Задача рассеяния для квазилинейного уравнения первого порядка и ее приложения	23
Б. И. Алиев. О некоторых свойствах коэффициентов Фурье функции по ортогональным системам	31
Р. Б. Фейзуллаев. Идеалы полугруды гомоморфизмов графа	37
Р. Б. Фейзуллаев. Биидеалы полугруд	43
Дж. А. Аббасов. Задача Гурса для гиперболического дифференциального уравнения второго порядка	52
С. Х. Бабаев, З. Ш. Караев, А. Г. Рустамов. Синтез и исследование электрических свойств $GdGaSe_3$	56
К. У. Рзаев. Вариационная и краевая задача	61
К. П. Мамедов, М. Я. Бакиров, С. Б. Багиров. Текстурирование при кристаллизации селена и его влияние на характеристику селеновых вентилях	67
А. Б. Агаев, Т. Х. Азизов, А. Х. Муратов, Ю. Р. Нагдалиева, К. А. Шарифов. Упрощенный способ определения энтальпий высокотемпературных процессов в калориметре	72
К. И. Рзаев, Ш. О. Оруджева. Температурные зависимости упругих констант монокристаллов $TlSe$ и $CaSe$	76
М. М. Алиев, М. А. Талиби. Влияние примеси хлора на электрические свойства n -слоя в переходных $Se-CdSe$	79
М. И. Шахтахтинская, Д. С. Томтиев. Концентрационное переохлаждение расплава при вытягивании монокристаллов	82
А. С. Аббасов, К. Н. Мамедов. Система индий—сурьма	86
Ф. М. Мустафаев, А. С. Аббасов. Термодинамические свойства сульфида серебра (Ag_2S)	90
А. Б. Агаев, Н. З. Джалилов. Изменение некоторых физических параметров монокристаллов Cd_2Se_3 , выращенных газотранспортным методом	92
З. А. Искендерзаде, М. Р. Ахундов. О некоторых свойствах диффузионных кремниевых диодов с различной длиной базы	96
А. А. Абдурахманов, Э. И. Велиюлин. О поворотном изомеризме молекулы n -бутанола	101
М. Н. Абдуллаев. К теории оптического поглощения в ферромагнитных кристаллах с примесью	106
Т. Г. Гаджиев, Э. М. Алиев, С. А. Алиев. Исследование эффектов Нернста—Эттингсгаузена и Риги—Ледюка в n - $HgTe$	111
К. Р. Аллахвердиев, А. Н. Алиева. Обратимое переключение на контакте металл—монокристалл $CdIn_2S_4$	115
М. Х. Алиева, Г. Л. Беленький, А. З. Мамедова, Т. И. Алиев, Ф. К. Исаев. О фотопроводимости монокристаллов $GaSe$ и $GaTe$, легированных оловом	117
Б. И. Кулиев, Г. Н. Недлин. Характер колебания низкочастотной ветки ферритов в неколлинеарной фазе	121
Р. М. Ганнев, Р. М. Абубзаров. Применение графоаналитического способа водохозяйственного расчета внутригодового регулирования с использованием электронно-вычислительных машин (на примере гидроузла Аракс) на уровне 1970, 1975 и 1980 гг.	125
Ю. А. Рза-Кулиев. Перспективы развития термохимического способа умягчения морской воды	133
М. Ю. Ахундзаде, З. М. Шабанбеков, Х. И. Мусаев. Определенные усилия в характерных сечениях некруговых железобетонных цилиндрических оболочек	138

Депонированные статьи

Г. Ф. Алиев. О сходимости метода прямых при решении краевых задач для квазилинейного уравнения параболического типа	145
---	-----