

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1—2

11

1970

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ — БАКУ

УДК 519. 95

З. И. ХАЛИЛОВ

К ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В общей теории адинамической точности следящих систем, систем автоматического управления, а также различного рода воспроизводящих систем имеет значение рассмотрение систем с распределенными параметрами. В настоящей статье рассматриваются именно такие системы и созданная теория является развитием известных результатов А. И. Колмогорова [1] и Н. Винера [2].

Пусть выходной сигнал $u(t, x)$ динамической системы S удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$Lu + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t, x), \quad 0 < t < \infty, \quad x \in \mathcal{Q}, \quad (1)$$

где $\mathcal{Q}$ — некоторая область n -мерного евклидова пространства;

L — некоторый линейный дифференциальный оператор, действующий на u по аргументу x ; $f(t, x)$ — входной сигнал. Пусть система S характеризуется некоторыми граничными условиями, совокупность которых обозначим

$$Ru|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

(для простоты однородными); Γ — граница области $\mathcal{Q}$. Ради простоты начальные условия будем считать нулевыми:

$$u|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Для охвата основных задач, имеющих важное практическое значение (упреждение, сглаживание, воспроизведение и др.), рассмотрим следующую общую задачу: оценить отклонение выходной функции $u(t, x)$ от заданной $\omega(t, x)$. Для этого рассмотрим разность

$$\varepsilon(t, x) = \omega(t, x) - u(t, x).$$

За критерий, определяющий точность работы системы S , применим величину среднеквадратичной ошибки $\sqrt{\varepsilon^2}$, где

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам редактора), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сендов (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)*.

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА

053895

$$\bar{\varepsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_{\Omega} |\varepsilon(t, x)|^2 dx \quad (4)$$

является средним значением случайной величины $\int_{\Omega} |\varepsilon(t, x)|^2 dx$, если ее считать стационарной. Оптимальным условием работы системы, согласно этому критерию, примем условие, при котором величина среднеквадратичной ошибки будет наименьшей.

В настоящей статье ограничимся рассмотрением стационарных случайных входных сигналов. Для исследования проблем анализа и синтеза систем, как известно, очень удобно пользоваться преобразованиями Лапласа [4] заданных и искомым функций, следуя Н. Винеру. Тогда (1) — (2) приводится к спектральной задаче:

$$Lv + \lambda^2 v = \bar{f}(x, \lambda), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$Rv|_{\Gamma} = 0$$

где

$$v = v(\lambda, x) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} u(t, x) dt,$$

$$v(\lambda, x) = \int_{\Omega} G(x, \xi, \lambda) \bar{f}(\xi, \lambda) d\xi.$$

Здесь $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L + \lambda^2$ при граничных условиях (2):

$$LG + \lambda^2 G = \delta(x - \xi), \quad RG|_{\Gamma} = 0,$$

где δ — дельта-функция; $\bar{f}(x, \lambda)$ — лапласово преобразование входного сигнала $f(t, x)$. Известно, что эта функция Грина существует при довольно общих условиях, накладываемых на L , R и Γ .

Решение смешанной задачи (1) — (2) — (3) имеет представление

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega} K(\alpha, x, s) f(t - \alpha, s) ds d\alpha, \quad (6)$$

где

$$K(\alpha, x, s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(x, s, \lambda) e^{\lambda \alpha} d\lambda$$

назовем импульсной переходной функцией. Квадрат среднеквадратичной ошибки можно выразить через функцию Грина и лапласово преобразование входного сигнала, полученное выражение позволяет производить анализ.

Решение проблемы синтеза при помощи теоремы о проектировании элемента в гильбертовом пространстве приводится к интегральному уравнению для функции Грина:

$$R_{\omega f}(\alpha, x, s) - \int_0^{\infty} \int_{\Omega} R_f(\alpha - \alpha_1, s, s_1) K(\alpha_1, x, s_1) d\alpha_1 ds_1 = 0 \quad \text{при } \alpha > 0,$$

$$K(\alpha, x, s) = 0 \quad \text{при } \alpha \leq 0, \quad x, s \in \Omega, \quad (7)$$

где

$$R_{\omega f}(\alpha, x, s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \omega(t, x) f(t - \alpha, s) dt,$$

$$R_f(\alpha - \alpha_1, s, s_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t - \alpha, s) f(t - \alpha_1, s_1) dt$$

суть корреляционные функции.

Последнее интегральное уравнение запишем в виде

$$\bar{R}_{\omega f}(\alpha, x) - \int_0^{\infty} \bar{R}_f(\alpha - \alpha_1) \bar{K}(\alpha_1, x) d\alpha_1 = 0 \quad \text{при } \alpha \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

где $\bar{R}_f$ — оператор, действующий в некотором банаховом пространстве B ; $R_{\omega f}$ — заданная векторная функция со значениями из B ; $\bar{K}$ — искомая векторная функция; x — параметр. Оно решается следующим образом*. Перепишем уравнение (8) в виде

$$R_{\omega f}(\alpha, x) - \int_0^{\infty} \bar{R}_f(\alpha - \alpha_1) \bar{K}_{-}(\alpha_1, x) d\alpha_1 = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ \bar{K}_{+}(\alpha), & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

и применив к нему преобразование Фурье, придем к краевой задаче Римана:

$$\bar{S}_{\omega f}(js, x) - \bar{S}_f(js) \bar{\Phi}_{-}(js, x) = \Phi_{+}(js, x), \quad (9)$$

где Φ_{+} и $\Phi_{-} \equiv \Phi = \int_0^{\infty} \bar{K}(\tau, x) e^{js\tau} d\tau$ — искомые функции, являющиеся

граничными значениями функций, аналогичных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях. Здесь применяется обобщенная теорема о преобразовании Фурье свертки. Произведя замену

$$u = \frac{s - j}{s + j},$$

краевую задачу Римана (9) преобразуем к краевой задаче Римана на окружности Γ единичного радиуса с центром в начале координат:

$$\varphi_{+}(u, x) = Y(u) \varphi_{-}(u) + g(u, x), \quad u \in \Gamma, \quad (10)$$

$$Y(u) = \bar{S}_f\left(\frac{u+1}{u-1}\right), \quad g(u) = -\bar{S}_{\omega f}\left(\frac{u+1}{u-1}\right).$$

Задача Римана (10) решается методом факторизации И. Ц. Гохберга [7] с учетом обстоятельства, что $Y(1) = 0$. Следовательно, краевая задача (10) есть исключительный случай краевой задачи Римана [8].

Оставляя дальнейшее исследование интегрального уравнения (7), рассмотрим частный случай, имеющий самостоятельное теоретическое и прикладное значение: будем считать, что входной сигнал имеет вид

$$f(t, x) = \varphi(t) \psi(x), \quad (11)$$

где $\psi(x) \neq 0$ — некоторая заданная функция, $\varphi(t)$ — стационарная случайная функция. Тогда интегральное уравнение (7), определяющее оптимальную систему, примет вид

* Сравни с (5).

$$R_{\omega\varphi}(\tau, x) - \int_0^{\infty} R_{\varphi}(\tau - \alpha) K(\alpha, x) d\alpha = 0 \quad \text{при } \tau > 0; \\ K(\tau, x) = 0 \quad \text{при } \tau \leq 0, x \in \Omega, \quad (12)$$

где

$$R_{\varphi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \varphi(t + \tau) \varphi(t) dt, \\ R_{\omega\varphi}(\tau, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \omega(t + \tau, x) \varphi(t) dt.$$

Функция

$$W(x, \lambda) = \int_0^{\infty} K(\alpha, x) e^{-\alpha\lambda} d\alpha = \int_{\Omega} G(x, \xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi \quad (13)$$

является решением задачи (5) с правой частью $\psi(x)$.

Уравнение (12) есть уравнение Винера—Хопфа с параметром $x \in \Omega$. Оно хорошо изучено при отсутствии параметра, и методом факторизации самим Винером найдено его решение. Пользуясь этим, запишем его решение:

$$K(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+i\infty} \Phi(s, x) e^{s\lambda} ds,$$

где

$$\Phi(s, x) = \frac{1}{2\pi j \Psi(s)} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{\omega\varphi}(\alpha, \lambda)}{\Psi(j\alpha)} e^{j\alpha t} d\alpha, \\ S_{\omega\varphi}(\alpha, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha\tau} R_{\omega\varphi}(\tau, x) d\tau, \\ \Psi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \psi_1(t) dt, \quad \Psi_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \psi_2(t) dt, \\ R_{\varphi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\tau - \lambda) \psi_2(\lambda) d\lambda,$$

c — некоторое вещественное число. Здесь выполняется условие физической осуществимости: $K(\lambda, \tau) = 0$ при $\lambda < 0$ для всех $x \in \Omega$. Заметим, что уравнение (12) удается решать также методом сведения его к граничной задаче Римана теории аналитических функций [5].

Таким образом проблема синтеза сводится к следующей задаче: восстановить оператор L по функции (13), где L — оператор, порожденный дифференциальным выражением $L + \lambda^2$ и граничным оператором R .

Рассмотрим частный случай этой интересной проблемы. Пусть заданная функция $\Phi(x, \xi, \lambda)$ имеет вид

$$\Phi(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{\lambda_k - \lambda}, \quad (14)$$

где ряд сходится равномерно относительно x и ξ , $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$ при $\lambda \neq \lambda_k$. Очевидно, (14) — мероморфная функция относительно λ с полюсами λ_k , $k = 1, 2, \dots$

Найти самосопряженное дифференциальное выражение [6]

$$L_N(y) = (P_0(x) y^{(N)})^{(N)} + \dots + (P_{N-1}(x) y^{(1)})^1 + P_N(x) y \quad (15)$$

с самосопряженными краевыми формами

$$U_v(y) = \sum_{j=0}^{2N-1} [\alpha_{vj} y_a^{(j)} + \beta_{vj} y_b^{(j)}], \quad (16) \\ v = 1, 2, \dots, 2N.$$

Здесь возникает математическая проблема: восстановить (1) — (2) — (3) по заданной мероморфной функции $\Phi(x, \xi, \lambda)$, другими словами, найти операторы L и R , для которых заданная мероморфная функция $\Phi(x, \xi, \lambda)$ является функцией Грина. Нетрудно видеть, что решение этой проблемы не единственное, зависит от некоторого количества параметров и, вообще говоря, дифференциальное выражение должно быть бесконечного порядка. Приведем один результат этой теории.

Пусть даны числа

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < \dots \quad [\lambda]$$

и функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x), \dots, \quad [\varphi] \\ a \leq x \leq b.$$

Пусть $[\varphi]$ — бесконечно дифференцируемые ортонормированные функции и для каждого N вронскиан первых N функций системы $[\varphi]$ отличен от нуля:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \neq 0$$

и $[\varphi]$ ограничены в совокупности: $|\varphi_k(x)| < c$, числа $[\lambda]$ растут быстрее полинома любой степени; $\lambda_k > \kappa^v$, где v — любое натуральное число (например, $\lambda_k = e^k$).

Тогда $[\lambda]$ и $[\varphi]$ соответствует самосопряженная краевая задача, вообще говоря, бесконечного порядка в следующем смысле: для каждого натурального числа N существуют функции

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

и матрицы

$$(\alpha_{vj}) \text{ и } (\beta_{vj}),$$

причем не единственные, так что (15) — (16) — самосопряженная краевая задача; если функцию Грина последней обозначить через $G^N(x, \xi, \lambda)$, то при каждом $\lambda \neq \lambda_k$ имеет место неравенство

$$|G^N(x, \xi, \lambda) - \Phi(x, \xi, \lambda)| < \frac{C(Re\lambda)}{(N+1)^{2N-1}}.$$

Далее функции

$$K^N(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} G^N(x, \xi, \mu^2) e^{\mu t} d\mu, \\ K(t, x, \xi) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi(x, \xi, \mu^2) e^{\mu t} d\mu \quad (17)$$

существуют и отличаются на величину порядка $\frac{1}{(N+1)^{N-1}}$, т. е.

$$|K^N - K| < \frac{C_2}{(N+1)^{N-1}},$$

если $K(t, x, \xi)$ — оптимальная импульсивная переходная функция, т. е. если она является решением интегрального уравнения (7), то

$$\lim \|u^N(t, x) - \omega(t, x)\| = \|u(t, x) - \omega(t, x)\|,$$

где

$$\|v(t, x)\| = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_a^b |v(t, x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$u^N(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b K^N(\alpha, x, s) f(t - \alpha, s) dt d\alpha.$$

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом. При наших условиях на системы чисел $\{\lambda\}$ и функций $\{\varphi\}$ оптимальной функции $K(t, x, \xi)$, определяемой формулой (17), соответствует смешанная задача для линейного уравнения в частных производных бесконечного порядка в том смысле, что

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} K^N(t - \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

отличается от решения $u^N(t, x)$ смешанной задачи:

$$\frac{\partial^N}{\partial x^N} \left(P_0^N(x) \frac{\partial^N u}{\partial x^N} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x} \left(P_{N-1}(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + P_N(x) u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(t, x),$$

$$U_v(u) = 0, \quad u = 1, 2, \dots, 2N,$$

$$u(0, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

на величину, стремящуюся к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Ограничиваясь этим кратким обзором, отметим, что проблемам, возникшим здесь, будут посвящены подробные статьи. Будет рассмотрена также проблема для некоторых несамосопряженных операторов, в частности, для так называемых регулярных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Изв. АН СССР, серия матем., 1941, № 5.
2. Wiener N. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, John Wiley, 1949, № 4.
3. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М.—Л., 1952.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. Гостехиздат, 1950.
5. Иванов В. В. Дифференциальные уравнения, т. I, № 8, 1965.
6. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
7. Гохберг И. Ц. УМН, XIX, вып. 1 (115), 1964.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1958.

Поступило 4. VII 1965

З. И. Хэлилов

Пайланмыш параметрли автоматик идарэ едэн динамик системлэр наггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ (1), (2), (3) шэртлэри илэ тэ'жин олунан динамик систем тэдгиг олунур. Бурада $f(t, x)$ дахил олан $U(t, x)$ исэ чыхан, сигналдыр. Чыхан сигналын верилмиш $\omega(t, x)$ функцијасындан инһирафы

(4) эдэдилэ тэ'жин едилир. (1), (2), (3) мәсэләсинин һәлли (6) илэ верилмишдир. (4) инһирафынын минимумуну тэ'мин едэн $K(\alpha, x, s)$ функцијасы (7) интеграл тәнлијини өдәјир. (7) интеграл тәнлији (8) интеграл тәнлији кими јазылыр. (8) интеграл тәнлијинин һәлли исэ (9), сонра исэ (10) Һилберт сәрһәд мәсэләсинин һәллине кәтирилир.

Беләликлә, әсас мәсәлә бундан ибарәт олур ки, $K(\alpha, x, s)$ функцијасына көрә L, R операторлары бәрпа олунмалыдыр. Бу исэ о демәкдир ки, верилән мероморф функција һансы шэртләр дахилиндә мүәјјән сәрһәд мәсәләсинин Грин функцијасы олар. Хүсуси һалда верилән мероморф функција (14) шәклиндә олса, бу мәсәлә һәлл едилмишдир. Бурада көстәрилир ки, ујғун сәрһәд мәсәләси сонсуз тәртибли дифференциал тәнликлә тэ'жин едилир.

И. И. ИБРАГИМОВ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЕННОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ*

Известно, что если интерполируемая функция имеет только одну особенную точку, обычно ее помещают в бесконечности, т. е. предполагают функцию целой, то интерполирование производится с помощью многочленов—рациональных функций с полюсами в бесконечности. Что касается точек интерполирования, то наибольший интерес представляет тот случай, когда они имеют единственную предельную точку в бесконечности. При таких предположениях в работе [1] был установлен общий критерий сходимости интерполяционного процесса Ньютона в классе всех целых функций, в терминах максимума модуля интерполируемой функции и функции плотности последовательности узлов интерполяции. Аналогичные задачи рассматривались для интерполяционных процессов Абеля—Гончарова [2] и Ньютона в периодическом случае [3], а также в классе всех целых функций.

В настоящей статье рассматривается более общая задача: предполагается, что интерполируемая функция $f(z)$ имеет лишь несколько (конечное число) особенностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ ($p > 1$) и интерполирование производится с помощью рациональных функций $r_n(z)$ степени n , полюсы которых совпадают с особенностями интерполируемой функции $f(z)$, и что узлы интерполирования $\{x_n\}$ сгущаются только около этих особенностей, т. е. каждая особая точка α_v ($v = 1, 2, \dots, p$) является предельной точкой последовательности узлов интерполяции $\{x_n\}$, причем точки x_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) различны между собой и $x_n \neq \alpha_v$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При таких предположениях требуется найти достаточные условия сходимости рассматриваемого интерполяционного процесса типа Ньютона, при неограниченно возрастающей степени n рациональной функции $r_n(z)$, посредством которой производится интерполирование, так же в терминах максимума модуля интерполируемой функции и функции плотности множества узлов интерполяции.

Пусть $P_n(z)$ —многочлен степени n , μ_v ($v = 1, 2, \dots, p$)—целые неотрицательные числа, такие, что $\sum_{v=1}^p \mu_v = n$. Известно, что существует одна и только одна рациональная функция степени n (см. [6] стр. 226) вида

$$r_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (z - \alpha_p)^{\mu_p}}, \quad (1)$$

*Содержание этой работы опубликовано в «ДАН СССР», т. 181, 1968, № 6.

удовлетворяющая условиям:

$$r_n(x_m) = f(x_m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Этот интерполяционный процесс будем называть равномерно сходящимся в некоторой области G , не содержащей особых точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ функции $f(z)$, если выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z) = f(z) \quad (z \in G).$$

Прежде всего заметим, что разность

$$f(z) - r_n(z) = R_n(z),$$

т. е. остаточной член интерполяции может быть представлен в виде интеграла:

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} \cdot \frac{(\xi - \alpha_1)^{\mu_1} \dots (\xi - \alpha_p)^{\mu_p} \Pi_n(z)}{(z - \alpha_1)^{\mu_1} \dots (z - \alpha_p)^{\mu_p} \cdot \Pi_n(\xi)} d\xi, \quad (3)$$

где положено

$$\Pi_n(z) = \prod_{m=0}^n (z - x_m)$$

и замкнутый контур C охватывает z и все точки x_m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) и не охватывает ни одной из точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

В самом деле, интеграл (3) равен сумме вычетов подынтегральной функции (как функция переменной ξ) относительно полюсов z и x_m ($0 \leq m \leq n$), но вычет относительно полюса z равен $f(z)$, а сумма вычетов относительно полюсов x_m имеет такой же вид, как и правая часть формулы (1) и, кроме того, очевидно, $R_n(x_m) = 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), откуда и следует заключение.

Заметим теперь, что подынтегральная функция (как функция ξ) представляется в виде произведения двух множителей, из которых первый $f(\xi)$ есть функция, регулярная в бесконечности, а второй—рациональная функция, у которой степень знаменателя на две единицы превосходит степень числителя. Это обстоятельство позволяет заменить контур C контуром Γ , также замкнутым, охватывающим точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ и не охватывающим точек z и $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, но проходимым в обратном направлении, и

$$R_n(z) = \sum_{v=1}^p R_{n,v}(z), \quad (4)$$

где $R_{n,v}(z)$ —интегралы с той же подынтегральной функцией, что и (3), но взятые в обратном направлении по замкнутым контурам γ_v , охватывающим точку α_v и не охватывающим ни одной из точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_p, z, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. В качестве контуров γ_v можно взять, например, круги с центром в точках α_v и достаточно малых радиусов $r_n^{(v)}$.

Имея в виду, что последовательность узлов интерполяции $\{x_n\}$ не имеет иных предельных точек (не исключая бесконечности), кроме $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, множество чисел x_n можно разбить на p последовательностей (S_v) ($v = 1, 2, \dots, p$), из которых каждая имеет пределом одно из чисел α_v :

$$(S_v); \quad x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}, \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(v)} = \alpha_v \quad (v = 1, 2, \dots, p).$$

Заметим, что расстояния точек $x_n^{(v)}$ от предельной точки α_v образуют убывающую последовательность:

$$|x_1^{(v)} - \alpha_v| > |x_2^{(v)} - \alpha_v| > \dots > |x_n^{(v)} - \alpha_v| > \dots \quad (v = 1, 2, \dots, p).$$

Обозначим через $n_\nu(r_n^{(\nu)})$ число точек последовательности $\{x_n^{(\nu)}\}$, расположенных вне круга $|z - \alpha_\nu| \leq r_n^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$). Очевидно, функция $n_\nu(r_n^{(\nu)})$ растет неограниченно при $r_n^{(\nu)} \rightarrow 0$.

Далее обозначим через $n(r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \dots, r_n^{(p)})$ число точек множества чисел $\{x_n\}$, находящихся вне всех окружностей $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$. Заметим, что

$$n(r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \dots, r_n^{(p)}) = \sum_{\nu=1}^p n_\nu(r_n^{(\nu)}).$$

Наконец, обозначим через $M_\nu(f; r_n^{(\nu)})$ максимум модуля $f(z)$ на окружности γ_ν :

$$M_\nu(f; r_n^{(\nu)}) = \max_{z \in \gamma_\nu} |f(z)| \quad (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

Наша задача заключается в том, чтобы найти зависимость между функциями $M_\nu(f; r_n^{(\nu)})$ и $n_\nu(r_n^{(\nu)})$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$), являющуюся достаточным условием сходимости нашего интерполяционного процесса.

Предположим, что n -ая интерполяционная функция вида

$$r_n(z) = \frac{P_n(z)}{(z - \alpha_1)^{\mu_n^{(1)}} (z - \alpha_2)^{\mu_n^{(2)}} \dots (z - \alpha_p)^{\mu_n^{(p)}}},$$

где $\mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \dots, \mu_n^{(p)}$ — целые неотрицательные числа, $\mu_n^{(1)} + \mu_n^{(2)} + \dots + \mu_n^{(p)} = n$, определяется условиями:

$$r(x_m^{(\nu)}) = f(x_m^{(\nu)}) \quad \left(\begin{matrix} m = 1, 2, \dots, \mu_n^{(\nu)} \\ \nu = 1, 2, \dots, p \end{matrix} \right).$$

Займемся оценкой остаточного члена

$$R_n(z) = f(z) - r_n(z) = \sum_{\nu=1}^p R_{n,\nu}(z), \quad (5)$$

где

$$R_{n,\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \times \\ \times \frac{(\xi - \alpha_1)^{\mu_n^{(1)}} \dots (\xi - \alpha_p)^{\mu_n^{(p)}} \prod_{m=1}^{\mu_n^{(p)}} (z - x_m^{(p)}) \dots \prod_{m=1}^{\mu_n^{(1)}} (z - x_m^{(1)})}{(z - \alpha_1)^{\mu_n^{(1)}} \dots (z - \alpha_p)^{\mu_n^{(p)}} \prod_{m=1}^{\mu_n^{(p)}} (\xi - x_m^{(p)}) \dots \prod_{m=1}^{\mu_n^{(1)}} (\xi - x_m^{(1)})} d\xi \quad (6)$$

при условии, что z находится в области G , определяемой неравенствами:

$$|z - \alpha_\nu| > \eta, \quad |z| < R \quad (\nu = 1, 2, \dots, p).$$

Очевидно, для того, чтобы $|R_n(z)|$ стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ достаточно, чтобы каждый из интегралов $|R_{n,\nu}(z)|$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$ и при любом z из G .

Сосредоточим наше внимание на оценке интеграла $R_{n,\nu}(z)$, где γ_ν — проходимый в обратном направлении круг с центром и радиусом $r_n^{(\nu)}$ ($r_n^{(\nu)} < |x_n^{(\nu)} - \alpha_\nu|$, $\nu = 1, 2, \dots, p$). Заметим, что $R_{n,\nu}(z)$ может быть представлено в виде

$$R_{n,\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\nu} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \times$$

$$\times \prod_{m=1}^{\mu_n^{(1)}} \frac{z - x_m^{(1)}}{\xi - \alpha_1} \dots \prod_{m=1}^{\mu_n^{(p)}} \frac{z - x_m^{(p)}}{\xi - \alpha_p} \cdot \prod_{m=1}^{\mu_n^{(1)}} \frac{\xi - \alpha_1}{\xi - x_m^{(1)}} \dots \prod_{m=1}^{\mu_n^{(p)}} \frac{\xi - \alpha_p}{\xi - x_m^{(p)}} d\xi. \quad (7)$$

Выберем радиус окружности γ_ν в следующем виде:

$$r_n^{(\nu)} = \theta \delta_n^{(\nu)} = \theta |x_n^{(\nu)} - \alpha_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \dots, p),$$

где $0 < \theta < \frac{1}{2}$. Оценим каждый из множителей, находящихся под интегралом (7).

Очевидно, при достаточно больших n

$$\frac{r_n^{(\nu)}}{|\xi - z|} < \frac{r_n^{(\nu)}}{|z - \alpha_\nu| - |\xi - \alpha_\nu|} < \frac{r_n^{(\nu)}}{\eta - r_n^{(\nu)}} < 1.$$

Заметим, что для всех z из области G имеет место неравенство

$$\log |R_{n,\nu}(z)| \leq \log M_\nu(f; \theta \delta_n^{(\nu)}) + \\ + \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{\mu_n^{(k)}} \log \left(\max \left| \frac{z - x_m^{(k)}}{z - \alpha_k} \right| \right) - \sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{\mu_n^{(k)}} \log \left(\max \left| \frac{\xi - x_m^{(k)}}{\xi - \alpha_k} \right| \right). \quad (8)$$

Перейдем к оценке каждого слагаемого, стоящего под двойными суммами в правой части неравенства (8). Из того, что последовательность $\{x_m^{(\nu)}\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) сходится к α_ν , следует, что при достаточно малом $\epsilon_1^{(\nu)} > 0$ найдется целое число $m_0^{(\nu)} = m_0^{(\nu)}(\epsilon_1^{(\nu)})$ такое, при котором выполняется неравенство

$$|x_m^{(\nu)} - \alpha_\nu| < \epsilon_1^{(\nu)}, \quad \text{при } m > m_0^{(\nu)}.$$

Тогда при $m > m_0^{(\nu)}$ получим

$$\left| \frac{z - x_m^{(\nu)}}{z - \alpha_\nu} \right| = \left| 1 - \frac{x_m^{(\nu)} - \alpha_\nu}{z - \alpha_\nu} \right| < 1 + \frac{|x_m^{(\nu)} - \alpha_\nu|}{\eta} \leq 1 + \epsilon_1^{(\nu)}.$$

Введем обозначение:

$$\epsilon_1 = \max_{1 \leq \nu \leq p} (\epsilon_1^{(\nu)}), \quad m_0 = \max_{1 \leq \nu \leq p} (m_0^{(\nu)}).$$

В этом случае при $m > m_0$ будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^p \sum_{m=1}^{\mu_n^{(\nu)}} \log \left(\max \left| \frac{z - x_m^{(\nu)}}{z - \alpha_\nu} \right| \right) \leq \sum_{\nu=1}^p \sum_{m=1}^{m_0-1} + \\ + \sum_{\nu=1}^p \sum_{m=m_0}^{\mu_n^{(\nu)}} \log(1 + \epsilon_1^{(\nu)}) \leq A_1 + \sum_{\nu=1}^p (\mu_n^{(\nu)} - m_0) \log(1 + \epsilon_1) \leq \\ \leq A_2 + \left(\sum_{\nu=1}^p \mu_n^{(\nu)} \right) \log(1 + \epsilon_1). \quad (9)$$

Далее при $k \neq \nu$ имеем

$$\max_{\xi \in \gamma_\nu} \left| \frac{\xi - x_m^{(k)}}{\xi - \alpha_k} \right| \leq \max_{\xi \in \gamma_\nu} \frac{1}{1 - \frac{|x_m^{(k)} - \alpha_k|}{\eta_1}} \leq 1 + \epsilon_2.$$

Благодаря этому находим

$$\sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{\mu_n^{(k)}} \log \left(\max_{\xi \in \gamma_v} \left| \frac{\xi - x_m^{(k)}}{\xi - \alpha_k} \right| \right) \leqslant \leqslant A_2 + [\mu_n^{(1)} + \dots + \mu_n^{(v-1)} + \mu_n^{(v+1)} + \dots + \mu_n^{(p)}] \log(1 + \varepsilon_2). \quad (10)$$

Далее, учитывая, что

$$\left| \frac{\xi - \alpha_v}{\xi - x_m^{(v)}} \right| < \frac{|\xi - \alpha_v|}{|x_m^{(v)} - \alpha_v| - |\xi - \alpha_v|} = \frac{\theta}{1 - \theta},$$

получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\mu_n^{(v)}} \log \left(\max \left| \frac{\xi - \alpha_v}{\xi - x_m^{(v)}} \right| \right) &\leqslant \sum_{m=1}^{m_0-1} + \sum_{m=m_0}^{\mu_n^{(v)}} \leqslant \\ &\leqslant B_1 + \sum_{m=m_0}^{\mu_n^{(v)}} \log \left(\max \frac{|\xi - \alpha_v|}{|x_m^{(v)} - \alpha_v| - |\xi - \alpha_v|} \right) \leqslant \\ &\leqslant B_1 + \sum_{m=m_0}^{\mu_n^{(v)}} \log \frac{\theta}{1 - \theta} < B_2 + \mu_n^{(v)} \log \frac{\theta}{1 - \theta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом в силу (9), (10) и (11) неравенство (8) примет вид

$$\begin{aligned} \log |R_{n,v}(z)| &\leqslant A + \log M_v(f; \theta \delta_n^{(v)}) + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^p \mu_n^{(k)} \right) \log(1 + \varepsilon_1) - [\mu_n^{(1)} + \dots + \mu_n^{(v-1)} + \mu_n^{(v+1)} + \dots \\ &\dots + \mu_n^{(p)}] \log(1 + \varepsilon_2) + \mu_n^{(v)} \log \frac{\theta}{1 - \theta} \leqslant \\ &\leqslant A + \log M_v(f; \theta \delta_n^{(v)}) + \mu_n^{(v)} \log(1 + \varepsilon) - \mu_n^{(v)} \log \frac{1 - \theta}{\theta}. \end{aligned}$$

Однако учитывая, что $\mu_n^{(v)} = n_v(\delta_n^{(v)})$, находим

$$\begin{aligned} |R_{n,v}(z)| &\leqslant A_0 \exp \{ \log M_v(f; \theta \delta_n^{(v)}) - n_v(\delta_n^{(v)}) \log \frac{1 - \theta}{\theta} + \\ &+ n_v(\delta_n^{(v)}) \log(1 + \varepsilon) \} = A_0 \exp \{ -n_v(\delta_n^{(v)}) \times \\ &\times \left[\lg \frac{1 - \theta}{\theta} - \frac{\log M_v(f; \theta \delta_n^{(v)})}{n_v(\delta_n^{(v)})} + \lg(1 + \varepsilon) \right] \}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство показывает, что $|R_{n,v}(z)|$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, равномерно относительно z из области G , если выполняется неравенство

$$\log M_v(f; \theta \delta_n^{(v)}) < C(\theta) n_v(\delta_n^{(v)}) \quad (v = 1, 2, \dots, p),$$

где

$$C(\theta) < \log \frac{1 - \theta}{\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}.$$

Итак, приходим к следующему заключению.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ есть аналитическая функция, имеющая лишь конечное число особых точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ на всей плоскости z , в окрестности каждой особой точки с максимумом модуля

$$M_v(f; \delta_n^{(v)}) = \max_{|z - \alpha_v| = \delta_n^{(v)}} |f(z)| \quad (v = 1, 2, \dots, p).$$

Далее пусть числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, и лишь эти числа являются предельными точками множества чисел x_n ($n = 1, 2, \dots$), которое разбивается на p последовательностей $\{x_m^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, p$), сходящихся соответственно к числам α_k ($k = 1, 2, \dots, p$). Наконец, пусть $n_v(\delta^{(v)})$ обозначает количество чисел подпоследовательности $\{x_m^{(v)}\}$, находящихся вне круга $|z - \alpha_v| \leqslant \delta^{(v)}$ ($v = 1, 2, \dots, p$). Тогда интерполяционный процесс типа Ньютона рациональных функций $r_n(z)$ сходится равномерно к функции $f(z)$ в каждой конечной области G ($|z - \alpha_v| \geqslant \eta > 0, |z| < \rho$, если выполняются неравенства:

$$\log M_v(f; \theta \delta^{(v)}) \leqslant C(\theta) n_v(\delta^{(v)}) \quad (v = 1, 2, \dots, p), \quad (12)$$

где

$$C(\theta) < \log \frac{1 - \theta}{\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Заметим, что в случае, когда функция $f(z)$ имеет только одну особую точку ($p = 1$), ее можно помещать в бесконечность, т. е. считать целой функцией, и интерполирование производить с помощью многочленов—рациональных функций с полюсами в бесконечности. В этом случае теорема 1 совпадает с основной теоремой работы [1], которая, как было доказано, не может быть улучшена, т. е. θ не может быть взято из промежутка $\theta > \frac{1}{2}$.

Из нашей теоремы 1 можно получить ряд конкретных следствий. Следуя В. Л. Гончарову [5], введем понятия порядка и типа аналитической функции $f(z)$ около особых точек, а также понятия порядка и типа сходимости множества точек около ее предельных точек. Порядком и типом аналитической функции $f(z)$ около особой точки $z = \alpha_v$ ($v = 1, 2, \dots, p$) называются, соответственно, числа ρ_v и A_v , определяемые соотношениями:

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \alpha_v} \frac{\log \log |f(z)|}{\log \left| \frac{1}{z - \alpha_v} \right|} = \rho_v \quad (\rho_v \geqslant 0), \quad (14)$$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \alpha_v} |z - \alpha_v|^{\rho_v} \log |f(z)| = A_v \quad (\rho_v > 0, A_v > 0), \quad (15)$$

причем предполагается, что верхние пределы берутся относительно всевозможных путей, ведущих к точке α_v .

Далее порядком и типом сходимости множества точек интерполяции $\{x_n\}$ около ее предельной точки α_v называются числа ρ_v и ω_v , определяемые соотношениями:

$$\frac{1}{\rho_v} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \frac{1}{|x_n^{(v)} - \alpha_v|}}{\lg n} \quad (v = 1, 2, \dots, p) \quad (16)$$

и

$$\omega_v = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/\rho_v} |x_n^{(v)} - \alpha_v|}. \quad (17)$$

Следствие 1. Интерполяционный процесс рациональных функций сходится равномерно во всякой замкнутой области, не содержащей особых точек интерполируемой функции, если только около

каждой особой точки порядок возрастания функции меньше, чем порядок сходимости точек интерполяции, т. е. $\rho'_\nu > \rho_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$).
Доказательство: В силу равенства (15) около каждой особой точки имеет место неравенство

$$\max_{|\xi - \alpha_\nu| = \theta \delta_n^{(\nu)}} \log |f(\xi)| \leq (A_\nu + \varepsilon) \left(\frac{1}{\theta \delta_n^{(\nu)}} \right)^{\rho_\nu}. \quad (18)$$

Далее из (17) следует, что

$$|x_n^{(\nu)} - \alpha_\nu| > \frac{1}{\omega_\nu + \varepsilon} n^{-1/\rho'_\nu}. \quad (19)$$

Выбирая

$$\delta_n^{(\nu)} = \frac{1}{\omega_\nu} \cdot n^{-1/\rho'_\nu},$$

замечаем, что $n_\nu(\delta_n^{(\nu)}) = n$.

В силу теоремы 1 интерполяционный процесс рациональных функций сходится равномерно в каждой замкнутой области, не содержащей особых точек интерполируемой функции, если имеют место неравенства:

$$A_\nu \left(\frac{1}{\theta \delta_n^{(\nu)}} \right)^{\rho_\nu} < C(\theta) n$$

или

$$A_\nu (\omega_\nu \cdot n^{1/\rho'_\nu})^{\rho_\nu} < \theta^{\rho_\nu} \cdot \log \frac{1 - \theta}{\theta} \cdot n. \quad (20)$$

Очевидно, последнее неравенство выполняется при любом ν ($\nu = 1, 2, \dots, p$), при условии $\rho'_\nu > \rho_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$). Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда порядки возрастания функции и порядки сходимости точек интерполирования около каждой особой точки совпадают, т. е. $\rho'_\nu = \rho_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, p$) и известны типы возрастания функции A_k и типы сходимости ω_k ($k = 1, 2, \dots$) точек интерполирования. В этом случае неравенство (20) в силу теоремы 1 примет вид

$$A_\nu \omega_\nu^{\rho_\nu} < \theta^{\rho_\nu} \log \frac{1 - \theta}{\theta}. \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что при $\theta = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$, где λ — наименьший положительный корень уравнения

$$\lambda^p e^{1+\lambda} = 1, \quad (22)$$

получим

$$\left[\theta^{\rho_\nu} \log \frac{1 - \theta}{\theta} \right]_{\theta = \frac{\lambda}{1 + \lambda}} = \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{\rho_\nu} \cdot \log \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\rho_\nu} \cdot \frac{\lambda^{\rho_\nu}}{(1 + \lambda)^{\rho_\nu - 1}}.$$

Таким образом неравенство (21) запишется в следующем виде:

$$A_\nu < \omega_\nu^{-\rho_\nu} \cdot \frac{1}{\rho_\nu} \cdot \frac{\lambda^{\rho_\nu}}{(1 + \lambda)^{\rho_\nu - 1}},$$

где λ — положительный корень уравнения (22).
Итак доказано:

Следствие 2. Если порядок возрастания аналитической функции $f(z)$ около каждой ее особой точки совпадает соответственно с порядком сходимости точек интерполяции, т. е. $\rho'_\nu = \rho_\nu$ ($1 \leq \nu \leq p$), то интерполяционный процесс рациональных функций сходится равномер-

но во всякой замкнутой области, не содержащей особых точек интерполируемой функции при условии, что типы возрастания A_ν функции $f(z)$ и типы сходимости точек интерполяции ω_ν удовлетворяют неравенствам

$$A_\nu < \omega_\nu^{-\rho_\nu} \cdot \frac{1}{\rho_\nu} \cdot \frac{\lambda^{\rho_\nu}}{(1 + \lambda)^{\rho_\nu - 1}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, p), \quad (23)$$

где λ — положительный корень уравнения (22).

Сравним это утверждение, хотя бы в одном частном случае, со следующим результатом В. Л. Гончарова [5]. Интерполяционный процесс рациональных функций $r_n(z)$ сходится равномерно к $f(z)$ во всякой замкнутой области G , не содержащей особых точек интерполируемой функции $f(z)$, если характеристические числа ρ_ν и A_ν функции $f(z)$ и характеристические числа сходимости ρ'_ν и ω_ν множества точек интерполяции удовлетворяют условиям:

$$1) \rho_\nu = \rho'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, p),$$

$$2) A_\nu < B_\nu = \begin{cases} \omega_\nu^{-\rho_\nu} h_{\rho_\nu}(2) & \text{при } z_\nu \geq 2^{-\rho_\nu}, \\ \omega_\nu^{-\rho_\nu} h_{\rho_\nu} \left(z_\nu^{-\frac{1}{\rho_\nu}} \right) & \text{при } z_\nu \leq 2^{-\rho_\nu}, \end{cases} \quad (24)$$

где

$$h_q(u) = q \int_u^\infty \log(t-1) \cdot \frac{dt}{t^{q+1}} \quad (q > 0, u > 1). \quad (25)$$

Отсюда следует, что

$$h_{\rho_\nu}(2) = \rho_\nu \int_2^\infty \log(t-1) \cdot \frac{dt}{t^{1+\rho_\nu}}. \quad (26)$$

Заметим, что результат В. Л. Гончарова в случае $p = 1$, т. е. когда $f(z)$ имеет только одну особую точку $\alpha_1 = \alpha$, принимает вид

$$A < B = \omega^{-\rho} h_\rho(2). \quad (27)$$

В предположении, что точка α бесконечно удаленная, неравенство (27) было установлено А. О. Гельфондом [4] и доказано, что константа, стоящая в правой части (27) не может быть увеличена.

Из (26) следует, что в случае $\rho = 1$

$$B = \frac{1}{\omega} h_1(2) = \frac{1}{\omega} \int_2^\infty \log(t-1) \cdot \frac{dt}{t^2} = \frac{\log 2}{\omega}.$$

Далее из следствия 2, в случае $p = 1$ и $\rho = 1$, следует, что

$$A < B < \frac{\lambda}{\omega}, \quad (28)$$

где λ — положительный корень уравнения (22), причем $\lambda = 0,278 \dots$ [7]. Заметим, что правые части неравенств (27) и (28) отличаются близкими множителями $\log 2$ и λ , причем $\log 2 - \lambda = 0,3010 - 0,278 \approx 0,02 \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. И. и Келдыш М. В. Об интерполяции целых функций Матем. сб. 20 (62), 1947.
2. Ибрагимов И. И. О сходимости интерполяционного ряда Абеля—Гончарова. Матем. сб. 21 (63), 1947.

3. Ибрагимов И. И. Изв. АН СССР, серия матем., т. 13 (1949).
4. Гельфонд А. О. Sur le developpement des fonctions entières d'ordre fini en serie d'interpolation de Newton. Atti Acad. Lincei 11 (1930). 377—381.
5. Гончаров В. Л. Изв. АН СССР, серия матем., т. (1937), 171—184.
6. Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в компактной области. Изд. ИЛ, М., 1961.
7. Гончаров В. Л. Recherches sur les dérivés successives des fonctions analytiques de série d'Abel. Ann. Ec. Norm. 74 (1930). 1—78.

Поступило 4. VII 1969

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə рижэијјат елмлэри серијасы, 1970, № 1—2.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 1—2.

М. Г. ГАСЫМОВ

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕПРЕРЫВНОЙ ЧАСТЬЮ СПЕКТРА

Изучению спектра и полноты собственных и присоединенных элементов для довольно широкого класса абстрактных и дифференциальных операторов как в обыкновенных, так и в частных производных с дискретным спектром посвящено много работ. Исследование же спектра и разложение по собственным функциям сингулярных дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра началось сравнительно недавно.

В основополагающей работе М. А. Наймарк [1] получил разложение по собственным функциям оператора, порожденного скалярным уравнением $-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$ (1) и граничным условием $y'(0) - hy(0) = 0$ (2) в предположении, что $\int_0^\infty |q(x)| l^{2x} dx < \infty$. При этом выявились

так называемые спектральные особенности на непрерывном спектре — полюсы резольвенты, которые не являются собственными числами оператора. Их влияние на разложение полностью исследовал В. Э. Лянце [2].

Результаты М. А. Наймарка обобщались на различные обыкновенные дифференциальные операторы, порожденные конечной системой уравнений любого порядка на полуоси $[0, \infty)$ или на всей оси с экспоненциально убывающими коэффициентами [3, 4, 5, 6, 7] и др. В. А. Марченко [8] рассмотрел граничную задачу (1) — (2) при единственном предположении, что $q(x)$ локально интегрируема и доказал, что каждой такой задаче отвечает некоторая обобщенная функция над пространством четных целых функций экспоненциального типа, суммируемых на вещественной оси, и является аналогом спектральной функции для самосопряженных задач. Ф. С. Рофе-Бекетов [9] распространил эти результаты на граничные задачи вида (1) — (2), когда $q(x)$ и h являются ограниченными операторами в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве, а автор [10] обобщил их и распространил на скалярные уравнения с особенностью вида $\frac{l(l+1)}{r^2}$. Таким образом в

теории разложения по собственным функциям несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра получено много важных результатов.

Данная статья посвящена изучению спектра и нахождению вида разложения по собственным функциям посредством решения задачи

теории рассеяния оператора (3)–(4), п. 2 при описанных ниже условиях. Очевидно, что многие дифференциальные операторы в частных производных с непрерывной частью спектра сводятся к такой задаче, в частности оператор Шредингера в нечетномерных пространствах с экспоненциально убывающим комплексным потенциалом, и таким образом удастся построить ядро его резольвенты. Заметим, что конечность дискретного спектра оператора Шредингера с финитным комплексным потенциалом ранее была доказана И. М. Гельфондом [11], а в рассматриваемом случае — Р. М. Мартиросяном [12].

Указанная литература охватывает лишь работы, посвященные несамопряженным дифференциальным операторам с непрерывной частью спектра.

Рассмотрим вкратце содержание нашей работы.

Обозначим через $L_2(0, \infty; l_2)$ множество всех вектор-функций $f(r)$ со значениями из l_2 , для которых интеграл

$$(f, f)_{L_2} = \int_0^\infty (f, f)_{l_2} dr < \infty. \quad (1)$$

Предположим, что $Q(r)$ — комплекснозначная матричная функция,

$$\|Q(r)\| \leq C e^{\epsilon r} \quad (-\epsilon r) \quad (2)$$

и T — бесконечная диагональная матрица с элементами вида $l_j(l_j + 1)$, где последовательность целых чисел $l_1, l_2, \dots \rightarrow +\infty$.

При этих предположениях рассмотрим граничную задачу, порожденную в $L_2(0, \infty; l_2)$ уравнением

$$-y'' + \frac{1}{r^2} T y + Q(r)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (3)$$

и граничным условием

$$y(0) = 0. \quad (4)$$

Пусть $R(r, t, \lambda)$ — ядро резольвенты граничной задачи (3)–(4). Тогда $R(r, t, \lambda)$ является аналитической оператор-функцией в области $\{\lambda; \operatorname{Im} \lambda > -\epsilon/2\}$, за исключением, быть может, счетного множества точек M с предельными точками на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -\epsilon/2$, в которых имеется полюс конечного порядка (§ 3). При этом для того, чтобы число λ с $\operatorname{Im} \lambda > 0$ было из M , необходимо и достаточно, чтобы оно было собственным значением граничной задачи (3)–(4). Следовательно, задача (3)–(4) имеет конечное число собственных значений $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$ с $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \dots, \operatorname{Im} \lambda_k > 0$. На действительной оси λ граничная задача (3)–(4) не имеет собственных значений, кроме, быть может, нуля (см. Като [13]). Поэтому точки из M , лежащие на действительной оси λ , следуя В. Э. Лянце [2], называем спектральными особенностями граничной задачи (3)–(4). Очевидно, что их конечное число $\mu_1, \dots, \mu_p$. Здесь обозначение проведено, видимо, так, что $\mu_1, \dots, \mu_p$ меньше нуля, а $\mu_{p+1}, \dots, \mu_p$ больше нуля и

$$\mu_1 = -\mu_p, \dots, \mu_{p-1} = -\mu_{p-p+1}.$$

Обозначим через $u(r, s)$ и $v(r, s)$ решения интегральных уравнений:

$$u(r, s) = u_0(r, s) - \int_0^\infty R_0(r, t, s) Q(t) u(t, s) dt, \quad (5)$$

$$v(r, s) = u_0(r, s) - \int_0^\infty v(t, s) Q(t) R_0(t, r, s) dt, \quad (6)$$

где $u_0(r, s) = \left\{ i^{ij} \sqrt{\frac{r}{\lambda}} I_{l_j + \frac{1}{2}}(\lambda, s) \delta_{kj} \right\}$, $R_0(r, t, \lambda)$ — ядро резольвенты

граничной задачи (3)–(4), когда $Q(r) \equiv 0$. Очевидно, что $u(r, \lambda)$ и $v(r, \lambda)$ являются решениями граничных задач (3)–(4) и

$$-y'' + \frac{1}{r^2} T y + y Q(r) = \lambda^2 y, \quad y(0) = 0,$$

соответственно. Назовем их решениями задачи теории рассеяния соответствующих граничных задач.

Исследованы вопросы существования матриц решений $u(r, s)$ и $v(r, s)$ и найден способ построения ядра $R(r, t, \lambda)$ через эти решения. Точнее, имеет место следующее интегральное представление ядра:

$$R(r, t, \lambda) = \sum_{j=1}^k B_j(r, t, \lambda) + \sum_{j=1}^{p_1} D_j(r, t, \lambda) + \int_\Gamma \frac{u(r_1 - s) v(t, s)}{s^2 - \lambda^2} s^2 ds, \quad (7)$$

где $B_j(r, t, \lambda)$ и $D_j(r, t, \lambda)$ являются главными частями ядра резольвенты в окрестности λ_j^2 и μ_j соответственно; Γ — контур, образованный из подотрезков полуоси $s \geq 0$ и полуокружностей малого радиуса с центрами в точках $\mu_{p_2+1}, \dots, \mu_p$ в верхней и $-\mu_{p_1+1}, \dots, -\mu_p$ в нижней полуплоскостях. Последний интеграл сходится равномерно в метрике пространства l_2 по переменным r и t , $0 \leq r, t < \infty$.

При выводе формулы (7) предполагается, что $\lambda = 0$ не является полюсом ядра $R(r, t, \lambda)$. От этого предположения можно освободиться. Соответствующие изменения в формуле разложения приводятся в § 3. Из (7) непосредственно можно получить разложение финитных и гладких вектор-функций по собственным функциям граничной задачи (3)–(4).

В § 4 рассматривается оператор Шредингера $L = -\Delta + q(x_1, \dots, x_{2n+1})$ в нечетномерных пространствах в предположении, что $|q(x)| \leq C e^{\epsilon |x|}$, и разложение по собственным функциям таких операторов сводится к разложению по собственным функциям граничной задачи вида (3)–(4), в которой $\bar{Q}(r) = Q(r)$.

Таким образом удастся ядро резольвенты несамопряженного оператора Шредингера построить с помощью решения задачи теории рассеяния. Заметим, что в самопряженном случае трехмерного оператора Шредингера такой результат при более слабых предположениях в отношении потенциала $q(x)$ ранее был получен А. Я. Повзнером

[14] ($|q(x)| \leq C |x|^{-3-\frac{1}{2}-\epsilon}$), а затем Икебе [15] ($|q(x)| \leq C |x|^{-2-\epsilon}$). Коэффициенты $v_{s,j}(x)$ при отрицательных степенях выражения $(\lambda - \mu_j)$ в разложении Лорана решения з. т. р. оператора Шредингера не интегрируемы квадратом. В § 5 вводится понятие регуляризованного интеграла, доказывается, что регуляризованные интегралы функций $u_{s,j_1}(x)$, $v_{s,j_2}(x)$ существуют и главная часть резольвенты в окрестности спектральных особенностей вычисляется через $v_{s,j}(x)$ так же, как и в окрестности собственных значений, только вместо обычных интегралов в соответствующих местах берутся регуляризованные. Некоторые результаты этой работы ранее были опубликованы [16, 17].

§ 1. Постановка задачи и обозначения

Обозначим через $L_2(0, \infty; \delta, l_2)$ пространство Гильберта вектор-функций $f(r)$ со значениями из пространства l_2 , для которых интеграл $\int_0^\infty (f(r), f(r))_{l_2} e^{-\delta r} dr < \infty$, где δ — фиксированное неотрицательное число.

Скалярное произведение в $L_2(0, \infty; \delta, l_2)$ определяется неравенством

$$\int_0^\infty (f(r), g(r))_{l_2} \exp(-\delta r) dr < \infty.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор $L_2(0, \infty; l_2) = L_2(0, \infty; 0, l_2)$, порожденный уравнением

$$-y'' + \frac{1}{r^2} Ty + Q(r)y = \lambda^2 y, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (1)$$

и граничным условием

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

в предположении, что:

а) при каждом r из $[0, \infty)$ матрица-функция $Q(r)$ дает ограниченный несамосопряженный оператор в l_2 и существует некоторое положительное число ϵ такое, что

$$\|Q(r)\| \leq C \exp(-\epsilon r);$$

б) T — диагональная матрица с диагональными элементами вида $l_j(l_j + 1)$, где $l_1, l_2, \dots$ — неотрицательные целые числа и $l_j \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow \infty$.

Обозначим через $R_0(r, t, \lambda)$ ядро резольвенты оператора в $L_2(0, \infty; l_2)$, порожденного уравнением

$$-y'' + \frac{1}{r^2} Ty = \lambda^2 y, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (3)$$

и граничным условием (2). Тогда $R_0(r, t, \lambda)$ — диагональная матрица:

$$R_0(r, t, \lambda) = [A_j(r, t, \lambda) \delta_{\kappa, j}], \quad \kappa, j = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где

$$A_j(r, t, \lambda) = \frac{\pi}{2i} \begin{cases} \sqrt{rt} H_{l_j+1/2}^{(1)}(\lambda r) I_{l_j+1/2}(\lambda t), & t < r, \\ \sqrt{rt} H_{l_j+1/2}^{(1)}(\lambda t) I_{l_j+1/2}(\lambda r), & t > r. \end{cases} \quad (5)$$

Очевидно, что

$$u_0(r, \lambda) = \left\{ i^{l_j} \sqrt{\frac{r}{\lambda}} I_{l_j}(\lambda r) \delta_{\kappa, j} \right\}$$

($\kappa, j = 1, 2, \dots$) является регулярным операторным решением уравнения (3). Операторное решение $u(r, \lambda)$ интегрального уравнения

$$u(r, \lambda) = u_0(r, \lambda) - \int_0^\infty R_0(r, t, \lambda) Q(t) u(t, \lambda) dt \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению (1) и в дальнейшем мы его называем решением задачи теории рассеяния (з. т. р.).

Ставится задача определения вида разложения по собственным функциям несамосопряженного оператора (1) — (2) через решения з. т. р. уравнения (1).

§ 2. О спектре граничной задачи (1) — (2) § 1

1. Об евклидовой норме матрицы $R_0(r, t, \lambda)$. Так как $R_0(r, t, \lambda)$ — диагональная матрица, то евклидова норма

$$\|R_0(r, t, \lambda)\|_{l_2} = \max_j |A_j(r, t, \lambda)|. \quad (1)$$

Теорема. Ядро $R_0(r, t, \lambda)$ является целой аналитической оператор-функцией λ и порождает вполне непрерывный оператор

в l_2 при каждом r и t из $[0, \infty)$. Далее для нормы $\|R_0(r, t, \lambda)\|_{l_2}$ оператора $R_0(r, t, \lambda)$ в l_2 имеет место асимптотическая формула:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\max(r, t)} \|R_0(r, t, \lambda)\|_{l_2} \exp(\operatorname{Im} \lambda / r - t \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda) = 0 \quad (2)$$

равномерно по переменным r и t из $[0, \infty)$.

Доказательство. Известно [18], что

$$A_{l_j}(r, t, \lambda) = rt \int_{-1}^1 \frac{\exp(i\lambda \sqrt{r^2 + t^2 - 2rta})}{\sqrt{r^2 + t^2 - 2rta}} P_{l_j}(a) da, \quad (2)$$

где $P_{l_j}(a)$ — многочлен Лежандра, для которого имеет место оценка

$$|P_{l_j}(a)| \leq \frac{C}{\sqrt{l_j}(1 - a^2)^{1/4}}. \quad (3)$$

Для определенности пусть $r \leq t$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + t^2 - 2rta}} \leq \frac{1}{r\sqrt{1 - a}}, \quad (4)$$

$$|\exp(i\lambda(\sqrt{r^2 + t^2 - 2rta}))| \leq \exp(-\operatorname{Im} \lambda / r - t \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda). \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) и (2) вытекает, что

$$|A_{l_j}(r, t, \lambda)| \leq \frac{Ct}{\sqrt{l_j}} t \exp(-\operatorname{Im} \lambda / r - t \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda), \quad (6)$$

где

$$a = \int_{-1}^1 \frac{da}{(1 - a^2)^{1/4}(1 - a)^{1/2}}.$$

По условию б) числа $l_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, при каждом r и t из $[0, \infty)$ и комплексном значении λ функция A_{l_j} стремится к нулю. Поэтому $R_0(r, t, \lambda)$ порождает вполне непрерывный оператор в l_2 при каждом r и t из $[0, \infty)$ и комплексном λ . Из формулы (2) очевидно, что $R_0(r, t, \lambda)$ является целой оператор-функцией λ .

Пусть δ — произвольное положительное число. Поскольку $l_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$, то из (6) вытекает, что можно найти целое число N такое, при котором для всех $j \geq N$ будет иметь место неравенство

$$\frac{1}{\max(r, t)} |A_{l_j}(r, t, \lambda)| \exp(\operatorname{Im} \lambda / r - t \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda) < \delta \quad (7)$$

равномерно по λ . Интегрируя (2) по частям, получим

$$A_{l_j}(r, t, \lambda) = -\frac{1}{i\lambda} \{\exp[i\lambda(r - t)] P_{l_j}(1) - \exp[i\lambda(r + t)] P_{l_j}(-1)\} + \frac{1}{i\lambda} \int_{-1}^1 \exp(i\lambda \sqrt{r^2 + t^2 - 2rta}) P'_{l_j}(a) da.$$

Так как функции $P_{l_1}(a), \dots, P_{l_N}(a)$ и $P'_{l_1}(a), \dots, P'_{l_N}(a)$ ограничены по совокупности при заданном N , то из последней формулы вытекает, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |A_{l_j}(r, t, \lambda)| \exp(\operatorname{Im} \lambda / r - t \operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda) = 0 \quad (8)$$

($j = 1, \dots, N$) равномерно по переменным r и t из $[0, \infty)$. Из формул (7) и (8) очевидным образом следует последнее утверждение теоремы. Теорема доказана.

2. Об операторе $R_0(r, t, \lambda)Q(t)$. Очевидно, что при каждом r, t и λ матрица $R_0(r, t, \lambda)Q(t)$ дает вполне непрерывный оператор в L_2 к евклидова норма

$$\|R_0(r, t, \lambda)Q(t)\|_{L_2} \leq C \max(r, t) \exp(-|\operatorname{Im} \lambda|/r - t \operatorname{sign} |\operatorname{Im} \lambda|) t^{-\varepsilon}. \quad (1)$$

Теорема 1. Ядро $R_0(r, t, \lambda)Q(t) = B(r, t, \lambda)$ порождает вполне непрерывный оператор в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, P_2)$, если только $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$.

Доказательство. Обозначим через E_N оператор проектирования пространства L_2 на подпространство векторов вида $(x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$. Тогда из неравенства (1) вытекает, что $R_0(r, t, \lambda)E_N Q(t)E_N = B_N(r, t, \lambda)$, является ядром типа Гильберта—Шмидта в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$, если только $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$. С другой стороны, при $N \rightarrow \infty$ ядро $B_N(r, t, \lambda)$ стремится к $B(r, t, \lambda)$ в смысле операторной нормы в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$, если только $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t) = \varphi(t) - \int_0^\infty R_0(r, t, \lambda) Q(t) f(t) dt \quad (2)$$

в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$, где $\varphi(t)$ —известная вектор-функция из этого пространства.

Теорема 2. Уравнение (2) разрешимо в $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$ для всех λ из области $D_\varepsilon = \{\lambda; \operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2\}$, за исключением, быть может, счетного множества M точек с предельными точками на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -\frac{\varepsilon}{2}$.

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает, что к уравнению (2) можно применять альтернативы Фредгольма. Тогда получается [19], что уравнение (2) разрешимо для всех λ из D_ε , за исключением, быть может, счетного множества M точек с предельными точками на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -\frac{\varepsilon}{2}$ и на бесконечности. Докажем, что в

любой области вида $\left\{\lambda; \operatorname{Im} \lambda > \delta > -\frac{\varepsilon}{2}\right\} = D_\delta$ может находиться только конечное число точек из множества M . Для этого достаточно показать, что при больших λ из D_δ уравнение (2) решается методом последовательных приближений. Но это утверждение является простым следствием теоремы п. 1. Теорема доказана.

Следствие 3. Уравнение (6) § 1 з. т. р. разрешимо при всех λ из D_ε , за исключением множества M с возможными предельными точками на прямой $\operatorname{Im} \lambda = -\frac{\varepsilon}{2}$, и его решение $u(r, \lambda)$ при каждом r является ограниченным оператором в L_2 , аналитически зависящим от λ в области D_ε , за исключением точек из множества M , где имеются полюсы конечного порядка.

Доказательство. Это утверждение докажем для λ из полосы $|\operatorname{Im} \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$, поскольку в дальнейшем нам понадобятся только эти значения $u(r, \lambda)$. Общее утверждение является следствием интегрального представления (9) § 5. В этой полосе столбцы матрицы $u_0(r, \lambda)$ лежат в $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$ и являются аналитическими вектор-функциями λ . Поэтому следствие вытекает из теоремы 2.

Замечания: 1. Поскольку при больших действительных значениях λ уравнение з. т. р. решается методом последовательных при-

ближений, то для больших λ с $\operatorname{Im} \lambda = 0$ имеет место неравенство

$$\|u(r, \lambda)\|_{L_2} \leq C \|u_0(r, \lambda)\|_{L_2} \leq \frac{C_1}{|\lambda|}. \quad (3)$$

2. Поскольку для λ из полосы $|\operatorname{Im} \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$ столбцы матрицы $u_0(r, \lambda)$ лежат в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$, то очевидно, что в точках из этой полосы, где уравнение задачи теории рассеяния разрешимо, имеет место также неравенство

$$\|u(r, \lambda)\|_{L_2} \leq C_\lambda \|u_0(r, \lambda)\|_{L_2}, \quad (3)$$

где C_λ —конечная величина, если $\lambda \notin M$.

3. Связь между собственными значениями граничной задачи (1)—(2) § 1 и множеством M . Теорема 2 п. 2 позволяет изучить дискретный спектр задачи (1)—(2) § 1. Имеет место

Лемма 1. Для того, чтобы число $S_0 = \lambda_0^2$ с $\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$ было собственным значением граничной задачи (1)—(2) § 1, необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение

$$f(r) = - \int_0^\infty R_0(r, t, \lambda_0) Q(t) f(t) dt \quad (1)$$

имело ненулевое решение из $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы очевидна. Докажем достаточность. Пусть $f(t) \neq 0$ удовлетворяет уравнению (1). лежит в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$ и $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Тогда $Q(t)f(t)$ лежит в $L_2(0, \infty; l_2)$ и поскольку $R_0(r, t, \lambda)$ —ядро резольвенты самосопряженной граничной задачи (3)—(2) § 1, то из (1) следует, что $f(t) \in L_2(0, \infty; l_2)$. Применив к тождеству (1) оператор $-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r^2} T - \lambda_0 I$, получим, что $f(t)$ удовлетворяет уравнению (1) § 1. С другой стороны, очевидно, что $f(0) = 0$, т. е. $f(t)$ —собственная вектор-функция граничной задачи. Лемма доказана.

Из работы Като [13] следует, что граничная задача (1)—(2) § 1 не имеет собственных значений на вещественной оси λ , быть может, кроме нуля. Точки из M , лежащие на вещественной оси λ , называются спектральными особенностями граничной задачи (1)—(2) § 1. Из теоремы 2 п. 2 следует, что имеется лишь конечное число спектральных особенностей. В дальнейшем, до § 5, мы предполагаем, что $\lambda = 0$ не является ни собственным значением, ни спектральной особенностью граничной задачи (1)—(2) § 1. Таким образом приходим к следующему результату.

Теорема 2. Граничная задача (1)—(2) § 1 при условиях а) и б) имеет лишь конечное число собственных значений $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$ с $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \dots, \operatorname{Im} \lambda_k > 0$ конечное число спектральных особенностей $\mu_1, \dots, \mu_p$.

§ 3. О резольвенте граничной задачи (1)—(2) § 1

1. Существование ядра $R(r, t, \lambda)$ резольвенты. Нетрудно доказать, что ядро $R(r, t, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(r, t, \lambda) = R_0(r, t, \lambda) - \int_0^\infty R_0(r, \xi, \lambda) Q(\xi) R(\xi, t, \lambda) d\xi. \quad (1)$$

Из оценок (6) п. 1 следует, что при каждом t из $[0, \infty)$ каждый столбец целой оператор-функции $R_0(r, t, \lambda)$ принадлежит $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2)$ [$L_2(0, \infty; l_2)$], если только $\operatorname{Im} \lambda > -\frac{\varepsilon}{2}$ [$\operatorname{Im} \lambda > 0$]. Поэтому мы можем

рассмотреть уравнение (1) в $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2) [L_2(0, \infty; l_2)]$. Тогда оно имеет решение из $L_2(0, \infty; \varepsilon, l_2) [L_2(0, \infty; l_2)]$ везде в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\frac{\varepsilon}{2} [\text{Im } \lambda > 0]$, за исключением множества $M[\lambda_1, \dots, \lambda_k]$. В уравнении (1) свободный член и ядро $R_0(r, t, \lambda) Q(t)$ являются голоморфными функциями от λ и потому его решение $R(r, t, \lambda)$ также будет голоморфной функцией от λ в области $\text{Im } \lambda > -\frac{\varepsilon}{2}$, за исключением точек

из M , где имеются полюсы конечного порядка. Пусть в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ядро $R(r, t, \lambda)$ имеет полюсы порядка $m_1, \dots, m_k$ а в точках $\mu_1, \dots, \mu_p$ — порядка $n_1, \dots, n_p$.

В окрестности точки $s = \lambda_j^2$ имеет место разложение

$$R(r, t, \sqrt{s}) = \sum_{q=1}^{m_j} \frac{\alpha_{q,j}(r, t)}{(s - \lambda_j^2)^q} + R_j(r, t, \sqrt{s}), \quad (2)$$

где оператор-функция $R_j(r, t, \sqrt{s})$ голоморфна в точке λ_j^2 . Заметим, что

$$\sum_{q=1}^{m_j} \frac{\alpha_{q,j}(r, t)}{(s - \lambda_j^2)^q} = B_j(r, t, \lambda) \quad (3)$$

называется главной частью резольвенты в окрестности собственного числа λ_j^2 . Хорошо известен [20] метод определения главной части резольвенты в окрестности собственных значений через собственные и присоединенные элементы оператора. Поэтому для данного случая мы не приводим соответствующих формул.

Теорема 1. Ядро резольвенты граничной задачи (1)–(2) § 1 является аналитической оператор-функцией в области $D_\varepsilon = \{\lambda; \text{Im } \lambda > -\frac{\varepsilon}{2}\}$, за исключением точек множества M и

$$R(r, t, \lambda) = \sum_{j=1}^k B_j(r, t, \lambda) + B(r, t, \lambda), \quad (4)$$

где $B(r, t, \lambda)$ — мероморфная оператор-функция в области D_ε и голоморфная в верхней полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$. Кроме того,

$$\int_0^\infty \|R(r, t, \lambda)\|_{l_2}^2 dr < \infty \quad (5)$$

при $\text{Im } \lambda > 0$ и евклидова норма

$$\|R(r, t, \lambda)\|_{l_2} \rightarrow 0 \quad (6)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости равномерно по переменным r и t из $[0, \infty)$.

В доказательстве нуждается только последнее утверждение теоремы. Но оно следует из того факта, что уравнение (1) для больших λ из верхней полуплоскости решается методом последовательных приближений, а евклидова норма $\|R_0(r, t, \lambda)\|_{l_2} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty, \text{Im } \lambda \geq 0$, равномерно по переменным r и t из $[0, \infty)$.

Определение. Интеграл

$$D_j(r, t, \lambda) \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s-\lambda_j^2|=\delta} \frac{R(r, t, s)}{s^2 - \lambda^2} 2s ds \quad (7)$$

называется главной частью ядра $R(r, t, \lambda)$ резольвенты граничной задачи (1)–(2) § 1 в окрестности спектральной особенности λ_j . В слу-

чае оператора Шредингера $D_j(r, t, \lambda)$ явно выражается через главные части решения з. т. р. уравнения (1) § 1 в окрестности спектральной особенности (§ 5).

2. Интегральное представление ядра резольвенты. Введем обозначения. Так же, как и раньше, пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ обозначают те точки из верхней полуплоскости, в которых однородное уравнение (2) из п. 2, § 2 имеет отличное от нуля решение, а $\mu_1, \dots, \mu_p$ — подобные точки на вещественной оси. Следовательно, $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$ обозначают собственные значения, а $\mu_1, \dots, \mu_p$ — спектральные особенности граничной задачи (1)–(2) § 1.

Пусть δ — фиксированное положительное число меньше $\varepsilon/4$ и $\text{Im } \lambda_1, \dots, \text{Im } \lambda_k$. Среди чисел $\mu_1, \dots, \mu_p$ могут быть симметрические относительно нуля. Пусть нумерация проведена так, что

$$\mu_s < 0, s = 1, \dots, p_1 \text{ и } \mu_s > 0, s = p_1 + 1, \dots, p, \text{ и}$$

$$\mu_1 = -\mu_p, \dots, \mu_{p_2} = \mu_{p-p_2+1}, p_2 \leq p_1.$$

Обозначим через Γ_1 (Γ_2) контур, образованный подотрезками положительной (отрицательной) действительной полуоси и полуокружностями в верхней полуплоскости радиуса δ с центрами в точках $\mu_{p_1+1}, \dots, \mu_p$ ($\mu_1, \dots, \mu_{p_1}$). Пусть Γ — контур, образованный подотрезками полуоси $\lambda \geq 0$ и полуокружностями радиуса δ с центрами в точках $\mu_{p_1+1}, \dots, \mu_p$ в верхней полуплоскости и в точках $-\mu_{p_2+1}, \dots, -\mu_{p_1}$ — в нижней. Далее пусть Γ_3 — контур, образованный подотрезками полуоси $\lambda \leq 0$ и полуокружностями радиуса δ , с центрами в точках $\mu_1, \dots, \mu_{p_2}$ в нижней полуплоскости и в точках $\mu_{p_2+1}, \dots, \mu_{p_1}$ — в верхней.

Теорема. Если $\text{Im } \lambda > 0$ и $\lambda \neq \lambda_s, s = 1, \dots, k$ то для ядра $R(r, t, \lambda)$ резольвенты граничной задачи (1)–(2) § 1 имеет место интегральное представление:

$$R(r, t, \lambda) = \sum_{j=1}^k B_j(r, t, \lambda) + \sum_{j=1}^{p_1} D_j(r, t, \lambda) + \int_{\Gamma} \frac{u(r_1 - s) v(t, s)}{s^2 - \lambda^2} s^2 ds, \quad (1)$$

где $v(t, s)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t, s) = u_0(t_1 s) - \int_0^\infty v(\xi, s) Q(\xi) R_0(\xi, t, s) d\xi,$$

а последний интеграл в (1) сходится в смысле операторной нормы в l_2 равномерно относительно переменных r и t из $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем точку λ с $\text{Im } \lambda > 0$, отличную от $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Тогда

$$R(r, t, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s-\lambda|^2=\delta} \frac{2s}{s^2 - \lambda^2} R(r, t, s) ds. \quad (2)$$

Пусть Γ_N — полуокружность в верхней полуплоскости с радиусом N и с центром в нуле. Из теоремы 1 п. 1 вытекает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \oint_{\Gamma_N} \frac{2s}{s^2 - \lambda^2} R(r, t, s) ds = 0 \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_N} \frac{2s}{s^2 - \lambda^2} R(r, t, s) ds = - \int_{\Gamma_1 + \Gamma} \frac{R(r, t, s)}{s^2 - \lambda^2} 2s ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^n \oint_{|s-\lambda_j|=\delta} \frac{R(r, t, s)}{s^2 - \lambda^2} 2s ds + \sum_{j=1}^{p_2} \oint_{|s-\mu_j|=\delta} \frac{R(r, t, s)}{s^2 - \lambda^2} 2s ds + \\ + 2\pi i R(r, t, \lambda) = (-I_1 + I_2 + I_3 + R_3(r, t, \lambda)) 2\pi i. \quad (4)$$

Здесь введены очевидные обозначения:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{2s}{s^2 - \lambda^2} R(r, t, s) ds - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{(-\Gamma_3)} \frac{2s}{s^2 - \lambda^2} R(r, t, -s) ds, \quad (5)$$

где $(-\Gamma_3)$ — контур, симметричный контуру Γ_2 относительно нуля. Из наших обозначений вытекает, что внутри окружностей

$$\Gamma(\mu_j, \delta) = \{\lambda; |\lambda - \mu_j| = \delta\}, j = p_2 + 1, \dots, p - p_2,$$

нет симметрических относительно нуля точек. Следовательно, окружности

$\Gamma(\mu_j, \delta)$, $i = p_1 + 1, \dots, p - p_2$ и $\Gamma(-\mu_j, \delta)$, $j = p_2 + 1, \dots, p_1$, не имеют общих точек, и поэтому $R(r, t, s)$ является голоморфной оператор-функцией внутри окружностей $\Gamma(-\mu_j, \delta)$, $j = p_2 + 1, \dots, p_1$, а $R(r, t, -s)$ — внутри окружностей $\Gamma(\mu_j, \delta)$, $j = p_1 + 1, \dots, p - p_2 - 1$. Поэтому в формуле (5) контуры Γ_1 и $(-\Gamma_3)$ могут быть деформированы в контур Γ , без изменения интегралов по ним. В результате

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{s}{s^2 - \lambda^2} \{R(r, t, s) - R(r, t, -s)\}. \quad (6)$$

В следующем пункте мы докажем, что

$$R(r, t, s) - R(r, t, -s) = \pi i s u(r_1 - s) v(t, s). \quad (7)$$

Поэтому, принимая во внимание (6), из формул (3), (7) п. 1 и из тождества (4) непосредственно получаем интегральное представление ядра резольвенты граничной задачи (1) — (2) § 1. Равномерная сходимость интеграла в формуле (1) по операторной норме в пространстве L_2 очевидным образом следует из асимптотических формул (3) п. 2, § 2 для решений з. т. р.

Замечание. Формула, аналогичная (7) для самосопряженного оператора Шредингера, впервые получена в работе А. Я. Повзнера [14].

3. Вывод формулы (7) п. 2 методом предельного перехода от конечной системы к бесконечной. Так же, как и раньше, пусть E_n — оператор проектирования пространства L_2 на n -мерное подпространство вида $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

Рассмотрим граничную задачу:

$$-y'' + \frac{1}{r^2} T y + E_n Q(r) E_n y = \lambda^2 y, \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \quad (2)$$

в $L_2(0, \infty; L_2)$. Обозначим через $u_n(r, \lambda)$ и $R_n(r, t, \lambda)$ решение з. т. р. и ядро резольвенты для граничной задачи (1) — (2). Тогда

$$u_n(r, \lambda) = u_0(r, \lambda) - \int_0^\infty R_0(r, t, \lambda) E_n Q(t) E_n u_n(t, \lambda) dt, \quad (3)$$

$$R_n(r, t, \lambda) = R_0(r, t, \lambda) - \int_0^\infty R_0(r, \xi, \lambda) E_n Q(\xi) E_n R_n(\xi, t, \lambda) d\xi. \quad (4)$$

Ядро $R_n(r, t, s) - R_n(r, t, -s)$ является регулярным в нуле решением уравнения (1) при каждом $t \neq r$. Поскольку уравнение (1) распадается на конечную систему вида

$$-y_n' + \frac{1}{r^2} E_n T y_n + E_n Q(r) E_n y_n = \lambda^2 y_n \quad (5)$$

и на бесконечные системы уравнений Бесселя, то

$$R_n(r, t, s) - R_n(r, t, -s) = \pi i s u_n(r, -s) v_n(t, s), \quad (6)$$

где $v_n(t, s)$ — операторнозначная функция. Нетрудно проверить, что

$$R_n(r, t, s) - R_0(r, t, s) - \int_0^\infty R_n(r, \xi, s) E_n Q(\xi) E_n R_0(\xi, t, s) d\xi \quad (7)$$

и

$$u_n(r, s) = u_0(r, s) - \int_0^\infty R_n(r, \xi, s) E_n Q(\xi) E_n u_0(\xi, s) d\xi. \quad (8)$$

Поэтому

$$R_n(r, t, s) - R_n(r, t, -s) = R_0(r, t, s) - R_0(r, t, -s) - \\ - \int_0^\infty \{R_n(r, \xi, s) - R_n(r, \xi, -s)\} E_n Q(\xi) E_n R_0(\xi, t, s) d\xi - \\ - \int_0^\infty R_n(r, \xi, -s) E_n Q(\xi) E_n \{R_0(\xi, t, s) - R_0(\xi, t, -s)\} d\xi \quad (9)$$

и поскольку

$$R_0(r, t, s) - R_0(r, t, -s) = \pi i s u_0(r, -s) u_0(t, s),$$

то из (9) и (6) имеем

$$u_n(r, -s) v_n(t, s) = \pi i s u_0(r, -s) u_0(t, s) - \\ - \pi i s u_n(r, -s) \int_0^\infty v_n(\xi, s) E_n Q(\xi) E_n R_0(\xi, t, s) d\xi - \\ - \pi i s \{u_n(r, -s) - u_0(r, -s)\} u_0(t, s). \quad (10)$$

Отсюда вытекает, что $v_n(t, s)$ является решением интегрального уравнения

$$v_n(t, s) = u_0(i, s) - \int_0^\infty u_0(\xi, s) E_n Q(\xi) E_n R_n(\xi, t, s) d\xi.$$

Нетрудно проверить, что

$$v_n(t, s) = u_0(t, s) - \int_0^\infty u_0(\xi, s) E_n Q(\xi) E_n R_n(\xi, t, s) d\xi.$$

Это показывает следующее:

$$R_n(r, t, s) - R_n(r, t, -s) = \pi i s u_n(r, -s) v_n(t, s).$$

Выше было доказано, что ядро $R_0(r, t, s) E_n Q(t) E_n$ порождает вполне непрерывный оператор в пространстве $L_2(0, \infty; \varepsilon, L_2)$ и при $n \rightarrow \infty$ сходится к оператору в смысле операторной нормы в нем, порожденному ядром $R_0(r, t, s) Q(t)$. Поэтому для числа s с $|\operatorname{Im} s| < \varepsilon/2$ и отличному от $\mu_1, \dots, \mu_p$

$$u_n(r, -s) \rightarrow u(r, s), \\ v_n(r, s) \rightarrow R(r, s), \\ R_n(r, t, s) \rightarrow R(r, s, t).$$

Следовательно, в формуле (6) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ и получить требуемую формулу (7) п. 2.

4. **Различные частные случаи.** Ниже приводятся условия на $Q(x)$, при выполнении которых интегральное представление ядра $R(r, t, \lambda)$ принимает более простой вид.

Теорема. Если при каждом r из $(0, \infty)$ оператор $\frac{1}{2i} \{Q(r) - Q^*(r)\} = \text{Im } Q(r)$ положительно определен, то все собственные значения граничной задачи (1)–(2) § 1 лежат в области $\{\lambda; \text{Im } \lambda > 0, \text{Re } \lambda \geq 0\}$, а на отрицательной оси λ нет спектральных особенностей и поэтому и интегральной формуле (1) п. 3 для ядра резольвенты отсутствует второе слагаемое.

Доказательство. Пусть $s_0 = \lambda_0^2$ с $\text{Im } \lambda_0 > 0$ является собственным значением граничной задачи (1)–(2) § 1 с соответствующей собственной вектор-функцией $u(r)$. Тогда

$$-u'' + \frac{1}{r^2} T u(r) + Q(r) u = s_0 u.$$

Умножим это тождество скалярно на $u(r)$ и проинтегрируем по r по области $(0, \infty)$. В результате получим

$$\int_0^\infty (u', u')_{l_2} dr + \int_0^\infty \frac{1}{r^2} (T u, u)_{l_2} dr + \int_0^\infty (Q u, u)_{l_2} dr = s_0 \int_0^\infty (u, u)_{l_2} dr.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty (\text{Im } Q(r) u, u)_{l_2} dr = \text{Im } s_0 \int_0^\infty (u, u) dr$$

и поскольку $\text{Im } Q(r) \geq 0$, то $\text{Im } s_0 \geq 0$. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Очевидно, что если $Q(r)$ — самосопряженный оператор при каждом r из $(0, \infty)$, то граничная задача (1)–(2) § 1 самосопряжена и не имеет никаких спектральных особенностей. В этом случае разложение (1) п. 3 принимает, очевидно, более простой вид.

Замечание. Пусть $\lambda = 0$ является полюсом ядра резольвенты. В этом случае без больших изменений в приведенных выше рассуждениях доказывается, что для ядра имеет место разложение типа (1) п. 1, в котором появляется еще одно вспомогательное слагаемое, равное главной части резольвенты в нуле, а контур Γ заменяется новым, который получается из Γ заменой отрезка $(0, \delta)$ на полукруг $|s| = \delta$, $\text{Im } s \geq 0$.

§. 4. Разложение по собственным функциям несамосопряженного оператора Шредингера

Рассмотрим определение вида разложения по собственным функциям посредством решения задачи теории рассеяния несамосопряженного оператора Шредингера в нечетномерных пространствах с экспоненциально убывающим комплекснозначным потенциалом. Для простоты ограничимся изложением результатов для трехмерного оператора Шредингера. Как увидим в дальнейшем, общий случай отличается только некоторыми осложнениями технического характера.

Итак, рассмотрим оператор L Шредингера:

$$L u = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u + q u = \lambda^2 u \quad (1)$$

в пространстве $L_2(E_3)$. Пусть комплекснозначная функция $q(x_1, x_2, x_3) = q(x)$ определена в E_3 и удовлетворяет условию

$$|q(x)| \leq C \exp(-\varepsilon |x|). \quad (2)$$

Здесь $|x| = r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, C и ε — постоянные положительные числа.

Обозначим через $R(x, y, \lambda)$ ядро резольвенты оператора L . Тогда, как известно,

$$R(x, y, \lambda) = \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} - \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{e^{i\lambda|x-z|}}{|x-z|} q(z) R(z, y, \lambda) dz. \quad (3)$$

Обозначим через $L_2(\varepsilon, E_3)$ пространство измеримых функций, для которых

$$\int_{E_3} e^{-\varepsilon|x|} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (4)$$

При любом единичном векторе ω и при вещественных значениях λ решение из $L_2(\varepsilon, E_3)$ интегрального уравнения

$$u(x, \lambda, \omega) = e^{i\lambda(x, \omega)} - \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} q(y) u(y, \lambda, \omega) dy \quad (5)$$

удовлетворяет условиям:

$$r v(x, \lambda, \omega) = 0(1), \quad (6)$$

$$r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i\lambda v \right) = 0(1), \quad (7)$$

где $v(x, \lambda, \omega) = u(x, \lambda, \omega) - e^{i\lambda(x, \omega)}$ и называется решением задачи теории рассеяния уравнения (1).

Положим

$$P_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \sin m\theta P_l^m(\cos \varphi) C_l^m, & m \geq 1, \\ \cos m\theta P_l^{-m}(\cos \varphi) C_l^{-m}, & m \leq -1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} P_l^0(\cos \varphi) C_l^0, & m = 0, \end{cases}$$

где

$$C_l^m = \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}},$$

а $P_l^m(\cos \varphi)$ — сферические функции Лежандра.

Известно, что система функций $\{P_l^m(\theta, \varphi)\}$ образует полную ортонормированную систему по весу $\sin \varphi$ в $L_2(W)$, где W — единичная сфера в E_3 . Сферические координаты векторов $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$, ω и $\bar{y} = \frac{y}{|y|}$ обозначим через (θ, φ) , (θ_1, φ_1) и (θ_2, φ_2) . Положим $r = |x|$, $t = |y|$, $s = |\tilde{z}|$.

Как известно [18],

$$\begin{aligned} \exp[i\lambda(x, \omega)] &= \\ &= \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{\lambda r}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l I_{l+1/2} + \frac{1}{2} (\lambda r) \sum_{m=-l}^l P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta_1, \varphi_1), \\ &\frac{\exp(i\lambda|x-y|)}{|x-y|} = \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \frac{2\pi^2 i}{\sqrt{r t}} \sum_{l=0}^{\infty} I_{l+1/2}(\lambda r) H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda t) \sum_{m=-l}^l P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta_2, \varphi_2) \quad (9)$$

при $r < t$. Разложим функцию $x(x, \lambda, \omega)$ и ядро $R(x, y, \lambda)$ в двойные ряды по сферическим функциям:

$$u(x, y, \omega) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} u_{l_1 m_1}^{l, m}(r, \lambda) P_l^m(\theta, \varphi) P_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1), \quad (10)$$

$$R(x, y, \lambda) = \frac{(2\pi)^{1/2}}{rt} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} R_{l_1 m_1}^{l, m}(r, t, \lambda) P_l^m(\theta, \varphi) P_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1). \quad (11)$$

Введем очевидные обозначения:

$$u(r, \lambda) = \{u_{l, m}^{l, m}(r, \lambda)\} \\ u_0(r, \lambda) = \left\{ i_l \sqrt{\frac{r}{\lambda}} I_{l+1/2}(\lambda r) \delta_{l, m}^{l, m} \right\}, \\ R_0(r, t, \lambda) = \{A_{l+1/2}(r, t, \lambda) \delta_{l, m}^{l, m}\},$$

где

$$A_{l+1/2}(r, t, \lambda) = \frac{\pi i}{2} \begin{cases} \sqrt{r} I_{l+1/2}(\lambda t) H'_{l+1/2}(\lambda r) & \text{при } r \geq t, \\ \sqrt{rt} I_{l+1/2}(\lambda r) H'_{l+1/2}(\lambda t) & \text{при } r \leq t \end{cases}$$

и, наконец,

$$Q(r) = \{q_{l, m}^{l, m}(r)\}, \\ q_{l, m}^{l, m}(r) = \int_{\Omega} q(x) P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta, \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi. \quad (12)$$

Используя эти обозначения и разложения (8), (9), (10) и (11), из уравнений (3) и (4) непосредственно получаем, что $u(r, \lambda)$ и $R(r, t, \lambda)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$u(r, \lambda) = u_0(r, \lambda) - \int_0^{\infty} R_0(r, t, \lambda) Q(t) u(t, \lambda) dt, \quad (13)$$

$$R(r, t, \lambda) = R_0(r, t, \lambda) - \int_0^{\infty} R_0(r, s, \lambda) Q(s) R(s, t, \lambda) dt, \quad (14)$$

т. е. являются соответственно решениями задачи теории рассеяния и ядром резольвенты краевой задачи типа (1) — (2) § 1, п. 1, в которой T — диагональная матрица с элементами вида $l(l+1)$, при этом каждый такой элемент на диагонали повторяется $2l+1$ раз.

Таким образом, если уравнение задачи теории рассеяния и ядро резольвенты оператора Шредингера существуют, то существуют также решения интегральных уравнений (13) и (14). Очевидно, что имеет место и обратное утверждение; при этом, если $u(r, \lambda)$ и $R(r, t, \lambda)$ являются решениями уравнений (13) и (14), то $u(x, \lambda, \omega)$ и $R(x, y, \lambda)$ восстанавливаются через них с помощью формул (10) и (11). Поэтому приходим к следующим предложениям:

1. При достаточно больших значениях λ из полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\frac{\varepsilon}{1}$ уравнение з. т. р. решается методом последовательных приближений. Для $\lambda \in M$ имеет место оценка

$$|u(x, \lambda, \omega)| \leq C \exp(|\text{Im } \lambda| r).$$

2. Решение уравнения з. т. р. является аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\frac{\varepsilon}{2}$, за исключением, быть может, множества M счетного числа точек с предельными точками на прямой $\text{Im } \lambda = -\varepsilon/2$.

3. Ядро резольвенты оператора L является аналитической функцией λ в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\varepsilon/2$, за исключением множества M .

4. В верхней полуплоскости $R(x, y, \lambda)$ имеет лишь конечное число полюсов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, т. е. оператор L имеет конечное число собственных значений $\lambda_1^2, \dots, \lambda_k^2$.

5. На вещественной оси λ ядро $R(x, y, \lambda)$ имеет конечное число полюсов $\mu_1, \dots, \mu_p$, которые не являются собственными значениями и называются спектральными особенностями оператора L .

6. Если $\text{Im } \lambda > 0$ и $\lambda \neq \lambda_s$, $s = 1, \dots, k$, то $R(x, y, \lambda)$ является ядром типа Карлемана и для финитной достаточно гладкой функции $f(x)$ из $L_2(E_3)$ имеет место

$$\int_{E_3} R(x, y, \lambda) f(y) dy = \sum_{j=1}^k \int_{E_j} B_j(x, y, \lambda) f(y) dy + \\ + \int_{E_3} B_0(x, y, \lambda) f(y) dy + \sum_{j=1}^p \int_{E_j} D_j(x, y, \lambda) f(y) dy + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Gamma} \int_{\Omega} \frac{u(x, -s, \omega) F(s, \omega)}{s^2 - \lambda^2} s^2 ds, \quad (15)$$

где

$$E(s, \omega) = \int u(y, s, \omega) f(y) dy. \quad (16)$$

Здесь $B_j(x, y, \lambda)$, $B_0(x, y, \lambda)$, $D_j(x, y, \lambda)$ — главные части резольвенты в окрестности точек λ_j , $\lambda = 0$ и μ_j , соответственно. Последний интеграл в формуле (15) сходится равномерное по x .

Заметим, что предложения о конечности числа собственных значений и спектральных особенностей, а также о карлемановости ядра $R(x, y, \lambda)$ принадлежат Р. М. Мартиросу [12].

Применяя к формуле (15) оператор $\Gamma - \lambda^2$, можно получить разложение гладкой финитной функции $f(x)$ из $L_2(E_3)$ по собственным функциям оператора L . Далее, с помощью различных предельных переходов можно расширить класс функций, для которых имеет место разложение вида (15). Например, условия финитности функций $f(x)$ можно заменить тем, что $e^{\delta|x} f(x)$ лежит в $L_D(E_3)$ при некотором $\delta > 0$ и $f(x)$ — гладкая функция. Действительно, в этом случае $F(s, \omega)$ будет аналитической функцией в полосе $|\text{Im } \lambda| < \varepsilon/2$.

Этого достаточно, чтобы формула (15) имела смысл. Далее, если $f(x)$ ортогональна к главной части ядра резольвенты в окрестности спектральных особенностей, то очевидно, что $u(x, -\lambda, \omega) F(\lambda, \omega)$ является аналитической функцией в этих точках. Поэтому контур Γ можно деформировать к полуоси $s \geq 0$. В этом случае разложение сходится в смысле $L_2(E_3)$ и получается один класс функций, для которых имеет место разложение в смысле сходимости в $L_2(E_3)$. Этот класс всюду плотен в $L_2(E_3)$, поскольку коэффициенты при отрицательных степенях в разложении Лорана в окрестности спектральных особенностей не лежат в $L_2(E_3)$, это является следствием того, что на вещественной оси λ , кроме, быть может, нуля, оператор Шредингера не имеет собственных значений.

§ 5. Главная часть ядра резольвенты оператора Шредингера в окрестности спектральных особенностей

1. Решение з. т. р. в окрестности спектральных особенностей. Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ полюсы функции $u(x, \lambda, \omega)$ на действительной оси λ . Уравнение (1) § 6 не имеет собственных значений, кроме, быть может, нуля. Поэтому точки $\mu_1, \dots, \mu_p$ не могут быть собственными значениями оператора L . Следуя В. Э. Лянце [2], мы их называли спектральными особенностями оператора L .

Функция $u(x, \lambda, \omega)$ разлагается в ряд Лорана в окрестности точки $\lambda = \mu_j$:

$$u(x; \lambda, \omega) = \sum_{\gamma=1}^{n_j} \frac{v_{n_j-\gamma}(x, \omega)}{(\lambda - \mu_j)^\gamma} + v_j(x; \lambda, \omega), \quad (1)$$

где $v_j(x; \lambda, \omega)$ — голоморфная функция в точке $\lambda = \mu_j$.

В этом разложении функции $v_{\gamma,j}(x, \omega)$, $\gamma = 0, 1, \dots, n_j - 1$, вообще говоря, зависят от ω . Однако при изменении ω они описывают только конечномерное пространство, так как $v_{0,j}(x, \omega)$ удовлетворяет однородному уравнению (4) п. 2, а его собственные значения конечнократно. Для простоты предположим, что эти функции не зависят от ω , в противном случае мы можем в пространстве линейных комбинаций функций $v_{0,j}(x, \omega), \dots, v_{n_j-1,j}(x, \omega)$ выбрать несколько цепочек линейно независимых систем (определенным образом) и дальнейшие рассуждения проводить для каждой цепочки в отдельности. Итак, пусть функции $v_{0,j}, \dots, v_{n_j-1,j}$ не зависят от ω . Систему функций $v_{0,j}(x), \dots, v_{n_j-1,j}(x)$ назовем цепочкой из «собственных и присоединенных функций», отвечающей спектральной особенности μ_j .

2. Интегральные и дифференциальные уравнения для $v_{\gamma,j}(x)$. Линейная независимость $v_{\gamma,j}(x)$. Имеет место

Лемма. Функции $v_{0,j}(x), \dots, v_{n_j-1,j}(x)$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$v_{0,j}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\exp(i\mu_j|x-1|)}{|x-y|} q(y) v_{0,j}(y) dy, \quad (1_0)$$

$$v_{\gamma,j}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{\exp(i\mu_j|x-y|)}{|x-y|} \left(\sum_{q=0}^{\gamma} v_{\gamma-q,j}(y) \frac{i^q}{q!} |x-y|^q \right) \times \\ \times q_j^*(y) dy, \quad \gamma = 1, \dots, n_j - 1. \quad (1_\gamma)$$

Доказательство. Функция $u(x; \lambda, \omega)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4) п. 1, § 1. Подставим в это уравнение вместо $u(x; \lambda, \omega)$ ее выражение из (1) п. 2 и воспользуемся тем, что

$$\exp(i\lambda|x-y|) = \exp(i\mu_j|x-y|) \sum_{q=0}^{\infty} \frac{[i(\lambda - \mu_j)]^q}{q!} |x-y|^q.$$

В результате, сравнивая коэффициенты при одинаковых отрицательных степенях $\lambda - \mu_j$, получаем требуемые соотношения $(1_0) \dots (1_{n_j-1})$.

Лемма 2. Функции $v_{0,j}(x), \dots, v_{n_j-1,j}(x)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$-\Delta v_{0,j} + q(x) v_{0,j} = \lambda_j^2 v_{0,j}, \quad (2_0)$$

$$-\Delta v_{1,j} + q(x) v_{1,j} = \lambda_j^2 v_{1,j} + 2\lambda_j v_{0,j}, \quad (2_1)$$

$$-\Delta v_{\gamma,j} + q(x) v_{\gamma,j} = \lambda_j^2 v_{\gamma,j} + 2\lambda_j v_{\gamma-1,j} + 2v_{\gamma-2,j}, \quad \gamma = 2, \dots, n_j - 1. \quad (2_\gamma)$$

Доказательство непосредственно вытекает из того, что функция $u(x, \lambda, \omega)$ удовлетворяет уравнению (1) § 6.

Лемма 3. Функция $v_{0,j}(x), \dots, v_{n_j-1,j}(x)$ линейно независимы. Доказательство повторяет стандартные рассуждения (см., например, [1]).

Лемма 4. Функция $v_{\gamma,j}(x)$ растет не быстрее, чем $|x|^{\gamma-1}$, т. е.

$$|v_{0,j}(x)| \leq C |x|^{\gamma-1}.$$

Доказательство. Из разложения (1) п. 2 видно, что

$$v_{\gamma,j}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \mu_j| = \varepsilon_j} (\lambda - \mu_j)^{n_j-\gamma-1} u(x; \lambda, \omega) d\lambda,$$

где ε_j — такое маленькое число, что в круге $|\lambda - \mu_j| \leq \varepsilon_j$ нет других особенностей функции $u(x; \lambda, \omega)$. Тогда из оценки (15) § 6 для $u(x; \lambda, \omega)$ вытекает, что

$$|v_{\gamma,j}(x)| \leq C \varepsilon_j^{n_j-\gamma} \exp(\varepsilon_j |x|).$$

Поэтому лемма непосредственно следует из интегральных уравнений $(1_0) \dots (1_{n_j-1})$.

3. Регуляризация интегралов функций $v_{\gamma_1,j}(x), v_{\gamma_2,j}(x)$. Интегралы

$$\int_{E_3} v_{\gamma_1,j}(x) v_{\gamma_2,j}(x) dx, \quad \gamma_1, \gamma_2 = 0, 1, \dots, n_j - 1, \quad (1)$$

не существуют. Однако их можно регуляризовать. Очевидно, что при каждом $\delta > 0$ функция

$$v_{\gamma,j}(x, \delta) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{E_3} \frac{\exp[(i\mu_j - \delta)|x-y|]}{|x-y|} q(y) dy \times \\ \times \left(\sum_{q=0}^{\gamma} v_{\gamma-q,j}(y) \frac{i^q}{q!} |x-y|^q \right) dy \quad (2)$$

лежит в $L_2(E_3)$ и при $\delta \rightarrow 0$ равномерно стремится к $v_{\gamma,j}(x)$ в любой конечной области изменения x .

Определение. Если предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{E_3} v_{\gamma_1,j}(x, \delta) v_{\gamma_2,j}(x, \delta) dx = d_{\gamma_1, \gamma_2}^{(j)} \quad (3)$$

существует, то он называется регуляризованным интегралом (р. и.) для $v_{\gamma_1,j}(x) v_{\gamma_2,j}(x)$.

Лемма 1. Регуляризованный интеграл для функций $v_{\gamma_1,j}(x), v_{\gamma_2,j}(x)$ существует.

Доказательство. Из вида (2) функций $v_{\gamma,j}(x, \delta)$ следует, что

$$\int_{E_3} v_{\gamma_1,j}(x, \delta) v_{\gamma_2,j}(x, \delta) dx = \iint_{E_3} \left(\sum_{p_1=0}^{\gamma_1} \sum_{p_2=0}^{\gamma_2} \frac{1}{p_1! p_2!} u_{\gamma_1-p_1,j}(y) u_{\gamma_2-p_2,j}(z) \times \right. \\ \left. \times R_{p_1, p_2}^{(j)}(y; z, \delta) q(y) q(z) dy dz \right), \quad (4)$$

где

$$R_{p_1, p_2}^{(j)}(y; z, \delta) = \\ = \frac{i^{p_1+p_2}}{(4\pi)^2} \int_{E_3} \frac{\exp[i(\mu_j + i\delta)|x-y|]}{|x-y|} \frac{\exp[i(\mu_j + i\delta)|x-z|]}{|x-z|} \times \\ \times |x-y|^{p_1} |x-z|^{p_2} dx. \quad (5)$$

Очевидно, при любом $\delta > 0$ этот интеграл существует. Положим

$$A(y; z; \lambda, \mu) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{E_3} \frac{\exp[i\lambda|x-z|] \exp[i\mu|x-y|]}{|x-z||x-y|} dx, \quad (6)$$

когда $\text{Im } \lambda > 0$ и $\text{Im } \mu > 0$. Так как

$$\frac{\exp(i\lambda|x-y|)}{|x-y|} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{E_3} \frac{\exp\{i(z, x-y)\}}{|\varepsilon|^2 - \lambda^2} d\varepsilon,$$

где $z = (z_1, z_2, z_3)$, то нетрудно показать, что

$$A(y; z; \lambda, \mu) = \frac{1}{8|y-z|} \{ \exp(i\lambda|y-z|) - \exp(i\mu|y-z|) \} \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2}. \quad (7)$$

Из формул (5) и (6) очевидно, что

$$R_{p_1, p_2}^{(j)}(y, z; \delta) = \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial \lambda^{p_1} \partial \mu^{p_2}} A(y, z; \lambda, \mu) \quad \lambda = \mu = \lambda_j + i\delta.$$

По формуле (7) мы имеем

$$\left| \frac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial \lambda^{p_1} \partial \mu^{p_2}} A(y, z; \lambda, \mu) \right|_{\lambda = \mu = \lambda_j + i\delta} \leq (1+c|y-z|^{p_1+p_2}) e^{-\delta|y-z|}.$$

Отсюда предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R_{p_1, p_2}^{(j)}(y, z; \delta) = R_{p_1, p_2}^{(j)}(y, z)$$

существует и имеет полиномиальный рост при больших $|x|$ и $|y|$. Поэтому из (4) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{E_2} v_{\gamma, j}(x, \delta) v_{\gamma, j}(x, \delta) dx = \\ = \iint_{E_2} \sum_{p_1=0}^{\gamma_1} \sum_{p_2=0}^{\gamma_2} \frac{1}{p_1! p_2!} v_{\gamma_1-p_1, j}(y) v_{\gamma_2-p_2, j}(y) \times \\ \times R_{p_1, p_2}^{(j)}(y, z) q(y) q(z) dy dz \end{aligned}$$

и последний интеграл существует, т. е. существует регуляризованный интеграл для функций $v_{\gamma, j}(x)$, $v_{\gamma, j}(x)$. Лемма доказана.

4. Главная часть резольвенты в окрестности ее спектральных особенностей. В точке μ_j ядро $R(x, y; \lambda)$ разлагается в ряд Лорана:

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{q=1}^{n_j} \frac{\beta_{q, j}(x, y)}{(\lambda - \mu_j)^q} + A_j(x, y; \lambda), \quad (1)$$

где $A_j(x, y; \lambda)$ — голоморфная функция в окрестности точки μ_j . Нужно определить $\beta_{q, j}(x, y)$. Эти функции выражаются через $v_{0, j}(x), \dots, v_{n_j-1, j}(x)$ из (1) п. 1. Однако эти выражения проще найти через некоторые их линейные комбинации, к определениям которых мы переходим. Положим

$$u(x; \lambda, \omega) = \sum_{k=1}^{n_j} \frac{W_{n_j-k, j}(x)}{(\lambda^2 - \mu_j^2)^k} + W_j(x; \lambda, \omega). \quad (2)$$

Так как функции

$$\frac{1}{(\lambda + \mu_j)^k}, \quad k = 1, \dots, n_j,$$

регулярны в точке $\lambda = \mu_j$, то их можно разлагать по степеням $\lambda - \mu_j$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda + \mu_j} &= \frac{1}{2\mu_j} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda - \mu_j}{2\mu_j} \right)^l (-1)^l, \\ \left(\frac{1}{\lambda + \mu_j} \right)^k &= \frac{1}{(\kappa - 1)!} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l+1) \dots (l+\kappa)}{(2\mu_j)^{\kappa}} \left(\frac{\lambda - \mu_j}{2\mu_j} \right)^l. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda^2 - \mu_j^2)^{\kappa}} &= \frac{1}{(\lambda - \mu_j)^{\kappa}} \cdot \frac{1}{(\lambda + \mu_j)^{\kappa}} = \\ &= \frac{1}{(\kappa - 1)!} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l+1) \dots (l+\kappa)}{(2\mu_j)^{l+\kappa}} (\lambda - \mu_j)^{l-\kappa}. \end{aligned}$$

Подставив эти разложения в формулу (2) и сравнивая ее с разложением (1) п. 1, находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\mu_j)^{n_j}} W_{0, j}(x) &= v_{0, j}(x), \\ \frac{-n_j}{(2\mu_j)^{n_j+1}} W_{0, j}(x) + \frac{1}{(2\mu_j)^{n_j-1}} W_{1, j}(x) &= v_{1, j}(x), \dots, \\ (-1)^{\kappa} \left\{ \frac{n_j(n_j-1) \dots (n_j-\kappa+1)}{(2\mu_j)^{n_j+\kappa}} W_{0, j}(x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n_j-1) \dots (n_j-\kappa+2)}{(2\mu_j)^{n_j+\kappa-2}} W_{1, j}(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{\kappa} \frac{1}{(2\mu_j)^{n_j-\kappa}} W_{\kappa, j}(x) \right\} = v_{\kappa, j}, \quad \kappa = 2, \dots, n_j-1. \quad (3) \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что функции $W_{0, j}(x) \dots W_{n_j-1, j}(x)$ являются линейными комбинациями функций $v_{0, j}(x), \dots, v_{n_j-1, j}(x)$; при этом матрица перехода от одной системы функций к другой обратима. Поэтому:

1) существуют регуляризованные интегралы функций

$$W_{p, j}(x), W_{p, j}(x), p_1, p_2 = 0, \dots, n_j-1;$$

2) функции $W_{0, j}(x), \dots, W_{n_j-1, j}(x)$ линейно независимы.

Непосредственная подстановка разложения (1) в дифференциальное уравнение (1) § 6 показывает, что функции $W_{0, j}(x), \dots, W_{n_j-1, j}(x)$ удовлетворяют следующим тождествам:

$$\begin{aligned} -\Delta W_{0, j} + q(x) W_{0, j} &= \mu_j^2 W_{0, j}, \\ -\Delta W_{0, j} + q(x) W_{\gamma, j} &= \mu_j^2 W_{\gamma, j} + W_{\gamma-1, j}, \\ \gamma &= 1, \dots, n_j-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 1. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \beta_{q, j}(x, y) &= \sum_{k=0}^{n_j-q} C_{k+q}^{(j)} \sum_{\gamma=0}^k W_{\gamma, j}(x) W_{k-\gamma, j}(y), \\ q &= 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $C_1^{(j)}, \dots, C_{n_j}^{(j)}$ — постоянные числа, которые определяются по ходу доказательства [см. (14), (15)].

Доказательство. В данном случае мы повторяем обычный метод (см. [1]) определения главной части в окрестности собственных значений, только вместо обычных интегралов везде берем регуляризованные. Если $\text{Im } \lambda > 0$, то $R(x; y, \lambda)$ убывает экспоненциально при $|y| \rightarrow \infty$ и при каждом фиксированном x . Поэтому интеграл

$$\int_{E_2} R(x; y, \lambda) W_{\kappa, j}(y) dy$$

существует, если только $\text{Im } \lambda > 0$. Ищем его в следующем виде:

$$\int_{E_2} R(x; y, \lambda) W_{\kappa, j}(y) dy = \alpha_0 W_{0, j}(x) + \dots + \alpha_{\kappa} W_{\kappa, j}(x) \quad (6)$$

Применяя к обеим частям формулы (6) оператор $\{-\Delta + q - \lambda^2\}$ и пользуясь формулами (4), имеем

$$W_{\kappa,j}(x) = \alpha_0(\mu_j - \lambda^2) W_{0,j}(x) + \sum_{\gamma=1}^{\kappa} \alpha_{\gamma} [(\mu_j^2 - \lambda^2) W_{\gamma,j}(x) + W_{\gamma-1,j}(x)]. \quad (7)$$

Так как функции $W_{0,j}(x), \dots, W_{\kappa,j}(x)$ линейно независимы, то из формулы (7) имеем:

$$\alpha_s(\mu_j^2 - \lambda^2) + \alpha_{s+1} = 0, \quad s = 0, \dots, \kappa - 1; \quad \alpha_{\kappa}(\mu_j^2 - \lambda^2) = 1. \quad (8)$$

Из системы уравнений (8) находим, что

$$\alpha_{\kappa-\gamma} = (-1)^{\gamma} \frac{1}{(\mu_j^2 - \lambda^2)^{\gamma+1}}, \quad \gamma = 0, 1, \dots, \kappa.$$

Подставляя эти выражения в (6), имеем

$$\int_{E_j} R(x, y, \lambda) W_{\kappa,j}(y) dy = \frac{1}{\mu_j^2 - \lambda^2} W_{\kappa,j}(x) - \frac{1}{(\mu_j^2 - \lambda^2)^2} W_{\kappa-1,j}(x) + \dots + (-1)^{\kappa} \frac{1}{(\mu_j^2 - \lambda^2)^{\kappa+1}} W_{0,j}(x). \quad (9)$$

С другой стороны, умножая обе части (1) на $W_{\kappa,j}(y)$ и беря регуляризованный интеграл, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{E_j} R(x, y, \lambda) W_{\kappa,j}(y) dy = \\ = \sum_{q=1}^{n_j} \frac{1}{(\lambda^2 - \mu_j^2)^q} \int_{(p,u)} \beta_{q,j}(x, y) W_{\kappa,j}(y) dy + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая этот результат с (9), заключаем, что

$$\int_{(p,u)} \beta_{q,j}(x, y) W_{\kappa,j}(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } q > \kappa + 1, \\ -W_{\kappa+1-q,j}(x) & \text{при } q \leq \kappa + 1. \end{cases} \quad (11)$$

Тогда в силу (5) эти соотношения переписутся в виде:

$$\sum_{p=0}^{n_j-q} C_{p+q}^{(j)} \sum_{\gamma=0}^p W_{\gamma,j}(x) \beta_{p-\gamma,\kappa}^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{при } q > \kappa + 1, \\ -W_{\kappa+1-q,j}(x) & \text{при } q \leq \kappa + 1, \end{cases} \quad (12)$$

где
$$\beta_{\gamma,\kappa}^{(j)} = \int_{(p,u)} W_{\gamma,j}(x) W_{\kappa,j}(x) dx. \quad (13)$$

Поскольку функции $W_{0,j}(x), \dots, W_{n_j-1,j}(x)$ линейно независимы то отсюда следует, что

$$\sum_{p=\gamma}^{n_j-q} C_{p+q}^{(j)} \beta_{p-\gamma,\kappa}^{(j)} = \begin{cases} \text{при } q > \kappa + 1, \\ \text{при } q \leq \kappa + 1, \gamma \neq \kappa + 1 - q, \\ \text{при } q \leq \kappa + 1, \gamma = \kappa + 1 - q. \end{cases}$$

Дальше обычными рассуждениями доказывается, что

$$C_{n_j}^{(j)} = -(\beta_{0,n_j-1}^{(j)})^{-1}, \quad C_{n_j-1} = (-\beta_{0,n_j-1}^{(j)})^{-2} \beta_{1,n_j-1}^{(j)}, \dots \quad (14)$$

$$C_{n_j-\kappa+1}^{(j)} = (-\beta_{0,n_j-1}^{(j)})^{-\kappa} \begin{vmatrix} \beta_{1,n_j-1}^{(j)} & \beta_{0,n_j-1}^{(j)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_{2,n_j-1}^{(j)} & \beta_{1,n_j-1}^{(j)} & \beta_{0,n_j-1}^{(j)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta_{\kappa-2,n_j-1}^{(j)} & \beta_{\kappa-3,n_j-1}^{(j)} & \dots & \beta_{1,n_j-1}^{(j)} & \beta_{0,n_j-1}^{(j)} \\ \beta_{\kappa-1,n_j-1}^{(j)} & \beta_{\kappa-2,n_j-1}^{(j)} & \dots & \beta_{2,n_j-1}^{(j)} & \beta_{1,n_j-1}^{(j)} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Тр. Московского матем. об-ва, т. III, 1954.
2. Ланце В. Э. О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. Матем. сб., т. 64 и 65, вып. 1 и 4, 1964.
3. Кемп Р. R. D. a) A singular boundary value problem for a non-self-adjoint differential operator, Canadian J. Math, v. 10, 1958, №3 447-462.
4. On a class of singular differential operators, Canad. J. Math. 1961, v. 13 № 2, 316-330.
5. Гимадисламов М. ДАН СССР, т. 143, 1962, № 1.
6. Максудов Ф. Г. ДАН СССР, т. 153, 1963, № 5.
7. Фунтаков В. Н. ДАН СССР, т. 132, 1960, № 4.
8. Марченко В. А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка. Матем. сб., 52 (94): 2 (1960).
9. Рофе-Бекетов Ф. С. Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях. Матем. сб., 51 (93), 1960, № 3.
10. Гасымов М. Г. ДАН СССР, т. 165, 1965, № 2.
11. Гельфонд И. М. УМН, 7, вып. 6 (52), 1952.
12. Мартиросян Р. М., Изв. АН СССР, серия матем. т. 24, 1960, № 6.
13. Като Т. Growth properties of solutions of the reduced wave equations with a variable coefficient, Comp. Pure and Appl. Math. 12 (1959).
14. Повзнер Л. Я. ДАН СССР, т. 104, № 3.
15. Икебе Т. Eigenfunctions expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to Scattering theory, Arch. Ration. Mech and Analysis 5 (1960), 1-34.
16. Гасымов М. Г. ДАН Азерб. СССР, 1966, № 10.
17. Гасымов М. Г. ДАН СССР, т. 179, 1968, № 3.
18. Гохберг И. С. ДАН СССР, т. 78, 1956, № 4.
19. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
20. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИЛ 1950.

М. Л. РАСУЛОВ

ОЦЕНКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОМПЛЕКСНЫМ ПАРАМЕТРОМ

В связи с применением метода контурного интеграла [1, 2, 3] к решению многомерных задач для параболических систем второго порядка в настоящей работе строится и оценивается фундаментальная матрица уравнения*

$$\sum_{i=1}^3 \left(A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + A_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + (A_0(x) - \lambda^2) U = 0, \quad (1)$$

рассматриваемого в некоторой трехмерной области D с границей τ евклидового пространства, где λ — комплексный параметр; $A(x)$, $A_1(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) — квадратные матрицы порядка m ($m \geq 1$), имеющие ограниченные производные первого порядка в области $D + \tau$. Кроме того, предполагается, что v — корни $v_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$; p — число различных корней) характеристического уравнения

$$\Delta(v) \equiv \det(A(x) + vE) = 0 \quad (2)$$

имеют постоянные кратности $m_1 (m_1 + \dots + m_p = m)$ и строго отрицательные действительные части при всех $x \in D + \tau$, где E — единичная матрица порядка m .

Пусть ξ — произвольная фиксированная точка области $D + \tau$. Интегральным методом Фурье строится фундаментальная матрица $P_0(x - \xi, \xi, \lambda)$ уравнения

$$A(\xi) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \lambda^2 U = 0 \quad (3)$$

с особенностью в точке $x = \xi$. Элементы P_{0ks} матрицы P_0 имеют представление:

$$\begin{aligned} P_{0ks}(x - \xi, \xi, \lambda) = & \frac{-1}{4\pi|x - \xi|} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{m_i} \frac{B_{sk}^{(i,j)}(\xi)}{(m_i - j + 1)!} \frac{\partial^{m_i-j}}{\partial v^{m_i-j}} \times \\ & \times \frac{\exp \left[-\lambda \frac{|x - \xi|}{\sqrt{-v}} \right]}{v} \Big|_{v=v_i(\xi)}, \end{aligned} \quad (4)$$

* Фундаментальные матрицы эллиптических систем без параметра построены в работах [4, 5]. Фундаментальное решение для единичного уравнения эллиптического типа с действительным параметром построено в [6].

где $|x - \xi|$ — длина вектора $x - \xi$,

$$B_{sk}^{(i,j)}(\xi) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1}}{\partial v^{j-1}} \left. \frac{\Delta_{sk}(v)}{\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^p (v - v_r(\xi))^{m_r}} \right|_{v=v_i(\xi)}, \quad (5)$$

$\Delta_{sk}(v)$ — алгебраическое дополнение элемента (s, k) в определителе $\Delta(v)$ (см. формулу 2),

Фундаментальная матрица P_0 для системы (3) при $m = 2, 3$ построена в работах [7] и [8]. Согласно условию существует положительное число δ такое, что для всех комплексных значений λ , удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |\lambda| &\geq R, \\ |\arg \lambda| &\leq \frac{\pi}{4} + \delta, \end{aligned} \quad (6)$$

при достаточно большом R имеет место оценка

$$\left| \exp \left[-\lambda \frac{|x - \xi|}{\sqrt{-v_i(\xi)}} \right] \right| \leq \exp(-3\varepsilon|\lambda||x - \xi|). \quad (7)$$

справедливая для всех $x, \xi \in D + \tau$, где ε — некоторое положительное постоянное. Обозначим через R_ε область значений λ , удовлетворяющих неравенствам (6).

Из ограничений, наложенных на коэффициенты уравнения (1) согласно неравенству (7) при всех $x, \xi \in D + \tau$ и $\lambda \in R_\varepsilon$ следует справедливость неравенств

$$\left| \frac{\partial^k P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial x_i^k} \right| \leq \frac{C \exp(-2\varepsilon|\lambda||x - \xi|)}{|x - \xi|^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2), \quad (8)$$

$$\left| \frac{\partial P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi^1} \right| \leq \frac{C \exp(-2\varepsilon|\lambda||x - \xi|)}{|x - \xi|^2}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} \left(\frac{\partial P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi^1} \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{\exp(-2\varepsilon|\lambda||x - \xi|)}{|x - \xi|^{1+k}} \quad (k = 0, 1) \end{aligned}$$

для достаточно большого R , где C — положительное постоянное, а неравенства (8) — (10) понимаются в смысле выполнимости их для каждого из элементов матриц, стоящих в левых частях.

Фундаментальную матрицу $P(x, \xi, \lambda)$ уравнения (1) с особенностью в точке $x = \xi$, следуя Леви [4] и Карлеману [6], будем искать в виде

$$P(x, \xi, \lambda) = P_0(x - \xi, \xi, \lambda) + \int_D P_0(x - \eta, \eta, \lambda) h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta, \quad (10)$$

где

$$P_1(x, \xi, \lambda) = \int_D P_0(x - \eta, \eta, \lambda) h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta \quad (11)$$

есть интегральный довесок с неизвестной плотностью $h(\eta, \xi, \lambda)$, подлежащей определению. Ввиду того, что ядро $P_0(x - \eta, \eta, \lambda)$ интегрального довеска (11) имеет полярную особенность в точке $x = \xi$, а его производная по x_i порядка k имеет полярную особенность порядка $k+1$, (11) можно дифференцировать под знаком интеграла один раз:

$$\frac{\partial P_1(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i} = \int_D \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} \cdot h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta. \quad (12)$$

Для повторного дифференцирования интеграл (12) необходимо преобразовать. С этой целью представим его в виде суммы двух ин-

тегралов, распространенных, соответственно, на шар $III_\sigma(x)$ с центром в точке x радиуса σ и на его дополнение $D-III_\sigma(x)$, где σ — достаточно малое положительное число ($\sigma < |x - \xi|$). Тогда, очевидно, из (12) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i} = & \int_{III_\sigma(x)} \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] h(\eta, \xi, \lambda) dC_\eta - \\ & - \int_{III_\sigma(x)} \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \cdot k(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \\ & + \int_{D-III_\sigma(x)} \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} \cdot h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Легко видеть из оценки (10), что ядро первого интеграла в правой части (13) имеет полярную особенность первого порядка в точке $x = \eta$. Следовательно, его можно дифференцировать еще раз. Очевидна также возможность дифференцирования и третьего интеграла в правой части (13). Что касается второго интеграла, то его необходимо преобразовать интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{III_\sigma(x)} \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \cdot h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta = \\ & = - \int_{III_\sigma(x)} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \frac{\partial h(\eta, \xi, \lambda)}{\partial \eta_i} dD_\eta + \\ & + \int_{S_\sigma(x)} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) h(\eta, \xi, \lambda) \cos(n_\eta, \eta_i) dS_\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

где $S_\sigma(x)$ — сфера с центром в точке x радиуса σ , n_η — направление внешней нормали к S_σ в точке η . С учетом (14) из (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i^2} = & \int_{III_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta - \\ & - \int_{S_\sigma(x)} \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} \cdot h(\eta, \xi, \lambda) \cos(n_\eta, \eta_i) dS_\eta + \\ & + \int_{III_\sigma(x)} \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h(\eta, \xi, \lambda)}{\partial \eta_i} dD_\eta + \\ & + \int_{D-III_\sigma(x)} \frac{\partial^2 P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i^2} \cdot h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta. \end{aligned} \quad (15)$$

Нетрудно убедиться в том, что $P_0(x - \eta, \eta, \lambda)$ допускает представление в виде

$$P_0(x - \eta, \eta, \lambda) = A^{-1}(\eta) \frac{1}{4\pi |x - \eta|} + E(x, \eta, \lambda), \quad (16)$$

где $E(x, \eta, \lambda)$ не имеет особенностей, а его производная может иметь полярную особенность в точке $x = \eta$ порядка не больше единицы. Сле-

довательно, принимая во внимание тождество

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) = \lambda^2 A^{-1}(\eta) P_0(x - \eta, \eta, \lambda),$$

при $\sigma \rightarrow 0$ из (15) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} P_1(x, \xi, \lambda) = & -A^{-1}(x) h(x, \xi, \lambda) + \\ & + \lambda^2 \int_D A^{-1}(\eta) P_0(x - \eta, \eta, \lambda) h(\eta, \xi, \lambda) dD. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (10) в (1) и принимая во внимание (17) для определения неизвестной плотности h интегрального довеска (11), приходим к интегральному уравнению:

$$h(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \lambda) + \int_D K(x, \eta, \lambda) h(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, \xi, \lambda) = & \left\{ (A(x) - A(\xi)) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x) \right\} P_0(x - \xi, \xi, \lambda). \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно ограничениям, наложенным на коэффициенты уравнения (1), на основании неравенства (8) из (19) получаем оценку

$$|K(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{C \exp(-2\varepsilon|\lambda||x - \xi|)}{|x - \xi|^2}, \quad (20)$$

справедливую при $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ для достаточно большого R , где C — некоторое положительное постоянное, которое, вообще говоря, отлично от постоянного, фигурирующего в неравенствах (8)–(10), но для простоты записи в дальнейшем все постоянные в аналогичных оценках обозначим просто через C . С помощью оценки (20) методом последовательных приближений удастся показать однозначную разрешимость интегрального уравнения (18) в области R_δ . Более того, удастся оценить также плотность h интегрального довеска (11).

Очевидно, для доказательства разрешимости интегрального уравнения (18) в области R_δ достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$K(x, \xi, \lambda) + \sum_{v=2}^{\infty} K_v(x, \xi, \lambda) \quad (21)$$

по точке $\xi \in D$ для всех $\lambda \in R_\delta$, где K_v — итерация ядра K с номером v :

$$K_v(x, \xi, \lambda) = \int_D K(x, \eta, \lambda) K_{v-1}(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta. \quad (22)$$

В силу (20) для второй итерации K_v ядра K из (20) имеем

$$|K_2(x, \xi, \lambda)| \leq 3C^2 \exp(-\varepsilon|\lambda||x - \xi|) \int_D \frac{\exp(-\varepsilon|\lambda||x - \eta|)}{|x - \eta|^2 |\eta - \xi|^2} dD_\eta. \quad (23)$$

Для интеграла, стоящего в правой части (23), имеем оценку (см. (8.1.12) в [3])

$$\int_D \frac{\exp(-\varepsilon|\lambda||x - \eta|)}{|x - \eta|^2 |\eta - \xi|^2} dD_\eta \leq \frac{C_\varepsilon}{|\lambda||x - \xi|^2}, \quad (24)$$

где C_ϵ — число, зависящее только от ϵ . С учетом (24) из (23) получим

$$|K_2(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{3C^2 C_\epsilon \pi}{|\lambda| |x - \xi|^2} \exp(-\epsilon |\lambda| |x - \xi|). \quad (25)$$

С помощью (20) и (25), по методу математической индукции нетрудно убедиться в справедливости оценки

$$|K_n(x, \xi, \lambda)| \leq \left(\frac{3\pi C C_\epsilon}{|\lambda|} \right)^{n-1} \frac{C \exp(-\epsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|^2} \quad (26)$$

при всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ и $n \geq 2$.

Из (26) следуют равномерная сходимость ряда (21) и справедливость тождества

$$\int_D K(x, \eta, \lambda) \left\{ K(\eta, \xi, \lambda) + \sum_{v=2}^{\infty} K_v(\eta, \xi, \lambda) \right\} dD_\eta \equiv \int_D K(x, \eta, \lambda) K(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \sum_{v=2}^{\infty} \int_D K(x, \eta, \lambda) K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta \quad (27)$$

для всех $\lambda \in R_\delta$.

Обозначим через $h(x, \xi, \lambda)$ сумму ряда (21). Как видно из тождества (27), $h(x, \xi, \lambda)$ является решением интегрального уравнения (18) при $\lambda \in R_\delta$. Из неравенств (20) и (26) следует справедливость оценки

$$|h(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{C \exp(-\epsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|^2} \quad (28)$$

для всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ при достаточно большом R .

В случае неограниченной области D из оценки (26) еще не следует справедливость тождества (27), а следовательно и утверждения о существовании решения $h(x, \xi, \lambda)$ интегрального уравнения (18). В связи с этим необходимо показать, что если Q — произвольное достаточно большое число, то модуль интеграла

$$\int_{|x-\eta|>Q} K(x, \eta, \lambda) \sum_{v=2}^{\infty} K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta \quad (29)$$

достаточно мал. В самом деле, согласно оценкам (20) и (26) имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x-\eta|>Q} K(x, \eta, \lambda) \sum_{v=2}^{\infty} K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta \right| \leq \\ & \leq 3 \int_{|x-\eta|>Q} C \frac{\exp(-2\epsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^2} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{C}{|\eta - \xi|^2} \left(\frac{3\pi C C_\epsilon}{|\lambda|} \right)^{v-1} \times \\ & \quad \times \exp(-\epsilon |\lambda| |\eta - \xi|) dD_\eta \leq \\ & \leq \int_{|x-\eta|>Q} \frac{\exp(-\epsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^2 |\eta - \xi|^2} \cdot \frac{9\pi C^3 C_\epsilon}{|\lambda| \left(1 - \frac{3\pi C C_\epsilon}{|\lambda|} \right)} dD_\eta \leq \\ & \leq \frac{1}{Q^2} \frac{9\pi C^3 C_\epsilon}{\left(1 - \frac{3\pi C C_\epsilon}{|\lambda|} \right) |\lambda|} \int_{|x-\eta|>Q} \frac{\exp(-\epsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|\eta - \xi|^2} dD_\eta. \end{aligned}$$

Из этого неравенства видно, что интеграл (29) достаточно мал при всех $x, \xi \in D + \tau$.

Для получения нужных оценок фундаментальной матрицы и ее производных следует оценить еще интегральный довесок (11). Согласно неравенствам (8) и (28) из (11) находим

$$|P_1(x, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq 3C^2 \exp\left(-\frac{\epsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right) \int_D \frac{\exp\left(-\frac{\epsilon}{2} |\lambda| |\eta - \xi|\right)}{|x - \eta| |\eta - \xi|^2} dD_\eta. \quad (30)$$

Переходя к полярной системе координат с началом в точке ξ , из (30) получим оценку

$$|P_1(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{C_2 \exp\left(\frac{\epsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right)}{|\lambda| |x - \xi|}, \quad (31)$$

справедливую для всех $\lambda \in R_\delta$ при $x, \xi \in D + \tau$, где

$$C_2 = \frac{12\pi C^2}{\epsilon}.$$

Далее, принимая во внимание (8) и (28), из (11) будем иметь

$$\left| \frac{\partial P_1(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{C \exp(-\epsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|} \quad (32)$$

при всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$. В силу (8) и (9) из (10) следует справедливость неравенства

$$\left| \frac{\partial P(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} + \frac{\partial P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi_1} \right| \leq \frac{C \exp(-\epsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|} \quad (33)$$

при всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$.

Теперь займемся получением оценки для второй производной интегрального довеска фундаментальной матрицы. Как видно из (15), для этой цели необходимо оценить производную от плотности h интегрального довеска. По-видимому, если ряд

$$\frac{\partial K(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} + \sum_{v=2}^{\infty} \frac{\partial K_v(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \quad (34)$$

сходится равномерно, то его сумма равна $\frac{\partial h(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1}$. В связи с этим

докажем равномерную сходимость ряда (34) при $|x - \xi| \geq 2\delta > 0$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} K_{v+1}(x, \xi, \lambda) &= \int_D K(x, \eta, \lambda) K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta = \\ &= \int_{\Omega_\sigma(x)} \left\{ (A(x) - A(\eta)) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] + \sum_{i=1}^3 A_i(x) \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] + A_0(x) P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \left\} \times \right. \\ &\times K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta - \int_{\Omega_\sigma(x)} \left\{ (A(x) - A(\eta)) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda))}{\partial \eta_i} + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^3 A_i(x) \frac{\partial}{\partial \eta_i} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \right\} K_v(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{D-\Omega_\sigma(x)} K_\nu(x, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta = \\
& = \int_{\Omega_\sigma(x)} \left\{ (A(x) - A(\eta)) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] + \sum_{i=1}^3 A_i(x) \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] + \right. \\
& \left. + A_0(x) P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \right\} K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta - \\
& - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left\{ (A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right\} P_0(x - \\
& - \eta, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \\
& + \int_{\Omega_\sigma(x)} \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_i} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^3 \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right] P_0(x - \right. \\
& \left. - \eta, \eta, \lambda) \frac{\partial K_\nu(\eta, \xi, \lambda)}{\partial \eta_i} \right\} dD_\eta + \int_{D-\Omega_\sigma(x)} K(x, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta.
\end{aligned}$$

Применяя ко второму интегралу в правой части последнего равенства формулу Остроградского, интеграл, представляющий $(\nu+1)$ -ю итерацию ядра K преобразуем в сумму интегралов, каждый из которых допускает еще одно дифференцирование под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial K_{\nu+1}(x, \xi, \lambda)}{\partial x_j} \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + \right. \right. \\
& \left. \left. + A_i(x) \right] \left[\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right] + \right. \\
& \left. + A_0(x) P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \right\} K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta - \\
& - \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right] P_0(x - \\
& - \eta, \eta, \lambda) \cos(n_\eta, \eta_i) \times K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \\
& + \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_i} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right] P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \times \\
& \times \frac{\partial K_\nu(\eta, \xi, \lambda)}{\partial \eta_i} dD_\eta + \int_{D-\Omega_\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} K(x, \eta, \lambda) K_\nu(\eta, \xi, \lambda) dD_\eta. \quad (35)
\end{aligned}$$

Из оценок (8)–(10) следует справедливость следующих неравенств:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \sum_{i=1}^3 \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right] \left(\frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial x_i} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial P_0(x - \eta, \eta, \lambda)}{\partial \eta_i} \right) + A_0(x) P_0(x - \eta, \eta, \lambda) + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_i} P_0(x - \eta, \eta, \lambda) \right\} \right| \leq \frac{L_1 \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^2}, \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |K_\nu(x, \eta, \lambda)| \leq L_1 \left(\frac{L_1}{|\lambda|} \right)^{\nu-1} \frac{\exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^2} = \\
& = \frac{L_1^\nu \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|\lambda|^{\nu-1} |x - \eta|^2}, \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \left[(A(x) - A(\eta)) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_i(x) \right] P_0(x - \right. \\
& \left. - \eta, \eta, \lambda) \cos(n_\eta, \eta_i) \right| \leq \frac{L_1 \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^2}, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial K(x, \eta, \lambda)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L_1 \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \eta|)}{|x - \eta|^3}, \quad (39)$$

где L_1 — некоторое положительное постоянное. С помощью неравенств (20), (36)–(39) из (35) при $\nu = 1$ и $|x - \xi| = 2\sigma$ получаем:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial K_2(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i} \right| \leq \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{3 L_1 C \exp[-\varepsilon |\lambda| (|x - \eta| + |\eta - \xi|)]}{|x - \eta|^2 |\eta - \xi|^2} dD_\eta + \\
& + \int_{S_\sigma(x)} \frac{3 L_1 C \exp[-\varepsilon |\lambda| (|x - \eta| + |\eta - \xi|)]}{\sigma^4} dS_\eta + \\
& + \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{3 L_1 C \exp[-\varepsilon |\lambda| (|x - \eta| + |\eta - \xi|)]}{|x - \eta|^2 |\eta - \xi|^3} dD_\eta + \\
& + \int_{D-\Omega_\sigma(x)} \frac{3 L_1 C \exp[-\varepsilon |\lambda| (|x - \eta| + |\eta - \xi|)]}{|x - \eta|^3 |\eta - \xi|^2} dD_\eta \leq \\
& \leq \left\{ \frac{3 L_1 C}{\sigma^2} \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \eta|\right)}{|x - \eta|^2} dD_\eta + \right. \\
& \left. + \frac{3 \cdot 4 \pi L_1 C}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| \sigma\right) + \right. \\
& \left. + \frac{3 L_1 C}{\sigma^2} \int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \eta|\right)}{|x - \eta|^2} dD_\eta + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{3L_1 C}{\sigma^3} \int_{D-\Omega_\sigma(x)} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |\eta - \xi|\right)}{|\eta - \xi|^2} dD_\eta \left\{ \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right) \right\}, \quad (40)$$

при этом предполагается, что $C \leq L_1$.

Переходя к полярной системе координат, легко показать, что

$$\int_{\Omega_\sigma(x)} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \eta|\right)}{|x - \eta|^2} dD_\eta \leq \frac{8\pi}{\varepsilon |\lambda|}, \quad (41)$$

$$\int_{D-\Omega_\sigma} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |\eta - \xi|\right)}{|\eta - \xi|^2} dD_\eta \leq \frac{8\pi}{\varepsilon |\lambda|}.$$

Следовательно, из (40) имеем

$$\left| \frac{\partial K_2(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{L_2}{|x - \xi|^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right), \quad (42)$$

где

$$L_2 = (\sigma + 3) \cdot \frac{24\pi L_1^3}{\varepsilon |\lambda|}. \quad (43)$$

Таким же образом с помощью неравенств (36)–(39) и (42) и (35) при $\nu=2$ получаем

$$\left| \frac{\partial K_3(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq L_3 \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right)}{|x - \xi|^3}, \quad (44)$$

где

$$L_3 = \frac{24\pi(\sigma + 2 + L_2)L_1^3}{\varepsilon |\lambda|^2}. \quad (45)$$

Теперь методом математической индукции для любого натурального $\nu \geq 3$ легко показать справедливость оценки

$$\left| \frac{\partial K_\nu(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{L_\nu}{|x - \xi|^3} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right), \quad (46)$$

где

$$L_\nu = \frac{24\pi(\sigma + 2 + L_{\nu-1})L_1^\nu}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-1}}. \quad (47)$$

Из (47) путем последовательной подстановки находим

$$L_\nu = \frac{(\sigma + 2)L_1^\nu}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-1}} \left\{ 1 + \frac{L_1^{\nu-1}}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-3}} + \frac{L_1^{2\nu-(1+2)}}{\varepsilon^2 |\lambda|^{2\nu-(1+1+3)}} + \dots + \frac{L_1^{\kappa\nu - \frac{\kappa(\kappa+1)}{2}}}{\varepsilon^\kappa |\lambda|^{\kappa\nu - \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}}} L_{\nu-\kappa-1} \right\} \quad (\nu - \kappa - 1 \geq 2). \quad (48)$$

Как видно из (48), сумма в фигурных скобках есть отрезок ряда с положительными членами. Для суммы отношение двух соседних членов этого ряда, равное

$$\frac{L^{\nu-(\kappa+1)}}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-(\kappa+1)}} = \frac{L_1}{\varepsilon} \left(\frac{L_1}{|\lambda|} \right)^{\nu-(\kappa+2)} \quad (\nu \geq \kappa + 3),$$

стремится к нулю при $\nu \rightarrow \infty$, при достаточно большом $|\lambda|$ ($\lambda \in R_\delta$). Следовательно, существует постоянное число C такое, что имеет место неравенство

$$1 + \frac{L_1^{\nu-1}}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-3}} + \frac{L_1^{2\nu-(1+\kappa)}}{\varepsilon^2 |\lambda|^{2\nu-(1+2+3)}} + \dots + \frac{L_1^{\kappa\nu - \frac{\kappa(\kappa+1)}{2}}}{\varepsilon^\kappa |\lambda|^{\kappa\nu - \frac{(\kappa+1)(\kappa+2)}{2}}} L_{\nu-\kappa-1} < C \quad (49)$$

при всех натуральных $\nu \geq 3$, $\kappa + 3 \leq \nu$.

Следовательно, принимая во внимание (48), из (46) получим неравенство

$$\left| \frac{\partial K_\nu(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{L_1^{\nu+1} \cdot C}{\varepsilon |\lambda|^{\nu-1}} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right)}{|x - \xi|^3} \quad (50)$$

выполняемое при всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ для всех натуральных ν .

Из оценки (50) следует равномерная сходимость ряда (34) относительно $x, \xi \in D + \tau$ и $\lambda \in R_\delta$, причем сумма этого ряда равна $\frac{\partial h(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1}$ и для нее имеет место оценка

$$\left| \frac{\partial h(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} \right| \leq \frac{C}{|x - \xi|^3} \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \xi|), \quad (51)$$

выполняемая для всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$, где C, ε — некоторые положительные постоянные.

Теперь с помощью неравенств (8)–(10), (28) и (51) из (15) легко получить оценку

$$\left| \frac{\partial^2 P_1(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1^2} \right| \leq \frac{12C^3}{|x - \xi|^2} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} |\lambda| |x - \xi|\right), \quad (52)$$

справедливую для всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ при достаточно большом R . Принимая во внимание (8)–(10), (31), (32), (33) и (52), из (10) получим оценку

$$\left| \frac{\partial^\kappa}{\partial x_1^\kappa} \left(\frac{\partial P(x, \xi, \lambda)}{\partial x_1} + \frac{\partial P_0(x - \xi, \xi, \lambda)}{\partial \xi_1} \right) \right| \leq \frac{C \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|^{1+\kappa}} \quad (\kappa = 0, 1), \quad (53)$$

справедливую для всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$ при достаточно большом R . Таким образом доказана

Теорема. Если коэффициенты $A(x)$, $A_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, 3$) уравнения (1) имеют ограниченные производные первого порядка в некоторой трехмерной области D , с границей τ евклидова пространства и если корни $\eta_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) характеристического уравнения (2) имеют постоянные кратности и отрицательные действительные части при всех $x \in D + \tau$, то уравнение (1) при достаточно большом R для всех $\lambda \in R_\delta$ имеет аналитическую по λ фундаментальную матрицу $P(x, \xi, \lambda)$ вида (10). Для первого слагаемого $P_0(x - \xi, \xi, \lambda)$ имеют место оценки (8)–(10), для интегрального доведка (11) справедливы оценки (31), (32) и (52), выполняемые при всех $x, \xi \in D + \tau$, $\lambda \in R_\delta$.

Для самой фундаментальной матрицы $P(x, \xi, \lambda)$ для всех $x, \xi \in D + \tau$ в области R_0 при достаточно большом R имеют место (53) и оценка

$$\left| \frac{\partial^k P(x, \xi, \lambda)}{\partial x_i^k} \right| \leq \frac{C \exp(-\varepsilon |\lambda| |x - \xi|)}{|x - \xi|^{1+k}} \quad (k = 0, 1, 2). \quad (54)$$

Если $\Phi(x)$ — вектор-функция, имеющая в области D ограниченные производные первого порядка, то вектор-функция

$$U(x, \lambda, \Phi) = - \int_D P(x, \xi, \lambda) \Phi(\xi) dD_\xi \quad (55)$$

является решением системы

$$\sum_{i=1}^3 \left(A_i(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + A_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) + (A_0(x) - \lambda^2) U = \Phi(x) \quad (56)$$

в области D при всех $\lambda \in R_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М. Л. „ДАН СССР“, 125, 1959, № 2.
2. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к решению многомерных смешанных задач для дифференциальных уравнений параболического типа. Матем. сб., 60, 4, 1963.
3. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла. „Наука“, М., 1964.
4. Леви Э. Э. УМН, вып. 8, 1941.
5. Лопатинский Я. Б. „Укр. матем. ж.“, 3, 1951, № 3.
6. Carleman T., Über die asymptotische verteilung der Eigenwerte partitler Differentialgleichungen, Berichte Sachs. Acad. Wiess. Zu Leipzig, Math. Phys. Klasse 88, 1936.
7. Расулов М. Л. „ДАН СССР“, т. 177, 1967, № 6.
8. Расулов М. Л. „Дифференциальные уравнения“, т. 3, 1967, № 8.

Поступило 10. VII 1969

А. И. ГУСЕЙНОВ, Х. Ш. МУХТАРОВ, А. М. МАГОМЕДОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КЛАССА $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$

Как известно, ряд существенных достижений теории линейных и нелинейных сингулярных уравнений получен в результате того, что они изучаются как операторные уравнения в различных функциональных пространствах. Поэтому важно иметь широкий набор функциональных пространств, в которых сингулярные операторы обладают „хорошими“ свойствами, для чего нужно знать соотношения между нормами в разных пространствах, свойства операторов вложения и т. д. Указанная схема исследования сингулярных уравнений развивалась многочисленными авторами. Здесь мы ограничимся ссылкой на монографии Н. И. Мухелишвили, С. Г. Михлина, Ф. Д. Гахова [1, 2, 3], где даны обзоры работ, относящихся к этому кругу вопросов.

В данной работе устанавливается ряд новых свойств для классов $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$, которые являются обобщениями известных классов А. И. Гусейнова $H_{\alpha, \beta, \delta}$ [5]. даются оценки сингулярного оператора

$$Au = \int_a^b \frac{u(s)}{s-x} ds,$$

с помощью которых доказывается, что оператор A действует ограничено в классе $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$.

Определение. Обозначим через $H(\omega)$ класс функций $f(x)$, определенных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условию

$$H_\omega(f) = \sup_{a < x, y < b} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} < \infty, \quad (1)$$

где $\omega(\sigma)$ удовлетворяет условиям:

- а) $\omega(\sigma)$ монотонно возрастает в промежутке $(0, b-a]$;
- б) $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \omega(\sigma) = 0$;
- в) $\omega(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \omega(\sigma_1) + \omega(\sigma_2)$ при любых σ_1 и σ_2 , удовлетворяющих условию $0 < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2 \leq b-a$;

$$d) \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{1}{\omega(\sigma)} \int_0^\sigma \frac{\omega(\xi)}{\xi} d\xi \right\} < \infty;$$

$$e) \sup_{\sigma > 0} \left\{ \frac{\sigma}{\omega(\sigma)} \int_0^{b-a} \frac{\omega(\xi)}{\xi^2} d\xi \right\} < \infty.$$

Примерами функций, удовлетворяющих условиям (а)–(е), являются

функции

$$\sigma^\delta, \sigma^\delta \ln^p \frac{1+b-a}{\sigma}, \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sigma^{\delta_n}, \text{ где } 0 < \delta < \delta_n < 1, p > 0,$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \delta_n = \delta, K_n > 0, \sum_{n=1}^{\infty} K_n < \infty.$$

Если в классе $H(\omega)$ ввести норму

$$\|f\|_{H(\omega)} = \|f\|_c + H_\omega(f),$$

то, как легко видеть, он становится пространством Банаха. Пусть функция $f(x)$, помимо условия (1), удовлетворяет еще условию

$$M_\omega(f) = \sup_{a < x < b} \frac{|f(x)|}{\omega(x-a)\omega(b-x)} < \infty. \quad (2)$$

Тогда мы скажем, что $f(x) \in H^0(\omega)$.

Легко показать, что $H^0(\omega)$ является пространством Банаха с нормой $\|f\|_{H^0(\omega)} = H_\omega(f) + M_\omega(f)$.

Очевидно, что $H^0(\omega)$ вложено в $H(\omega)$ ограниченно, т. е. для любой функции $f(x) \in H^0(\omega)$

$$\|f\|_{H(\omega)} \leq l_1 \|f\|_{H^0(\omega)}, \text{ где } l_1 = \max \{1, \omega^2(b-a)\}.$$

Следует отметить, что класс $H(\omega)$, когда $\omega(\sigma)$ удовлетворяет условиям (a), (b), (d), (e), был введен в работе [4] применительно к конструктивной теории функций.

Как мы показали [7], для всякой функции $\omega(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (a), (b), (d), (e) всегда существует ей эквивалентная функция $\omega^*(\sigma)$ такая, что $H(\omega) \equiv H(\omega^*)$, и $\omega^*(\sigma)$ удовлетворяет еще условию (c). Поэтому условие (c) не приводит к сужению класса $H(\omega)$. Для дальнейшего полезны следующие леммы [7].

Лемма 1. Пусть $f(x) \in H(\omega)$ и $g(x)$ — ограниченная на $[a, b]$ функция, имеющая производную, кроме, быть может, значения $x = x_0$, такую, что

$$|g'(x)| \leq \frac{\text{const}}{|x - x_0|}.$$

Тогда функция $v(x) = [f(x) - f(x_0)]g(x)$ удовлетворяет условию $|v(x + \Delta x) - v(x)| \leq \text{const} \cdot H_\omega(f) \omega(|\Delta x|)$.

Эта лемма доказывается путем повторения рассуждений из монографии Н. И. Мусхелишвили [1].

Лемма 2. Для любой функции $f(x) \in C_{[a, b]}$ и при любом $\xi \in \left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ справедливы неравенства

$$\|f\|_c \leq \omega(f, \xi) + \frac{\|f\|_{L_p}}{\xi^{\frac{1}{p}}}, p \geq 1, \quad (3)$$

$$(3 - 2\sqrt{3})\omega(f, \sigma) \leq \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \omega(f, t) dt \leq \omega(f, \sigma), 0 < \sigma \leq b-a, \quad (4)$$

где

$$\omega(f, \sigma) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| < \sigma \\ x_1, x_2 \in [a, b]}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in C_{[a, b]}$, $0 < \xi \leq \frac{b-a}{2}$ и точка $x_0 \in [a, b]$ такова, что $\|f\|_c = |f(x_0)|$.

Положим

$$S(\xi) = \begin{cases} [x_0, x + \xi], & \text{если } x_0 + \xi \leq b, \\ [x_0 - \xi, x_0], & \text{если } x_0 + \xi > b. \end{cases}$$

По теореме о среднем значении интеграла существует точка $C \in S(\xi)$ такая, что

$$\|f\|_{L_p} \geq |f(C)| \xi^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\|f_c\| \leq |f(x_0) - f(C)| + |f(C)| \leq \omega(f, \xi) + \frac{\|f\|_{L_p}}{\xi^{\frac{1}{p}}},$$

т. е. имеем (3). Далее

$$\int_0^\sigma \omega(f, t) dt \geq \int_{(\sqrt{2}-1)\sigma}^\sigma \omega(f, t) dt \geq \omega[f, (\sqrt{2}-1)\sigma] \cdot (2 - \sqrt{2})\sigma,$$

$$\omega(f, \sigma) = \omega\left(f, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\sigma\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \omega[f, (\sqrt{2}-1)\sigma].$$

Из этих неравенств следует (4).

В работе [7] доказана теорема:

Для любой функции $f(x) \in H_\sigma^0$ и для любого $p \geq \frac{1}{\delta}$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{C_{[a, b]}} \leq (1 + \delta p) (\delta p)^{-\frac{\delta p}{1+\delta p}} H_\sigma^\nu(f) \|f\|_{L_p[a, b]}^{1-\nu}, \quad (5a)$$

где

$$\nu = \frac{1}{1+\delta p}, H_\sigma(f) = H_\sigma^\delta(f).$$

Для доказательства достаточно в неравенстве (3) положить

$$\xi = \left\{ \frac{\|f\|_{L_p}}{\delta p H_\sigma(f)} \right\}^{\frac{p}{1+\delta p}} (f(x) \neq 0).$$

Аналогично можно доказать и более общее утверждение:

для любой $f(z) \in H_\sigma^0$ и при любом $p > 0$ существует постоянное $l(\delta, p) > 0$ такое, что

$$\|f\|_{C_{[a, b]}} \leq l(\delta, p) H_\sigma^\nu(f) \|f\|_{L_p[a, b]}^{1-\nu}. \quad (5b)$$

Лемма 3. Если $f(x) \in H^0(\omega)$, то для функции

$$u(x) = \frac{f(x)}{\omega(x-a)\omega(b-x)}$$

имеет место неравенство

$$|u(x + \Delta x) - u(x)| \leq [1 + 2\omega(b-a)] \cdot \|f\|_{H^0(\omega)} \frac{\omega(|\Delta x|)}{\omega(x-a)\omega(b-x)}. \quad (6)$$

В самом деле

$$|u(x + \Delta x) - u(x)| \leq \left| \frac{f(x + \Delta x)}{\omega(x + \Delta x - a)\omega(b - x - \Delta x)} - \frac{f(x + \Delta x)}{\omega(x - a)\omega(b - x)} \right| + \frac{|f(x + \Delta x) - f(x)|}{\omega(x - a)\omega(b - x)} \leq$$

$$\leq 2\omega(b-a) \frac{|f(x + \Delta x)|}{\omega(x + \Delta x - a)\omega(b - x - \Delta x)} \cdot \frac{\omega(|\Delta x|)}{\omega(x - a)\omega(b - x)} +$$

$$+ \frac{|f(x+\Delta x) - f(x)|}{\omega(|\Delta x|)} \cdot \frac{\omega(|\Delta x|)}{\omega(x-a)\omega(b-x)} \leq \\ \leq [1 + 2\omega(b-a)] \cdot \|f\|_{H^0(\omega)} \frac{\omega(|\Delta x|)}{\omega(x-a)\omega(b-x)}.$$

Обозначим через $H^0(\omega, 0)$ множество функций $f(x) \in H^0(\omega)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\omega(f, \xi)}{\omega(\xi)} = 0.$$

Теорема 2. Для компактности множества $K \subset H^0(\omega, 0)$ необходимо и достаточно, чтобы:

- 1) K было ограничено;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x) \in K$ существовало такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $0 < \xi < \eta(\varepsilon)$

$$\frac{\omega(f, \xi)}{\omega(\xi)} < \varepsilon.$$

Необходимость. Пусть K компактно. Тогда оно ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)\} \subset H^0(\omega, 0)$. Так как $g_k(x) \in H^0(\omega, 0)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то существует такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что при $0 < \xi < \eta(\varepsilon)$

$$\frac{\omega(g_k, \varepsilon)}{\omega(\xi)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $f(x) \in K$ — произвольная функция. Тогда найдется $g_k(x)$ такая, что

$$\|f - g_k\|_{H^0(\omega)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\omega(f - g_k, \sigma)}{\omega(\sigma)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < \sigma \leq b - a.$$

Следовательно, при $0 < \xi < \eta(\varepsilon)$ получим

$$\frac{\omega(f, \xi)}{\omega(\xi)} \leq \frac{\omega(f - g_k, \xi)}{\omega(\xi)} + \frac{\omega(g_k, \xi)}{\omega(\xi)} < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы и $\{f_n(x)\} \subset K$ — любая последовательность такая, что $\|f_n\|_{H^0(\omega)} \leq R$. Рассмотрим последовательность $\{u_n(x)\}$, где $u_n(x) = \frac{f_n(x)}{\omega(x-a)\omega(b-x)}$. Оче-

видно, она равномерно ограничена и в силу (6) равномерно непрерывна на любом отрезке $[a + \eta_0, b - \eta_0]$, внутреннем к (a, b) . Из условия 2 теоремы следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\max\{x-a, b-x\} < \eta(\varepsilon)$

$$\frac{|f_n(x)|}{\omega(x-a)} < \varepsilon, \quad \frac{|f_n(x)|}{\omega(b-x)} < \varepsilon.$$

Тогда на отрезках $[a, a + \eta_0]$, $[b - \eta_0, b]$ ($\eta_0 \leq \eta(\varepsilon)$)

$$|u_n(x)| = \frac{|f_n(x)|}{\omega(x-a)\omega(b-x)} < \frac{\varepsilon}{\omega\left(\frac{b-a}{2}\right)},$$

$$|u_n(x + \Delta x) - u_n(x)| < \frac{2\varepsilon}{\omega\left(\frac{b-a}{2}\right)}.$$

Значит $\{u_n(x)\}$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. Тогда существует $u_0(x) \in C_{[a, b]}$ такая, что $\|u_n - u_0\|_C \rightarrow 0$.

Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность сходится к $u_0(x)$. Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенствах

$$|u_n(x)| \leq R, \quad \frac{|u_n(x + \Delta x) - u_n(x)| \omega(x-a)\omega(b-x)}{\omega(|\Delta x|)} \leq R,$$

получим

$$|u_0(x)| \leq R, \quad \frac{|u_0(x + \Delta x) - u_0(x)| \omega(x-a)\omega(b-x)}{\omega(|\Delta x|)} \leq R.$$

Отсюда для $f_0(x) = u_0(x) \omega(x-a)\omega(b-x)$ имеем

$$\frac{|f_0(x)|}{\omega(x-a)\omega(b-x)} \leq R, \quad \frac{|f_0(x + \Delta x) - f_0(x)|}{\omega(|\Delta x|)} \leq 1R,$$

т. е. $f_0(x) \in H^0(\omega)$,

$$\|f_n - f_0\|_{H^0(\omega)} = \sup_{a < x < b} \frac{|f_n(x) - f_0(x)|}{\omega(x-a)\omega(b-x)} + \\ + \sup_{a < x, x + \Delta x < b} \frac{|[f_n(x + \Delta x) - f_0(x + \Delta x)] - [f_n(x) - f_0(x)]|}{\omega(|\Delta x|)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, так как стремление к нулю первого слагаемого очевидно, а стремление к нулю второго слагаемого доказано в [7].

Определение 2. Обозначим через $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ класс функций $u(x)$, определенных в (a, b) и удовлетворяющих условиям:

$$1) A(u) = \sup_{a < x < b} \{|u(x)| \omega_1(x-a)\omega_2(b-x)\} < \infty,$$

$$2) B(u) = \sup_{a < x, x + \Delta x < b} \left\{ \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{\omega(|\Delta x|)} W(x, \Delta x) \right\} < \infty,$$

где

$$W(x, \Delta x) = \begin{cases} \varphi_1(x-a)\varphi_2(b-x-\Delta x), & \text{если } \Delta x \geq 0, \\ \varphi_1(x+\Delta x-a)\varphi_2(b-x), & \text{если } \Delta x < 0, \end{cases}$$

$\varphi_i(\sigma) = \omega_i(\delta)\omega(\delta)$ ($i = 1, 2$); $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$, $\omega(\delta)$ удовлетворяют условиям (a) — (e). Для любых функций $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$, $\omega(\delta)$, удовлетворяющих условиям (a) — (e), можно найти эквивалентные им функции $\omega_1^*(\sigma)$, $\omega_2^*(\sigma)$, $\omega^*(\sigma)$ такие, что

$$\frac{|\varphi_1^*(x + \Delta x - a) - \varphi_1^*(x - a)|}{\omega_1^*(x - a)} \leq C_{\varphi_1} \omega^*(|\Delta x|), \quad (m)$$

$$\frac{|\varphi_2^*(b - x - \Delta x) - \varphi_2^*(b - x)|}{\omega_2^*(b - x)} \leq C_{\varphi_2} \omega^*(|\Delta x|) \quad (n)$$

при

$$|\Delta x| \leq G(x) = \min \left\{ \frac{x-a}{4}, \frac{b-x}{4} \right\}.$$

Таким образом, не умаляя общности, можем полагать, что $\omega_1(\sigma)$, $\omega_2(\sigma)$, $\omega(\sigma)$ удовлетворяют условиям (m) и (n) при $|\Delta x| \leq G(x)$. $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + B(u).$$

Теорема 3. Пусть $\Psi(x) = \varphi_1(x-a)\varphi_2(b-x)$. Тогда линейный оператор $Su = \Psi(x)u(x) = v(x)$ действует ограниченно из $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ в $H^0(\omega)$ и имеет ограниченный обратный оператор S^{-1} , действующий из $H^0(\omega)$ в $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Тогда, очевидно,

$$|v(x)| \leq A(u) \omega(x-a) \omega(b-x). \quad (6)$$

Оценим разность $|v(x+\Delta x) - v(x)|$. Пусть $|\Delta x| \leq G(x)$,

$$I = |v(x+\Delta x) - v(x)| \leq |u(x+\Delta x) - u(x)| \Psi(x+\Delta x) + \\ + |u(x)| \cdot |\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)| = I_1 + I_2.$$

При $|\Delta x| \leq G(x)$ $\varphi(x+\Delta x) \leq C_1 W(x_1 \Delta x)$.

Тогда $I_1 \leq C_1 B(u) \omega(|\Delta x|)$. (7')

Для оценки I_2 заметим, что

$$|\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)| \leq \varphi_2(b-x-\Delta x) |\varphi_1(x+\Delta x-a) - \varphi_1(x-a)| + \\ + \varphi_1(x-a) |\varphi_2(b-x-\Delta x) - \varphi_2(b-x)|.$$

Учитывая (m) и (n), получим

$$I_2 \leq C_2 A(u) \omega(|\Delta x|). \quad (7'')$$

Пусть теперь $|\Delta x| > G(x)$. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\Delta x > 0, \quad x-a < \Delta x < b-x.$$

Тогда

$$|v(x+\Delta x) - v(x)| \leq |v(x+\Delta x)| + |v(x)| \leq C_3 A(u) \Delta(|\Delta x|).$$

Объединяя неравенства (7), (7'), (7''), получим

$$\|Su\|_{H_0(\omega)} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}. \quad (8)$$

Докажем теперь обратную теорему.

Пусть $v(x) \in H^0(\omega)$ и $\frac{v(x)}{\Psi(x)} = u(x)$.

Очевидно, что $|u(x)| \leq \frac{M_\omega(v)}{\omega_2(x-a) \omega_2(b-x)}$.

При $|\Delta x| < G(x)$ с учетом (m) и (n) получим

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leq \frac{|v(x+\Delta x) - v(x)|}{\Psi(x+\Delta x)} + \\ + \frac{|v(x)| \cdot |\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)|}{\Psi(x) \Psi(x+\Delta x)} \leq \frac{H_\omega(v) \omega(|\Delta x|)}{\varphi_1(x+\Delta x-a) \varphi_2(b-x-\Delta x)} + \\ + \frac{M_\omega(v) |\varphi(x+\Delta x) - \Psi(x)| \omega(x-a) \omega(b-x)}{\varphi_1(x-a) \varphi_2(b-x) \varphi_1(x+\Delta x-a) \varphi_2(b-x-\Delta x)} \leq \\ \leq H_\omega(v) \frac{\omega(|\Delta x|)}{W(x+\Delta x)} + M_\omega(v) \frac{|\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)|}{W(x_1 \Delta x) \omega_1(x-a) \omega_2(b-x)} \leq \\ \leq C_4 \frac{\omega(|\Delta x|)}{W(x, \Delta x)} \|v\|_{H^0(\omega)}.$$

При $|\Delta x| > G(x)$ будем иметь

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leq \frac{|v(x+\Delta x)|}{\Psi(x+\Delta x)} + \\ + \frac{|v(x)|}{\Psi(x)} \leq C_5 M_\omega(v) \frac{\omega(|\Delta x|)}{W(x, \Delta x)}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} \leq \text{const} \cdot \|v\|_{H^0(\omega)}. \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует утверждение теоремы. Эта теорема для классов $H_{\alpha, \beta, \delta}$ (определение см. ниже) была доказана в работе [6].

Замечание 1. Аналогично доказывается и следующее утверждение. Пусть дан класс $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ и функция $\omega_0(\delta)$ удовлетворяет условиям (a) — (e) и дополнительно выполняются условия:

- 1) $\frac{\omega(\tau)}{\omega_0(\sigma)}$ почти возрастает
- 2) $\sup_{\substack{a < x < b \\ |\Delta x| < G(x)}} \frac{|\varphi_1^0(x+\Delta x-a) - \varphi_1^0(x-a)|}{\omega_0(|\Delta x|) \omega_1(x-a)} < \infty,$
- 3) $\sup_{\substack{a < x < b \\ |\Delta x| < G(x)}} \frac{|\varphi_2^0(b-x-\Delta x) - \varphi_2^0(b-x)|}{\omega_0(|\Delta x|) \omega_2(b-x)} < \infty,$

где

$$\varphi_1^0(\sigma) = \omega_1(\sigma) \omega_0(\sigma), \quad \varphi_2^0(\sigma) = \omega_2(\sigma) \omega_0(\sigma).$$

Тогда линейный оператор $S_0 u = \Psi_0(x) u(x)$, где $\Psi_0(x) = \varphi_1^0(x-a) \times \varphi_2^0(b-x)$, действует из $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ в $H^0(\omega_0)$ ограниченно.

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что нормы

$$\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + B(u) \quad \text{и}$$

$$\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + \sup_{a < x, x+\Delta < b} \frac{|u(x+\Delta x) \Psi(x+\Delta x) - u(x) \Psi(x)|}{\omega(|\Delta x|)}$$

эквивалентны в классе $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$, т. е. для любой функции $u(x) \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$

$$0 < m_1 \leq \frac{\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}}{\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}} \leq m_2 < \infty.$$

Из теоремы 3 вытекает простое доказательство следующей теоремы.

Теорема 4. Пространство $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ является пространством Банаха с нормой $\|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = A(u) + B(u)$.

Доказательство. Пусть $\{u_n(x)\} \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ — любая фундаментальная последовательность. Тогда последовательность $\{v_n(x)\} \equiv \{u_n(x) \Psi(x)\}$ фундаментальна в метрике $H^0(\omega)$ в силу теоремы 3. В силу полноты $H^0(\omega)$ существует $v_0(x) \in H^0(\omega)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_0\|_{H^0(\omega)} = 0.$$

По той же теореме $u_0(x) = \frac{v_0(x)}{\Psi(x)} \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ и

$$\|u_n - u_0\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = \left\| \frac{v_n}{\Psi} - \frac{v_0}{\Psi} \right\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} \leq \text{const} \cdot \|v_n - v_0\|_{H^0(\omega)} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, что доказывает теорему. Пусть $\omega_1(\sigma) = \sigma^\alpha$, $\omega_2(\sigma) = \sigma^\beta$, $\omega(\sigma) = \sigma^\delta$, где $0 < \alpha, \beta, \delta < 1$. (k). Обозначая через $H_{\alpha, \beta, \delta}$ класс $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$, где $\omega_1(\sigma)$, $\omega_2(\sigma)$, $\omega(\sigma)$ определяются из условия (k), получим известный класс А. И. Гусейнова [5], который был введен для случая $\alpha + \delta < 1$, $\beta + \delta < 1$. При этом указанные суммы могут быть и больше единицы. Здесь же отметим, что классы, введенные в работах А. А. Бабаева [8], Х. Ш. Мухтарова [7], также представляют собой частные случаи класса $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Имеет место классификационная теорема о классах $H_{\alpha, \beta, \delta}$.

Теорема 5. Классы $H_{\alpha, \beta, \delta}$ и $H_{\alpha', \beta', \delta'}$ совпадают тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\delta = \delta'$. (10)

Доказательство. Достаточность условия (10) очевидна. Покажем необходимость. Пусть $H_{\alpha, \beta, \delta} \equiv H_{\alpha', \beta', \delta'}$. Тогда возможен один из следующих случаев:

- | | |
|--|--|
| 1) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' > \delta$, | 13) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' > \delta$, |
| 2) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' \geq \delta$, | 14) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' > \delta$, |
| 3) $\alpha' < \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' \geq \delta$, | 15) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' \geq \delta$, |
| 4) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' < \delta$, | 16) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' \geq \delta$, |
| 5) $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' \leq \delta$, | 17) $\alpha' < \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' \geq \delta$, |
| 6) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' \leq \delta$, | 18) $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$, $\delta' \geq \delta$, |
| 7) $\alpha' < \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' < \delta$, | 19) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' < \delta$, |
| 8) $\alpha' < \alpha$, $\beta' < \beta$, $\delta' \leq \delta$, | 20) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' < \delta$, |
| 9) $\alpha' < \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' \leq \delta$, | 21) $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' \leq \delta$, |
| 10) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' > \delta$, | 22) $\alpha' > \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' \leq \delta$, |
| 11) $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' > \delta$, | 23) $\alpha' < \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' \leq \delta$, |
| 12) $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' \leq \delta$, | 24) $\alpha' > \alpha$, $\beta' < \beta$, $\delta' \leq \delta$, |
| 25) $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\delta' = \delta$. | |

Покажем невозможность первых 24 случаев.

Случай 1. $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' > \delta$. Пусть $u(x) \in H_{\alpha', \beta', \delta'}$ — произвольная функция. В силу теоремы 3 и замечания 1 $u(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$. Таким образом $H_{\alpha', \beta', \delta'} \subset H_{\alpha, \beta, \delta}$. Легко заметить, что функция

$$u(x) = \frac{|x - c|^{\delta}}{(x - a)^{\alpha}(b - x)^{\beta}} \in H_{\alpha, \beta, \delta}, \quad u(x) \in H_{\alpha', \beta', \delta'} \quad \left(c = \frac{a + b}{2} \right).$$

Отсюда $H_{\alpha', \beta', \delta'} \equiv H_{\alpha, \beta, \delta}$, что показывает невозможность первого случая. Аналогично доказывается невозможность 2—6 случаев.

Случай 7. $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' < \delta$. Если $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\delta' < \delta$, то $H_{\alpha, \beta, \delta} \subset H_{\alpha', \beta', \delta'}$, не совпадая с ним. Если же $\alpha' < \alpha$, $\beta' \leq \beta$, $\delta' < \delta$ или $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' < \beta$, $\delta' < \delta$, то $H_{\alpha, \beta, \delta} \subset H_{\alpha', \beta', \delta'}$, $H_{\alpha', \beta', \delta'} \in H_{\alpha, \beta, \delta'}$, и сами они не вложены друг в друга, так как

$$u_1(x) = \frac{1}{(x - a)^{\alpha}(b - x)^{\beta}} \in H_{\alpha, \beta, \delta}, \quad u_1(x) \notin H_{\alpha', \beta', \delta'},$$

$$u_2(x) = \frac{|x - c|^{\delta'}}{(x - a)^{\alpha'}(b - x)^{\beta'}} \in H_{\alpha', \beta', \delta'}, \quad u_2(x) \notin H_{\alpha, \beta, \delta}.$$

Случай 7 невозможен; аналогично невозможны 8—12 случаи.

Случай 13. $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \geq \beta$, $\delta' > \delta$. Если $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' = \beta$, $\delta' > \delta$, то $H_{\alpha', \beta', \delta'} \subset H_{\alpha, \beta, \delta}$, не совпадая с ним по первому случаю. Если $\alpha' < \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' > \delta$, то $H_{\alpha, \beta, \delta} \subset H_{\alpha', \beta', \delta'}$, $H_{\alpha', \beta', \delta'} \in H_{\alpha, \beta', \delta}$ и не вложены друг в друга, так как

$$u_1(x) = \frac{1}{(x - a)^{\alpha}(b - x)^{\beta}} \in H_{\alpha, \beta, \delta}, \quad u_1(x) \notin H_{\alpha', \beta', \delta'},$$

$$u_2(x) = \frac{1}{(x - a)^{\alpha'}(b - x)^{\beta'}} \in H_{\alpha', \beta', \delta'}, \quad u_2(x) \notin H_{\alpha, \beta, \delta}.$$

Если $\alpha' = \alpha$, $\beta' > \beta$, $\delta' > \delta$, то $H_{\alpha, \beta, \delta}$ и $H_{\alpha', \beta', \delta'}$ вложены в $H_{\alpha', \beta', \delta'}$ и не вложены друг в друга, как и в случае 7. Случай 13 невозможен; аналогично невозможны 14—24 случая. Остается $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\delta' = \delta$, что и доказывает необходимость условий (10). Из неравенства (5б) и замечания 1 следует

Теорема 6. Для любой функции $u(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$ и при любом $p > 0$ существует постоянное число $q_0 = q_0(\alpha, \beta, \delta, \delta_0, p) > 0$ такое что

$$\sup_{a < x < b} \{ |u(x)| \gamma(x) \} \leq q_0 \left\{ \sup_{a < x, y < b} \frac{|u(x)\gamma(x) - u(y)\gamma(y)|}{|x - y|^{\delta_0}} \right\}^{\frac{1}{p}} \times \left\{ \int_a^b \gamma^p(x) |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1 - \gamma_0}{p}},$$

где

$$\gamma(x) = (x - a)^{\alpha + \delta_0} (b - x)^{\beta + \delta_0}, \quad 0 < \delta_0 \leq \delta, \quad \gamma_0 = \frac{1}{1 + \delta_0 p}.$$

Следствие. Для любой функции $u(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$ и при любом $p \geq 1$ существует $q_1 > 0$ такое, что

$$\sup_{a < x < b} \{ |u(x)| Q(x) \} \leq q_1 H_{\delta}^{\gamma}(uQ) \left\{ \int_a^b Q_1(x) |u(x)|^p dx \right\}^{\frac{1 - \gamma}{p}}, \quad \text{где}$$

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha + \delta} (b - x)^{\beta + \delta}, \quad Q_1(x) = Q^p(x), \quad \gamma = \frac{1}{1 + \delta p}.$$

Определение 3. Скажем, что $u(x) \in H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$, если она принадлежит $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\omega(u\Psi, \xi)}{\omega\xi} = 0.$$

Теорема 7. Пространство $H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$ является собственным подпространством пространства $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$.

Доказательство. По определению $H^0(\omega_1, \omega_2, \omega) \subset H(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Линейность $H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$ очевидна. Докажем полноту $H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$ в метрике пространства $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Пусть $\{u_n(x)\} \subset H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$ — любая фундаментальная последовательность, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow 0} \|u_n - u_m\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = 0.$$

В силу полноты $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ существует $u_0(x) \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_0\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} = 0.$$

В силу замечания 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что при любом $\xi \in [0, b - a]$

$$\frac{\omega[(u_N - u_0)\Psi, \xi]}{\omega(\xi)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $u_N(x) \in H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$, то для $\varepsilon > 0$ существует $\eta(\varepsilon, N) > 0$ такое, что при $0 < \xi < \eta(\varepsilon, N)$

$$\frac{\omega(u_N\Psi, \xi)}{\omega(\xi)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\omega(u_0\Psi, \xi)}{\omega(\xi)} \leq \frac{\omega[(u_0 - u_N)\Psi, \xi]}{\omega(\xi)} + \frac{\omega(u_N\Psi, \xi)}{\omega(\xi)} < \varepsilon,$$

т. е. $u_0(x) \in H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Для завершения доказательства заметим, что функция

$$u(x) = \frac{1}{\omega_1(x - a)\omega_2(b - x)}$$

принадлежит $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$, но не принадлежит $H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$. Из теорем 2 и 3 следует

Теорема 8. Для компактности множества $K \subset H^0(\omega_1, \omega_2, \omega)$ необходимо и достаточно чтобы:

- 1) множество K было ограниченным;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(x) \in K$ существовало $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < \xi < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\frac{\omega(u \Psi, \xi)}{\omega(\xi)} < \varepsilon.$$

Отметим, что условие 2 теоремы 8 можно заменить следующим: 2') для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(x) \in K$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in (a, b)$ и $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{\omega(|\Delta x|)} W(x, \Delta x) < \varepsilon.$$

Рассмотрим линейный сингулярный оператор

$$Au = \int_a^b \frac{u(s)}{s-x} ds = v(x). \quad (11)$$

Лемма 4. Пусть непрерывная в (a, b) функция $u(x)$ такова, что

$$\int_a^b \frac{\omega_x(u, t)}{t} dt < \infty.$$

Тогда для сингулярного оператора (11) справедливы неравенства:

$$|v(x)| \leq \begin{cases} C_1 \left[\frac{1}{x-a} \int_0^{\frac{x-a}{2}} |u(a+t)| dt + \frac{1}{b-x} \int_0^{\frac{b-x}{2}} |u(b-t)| dt + \int_0^{\frac{x-a}{2}} \frac{\omega_x(u, t)}{t} dt + \int_{\frac{x-a}{2}}^{\frac{b-x}{2}} \frac{|u(x+t)|}{t} dt \right] \text{ при } a < x \leq \frac{a+b}{2}, \\ C_2 \left[\frac{1}{x-a} \int_0^{\frac{x-a}{2}} |u(a+t)| dt + \frac{1}{b-x} \int_0^{\frac{b-x}{2}} |u(b-t)| dt + \int_0^{\frac{b-x}{2}} \frac{\omega_x(u, t)}{t} dt + \int_{\frac{b-x}{2}}^{\frac{x-a}{2}} \frac{|u(x-t)|}{t} dt \right] \text{ при } \frac{a+b}{2} < x < b, \end{cases} \quad (12)$$

$$|v(x + \Delta x) - v(x)| \leq C_3 \left[\frac{|\Delta x|}{(x-a)^2} \int_0^{\frac{x-a}{2}} |u(a+t)| dt + \frac{|\Delta x|}{(b-x)^2} \int_0^{\frac{b-x}{2}} |u(b-t)| dt + \int_0^{\frac{|\Delta x|}{2}} \frac{\omega_x(u, t)}{t} dt \right]$$

$$+ |\Delta x| \int_{|\Delta x|}^{\frac{x-a}{4}} \frac{\omega_x(u, t)}{t^2} dt + |\Delta x| \int_{|\Delta x|}^{\frac{b-x}{4}} \frac{\omega_x(u, t)}{t^2} dt + \frac{|u(x + \Delta x)| \cdot |\Delta x|}{(x-a)(b-x)} \Bigg], \quad (13)$$

где

$$|\Delta x| \leq G(x) = \min \left\{ \frac{x-a}{4}, \frac{b-x}{4} \right\},$$

$$\omega_x(u, t) = \sup_{|x_1 - x_2| < t, \frac{3a+x}{4} < x_1, x_2 < \frac{3b+x}{4}} |u(x_1) - u(x_2)|.$$

Рассуждение ведется точно так же, как в (7) при доказательстве аналогичного неравенства.

Теорема 9. Сингулярный оператор (11) действует ограниченно в пространстве $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in H(\omega_1, \omega_2, \omega)$ — любая функция. Оценивая каждое слагаемое правых частей неравенств (12), (13) [при $|\Delta x| > G(x)$ $|v(x + \Delta x) - v(x)|$ оценим по неравенству (12)], получим

$$|v(x)| \leq \frac{\text{const}}{\omega_1(x-a)\omega_2(b-x)} \|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}, \quad (14)$$

$$|v(x + \Delta x) - v(x)| \leq \text{const} \frac{\omega(|\Delta x|)}{W(x_1, \Delta x)} \|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}. \quad (15)$$

Из этих неравенств следует

$$\|Au\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)} \leq \text{const} \cdot \|u\|_{H(\omega_1, \omega_2, \omega)}.$$

Из последней теоремы, когда $\frac{\sigma}{\omega_1(\sigma)\omega(\sigma)}, \frac{\sigma}{\omega_2(\sigma)\omega(\sigma)}$ удовлетворяют условиям (a) — (e), получаются теоремы Х. Ш. Мухтарова [7] и А. А. Бабаева [8], а при $\omega_1(\sigma) = \sigma^\alpha, \omega_2(\sigma) = \sigma^\beta, \omega(\sigma) = \sigma^\delta, 0 < \alpha, \beta, \delta < 1$ — теорема А. И. Гусейнова [5] без ограничения $\alpha + \delta < 1, \beta + \delta < 1$. Из теорем 3 и 9 следует

Теорема 10. Сингулярный оператор

$$Su = \Psi(x) \int_a^b \frac{u(s)}{\Psi(s)(s-x)} ds,$$

где

$$\Psi(x) = \omega(x-a)\omega_1(x-a)\omega(b-x)\omega_2(b-x),$$

действует ограниченно в классе $H^0(\omega)$.

Следствие. При любом $\alpha \in (0, 2)$ существует $\delta \in (0, 1), \delta < \alpha$, такое, что сингулярный оператор

$$Su = (x-a)^\alpha (b-x)^\alpha \int_a^b \frac{u(s)}{(s-a)^\alpha (b-s)^\alpha (s-x)} ds$$

действует ограниченно в классе H_δ^0 . Это следствие для $\alpha \in (0, 1)$ доказано в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
2. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, 1963.

3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
4. Барн Н. К., Стечкин С. Б. Тр. Тр. Московского матем. об-ва, т. V, 1956.
5. Гусейнов А. И. Изв. АН СССР, серия матем., т. 12, 1948.
6. Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. „ДАН СССР“, т. 168, 1966, № 5.
7. Мухтаров Х. Ш. Докт. дисс. Тбилиси, 1968.
8. Бабаев А. А. „ДАН СССР“, т. 170, 1966, № 5.

Поступило 7. VII 1969

Э. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Мəһəммəдов

$H(\omega, \omega_1, \omega_2)$ синфинин бə'зи хассəлəри һаггында

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə H_δ вə $H_{\alpha, \beta, \delta}$ фəзаларында мултипликатив бəрабəрсизликлəр мۈəјјəнлəшдирилмиш вə $H_{\alpha, \beta, \delta}$ фəзасы ۈчۈн тəснифат теоремлəри исбат едилмишдир.

Үмумилəшмиш $H(\omega, \omega_1, \omega_2)$ синфиндə сингулјар операторун инвариантлыгы һаггында теорем исбат олунмушдур. Хۈсуси һалда $H_{\alpha, \beta, \delta}$ фəзасында $\alpha + \delta \geq 1$, $\beta + \delta \geq 1$ олан һалда инвариантлыгы мۈəјјəн едилмишдир.

АЗƏРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə ријазиијат елмлəри серијасы, 1970, № 1—2.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 1—2.

Һ. Б. АБДУЛЛАЈЕВ, Ч. Ш. АБДИНОВ

ЛЕНИН ВƏ МҮАСИР ТƏБИƏТШҮНАСЛЫГ

Мүасир елм онун јолуну əн габагчыл вə ингилаби нəзəријə олан диалектик-материализмлə ишыгландыран марксист-ленинчи идејанын мۈһۈм тəсири илə инкишаф едир. Тəбиəтшۈнаслыг елмлəринин инкишафындакы һəр бир аддым диалектик материализм мۈддəаларынын һəгигилијини, даһи Ленин идејаларынын тəнтəнəсини тəсдиг едир. Елмин мүасир инкишафы вə наилијјəтлəри кəстəрир ки, елми вə тəчрۈби дəлиллəрə əсасланараг тəбиəт, чəмијјəт вə инсан тəфəккۈрۈ инкишафынын əн ۈмуми ганунларыны ачан, бунунла да дۈнјаны дəрк етмəкдə вə ону ингиллаби сурəтдə дəјишдирмəкдə инсанлара дۈзкۈн јол кəстəрэн јеканə елми нəзəријə марксизм-ленинизм фəлсəфəсидир.

Тəбиəт елмлəри арасында мۈһۈм јер тутан физика елми мадди аламин објектив хассəлəрини, материјанын һəрəкəт формаларыны вə онларын гаршылыгы чеврилмəлəрини ашкар едир, физики һадисəлəри сəчијјəлəндирэн кəмијјəтлəрин асылылыгыны өјрəнир. Дикəр тəрəфдэн, тəбиəтдə елə бир һадисə јохдур ки, онун физики чəһəти вə əсасы олмасын. Она кəрə дə тəбиəтшۈнаслыгын бۈтۈн саһəлəринин инкишафында физиканын иштиракы зəруридир. Сон иллəр физиканын сۈр'əтли инкишафы кайнатда кедэн тəкамۈл вə инкишаф просеслəри һаггында бизим тəсəвۈрлəримизи кенишлəндирир, дۈнјанын диалектик-материалист мənзəрəсини тəсдиг едир, зəнкинлəшдирир. Физикада мۈһۈм кəшфлəр вə јениликлəр материалист дۈнјакөрۈшۈнүн əсаслы мəсəлəлəри илə—објектив варлыг, материјанын мөвчудлуг вə һəрəкəт формалары, ганунајјунлуг вə сəбəбијјəт, мəкан вə заман, əксиликлəрин вəһдəти вə мۈбаризəsi, кəмијјəтин кəјфијјəтə кечмəsi, инкары инкар вə с. илə сых əлагəдар олдуғундан Маркс, Енkelс вə Ленин физикаја тəбиəт елмлəринин əсасы кими фəлсəфə илə рабитəдə олан бир елм кими бахмышлар.

XIX əсрин 40—80-чы иллəриндə тəбиəтшۈнаслыгда енержинин итмəмəsi вə чеврилмəsi, Менделєвдин элементлəрин дөври системи ганунлары, електромагнит нəзəријјəsi, Дарвинизмин əсаслары вə организмин һۈчєјрəви гурулуша малик олмасы кими кəркəмли кəшфлəр олмушдур. Бу наилијјəтлəри Ф. Енkelс узун иллəр К. Марксла бирликдə тəдгиг едэрək өз „Анти—Дۈринг“ вə башга əсəрлəриндə јекунлашдырмыш вə диалектик-материализм нөгтеји-нəзəриндэн ۈмумилəшдирилмишдир. Һəм дə кəстəрилмишдир ки, бу кəркəмли вə јени кəшфлəрин метафизики вə механики бахышларла һеч бир əлагəsi јохдур. Белəликлə, Маркс вə Енkelс кۈлли мигдарда инандырычы вə гۈввəтли дəлиллəрə əсасланараг диалектик-материализмин гۈдрəтини вə һəјати-лијини парлаг шəкилдə нۈмајиш етдирмишлəр. Тəəссۈф ки, бир сыра тəбиəтшۈнаслар буну кəрмəмиш вə əввəлки кими јени ганун вə кəшф-

лэри көһнэ механики вэ метафизики бахышларын чэрчивэси дахилиндэ изаһ етмэжэ чалышмышлар.

XIX эсрин ахырлары-XX эсрин эввэллэриндэ тэбиэтшүнаслыгын, биринчи нөвбэдэ физиканын элдэ етдији наилијјэтлэр (радиоактив шүаланманын, элементлэрин чеврилмэсинин, атомун мүрэккэб гурулуша малик олмасынын, материјанын электрон нэзэријјэсинин, Планкын квант гипотезлэринин, нисбилик нэзэријјэсинин вэ с. мејдана чыхмасы) механики вэ метафизики бахышларын эсассызлыгыны вэ онларын микроалэмдэ баш верэн һадисэлэри изаһ етмэкдэ ачиз олдуғуну ајдын етди. Буну алимлэр артыг өзлэри дә һисс едирди. Лакин јени кэшфлэрин бэ’зи мүэллифлэри классик физиканын чэрчивэсиндэн чыхмаға чүр’эт етмэјиб, һэр шеји һэмин физикадан ма’лум тэсэввүрлэрэ ујғун шәкилдэ изаһ етмэк истәјирдилэр. Бир сыра алимлэр исә физиканын бөјүк вэ дэрин маһијјәтли јениликлэрини материјанын „јох олмасы“, онун енержи илә әвэз олунмасы, енержинин „итмәси“, материалист дүнјакөрүшүн ифласа уғрамасы кими гәләмә вериб диалектик материализмә гаршы һүчум едир вэ идеализми елмә сүрүјүб кәтирмәжэ чалышырдылар.

Классик физикаја әсасланан метафизик-механики материализмин јени фактлары изаһ етмәсиндә ачиз галдыгыны көрән бир груп физиклэр исә дејирдилэр ки, классик физиканын пуча чыхан әсас принциплэри шүүрдан кәнар шејлэрин ин’икасы олмајыб, шүүрун маһсулудур.

Идеализмин вэ мүртәчә буржуа фәлсәфэсинин тэбиэтшүнаслыгдан бу чүр истифадә етмәсини гәти дәф етмэк, елмин ән јени кэшфлэринин фәлсәфи үмумиләшдирмәсини вермәк лазым иди. Белә чәтин вэ шәрәфли вәзифәни В. И. Ленин өһдәсинә көтүрдү вэ өзүнүн „Материализм вэ емпириокритисизм“, „Фәлсәфә дәфтәрлэри“, „Марксизмин үч мәнбә вэ үч тәркиб һиссәси“, „Карл Маркс“ вэ с. әсәрлэриндә чох мүкәммәл бир сурәтдә јеринә јетирди.

В. И. Ленин тэбиэтшүнаслыгдакы, хүсусән физикадакы кэшфлэри дәриндән тәһлил едәрәк сүбут етди ки, бу кэшфлэр диалектик материализми нәинки тәкзиб етмир, әксинә, онун дүзкүнлүјүнү тәсдиг едир. Лакин елми дүнјакөрүшү олмаг е’тибарилә материализми даһа да инкишаф етдирмәк, ону јени елми кэшфлэрлә зәнкинләшдирмәк лазымдыр. Ленин өз фәлсәфи әсәрлэриндә, хүсусән „Материализм вэ емпириокритисизм“ әсәриндә диалектик материализмин, демәк олар ки, бүтүн әсас мәсәлэләрини конкретләшдирди, елмин ән јени наилијјәтлэри әсасында дәринләшдирди, даһа да инкишаф етдирди. Бу әсәрлэр тэбиәтдәки сонсуз һадисэлэрин маһијјәтини өјрәнмәкдә елмлэрин гаршысында һәдсиз перспективлэр ачды вэ мүасир физиканы идеализм бөһранындан хилас етди.

В. И. Ленин көстәрди ки, „физики“ идеализмин әсас сәбәблэрин дән бири материјанын фәлсәфи тә’рифинин сәһв олараг материјанын физики гурулушу вэ хассәлэри һаггында тәсәввүр кими баша дүшүлмәсиндә иди. Ленин јазырды: „Материја инсана өз дүјғулары илә бәлли олан, дүјғуларымыздан асылы олмајараг мөвчуд олан вэ дүјғуларымызла сурәти алыннан, шәкли алыннан, ин’икас едән объектив реаллығы көстәрмәк үчүн фәлсәфи бир категоријадыр“. Бу фәлсәфи тә’риф үмуми материја анлајышыны мадди объектләрә јалныз мүәјјән шәраитдә, мүәјјән һалларда хас олан бу вә ја башга конкрет хассәләрлә һөкмән әләгәләндирмәкдән азад етди. Мәһз бу тә’рифи әсас тутараг енеркетизм чәрәјаны тәрәфдарларына, күтләни материја илә ејниләшдирәнләрә вэ с. гаршы гәти мүбаризә апармаг мүмкүн олду.

Физики идеалистлэр, елми кэшфлэри, мәсәлән, күтләнин сүр’әти артдыгча бөјүмәсини, атомун даһа кичик һиссәләрә бөлүнмәсини материјанын јоха чыхмасы кими, еләчә дә материализмин фәлакәтә уғрамасы кими гәләмә верирдилэр.

В. И. Ленин физики идеализмин мејдана кәлмәсинин башга бир сәбәбини релјативизмдә, јә’ни биликләримизин нисбилији принципиндә, физиклэрин идрак просесиндә нисби һәгигәтлә мүтләг һәгигәтин гаршылыглы мүнәсибәтини дүзкүн дәрк етмәмәлэриндә, диалектиканы билмәмәлэриндә көрүрдү.

„Физики“ идеалистлэр материјанын гурулушу вэ хассәлэри саһәсиндә баш верән јени кэшфлэрин, классик физикада әввәлләр мүтләг вэ дәјишилмәз һесаб едилән принциплэрин, ганунларын дәјишкәнлијини, көһнә һәгигәтлэрин, һәтта шүбһәсиз вэ гәти һесаб едилән һәгигәтлэрин нисби, кечичи олдуғуну ашкара чыхармасы фактындан үмумијјәтлә объектив һәгигәтин мөвчуд олмамасына, мүтләг һәгигәтин јохлуғуна даир нәтичә чыхарырдылар. В. И. Ленин јазмышдыр: „Мүасир физикадакы бөһранын маһијјәти ондан ибарәтдир ки, көһнә ганунлар вә әсас принциплэр тамамилә позулур, шүүр харичиндәки объектив реаллыг рәдд едилир, јә’ни материализм идеализмлә вә агностисизмлә әвэз олунур“ (Әсәрлэри, 14-чү чилд, сәһ. 269).

Елмин инкишафында классик механика илә јени физики нэзәријләр арасында, онлары мүтләг һәгигәтин дәрк едилмәсинин тарихи пилләлэри кими сәчијјәләндирән вәрәсәлик әләгәси ашкара чыхарылды вэ мүәјјән едилди ки, квант механикасы вэ классик механиканын ганунлары мүәјјән шәраитдә узлашараг ејни нәтичә верир. Диалектик материализм „шејлэрин дәјишмәз маһијјәтинә“ даир махист иддиаларыны рәдд едәрәк көстәрир ки, дәјишмәз олан анчаг инсан тәфәккүрүнүн харичи әләми әкс етдирмәсидир. В. И. Ленин јазырды: „Марксын вэ Енкелсин фикринчә, авара профессор фәлсәфэсинин тәсвир етдији ма’нада һеч бир башга „дәјишмәзлик“, һеч бир башга „маһијјәт“ вә һеч бир „мүтләг субстансија“ јохдур. Шејлэрин „маһијјәти“ вә ја „субстансија“ да һәмчинин нисбидир; бунлар јалныз объектлэри инсанын кетдикчә даһа дәриндән дәрк етмәсини көстәрир вә бу дәриндик дүнән атомдан о јана кечмирисә вә бу күн электрондан вә ефирдән о јана кечмирисә, диалектик материализм исрар едир ки, тәбиәти, тәрәгги етмәкдә олан инсан елминин дәрк етмәк јолунда кечдији бүтүн бу дөврләр мүвәггәти, нисби, тәгриби характердәдир. Электрон да атом кими түкәнмәздир, тәбиәт сонсуздур, лакин о сонсуз да мөвчуддур“ (Әсәрлэри, 14- чилд, сәһ. 274).

Мүасир физика тәбиәт сирлэринин дәринликлэринә нүфуз етмиш, Ленин узагкөрәнлијини тәсдиг едәрәк атом нүвәсинин вә элементар һиссәчиклэрин дә мүрәккәб гурулуша малик олдуғуну ашкара чыхармышдыр. Лакин мүасир физиканын наилијјәтлэри јени-јени фәлсәфи мәсәлэләр ортаја атыр вә онларын диалектик материализм мөвгәјиндән һәллини тәләб едир. Бу мәсәләләрдән ән башлычасы объектив реаллыг проблемидир. Һәмин проблем ашағыдакы суала чаваб истәјир: анчаг чиһазларын көмәји илә һисс едилә билән микроһиссәчикләр дә макроәләм кими объектив реаллыг олараг мөвчуддурму? Мәсәлән, әкәр һәрәкәт едән электрон дәстәси мүәјјән шәраитдә һиссәчикләр сели кими, мүәјјән шәраитдә исә далға групу кими гәбул едилирсә, онда белә әкс хүсусијјәтлэри олан электрона объектив реаллыг кими бахмаг олармы?

Көркәмли физик Шрединкерә көрә микроһиссәчијә, әсасән далға тәбиәти хасдыр. Онун һиссәчик тәбиәти исә көмәкчи характер дашыјыр, анчаг башлангыч далғанын интерференсијасы нәтичәсиндә өзүнү көстәрир.

Бор вә Һејзенбергин мулаһизәсинә әсасән, микрообъект анчаг һиссәчик хассәсинә маликдир, онун далға хүсусијјәти исә символик характер дашыјыр. Микрообъектлә апарылан өлчмәләрдә онун өлчү чиһазы илә идарә олуна билмәјән гаршылыглы тә’сири вардыр. Бу гаршылыглы тә’сир нәтичәсиндә микрообъектин импульсуну вә координатыны ејни

заманда тә'јин етмәк мүмкүн олмур. „Идарә олуна билмәјән гаршы-лығы тә'сир“ ифадәси фәлсәфи нөгтеји-нәзәрден сәһвдир, белә ки, мөвчуд олан бүтүн тәбиәт һадисәләри дәркедилән вә идарә олуна-дыр. Мүасир идеалист фәлсәфә гејри-мүәјјәнлик принципна әсасла-нараг иддиа едир ки, куја объектив реаллыг анчаг классик физикаја тәтбиг олуна биләр вә Квант физикасы ганунлары анчаг өлчмәләрдә мејдана чыхыр. Бор, өз сон ишләриндә „идарә олуна билмәјән гаршы-лығы тә'сир“ анлајышыны гәбул етмәјәрәк көстәрир ки, Квант меха-никасында биз өлчмә дәгиглијинин мәһдудлуғу илә дејил, классик ганунларын тәтбигинин мәһдудлуғу илә растлашырыг. Һејзенбергин „гејри-мүәјјәнлик“ принципнән чыхан гејри-материалист көрүшә гаршы Де Бројл, Бом вә башга физикләр е'тираз едәрәк көстәрмиш-ләр ки, микрообъект һәр һансы мүшәһидәсиз дә мөвчуддур. Һәрәкәт едән һәр һансы чисмә (о чүмләдән елементар һиссәчијә) далға хүсу-сијјәти хасдыр. Демәли, истәнилән просесдә далға вә һиссәчик бир-ликдә вә мүәјјән вәһдәтдә мөвчуд ола биләр.

Гејд етмәк ләзымдыр ки, јухарыда адлары чәкилән көркәмли физикләрин микроһиссәчикләрин объектив варлыг олмасы һаггындакы фикирләриндән В. И. Ленин тәрәфиндән һәлә „Материализм вә емпи-риокритисизм“ китабында бәһс едилмишдир. В. И. Ленин бу китабда јени физика кәшфләринин идеалистчәсинә јозулмасынын там әсассыз-лығыны ашкара чыхармыш вә идеализмә јуварланмыш олан махист физикләрә гәти шәкилдә белә бир суал вермишди: электрон инсан шүүрундан харицдә, объектив реаллыг олараг мөвчуддур ја јох? Ленин дејирди: „Тәбиәтшүнаслар тәбиәтин инсандан әввәл вә үзви материја-дан әввәл мөвчуд олдуғуну тәрәддүдсүз гәбул етдикләри кими, бу суала дә һәмишә вә тәрәддүд етмәдән бәли чавабы вермәли олачаг-лар вә верирләр. Бунунла да мәсәлә материализмин хејринә һәлл едилмиш олур...“ (Әсәрләри, 14-чү чилд, сәһ. 273).

Классик механикада заман вә мәкана материјанын объектив вар-лыг формасы кими бахылыр, онларын бир-бириндән вә материјанын һәрәкәтиндән асылы олмадығы гәбул едилир. Нјүтонун фикринчә, чисим-ләр вә онларын һәрәкәти заманын ахынына вә мәканын хассәләринә һеч бир тә'сир көстәрмир.

Нисбилик нәзәријјәси классик физика бахышларынын мәһдудлу-ғуну көстәрәрәк, диалектик материализмин материјанын мөвчудлуғ формалары олан заман вә мәкан һаггындакы мүддәаларыны тәсдиг едиб конкретләшдирди. Ејнштејнин үмуми нисбилик нәзәријјәсинә көрә заман вә мәкан материјанын ајрылмаз хассәси олуб, онсуз мөв-чуд дејил, онунла дәјишир вә ондан асылыдыр. Көрүндүјү кими, бу нәзәријјәдә мәкан-заман һаггында идеалист концепсија вә Нјүтонун физики хассәсиз объектив мәкан анлајышы атылмышдыр ки, бу да диалектик материализмин јени гәләбәсидир.

Мүасир физиканын башлыча фәлсәфи мәсәләләриндән бири дә сәбәб вә нәтичәдир. Классик физика иддиа едирди ки, һәр һансы тәбиәт һадисәсинин әсасында мүәјјән ганунлар дурур вә бу ганун-ларла чисимләрин мүәјјән шәраитдә өзүнү нечә апарачағыны тә'јин етмәк олар. Башга сөзлә, һәр һансы объектин вәзијјәтиндә баш верән дәјишмәләрин мүәјјән сәбәби вар вә буна көрә дә объектин өзүнү апармасы мөһкәм ганунлара табедир.

Квант физикасында исә бир сыра һадисәләрин ганунаујғунлуғуну әввәлчәдән демәк мүмкүн дејилдир. Буну белә бир мисалла ајдын-лашдыраг. Фәрз едәк ки, ејни далға функцијасы илә характеризә олу-нан электронлар верилмишдир. Әкәр һәмин электронлар ејни бир чиһазла гаршылыглы тә'сирдә олсалар, јә'ни биз онларын далға функ-сијасы илә әлағәдар олмајән һәр һансы хассәсини өлчмәк истәсәк, мүәјјән еһтималла мүхтәлиф нәтичәләр алачағыг. Онда белә бир анла-

шылмаз суал чыхыр ки, нә үчүн тамамилә ејни вә ејни вәзијјәтдә олан һиссәчикләр ејни бир чиһазла тә'сирдә олдуғда мүхтәлиф физики нәтичәләр көстәрирләр?

Бор вә Һејзенбергә көрә, микроһиссәчијин чиһазла гаршылыглы тә'сири заманы чиһаздан идарә олунмајән һәјәчанланма алыныр. Әл-бәттә, Бор вә Һејзенберг әслиндә сәбәб вә нәтичәнин әлејһинә чых-мыр. Белә ки, һәр һансы һадисәнин сәбәби һәләлик мә'лум дејилсә, бу онун олмамасы демәк дејилдир. Сәбәб, инсанын ону габагчадан тә'јин едиб-едә билмәјәчәјиндән асылы олмајараг мөвчуддур. Лакин Бор вә Һејзенберг мүәјјән позитивизм тә'сири алтына дүшәрәк, сәбәби инсан ағлынын ону габагчадан тә'јин етмәси илә бағлајырлар.

Де Бројл, Бом, Вијжә вә бир сыра башга физикләр белә һесаб едирләр ки, ејни бир далға әдәдилә характеризә олунан электронлар әслиндә ејни вәзијјәтдә олмајыб, бир-бириндән һәр һансы башга бир параметрлә фәргләнир вә мәһз буна көрә дә онлар башга-башга нәти-чәләр көстәрирләр.

Демәли, бизим, һәләлик микроһиссәчијин өзүнү нечә апарачағыны габагчадан сөјләјә билмәмәјимиз, һеч дә о демәк дејилдир ки, сәбәб вә нәтичә анлајышлары микроаләмә јаддыр. Бәлкә дә садәчә онун нәтичәсидир ки, мүасир Квант физикасынын ганунлары бир сыра фактлары, о чүмләдән микроһиссәчијин дахили вәзијјәти илә әлағәдә олан фактлары нәзәрә алмыр. Гејд етмәлијик ки, сон заманлар мик-роһиссәчикләрин дахили вәзијјәти дәриндән тәдгиг олунур. Ола бил-син ки, бу тәдгигатлар Квант физикасынын елә ганунларыны ачагаг-дыр ки, онларла микроһиссәчикләрин истәнилән андакы вәзијјәтини әввәлчәдән тәсвир етмәк мүмкүн олачагдыр. Һәтта белә бир гануна-ујғунлуғ тапылмаса белә, бу һеч дә о демәк дејилдир ки, тәбиәтдә сәбәбсиз һадисәләр вардыр. Мүасир физикаја белә мә'лум олан мик-роһиссәчикләрин хассәсинин вә дахили гурулушунун мүрәккәблији, онларын гаршылыглы тә'сиринин чүрбәчүрлүјү көстәрир ки, һәр һансы бир ријәзи тәңликлә микроһиссәчикләрин хассәләрини һәртәрәфли тәсвир етмәк чох чәтиндир, бәлкә дә мүмкүн дејилдир.

Диалектик материализм бүтүн дүнјада фәәлијјәт көстәрән ән үмуми ганунлары, һабелә бунларын инсан идракындакы ин'икасыны өјрәнир. О јердә ки, елм фактлары, просесләри тоқламаг вә тәсвир етмәкдән ганунлары мүәјјәнләшдирмәјә, нәзәри нәтичәләр чыхармаға кечир, орада кениш даирәдә фикир јеридән һәр һансы бир физик, кимјачы, биолог, сосиолог елә бир зәминә гәдәм гојмуш олур ки, о бурада фәлсәфәдән, дүнјакөрүшүндән, идрак нәзәријјәсиндән истифадә етмәсә кечинә билмәз.

Истәнилән елм саһәсиндә баш верән һәр бир јенилик диалектик материализм сүзкәчиндән кечирилмәлидир. Тәчрүбә көстәрир ки, ајры-ајры елм саһәләринә аид олан ганунлардан анчаг еләләри һәгиги вүс'әт тапыр ки, о диалектик материализм тәңгидинә давам кәтирмиш вә ону тәсдиг етмиш олсун. Бу нөв ганунлар, һәм дә диалектик мате-риализми зәңкинләшдирди. Дикәр тәрәфдән, анчаг диалектик мате-риализм ганунларына архаланагаг һәр бир конкрет елм саһәсиндә бөјүк перспективли проблемләр гојмаг вә онлардан дүзкүн нәтичә алмаг олар.

Јухарыда көстәрилән фактларын һәгигилијини изаһ етмәк үчүн диалектик материализмин әсас үч ганунунун тәбиәтшүнаслығын бә'зи саһәләриндә тәзаһүрүнү нәзәрден кечирәк.

Кәмијјәт дәјишмәләринин кәјфијјәт дәјишмәләринә кечмәси гануну. Тәбиәти өјрәнәркән бизим көзләримиз гаршысында тәбиәт һадисәләри, просесләри вә шәјләрин бөјүк кәјфијјәт мүхтәлифлији чан-ланыр. Кәјфијјәт ән әввәл шәјләрин вә һадисәләрин мүәјјәнлијидир, онлары һәмин шәј вә һадисә едән бир сыра мүһүм хүсусијјәтләрин,

кәмијјәт дәјишмәләринә кечмәси демәкдир. Бу да тәбиидир, зира јени кәјијјәт јени кәмијјәтлә, јени кәмијјәт мүтәнасибликләри илә үзви сурәтдә ујғуналар.

Кәмијјәт дәјишмәләринин кәјијјәт дәјишмәләринә кечмәси гануну ән әввәл шәйләрин кәјијјәт хусусијјәтләринин, мүәјјәнлијинин өјрә-нилмәсини тәләб едир, чүнки, шәј һаггында бунсуз һеч нә билмәк олмаз. Бу вә ја башга бир груп вә ја синиф һадисәләрин кәјијјәт мүәјјәнлијинин өјрәнилмәси һәмин һадисәләрин инкишафынын хусуси ганунаујғунлуғларыны, башга һадисәләрин ганунларындан ибарәт едилә билинмәјән бу ганунаујғунлуғлары мүәјјән етмәк имканы верән јекәнә дүзкүн јолдур. Мәсәлән, микрообъектләрин анчаг кәјијјәт хусусијјәт-ләрини нәзәрә алмагла анламаг олар ки, нәјә кәрә Нјүтонун классик механикасынын ганунлары микрообъектләрин һәрәкәтини изаһ етмәк үчүн јарамыр, чанлы тәбиәт гејри-үзви тәбиәт ганунларындан фәрғли олан өз ганунлары үзрә јашајыр вә инкишаф едир.

Кәмијјәтин кәјијјәт вә әксинә олараг, кәјијјәтин кәмијјәт кеч-мәси һаггында диалектик гануну рәһбәр тутараг, биз өз идракымызда һәм кәјијјәт просесләрини, һәм дә кәмијјәт просесләрини нәзәрә алмалы, онларын әлагәсини вә гаршылығлы асылылығыны, онларын вәһ-дәтини вә зиддијјәтини, бир-биринә кечмәсини көрмәлијик. Јалныз бу чүр јанашма һәгиги идракын ән мүһүм шәртләриндән бирини тәшкил едир.

Кәмијјәт дәјишмәләринин кәјијјәт дәјишмәләринә кечмәси гануну мүхтәлиф просесләрдә вә мүхтәлиф тарихи шәраитдә спесифик бир сурәтдә тәзаһур едир. Бу ганунун методоложи әһәмијјәти ондадыр ки, һәмин ганун, биринчиси, објектив аләмин бүтүн һадисәләри үчүн үмуми олан инкишаф јолуну кәстәрир вә икинчиси, бу үмумини конкретдә тапмағы, даһа артыг бир мүвәфғәјијјәтлә фәалијјәт кәстәрмәк үчүн һәр бир ајрыча һалда хусуси кечид формаларыны гаврамағы, баша дүш-мәји тәләб едир.

Әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси гануну. Кәмијјәт дәјишмә-ләринин кәјијјәт дәјишмәләринә кечмәси гануну инкишафын ән мүһүм чәһәтләриндән бирини әкс етдирсә дә, инкишафын мәнбәји, о чүмлә-дән кәмијјәт дәјишмәләринин кәјијјәт дәјишмәләринә кечмәсинин мән-бәји һаггында тәсәввур вермир. Бу тәсәввүр Ленинин марксист диа-лектиканын инкишафдагы бүтүн чәһәтләри вә моментләри анламаг үчүн ачар верән нүвәси адландырдығы әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси гануну верир.

Әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси елә бир ганундур ки, бу гануна әсасән бүтүн шәйләрин, һадисәләрин, просесләрин мүбаризә һалында олан дахилин зиддијјәтли чәһәтләри, мејлләри вардыр; әкси-ликләрин мүбаризәси инкишафа дахили импульс верир, зиддијјәтләрин артмасына доғру апарыр вә мүәјјән мәрһәләдә бу зиддијјәтләр көһнә-нин јох олмасы вә јенинин мејдана кәлмәси јолу илә һәлл олунур.

Зиддијјәт дедикдә (дахили зиддијјәт), шәјин әкс чәһәтләри ара-сында елә гаршылығлы мүнсибәт олдуғуну анламаг лазымдыр ки, ејни заманда бу чәһәтләр бир-биринин олмасына ичаб едир, бир-бири үчүн шәртдир, бунула бирликдә бир-бирини инкар едир, истисна едир; тамын чәрчивәси дахилиндә зиддијјәтин бир чәһәти олмаса, о бири чәһәти мөвчуд ола билмәз, ејни заманда бунлар бир-биринә әкс характердә олдуғуна кәрә бир-бирини инкар едир. Бу гаршылығлы асылылыг вә инкар дахили зиддијјәтин башлыча чәһәтидир. Шәјдәки дахили зид-дијјәт әкс чәһәтләрин, мејлләрин вәһдәти бунларын арасында зәрури мүбаризәјә сәбәб олур. Әксиликләрин мүбаризәси белә бир чәһәтин тәбии, ганунаујғун нәтичәсидир ки, шәјин дахилиндәки әксиликләр ејни заманда һәм бир-бири үчүн шәртдир, һәм дә бир-бирини инкар едир. Әкәр әкс чәһәтләр бир-бири үчүн јалныз шәрт олсајды вә бир-бири-

нин мөвчуд олмасыны ичаб етсәјди, амма бир-бирини истисна етмә-сәјди, онда бунларын арасында мүбаризә мүмкүн олмазды. Әкәр онлар бир-бирини јалныз истисна етсәјди, инкар етсәјди, онларын арасында вәһдәт олмасајды, онлар бир-бирилә әлагәдар вә бир-бириндән асылы олмасајды, онда јенә дә онларын арасында мүбаризә вәзијјәти мөвчуд ола билмәзди.

Әкәр шәйләрдә вә һадисәләрдә дахили зиддијјәтләр олмасајды, әкәр әкс чәһәтләр, мејлләр арасында мүбаризә олмасајды, онда шәйләр вә һадисәләр дәјишмәз галарды; инкишаф, кәјијјәт дәјишмәси мүмкүн олмазды, һәр шәј дурғунлуғ һалында оларды. Бу да мәнз о демәк-дир ки, әксиликләрин мүбаризәси инкишафын һәрәкәтвәричи гүввә-сидир.

Мүасир физиканын әлдә етдији наилијјәтләр әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси ганунуну, бу ганунун, Ленинин тә'бири илә десәк инки-шафдагы бүтүн чәһәтләри вә моментләри анламаг үчүн ачар верән „нүвә“ олдуғуна парлаг сүбутлар вермишдир. Ајдынлашдырылмыш-дыр ки, микро вә макроаләмин истәнилән һадисәсиндә диалектик мате-риализмин бу гануну өзүнү кәстәрир.

Мә'лумдур ки, атом мүсбәт јүклү нүвәдән вә бу нүвә әтрафында даима фырланма һәрәкәти едән электронлардан тәшкил олунмушдур. Әкәр мүсбәт јүклү нүвә олмасајды, онун әтрафында фырланан мәнфи јүклү электронлар да олмазды, демәли, атом индики шәкилдә мөвчуд олмазды. Көрүндүјү кими, атом тамынын дахилиндә мүсбәт мәнфинин вә әксинә, мөвчуд олмасыны ичаб едир. Дикәр тәрәфдән, бу мәнфи вә мүсбәт јүклү һиссәчикләр бир-биринә гаршы лагәјд олмајыб даим бир-бирини чәзб едир, јә'ни мүбаризәдәдирләр. Мәнз бу чазибә елек-тронун нүвә әтрафында фырланма һәрәкәтиндә олмасыны тәләб едир. Әкс тәгдирдә сакитликдә дајанмыш мәнфи јүклү электрон мүсбәт јүклү нүвә тәрәфиндән чәзб олунар, онун үзәринә дүшәр вә атомун мә'лум модели позуларды. Электрон фырланма һәрәкәти етдикдә исә она нүвә-нин чазибә гүввәсинин тәрсинә јөнәлмиш мәркәзәгачма гүввәси тә'сир едир вә бу гүввәләр гијмәтчә бәрәбәрләшәрәк атомун позулмаз гуру-лушуну тә'мин едир. Көрүндүјү кими, атомун планетар моделинин мөвчуд олмасы әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси ганунундан доғур.

Јарымкечиричиләр физикасы вә техникасынын да әсасында әкси-ликләрин вәһдәти вә мүбаризәси гануну дурур.

Харичи енержи мәнбәјинин һесабына јарымкечиричи маддәнин валент зонасындан электронлар һәјәчанланараг кечиричи зонаја кечир. Беләликлә, валент зонада мүсбәт јүклү дешик, кечиричи зонада исә мәнфи јүклү электрон, јә'ни әксиликләрин вәһдәти јараныр. Јаранмыш әксиликләр вә онларын мүбаризәси јарымкечиричинин бүтүн спесифик физики хассәләрини мүәјјән едир. Мәс.: әкәр јарымкечиричи нүмунә-нин бојунча температур градијенти јаратсаг, исти учда сөјләдијимиз әксиликләр јаранараг сојуг уча доғру һәрәкәт едәчәк вә јолда бир-бири илә мүбаризәјә жиришәрәк рекомбинасија верәчәкләр. Бу мүба-ризә исти учда электрон-дешик әксиликләринин јаранмасына сәрф олунмуш, истилик енержисинин рекомбинасија заманы ајрылмасына, башга сөзлә десәк, электрон-дешик чүтү һесабына истиликкечирмәјә сәбәб олачагдыр.

Сон вахтлар јүксәк мүгавимәтли јарымкечиричиләрин (мәс.: аморф селен) көмәји илә шәкилчәкмә техникасы-электрофотографија јаран-мыш вә инкишаф етмишдир. Бу техниканын әсасында ашағыдагы һадисә дурур. Јүксәк мүгавимәтли јарымкечиричи лөвһәнин бир үзү сүн'и јолла мүсбәт јүклә јүкләндикдә, бу һалда онун дикәр үзү мәнфи јүклә јүкләнәчәкдир, јә'ни лөвһәдә әксиликләрин вәһдәти јаранага-дыр. Дикәр тәрәфдән, һәмин әксиликләр даим бир-бирини чәзб едәрәк мүбаризә апарачагдыр. Лакин лөвһәнин јүксәк мүгавимәттилији бу

мүбаризэни, j 'ни мәнфи вә мүсбәт жүкләрин гаршылыгы һәрәкәт едәрәк бир-бирини компенсә етмәсини чәтинләшдир. Әкәр лөвһә гаршысында ишыгландырылмыш фигур j ерләшдирсәк, фигурдан әкс олунараг лөвһә үзәринә дүшән шүалар дүшмә j ерләриндә j арымкечиричинин мүгавимәгини хејли азалдачаг вә әксиликләрин мүбаризәсинә шәраит j арадачагдыр. Демәли, фигурда әкс олунараг гаршы үзләри әкс ишарәли жүкләрлә жүкләнмиш j арымкечиричи лөвһә үзәринә дүшән шүаларын шиддәтинә ујғун онларын дүшмә нөгтәләриндә мүсбәт вә мәнфи жүкләрин бир-бирини компенсә етмәси, башга сөзлә, лөвһәнин сәтһиндә фигурун санки жүкләрлә чызылмыш сурәти алыначагдыр. Бу сурәт сонрадан мүхтәлиф j олларла ади кағыз үзәринә көчүрүлүр.

Сәнаједә истифадә олуан жүксәк чәрәјан шиддәтинә вә кәржинлијә малик сабит чәрәјан, адәтән, дәјишән чәрәјанын дүзләндирилмәси j олу илә алыныр. Бу мәгсәдлә әксәр һалларда электрон лампаларындан вә j а j арымкечиричи дүзләндиричиләрдән истифадә едил. Һәр ики методун әсасында j енә дә әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси гануну дурур.

J арымкечиричи дүзләндиричијә бахаг. Садәлик үчүн фәрз едәк ки, j дүзләндиричи электрон вә дешик кечиричилијә малик ики керманиум m арымкечиричи маддәсинин механики контакты нәтичәсиндә j арадылмышдыр. n тип керманиумда электронларын чыхыш иши p тип керманиумдакындан аз олдуғундан, 1-чидән 2-чијә доғру электрон ахыны каш верәчәк вә нәтичәдә n тип керманиумда мүсбәт жүкләрин, p тип терманиумда исә мәнфи жүкләрин һәми тәбәгәси j аранагдыр. Электронларын ахыны j аранмыш потенциаллар фәргинин чыхыш ишләри фәргини компенсә едичәјә вә һәр ики тәрәфдә ферми сәвијәсинин бәрәбәрләшчәји вахта гәдәр давам едәчәкдир. Инди фәрз едәк ки, әксиликләрин вәһдәти j аранмыш бу системә харичи саһә тәтбиг едилмишдир. Садәлик үчүн гејри-әсас дашыјычыларын һәрәкәти һесабына j аранан чәрәјаны нәзәрә алмајаг. Тутаг ки, биз контакта елә ишарәли кәркинлик гошмушуг ки, n област мәнфи, p област исә мүсбәт потенциал малик олур. Онда электронларын n областда енержиси артыр, p областда азалар, беләликлә дә $p-n$ кечиддә потенциал чәпәрин һүндүрлүјү ашағы дүшүр. Бу һалда чәпәри ашараг n областдан p областа кечән электронларын сајы вә әкс истигамәтдә кечән дешикләрин сајы чоһалмыш олачагдыр. Нәтичәдә, контактдан p -дән n -ә тәрәф j өнәлмиш чәрәјан кечир вә гошулан кәркинлик артыгча чәрәјан шиддәти дә бөјүк сүр'әтлә артыр. Чәрәјан мәнбәјинин мүсбәт гүтбү n областа, мәнфи гүтбү исә p областа гошулмуш оларса, башга вәзијјәт j аранар. Бу һалда n областдакы электронлар мүсбәт гүтбә вә p областдакы дешикләр мәнфи гүтбә тәрәф кери чәкилдијиндән $p-n$ кечидинин ени, башга сөзлә, контакта j аранмыш потенциал чәпәрин һүндүрлүјү артачаг вә буна көрә дә әсас дашыјычыларын чәрәјаны кәскин азалачагдыр. Демәли, $p-n$ кечидиндә әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси j алныз бир истигамәтдә чәрәјанын кечмәсинә, беләликлә дә дәјишән чәрәјанын дүзләндирилмәсинә сәбәб олур. Ишыг енержисини електрик енержисинә чевирән вентил фотоэлементләринин ишләмә принципини дә ејни гајда илә изаһ етмәк олар. Физиканын мүхтәлиф саһәләриндән кәтирдимиз мисаллара ишығын дуалист характерини, j арымкечиричи термоэлементләрин иш принципини, сон илләрин көркәмли наилијјәти олан оптик квант кенераторларыны вә минләрчә башга мисаллары дә әлавә етмәк олар.

Материјанын даһа жүксәк һәрәкәт формаларына хас олан зиддијәтләр көһнә илә j ени, өлүб кетмәкдә олан илә доғулмагда олан, мүһафизәкар илә ингилаби вә с. арасындакы зиддијәтләрди. Әлбәттә, жүксәк һәрәкәт формаларында да ашағы формалардакы зиддијәтләр олур. Физики-кимјәви просесләр, бунлардакы специфик зиддијәтләр олмадан үзви һәјат мүмкүн дејилдир. Лакин үзви аләмдә әксиликләрин гаршы-

лыгы фәалијјәти тамамилә башга характердәдир. Биткиләр вә һејванлар өз мөвчудлуғунун дәјишилән шәраитинә ујғунлашыр, онларда j ени хассәләр әмәлә кәлир вә бу хассәләр илә көһнә ирсијјәт арасында зиддијјәт j араныр, дәјишкәнлик илә ирсијјәт арасында „мүбаризә“ кедир, һәмин „мүбаризә“ нәтичәсиндә көһнә ирсијјәт дәјишилир, j ени үзви нөв әмәлә кәлир.

Әксиликләрин вәһдәти вә мүбаризәси ганунунун тәкчә тәбиәтшүнаслыгдакы j еринин гысача нәзәрән кечирилмәси нәтичәсиндә баша дүшүрүк ки, нә сәбәбә Ленин һәмин ганунун марксист диалектикадакы ролуну чоһ жүксәк гијмәтләндирәрәк, зиддијјәтләр һаггында тә'лими диалектиканын „нүвәси“, „мәғзи“ адландырырды. Зиддијјәтләр, онларын һәлли инкишафын әсил һәрәкәтвечиричи гүввәсидир, бу гүввә кәмијјәт дәјишмәләринин кејфијјәт дәјишмәләринә кечмәсинин, көһнә һалдан j ени һалә сачрајышларын, бүтүн мөвчудатын даими, фәсиләсиз һәрәкәтинин әсасыны тәшкил едир. Фәлсәфи категоријаларын сәбәб вә нәтичәнин, имкан вә керчәклијин, тәкчә вә үмуминин, мәзмун вә форманын, зәрурәт вә тәсадүфүн вә с. категоријаларын гаршылыгы әлагәси вә гаршылыгы тә'сири дә ејни әсас үзәриндә гурулмушдур, зира бунларын өз әксилији, бир-биринә кечмәси олмадан мөвчуд ола биләчәји ағлакәлмәздир. Мәһз буна көрәдир ки, зиддијјәтләри, бунларын инкишаф мејлләрини, бунларын һәллинин үсул вә j олларыны чәсарәтлә тәһлил етмәк керчәклијә әсил елми вә ингилаби марксистчәсинә j анашылманын ајрылмаз хассәсидир.

Инкары инкар гануну. Јухарыда шәрһ етдимиз ганунларын тәһлили кәстәрир ки, бу ганунларын фәалијјәти нәтичәсиндә интәһасыз олараг бир гисим һадисәләри вә шејләри башгаларынын әвәз етмәси, әксиликләрин бир-биринә кечмәси просеси баш вермәкдәдир. Диалектик материализмин инкары инкар гануну мадди аләмин бу инкишафынын үмуми истигамәтини, мејлини ашкара чыхарыр. Кејфијјәт дәјишмәси көһнә кејфијјәтин инкары демәкдир. Инкар олмадан биринин дикәринә кечмәси мүмкүн олмазды. Әксиликләрин мүбаризәси бир әксилијин дикәринә галиб кәлмәсилә баша чатыр ки, бу да j енә биринин инкар олунмасы вә дикәринин гәрарлашмасы демәкдир.

Диалектика вә метафизика инкарын маһијјәти мәсәләсини мүхтәлиф чүр баша дүшүр. Метафизика мадди керчәклијин инкишафы просесини тәһриф едәрәк инкары көһнәнин атылмасы, мүтләг мә'нада мәһв едилмәси кими баша дүшүр. В. И. Ленин инкарын белә анлашылмасыны „гуру, „әбәс“ анлајыш адландырырды. Чүнки бу чүр анлајыш кәләчәк инкишаф үчүн һеч бир имкан сахламыр. В. И. Ленин кәстәрирди ки, марксист диалектика үчүн „гуру“, „әбәс“ инкар дејил, „мүсбәт чәһәтләр сахланмагла әлагә моменти, инкишаф моменти“ олан инкар сәчијјәвидир.

Инкар һаггында диалектик анлајыш буну әсас тутур ки, j ени тамамилә көһнәни мәһв етмир, онда олан j ахшы шејләрин һамысыны сахлајыр, һәм дә нәинки сахлајыр, һәтта ону j енидән ишләјир, j ени, даһа жүксәк пилләјә галдырыр. Мәсәлән, атомун Резерфорд тәрәфиндән j ени вә даһа ағлабантар планетар модели вериләркән, һеч дә Томсон модели тамамилә мәһв едилмәмишдир. J енә дә атомун мүсбәт вә мәнфи жүкләрин комплексиндән тәшкили принципи сахланылмыш, лакин j ени моделдә һәмин жүкләр елә пајландырылмышдыр ки, онларын дајаныглыгы мүмкүн олсун. Али организмләр өзләринин мејдана кәлмәси үчүн әсас олан ибтидаи организмләри инкар едәрәк, онлара хас олан һүчәјрә гурулушуну, ин'икасын сечичи характерини вә башга әләмәтләри сахламышлар. J арымкечиричи термоэлементләрин вә башга чиһазларын фајдалы иш әмсалынын жүксәлдилмәси тәләбиндән ирәли кәлән бәрк мәһлуллардан истифадә едилмәси, һеч дә һәмин мәһлуллары тәшкил едән компонентләрин j ахшы хүсусијјәтләринин тамамилә инкар олунмасы илә нәтичәләнмәмишдир. Бурада компонентләрә хас жүксәк

хассэлэр сахланмагла, онлара хас олмајан башга вачиб хассэлэрэ дэ малик олмаг јолу сечилмишдир. Амма нээрде тутмаг лазымдыр ки, јени һеч замаһан көһнәни бүтүнлүклә, ону әввәлки шәкилдә гәбул етмир. О, көһнәдән бунун анчаг ајры-ајры үнсүрләрини, тәрәфләрини көтүрүр, һәм дә бунлары механики сурәтдә өзүнә бирләшдирмир, өз тәбиәтинә ујғун сурәтдә онлары ассимилјасија едир, дәјишдирир. Дикәр тәрәфдән, һәр бир јени әбәди сурәтдә јени олараг галмыр. О, инкишаф едәрәк, даһа јени вә даһа габагчылын мејдана кәлмәси үчүн зәмин јарадыр. Бу зәмин вә шәраит јетишдикдә јенидән инкар башланыр. Бу исә инкары инкардыр, јәни әввәл өзү көһнәни арадан галдырмыш оланын инкарыдыр.

Беләликлә, инкишаф бир-биринин ардынча кәлән сајсыз-һесабыз инкарлар кими, көһнәни јенинин сонсуз әвәз етмәси, арадан галдырмасы кими мејдана чыхыр. Инкары инкар гануну инкишафы дүз хәтт үзрә олан бир һәрәкәт кими дејил, сон дәрәчә мүрәккәб, санки спиралабәнзәр бир просес кими ифадә едир; бурада кечмиш пиллэләр мүәјјән дәрәчәдә тәкрар олунур, мүәјјән дәрәчәдә кечмишә гајыдылыр. В. И. Ленин диалектиканын бу мүнүм чәһәтини көстәрәрәк јазырды: „Кечилмиш пиллэләри санки тәкрар едән, лакин бунлары башга чүр, даһа жүксәк бир әсас үзәриндә тәкрар едән бир инкишаф („инкары инкар“), дүз хәтт үзрә дејил, спирал хәтт үзрә олан инкишаф...“ (В. И. Ленин. Әсәрләри, 21-чи чилд, сәһ. 43).

Чансыз тәбиәтдә инкишафын бу хүсусијјәтинин ән парлаг мисалы Менделејев тәрәфиндән кәшф едилмиш дөври ганун һесабы едилә биләр. Билдијимиз кими, Менделејевин дөври системиндә элементләр өз атом нүвәсинин мүсбәт јүкүнүн мигдарындан асылы олараг јерләшдирилмишдир. Бунлары хассэләринин мүәјјән тәкрары мүшаһидә олунан дөврләр вә сыралар тәшкил едир. Мәсәлән, литиумдан башланан икинчи дөврү көтүрәк. Литиум ајдын нәзәрә чарпан метал хассәсинә малик бир элементдир, гәләви металдыр. Онун ардынча кәлән элементләрдә нүвә јүкү артдыгча металлар үчүн сәчијјәви олан хассэләр азалыр вә гејри-метал хассэләр тәдричән артыр. Дөври системин ахырында ајдын ифадә едилмиш гејри-метал фтор вә тәсирсиз газ олан неон дурур. Нөвбәти, үчүнчү дөвр јенә гәләви метал натриумдан башланыр, гејри-метал олан хлор вә тәсирсиз газ аргонла битир. Сонракы дөврләрдә дә бу һал тәкрар олунур, орада метал хассэләрини гејри-метал хассэләри инкар едир, сонра јени дөврә кечдикдә исә гејри-метал хассэләрини јенидән металларын хассэләри инкар едир. Санки көһнәјә гајытма-инкары инкар баш верир.

Элементләрин бу системини схематик олараг јүксәлән, ачылан спирал шәклиндә тәсвир етмәк мүмкүндүр. Бурада хассэләрин тәкрары кејфијјәтчә башга әсас үзәриндә баш верир: јени дөврүн элементләринин нүвә јүкү даһа бөјүкдүр, онларын гурулушу даһа мүрәккәбдир вә јени хассэләри вардыр.

Диалектиканын нәзәрдән кечирдијимиз ганунлары кими инкары инкар гануну да һәм варлығын, һәм дә идрак просесинин өзүнүн ганунларындан биридир. Бурада ән башлыча чәһәт ондадыр ки, идракын һәрәкәтиндә, онун мәнтигиндә диалектик инкар моменти, онун мүсбәти сахлајан, инсан биликләринин ирәлиләмә инкишафынын шәрти олан бир инкар олмасы чох бөјүк бир гүввәтлә тәзаһүр едир. Бу һәр бир елм саһәсиндә, хүсусилә физика саһәсиндә чалышан әмәкдаша јахшы бәл-лидир вә о, бу гануну тәбиәтин сирләрини ачмагда рәһбәр тутмалыдыр. Инсанын шәјләри дәрк етмәси һисси конкретдән абстракта доғру кедир вә абстрактдан јенә конкретә гајыдыр. лакин елми абстраксија просеси сајәсиндә конкрет бу дәфә даһа дәрин баша дүшүлүр. Мәсәлән, практика нәзәријјәнин башлангыч, чыхыш нөгтәси кими мејдана чыхыр, нәзәријјә практиканын сорғуларына вә тәләбатына чаваб верир.

Лакин практика әсасында мејдана кәлән нәзәријјә јенидән практикаја мүрачиәт едир. Нәзәријјәнин дүзкүнлүјүнү јалныз практика сүбут едә биләр. Демәли, идракын инкишафы практикадан нәзәријјә доғру вә јенә дә нәзәријјәдән практикаја доғру, лакин бу дәфә керчәклик һаггындакы нәзәри биликлә зәнкинләшмиш практикаја доғру гајыдыр. Бунун доғрулуғуна истәнилән физики ганунун формалашмасында шаһид олурур.

Көрүндүјү кими, диалектик материализмин ганунлары ән үмуми универсал характер дашыјыр. Бу ганунлар һәр јердә вә һәр тәрәфдә, истәр чансыз тәбиәтдә, истәр чанлы организмләрдә, истәрсә инсан вә онун тәфәккүрүндә фәалијјәт көстәрир. Практиканын наилијјәтләри вә конкрет, хүсуси елмләрин мүвәффегијјәтләри әсасында мејдана кәлән, онларын наилијјәтләрини үмумиләшдирмәкдән ибарәт олан диалектик материализм онларын инкишафына көмәк едир, елми-тәдгигат методу илә силаһландырыр.

Тәбиәтшүнаслыг инкишаф етдикчә онун фәлсәфә илә әлагәси, гаршылыглы тәсири кет-кедә даһа сых олурур. Ән бөјүк елми наилијјәтләр дөврүндә дәрин фәлсәфи үмумиләшдирмәләр олмадан кечинмәк әсла мүмкүн дејилдир; тәбиәтшүнаслыгын чох бөјүк тәрәггиси, тәбиәтшүнаслыгда баш верән дәрин ингилаби сарсынтылар фәлсәфә илә елмин сых иттифагыны тәләб едир. Белә бир шәраитдә, В. И. Ленинин јаздығы кими, тәбиәтшүнаслыг алим диалектик материалист олмалыдыр.

Р. И. ТАГИРОВ, Г. А. АЖДАРОВ, Б. С. АЛИЕВА, А. И. АЛЕКПЕРОВ,
С. И. ТАИРОВ, М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕСНЫХ УРОВНЕЙ И ДОНОРНО-АКЦЕПТОРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СПЛАВАХ ГЕРМАНИЙ—КРЕМНИЙ

Значительный интерес к исследованиям примесных состояний в полупроводниках связан, с одной стороны, с практическим применением полупроводниковых преобразователей, а с другой стороны—с развитием общих представлений о характере электронных свойств полупроводников. В то же время, несмотря на большое количество работ, посвященных этому вопросу, до настоящего времени энергетические состояния примесных уровней не нашли количественно удовлетворительной интерпретации. Теория эффективной массы [1—4] хорошо объясняет только возбужденные состояния мелких уровней, тогда как их основные состояния и особенно глубоколежащие уровни, используемые при решении ряда прикладных задач, она не может осветить достаточно ясно. Попытки ряда авторов [5—8] получить удовлетворительное согласие теории с экспериментом путем введения некоторых поправок в теорию эффективной массы не привели к существенным улучшениям. Только в одной работе [9] получено некоторое согласие для основных состояний мелких доноров в германии и кремнии (не для всех доноров).

Гелиеподобная модель, привлеченная автором работ [10, 11] для теоретического обоснования примесных уровней шестивалентных доноров и двухвалентных акцепторов в германии и кремнии, не привела к желаемым количественным результатам. Такое расхождение теории с экспериментом может быть связано с неправильным учетом в теоретических расчетах вклада различных факторов, таких как форма потенциала вблизи примесного центра, энергетическая структура полупроводника, значение статической диэлектрической постоянной, индивидуальности отдельных примесей и т. д. Однако трудно сказать, какой именно из этих факторов играет основную роль.

Исследование закономерностей изменения глубины залегания различных примесей в системе германий—кремний с переходом от германия к кремнию, возможно, поможет найти ответ на вышеуказанный вопрос. В этом отношении привлекает внимание изучение глубоколежащих примесных уровней, имеющих важное практическое значение.

Существенное влияние на энергетические состояния примесных уровней оказывает также донорно-акцепторное взаимодействие, приводящее к ряду характерных явлений [12, 13]. Учитывая вышеизложенное, нами были исследованы примесные уровни золота, меди, цинка и ртути, а также взаимодействия атомов галлия и лития в сплавах

германия с кремнием. В зависимости от удобства легирования монокристаллы сплавов германий—кремний выращивались либо вытягиванием из расплава [14], либо зонным выравниванием [15].

Быстродиффундирующие примеси Au, Cu, Li в кристаллы вводились методом диффузии в процессе изотермического отжига. При этом температура и время отжига выбирались в зависимости от скорости диффузии и растворимости примесей [16]. Легирование примесями Zn и Hg производилось из паровой фазы, создаваемой над слитком, в ходе зонной кристаллизации. Глубины залегания примесных уровней определялись из температурной зависимости коэффициента Холла (R). Для этого в каждом конкретном случае анализировалось уравнение нейтральности кристалла и устанавливалось соответствующее решение.

Известно [17], что золото в германии создает глубоколежащий донорный уровень, непосредственное обнаружение которого невозможно, так как на фоне собственной проводимости его вклад остается незаметным. Этот уровень можно наблюдать в том случае, если в кристалле присутствуют акцепторные уровни, расположенные на несколько kT ниже его (k —постоянная Больцмана, T —абсолютная температура). Поэтому золото вводилось в сплавы германий—кремний, обладающие проводимостью p -типа, обусловленной мелкими акцепторными центрами. При этом атомы золота отдают свои единственные валентные электроны мелким акцепторам, и сами работают как акцепторные центры.

Измерения показали, что после легирования золотом концентрация некомпенсированных мелких акцепторов составляет доли процента от первоначальной, т. е. концентрация введенного в кристаллы золота почти равна концентрации мелких акцепторов, но чуть меньше ее. В этом случае уравнение нейтральности можно записать в следующем виде:

$$N_{Au^d} - n_d + P = N_a, \quad (1)$$

где N_{Au^d} —общая концентрация доноров золота, n_d —концентрация нейтральных донорных центров золота, N_a —концентрация мелких акцепторов, P —концентрация дырок в валентной зоне. P и n_d выражаются следующими формулами [18]:

$$P = N_v \exp\left(-\frac{E_F - \Delta E}{kT}\right); \quad (2)$$

$$n_d = \frac{N_{Au^d}}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{-\Delta E - E_F + E_{Au^d}}{kT}\right]}, \quad (3)$$

где $N_v = 2 \left(\frac{2\pi m_g^* kT}{h^2}\right)^{3/2}$, m_g^* —эффективная масса плотности состояний дырок, h —постоянная Планка, ΔE —ширина запрещенной зоны, E_F —уровень Ферми, E_{Au^d} —расстояние донорного уровня золота от вершины валентной зоны. Подставляя (2) и (3) в (1), после упрощения получим

$$P^2 + 4PP^1 - 4P^1 N_{Au^d} = 0. \quad (4)$$

Здесь учтено $N_a = N_{Au^d}$ и принято следующее обозначение:

$$P^1 = \frac{1}{2} N_v \exp\left(-\frac{\varepsilon_{Au^d}}{kT}\right), \quad (5)$$

Принимая во внимание, что $P^1 \ll N_{Au^d}$, из (4) получим

$$P = (2N_v N_{Au^d})^{1/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{Au^d}}{2kT}\right). \quad (6)$$

Из (6) видно, что значения ϵ_{Au}^d можно определить из зависимости $\lg(RT) = f\left(\frac{1000}{T}\right)$ для различных составов сплава, которая показана на рис. 1.

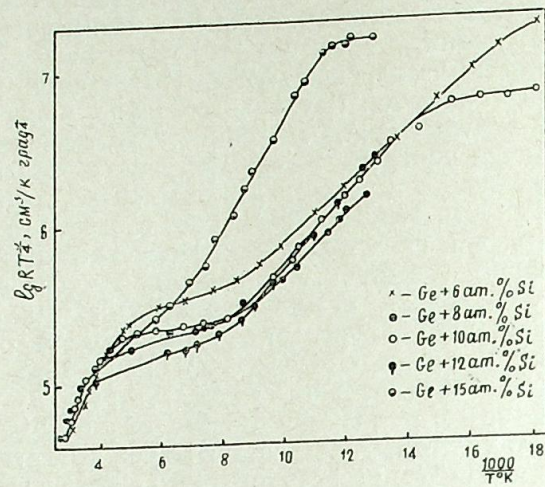


Рис. 1. Зависимость $\lg(RT^{3/4})$ от $\frac{1000}{T}$ в сплавах германий—кремний, легированных золотом.

На рис. 2 представлена температурная зависимость коэффициента Холла для двух сплавов германий—кремний (6 и 10 ат. % Si), легированных медью. Анализ результатов измерений показывает, что в данном случае уравнение нейтральности кристалла не имеет удобного решения для определения энергии активации меди. В кристалле, кроме меди, имеются также мелкие акцепторные центры. Когда мелкие акцепторы ионизованы полностью, уравнение нейтральности заряда кристалла записывается в виде

$$P = N_a + N_{Cu} - n_{Cu},$$

где N_{Cu} —концентрация меди, n_{Cu} —концентрация нейтральных центров из первого акцепторного уровня меди (вклад остальных уровней меди пренебрегаем), которая определяется формулой [18, 19]:

$$n_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{E_F + \Delta E - \epsilon_{Cu}}{kT}\right]}, \quad (8)$$

Здесь ϵ_{Cu} —энергия активации первого акцепторного состояния меди.

Используя выражения (5) (с той лишь разницей, что вместо ϵ_{Au}^d в нем состоит ϵ_{Cu}), (2), (8), из (7) получим

$$P' = \frac{P^2 - PN_a}{(N_a + N_{Cu}) - P}, \quad (9)$$

где

$$(N_a + N_{Cu}) > P > N_a.$$

Знание температурной зависимости P' позволяет из (5) найти ϵ_{Cu} . При этом значения $(N_a + N_{Cu})$ и N_a определяются, соответственно, по высокотемпературному и низкотемпературному насыщениям коэффициента Холла (рис. 2), ϵ_{Cu} вычисляется из наклона кривой зависимости

$$\lg(P'T^{-3/2}) = f\left(\frac{1000}{T}\right).$$

На рис. 3 показана температурная зависимость коэффициента Холла для одного из легированных ртутью сплавов, содержащих 8 ат. % кремния. Такая зависимость R характерна для всех составов. И в этом

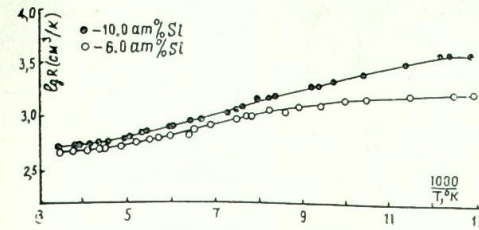


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициента Холла (R) сплавов германий—кремний (6 и 10 ат. % Si), легированных медью.

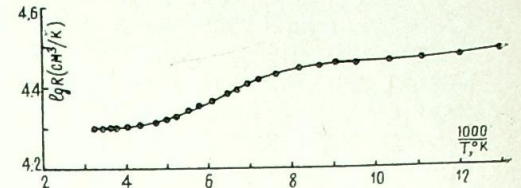


Рис. 3. Температурная зависимость коэффициента Холла (R) сплава германий—кремний (8 ат. % Si), легированного ртутью.

случае уравнение нейтральности не имеет удобного решения. Поэтому энергия активации первого акцепторного уровня ртути определяется как и в случае меди. В качестве примера на рис. 4 представлена зависимость

$$\lg(P'T^{-3/2}) = f\left(\frac{1000}{T}\right)$$

для сплава с 8 ат. % кремния, легированного ртутью, из наклона которой найдено значение энергии активации. Таким же образом опреде-

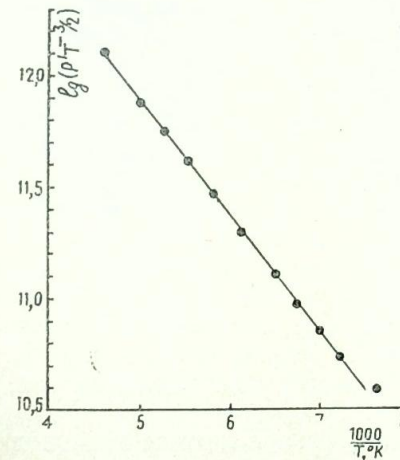


Рис. 4. Зависимость $\lg(P'T^{3/2}) = f\left(\frac{1000}{T}\right)$ для сплава германий—кремний (8 ат. % Si), легированного ртутью.

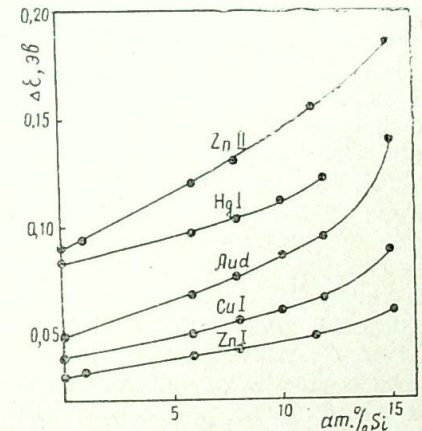


Рис. 5. Изменение глубин залегания различных примесных уровней в зависимости от концентрации кремния в сплаве германий—кремний.

лены энергии активации первого и второго акцепторных состояний цинка [20].

Рис. 5 демонстрирует изменение глубины залегания примесных уровней золота, меди, цинка и ртути в зависимости от концентрации кремния в сплаве германий—кремний. С добавлением кремния в германий все упомянутые примесные уровни смещаются в сторону зоны проводимости. При этом индивидуальности примесей не проявляют себя заметно. Это означает, что причины, вызывающие смещение энергетических состояний различных примесей, едины.

Нужно отметить, что при исследовании электрических свойств легированных медью кристаллов большое внимание уделялось обнаружению признаков наличия ее донорных центров в сплавах германий—кремний. Например, медь в кремнии создает донорный уровень [21, 22], а элемент первой группы—золото, обладающее такой же конфигурацией валентных электронов, создает его в германии и кремнии. Поэтому можно ожидать, что и медь будет создавать донорный уровень в германии. Однако проведенные нами исследования пока не выявили донорного уровня меди даже в сплавах германий—кремний. По-видимому, этот уровень лежит слишком глубоко—вблизи вершины валентной зоны.

Интересным является также наблюдаемый рост в низкотемпературной области (ниже 100°) коэффициента Холла в легированных ртутью сплавах (рис. 3). Предшествующее насыщение показывает, что в этой области температур все центры первого акцепторного состояния ртути уже отдали приобретенные ими электроны в валентную зону. То есть наблюдаемый рост не может быть связан с этим уровнем. Второе акцепторное состояние ртути может проявить себя только в другом—высокотемпературном конце исследованного интервала. Наши исследования показывают, что изменение коэффициента Холла ниже 100°K на рис. 3 не связано также с мелкими акцепторными состояниями. В принципе элементы второй группы таблицы Менделеева как в тетраэдрическом окружении, так и в междоузлиях решетки германия и кремния могут отдавать свои валентные электроны, действуя таким образом как доноры. Действительно, ртуть в кремнии, кроме двух акцепторных уровней, создает еще два глубоких донорных уровня [23]. Имеющиеся в кристаллах мелкие акцепторные уровни благоприятствуют проявлению глубоких донорных состояний. Все это дает основание считать, что вышеупомянутый рост коэффициента Холла связан именно с донорными состояниями ртути в сплавах германий—кремний.

При исследовании донорно-акцепторного взаимодействия в качестве подвижного донора нами был использован литий, акцепторной примесью служил галлий. Большое внимание уделялось выращиванию монокристаллов и распределению примеси галлия в них. Известно [14, 24], что выращивание монокристаллов системы германий—кремний связано с рядом трудностей. Легирование этой системы еще больше затрудняет его. Поэтому при выращивании легированных галлием монокристаллов нам пришлось внести некоторое изменение в геометрию тигля [25]. Для достижения равномерного распределения галлий вводился в подпитывающий слиток.

Нужно отметить, что если насыщение образцов литием производится при высоких температурах, то литий в кристаллы входит в большом количестве, а во время охлаждения их до комнатной температуры избыточный литий выпадает, образуя в объеме образцов дополнительные центры рассеяния носителей тока. В таком случае побочные эффекты не дают возможности изучить донорно-акцепторное взаимодействие. Во избежание этого в образцы, равномерно легированные галлием, литий вводился при 150°C . Значение растворимости лития в германии при 150°C не превышает его при 20°C [12]. Можно думать, что это будет иметь место и для сплавов германия с кремнием. Поэтому после диффузионного отжига при охлаждении образцов не будет и выпадения лития.

На рис. 6 показана температурная зависимость холловской подвижности (кривая 1) для одного из кристаллов (8% ат. кремния), легированных галлием ($3,45 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$) и литием ($3,24 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$). Кривая 2 относится к контрольному образцу, содержащему тоже $3,45 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ галлия. Здесь донорно-акцепторное взаимодействие проявляет себя в

образовании ионных пар. Как видно из рис. 6, в двукратно легированном образце подвижность носителей тока (дырок) в интервале $77—373^\circ\text{K}$ значительно больше, чем в контрольном образце, что является следствием ионного спаривания. Действительно, подвижные положительные ионы лития вследствие теплового движения, блуждая по междоузлиям решетки, на своем пути встречают отрицательные ионы галлия. Благодаря кулоновскому взаимодействию образуются ионные пары. При каждом акте образования ионной пары исключается по два рассеивающих ионизированных центра. Поэтому при температуре жидкого

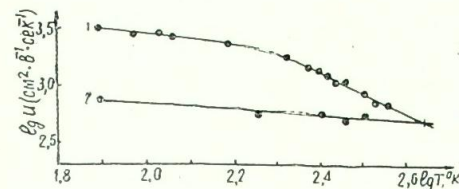


Рис. 6. Температурная зависимость холловской подвижности дырок в сплаве германий—кремний (8 ат. % Si) легированном галлием и литием; 1— $3,45 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ Ga и $3,24 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ Li; 2— $3,45 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ Ga.

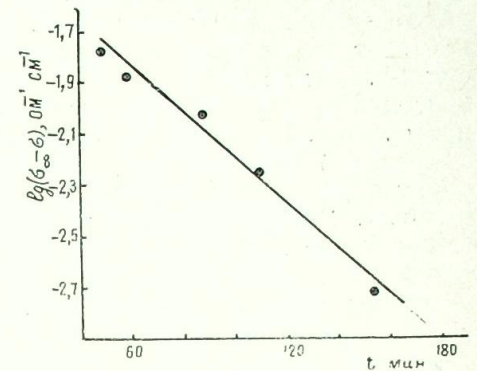


Рис. 7. Зависимость $\lg(\sigma_\infty - \sigma)$ от времени для сплава германий—кремний (8 ат. % Si), легированного галлием ($3,45 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$) и литием ($3,24 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$).

азота в двукратно легированном образце (рис. 6) концентрация рассеивающих центров почти вдвое меньше, чем в контрольном.

С повышением температуры ионные пары диссоциируют, что приводит к увеличению ионизированных центров и уменьшению подвижности носителей тока. Если продолжить кривые 1 и 2, они пересекутся при 442°K . Очевидно, при этой температуре концентрация ионизированных центров рассеяния носителей тока в обоих образцах будет одинакова, т. е.

$$N_{\text{Ga}} + N_{\text{Li}} - 2P = N_{\text{Ga}}. \quad (10)$$

Отсюда

$$P = \frac{N_{\text{Li}}}{2}, \quad (11)$$

Здесь N_{Ga} , N_{Li} и P —соответственно, концентрация галлия, лития и ионных пар. Зная N_{Ga} , N_{Li} , P и температуры пересечения кривых 1 и 2, можно определить a —наименьшее расстояние между противоположно заряженными ионами лития и галлия. Для этого из формулы [12]

$$\lg Q(\alpha) = \lg \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon kT}{l^2} \right)^3 \frac{\frac{P}{N_{\text{Li}}}}{(N_{\text{Ga}} - P) \left(1 - \frac{P}{N_{\text{Li}}} \right)} \right], \quad (12)$$

где

$$\alpha = \frac{l^2}{\epsilon kTa}, \quad (13)$$

нужно вычислить $\lg Q(\alpha)$, по значениям которого из таблицы [12] можно найти α и, наконец, из (13) вычислить a . Здесь e —заряд электрона, ϵ —диэлектрическая постоянная.

При расчете предполагалось, что с переходом от германия к кремнию ϵ изменяется линейно ($\epsilon = 15,6$). Таким образом получено $a = 1,82 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Тетраэдрический ковалентный радиус галлия по Гаулингу

равняется $1,26 \cdot 10^{-8}$ см, а ионный радиус лития — $0,6 \cdot 10^{-8}$ см. Поэтому при ионном спаривании минимальное расстояние между атомами галлия и лития должно равняться $1,86 \cdot 10^{-8}$ см. Вычисленное a несколько меньше этого значения.

Помимо этого, на основе временной зависимости электропроводности была исследована кинетика образования ионных пар. Двукратно легированный образец, предварительно установленный на держателе, подогревали при 100°C в течение 20—30 минут, затем опускали в жидкий азот, после чего быстро переносили в сосуд Дьюара, наполненный сухим льдом. Во время предварительного подогрева часть ионных пар диссоциирует, а при охлаждении до 77°K замораживаются подвижные ионы лития. В термостате снова происходит ионное спаривание.

На рис. 7 в полулогарифмическом масштабе представлена зависимость электропроводности σ от времени для двукратно легированного образца (8 ат. % кремния), содержащего $3,45 \cdot 10^{17}$ см $^{-3}$ Ga и $3,24 \cdot 10^{17}$ см $^{-3}$ Li. Образование ионных пар, очевидно, не изменяет концентрацию носителей тока, а изменяет только их подвижность. При этом справедливо следующее соотношение [12]:

$$\sigma = \sigma_\infty - c \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (14)$$

где t — время, τ — время релаксации, характеризующее процесс образования ионных пар, c — постоянная, σ_∞ — электропроводность при $t = \infty$. При выводе уравнения (14) предполагалось, что изменение концентрационных пар пропорционально концентрации неспаренных ионов, а σ линейно зависит от концентрации ионных пар.

Из (14)

$$\lg(\sigma_\infty - \sigma) = \lg c - \frac{0,434}{\tau} \cdot t. \quad (15)$$

По наклону зависимости $\lg(\sigma_\infty - \sigma) = f(t)$ (рис. 7) можно определить время релаксации, вычисленное значение которого равняется $\tau = 2,93 \cdot 10^3$ сек. Знание τ позволяет вычислить коэффициент диффузии лития в сплавах германий—кремний (8 ат. % кремния) при 206°K [12]:

$$D_0 = \frac{ekT}{4\pi q^2 N_{\text{Li}} \tau}. \quad (16)$$

Значение D_0 равняется $3,31 \cdot 10^{-16}$ см 2 /сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohn W. Solid State Physics, 5, 257, 1957.
2. Schechter D. J. Phys. Chem. solids, 23, 273, 1962.
3. Müller A. M. K. Zs. Naturforschung, 20 a, 11, 1476, 1969.
4. Mendelson K. S. James H. M. J. phys. chem. solids, 25, 7, 729, 1964.
5. Csavinszky P. J. phys. chem. solids, 24, 8, 1003, 1963.
6. Breitenecker M., Sexl R., Thirring W., Zs. Physik, 182, 1—2, 123, 1964.
7. Weiser K. Cull. Amer. Phys. Soc., 6, 2, 156, 1961.
8. Appel J. J. Phys. rev. 133, 1A, A 280, 1964.
9. Kaziyo Harita, Tatsuo, Shimizu. J. Phys. soc. Japan, 16, 12, 2588, 1961.
10. Glodeanu A. Phys. Lett., 14, 4, 268, 1965.
11. Glodeanu A. Phys. Stat. Solidi, 19, 1, k 73, 1967.
12. Reiss H., Fuller C. S., Morin F. J. Bell. Syst. Tech. Journal, 35, 3, 535, 1956.
13. Глазов В. М., Земсков В. С. Физико-химические основы легирования полупроводников. Изд. "Наука", М., 1967.
14. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтактинский М. Г., Вигдорович В. Н., Кулиев А. А. ДАН ССР, серия химич., 176, 851, 1966, № 4.
15. Аждаров Г. Х., Тагиров В. И. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 3.
16. Болтакс Б. И. Диффузия в полупроводниках, Физматгиз, М., 1961.
17. Dunlap W. C. T. Phys. Rev., 100, 1625, 1955.
18. Самойлович А. Г. и Коренблит Л. Л. УФН, 57, 577, 1955, № 4.
19. Смит Р. Полупроводники. ИЛ, М., 1962.

20. Аждаров Г. Х., Тагиров В. И. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 3.
21. Hall R. N., Racette T. H. T. appl. phys., 35, 379, 1964.
22. Kremen A., Czechosl. T. Phys., 18, 713, 937, 1968.
23. Зибун Ю. А. Парицкий Л. Г., Рывкин С. М. ФТТ, 5, 11, 2416, 1963.
24. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтактинский М. Г., Кулиев А. А. "Кристаллография", 10, 5, 751, 1965.
25. Алекперов А. М., Тагиров В. И., Таиров С. И. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. наук", 1969, № 6.

Поступило 2. VII 1969

В. И. Таиров, Г. Х. Аждаров, Б. С. Алијева,
Э. И. Элакберов, С. И. Таиров, М. Г. Шахтактинский

Керманиум-силисиум бәрк мәһлулларында ашгар сәвијјәләринин
вә донор-аксептор гаршылыгы тә'сиринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә керманиум-силисиум бәрк мәһлулларында ашгар сәвиј-
јәләринин вә донор-аксептор гаршылыгы тә'сиринин өјрәнилмәсинә
һәср едилмиш тәдгигатын нәтичәләри верилмишдир. Аш, Си, Зп, Нг
кими ашгарларын енержи сәвијјәләринин силисиумун гатылығындан
асылы олараг дәјишилмәси ајдынлашдырылмышдыр. Донор-аксептор
гаршылыгы тә'сири литиум вә галлиум атомлары арасында ион чүт-
ләри јаранмасы әсасында өјрәнилмишдир. Ион чүтләри јаранаркән
мүхтәлиф адлы ионлар арасындакы мәсафә, релаксасија мүддәти вә
литиум атомунун диффузија әмсалы тә'јин едилмишдир.

АБДУЛЛАЕВ Г. Б., ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ З. А., ДЖАФАРОВА Э. А.
АХУНДОВ М. Р., АЛИХАНОВА Ш. А.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ДИФFUЗИОННЫХ КРЕМНИЕВЫХ $p-n$ -ПЕРЕХОДАХ ПРИ ВЫСОКИХ УРОВНЯХ ИНЖЕКЦИИ И В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

Изучение физических процессов, происходящих в $p-n$ -переходах, созданных на основе различных полупроводниковых материалов, находится в центре внимания многих исследователей. Исследования в этой области расширяют наши представления о распределении квантовых уровней, о процессах освобождения, инжекции, связывания носителей и законах их движения в твердом теле, что дает возможность управлять указанными процессами. Все это привело к открытию ряда новых явлений, лежащих в основе действия важнейших полупроводниковых преобразователей—выпрямителей, квантовых генераторов и усилителей, туннельных диодов, транзисторов, фотоэлектрических и термоэлектрических преобразователей солнечного и других излучений в электрическую энергию. Однако нет теории, полностью объясняющей большое количество фактов и позволяющей предсказать новые свойства $p-n$ -переходов. Ознакомление с работами советских и зарубежных авторов в этой области показывает, что такие важные вопросы, как индуктивные свойства полупроводниковых диодов, влияние примесей, создающих глубоколежащие энергетические уровни в запрещенной зоне, на рекомбинацию и генерацию носителей заряда в $p-n$ -переходе, зависимость коэффициента инжекции $p-n$ -перехода от величины прямого тока, дрейф ионов в сильном поле $p-n$ -перехода и увлечение их потоком подвижных электронов и дырок при прямом смещении, механизм размножения носителей в $p-n$ -переходе, не нашли еще полного всестороннего объяснения. Поэтому представлялось интересным исследование указанных явлений в диффузионных кремниевых диодах.

Нами в течение ряда лет проводилось комплексное исследование физических процессов в $p-n$ -переходах, созданных на основе кремния в широком интервале изменения внешних условий (напряжения смещения, температуры, частоты малого переменного сигнала, освещенности) [1—21]. Объектами для исследований служили $p-n$ -переходы, созданные диффузией алюминия в n -кремний с исходным удельным сопротивлением $\rho = 0,4; 20$ и $60 \text{ ом} \cdot \text{см}$ и диффузией фосфора в p -кремний с $\rho = 0,2$ и $40 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Длина базы во всех диодах была $\sim 0,3 \text{ мм}$. В образцах, изготовленных на основе $n-Si$ с $\rho = 20 \text{ ом} \cdot \text{см}$, длина базовой области изменялась от $0,3$ до $2,8 \text{ мм}$.

Прямая ветвь вольтамперной характеристики (ВАХ). Одним из основных методов исследования полупроводниковых структур, позво-

ляющих получить сведения о происходящих в них физических процессах и проверить правильность той или иной теоретической модели, является измерение ВАХ. В данном случае измерения проводились в интервале температур $77 \div 448^\circ \text{K}$ и напряжений $0 \div 400 \text{ в}$. Были рассмотрены статические, динамические и импульсные ВАХ. На рис. 1 представлена прямая ветвь ВАХ при 300°K для образцов с различной длиной базы d . При малых уровнях инжекции ($U_{пр} < 0,5 \text{ в}$) все ВАХ совпадают, так как сопротивление самого $p-n$ -перехода преобладает над сопротивлением базы и описывается формулой: $I_{пр} = 6,5 \cdot 10^{-9} \times \exp \left(\frac{qU}{\beta kT} \right)$, где $\beta \approx 1,6 - 1,7$. При больших $U_{пр}$ начинает влиять

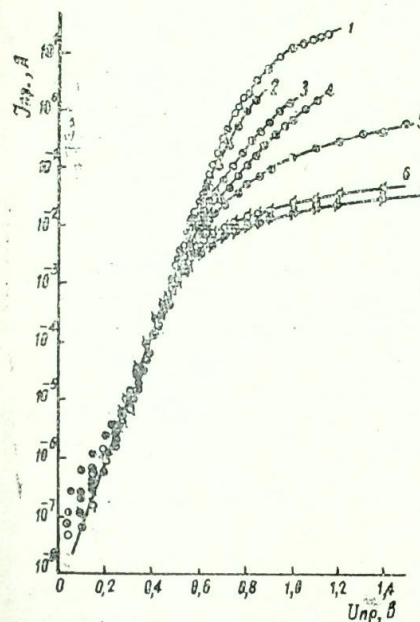


Рис. 1. Вольтамперная характеристика диодов с различной длиной базы при $T = 300^\circ \text{K}$ (1— $d = 0,3 \text{ мм}$; 2— $0,45$; 3— $0,75$; 4— 1 ; 5— $1,3 \text{ мм}$; 6— $2,6 \text{ мм}$; 7— $2,8 \text{ мм}$)

сопротивление базы; часть приложенного напряжения падает на базе. Это особенно ярко видно из рис. 1, где при $I_{пр} \sim 1 \text{ ма}$ кривые $I_{пр}(U_{пр})$ расходятся для различных d .

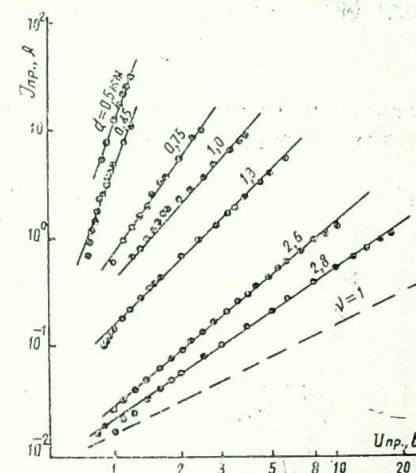


Рис. 2. Зависимость $I_{пр}$ от $U_{пр}$ при больших прямых смещениях при T_k для образцов с различной длиной базы.

В образцах с „тонкой“ базой ($d = 0,3 \text{ мм}$) происходит замедление роста тока с U , т. е. возрастание β до 2, а это указывает на то, что прямой ток обусловлен диффузионным током Холла [24]. Для „длинных“ диодов существенно сопротивление базы при средних $U_{пр}$, при этом происходит перераспределение приложенного напряжения и скорость роста $I(U)$ замедляется до зависимости $I \sim U^n$, где показатель степени n (от 6 до 1,5) различен для разных длин базы (см. рис. 2). Определяющим является не абсолютная величина длины базы, а отношение d к диффузионной длине носителей L . $\tau_p \sim 15 \text{ мксек}$ при T_k , что соответствует изменению d/L от 2 до 20. В предельном случае очень „длинной“ базы ВАХ выпрямляется до закона Ома (пунктирная линия на графике). С изменением T вид $I(U)$ не изменяется.

Различие в зависимости $I_{пр}(U_{пр})$ для обычных ($d \approx 0,3 \text{ мм}$) и „длинных“ ($d \geq 1 \text{ мм}$) диодов проявляется и в температурных измерениях. В случае обычных диодов зависимость $I_{пр}(1/T)$ состоит из двух участков: наклон низкотемпературного участка соответствует $0,6 \text{ эв}$ [22], а высокотемпературного— $1,2 \text{ эв}$ [23], что совпадает с полушириной

и шириной запрещенной зоны кремния. Для длинных же диодов — один наклон, соответствующий 0,6 эв. Во всем исследованном интервале T при некотором пороговом напряжении ВАХ пересекаются; ниже $U_{пр} \approx 1$ в токи с повышением T возрастают, выше убывают. В согласии с теорией Стафеева [25] уменьшение прямого тока с T при $U_{пр} > U_{пор}$ определяется увеличением сопротивления концентратов. Учитывая, что в исследованном интервале температур концентрация носителей не меняется, уменьшение величины $I_{пр}$ может быть обусловлено уменьшением подвижности носителей. Действительно, температурная зависимость величины $I_{пр}$, экстраполированного к малым $U_{пр} = 0,1$ в от участка, где ток ограничивается последовательным сопротивлением толщи диода ($U_{пр} > 1$ в), имеет вид $I_{пр} \sim T^{-2}$. Такая зависимость $I_{пр}(T)$ достаточно хорошо согласуется с температурной зависимостью подвижности носителей тока.

Зависимость прямого тока при фиксированном значении $U_{пр}$ от длины базы аппроксимируется выражением $I_{пр} \sim d^{-x}$, где $x = 2,8 \div 3$ и не зависит от T . Установлено, что при больших $U_{пр}$ ВАХ длинного диода ($d/L \sim 20$) имеет вид

$$I_{пр} = 3,3 \cdot 10^4 \frac{U^{1,5}}{d^3 T^2} \quad (2)$$

Здесь d в миллиметрах, T в градусах Кельвина, I в амперах, U в вольтах. Эмпирическая зависимость (2) для длинных диодов достаточно хорошо согласуется с теоретическими выводами Рашба-Толпыго [27] и Ламперта [28].

Время жизни неосновных носителей заряда. При инжекции носителей через $p-n$ -переход концентрация неосновных носителей возрастает в несколько десятков раз, в то время как концентрация основных остается почти без изменения. Поэтому явления, сопровождающие прохождение тока через переход, определяются временем жизни неосновных носителей тока τ , являющимся одним из основных параметров полупроводникового материала, определяющих свойства приборов с $p-n$ -переходом. Исследование времени жизни дырок в $n-Si$ и электронов в $p-Si$ необходимо для анализа вольтамперных характеристик и реактивных свойств кремниевых диодов.

Измерение времени жизни неосновных носителей проведено по методу переходных характеристик восстановления большого сопротивления диода в варианте Лакса-Иглицына [31]. Этот метод позволяет измерять зависимость

времени жизни как от температуры ($290 \div 418^\circ K$), так и от уровня инжекции (т. е. от плотности прямого тока $10 \div 800$ mA/cm^2).

В результате высокотемпературной обработки кремния, необходимой для получения $p-n$ -переходов [32–33], время жизни неосновных носителей τ значительно уменьшается. Для восстановления можно использовать никель, механизм действия которого пока не выяснен. Исследования показывают, что во всем температурном интер-

вале с повышением уровня инжекции ($I_{пр}$) время жизни дырок в n -базе уменьшается. Температурная зависимость τ_p при малом уровне инжекции представлена на рис. 3. Кривая 1 относится к образцу без никеля (τ_p^0), кривая 2 — к образцу с примесью никеля. В образцах без никеля τ_p при T_k составляет $\sim 10^{-9} - 10^{-8}$ сек. При низких температурах ($10^3/T > 3$) τ_p в образцах без никеля невозможно было измерить, так как нижний предел его измерения составляет 10^{-6} сек. В отсутствие никеля за рекомбинацию носителей ответственны центры с $\Delta E_t = 0,55$ эв (найденно из наклона прямой 1). Введение никеля приводит к значительному росту τ_p . В образцах с никелем $\tau_p \sim 10^{-6} \div 10^{-5}$ сек. При небольших температурах ($T \leq 400^\circ K$) рекомбинация происходит на центрах с энергией активации 0,04–0,06 эв (I участок кривой 2). Подсветка образца белым светом во время измерений не влияла на величину τ_p , что указывает на отсутствие прилипания. В области повышенных температур (II участок) рекомбинация происходит на центрах с $\Delta E_t = 0,2 \pm 0,02$ эв. В области высоких температур, лежащей над верхним пределом рабочих температур ($T > 490^\circ K$) прибора, рекомбинация происходит опять на центрах, расположенных посередине запрещенной зоны (III участок).

Таким образом можно заключить, что введение никеля затушевывает действие более эффективных рекомбинационных центров с $\Delta E_t = 0,55$ эв [7]. Механизм восстановления τ_p заключается в диффузии атомов никеля в объем кремния и экранизации ими глубоких центров. Эффект нейтрализации более эффективных центров, вероятно, заключается в том, что кулоновское взаимодействие двух ионов изменяет параметры рекомбинационного центра (как величину эффективного сечения захвата носителей, так и энергию активации).

Примесные уровни с глубиной залегания $\Delta E_t = 0,55$ эв, ответственные за рекомбинацию дырок в $n-Si$, можно приписать атомам золота, которое в кремнии создает два различных энергетических уровня — донорный, расположенный в нижней части запрещенной зоны на расстоянии 0,35 эв от E_v , и акцепторный, расположенный посередине запрещенной зоны с $\Delta E_t = 0,55$ эв. В этой связи интересно исследовать рекомбинацию электронов в $p-Si$ [8]. Кривая 3 представляет собой зависимость τ_n^0 — времени жизни электронов в $p-Si$ при низком уровне инжекции от T . Энергия активации, найденная из наклона прямой, составляет $0,36 \pm 0,02$ эв, поэтому можно считать, что за рекомбинацию ответствен центр, расположенный на глубине $\Delta E_t = 0,36$ эв. Однако одна температурная зависимость τ_n^0 не позволяет однозначно определить, ближе к какому краю запрещенной зоны расположен этот уровень.

Для получения дополнительных данных необходимо исследовать зависимость τ_n от уровня инжекции. В исследованном интервале температуры обнаружено изменение характера зависимости τ_n от плотности тока. При относительно невысоких температурах ($T < 433^\circ K$) с ростом $I_{пр}$ τ_n возрастает, а при $T > 433^\circ K$, наоборот, убывает. При некоторой температуре $T_{кр} \sim 433^\circ K$ τ_n не зависит от концентрации инжектированных неравновесных электронов.

Изменение характера зависимости $\tau_n(I_{пр})$ с температурой позволяет оценить [35] параметры рекомбинационного центра по величине температуры $T_{кр}$, при которой τ не зависит от уровня инжекции при условии, что известно энергетическое положение исследуемого центра ΔE_t . Соответствующий анализ [16] показывает, что центр с $\Delta E_t = 0,36$ эв расположен в нижней половине запрещенной зоны кремния и имеет донорную природу: эффективное сечение захвата электрона σ_n больше эффективного сечения захвата дырки σ_p ($\sigma_n/\sigma_p = 1,7$), т. е. центр

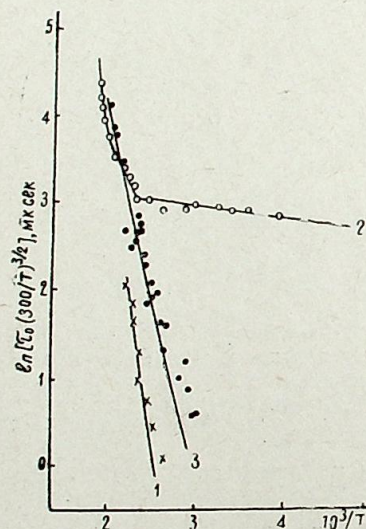


Рис. 3. Зависимость времени жизни неосновных носителей при малом уровне инжекции от температуры: 1 — τ_p^0 в $n-Si$; 2 — τ_p^0 в $n-Si$ с никелем; 3 — τ_n^0 в $p-Si$.

заряжен положительно и захватывает электрон несколько легче, чем дырку.

Дополнительные сведения о температурной зависимости σ_n и σ_p можно получить из исследования времени жизни при большом уровне инжекции. Зависимость $\tau_{\infty}(T)$ определяется лишь температурой зависимостью тепловых скоростей носителей v_n , v_p и эффективного сечения захвата σ_n и σ_p :

$$\tau_{\infty} = \tau_{n0} + \tau_{p0} = (\sigma_n v_n N_t)^{-1} + (\sigma_p v_p N_t)^{-1}$$

(все обозначения общепринятые [36]).

Принимая, что v_n , v_p определяются распределением Максвелла и пропорциональны $\sqrt{T}$, можно определить σ_n и $\sigma_p(T)$ из температурной зависимости τ_{∞} для образцов с n - и p -базой. Из экспериментальных данных следует, что $\tau_{\infty}^n \sim T^{1/2}$, а $\tau_{\infty}^p \sim T^{2,4}$. Отсюда $\sigma_n \sim T^{-2,9}$ для рекомбинационного центра донорного типа, расположенного в нижней половине запрещенной зоны $\Delta E_t = 0,36$ эв и эффективного в p -Si. А для рекомбинационного центра акцепторного типа, расположенного посередине запрещенной зоны $\Delta E_t = 0,55$ эв и эффективного в n -Si, $\sigma_p \sim T^{-5}$. Сопоставление величин глубины залегания рекомбинационного центра ΔE_t , отношения σ_n/σ_p , температурной зависимости $\sigma_n(T)$, $\sigma_p(T)$ позволяет сделать вывод, что эффективным центром рекомбинации в кремнии являются атомы золота; действующими центрами в p -кремнии являются донорные уровни с $\Delta E_t = 0,36$ эв в нижней половине запрещенной зоны и в n -кремнии — акцепторные с $\Delta E_t = 0,55$ эв.

Исследованные рекомбинационные свойства примесей тантала, титана и вольфрама в базе n -типа кремниевых диффузионных p - n -переходов позволяют заключить, что рекомбинация происходит на центрах акцепторного типа с энергией $0,14 \div 0,17$ эв, а в области высоких температур ($T \geq 443^\circ\text{K}$) в рекомбинации принимают участие центры, расположенные посередине запрещенной зоны кремния ($0,46 - 0,41$ эв) [7].

Емкость в прямом направлении. Емкость p - n -перехода в прямом направлении обусловлена изменением концентрации подвижных носителей при изменении внешнего приложенного напряжения. На рис. 4 представлена типичная кривая зависимости емкости от прямого смещения при $f = 100$ кГц и различных температурах. В области малых прямых смещений ($< 0,2$ в при T_K) емкость почти не зависит от приложенного напряжения, т. е. преобладает барьерная емкость. В области средних прямых смещений наблюдается зависимость $C \sim \exp \frac{qU}{\beta kT}$. При низких частотах переменного сигнала $\omega < \frac{1}{\tau}$

емкость p - n -перехода $C_{\text{диф}}$ обусловлена инжекцией неосновных носителей заряда, приводящей к накоплению избыточной концентрации электронов и дырок в базовой области $p \approx n$ -перехода ($\beta \approx 1$). При относительно высоких частотах $\omega \geq 1/\tau$ преобладает емкость подвижных носителей в переходной области $C_{\text{пз}}$ и $\beta \approx 2$. Энергия активации, найденная из температурной зависимости значений емкости $C_{\text{пз}}$, экстраполированных к нулю напряжений, равна полуширине запрещенной зоны кремния и совпадает с энергией активации, определенной из температурной зависимости $I_{\text{тг}}$, тогда как для диффузионной емкости и диффузионного тока $\Delta E = 1,18$ эв — полной ширины запрещенной зоны.

На кривой зависимости $C_{\text{пр}}(U_{\text{пр}})$ при относительно высоких частотах и определенном значении $U_{\text{пр}}$ наблюдается максимум, после чего емкость резко уменьшается до нуля. Показано, что максимальное значение $C_{\text{пз}}$ обратно пропорционально частоте переменного сигнала [23] $C_{\text{диф}} \sim \omega^{-1/2}$.

Инжекционная индуктивность в прямом направлении. С особым интересом исследовалось новое явление, имеющее место в диффузионных кремниевых p - n -переходах на основе n - и p -Si, которое заключается в том, что при некотором значении прямого смещения $U_{\text{инв}}$ и при условии $\omega \tau \geq 1$ реактивная составляющая проводимости диода меняет свой знак — емкостный характер проводимости сменяется на индуктивный. Такое изменение характера реактивности у кремниевых диффузионных диодов при больших $U_{\text{пр}}$ связано с модуляцией

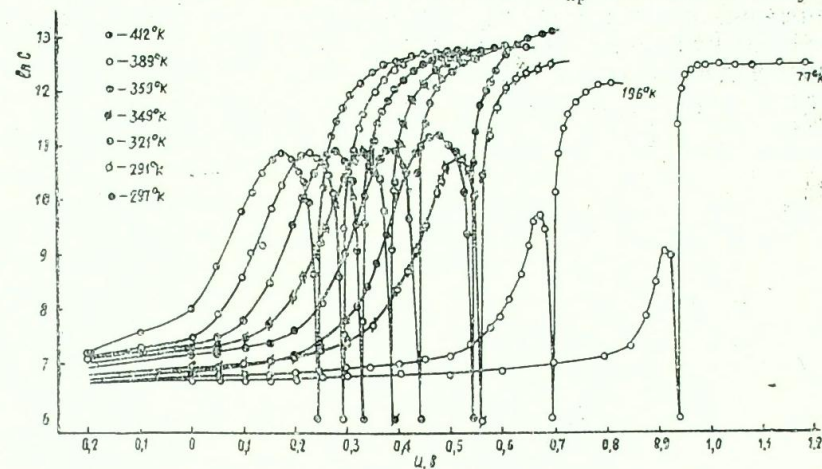


Рис. 4. Зависимость емкости от прямого смещения при $f = 100$ кГц и различных температурах.

проводимости базовой области p - n -перехода. Модуляция имеет место тогда, когда концентрация инжектированных неосновных носителей становится равной концентрации равновесных основных носителей заряда. При этом емкость подвижных носителей переходного слоя уменьшается до нуля и при определенном $U_{\text{пр}} = U_{\text{инв}}$ переходит в индуктивность; $U_{\text{инв}}$ зависит от концентрации основных носителей в базе полупроводника, от частоты переменного сигнала и температуры образца. При условии $\omega \tau \approx 1$ напряжение инверсии для образцов как на основе n -, так и p -кремния растет с повышением степени легирования базовой области согласно формуле [37]:

$$U_{\text{инв}} = 2 \frac{kT}{q} \ln \frac{N}{n_i}, \quad (1)$$

где $n_i = 7,8 \cdot 10^{19} \exp(-6950/T)$ — концентрация собственных носителей; N — концентрация основных носителей в базе диода.

Исследование реактивных свойств диодов, созданных на основе n -кремния с различным удельным сопротивлением, показало, что $U_{\text{инв}}$ равно 0,48; 0,54; 0,70 в для образцов с концентрацией основных носителей в базе, равной $8 \cdot 10^{13}$ (для образца с $\rho = 60$ ом·см), $2,5 \cdot 10^{14}$ (20 ом·см) и $1 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$ (0,4 ом·см). Знание $U_{\text{инв}}$ при данной температуре и фиксированной частоте позволяет определить неизвестную концентрацию основных носителей в базе. Такая возможность определения концентрации в базе готового диода имеет определенное практическое значение и может найти применение для классификации приборов в заводских условиях.

Имеющиеся в литературе исследования реактивных свойств резких переходов при больших прямых смещениях не дают зависимости $U_{\text{инв}}$ от частоты, а для диффузионных p - n -переходов подобные исследования вообще отсутствуют. Для изученных нами образцов обоих типов наблюдается уменьшение $U_{\text{инв}}$ с ростом частоты. Зависи-

ность $U_{инв}$ от частоты малого переменного сигнала f можно выразить эмпирической формулой;

$$U_{инв} = U^* - b \ln f, \quad (2)$$

где $U^* \approx 1,1$ в, а коэффициент b для образцов обоих типов при T_k лежит в интервале $45 \div 60$ мв.

Частотная зависимость $U_{инв}$ в наших образцах, возможно, объясняется линейным распределением концентрации ионизованной примеси в $p-n$ -переходе. Действительно, учитывая, что $N=ax$ (a —градиент концентрации примесей, x —глубина проникновения носителей, инжектированных малых переменным сигналом, в глубь базовой области в результате диффузии или дрейфа носителей), мы получили следующую расчетную формулу для $U_{инв}$:

$$U_{инв}^{диф} = \left\{ 1,2 + \left[2 \ln a - 92 - 4,2 \ln (T/300) \right] \frac{\kappa T}{q} \right\} - \frac{\kappa T}{q} \ln f; \quad (3)$$

$$U_{инв}^{др} = \left\{ 1,2 + \left[2 \ln a - 83 - 8,2 \ln \left(\frac{T}{300} \right) \right] \frac{\kappa T}{q} \right\} - 2 \frac{\kappa T}{q} \ln f, \quad (4)$$

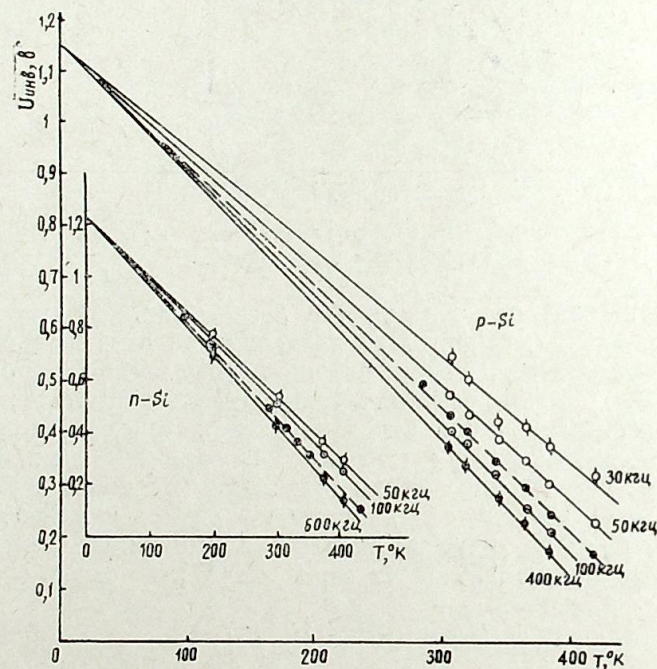


Рис. 5. Температурная зависимость напряжения инверсии при различной частоте переменного сигнала.

где величина выражения в фигурных скобках в уравнении (3) для образцов обоих типов в среднем при T_k составляет 0,90 в, а в (4)—1,14 в. Таким образом, эмпирическая зависимость (2) удовлетворительно согласуется с расчетной (4), учитывающей дрейфовый механизм перемещения инжектированных неосновных носителей в базовой области кремниевых диодов.

С уменьшением частоты $U_{инв}$ смещается в область более высоких прямых напряжений. Однако в области низких частот $\omega \tau < 1$ вплоть до $U_{пр} = 1,1$ в на исследованных образцах обоих типов не было обнаружено явления перехода емкости в индуктивность. Возможно, что при низких частотах изменение внешнего воздействия (малого переменного сигнала) происходит настолько медленно ($\omega < \frac{1}{\tau}$), что в

каждый данный момент сопротивление базы успевает принять свое новое модулированное значение и это проявляется как отсутствие эффекта модуляции.

На рис. 5 представлена зависимость напряжения инверсии от температуры при различных частотах. Напряжение инверсии линейно уменьшается с повышением температуры $p-n$ -перехода, при этом величина $U_{инв}$ почти не зависит от температуры. Температурный коэффициент напряжения инверсии составляет $2,6$ мв·град $^{-1}$ для образцов с высоким удельным сопротивлением базы ($N = 5 \cdot 10^{13}$ см $^{-3}$) и уменьшается до 1 мв·град $^{-1}$ для низкоомных образцов ($N = 5 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$). Таким образом, используя линейное уменьшение $U_{инв}$ с температурой при высоких частотах (благодаря малой глубине проникновения неосновных носителей в базовую область), можно измерить температуру самого $p-n$ -перехода.

Реактивные свойства диодов с различной длиной базы. Физические процессы, происходящие в $p-n$ -переходах при высоких уровнях инжекции, ни с экспериментальной, ни с теоретической точки зрения достаточно не изучены, совершенно не исследованы экспериментально реактивные свойства полупроводниковых диодов в прямом направлении в зависимости от длины базовой области. Изучение данного вопроса позволило бы глубже понять физику $p-n$ -перехода и расширить область применения полупроводниковых приборов. Исследованы реактивные свойства диодов с различной длиной базы от 0,3 до 2,8 мм. Как и в случае обычных диодов, при некотором прямом смещении $U_{инв}$ емкостный характер реактивности переходит в индуктивный. Напряжение инверсии возрастает с увеличением длины базы, что объясняется перераспределением приложенного напряжения между $p-n$ -переходом и базой. В зависимости от длины базы изменяются также максимальные значения емкости и индуктивности. Зависимость $U_{инв}$ от длины базы можно представить в виде прямой:

$$U_{инв} = U_{инв}^0 + E d,$$

где $U_{инв}^0$ —падение напряжения, соответствующее экстраполяции прямой до $d = 0$, и $E \approx (0,8 - 1)$ в/см. Величина $U_{инв}^0$, как и $U_{инв}$, зависит от температуры. При $T_k = 300^\circ\text{K}$ $U_{инв}^0 = 490$ мв. Эту величину можно принять за падение напряжения на $p-n$ -переходе, так как она мало отличается от диффузионной разности потенциалов $U_D = 460$ мв.

С повышением частоты переменного сигнала зависимость $U_{инв}(d)$ ослабляется и при $f = 600$ кГц почти отсутствует ($U_{инв} \approx U_D \approx 440 \div 460$ мв). Отсутствие зависимости $U_{инв}(d)$ на относительно высоких частотах, вероятно, обусловлено тем, что индуктивный эффект вызван модуляцией проводимости области базы, непосредственно примыкающей к $p-n$ -переходу (на расстоянии ~ 3 мкм). Такая закономерность $U_{инв}(d)$ остается в силе при различных температурах.

На рис. 6 представлена зависимость индуктивности L и добротности индуктивности Q_L от длины базы. Наблюдается экспоненциаль-

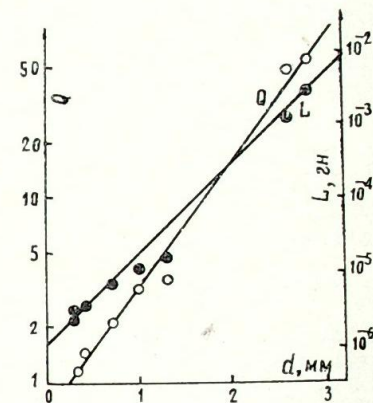


Рис. 6. Зависимость величины индуктивности L и добротности индуктивности Q_L от длины базы диода.

ная зависимость величины индуктивности L (пересчитанной из величины отрицательной емкости C^- : $L = \frac{1}{\omega^2 C^-}$) от длины базы $L =$

$= L_0 \exp(\alpha d)$, где $L_0 = 10^{-6}$ гн, $\alpha = 28 \text{ см}^{-1}$. Для обычных диодов с $d = 0,3 \text{ мм}$ эта величина составляет $2 \div 3 \text{ мкгн}$, а для длинных диодов она на три порядка больше — $3 \div 4 \text{ мкгн}$. С ростом частоты L почти не меняется ($C_{\text{max}} \sim f^{-1.8}$) и остается без изменения при всех температурах. Величина добротности индуктивности обычных диодов мала, порядка 1. С увеличением толщины базы добротность индуктивности возрастает экспоненциально и при $d = 2,8 \text{ мм}$ $Q_L = 50$. Таким образом, индуктивность длинных диодов имеет большую величину и большую добротность, чем индуктивность обычных диодов.

Влияние освещения на емкость прямосмещенного диода. Представляло интерес создать условие большого уровня инжекции, при котором емкость переходит в индуктивность без приложения постоянного внешнего смещения путем интенсивного освещения (фотоинжекции). Были исследованы реактивные свойства кремниевых фотоэлементов (ФЭ), которых высокий уровень инжекции создавался как внешним напряжением (темновые характеристики), так и освещением ФЭ интенсивным белым светом в интервале $2,4 \cdot 10^4 \div 1,4 \cdot 10^5 \text{ лк}$.

Исследование реактивных свойств ФЭ в прямом направлении при комнатной температуре и в темноте показало, что емкость при всех исследованных частотах ведет себя подобно емкости диодов. При относительно низких частотах ($f = 5 \div 50 \text{ кгц}$) сначала наблюдается экспоненциальное возрастание емкости согласно формуле $C_{\text{пр}} = \text{const} \exp \frac{qU}{\beta kT}$, где $\beta = 1,8 \div 6,0$. Начиная с $f \geq 100 \text{ кгц}$, при опре-

деленном значении прямого смещения $U_{\text{инв}}$ (напряжение инверсии) емкость, уменьшаясь до нуля, переходит в индуктивность. В отличие от диодов, начиная с $U_{\text{пр}} = 0,65 \text{ в}$, в ФЭ наблюдается уменьшение величины емкости (при низких частотах) и индуктивности (при высоких частотах), что, по-видимому, связано с влиянием последовательного сопротивления ФЭ. Отметим также, что в отличие от обычных диффузионных диодов, созданных на основе как n -, так и p -кремния, в ФЭ максимальное значение (C_{max}^+ и C_{max}^-) с увеличением температуры возрастает. При освещении ФЭ генерация и разделение фотопар электрон-дырка $p-n$ -переходом при разомкнутой внешней цепи приводит к накоплению фотоэлектронов в n - и фотодырок в p -областях, которые могут обусловить собой дополнительную емкость. Поэтому при освещении ФЭ должна увеличиваться его полная емкость, что и наблюдается экспериментально,

на рис. 7а показана зависимость емкости ФЭ (C_0) от освещенности (А) при различных частотах малого переменного сигнала (а) и от частоты при различных А (б). Емкость ФЭ с увеличением интенсивности света при сравнительно низких частотах возрастает, а при высоких — линейно убывает. При максимальной интенсивности света и $f = 250 \div 300 \text{ кгц}$, $C^{\Phi} = 0$, т. е. у освещенного ФЭ реактивное сопротивление равно нулю и остается чисто активное сопротивление. А когда $f > 300 \text{ кгц}$, емкость ФЭ при освещении переходит в индуктивность без приложения внешнего напряжения (кривая 5 на рис. 7б). Такое поведение C^{Φ} с уровнем освещения ФЭ аналогично изменению $C(U_{\text{пр}})$ диодов [6 — 8]: при малых уровнях инжекции (малые интенсивности освещения или небольшие прямые напряжения) увеличение емкости обусловлено накоплением заряда подвижных носителей, связанного с возрастанием числа неравновесных носителей. При больших же

уровнях инжекции накопление заряда продолжается, однако этот достаточно большой накопленный заряд вызывает уменьшение (модуляцию) эффект.

Индуктивный эффект начинает сопровождать емкостный, вызывая сначала уменьшение емкости, а затем с возрастанием уровня инжекции выражается более ярко: уменьшением емкости до нуля и переходом ее в индуктивность. В отличие от темновой характеристики $C(U_{\text{пр}})$

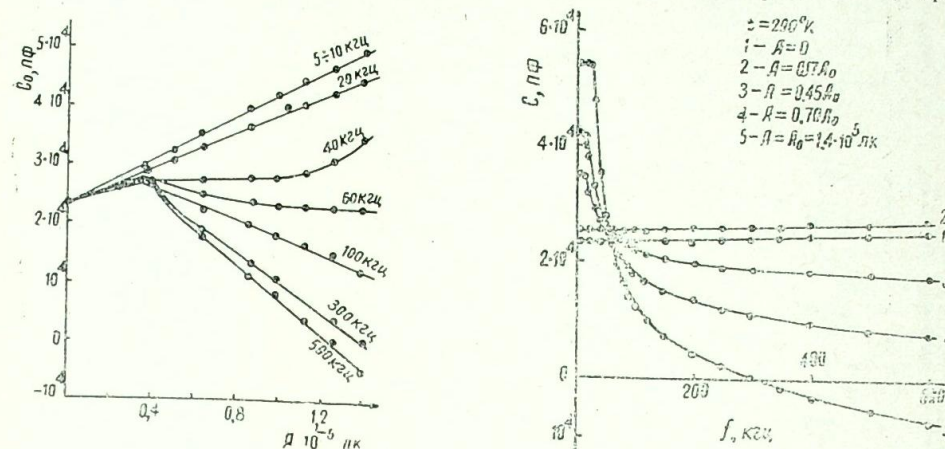


Рис. 7. (а) Изменение емкости ФЭ с освещением при различных частотах. (б) Изменение емкости ФЭ с частотой при различных освещенностях.

при освещении значения емкости больше и при низких частотах нет четкой экспоненциальной зависимости $C(U)$. Переход емкости в индуктивность происходит уже при $f \geq 70 \text{ кгц}$. По-видимому, это связано с тем, что при освещении ФЭ время жизни неравновесных носителей возрастает, поэтому условие $\omega\tau \sim 1$ (при котором емкость переходит в индуктивность) соответствует меньшей частоте. Кроме того, под освещением напряжение инверсии на всех частотах, где наблюдается инверсия знака реактивности, смещается в сторону малого значения прямого напряжения.

Уменьшение $U_{\text{инв}}$ при освещении можно объяснить как влиянием уменьшения последовательного сопротивления ФЭ, так и тем, что фотоинжекция носителей, по-видимому, осуществляется легче, чем инжекция, вызванная внешним напряжением. В пользу этого свидетельствуют также наблюдаемые большие значения емкости при освещении при одном и том же значении прямого смещения на фотоэлементе. Например, при $U_{\text{пр}} = 0,4 \text{ в}$ и $f = 5 \text{ кгц}$ $C^{\Phi} = 6,3 \cdot 10^5 \text{ пф}$, $C^{\tau} = 4 \cdot 10^4 \text{ пф}$. Как в темноте, так и при освещении напряжение инверсии исследованных ФЭ линейно зависит от температуры $p-n$ -перехода, с температурным коэффициентом, лежащим в интервале $\alpha = 2,2 \div 2,7$ (в темноте) и $2,3 \div 3,4 \text{ мв/град}$ (при освещении), причем с увеличением частоты малого переменного сигнала чувствительность $U_{\text{инв}}$ к температуре повышается. Наблюдаемая частотная зависимость $U_{\text{инв}}$ объясняется линейным распределением примеси в области $p-n$ -перехода [16]. Эмпирическая формула, связывающая $U_{\text{инв}}$ с частотой, дается также в виде (2). Однако при освещении $U_{\text{инв}}(f)$ состоит из двух прямолинейных участков с $b = 190 \div 230 \text{ мв}$ ($f = 60 \div 150 \text{ кгц}$) и $b = 120 \div 190 \text{ мв}$ ($f = 150 \div 500 \text{ кгц}$) в интервале $T = 290 \div 370^\circ \text{ К}$.

Исследование напряжения инверсии в зависимости от освещенности ФЭ показало, что $U_{\text{инв}}$ почти линейно уменьшается с увеличением интенсивности света. Кроме того, с повышением частоты малого

переменного сигнала светочувствительность напряжения инверсии возрастает.

Обратная ветвь ВАХ. Типичная кривая $I_{обр}(U_{обр})$ для исследованных образцов при различных T представлена на рис. 8. В области средних обратных смещений $I_{обр} \sim U_{обр}^{1/2}$, где γ для всех исследованных образцов лежит в интервале $2,8 < \gamma < 3,3$, этот ток является генерационным током в слое объемного заряда и рост его с напряжением связан с расширением слоя объемного заряда $w \sim U_{обр}^{1/2}$. На это указывает также постоянное значение в данном интервале напряжений произведения:

$$I_{гг} C_0 = 5,3 \cdot 10^{-9} \frac{n_i}{\sqrt{\tau_{ро} \tau_{по}}} = \text{const},$$

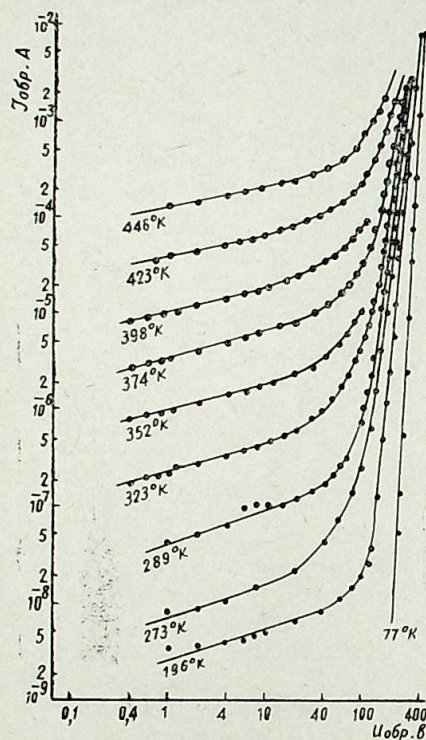


Рис. 8. Зависимость $I_{обр}(U_{обр})$ при различных T .

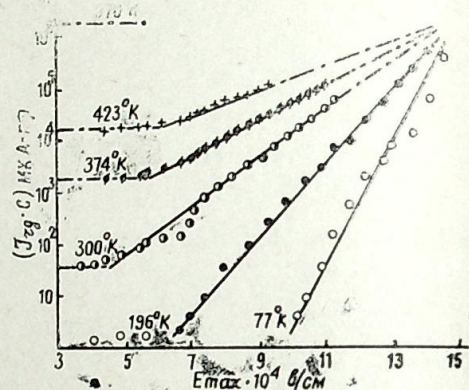


Рис. 9. $I_{гг} C_{бар}(E_{max})$ при различных T .

где C_0 — барьерная емкость $p-n$ -перехода, выраженная в пф ($C_0 \sim U_{обр}^{-1/2}$) и связанная с шириной слоя объемного заряда соотношением $C_0 = \frac{\epsilon S}{4\pi w}$; $\tau_{ро}$, $\tau_{по}$ — время жизни дырок в материале резко выраженного n -типа и электронов в материале p -типа. Это произведение определяется лишь температурной зависимостью n_i , а зависимостями $\tau_{ро}(T)$ и $\tau_{по}(T)$ мы пренебрегаем, по сравнению с $n_i(T)$ (эта зависимость будет степенной: $\tau_{ро} \sim T^n$, где $n \sim 2$). Действительно, обратный ток изменяется с температурой с энергией активации 0,56–0,60 эВ, совпадающей с полушириной запрещенной зоны кремния [20].

Несколько иначе изменяется $I_{обр}$ с напряжением в области больших значений последнего, наблюдаемое в случае „мягкого“ и „резкого“ пробоя. Типичные кривые, характеризующие явления „мягкого“ пробоя, показаны на рис. 8 (область $U_{обр} > 100$ В), а „резкого“ — на рис. 10.

Исследование „мягкого“ пробоя диффузионных кремниевых $p-n$ -переходов показало, что наблюдаемый монотонный рост обратного тока вызван возрастанием концентрации подвижных носителей в сильном электрическом поле. На рис. 9 представлена $I_{гг} C_{бар}(E)$ при различных T . Штрих-пунктирной линией показаны значения $I_{гг} C_{бар}$, вычисленные по формуле (3). Наблюдаемое увеличение $I_{гг}$ с напря-

жением может быть вызвано либо возрастанием n_i , либо уменьшением $\tau_{по}$, $\tau_{ро}$ в сильном электрическом поле $p-n$ -перехода. Последнее может быть вызвано как увеличением эффективного сечения захвата дырок и электронов действующих рекомбинационных центров σ_p , σ_n , так и увеличением скорости движения дырок и электронов относительно локального центра v_p , v_n . В сильном электрическом поле происходит насыщение дрейфовой скорости — v не зависит от E .

В литературе нет данных о влиянии электрического поля на эффективное сечение захвата носителей заряженным локальным центром. Допустим, что $\tau_{ро}$, $\tau_{по}$ не изменяются под действием поля. Тогда изменение с полем E произведения $I_{гг} C$ вызвано изменением концентрации собственных носителей. Экспериментально наблюдаемые кривые можно аппроксимировать выражением

$$n_i = \exp[\alpha(E - E_{кр})],$$

где n_i — концентрация собственных носителей в кремнии; α — коэффициент, зависящий от T и изменяющийся от $1,1 \cdot 10^{-4}$ до $2,5 \cdot 10^{-5}$ см/В в интервале 77–423°K; $E_{кр}$ — критическая напряженность поля, начиная с которой наблюдается изменение концентрации носителей с полем. $E_{кр} = (5 \div 6) \cdot 10^4$ В/см, она ниже критического поля, необходимого для ударной ионизации собственных носителей в кремнии. В нашем случае мы, вероятно, имеем дело с возрастанием концентрации носителей вследствие ударной ионизации глубоколежащих центров, концентрация которых не превышает 10^{15} см $^{-3}$. С повышением температуры преобладает тепловая ионизация и зависимость $n(E)$ ослабевает (кривые на рис. 9 делаются более пологими). Таким образом „смягчение“ обратной ВАХ вызвано присутствием глубоколежащих примесей, ионизирующихся при меньших полях.

Исследование „резкого“ пробоя (рис. 10) кремниевых $p-n$ -переходов показывает, что с повышением T напряжение пробоя возрастает линейно:

$$U_{проб} = U_0 + bT,$$

где U_0 — напряжение пробоя, экстраполированное к 0°K, равное 290 В для $n-Si$; b — температурный коэффициент порядка 0,4 В/град. Критическая напряженность поля при этом составляет $1,5 \cdot 10^5$ В/см. Величина $E_{кр}$, а также температурная зависимость $U_{проб}$ указывают на то, что наблюдаемое резкое возрастание обратного тока и пробой $p-n$ -перехода обусловлены явлением ударной ионизации собственных атомов кремния [39]. Измерен коэффициент размножения носителей M и показано, что при относительно низких температурах ($T < 300^\circ K$) $M \approx 100$. При больших же T явление чисто электрического пробоя ослабляется тепловыми эффектами, на долю электрического поля приходится меньшее число дополнительно созданных носителей.

Влияние постоянного внешнего электрического поля на обратную ВАХ. Обратная ветвь ВАХ диодов с различной длиной базы в основном совпадает с приведенными выше типичными кривыми. Однако некоторые образцы, изготовленные нами в заводских условиях, и некоторые диоды промышленного выпуска имеют избыточные обратные токи, значительно превышающие генерационные токи в слое объемного заряда и выражающиеся различными законами изменения с повышением напряжения. Этот избыточный ток обусловлен поверхностной утечкой, шунтирующей $p-n$ -переход. При недостаточно хорошей изоляции поверхности от влияния внешней среды непрерывно происходящие на ней процессы адсорбции-десорбции и химические реакции изменяют характеристики приборов при хранении, делают их негодными. Учитывая, что поверхностные состояния создаются заря-

женными частицами, можно воздействовать на них сильным электрическим полем.

Представлял интерес изменение обратного тока под действием постоянного внешнего напряжения. При относительно высокой температуре ($\sim 450^\circ\text{K}$) к образцу прикладывалось большое обратное напряжение ($\sim 150\text{ в}$). Было обнаружено значительное уменьшение обратных токов под действием такой обработки (табл.).

$U_{\text{обр}}, \text{ в}$	$I_{\text{обр}} \cdot \text{та};$		$T = 448^\circ\text{K}$	
	исходный ток	через 55 ч выдержки	через 67 ч выдержки	через 40 дней выдержки
2	0,2	0,1	0,15	0,15
50	0,75	0,25	0,3	0,3
100	1,7	0,4	0,5	0,5
150	2,8	0,72	0,9	0,9

Чтобы убедиться в том, что подобные изменения вызываются действием поля, а температура только ускоряет процесс, рядом с образцом, подвергающимся действию обратного напряжения, помещали контрольный образец без приложения поля. Образец, находив-

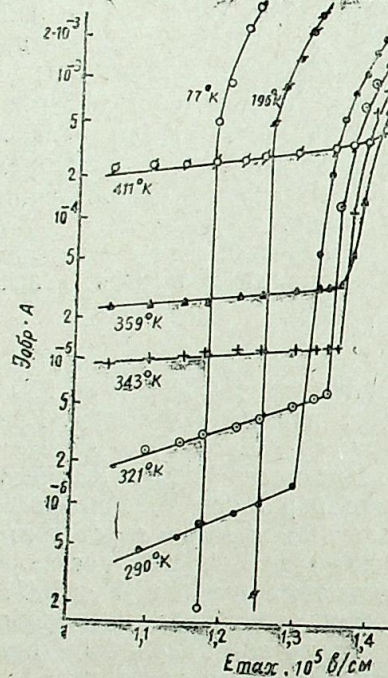


Рис. 10. Зависимость $I_{\text{обр}}$ ($U_{\text{обр}}$) в области пробоя („резкий“ пробой) при различных T .

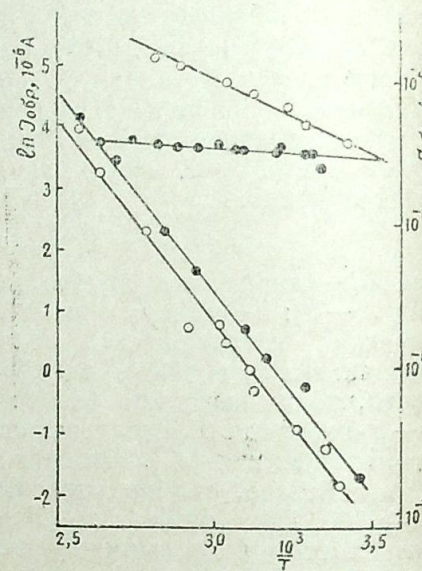


Рис. 11. Температурная зависимость обратного тока для двух образцов до (кривые 1 и 3) и после (кривые 2 и 4) обработки.

шийся в обесточенном состоянии, не обнаружил изменения обратного тока со временем. Повторная же выдержка контрольного образца под напряжением привела к уменьшению его обратного тока.

Отметим, что на всех исследованных диодах наблюдались различные зависимости тока от напряжения ($I_{\text{оср}} \sim U_{\text{обр}}$; $I_{\text{обр}} \sim U_{\text{обр}}^{1/2}$; $I_{\text{обр}} \sim e^{3/2} U$).

Температурная зависимость обратного тока представлена на рис. 11. Кривые 1 и 2 относятся к одному, а 3 и 4—к другому образцу; соот-

ветственно до и после обработки. Энергия активации процесса образования неосновных носителей, найденная из наклона, оказалась равной 0,21 эв (кривая 1) и 0,08 эв (кривая 3). Эти значения ΔE_t приписываются присутствию мелких центров в запрещенной зоне [30]. Обработка способствует значительному уменьшению обратных токов. Температурная зависимость экстраполированных токов (кривые 2 и 4) приводит к энергии активации в 0,55 и 0,56 эв, что составляет приблизительно полуширину запрещенной зоны кремния. Исчезновение центров с $\Delta E = 0,21$ и 0,08 эв в образцах, подвергнутых обработке, по-видимому, связано с действием внешнего поля. Приложенное постоянное электрическое поле как бы уводит эти центры с места выхода $p-n$ -перехода на поверхность, уменьшается число генерируемых посредством этих центров носителей, участвующих в обратном токе, следовательно, уменьшается полный обратный ток.

Барьерная емкость. Исследования барьерной емкости в зависимости от обратного смещения позволили нам получить необходимые сведения о структуре $p-n$ -перехода, ширине слоя объемного заряда, величине градиента концентрации, значении контактной разности потенциалов на $p-n$ -переходе и ее зависимости от температуры; о наличии в области объемного заряда глубоких рекомбинационных центров и величине их концентрации. Все эти данные были нами использованы для вышеприведенного анализа. Измерение составляющих полной проводимости диодов производилось мостовым методом [21], в широком интервале приложенного напряжения ($10 \div 400\text{ в}$) температур ($77^\circ\text{K} \div 443^\circ\text{K}$) и частот малого переменного сигнала ($0,4 \div 700\text{ кгц}$). Характер зависимости $C_{\text{бар}}$ от обратного смещения определяется законом распределения примесей. Изменение распределения электроактивных примесей приводит к изменению зависимости емкости от напряжения. Присутствие заряженных центров, приводящих к избыточному $I_{\text{обр}}$, изменяя закон линейного распределения примесей, должно привести к изменению как абсолютной величины C , так и ее зависимости от U .

Действительно, в интервале напряжений ($6 \div 90\text{ в}$) в отличие от обычно наблюдаемой для диффузионных переходов зависимости $C \sim U^{-1/2}$ имеет место $C \sim U^{-1,4}$, т. е. емкость перехода сильнее уменьшается с ростом приложенного напряжения. После электрообработки аномалия в зависимости C от U исчезает. Грубая оценка коэффициента диффузии примеси, исходя из режима электротермообработки ($T = 450^\circ\text{K}$, $t = 6\text{ час}$, $U_{\text{обр}} = 200\text{ в}$) и приблизительного места расположения примеси ($1-10\text{ мкм}$ от границы $p-n$ -перехода), привела к величине $10^{-16}\text{ см}^2/\text{сек}$. Таким образом, посредством дрейфа в электрическом поле из области $p-n$ -перехода уводятся примесные центры, которые приводят к аномально большим значениям емкости.

Барьерная емкость в области пробоя. В пробойной области напряжений независимо от механизма пробоя, т. е. от того, имеет ли место ударная ионизация или зинеровский пробой, происходит возрастание числа подвижных носителей в $p-n$ -переходе, что сопровождается резким повышением проводимости диода. Увеличение концентрации подвижных носителей в области $p-n$ -перехода может сильно сказаться на величине емкости в обратном направлении.

На рис. 12 представлена типичная зависимость емкости в обратном направлении от напряжения смещения для узких $p-n$ -переходов, созданных на основе $n-Si$ ($w \sim 10^{-5}\text{ см}$) при различных частотах, созданных на основе $n-Si$ ($w \sim 10^{-5}\text{ см}$) при различных частотах, созданных на основе $n-Si$ ($w \sim 10^{-5}\text{ см}$) при различных частотах, созданных на основе $n-Si$ ($w \sim 10^{-5}\text{ см}$) при различных частотах.

переходах имеем зинеровский механизм, а в широких — ударную ионизацию, что связано с резким повышением концентрации подвижных носителей). В области пробоя малый переменный сигнал, наложенный на постоянное смещение, будет вызывать дополнительную ионизацию, т. е. будет приводить к росту концентрации подвижных носителей. Таким образом, кроме барьерной, необходимо учитывать дополнительную емкость, обусловленную подвижными носителями. В отличие от $C_{бар}$, слабо зависящей от частоты малого переменного сигнала, дополнительная емкость сильно изменяется с частотой переменного сигнала.

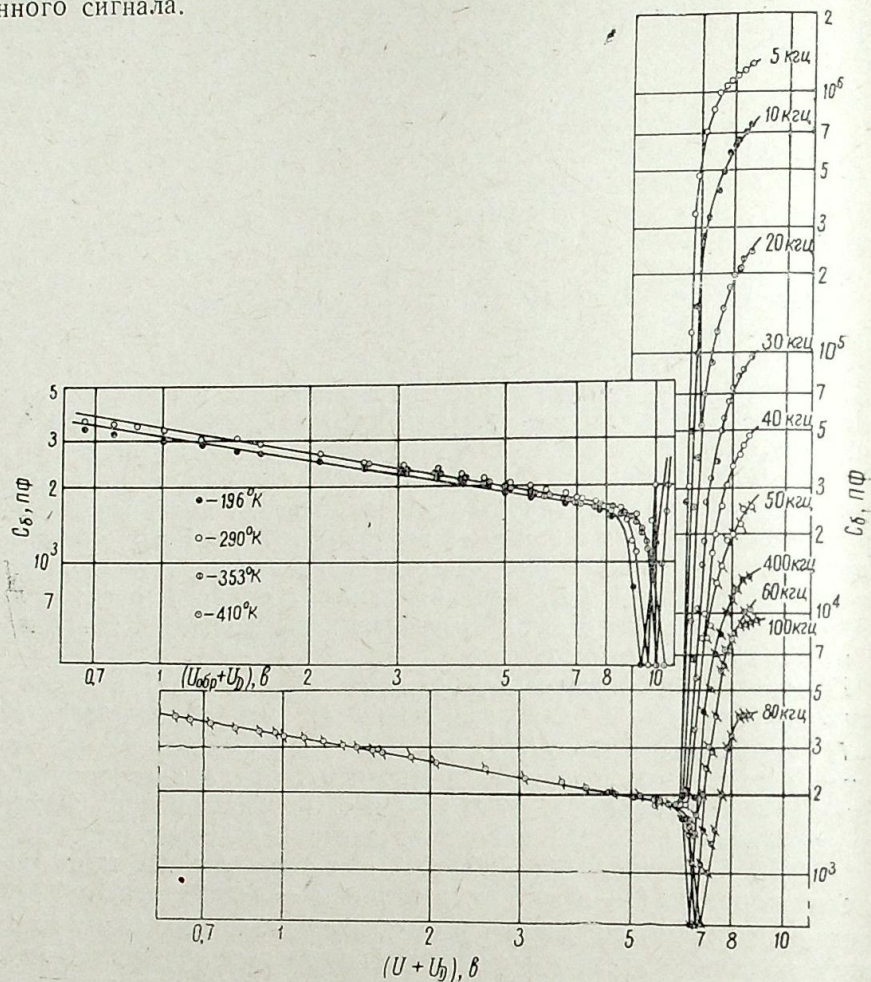


Рис. 12. Зависимость емкости от $U_{обр}$ в области больших напряжений для узких $p-n$ -переходов на основе $n-Si$.

В случае узких переходов (рис. 12) при высоких частотах ($f \geq 100$ кГц) емкость уменьшается до нуля и переходит в индуктивность [15–16]. Напряжение перехода емкости в индуктивность не зависит от температуры. Природа этого явления — индуктивный эффект в области пробоя в узких переходах окончательно еще не выяснена. Возможно, что при низких частотах, когда $\omega \ll \frac{1}{\tau^*}$, где τ^* — некоторое время релаксации, характеризующее время жизни носителей или время развития лавины, или время пролета носителей через слой объемного заряда, или время перезарядки глубоких центров, носители заряда, генерируемые сильным электрическим полем $p-n$ -перехода,

с малым возмущением следуют за изменениями поля, успевают распределиться вдоль $p-n$ -перехода, а затем выйти из него в соответствии с полем. Эти носители обуславливают собой емкость, которая очень быстро растет с напряжением. При $\omega \approx \frac{1}{\tau^*}$ имеет место резонансное воздействие внешнего сигнала и емкость падает до нуля. При высоких же частотах, иногда $\omega \gg \frac{1}{\tau^*}$, эти носители не успевают следить за изменением поля, происходит рост тока со временем, что и обуславливает собой индуктивность.

Прибор для автоматической непрерывной записи составляющих полной проводимости полупроводниковых диодов. Из приведенных данных ясно видно, что знание зависимости $C(U)$ позволяет получить целый ряд сведений о параметрах и структуре $p-n$ -переходов и имеет важное значение при разработке полупроводниковых схем с управляемой емкостью или индуктивностью. В настоящее время изменяются по точкам при фиксированном значении постоянного напряжения. Основным недостатком построения вольтемпостных характеристик по точкам является их большая трудоемкость (нужно снять 40–45 точек). При таких измерениях невозможно определить изменение со временем величины емкости, а также легко пропустить изменения в вольтемпостной характеристике, которые происходят в очень узком интервале напряжения. Нами собран прибор для автоматической записи $C(U)$, основанный на методе

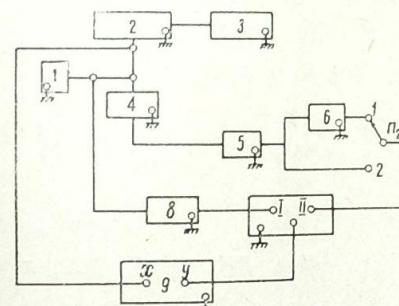


Рис. 13. Блок-схема прибора для автоматической непрерывной записи емкости полупроводниковых диодов.

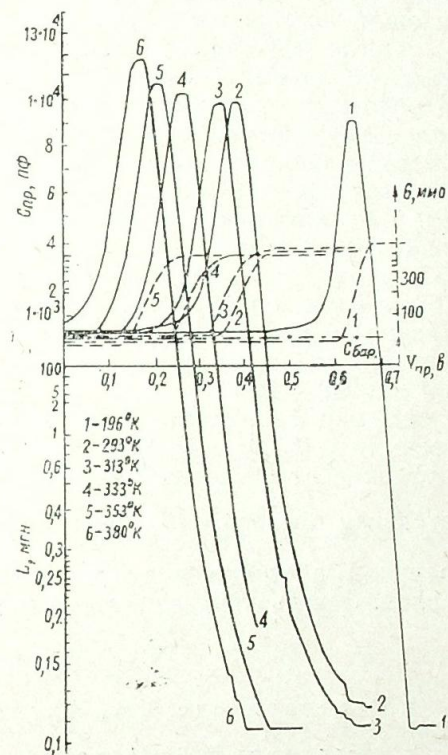


Рис. 14. Зависимость $C(U_{пр})$ (сплошные кривые) и $G(U_{пр})$ (пунктирные), записанная на приборе при $f = 100$ кГц и различных температурах.

фазового детектирования [41]. Подробно схема и работа прибора описаны в [42]. Остановимся на принципе его работы.

Дифференциальная активная проводимость (или сопротивление) диода пропорциональна синфазной составляющей тока через диод (или переменного напряжения на диоде), а дифференциальная емкость или индуктивность, т. е. реактивная проводимость (или сопротивление) — квадратурной. Блок-схема прибора для автоматической записи $C(U)$ и активной проводимости $G(U)$ изображена на рис. 13. От генератора (1) переменный сигнал подается на исследуемый диод (4). Информационный измерительный сигнал через маломощный усилитель (6)

илә жараныр. Рекомбинасија просеси p -силисиумда $E_v + 0,35$ еВ донор типли, n силисиумда исә $E_c - 0,55$ еВ акцептор типли сәвијәләр вәсәтәсилә баш верир.

Дүз истигамәтдә инжексијанын бөјүк гүмәтләриндә јени һадисә—реактивлијин тутум характериндән индуктив характеринә кечиди мүшәһидә едилмишдир. Бу һадисә температурун, әсас јүкдашыјычыларын концентрасијасынын, ишыгландырманын, кичик дәјишән сигналын тезлијинин, база областы узунлуғунун гүмәтләринин кениш интервалында тәдгиг олунмушдур. Индуктивлијин гүмәти вә онун кејфијјәтлији базанын узунлуғундан асылы олараг экспоненциал артыр. Көстәрилмишдир ки, инвексија кәркинлијинин гүмәти $p-n$ кечидин температурун, әсас јүкдашыјычыларын концентрасијасыны, хәтти $p-n$ кечидли диодларда потенциал пәланмасыны тәјин етмәјә имкан верир.

Силисиум диодларында „јушмаг“ вә „сәрт“ електрик дешилмәси тәдгиг олунмушдур. Мүәјјәнләшдирилмишдир ки, електрик сәһәсинин бөјүк гүмәтләриндә јүкдашыјычыларын сыхлығы кәскин артыр. Ејни заманда, енсиз $p-n$ кечидләрдә Зинер дешилмәси вә тутумун индуктивлијә кечмәси мүшәһидә едилмишдир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1970, № 1—2.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 1—2.

Л. М. ИМАНОВ, К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

Основная цель диэлектрических исследований, систематически проводимых на протяжении ряда лет в лаборатории радиофизики ФИАН Азербайджанской ССР, состоит в изучении закономерностей проявления особенностей молекулярных взаимодействий и движений в конденсированном состоянии вещества. Эффективное управление химико-технологическими процессами, раскрытие природы физико-химических процессов в биологических средах, синтез новых полимерных материалов, удовлетворяющих специфическим требованиям, создание быстродействующих методов анализа и контроля—ни одна из этих актуальных проблем не может быть успешно решена без глубокого понимания механизма молекулярных движений и взаимодействий.

Чрезвычайное разнообразие подлежащих учету структур, а также большие трудности, связанные с теоретической интерпретацией, делают крайне необходимым систематическое накопление экспериментальных данных о молекулярном движении и взаимодействиях в связи с микроскопическими свойствами вещества. В данном аспекте диэлектрическая информация приобретает особую ценность благодаря исключительно высокой разрешающей способности метода по шкале времен, позволяющей наблюдать движения и атомных групп, и отдельных молекул, и крупных надмолекулярных образований. Эта особенность выгодно отличает диэлектрический метод от таких широко распространенных, как ЯМР-, ИК- и КР-спектроскопия. Однако ее реализация возможна только при постановке эксперимента в широких пределах изменения частот—от сверхвысоких до инфранизких, что связано с преодолением больших методических и технических трудностей.

Диэлектрические исследования велись параллельно в двух направлениях: а) освоение существующей и разработка и осуществление новой экспериментальной методики; б) непосредственные диэлектрические исследования веществ с различными типами взаимодействий и молекулярной структуры в жидком и твердом состояниях, в условиях значительного варьирования внешних параметров.

Методика [1—5]

Разработан новый методический комплекс, предназначенный для измерения диэлектрических характеристик веществ с большими и средними потерями в диапазонах метровых, дециметровых и санти-

метровых длин волн при температурах от -160 до $+60^\circ\text{C}$. Предложены модификации резонансных методов, основанные на трансформации импеданса резонансного контура, содержащего исследуемый образец, в педанса резонансного контура. Найдено, что искомая добротность контура с образцом Q_2 связана с добротностью измерительного контура Q_1 соотношением [3]:

$$Q_2 = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{1}{Q_1} - \frac{1}{Q_{02}} \right), \quad (1)$$

где κ —коэффициент связи между контурами, Q_{02} —собственная добротность измерительного контура.

Показано, что при больших потерях обычные формулы резонансного метода должны заменяться точными формулами:

$$C_x = \alpha_0 C_1 - C_2, \quad (2)$$

$$\{g\delta = \alpha \{g\delta_0, \quad (3)$$

$$\alpha_0 = \left[1 + \left(\frac{\Delta C}{C_1} \right)^2 \{g^2 \delta_0 \right]^{-1}, \quad (4)$$

$$\alpha = \left[1 - \frac{C_2 \Delta C}{C_1^2} \{g^2 \delta_0 \right]^{-1}, \quad (5)$$

где C_x —емкость конденсатора с образцом, C_1 и C_2 —емкости конденсатора контура при резонансе до и после подключения конденсатора с образцом; $\Delta C = C_1 - C_2$. На основании анализа (2) и (3) установлено, что обычные (упрощенные) формулы могут применяться только при $\{g\delta \leq 0,3$.

Развита общая теория резонансного метода измерения ϵ' и ϵ'' при $\gamma = \alpha + i\beta$ для цилиндрического резонатора, возбужденного на волне H_{01n} с образцом в виде диска [4]. Для определения фазовой постоянной β и постоянной затухания α получены формулы, применяемые при изучении широкого класса веществ:

$$\frac{\{g\beta l}{\beta l} = \frac{\lambda_d}{2\pi l} \{g \frac{2\pi}{\lambda_d} (\Delta L + l), \quad (6)$$

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad y = \alpha l. \quad (7)$$

Здесь l —толщина образца, ΔL —укорочение резонансной длины резонатора при введении образца, λ_d —длина волны в резонаторе,

$$p = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_d}{2\pi l} \right)^2 \frac{1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda_d} (\Delta L + l)}{1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda_d} (\Delta L + l)} \left\{ \frac{\beta^2 l^2 \left[1 + \{g \frac{2\pi}{\lambda_d} (\Delta L + l) \right]^2}{\beta l (1 + \{g^2 \beta l) - \{g\beta l} \right\}},$$

$$q = - \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2 \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} \right) p \frac{lL}{1 - \cos \frac{4\pi}{\lambda_d} (\Delta L + l)} \times$$

$$\times \frac{\{g^2 \beta l}{\beta l (1 + \{g^2 \beta l) - \{g\beta l},$$

где λ_0 —длина волны в свободном пространстве, L —длина воздушной части резонатора.

Поскольку всегда выполняется условие $D = p^3 + q > 0$, уравнение (7) имеет одно единственное решение, дающее α . Тщательный анализ условий упрощения и полученных формул привел к выводу, что ис-

пользование уравнений (6), (7) является обоснованным при выполнении условия

$$l \sim (2n + 1) \lambda_d / 8 \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где λ_d —длина волны в образце.

Собраны установки, действующие по предложенным методам, найдены оптимальные условия опыта, подробно разработана методика учета погрешностей. Освоена методика измерения диэлектрических характеристик жидких и твердых веществ с малыми и средними потерями в диапазоне километровых длин волн и жидких веществ с малыми и средними потерями в диапазоне сантиметровых и миллиметровых длин волн. Собраны соответствующие установки, найдены оптимальные условия опыта, освоена методика учета погрешностей. Разработана методика изготовления образцов для твердых полимерных и полупроводниковых материалов, обеспечивающая высокую воспроизводимость результатов. Собраны установки для измерения диэлектрических характеристик твердых полимерных и полупроводниковых материалов в диапазоне километровых и метровых длин волн [5].

ЭКСПЕРИМЕНТ

На собранных в лаборатории установках сняты радиочастотные спектры поглощения членов гомологических рядов моногалогенозамещенных бензола, одноатомных алифатических спиртов и уксусной кислоты в условиях широкого варьирования частот, температур, фазового состояния и концентраций полярных молекул.

Чистые полярные жидкости [6—13]

В связи с тем, что понимание релаксационных процессов в сложных полярных системах в значительной мере определяется способностью отделить все побочные эффекты, крайне важным является изучение динамического диэлектрического поведения сравнительно простых полярных жидкостей. Для чистых хлорбензола, бромбензола и йодбензола—типичных неассоциированных жидкостей, составленных из малых жестких молекул,—наблюдается единственная область релаксационного поглощения в диапазоне сантиметровых длин волн. Анализ показал, что времена диэлектрической релаксации составляют величины порядка 10^{-11} сек, а энергии активации этого процесса— $2,0 \div 2,3$ ккал/моль, увеличиваясь, соответственно, с переходом от хлорбензола через бромбензол к йодбензолу. Эти величины попадают в интервал энергий, характерных для ван-дер-ваальсовых сил.

Во всех трех жидкостях высокочастотная диэлектрическая проницаемость ϵ_∞ заметно превышает квадрат оптического показателя преломления n_D^2 . Сравнение величин ϵ_t в твердом состоянии (нулевой ориентационный вклад) с n_D^2 при 20°C приводит к выводу о том, что разность $\epsilon_\infty - n_D^2$ обусловлена в основном существованием дополнительной области дисперсии резонансного типа, которая должна наблюдаться, по-видимому, в диапазоне субмиллиметровых длин волн [6—8].

Более сложное молекулярное строение водородносвязанных жидкостей отражается в своеобразии их радиочастотных спектров. Из-за наличия нескольких сортов кинетических единиц дисперсия занимает гораздо больший участок по шкале времен, чем следовало бы ожидать в случае единственного релаксационного механизма. В температурных зависимостях диэлектрических коэффициентов пропиловых и бутиловых спиртов нормального и изостроения, снятых в диапазоне 10^5 — 10^8 гц, кроме основного поглощения, на высоких частотах при

наиболее низких температурах наблюдается дополнительное поглощение (рис. 1). Как основная, так и дополнительная области имеют релаксационную природу, но в первом случае процесс описывается од-

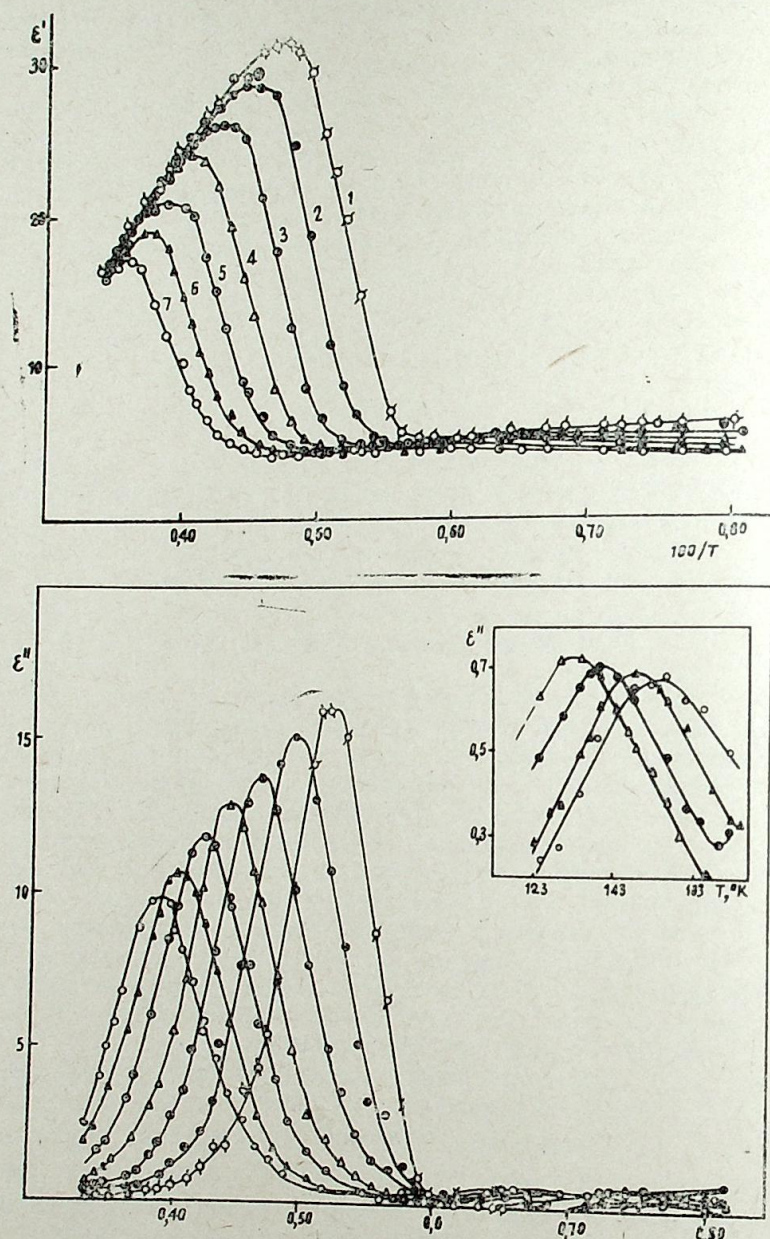


Рис. 1. Температурные зависимости диэлектрических проницаемостей ϵ' и показателя поглощения ϵ'' изобутанола при различных частотах (1—0,3; 2—0,8; 3—2,0; 4—5,0; 5—9,0; 6—20,0; 7—32,0 МГц).

ним значением времени релаксации, а во втором имеется некоторое симметричное распределение времен релаксации, растущее с понижением температуры.

Основная дисперсия обусловлена диссоциацией микрообразований, существующих в спиртах даже при высоких температурах в виде цепочек конечной длины. Скорость диссоциации цепочек K_d определена посредством приравнивания продолжительности жизни этих це-

почек к времени релаксации НЧ-области. Энергия диссоциации цепочек, найденная из наклона прямых $\lg K_d - 1/T$, близка к средней энергии межмолекулярной водородной связи (~ 6 ккал/моль), ВЧ-область своим существованием обязана „свободным“ молекулам на кон-

Поскольку данные для ВЧ-области относятся к состоянию глубокого переохлаждения, где специфические структурные эффекты могут вызвать существенное изменение молекулярных механизмов по сравнению с жидким состоянием, были поставлены исследования ВЧ-области при комнатных температурах в диапазоне микроволн [11]. Характеристики микроволновой области, определенные из анализа данных, полученных после вычитания вклада основной области, находятся в согласии с интерпретацией дополнительной дисперсии в терминах движения „свободных“ молекул. Показательно большое сходство с динамическим поведением молекул неассоциированных галоид-алкилов, в которых гидроксил замещен атомом галогена (времена релаксации порядка 10^{-12} сек, энергии активации $\leq 2,5$ ккал/моль). Существование распределения времен релаксации в спиртах связывается с различиями в энергетических параметрах концевых и мономерных молекул, а также с эффектом поворотной изомерии, создающим распределение релаксаторов по форме.

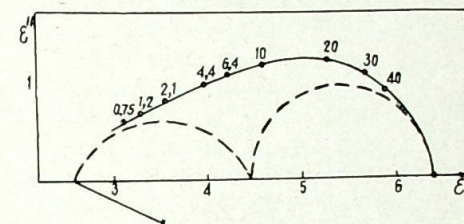


Рис. 2. Дуговая диаграмма уксусной кислоты при 30°C. Числа у точек — длины волн (см)

Согласно расчетам на основании микроволновых диэлектрических данных, в чистых спиртах основную долю „свободных“ молекул составляют концевые молекулы (90% при 20°C). Процентное содержание мономеров растет с повышением температуры и при переходе от пропиловых спиртов к бутиловым. Диэлектрические оценки числа мономерных молекул хорошо согласуются с данными спектров комбинационного рассеяния света и инфракрасного поглощения [12].

Следует подчеркнуть, что в спиртах, как и в галобензолах, доказано превышение ϵ_∞ над n_D^2 , свидетельствующее о наличии дополнительных областей поглощения неврабатываемой природы при более коротких длинах волн.

Большая аналогия в динамическом поведении прослежена между спиртами и карбоксильными кислотами. На рис. 2 представлена дуговая диаграмма жидкой уксусной кислоты при 30°C. Анализ приводит к выводу о наличии двух областей релаксационного типа. НЧ-область имеет время релаксации порядка 10^{-10} сек и энергию активации (~ 4 ккал/моль), попадающую в интервал значений энергии водородной связи и близкую к соответствующим энергиям активации релаксации для первых членов гомологического ряда спиртов (3,5 ккал/моль для метанола и 5,0 ккал/моль для этанола). Отсюда можно заключить, что в жидкой уксусной кислоте присутствуют водородносвязанные цепочки с конечной продолжительностью существования. В отличие от спиртов их доля невелика, что проявляется в сравнительно низкой амплитуде дисперсии.

ВЧ-область обладает симметричным распределением времен релаксации порядка 10^{-11} сек и энергией активации 2,5 ккал/моль. Эта область, как и в случае спиртов, создана движением „свободных“ молекул [13].

Концентрированные растворы полярных жидкостей в неполярных растворителях [14—17]

Важную информацию о связи между молекулярным движением и локальной микроструктурой дают диэлектрические исследования в концентрированных растворах, где удается сравнительно легко и в больших пределах варьировать ближнее окружение.

Введение в чистые моногалобензолы неполярных н-гексана и бензола влечет за собой заметное повышение скорости релаксационного процесса. Вместе с тем форма дисперсионной кривой остается неизменной. Другими словами, механизм релаксации в растворе качественно не отличается от такового в чистой полярной жидкости. Использование различных неполярных растворителей позволяет изучить влияние окружения на процесс релаксации. В бензольных растворах данных соединений обнаруживается параллелизм между релаксационными и вязкостными свойствами, что объясняется сходством размеров и формы молекул растворяемого вещества и растворителя. Отсутствие такого сходства в случае растворов в н-гексане приводит к ухудшению пропорциональности [14, 15].

Исследование микроволнового поглощения концентрированных растворов пропиловых и бутиловых спиртов в инертном н-гексане позволило существенно продвинуться в понимании природы и механизма дополнительного поглощения, обнаруженного в чистых спиртах. Хотя с разбавлением амплитуда дополнительного поглощения заметно уменьшается, форма дисперсионной кривой не меняется, причем параметр симметричного распределения времен релаксации почти не зависит от состава растворов в интервале концентраций полярного компонента 20—100%. Отсюда сделан вывод, что молекулярное строение пропиловых и бутиловых спиртов не претерпевает качественных изменений при переходе из чистой жидкости в концентрированный раствор.

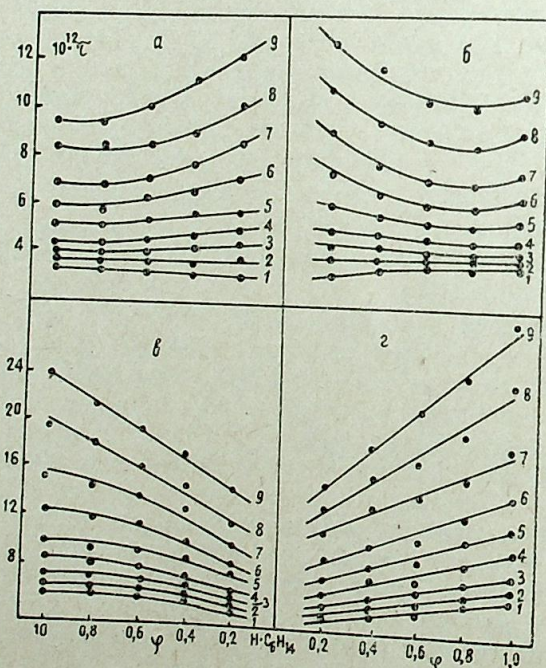


Рис. 3. Времена релаксации микроволнового поглощения н-пропанола (а), изопропанола (б), н-бутанола (в), изобутанола (г) в зависимости от состава растворов в н-гексане (1—30°; 2—20°; 3—10°; 4—0°; 5—минус 10°; 6—минус 20°; 7—минус 30°; 8—минус 40°; 9—минус 50°С).

Отсутствие сколько-нибудь значительного влияния специфических короткодействующих взаимодействий на процесс дополнительного поглощения обнаруживается при анализе концентрационных зависимостей τ_p в растворах. Если в случае бутиловых спиртов τ_p уменьшается с разбавлением, то для пропиловых спиртов наблюдается противоположное изменение (рис. 3), хотя вязкости обоих спиртов намного выше, чем у н-гексана. Учитывая, однако, что макными водородной связью, при такого рода сравнениях нужно обратиться к значениям вязкости, созданным "свободными" молекулами. Такие вязкостные величины η^* были найдены из монотонной зависимости экстраполяцией к точке $R=OH$.

Оказалось, что вязкость η н-гексана больше η^* н-пропанола и меньше η^* н-бутанола, причем эти расхождения в обоих случаях увеличиваются с понижением температуры. Именно поэтому введение молекул н-гексана должно тормозить подвижность "свободных" молекул н-пропанола и ускорять ее для н-бутанола в полном согласии с экспериментом [12, 16, 17].

Полярные смеси [18—22]

Рассмотрение динамических и равновесных свойств полярных смесей значительно расширяет объем доступной информации о природе и механизме релаксационного поглощения. Возможность наблюдения кинетического поведения каждого компонента, не осуществимая при работе с неполярными растворителями, создает благоприятные предпосылки для изучения роли ближнего окружения в процессе молекулярной релаксации.

Анализ температурных зависимостей релаксации в тройной смеси хлорбензол—йодбензол—н-гексан (на рис. 4 показаны характерные дуговые диаграммы) дал убедительные доказательства присутствия двух сортов кинетических единиц, релаксационные параметры которых идентичны таковым для полярных компонентов в чистом состоя-

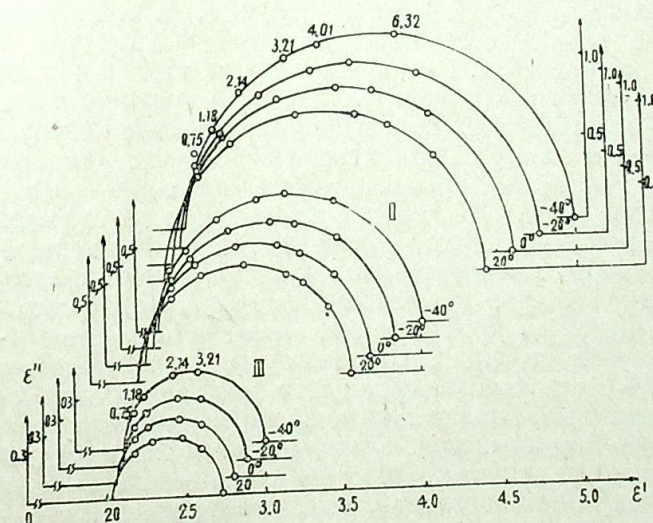


Рис. 4. Дуговые диаграммы смеси хлорбензол—йодбензол—н-гексан при объемном соотношении компонентов: 1:1:0,67 (I); 1:1:2 (II); 1:1:6 (III). Числа у точек — длины волн (см).

нии и двойных растворов в *n*-гексане. Поскольку время релаксации определяется не только структурой релаксатора, но и его ближним окружением, этот результат следует интерпретировать как свидетельство наличия ориентационной упорядоченности в ароматических соединениях, обеспечивающей существование микрообластей, занятых молекулами одного сорта. Можно полагать, что поворотное движение молекул, входящих в такие коротко живущие микрообласти, возможно лишь после процесса структурной релаксации, т. е. после распада неустойчивой упорядоченной структуры [18–20].

Интересные результаты, подтверждающие высокую структурную чувствительность метода, получены для смеси хлорбензол—*n*-бутанол при соотношении компонентов 1:3, 1:1, 3:1. Согласно диаграмме состояния компоненты обладают неограниченной взаимной растворимостью выше линии ликвидуса. Тем не менее в суммарном спектре четко выделяются две области, релаксационные характеристики которых совпадают и близки соответственно к таковым для основных областей хлорбензола и спирта. При более тщательном рассмотрении обнаруживается, что наблюдаемая на молекулярном уровне гетерогенность не является абсолютной, но сопровождается определенным взаимодействием между молекулами разного сорта. На это указывают: 1) резкое снижение концентрации „свободных“ гидроксильных групп в системе, выражающееся в кажущемся отсутствии вклада дополнительного поглощения на микроволнах, описанного выше для *n*-бутанола и его растворов в *n*-гексане; 2) отсутствие минимума на кривой „поляризация—состав“ в области низких концентраций спирта, обычно наблюдаемого при разбавлении в любом инертном растворителе и интерпретируемого как следствие высокой концентрации диэлектрически неактивных циклических структур.

На основании этих экспериментальных фактов было высказано предположение о возникновении в системе ОН... π -связи между протоном гидроксильной группы бутанола и π -электронами бензольного кольца, исключающей или значительно уменьшающей как долю „свободных“ гидроксильных групп, так и возможность циклизации мультимеров спирта [21].

Для прямой экспериментальной проверки предложенной гипотезы был изучен радиочастотный спектр поглощения системы хлорбензол—бутанол при соотношении компонентов 9:1, т. е. в области концентраций, где наблюдается максимальная циклизация в присутствии инертного растворителя. Экспериментальная кривая поглощения имеет только один явный максимум. Значения времени релаксации, найденные по положению этого максимума, совпадают со значениями для чистого хлорбензола, однако резко асимметричное (особенно при низких температурах) НЧ-крыло не оставляет сомнений в наличии дополнительного вклада. Выделение этого крыла из суммарного поглощения показало, что здесь, кроме НЧ-области, идентичной таковой при более высоких концентрациях бутанола, имеется еще одна „промежуточная“ область, не наблюдающаяся при других, изученных ранее концентрациях. Время релаксации этой области в 4–7 раз превышает значения его для „свободных“ молекул бутанола, а энергия активации (~ 3 ккал/моль) составляет нижний предел обычно наблюдаемого интервала изменения энергии межмолекулярной водородной связи (3–8 ккал/моль). Очень широкое симметричное распределение времен релаксации, быстро уменьшающееся с повышением температуры, свидетельствует о том, что промежуточная область отчасти, при разбавлении системы в гексане, которое должно разрыхлять мультимерные образования спирта, распределение времен релаксации уже не наблюдается, хотя другие характеристики промежуточной области остаются почти такими же [22].

Твердое состояние [23, 24]

Большое внимание уделено изучению диэлектрического поведения в связи с фазовыми превращениями. Как правило, переход переломов, указывающим на резкий спад диэлектрических коэффициентов, твердом состоянии. Характерно, однако, что в моногалобензолах на микроволнах ϵ' достигает постоянного значения только при температурах на 10–15° ниже точки перехода, а ϵ'' постепенно уменьшается „свободы“ в этом интервале температур проявляется в существовании релаксационного спектра поглощения, обнаруженного в твердом хлорбензоле при более низких частотах. Предполагается, что спектр создан в основном двумя вкладками: 1) высокочастотным, который связан с частичным разупорядочением в процессе предплавления, сопровождающимся ростом числа дефектов и 2) низкочастотным, который соответствует движениям в кристаллах, на что указывает резкое увеличение времен релаксации и повышение барьеров по сравнению с ВЧ-областью.

Аналогичное исследование твердой уксусной кислоты привело к открытию двух полиморфных форм этого соединения. На рис. 5 представлены температурные зависимости ϵ' уксусной кислоты на частотах 10^4 – 10^7 гц. Весьма четкий переход при температуре примерно на 46° ниже точки плавления доказывает наличие полиморфного превращения. Из анализа дисперсии в высокотемпературной β -форме следует существование двух релаксационных процессов, причем ВЧ-область обусловлена движением „свободных“ молекул, а НЧ-область, имеющая относительно большую амплитуду и лишь частично попадающая в перекрытый диапазон частот, по-видимому, относится к движению молекул внутри водородносвязанных мультимеров без распада последних [24].

Наличие другого, ранее неизвестного эффекта установлено в твердом *n*-бутаноле. Последний обычно легко переохлаждается и стеклует, причем, по литературным данным (П. П. Кобеко. Аморфные вещества. М., 1952), не может быть переведен в кристаллическое состояние. Как видно из рис. 6, нагрев стекловидного *n*-бутанола приводит к спонтанной кристаллизации при температуре примерно на 30° ниже точки плавления [21].

Область сосуществования жидкого и твердого состояний [25–27]

Высокая эффективность диэлектрического метода с точки зрения установления связи между молекулярным движением и строением конденсированных сред побудила использовать метод в целях физико-химического анализа. Выше указывалось, что любые фазовые превращения отражаются скачкообразными изменениями диэлектрических проницаемостей. Показано [26], что зависимости температур, соответствующих этим изменениям, от концентрации совпадают с диаграммами состояния, определенными обычным термическим методом. Надежность предложенного способа была проверена на ряде двойных систем с известными диаграммами (бромбензол—бензол, хлорбензол—йодбензол, уксусная кислота—бензол). После этого удалось впервые построить по диэлектрическим данным диаграмму состояния системы хлорбензол—*n*-бутанол и исследовать особенности молекулярного движения во всех фазовых полях.

Особого внимания заслуживают результаты, полученные в этой системе для интервала температур между линиями ликвидуса и соли-

дуса. Кристаллизация хлорбензола при переходе через линию ликвидуса устраняет вклад ВЧ-области (см. выше), тогда как НЧ-область смещается скачком из диапазона дециметровых волн в диапазон более длинных волн, причем появляется распределение времен релаксации,

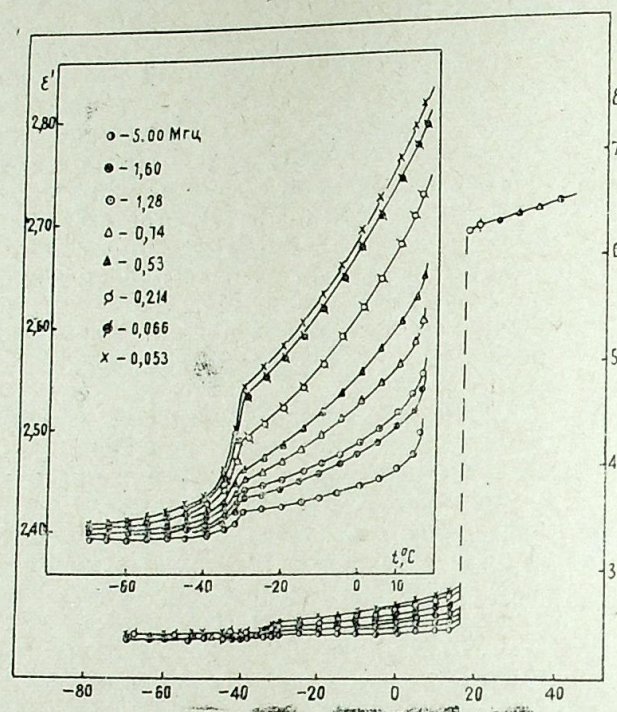


Рис. 5. Температурные зависимости диэлектрических проницаемостей твердой уксусной кислоты при разных частотах.

асимметричное при содержании спирта 25 и 50% и симметричное при 75%. Более чем в 1,5 раза возрастают значения энергии активации (10 ккал/моль), которые являются эффективными, так как изменение времен в интервале ликвидус—солидус зависит не только от температуры, но и от концентрации.

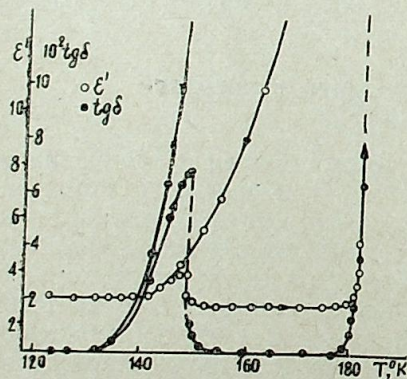


Рис. 6. Температурные зависимости диэлектрических коэффициентов n-бутанола ниже точки затвердевания при 40 кг/см².

лаксации при этом оказываются бутанола в жидкой фазе.

Из анализа данных в рамках термодинамического описания релаксационного процесса следует, что при температурах ниже линии лик-

участки объема, занимаемые жидкой фазой, характеризуются более высокой упорядоченностью молекул, динамическое поведение которых существенно отличается от наблюдаемого в жидком состоянии выше линии ликвидуса. Тот факт, что релаксация молекул в интервале ликетса значениями, присущими твердому состоянию, свидетельствует о необходимости принять во внимание возросшую роль стерического торможения. Такое торможение может быть обусловлено повышенным давлением в жидких объемах, ограниченных областями закристаллизованного бензола.

Действительно, переход от симметричного распределения времени релаксации к асимметричному, наблюдаемый в системе хлорбензол—бутанол при росте закристаллизованной доли хлорбензола, является еще одним доказательством того, что описанные эффекты в интервале ликвидус—солидус не могут быть сведены в тривиальному действию концентрационного фактора. Несомненно, имеет место изменение самого механизма процесса, протекающего в условиях высокоупорядоченной локальной структуры, ибо появление асимметричного распределения является признаком возрастания кооперативности процесса [25, 27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во всех изученных объектах установлено наличие сложного дисперсионного спектра, содержащего области релаксационного и резонансного типов. В результате расшифровки этих спектров получена новая и обширная количественная информация, содержащая времена диэлектрической релаксации, параметры симметричного и асимметричного распределения времен релаксации, их температурные зависимости, высоты потенциальных барьеров для процесса молекулярного движения, ширину высот потенциальных барьеров, термодинамические функции процесса диэлектрической релаксации, эффективные дипольные моменты, корреляционные параметры. Существование тесной связи между этими величинами и строением вещества на молекулярном уровне позволило сделать ряд обобщающих выводов об особенностях локальной микроструктуры и теплового движения молекул в изученных объектах.

Показано, что основным фактором, определяющим молекулярное движение в жидкостях, где взаимодействия обусловлены дальнедействующими ван-дер-ваальсовыми силами, является существование средней ориентационной упорядоченности во взаимном расположении молекул. Такая упорядоченность может быть следствием квазирешеточной структуры жидкостей, характерным признаком которой является ее конечная продолжительность жизни. Механизм диэлектрической релаксации непосредственно связан с процессами возникновения и распада этой структуры, а также с движением „свободных“ молекул. Поскольку время жизни структуры одного порядка с временем поворота „свободных молекул“, радиочастотные спектры поглощения таких жидкостей обладают единственным временем диэлектрической релаксации, равным сумме вышеуказанных времен.

В жидкостях, где наряду с дальнедействующими силами проявляются короткодействующие, создающие направленные взаимодействия типа одномерной межмолекулярной водородной связи, существуют водородносвязанные микрокомплексы. Поскольку времена жизни последних намного больше времени жизни квазирешетки, радиочастотные спектры поглощения таких жидкостей обладают двумя значениями времени релаксации. Первое (большее) соответствует процессам возникновения и распада микрокомплексов, второе (меньшее)—квазирешеточной упорядоченности.

шетки и движения „свободных“ молекул. Молекулам спиртов присуще явление вращательной изомерии. Поэтому в отличие от ван-дер-ваальсовых жидкостей здесь второй релаксационный процесс более или менее уширен.

Для всех изученных жидкостей, независимо от преобладающего типа взаимодействия, отмечаются косвенные указания на существование резонансного типа поглощения, приуроченного к субмиллиметровому диапазону длин волн, который до сих пор остается технически трудно доступным для прямой проверки.

Разработан диэлектрический метод построения и исследования диаграмм состояния, позволяющий значительно расширить сведения, полученные классическими методами физико-химического анализа. Этот метод дает возможность: 1) определить с достаточно высокой точностью линии ликвидуса, солидуса, эвтектические концентрации; 2) решить качественно и количественно (в терминах времени релаксации) вопрос о степени молекулярного смещения выше линии ликвидуса; 3) обнаружить такие слабые взаимодействия между молекулами разного сорта в растворе, которые невозможно наблюдать не только обычным термическим методом, но и с помощью рефрактометрии, денсиметрии, вискозиметрии и других аналогичных методов (например, взаимодействие типа О-Н... π -связи между гидроксильными группами и π -электронами ароматических систем); 4) получить количественную информацию о локальной микроструктуре и молекулярном движении в интервале между линиями ликвидуса и солидуса, а также ниже линии солидуса.

В частности, исследования по последнему пункту позволили установить, что в интервале ликвидус—солидус жидкая фаза характеризуется существованием высокоупорядоченной локальной структуры, находящейся под повышенным давлением со стороны твердой фазы и качественно отличающейся от жидкой фазы выше линии ликвидуса.

Впервые обнаружены в твердом состоянии:

- а) переход стекло—переохлажденная жидкость—поликристалл в н-бутаноле;
- б) переход твердое—твердое в ледяной уксусной кислоте;
- в) радиочастотные спектры поглощения в твердом хлорбензоле и высокотемпературной твердой фазе ледяной уксусной кислоты.

Выполнение описанных исследований потребовало, наряду с работами по экспериментальной методике, проведения работ по методике обработки экспериментальных данных. При этом был предложен и развит новый метод графического представления, предназначенный для интерпретации результатов при наличии симметричного распределения времени диэлектрической релаксации [20].

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М. Вестник МГУ, 1950, № 5.
2. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. ПТЭ, 1965, № 4.
3. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. ЖФХ, 1965, 39, 3044.
4. Иманов Л. М., „Измерительная техника“, 1967, № 12.
5. Иманов Л. М., Расулова М. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 6.
6. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „ДАН Азерб. ССР“, 1962, 18, 9.
7. Зулфугарзаде К. Э. Материалы IX научной конференции аспирантов АН Азерб. ССР, Баку, 1962.
8. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. ЖФХ, 1963, 37, 366.
9. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1962, № 2 и 3; 1963, № 4.
10. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. ЖФХ, 1963, 37, 1510.
11. Иманов Л. М., Мирзоев Ф. Г., Зулфугарзаде К. Э. ЖФХ, 1963, 39, 2836.

12. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э., Мирзоев Ф. Г. Сб. „Тепловое движение молекул и межмолекулярное взаимодействие в жидкостях и растворах“. Самарканд, 1969.
13. Зулфугарзаде К. Э., Гулиев Л. А., Иманов Л. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1971.
14. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1961, № 5 и 6.
15. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. ЖФХ, 1964, 38, 2437.
16. Иманов Л. М., Мирзоев Ф. Г. Материалы научной конференции молодых ученых и аспирантов АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук. Баку, 1966. 117.
17. Мирзоев Ф. Г., Зулфугарзаде К. Э. Материалы научно-теоретической конференции молодых ученых АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук. Баку, 1967, 61.
18. Imanov L. M., Zulfugarzade K. E., Hadshijew N. A. Z. phys. Chem. (DDR), 1968, 238, 133.
19. Zulfugarzade K. E., Hadshijew N. A., Imanov L. M. Zs. phys. Chem. (DDR), 1968, 239, 425.
20. Зулфугарзаде К. Э., Гаджиев Г. А., Иманов Л. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 1.
21. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э., Бафадаров З. А. ЖФХ, 1968, 22, 2450.
22. Зулфугарзаде К. Э., Гаджиев Г. А., Иманов Л. М. ЖФХ (в печати).
23. Зулфугарзаде К. Э., Гулиев Л. А., Иманов Л. М. „ДАН Азерб. ССР“, 1969, № 11.
24. Зулфугарзаде К. Э., Гулиев Л. А., Иманов Л. М., ЖФХ, 1970, № 3.
25. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э., Бафадаров З. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1966, 22, 20.
26. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э., Бафадаров З. А., Гулиев Л. А. ЖФХ, 1966, 40, 1271.
27. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э., Бафадаров З. А. Сб. „Тепловое движение молекул и молекулярное взаимодействие в жидкостях и растворах“. Самарканд, 1969, 343.

УДЗ 621. 315. 592. 2:546. 23.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Н. И. ИБРАГИМОВ, Ш. В. МАМЕДОВ, З. М. АБУТАЛЫБОВА

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ТЕРМООБРАБОТКИ НА ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СЕЛЕНА

Как известно, электропроводность гексагонального селена зависит от температуры экспоненциально и имеет ряд аномалий, затрудняющих получение воспроизводимых результатов и их интерпретацию. Это связано с тем, что электропроводность является сложной функцией предистории (включая термическую предисторию), степени кристалличности материала, количества и сорта примеси в нем и т. д. Нам кажется, что основной причиной несоответствия данных многих исследований по селену является различие в температуре и режиме предварительной термообработки материала [1]. Для подтверждения этого предположения необходимо было провести параллельно с ЭПР измерениями исследование электрических свойств селена различной чистоты. В связи с этим была поставлена задача—выявить роль термообработки в формировании электрофизических свойств гексагонального селена и установить, есть ли корреляция между электрическими и магнитными свойствами.

В настоящей статье приводятся результаты измерений электропроводности и термо-э. д. с. селена различной чистоты: B_3 (I серия), B_4 (II серия), B_5 (III серия). Образцы изготовлялись таким же образом, как и в случае исследований ЭПР поглощения. Исходный порошкообразный селен различной чистоты расплавляли при 250°C (30 минут) в вакуированных ($p < 10^{-4}$ мм рт. ст.) кварцевых ампулах, затем кристаллизовали при 215°C (30 часов) и крошили в яшмовой ступке, т. е. он проходил так называемый цикл обработки [2]. Полученным таким образом порошковым материалом заполняли кварцевые ампулы, которые вновь откачивали до $p < 10^{-4}$ мм рт. ст. и запаивали, а затем подвергали термообработке в течение двух часов при 250, 350, 450, 520, 700°C . Кроме этих образцов, были изготовлены еще две серии (V, IV) из селена марки B_5 . Образцы серии IV изготовлялись из того же материала и проходили ту же процедуру обработки, что и серии I, II, III, но с той лишь разницей, что их термообработка производилась в неоткаченных ампулах. Для изготовления образцов серии V исходный порошкообразный селен помещали в кварцевые ампулы, затем долго откачивали их при небольшом нагреве и подвергали термообработке при указанных выше температурах. После этого образцы всех серий одновременно кристаллизовались при 210°C в течение 40 часов. Образцы имели цилиндрическую форму диаметром ≈ 10 мм и высотой ≈ 15 мм. Торцы образцов шлифовали. Измерения электропроводности σ и термо-э. д. с. α производили в вакууме и темноте при постоянном токе обычным

компенсационным методом. Для улучшения контакта на торцы образцов наносили акводаг. Установка позволяла исследовать температурную зависимость σ и α вплоть до точки плавления селена.

Типичные графики зависимости σ от $T_{\text{обр}}$ представлены на рис. 1. Как видно, электропроводность образцов всех серий уменьшается с увеличением $T_{\text{обр}}$, достигая $\sim 10^{-7}$ ом $^{-1}$ см $^{-1}$ при $T_{\text{обр}} \geq 700^\circ\text{C}$. Наименьшее различие в проводимости образцов разных серий наблюдается при наименьшей $T_{\text{обр}}$ ($\leq 250^\circ\text{C}$). С дальнейшим ростом $T_{\text{обр}}$ это различие уменьшается и при $T_{\text{обр}} \geq 700^\circ\text{C}$ становится пренебрежимо малым. Так, проводимость образцов серии IV изменяется с ростом $T_{\text{обр}}$ от 10^{-6} до 10^{-7} ом $^{-1}$ см $^{-1}$, в то время как для образцов серии V она изменяется всего лишь на один порядок. Проводимость селена, прошедшего цикл обработки и термообработанного при $T_{\text{обр}} = 250^\circ\text{C}$ в неоткаченных ампулах (серия IV), на три порядка больше, чем у не прошедшего предварительную обработку и откаченного и ампулах под нагревом (серия V). Это показывает, сколь велика роль предистории, предварительной обработки и первоначального содержания кислорода в проводимости материала.

Общее рассмотрение изменения σ с $T_{\text{обр}}$ позволяет заключить, что определяющую роль в формировании электрофизических свойств селена играют температура и режим термообработки.

Изучением температурной зависимости σ было выявлено, что проводимость образцов всех серий слабо зависит от температуры. Энергии активации проводимости, определенные из зависимости $\ln \sigma$ от $1/T$, малы и находятся в пределах $0,05 \div 0,15$ эв.

На рис. 2, 3, 4 показаны зависимости термо-э. д. с. от температуры для образцов I, II, III серии. Для большей наглядности термо-э. д. с. отложена в относительных единицах; α_0 —величина термо-э. д. с. при комнатной температуре. Термо-э. д. с. образцов всех серий возрастает с повышением температуры измерения и после определенного ее значения начинает уменьшаться (изгиб на кривых). Температура измерения, при которой наблюдается изгиб, зависит как от чистоты материала, так и от $T_{\text{обр}}$.

Как видно из рис. 2, 3, 4, для образцов серии I изгиб наблюдается только при $T_{\text{обр}} = 700^\circ\text{C}$, тогда как для образцов серий II и III он имеет место при всех значениях, кроме $T_{\text{обр}} = 250^\circ\text{C}$. Температурный интервал измерения, при котором термо-э. д. с. начинает уменьшаться, смещается в область более высоких температур с уменьшением чистоты селена. Так, для образцов серии III он равен $100 \div 140^\circ\text{C}$, серии II— $120 \div 160^\circ\text{C}$, а для серии I— 180°C . Такой же ход зависимости α от $1/T$ для хорошо кристаллизованных образцов наблюдался в работе [3], причем изгиб имел место при $T \approx 125^\circ\text{C}$. Уменьшение термо-э. д. с. после указанных температур, по-видимому, связано с возбуждением электронов из донорных уровней. Характер изменения α с $T_{\text{обр}}$ для образцов разных серий отличается незначительно, поэтому на рис. 5 представлена лишь одна типичная кривая зависимости α от $T_{\text{обр}}$. Как видно

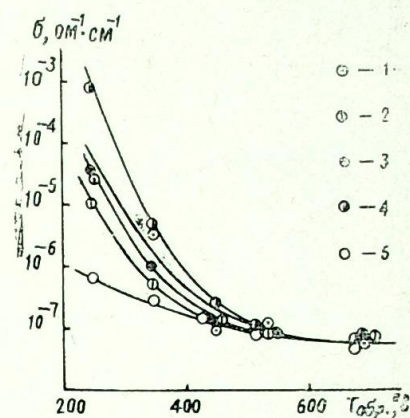


Рис. 1. Зависимость электропроводности поликристаллического селена от температуры предварительной термообработки (1, 2, 3, 4 и 5—образцы соответствующих серий).

α уменьшается с увеличением температуры термообработки, проходит через минимум при $T_{обр} \approx 500^\circ \text{C}$, а затем вновь возрастает. Как известно, модель „свободных носителей“ в случае селена не оправдывается. Селен принадлежит к числу таких полупроводников,

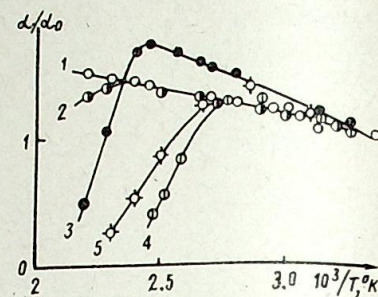
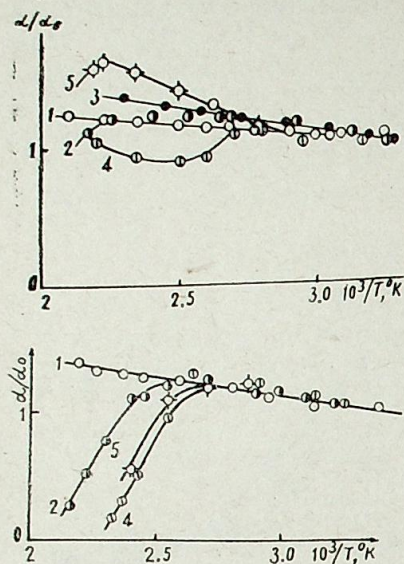


Рис. 2. 3. 4. Температурная зависимость термо-э. д. с. образцов I, II, III серий, прошедших термообработку при различных $T_{обр}$. (1—250, 2—350, 3—450, 4—520 и 5—700 $^\circ\text{C}$).

у которых электрические свойства определяются только ближним порядком [4]. Кроме того, нет такого механизма рассеяния в модели „свободных носителей“, который мог бы привести к экспоненциальной зависимости подвижности от температуры. Имеется и ряд экспериментальных результатов, не укладывающихся в рамки этой модели:

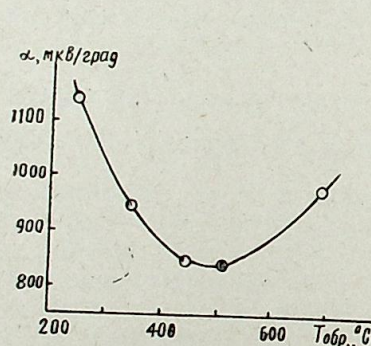


Рис. 5. Зависимость термо-э. д. с. от $T_{обр}$.

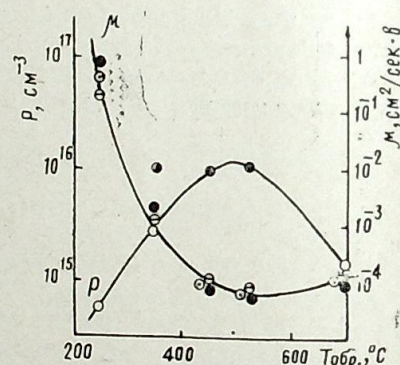


Рис. 6. Зависимость концентрации p и подвижности дырок μ в поликристаллическом селене от $T_{обр}$.

Так, при изучении спектра поглощения в селене, как правило, отсутствует поглощение, вызванное свободными дырками. В работе [5] была предложена модель потенциальных барьеров, по которой возбужденные дырки как свободные носители достаточно легко перемещаются по цепи, а для перехода от одной цепи к другой преодолевают потенциальные барьеры величиной $\sim 0,1$ эв. Хотя эта модель и позволила объяснить экспоненциальный рост подвижности с температурой и проведены в сильных электрических полях, но из-за того, что в [5] не указаны характер и место этих барьеров, возникли определенные трудности.

Из измерений проводимости на переменном токе в широком интервале частот ($10^3 \div 4 \cdot 10^9$ гц) было установлено, что потенциальные барьеры существуют как при низких [6], так и при высоких частотах [7], причем цепей также несвободно из-за наличия барьера между атомами внутри отдельной цепи. С возрастанием частоты наблюдается непрерывное увеличение проводимости без стремления к насыщению. Из общего рассмотрения [6, 7] Эггерт [8] приходит к выводу, что только теория явления, что носителям для участия в электропроводности приходится преодолевать потенциальные барьеры внутри цепей и на границе двух цепей посредством перескока. При этом высота межцепочечных барьеров выше, чем внутрицепочечных. Необходимо отметить, что модель перескока через потенциальные барьеры вытекает не только из высокочастотных измерений, но и из анализа исследований влияния примесей на проводимость поликристаллического селена [8]. Модель поляронов малого радиуса к селену впервые применил Хемпел [10].

Рассмотрение переноса носителей перескоковым механизмом как диффузии по междоузлиям приводит к следующему выражению для подвижности:

$$\mu = \frac{e}{kT} \cdot \lambda^2 \cdot \nu_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E_s}{kT}\right), \quad (1)$$

где λ — длина свободного пробега носителя (порядка межатомных расстояний), ν_0 — частота колебаний решетки ($\sim 10^{13}$ сек $^{-1}$). Экспоненциальный рост подвижности удовлетворительно описывается этим выражением до $\Delta E < 0,5$ эв. В случае $\Delta E > 0,5$ эв получается неприемлемо большая величина для λ формула (1) становится неприменимой.

Известно, что в полупроводниках с малой подвижностью носителей, в частности в селене, наблюдение эффекта Холла сопряжено с большими трудностями. Из рассмотрения кинетических явлений при малой подвижности носителей (когда проводимость осуществляется поляронами малого радиуса) следует, что эффект Холла не дает точной информации о концентрации носителей тока [11]. Существует мнение, что эффект Холла принципиально не должен наблюдаться, когда проводимость реализуется вследствие перескоков носителей от конца одной молекулы к другой [12].

Для установления связи между концентрациями парамагнитных центров и носителей заряда необходимо было исследовать такую электрическую характеристику селена, которая определяется процессами, происходящими в пределах отдельного зерна (надмолекулярного образования [13]), и не зависит от условий перехода носителя от одного зерна к другому. Как известно, такой характеристикой является термо-э. д. с., по которой и определялась концентрация.

В случае одного типа носителей из модели полярона малого радиуса получено следующее выражение для термо-э. д. с. [14]:

$$\alpha = \frac{\kappa}{e} \left[\ln \frac{N_0}{p} + \frac{\delta \varepsilon}{kT} \right]. \quad (2)$$

Здесь N_0 — плотность состояний; p — концентрация дырок; $\delta \varepsilon$ — энергия связи малого полярона, которую для случая невырожденного газа поляронов можно оценить из $\delta \varepsilon \approx \frac{1}{2} (\hbar^2 / 2\pi) \cdot \omega_p \Phi_0$ [15]. Принимая $\omega_p \leq 2,59 \cdot 10^{-3}$ эв

[16] и $\Phi_0 \leq 10$ (сильная электрон-фононная связь), получаем $\delta \varepsilon \lesssim 0,1$ эв, а при комнатной температуре $\delta \varepsilon / kT \lesssim 3$. При этом (2) принимает почти совпадающий с формулой Писаренко вид $\alpha = \frac{\kappa}{e} \left[\ln \frac{N_0}{p} + 2 \right]$. (3)

Вычисление концентрации производилось по этой формуле.

Характерная зависимость концентрации дырок в селене от температуры термообработки показана на рис. 6. На этом же рисунке представлена зависимость подвижности от $T_{обр}$; μ вычислялась по величинам σ и p . Как видно из рисунка, концентрация дырок растет с увеличением $T_{обр}$, достигает максимума при $T_{обр} \approx 500^\circ \text{C}$, а затем уменьшается. Зависимость концентрации парамагнитных центров от $T_{обр}$ носит такой же характер [2]. Таким образом, обнаруживается корреляция между концентрациями дырок и парамагнитных центров.

Как известно, проводимость поликристаллического селена зависит от скорости зернования и роста зерен при кристаллизации, причем скорость зернования определяется скоростью охлаждения жидкого селена. В нашем случае чем выше $T_{обр}$, тем больше скорость охлаждения жидкости (при всех прочих равных условиях), а следовательно, и выше скорость зернования. Известно также, что подвижность носителей в крупнозернистом материале больше, чем в мелкозернистом. Поэтому с повышением $T_{обр}$ из-за роста скорости зернования подвижность в образцах всех серий монотонно уменьшается и, несмотря на некоторое возрастание концентрации до $T_{обр} \approx 500^\circ \text{C}$, проводимость продолжает уменьшаться. В образцах серий I, II, III подвижность с $T_{обр}$ изменяется почти на 4 порядка, в то время как концентрация носителей — на 1—2 порядка.

Таким образом, монотонное уменьшение σ с $T_{обр}$ в основном обусловлено уменьшением μ . По мнению Хенкельса [3], проводимость поликристаллического селена очень слабо зависит от первоначальной температуры жидкости, из которой после быстрого охлаждения и кристаллизации приготовлен образец. Эта зависимость заметна лишь при $T_{обр} > 500^\circ \text{C}$. Такой результат получен нами только для образцов серии V, тогда как проводимость образцов остальных серий очень существенно зависит от температуры термообработки.

Из всего вышеизложенного видно, как важна роль предварительной термообработки в формировании электрофизических свойств поликристаллического селена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdullaev G. B., Ibrahmov, N. I., Mamedov Sh. V. and Zhuvarly. T. Ch. Phys. Stat. Sol., 16, k 113, (1966).
2. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 16, 1967, № 6.
3. Henkels H. W. J. Appl. phys., 22, 10 (1951).
4. Joffe A. F. and Regel A. R. Progress in semiconductors, 4, Heywood company Ltd, London (1960), 237.
5. Plessner K. W. Proc. Phys. soc., London, B 64, 671.
6. Ludwig W. und Eckart F. Zs. Phys., 162, 127.
7. Jaumann J. und Neckenburger E., Zs. Phys. 151, 72 (1958).
8. Eggert H. Zs. Naturforsch., 21a, 658 (1966).
9. Fröhlich H. Theory of Dielectrics, Clarendon Press, 2. Aufl, Oxford (1958).
10. Hempel H. P. Rec. Adv. in Sel. physics, Perg. Press (1964).
11. Клиггер М. И. „ДАН СССР“, 142, 1065 (1962).
12. Органические полупроводники (под ред. А. В. Топчиева). Изд. АН СССР, М., (1963).
13. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Абуталыбова З. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 76, 1968, № 6.
14. Klingner M. I. Phys. stat. sol., 11, 459 (1965).
15. Клиггер М. И. Докт дисс., ИПАН СССР, Л., (1964).
16. Queisser J. and Stuke J. Sol. stat. Comm., 5, 75, (1967).

Поступило 10.VII 1969

Н. Ф. Абдуллаев, Н. И. Ибрагимов, Ш. В. Мамедов, З. М. Абуталыбова
Термик ишлэмәнин поликристаллик селенин електрик-кечиричилијинә тәсири.

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә тәмизлији мұхтәлиф олан поликристаллик селенин електрик кечиричилији, термоЕнГ өлчүләринин нәтичәләри верилмиш вә нин ролу мұәјјән едилмишдир. Мәлүм олмушдур ки, әввәлчәдән кристаллашдырылмыш, сонра хырдаланмыш вә һавасы сорулмамыш ампуларда, $T_{ишл} = 250^\circ \text{C}$ температурда ишләнмиш B_5 маркалы селенин електриккечирмәси $\sim 10^{-3} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ әввәлчәдән кристаллашдырылмамыш вә хырдаланмамыш, һәмчинин јүксәк вакуума гәдәр сорулмуш ампуларда, көстәрилән температурда ишләнмиш һәмин маркалы селенин електриккечирмәси $\sim 10^{-6} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ -дир. Електриккечирмәдәки бу фәрг $T_{ишл}$ артдыгча тәдричән азалыр вә $T_{ишл} \geq 700^\circ \text{C}$ олдугда нәзәрә алынмајачаг дәрәчәдә кичик олур. Термо ЕнГ-нин гијмәтинә әсасән, тәјин едилмиш дешикләрин концентрасијасы селендәки парамагнит мәркәзләрин концентрасијасы илә ујғунлашыр (кореллә едир). Мүәјјән едилмишдир ки, дешикләрин омик јүрүклүјү $T_{ишл} \approx 250^\circ \text{C}$ -дә $\sim 10^{-1} \text{ см}^2/\text{в. сан.}$ -дир вә $T_{ишл}$ -нин артмасы илә $\sim 10^{-4} \text{ см}^2/\text{в. сан.}$ -јә гәдәр мәнотон олараг азалыр.

М. А. МАМЕДОВ

СОПОСТАВЛЕНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМЕТ

Существующие многочисленные гипотезы о происхождении комет можно разделить на две группы. По мнению одних исследователей, кометы образуются за пределами солнечной системы, а других — внутри солнечной системы. Подобные гипотезы были выдвинуты французскими астрономами Лагранжем и Лапласом еще в XVIII веке.

Согласно гипотезе Лагранжа, все кометы (периодические и непериодические) возникли в результате катастрофических изрыгов на планетах. В зависимости от начальных скоростей они стали двигаться по разным орбитам. Кометы с умеренными эксцентриситетами являются короткопериодическими, другие — с эксцентриситетами, близкими к единице, долгопериодическими.

Согласно гипотезе Лапласа, кометы образовались за пределами Солнечной системы. Когда некоторые из них проникают в сферу действия Солнца, они начинают двигаться вокруг него по разным коническим сечениям. Кометы, имеющие малые перигельные расстояния, мы называем долгопериодическими. Короткопериодические кометы возникли из долгопериодических в результате действия на них планетных возмущений.

Наша задача заключалась в исследовании гипотезы Лагранжа о происхождении комет при помощи качественного и количественного анализа движений комет или гипотетических небесных тел, из которых они образовались. Данная статья является продолжением статьи, ранее опубликованной. В этой части излагаются теоретические и эмпирические распределения полученных орбит на сфере действия Юпитера. Различные направления скорости взрыва u_0 , характеризуются углами λ и β . Здесь λ — угол между проекцией u_0 на плоскость xu и осью u , а β — угловое расстояние u_0 от экватора Юпитера. Когда β положительно, λ меняется от 0° до $+180^\circ$, через $+30^\circ$. Когда β отрицательно, λ меняется от 0° до -180° , через -30° .

Таким образом, решая уравнение движения в задаче трех тел на ЭВМ и варьируя начальное значение u_0 , через $\Delta u = 0,05 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ получим около 2000 орбит (β изменяется от 0° до $\pm 70^\circ$). Для всех этих орбит вычислены элементы a, e, q, i в момент достижения границы сферы действия Юпитера, где было проведено сравнение теоретического и эмпирического распределений комет.

§ 1. Теоретическое распределение орбит гипотетических комет

Мы предполагаем, что справедлива гипотеза равновероятности направлений выброса и равновероятности величин скоростей u_0 . При этой гипотезе закон распределения вероятности по u_0 и λ равновероятен, а по β — пропорционален $\cos \beta$. Отсюда вытекает, что если всего выброшено с поверхности Юпитера N гипотетических комет, то вероятное число выбросов, соответствующее одной из скоростей u_0 и каким-либо из указанных углов α и β , равно

$$N_{\lambda, \beta, u_0} = P_{\lambda, \beta, u_0} \cdot N,$$

где вероятность (частота)

$$P_{\lambda, \beta, u_0} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cos \beta$$

(точнее говоря, это вероятность (частота) выброса со скоростью u_0 , когда углы λ и β лежат в указанных интервалах):

$$u_0 = (60,39 - 60,44), (60,44 - 60,49), \dots$$

$$\lambda = (0^\circ \pm 30^\circ), (\pm 30^\circ \pm 60^\circ), (\pm 60^\circ \pm 90^\circ), \dots$$

$$\beta = (0^\circ \pm 5^\circ), (\pm 5^\circ \pm 10^\circ), (\pm 10^\circ \pm 15^\circ), \dots$$

Мы приписываем указанную вероятность не интервалам, а самим перечисленным значениям u_0, λ, β . А это даст некоторую незначительную погрешность.

Таким образом, получено, что каждому набору u_0, λ, β соответствует своя частота (вероятность) P_{λ, β, u_0} . Вместе с тем каждой тройке u_0, λ, β соответствуют свои элементы орбиты a, e, q, i гипотетических комет в момент достижения сферы действия Юпитера. Следовательно, каждой полученной орбите гипотетических комет с элементами a, e, q, i соответствует своя частота (вероятность)

$$P_{a, \beta, u_0} = P_{a, e, q, i}.$$

При каждом фиксированном β направление λ и скорость u_0 равновероятны. Следовательно, равновероятны любые полученные орбиты

Таблица 1

$a \backslash e$	0,0—0,1	0,1—0,2	0,2—0,3	0,3—0,4	0,4—0,5	0,5—0,6	0,6—0,7	0,7—0,8	0,8—0,9	0,9—1,0	$\Delta 1,0$	
< 3,0	n_{11}	n_{12}	...	...	...	...	...	...	...	...	...	Σn_{1k}
3,0—3,5	n_{21}	n_{22}	...	...	...	...	...	...	...	...	...	Σn_{2k}
3,5—4,0	:	:										:
4,0—4,5	:	:										:
4,5—5,0	:	:										:
5,0—5,5	:	:										:
5,5—6,0	:	:										:
6,0—6,5	:	:										:
6,5—7,0	:	:										:
7,0—7,5	:	:										:
7,5—8,0	:	:										:
8,0—8,5	:	:										:
8,5—9,0	:	:										:
> 9,0	:	:										:
	Σn_{k1}	Σn_{k2}	...	...	...	...	...	...	...	...	...	N_β

с элементами a , e (q эквивалентно e , i эквивалентно β) при фиксированном β :

$$N_{a,e} = P_{a,e} \cdot N_{\beta};$$

где

$$P_{a,e} = \frac{1}{120};$$

N_{β} — число комет с фиксированным β .

Составляем корреляционную таблицу в которой подсчитано число всех случаев с a , e , заключенных в разных интервалах (табл. 1). Здесь n_{ik} — число комет с a , e , попадающих в соответствующую клетку; n_1 — число комет с $a < 3,0$ при любом e . С помощью этой таблицы получено распределение числа комет по a в соответствующих интервалах при фиксированном e и при любом e .

Например:

$$N_{a < 3,0} = \frac{n_{11} + n_{12} + \dots}{N_{\beta}} = \frac{n_{10}}{N_{\beta}},$$

$$N_{3,0 < a < 3,5} = \frac{n_{20}}{N_{\beta}},$$

$$N_{a < 3,0, e} = (0,0 - 0,10) = \frac{n_{11}}{n_{01}}.$$

Составлен график распределения a :

$$N_a = N(a)$$

при фиксированном e и при любых e (рис. 1, 2). Такие же распределения были получены для β . Затем получено распределения для a при β в интервале

$$0^\circ \leq \beta \leq \pm 35^\circ$$

$$\text{и } |\beta| > 35^\circ - 70^\circ.$$

§ 2. Эмпирическое распределение комет

Мы подвергли анализу орбиты всех комет, наблюдавшихся — 466 по 1965 год (периодические и непериодические кометы)*. Всего было 350 комет. На основании элементов их орбит составлены эмпирические распределения элементов по a и e при фиксированном i , по правилам, указанным в § 1, для сравнения с теоретическими распределениями. Теоретические распределения показывают, что при $i < 35^\circ$ в интервале $4,5 < a < 5,0$ не должно быть комет. Наблюдения не подтверждают это (в этом интервале наблюдались три кометы). Теоретические распределения показывают также, что основная масса комет имеет большую полусь, заключенную в интервале $5,0 < a < 6,0$ (всего 450 из 2000 комет). Анализ элементов орбит рассмотренных комет показывает, что для большинства периодических комет ($P < 27$ лет) большая полусь орбиты заключена в интервале $2,5 < a < 9,0$ (табл. 2). Поэтому в дальнейшем целесообразно рассматривать распределение a в интервалах ($< 3,0$), $(3,0 - 3,5)$, $(4,0 - 4,5)$, $(4,5 - 5,0)$, $(5,0 - 5,5)$, $(5,5 - 6,0)$, $(6,0 - 6,5)$, $(6,5 - 7,0)$, $(7,0 - 7,5)$, $(7,5 - 8,0)$, $(8,0 - 8,5)$, $(8,5 - 9,0)$ и $a > 9,0$ (в этот интервал входит 178 комет).

* Всехсвятский С. К. Физические характеристики комет, наблюдавшихся в 1954—1960 гг.; Кометы 1961—1965 гг.

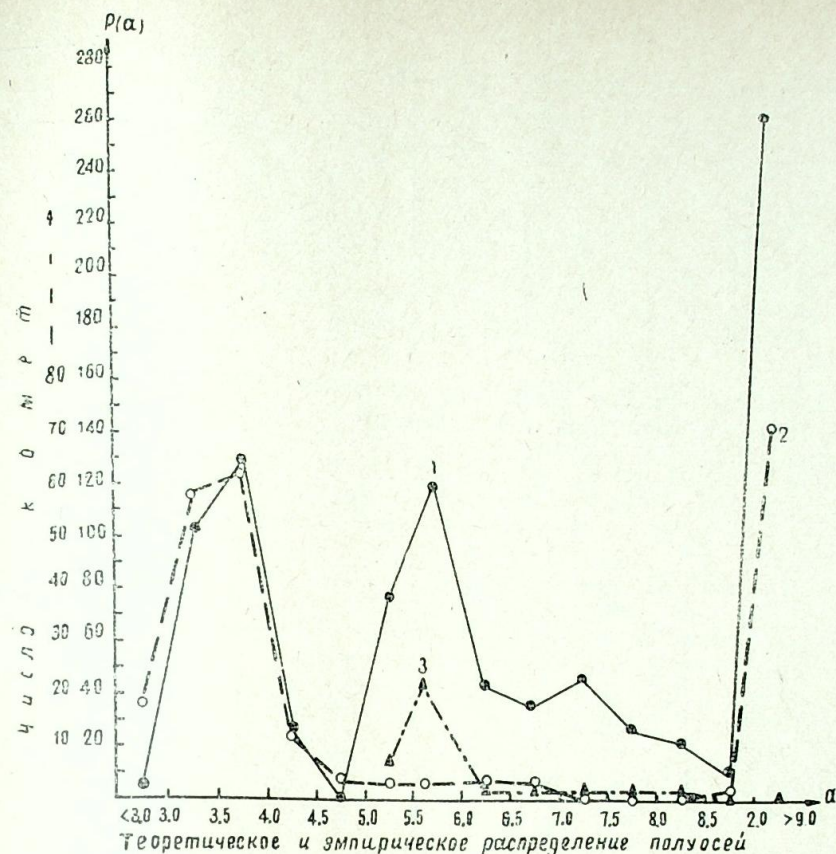


Рис. 1. Распределение комет:
1 — теоретическое; 2 — эмпирическое; 3 — процент наблюдаемых комет — при $2 < q < 2$ а. е.

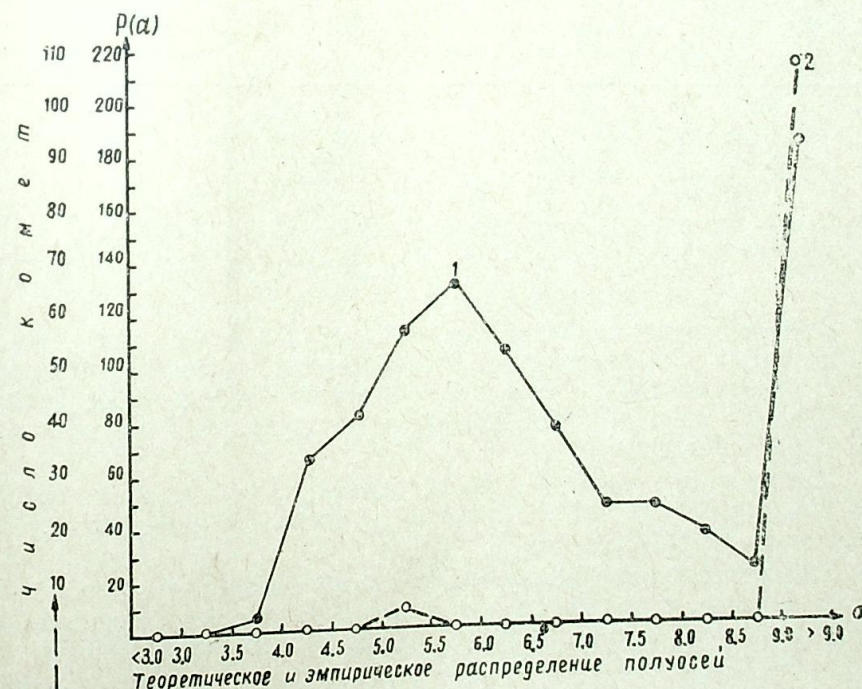


Рис. 2. Распределение комет:
1 — теоретическое; 2 — эмпирическое.

Таблица 2

a	Число комет	a	Число комет
$< 3,0$	17	6,0—6,5	4
3,0—3,5	59	6,5—7,0	3
3,5—4,0	63	7,0—7,5	0
4,0—4,5	13	7,5—8,0	0
4,5—5,0	4	8,0—8,5	0
5,0—5,5	5	8,5—9,0	1
5,5—6,0	3		

Ниже в табл. 3 и 4 дается число комет (теоретическое и эмпирическое) для значений a в указанных интервалах при любом e и фиксированном β .

Таблица 3

 $0^\circ \leq \beta \leq \pm 35^\circ$

a	Число теоретич. комет	Число эмпирич. комет	a	Число теоретич. комет	Число эмпирич. комет
$< 3,0$	6	17	6,0—6,5	45	3
3,0—3,5	101	59	6,5—7,0	37	0
3,5—4,0	130	63	7,0—7,5	48	0
4,0—4,5	27	13	7,5—8,0	29	0
4,5—5,0	0	4	8,0—8,5	22	0
5,0—5,5	79	3	8,5—9,0	10	1
5,5—6,0	122	4	$> 9,0$	275	74

Таблица 4

 $\pm 35^\circ < \beta < \pm 70^\circ$

a	Число теоретич. комет	Число эмпирич. комет	a	Число теоретич. комет	Число эмпирич. комет
$< 3,0$	0	0	6,0—5,6	160	0
3,0—3,5	0	0	6,5—7,0	78	0
3,5—4,0	6	0	7,0—7,5	48	0
4,0—4,5	66	0	7,5—8,0	48	0
4,5—5,0	83	0	8,0—8,5	38	0
5,0—5,5	115	2	8,5—9,0	22	0
5,5—6,0	131	0	$> 9,0$	188	104

Сопоставление графиков (основн. табл. 3 и 4), полученных из наблюдаемых и теоретических распределений элементов, показывает, что в интервале $2,5 < a < 4,5$ теоретическое и наблюдаемое распределения комет хорошо соответствуют друг другу. Однако при $a > 4,5$ они плохо согласуются.

Рассматривая табл. 5, легко заметить, что в этом интервале большинство комет имеет большое перигельное расстояние. А это затрудняет их наблюдение.

Эмпирическое распределение комет показывает, что при $a > 5$ а. е. число наблюдаемых комет гораздо меньше, чем теоретическое (даже при $q < 4$ а. е.). В таком случае целесообразно рассматривать не все „теоретические“ кометы, имеющие $a > 5,0$ а. е., а только те, которые имеют перигельное расстояние не больше 4 а. е., так как известно, что кометы наблюдаются вообще при $q \leq 4$ а. е. Поэтому мы выби-

Таблица 5

$a \backslash q$	4,0—4,5	4,5—5,0	5,0—5,5
5,0—5,5	61		
5,5—6,0	50	14	9
6,0—6,5	39	64	17
6,5—7,0	26	76	23
7,0—7,5	23	22	26
7,5—8,0	18	17	21
8,0—8,5	12	19	22
8,5—9,0	7	13	9
$> 9,0$	24	5	9
		95	290

рали все кометы, имеющие a и q в интервалах $5,0 < a < 9,0$; $a > 9,0$ и $2,0 < q < 4,0$. На основании таблицы мы нашли процент теоретических комет, которые могут наблюдаться с Земли. Соответствующие данные приведены в табл. 7.

Таблица 6

$a \backslash q$	2,0—2,5	2,5—3,0	3,0—3,5	3,5—4,0
5,0—5,5				
5,5—6,0	5	16	30	45
6,0—6,5		52	51	50
6,5—7,0		12	26	25
7,0—7,5		4	8	20
7,5—8,0			7	21
8,0—8,5			2	19
8,5—9,0			2	17
$> 9,0$				13
				79

Таблица 7

a	Число комет, %	a	Число комет, %
5,0—5,5	16,0	7,5—8,0	1
5,5—6,0	45	8,0—8,5	1
6,0—6,5	6	8,5—9,0	0
6,5—7,0	4	$> 9,0$	0
7,0—7,5	4		

На основании табл. 7 построен график. Сравнивая его с эмпирическим распределением (при $a > 5,0$ а. е.), нетрудно заметить, что они очень близки друг другу.

З. Ф. СЕИДОВ

ПОЛИТРОПЫ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ, III ПОЛИТРОПА n -О С НЕЙТРАЛЬНЫМ ЯДРОМ

Рассмотрим конфигурацию, в которой фазовый переход происходит не в центре, а на конечном расстоянии от него. Такая ситуация возможна как в недрах планет [1], так и звезд [2]. Конфигурация состоит из трех областей постоянной плотности: ядро с плотностью ρ_3 , промежуточный слой с плотностью ρ_2 и оболочка с плотностью ρ_1 , причем $\rho_3 > \rho_2 > \rho_1$. Фазовый переход происходит между веществом оболочки и промежуточным слоем при давлении P_0 . Обозначим радиусы ядра, промежуточного слоя и всей конфигурации, соответственно, через r_1 , r_2 , R .

Найдем равновесное состояние конфигурации с произвольным значением центрального давления P_c . Для этого используем условие экстремальности полной энергии в состоянии равновесия. Масса конфигурации равна

$$M = \frac{4\pi}{3} [\rho_3 r_1^3 + \rho_2 (r_2^3 - r_1^3) + \rho_1 (R^3 - r_2^3)], \quad (1)$$

а полная энергия ее равна сумме потенциальной и внутренней энергии. Внутренняя энергия совпадает с энергией фазового перехода $\Delta\epsilon$. Поскольку внутренней энергией несжимаемой жидкости, как постоянной величиной, можно пренебречь, то согласно [3]

$$\Delta\epsilon = \frac{4\pi}{3} P_0 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) (r_2^3 - r_1^3). \quad (2)$$

Потенциальную энергию трехслойной конфигурации можно получить, используя формулы из [4]:

$$\begin{aligned} \Omega = & -8\pi^2 G \rho_1^2 \left[\frac{(k-q)(2k-3q)}{15} r_1^5 + \frac{(q-1)(2q-3)}{15} r_2^5 - \right. \\ & - \frac{(q-1)(q-k)}{3} r_1^3 r_2^2 + \frac{(k-q)}{3} r_1^3 R^2 + \frac{q-1}{3} r_2^3 R^2 + \\ & \left. + \frac{2}{15} R^5 \right], \quad k = \frac{\rho_3}{\rho_1}, \quad q = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

В состоянии равновесия $\frac{d\epsilon}{dr_2} = \frac{d(\Omega + \Delta\epsilon)}{dr_2} = 0$ при условии

$$M = \text{const} \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{4\pi}{3} \rho_3 r_1^3 = \text{const}, \quad \text{откуда} \quad \text{получаем}$$

соотношение между R и r_2 :

$$\frac{P_0}{4\pi G \rho_1^2} + \frac{3-2q}{6} r_2^2 - \frac{k-q}{3} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R} \right) r_1^3 + \frac{q-1}{3} \frac{r_2^3}{R} - \frac{1}{6} R^2 = 0. \quad (4)$$

Легко получить также соотношение между r_2 и P_c :

$$\frac{P_c - P_0}{4\pi G \rho_2^2} - \frac{(1-q/k)(1+3q/k)}{6(q/k)^2} r_1^2 + \frac{1-q/k}{3q/k} \frac{r_1^3}{r_2} - \frac{1}{6} r_2^2 = 0. \quad (5)$$

Напомним, что постоянными задачи являются ρ_3 , ρ_2 , ρ_1 , P_0 , m_1 , r_1 (последнее в силу несжимаемости ядра), переменными — P_c , r_2 , M , P , ϵ . По смыслу задачи $r_2 \geq r_1$, поэтому

$$P_c \geq P_{c0} = P_0 + \frac{2\pi G}{3} \rho_3^2 r_1^2. \quad (6)$$

Полагая $r_2 = r_1$, из (1)–(6) получим соотношения для радиуса R_0 , массы M_0 полной энергии ϵ_0 и центрального давления P_{c0} критической конфигурации, в которой только начинается фазовый переход, при заданном значении m_1 — массы нейтрального ядра.

Выпишем из (1)–(5) производную dM/dP_c при условии $m_1 = \text{const}$:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dP_c} = & \frac{3r_2^2 R^2}{kG\rho_2 r_1^3} \left\{ (q-1) \left[\left(\frac{r_2}{R} \right)^5 + 4 \left(\frac{r_2}{R} \right)^2 + (k-q) \left(\frac{r_2}{R} \right)^2 \left(\frac{r_1}{R} \right)^3 \right] + \right. \\ & + (k-q) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \frac{r_2}{R} + (3-2q) \frac{r_2}{R} \left\{ 1 + \frac{q}{k} \left[\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^3 - 1 \right] \right\}^{-1} \times \\ & \times \left\{ 1 + (q-1) \left(\frac{r_2}{R} \right)^3 + (k-q) \left(\frac{r_1}{R} \right)^3 \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Конфигурация устойчива при $dM/dP_c > 0$ и неустойчива при $dM/dP_c < 0$ [5]. Мы рассматриваем только случаи, когда $k > q > 1$ и нет инверсии плотности. В противном случае имеет место неустойчивость типа Релея—Тейлора [6]. Рассматриваемая же здесь неустойчивость (определяемая знаком производной dM/dP_c) является неустойчивостью по отношению к общему гомологическому сжатию или расширению, являющемуся наименьшей модой радиальных возмущений системы [7].

При условии $k > q > 1$ выражения в последних двух фигурных скобках, а также первые четыре члена в первой фигурной скобке в формуле (7) положительны. Ясно поэтому, что производная dM/dP_c может быть отрицательной только при $q > 3/2$. В общем случае исследование знака выражения (7) затруднительно. Ограничимся критической конфигурацией. При этом искомая производная равна

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dP_c} \Big|_{P_c=P_{c0}} = & \frac{3R_0}{kG\rho_2} \left[k + (q-1)(4x + (k-1)x^4 - 3) \right] \times \\ & \times \left[1 + (k-1)x^3 \right]^{-1}, \quad x = \frac{r_1}{R_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

Условие $\frac{dM}{dP_c} \Big|_{P_c=P_{c0}} < 0$ достигается при

$$q > q_m = 1 + \frac{k}{3-4x-(k-1)x^4}. \quad (9)$$

С ростом k (или x) монотонно растет q_m . Это значит, чем дальше от центра начинается фазовый переход, тем устойчивее относительно него конфигурация. При $q < q_m$ конфигурации ни при каком значении центрального давления не теряют устойчивости. Монотонно

ный рост q_m с ростом l и x естествен. Внешние слои в общем играют меньшую роль в равновесии и устойчивости конфигурации и для того, чтобы возмущение (фазовый переход) вызвало потерю устойчивости, оно должно быть сильнее (q_m больше), чем в случае фазового перехода в центре звезды. Можно показать [8], что производная dM/dR , в отличие от случая

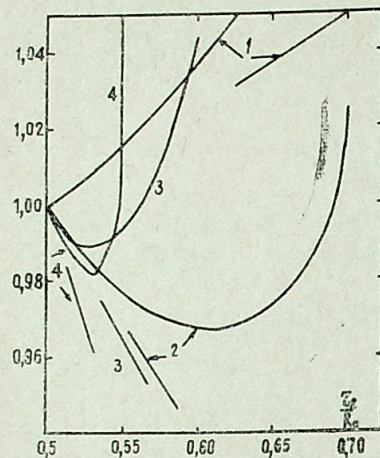


Рис.

фазового перехода в центре [9], не является непрерывной переменной. Однако производная $d\varepsilon/dM$, в полном соответствии с общим принципом [10], остается непрерывной при всех значениях k и q .

На рисунке представлена зависимость M/M_0 (кривая 3), R/R_0 (кривая 2) $\varepsilon/\varepsilon_0$ (кривая 4) и P_c/P_{c0} (кривая 1) от r_2/R_0 для случая $r_1/R_0 = 0.5$ и $k = 1$. Показаны также асимптотики кривых в точках $r_2 = r_1$. Согласно (9) в случае $k = 1$ и $x = 0.5$, $q_m = 2.00$, то есть при $q < 2.00$, зависимость $M(P_c)$ не имеет максимума. При $q = 2.5$ и $x = 0.5$ минимум массы равен $0.989 M_0$, тогда как в случае фазового перехода в центре [9] он составляет $0.901 M_0$ при том же значении $q = 2.5$. Это еще раз свидетельствует о большей устойчивости конфигурации относительно фазового перехода на конечном расстоянии от центра.

В заключение заметим, что, как показано в [11], рассматриваемая здесь модель несжимаемой жидкости с фазовым переходом между оболочкой и промежуточным слоем и с нейтральным ядром, с параметрами, аппроксимирующими внутреннее строение Земли, является устойчивой, в отличие от модели с двумя последовательными фазовыми переходами, предложенной в [1].

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность акад. Я. Б. Зельдовичу за постановку задачи, а также Г. С. Бисноватому-Когану и Т. А. Эминзаде за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schatzman E. Bull. Acad. Roy. Belgique, 37, 599, 1951.
2. Finzi A., Wolf R. A. Ap. J., 150, 115, 1967.
3. Сеидов З. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“.
4. Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.
5. Зельдович Я. Б. „Вопросы космогонии“, 9, 157, 1963.
6. Пикельнер С. Б. Основы космической электродинамики. М., „Наука“, 1966.
7. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. М., „Наука“, 1967.
8. Сеидов З. Ф. Канд. дисс. М., 1969.
9. Сеидов З. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 9, 1968, № 5.
10. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, 42, 1667, 1962.
11. Сеидов З. Ф. „Физика Земли“.

Поступило 10. VII 1966

З. Ф. Сеидов

Фаза кечидли политроплар, III нејтрал
нүвәли n -о политропу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мұхтәлиф сыхлыгы өртүкдән, аралыг тәбәгәдән вә нүвәдән ибарәт олан сыхылмаз маје конфигурасиясына бахылмышдыр. Өртүклә аралыг тәбәгәси арасында фаза кечиди мөвчуддур. Мүәј-јән едилмишдир ки, нејтрал нүвәнин күтләси бөјүдүкчә конфигурасия-јанын дајаныглыгы артыр. Бу моделин Јерин дахили гурулушунун изаһына тәтбиги мұзакирә олунур.

И. А. МУХТАРОВ, В. А. КУЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРА МОЛЕКУЛЫ 1,1,2,2, - ФТОРЭТАНА

Изучение молекул с поворотной изомерией представляет большой интерес ввиду их широкой распространенности. Радиоспектроскопия оказалась наиболее эффективным методом для их изучения, однако это сопряжено со значительными трудностями как теоретического, так и экспериментального характера. Последовательные экспериментальные исследования [1], а также разработанная теория молекул с поворотной изомерией [2] значительно уменьшили эти затруднения и способствовали более глубокому изучению подобного класса молекул методом радиоспектроскопии.

Изучение молекулы 1,1,2,2-фторэтана, состоящей из двух одинаковых асимметричных групп, связанных одинарной С—С связью является характерным дополнением к исследованиям МВ методом галогенопроизводных этана (рис. 1). Молекула $F_2HC - CHF_2$, относящаяся к группе молекул типа асимметричного волчка с поворотной изомерией, может ожидать в трех изомерных конфигурациях, получающихся при вращении одной группы относительно другой вокруг С—С связи (рис. 2). Наиболее устойчивой предполагается „транс“ конфигурация, соответствующая наибольшему

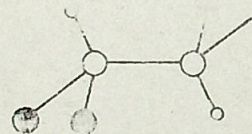


Рис. 1

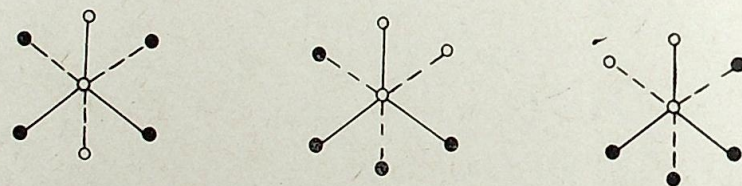


Рис. 2

удалению атомов фтора двух групп; однако дипольный момент этой конфигурации равен нулю и линии поглощения вращательных переходов не наблюдаются. Две другие „гош“ конфигурации эквивалентны и обладают значительным дипольным моментом.

Параметры предварительной структуры выбраны из данных близких по структуре молекул [3, 4, 5]. Из предварительной структуры

были рассчитаны энергетические уровни, переходы между ними в области $10 \div 35$ кМгц, дипольный момент и интенсивность линий переходов при небольших вариациях угла поворота одной группы относительно другой ($\sim 10^\circ$).
МВ—спектр молекулы $F_2HC - CHF_2$ записан с помощью радиоспектрометра с электрической модуляцией в области $17 \div 24$ кМгц. (табл. 1).

Таблица 1

Частота, Мгц	Интенсивность,	Частота, Мгц	Интенсивность	Частота, Мгц	Интенсивность
17232	средн.	18231	"	19706	сильн.
17250	слаб.	18234	"	19848	"
17267,5	средн.	18236	слаб.	19884	слаб.
17273,2	сильн.	18250	"	19894	средн.
17320	слаб.	18251	"	19903	"
17366,1	средн.	18254	"	19907	"
17396	"	18260	"	19927	"
17430	слаб.	18270	слаб.	19935	"
17454	"	18286	средн.	19962	"
17456	средн.	18290	"	20056	"
17450	"	18305	"	20061	"
17466	"	18318	"	20106	сильн.
17501	"	18365	"	20122	слаб.
17514	слаб.	18382	слаб.	20185	средн.
17126	"	18390	"	20212	средн.
17575	"	18397	"	20221	слаб.
17588,5	сильн.	18485,5	средн.	20252	"
17596	средн.	18490,3	"	20274	средн.
17660	"	18569,5	сильн.	20303	сильн.
17674	"	18572,5	средн.	20316	средн.
17678	слаб.	18581	"	20320	"
17686	средн.	18600	"	20328	слаб.
17696	слаб.	18679,8	"	20371	средн.
17720	"	18694	"	20398	"
17743	сильн.	18714	"	20414	"
17749	"	18721	"	20436	слаб.
17757	"	18723	"	20456	средн.
17770	слаб.	18726	слаб.	20462	слаб.
17782,5	средн.	18751	"	20468	сильн.
17800	"	18752	"	20505	средн.
17801,3	сильн.	18758	"	20513	"
17810	средн.	18775	"	20565	слаб.
17812	"	18779	"	20576	"
17817	слаб.	18872	средн.	20606	"
17818	"	18881	"	20612	"
17843	средн.	18894,5	"	20620	средн.
17856	"	18922	"	20664	слаб.
17878	сильн.	18926,8	"	20666	"
17896	средн.	18960	слаб.	20670	"
17908	"	19016,5	средн.	20676	"
17928	"	19057,5	сильн.	20686	средн.
17944,8	"	19125	средн.	20689	"
17953	сильн.	19161,7	сильн.	20748	слаб.
17954	"	19178	средн.	20760	"
17966	слаб.	19199	"	20768	"
17968	"	19206	слаб.	20786	сильн.
17980	средн.	19220	"	20794	"
17985,6	"	19386	"	20811	"
18006,5	"	19388,5	средн.	20862	средн.
18009	"	19461	"	20984	"
18025	"	19452	слаб.	21052	"
18036	"	19484	средн.	21091	"
18062,7	"	19556	"	21095	"
18103	сильн.	19572,6	слаб.	21111	"
18183	средн.	19579	"	21150	сильн.
18197	"	19613	средн.	21156	средн.
18216	"	19622	"	21174	"

Частота Мгц	Интенсив- ность	Частота Мгц	Интенсив- ность	Частота, Мгц	Интенсив- ность
21215	"	22789	слаб.	23086	"
21217	"	22796	средн.	23087	"
21229	слаб.	22810	"	23102	"
21272	сильн.	22817	сильн.	23109	"
21292	слаб.	22857	средн.	23116	"
21333	"	22863	"	23150	"
21340	средн.	22866	"	23157	"
21356	"	22875	слаб.	23161	средн.
21396	сильн.	22883	средн.	23165	"
21438	средн.	22889	"	23168	"
21460	"	22897	"	23169	"
21489	"	22905	"	23180,2	"
21495	"	22908	"	23263,8	слаб.
21514	сильн.	22929	"	23278,7	сильн.
21520	средн.	22940	средн.	23300,2	средн.
21536	"	22948	сильн.	23413	слаб.
21752	слаб.	22949	средн.	23414,5	"
21835	"	22952	"	23424	"
21848	средн.	22955	"	23427,5	"
21940	"	22954	"	23430,7	"
21945	"	22974	"	23448,5	"
22016	"	22975	"	23472,3	"
22023	"	22982	"	23490,5	средн.
22216	"	22990	"	23676,2	слаб.
22330	слаб.	22999	"	23580	"
22389	"	23003	"	23749,1	средн.
22397	средн.	23007	"	23790,6	слаб.
22408	"	23009	"	23804,6	"
22488	слаб.	23012	"	23828,6	"
22502	средн.	23025	"	24014,8	"
22551	слаб.	23029,8	"	24032,9	"
22644	сильн.	23033	"	24044,5	средн.
22708	слаб.	23050	"	24074,0	слаб.
22727	средн.	23053	"	24110	"
22770	"	23071	"	24126,1	"
22774	"	23074	"		

Линии спектра, за некоторым исключением, обладают слабой интенсивностью. Так как дипольный момент молекулы приближается к $3 D$, то этот факт указывает на малое содержание в веществе молекул с „гош“ конфигурацией, что подтверждает предположение об относительно небольшой устойчивости „гош“ изомера по сравнению с „транс“ изомером.

По частоте, относительному расположению, относительной интенсивности линий, по направлению и величине штарк-эффекта были идентифицированы две серии линий Q -ветви (табл. 2) и линии перехода $3_{21} - 2_{11}$. С помощью полученных из частот линий идентифицированных серий найдены величины

$$x = -0,6657,$$

$$A - C = 2814,3 \text{ Мгц}$$

и частота линии перехода $3_{21} - 2_{11} = 23431,0 \text{ Мгц}$.

Из частот идентифицированных спектральных переходов получены значения вращательных постоянных:

$$A = 5287,4; B = 2943,5; C = 2473,0.$$

Приблизительная оценка величины дипольного момента частоты крутильных колебаний по смещениям штарковских компонент линий

Таблица 2
Идентифицированные серии линий вращательных переходов молекулы $\text{FHC}-\text{CHF}_2$

Переходы	Эксп.	Переходы	Эксп.
$12_{58} - 12_{48}$	19461,8	$12_{57} - 12_{48}$	23278,7
$11_{57} - 11_{47}$	20862	$11_{56} - 11_{48}$	22911,4
$10_{56} - 10_{46}$	21736	$10_{55} - 10_{47}$	22791,8
$9_{55} - 9_{45}$	22330	$9_{54} - 9_{46}$	22796,2
$8_{54} - 8_{44}$	22650,7	$8_{53} - 8_{45}$	22873,0
$7_{53} - 7_{43}$	22895,5	$7_{52} - 7_{44}$	22953,6
$6_{52} - 6_{42}$	23004,3	$6_{51} - 6_{43}$	22029,4
$5_{51} - 6_{41}$	230773		

Таблица 3
Были рассчитаны и обнаружены в спектре переходы:

Переходы	Рассчит.	Эксп.
$2_{21} - 1_{11}$	18697	18698,2
$2_{20} - 1_{10}$	18290	18293,5
$3_{31} - 2_{21}$	29020	29007,5
$3_{30} - 2_{20}$	28961	28941,4

относительных интенсивностей линий основного состояния и сателлитов дали:

$$\mu = 2,9 D,$$

$$\omega = 129 \text{ см}^{-1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухтаров И. А. Докт. дисс.
2. Мухтаров Р. И. Канд. дисс.
3. Zeil W. The microwave spectrum of 1,1,1-trichlorethane Z. Nahveforsch 11,677, (1956).
4. Мухтаров И. А. ДАН Азерб. ССР*, 18, 1962, № 7.
5. Мухтаров И. А. „Оптика и спектроскопия“, 1963, № 4.
6. Таунс Ч., Шавлов Б. „Радиоспектроскопия“.

И. А. Мухтаров, В. Э. Гулијев

1, 1, 2, 2 — фторетан молекулунун микродалга спектри

ХУЛАСӘ

Молекулјар модулјасијалы газ радиоспектрометри васитәсилә $17 \div 24 \text{ кмhc}$ тезликли далгалар саһәсиндә 1, 1, 2, 2 — фторетан молекулунун фырланма кечидләринин удма хәтләри јазылмышдыр. Хәтләринин тезликләри үчүн экспериментдән алынган гијмәтләр әсасында бу молекулун фырланма сабитләри (A, B, C), асимметрия параметри (α), дипол моменти вә бурулма тезлији тапылмышдыр.

С. А. АБАСОВ, М. А. БАГИРОВ, Т. Ф. АББАСОВ
Т. И. ГУСЕЙНОВ, У. А. КАБУЛОВ

ИЗМЕНЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ

Наблюдения показывают, что со временем эксплуатации полимерная изоляция, особенно если она подвергается действию высокого электрического напряжения, теряет свои диэлектрические и механические свойства (в основном они ухудшаются), т. е. полимер старится, вследствие чего возникает пробой изоляции и она выходит из строя. Установлено, что пробой изоляции, а следовательно, и старение происходят обычно на тех участках, где имеются воздушные включения, в которых возникают электрические разряды.

Для выяснения причин выхода из строя полимерной изоляции в последнее время как в нашей стране, так и за рубежом стали проводить специальные исследования изменений свойств полимеров под действием электрических разрядов [1—6].

В настоящей статье изложены результаты исследования изменений механических свойств полистирольной (ПС), полиэтилентерефталатной (ПЭТФ), полиэтиленовой (ПЭ) и политетрафторэтиленовой (ПТФЭ) пленок под действием электрических разрядов. Эти пленки в настоящее время успешно применяются в различных областях электротехники и радиотехники.

Методика эксперимента

Воздействие электрических разрядов на полимерные пленки в среде кислорода или азота осуществлялось в специальной ячейке с воздушным зазором, описанной в [5, 6]. При этом испытательную ячейку с пленкой помещали в герметизированный эксикатор, куда пропускали газ. Старение полимерных пленок изучалось при разных величинах электрического напряжения на ячейке $U_{ст}$ (при частоте 50 гц) и времени воздействия разрядов $t_{ст}$. После испытания пленку промывали спиртом.

Из механических свойств нами были исследованы изменения временной зависимости механической прочности, деформации на растяжение, а также изменения термомеханических свойств и молекулярного веса вышеуказанных полимерных пленок (ПС, ПЭТФ, ПЭ и ПТФЭ) как в зависимости от величины, так и от времени воздействия электрического напряжения в среде воздуха, кислорода и азота. Механические свойства испытывали на разрывной установке, позволяющей обеспечить постоянство растягивающего напряжения в течение всего опыта [7, 8]. Молекулярный вес определялся вискозиметрическим

Результаты и их обсуждение

На рис. 1 показаны типичные временные зависимости механической прочности ($\lg \tau$ от σ) при температуре 20°C для исходной и состарившихся в воздухе ПЭ пленок. Для построения таких зависимостей из опыта находили время, прошедшее с момента нагружения образца до его разрыва, т. е. его долговечность τ при разных постоянных значениях механического напряжения σ при постоянной температуре (20°C). Аналогичные зависимости $\lg \tau$ от σ были построены также для исходных и состарившихся, ПЭТФ и ПТФЭ пленок. Установлено, что (как это видно из рис. 1) во всех случаях выполняется линейная зависимость между $\lg \tau$ и σ :

$$\tau = Ae^{-\alpha\sigma},$$

где A и α являются параметрами, зависящими от температуры измерения и свойств изучаемого материала [8].

На рис. 2 (а, б, в, г) представлены данные по изменению σ при $\tau = 1$ сек в зависимости от $U_{ст}$ и $t_{ст}$ для указанных пленок в среде воздуха. Для ПС и ПЭТФ пленок наблюдается как уменьшение, так и увеличение механической прочности, а для ПЭ и ПТФЭ пленок — только уменьшение ее. Следует отметить, что характер снижения или повышения механической прочности σ ПС и ПЭТФ пленок при их электрическом старении под действием разрядов зависит от природы полимера и среды, в которой происходит старение, причем наиболее заметное изменение пленок наблюдалось на открытом воздухе и в среде кислорода [9, 10]. Однако снижение механической прочности σ в зависимости от $U_{ст}$ для ПТФЭ пленки носит линейный характер, причем скорость снижения ее незначительна. Аналогичный характер, уменьшения σ ПТФЭ пленки в зависимости от $U_{ст}$ был отмечен в среде кислорода и азота. Эти данные свидетельствуют о том, что электрическое старение ПТФЭ пленки практически не зависит от природы среды, в которой производится воздействие электрических разрядов.

При электрическом старении ПЭ пленки под действием разрядов скорость уменьшения механической прочности в зависимости от $t_{ст}$ вначале велика, но со временем старения убывает, поэтому линейного уменьшения прочности в данном случае не наблюдается.

На рис. 3 (а, б) показаны изменения относительной деформации на растяжение $\epsilon\%$ ПС и ПЭТФ пленок в зависимости от $U_{ст}$ при их электрическом старении в среде воздуха. Подобно механической прочности σ относительная деформация $\epsilon\%$ на растяжение ПС и ПЭТФ пленок также изменяется, причем наблюдается как уменьшение, так и увеличение ее, и характеры этих изменений зависят от природы полимера и среды, в которой производится электрическое старение.

Из графиков, представленных на рис. 3, видно, что максимальные изменения относительной деформации $\epsilon\%$ ПС пленки в зависимости от $U_{ст}$ при электрическом старении под действием разрядов составляют 40%, в то время как максимальные изменения $\epsilon\%$ в случае ПЭТФ пленки заметны: 5—0%. Небольшие изменения $\epsilon\%$ ПС пленки в зависимости от $U_{ст}$ являются результатом того, что при комнатной температуре она находится в стеклообразном состоянии. Исходя из этого, чтобы достаточно отчетливо установить изменение деформации на растяжение ПС пленки в зависимости от $U_{ст}$, исследовалось изме-

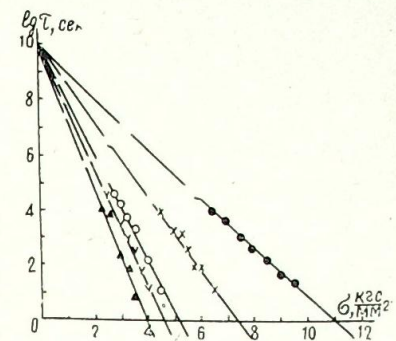


Рис. 1. Влияние длительности воздействия электрического напряжения при $U_{ст} \neq 11$ кв на временную зависимость механической прочности ПЭ пленки.

нение термомеханических кривых ПС пленки при ее электрическом старении.

На рис. 4 представлены кривые зависимости относительной деформации на растяжение $\epsilon\%$ от температуры для исходной и состарившихся ПС пленок на воздухе при $U_{ст}=10$ кВ, $t_{ст}=5$ ч и $\theta_{ст}=30^\circ\text{C}$.

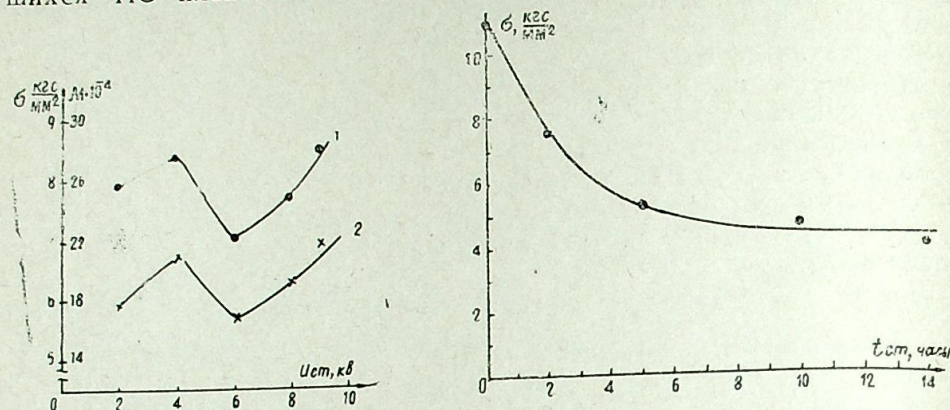


Рис. 2а. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПС пленки от величины электрического напряжения в воздухе при $t_{ст}=5$ ч: 1—прочность σ ; 2—молекулярный вес M .

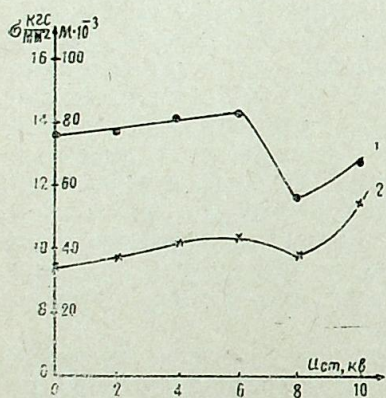


Рис. 2в. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки от величины электрического напряжения в воздухе при $t_{ст}=5$ ч: 1—прочность σ ; 2—молекулярный вес M .

Такие термомеханические кривые снимались и для ПС пленок, состарившихся в среде кислорода и азота. На основе этих кривых установлено, что во всех случаях, начиная с температуры 90°C и выше, происходят большие деформации. И в случае постоянной температуры, при которой наблюдаются большие деформации (например, при 100 или 110°C), значение относительной деформации $\epsilon\%$ изменяется в зависимости от величины $U_{ст}$ и природы газообразной среды [11].

На рис. 5 представлены зависимости $\epsilon\%$ от $U_{ст}$ при 110°C для ПС пленок, состарившихся на открытом воздухе и в среде кислорода и азота. Эти графики построены на основе термомеханических кривых. Из графиков рис. 5 видно, что величина $\epsilon\%$ в зависимости от $U_{ст}$

сначала убывает (по сравнению с исходной), а затем увеличивается в зависимости от $U_{ст}$. Из этих данных следует, что заметные изменения относительной деформации ПС пленки в зависимости от $U_{ст}$ при прочих равных условиях ($\sigma=1$ кгс/мм², $t=600$ сек при постоянной температуре) наблюдаются выше температуры стеклования, т. е. когда в ПС пленке в основном развивается деформация вязкого течения.

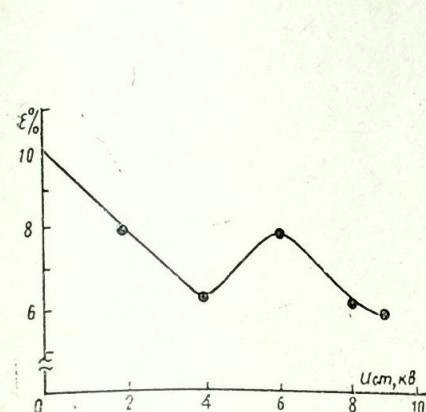


Рис. 3а. Зависимость относительной деформации ПС пленки от величины электрического напряжения в воздухе при $t_{ст}=5$ ч.

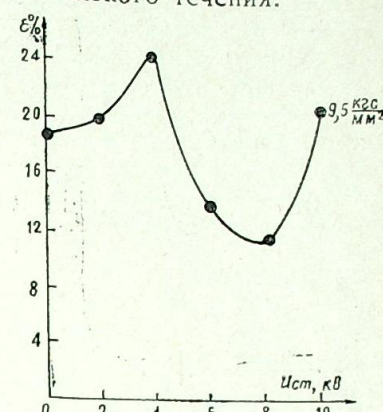


Рис. 3б. Зависимость относительной деформации ПЭТФ пленки от величины электрического напряжения в воздухе при $t_{ст}=5$ ч.

Таким образом экспериментальные данные показывают, что при электрическом старении полимерных пленок под действием электрических разрядов происходят изменения прочностных, деформационных и термомеханических свойств, и характер этих изменений зависит от природы полимера и газовой среды.

Наблюдаемые изменения механических свойств указанных пленок, при их электрическом старении под действием разрядов, объясняются структурно-химическими изменениями, происходящими в результате деструкции, сшивания и окисления, что подтверждается изменением молекулярного веса, образованием гель-фракции и появлением карбоновых, гидроксильных, эфирных и других групп.

Исследование изменения молекулярного веса M ПС и ПЭТФ пленок, при их электрическом старении под действием разрядов, показало, что в зависимости от величины электрического напряжения, длительности воздействия природы полимера и среды молекулярный вес либо падает, либо увеличивается. Уменьшение молекулярного веса M свидетельствует о том, что преобладающим является процесс деструкции, т. е. разрывы главных цепей (химических связей в главных цепях), а увеличение — о том, что преобладающим становится процесс сшивания полимерных цепей.

Экспериментальные данные по изменению молекулярного веса M ПС и ПЭТФ пленок в зависимости от $U_{ст}$ также представлены на рис. 2, параллельно с изменением механической прочности этих пленок в зависимости от $U_{ст}$. Как видно, характер изменения σ во всех случаях соответствует изменениям M , причем зависит он от природы полимера и среды.

Уменьшение прочностных свойств и молекулярного веса ПС и ПЭТФ пленок при электрическом старении обусловлено процессом деструкции, а увеличение прочностных свойств ПТФЭ пленки при ее электрическом старении, как нам кажется, свидетельствует о том, что

структурные и химические изменения в ней происходят в результате деструкции, т. е. разрывов химических связей. Следует отметить, что уменьшение прочности, а следовательно, и процесс деструкции наблюдаются также в случае радиационного облучения ПТФЭ [12].

В ПЭ пленке резкое падение прочности вначале в зависимости от времени старения и дальнейшее установление насыщения в этой зависимости указывают на то, что и в этой пленке под действием электрических разрядов происходят структурные и химические изменения, причем вначале преобладает деструкция полимерных цепей, а затем происходит их сшивание.

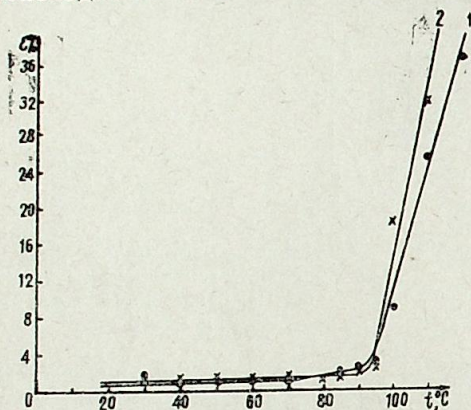


Рис. 4. Термомеханические кривые ПС пленок, состарившихся в воздухе при $t_{ст} = 5$ ч и $\theta_{ст} = 30^\circ\text{C}$: 1 — исходная; 2 — $U_{ст} = 10$ кВ.

Структурно-химические изменения, происходящие в исследуемых полимерных пленках под действием электрических разрядов подтверждаются также методом инфракрасной (ИК) спектроскопии. В ИК спектре ПС и ПЭ пленок после электрического старения в воздухе появляются новые полосы поглощения: $3600-3200\text{ см}^{-1}$ (гидроксильные ОН группы), 1720 см^{-1} (карбонильные $\text{C}=\text{O}$ группы), 1640 см^{-1} (двойные углеводородные связи $\text{C}=\text{C}$), $1190-1170\text{ см}^{-1}$ (кэтоэфиры), $1630, 1554, 867\text{ см}^{-1}$ (азотсодержащие соединения), а также увеличиваются полосы поглощения при 1367 (концевые CH_3 группы) и 1278 см^{-1} (эфирные $\text{C}-\text{O}-\text{C}$ мостики). Появление этих групп при электрическом старении ПС и ПЭ пленок указывает на одновременно происходящие процессы деструкции и сшивания (через кислородные мостики) полимерных цепей [13].

При воздействии электрических разрядов в воздухе в ИК спектре ПТФЭ пленки наблюдалось, кроме возрастания фона по всему спектру, нерезкое по форме контура полос увеличение поглощения при $3500-2800, 1730-1650, 1500$ и 1450 см^{-1} . Поглощение при 1730 см^{-1} обусловлено внутренними двойными связями $\text{RFC}=\text{CFR}'$ [14], а в области $1720-1670\text{ см}^{-1}$ — сопряженными двойными связями с числом сопряженных связей более двух [15]. На образование двойных связей указывает и полоса 1400 см^{-1} , соответствующая колебаниям группы CF у двойной связи [16], хотя в эту же область может дать вклад увеличение количества концевых групп CF_3 . Изменение в ИК спек-

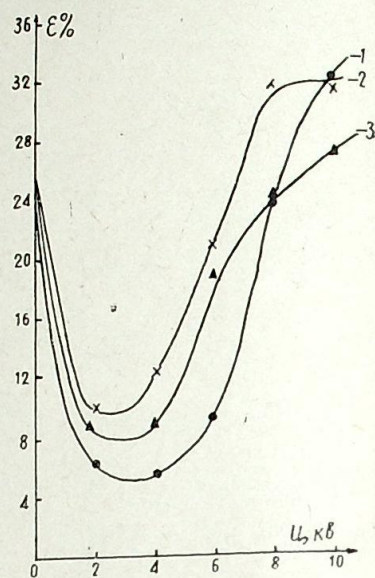


Рис. 5. Зависимость относительной деформации ПС пленки от величины электрического напряжения при $\sigma = 1 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, $t_{ст} = 5$ ч, $t_{изм} = 110^\circ\text{C}$, $\theta_{ст} = 30^\circ\text{C}$: 1 — в среде воздуха; 2 — азота; 3 — кислорода.

рах ПТФЭ пленки показывают, что под действием электрических разрядов в воздухе в них происходит только процесс деструкции. В ИК спектре ПЭТФ пленки после электрического старения сильно падает интенсивность полосы 1950 см^{-1} , немного уменьшается появление широких полос $2450-2250$ и $3400-2800\text{ см}^{-1}$. Согласно валентным колебаниям CH_2 групп в аморфной фазе, а полоса 2870 см^{-1} — к симметричным валентным колебаниям CH_2 . Уменьшение полосы 2960 см^{-1} указывает на уменьшение числа молекул CH_2 в аморфной фазе, что может быть объяснено разрывами метиловых участков главной цепи.

Таким образом, из вышеизложенного следует, что при воздействии электрических разрядов на исследуемые полимерные пленки химическими изменениями и прежде всего процессами деструкции, сшивания и окисления, происходящими в указанных полимерах. Наличие названных процессов в исследуемых полимерах при их электрическом старении подтверждается изменением молекулярного веса, геле-фракции и появлением различных химических групп и соединений, обнаруживаемых методом инфракрасной спектроскопии.

Выводы

1. Исследовались изменения механических свойств и молекулярного веса, а также структурные изменения ПС, ПЭТФ, ПЭ и ПТФЭ пленок, происходящие при воздействии электрических разрядов в различных газообразных средах (воздух, кислород, азот).

2. Установлено, что характер изменения механических свойств при электрическом старении исследуемых полимерных пленок зависит от природы полимера и природы газовой среды. Наиболее значительные изменения механических свойств наблюдаются при воздействии электрических разрядов в кислородсодержащей среде.

3. Наблюдаемые изменения механических свойств исследуемых полимерных пленок объясняются процессами деструкции, сшивания и окисления, происходящими в пленках под действием разрядов, что подтверждается изменением молекулярного веса, образованием геле-фракции и появлением различных химических групп и соединений (гидроксильных, карбонильных, эфирных и др.), обнаруживаемых методом инфракрасной спектроскопии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artbauer J., Griasi I. *Elektric.*, 17, 120, 1963.
2. Meats R. I., Stanatt A. W. *Trans. I. E. E. Power Appar. and syst.*, № 1, 49, 1964.
3. Койков С. Н., Гарибок В. А., Цикин А. Н. Сб. „Пробой диэлектриков и полупроводников“. Энергия, 1964.
4. Okamoto H., Ikeda Y. *J. Inst. Electr. Engers., Japan.* 85, № 1, 1965, 99.
5. Абасов С. А., Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 137, 1965, № 3.
6. Abasov S. A., Bagirov M. A., Wolchenko E. J., Guseinov T. I., Klimova N. W. and Malin W. P. *Plaste and Kautschuk*, 15, № 3, 194. 1968.
7. Жураков С. Н. Томашевский Э. Е. *ЖТФ*, 25, 66, 1955.
8. Журков С. Н., Абасов С. А. „Высокомол. соединения“, 3, 441, 1961.
9. Гусейнов Т. И., Абасов С. А., Багиров М. А. „Механика полимеров“, 59, 1968, № 1.
10. Багиров М. А., Абасов С. А., Гусейнов Т. И., Аббасов Т. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 103, 1968, № 6.
11. Абасов С. А., Кабулов У. А. „Механика полимеров“, 1969, № 4.
12. Чарлзби А. Ядерные излучения и полимеры. ИЛ, М., 1962.

13. Багиров М. А., Волченков Е. Я., Малин В. П. Тр. конференции аспирантов и молодых ученых АН Азерб. ССР. Баку, 1966.
 14. Словохотова Н. А. Сб. "Действие ионизирующих излучений на неорганические и органические системы". Изд. АН СССР, 1958.
 15. Brice I. G., La Lette R., Hell G., Readgon W. H., J. Amer. chem. soc., 75, 2698, 1953.
 16. Вайблен Д. Т. Фтор и его соединения, т. 2, ИЛ, 1956.
 17. Фаттахов К. З. ЖТФ, XXII, вып. 2, 1952.

Поступило 7. VII. 1969

С. А. Абасов, М. Э. Бағыров, Т. Ф. Аббасов,
 Т. И. Нусејнов, У. Э. Кабулов

Электрик бошалмаларынын тэ'сири алтында полимер плјонкаларынын механики хассэлэринин дәјишилмэсинин тэдгиги ХУЛАСЭ

Тэдгигатда электрик бошалмаларынын тэ'сири алтында полистирол (ПС), полиэтилентерефталат (ПЕТФ), полиэтилен (ПЕ) вэ полите-трафторэтилен (ПТФЭ) плјонкаларынын механики мөһкәмліјинин, дартылма деформасијасынын, термомеханики хассэлэринин вэ молекул-јар чэкисинин дәјишмэси өјрэнилмишдир.

Мүэјјән едилмишдир ки, тэдгиг олунан полимер плјонкаларынын электрик көһнэлмэси заманы механики хассэлэринин дәјишмэ харак-тери полимерин табіэтиндән вэ көһнэлмэнин апарылдыгы мүһитдән асылыдыр.

Полимер плјонкаларынын механики хассэлэринин мүшаһидэ олу-нан дәјишмэлэри электрик бошалмаларынын тэ'сири алтында плјонка-ларда баш верән полимер зәнчирлэринин парчаланмасы, тикилмэси вэ оксидлэшмэси просеслэри илэ изаһ олунур ки, бу да молекулјар чэкинин дәјишмэси вэ инфрагырмызы спектроскопија методу илэ аш-кара чыхарылан мүхтэлиф кимјэви груп вэ бирлэшмэлэрин (гидрок-сидлэр, карбоксидлэр, ефир групплары вэ с.) эмэлэ кэлмэси илэ тэс-диг едилир.

АЗЭРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ
 Физика-техника вэ ријазиијат елмлэри серијасы, 1970, № 1—2.
 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-технических и математических наук, 1970, № 1—2.

Б. А. АЗИМОВ

РЕШЕНИЕ НА ЭВМ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАЗРАБОТКИ НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

Современные математические методы и электронные вычислитель-ные машины позволяют успешно решать теоретические и практичес-кие задачи разработки нефтегазовых месторождений. Ниже приводятся результаты ряда задач, решение которых было найдено благодаря использованию электронных вычислительных машин.

1. При законтурном и внутриконтурном заводнении возникает задача об управлении движением водонефтяного контакта, являющаяся обратной задачей теории фильтрации. Она сводится к установлению такого режима работы и расположения скважин, при котором про-движение контура нефтеносности наилучшим образом подчинялось бы заранее заданному закону.

При разработке месторождений вводятся некоторые ограничения, накладываемые на суммарный отбор нефти, на забойные давления, на объем закачки воды, себестоимость нефти и т. д. Естественно, при решении задачи об управлении движением водонефтяного контакта (ВНК) необходимо учитывать эти ограничения.

Рассмотрим однородный горизонтальный пласт постоянной мощ-ности h , ограниченный некоторым замкнутым контуром питания Γ_n , на котором сохраняется постоянное давление P_n , равное первоначальному пластовому давлению. Вязкость нефти μ_n и воды μ_v считаем различ-ными. Обозначим через Γ_0 начальное положение контура нефтенос-ности, Γ —текущее положение кн, q_i —текущие объемные дебиты скважин (где $i=1, 2, \dots, n+1$), $\bar{P}^+$ —давление в нефтяной зоне и $\bar{P}$ —давление в водяной зоне. Считаем, что координаты скважин (x_i, y_i) заданы.

Допустим, что уравнение Γ задано и имеет вид

$$\bar{F}(x, y, t) = 0, \quad (1)$$

где $\bar{F}(x, y, 0) = 0$ является уравнением Γ_0 .

Давление $\bar{P}^+$ и $\bar{P}$ удовлетворяют следующим уравнениям и усло-виям:

$$\Delta \bar{P} = \Delta \bar{P}^+ = 0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}|_{\Gamma_n} &= P_n, \\ \bar{P}^+|_{\Gamma} &= \bar{P}|_{\Gamma}, \\ \frac{\kappa}{\mu_v} \frac{\partial \bar{P}^+}{\partial n} \Big|_{\Gamma} &= \frac{\kappa}{\mu_v} \frac{\partial \bar{P}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Известно, что давления в пласте $\bar{P}$ и $\bar{P}$, удовлетворяющие уравнениям (2) и условиям (3), при условии линейности закона Дарси, зависят от дебитов скважин q_i линейно:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i(x, y, t) q_i, \\ \bar{P}(x, y, t) &= \sum_{i=1}^{n+1} b_i(x, y, t) q_i, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $a_i(x, y, t)$, $b_i(x, y, t)$ зависят от параметров пласта κ , μ_n , μ_b , координат скважин (x_i, y_i) и времени t , а также κ — проницаемости пласта.

Отметим, что вопрос определения функций $\bar{P}$ и $\bar{P}$ из (2) и (3) является весьма сложным и должен решаться для каждой конкретной задачи самостоятельно. Предположим, что в решениях (2) и (3) $\bar{P}$ и $\bar{P}$ найдены и имеют аналитические выражения. Это возможно при некоторых случаях Γ (например, когда Γ является окружностью, эллипсом и т. д.).

Ставим следующую задачу: выбрать дебиты q_i ($i=1, 2, \dots, n+1$) так, чтобы уравнение контура Γ , заданное в виде (1), удовлетворяло соотношению Кельвина, имеющему место на всякой поверхности движущейся вместе с жидкостью, т. е. на любой жидкой поверхности. Ясно, что соотношение Кельвина является уравнением движения водонефтяного контакта.

Если $\Phi(x, y, t) = 0$ является действительным уравнением водонефтяного контакта, то соотношение Кельвина в нашем случае будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu_n} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Big|_{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] &= 0, \\ m \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu_b} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Big|_{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так как уравнение Γ , заданное в виде (1), является не истинным законом движения водонефтяного контакта, а желаемым, то, подставляя его в (5), получим некоторые невязки ϵ и ξ :

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu_n} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_F \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Big|_F \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right] &= \epsilon, \\ m \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\kappa}{\mu_b} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} \Big|_F \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \Big|_F \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \right] &= \xi. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если $\epsilon = \xi = 0$, то это будет означать, что истинный закон стягивания точно реализуется желаемым законом стягивания. Видимо, наиболее вероятным будет случай, когда $\epsilon \neq 0$ и $\xi \neq 0$. При этом речь может идти только о минимальных значениях невязок ϵ и ξ .

Учитывая выражения $\bar{P}$ и $\bar{P}$ из (4) и независимость закона (1) от дебитов, для ϵ и ξ получим следующие выражения, линейно зависящие от производительности скважин q_i :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^{n+1} A_i(x, y, t) q_i + m \frac{\partial F}{\partial t}, \\ \xi &= \sum_{i=1}^{n+1} B_i(x, y, t) q_i + m \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $A_i(x, y, t)$ и $B_i(x, y, t)$ — известные функции.

Вводя норму для ϵ и ξ — составляющую от линейной зависимости от дебитов или же выбирая направление, по которому исследуется движение водонефтяного контакта, мы получаем, что ϵ и ξ зависят только от параметров t и q_i . Например, предполагая знакопостоянность $A_i(x, y, t)$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ и $B_i(x, y, t)$, за норму можно взять среднеинтегральную величину по Γ невязки ϵ и ξ или, выбирая то направление, по которому ожидается резкое изменение этих величин, мы можем получить следующее:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{A}_i(t) q_i + \bar{F}(t), \\ \bar{\xi} &= \sum_{i=1}^{n+1} \bar{B}_i(t) q_i + \bar{F}(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\bar{A}_i(t)$, $\bar{B}_i(t)$ и $\bar{F}(t)$ — известные функции, зависящие от координат скважин и параметров пластов.

Допустим, что забойные давления некоторых эксплуатационных и нагнетательных скважин и средневзвешенное пластовое давление не могут быть ниже наперед заданного значения $\bar{P}_{3j}^*(t)$, $\bar{P}_{3j}^*(t)$ и $P_{cp}^*(t)$. Из выражения (4) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{3j} &= \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}(t) q_i, \\ \bar{P}_{3j} &= \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij}(t) q_i, \\ P_{cp} &= \sum_{i=1}^{n+1} c_i(t) q_i. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Тогда поставленную задачу можно сформулировать следующим образом: минимизировать выбором дебитов скважин q_i выражение

$$\bar{\epsilon} = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{A}_i(t) q_i + \bar{F}(t) \quad (10)$$

при ограничениях:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{3j} &= \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}(t) q_i \geq \bar{P}_{3j}^*(t), \\ \bar{P}_{3j} &= \sum_{i=1}^{n+1} b_{ij}(t) q_i \geq \bar{P}_{3j}^*(t), \\ j &= \nu + 1, \nu + 2, \dots, \kappa; \kappa \leq n + 1, \\ P_{cp} &= \sum_{i=1}^{n+1} c_i(t) q_i \geq P_{cp}^*, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$ — известные функции параметра t .

Таким образом полученная задача является задачей математического программирования. Осреднив функции $A_i(t)$, $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $\bar{P}_{3j}^*(t)$, $\bar{P}_{3j}^*(t)$ по времени, приходим к общей задаче линейного программирования или, аппроксимируя их линейной функцией, приходим к общей задаче параметрического программирования. Отметим, что к общей задаче параметрического программирования могут быть вышеприведенные ограничения (11) при минимизации

менены на другие, вытекающие из конкретных условий (например, суммарный отбор заранее задан, себестоимость всей добываемой нефти была меньше заранее заданной величины и т. д.).

Рассмотрим решение задачи о круговом стягивании водонефтяного контакта при однородной жидкости для произвольно расположенных скважин на круговом пласте. В этом случае определения давления в пласте производится сравнительно легко с помощью использования аппарата функции комплексного переменного и метода суперпозиции. Опуская промежуточные выкладки (они очень просты), отметим сле-

дующее: все коэффициенты $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $c_i(t)$, $\bar{P}_{zj}^+(t)$ и $\bar{P}_{zj}^-(t)$, входящие в (11), оказываются функциями, известными и не зависящими от времени. В этом случае, интерполируя $\bar{A}_1(t)$ для каждого промежутка (t_k, t_{k+1}) входящие в $[0, T]$ линейные функции, приходим к первому случаю задачи параметрического программирования.

При решении задачи о круговом стягивании с учетом различий вязкости нефти и воды возникает трудность в определении давления из (2) и (3). Для этой цели используем методы теории потенциала, вернее ищем давление в пласте в следующем виде:

$$P = \frac{\mu_n}{2\pi h\kappa} \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \\ + \frac{\mu_b}{2\pi k\kappa} \sum_{i=n+1}^{n+l} q_i \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} + \\ + \int_{\Gamma} \rho(s, t) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} ds + \\ + \int_{\Gamma_n} \mu(s, t) \frac{\partial}{\partial n_1} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2}} ds_1,$$

где $\rho(s, t)$ — плотность потенциала простого слоя на Γ ,
 $\mu(s, t)$ — плотность потенциала двойного слоя на Γ_n ,
 (ξ, η) — координаты точки на Γ ,
 (ξ_1, η_1) — координаты точки на Γ_n ,
 n_1 — внутренняя нормаль к Γ_n в точке (ξ_1, η_1) .

Составляя разность предельных значений нормальных производных на контуре Γ , получим

$$\frac{\partial \bar{P}^+}{\partial n} - \frac{\partial \bar{P}^-}{\partial n} = 2\pi\rho.$$

Кроме того, известно, что

$$\frac{\partial \bar{P}^+}{\partial n} - \frac{\partial \bar{P}^-}{\partial n} = \left(\frac{\kappa}{\mu_n} - \frac{\kappa}{\mu_b} \right) m \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\Delta F|}.$$

Отсюда можно найти ρ . Для определения $\mu(s, t)$, используя первое выражение из (3), получаем интегральное уравнение рода, решение которого находим, разлагая $\mu(s, t)$ в ряд Фурье.

После нахождения P , произведя некоторые выкладки, получим $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, которые являются постоянными. Заменяя переменные коэффициенты $\bar{A}_1(t)$, $\bar{P}_{zj}^+(t)$ и $\bar{P}_{zj}^-(t)$ в каждом промежутке (t_k, t_{k+1})

линейной функцией, получим второй случай задачи линейного программирования.

Теоретические исследования показывают, что задачи управления текущими из условий конкретности задачи, могут быть приведены к задачам линейного или параметрического программирования и, следовательно, могут быть решены на электронных цифровых вычислительных машинах.

II. В процессе разработки нефтяных месторождений во многих случаях давление в пласте становится ниже давления насыщения. При этом происходит выделение газа из нефти, в результате чего имеет место двухфазное движение, т. е. движение газированной нефти.

Известно, что движение газированной нефти описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{\kappa} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_n} \operatorname{div} [F_n \operatorname{grad} P]; \\ \frac{m}{\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \{ P [c(1-\rho) + \lambda\rho] \} &= \frac{c}{\mu_r} \operatorname{div} [F_r P \operatorname{grad} P] + \\ &+ \frac{\lambda}{\mu_n} \operatorname{div} [F_n P \operatorname{grad} P], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где m — пористость породы;
 κ — проницаемость породы относительно однородной жидкости,
 c — коэффициент изотермичности,
 λ — коэффициент Генри,
 μ_r, μ_n — вязкости газа и нефти,
 F_r, F_n — функции эффективных проницаемостей, зависящие от нефтенасыщенности;
 t — время,
 ρ — нефтенасыщенность,
 P — пластовое давление.

Отметим, что система уравнений (12) справедлива для линейного закона фильтрации Дарси и при условии, что свободный газ подчиняется закону изотермичности, а растворенный — закону Генри.

При $\frac{\lambda}{c} = 1$ для простейших случаев течения газированной жидкости уравнения (1) переписываются в следующем виде: при плоскопараллельном течении

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m\mu_n} \frac{\partial}{\partial x} \left[F_n \frac{\partial P}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m\mu_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[F_r P \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu_r}{\mu_n} F_n P \frac{\partial P}{\partial x} \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при плоскорадиальном

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m\mu_r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[F_r P \frac{\partial P}{\partial r} \right], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m\mu_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[F_n r \frac{\partial P}{\partial r} \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$F = F_r + \frac{\mu_r}{\mu_n} F_n.$$

где

Системы (13) и (14) даже при простейших начальных и граничных условиях аналитически не решаются. Поэтому многие авторы занимались их численным или приближенным решением.

Нами рассмотрены численные решения систем (13) и (14) в следующих конкретных случаях:

1. Задан прямоугольный пласт длиной L , в котором происходит плоскопараллельное течение газированной нефти к галерее, расположенной на левом конце пласта. В этом случае постановка задачи такова: найти решение системы (13) при начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} t=0, & \quad P=P_0, & \rho=\rho_0 \\ x=0, & \quad P=P_c, \\ x=L, & \quad \frac{\partial P}{\partial x}=0, & \frac{\partial \rho}{\partial x}=0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Такая постановка соответствует задаче истощения прямоугольного пласта с газированной нефтью.

2. Рассматривается круговой пласт газированной нефти с радиусом R_k . Первоначальное пластовое давление P_0 , а нефтенасыщенность ρ_0 . В пласте расположена галерея с радиусом R_r и постоянным значением давления на забое P_c . При этом пласт распадается на две части: внутреннюю и внешнюю относительно галереи. В каждой части изменение давления и нефтенасыщенности происходит самостоятельно. Постановка задач для каждой части следующая:

а) Найти решение системы (14) во внутренней части пласта при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} t=0, & \quad P=P_0, & \rho=\rho_0 \\ r=0, & \quad \frac{\partial P}{\partial r}=0, & \frac{\partial \rho}{\partial r}=0. \\ r=R_r, & \quad P=P_c. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

б) Найти решение системы (14) во внешней части пласта при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} t=0, & \quad P=P_0, & \rho=\rho_0, \\ r=R_r, & \quad P=P_c, \\ r=R_k, & \quad \frac{\partial P}{\partial r}=0, & \frac{\partial \rho}{\partial r}=0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

3. Рассматривается круговой пласт газированной нефти большого радиуса R_k с открытым контуром. Предполагается, что в центре пласта расположена укрупненная и совершенная по степени вскрытия скважина с радиусом R_c . Начальное пластовое давление P_0 , а начальная нефтенасыщенность ρ_0 . В момент $t=0$ скважина пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом $Q_n = \text{const}$. На контуре R_k сохраняются постоянные значения давления P_0 и нефтенасыщенности ρ_0 . В этом случае постановка задачи такова: найти решение системы (14) внутри круга радиуса R_k при следующих начальных и граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} t=0, & \quad P=P_0, & \rho=\rho_0, \\ r=R_c, & \quad Q_n = \frac{\kappa}{\mu_n} \cdot 2\pi R_c b F_n \frac{\partial P}{\partial r} = \text{const}, \\ r=R_k, & \quad P=P_0, & \rho=\rho_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где b — мощность пласта.

Для численного решения вышеуказанных задач сначала величины, входящие в уравнения (13), (14), и условия (15), (16), (17), (18) были заменены безразмерными. Далее полученные безразмерные урав-

нения и условия заменяются их конечноразностными аналогами. Конечноразностные аналоги систем (13) и (14) будут, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0j+1} &= \rho_{0j} + \frac{\tau}{h^2} \frac{\mu_r}{\mu_n} \left\{ F_{n0j} V \bar{P}_{2j} + \left[\frac{1}{2} (F_{n1j} - F_{n0j}) - 2F_{n0j} V \bar{P}_{1j} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left[\frac{1}{2} (F_{n1j} - F_{n0j}) - F_{n0j} \right] V \bar{P}_{0j} \right\}, \\ \rho_{1j+1} &= \rho_{1j} + \frac{\tau}{h^2} \frac{\mu_r}{\mu_n} \left\{ F_{n1j} V \bar{P}_{1+1j} + \left[\frac{1}{2} (F_{n1+1j} - F_{n1-1j}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2F_{n1j} \right] V \bar{P}_{1j} - \left[\frac{1}{2} (F_{n1+1j} - F_{n1-1j}) - F_{n1j} \right] V \bar{P}_{1-1j} \right\}, \\ \bar{P}_{1j+1} &= \bar{P}_{1j} + \frac{\tau}{h^2} V \bar{P}_{1j} \left\{ F_{1j} \bar{P}_{1+1j} + \left[\frac{1}{2} (F_{1+1j} - F_{1-1j}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2F_{1j} \right] \bar{P}_{1j} - \left[\frac{1}{2} (F_{1+1j} - F_{1-1j}) - F_{1j} \right] \bar{P}_{1-1j} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

($i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, 2, \dots$),

где $\bar{P}$ — безразмерное давление,

τ, h — шаги безразмерных времени и координаты;

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0j+1} &= \rho_{0j} + \frac{\mu_r}{\mu_n} + \frac{\mu_r}{\mu_n} \tau F_{n0j} \left[\frac{2}{r_2 - r_0} \left(\frac{\bar{P}_{2j} - \bar{P}_{1j}}{r_2 - r_1} - \frac{\bar{P}_{1j} - \bar{P}_{0j}}{r_1 - r_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{F'_{n0j}}{F_{n0j}} \left(\frac{\rho_{1j} - \rho_{0j}}{r_1 - r_0} - \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0} \left(\frac{\rho_{2j} - \rho_{1j}}{r_2 - r_1} - \frac{\rho_{1j} - \rho_{0j}}{r_1 - r_0} \right) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 1 \right\} \cdot \left(\frac{\bar{P}_{1j} - \bar{P}_{0j}}{r_1 - r_0} - \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0} \left(\frac{\bar{P}_{2j} - \bar{P}_{1j}}{r_2 - r_1} - \frac{\bar{P}_{1j} - \bar{P}_{0j}}{r_1 - r_0} \right) \right) \right], \\ \bar{P}_{1j+1} &= \bar{P}_{1j} + \tau F_{1j} \bar{P}_{1j} r_1^4 \left[\frac{\bar{P}_{1+1j} - \bar{P}_{1j}}{(r_{1+1} - r_1)(r_1 - r_{1-1})} - \frac{\bar{P}_{1j} - \bar{P}_{1-1j}}{(r_1 - r_{1-1})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{F'_{1j}}{F_{1j}} \frac{\rho_{1+1j} - \rho_{1-1j}}{r_{1+1} - r_{1-1}} + \frac{1}{\bar{P}_{1j}} \frac{\bar{P}_{1+1j} - \bar{P}_{1-1j}}{r_{1+1} - r_{1-1}} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{\bar{P}_{1+1j} - \bar{P}_{1-1j}}{r_{1+1} - r_{1-1}} \right], \\ \rho_{1j+1} &= \rho_{1j} + \frac{\mu_r}{\mu_n} \tau F_{n1j} r_1^4 \left[\frac{\bar{P}_{1+1j} - \bar{P}_{1j}}{(r_{1+1} - r_1)(r_1 - r_{1-1})} - \frac{\bar{P}_{1j} - \bar{P}_{1-1j}}{(r_1 - r_{1-1})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{F'_{n1j}}{F_{n1j}} \frac{\rho_{1+1j} - \rho_{1-1j}}{r_{1+1} - r_{1-1}} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{\bar{P}_{1+1j} - \bar{P}_{1-1j}}{r_{1+1} - r_{1-1}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

($i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, 2, \dots$),

где $\bar{r}$ — безразмерная радиальная координата.

Подстановки, связывающие размерные и безразмерные величины имеют вид: в случае плоскопараллельного течения

$$y = \frac{x}{L}, \quad \bar{P} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^2, \quad \bar{t} = \frac{\kappa P}{m \mu_r L^2} t,$$

а в случае плоскорадиального

$$\bar{r} = \frac{R_r}{r}, \quad \bar{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \bar{t} = \frac{\kappa P_0}{m \mu_r R_r^2} t.$$

Далее системы (19) и (20) решаются на электронной вычислительной машине „Урал-2“, исходя из соответствующих начальных и

граничных условий. На основе полученных численных результатов построены графики изменения давления и нефтенасыщенности в зависимости от времени и координат. Составленные таблицы и построенные графики позволили сделать некоторые выводы относительно характера давления и нефтенасыщенности.

4. Рассматривается полосообразный пласт газированной нефти, ограниченный со всех сторон непроницаемыми стенками. Начальное давление P_0 , а нефтенасыщенность ρ_0 . Длина пласта L , а пластовое давление P_0 , а нефтенасыщенность ρ_0 . Длинна пласта L , а пластовое давление P_0 , а нефтенасыщенность ρ_0 . По левой боковой стенке пласта расположены равноотстоящих скважин, составляющих прямолинейную батарею. На забоях скважин установлено постоянное забойное давление P_c . Таким образом, в пласте имеет место плоское течение газированной нефти.

Система уравнений (12) в этом случае движения приобретает вид

$$\left(\frac{\lambda}{c} = 0\right):$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m_{\mu\Gamma}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_P \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F_P \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\kappa}{m_{\mu\Gamma}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(F_{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(F_{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

В области, питающей единственную скважину, можно поставить следующие начальные и граничные условия:

$$\left\{ \begin{aligned} t &= 0, & P &= P_0, & \rho &= \rho_0, \\ x &= 0, y = 0, & P &= P_c, \\ x &= 0, y \neq 0, & \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ x &= L, & \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ y &= 0, x \neq 0, & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\ y &= \frac{l}{2n}, & \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

После введения безразмерных величин

$$\bar{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{2n}{l} y, \quad \bar{t} = \frac{\kappa P_0}{m_{\mu\Gamma} L^2} t$$

предыдущая система и условия приводятся к безразмерным системе и условиям. Затем они заменяются их конечноразностными аналогами для удобства применения электронных вычислительных машин.

Принимая шаги по координатам x, y постоянными и равными соответственно числам h и η , а шаг по безразмерному времени равным числу τ , легко получить конечноразностные уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_{00k+1} &= \rho_{00k} + \tau \frac{\mu_{\Gamma}}{\mu_{\Pi}} F_{00k}^{\rho} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[(\bar{P}_{20k} - 2\bar{P}_{10k} + \bar{P}_{00k}) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{F_{00k}^{\rho}}{F_{00k}^{\rho}} (\bar{P}_{10k} - \bar{P}_{00k}) (\rho_{10k} - \rho_{00k}) \right] + \frac{4n^2 L^2}{l^2 \eta^2} \left[(\bar{P}_{02k} - 2\bar{P}_{01k} + \bar{P}_{00k}) + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{F_{00k}^{\rho}}{F_{00k}^{\rho}} (\bar{P}_{01k} - \bar{P}_{00k}) (\rho_{01k} - \rho_{00k}) \right] \right\}, \\ \bar{P}_{1jk+1} &= \bar{P}_{1jk} + \tau F_{1jk} \bar{P}_{1jk} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[(\bar{P}_{1+1jk} - 2\bar{P}_{1jk} + \bar{P}_{1-1jk}) + \right. \right. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{1}{4\bar{P}_{1jk}} (\bar{P}_{1+1jk} - \bar{P} - \bar{P}_{1-1jk})^2 + \frac{F_{1jk}^{\rho}}{4F_{1jk}^{\rho}} (\bar{P}_{1+1jk} - \bar{P}_{1-1jk}) (\rho_{1+1jk} - \rho_{1-1jk}) \right] + \\ &+ \frac{4n^2 L^2}{l^2 \eta^2} \left[(\bar{P}_{1j+1k} - 2\bar{P}_{1jk} + \bar{P}_{1j-1k}) + \frac{1}{4\bar{P}_{1jk}} (\bar{P}_{1j+1k} - \bar{P}_{1j-1k})^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{F_{1jk}^{\rho}}{4F_{1jk}^{\rho}} (\bar{P}_{1j+1k} - \bar{P}_{1j-1k}) (\rho_{1j+1k} - \rho_{1j-1k}) \right] \Bigg\}, \\ \rho_{i+1} &= \rho_{ijk} + \tau \frac{\mu_{\Gamma}}{\mu_{\Pi}} F_{ijk} \left\{ \frac{1}{h^2} \left[(\bar{P}_{1+1jk} - 2\bar{P}_{1jk} + \bar{P}_{1-1jk}) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{F_{ijk}^{\rho}}{4F_{ijk}^{\rho}} (\bar{P}_{1+1jk} - \bar{P}_{1-1jk}) (\rho_{1+1jk} - \rho_{1-1jk}) \right] + \\ &+ \frac{4n^2 L^2}{l^2 \eta^2} \left[(\bar{P}_{ij+1k} - 2\bar{P}_{ijk} + \bar{P}_{ij-1k}) + \right. \\ &+ \left. \frac{F_{ijk}^{\rho}}{4F_{ijk}^{\rho}} (\bar{P}_{ij+1k} - \bar{P}_{ij-1k}) (\rho_{ij+1k} - \rho_{ij-1k}) \right] \Bigg\} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N-1; j = 1, 2, \dots, M-1; \kappa = 0, 1, 2, \dots),$$

Эта задача запрограммирована для решения на ЭЦВМ „Урал-2“ и на основе полученных результатов составлены таблицы и построены графики изменения давления и нефтенасыщенности для конкретного варианта начальных и граничных условий. Таблицы и графики позволили выяснить характер падения давления и изменения нефтенасыщенности в пласте в случае работы прямолинейной батареи скважин с равными постоянными забойными давлениями.

Поступило 9. VII 1969

Ф. Г. ГУСЕЙНОВ

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УПРОЩЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Современные энергетические системы, состоящие из большого числа мощных электростанций, высоковольтных электропередач, системных сетей с крупными узлами нагрузок, представляют собой весьма сложный динамический объект. Процессы в них математически описываются системами нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений высоких порядков и их решение практически весьма затруднительно даже с помощью современных математических вычислительных машин и моделей. Поэтому решению режимных задач всегда предшествует проведение необходимых работ по эквивалентированию энергетических систем. Под эквивалентированием подразумевается совокупность всех преобразований и упрощений исходной сложной системы с целью приведения ее к простой эквивалентной системе.

Операция эквивалентирования является в общем случае приближенной, так как простая система получается из исходной сложной пренебрежением несущественными параметрами, факторами и процессами и сохранением только существенных, главных из них.

Какие из параметров, факторов и процессов исходной системы является существенными и какие несущественными, зависит от решаемой задачи. Одни и те же параметры и факторы могут быть существенными при решении одних задач и несущественными для других. Выявление и устранение несущественных параметров, факторов и процессов для решаемой задачи осуществляется ее качественным исследованием.

При установлении критериев эквивалентности и разработке методов эквивалентирования учитываются только существенные, главные процессы. Все эти качественные исследования электрических систем, а также разработка критериев и методов для их эквивалентирования составляют содержание рассматриваемой проблемы.

При решении задачи в области переходных процессов, когда состояние системы меняется во времени, существенным является сохранение кривой изменения внутренних или выходных мощностей или же сохранение одного из показателей переходного процесса, условие инвариантности которого позволяет определить динамические параметры простой эквивалентной системы.

Настоящая статья посвящена вопросам эквивалентирования электрических систем при исследовании электромеханических переходных процессов.

Основы эквивалентирования

Сущность эквивалентирования энергетической системы для целей исследования переходных процессов заключается в следующем. Допустим, что исходная энергосистема состоит из двух подсистем А и В

с одной (или многими) связью (рис. 1, а). Каждая из этих подсистем может содержать в себе много агрегатов, узлов нагрузок и иметь сложную конфигурацию сети. При решении многих задач одна из подсистем (например, подсистема В) может быть свернута и значительно упрощена (рис. 1, б).

Эквивалентированная подсистема должна быть выделена путем разрыва ее связей с системой, например, посредством отключения линии отключения в виде нагрузок (положительных или отрицательных). После разрыва связей необходимо рассмотреть движение подсистемы В при приложении возмущения в точках разрыва. Для наглядности подсистемы А и В представим их линейными моделями. Мгновенно приложенное к точке разрыва связи возмущение, например, активная мощность, вызывает два рода движения—вынужденное движение всей подсистемы относительно синхронной оси и свободное движение агрегатов относительно друг друга и относительно выходной точки. Первое движение назовем внешним, а второе—внутренним движением подсистемы В.

При эквивалентировании подсистемы В за основу можно принять ее внешнее или внутреннее движение в зависимости от решаемой задачи. Например, если задачей является расчет частотной характеристики подсистемы В (или всей системы), то существенным будет внешнее движение; если же требуется рассчитать устойчивость электропередачи, то существенным является внутреннее движение агрегатов относительно выходной точки.

Рассмотрим эти случаи эквивалентирования более подробно. Допустим, что малые колебания каждого из n агрегатов подсистемы В определяются одной обобщенной координатой—углом выбега $\Delta\delta_i$. При этом получим следующую систему уравнений:

$$M_i \frac{d^2 \Delta\delta_i}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n+1} D_{ij} \frac{d\Delta\delta_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n+1} A_{ij} \Delta\delta_j = \Delta P_i. \quad (1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n+1)$

Здесь в качестве $(n+1)$ -ой координаты принята фаза напряжения выходной точки.

Как видно из (1), ускорение ротора источника $\frac{d^2 \Delta\delta_i}{dt^2}$ зависит от внешней силы ΔP_i и внутренних сил, возникающих между источниками. Если нас интересует только внешнее движение системы, то для исключения ненужных внутренних движений складываем все уравнения (1). При этом все внутренние силы, а также составляющие ускорений агрегатов, обусловленные этими силами, взаимно уничтожаются. Остаются только внешние силы и пропорциональные им ускорения роторов, одинаковые для всех агрегатов. Таким образом получаем

$$\frac{d^2 \Delta\delta_i}{dt^2} \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n \Delta P_i$$

или

$$\frac{d^2 \Delta\delta_3}{dt^2} M_3 = \Delta P_3.$$

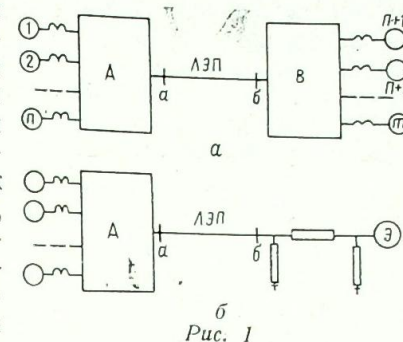


Рис. 1

Отсюда следует, что при эквивалентировании подсистемы B на основе ее внешнего движения инерционная постоянная и возмущающая сила эквивалентного агрегата определяются точно, как

$$M_3 = \sum_{i=1}^n M_i \quad \text{и} \quad \Delta P_3 = \sum_{i=1}^n \Delta P_i.$$

При эквивалентировании подсистемы B по ее внутреннему движению внешнее движение подсистемы является несущественным, и для его исключения произведем в уравнениях (1) замену обобщенных координат переходом от углов $\Delta \delta_i$ к углам источников относительно точки разрыва связи. Учитывая несущественность внешнего движения, закрепляем фазу и величину напряжения этой точки.

Разделив первые n уравнений (1) на M_i , а затем вычтя из них $(n+1)$ -ое уравнение, получим

$$M_i \frac{d^2 \Delta \delta_{ib}}{dt^2} + \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{d \Delta \delta_{ib}}{dt} + \sum_{j=1}^n A_{ij} \Delta \delta_{ib} = \Delta P_i. \quad (2)$$

$(i = 1, 2 \dots n)$

Решением системы дифференциальных уравнений (2) находим закономерность изменения углов $\delta_{ib} = f(t)$, которые, кроме установившихся составляющих, обусловленных возмущением ΔP_i , содержат также n колебательных свободных составляющих. Одно из свободных колебаний каждого угла $\Delta \delta_{ib}$, называемое нами главным, обусловлено наличием упругой связи с выходной точкой, а все другие $(n-1)$ колебания, называемые нами относительными, определяются наличием упругих связей между источниками.

Заменяя подсистему B одним эквивалентным агрегатом, мы исключаем все относительные движения агрегатов и сохраняем только главные внутренние движения. Следовательно, возможности замены будут определяться несущественностью относительных колебаний в подсистеме B .

Для большинства случаев запас устойчивости относительных колебаний эквивалентируемой подсистемы значительно больше, чем запас устойчивости ее главного движения. Поэтому, с точки зрения устойчивости, относительные движения эквивалентируемой подсистемы часто оказываются несущественными.

Критерии эквивалентности

Состояние энергосистемы определяется значениями ее обобщенных координат, в качестве которых, как правило, принимаются инерционные величины агрегатов δ_i , E_{di} . Эти координаты связаны между собой уравнениями движения системы, в которые в качестве коэффициентов входят статические, режимные и динамические параметры. Через эти параметры определяются показатели переходных процессов системы — парциальные и собственные частоты, коэффициенты затухания, коэффициенты амплитуд и т. д.

Заменяя исходную систему простой эквивалентной, мы резко сокращаем число обобщенных координат, следовательно, число всех параметров и показателей, сохраняя только существенные из них. Каждая из обобщенных координат и показателей является существенной для конкретных режимных задач энергосистемы. Поэтому эквивалентирование должно производиться на основе инвариантности (приближенно) этих показателей системы. Отсюда следует, что невозможно предложить один критерий и метод эквивалентирования, пригодный для всех задач.

Нами разделены на классы следующие системные задачи, связанные:

- а) с изучением движений всей системы относительно синхронной оси;
- б) с исследованием статической устойчивости системы;
- в) с определением частоты и амплитуды одного из собственных колебаний системы;
- г) с количественным исследованием процессов в связях между системами;
- д) с исследованием только медленных или быстрых движений системы.

Критерием эквивалентности этих классов задач соответственно является инвариантность:

- а) ускорений движения системы относительно синхронной оси;
- б) корней, определяющих устойчивость системы до и после ее упрощения;
- в) одной из частот свободных колебаний системы;
- г) малых колебаний выходных мощностей системы;
- д) медленных или быстрых движений системы.

Методы эквивалентирования

При решении задач класса (а) эквивалентируемая подсистема может быть заменена одной машиной, динамические параметры которой M_3 , D_3 определяются как сумма параметров машин исходной системы.

В случае решения задачи класса (б) эквивалентируемая подсистема может быть заменена одной машиной, параметры которой определяются на основе расщепления характеристического уравнения на части.

При решении задачи класса (в) число и параметры эквивалентных машин определяются методом коэффициентов распределения амплитуд.

В процессе решения задач класса (г) число и параметры эквивалентного источника определяются методом подобия малых колебаний выходных мощностей.

При решении задач класса (д) выделение медленных или быстрых движений и определение параметров эквивалентной простой системы производится применением метода малых параметров. Значения параметров простой эквивалентной системы, определяемые по перечисленным методам, как правило, различны, т. е. в строгом смысле упрощенная система не может быть эквивалентной исходной системе по всем критериям.

Установление области параметров и режимов исходной системы, при которых значения параметров упрощенной эквивалентной системы, найденные на основе инвариантности различных показателей переходного процесса, практически совпадают, представляет большой практический интерес. В этой области параметры эквивалентной и теоретической системы могут быть определены применением наиболее простого метода эквивалентирования. Определение этой области ниже нами рассматривается на примере типовой трехмашинной электрической системы. Это позволяет более наглядно представить операцию эквивалентирования.

Схема трехмашинной консервативной системы представлена на рис. 2, а. Источники 1 и 2 с местной нагрузкой образуют эквивалентную подсистему, а 3 — приемную систему. Автоматическое регулирование возбуждения источников 1 и 2 приближенно учитывается принятием их э. д. с. за переходными реактантами неизменными. Местная нагрузка замещается в виде постоянного сопротивления.

Параметры системы выражены в относительных единицах, в качестве базиса приняты номинальные данные источника 1. Требуется заметить эквивалентную подсистему одним источником и определить его параметры для различных соотношений мощностей и реактансов источников 1 и 2. Малые свободные колебания трехмашинной консервативной системы описываются уравнениями:

$$\begin{cases} (M_1 p^2 + A_{11}) \Delta \delta_1 + A_{12} \Delta \delta_2 = 0, \\ A_{21} \Delta \delta_1 + (M_2 p^2 + A_{22}) \Delta \delta_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $\Delta \delta_1, \Delta \delta_2$ — малые приращения углов выбега источников 1 и 2 относительно синхронной оси; M_1, M_2 и A_{ij} — инерционные постоянные времени и синхронизирующие мощности тех же источников.

Из уравнений (3) определены все показатели — парциальные $n_1, n_2, \bar{n}_1, \bar{n}_2$ и собственные ω_1, ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) частоты, а также коэффициенты распределения амплитуд m_{12}, m_{21}, m_{22} исходной системы для всех вариантов [1]. Статические параметры эквивалентной системы (рис. 2, б) найдены из условия инвариантности входных токов. Коэффициент амплитуды m_3 , синхронизирующая мощность A_{33} и механическая постоянная времени M_3 эквивалентного источника определены из условия инвариантности ω_1 и кинетической и потенциальной энергии системы (3). Значения M_3 и A_{33} найдены также по упрощенным выражениям:

$$M'_3 = M_1 + M_2, \quad A'_{33} = A_{13} + A_{23}$$

и через них определено значение частоты главных собственных колебаний эквивалентного источника:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{A'_{33}}{M'_3}}.$$

Параметры эквивалентной простой системы определялись также по критерию инвариантности малых колебаний выходной активной мощности:

$$\Delta P_3 = \Delta P_{31} \cos \omega_1 t + \Delta P_{32} \cos \omega_2 t = \Delta P'_3 + \Delta P''_3.$$

Мощность $\Delta P'_3$ обусловлена колебанием источников 1 и 2 относительно выходной точки, а $\Delta P''_3$ — относительным колебанием тех же источников. При замене указанных источников одним эквивалентным по критерию инвариантности собственных частот ω_1 (или ω_2) мощность $\Delta P'_3$ (или $\Delta P''_3$) исключается, остается лишь одна мощность. Во всех случаях, когда величина исключаемой мощности исходной системы составляет небольшую часть от мощности ΔP_3 , эквивалентирование системы в виде одной машины считается возможным.

Для количественной оценки мощностей $\Delta P'_3$ и $\Delta P''_3$ и определения их зависимости от соотношения параметров исходной системы нами определены коэффициенты амплитуды углов m_{12}, m_{22} и мощностей $\Delta P_{31}, \Delta P_{32}, \Delta \Delta P_3 = \frac{\Delta P_{32}}{\Delta P_{31}}$. На основании результатов многовариантного расчета эквивалентирования типовой трехмашинной системы сделаны соответствующие выводы об области параметров исходной системы, в которой все методы эквивалентирования оказываются практически равноценными.

Для эквивалентирования трехмашинной системы предложен также следующий обобщенный метод. Для частоты собственного колебания ω_2 уравнения свободного движения источников 1 и 2 имеют вид:

$$\begin{aligned} -M_1 \omega_2^2 + A_{11} + A_{12} m_{22} &= 0, \\ -M_2 \omega_2^2 m_{22} + A_{22} m_{22} + A_{12} &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{A_{11} + A_{12} m_{22}}{M_1} = \frac{A_{22} + \frac{1}{m_{22}} A_{12}}{M_2}. \quad (4)$$

Учитывая, что $A_{11} = -A_{12} - A_{13}$ и $A_{22} = -A_{12} - A_{23}$, где $A_{13} = \frac{\partial P_1}{\partial \delta_3}$, $A_{23} = \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3}$, а также вводя обозначения $\kappa = \frac{M_1}{M_2}$, $\kappa_A = \frac{A_{13}}{A_{23}}$, из равенства (4) получим

$$(\kappa_A - \kappa) \frac{A_{23}}{A_{12}} + (1 - m_{22}) = \kappa \left(1 - \frac{1}{m_{22}}\right). \quad (5)$$

Рассмотрим графическое решение уравнения (4) относительно m_{22} . Теоретическая величина m_{22} может изменяться от нуля до минус бес.

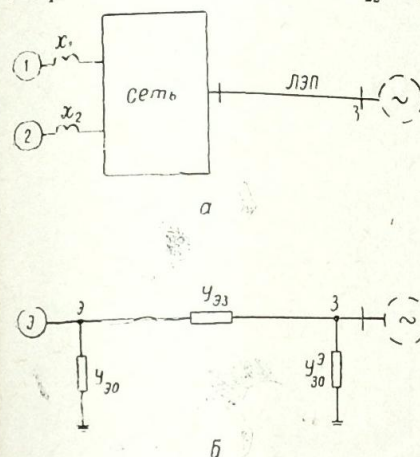


Рис. 2

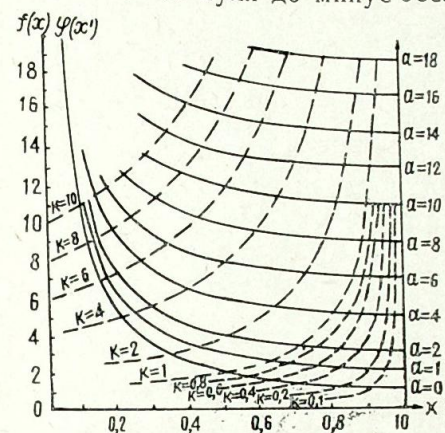


Рис. 3

конечности. Поэтому для удобства графического решения в уравнении (4) производим следующую замену:

$$x = \frac{1}{1 - m_{22}}. \quad (6)$$

Подставляя значения m_{22} из уравнения (6) в (4), а также вводя обозначения $(\kappa_A - \kappa) \frac{A_{23}}{A_{12}} = a$, получим

$$a + \frac{1}{x} = \frac{\kappa}{1 - x}.$$

На рис. 3 представлены зависимости $f(x) = a + \frac{1}{x}$ и $\phi(x) = \frac{\kappa}{1 - x}$

для различных значений a и κ . Абсцисса точки пересечения кривых $f(x)$ и $\phi(x)$ дает значение искомого x , следовательно m_{22} . Значение $f(x)$ и $\phi(x)$ дает значение определяет отношение мощностей первого и κ , которое приближенно определяет отношение мощностей эквивалентруемых источников, на рис. 3 выбрано в пределах $0,1 \div 10,0$ и охватывает все реальные соотношения мощностей эквивалентруемых источников. Коэффициент a может иметь значения от нуля до плюс бесконечности, причем положительность его обеспечивается правильной нумерацией источников 1 и 2. Таким образом, зная динамические параметры M_1, M_2 и режимные A_{12}, A_{13}, A_{23} , для исходной системы

вычисляются значения κ и a и далее из рис. 3 определяется x . Зная x , из уравнения (6) можно найти m_{22} .

Чтобы определить коэффициент распределения m_{21} , обратимся к условию ортогональности собственных (нормальных) колебаний из которого следует

$$m_{21} = -\frac{\kappa}{m_{22}}$$

или, учитывая выражение (6), имеем:

$$m_{21} = \frac{\kappa x}{1-x} \quad (7)$$

Подставляя значения коэффициентов амплитуд m_{22} , m_{21} из (6) и (7) в выражения колебания мощностей ΔP_{32} и ΔP_{31} , получим

$$\frac{\Delta P_{32}}{\Delta P_{31}} = \Delta = \frac{[(\kappa_A + 1)x - 1][\kappa + 1]x - 1}{\kappa_A - (\kappa_A - \kappa)x}$$

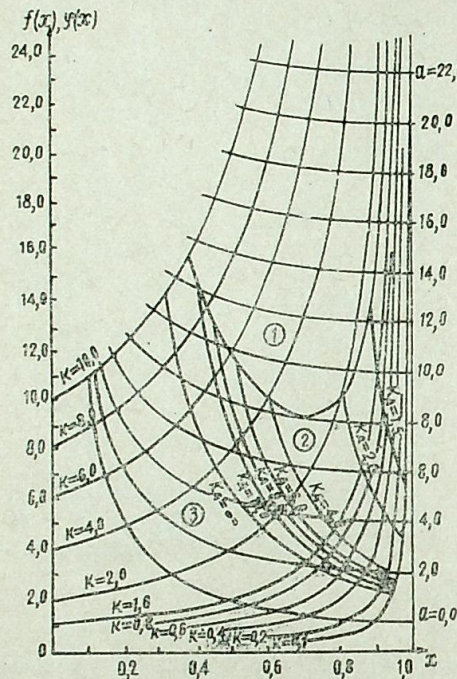


Рис. 4

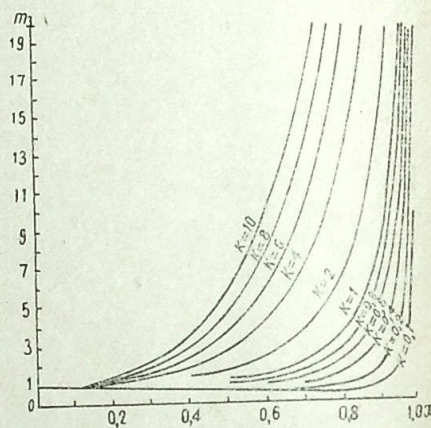


Рис. 5

Подставляя затем $\Delta=1$ и решая уравнение относительно x , найдем

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{\kappa + \kappa_A^2}{\kappa_A + 1}}}{\kappa_A + 1} \quad (8)$$

По уравнению (8) можно построить кривые зависимости между κ и x при различных значениях κ_A . Очевидно, они будут также кривыми для $\Delta=1$. Поэтому перенесением их на рис. 3 плоскость будет разделена на области $\Delta < 1$ и $\Delta > 1$ (т. е. $\Delta P_{32} < \Delta P_{31}$ и $\Delta P_{32} > \Delta P_{31}$) для каждого значения κ_A (рис. 4). Таким образом, определяя исходную точку на рис. 4, сразу же можно высказать суждение о том, какая из компонент выходной активной мощности является наибольшей.

На рис. 4 можно различить три области, контуры которых для наглядности обведены жирными линиями:

- | | |
|---|----------------|
| 1 | $-\Delta > 1;$ |
| 3 | $-\Delta < 1;$ |

в области 2 при определении Δ следует обратить внимание и на значение κ_A ; как видно из рисунка, кривые $\Delta=1$ для каждого значения κ_A делят эту область на две части. Левее от кривых $\Delta=1$ (для данном κ_A) кривые $\Delta=1$ перемещаются вправо и тем самым все больше сближаются к области $\Delta < 1$. При $\kappa_A \leq 1$ вся площадь рисунка относительной мощности A_{13} меньше (или равна), чем A_{23} , то у выходной активной мощности низкочастотный компонент всегда является преобладающим. Поэтому при $A_{13} \leq A_{23}$ эквивалентирование всегда следует производить по частоте ω_1 .

Теперь перейдем к определению параметров эквивалентной системы. Степень свободы ее равна единице, и она имеет одно свободное колебание с частотой ω_3 . По условию эквивалентности значение ω_3 принимается равным одной из собственных частот ω_1 и ω_2 исходной системы. Рассмотрим вначале случай, когда $\omega_3 = \omega_1$. Коэффициент амплитуды колебания эквивалентного источника, определяемый из идентичных начальных условий исходной и эквивалентной систем, имеет вид [2]

$$m_3 = \frac{m_{21} - m_{22}}{1 - m_{22}} \quad (9)$$

Подставляя значения m_{22} и m_{21} из выражений (6) и (7) в (9), получим

$$m_3 = 1 - x + \frac{\kappa x^2}{1-x} \quad (10)$$

Кривые $m_3 = f(x)$ представлены на рис. 5. Выражения M_3 и A_3 , определяемые из условия инвариантности кинетических и потенциальных энергий исходной и эквивалентной систем для данной частоты ω_1 , имеют вид [1, 2]:

$$M_3 = \frac{M_1 + m_{21}^2 M_2}{m_3^2}; \quad A_3 = \frac{A_{13} + A_{23} m_{21}^2 + A_{12} (1 - m_{21})^2}{m_3^2}$$

или в относительных единицах:

$$\bar{M}_3 = \frac{M_3}{M_1 + M_2} = \frac{\kappa + m_{21}^2}{(\kappa + 1)m_3^2}; \quad (11)$$

$$\bar{A}_3 = \frac{A_3}{A_{13} + A_{23}} = \frac{\kappa_A + m_{21}^2 + (1 - m_{21}) \frac{A_{12}}{A_{23}}}{(\kappa_A + 1)m_3^2}$$

Подставляя значения m_{21} , m_3 и $\frac{A_{12}}{A_{23}}$ из уравнений (7) (10) и (5) в (11), получим:

$$\bar{M}_3 = \frac{\kappa}{[(\kappa + 1)x - 1]^2 + \kappa};$$

$$\bar{A}_3 = \frac{\kappa_A - (\kappa_A - \kappa)x}{(\kappa_A + 1)[(1-x)^2 + \kappa x^2]}$$

Заметим, что к этим же выражениям мы придем, если величины M_3 и A_3 определять из условия инвариантности колебаний выходных активных мощностей.

На рис. 6 и 7 показаны кривые $\bar{M}_3 = f(x)$ и $\bar{A}_3 = f(x)$. Отметим, что при эквивалентировании источников с пропорциональными параметрами, когда имеет место $\kappa_A = \kappa$, кривые $\bar{A}_3$ рис. 7 совпадают с

соответствующими кривыми $\bar{M}_3$, рис. 6, но так как при этом $\alpha=0$, то указанные кривые превращаются в соответствующие точки с абсциссами, равными $x_{кр}$. При этом получаем $\bar{M}_3 = \bar{A}_3 = 1$

или $M_3 = M_1 + M_2; A_3 = A_{13} + A_{23}$.

Приведенные выше выражения и кривые для определения M_3 и A_3 были получены из условия инвариантности ω_1 и энергий на этой частоте исходной и эквивалентной простых систем.

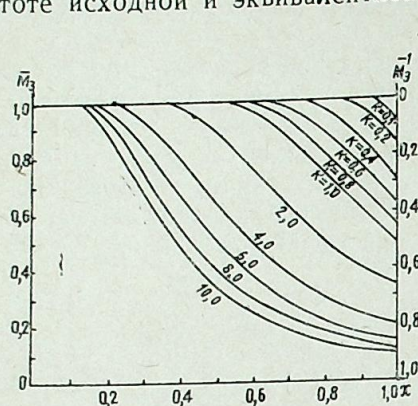


Рис. 6

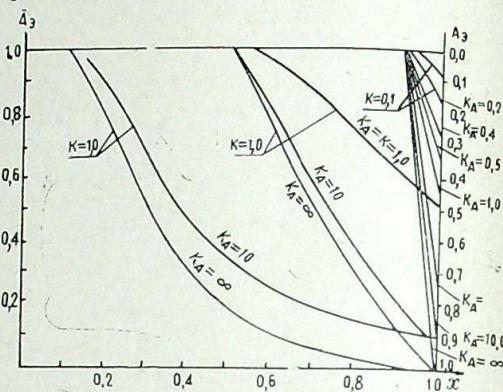


Рис. 7

Аналогично производится эквивалентирование и в случае, когда за основу принимается собственная частота ω_2 ($\omega_3 = \omega_2$). Выше эквивалентирование трехмашинной системы производилось при пренебрежении влиянием диссипативных сил системы. Аналогичные исследования выполнены также при учете этих сил.

Эквивалентирование многомашинной системы

Приведенная методика эквивалентирования трехмашинных электрических систем успешно может быть применена и для многомашинных систем [3]. Объем работы по эквивалентированию при этом значительно возрастает и применение современных вычислительных машин для этих целей становится весьма эффективным. Нами разработаны универсальный алгоритм и программа решения задач эквивалентирования на ЭЦВМ „Урал-2“ [4].

Подобная универсальная программа не только позволит определить статические и динамические параметры эквивалентной упрощенной системы, но и в значительной степени послужит исследовательским целям. В основе алгоритма лежат следующие предпосылки. Для неконсервативной системы как корни исходного уравнения сложной системы, так и коэффициенты распределения амплитуд колебаний являются комплексными числами. Возможность объединения ряда источников в один может быть оценена по матрице фаз коэффициентов распределения амплитуд колебаний. Объединению могут подлежать лишь те источники, для которых при заданной частоте и декременте затухания фазы коэффициентов распределения не отличаются на некоторую, наперед заданную величину. По значениям этих фаз определяется возможное количество группы источников, каждая из которых может быть представлена в виде одного эквивалентного источника.

Количественное определение основных динамических параметров эквивалентных источников каждой группы может быть произведено

по простым соотношениям, вытекающим из принятых критериев эквивалентности. Удельный демпфирующий момент эквивалентных источников определяется по известным соотношениям.

Блок-схема разработанной универсальной программы расчета статических и динамических параметров эквивалентной упрощенной системы содержит несколько этапов расчета, основными из которых являются:

- определение коэффициентов характеристического уравнения по заданной исходной системе уравнений сложной системы при использовании интерполяционной формулы Лагранжа;
- определение корней характеристического уравнения при использовании одного из существующих методов;
- вычисление матрицы коэффициентов распределения амплитуд колебаний для всех корней системы;
- логическая выборка станций, подлежащих объединению;
- определение статических параметров эквивалентных источников;
- определение динамических параметров эквивалентных источников;

Исходным материалом для программы являются коэффициенты исходной системы уравнений. Последняя записывается так, чтобы при необходимости легко можно было бы учесть (или, наоборот, отбросить) действие ряда факторов в системе (диссипативных сил, АРВ и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

- Гусейнов Ф. Г. „За технический прогресс“. 1964, № 12.
- Гусейнов Ф. Г., Сулейманлы Э. Г. Тр. АзНИИЭ, т. 17, 1967.
- Гусейнов Ф. Г. Тр. АзНИИЭ, т. XVI, 1964.
- Гусейнов Ф. Г., Гусейнов А. М. Методика эквивалентного упрощения многомашинной электрической системы с помощью ЦВМ. Материалы Всесоюзной конференции по применению методов кибернетики в энергетике. Тбилиси, 1967.

Ф. Н. Гусейнов

Мүрәккәб энергетик системләрин эквивалент садәләшдирилмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мүрәккәб elektrik системләрин садәләшдирилмәсинин әсасларына бахылмыш, мұхтәлиф синифли систем мәсәләләри үчүн эквивалентләшдирмә критеријалары гурулмуш вә онларын садәләшдирымә үсуллары верилмишдир.

Бундан башга, үчмашынлы консерватив вә гејри-консерватив системин эквивалентләшдирмә методу кениш шәрһ едилмиш, чохмашынлы системин вә комплекс јукүн әдәди һесаблајычы машин (ЕНМ) тәтбиг етмәклә садәләшдирилмәси методуна бахылмышдыр.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, В. Я. ШТЕЙНШРАЙБЕР

ПОЛЕ ВО ВКЛЮЧЕНИИ В ФОРМЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА ПРИ УЧЕТЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

При анализе процессов в газовых включениях в изоляции, процессов диэлектрической сепарации, контактной зарядки частиц на высоковольтном электроде в процессах электронно-ионной технологии нужно учитывать как диэлектрические проницаемости и объемные проводимости, так и поверхностную проводимость включения или частицы. В рассмотренных нами ранее случаях [1] сферического и цилиндрического включений (в последнем случае ось цилиндра перпендикулярна внешнему полю) поле внутри включения оставалось однородным и при учете поверхностной проводимости, в результате чего задача могла быть решена аналитически. Ниже предлагается численный метод, пригодный и для таких конфигураций включения, когда поле в нем неоднородно. Метод заключается в сведении задачи к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка и рассматривается на примере включения в форме эллиптического цилиндра с осью, перпендикулярной полю.

Сплюснутый эллиптический цилиндр

Пусть в неограниченном диэлектрике имеется включение в форме сплюснутого в направлении поля эллиптического цилиндра с полуосями m и n (рис. 1). Проницаемости и проводимости включения и среды равны ϵ_1 , γ_1 ; ϵ_2 , γ_2 ; поверхностная проводимость — γ_s . При отсутствии включения поле равно $E(t)$. Нужно рассчитать поле внутри включения и его зависимость от времени.

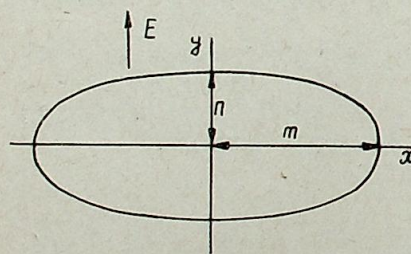


Рис. 1.

Задачу удобно рассматривать в эллиптических координатах (ξ, φ) , с которыми декартовы координаты (x, y) связаны соотношениями $x = a \operatorname{ch} \xi \cos \varphi$, $y = a \operatorname{sh} \xi \sin \varphi$ (a — половина расстояния между фокусами эллипса). На поверхности включения $\xi = a = \operatorname{Arch}(m/n)$.

Общее решение уравнения Лапласа в эллиптических координатах можно записать в виде [2]

$$V(\xi, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{sh} m\xi + B_m e^{-m\xi}) (C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi). \quad (1)$$

Из соображений симметрии потенциал на плоскости $y = 0$ постоянен; положим его равным нулю. Отсюда следует, что $V(\xi, 0) = 0$, т. е. коэффициенты $D_m = 0$ (и можно считать $C_m = 1$). Из симметрии потенциала относительно оси y имеем $V(\frac{\pi}{2} - \varphi) = V(\frac{\pi}{2} + \varphi)$, откуда вытекает, что в (1) нужно брать только члены с нечетными индексами. Поскольку на бесконечности поле становится однородным и равным E , то для внешней области $A_1 = -Ea$, $A_m = 0$ при $m \neq 1$. Таким образом, потенциал во внешней области следует искать в виде

$$V_2 = -Ea \operatorname{sh} \xi \sin \varphi + \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p-1} e^{-(2p-1)\xi} \sin(2p-1)\varphi. \quad (2)$$

Во внутренней области условие $V(y=0) = 0$ для участка оси x между фокусами дает $V(0, \varphi) = 0$, откуда $B_m = 0$, и потенциал для внутренней области можно записать в виде

$$V_1 = \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)\xi \sin(2p-1)\varphi. \quad (3)$$

Сопряжение потенциалов на границе раздела (при $\xi = a$) дает

$$B_{2p-1} e^{-(2p-1)a} = A_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)a + Ea \operatorname{sh} a \cdot \delta_{1p}, \quad (4)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$).

Для определения неизвестных коэффициентов в (2) и (3) следует записать уравнение непрерывности полного тока на границе раздела

$$\gamma_2 \frac{\partial V_2}{\partial \xi} - \gamma_1 \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \epsilon_2 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V_2}{\partial t \partial \xi} - \epsilon_1 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial \xi} + \frac{h_\xi}{h_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\gamma_s}{h_\varphi} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (5)$$

Здесь t — время; h_ξ и h_φ — коэффициенты Ламе

$$(h_\xi^2 = h_\varphi^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi);$$

все производные берутся при $\xi = a$. После подстановки в (5) выражений для V_1 и V_2 найдем (точкой обозначено дифференцирование по времени):

$$\begin{aligned} \gamma_2 \left[-Ea \operatorname{ch} a \sin \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) B_{2p-1} e^{-(2p-1)a} \sin(2p-1)\varphi \right] - \\ - \gamma_1 \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) A_{2p-1} \operatorname{ch}(2p-1)a \sin(2p-1)\varphi + \\ + \epsilon_2 \epsilon_0 \left[-Ea \operatorname{ch} a \sin \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) B_{2p-1} e^{-(2p-1)a} \sin(2p-1)\varphi \right] - \\ - \epsilon_1 \epsilon_0 \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) A_{2p-1} \operatorname{ch}(2p-1)a \sin(2p-1)\varphi + \\ + \gamma_s \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{a \sqrt{\operatorname{ch}^2 a - \cos^2 \varphi}} \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) A_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)a \cos(2p-1)\varphi \right] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножив (6) на $\frac{1}{\pi} \sin(2k-1)\varphi$ и проинтегрировав по φ от $-\pi$ до $+\pi$, с учетом (4) получим

$$\gamma_2 [Eae^2 \delta_{1k} + (2k-1) A_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)a] + \gamma_1 (2k-1) A_{2k-1} \operatorname{ch}(2k-1)a +$$

$$+ \varepsilon_2 \varepsilon_0 [\dot{E} a e^{\alpha} \delta_{1\kappa} + (2\kappa - 1) \dot{A}_{2\kappa-1} \operatorname{sh}(2\kappa - 1) \alpha] + \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_0 (2\kappa - 1) \dot{A}_{2\kappa-1} \operatorname{ch}(2\kappa - 1) \alpha + \\ + \frac{\gamma_s}{\pi a} \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1) A_{2p-1} \operatorname{sh}(2p - 1) \alpha I_{p\kappa} = 0, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

Через $I_{p\kappa}$ обозначены интегралы:

$$I_{p\kappa} = - \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(2\kappa - 1) \varphi \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{\cos(2p - 1) \varphi}{V \operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi} \right] d\varphi = \\ = \frac{2\kappa - 1}{2} \left[\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos 2(p - \kappa) \varphi}{V \operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi} d\varphi + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos 2(p + \kappa - 1) \varphi}{V \operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi} d\varphi \right].$$

Входящие сюда интегралы вида

$$I_s = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos 2s \varphi d\varphi}{V \operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi} = \frac{4}{\operatorname{ch} \alpha} \cdot (-1)^s \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2s \varphi d\varphi}{V 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \alpha}}$$

могут быть путем разложения $\cos 2s \varphi$ по степеням $\cos^2 \varphi$ сведены к интегралам

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2s} \varphi d\varphi}{V 1 - \frac{\sin^2 \varphi}{\operatorname{ch}^2 \alpha}}$$

Последние выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода [3] и могут быть легко рассчитаны по рекуррентной формуле. Однако коэффициенты разложения $\cos 2s \varphi$ по степеням $\cos^2 \varphi$ даже при умеренных значениях s велики, что делает весьма затруднительным расчет интегралов $I_{p\kappa}$ по описанному способу. Ввиду этого мы предпочли вычислять интегралы I_s численно (на ЦВМ) для ряда интересующих нас значений α ; интегралы $I_{p\kappa}$ находились по формуле:

$$I_{p\kappa} = (\kappa - 0,5) (I_{p-\kappa} + I_{p+\kappa-1}).$$

Для ускорения счета интегралов интервал интегрирования разбивали на участки, на каждом из которых подынтегральная функция сохраняла знак. Обозначив

$$E = E_0 \theta(t); \quad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \lambda; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \varepsilon; \quad \frac{\gamma_s}{\pi a \gamma_2} = \lambda_s; \\ \frac{\gamma_2 t}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} = \tau; \quad \frac{(2p - 1) A_{2p-1}}{E_0 a} = H_{2p-1}, \quad (8)$$

перепишем систему (7) в следующем виде:

$$H_{2\kappa-1} [\operatorname{sh}(2\kappa - 1) \varepsilon] + \lambda \operatorname{ch}(2\kappa - 1) \alpha + \dot{H}_{2\kappa-1} [\operatorname{sh}(2\kappa - 1) \alpha + \\ + \varepsilon \operatorname{ch}(2\kappa - 1) \alpha] + \lambda_s \sum_{p=1}^{\infty} H_{2p-1} \operatorname{sh}(2p - 1) \alpha I_{p\kappa} = \\ = - e^{\alpha} (\theta + \dot{\theta}) \delta_{1\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

(точка над буквой здесь обозначает дифференцирование по τ). Бесконечная система линейных дифференциальных уравнений (9) описывает поле в рассматриваемой задаче. Обрывая эту систему на некотором количестве уравнений, можно получить зависимость ряда первых коэффициентов $H_{2\kappa-1}$ от времени и по ним — интересующие нас значе-

ния потенциалов и напряженностей для любой точки поля. Количество нужных коэффициентов $H_{2\kappa-1}$ связано с требуемой точностью.

При анализе разрядов во включениях обычно принимается [4], что непосредственно после разряда поле во включении отсутствует. Поэтому начальным условием для системы (9) будет

$$H_{2\kappa-1}(0) = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что решение системы (9) при большом количестве уравнений может быть реализовано лишь на ЦВМ.

Для удобства интерпретации результатов, а также для приближенной выборки шага интегрирования целесообразно рассмотреть задачу о включении, поверхностная проводимость которого меняется вдоль поверхности по некоторому закону. А именно: чтобы и при однородном, положительном, по величине поле внутри включения было проводимость изменяется вдоль поверхности пропорционально h_{φ} , т. е.

$$\gamma_s(\varphi) = \frac{\gamma_0 h_{\varphi}}{a \operatorname{ch} \alpha}. \quad (11)$$

Так как на поверхности включения $h_{\varphi} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi}$, то у пологой вершины ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) $\gamma_s = \gamma_0$, а у острой ($\varphi = 0$) $\gamma_s = \gamma_0 \operatorname{th} \alpha = \gamma_0 \cdot \frac{n}{m}$.

Уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\gamma_2 \frac{\partial V_2}{\partial \xi} - \gamma_1 \frac{\partial V_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V_2}{\partial t \partial \xi} - \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial \xi} + \frac{h_{\varphi}}{h_{\varphi}} \cdot \frac{\gamma_0}{a \operatorname{ch} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 V_1}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (12)$$

Используя выражения (2) и (3) для потенциалов, получим вместо (6) уравнение:

$$\gamma_2 \left[- E a \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1) B_{2p-1} e^{-(2p-1)\alpha} \sin(2p - 1) \varphi \right] - \\ - \gamma_1 \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1) A_{2p-1} \operatorname{ch}(2p - 1) \alpha \sin(2p - 1) \varphi + \\ + \varepsilon_2 \varepsilon_0 \left[- \dot{E} a \operatorname{ch} \alpha \sin \varphi - \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1) \dot{B}_{2p-1} e^{-(2p-1)\alpha} \sin(2p - 1) \varphi \right] - \\ - \varepsilon_1 \varepsilon_0 \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1) \dot{A}_{2p-1} \operatorname{ch}(2p - 1) \alpha \sin(2p - 1) \varphi - \\ - \frac{\gamma_0}{a \operatorname{ch} \alpha} \sum_{p=1}^{\infty} (2p - 1)^2 A_{2p-1} \operatorname{sh}(2p - 1) \alpha \sin(2p - 1) \varphi = 0. \quad (13)$$

Аналогично вместо (7) мы приходим к системе

$$A_{2\kappa-1} \left[\gamma_2 \operatorname{sh}(2\kappa - 1) \alpha + \gamma_1 \operatorname{ch}(2\kappa - 1) \alpha + \frac{\gamma_0}{a \operatorname{ch} \alpha} \cdot (2\kappa - 1) \operatorname{sh}(2\kappa - 1) \alpha \right] + \\ + \dot{A}_{2\kappa-1} \cdot \varepsilon_0 [\varepsilon_2 \operatorname{sh}(2\kappa - 1) \alpha + \varepsilon_1 \operatorname{ch}(2\kappa - 1) \alpha] = - a e^{\alpha} (\gamma_2 E + \varepsilon_2 \varepsilon_0 \dot{E}) \delta_{1\kappa}, \\ \kappa = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Таким образом уравнения для разных $A_{2\kappa-1}$ оказываются несцепленными. Ввиду нулевых начальных условий для $A_{2\kappa-1}$ и отсутствия правых частей при $\kappa \neq 1$ все $A_{2\kappa-1}$ при $\kappa \neq 1$ будут устойчиво равняться нулю. Для единственного не равного нулю коэффициента A_1 остается уравнение

$$A_1 \left(\gamma_2 \operatorname{sh} \alpha + \gamma_1 \operatorname{ch} \alpha + \frac{\gamma_0}{a} \operatorname{th} \alpha \right) + \varepsilon_0 \dot{A}_1 (\varepsilon_2 \operatorname{sh} \alpha + \varepsilon_1 \operatorname{ch} \alpha) = \\ = - a e^{\alpha} (\gamma_2 E + \varepsilon_2 \varepsilon_0 \dot{E}). \quad (15)$$

Отсюда находим значение установившегося поля во включении на постоянном напряжении ($E=E_0$, $\dot{E}=0$):

$$E_1 = E_0 \cdot \frac{\gamma_2(m+n)}{\left(\gamma_2 + \frac{\gamma_0}{m}\right)n + \gamma_1 m} \quad (16)$$

и постоянную времени для переходного процесса (во введенном масштабе времени):

$$\tau = \left(1 + \varepsilon \cdot \frac{m}{n}\right) \left(1 + \frac{\gamma_0}{\gamma_2 m} + \frac{\gamma_1 m}{\gamma_2 n}\right)^{-1} \quad (17)$$

Остается решить вопрос о выборе γ_0 , поскольку для включений большой вытянутости разница в значениях γ_s в разных точках границы может быть согласно (11) весьма большой. Кажется целесообразным выбирать γ_0 из равенства сопротивлений по четверти эллипса. В случае зависимости (11) это сопротивление равно

$$R = \int \gamma_s^{-1} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{a \operatorname{ch} \alpha}{\gamma_0 h_\varphi} \cdot h_\varphi d\varphi = \frac{a \operatorname{ch} \alpha}{\gamma_0} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

В случае постоянной γ_s

$$R = \gamma_s^{-1} \int_0^{\pi/2} h_\varphi d\varphi = \frac{a}{\gamma_s} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \alpha - \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{a \operatorname{ch} \alpha}{\gamma_s} E\left(\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода. Приравнявая вычисленные сопротивления, найдем

$$\gamma_0 = \frac{\pi \gamma_s}{2} \frac{1}{E_0 \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right)} \quad (18)$$

Достоинством полученных в рассмотренном случае результатов является то, что они выражаются формулами. Вопрос о точности их будет обсужден ниже. Понятно, что ввиду исходного допущения (11), введенного для математического упрощения задачи, получить какую-нибудь информацию о степени и характере неоднородности поля во включении невозможно.

Доведем до численных результатов систему (9) для газового включения на постоянном напряжении ($\lambda=0$, $\theta=1$, $\theta=0$). В удобном для решения на ЦВМ виде система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{H}_{2k-1} = & - [\operatorname{sh}(2k-1)\alpha + \varepsilon \operatorname{ch}(2k-1)\alpha]^{-1} \times \\ & \times \left[H_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\alpha + \lambda_s \sum_{p=1}^{\infty} H_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)\alpha I_{pk} + \right. \\ & \left. + e^{\alpha} \delta_{1k} \right]; H_{2k-1}(0) = 0; k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Шаг по τ при решении (19) целесообразно выбирать на основе формулы (17). Решение системы (19) для широкого диапазона входящих в него параметров (ε ; λ_s ; α) требует слишком больших затрат машинного времени. Для подробного исследования распределения поля во включении была отдельно решена задача об установившемся режиме. Для этого случая получается система алгебраических уравнений:

$$H_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\alpha + \lambda_s \sum_{p=1}^{\infty} H_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)\alpha I_{pk} + e^{\alpha} \delta_{1k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Положив $H_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)\alpha = G_{2p-1}$, получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} (I_{pk} + \lambda_s^{-1} \delta_{pk}) G_{2p-1} = -e^{\alpha} \lambda_s^{-1} \delta_{1k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Решив эту систему, можно вычислить значения компонент напряженности в полости по формулам:

$$\frac{E_x}{E_0} = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{G_{2p-1} \operatorname{ch}(2p-1)\xi \sin(2p-1)\varphi}{\operatorname{sh}(2p-1)\alpha}, \quad (22)$$

$$\frac{E_y}{E_0} = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{G_{2p-1} \operatorname{sh}(2p-1)\xi \cos(2p-1)\varphi}{\operatorname{sh}(2p-1)\alpha}.$$

Исходя из симметрии, достаточно рассчитать поле только в первом квадрате. Для получения детальной информации о поле была выбрана густая "шахматная" сетка точек, в которых рассчитывалась напряженность.

Из (21) следует, что при больших λ_s решения (коэффициенты G_{2p-1}) пропорциональны λ_s^{-1} . Следовательно, при этом и потенциалы и напряженности пропорциональны λ_s^{-1} . Из физических соображений следует, что в этом случае неоднородность поля во включении максимальна. По мере уменьшения λ_s неоднородность уменьшается и при $\lambda_s=0$ поле становится однородным. Для оценки максимальной неоднородности поля и рассматривался случай $\lambda_s^{-1}=0$. Для выяснения вопроса о том, сколько уравнений следует взять в (21), чтобы получить приемлемую точность, эта система предварительно решалась при разном количестве уравнений. Обнаружено, что даже при $\frac{m}{n}=100$ и $\lambda_s^{-1}=0$ шести уравнений достаточно, чтобы на участке горизонтальной полуоси от центра до $x=0,9m$ получить напряженность с погрешностью не больше 1%. По мере приближения к вершине $x=m$ погрешность возрастает и поэтому система (21) решалась для 20 уравнений при $\frac{m}{n} \geq 5$. В случае $\frac{m}{n}=2$ интегралы I_{pk} так быстро стремились к нулю с ростом p и k , что не имело смысла брать больше 7 уравнений.

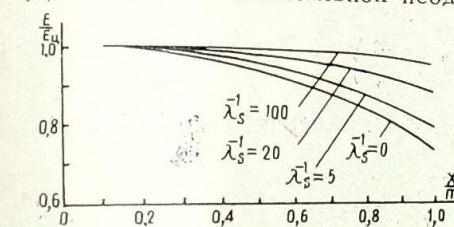


Рис. 2. ($m/n=2$)

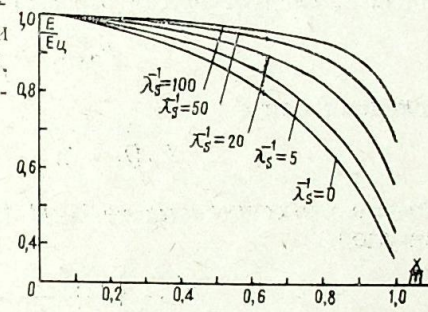


Рис. 3. ($m/n=5$)

В результате расчетов получены зависимости напряженности вдоль полуоси m , некоторые из которых представлены на рис. 2—4 (по оси ординат отложено отношение напряженности в данном месте к таковой в центре включения). Поле вдоль вертикальной оси включения согласно результатам расчетов можно считать практически однородным. Поскольку при $\frac{m}{n} \rightarrow \infty$ и $\frac{m}{n} \rightarrow 1$ поле вдоль вертикальной

оси однородно, то при некотором соотношении полуосей должна иметь место максимальная вдоль малой оси неоднородность. Такой максимум обнаружен при $\frac{m}{n} \approx 1,7$, но и в этом случае напряженность поля у вершины всего на 6% больше напряженности в центре.

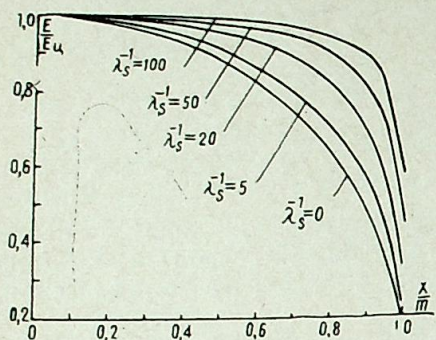


Рис. 4. ($m/n=10$)

Общее представление о картине силовых линий во включении дает рис. 5. Расчеты показали, что при значительных вытянутостях искривление силовых линий происходит лишь у самого края включе-

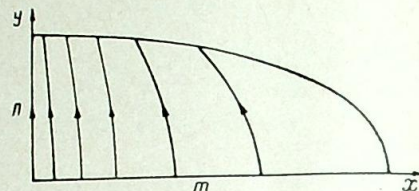


Рис. 5

ния. Для сопоставления напряженностей в центрах включения при разных λ_s следует ввести относительную напряженность:

$$E_{\text{н.отн.}} = \frac{E_{\text{ц}}}{E_{\text{ц}}(\lambda_s = 0)}.$$

Последняя равна

$$E_{\text{ц}}(\lambda_s = 0) = E_0 \left(1 + \frac{m}{n}\right).$$

Сравнение рассчитанных на ЦВМ $E_{\text{н.отн.}}$ с вытекающей из (16) и (18) формулой

$$E'_{\text{отн.}} = \left[1 + \frac{\pi^2 \lambda_s}{2 \operatorname{ch} \alpha E \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right)}\right]^{-1} \quad (23)$$

показывает, что погрешность последней растет с ростом $\frac{m}{n}$ и λ_s , т. е. при увеличении степени неоднородности поля, и достигает при $\frac{m}{n} = 100$ и малых λ_s 30%.

Результаты точного расчета удалось представить в виде полумпирической формулы, аналогичной (23):

$$E_{\text{н.отн.}} = \frac{1}{1 + A \lambda_s}, \quad (24)$$

где значение A для разных $\frac{m}{n}$ следует выбирать из таблицы:

m	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	5	10	20	50	100
A	1,40	1,97	2,74	3,28	3,69	4,02	5,66	6,07	6,22	6,27	6,28

При этом погрешность формулы (24) в диапазоне $\frac{m}{n}$ от 1,1 до 100 не превышает 1,5% при любых значениях λ_s .

Переходный процесс во включении исследовался нами для $\frac{m}{n} = 100$ и $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 2$ и 4. Решалась система из 6 уравнений. Оказалось, что процесс изменения напряженности мало отличается от экспоненциального, ввиду чего постоянная времени определялась как время, в течение которого напряженность от нуля дойдет до $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ от своего установившегося значения. По мере удаления от центра постоянная времени уменьшается.

Для практических применений наиболее важна постоянная времени для центра поры. Вытекающая из (17) и (18) формула

$$\tau = \tau_0 \left[1 + \frac{\pi^2 \lambda_s}{2 \operatorname{ch} \alpha E \left(\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right)}\right]^{-1} \quad (25)$$

где $\tau_0 = 1 + \frac{m}{n}$ — постоянная времени для включения с $\lambda_s = 0$, дает (по сравнению с точным расчетом) ошибку до 35%.

Значительно лучше (с погрешностью не более 10%) согласуется с точными τ формула

$$\tau = \tau_0 (1 + A \lambda_s)^{-1} \quad (26)$$

где A берется из приведенной таблицы.

Вытянутый эллиптический цилиндр

Задачу можно рассматривать в той же системе координат. Общее решение уравнения Лапласа здесь удобнее записать в виде

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \operatorname{ch} m \xi + B_m e^{-m \xi}) (C_m \sin m \varphi + D_m \cos m \varphi). \quad (27)$$

Для потенциалов во внешней и внутренней областях найдем:

$$V_2 = -Ea \operatorname{ch} \xi \cos \varphi + \sum_{p=1}^{\infty} B_{2p-1} e^{-(2p-1)\xi} \cos (2p-1) \varphi, \quad (28)$$

$$V_1 = \sum_{p=1}^{\infty} A_{2p-1} \operatorname{ch} (2p-1) \xi \cos (2p-1) \varphi.$$

В прежних обозначениях после аналогичных выкладок получим

$$H_{2\kappa-1} [\lambda \operatorname{sh} (2\kappa-1) \alpha + \operatorname{ch} (2\kappa-1) \alpha] + H_{2\kappa-1} [\varepsilon \operatorname{sh} (2\kappa-1) \alpha + \operatorname{ch} (2\kappa-1) \alpha] + \lambda_s \sum_{p=1}^{\infty} H_{2p-1} \operatorname{ch} (2p-1) \alpha I'_{\text{рк}} = -e^{\alpha} (\theta + \dot{\theta}) \delta_{1\kappa}, \quad (29)$$

$\kappa = 1, 2, 3, \dots$

где теперь

$$I'_{\text{рк}} = (\kappa - 0,5) (I_{p-\kappa} - I_{p+\kappa-1}).$$

Для установившегося режима, обозначив $H_{2\kappa-1} \operatorname{ch} (2\kappa-1) \alpha = G_{2\kappa-1}$, придем к системе алгебраических уравнений, совпадающей по виду с (21). При условии (11) для $E_{\text{отн.}}$ и τ опять придем к формулам (23) и (25), только теперь

$$E_{\text{ц}}(\lambda_s = 0) = E_0 \left(1 + \frac{n}{m}\right) \text{ и } \tau_0 = 1 + \varepsilon \cdot \frac{n}{m}.$$

Сопоставление с точными расчетами показывает, что теперь макси-

мальные погрешности формул (23) и (25) составляют соответственно 35 и 25% ($\frac{m}{n} = 100$, $\varepsilon = 4$). Формулы же (24) и (26) дают погрешность не хуже 5%, если A брать из ниже приведенной таблицы:

m	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	5	10	20	50	100
A	1,33	1,80	2,32	2,61	2,78	2,89	3,13	3,14	3,14	3,14	3,14

Поле вдоль малой оси практически однородно; максимальная неоднородность (при $\frac{m}{n} = 1$, $\lambda_s^{-1} = 0$) составляет всего 6%. Неоднородность поля вдоль большой оси растет с увеличением вытянутости и ростом поверхностной проводимости.

Выводы

1. Предложен численный метод расчета поля во включении, при учете поверхностной проводимости, когда поле во включении становится неоднородным.
2. На основе предложенного метода впервые рассчитано распределение поля во включении в форме эллиптического цилиндра при постоянном напряжении.
3. Предложены полуэмпирические формулы для расчета поля в центре включения и постоянной времени переходного процесса.
4. Полученные результаты могут быть использованы при анализе процессов, происходящих в изоляции под действием постоянного напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, В. Я. Штейншрайбер. Поле в сферическом и цилиндрическом включениях в диэлектрике при учете поверхностной проводимости. Электронная обработка материалов № 6, 1959.
2. Ф. М. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики. ИЛ, М., 1960.
3. И. С. Грашштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, М., 1962.
4. Ю. М. Волокобинский. Некоторые вопросы теории пробоя неоднородных диэлектриков. ЖФТ, 26, 374 (1955).
5. E. C. Rogers, D. J. Skipper. Gaseous discharge phenomena in high-voltage d. c. cable dielectrics. Proc. SEE, 107, № 33, 241 (1960).

Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхайзер, В. Я. Штейншрайбер

Сәтһ кечиричилијинин нәзәрә алынмасы шәртилә мәсамәдә
еллиптик цилиндршәкилли саһә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сәтһ кечиричилијинин нәзәрә алынмасы шәртилә диэлектрик мәсамәсиндә бирчинсли олмајан саһәнин һесаблинамасы үсулу верилмишдир. Үсулун мәзмуну мәсәләни бир дәрәчәли хәтти дифференциал тәнликләрин сонсуз системинә кәтирмәкдән ибарәтдир. Сәбит кәркинликдә мәсамәдә гәрарлашмыш режим чәбри тәнликләрин сонсуз системи илә ифадә олунур. Үсул харичи саһәјә перпендикулјар оху олан еллиптик цилиндршәкилли мәсамә мисалында верилмишдир. Сәбит кәркинликдә саһәнин пәјланмасы вә кечид просеси үчүн заман сабитинин һесаблинамасы мәсамәнин боју үзрә олмагла, диэлектрикин һәчм кечиричилији, мәсамәнин сәтһ кечиричилији вә онун өлчүләри арасындакы асылылыгларын мүхтәлиф гijмәтләриндә апарылмышдыр. Һесабламаларын әсасында мәсамәнин мәркәзиндә гәрарлашмыш саһәнин һесабатыны апармаг вә заман сабитинин гijмәтини тапмаг үчүн јарымемпирик дүстурлар тәгдим едилмишдир.

М. А. БАГИРОВ, В. П. МАЛИН

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СТАРЕНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

В настоящее время электрическая изоляция из полимерных материалов широко применяется в электротехнике и радиотехнике. В процессе эксплуатации с течением времени диэлектрические свойства такой изоляции ухудшаются вследствие старения полимера, что может привести к ее преждевременному пробое.

Установлено [1, 2], что в сильных электрических полях ухудшение диэлектрических свойств полимерной изоляции происходит в основном, за счет ионизационных процессов, развивающихся в воздушных включениях и порах внутри изоляции (в таких условиях имеет место так называемое электрическое или ионизационное старение полимеров). В связи с этим представляет значительный интерес изучение изменений диэлектрических свойств полимерных материалов под действием электрических разрядов в газовой полости, граничащей с полимером, что соответствует моделированию ионизационного старения полимера в лабораторных условиях.

В данной статье приводятся результаты исследования действия электрических разрядов на диэлектрические свойства: тангенс угла потерь $\operatorname{tg} \delta$, диэлектрическую проницаемость ε , удельное объемное сопротивление ρ_v , пробивное напряжение $U_{пр}$, а также на структуру полимеров.

Экспериментальная часть

Ионизационное старение полимерных пленок производили в специально разработанной испытательной ячейке плоскостного типа, состоящей из нижнего заземленного металлического электрода, на который помещали образец полимерной пленки, газового зазора толщиной 1,5 мм и стеклянной пластины толщиной также 1,5 мм. Верхним высоковольтным электродом служил напыленный на стеклянную пластину слой серебра.

Электрические разряды возникали в газовом зазоре между стеклянной пластиной и полимерной пленкой. Электрическое старение полимерных пленок проводили при напряжениях на испытательной ячейке от 1 до 11 кВ. Напряжение, при котором в газовом зазоре ячейки зажигался разряд, определялось по вольтамперной характеристике разряда и составляло 4,3 кВ*.

Испытания проводили в средах воздуха, кислорода и азота; азот предварительно очищали от имеющегося в нем небольшого процента

*В дальнейшем вместо термина «напряжение на испытательной ячейке» будем употреблять для краткости «напряжение старения».

кислорода пропусканием через печь с медной проволокой, нагретой до 700°C. После испытания образцы сушили над прокаленным CaCl_2 до постоянного веса. Диэлектрические потери и емкость испытуемых образцов измеряли с помощью моста МЛЕ-1 в диапазоне частот 0,4÷10 кГц и интервале температур от 20 до 180°C; ρ_v определяли с помощью термометра Е6-3 при постоянном напряжении, кратковременное пробивное напряжение измерялось с помощью высоковольтной пробивной установки УПУ-1. Толщину образцов определяли прибором ИЗВ-2. За значение $\text{tg}\delta$, емкости и ρ_v после каждого режима испытаний брали среднее арифметическое из результатов пяти измерений, величину $U_{\text{пр}}$ находили из результатов 10 измерений, значение толщины h — из 50 измерений.

Инфракрасные спектры образцов снимали с помощью спектрографа ИКС-14. В качестве объектов исследования служили промышленные пленки полиэтилена (ПЭ) толщиной 55 мкм, полистирола (ПС) толщиной 20 мкм, полиэтилентерефталата (ПЭТФ) толщиной 20 мкм и политетрафторэтилена (ПТФЭ) толщиной 35 мкм.

Результаты и их обсуждение

Полиэтилен, полистирол и политетрафторэтилен относятся к неполярным полимерам. Поэтому $\text{tg}\delta$ их очень мал ($\sim 10^{-4}$) и слабо зависит от частоты и температуры измерения; только у ПС выше температуры стеклования находится заметная область потерь, и $\text{tg}\delta$ в максимуме этой области составляет $\sim 3 \cdot 10^{-3}$. Указанная область потерь относится к дипольно-сегментальным потерям (ДСП) и обусловлена движением кинетических сегментов макромолекул ПС (величина $\text{tg}\delta$ в максимуме ДСП у ПЭ и ПТФЭ не превышает $4 \cdot 10^{-4}$ [3, 4], что лежит в пределах погрешности использованного нами измерительного моста). Диэлектрическая проницаемость этих полимеров также слабо зависит от частоты и температуры.

ПЭТФ является полярным полимером ($\text{tg}\delta \sim 10^{-3}$) с тремя областями диэлектрических потерь [5]: 1) высокочастотной, обусловленной движением ОН групп; 2) ДСП; 3) низкочастотной, представляющей собой потери на проводимость и обусловленной движением ионов примесей. В исследованный нами диапазон температур и частот попадали участок спада высокочастотной области, ДСП и начало низкочастотной области.

После электрического старения в воздухе и кислороде в температурной зависимости $\text{tg}\delta$ всех перечисленных полимеров наблюдается появление новой области диэлектрических потерь в интервале 20÷80°C [6—8], причем температура максимума этой области практически не зависит от частоты измерения. На рис. 1 представлена типичная зависимость $\text{tg}\delta$ от температуры для пленки ПС. Величина $\text{tg}\delta$ в максимуме этой области значительно снижается после промывки или прогрева состарившегося образца. Можно предположить, что новая область потерь обусловлена появлением в образце под действием разрядов низкомолекулярных соединений с низкой температурой плавления; наблюдаемая температура максимума $\text{tg}\delta$ по существу является температурой их плавления.

В температурной зависимости $\text{tg}\delta$ пленки ПЭТФ при больших напряжениях старения появляется еще одна область потерь (при 60÷120°C), обладающая аналогичным поведением [6]. Вероятно, благодаря сложному строению макромолекулы ПЭТФ в нем под действием электрических разрядов образуется несколько разных видов низкомолекулярных соединений с различной температурой плавления и, следовательно, с различной температурой наблюдаемого максимума диэлектрических потерь.

Новые области потерь не заметны у образцов полимерных пленок, подвергшихся электрическому старению в среде азота, но наблюдаются у образцов пленок ПЭ и ПС, подвергнутых выдержке в озоне. Эти факты позволяют предположить, что новые области потерь связаны с кислородсодержащими низкомолекулярными соединениями; у озонированных образцов пленок ПЭТФ и ПТФЭ они отсутствуют вследствие большой стойкости этих материалов к окислительной деструкции.

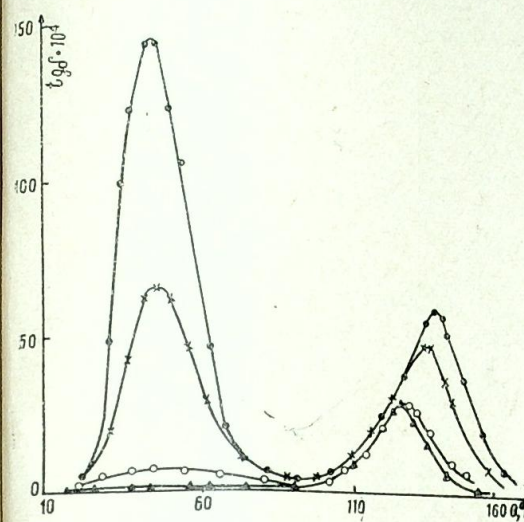


Рис. 1. Температурная зависимость $\text{tg}\delta$ пленки ПС ($f=1$ кГц): × — исходная; ● — после электрического старения на воздухе ($U_{\text{ст}}=9$ кВ, $t_{\text{ст}}=15$ ч); ○ — после старения в азоте ($U_{\text{ст}}=9$ кВ, $t_{\text{ст}}=15$); × — после озонирования.

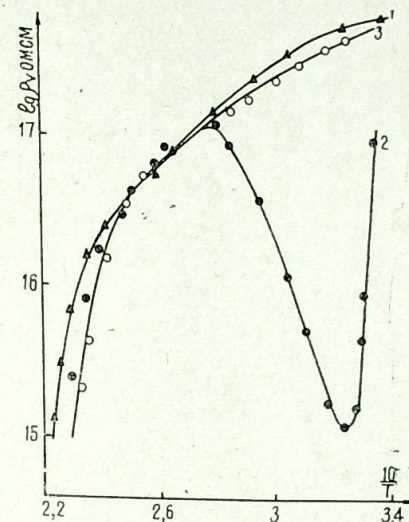


Рис. 2. Температурная зависимость $\epsilon g \rho_v$ пленки ПС: 1 — исходная; 2 — $U_{\text{ст}}=7$ кВ, $t_{\text{ст}}=30$ ч; 3 — $U_{\text{ст}}=7$ кВ, $t_{\text{ст}}=30$ ч с предварительным прогревом в течение двух часов при 60°C.

$\text{tg}\delta$ в максимуме ДСП пленки ПС как после воздействия электрических разрядов в кислородсодержащей среде, так и после озонирования растет по величине, причем область максимума смещается в сторону более высоких температур (рис. 1). Сдвиг максимума ДСП в сторону более высоких температур при той же частоте измерения означает увеличение времени релаксации кинетических сегментов, т. е. уменьшение их подвижности.

Уменьшение подвижности вызвано поперечной сшивкой макромолекул ПС, приводящей к появлению в образце нерастворимого осадка — геля-фракции. У пленки ПЭТФ, в которой сшивки макромолекул не происходит, сдвига максимума $\text{tg}\delta$ ДСП не наблюдается [6]. При электрическом старении в азоте величина и положение максимума ДСП пленки ПС не изменяются, что, вероятно, также связано с окислительными процессами в полимере.

Под действием электрических разрядов в присутствии кислорода диэлектрическая проницаемость ϵ пленок ПЭ, ПС и ПЭТФ возрастает, в то время как ϵ пленки ПТФЭ практически не изменяется (табл.). При старении в азоте изменения ϵ не наблюдается. Это означает, что увеличение ϵ связано с процессами окисления образцов; так как ПТФЭ очень устойчив к окислению, то и ϵ его практически не меняется. При озонировании ϵ пленок ПЭ и ПС после начального периода быстрого увеличения при дальнейшей выдержке в озоне не меняется, т. е. по истечении некоторого времени окисление прекращается.

При электрическом старении через некоторый интервал времени в течение которого проницаемость остается постоянной, наблюдается

Изменение диэлектрической проницаемости ϵ пленок ПЭ, ПС, ПЭТФ и ПТФЭ в зависимости от времени электрического старения в воздухе и озонирования

$t_{\text{ст}},$ часы	Электрическое старение				Озонирование	
	ПЭ $U_{\text{ст}} = 9 \text{ кВ}$	ПС $U_{\text{ст}} = 9 \text{ кВ}$	ПЭТФ $U_{\text{ст}} = 10 \text{ кВ}$	ПТФЭ $U_{\text{ст}} = 7 \text{ кВ}$	ПЭ	ПС
0	2,43	2,86	3,52	2,06	2,43	2,82
5	2,60	2,97	3,96	2,05	2,66	2,86
10	2,65	3,04	4,05	2,06	2,65	2,96
15	2,65	3,17	4,08	2,06	2,68	
20	2,65	3,27	4,17	2,07	2,67	3,19
30	2,77	3,42	4,25		2,68	3,34
40		3,54			2,69	
50	2,92					3,35

новый ее рост, вероятно, связанный с тем, что под действием электрических разрядов в образце пленки появляются каверны, впадины, и толщина пленки в этих местах становится значительно меньше средней толщины образца, используемой при вычислении ϵ , что приводит к кажущемуся увеличению ϵ . С течением времени старения толщина образца в этих местах все более уменьшается и ϵ возрастает.

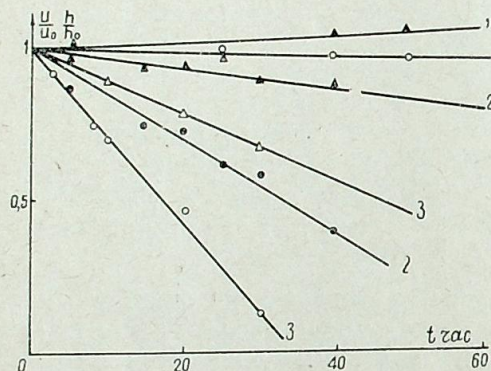


Рис. 3. Изменение пробивного напряжения $U_{\text{пр}}$ и толщины h пленки ПС при ионизационном старении и озонировании: 1—озонирование; электрическое старение в воздухе; 2— $U_{\text{ст}}=7 \text{ кВ}$, $\theta_{\text{ст}}=30^\circ\text{C}$; 3— $U_{\text{ст}}=11 \text{ кВ}$, $\theta_{\text{ст}}=30^\circ\text{C}$.

После действия электрических разрядов в воздухе температурная зависимость удельного объемного сопротивления ρ_v пленки ПС существенно изменяется: в интервале температур $20\div 80^\circ\text{C}$ оно проходит через резко выраженный минимум (рис. 2). Величина ρ_v в минимуме после промывки состаренного образца или прогрева его возрастает, стремясь к значению для исходного образца. Вероятно, минимум вызван теми же причинами, что и область диэлектрических потерь в интервале $20\div 80^\circ\text{C}$ (рис. 1). Действительно, в [11] установлено, что для полимеров в интервале температур, соответствующем максимуму диэлектрических потерь, удельное сопротивление проходит через минимум.

Кратковременное пробивное напряжение $U_{\text{пр}}$ пленок ПЭ и ПС с течением времени старения уменьшается по линейному закону с тем большей скоростью, чем больше напряжение старения (рис. 3). Для пленок ПТФЭ и ПЭТФ зависимость $U_{\text{пр}}$ от времени старения имеет нелинейный характер; в первые часы старения $U_{\text{пр}}$ уменьшается быстрее, чем в последующее время (рис. 4). Одновременно с уменьше-

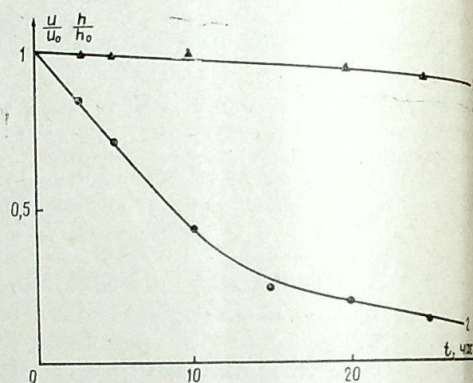


Рис. 4. Изменение пробивного напряжения $U_{\text{пр}}$ и толщины h пленки ПТФЭ при электрическом старении в воздухе ($U_{\text{ст}}=9 \text{ кВ}$, $\theta_{\text{ст}}=30^\circ\text{C}$).

нием пробивного напряжения убывает и толщина образцов вследствие равномерного разрушения (эрозии) полимерных пленок под действием разрядов в воздухе (рис. 3, 4). Толщина со временем старения убывает по линейному закону со скоростью, возрастающей с напряжением старения, как это было уже установлено в работе [11]. В то же время результаты наших опытов не подтверждают заключение, сделанное в [11] о том, что основным процессом, вызывающим уменьшение $U_{\text{пр}}$, является эрозия: скорость понижения $U_{\text{пр}}$ при всех испытаниях значительно больше скорости убывания толщины. Вероятно, свой вклад в уменьшение $U_{\text{пр}}$ вносит и снижение внутренней электрической прочности полимера. Следует отметить, что заметное убывание толщины и пробивного напряжения полимерных пленок наблюдается только при ионизационном старении в среде, содержащей кислород [11]; действие же только стабильных газовых продуктов разряда: озона и окислов азота—несколько увеличивает толщину образца и незначительно понижает $U_{\text{пр}}$ (рис. 3). Таким образом для значительной эрозии и уменьшения $U_{\text{пр}}$ необходимо совместное действие как химического, так и электрического факторов.

Из вышесказанного следует, что изменения диэлектрических свойств полимерных диэлектриков связаны с химическими и структурными изменениями, происходящими в полимерных пленках под действием электрических разрядов. Инфракрасные (ИК) спектры образцов полимерных пленок, подвергнутых действию электрических разрядов в воздухе, показывают, что в ПЭ появляются карбонильные группы (полоса ИК поглощения при 1720 см^{-1}), гидроксильные группы ОН ($3200\text{—}3600 \text{ см}^{-1}$), эфирные и кетозфирные мостики ($1170\text{—}1190 \text{ см}^{-1}$), эфиры азотной кислоты ($857, 1630 \text{ см}^{-1}$), двойные связи $\text{C}=\text{C}$ (1640 см^{-1}), а в ПС—карбонильные, гидроксильные, эфирные и нитрогруппы (1554 см^{-1}) [12].

Рост интенсивности полос поглощения при 1376 см^{-1} указывает на увеличение в пленках ПЭ и ПС количества метильных концевых групп CH_3 , т. е. на происходящий в пленках процесс деструкции полимерных цепей. Менее заметны изменения в ИК спектрах пленок ПТФЭ и ПЭТФ. В образцах пленки ПТФЭ после электрического старения появляются гидроксильные группы ОН ($3600\text{—}2800 \text{ см}^{-1}$), внутренние двойные связи вида $\text{RCF}=\text{CFR}$ (1730 см^{-1}), где R—фторуглеродные радикалы, увеличивается число концевых групп CF_3 (1400 см^{-1}).

Если сопоставить ИК спектры образцов пленок ПЭ и ПС, подвергнутых действию электрических разрядов в воздухе, со спектрами образцов этих же пленок, подвергнутых выдержке в озоне, то можно убедиться в том, что единственным различием в спектре образцов после озонирования будет отсутствие полос поглощения гидроксильных групп и эфиров азотной кислоты [8]. При электрическом старении в азоте заметных изменений в ИК спектрах полимерных пленок не наблюдалось. Таким образом, окисление полимеров под действием электрических разрядов в основном обусловлено действием озона. Однако существует большое различие во временной зависимости химических изменений полимерных пленок при электрическом старении и при озонировании.

Кроме окисления, в пленках ПЭ и ПС под действием электрических разрядов происходят также процессы сшивания и деструкции полимерных макромолекул, проявляющиеся в изменении молекулярного веса и увеличении числа концевых групп [10]. Сшивка полимерных макромолекул приводит к появлению в образцах нерастворимого осадка—гель-фракции, т. е. к образованию пространственных структур.

Имеется существенное различие между закономерностями образования гель-фракции в полимерах под действием электрических разрядов и при облучении частицами высокой энергии. Если при облучении

тонких пленок (до 175 мкм) гель-фракция в большом количестве образуется только при испытаниях в вакууме или бескислородной среде, а при облучении в присутствии кислорода доминирует процесс деструкции полимерных цепей [13], то при электрическом старении значительное образование гель-фракции наблюдается только при испы-

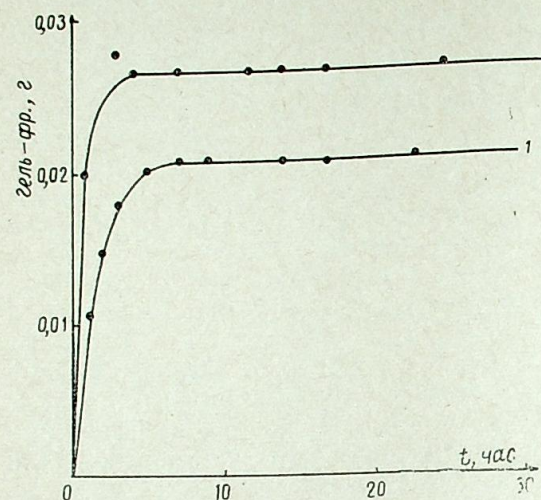


Рис. 5. Зависимость количества гель-фракции в пленке ПС от времени электрического старения:

1— $U_{ст}=6$ кВ; 2— $U_{ст}=9$ кВ.

действием электрических разрядов в воздухе отличаются лишь тем, что в спектре последней заметна полоса поглощения гидроксильных групп. За исключением полос, принадлежащих полистиролу, в спектре гель-фракции можно отметить полосы поглощения карбонильных групп, эфирных и кетозэфирных мостиков [15].

Можно заключить, что если при облучении полимеров частицами высокой энергии сшивка макромолекул происходит по углерод-углеродному механизму (через связи C—C), то при электрическом старении, как и при озонировании, через эфирные (т. е. кислородные) мостики C—O—C, причем основным сшивающим фактором является озон. Аналогичные результаты получены и для пленки ПЭ.

Тот факт, что при электрическом старении интенсивность поглощения новых полос и количество гель-фракции с течением времени старения достигают постоянного значения, в то время как интенсивность полос полимера и толщина образца непрерывно уменьшаются, свидетельствует в пользу предположения, что химические и структурные изменения охватывают не весь образец, а локализованы в тонком поверхностном слое. По мере удаления этого слоя вследствие эрозии процессы сшивания и окисления охватывают более глубокие слои полимера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ренне В. Т. Электрические конденсаторы. Госэнергоиздат, 1959.
2. Беркс Дж. Б., Шульман Дж. Г. Прогресс в области диэлектриков, т. I. Госэнергоиздат, 1962.
3. Михайлов Г. П., Борисова Т. И. УФН, 83, 63, 1964.
4. Михайлов Г. П., Лобанов А. М., Шевелев В. А., Орлова Т. П. Высокомолекулярные соединения, 6, 868, 1964.
5. Reddish W. Trans. Farad. soc., 46, № 330, 1950.

6. Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 65, 1966, № 5.
7. Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 101, 1967 №1.
8. Багиров М. А., Малин В. П., Газарян Ю. Н., Волченков Е. Я. Пластмассы, 44, 1970, № 2.
9. Багиров М. А., Газарян Ю. Н., Малин В. П. Пластмассы, 18, 1968, № 9.
10. Abasov S. A., Bagirov M. A., Wolchenkov E. Y., Guseinov T. J., Klimova N. V., Malin W. P. Plaste und Kautsch. 15, 184, 1968.
11. Койков С. Н., Парибок В. А. Вопросы радиоэлектроники, серия 3, вып. 1, 97, 1965.
12. Багиров М. А., Волченков Е. Я., Малин В. П. Тр. конференции молодых ученых и аспирантов, 129, Баку, 1966.
13. Alexander P., Toms D. J. Polymer sci., 22, 343, 1956.
14. Чарлзби А. Ядерные излучения и полимеры. ИЛ, 1962.
15. Багиров М. А., Малин В. П., Волченков Е. Я., Газарян Ю. Н. Высокомолекулярные соединения 11А, 2323, 1969.

Поступило 4. VII 1969

М. А. Багиров, В. П. Малин

Полимер диэлектриклэрин електрик көһнэлмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә електрик бошалмаларынын тәсири алтында бир сыра полимерлэрин диэлектрик хассэлэри (диэлектрик итки бучагынын танкенси $\lg \delta$, диэлектрик нүфузетмә габилијјети ϵ , хусуси һәчми мугавимәт ρ_v , дешилмә кәркинлији $U_{деш}$) вә гурулушларынын дәјишилмәсинин тәдгигинин нәтичэлэри верилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, диэлектрик хассэлэринин һисс олуначаг дәрәчәдә дәјишилмәси електрик көһнэлмәсинин јалныз оксикен олан мүһитдә апарылмасы заманы мүшаһидә олуноур.

Електрик бошалмаларынын тәсири алтында полимер зәнчирлэринин оксидләшмәси, деструксијасы вә тикилмәси баш верир ки, бу процесләр дә полимерлэрин диэлектрик хассэлэринин дәјишилмәсинә кәтириб чыхарыр.

А. Х. САЛИМОВ, М. А. ТАИРОВ, К. Ф. ШИРИНОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ТРУБЕ ПРИ СМЕШАННОМ ЗАКОНЕ ТРЕНИЯ

Вопросы, связанные с расчетами неустановившегося движения газа в трубопроводах, имеют важное значение как при проектировании, так и при эксплуатации магистральных газопроводов. Указанный процесс описывается следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\lambda \rho \omega^2}{2d}, \\ -\frac{\partial P}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x}, \end{aligned} \quad R: \begin{cases} t > 0 \\ 0 < x < l \end{cases}, \quad (1)$$

где P , ρ , ω —соответственно, средние в сечении давления, плотность и скорость движения; c —скорость звука в газе; d —диаметр; l —длина газопровода; λ —коэффициент гидравлического сопротивления, зависящий, вообще говоря, от относительной шероховатости трубы ϵ и от числа Рейнольдса [2].

Неравномерный отбор газа потребителями на последнем участке газопровода приводит к неустановившемуся движению газа, и этим нарушается турбулентная автомодельность, которая имеет место при достаточной загруженности. Поэтому необходимо считать λ зависящим от ϵ и Re . Задача о нестационарном движении газа в газопроводе, где турбулентный режим движения соответствует третьей зоне, т. е. $\lambda = \text{const}$, рассмотрена в [4], а случай с гладкостенным и квадратичным законами сопротивления исследован в [6]. В этих работах система (1) приводилась к одному нелинейному дифференциальному уравнению параболического типа и решалась методом интегральных соотношений (МИС) [5].

В данной статье рассматривается общий режим турбулентного движения. Из имеющихся в литературе [2, 3] эмпирических формул для λ будем использовать формулу Альтшуля:

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{1,46 \kappa}{d} + \frac{100}{Re} \right)^{0,25},$$

которая является наиболее универсальной (κ —абсолютная шероховатость). Используя для уравнения состояния $P = \rho g \frac{P_{am}}{\rho_{am}}$, формулы нормального объемного расхода $Q_n = \gamma \frac{f_w}{\gamma_n}$, число Рейнольдса $Re = \frac{\rho \omega d}{\mu}$

и выражения для λ , систему (1) запишем в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P^2}{\partial x} &= \frac{16 Q_n^2 P_{am} \gamma_{am}}{\pi^2 g d^5} \cdot 0,1 \left(\frac{1,46 \kappa}{d} + \frac{100 d g \mu}{4 Q_n \gamma_{am}} \right), \\ -\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{c^2 \gamma_{am}}{f g} \frac{\partial Q_n}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

где P_{am} , γ_{am} —соответственно, давление и удельный вес газа при нормальных условиях; f —площадь поперечного сечения трубы; μ —абсолютная вязкость газа.

Перейдя к безразмерным величинам

$$P^* = \frac{P}{P_0}, \quad Q^* = \frac{Q_n}{Q_{n0}}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{T},$$

где P_0 —давление в начале газопровода, Q_{n0} —начальный расход при установившемся режиме, T —суточный период, и опуская звездочки, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P^2}{\partial x} &= \varphi(Q), \\ -\frac{\partial P}{\partial t} &= a \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned} \quad R: \begin{cases} t > 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= \frac{\beta}{0,15} \left(\frac{1,46 \kappa}{d} Q + \frac{100 \pi d \mu g}{4 \gamma_{am} Q_{n0}} \right) Q^{1,75}, \\ a &= \frac{4 c^2 \gamma_{am} T Q_{n0}}{\pi e d^2 g P_0}, \quad \beta = \frac{16 \cdot 0,015 l P_{am} \gamma_{am}}{\pi^2 g d^5 P_0^2} Q_{n0}^2, \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу для (3), имеющую определенный интерес при изучении аккумулирующей способности газопроводов:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad P &= \sqrt{1 - \varphi(1) x} \quad (0 \leq x \leq 1), \\ t > 0: \quad Q|_{x=0} &= 1, \quad Q|_{x=1} = 1 + \bar{Q} \sin 2\pi t. \end{aligned} \quad (4)$$

Получить аналитическое решение системы (3) в общем виде не представляется возможным. Поэтому предлагается следующий численный способ решения этой системы при (4). Одним из эффективных методов численного решения задачи {(3), (4)} оказался МИС в обычной форме. Однако, если применить метод интегральных соотношений непосредственно к системе (3), то пришлось бы решить систему нелинейных алгебраических уравнений высшего порядка для вычисления Q по известным значениям $\varphi(Q)$. Поэтому МИС применяется не к (3), а к эквивалентной системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= 2a \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial Q}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -a \frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Область R разбиваем на N равных полос прямыми $x_i = ik$ ($h = 1/N$ — шаг разбиения) и интегрируем каждое уравнение (5) по x в (x_{i-1}, x_{i+1}) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi dx &= 2a \left[\left(P \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{i+1} - \left(P \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_{i-1} \right], \\ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P dx &= -a (Q_{i+1} - Q_{i-1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем интерполяционную формулу Лангранжа для некоторой функции U при $x_{i-1} < x < x_{i+1}$;

$$U(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})} U_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})} U_i + \frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)} U_{i+1}. \quad (7)$$

Отсюда

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x_{i+1}} = \frac{1}{2h} (Q_{i-1} - 4Q_i + 3Q_{i+1});$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x_{i+1}} = \frac{1}{2h} (3Q_{i-1} - 4Q_i + Q_{i+1}). \quad (8)$$

Интегралы, входящие в (6), можно вычислить:

а) интегрированием подынтегральных функций по формуле (7):

$$3/h \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P dx = P_{i-1} + 4P_i + P_{i+1}; \quad 3/h \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi dx = \varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1}, \quad (9)$$

тогда система (6) с учетом (8) примет вид:

$$\varphi'_{i-1} Q'_{i-1} + 4\varphi'_i Q'_i + \varphi'_{i+1} Q'_{i+1} = f_i; \quad (10)$$

$$P'_{i-1} + 4P'_i + P'_{i+1} = \Phi_i,$$

где

$$f_i = \frac{3a}{h^2} [P_{i+1}(Q_{i-1} - 4Q_i + 3Q_{i+1}) + P_{i-1}(3Q_{i-1} - 4Q_i + Q_{i+1})],$$

$$\Phi_i = -\frac{3a}{h} (Q_{i+1} - Q_{i-1}) \left(\varphi' = \frac{d\varphi}{dx}, \quad P' = \frac{dP}{dt}, \quad Q' = \frac{dQ}{dt} \right).$$

б) осреднением:

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P dx = P_i; \quad \frac{1}{2h} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi dx = \varphi_i, \quad (11)$$

тогда система (6) примет вид:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{1}{6\varphi_i} f_i;$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{1}{6} \Phi_i \quad (i = \overline{1, N-1}). \quad (12)$$

Системы (10) и (12), каждая в отдельности, состоят из $2N-2$ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $P_i, Q_i (i = \overline{1, N-1})$. Граничные значения P_0, P_N , которые участвуют в этих системах, определяются из первого уравнения системы (3) с учетом (7) и заданных граничных значений Q :

$$P_0 = \sqrt{\frac{4P_1^2 - P_2^2 + 2h\varphi(Q_0)}{3}},$$

$$P_N = \sqrt{\frac{4P_{N-1}^2 - P_{N-2}^2 - 2h\varphi(Q_N)}{3}}; \quad (13)$$

{(10), (13)} и {(12), (13)} — суть замкнутые системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений. Начальные условия для этих систем:

$$P_i(0) = \sqrt{1 - \varphi(1)x_i}, \quad Q_i(0) = 1 \quad (i = \overline{0, N}). \quad (14)$$

Так как система (12) имеет канонический вид, то задачу {(12), (13), (14)} можно решить, например, методом Рунге—Кутты. Система (10) не является канонической. Однако уравнения, входящие в (10), образуют тридиагональную систему, что позволяет привести ее к каноническому виду методом прогонки. Предположим с этой целью, что в i -й точке имеются соотношения

$$Q'_{i-1} = X_i Q'_i + Y_i,$$

$$P'_{i-1} = r_i P'_i + \rho_i. \quad (15)$$

Тогда из (10)

$$Q'_i = -\frac{\varphi'_{i+1}}{X_i \varphi'_{i-1} + 4\varphi'_i} Q'_{i+1} + \frac{f_i - \varphi'_{i-1} Y_i}{X_i \varphi'_{i-1} + 4\varphi'_i},$$

$$P'_i = -\frac{1}{r_i + 4} P'_{i+1} + \frac{\Phi_i - S_i}{r_i + 4}. \quad (16)$$

Отсюда прогоночные коэффициенты определяются в виде связей:

$$X_{i+1} = -\frac{\varphi'_{i+1}}{X_i \varphi'_{i-1} + 4\varphi'_i}, \quad \varphi_{i+1} = -X_{i+1} \frac{f_i - \varphi'_{i-1} \varphi_i}{\varphi'_{i+1}},$$

$$r_{i+1} = -\frac{1}{r_i + 4}, \quad S_{i+1} = r_{i+1} (S_i - \Phi_i). \quad (17)$$

Для вычисления X_i, Y_i, r_i, S_i (прямая прогонка) и определения неизвестных Q'_i, P'_i по (15) (обратная прогонка) требуется еще два условия для каждой неизвестной функции (на обеих границах). Эти условия можно получить, продифференцировав соотношения (13) и заданные граничные значения Q . Тогда для прогоночных коэффициентов получаются следующие начальные значения:

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0,$$

$$r_1 = \frac{4(P_1 + P_2)}{3P_0 - P_2}, \quad S_1 = -\frac{P_2 \Phi_1}{4(P_1 + P_2)} r_1. \quad (18)$$

Исходя из (18), по рекуррентным соотношениям (17) определяем последовательно прогоночные коэффициенты. На правом конце система (15) примет вид:

$$Q'_{N-1} = X_N Q'_N + Y_N,$$

$$P'_{N-1} = r_N P'_N + S_N. \quad (19)$$

t	$N=10$ $P_1(0, t)$	$N=20$ $P_1(0, t)$	$N=10$ $P_1(0, t)$	$N=10$ $P_1(1, t)$	$N=20$ $P_1(1, t)$	$N=10$ $P_2(1, t)$
0,0420	0,9960	0,9963	0,9963	0,8178	0,8178	0,8176
0,0836	0,9803	0,9807	0,9808	0,7847	0,7849	0,7848
0,1668	0,9171	0,9176	0,9178	0,6784	0,6789	0,6787
0,2504	0,8279	0,8287	0,8290	0,5388	0,5702	0,5400
0,3336	0,7386	0,7393	0,7396	0,4024	0,4045	0,4044
0,4168	0,6710	0,6713	0,6716	0,3130	0,3154	0,3153
0,5000	0,6386	0,6382	0,6390	0,3104	0,3120	0,3116
0,5836	0,6490	0,6484	0,6491	0,3876	0,3880	0,3873
0,6668	0,7042	0,7041	0,7042	0,5049	0,5050	0,5040
0,7504	0,7935	0,7930	0,7931	0,6332	0,6330	0,6326
0,8336	0,8904	0,8902	0,8901	0,7460	0,7459	0,7456
0,9167	0,9662	0,9660	0,9660	0,8193	0,8195	0,8194
1,0004	0,9993	0,9994	0,9993	0,8342	0,9350	0,9345

Чтобы совершить обратную прогонку, надо определить Q_N и P_N . Используя последние уравнения (10), (19) и (13), а также заданное значение Q_N , имеем:

$$Q'_N = 2\pi \bar{Q} \cos 2\pi t, \\ P'_N = \frac{N_{N-1} \Phi_{N-2} + 2\pi h \bar{Q} \varphi'_N \cos 2\pi t - 4S_N (P_{N-1} + P_{N-2})}{4r_N (P_{N-1} + P_{N-2}) - 3P_N + P_{N-2}}. \quad (20)$$

Таким образом, зная Q'_N и P'_N , по (15) последовательно определяем все значения P'_{N-1} , Q'_{N-1} , P'_{N-2} , Q'_{N-2} , ..., P_0 , Q_0 , т. е. системы.

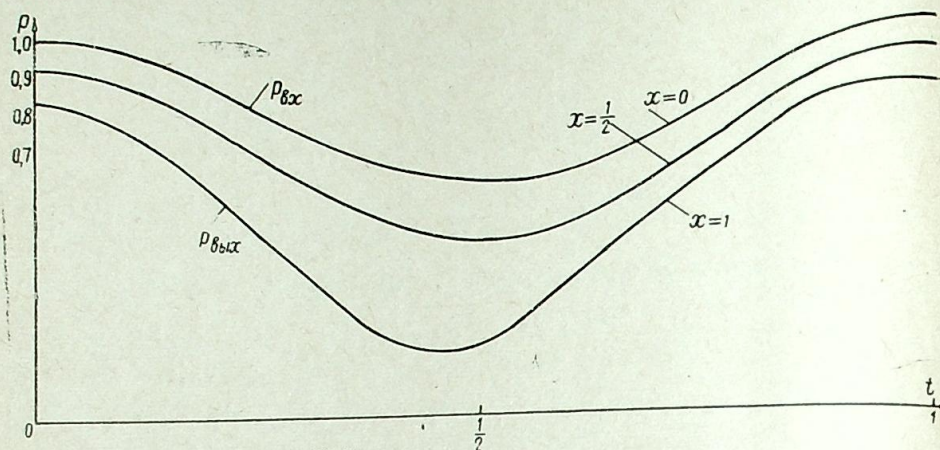


Рис. 1

му (10) приводим к каноническому виду. Надо отметить, что при этом одновременно вычисляются и правые части указанной системы. Задача Коши (с начальными условиями (14)) для систем ((12), (13)) и

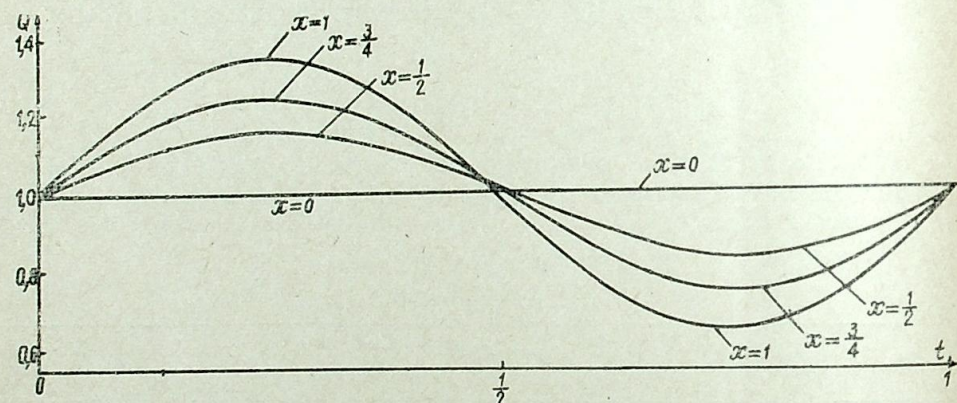


Рис. 2

((10), (13)) решена методом Рунге—Кутты на машине БЭСМ-2М. При этом в качестве характерных значений параметров были приняты:

$$P_0 = 56 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2; P_{ат} = 10^4 \text{ кг/м}^2; \gamma_{ат} = 1 \text{ кг/м}^3; g = 9,81 \text{ м/сек}^2; \\ c = 400 \text{ м/сек}; d = 0,5 \text{ м}; l = 10^5 \text{ м}; T = 86400 \text{ сек}; \kappa = 10^4 \cdot 1,5 \text{ м} \\ \mu = 10^{-5} \cdot 0,1296 \frac{\text{кг сек}}{\text{м}^2} \quad Q_{но} = r \cdot 10^6 \frac{\text{км}^3}{\text{сутки}}$$

(r —параметр, характеризующий загруженность газопровода). Для сравнения результатов, полученных по а) и б), приведена таблица значений P для различных приближений (соответственно P_1 , P_2). Как видно из таблицы, требуемую точность при меньших приближениях можно получить по а).

Результаты расчетов иллюстрируют рис. 1—4 при $r=3$, $\bar{Q} = 0,35$.

На рис. 1 и 2 показаны, соответственно, закон изменения давления по времени для фиксированных значений x , а на рис. 3 и 4 представлены x для разных значений времени.

Практически сходимость предложенной методики была проверена расчетами для различных приближений по пространственной переменной. С этой целью произведены расчеты для 5, 10 и 15 приближений. Полученные результаты показали совпадение с большой точностью. Кроме того, на каждом шаге по времени проверялось выполнение уравнения материального баланса:

$$\int_0^1 P(x, t) dx = \int_0^1 P(0, x) dx - a \int_0^t [Q(\tau, 1) - Q(\tau, 0)] d\tau. \quad (21)$$

При этом правая часть (21) вычисляется точно для любого t и может быть вычислена до решения исходной системы уравнений при задан-

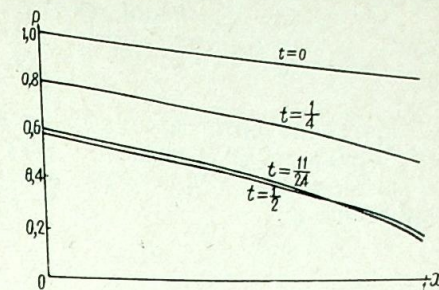


Рис. 3

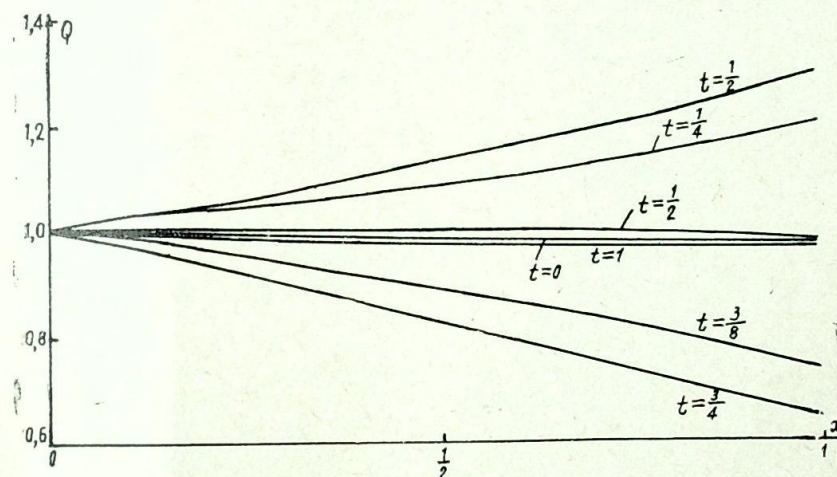


Рис. 4

ных начальном и краевых условиях по Q . Левая часть вычисляется только после решения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Основы газовой динамики. Гостехиздат, М., 1961.
2. Ходанович И. Е. Аналитические основы проектирования и эксплуатации магистральных газопроводов. Гостехиздат, М., 1961.
3. Гр. ВНИИГАЗ, вып. 29. "Транспорт природного газа".
4. Салимов А. Х., Ширинов К. Ф., Таиров М. А. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1968, № 6.
5. Дородницын А. А. ПМТФ. 1960, № 3.
6. Салимов А. Х. Исследование некоторых нестационарных задач движения в магистральных газопроводах. Отчет лаборатории численных методов и программирования ИК АН Азерб. ССР, 1967.

Поступило 3. VII 1969

Боруда газын гарышыг сүртүнмэ гануну үзрэ гэрарлашмамыш
һэрэкэти мäsэлäсинин һällи

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә интеграл мүнәсибәтләри вә говма методларынын тәтбиги
илә боруда газын гарышыг сүртүнмэ гануну үзрэ гэрарлашмамыш
һэрәкәтинин бир гејри-хәтти сәрһәд мäsэлäсинин әдәди һәлл гајдасы
верилмишдир.

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН, С. М. БАГИРОВ
АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ ТИРИСТОРНОГО
ЧАСТОТНО-РЕГУЛИРУЕМОГО АСИНХРОННОГО
ЭЛЕКТРОПРИВОДА

Полупроводниковая техника, появление управляемых кремниевых
вентилей-тиристоров определило развитие регулируемого электропри-
вода переменного тока с использованием дешевых, надежных асин-
хронных к. з. двигателей. Тиристоры позволяют разрешить основную
задачу—создать бесконтактный, надежный преобразователь частоты.
Появление их привело к интенсивному развитию как в СССР, так и
за рубежом работ по частотному управлению асинхронными двигате-
лями.

Среди существующих схем преобразователей следует выделить
преобразователи с явновыраженным звеном постоянного тока, с парал-
лельным инвертором напряжения, с ограниченной коммутационной
емкостью. Эти инверторы при относительно простой схеме управле-
ния имеют выходное напряжение, мало зависящее от нагрузки, устой-
чивую коммутацию в широком диапазоне изменения нагрузки и поз-
воляют регулировать частоту в значительных пределах [1, 2]. Форма
кривой выходного напряжения у этих инверторов ступенчатая, что
ухудшает работу асинхронного двигателя. Для устранения этого не-
достатка были составлены новые схемы автономных инверторов с
широкоимпульсной модуляцией, которые позволяют сформулировать
кривую тока, близкую к синусоидальной [3, 4]. Однако при этом виде
инвертора получается высокая частота переключений тиристоров и
связанное с этим некоторое повышение потерь на переключение. Кроме
того, схема управления получается достаточно сложной. В силу этого
в настоящее время при практическом использовании для многих про-
мышленных приводов предпочтительнее остановиться на параллельном
инверторе с ограниченной коммутационной емкостью.

Рациональная система частотно-управляемого асинхронного элек-
тропривода, выходная частота и напряжение которой регулируются в
широких пределах по необходимому закону, позволяет получить ре-
гулировочные характеристики асинхронного двигателя, которые могут
быть сравнимы с характеристиками двигателя постоянного тока.
Создание рациональных систем частотно-регулируемого электропри-
вода, как разомкнутых, так и замкнутых, должно основываться на
исследованиях как установившихся, так и переходных режимов сис-
темы преобразователь частоты—асинхронный двигатель.

В связи с развитием проблем частотного управления асинхронного
двигателя появилось несколько работ, в которых исследовано влия-

ние изменения частоты на переходные процессы асинхронного двигателя. При аналитическом исследовании система нелинейных дифференциальных уравнений может быть линеаризована и могут быть рассмотрены малые отклонения от установившегося состояния. После линеаризации уравнений были получены передаточные функции, определяющие изменение скорости вращения при возмущающих воздействиях, вызванных изменением нагрузочного момента, приложенного напряжения и частоты [5]. При определенных частотах стабильность работы двигателя ухудшается, причем основное влияние на стабильность оказывают частота, момент инерции, сопротивление ротора, в то время как сопротивление статора мало влияет на устойчивую работу двигателя в определенных диапазонах изменения частоты.

При питании от статического преобразователя частоты появляется еще один фактор, отличающий работу асинхронного двигателя от работы при питании от электромашинного преобразователя. Выходное напряжение трехфазного параллельного инвертора напряжения с ограниченной коммутирующей емкостью имеет вид ступенчатых кривых, форма которых зависит от способа соединения и характера нагрузки. При такой форме кривых напряжения анализ квазиустановившихся процессов проводится либо методом последовательного рассмотрения переходных процессов, либо методом разложения в ряд несинусоидальной кривой [6, 7, 8].

Выражения для токов при квазиустановившихся и электромагнитных переходных процессах можно получить при представлении системы "статический преобразователь—асинхронный двигатель" в виде импульсной цепи с формирующим элементом, создающим прямоугольные импульсы, и приведенной непрерывной части, соответствующей схеме замещения асинхронного двигателя. При этом для расчетов используется дискретное преобразование Лапласа [9, 10]. При расчете электромагнитных переходных процессов асинхронного двигателя с учетом изменения скорости вращения все более широкое распространение начинают приобретать численные методы для цифровых вычислительных машин. В некоторых работах для этих целей используются аналоговые вычислительные машины [11].

Если ступенчатую кривую напряжения разложить в ряд Фурье и учитывать лишь первую гармоническую составляющую, то тогда поведение двигателя будет соответствовать случаю питания его синусоидальным напряжением [12]. Однако реально напряжение является ступенчатой кривой, и поэтому значительный интерес представляет анализ с учетом формы кривой напряжения.

В общем виде напряжения, прикладываемые к двигателю, могут быть аналитически выражены ступенчатыми функциями вида [13]

$$U_k = A_k \cos \frac{\pi}{3} n + B_k \sin \frac{\pi}{3} n \quad (k=1, 2, 3). \quad (1)$$

При пуске эквивалентное сопротивление асинхронного двигателя носит индуктивный характер и продолжительность прохождения тока через диоды реактивного моста находится в пределах $0 \leq x_g \leq \frac{\pi}{3}$. В этом случае кривые линейных напряжений аналитически описываются следующими уравнениями:

$$U_{AB} = \frac{2\sqrt{3}}{3} U_d \sin \frac{\pi}{3} (n+5),$$

$$U_{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} U_d \sin \frac{\pi}{3} (n+3), \quad (2)$$

$$U_{CA} = \frac{2\sqrt{3}}{3} U_d \sin \frac{\pi}{3} (n+1).$$

При переходе от трехфазной системы к двухфазной напряжения в неподвижных осях выражаются через линейные значения напряжения

$$U_a = \frac{1}{\sqrt{6}} (2U_{CA} + U_{BC}), \quad U_b = -\frac{\sqrt{2}}{2} U_{BC}. \quad (3)$$

Для расчетов электромагнитных переходных процессов пуска при переменной частоте уравнения асинхронной машины удобно записать в осях α и β , вращающихся с переменной угловой скоростью и образующих с неподвижными осями угол φ_1 [14]. При переходе к осям α и β получаем следующие выражения для напряжений U_α и U_β :

$$U_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} U_d \cos \left(\frac{\pi}{3} n - \varphi_1 \right);$$

$$U_\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} U_d \sin \left(\frac{\pi}{3} n - \varphi_1 \right), \quad (4)$$

где $\varphi_1 = \omega_0 \nu t$ — угол между неподвижными и вращающимися осями, $\nu = \frac{f_1}{f_n}$, ω_0 — синхронная скорость эквивалентного двухполюсного двигателя при f_n ($\omega_0 = 1571/\text{сек}$).

Уравнения асинхронного двигателя в осях α и β , записанные в относительных единицах, могут быть представлены в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} U_{1\alpha} \\ U_{1\beta} \\ 0 \\ 0 \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + px_1 & -x_1 \nu & px_m & -x_m \nu & 0 \\ x_1 \nu & r_1 + px_1 & x_m \nu & px_m & 0 \\ px_m & -x_m \nu s & r_2 + px_2 & -x_2 \nu s & 0 \\ x_m \nu s & px_m & x_2 \nu s & r_2 + px_2 & 0 \\ -\frac{x_m}{2\nu\omega_0 H} i_{2\beta} & \frac{x_m}{2\nu\omega_0 H} i_{2\alpha} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{1\beta} \\ i_{2\alpha} \\ i_{2\beta} \\ ps \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\frac{d}{d(\omega_0 t)}, \quad s = \frac{\nu_2}{\nu},$$

H — механическая постоянная времени.

Для выполнения расчетов на ЭЦВМ система уравнений была представлена в следующем виде:

$$\frac{di_{1\alpha}}{d\omega_0 t} = A_{10} + A_{11} i_{1\alpha} + A_{12} i_{1\beta} + A_{13} i_{2\alpha} + A_{14} i_{2\beta},$$

$$\frac{di_{1\beta}}{d\omega_0 t} = A_{20} + A_{21} i_{1\alpha} + A_{22} i_{1\beta} + A_{23} i_{2\alpha} + A_{24} i_{2\beta},$$

$$\begin{aligned}\frac{di_{2\alpha}}{d\omega_0 t} &= A_{30} + A_{31} i_{1\alpha} + A_{32} i_{1\beta} + A_{33} i_{2\alpha} + A_{34} i_{2\beta}, \\ \frac{di_{2\beta}}{d\omega_0 t} &= A_{40} + A_{41} i_{1\alpha} + A_{42} i_{1\beta} + A_{43} i_{2\alpha} + A_{44} i_{2\beta}, \\ \frac{ds}{d\omega_0 t} &= A_{50} + A_{51} i_{1\alpha} + A_{52} i_{1\beta},\end{aligned}$$

(6)

где

$$\begin{aligned}A_{10} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{U_d \nu x_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} n - \omega_0 \nu t\right)}{D}, \\ A_{20} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{U_d \nu x_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} n - \omega_0 \nu t\right)}{D},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{30} &= -A_{10} \frac{x_m}{x_2}, & A_{40} &= -A_{20} \frac{x_m}{x_2}, & A_{11} &= A_{22} = -\frac{r_1 x_2}{D}, \\ A_{12} &= -A_{21} = \frac{\nu(x_1 x_2 - x_m^2 s)}{D}, & A_{13} &= A_{24} = \frac{r_2 x_m}{D}, \\ A_{14} &= -A_{23} = \frac{x_2 x_m (1-s) \nu}{D}, & A_{31} &= A_{42} = \frac{r_1 x_m}{D}, \\ A_{41} &= -A_{32} = \frac{x_1 x_m \nu (1-s)}{D}, & A_{33} &= A_{44} = -\frac{r_2 x_1}{D}, \\ A_{34} &= -A_{43} = -\frac{(x_m^2 - x_1 x_2 s) \nu}{D}, & A_{50} &= \frac{M_c}{2\omega_0 \nu H}, \\ A_{51} &= \frac{x_m}{2\omega_0 \nu H} i_{2\beta}, & A_{52} &= -\frac{x_m}{2\omega_0 \nu H} i_{2\alpha}, & D &= x_1 x_2 - x_m^2.\end{aligned}$$

Для программирования были введены обозначения:

$$c = i_{1\alpha}, \quad b = i_{1\beta}, \quad y = i_{2\alpha}, \quad g = i_{2\beta}, \quad l = s, \quad r = \omega_0, \quad l = x_1 = x_2, \\ \mu = x_m, \quad n = r_1, \quad s = r_2, \quad e = H, \quad z = \nu, \quad v = \frac{l z q}{t}.$$

$$p = \frac{ln}{t}, \quad a = \frac{l^2 z}{t}, \quad w = \frac{l \mu z}{t}, \quad m = \frac{\mu s}{t}, \quad H = \frac{\mu^2 z}{t},$$

$$\pi = \frac{\mu n}{t}, \quad O = \frac{ls}{t}, \quad \psi = \frac{\mu z}{t}, \quad U = \frac{1}{2r z e}, \quad t = l^2 - \mu^2;$$

$$x = \frac{\pi}{3} n, \quad k = t, \quad q = \sqrt{\frac{2}{3}} U_d.$$

При этом уравнения, вводимые в машину, имели следующий вид:

$$\begin{aligned}c' &= v \cos(x - rzk) - pc + ab + wg + my - шлг - Hlb, \\ b' &= v \sin(x - rzk) + mg + шлу + Hlc - pb - ac - шу, \\ y' &= -\psi \cos(x - rzk) + \pi c - шb - Hg - Oy + алг + шlb, \\ g' &= -\psi \sin(x - rzk) + \pi b + шc + Hy - Og - алу - шlc, \\ l' &= U[1 - \mu(yb - cg)].\end{aligned}$$

(7)

Блок-схемы программы решения представлены на рис. 1. При составлении этой программы использована имеющаяся стандартная программа в качестве подпрограммы. Был использован метод Рунге—Кутты. Шаг интегрирования принят $h = \frac{\omega_0}{24f_n \nu}$.

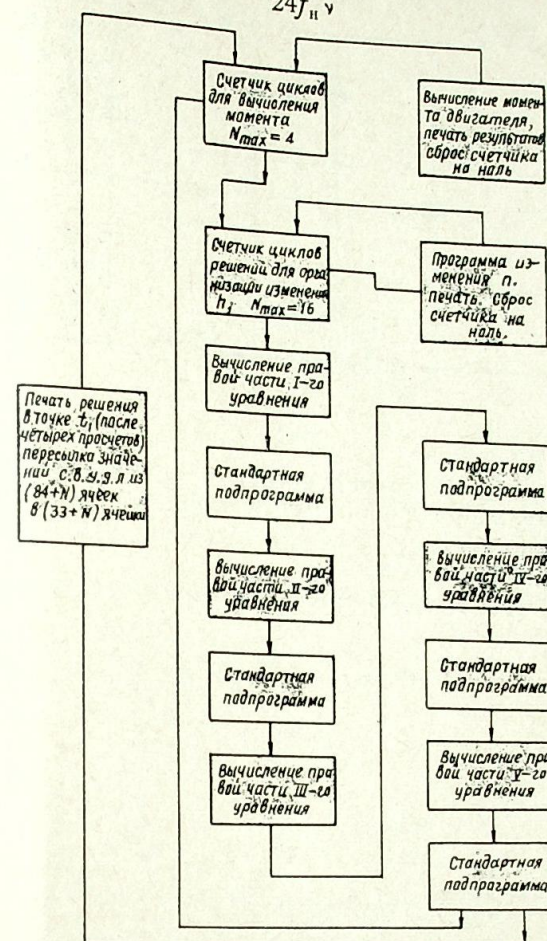


Рис. 1

Составлены программы вычисления правых частей уравнений, при этом обеспечивается изменение n на единицу после каждого 16 изменений значений времени. В конце вычисления при каждом шаге по найденным решениям машина вычисляет и передает на печать значения электромагнитного момента.

При питании асинхронного двигателя от преобразователя одним из эффективных способов торможения является динамическое торможение. При этом снимаются импульсы управления от схемы инвертора, снижается напряжение регулируемого выпрямителя, две обмотки статора асинхронного двигателя оказываются подключенными к регулирующему выпрямителю, по ним начинает протекать постоянный ток и осуществляется режим динамического торможения. На рис. 2 представлена схема подключения двигателя к преобразователю в режиме динамического торможения. Так как постоянный ток начинает протекать по тем обмоткам статора, которые были присоединены к инвертору через открытые тиристоры к моменту динамического торможения, то каждый раз практически при динамическом торможении постоян-

ый ток протекает при разных вариантах подключений обмоток. Это фактор весьма благоприятен с точки зрения теплового режима обмоток и их нагрева.

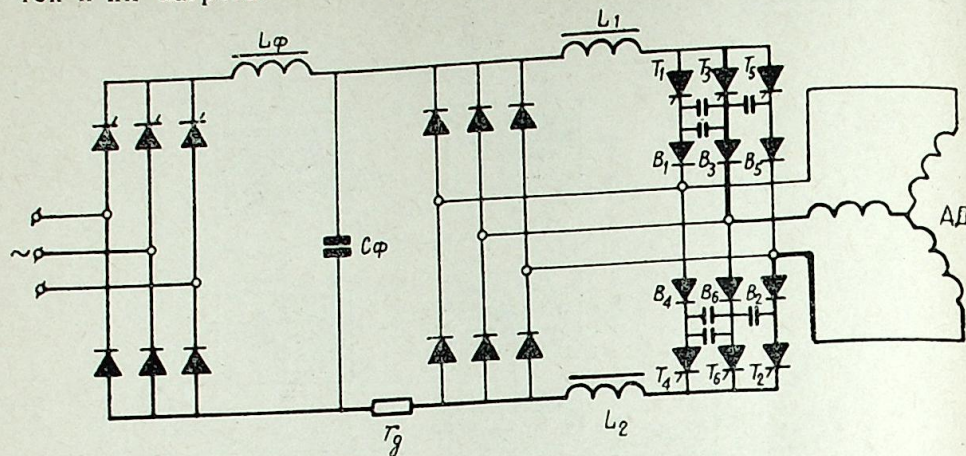


Рис. 2

Для расчета электрохимического переходного процесса асинхронного двигателя при динамическом торможении в целях облегчения целесообразно систему дифференциальных уравнений представить в системе неподвижных осей.

Исходные дифференциальные уравнения представляем в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_{1a} &= (r_1 + r_g) i_{1a} + \frac{d \Psi_{1a}}{d \omega_0 t}, \\ 0 &= r_2 i_{2a} + \frac{d \Psi_{2a}}{d \omega_0 t} - \Psi_{2b} \frac{d \varphi}{d \omega_0 t}, \\ 0 &= r_2 i_{2b} + \frac{d \Psi_{2b}}{d \omega_0 t} + \Psi_{2a} \frac{d \varphi}{d \omega_0 t}, \\ \frac{d \omega}{d \omega_0 t} &= \frac{1}{I \omega_0} (-M_g - M_c), \quad M_g = \Psi_{2b} i_{2a} - \Psi_{2a} i_{2b}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\frac{d \varphi}{d \omega_0 t} = \omega$ — скорость вращения ротора, I — момент инерции, $U_{1a} = U_m (1 + \cos \alpha)$ — напряжение регулируемого выпрямителя.

Решение системы производим относительно потокосцеплений:

$$\begin{aligned} \frac{d \Psi_{1a}}{d \omega_0 t} &= U_{1a} - \frac{(r_1 + r_g) x_2}{x_1 x_2 - x_m^2} \Psi_{1a} + \frac{(r_2 + r_g) x_m}{x_1 x_2 - x_m^2} \Psi_{2a}, \\ \frac{d \Psi_{2a}}{d \omega_0 t} &= \frac{r_2 x_m}{x_1 x_2 - x_m^2} \Psi_{1a} - \frac{r_2 x_1}{x_1 x_2 - x_m^2} \Psi_{2a} + \omega \Psi_{2b}, \\ \frac{d \Psi_{2b}}{d \omega_0 t} &= -\frac{r_2}{x_2} \Psi_{2b} - \omega \Psi_{2a}, \\ \frac{d \omega}{d \omega_0 t} &= -\frac{1}{I} \frac{x_m}{x_1 x_2 - x_m^2} \Psi_{1a} \Psi_{2b} + \\ &+ \frac{1}{I} \frac{x_m^2}{x_2 (x_1 x_2 - x_m^2)} \Psi_{2a} \Psi_{2b} - \frac{M_c}{I}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (9) была решена на ЭЦВМ „Наири“. Для программирования вводим обозначения:

$$\begin{aligned} c &= \Psi_{1a}, \quad b = \Psi_{2a}, \quad y = \Psi_{2b}, \quad g = \omega, \quad l = x_1 = x_2, \quad \mu = x_m, \\ r &= r_1 + r_g, \quad s = r_2, \quad e = I, \quad z = r, \quad t = l^2 - \mu^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= U_m, \quad O = c, \quad \delta = \frac{rl}{t}, \quad p = \frac{r\mu}{t}, \\ a &= \frac{s\mu}{t}, \quad w = \frac{s}{l}, \quad q = \frac{sl}{t}, \quad m = \frac{\mu}{et}, \\ H &= \frac{l^2}{let}, \quad \text{вы} = M_c, \quad x = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

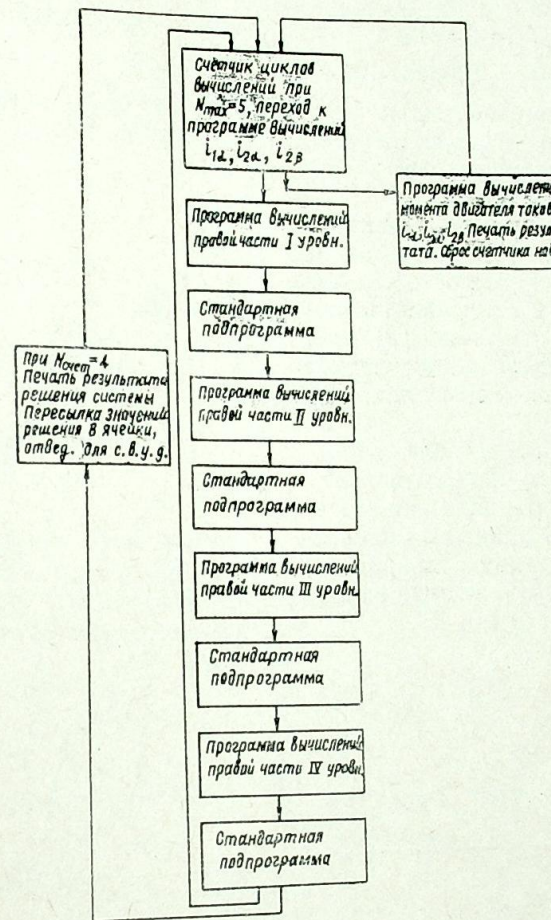


Рис. 2а.

и уравнения, вводимые в машину, принимают вид:

$$\begin{aligned} c' &= U(1 + \cos O) - \delta c + pb, \\ b' &= ac - qb + gy, \\ y' &= -wy - gb, \\ g' &= -msy + Hby - xy. \end{aligned}$$

На рис. 2а представлена блок-схема программы. При этом была использована имеющаяся в машине программа решения уравнения

по методу Рунге—Кутты. Составлены программы вычисления правых частей уравнений, а также вычисления момента двигателя

$$M = - \frac{\Psi_{2b}(x_2 \Psi_{1a} - x_m \Psi_{2a})}{x_2(x_1 x_2 - x_m^2)}$$

и токов

$$i_{1a} = \frac{x_2 \Psi_{1a} - x_m \Psi_{2a}}{x_1 x_2 - x_m^2},$$

а также программа их печати. Шаг интегрирования 0,5 о. е. времени. За единицу принята $t_{баз} = 3,19 \cdot 10^{-3}$ сек.

Были произведены расчеты для двигателя со следующими параметрами: мощностью 2,8 квт, $U = 380$ в, $I = 6,05$ а, $GD^2 = 0,042$ кгм². Параметры двигателя были представлены в относительных единицах:

$$r_1 = 0,0412, \quad x_1 = x_2 = 1,017, \quad x_m = 0,939, \\ r_2 = 0,0686, \quad H = 0,084 \text{ сек.}$$

За единицу напряжения и тока приняты амплитудные значения фазового номинального напряжения и тока (310 в, 8,55 а). За единицу сопротивления принимаем $r_{баз} =$ ед. напр./ед. тока.

Были получены решения уравнений для случаев пуска двигателя при холостом ходе ($M_c = 0$) и при постоянном моменте сопротивления ($M_c = 1$) для различных значений частот в диапазоне их изменения ν от 1 до 0,4.

На рис. 3 представлена кривая зависимости электромагнитного момента от времени (I) и для сравнения приведена кривая $M = f(\tau)$ питания двигателя синусоидальным напряжением (2) при $M_c = 1$ и $\nu = 0,7$.

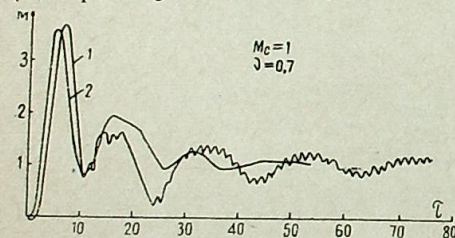


Рис. 3.

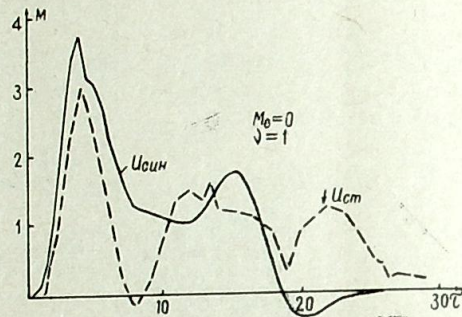


Рис. 4.

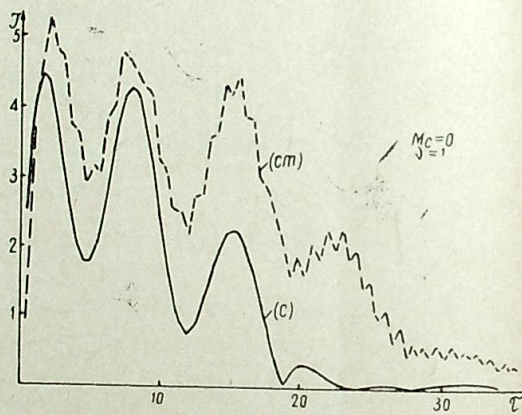


Рис. 5.

На рис. 4 и 5 показаны кривые зависимости момента и тока для синусоидального ($U_{син}$) и ступенчатого ($U_{ст}$) напряжения при $M_c = 0$ и $\nu_c = 1$. На рис. 6 представлена механическая характеристика $M = \varphi(s)$ для пуска при холостом ходе и под нагрузкой при $\nu = 0,4$. Анализ полученных кривых показал, что при питании двигателя от преобразователя в кривых момента появляются пульсации и продолжительность пуска двигателя по сравнению со случаем питания синусоидальным напряжением несколько увеличивается. На рис. 7 и 8 представлены зависимости электромагнитного момента и тока от времени: $M = f(\tau)$ и $i = F(\tau)$ в режиме динамического торможения при

различных величинах его сопротивления r_g . Механическая характеристика показана на рис. 9.

Различные желательные пуско-регулирующие характеристики асинхронного двигателя можно получить при создании замкнутых

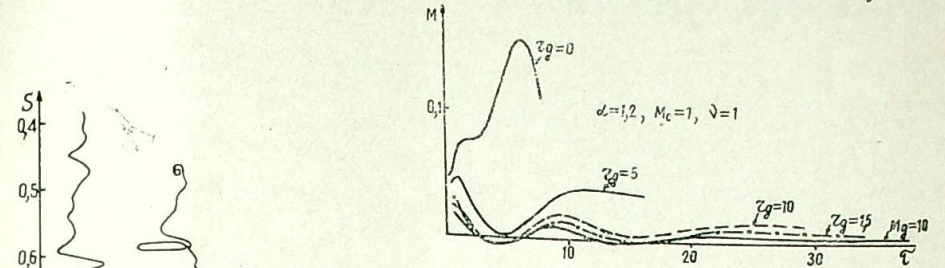


Рис. 7.

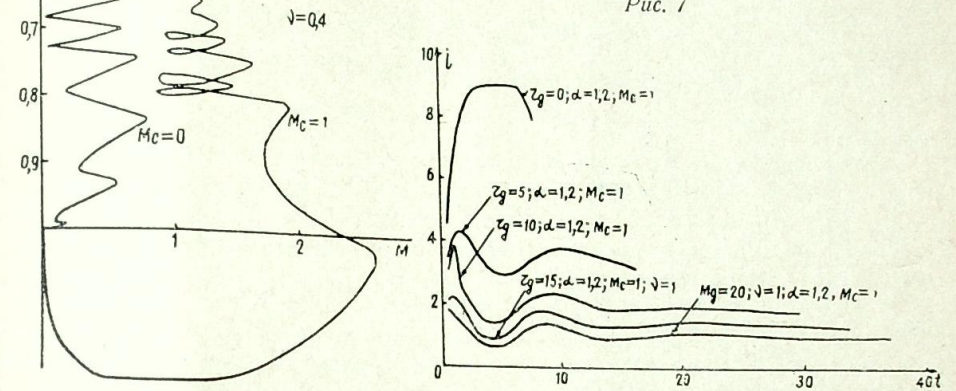


Рис. 8.

систем управления. Если частотное регулирование двигателя производить для случая нагрузки при постоянном моменте в диапазоне частот, когда активным сопротивлением статора можно пренебречь, то уравнение момента можно представить в следующем виде: [15]

$$M = \frac{m_1 p}{2\pi f_n x_1} \left(\frac{U}{\nu} \right)^2 \frac{\beta_N (1 - \sigma) \beta}{\sigma^2 \beta^2 + \beta_N^2} \quad (\text{нм}), \quad (10)$$

где

$$\frac{U}{\nu} = \text{const}, \quad \beta_N = \frac{r_2}{x_2},$$

$$\sigma = 1 - \frac{x_m^2}{x_1 x_2};$$

$$\beta = \frac{f_2}{f_n} - \text{абс. скольж.};$$

$$x_1, x_2 - \text{при } f_n.$$

При частотном регулировании двигателя величина $\frac{U}{\nu}$ поддер-

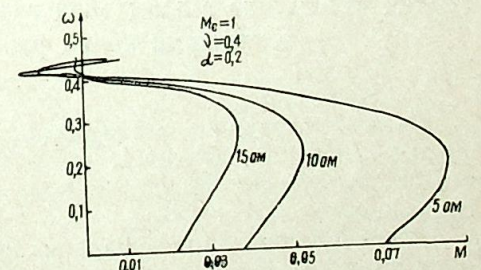


Рис. 9.

живается постоянной. Как видно из уравнения (10), величина момента зависит от скольжения β и не зависит от регулируемой частоты ν . Если β поддерживать постоянной, то тогда регулирование и, в частности, пуск двигателя можно осуществлять при постоянной величине момента двигателя. При значении скольжения выше критического получаются значительные потери в двигателе и низкий коэффициент

мощности, поэтому скольжение поддерживают постоянно ниже критического. В этом случае характеристики регулируемого асинхронного привода близки к таковым для привода постоянного тока. Имеется практическая реализация замкнутой системы автоматического регулирования, обеспечивающей режим постоянного скольжения [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Завалишин Д. А., Шукалов В. Ф. Вентильные преобразователи частоты для частотного регулирования скорости асинхронных двигателей. ВЭП, 1961, № 6.
2. Bystron K. Strom und Spannungsverhältnisse beim Drehstrom—Drehstrom—Umrichter mit Gleichstromzwischenkreis. ETZ, A, H. 8, 1966.
3. Сандлер А. С. Гусяцкий Ю. М. Тиристорные инверторы с широтно-импульсной модуляцией. „Энергия“, М., 1968.
4. Schönung A., Stemmler H. Geregelter Drehstrom—Umkehrantrieb mit Gesteuertem Umrichter nach dem Unterschwingungsverfahren. Brown-Boveri Mitteilungen, № 8 и 9, 1964.
5. Rogers G. J. Linearised Analysis of induction motor transients. Proceeding IEE, Power Record, vol. 112, Dec. 1965.
6. Хасанов О. И. Транзисторные преобразователи напряжения и частоты. „Наука“, 1966.
7. Racz I. Dynamic Behaviour of inverter controlled induction motors. 3-d Congress. London, 1966.
8. Завалишин Д. А., Новикова Г. И., Чжен Бин-ган. „Электричество“, 1962, № 11.
9. Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А., Курдюков Ю. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967, № 3, 4.
10. Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А. „Изв. АН СССР, энергетика и транспорт“, 1967, № 5.
11. Sattler Ph. K., Ulrich B. Untersuchung der stromrichter gespeisten Asynchronmaschine am Analogrechner. ETZ, A, H. 2, 1968.
12. Листенгартен Б. А., Багиров С. М., Насирзаде А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 6.
13. Efendizade A. A., Listengarten B. A., Bagirov S. M., Zairova T. A., Kurdiukov Yu. M. Research into Dynamic Regimes of Controlled Thyristor Electrical Drives. IV Congress, IFAC, Warszawa, 1969.
14. Lawrenson P. J., Stephenson J. M. Note on induction machine performance with a variable-frequency supply. Proceedings IEE, Power Record, vol. 113, № 4, 1966.
15. Neumann K., Jordan K.-G. Das Verhalten des Käfiglaufermotors bei Veränderlicher Speisefrequenz und Stromregelung. AEG—Mitt. № 1, 2, 1964.
16. Хамудханов М. З., Камалов Т. С., Муминов К. Система автоматического асинхронного электропривода с частотным управлением от тиристорного преобразователя. IV Всесоюзное совещание по автоматическому управлению (технической кибернетике) НКАУ, Тбилиси, 1968.

Поступило 7. VII 1969

А. Э. Эфендизаде, Б. А. Листенгартен, С. М. Багиров

Тезлик васитасилә тәнзимләнән тиристорлу асинхрон электрик интигалынын кечид режимләринин тэдгиги

ХУКАСЭ

Жарымкечиричиләр техникасынын инкишафы вә етибарлы тезлик чевиричиләринин жаранмасы нәтижәсиндә асинхрон мүһәррикләринин тезлик васитәсилә тәнзим едилмәсинә даир бир сыра ишләр нәшр едилмишдир.

Мәгаләдә асинхрон мүһәррикләрин тезлик васитәсилә тәнзимләнмәси дөврүндә баш верән кечид һалларынын тэдгигинә һәср олунмуш ишләр һаггында мәлумат верилир. Бундан башга, пилләвари кәркинликлә бәсләнән статик чевиричили асинхрон мүһәрриклә баш верән электромеханики кечид режимләринин һесаблинамасы ғајдасындан бәһс едилир. Ишәсалма просеси илә јанашы динамик тој мозлама режиминдә мүһәррикин электромеханики кечид просесинин һесабаты да ајдынлашдыр. Алынмыш диференсиал тәнликләр системи „НАИРИ“ типли ЕНМ-дә һәлл едилмишдир. Мәгаләдә һәмин тәнликләрин һесаблама машынында һәлли үчүн мувафиг блок схемләр верилир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Э. М. ДЖАФАРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛЭП С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В ЗЕМЛЕ

При расчетах переходных процессов в линиях электропередач сверхвысокого напряжения, затухания и деформации электромагнитных волн, распространяющихся вдоль ЛЭП, а также при определении наводимых перенапряжений на параллельных линиях высокого напряжения или на линиях связи необходим учет влияния земли. Обычно параметры земли определяются с помощью интегралов Карсона [1] или по приближенным формулам Полячека [2]. Для вычисления интегралов Карсона им были предложены асимптотические формулы и кривые. Однако применение этих формул не всегда возможно, а использование кривых не дает достаточной точности вычислений, что приводит в ряде случаев к неверным результатам.

Сопротивление и индуктивность земли как функции частоты протекающего по ней тока могут быть более точно определены непосредственным вычислением интегралов Карсона:

$$z_{kk} = z_{kk}^0 + j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_k}{r} + j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2h_k \lambda} d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + j\beta + \lambda}}; \quad (1)$$

$$z_{km} = j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{km}}{d_{km}} + j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-(h_k + h_m)\lambda} \cos a\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + j\beta + \lambda}} d\lambda. \quad (2)$$

Разделив вещественную и мнимую части интегралов, получим выражения для собственных и взаимных активных сопротивлений и индуктивностей с учетом поверхностного эффекта в земле:

$$r_{kk} = r_{kk}^0 + \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty e^{-2h_k \lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} - \lambda \right) d\lambda, \quad (3)$$

$$L_{kk} = L_{kk}^0 + \frac{\rho}{\pi \omega} \int_0^\infty e^{-2h_k \lambda} \sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} d\lambda, \quad (4)$$

$$r_{km} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty e^{-(h_k + h_m)\lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} - \lambda \right) \cos a\lambda d\lambda, \quad (5)$$

$$L_{km} = L_{km}^0 + \frac{\rho}{\pi\omega} \int_0^\infty e^{-(h_k+h_m)\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 - \lambda^2}{2}} \cos a\lambda d\lambda. \quad (6)$$

Здесь r_{kk}^0 , L_{kk}^0 , L_{km}^0 представляют собой собственные и взаимные активные сопротивления и индуктивности при условии, что земля является идеальным проводником:

ρ — удельное сопротивление земли, $\text{ом}\cdot\text{м}$;
 h_k , h_m — соответственно, высота подвеса k -го и m -го проводов, м ;
 a — расстояние между k -ым и m -ым проводами, м ;
 μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость, $\text{гн}/\text{м}$;
 ω — угловая частота, рад ;

$\beta = \frac{\omega\mu_0}{\rho}$ — параметр земли

Эффект конечной проводимости земли учитывается бесконечными интегралами. Таким образом, собственное активное сопротивление и индуктивность, учитывающие поверхностный эффект в земле, можно определить, решив интегралы

$$r'_{kk} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty e^{-2h_k\lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} - \lambda \right) d\lambda, \quad (7)$$

$$L'_{kk} = \frac{\rho}{\pi\omega} \int_0^\infty e^{-2h_k\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 - \lambda^2}{2}} d\lambda \quad (8)$$

известными численными методами.

Используя правило квадратур, естественно взять в качестве весовой функции $e^{-2h_k\lambda}$ и применить правило интегрирования для интегралов вида

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx = A_0 f(0) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (9)$$

При этом узлы x_k будут корнями многочлена Лягерра степени n нулевого индекса:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}),$$

а коэффициенты A_k определяются по формулам

$$A_k = \frac{n! \Gamma(n+2)}{x_k^2 [L'_n(x_k)]^2},$$

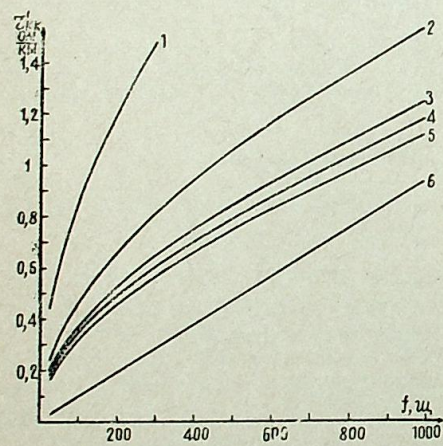
$$A_0 = 1 - \sum_{k=1}^n A_k.$$

Значения x_k и A_k табулированы и приведены в [3].

Вычисления интегралов (7) и (8) проводились при $n = 5, 10, 13, 14, 15$.

Результаты расчета интеграла (7) представлены на рис. 1, из которого видно, что изменение порядка квадратурной формулы сильно влияет на результаты расчета. Максимальный порядок квадратурной формулы с весом Лягерра, для которого коэффициенты x_k и узлы A_k рассчитаны, равен 15. Поэтому для равнения результатов были проведены расчеты интегралов (7) и (8)

Рис. 1 Кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответствуют значениям $n=5; 10; 13; 14; 15; 30$ при следующих параметрах: $r_{kk}=f(\omega)$; $\rho=600 \text{ ом}\cdot\text{м}$; $h_k=15 \text{ м}$.



по квадратурным формулам Гаусса и парным к ним „уточняющим“ квадратурам высокого порядка [4]:

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Расчет на ЭЦВМ интегралов (7) и (8) по квадратурным формулам высокого порядка не вызывает особых затруднений и не требует значительных затрат машинного времени. Однако при значениях $\omega < 300 \cdot 2\pi$ и $\rho > 200 \text{ ом}\cdot\text{м}$ подынтегральная функция считается неверно, так как параметр $\beta^2 = \left(\frac{\omega\mu_0}{\rho}\right)^2$ становится меньше 10^{-10} , что воспринимается машиной как ноль. Во избежание подобного явления подынтегральная функция в (7) была представлена следующим образом:

$$f(\lambda) = e^{-2h_k\lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda^4 + \frac{\omega^2 \mu_0^2}{\rho^2} + \lambda^2}{2}} - \lambda \right) = e^{-2h_k\lambda} \left(\sqrt{\frac{\frac{\omega \mu_0}{\rho} \sqrt{\left(\frac{\lambda^2 \rho}{\omega \mu_0}\right)^2 + \mu + \lambda^2}}{2}} - \lambda \right). \quad (10)$$

Кроме того, поскольку высота подвеса фазных проводов редко бывает меньше 7 м, верхний предел параметра λ можно ограничить не бесконечностью, а 2, так как $e^{-2h_k\lambda}$ при $h_k=7 \text{ м}$, $\lambda=2$ обращается в машинный ноль.

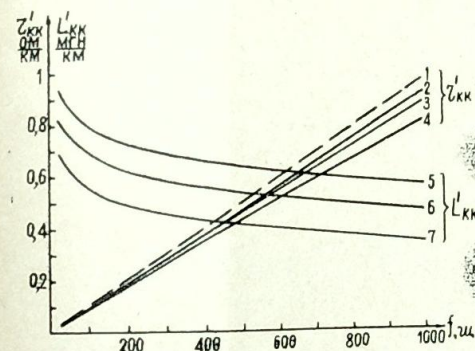


Рис. 2. Кривым 2, 3 соответствует $\rho = 50 \text{ ом}\cdot\text{м}$; 3, 6 — $200 \text{ ом}\cdot\text{м}$; 4, 7 — $600 \text{ ом}\cdot\text{м}$; $h=15 \text{ м}$; $n=30$.

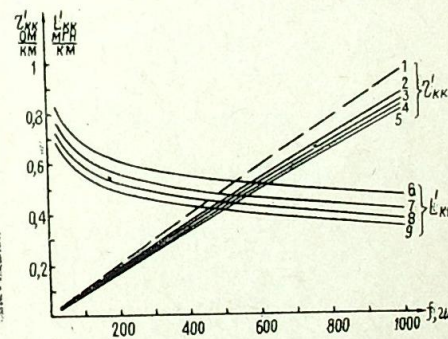


Рис. 3. Каждому значению h_k соответствуют определенные кривые: 2, 6 — 15 м; 3, 7 — 20 м; 4, 8 — 25 м; 5, 9 — 30 м, $\rho=200 \text{ ом}\cdot\text{м}$; $n=30$.

Аналогично представлялась подынтегральная функция (8). Затем интегралы (7) и (8) линейным преобразованием были приведены к отрезку $[0, 1]$ и рассчитаны для различных значений n . Максимально возможная на ЭЦВМ точность достигалась при $n=30$. Дальнейшее увеличение порядка квадратурной формулы не оказывало заметного влияния на величину интеграла. Результаты расчета интеграла (7) по „уточняющим“ квадратурам при $n=30$ представлены на рис. 1. Как видно, наибольшую точность из всех рассмотренных имеет метод Гаусса, который в дальнейшем и был принят в качестве расчетного для интегралов (7) и (8).

На рис. 2 приведены результаты расчета интегралов (7) и (8) по

„уточняющим“ квадратурам 30-го порядка для различных значений ρ при $h_k = \text{const}$, а на рис. 3—для различных h_k при $\rho = \text{const}$. Как видно, активная составляющая сопротивления земли линейно зависит от частоты до $f = 1000$ гц и растет с ее увеличением. Активная составляющая увеличивается с ростом удельного сопротивления земли, что особенно сильно проявляется при высоких частотах. Применение широко распространенной формулы Поллячека: $r'_{kk} = r'_{km} = \pi^2 f \cdot 10^{-4} \frac{\text{ОМ}}{\text{км}}$

(пунктирная линия на рисунках) возможно лишь при частотах до 200 гц и хорошо проводящей земле ($\rho < 100 \text{ ом} \cdot \text{м}$).

Активная и индуктивная составляющие сопротивления земли зависят от высоты подвеса фазных проводов и увеличиваются с ее уменьшением (рис. 3). Расчет интегралов (7), (8) по рядам Карсона совпадает с результатами, приведенными на рисунках. Вычисление интегралов

$$r'_{km} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(h_k + h_m)\lambda} \left(\sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} - \lambda \right) \cos a\lambda d\lambda, \quad (11)$$

$$L'_{km} = \frac{\rho}{\pi\omega} \int_0^{\infty} e^{-(h_k + h_m)\lambda} \sqrt{\frac{\lambda^4 + \beta^2 + \lambda^2}{2}} \cos a\lambda d\lambda \quad (12)$$

вызывает некоторые трудности, так как подынтегральная функция является осциллирующей.

Для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций могут быть применены различные численные методы. При этом наилучшие результаты получаются, если линейным преобразованием переменной $x = a\lambda$ привести интеграл (11) к виду

$$\int_0^{\infty} f(\lambda) \cos a\lambda d\lambda = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) \cos x dx.$$

Затем полуось $[0, \infty)$ разбить на отрезки длиной $\frac{\pi}{2}$ и преобразовать интеграл к форме

$$\frac{1}{a} \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) \cos x dx = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi\left(\frac{x}{a}\right) \cos x dx, \quad (13)$$

где

$$\Phi\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi + x}{a}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi - x}{a}\right).$$

Для расчета (13) в качестве веса можно применять близкую к $\cos x$ по своему характеру на отрезке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ весовую функцию

Якоби $\sim \frac{\pi}{2} - x$ и воспользоваться правилом квадратур для веса Якоби [6], приведя интеграл к виду

$$\frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \varphi\left(\frac{x}{a}\right) dx, \quad (14)$$

здесь

$$\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{-1} \Phi\left(\frac{x}{a}\right) \cos x.$$

Интеграл (14) аналогичен интегралу

$$\int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha f(x) dx,$$

который может быть рассчитан по квадратурной формуле:

$$\int_0^1 x^\beta (1-x)^\alpha f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

если в качестве весовой взята функция $x^\beta (1-x)^\alpha$. Тогда узлы x_k являются корнями многочлена Якоби $P_n(x)$ для отрезка $[0, 1]$, а коэффициенты A_k имеют значения:

$$A_k = \frac{\Gamma(n+1+\alpha) \Gamma(n+1+\beta)}{n! \Gamma(n+1+\alpha+\beta) (1-t_k^2) [I_n^{(\alpha, \beta)}(t_k)]^2}.$$

Обычно многочлены Якоби $I_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ определяют на отрезке $[-1, 1]$. Если корни многочлена $I_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ обозначим через t_k , то

$$t_k = 2x_k - 1$$

и

$$P_n(x) = I_n^{(\alpha, \beta)}(2x - 1).$$

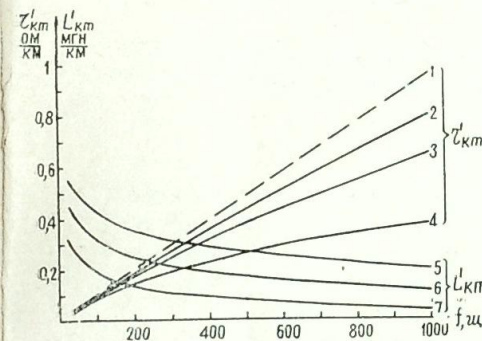
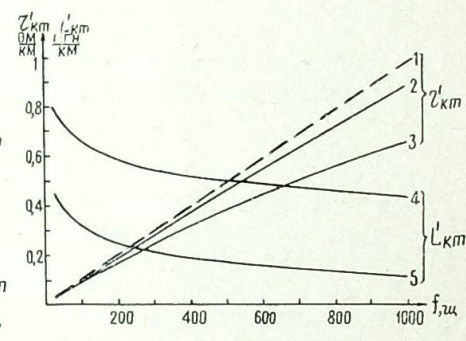


Рис. 4. Кривым 2, 5 соответствует $\rho = 50 \text{ ом} \cdot \text{м}$; Рис. 5. Кривые получены при следующих значениях a : 2, 4—19 м; 3, 5—200 м; $h_k = h_m = 15 \text{ м}$; $\rho = 200 \text{ ом} \cdot \text{м}$; $n = 30$.



Коэффициенты A_k и узлы x_k определены для различных значений α и β . Максимальное значение $n = 8$. Для больших его величин x_k и A_k не рассчитаны.

Линейным преобразованием переменной интегралы (11), (12) были приведены к отрезку $[0, 1]$ и рассчитаны для случая $\alpha = 1, \beta = 0$ и $n = 6$ и 8. Вследствие ограничения порядка Якобиевых квадратур до 8 при малых значениях параметра ω и $\rho > 100 \text{ ом} \cdot \text{м}$ погрешность расчетов получается значительной, причем нарушаются закономерности изменения величины интегралов с ростом ρ и a .

Например, при увеличении удельного сопротивления земли от 100 до 1000 ом·м активная составляющая сопротивления земли при частотах до 800 гц и малых расстояниях между влияющими проводами ($a \leq 20 \text{ м}$) уменьшалась. Повысить точность можно, применив Гауссовы или парные к ним „уточняющие“ квадратуры, которые табулированы для высоких порядков (до 40).

Результаты расчетов (11) и (12) с помощью „уточняющих“ квадратур 30-го порядка при различных значениях ρ и a представлены на

рис. 4 и 5. Применение Якобиевых квадратур возможно при частотах выше 2000 гц или при больших расстояниях между влияющими цепями. Например, при $a = 200$ м значение интеграла (11), рассчитанного по Якобиевым квадратурам 8-го порядка и „уточняющим“ квадратурам 30-го порядка, отличается лишь в третьей значащей цифре. Такого же порядка погрешность получается при расчетах с частотой $f > 2000$ гц.

С помощью описанного метода могут быть определены собственные и взаимные активные сопротивления и индуктивности, учитывающие поверхностный эффект в земле, для любых классов воздушных линий электропередач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Corsan J. R. Wave propagation in overhead wires with ground return. The Bell. System Technical Journal, 1926, vol. 5, № 4.
2. Михайлов М. И. Влияние внешних электромагнитных полей на цепи проводной связи и защитные мероприятия. Связьиздат, 1959.
3. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. „Наука“, 1966.
4. Крылов В. И., Янович В. В., Лугин Л. А. Таблицы для численного интегрирования функций со степенными особенностями. Минск, 1963.
5. Кронрод А. С. Узлы и веса квадратурных формул. „Наука“. 1964.

Поступило 7. VII 1969

Ч. М. Чуварлы, Е. М. Чэфэров

Јердэ сәтһ эффектһинн нәзәрә алынмасы шәрти илә електрик өтүрүчү хәтләриннн параметрләриннн тә'јини

ХҮЛАСӘ

Јүксәк кәркинликли електрик хәтләриндә кечид һадисәләриннн һесабатыны апардыгда, Јерин тә'сирини нәзәрә алан параметрләрин тапылмасы үчүн мөвчуд олан үсуллар бир сыра нөгсанлара малик-дир. Мәгаләдә тәклиф едилән үсулун көмәјилә һәр һансы синиф јүксәк кәркинликли електрик хәтти үчүн Јерин сәтһ эффектһини нәзәрә алмаг шәрти илә һәм хусуси, һәм дә гаршылыглы актив мүғавимәтләрин вә индуктивлијин гијмәтини тә'јин етмәк олар.

МҮНДӘРИЧАТ

3. И. Хәлһлов. Пајланмыш параметрли автоматик идарә едән динамик системләр һаггында : 3
- И. И. Ибраһимов. Рационал функцијаларын көмәји илә сонлу әдәдләр хусусијјәтинә малик функцијаларын интерполјасијасы : 10
- М. Г. Гасымов. Спектрал кәсилмәз һиссәси илә дифференциал операторларын мөхсуси функцијалара ајрылмасы : 19
- М. Л. Рәсулов. Комплекс параметрли эллиптик системин әсаслы матрицасынын гијмәтләндирилмәси : 40
- Ә. И. Һүсәјнов, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Мәһәмәдов. $H(\omega, \omega_1, \omega_2)$ синфинин бә'зи хәссәләри һаггында : 51
- Һ. Б. Абдуллајев, Ч. Ш. Абдинов. Ленин вә мұасир тәбиәтшүнаслыг : 63
- В. И. Таһиров, Һ. Х. Әждәров, Б. С. Әлијева, Ә. И. Әләкбәров, С. И. Таиров, М. Һ. Шаһтахтински. Керманиум-силициум бәрк мәһлулларында ашгар сәвијјәләриннн вә донор-акцептор гаршылыглы тә'сириннн тәдгиги : 76
- Һ. Б. Абдуллајев, З. А. Искәндәрзадә, Е. А. Чәфәрова, М. Р. Ахундов, Ш. А. Әлиханова. Јүксәк инјексија сәвијјәси вә күчлү електрик сәһәсиндә $p-n$ кечидләриндә диффузија силициумларында физики просәсләрин тәдгиги : 84
- Л. М. Иманов, К. Е. Зүлфугарзадә. Мајеләрин диелектрик тәдгиги вә гурулушу : 103
- Һ. Б. Абдуллајев, Н. И. Ибраһимов, Ш. В. Мәммәдов, З. М. Абулалыбова. Термик ишләмәнин поликристаллик селенин електрик кечиричилијинә тә'сир : 116
- М. А. Мәммәдов. Кометаларын нәзәри вә еәприк бөлүшдүрүлмәсиннн мүғажисәси : 122
- З. Ф. Сәјидов. Фаза кечиди политроплар. III пәјтрал нүвәли $p-o$ политропу : 128
- Һ. А. Мухтаров, В. Ә. Гулијев. 1, 1, 2, 2-фторетан молекулунун микродалға спектри : 132
- С. А. Абасов, М. Ә. Бағыров, Т. Ф. Аббасов, Т. И. Һүсәјнов, Ч. Ә. Кабулов. Електрик бошалмаларынн тә'сир алтында полимер плјонкаларынын механики хәссәләриннн дәјишилмәсиннн тәдгиги : 136
- Б. А. Әзимов. Нефт вә газ јатагларынын ишләмәсиннн бә'зи мәсәләләриннн електрик-һесаблама машыныларында һәлли : 143
- Ф. Һ. Һүсәјнов. Мүрәккәб енеркегик системләрин эквивалент сәдәләшдирилмәси : 152
- Ч. М. Чуварлы, Г. Вечхәјзер, В. Ј. Штејншрајбер. Сәтһ кечиричилијиннн нәзәрә алынмасы шәртилә мәсамәдә еллеттик цилиндр-шәкилли сәһә : 162
- М. А. Бағыров, В. П. Малин. Полимер диелектрикләрин електрик сәһнәлмәси : 171
- А. Х. Сәлимов, М. А. Таиров, К. В. Ширинов. Боруда газын арышыг сүртүнмә гануну үзрә гәрарлашмамыш һәрәкәти мәсәләсиннн һәлли : 178
- А. А. Әфәндизадә, Б. А. Листенгартен, С. М. Бағыров. Гиристролу тезликли-идарәолунан асинхрон електрик кечиричилијиннн кечмә ежимләриннн анализ : 185
- Ч. М. Чуварлы, Е. М. Чәфәров. Јердә сәтһ эффектһинн нәзәрә алынмасы шәрти илә електрик өтүрүчү хәтләриннн параметрләриннн тә'јини : 195

СОДЕРЖАНИЕ

З. И. Халилов. К теории динамических систем автоматического управления с распределенными параметрами	3
И. И. Ибрагимов. Интерполирование функций с конечным числом особенностей с помощью рациональных функций	10
М. Г. Гасымов. Разложения по собственным функциям дифференциальных операторов с непрерывной частью спектра	19
М. Л. Расулов. Оценка фундаментальной матрицы эллиптической системы с комплексным параметром	40
А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, А. М. Магомедов. О некоторых свойствах класса $H(\omega_1, \omega_2, \omega)$	51
Г. Б. Абдуллаев, Д. Ш. Абдинов. Ленин и современное естествоведение	63
Р. И. Тагиров, Г. А. Аждаров, Б. С. Алиева, А. И. Алекперов, С. И. Таиров, М. Г. Шахтактинский. Исследование примесных уровней и донорно-акцепторного взаимодействия в плавах германий—кремний	76
Г. Б. Абдуллаев, З. А. Искендерзаде, Э. А. Джафарова, М. Р. Ахундов, Ш. А. Алиханова. Исследование физических процессов в диффузионных кремниевых $p-n$ -переходах при высоких уровнях инжекции и в сильных электрических полях	84
Л. М. Иманов, К. Э. Зулфугарзаде. Диэлектрические исследования и строение жидкостей	103
Г. Б. Абдуллаев, Н. И. Ибрагимов, Ш. В. Мамедов, З. М. Абуталыбова. Влияние предварительной термообработки на проводимость поликристаллического селена	116
М. А. Мамедов. Сопоставление теоретического и эмпирического распределения комет	122
З. Ф. Сеидов. Политропы с фазовым переходом, III политропа $p-O$ с нейтральным ядром	128
И. А. Мухтаров, В. А. Кулиев. Исследование микроволнового спектра молекулы $1, 1, 2, 2$ -фторэтана	132
С. А. Абасов, М. А. Багиров, Т. Ф. Аббасов, Т. И. Гусейнов, У. А. Кабулов. Изменение механических свойств полимерных пленок под действием электрических разрядов	136
Б. А. Азимов. Решение на ЭВМ некоторых задач разработки нефтегазовых месторождений	143
Ф. Г. Гусейнов. Эквивалентные упрощения сложных энергетических систем	152
Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, В. Я. Штейншрайбер. Поле во включении в форме эллиптического цилиндра при учете поверхностной проводимости	162
М. А. Багиров, В. П. Малин. Электрическое старение полимерных диэлектриков	171
А. Х. Салимов, М. А. Таиров, К. Ф. Ширинов. Решение задачи неустановившегося движения газа в трубе при смешанном законе трения	178
А. А. Эфендизаде, Б. А. Листенгартен, С. М. Багиров. Анализ переходных режимов тиристорного частотно-регулируемого асинхронного электропривода	185
Ч. М. Джуварлы, Э. М. Джафаров. Определение параметров ЛЭП с учетом поверхностного эффекта в земле	195

Сдано в набор 27/I 1970 г. Подписано к печати 6/VIII 1970 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$.
Бум. лист. 6,50. Печ. лист. 17,81. Уч.-изд. лист. 17,06. ФГ 00258. Заказ 36.
Тираж 670. Цена 1 руб. 60 коп.

Типография „Красный Восток“ Государственного Комитета по печати
Совета Министров Азербайджанской ССР. Баку, Ази Асланова, 80.