

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

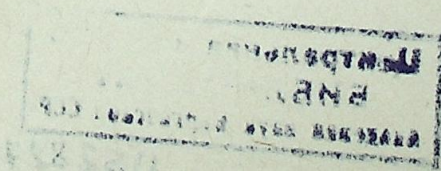
★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1969

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ



А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. Г. АЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРИРОДЫ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
МИКРОДЕФЕКТОВ НА НАВЕДЕННЫЕ ЦЕНТРЫ ОКРАСКИ
В ФОСФОРАХ $\text{NaCl}+\text{Ag}$

Известно, что под действием рентгеновских лучей у фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$ в ультрафиолетовой области возникает целый ряд *A*-, *B*-, *C*-, *D*- и *E*-полос возбужденного поглощения, обусловленных поглощением в *A*-, *B*-, *C*-, *D*- и *E*-центрах окраски, в состав которых, кроме элементарных дефектов решетки, входят ионы активатора Ag^+ . Некоторые результаты о спектральных свойствах указанных центров получены в работах [1–15].

Настоящая статья посвящена результатам исследования особенностей возникновения вышеуказанных центров при окрашивании фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$ различными ионизирующими радиациями (электронным пучком, рентгеновскими и ультрафиолетовыми лучами). При этом было изучено также влияние катионных примесей Ca , Sr , Ba и Cd , термической обработки, нагрева и облучения *F*-светом на спектры поглощения указанного фосфора. Монокристаллы $\text{NaCl}+\text{Ag}$ с концентрацией ионов Ag^+ 0,005; 0,025; 0,1; 0,25; 1 и 3 моль % и ионов Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} и Cd^{2+} от 0,01 до 1 моль % были выращены нами методом Киропулоса с вращающимся холодильником. Спектры основного и возбужденного поглощения указанных образцов были изучены на приборе СФ-4. Облучение электронным пучком производилось на линейном электронном ускорителе с энергией пучка 3 Мэв (130 мка) время облучения 10 сек. Рентгенизация монокристаллов, расположенных на расстоянии 15 см от вольфрамового антикатада, производилась при напряжении на трубке 45 кВт и токе 10 ма (время облучения 6 часов).

Результаты исследования спектров возбужденного поглощения указанных фосфоров приведены на рис. 1 (*a*, *б*) и 2 (*a*, *б*). Как видно из рис. 1 (*a*), на кривых возбужденного поглощения фосфоров $\text{NaCl}+\text{Ag}$ (см. кривые 1–6) наблюдаются *B*-, *C*-, *D*-, *E*- и *F*-полосы поглощения, расположенные соответственно при 275, 305, 330–350, 390 и 460 нм. Сравнение кривых возбужденного поглощения одних и тех же кристаллов, возбужденных электронным пучком и рентгеновскими лучами, показывает, что для всех концентраций Ag^+ от 0,005 до 3 моль % при электронном возбуждении наблюдается значительно бо́льшая эффективность накопления энергии на всех центрах окраски, чем при рентгеновском возбуждении. Особенно резкое различие в интенсивностях полос поглощения после рентгенизации и

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Подписано к печати 31/III-1970 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,00. Печ. лист. 10,96. Уч.-изд. лист. 10,22. ФГ 01143. Заказ 297. Тираж 770. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“, Государственного Комитета по печати. Совета Министров Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, 80.

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук КазССР

облучения электронным пучком мы наблюдали для *F*- и *M*-полос поглощения (сравни интенсивность полос в области 460 нм (*F*-полоса) на рис. 1, *а* (кривые 1—3) и 1, *б* (кривая 1), а также на рис. 2, *а* и *б* (кривые 3 и 1)).

Для *B*-, *C*-, *D*- и *E*-полос поглощения после рентгенизации и облучения электронным пучком мы наблюдали сходное спектральное распределение энергии, при котором наибольшую интенсивность имеет *B*-полоса поглощения, а интенсивность других полос убывает в ряду *B*-, *C*-, *D*-, *E*-пиков поглощения для соответствующих концентраций Ag^+ .

Следует добавить, что если при концентрации Ag^+ до 0,1 моль % указанные полосы поглощения имеют одинаковое разделение полос как у рентгенизованных, так и у облученных электронным пучком фосфоров, то при больших концентрациях у фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$, облученных электронным пучком, наблюдается лучшее разделение указанных полос поглощения и при этом удается получить нечеткую дублетную структуру *D*-полосы поглощения: D_1 - и D_2 -полосы, расположенные при 330 и 350 нм (см. кривые 3—6 на рис. 1, *а*). Далее следует отметить, что у фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$, продолжительное время облучившихся нефилтрованным светом Al -ой искры, в спектрах поглощения при всех концентрациях Ag^+ наблюдаются только очень слабые *B*-, *D*- и *E*-полосы поглощения.

Таким образом, как следует из вышеизложенного, наиболее полную информацию о наведенных *B*-, *C*-, *D*- и *E*-центрах окраски в указанных фосфорах можно получить после облучения их ускорен-

Рис. 1а. Спектры возбужденного поглощения фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$. Кривые 1—6—спектры поглощения фосфоров соответственно с концентрацией Ag 0,005; 0,025; 0,1; 0,25; 1,0 и 3,0 моль % после возбуждения их ускоренными электронами.

б и в. Спектры возбужденного поглощения рентгенизованных фосфоров: 1— $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1 моль %); 2, 3, 4 и 5— $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1), содержащих соответственно 0,01 моль %, примесей хлористого Ca , Sr , Ba и Cd .

ными электронами, при котором за очень короткое время удается достичь высокой плотности возбуждения и большой концентрации элементарных микродефектов в решетке NaCl , необходимых для создания указанных центров окраски.

Как видно из рис. 1 (*а*), где цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 обозначены кривые возбужденного поглощения фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$ с концентрацией Ag^+ , соответственно, 0,005; 0,025; 0,1; 0,25; 1,0 и 3,0 моль %, после электронного облучения указанных фосфоров с рос-

том концентрации Ag^+ растет интенсивность *B*-, *C*-, *D*-, *E*-полос поглощения, свидетельствующая о том, что в состав соответствующих центров окраски входят ионы серебра. Что касается *F*-полосы, то ее интенсивность растет до концентрации Ag^+ 0,1%, а при больших концентрациях падает. Последнее связано с тем, что при концентрациях Ag^+ 0,1% в решетке NaCl создаются более глубокие уровни по сравнению с *F*-уровнями и конкуренция их с последними по запасу электронов приводит к ослаблению *F*-полос поглощения. С ростом концентрации Ag^+ отмечается значительное перераспределение интенсивности *B*-, *C*-, *D*-, *E*-полос поглощения. Так, если при 0,005% серебра в NaCl наблюдается, кроме небольшой *B*-полосы, слабая D_2 -полоса поглощения (350 нм), то при 0,1% Ag^+ , кроме этих полос, видны интенсивные *C*- и D_1 -полосы, а при 3 моль % Ag^+ *C*-полоса растет настолько сильно, что становится доминирующей, в то время как при всех других концентрациях Ag^+ доминировала *B*-полоса, а *C*-полоса была слабее, чем все прочие полосы поглощения. Такой сильный рост *C*-полосы поглощения при больших концентрациях Ag^+ за счет *B*-полосы свидетельствует о справедливости модели Верста и Декайзера [11], представляющей *C*-центры как два спаренных *B*-центра.

Сравнение кривых поглощения рентгенизованных и облученных электронным пучком фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1), содержащих в решетке 0,01 и 1,0 моль % ионов Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} и Cd^{2+} , и $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1), не содержащих указанных добавок, показывает, что во всех случаях в присутствии указанных двухвалентных катионов интенсивность *B*-, *C*-, *D*-полос поглощения возрастает, они становятся несколько расплывчатыми и возникают более длинноволновые полосы поглощения, расположенные между *D*- и *E*-полосами поглощения. В этом случае, учитывая наложения слабой полосы возбужденного поглощения при 340 нм монокристаллов NaCl с примесями Ca , Sr , Ba и Cd на *C*- и *D*-полосы, установлено, что наибольший эффект наблюдается в присутствии ионов Ca , а в ряду Ba , Sr наблюдается его ослабление. Следует добавить, что как после рентгенизации, так и после облучения электронным пучком с ростом содержания указанных катионных примесей в $\text{NaCl} + \text{Ag}$ от 0,01 до 1 моль % наблюдается (кривые 1—5 возбужденного поглощения $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1), содержащего 0,01 моль % Ca , Sr , Ba и Cd , приведены на рис. 1, *б*, *в*) некоторое уширение вышеперечисленных полос поглощения, очевидно, обусловленное тем, что в присутствии этих катионов возникает много *B*-, *C*-, *D*- и *E*-центров, деформированных своим ближайшим дефектным окружением.

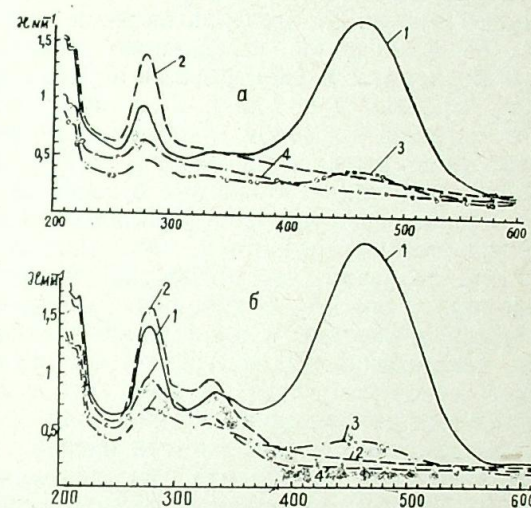


Рис. 2. Спектры возбужденного поглощения. Кривые 1 и 2 возбужденных электронным пучком фосфоров до и после их облучения *F*-светом. Кривые 3 и 4—рентгенизованные фосфоры до и после облучения их *F*-светом: а. $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1 моль %) б. $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,1 моль %) + Ca (0,01 моль %).

Наличие в решетке $\text{NaCl} + \text{Ag}$ катионов Ca , Sr , Ba и Cd как у свежих, так и у закаленных от 700°C состарившихся фосфоров приводит к возникновению более интенсивных F -полос поглощения.

В отличие от примесей Ca , Sr , Ba и катионы Cd вызывают ослабление F -полосы поглощения, которое наблюдается как после рентгенизации, так и после облучения указанных фосфоров электронным пучком. Такое поведение ионов Cd обусловлено тем, что ионы Cd^{2+} образуют с катионными вакансиями возбужденного фосфора $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Cd устойчивые комплексные образования и поэтому не могут способствовать, как ионы, Ca , Sr и Ba , росту F -полосы.

Следует отметить, что закалка фосфоров $\text{NaCl} + \text{Ag}$ с указанными катионами и без них от 700° приводит к некоторому возрастанию всех B -, C -, D -, E -полос поглощения, связанному, очевидно, с тем, что при закалке улучшается внедрение ионов Ag^+ в узлы решетки и в присутствии указанных катионов генерируется много катионных вакансий.

Интересные результаты были получены после разрушения F -центров окраски в вышеперечисленных фосфорах. Сравнение кривых возбужденного поглощения до и после оптического разрушения F -центров показывает, что у всех исследованных фосфоров при разрушении указанных центров окраски наблюдается значительный рост B -, C - и D -полос поглощения, свидетельствующий о принадлежности последних к электронным центрам окраски в фосфорах $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (см. кривые 1 и 2 и 3, 4 на рис. 2 а, б). Что касается D_2 -полосы поглощения, то после F -облучения наблюдается ее ослабление, однако перекрытие этой полосы с F -полосами не дает возможности вести правильное суждение о знаке D_2 -полосы поглощения.

Далее нами изучалось влияние нагрева до 100°C на окрашенные рентгеновскими лучами и электронным пучком фосфоры $\text{NaCl} + \text{Ag}$. Опыты показали, что после такого нагрева, как у рентгенизованных фосфоров, так и у облученных электронным пучком F -полосы разрушаются полностью и происходит частичное разрушение B - и D_2 -полос поглощения. Однако при этом сильно возрастает C -полоса. Этот факт свидетельствует о том, что в фосфорах $\text{NaCl} + \text{Ag}$ C -центры обладают наибольшей термической стабильностью, а возрастание интенсивности C -полосы после нагрева указывает на то, что процесс возникновения C -центров из спаренных B -центров в фосфорах $\text{NaCl} + \text{Ag}$ при повышенных температурах является более эффективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Forgo M. Zh. f. Physik, 56, 534, 1929.
2. Smakula A. Zs. f. Physik, 45, 1, 1927.
3. Кац М. Л. „ДАН СССР“ 85, 539, 1952.
4. Ребане Л. Н. Тр. ИФА АН ЭССР, № 12, 193 0.
5. Парфианович И. А. Дисс. М., 1959.
6. Парфианович И. А., Шуралева Е. Н., Ивахненко П. С. и Бабин П. А. „Изв. АН СССР“, т. 28, 1965, № 3.
7. Парфианович И. А., Пензина Э. Э., Пензин Ю. Г. „Изв. АН СССР“, т. 29, 1935, № 3.
8. Кац М. Л. „ДАН СССР“, 85, 539, 1952.
9. Etzel H. W., Schulman J. H. J. chem. phys., 22, 1549, 1954.
10. Кац М. Л. Люминесценция и электроннодырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочногалогенных соединений. Саратов, 1961.
11. Гиндина Р. И., Лушик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, т. 15, 1961.
12. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, т. 26, 1964.
13. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 6.

14. Халилов А. Х., Мамедов А. П. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. наук и матем. наук“, 1963, № 5.
15. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ 1964, № 1, 2, 3, 5.
16. Von der Vorst W., W. Physica, 903, 1957.

Поступило 20. V 1969

Э. Х. Халилов, Ф. Г. Элиев

$\text{NaCl} + \text{Ag}$ фосфорларында индуксијаланмыш рэнк мэркэзлэринэ микродефектлэрин тэбиэти вэ пайланмасынын тэсиринин тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә көстәрилән мэркэзлэрин мұхтәлиф нөв ионлашдырычы шұаларын тәсири алтында әмәлә кәлмәсинә $\text{NaCl} + \text{Ag}$ гәфәсиндә мөвчуд олан вэ мұхтәлиф 2 валентли ашгарлар васитәсилә јарадылан микродефектлэрин тәсиринин тэдгиги нәтичәлэри шәрһ едилмишдир.

К. П. МАМЕДОВ, С. Б. БАГИРОВ

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СЕЛЕНА

Как известно, на кинетику кристаллизации селена влияют различные факторы (примеси, давление, электрическое поле и др.) [1, 2, 3]. Если исходить из того, что увеличение давления приводит к повышению плотности, то можно предположить, что давление, созданное при кристаллизации, должно способствовать этому процессу. Экспериментальному исследованию этого вопроса и посвящена настоящая работа. Изучены изменение параметров решетки, плотность и удельное сопротивление селена.

В качестве исходного материала был взят аморфный селен марки В₄. Образцы получены на специально сконструированной цилиндрической пресс-форме, в которой производилась кристаллизация. После достижения нужного давления начинался нагрев образца. Необходимая температура кристаллизации, контролируемая термпарой, достигалась за 1—2 минуты. Кристаллизация производилась при двух температурах (130 и 170°С) в течение 30 минут, при давлениях от 7 до 19 кбар/см². При тех же температурно-временных условиях были получены образцы без давления (вес каждого из образцов равнялся 720 мг).

Интересно отметить, что образцы, закристаллизованные при давлениях 12—13 кбар/см², по внешнему виду резко отличаются от образцов, закристаллизованных при 7—10 кбар/см². На первых наблюдается явление, подобное наклепу в металлах.

Степень кристаллизации и искажения решетки в образцах определялись на рентгенодифрактомере УРС-50И. Для этого использовался К_α-дублет излучения меди. К_β-излучение отфильтровывалось никелевым фильтром толщиной 0,02 мм. Ширина и высота щелей были подобраны так, чтобы интенсивность наиболее сильного отражения находилась в линейной области характеристики ионизационного счетчика. Рентгеновская информация о степени кристаллизации и искажения решетки (изменение параметров решетки) получена по основным линиям селена 10 $\bar{1}0$, 10 $\bar{1}1$, 11 $\bar{2}1$, так как интенсивности первых двух наибольшие, а по последним двум более точно можно оценить искажения решетки.

В таблице приведены значения углов отражения, интенсивности, параметры *a* и *c* и объем элементарной ячейки при соответствующих условиях кристаллизации и давлениях. Положения пиков определены по точкам около положения идеального отражения, что увеличивает точность измерений. Смещения положений линий в зависимости от температуры кристаллизации находятся в пределах ошибки экспе-

римента, в то время как в зависимости от давления это смещение, как следует из таблицы, существенно.

Данные рентгенографического анализа показывают, что кристалл сжимается в направлении *a*, тогда как в направлении *c* он растягивается, так что отношение *c/a* с увеличением давления возрастает.

<i>P</i> кбар см ²	10 $\bar{1}1$	11 $\bar{2}1$	10 $\bar{1}0$		10 $\bar{1}1$		<i>A</i> °	CA°	<i>A</i> ³ —
			130°С	170°С	130°С	170°С			
0	14°52'30"	22°41'	310	325	475	490	4,365	4,943	81,6
7	14°54'	22°47'30"	365	385	530	560	4,340	4,955	80,8
10	14°55'30"	22°51'	390	425	575	620	4,325	4,962	80,4
13	14°57'	22°55'	415	450	625	660	4,309	4,974	79,9
16	15°00'	23°03'	435	475	655	700	4,278	4,991	79,1
19	15°04'	22°11'	450	510	690	750	4,246	5,001	78,1

На рис. 1 представлена зависимость отношения *c/a* от давления. Все экспериментальные значения хорошо укладываются на прямую

$$x = x_0 (1 + \alpha P).$$

где *x*₀—отношение *c/a* при *P* = 0 и $\alpha = 16,1 \cdot 10^{-7}$ бар⁻¹. Полученные результаты позволяют оценить коэффициенты остаточной линейной и объемной сжимаемости:

$$-\frac{1}{a_0} \frac{\Delta a}{\Delta P} = 10,8 \cdot 10^{-7} \text{ бар}^{-1}; \quad -\frac{1}{c_0} \frac{\Delta c}{\Delta P} = -4,9 \cdot 10^{-7} \text{ бар}^{-1};$$

$$-\frac{1}{v_0} \frac{\Delta v}{\Delta P} = 17,3 \cdot 10^{-7} \text{ бар}^{-1}.$$

Из приведенных в таблице данных об интенсивностях интерференций (10 $\bar{1}0$) и (10 $\bar{1}1$) следует, что при указанных температурах кристаллизации давление увеличивает степень кристаллизации. Действительно, отношение интенсивностей интерференционных линий растет с давлением. В частности для (10 $\bar{1}0$) отношение $\frac{I_p}{I_0}$ достигает

значения 1,57 при давлении 19 $\frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$ и температуре кристаллизации

170°С: *I*_р—интенсивность интерференции от образца при 19 $\frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$; *I*₀—

при 0 $\frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$. Кроме того, следует отметить, что роль давления при

температуре кристаллизации 130°С несколько ниже. Указанное выше отношение в этом случае достигает значения 1,45.

На рис. 2 представлена зависимость плотности образцов от давления, закристаллизованных при 130°С. Плотность определялась методом гидростатического взвешивания (т. е. взвешиванием образца в воздухе и в воде). Для уменьшения влияния поверхностного натяжения воды на подвес последний изготовляют из нихромовой проволоки диаметром 20 мк. Как показывает кривая, плотность образцов увеличивается с давлением, что хорошо согласуется с данными таблицы.

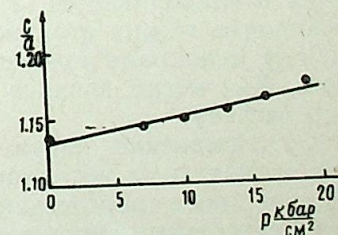


Рис. 1. Зависимость $\frac{c}{a}$ от давления

Для измерения удельного сопротивления на обе стороны образцов для зондов были нанесены золотые электроды путем возгонки в вакууме (10^{-4} мм Hg) со скоростью 0,3 мк/мин. Измерения производились зондовым методом при комнатной температуре. На рис. 3 показана зависимость удельного сопротивления образцов от давления

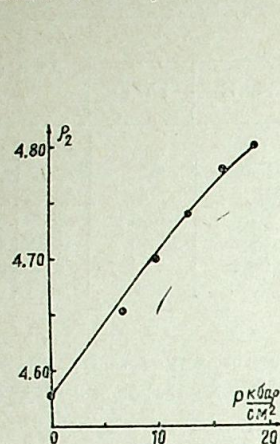


Рис. 2. Зависимость плотности от давления.

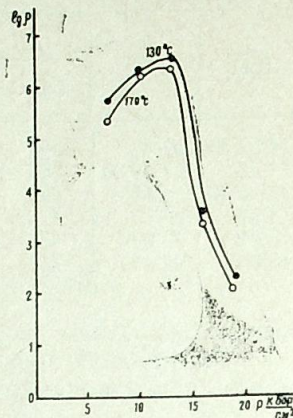


Рис. 3. Зависимость электрического сопротивления от давления.

закристаллизованных при двух температурах). Влияние давления при кристаллизации на удельное сопротивление оказывается сложным: в интервале $7-13 \frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$ удельное сопротивление образцов, закристаллизованных при 130°C , растет с увеличением давления от $0,46 \cdot 10^6$ до $3,5 \cdot 10^6 \text{ ом} \cdot \text{см}$, в то время как в интервале $13-19 \frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$ удельное сопротивление падает от $3,5 \cdot 10^6$ до $2 \cdot 10^2 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Приблизительно такие же результаты получаются и для образцов, закристаллизованных при $t = 170^\circ\text{C}$. Несколько повышенное значение удельного сопротивления исследованных нами образцов можно объяснить чистотой селена.

Обсуждение полученных результатов. Отмечено, что с увеличением давления параметр a уменьшается, а c увеличивается.

1. Характер изменения параметров решетки селена под давлением можно объяснить различием характера и силы связи между атомами вдоль и между цепочками. Этот факт оказывает существенное влияние на многие физические свойства селена, в частности и на коэффициент расширения. Действительно, коэффициент теплового расширения имеет сильную анизотропию, причем с ростом температуры параметр a увеличивается, а c уменьшается [4]. Это объясняется тем, что в цепочке между атомами селена связь ковалентная, в то время как между цепочками предполагается связь более слабая—Ван-дер-Ваальсова. Как видно, влияние давления носит качественно обратный характер нагреву.

2. Изменение параметров решетки под давлением как бы приводит к снятию ее исходного искажения. Действительно, если исходить из известного положения [5], что упаковка, лежащая в основании структуры таких элементов, как Se, Te, является трехслойной кубической, а структуру типа гексагонального селена можно получить, сжимая плотнейшую кубическую упаковку шаров вдоль тройной оси, то в результате длина объемной диагонали значительно сокращается при одновременном возрастании параметра a . Если нормальная кубическая

упаковка характеризуется примитивным ромбоэдром с углом в 60° , то в структуре селена этот ромбоэдр расширяется и угол его достигает почти 93° . Таким образом, увеличение c/a от 1,132 до 1,178 свидетельствует о том, что уже при давлениях $10-20 \frac{\text{кбар}}{\text{см}^2}$ начинается постепенное снятие "искажения" структуры гексагонального селена.

3. Уменьшение удельного сопротивления с увеличением давления, по-видимому, можно объяснить повышением плотности и, соответственно, снижением энергии активации носителей тока.

4. Рост интенсивности с повышением давления свидетельствует о том, что давление способствует кристаллизации селена.

В заключение авторы приносят благодарность М. Я. Бакирову за произведенное измерение удельного сопротивления образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов К. П., Нуриева З. Д., Гаджиева Э. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 4, 117, 1965.
2. Наследов Д. Н. и Козырев П. Т. ЖТФ, 24, 12, 1954.
3. Абдуллаев Г. Б., Мамедов К. П., А. И. Одобеску, Нуриева З. Д. „ДАН Азерб. ССР“, т. XXII, № 9, 1967.
4. Химическая связь в полупроводниковых и твердых телах. Минск, 1965.
4. Белов Н. В. Структура ионных кристаллов и металлических фаз. Изд. АН СССР, 1947.

Поступило 15. V 1969

К. П. Маммадов, С. Б. Багыров

Селенин бэ'зи хассэлэринэ тэзјигин тэ'сири

ХҮЛАСЭ

Кристаллашма просесиндэ тэзјигин селенин (В_4) кристаллашма дэрэчэсинэ, нүмүнэлэрин сыхлыгына, гэфэс сабитлэринэ вэ хүсуси мүгавимэтинэ тэ'сири тэдгиг едилмишдир.

($10\bar{1}0$), ($10\bar{1}1$) интерференсијаларын интенсивликлэринин тәһилинэ эсасән мүәјјән олунмушдур ки, кристаллашма тэзјиги чохалдыгча кристаллашма дэрэчэси артыр.

($10\bar{1}1$) вэ ($11\bar{2}1$) интерференсијаларынын бучаг вэзіјјэтинин дәјишмэсинэ көрә тэ'јин едилмиш гэфэс параметрлэри тэзјиг јүксэлдикчә елә дәјишир ки, c/a нисбэти 1,13-дән 1,17-јә гэдәр артыр (a параметри азалыр, c исә артыр). Ејни заманда көстэрилмишдир ки, кристаллашма просесиндэ тэзјиг чохалдыгча нүмүнэлэрин сыхлыгы артыр, електрик мүгавимэти исә азалыр.

С. А. ЗЕЙНАЛОВ, С. А. АЛИЕВ И М. И. АЛИЕВ

СТРУКТУРА ЗОНЫ ПРОВОДИМОСТИ И МЕХАНИЗМ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В $\text{In}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{Sb}$

Как известно, антимонид индия и антимонид галлия образуют непрерывный ряд твердых растворов. Это обстоятельство позволяет путем сплавления указанных компонентов получить новый полупроводник с наперед заданной шириной запрещенной зоны (в интервале $\epsilon_g = 0,18-0,69$ эв).

Ранее нами были исследованы [1, 2] электрические и тепловые свойства твердых растворов $\text{In}_{1-x}\text{Ga}_x\text{Sb}$ ($0,1 \leq x \leq 0,9$). Установлено, что во всем исследованном интервале полученные кристаллы обладают дырочной проводимостью. На основе данных о температурной зависимости холловской подвижности в примесной области проводимости сделано качественное предположение о механизме [рассеяния дырок].

Представляло интерес более детально исследовать вопрос о механизме рассеяния электронов в этих твердых растворах, особенно в эквимоллярном составе ($x = 0,5$), так как он имеет ширину запрещенной зоны (примерно $0,3 \div 0,36$ эв) [3 ÷ 5], существенно отличающуюся от InSb и GaSb .

Согласно теории Кейна [6], в полупроводниках с такой узкой запрещенной зоной закон дисперсии $\epsilon(k)$ должен отличаться от квадратичного. Следовательно, при изучении вопроса о механизме рассеяния электронов в таких кристаллах необходимо учитывать роль непараболичности зоны проводимости в кинетических эффектах. Поэтому исследование нужно начинать с определения закона дисперсии $\epsilon(k)$, т. е. определить эффективную массу m^* электронов при различных уровнях заполнения зоны, а затем с помощью дифференциального соотношения

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{(\hbar/2\pi)^2 k} \frac{d\epsilon}{dk} \quad (1)$$

установить $\epsilon(k)$.

Для выполнения последнего необходимо было получить набор образцов $\text{In}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{Sb}$ с концентрацией, меняющейся в широком диапазоне. Образцы готовились следующим образом: эквимоллярный состав $\text{In}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{Sb}$, полученный зонным выравниванием в атмосфере спектрально чистого аргона (со скоростью 5; 2 и 1 мм/час) легировали теллуром до 1 ат%. На рис. 1 представлена зависимость концентрации электронов от ат% Те. Как видно из рисунка, добавление Те меняет тип проводимости $\text{In}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{Sb}$ (при 0,0005% Те твердый раст-

вор уже имеет n -тип проводимости), затем с возрастанием количества Те концентрация электронов растет, достигая значения $n = 6 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ при 0,1 ат% Те, дальнейшее легирование не приводит к изменению концентрации носителей. Исходя из этого, можно сказать, что предел растворимости Те в $\text{In}_{0,5}\text{Ga}_{0,5}\text{Sb}$ ограничен $\sim 0,1$ ат%. В GaSb он составляет 0,5% [7, 8]. Об этом свидетельствует и тот факт, что с увеличением количества Те от 0,1 до 1 ат% концентрация не меняется, а подвижность резко падает (см. табл.).

Величина	Н о б р а з ц а				
	1	2	3	4	5
$n \cdot 10^{-18}, \text{ см}^{-3}$	0,31	0,56	1,00	5,70	5,50
$R_{\infty} \cdot \sigma \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$	6783	6470	4375	3310	1577
$\alpha_0 \text{ мкв/град}$	183	133	116	44	44*
$\alpha_{\infty} \text{ мкв/град}$	172	127	122	57	56
μ^*	1,7	2,5	7,0	15,0	15,2
$\frac{m^*}{m_0}$	0,029	0,033	0,039	0,058	0,056

Определение эффективной массы и приведенного химпотенциала производилось по значениям термо-э. д. с. α_{∞} и коэффициента Холла R в сильном магнитном поле по методике, описанной в [9 ÷ 11]. Поэтому здесь не будем останавливаться на подробностях этого метода,

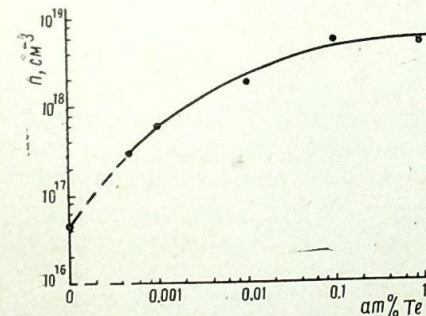


Рис. 1. Зависимость концентраций электронов от ат% Те.

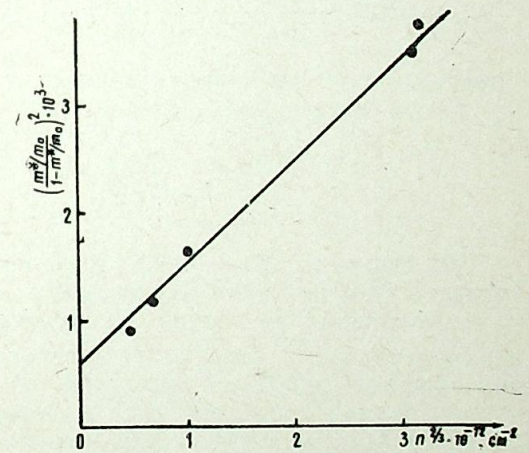


Рис. 2. Концентрационная зависимость эффективной массы электронов в виде прямолинейного графика, соответствующего формуле (6) теории Кейна.

укажем лишь на то, что ввиду сравнительно малого значения подвижности электронов в доступных нам магнитных полях невозможно было достичь насыщения $\alpha(H)$. Значение $\epsilon_{\infty} = \alpha_0 \pm \Delta\alpha_{\infty}$ было получено с помощью экстраполяционной формулы Родо [12]:

$$\Delta\alpha_{\infty} = \Delta\alpha \cdot \frac{1 + \left(\frac{uH}{c}\right)^2}{\left(\frac{uH}{c}\right)^2}, \quad (2)$$

где μ — холловская подвижность, H — напряженность магнитного поля, $\Delta\alpha$ — магнитотермо-э. д. с.

Таким образом при комнатной температуре на пяти образцах $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$ с концентрацией от $3 \cdot 10^{17}$ до $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ были измерены электропроводность σ , термо-э. д. с. σ_0 , магнитотермо-э. д. с. $\Delta\alpha_\infty$ и эффект холла R .

В таблице приведены значения α , α_∞ , n , а также результаты вычислений μ , μ^* и m^* .

По данным α_∞ и R_∞ согласно формуле

$$m^* = \frac{e}{\pi^2 \kappa_0^2 T} \left(\frac{3 h^3}{8 \pi e R_\infty} \right)^{2/3} \cdot \alpha_\infty \quad (3)$$

определены значения эффективных масс. На первых двух образцах вырождение было недостаточно сильным, поэтому при определении m^* поправка на слабое вырождение производилось по формуле

$$n = 4\pi \left(\frac{2m^* \kappa_0 T}{h^2} \right)^{3/2} \cdot F_{1/2}(\mu^*), \quad (4)$$

справедливой для любой степени вырождения в случае квадратичного закона дисперсии и в случае непараболического закона, если носители тока заполняют лишь очень узкую область спектра вблизи дна зоны [9]. При этом поправка на m^* не превышает 10%.

На рис. 2 представлена концентрационная зависимость эффективной массы m^* в координатах, позволяющих судить о ее соответствии теории Кейна [6]. Для полупроводников с узкой шириной запрещенной зоны теория Кейна приводит к следующему закону дисперсии:

$$\epsilon(\kappa) = \frac{(h/2\pi)^2 \kappa^2}{2m_0} + \frac{\epsilon_g}{2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2(h/2\pi)^2 \kappa^2}{\epsilon_g} \cdot \frac{m_0 - m^*}{m_0 m^*}} - 1 \right\} \quad (5)$$

зависимость m^* от волнового числа κ имеет вид

$$\frac{m^*}{m_0} = \frac{m_0}{m^*} \sqrt{1 + \frac{2(h/2\pi)^2 \kappa^2}{\epsilon_g} \cdot \frac{m_0 - m^*}{m_0 m^*}}. \quad (6)$$

Из формулы (6) видно, что концентрационная зависимость m^* согласно теории Кейна в указанных координатах должна дать прямую. Как видно из рисунка, структура $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$ до концентрации электронов $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ соответствует теории Кейна. При сопоставлении графика (рис. 2) с формулой (6) полагалось, что связь между концентрацией носителей тока и значением волнового числа κ определяется формулой $\kappa^3 = 3\pi^2 n$, справедливой в случае вырождения.

Анализируя экспериментальную кривую рис. 2, с помощью (5) можно получить значения эффективной массы на две зоны проводимости m_0^* и ширину запрещенной зоны ϵ_g . Для этого необходимо экстраполировать прямую до пересечения оси $\left(\frac{m^*/m_0}{1 - m^*/m_0} \right)^2$ и по значе-

нию, соответствующему точке пересечения, определить m^* , затем по формуле (6) вычислить ϵ_g . Таким образом были получены следующие значения: $m_0^* = 0,025 m_0$ и $\epsilon_g = 0,36 \text{ эВ}$. Значение ϵ_g , определенное нами, находится в хорошем согласии с данными [4,5]. Вычисление m_0^* производилось с помощью формул (3) и (4) работы [10], путем алгебраической обработки экспериментальных данных, полученных для образцов с наименьшей концентрацией (образец 1 и 2). При этом было

найдено $m_0^* = 0,024 m_0$, что находится в хорошем согласии с вышеприведенным значением.

На рис. 3 представлена зависимость $m^*(n)$ в обычных координатах. Сплошная кривая построена согласно (6) по нашим данным ϵ_g и m_0^* .

Для определения механизма рассеяния электронов мы воспользовались экспериментальными данными σ_0 и $\Delta\alpha_\infty$. Зона проводимости была принята нестандартной, при этом время релаксации записывается в виде

$$\tau = \tau_0 (\kappa^2)^{-1/2} \frac{d\epsilon}{d\kappa}. \quad (7)$$

В данном случае σ_0 и $\Delta\alpha_\infty$ зависят как от r , так и от параметра нестандартности зоны γ , определяемого следующим выражением [13, 14]:

$$\gamma = \frac{n}{m^*} \frac{dm^*}{dn}. \quad (8)$$

В случае сильного вырождения σ_0 и $\Delta\alpha_\infty$ имеют вид:

$$\sigma_0 = \frac{\pi^{2/3} \kappa_0^2 m^* T}{3 e (h/2\pi)^2 (3n)^{2/3}} \{2r + 3 - 6\gamma\}; \quad (9)$$

и

$$\Delta\alpha_\infty = \frac{\pi^{2/3} \kappa_0^2 m^* T}{3 e \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 (3n)^{2/3}} \{6\gamma - 2r\}. \quad (10)$$

Для образцов 1 и 2 поправка на слабое вырождение производилась с помощью приближенных формул [10].

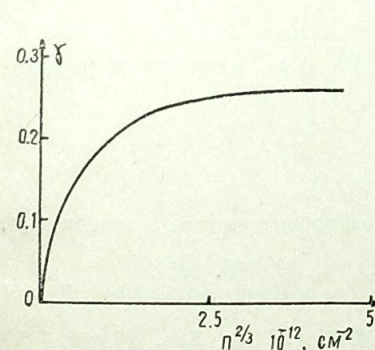


Рис. 4. Концентрационная зависимость параметра непараболичности зоны проводимости в $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$

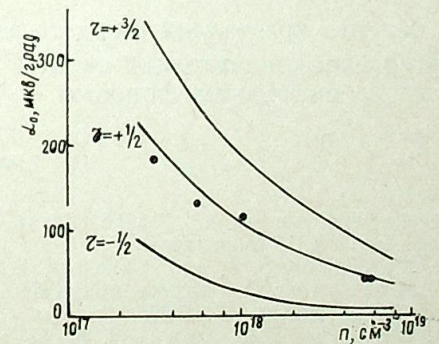


Рис. 5. Теоретические кривые концентрационной зависимости термо-э. д. с. при различных механизмах рассеяния (кружками отмечены экспериментальные значения).

Пользуясь выражениями (6) и (8), получим

$$\gamma = \frac{A n^{2/3}}{3(a + A n^{2/3})[1 + \sqrt{a + A n^{2/3}}]}, \quad (11)$$

где

$$A = \frac{2(3\pi^2)^{2/3} (h/2\pi)^2 m_0^*}{\epsilon_g m_0^2} \text{ и } a = \left(\frac{m_0^*}{m_0} \right)^2$$

По известным значениям n , m_0^* и ϵ_g с помощью (11) вычислена зависимость $\gamma(n)$, представленная на рис. 4 в виде кривой. На рис. 5 показаны полученные таким образом теоретические кривые зависимости $\alpha_0(n)$ для трех механизмов рассеяния: на акустических фононах $r = -\frac{1}{2}$, на оптических $r = +\frac{1}{2}$ и на ионизованных примесях $r = +\frac{3}{2}$. Из рисунка видно, что экспериментальные значения α_0 во всем

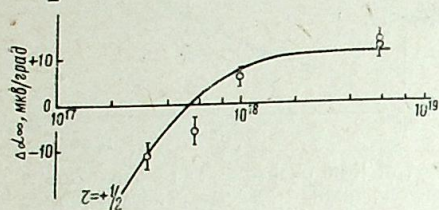


Рис. 6. Теоретическая кривая и экспериментальные данные концентрационной зависимости продольного термомагнитного эффекта при $r = +\frac{1}{2}$.

исследованном диапазоне концентраций удовлетворительно укладываются на кривую $r = +\frac{1}{2}$. Этот вывод следует также из рис. 6, на котором представлена зависимость $\Delta\alpha_\infty(n)$. Здесь экспериментальные точки хуже укладываются на кривую $r = +\frac{1}{2}$, это связано с меньшей относительной точностью определения величины $\Delta\alpha_\infty$.

Значение $\Delta\alpha_\infty$ в случае нестандартной зоны при $r = +\frac{1}{2}$ и $n > 5 \cdot 10^{17}$ имеет положительный знак, в то время как при параболической зоне ($\gamma = 0$) в этом случае знак эффекта был бы отрицательным при любом n (рис. 6). Следовательно, смена знака $\Delta\alpha_\infty$ с ростом концентрации связана не с изменением механизма рассеяния, как это должно было бы быть при стандартной зоне, а с влиянием непараболичности на продольный термомагнитный эффект.

Исходя из того факта, что экспериментальные значения α_0 и $\Delta\alpha_\infty$ хорошо укладываются на теоретическую кривую с $r = +\frac{1}{2}$, можно полагать, что в кристаллах твердого раствора $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$ (при $T = 300^\circ\text{K}$) в интервале концентраций от $3 \cdot 10^{17}$ до $6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ электроны рассеиваются на оптических фононах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зейналов С. А., Алиев М. И. Сб. „Полупроводниковые материалы“. Изд-во Азерб. ССР (в печати).
2. Zejnalov S. A. and Aliev M. I. Phys. stat. sol., 22, 153, 1967.
3. Маделунг О. Физика полупроводниковых соединений элементов III и V групп. Изд-во „Мир“, М., 1967.
4. Woolley J. C., Evans S. A., Gillett C. M. Proc. Phys. Soc., 74, 244, 1959.
5. Иванов-Омский В. И., Коломиец Б. Т. „ДАН СССР“, 127, 135, 1959.
6. Кане Е. О. Phys. Chem. sol. 1, 249, 1957.
7. Hall R. N. and Racette J. H. J. appl. phys., 32, 856, 1961.
8. Абдуллаев Г. Б., Алиев М. И., Сафаралиев Г. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 6.
9. Коренблит Л. Л., Машовец Д., Шалыт С. С. ФТТ, 6, 559, 1964.
10. Шалыт С. С., Алиев С. А. ФТТ, 6, 1979, 1964.
11. Алиев С. А., Коренблит Л. Л., Шалыт С. С. ФТТ, 7, 6, 1674, 1965.
12. Rodot M. Ann. Phys. Paris. 5, 1035, 1960; Solid. State Phys. Electr. Technol., 2, 689, 1960.
13. Zawadzki W. Phys. Stat. sol., 2, 385, 1962.
14. Kolodziejczak J., Sosnowski L. Acta. Phys. Polon., 21, 399, 1962.

Поступило 16. IV 1969

С. Э. Зейналов, С. А. Алиев, М. И. Алиев

$\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$ -дә кечиричи зонаның җыгурулушу вә электронларын сәпилмә механизми

ХҮЛАСӘ

Җүкдашыҗычыларынын концентрасијасы мұхтәлиф олан, бир нечә электрон кечиричиликли $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$ нүмунәләри үчүн гүввәтли магнит сәһәсиндә холл сабити вә терпо ЕһГ әмсалы өлчүлмүшдүр.

Тәчрүбәләрә әсасән эффектив күтләнин концентрасијадан асылылығы вә электронларын кечиричи зонада дисперсијасы мүәјјәнләшдирилмишдир. Тәјин едилимишдир ки, концентрасијанын $\sim 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ гижмәтинә кими дисперсија терпо Кејн нәзәријәсинә ујғундур.

Отаг температурунда, терпо ЕһГ (α_0) вә магнит терпо ЕһГ-нин ($\Delta\alpha_\infty$) концентрасијадан асылылығынын өјрәнилмәси (7) ифадәсинин көмәји илә сәпилмә механизмини дәгиг мүәјјәнләшдирмәјә имкан верир. Сәпилмә параметринин гижмәти $r = +\frac{1}{2}$ олуб, тәдгиг едилимиш бүтүн концентрасија интервалларында ($3,1 \cdot 10^{17} + 6 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$) дәјишмир.

1752827

Центральная научная
Библиотека
Академии наук Казахской ССР

Н. А. АЛИЕВ, Б. А. АХМЕДОВ, Р. А. АКОПЯН

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВИДА ТЕРМООБРАБОТКИ

Одним из основных моментов, определяющих долговечность стальных изделий в эксплуатации, является правильный выбор режима термической обработки. Исходя из требований, предъявляемых к механическим свойствам изделий, для выбора оптимального режима необходимо исследовать все возможности термической обработки. Этим вопросам посвящено много работ [1, 2, 3, 4]. Целью настоящей работы являлось определение оптимального режима температуры отпуска нефтепромысловых труб, прокатанных из стали 36Г2С. Одним из эффективных способов исследования вышеуказанной задачи является рентгеноструктурный анализ. Известно [4], что ширина и форма рентгеновских линий являются источником сведений о важных для практики процессах упрочнения и разупрочнения металлов и сплавов. Предварительные рентгенографические исследования стали 36Г2С [5] показали, что образцы, закаленные от 900°C сжатым воздухом и подвергшиеся отпуску при 600°C, обладают удовлетворительной характеристикой.

Нами исследовалось две серии труб из стали 36Г2С, закаленных от температур 900 и 950°C. Нагрев образцов производился в электропечи. В качестве охлаждающей среды применяли сжатый воздух ($p = 2 \text{ ат}$ до температуры 150°C) и воду. Закаленные трубы подвергались отпуску при 550, 600 и 650°C.

Для рентгенографического исследования образцы вырезали ($9 \times 9 \times 6 \text{ мм}$) из труб, а затем протравливали в 25%-ном растворе азотной кислоты для того, чтобы удалить деформированный слой, образовавшийся при механической обработке. Рентгенографирование образцов производилось на железном излучении, в камере КРОС-I фиксировалась интерференционная линия (220) на расстоянии 66,2 мм, а в камере РКУ-114—линия (110) на расстоянии 57 мм. Фотометрирование полученных рентгенограмм производилось на микрофотометре МФ-4 при увеличении 15, скорость 9 мм/мин и ширина щели 0,5 мм. Микрофотограммы представлены на рисунке.

Как видно из рисунка, наибольшая размытость κ_2 -дублета линии (220) наблюдается от образцов, закаленных в воде и сжатым воздухом. Однако ширина линии от образца, закаленного в воде, больше чем у закаленных сжатым воздухом. На микрофотограммах отпущенных образцов с увеличением температуры отпуска наблюдается разделение дублета, а у нормализованных происходит полное разделение κ_2 -дублета. Ширина линий определялась из отношения пло-

щади кривой почернения и максимальной ее высоты [6]. Микроискажения и размеры блоков (областей когерентного рассеяния) определялись методом аппроксимации [7]. В зависимости от четкости линии ошибка измерения ее ширины изменялась от 2 до 6%.

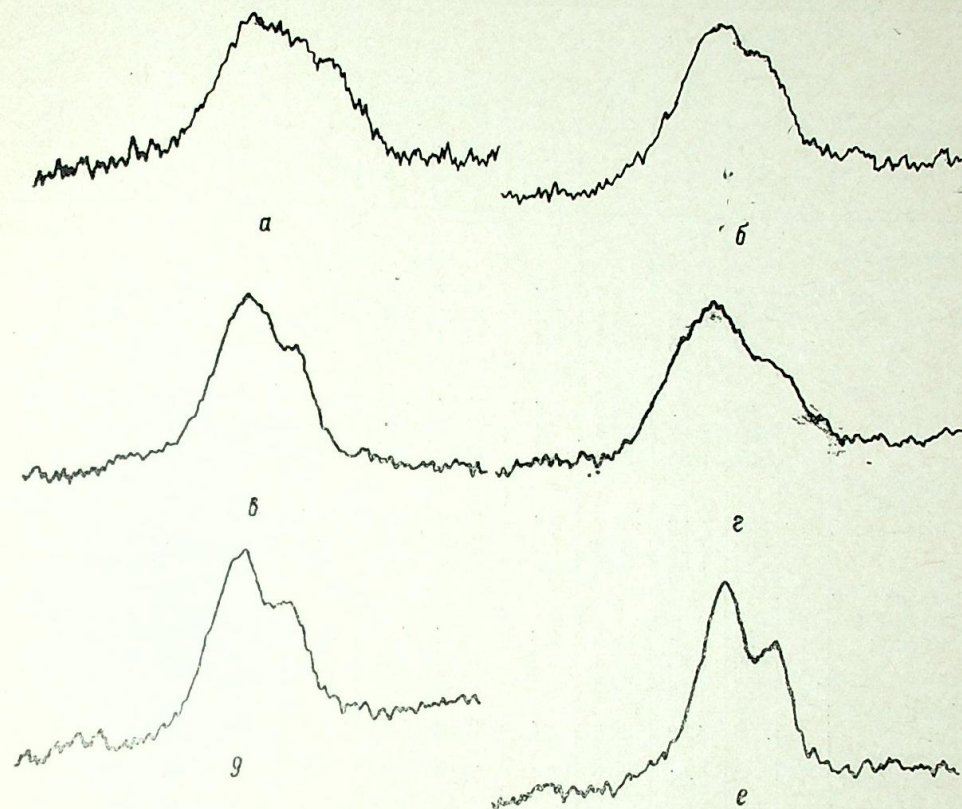


Рис. 1. а, б, в—образцы, закаленные водой (950°C) и подвергнутые отпуску при 550°, 600° и 650°C; г, д, е—образцы, закаленные (950°C) сжатым воздухом и подвергнутые отпуску при 550°, 600° и 650°C.

В таблице представлены результаты расшифровки рентгенограмм и значение твердости по Роквеллу (шкала 30 N). Во второй и третьей графах приведены ширина рентгеновских линий (110) и (220), в четвертой и пятой—ширина линий (110) и (220), исправленная на неоднородность излучения и геометрические условия съемки, в восьмой—отношение физической ширины линий (110) и (220), в девятой—размер блоков в см, в десятой графе приводятся значения микроискажения, а в одиннадцатой—значение твердости.

Как видно из таблицы, образцы из стали 36Г2С после закалки в воде 900°C имели наименьшие размеры блоков $3,2 \cdot 10^{-6} \text{ см}$ и микроискажения достигли значения $3,2 \cdot 10^{-3}$. Сопоставляя образцы, подвергавшиеся закалке обдувкой, с образцами, закаленными в воде, можно заметить, что в первом случае размеры блоков больше ($6,1 \cdot 10^{-6} \text{ см}$), а микроискажения меньше ($1,7 \cdot 10^{-3}$). Это может быть следствием того, что при сравнительно медленном охлаждении сжатым воздухом в стали успевают частично пройти процессы распада. Однако надо отметить, что в данном случае твердость стали определяется не только субструктурой α -фазы, но и количеством дисперсности карбидов.

При повышении температуры закалки от 900 до 950°C отмечается более резкое уменьшение величины микроискажений при практически неизменных величинах твердости и областей когерентного

Вид термо- обработки	Темпера- тура, °C		$B_1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	$B_2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	$b_1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	$b_2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	$\beta_1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	$\beta_2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$	β_2/β_1	$D \cdot 10^{-6} \text{ см}$	$\frac{\Delta a}{a} \cdot 10^{-3}$	Твердость HR по шкале 30 N
	закалки	отпуска										
Закалка об- дувкой с отпуском	950	550	6,20	28,9	3,4	13,04	3,0	13,8	4,60	11,3	0,90	45
		600	6,10	28,4	3,4	13,04	2,84	13,1	4,63	12,4	0,86	41
		650	6,05	27,5	3,4	13,04	2,67	12,0	4,51	12,5	0,76	38
Закалка в воде с от- пуском	"	550	7,33	32,9	3,4	13,04	4,60	19,3	4,20	5,8	1,10	49
		600	6,80	30,4	3,4	13,04	4,0	16,0	4,0	6,9	0,81	46
		650	6,05	27,8	3,4	13,04	2,67	12,6	4,72	14,2	0,85	40
Закалка об- дувкой с отпуском	900	550	6,63	34,8	3,4	13,04	3,70	18,4	5,0	11,6	1,40	45
		600	6,28	30,2	3,4	13,04	3,14	15,7	5,0	12,9	1,11	43
		650	6,20	28,9	3,4	13,04	2,90	14,0	4,83	13,2	0,96	39
Закалка в воде с от- пуском	"	550	7,21	32,0	3,4	13,04	4,43	20,0	4,51	7,5	1,25	47
		600	6,05	27,4	3,4	13,04	2,67	11,9	4,46	12,3	0,74	42
		650	5,82	27,3	3,4	13,04	2,42	11,2	4,63	14,2	0,73	41
Нормализа- ция			4,50	22,6	3,4	13,04	1,60	6,6	4,15	14,6	0,35	34
Исходное состояние			5,64	22,9	3,4	13,04	2,0	6,6	3,30	14,5	1,4	34
Закалка в воде	900		12,45	53,7	3,4	13,04	10,70	48,9	4,60	3,2	3,2	72
Закалка обдувкой	900		8,14	37,8	3,4	13,04	5,70	26,1	4,58	6,1	1,7	60

рассеяния. Так, например, после отпуска при 550°C значения микроискажений уменьшаются до $0,9 \cdot 10^{-3}$ (температура закалки 90°C). Размеры блоков после отпуска при 550—650°C имеют порядок $10,0—15,0 \cdot 10^{-6} \text{ см}$. Размеры областей когерентного рассеяния при нормализации составляют $14,6 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, а микроискажения достигают значения $0,35 \cdot 10^{-3}$. Это объясняется тем, что после нормализации сталь находится в более стабильном (разупрочненном) состоянии. По мере повышения температуры отпуска увеличиваются размеры блоков и уменьшаются значения микроискажения и твердости. Учитывая это, можно предположить возрастание ударной вязкости подобно тому, как это описано в работе [9].

Следует отметить, что микроискажения характеризуют уровень пиков внутренних напряжений, которые определяют склонность стали к хрупкому разрушению. В этом случае целесообразность закалки обдувкой очевидна. Таким образом, исходя из анализа полученных характеристик, можно рекомендовать для получения оптимального сочетания механических свойств стали 36Г2С следующую термическую обработку: закалку от 950°C обдувкой сжатым воздухом и последующий отпуск в интервале 550—600°C.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лысак Л. И. Сб. „Вопросы физики металлов и металловедения“. Изд-во АН УССР, № 3, 1952.
2. Курликовская М. П., Лысак Л. И. и др. Сб. „Вопросы физики металлов и металловедения“, № 14, 1962.
3. Лысак Л. И., Векслер Е. Я. Сб. „Вопросы физики металлов и металловедения“. Изд-во АН УССР, № 19, 1964.
4. Физические основы прочности и пластичности металлов, стр. 153. Металлургиздат, М., 1963.
5. Алиев Н. А., Акопян Р. А., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ 1969, № 1.
6. Рентгенография в физическом металловедении под ред. Ю. А. Багряцкого. Металлургиздат, М., 1961.
7. Лысак Л. И. „Вопросы физики металлов и металловедения. Изд-во. АН УССР“ № 3, 1952.
8. Каминский Э. З. Проблемы металловедения и физики металлов. Металлургиздат, 1949.
9. Лысак Л. И. Векслер Е. Я. Физика металлов и металловедение, 19, 6, 1965.

Поступило 10. V 1969

Н. Э. Элијев, Б. А. Әһмәдәв, Р. А. Ақопјан

Термик е'малын нөвүндән асылы олараг
мөһкәмлијин ренткенографик тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгалә термик е'малын оптимал шәраитини мүнәввәләшдирмәк мәгсәди илә 36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш вә мүнхәлиф термик шәраитләрдә е'мал олунмуш бору нүмунәләринин ренткенографик тәдгигинә һәср олунмушдур.

Мүнәввәләшдир ки, 36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш боруларда ән јахшы механики хассәләр әлдә етмәк үчүн онлары 950°C температурда сыхылмыш һава илә табландырдыгдаи сонра 600°C температурда табәксилтмә әмәлијјатына уғратмаг лазымдыр.

А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. Г. ФАТУЛЛАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЗДАНИЯ НАВЕДЕННЫХ АКТИВАТОРНЫХ ЦЕНТРОВ ОКРАСКИ В ФОСФОРАХ $KCl+Ag$, ВОЗБУЖДЕННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ИОНИЗИРУЮЩЕЙ РАДИАЦИИ

Некоторые результаты о возникновении наведенных A -, B -, C -, D -, и E -активаторных центров окраски в активированных серебром щелочно-галогидных фосфорах при облучении их рентгеновскими лучами были получены в работах [1—14]. Однако детальная структура и механизм возникновения этих центров до конца не выявлены. В настоящей работе в целях выяснения влияния различных ионизирующих радиаций, катионных примесей и термообработки на аккумуляцию энергии в фосфоре $KCl+Ag$ и создание в нем активаторных центров окраски нами были изучены спектры основного и возбужденного поглощения указанных фосфоров при возбуждении их электронным пучком, рентгеновскими и ультрафиолетовыми лучами. Было изучено также влияние на указанные центры квантов видимого света и нагрева до 80, 140 и 180°C.

Монокристаллы фосфоров $KCl+Ag$ с примесями Ca , Sr , Ba и Cd (с концентрацией 0,01 и 1 моль % в расплаве) и без них были выращены нами методом Киропулоса с вращающимся холодильником. Спектры поглощения изучались на приборе СФ-4. Результаты исследования спектров возбужденного поглощения указанных монокристаллов представлены на рис. 1, 2.

Как видно из рис. 1 (а), где приведены спектры наведенного поглощения облученных электронным пучком (энергия 3 Мэв, время облучения 0,5 сек) фосфоров $KCl+Ag$ с различными концентрациями ионов Ag^+ (кривые 1—7 соответственно для концентраций Ag^+ 0,001; 0,005; 0,025; 0,1; 0,25; 0,5 и 1 моль %), в области расположения полос поглощения B - и D -центров окраски при больших концентрациях ионов Ag^+ (более 0,025%) наблюдаются дублетные полосы возбужденного поглощения с максимумами 288, 295 и 342, 360 нм, обусловленные соответственно поглощением в B_1 -, B_2 - и D_1 -, D_2 -центрах окраски [6, 14]. Однако на кривых поглощения рентгенизованных фосфоров $KCl+Ag$ (время облучения вольфрамовой трубкой 8 часов при 45 кВ, 10 мА и расстоянии от антикатада 15 см) даже при концентрациях 0,5 мол % нам не удалось наблюдать четкого разделения вышеуказанной дублетной структуры B - и D -полос поглощения, хотя в работе [6] при других условиях опыта авторам удалось получить нечеткое разделение D_1 - и D_2 -полос поглощения у рентгенизованных фосфоров $KCl+Ag$.

Из сравнения кривых 1—7 с кривыми 8 рис. 1, а видно, что при всех вышеуказанных концентрациях Ag^+ рентгенизованные и облученные электронным пучком фосфоры $KCl+Ag^+$ имеют противоположный ход распределения интенсивностей B -, C -, D - и E -полос поглощения (хотя механизм возникновения соответствующих центров окраски в обоих случаях, по-видимому, одинаков). Если у рентгенизованных фосфоров интенсивность указанных полос растет в ряду B -, C -, D - и E -пиков поглощения, то после облучения электронным пучком для всех концентраций Ag^+ наиболее интенсивной является полоса поглощения B -центров, а поглощение в E -центрах окраски всегда имеет минимальное значение по сравнению с B -, C - и D -полосами. Далее, как видно из указанных кривых рис. 1 (а), при электронном возбуждении в отличие от рентгенизованных фосфоров $KCl+Ag$ из-за относительно четкого разделения полос поглощения удается получить информацию не только о регулярных B -, C - и D -центрах окраски, но и о подобных центрах, деформированных своим ближайшим дефектным окружением. Наши опыты показали, что у фосфоров $KCl+Ag$, облучаемых продолжительное время нефльтрованным светом Al -ой искры, на спектрах возбужденного поглощения наблюдаются только слабые B -, D - и E -полосы поглощения.

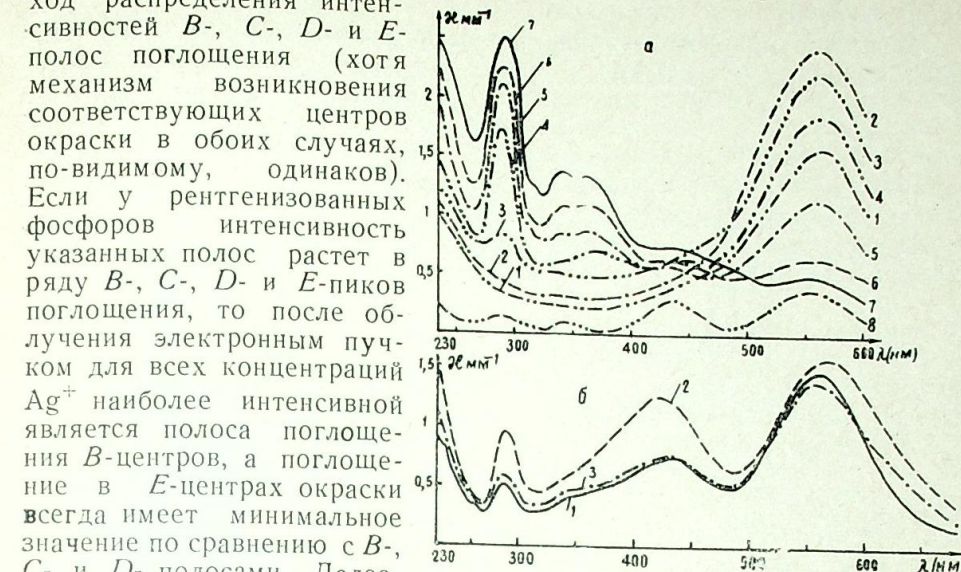


Рис. 1. Спектры возбужденного поглощения $KCl+Ag$ и $KCl+Ag(0.1) - Ca(1.0)$. а. 1—7 спектры поглощения фосфоров $KCl+Ag$ соответственно с концентрациями Ag 0,001; 0,005; 0,025; 0,1; 0,25; 0,5 и 1,1 мол % после возбуждения их ускоренными электронами; 8—спектр поглощения рентгенизованного $KCl+Ag(0.5)$. б. 1, 2 и 3 спектры поглощения рентгенизованного фосфора $KCl+Ag$, Ca соответственно до термической обработки, после закалки и отжига.

Таким образом, как явствует из вышеизложенного, наиболее точную информацию о наведенных центрах окраски в указанных фосфорах можно получить после облучения ускоренными электронами, при котором за очень короткое время удается достичь высокой плотности возбуждения и большой концентрации элементарных микродефектов в решетке исследованного фосфора.

Следует отметить, что при всех концентрациях ионов Ag^+ у облученных электронным пучком фосфоров, в отличие от рентгенизованных, наблюдаются очень интенсивные V -, F - и M -полосы поглощения, обусловленные поглощением света соответственно в дырочных V -центрах, электронных F -центрах и более сложных M -центрах окраски неактивированной решетки KCl . Действительно, если из-за ослабляющего влияния ионов Ag^+ M -полосы поглощения, наблюдаемые при 825 нм, у рентгенизованных фосфоров $KCl+Ag$ не проявляются уже при концентрации Ag^+ 0,001 моль %, то после электронного возбуждения этих фосфоров указанная полоса наблюдается даже при 0,25 моль % ионов Ag^+ в решетке KCl . Что касается

V - и F -полос поглощения, расположенных соответственно при 230 и 560 нм, что по сравнению с рентгенизованными у окрашенных электронным пучком фосфоров интенсивность этих полос возрастает в несколько раз.

Сравнение кривых 1—7 на рис. 1, а показывает, что с ростом концентрации Ag^+ от 0,001 до 1 моль % растет интенсивность B_1 -

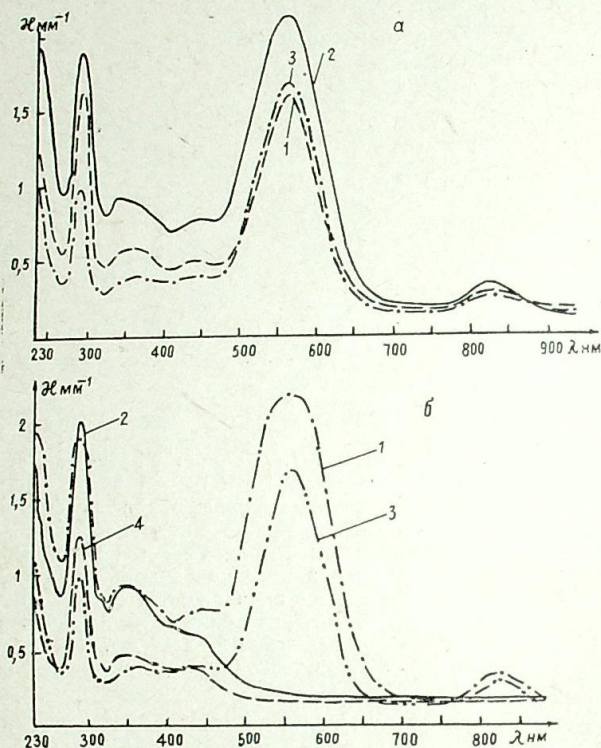


Рис. 2. Спектры возбужденного поглощения облученных электронным пучком фосфоров.

а. 1— $KCl+Ag$ (0,1)+ Sr (0,05); 2— $KCl+Ag$ (0,1)+ Sr (1,0); 3— $KCl+Ag$ (0,1)+ Ca (1,0).

б. Спектры возбужденного поглощения $KCl+Ag$, Ca и $KCl+Ag$, Sr фосфоров до (1, 3) и после (2, 5) их F -облучения.

B_2 -, C -, D_1 -, D_2 - и E -полос поглощения. Этот факт свидетельствует о том, что в состав соответствующих центров окраски входят ионы Ag^+ . Следует заметить, что степень роста интенсивности указанных полос с ростом концентрации ионов Ag^+ сильно отличается. Так, например, если B -полосы продолжают расти до 5 моль% Ag^+ , то E -полоса после 0,25 моль % Ag^+ очень мало изменяется с ростом числа ионов Ag^+ , а рост D_1 - и D_2 -полос после 3 моль% Ag^+ сильно задерживается. Такая концентрационная зависимость интенсивности E -полосы, наводит на мысль о том, что при концентрации Ag^+ 1,0 моль% в решетке KCl сильно уменьшается число изолированных ионов Ag^+ , ибо согласно достоверно установленной модели E -центров последние состоят из ионов Ag^+ , расположенных на регулярных катионных узлах решетки и присоединенного к нему свободного электрона.

Интересная закономерность роста с увеличением концентрации Ag^+ наблюдается у F -центров окраски. Как видно из рис. 1 (а), у фосфоров $KCl+Ag$, окрашенных электронным пучком, до 0,005 моль % Ag^+ в KCl эта полоса растет, а при более высоких концентрациях Ag^+ она резко ослабляется настолько (кривая 7 рис. 1, а), что уже при 3 мол % ионов Ag^+ в спектре поглощения F -полосы не наблюдается (на рис. 1, а она не приводится). Такое поведение F -полосы у окрашенных электронами $KCl+Ag$ несколько отличается от концентрационной зависимости указанной полосы поглощения рентгенизованных фосфоров, у которых ослабление ее интенсивности под влиянием ионов Ag^+ в решетке KCl наступает при концентрациях серебра в 100 раз больших. Эти факты должны быть использованы для выяснения детального механизма создания центров окраски под влиянием ионизирующих радиаций.

Сравнение спектров возбужденного поглощения, окрашенных электронным пучком и рентгеновскими лучами, фосфоров $KCl+Ag$ (0,1) с примесями Ca , Sr , Ba и Cd и без них (некоторые из них представлены на рис. 2) показывает, что в присутствии этих примесей интенсивность B -, C -, D -, E - и M -полос поглощения возрастает (при этом особенно сильно растет E -полоса поглощения у рентгенизованных фосфоров) и в области, расположенной между D_2 - и E -полосами, возникает новая полоса поглощения. С ростом концентрации катионов Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} и Cd^{2+} в решетке KCl от 0,01 до 1 моль% происходит значительный рост B -, C -, D -, E - и F -полос поглощения и сильное перекрытие соседних полос, свидетельствующее о том, что при больших концентрациях указанных катионов возникают более сложные центры окраски, содержащие, кроме ионов Ag^+ , различные ассоциации примесных и тепловых микродефектов кристаллической решетки.

Наши опыты по выяснению влияния видимых квантов света (F - и E -света) на центры окраски вышеуказанных фосфоров показали, что во всех случаях после облучения F - и E -светом окрашенных электронным пучком и рентгеновскими лучами фосфоров наблюдается рост интенсивности B -, C - и D_1 -полос поглощения (для некоторых фосфоров см. рис. 2, б). Этот факт является доказательством электронной природы соответствующих B -, C -, D_1 -центров окраски. При продолжительном облучении фосфоров F - и E -светом эти центры разрушаются полностью, о чем свидетельствует полное исчезновение F - и E -полос поглощения в спектрах возбужденного поглощения.

Что касается D_2 -полосы поглощения, то после F -облучения ее интенсивность у фосфоров $KCl+Ag$ (0,1) и $KCl+Ag$ (0,1)+ Cd (1) ослабляется, в то время как в присутствии в решетке KCl ионов Ca^{2+} (1 моль%) указанная полоса после F -облучения возрастает. Такая противоречивость не позволяет правильно определить природу соответствующих центров окраски.

Нами установлено, что нагрев окрашенных электронным пучком фосфоров до 75, 140 и 180°C приводит к ослаблению интенсивности всех B -, C -, D_1 -, D_2 - и E -полос поглощения и к полному исчезновению F -полосы, что свидетельствует о малой термической устойчивости соответствующих центров окраски в фосфорах $KCl+Ag$. При этом ослабление всех активаторных центров окраски после нагрева указывает на отсутствие преобразования одних центров окраски в другие.

Наши исследования спектров возбужденного поглощения вышеуказанных фосфоров до и после старения и после термической обработки (закалки и отжига) показали, что они очень быстро стареют. Это связано, по-видимому, с плохой растворимостью ионов Ag^+ в ре-

шетке KCl, о чем свидетельствует резкое падение интенсивности A-, B-, C-, D₁-, D₂- и E-полос поглощения у состарившихся фосфоров (за 2 года) по сравнению со свежеприготовленными. При этом установлено, что наличие в решетке KCl+Ag катионов Ca, Sr, Ba и Cd усиливает процесс старения этих фосфоров.

Далее опыты показали, что если процесс закалки состарившихся фосфоров от 700°C приводит к значительному возрастанию интенсивности B-, C-, D₁-, D₂-, E- и F-полос поглощения, то после отжига закаленных фосфоров при 700°C через 20 минут наблюдается резкое ослабление указанных полос по сравнению с закаленными и очень небольшое возрастание интенсивности этих полос по сравнению с состарившимися фосфорами. Однако при этом интенсивность F-полосы поглощения после такого отжига настолько сильно ослабляется, что становится слабее, чем у состарившихся фосфоров.

Интересные результаты обнаружены нами при сравнении спектров возбужденного поглощения до и после термической обработки (закалки и отжига) фосфоров KCl+Ag, содержащих большие концентрации ионов Ca²⁺. Наличие последних в решетке KCl+Ag⁺ при малых концентрациях (0,01 моль % Ca) после закалки приводит к росту интенсивности полос поглощения активаторных центров окраски и F-центров, но при этом максимумы указанных полос после закалки не испытывают смещения.

Однако при больших концентрациях ионов Ca²⁺ (1 моль %), помимо сильного роста указанных полос, у закаленных фосфоров наблюдается смещение их максимумов (рис. 1, б). Например, если у фосфора KCl+Ag (0,1)+Ca (1,0) до закалки, кроме вышеперечисленных полос, наблюдается интенсивная полоса поглощения 400 нм, связанная с наличием в решетке KCl+Ag ионов Ca²⁺, то после закалки этого фосфора в сторону длинных волн смещается F-полоса поглощения, на которую накладывается новая полоса с $\lambda_{\max} = 620$ нм. Последняя после отжига закаленного фосфора лучше выделяется, но максимум F-полосы при этом испытывает коротковолновое смещение. Кроме указанных изменений, после закалки взамен двух полос поглощения при 400 и 440 нм наблюдается интенсивная полоса поглощения с максимумом при 430 нм, обусловленная возрастанием числа E-центров (440 нм) и наложением указанных двух полос. Поведение F-полосы поглощения после закалки и отжига, очевидно, связано с возникновением после термической обработки и рентгенизации z₂-центров окраски, имеющих более длинноволновые полосы поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Forro M. Zs. f. Physik, 56, 534, 1929.
2. Smakula A. Zs. f. Physik, 45, 1, 1927.
3. Кац М. Л. „ДАН СССР“, 85, 539, 1952.
4. Von der Vorst W., Dekcyser W. Physica, 903, 1957.
5. Парфианович И. А. Дисс., М., 1959.
6. Парфианович И. А., Шураева Е. Н., Ивахненко П. С. и Бабин П. А. „Изв. АН СССР“, т. 29, 1965, № 3.
7. Парфианович И. А., Пензина Э. Э., Пензин Ю. Г. „Изв. АН СССР“, т. 29, 1965, № 3.
8. Кац М. Л. „ДАН СССР“, 85, 579, 1952.
9. Etzel H. W., Schulman J. H. Chem. phys., 22, 1549, 1954.
10. Кац М. Л. Люминесценция и электроннодырочные процессы в фотохимических окрашенных кристаллах щелочно-галогидных соединений. Саратов, 1961.
11. Гиндина Р. И., Лущик Ч. Б., Тр. ИФА АН ЭССР, т. 15, 1961.
12. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, т. 26, 1964.

13. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963 № 6.

14. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1964, № 1, 2, 3, 5.

Поступило 30. V 1969

Э. Х. Халилов, Ф. Н. Фатуллаев

Мүхтәлиф нөв ионлашдырычы шүаларла һәҗәчанлашдырылмыш
KCl+Ag фосфорларында индуксијаланмыш активләшдиричи
рәнк мәркәзләринин әмәлә кәлмәсинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә KCl+Ag фосфорларында мүхтәлиф нөв шүаларын тәсири нәтичәсиндә јарадылмыш рәнк мәркәзләриндә ишыг квантларынын удулмасынын тәдгиги нәтичәләри шәрһ едилмишдир. Көстәрилмишдир ки, белә мәркәзләри характеризә едән локал енержи сәвијјәләри F мәркәзләрин сәвијјәсиндән чох дәриндә јерләшир. Мәгаләдә бу сәвијјәләрин әсас хассәләринә KCl+Ag фосфорларынын термик ишләнмәсинин вә иквивалентли ашгарларын тәсиринин нәтичәләри верилмишдир.

УДК 517. 512. 6

Г. М. ГАСАНОВ

ОБ ОДНОМ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПОЛИНОМЕ

Настоящая статья посвящена построению интерполяционного полинома $I_n(f, x)$ степени $4n$, совпадающего с $f(x) \in C[-1, 1]$ в точке $+1$ в n узлах, являющихся корнями полинома

$$W_n(x) = -\frac{\sin \frac{2n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad x = \cos \theta,$$

ортогональными на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. С помощью этого полинома доказывается теорема Джексона. Полином имеет следующий вид:

$$I_n(f, x) = \frac{1+x}{2} f(1) + \frac{1-x}{2} f(-1) + \sum_{k=1}^n \left[f(x_k) - \frac{1+x}{2} f(1) - \frac{1-x}{2} f(-1) \right] \lambda_{kn}(x), \quad (1)$$

где $x = x_k^{(n)} = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) суть корни полиномов $W_n(x)$, $x_0 = +1$;

$$\lambda_{kn}(x) = \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 [v_k(x) l_k^4(x) + 2(x-x_k) l_k^3(x) (1-x_k) \psi_n(x_k, x)] \quad (2)$$

— фундаментальные полиномы степени $(4n-1)$;

$$v_k(x) \equiv v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{1+2x_k}{1-x_k^2} (x_k - x) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\psi_n(t, u) = \frac{2}{2n+1} \sum_{r=1}^{n-1} W_r'(t) W_r(u), \quad (3)$$

и $l_k(x) \equiv l_k^{(n)}(x)$ — фундаментальные полиномы Лагранжева интерполирования:

$$l_k^{(n)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(1-x_k) \sqrt{2(1+x_k)}}{2n+1} \frac{W_n(x)}{x-x_k}. \quad (4)$$

Доказывается следующая

Теорема. Если $f(x) \in C[-1, 1]$, то

$$|J_n(f, x) - f(x)| \leq 457 \frac{2}{3} \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Для доказательства теоремы докажем некоторые леммы.

Лемма 1. Если

$$\Phi_{n-1}(t, u) = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \sum_{r=1}^{n-1} W_r(t) W_r(u) \right], \quad (5)$$

то

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) = [(1-x) \Phi_{n-1}(x, x)]^2. \quad (6)$$

Доказательство. В силу формулы Кристофеля-Дарбу

$$(-1)^{k+1} \sqrt{2(1+x_k)} \frac{W_n(x)}{x-x_k} = 2 \left[1 + \sum_{r=1}^{n-1} W_r(x_k) W_r(x) \right].$$

Отсюда, учитывая (5) и (4), находим

$$l_k(x) = (1-x_k) \Phi_{n-1}(x_k, x). \quad (7)$$

Для функции $g(x)$ и для узлов

$$x_{kn} = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

строим интерполяционный полином Эрмита $H_{2n+1}(g; x)$:

$$H_{2n+1}(g; x) = g(1) \left[1 - \frac{2n^2+2n+1}{3} (x-1) \right] \left(\frac{W_n(x)}{2n+1} \right)^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^n g(x_k) \left[1 + \frac{x-x_k}{1-x_k} \right] l_k^2(x) \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 + g'(1) (x-1) \left(\frac{W_n(x)}{2n+1} \right)^2 +$$

$$\sum_{k=1}^n g'(x_k) (x-x_k) l_k^2(x) \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2. \quad (8)$$

Как известно, если $g(x) \equiv P_{2n}(x)$ — полином степени $2n$, то

$$P_{2n}(x) \equiv H_{2n+1}(P_{2n}, x).$$

Если положить

$$P_{2n}(x) = [(1-x) \Phi_{n-1}(x, \xi)]^2,$$

то, учитывая (7), (5) и (3), найдем

$$P_{2n}(x_k) = l_k^2(\xi)$$

и

$$P_{2n}'(x_k) = 2(1-x_k) l_k(\xi) \psi_n(x_k, \xi) - \frac{2}{1-x_k} l_k^2(\xi).$$

Тогда из (8) будем иметь

$$[(1-x) \Phi_{n-1}(x, \xi)]^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 \left[\left\{ 1 + \frac{1+2x_k}{1-x_k^2} (x-x_k) \right\} l_k^2(x) l_k^2(\xi) + \right.$$

$$\left. + 2(x-x_k) l_k^2(x) l_k(\xi) \psi_n(x_k, \xi) \right].$$

Отсюда при $\xi = x$ получим (6).

Лемма 1. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\left| 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right| \leq 3$$

$$(1-x^2) \left| 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right| \leq \frac{8}{3n}.$$

Доказательство. Из (5) имеем

$$\begin{aligned} (1-x) \Phi_{n-1}(x, x) &= \frac{2(1-x)}{2n+1} \left[1 + \sum_{r=1}^{n-1} W_r^2(x) \right] = \\ &= \frac{2}{2n+1} \cdot 2 \sin \frac{\theta^2}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{2r+1}{2} \theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2}{2n+1} \sum_{r=0}^{n-1} [1 - \cos(2r+1)\theta]. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{r=0}^{n-1} \cos(2r+1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta},$$

то отсюда

$$\begin{aligned} (1-x) \Phi_{n-1}(x, x) &= \frac{2n}{2n+1} - \frac{2}{2n+1} \frac{\sin 2n\theta}{\sin \theta} = \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

В силу (6) и $|\sin n\theta| \leq \sin \theta$ получим

$$\begin{aligned} \left| 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right| &= \left| \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\sin \theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{2\sin \theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 \right| \leq 3, \end{aligned}$$

а поскольку $|\sin n\theta| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} (1-x^2) \left| 1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right| &= \sin^2 \theta \left| \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\sin \theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(2n+1)^2} \left(\frac{\sin \theta + \sin 2n\theta}{\sin \theta} \right)^2 \right| \leq \frac{4}{2n+1} + \frac{4}{(2n+1)^2} \leq \\ &\leq \frac{4}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \leq \frac{8}{3n}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$E_k = \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right) l_k^4(x) |x-x_k|, \quad 1 \leq k \leq n.$$

В силу (4), $x = \cos \theta$, $x_k = \cos \theta_k$, $W_k(x) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$ находим

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{4}{(2n+1)^4} (1-x)^2 (1-x_k^2)^2 \frac{W_n^4(x)}{|x-x_k|^3} = \\ &= \frac{16}{(2n+1)^4} \frac{\sin^4 \theta_k \sin^4 \frac{2n+1}{2} \theta}{|\cos \theta - \cos \theta_k|^3}. \end{aligned}$$

Так как $|\sin n\theta| \leq 1$,

$$\sin \theta_k \leq \sin \theta_k + \sin \theta \leq 2 \sin \frac{\theta + \theta_k}{2},$$

(9)

$$|\cos \theta - \cos \theta_k| = 2 \sin \frac{\theta + \theta_k}{2} \left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|,$$

то

$$E_k \leq \frac{16}{(2n+1)^4} \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|^3}. \quad (10)$$

Лемма 3. Для $1 \leq k \leq i \leq n$, $x \in [x_{i+1}, x_i]$ имеем

$$E_k \leq \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(i-k)^3}. \quad (11)$$

Доказательство. Если $x_{i+1} \leq x \leq x_i$, то $\theta_i \leq \theta \leq \theta_{i+1}$, и если $1 \leq k < i \leq n$, то $\theta_i - \theta_k \leq \theta - \theta_k \leq \pi$.

Поэтому

$$\sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \geq \sin \frac{\theta_i - \theta_k}{2} = \sin \frac{i-k}{2n+1} \pi \geq \frac{2(i-k)}{2n+1}.$$

Учитывая это, из (10) получим (11).

Аналогичным образом доказываются

Лемма 4. Если $0 \leq i \leq n-2$, $i+2 \leq k \leq n$, то для $x \in [x_{i+1}, x_i]$

$$E_k \leq \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{1}{(k-i-1)^3}.$$

Лемма 5. Для $0 \leq i \leq n$ и $x \in [x_{i+1}, x_i]$ имеем

$$E_i + \frac{16}{2n+1}.$$

Доказательство. Так как

$$\begin{aligned} \left| \sin \frac{2n+1}{2} \theta \right| &= \left| \sin \frac{2n+1}{2} \theta - \sin \frac{2n+1}{2} \theta_k \right| = \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n+1}{2} \frac{\theta - \theta_k}{2} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{\theta + \theta_k}{2} \right| \leq (2n+1) \left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right| \end{aligned}$$

и

$$\frac{\sin \theta_k}{|\cos \theta - \cos \theta_k|} \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|},$$

то из (9) получаем утверждение леммы.

Аналогично доказывается

Лемма 6. Если $0 \leq i \leq n-1$ и $x \in [x_{i+1}, x_i]$, то

$$E_{i+1} \leq \frac{16}{2n+1}.$$

С помощью лемм 3, 4, 5 и 6 легко доказывается следующая

Лемма 7. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 l_k^4(x) |x-x_k| \leq \frac{40}{2n+1}.$$

Далее подобным образом доказываются следующие леммы.

Лемма 8. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 \left| \frac{1+2x_k}{1-x_k^2} \right| (x-x_k)^2 \leq \frac{64}{2n+1}.$$

Лемма 9. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1-x}{1-x_k} \right)^2 \|1-x_k\| L_k^3(x) \|\psi_n(x_k, x)\| (x-x_k)^2 \leq \frac{91}{2n+1}.$$

Учитывая леммы 7, 8 и 9, также (2), приходим к следующей лемме.

Лемма 10. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_{kn}(x)| \|x-x_k\| \leq \frac{286}{2n+1} \leq \frac{143}{n}.$$

Так же доказывается следующая

Лемма 11. Для $-1 \leq x \leq 1$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |\lambda_{kn}(x)| \leq 306.$$

Теперь переходим к доказательству теоремы.

$$\begin{aligned} f(x) - I_n(f, x) &= \frac{1+x}{2} [f(x) - f(1)] \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right] + \\ &+ \frac{1-x}{2} [f(x) - f(-1)] \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^n [f(x) - f(x_k)] \lambda_{kn}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Так как $|f(x) - f(y)| \leq [1 + n|x-y|] \omega\left(\frac{1}{n}\right)$,

то с учетом лемм 2, 10 и 11 получим

$$\left| \frac{1+x}{2} [f(x) - f(1)] \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right] \right| \leq \frac{13}{3} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (13)$$

$$\left| \frac{1-x}{2} [f(x) - f(-1)] \left[1 - \sum_{k=1}^n \lambda_{kn}(x) \right] \right| \leq \frac{13}{3} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^n |f(x) - f(x_k)| \|\lambda_{kn}(x)\| \leq 449 \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Учитывая (13), (14), (15), из (12) получим утверждение теоремы.

Аналогичные полиномы построены ранее в работах [1, 2 и 3] для узлов, являющихся корнями полиномов Чебышева первого и второго рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Freud G. Egy Jackson-féle interpolációs eljárásról, Mat. Lapok, 4, 1964 330—336.
2. Vertesi P. Jackson tetelenék bizonyítását interpolációs úton; Mat. Lapok 1—2, 1967, 83—92.
3. Saxena R. B. On a polynomial of interpolation; Studia Scientiarum math. Hung., 2 (1967) 167—183.

Поступило 4. III 1969

Н. М. Насанов

Бир интерполјасија чоҳадлиси наггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ $[-1, 1]$ парчасында кэсилмэжэн функцијалар үчүн (1) шэклиндэ верилмиш интерполјасија чоҳадлиси гурулур вэ бу чоҳадлинин көмэји илэ Чексон теореме исбат олунур.

Ю. А. СОЗОНЕНКО, Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

ПРЯМОЙ УДАР ПО ГИБКИМ СВЯЗЯМ

До сих пор рассматривались задачи о поперечном ударе по гибкой связи конусом [1, 2] или тупым телом [3, 5]. В отличие от вышеуказанных работ в данной статье рассматривается прямой удар по гибкой мембране конусом, имеющим тупую переднюю часть в виде тела вращения. В этом случае задача будет не автомодельная. Здесь предполагается, что скорость волны сильного разрыва больше скорости упругой волны.

§ 1. Удар по мембране затупленным конусом

Пусть на конус, имеющий тупую головную часть в виде параболоида, налетает бесконечная гибкая мембрана с постоянной скоростью v_0 . настолько великой, что $b > a_0$. Отметим, что на границе между тупой передней частью и конусной частью выполняются условия непрерывности касательной (образующая поверхность конуса и касательная к тупой части на границе совпадают друг с другом).

Уравнение движения для конусной части будет

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u \lambda^2}{r^2} - \frac{(1+\nu)(1-\lambda)}{r},$$

$$\lambda = \cos \gamma = \text{const.} \quad (1)$$

Картина движения в плоскости r, t представлена на рис. 1. Для решения уравнения (1) условия на AB будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\cos \gamma - \bar{a}^2 g^2 \gamma}{1 - \bar{a}^2 g^2 \gamma} = \varphi_1(\lambda); \\ u_t &= \frac{v_0 [\sin^2 \gamma - \bar{a}^2 g^2 \gamma (1 - \cos \gamma)]}{\sin \gamma (1 - \bar{a}^2 g^2 \gamma)} = \varphi_2(\lambda), \end{aligned} \quad (2)$$

$$u = \frac{r}{\lambda}.$$

Когда передняя часть конуса имеет вид параболоида, образованного вращением параболы $y = qx^2$, уравнение линии OA имеет вид

$$t = \frac{q}{v_0} r^2. \quad (3)$$

Уравнение линии AB будет

$$t = \kappa + \kappa_1 r, \quad (4)$$

где $\kappa = -\frac{q}{v_0} r_1^2$; $\kappa_1 = \frac{2qr_1}{v_0}$; r_1 — координата точки перехода A от конусной к тупой части. Решение уравнения (1) в области OAC_1 в некоторых предположениях нам известно [5].

Займемся решением уравнения (1) в области C_1ABB_1 .

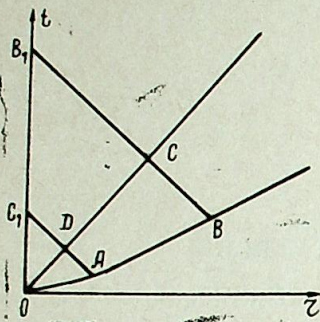


Рис. 1.

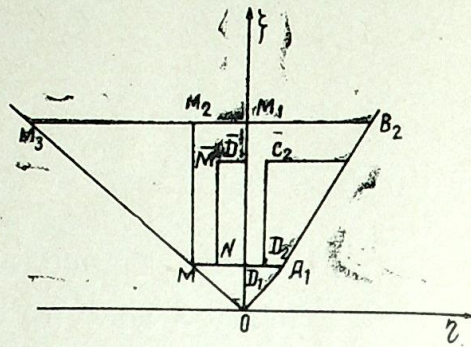


Рис. 2.

Вводим новые переменные $r + a_0 t = \xi$ и $r - a_0 t = \eta$. Картина движения в плоскости ξ, η показана на рис. 2. Уравнением A_1B_2 , очевидно, будет

$$\eta = c_2 \xi + c_3 \quad (5)$$

или

$$\xi = c \eta + c_1, \quad (6)$$

где

$$c_2 = \frac{1 - \kappa_1 a_0}{1 + \kappa_1 a_0}; \quad c_3 = -\frac{2a_0 \kappa}{1 + \kappa_1 a_0}; \quad c = \frac{1 + \kappa_1 a_0}{1 - \kappa_1 a_0}; \quad c_1 = \frac{2a_0 \kappa}{1 + \kappa_1 a_0}.$$

Условия на A_1B_2 примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\varphi_1(\lambda)}{2} + \frac{\varphi_2(\lambda)}{2a_0} = \varphi_3(\lambda); \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\varphi_1(\lambda)}{2} - \frac{\varphi_2(\lambda)}{2} = \varphi_4(\lambda); \quad (7)$$

$$u = n_0 + n_1 \xi.$$

Здесь

$$n_1 = \frac{1 + c_2}{2 \cos \gamma}; \quad n_0 = \frac{c_3}{2 \cos \gamma}.$$

Решение в области OA_1M берем в следующем [виде [5]:

$$u = p_1(\eta + \xi) + p_2(\xi^2 - \eta^2); \quad v_0 \gg a_0, \quad (8)$$

где

$$p_1 = 0,5; \quad p_2 = 0,505 \frac{v_0 q}{a_0} - 0,184 \frac{a_0 q}{v_0}.$$

Уравнение (1) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\eta + \xi)} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\lambda^2 u}{(\eta + \xi)^2} = \frac{\lambda_1}{\eta + \xi}, \quad (9)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{(1 + \nu)(1 - \lambda)}{2}.$$

Для нахождения решения уравнения (9) с условиями (7) и (8), с учетом (5) и (6) в области $A_1B_2M_1D_1$ используем метод Римана. Функция Римана для уравнения (9) имеет вид

$$v = \frac{(\eta + \xi)^{1/2}}{(\eta_0 + \xi_0)^{1/2}} F(\alpha; \beta; \gamma_1; \psi), \quad (10)$$

где

$$\alpha = 1 + m, \quad \mu = 1 \pm \lambda, \\ \beta = -m,$$

$$\gamma_1 = 1; \quad m = \frac{1}{2} - \nu, \quad \psi = -\frac{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{(\eta + \xi)(\eta_0 + \xi_0)};$$

F — гипергеометрическая функция.

После определения решения в области $D_1A_1\bar{B}_2M_1$ найдем функцию $u(\xi; \eta)$ вдоль D_1M_1 . Учитывая громоздкость формул для $u(\xi; \eta)$ и $u(\xi; \xi_1)$ вдоль D_1M_1 , не будем писать их явные выражения.

$$u = u(\xi; \xi_1) \quad (11)$$

В области $MD_1M_1M_2$ решается характеристическая задача Коши методом Римана:

$$u|_{\bar{M}} = (uv)_N + \int_{ND_1} u \left(v_\eta - \frac{v}{2(\eta + \xi)} \right) d\eta + \\ + \int_{D_1\bar{D}} v \left(\frac{u}{2(\eta + \xi)} + u_\xi \right) d\xi - \iint_{\bar{M}ND_1\bar{D}} v \frac{\lambda_1}{\eta + \xi} d\eta d\xi. \quad (12)$$

Если точка $\bar{M}$ попадает на линию MM_2 , то, учитывая условия (11), (8) и (10), в формуле (12) полученное решение обозначим

$$u|_{MM_2} = g(\xi; \xi_1).$$

Для того, чтобы получить явное выражение для функции u , можно взять несколько членов гипергеометрического ряда, поскольку $\psi < 1$. В области MM_2M_3 решается смешанная задача с граничным условием: а) $u = 0$ при $\eta + \xi = 0$; б) $u|_{MM_2} = g(\xi; \xi_1)$. Решаем последнее в одном частном случае, когда $\gamma = 60^\circ$. Решение для уравнения (9) ищем в виде

$$u = (\eta + \xi)^{-1/2} \psi(\eta; \xi) + \frac{4}{3} \lambda_1 (\eta + \xi), \quad (13)$$

где $\psi(\xi; \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (14)$$

Граничными условиями для (14) будут:

$$\psi_\xi = 0 \quad \text{при} \quad \eta + \xi = 0; \quad (15)$$

$$\psi|_{MM_2} = \sqrt{\xi - \xi_1} g(\xi; \xi_1) - \frac{4\lambda_1}{3} \sqrt{(\xi - \xi_1)^3}.$$

Интегрируя (14) с граничными условиями (15), для функции получим следующее выражение:

$$u(\eta; \xi) = \frac{1}{\sqrt{\eta + \xi}} [g(\xi; \xi_1) \sqrt{\xi - \xi_1} - g(-\eta; \xi_1) \sqrt{-\eta - \xi_1} + \\ + \frac{4\lambda_1}{3} (\sqrt{(-\eta - \xi_1)^3} - \sqrt{(\xi - \xi_1)^3})] + \frac{4\lambda_1}{3} (\eta + \xi).$$

Отметим, что при $\eta + \xi = 0$ ($r = 0$), т. е. когда затупление отсутствует деформация стремится к бесконечности.

Эту задачу можно решать при условиях, данных в работе [4] где предполагается непрерывность меридиональной кольцевой дефор-

мации на фронте сильного разрыва. При такой постановке для решения уравнения (1) условия на волне сильного разрыва примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{1 - \cos \gamma}{\cos \gamma}; \quad u = \int_0^r \frac{dr}{\cos \gamma}. \quad (17)$$

Если решать уравнение (1) при условиях (17) для малого времени как в работах [3, 5], то очень просто можно получить решение в области OA_1M в виде

$$u(\xi; \eta) = p_1(\eta + \xi) + \bar{p}_2(\xi^2 - \eta^2), \quad (18)$$

где

$$\bar{p}_2 = 0,2525 \frac{v_0 q}{a_0}; \quad v_0 \leq a_0.$$

Решение задачи об ударе по мембране затупленным конусом аналогично. При решении последней задачи вместо условия (8) надо брать (18), а вместо (2) — условия:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}; \quad u = \frac{r}{\lambda},$$

где

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_0}{b}.$$

Теперь решим задачу о прямом ударе тупым телом по гибкой нити при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \gamma}. \quad (19)$$

Решение ведется как в работе [1], поэтому здесь его не приводим. Деформация, в частности в точке $r = 0$, определяется следующей формулой:

$$e(0, t) = \bar{v}_0 - \frac{v_0 R + a_0^2 t - \sqrt{(v_0 R + a_0^2 t)^2 - a_0^2 t^2 (a_0^2 + v_0^2)}}{a_0^2 + v_0^2} \sqrt{z_5},$$

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0}{a_0}.$$

Здесь R есть постоянный радиус кривизны тела,

$$z_5 = 2v_0 R \frac{v_0 R + a_0^2 t - \sqrt{(v_0 R + a_0^2 t)^2 - a_0^2 t^2 (a_0^2 + v_0^2)}}{a_0^2 + v_0^2} -$$

$$- v_0^2 \left[\frac{v_0 R + a_0^2 t - \sqrt{(v_0 R + a_0^2 t)^2 - a_0^2 t^2 (a_0^2 + v_0^2)}}{a_0^2 + v_0^2} \right]^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М. Физматгиз, 1961.
2. Павленко А. Л. Прямой удар по гибкой пластине телом вращения заданного профиля. Дисс., НИИ мех. и матем., МГУ, 1952.
3. Бектурсунов У. Поперечный удар по гибким связям при упругих и упруго-пластических деформациях. Дисс., 1967.
4. Ленский Э. В. Вестник МГУ, серия матем. и мех., 1968, № 5.
5. Муталлимов Ш. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1968, № 4.

Ж. А. Созоненко, Ш. М. Муталлимов

Эластик рабитэлэрэ нормал зэрбэ

ХҮЛАСЭ

Бу вахта гэдэр эластик мембрана ја ити конусла, ја да күт чимслэ зэрбэ мөсөлөсінө бахылмышдыр. Нэгигэтэн ити конусун эластик мембрана тохунмасы заманы ити чисмин баш хиссэсіндэ күтлэнмэ эмэлэ кэлир. Күтлэнмэни нэзэрэ алмаг исэ мөсөлөнін ријази нэллини чэтинлэшдирир.

Тэдгигатда нэмчинин парабалоидлэ мембрана зэрбэ мөсөлөсінө да бахылмышдыр. Фэрз олунур ки, нэлгэви вэ радиал деформасија-лар енинэ далга чэбнэсіндэ кэсилмэздир.

Р. С. ЭФЕНДИЕВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТОНКИХ ОБЛАСТЯХ

Некоторые задачи теории упругости приводят к построению асимптотики по малому параметру решения краевой задачи для эллиптических уравнений, когда малый параметр входит в геометрию области. М. Г. Джавадов построил асимптотику по малому параметру краевой задачи для эллиптических уравнений второго и любого порядка с постоянными коэффициентами в тонких областях.

Цель нашей работы заключалась в том, чтобы построить асимптотику решения по малому параметру краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, когда малый параметр входит в геометрию области. Краевые условия в нашем случае отличаются от краевых условий работы [2].

Пусть Q — цилиндр в n -мерном пространстве с высотой h , достаточно малой в сравнении с другими измерениями. Пусть ось x_n направлена по h . Обозначим через F боковую поверхность Q .

В Q рассматривается задача:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) u = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} P(x_1, \dots, x_{n-1}), & x_n = h, \\ 0, & x_n = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$u|_F = 0, \dots \dots \dots \quad (3)$$

где

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \text{ для любых чисел } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

$a(x) > 0$, $\alpha > 0$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ — заданная гладкая функция, h — малый параметр. Для простоты изложения предполагается, что $a_{nn}(x) \approx 1$.

Прежде чем приступить к построению асимптотики решения задачи (1), (2) и (3) сделаем замену переменных $x_n = th$. В новых переменных уравнение (1) и граничные условия (2) запишутся в сле-

дующем виде:

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{h} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} + a_n(x) \frac{\partial u}{\partial t} \right] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) u = 0; \quad (4)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) = \begin{cases} P(x_1, \dots, x_{n-1}), & t = 1, \\ 0, & t = 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$x_n = x(x_1, \dots, x_{n-1}, th).$$

Предполагая достаточную гладкость коэффициентов уравнения (4), разложим их согласно формуле Тейлора по степеням th . Имеем

$$a_{ij}(\eta, th) = a_{ij}^0(\eta) + \sum_{r=1}^N a_{ij}^r(\eta) (th)^r + (th)^{N+1} a_{ij}^{N+1}(\eta, th),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_i(\eta, th) = a_i^0(\eta) + \sum_{r=1}^N a_i^r(\eta) (th)^r + (th)^{N+1} a_i^{N+1}(\eta, th),$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \eta = \eta(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Подставив выше приведенные разложения для коэффициентов в (4), (5), получим

$$Lu \equiv \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{h} L_1 u + \sum_{k=0}^{N+1} h^k L_{k+2} u = 0; \quad (6)$$

$$lu \equiv \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=0}^{N+1} h^k l_{k+1} u = \begin{cases} P(x_1, \dots, x_{n-1}), & t = 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где L_1 и l_1 суть линейные дифференциальные выражения, например:

$$L_1 \equiv \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} + a_n^0(\eta) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$L_2 \equiv t \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^{(1)}(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} + a_n^{(1)}(\eta) \frac{\partial}{\partial t} \right) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^0(\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} - a^0(\eta) u,$$

$$L_3 \equiv t^2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^{(2)}(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial t} + a_n^{(2)}(\eta) \frac{\partial}{\partial t} \right) +$$

$$+ t \left(\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^{(1)}(\eta) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(1)}(\eta) \frac{\partial}{\partial x_i} - a^{(1)}(\eta) u \right),$$

$$l_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad l_2 = \sum_{i=1}^{n-1} t a_{in}^{(1)}(\eta) \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots$$

Расщепление (6) будем называть первым расщеплением оператора L , которому соответствует итерационный процесс, если приближенные решения уравнения (6) искать в виде

$$u = \frac{u_{-1}}{h} + u_0 + hu_1 + \dots + h^{N+2} u_{N+2} + h^{N+3} z_1. \quad (8)$$

Подставим выражение для функции u из (8) в уравнение (6) и граничные условия (7), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях по h , получим

$$\frac{\partial^2 u_{-1}}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial u_{-1}}{\partial t} = \begin{cases} 0, & t = 1, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Следовательно $u_1 = \bar{u}_{-1}(\eta)$, где $\bar{u}_{-1}(\eta)$ и все последующие функции, которые подлежат определению.

Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= -L_1 u_{-1} = 0; \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i}, & t = 1, \\ -\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i}, & t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_0 &= \bar{u}_0(\eta) - t \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i}; \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= -L_1 u_0 - L_2 u_{-1} = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) a_{jn}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_{-1}}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) a_n^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_{-1}}{\partial x_i \partial x_j} + a^0(\eta) \bar{u}_{-1}; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \begin{cases} P - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) a_{jn}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^{(1)}(\eta) \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i}, & t = 1, \\ - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x_i}, \dots, & t = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Очевидно, сопряженная однородная задача, соответствующая последней задаче, имеет отличное от нуля решение z_0 . Поэтому, чтобы задача (9) и (10) была разрешимой, необходимо и достаточно

выполнение следующего условия:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} z_0 dt = \frac{\partial u_1}{\partial t} z_0 \Big|_{t=0}^{t=1}, \quad (11)$$

которое называется условием разрешимости задачи (9) и (10). Оно получается из формулы Грина, если учесть граничные условия для сопряженной задачи. Подставляя значение для $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$ из (9) и $\frac{\partial u_1}{\partial t}$ (10)

в (11), после некоторых упрощений получим

$$\begin{aligned} - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} [a_i^0(\eta) - a_{in}^0(\eta) a_n^0(\eta) - \\ - a_{in}^{(0)}(\eta)] \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i} + a^0(\eta) \bar{u}_{-1} = P. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) будем называть вырожденным, соответствующим уравнению (1). Таким образом мы нашли уравнение, которому должна удовлетворять первая произвольная функция $\bar{u}_{-1}$.

Аналогичным образом продолжая процесс, находим

$$\begin{aligned} I_n(\bar{u}_\kappa) = - \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} [a_i^0(\eta) - a_{in}^0(\eta) \times \\ \times a_n^0(\eta)] - a_{in}^{(1)}(\eta) \frac{\partial \bar{u}_\kappa}{\partial x_i} + a^0(\eta) \bar{u}_\kappa = f_\kappa \left(\bar{u}_{-1} \frac{\partial \bar{u}_{-1}}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

где f_κ суть известные функции от $\bar{u}_\kappa$; $i < \kappa$.

Функции $\bar{u}_\kappa(\eta)$ будем определять из следующих задач:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}^0(\eta) \frac{\partial^2 \bar{u}_\kappa}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} [a_i^0(\eta) - a_{in}^0(\eta) a_n^0(\eta) - a_{in}^{(1)}(\eta)] \frac{\partial \bar{u}_\kappa}{\partial x_i} - \\ - a^0(\eta) \bar{u}_\kappa = f_\kappa; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\bar{u}_\kappa|_F = \sigma_\kappa, \dots, \dots, \dots, \quad \kappa = -1, 0, 1, \dots \quad (14)$$

где σ_κ пока произвольные. Условие на σ_κ будет сформулировано позже.

Очевидно, функции u_κ , вообще говоря, не удовлетворяют всем граничным условиям (2) и (3). Поэтому к этим функциям прибавляем функции v_κ -типа пограничного слоя так, чтобы полученная сумма $u_\kappa + v_\kappa$ в точности удовлетворяла всем граничным условиям. Функции v_κ определяются вторым итерационным процессом.

Для того, чтобы провести второй итерационный процесс, в достаточно малой окрестности боковой поверхности F цилиндра Q вводим локальные координаты (ρ, y) , где ρ —расстояние по нормали к F , а $y = y(y_1, \dots, y_{n-2}, t)$ —координаты точки на F .

В новых координатах уравнение (6) запишется следующим образом.

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{h} A(\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \rho} + B(\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{h} \bar{L}_1 u + \sum_{\kappa=0}^{N+1} h^\kappa \bar{L}_{\kappa+2} u = 0, \quad (15)$$

где $A(\eta)$ и $B(\eta)$ —известные коэффициенты уравнения, $\bar{L}_1$ —известные

дифференциальные выражения, например:

$$\bar{L}_1 u = \sum_{i=1}^{n-2} a_{in}^0(\eta) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial t} + a_n^0(\eta) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Разложив коэффициенты уравнения (15) по степеням ρ , на основе формулы Тейлора и вновь полученного уравнения, сделав замену $\rho = \tau h$ и объединяя члены при одинаковых степенях по h , получим

$$\frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^0(\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau} + B^0(\eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right] + \frac{1}{h} M_1 v + \sum_{k=0}^{N+1} h^k M_{k+2} v = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}(y_1, \dots, y_{n-2}),$$

где M_i суть известные дифференциальные выражения. Например,

$$M_1 = \left[\tau^{(1)} \left(A^{(1)}(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} + B^{(1)}(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + \sum_{i=1}^{n-2} \left(D^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial t} + 2F^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial \tau} \right) + C^0(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \tau} + E^0(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial t} + t \left(B_1^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + A_1^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \right) \right].$$

Выражение (16) будем называть вторым расщеплением оператора L .

Проделив аналогичные операции для граничных операторов, запишем их второе расщепление:

$$\frac{1}{h} m_0 v + m_1 v + h m_2 v + \dots + h^N m_{N+1} v + \dots = \begin{cases} \rho(\eta), & t=1, \\ 0, & t=0, \end{cases}$$

где m_i суть известные дифференциальные выражения. Например,

$$m_0 = \frac{\partial}{\partial t} + A^0(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \tau},$$

$$m_1 = \tau A^{(1)}(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{n-2} D^0(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial y_i} + t C^0(\bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \tau} \text{ и т. д.}$$

Приближенное решение уравнения (16) ищем в виде

$$v = \frac{v_{-1}}{h} + v_0 + h v_1 + \dots + h^{N+2} v_{N+2} + h^{N+3} z_2, \quad (17)$$

чтобы сумма

$$\frac{v_{-1} + u_{-1}}{h} + (u_0 + v_0) + h(u_1 + v_1) + \dots + h^{N+2}(v_{N+2} + v_{N+2}) \quad (18)$$

удовлетворяла всем граничным условиям,

Подставляя выражение функции v из (17) в (16), выражение для суммы $u + v$ из (18) в граничные условия и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях по h , получим:

$$M_0 v_{-1} = 0,$$

$$m_0 v_{-1} = \begin{cases} 0, & t=1, \\ 0, & t=0, \end{cases}$$

$$v_{-1} + u_{-1}|_F = 0 \quad \text{или} \quad v_{-1}|_{\tau=0} = -U_{-1}|_F;$$

$$\frac{\partial^2 v_{-1}}{\partial t^2} + A^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2 v_{-1}}{\partial t \partial \tau} + B^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2 v_{-1}}{\partial \tau^2} = 0;$$

$$\frac{\partial v_{-1}}{\partial t} + A^0(\bar{\eta}) \frac{\partial v_{-1}}{\partial \tau} = \begin{cases} 0, & t=1, \\ 0, & t=0; \end{cases}$$

$$v_{-1}|_{\tau=0} = -u_{-1}|_F.$$

Следовательно,

$$v_{-1} = 0,$$

Далее

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + A^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial t \partial \tau} + B^0(\bar{\eta}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \tau^2} = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + A^0(\bar{\eta}) \frac{\partial v_0}{\partial \tau} = \begin{cases} 0, & t=1, \\ 0, & t=0; \end{cases} \quad (20)$$

$$v_0|_{\tau=0} = -u_0|_F = \varphi_0(t). \quad (21)$$

Аналогично

$$M_0 v_k = -M_1 v_{k-1} - \dots - M_k v_0, \quad (22)$$

$$m_0 v_k = \begin{cases} -m_1 v_{k-1} - \dots - m_k v_0, & t=1, \\ -m_1 v_{k-1} - \dots - m_k v_0, & t=0; \end{cases} \quad (23)$$

$$v_k|_{\tau=0} = -u_k|_F = \varphi_k(t), \dots \dots \dots \quad (24)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

М. Г. Джавадовым [2] было доказано, что если $\int_0^1 \varphi_k(t) dt = 0$,

$k = 0, 1, \dots$, то задачи (19) (24) имеют убывающие на бесконечности решения относительно τ . Очевидно, граничные функции φ_k можно задавать так, чтобы

$$\int_0^1 \varphi_k(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом мы нашли, что все функции v_k являются функциями типа пограничного слоя вблизи границы F (т. е. $\tau = 0$). Умножив v_k на сглаживающие функции, полученные функции снова обозначим через v_k . Учитывая вышеизложенное, асимптотическое представление решения задачи (1), (2), (3) можно записать в следующем виде:

$$U = \sum_{k=-1}^N h^k u_k + \sum_{j=0}^N h^j v_j + z_N. \quad (25)$$

Оценим z_N . Для этого подействуем на обе части (25) оператором L , причем на первое слагаемое в правой части (25) будем действовать первым расщеплением L , а на второе—вторым расщеплением оператора L . При этом будем иметь

$$Lu = \left(\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial t^2} + \frac{1}{h} L_1 + \sum_{k=0}^{N+1} h^k L_{k+2} \right) \left(\sum_{k=-1}^{N+2} h^k u_k \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{h^2} M_0 + \frac{1}{h} M_1 + \sum_{k=0}^N h^k M_{k+2} \right) \left(\sum_{j=0}^{N+2} h^j v_j \right) + Lz_N. \quad (26)$$

Учитывая уравнения, полученные в первом и втором итерационных процессах и тот факт, что $Lu = 0$ взято из (26), имеем

$$Lz_N = g,$$

где $g = -[L_{N+4} u_{-1} + \dots + L_1 u_{N+2} + M_{N+3} v_0 + \dots + M_1 v_{N+2} + h(L_{N+3} v_1 + \dots + L_1 u_{N+2} + M_{N+2} v_1 + \dots + M_1 v_{N+2}) + h^2(\dots) + \dots]$. Кроме того, функция z_N удовлетворяет нулевым граничным условиям. Таким образом находим, что функция z_N — решение следующих задач:

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 z_N}{\partial t^2} + \frac{1}{h} \left[\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) \frac{\partial^2 z_N}{\partial x_i \partial t} + a_n(x) \frac{\partial z_N}{\partial t} \right] + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 z_N}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) \frac{\partial z_N}{\partial x_i} - a(x) z_N = g; \quad (27)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial z_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) \frac{\partial z_N}{\partial x_i} = \begin{cases} 0, & t=1, \\ 0, & t=0; \end{cases} \quad (28)$$

$$z_N|_F = 0, \dots \dots \dots \quad (29)$$

Имеет место следующая

Теорема. Если $a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = 0$, то для решения задачи (27), (28) (29) справедлива оценка

$$\|z_N\| \leq ch^{N+1},$$

где C — постоянная, не зависящая от h , норма понимается в смысле метрики пространства L_2 .

Доказательство. Для доказательства обе части уравнения (27) умножим на z_N и проинтегрируем по Q -области.

В результате, с учетом эллиптичности уравнения и граничных условий (28) и (29), получим

$$\frac{1}{h} \int_Q \left(\frac{\partial z_N}{\partial t} \right)^2 dQ + h \int_Q \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial z_N}{\partial x_i} \right)^2 dQ + \int_Q z_N^2 dQ \leq c \int_Q g^2 dQ.$$

Отсюда

$$\int_Q z_N^2 dQ \leq ch^{2N+2} \int_Q g^2 dQ,$$

т. е.

$$\|z_N\| \leq ch^{N+1}.$$

Что и требовалось доказать. Резюмируя вышесказанное, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Если коэффициенты уравнения (1) имеют непрерывные производные $(N+3)$ порядка включительно, кроме того, $a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = 0$, функция $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ имеет непрерывные производные до $(N+1)$ порядка включительно, то решение задачи (1), (2), (3) имеет следующее асимптотическое представление:

$$u = \sum_{k=-1}^{N+2} h^k u_k + \sum_{j=0}^{N+2} h^j v_j + z_N,$$

где функция u_k определяется первым итерационным процессом, v_j — функции типа пограничного слоя и определяются вторым итерационным процессом, z_N — остаточный член, который стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ как h^{N+1} в метрике пространства L_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. УМН, 15, вып. 3 (93), 1960.
2. Джавадов М. Г. ДАН СССР, т. 160, 1965, № 3.
3. Джавадов М. Г. ДАН СССР, т. 163, 1965, № 3.

Поступило 6. V 1969

Р. С. Эфендиев

Бир өлчүсү галан өлчүлэрэ нисбэтэн чох кичик олан областларда ики тәртибли, дәјишән әмсаллы, еллиптик типли тәнлик үчүн гојулмуш сәрһәд мәсәләсинин кичик параметрә көрә асимптотикасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы мәсәлә арашдырылмышдыр: n —өлчүлү фәзада һүндүрлүјү h олан силиндри Q илә ишарә едәк. Фәрз олунур ки, координат охларындан бири силиндрин һүндүрлүјүнүн үстүнә дүшүр. Бундан башга, фәрз едәк ки, h силиндрин диқәр өлчүләринә нәзәрән чох кичикдир. Q силиндриндә

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - a(x) u = 0 \quad (1)$$

тәнлијинин елә һәлли ахтарылмышдыр ки, о һәлл ашағыдакы сәрһәд шәртләрини өдәсин:

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = \begin{cases} P(x_1, \dots, x_{n-1}), & x_n = h_1 \\ 0, & x_n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$u|_F = 0, \quad (3)$$

Бурада (1) еллиптик типли тәнлик, F —силиндрин јан сәтһи, $h > 0$ кичик параметр, $P(x_1, \dots, x_{n-1})$ исә верилмиш һамар функцијадыр.

Исбат олунмушдыр ки, (1), (2), (3) мәсәләсинин һәллинин асимптотик ифадәси беләдир:

$$u = \sum_{i=-1}^N h^i u_i + \sum_{j=0}^N h^j v_j + z.$$

u_i -ләр биринчи итерасија, v_j -лар икинчи итерасија просесиндән тапылыр; L исә галыг һәддидир. О, $h \rightarrow 0$, h^{N+1} тәртиблә $L_2(Q)$ фәзасы метрикасы мәнада сифра кедир.

С. А. КУЛИЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НЕКОТОРОГО ВИДА

В данной работе рассматривалась пластинка, представляющая собой двусвязную область S , ограниченную снаружи правильным криволинейным многоугольником L_1 , весьма близким к прямолинейному, а изнутри — эксцентрично расположенной окружностью L_2 радиуса r . Когда внешними контурами являются эллипс и окружность, рассматриваемая задача получается как частный случай. Пластинка была подвержена внутреннему равномерно распределенному давлению P .

Квадратная пластинка с эксцентричным круговым отверстием рассматривалась ранее [6]. В настоящей работе тем же методом изучалась более общая задача: когда внешним контуром является правильный криволинейный многоугольник, близкий к прямолинейному. Было принято, что внешность правильного криволинейного многоугольника L_1 отображается на внешность единичной окружности γ , расположенной в плоскости ξ , при помощи функций

$$z - e = A \left(\xi + \frac{M}{\xi^{q-1}} \right), \quad (1)$$

где

$$A = \frac{a}{1+M}, \quad M = \frac{1}{(q-1)^2};$$

q — число сторон правильного многоугольника,
 a — радиус окружности, описанной в многоугольнике.

Как частный случай в формуле (1) при $M = \frac{a-b}{a+b}$, $q = 2$ получается эллипс с полуосями a и b , а при $M = 0$, очевидно, получим окружность с радиусом $r = A$. Таким образом из данного решения получается решение для случаев, когда внешний контур вырождается в эллипс и окружность.

Как известно [1], решение рассматриваемой задачи сводится к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = 0 \quad \text{на } L_1, \quad (2)$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -Pt + c \quad \text{на } L_2. \quad (3)$$

Из граничного условия (3), определив $\overline{\psi(t)}$ и переходя к ее сопряженному значению, определяем аналитическую в данной области

функцию $\psi(t)$ в виде

$$\psi(z) = -\frac{Pz^2}{z} - \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{z}\right)} - \frac{r^2}{z}\varphi'(z) + c. \quad (4)$$

Подставляя из граничного условия (4) значение функции в условие (2) на L_1 получим

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{t}\right)} - \frac{r^2}{t}\overline{\varphi'(t)} - \frac{Pr^2}{t} + c = 0. \quad (5)$$

Таким образом рассматриваемая задача сводится к определению в области S функции $\varphi(z)$, удовлетворяющей на L_1 граничному условию (5).

Функция $\varphi(z)$ разыскивается в виде суммы двух рядов, один из которых является регулярной функцией вне окружности L_2 , исчезающей в бесконечности, а другой — внутри криволинейного многоугольника L_1 [2–4]:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{r}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{z-e}{r}\right)^n. \quad (6)$$

Коэффициенты a_n и b_n предполагаются вещественными.

Подставляя (6) в граничное условие (5) и преобразуя выражение t^k в виду рядов, расположенных по положительным и отрицательным степеням двухчлена $(t-e)$, и учитывая тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} U_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^m U_m, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n U_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} U_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} U_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+2}^{\infty} U_m = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{m-2} U_m,$$

получим.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_1^{(m)} \left(\frac{e}{t-e}\right)^m + b_n \left(\frac{t-e}{r}\right)^n + A_2^{(m)} t \left(\frac{t}{t-e}\right)^{m+1} + nb_n \frac{t}{r} \left(\frac{t-e}{r}\right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + A_3^{(m)} \left(\frac{e}{t-e}\right)^{m+2} + B_1^{(m)} \left(\frac{t-e}{e}\right)^{m-2} \right\} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_2^{(m)} \left(\frac{e}{t-e}\right)^m + \right.$$

$$\left. + A_4^{(m)} \left(\frac{t-e}{r}\right)^m + B_3^{(m)} \left(\frac{e}{t-e}\right)^{m+2} - P \frac{r^2}{e} (-1)^m \left(\frac{e}{t-e}\right)^{m+1} \right\} + c = 0 \quad (7)$$

Здесь

$$A_1^{(m)} = \sum_{n=1}^m a_n \left(\frac{r}{e}\right)^n C_{-n}^{m-n}, \quad A_2^{(m)} = - \sum_{n=1}^m na_n \frac{r^n}{e^{n+1}} C_{-n-1}^{m-n},$$

$$B_3^{(m)} = \sum_{n=1}^m na_n \left(\frac{r}{e}\right)^{n+2} C_{-n-2}^{m-n}, \quad A_4^{(m)} = - \sum_{n=m}^{\infty} a_n \left(\frac{e}{r}\right)^{n-m} C_n^m \lambda_n,$$

$$B_1^{(m)} = - \sum_{n=m}^{\infty} nb_n \left(\frac{e}{r}\right)^{n-2} (-1)^{n-m}, \quad B_2^{(m)} = - \sum_{n=0}^m B_2^* C_{-n}^{m-n} \left(\frac{r}{e}\right)^n,$$

$$B_2^* = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \left(-\frac{e}{r}\right)^{n-m} C_n^m \lambda_n, \quad B_3^{(m)} = - \sum_{n=1}^{\infty} nb_n (-1)^{m+n} \left(\frac{e}{r}\right)^{n-2};$$

$$\lambda_n = 0 \text{ при } n = 0,$$

$$\lambda_n = 1 \text{ при } n \neq 0.$$

Учитывая отображающую функцию (1) в (7), имея в виду разложения

$$\frac{1}{\left(\tau + \frac{M}{\tau^{q-1}}\right)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} M^n C_{-m}^n \frac{1}{\tau^{qn+m}} = \sum_{v=m}^{\infty} * M^{\frac{v-m}{q}} C_{-m}^{\frac{v-m}{q}} \frac{1}{\tau^v}$$

и изменяя порядок суммирования во всех двойных суммах, после некоторых математических преобразований вместо (7) получим

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ \left[A \left(\tau + \frac{M}{\tau^{q-1}} \right) + e \right] F_2(v, q) \tau^{-v} + [F_1(v, q) + F_3(v, q) + F_4(v, q)] \tau^{-v} + \right. \\ \left. + [F_7(v, q) + F_{15}(v, q) - F_{14}(v, q) \tau^v] + \sum_{v=2}^{\infty} \left[A \left(\tau + \frac{M}{\tau^{q-1}} \right) + e \right] F_9(v, q) + \right. \\ \left. + F_{10}(v, q) \right\} \tau^v + \sum_{v=3}^{\infty} F_{11}(v, q) \tau^v + \sum_{v=0}^{\infty} \left\{ F_8(v, q) \tau^{-v} + \right. \\ \left. + \left[A \left(\tau + \frac{M}{\tau^{q-1}} \right) + e \right] F_{13}(v, q) \tau^v + [F_{12}(v, q) + F_5(v, q)] \tau^v \right\} + \\ + \sum_{v=1}^{\infty} F_6(v, q) \tau^v + \frac{b_1}{r} \left[A \left(\tau + \frac{M}{\tau^{q-1}} \right) + e \right] + A_4^{(0)} + B_1^{(2)} + B_2^{(0)} + C = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1(v, q) &= \sum_{m=\omega}^v * A_1^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^m M^{\frac{v-m}{q}} C_{-m}^{\frac{v-m}{q}}, \quad F_2(v, q) = \\ &= \sum_{m=v}^{\infty} * (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}}, \\ F_3(v, q) &= \sum_{m=v}^{\infty} * A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}}, \quad F_4(v, q) = \\ &= \sum_{m=v}^{\infty} * B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}}, \\ F_5(v, q) &= \sum_{m=\omega_1}^{\infty} * B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e} \right)^m M^{\frac{v+m}{q}} C_{-m}^{\frac{v+m}{q}}, \quad F_6(v, q) = B_1^{(m)} \frac{e}{A} (-M)^{\frac{v-1}{q}}, \\ F_7(v, q) &= \sum_{m=v}^{\infty} * b_m \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}}, \quad F_8(v, q) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=\omega_1}^{\infty} * b_m \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{q}} C_{-m}^{\frac{v+m}{q}}, \quad F_9(v, q) = \sum_{m=\omega_2}^{v-1} * A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{v-m-1}{q}},$$

$$F_{10}(v, q) = \sum_{m=\omega_4}^{v-2} * B_3^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+2} M^{\frac{v-m-2}{q}} C_{-m-2}^{\frac{v-m-2}{q}},$$

$$F_{11}(v, q) = \sum_{m=\omega_3}^{v-2} * A_3^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^{m+2} M^{\frac{v-m-2}{q}} C_{-m-2}^{\frac{v-m-2}{q}},$$

$$F_{12}(v, q) = \sum_{m=\omega_1}^{\infty} * A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{q}} C_{-m}^{\frac{v+m}{q}},$$

$$F_{13}(v, q) = \sum_{m=\omega_1}^{\infty} * (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{v+m}{q}} C_{-m}^{\frac{v+m}{q}},$$

$$F_{14}(v, q) = \sum_{m=\omega_2}^{v-1} P \frac{r^2}{e} (-1)^m \left(\frac{e}{A} \right)^{m+1} M^{\frac{v-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{v-m-1}{q}},$$

$$F_{15}(v, q) = \sum_{m=\omega}^v * B_2^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^m M^{\frac{v-m}{q}} C_{-m}^{\frac{v-m}{q}},$$

где

$$\omega = v - qE \left(\frac{v-1}{q} \right), \quad \omega_1 = qF \left(\frac{v+1+\alpha}{q} \right) - v,$$

$$\omega_2 = v - 1 - qE \left(\frac{v-2}{q} \right), \quad \omega_3 = v - 2 - qF \left(\frac{v-3}{q} \right),$$

$$\omega_4 = v - 2 - qE \left(\frac{v-2}{q} \right), \quad \alpha \text{ берется равным } 0, 1, 2, \dots, (q-1).$$

Звездочка над суммами означает, что индекс суммирования увеличивается на q при переходе к следующему слагаемому.

Из (8) при одинаковых степенях τ для определения неизвестных коэффициентов a_k и b_k получены следующие две системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{m=v-qE\left(\frac{v-1}{q}\right)}^v * A_1^{(m)} \left(\frac{e}{A} \right)^m M^{\frac{v-m}{q}} C_{-m}^{\frac{v-m}{q}} + A \eta_1 \sum_{m=v}^{\infty} * (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + \\ + 1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + A M \eta_2 \sum_{m=v}^{\infty} * (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + \\ + 1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + e \sum_{m=v}^{\infty} * (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + \\ + \sum_{m=v}^{\infty} * A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + \sum_{m=v}^{\infty} * B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e} \right)^m M^{\frac{m-v}{q}} C_{-m}^{\frac{m-v}{q}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + AM\gamma_{13} \sum_{m=\nu-1-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{q}} + \\
& + \gamma_4 \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} b_m \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} + \\
& + AM\gamma_{15} \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} + M \frac{A_1}{r} \gamma_{16} b_1 = 0,
\end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 1, \\ 1 & \text{при } \nu \neq 1, \end{cases} & \gamma_{12} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < q, \\ 1 & \text{при } \nu \geq q, \end{cases} \\
\gamma_{13} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \geq q-2, \\ 1 & \text{при } \nu < q-2, \end{cases} & \gamma_{14} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 0, \\ 1 & \text{при } \nu \neq 0, \end{cases} \\
\gamma_{15} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \geq q, \\ 1 & \text{при } \nu < q, \end{cases} & \gamma_{16} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq q-1, \\ 1 & \text{при } \nu = q-1; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=\nu}^{\infty} b_m^* \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{m-\nu}{q}} C_m^{\frac{m-\nu}{q}} + \sum_{m=\nu-qE\left(\frac{\nu-1}{q}\right)}^{\nu} B_2^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^m M^{\frac{\nu-m}{q}} C_{-m}^{\frac{\nu-m}{q}} +$$

$$+ A\gamma_{17} + \sum_{m=\nu-1-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{q}} +$$

$$+ AM\gamma_{18} \sum_{m=\nu-1-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{q}} +$$

$$+ \gamma_7 \sum_{m=\nu-2-qE\left(\frac{\nu-3}{q}\right)}^{\nu-2} A_3^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+2} M^{\frac{\nu-m-2}{q}} C_{-m-2}^{\frac{\nu-m-2}{q}} +$$

$$+ A \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} +$$

$$+ e\gamma_{11} \sum_{m=\nu-1-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-1} A_2^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{q}} +$$

$$+ \sum_{m=\nu-2-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-2} B_3^{(m)} \left(\frac{e}{A}\right)^{m+2} M^{\frac{\nu-m-2}{q}} C_{-m-2}^{\frac{\nu-m-2}{q}} +$$

$$+ AM\gamma_{18} \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} +$$

$$+ e\gamma_{14} \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} (m+1) \frac{b_{m+1}}{r} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} +$$

$$+ \gamma_{14} \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} A_4^{(m)} \left(\frac{A}{r}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} +$$

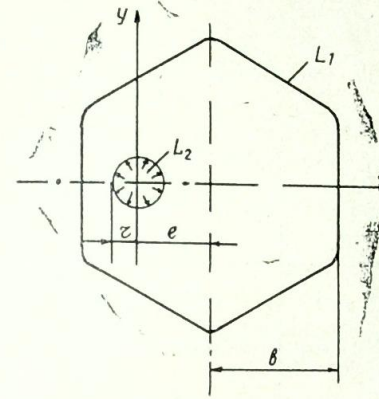


Рис. 1.

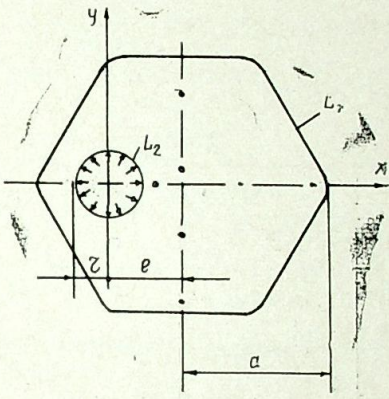


Рис. 2.

$$+ \gamma_{14} \sum_{m=qE\left(\frac{\nu+1+\alpha}{q}\right)-\nu}^{\infty} B_1^{(m+2)} \left(\frac{A}{e}\right)^m M^{\frac{\nu+m}{q}} C_m^{\frac{\nu+m}{q}} +$$

$$+ \gamma_9 B_1^{(m)} \frac{e}{A} (-M)^{\frac{\nu-1}{q}} + \frac{A}{r} b_1 \gamma_{16} =$$

$$= \sum_{m=\nu-1-qE\left(\frac{\nu-2}{q}\right)}^{\nu-1} P \frac{r^2}{e} (-1)^m \left(\frac{e}{A}\right)^{m+1} M^{\frac{\nu-m-1}{q}} C_{-m-1}^{\frac{\nu-m-1}{q}}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{17} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu = 1; 2, \\ 1 & \text{при } \nu \neq 1; 2, \end{cases} & \gamma_{18} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \leq q-2, \\ 1 & \text{при } \nu > q-2, \end{cases} \\
\gamma_{19} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq qn - (q-1), \\ 1 & \text{при } \nu = qn - (q-1), \end{cases} & \gamma_{16} &= \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq 1, \\ 1 & \text{при } \nu = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Для конкретной инженерной задачи из полученной системы выделяются первые несколько уравнений и определяются неизвестные коэффициенты a_k и b_k . Число уравнений зависит от точности решения рассматриваемой задачи. После определения неизвестных коэффициентов a_k и b_k по известным формулам можно вычислить компоненты напряжений.

В заключение рассмотрим в качестве примера случай шестиугольной пластинки ($q=6$) для двух вариантов (рис. 1 и 2):

а) $M = \frac{1}{25}, \quad \frac{e}{r} = 2,5; \quad \frac{e}{a} = 0,5, \quad \frac{a}{r} = 5;$

Таблица 1

κ	a_{κ}/p^4	b_{κ}/p^4
1	$0,106238027 \cdot 10^{-1}$	$0,246679410 \cdot 10^{-1}$
2	$0,875958043 \cdot 10^{-3}$	$-0,533320209 \cdot 10^{-2}$
3	$-0,905298600 \cdot 10^{-4}$	$0,565405545 \cdot 10^{-3}$
4	$-0,487835560 \cdot 10^{-4}$	$-0,567609800 \cdot 10^{-4}$
5	$0,374077560 \cdot 10^{-5}$	$0,135504867 \cdot 10^{-5}$

б) $M = -\frac{1}{25}, \quad \frac{e}{r} = 4,666, \quad \frac{e}{b} = 0,7, \quad \frac{b}{r} = 6,666.$

Таблица 2

Точки	Компоненты напряжений	
z	σ_r	σ_θ
$-(a-e)$	$0,001045 P$	$0,5984 P$
$\frac{r+a-e}{2}$	$0,19936 P$	$0,68247 P$
$-r$	$-P$	$1,421 P$
r	$-P$	$1,134 P$
e	$-0,1646 P$	$0,1648 P$
$e + \frac{a}{2}$	$-0,0216 P$	$0,053 P$
$e + a$	$-0,001 P$	$0,013 P$

Таблица 3

Точки	Компоненты напряжений	
z	σ_r	σ_θ
$-(b-e)$	$0,0024 P$	$1,36 P$
$\frac{r+b-e}{2}$	$-0,4077 P$	$1,14 P$
$-r$	$-P$	$1,42 P$
r	$-P$	$1,16 P$
e	$-0,2026 P$	$0,1277 P$
$e + \frac{b}{2}$	$0,065 P$	$-0,092 P$
$e + a$	$0,0041 P$	$-0,026 P$

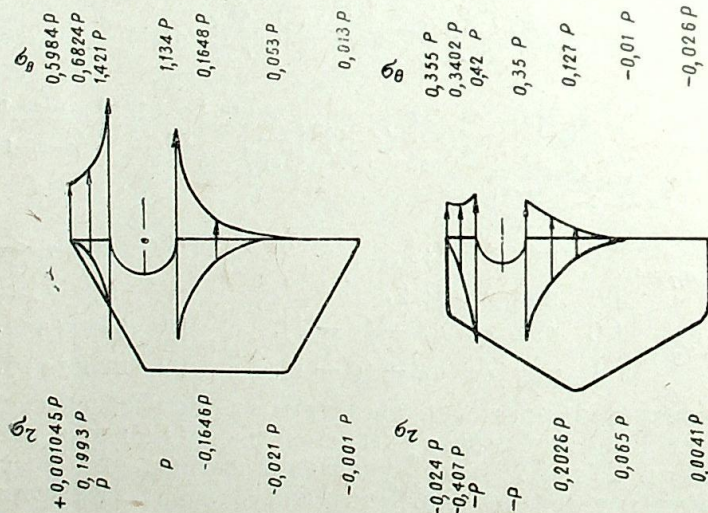


Рис. 3.

Рис. 4.

Из полученной системы линейных уравнений (8) и (10) для определения неизвестных коэффициентов выделены по пять первых уравнений. Найденные коэффициенты a_{κ} и b_{κ} ($\kappa=1, 2, \dots, 5$) сведены в табл. 1.

Далее для характерных точек по известным формулам были подсчитаны компоненты напряжений (табл. 2 и 3). Как и следовало ожидать, значения напряжений σ_r в точках L_2 равны $-P$, а в точках L_1 они близки к нулю.

На основании этих таблиц построены эпюры напряжений σ_r и σ_θ (рис. 3, 4).

Кроме сказанного, надо отметить, что при $e=0$ численные результаты полностью совпадают с результатами работы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во "Наука", 1966.
2. Аманзаде Ю. А. Теория упругости Изд-во "Маариф", Баку, 1968.
3. Шерман Д. И. "ДАН СССР", т. XXVIII, 1940, № 1.
4. Аманзаде Ю. А., Гуськова Е. П. "Прикладная механика", т. 3. вып. 1, 1967.
5. Мамедова С. О. Тр. Азерб. пед. ин-та, т. 16, 1962.
6. Алиев З. З. "За технический прогресс", 1965, № 5.
7. Бахтияров Д. А., Алиев К. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1968, № 4.
8. Алиев К. "За технический прогресс", 1968, № 4.

Поступило 12. V 1969

С. Ә. Гулијев

Мүхтәлиф шәкилләрдә олан ики рабитәли бир мүстәви мәсәлә һаггында

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда эксцентрик даирәви бошлуғу олан лөвһәнин дахили тәзјигдән кәркинлик вәзијјәти өјрәнилмишдир. Бахылан лөвһә икирабитәли вә харичдән дүзкүн чохбучағлы контура маликдир. Мәсәләнин хүсуси һалы кими харичи контур, еллепс вә чеврә дә ола биләр. Бу мәсәлә ин'икас нәзәријјәси вә аналитик функцијаларын тәтбиги үсулу илә һәлл едилмишдир. Бундан сонра мәсәлә сонсуз чәбри хәтти тәнликләр системинә кәтирилмиш вә дүзкүн алтыбучағлы лөвһәјә аид мисалла һәлл едилмишдир.

Л. М. ГЛУСКИН, Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

ГОМОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ И СИММЕТРИЯ

Настоящая статья посвящена дальнейшему изучению графов с помощью алгебр гомоморфизмов [1, 2].

1. Пусть $(Q_1, \rho_1), (Q_2, \rho_2)$ — два графа, заданные на непересекающихся множествах Q_1, Q_2 . Обозначим $Q = Q_1 \cup Q_2$, $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$. Через $S_\rho(Q_1, Q_2)$ обозначена скрещенная полугруда пар гомоморфизмов графов (Q_1, ρ_1) (все не приведенные здесь определения см. в работах [1, 2]).

Для произвольного рефлексивного отношения σ на множество Σ введем следующие отношения $\bar{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}$ (на том же множестве). Пусть $a, b \in \Sigma$; $(a, b) \in \bar{\sigma}$ (соответственно $(a, b) \in \tilde{\sigma}$) тогда и только тогда, когда существуют элементы $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \Sigma$ такие, что $x_0 = a$, $x_n = b$ и $(x_{i-1}, x_i) \in \sigma$ (соответственно $(x_{i-1}, x_i) \in \sigma \cup \sigma^{-1}$) при $(i = 1, 2, \dots, n)$; $\bar{\sigma}(\tilde{\sigma})$ является наименьшим отношением квазипорядка (эквивалентности), содержащим σ , и называется транзитивным (эквивалентным) замыканием отношения σ . Каждый класс эквивалентности $\bar{\sigma}$ называется [3] компонентой графа (Σ, σ) . Обозначим через H_σ множество всех таких подмножеств множества Σ , каждое из которых является объединением некоторых компонент графа (Σ, σ) .

2. Пусть x, y — любые элементы из Q_2 ; Q' — произвольное подмножество Q_1 ; $\theta = \theta[Q', x, y]$ — следующее отображение множества Q_1 в Q_2 ; $\theta(Q') = x$, $\theta(Q_1 \setminus Q') = y$. Если ρ_1 — рефлексивные отношения на множествах $Q_1 (i = 1, 2)$, то нетрудно проверить, что

$$(x, y) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1} \rightarrow \forall Q' \subseteq Q_1, \theta[Q', x, y] \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2) \quad (1)$$

Лемма. Если $(x, y) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$, то

$$\{\theta(Q', x, y) \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2) \wedge \theta(Q', y, x) \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)\} \leftrightarrow Q' \in H_{\rho_1}.$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \rho_2$ или $(x, y) \in \rho_2^{-1}$. Обозначим $\theta = \theta[Q', x, y]$, $\psi = \theta[Q', y, x]$. Если $Q' \in H_{\rho_1}$, то найдется пара элементов $a, b \in Q_1$ такая, что $a \in Q'$, $b \in Q_1 \setminus Q'$ и $(a, b) \in \rho_1 \cup \rho_1^{-1}$. Тогда $\theta a = \psi b = x$, $\theta b = \psi a = y$. Нетрудно проверить, что во всех возможных случаях одно из включений $\theta \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$, $\psi \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$ неверно. Если же $Q' \in H_{\rho_1}$, то для любых $a, b \in Q_1$ из $(a, b) \in \rho_1$ следует $\theta a = \theta b$, и $\theta \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$ в силу рефлексивности отношения ρ_2 . Точно так же $\psi \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$.

3. Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Если $\rho = \rho_1 \cup \rho_2$, где $\rho_1 \in Q_1^2$ и $S_\rho(Q_1, Q_2) = S(Q_1, Q_2)$ то либо $\rho = \Delta$, либо $\rho = \emptyset$ ($\emptyset$ — пустое множество), либо $\rho = Q_1^2 \cup Q_2^2$.

4. Лемма. Пусть ω_1 — нетривиальные рефлексивные отношения на множествах Q_1 ; ρ_1 — произвольные отношения на Q_1 . Если $S_\omega(Q_1, Q_2) = S_\rho(Q_1, Q_2)$, то $\rho \cap \rho^{-1} = \omega \cap \omega^{-1}$ и $\bar{\rho} = \bar{\omega}$.

Доказательство. Если бы $\rho = \emptyset$, то из п. 3 следовало бы $S_\omega(Q_1, Q_2) = S(Q_1, Q_2)$, что противоречит предположению о нетривиальности отношений ω_1 . Следовательно, $\rho \neq \emptyset$; пусть для определенности $\rho_1 \neq \emptyset$. Для всякого $z \in Q_2$ обозначим через α_z отображение Q_1 в Q_2 такое, что $\alpha_z(Q_1) = z$. Из рефлексивности отношения ω_2 следует, что $\alpha_z \in \Gamma_{\omega_2}(Q_1, Q_2)$ и, следовательно, $\alpha_z \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$. Отсюда и из $\rho_1 \neq \emptyset$ следует, что ρ_2 рефлексивно. Аналогично ρ_1 также рефлексивно. Точно так же из п. 3 вытекает, что отношения ρ_1 и ρ_2 нетривиальны.

Пусть x, y — такие элементы из Q_2 , что $(x, y) \in \omega_2 \cap \omega_2^{-1}$. В силу $\rho_1 \neq \Delta_1$ существуют $z, t \in Q_1$ такие, что $z \neq t$, $(z, t) \in \rho_1$. Из (1) следует, что $\theta = \theta[Q_1, x, y] \in \Gamma_{\omega_2}(Q_1, Q_2)$ и, следовательно, $\theta \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$. Отсюда вытекает $(x, y) = (\theta z, \theta t) \in \rho_2$ и, аналогично, $(y, x) \in \rho_2$, т. е. $\omega_2 \cap \omega_2^{-1} \subseteq \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$. Этим же способом можно показать, что $\rho_2 \cap \rho_2^{-1} \subseteq \omega_2 \cap \omega_2^{-1}$. Таким образом $\omega_2 \cap \omega_2^{-1} = \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$. Справедливость равенства $\omega_1 \cap \omega_1^{-1} = \rho_1 \cap \rho_1^{-1}$ доказывается аналогично. Из $\rho_1 \cap \rho_1^{-1} = \omega_1 \cap \omega_1^{-1}$ и леммы п. 2 теперь следует, что $H\omega_1 = H\rho_1 (i = 1, 2)$, т. е. $\bar{\omega}_1 = \bar{\rho}_1$.

5. Теорема. Пусть ω_1 — нетривиальные рефлексивные отношения на множествах Q_1 ; σ_1 — произвольные отношения на множествах Σ_1 . Если полугруды $S_\omega(Q_1, Q_2)$ и $S_\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ изоморфны, то существует отображение ξ множества Σ_1 на Q_1 , являющееся изоморфизмом графов $(\Sigma_1, \sigma_1 \cap \sigma_1^{-1})$ на $(Q_1, \omega_1 \cap \omega_1^{-1})$ и графов (Σ_1, σ_1) на (Q_1, ω_1) .

Доказательство теоремы вытекает из леммы п. 4 и из свойств вполне простых полугруд. Проводится оно так же, как и в работах [1, 2].

6. Теорема. Если при условиях теоремы п. 5 одно из отношений $\omega_1 (i = 1, 2)$ симметрично, а оба отношения σ_1 — несимметричны, то $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_2$.

Доказательство. Вернемся к ситуации леммы п. 4. Пусть ω_1 — нетривиальные рефлексивные отношения на множествах Q_1 ; ρ_1 — произвольные отношения на $Q_1 (i = 1, 2)$; ω_1 — симметрично; ρ_1 и ρ_2 — несимметричны; $S_\omega(Q_1, Q_2) = S_\rho(Q_1, Q_2)$. Предположим, что $\rho_1 \neq \rho_1$, тогда $\bar{\rho}_1$ несимметрично, существуют элементы $a, b \in Q_1$ такие, что $(a, b) \in \bar{\rho}_1 \cap \bar{\rho}_1^{-1}$. По определению отношения $\bar{\rho}_1$ существуют элементы $x_1 \in Q_1$ такие, что $a = x_0$, $b = x_n$, $(x_{i-1}, x_i) \in \rho_1$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Если бы $(x^1, x_{1-1}) \in \rho_1$ при $i = 1, 2, \dots, n$, то из определения ρ_1 следовало бы, что $(a, b) \in \rho_1^{-1}$. Следовательно, $(x_k, x_{k-1}) \in \rho_1$ при некотором $k (1 \leq k \leq n)$; напомним, что $(x_{k-1}, x_k) \in \rho_1$.

Из несимметричности отношения ρ_2 следует существование элементов $z, t \in Q_2$ таких, что $(z, t) \in \rho_2 \cap \rho_2^{-1}$. Тогда отображение $\theta = \theta[Q_1, x_k, z, t]$ (см. [2] п. 2) является гомоморфизмом графа (Q_1, ρ_1) , а следовательно и (Q_1, ρ_1) в граф (Q_2, ρ_2) , причем, $\theta x_{k-1} = z$, $\theta x_k = t$. В то же время $\Psi = \theta[Q_1, x_k, t, z] \in \Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2)$, так как $\Psi x_{k-1} = t$, $\Psi x_k = z$, $(t, z) \in \rho_2$.

Между тем Ψ, θ — такие отображения Q_1 в множество $\{z, t\}$, что $\Psi x = \theta u$, $\theta x = \psi u$ для любых $x, u \in Q_1$. Из симметричности отношения ω_1 следует, что θ и Ψ одновременно являются или не являются гомоморфизмами графа (Q_1, ω_1) в (Q_2, ω_2) . Это противоречит равенству $\Gamma_{\rho_2}(Q_1, Q_2) = \Gamma_{\omega_2}(Q_1, Q_2)$. Следовательно, предположение $\bar{\rho}_1 \neq \bar{\rho}_1$ неверно. Аналогично можно показать, что $\bar{\rho}_2 = \bar{\rho}_2$. Окончание доказательства такое же, как и в теореме п. 5.

7. Теорема. Пусть ω_1 — нетривиальные симметричные отно-

шения на множествах $\mathcal{Q}_1$, σ_1 — симметричные отношения на множествах Σ_1 . Для того, чтобы полугруды $S\omega(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы графы $(\mathcal{Q}_1, \omega_1)$ были соответственно изоморфны графам (Σ_1, σ_1) .

Необходимость условий этой теоремы вытекает из теоремы п. 5. Достаточность их очевидна.

8. Теорема. Пусть ω_1 — нетривиальная эквивалентность на множестве $\mathcal{Q}_1$, ω_2 — нетривиальное отношение квазипорядка на множестве $\mathcal{Q}_2$; σ_1 — произвольные отношения на множествах Σ_1 . Полугруды $S\omega(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ изоморфны, тогда и только тогда, когда существует отображение ξ множеств Σ на $\mathcal{Q}$, являющееся изоморфизмом графов (Σ_1, σ_1) , $(\Sigma_2, \sigma_2 \cap \sigma_1^{-1})$, (Σ_2, σ_2) соответственно на $(\mathcal{Q}_1, \omega_1)$, $(\mathcal{Q}_2, \omega_2 \cap \omega_1^{-1})$ и $(\mathcal{Q}_2, \omega_2 \cup \omega_1^{-1})$.

Необходимость условий вытекает из теоремы п. 5. Следует лишь учесть, что в рассматриваемом случае в лемме п. 4 мы имели бы

$$\rho_1 \cap \rho_1^{-1} = \omega_1, \quad \tilde{\rho}_1 = \tilde{\omega}_1 (= \omega_1), \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 \cup \omega_1^{-1}.$$

Тогда $\omega_1 \subseteq \rho_1 \subseteq \omega_1$, т. е. $\omega_1 = \rho_1$. Достаточность условий теоремы проверяется непосредственно.

9. Аналогичные результаты можно получить для случая, когда одно из рассматриваемых отношений тривиально. В терминах полугрупп эндоморфизмов они верны и для случая $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глускин Л. М. „Усп. матем. наук“, т. XVI, № (101), 1961.
2. Фейзуллаев Р. Б. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“ № 41969.
3. Берж К. Теория графов и ее применения. ИЛ, М., 1962.

Поступило 12 V 1969.

Л. М. Глускин, Р. Б. Фейзуллаев

Графларын гомоморфизмлари ва симметрия

ХУЛАСА

Мағалэдэ графларын бир чүт там гомоморфизмларин чарпаз жарымгрудлары васитэсилэ характеризэ олунмасы верилмишдир. Мүэл-лифлэр тэрэфиндэн биринчи чүтү гејри-тривиал симметрик графлар, икинчи чүтү исэ ихтијари симметрик графлар олан ики чүт графын там гомоморфизмларинин ики чарпаз жарымгрудлары үчүн изоморфизм шэртлэри мүэјјэн едилмишдир.

Р. И. КАЖЛАЕВА, М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ, А. А. КУЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ VB

В последнее время исследованиям полуметаллов и твердых растворов на их основе уделяется особое внимание в связи с их практическим применением. Сведения о термодинамических свойствах растворов полуметаллов практически отсутствуют.

В настоящей статье приводятся результаты экспериментального определения давления насыщенных паров систем висмут—сурьма, сурьма—мышьяк и их компонентов. В качестве исходных компонентов применялись мышьяк марки В=5, сурьма Sb=0000 и висмут Bi=000.

Сплавы приготавливались сплавлением компонентов в вакуированных кварцевых ампулах. При изготовлении сплавов с большим содержанием мышьяка применялись толстостенные кварцевые ампулы, выдерживающие внутреннее давление порядка 100 атм. Исследовались сплавы висмута, содержащие 6,5; 16,0; 36,0; 48,0; 6,30; и 80 (атм) %Sb, в интервале 723—953°K и сплавы сурьмы, содержащие 15, 30, 40, 50, 70, 85 (атм) %AS, в интервале 518—773°K.

Давление паров определялось эффузионным методом Кнудсена на установке, описанной нами ранее [1]. Для определения количества сурьмы и висмута на конденсационных колпачках применялись фотокolorиметрические методы [2], а мышьяк определялся йодометрическим методом с применением органических растворителей [3]. Поскольку пары мышьяка и сурьмы, согласно данным [4], в области температур, при которых производились наши измерения, состоят практически только из четырехатомных молекул, степень их диссоциации во внимание не принималась. При расчете давления пара висмута необходимо учитывать диссоциацию в его парах, так как она становится заметной уже при температурах выше 300°С. В этом случае нами вычислялись парциальные давления паров Bi и Bi₂, сумма которых дает общее давление пара висмута.

Обсуждение результатов

Результаты измерений давления насыщенных паров сурьмы над сплавами различных составов представлены на рис 1. По данным исследования этих давлений методом наименьших квадратов выведены соотношения, определяющие экспериментальные зависимости давления

пара от температуры для сплавов различного состава, а также для чистой сурьмы:

$$\begin{aligned} 6,5 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 8,047 - \frac{8666,6}{T}; \\ 16,0 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 7,824 - \frac{8279,8}{T}; \\ 39,0 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 8,966 - \frac{9000,0}{T}; \\ 48,0 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 9,445 - \frac{9355,1}{T}; \\ 63,0 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 9,932 - \frac{9709,6}{T}; \\ 80,0 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 10,079 - \frac{9741,9}{T}; \\ 100 \text{ ат \% Sb, } \lg P &= 10,451 - \frac{9932}{T}; \end{aligned}$$

Для всех исследованных сплавов вычислены значения теплоты испарения (Q ккал/г-ат), которые соответственно определенным давлениям пара равны: 39,65; 37,88; 41,17; 42,76; 44,42; 44,57 и 45,40.

Сравнение давлений пара сурьмы над раствором (P) и над чистой сурьмой (P_0) позволило вычислить термодинамическую активность $a = \frac{P}{P_0}$. Изотермическое изменение термодинамической активности сурь-

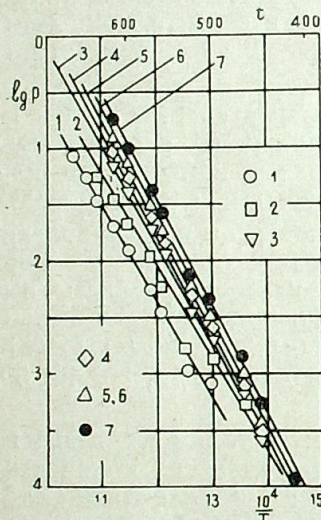


Рис. 1.

1—6,5 ат. % Sb; 2—16 ат. % Sb;
3—36 ат. % Sb; 4—48 ат. % Sb;
5—63 ат. % Sb; 6—80 ат. % Sb;
7—100 % Sb.

мы для различных температур показано на рис. 2. Изменение термодинамической активности в зависимости от состава сплава свидетельствует о сложном характере взаимодействия атомов в системе висмут—сурьма. В области малых содержаний сурьмы наблюдается положительное отклонение от закона Рауля, а в области больших ее содержаний — отрицательное, т. е. в первом случае взаимодействие между одинаковыми атомами в растворе сильнее, чем между разными, а во втором — взаимодействие между разными атомами становится сильнее, чем между одинаковыми.

Применяя выражение $\gamma_s = \exp\left(x_2 \frac{V}{RT}\right)$, где γ_s — коэффициент

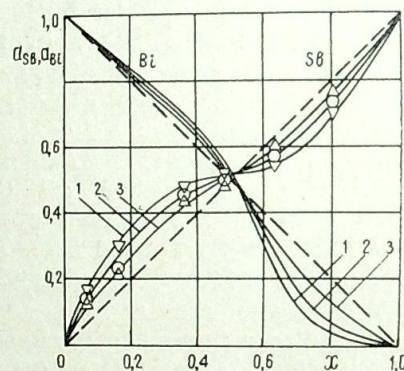


Рис. 2.

1—773° K; 2—823° K; 3—873°

активности сурьмы, рассчитывалась энергия межатомного взаимодействия V , изменение которой в зависимости от температуры показано на рис. 3. С другой стороны, по величине энергии взаимодействия можно вычислить коэффициент термодинамической активности нелетучего компонента (в нашем случае Bi), что, также показано на рис. 2.

Заключение об относительном изменении силы взаимодействия атомов одинаковых и разных сортов подтверждается также знаком энергии межатомного взаимодействия, которая положительна в растворах, богатых висмутом, и отрицательна в растворах, богатых сурьмой. При этом, как видно из рис. 3, в первом случае она незначительно линейно уменьшается с температурой, а во втором — заметно линейно увеличивается.

Изменение интегральной энергии смешения в системе висмут—сурьма в зависимости от состава показано на рис. 4. Величина ее играет существенную роль при оценке степени равновесности растворов.

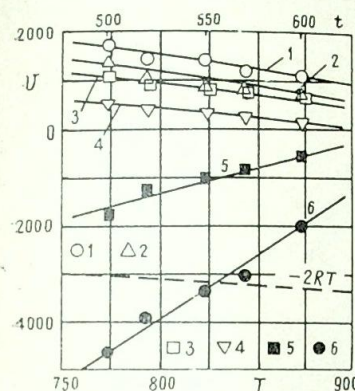


Рис. 3.

1—6,5 ат. % Sb; 2—16 ат. % Sb;
3—36 ат. % Sb; 4—48 ат. % Sb;
5—63 ат. % Sb; 6—80 ат. % Sb.

Как известно, условием возможного распада твердых растворов является $H = 2RT_{кр}$. Оценка показывает, что хотя термодинамические свойства системы висмут—сурьма изменяется от состава не по закономерностям, свойственным идеальным растворам, критические температуры оказываются низкими и при нормальных условиях эти сплавы должны оставаться в разупорядоченном состоянии.

По результатам измерения давлений паров твердых растворов сурьма—мышьяк различных составов построены зависимости $\lg P$ от $\frac{1}{T}$ (рис. 5). Для сравнения на этом же графике приведены данные для чистого мышьяка. Как видно из рисунка, наклоны зависимостей $\lg P$ от $\frac{1}{T}$, независимо от содержания второго компонента, остаются

приблизительно постоянными. Абсолютные же значения давления пара, как и следовало ожидать, падают по мере увеличения содержания сурьмы. Как и для системы висмут—сурьма, были выведены формулы, определяющие температурные зависимости давления паров мышьяка в сплавах сурьма—мышьяк различных составов;

$$\begin{aligned} 15 \text{ ат \% As, } \lg P &= 7,678 - \frac{6585,8}{T}; \\ 30 \text{ ат \% As, } \lg P &= 8,115 - \frac{6888,8}{T}; \end{aligned}$$

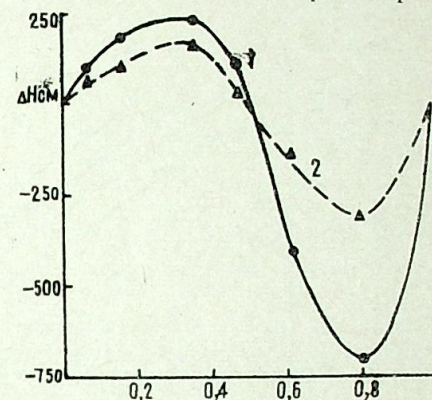


Рис. 4.

1—773° K; 2—873° K.

$$40 \text{ ат \% As, } \lg P = 8,529 - \frac{6962,0}{T};$$

$$50 \text{ ат \% As, } \lg P = 9,000 - \frac{7054,0}{T};$$

$$70 \text{ ат \% As, } \lg U = 10,222 - \frac{7203,3}{T};$$

$$85 \text{ ат \% As, } \lg P = 10,936 - \frac{7457,1}{T}.$$

Расчет основных термодинамических функций твердых растворов сурьма—мышьяк, так же как и для системы висмут—сурьма, основывается на учете отклонения от идеальности путем подстановки термодинамической активности вместо концентрации. По характеру изменения термодинамической активности (рис. 6) видно, что в системе сурьма—мышьяк отклонение от закона Рауля при всех составах отрицательно.

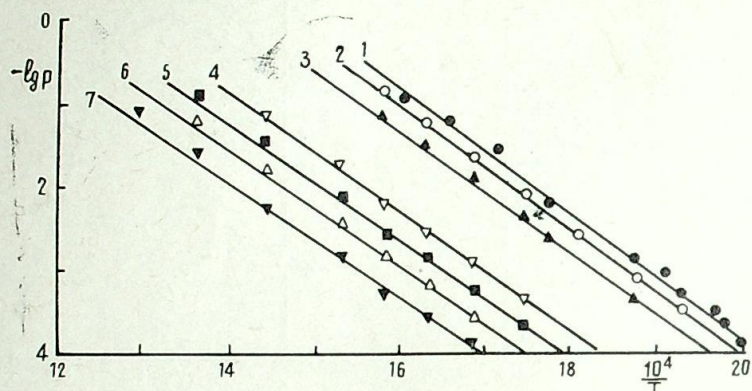


Рис. 5.
1—чистый мышьяк; 2—85 ат.% As'; 3—70 ат.% As';
4—50 ат.% AS; 5—40 ат.% As'; 6—30 ат.% As';
7—15 ат.% As'.

Кроме того, само это отклонение от идеального хода значительно сильнее, чем в системе висмут—сурьма. На этом же рисунке показано вычисленное значение термодинамической активности сурьмы.

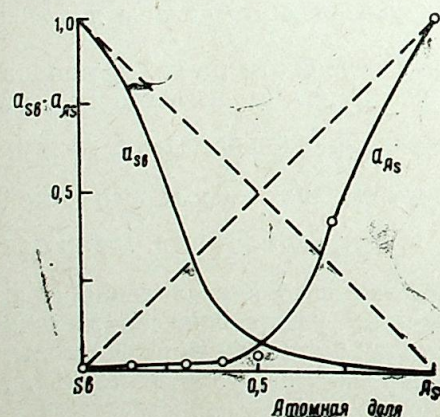


Рис. 6.

Изменение энергии смешения твердых растворов сурьма—мышьяк позволяет определить критическую температуру, выше которой в этой системе может наблюдаться упорядочение. Однако расчет дает вели-

чину выше точки плавления этих твердых растворов. Казалось бы последнее говорит о том, что твердые растворы сурьма—мышьяк должны легко переходить в упорядоченное состояние. О значительной тенденции к упорядочению можно судить и по изменению свободной энергии этой системы в зависимости от состава.

Практически, однако, твердые растворы сурьма—мышьяк, независимо от технологии приготовления [5], существуют в разупорядоченном виде и линий сверхструктуры на рентгенограммах не наблюдается. Обычно применяемые с целью уменьшения дефектов виды термообработки также не изменяют разупорядоченности сплавов сурьма—мышьяк. И только при очень длительной (порядка 100 дней) выдержке при температуре, близкой к точке плавления, наблюдается упорядочение. Все это свидетельствует о том, что, несмотря на значительную тенденцию к упорядочению, сплавы мышьяк—сурьма при нормальных условиях остаются разупорядоченными, очевидно, благодаря малой взаимной диффузии компонентов в твердом состоянии. Сравнение геометрических размеров атомов мышьяка, сурьмы и висмута показывает, что в системе сурьма—мышьяк искажение решетки по мере добавления второго компонента происходит сильнее, чем в системе висмут—сурьма. Искращения кристаллической решетки обычно вносят положительный вклад в теплоту смешения. При этом по мере увеличения содержания второго компонента может происходить и переход от отрицательной области теплоты смешения к положительной. Такой характер изменения теплоты смешения наблюдается, однако, не всегда. В частности, в системе сурьма—мышьяк энергия смешения остается отрицательной при всех составах.

Как видно, изменение всех термодинамических функций систем свидетельствует о значительной тенденции к упорядочению и более сильном взаимодействии разнородных атомов по сравнению с одноименными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахтахтинский М. Г., Кулиев А. А. Заводская лаборатория, 25, 11, 1959.
2. Файнберг С. Ю. Анализ руд цветных металлов. Металлургиздат, М., 1953.
3. Шахтахтинский Г. Б. Ж. аналит. химии АН СССР, XI, 1954, № 4.
4. А. Н. Несмеянов. Давление пара химических элементов. Изд. АН СССР 1961.
5. Trzebiatowski W., Brujak E. Zs. anorg. chem., 238, 255, 1938.

Поступило 15. V 1969

Р. И. Кажлаева, М. И. Шахтахтински, А. А. Гулиев

В груп элементлэри бэрк мэхлулларинын
термодинамик хассэлэринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда Кнудсенин еффузија үсулу илэ бисмут—сүрмэ, сүрмэ—арсен вэ онларын компанентлэринин дојмуш бухар тэзјиги өјрөнилмишдир. Тэчрүбэлэр эсасында бу системлэри характеризэ едэн термодинамик кэмијјэтлэр несабланмышдыр.

УДК 518.517. 948

З. А. АЛИЕВА

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим s -кратное интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda \int_{G_s} K(P, Q) \varphi(Q) dQ, \quad (1)$$

где интегрирование распространено на единичный s -мерный куб G_s ; λ — произвольное число, не являющееся собственным значением ядра $K(P, Q)$; $\varphi(P)$ — искомая функция; $f(P)$ и $K(P, Q)$ — непрерывные и периодические функции с периодом 1, разлагающиеся в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Определим норму

$$\|f\| = \left(\int_{G_s} f^2(P) dP \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Как известно, область сходимости процесса простой итерации для уравнения (1) определяется условием

$$|\lambda| \|K\| < 1, \quad (2)$$

где

$$\|K\| = \left(\int_{G_s} \int_{G_s} K^2(P, Q) dP dQ \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Запишем исходное уравнение (1) в виде

$$\varphi(P) = f(P) + \lambda E C(P) + \lambda \int_{G_s} [K(P, Q) - C(P)] \varphi(Q) dQ, \quad (4)$$

где $C(P) = C(x_1, \dots, x_s)$ — некоторая функция, определяемая из условия минимума интеграла

$$I = \int_{G_s} \int_{G_s} [K(P, Q) - C(P)]^2 dP dQ.$$

В этом случае при каждом фиксированном P функция $C(P)$ может быть определена следующим образом:

$$C(P) = \int_{G_s} K(P, Q) dQ.$$

Тогда

$$\|C\|^2 = \int_{G_s} C^2(P) dP = \int_{G_s} \int_{G_s} K^2(P, Q) dQ dP,$$

Если ввести обозначение

$$K(P, Q) - C(P) = D(P, Q),$$

то справедливо равенство

$$\|D\|^2 = \|K\|^2 - \|C\|^2.$$

Так как $\|C\| \geq 0$, то область сходимости процесса простой итерации для уравнения (4) с ядром $D(P, Q)$ будет не уже, чем область для данного уравнения (1).

Тогда область сходимости уравнения (4) определим исходя из условия

$$q = |\lambda| (\|K\|^2 - \|C\|^2)^{\frac{1}{2}} < 1. \quad (5)$$

В уравнении (4) E — неизвестная, но определяемая постоянная:

$$E = \int_{G_s} \varphi(Q) dQ.$$

Рассмотрим теперь интегральное уравнение с ядром

$$D(P, Q) = K(P, Q) - C(P). \quad (6)$$

Применяя к уравнению (4) с ядром (6) процесс итерации, получим

$$\varphi(P) = F(P) + \lambda \int_{G_s} H(P, Q, \lambda) F(Q) dQ, \quad (7)$$

где

$$F(P) = f(P) + \frac{\alpha \beta}{1 - \lambda \alpha} C(P),$$

$$\alpha = \int_{G_s} [C(P) + \lambda \int_{G_s} H(P, Q, \lambda) C(Q) dQ] dP,$$

$$\beta = \int_{G_s} [f(P) + \lambda \int_{G_s} H(P, Q, \lambda) f(Q) dQ] dP,$$

$H(P, Q, \lambda)$ — резольвента ядра $D(P, Q)$:

$$H(P, Q, \lambda) = D(P, Q) + \lambda D_2(P, Q) + \dots + \lambda^{n-1} D_n(P, Q) + \dots, \quad (8)$$

$$D_1(P, Q) = D(P, Q),$$

$$D_n(P, Q) = \int_{G_s} D_{n-1}(P, P_1) \cdot D(P_1, Q) dP_1.$$

Следуя [1], построим итерационный процесс, соответствующий формуле (7). Последовательные приближения запишем в виде

$$\varphi_n(P) = E \lambda X_n(P) + \psi_n(P), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где

$$X_n(P) = C(P) + \lambda \int_{G_s} D(P, Q) X_{n-1}(Q) dQ, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X_0(P) = C(P), \quad (10)$$

$$\psi_n(P) = f(P) + \lambda \int_{G_s} D(P, Q) \psi_{n-1}(Q) dQ, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\psi_0(P) = f(P). \quad (11)$$

Последовательности функций $\{X_n(P)\}$ и $\{\psi_n(P)\}$ равномерно сходятся в области, определенной условием (5), к некоторым неизвестным пока функциям $X(P)$ и $\psi(P)$, соответственно. Тогда точное решение исходного интегрального уравнения (1) запишется в виде

$$\varphi(P) = E \lambda X(P) + \psi(P), \quad (12)$$

где

$$E = \frac{\int_{G_s} \psi(P) dP}{1 - \lambda \int_{G_s} X(P) dP}. \quad (13)$$

Образуем последовательность $\{E^{(n)}\}$:

$$E^{(n)} = \frac{\int_{G_s} \psi_n(P) dP}{1 - \lambda \int_{G_s} X_n(P) dP} \quad (14)$$

и рассмотрим выражение

$$\tilde{\varphi}_n(P) = E^{(n)} \lambda X_n(P) + \psi_n(P). \quad (15)$$

Легко убедиться, что

$$|\varphi(P) - \tilde{\varphi}_n(P)| \leq M \cdot q^n, \text{ где } q = |\lambda| \cdot \|D\| < 1,$$

M — некоторая постоянная.

В большинстве случаев интегралы (11) вычисляются приближенно, поэтому будем пользоваться квадратурными формулами Н. М. Коробова для функции из класса $E_s^\alpha(C)$ [2]. Очевидно, для этого необходимо убедиться, что подынтегральные функции принадлежат классу $E_s^\alpha(C)$. Пусть

$$E(P, Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, Q_1) \cdot D(Q_1, Q_2) \dots D(Q_{v-1}, Q_v) \cdot f(Q_v),$$

тогда

$$\psi_n(P) = f(P) + \int_{G_{sv}} F(P, Q_1, \dots, Q_n) dQ_1 \dots dQ_n.$$

Согласно [1] (лемма 9) получим, что функция

$$D(P, Q_1) \cdot D(Q_1, Q_2) \dots D(Q_{v-1}, Q_v)$$

как функция $Q_1, Q_2, \dots, Q_v$, принадлежит классу

$$E_{sn}^\alpha(A^{v-1} \|D\|^v), \text{ где } A = \left[2^{v+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right) \right]^s.$$

Тогда $F(P, Q_1, \dots, Q_n)$ принадлежит классу

$$E_{sn}^\alpha \left(\sum_{v=1}^n |\lambda|^v A^v \|D\|^v \cdot \|f\| \right).$$

Если же $\|f\| < \|D\|$ и если

$$|\lambda| A \|D\| < \frac{1}{2}, \text{ то } F \in E_{sn}^\alpha(\|D\|).$$

Пусть точки M_{kv} определены равенствами

$$M_{kv} = \left(\left\{ \frac{\kappa^{s(v-1)+1}}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\kappa^{sv}}{N} \right\} \right) (\kappa = 1, 2, \dots, N, v = 1, 2, \dots, n),$$

где N — простое число.

Если выбрать N настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $N \geq sn$, то согласно [2] имеет место следующее равенство (равномерно относительно P):

$$\int_{G_{sn}} F(P, Q_1, \dots, Q_n) dQ_1 \dots dQ_n = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \times$$

$$\times D(M_{k1}, M_{k2}) \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) + f(M_{kv}) + R_1,$$

где

$$|R_1| \leq \frac{C_D \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right)^{sn}}{\sqrt{N}}.$$

Определим

$$n = \left\lceil \frac{(\varepsilon - 2\varepsilon^2) \ln N}{2\gamma_0} \right\rceil < \varepsilon \ln N, \\ (\gamma_0 = \ln C_D + 2S(\alpha + \ln \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right))) ,$$

тогда

$$|R_1| \leq O(N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}) \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом получим

$$\psi_n(P) = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \cdot D(M_{k1}, M_{k2}) \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot f(M_{kv}) + \\ + O(N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}) + f(M_{kv}).$$

Аналогично можно получить, что

$$X_n(P) = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \cdot D(M_{k1}, M_{k2}) \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot C(M_{kv}) + \\ + O(N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}) + C(M_{kv}) \text{ и}$$

$$E^{(n)} = \tilde{E}^{(n)} + O(M_1 R), \text{ где } \tilde{E}^{(n)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \psi_n(M_{kv})}{1 - \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N X_n(M_{kv})};$$

$$\tilde{\varphi}_n(P) = \lambda [\tilde{E}^{(n)} + O(M_1 R)] \cdot \left[\frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots \right. \\ \left. \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot C(M_{kv}) + C(P) + R \right] +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot f(M_{kv}) + f(P) + R.$$

Отсюда

$$\tilde{\varphi}_n(P) = \lambda \tilde{E}^{(n)} C(P) + \lambda \tilde{E}^{(n)} R + \frac{\lambda \tilde{E}^{(n)}}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots \\ \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot C(M_{kv}) + O(M_1 R) \left[\frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots \right. \\ \left. \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot C(M_{kv}) + C(P) + R \right] + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot f(M_{kv}) + f(P) + R.$$

Отбросив остаточные члены, получим

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_n(P) = f(P) + \lambda \tilde{E}^{(n)} C(P) + \frac{\lambda \tilde{E}^{(n)}}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots \\ \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot C(M_{kv}) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{v=1}^n \lambda^v D(P, M_{k1}) \dots \\ \dots D(M_{k,v-1}, M_{kv}) \cdot f(M_{kv}).\end{aligned}$$

Таким образом окончательно

$$\varphi(P) = \tilde{\varphi}_n(P) + O(q^n) + O(R) = \tilde{\varphi}_n(P) + O(q^n) + O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Если выбрать $n = \left\lceil \frac{\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \ln N}{\ln q} \right\rceil$, то

$$\varphi(P) = \tilde{\varphi}_N(P) + O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где $[z]$ — целая часть z . Таким же методом найдены оценки погрешности между точными и приближенными решениями для других теоретикочисловых сеток. В классе $H_s^\alpha, E_s^{*\alpha}$ также получены аналогичные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы математической физики и теории функций. Киев, 1964.
2. К о р о б о в Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М., 1963.

Поступило 16. IV 1969

З. Э. Элијева

Чохөлчүлү хэтти интеграл тэнликлэрин тэгриби һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Фредһолмун II нөв тәнлији һәллинин варлыг областынын кенишләндирилмәси, чеврилмиш тәнлијин хусуси итерасија процесси илә һәлли вә итерасијаларын әдәди нәзәри шәбәкә васитәсилә гурулан квадратур дүстурларын көмәжилә тәриби һесаблинамасы мәсәләләринә бахылмышдыр. Бундан башга, тәгриби һәллә дәгиг һәлл арасындакы хәта гијмәтләндирилмишдир.

УДК 621. 72:542. 96

О. К. ХАНМАМЕДОВ

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СЕКЦИОНИРОВАННОГО РЕАКТОРА

Процесс синтеза нитрила-акриловой кислоты производится в реакторе с кипящим слоем катализатора. При псевдооживлении слоя катализатора наблюдается эффект барботажа газа в пузырях, это обуславливает неравномерность пребывания в слое оживающего агента, вследствие чего падает конверсия пропилена. Кроме того, конверсия пропилена ограничивается константой массообмена между двумя фазами слоя (непрерывной, дискретной). Для интенсификации процесса массообмена, а также для уменьшения явления барботажа газа в пузырях в реактор вводятся секционирующие решетки [1, 2].

Возникает вопрос, как надо расположить решетки по высоте реактора, чтобы конверсия пропилена была максимальной? Согласно двухфазной теории моделирования процессов в кипящем слое катализатора уравнения, описывающие процесс, имеют вид:

$$w_y \frac{dy}{dH} = -ky + \frac{\omega}{1-\omega} \frac{w_y}{w_z} h(z-y), \quad (1)$$

$$w_z \frac{dz}{dH} = -h(z-y).$$

Здесь y — концентрация пропилена в непрерывной фазе,
 z — концентрация пропилена в дискретной фазе,
 w_y — скорость газа в непрерывной фазе (м/сек),
 w_z — скорость газа в дискретной фазе (м/сек),
 ω — доля пропилена в дискретной фазе,
 h — константа массообмена между фазами (1 сек),
 k — кинетическая константа (1 сек),
 H — текущая высота слоя катализатора (м).

Начальные условия уравнений (1) следующие:

$$z(0) = y(0) = 1.$$

Поскольку секционирующие решетки ведут себя подобно смесителям фаз, то многосекционный реактор вытеснения можно представить как последовательность реакторов (рис. 1). Система (1) описывает процесс, происходящий в каждом из этих реакторов. Однако начальные условия для каждого из реакторов определяются выходом предыдущего реактора, а также уравнениями баланса фаз смесителя. Процесс смешения фаз на решетках описывается следующими выражениями [1]:

$$\begin{aligned}y_{i0} &= y_{i-1} + \omega \lambda (z_{i-1} - y_{i-1}); \\ z_{i0} &= z_{i-1} - (1 - \omega) \lambda (z_{i-1} - y_{i-1}),\end{aligned} \quad (2)$$

где λ — коэффициент неидеальности решетки,
 z_{i-1}, y_{i-1} — концентрации пропилена в дискретной и непрерывной фазах под $(i-1)$ -ой решеткой,
 z_{i0}, y_{i0} — концентрации пропилена в дискретной и непрерывной фазах над $(i-1)$ -ой решеткой (начальные условия системы (1) для i -го реактора последовательности).

Задача оптимального проектирования реактора заключается в минимизации функции цели I при условии, что процесс в каждом из реакторов последовательности (рис. 1) описывается системой дифференциальных уравнений (1), а граничные условия их задаются

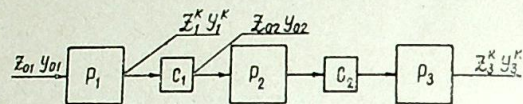


Рис. 1 P_i — i -й реактор последовательности;
 C_i — i -й смеситель.

преобразованием (2). В общем виде, при учете смещения на решетке для i -ой секции реактора, а также отбросив члены, содержащие величины высшей степени малости, полученные выражения для концентраций пропилена в дискретной и непрерывной фазах имеют вид:

$$\begin{aligned} z_i(l) &= d_{0z}^i \exp \left(p_1 \sum_{k=1}^i l_k \right) + \sum_{j=1}^i d_{jz}^i \exp \left(p_2 l_j + p_1 \sum_{k \neq j}^i l_k \right); \\ y_i(l) &= d_{0y}^i \exp \left(p_1 \sum_{k=1}^i l_k \right) + \sum_{j=1}^i d_{jy}^i \exp \left(p_2 l_j + p_1 \sum_{k \neq j}^i l_k \right); \end{aligned} \quad (3)$$

l_i — высота i -секции,

$d_{0z}^i, d_{jz}^i, d_{0y}^i, d_{jy}^i$ — постоянные коэффициенты,

p_1, p_2 — решения характеристического уравнения системы (1).

На высоту i -го реактора последовательности реакторов наложены ограничения

$$\begin{aligned} l_i &\geq \mu, \\ l_i &\leq [L - (l_1 + l_2 + \dots + l_{i-1}) - (n-1)\mu]; \end{aligned} \quad (4)$$

μ, L — задаваемые проектные константы.

Рассмотрим несколько вариантов постановки задач оптимального расположения решеток по высоте реактора. В первом из них, при условиях (2), (3), (4) будем требовать минимум функционала:

$$I_I = z_n(l_1, \dots, l_{n-1}). \quad (5)$$

Доставляя минимум I_I , можно добиться уменьшения количества непрореагировавшего пропилена в дискретной фазе на выходе из последнего реактора последовательности реакторов. Кроме того, скорость изменения концентрации пропилена в дискретной фазе ниже скорости изменения концентрации пропилена в непрерывной фазе, что также является важным фактором постановки первой задачи.

Во второй постановке при условиях (2), (3), (4) будем минимизировать функционал

$$I_{II} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} z_i(l_1, \dots, l_{i-1}) dH. \quad (6)$$

Такая постановка задачи обусловлена тем, что при данной константе массопередачи между непрерывной и дискретной фазами на скорость перехода пропилена из дискретной фазы в непрерывную существенно

влияет расположение решеток в слое катализатора. Доставляя минимум I_{II} , интенсифицируется процесс массопередачи по всему профилю секционированного реактора. При этом для любого сечения реактора будет обеспечиваться избыток пропилена в непрерывной фазе, что при условии больших скоростей изменения концентрации пропилена в непрерывной фазе приведет к более полному его превращению. Иначе говоря, минимизируя I_{II} , преследуется цель обогащения пропиленом непрерывной фазы по всей длине реакторов (рис.).

При другой постановке задачи оптимального проектирования секционированного реактора в случае (2), (3), (4) требуется минимизировать функционал

$$I_{III} = \alpha z_n(l_1, \dots, l_{n-1}) + \beta \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} z_i(l_1, \dots, l_{i-1}) dH; \quad (7)$$

α, β — постоянные коэффициенты.

Из (7) ясно, что I_{III} есть совмещение двух первых функционалов.

Минимизируя I_{III} , можно добиться такого расположения решеток, при котором непрерывная фаза по всему профилю реактора будет обогащена пропиленом, и, кроме того, количество непрореагировавшего пропилена в пузырях на выходе из последней секции будет наименьшим. Эту же задачу можно поставить иначе при наличии результата минимизации функционалов (5), (6). Действительно, пусть Φ_1 — минимум I_I ; Φ_2 — минимум I_{II} . Требуется доставить минимум функционалу

$$I_{III}^{(*)} = (\Phi_1 - I_I)^2 + (\Phi_2 - I_{II})^2, \quad (8)$$

т. е. имеем задачу о минимизации квадратичного отклонения. Выражение (8) можно представить в виде

$$I_{III}^{(*)} = [\Phi_1 - z_n(l_1, \dots, l_{n-1})]^2 + \left[\Phi_2 - \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} z_i(l_1, \dots, l_{i-1}) dH \right]^2, \quad (9)$$

где $z_i(l_1, \dots, l_{i-1})$ вычисляются в процессе минимизации $I_{III}^{(*)}$ и вычисленные при этом значения I_I, I_{II} в (8) отличны от Φ_1 и Φ_2 соответственно.

Резюмируя поставленные выше задачи, отметим, что минимизация функционалов (5)–(9) оправдана для таких процессов, когда скорость изменения концентрации охлаждающего агента, а также его содержание в дискретной фазе намного превышают эти величины непрерывной фазы охлаждающего агента.

В случае, когда скорости изменения концентраций, а также количество пропилена в обеих фазах соизмеримы на всем протяжении реактора и требуется уменьшить выход непрореагировавшего пропилена, минимизации подлежит функционал

$$I_{IV} = \omega z_n + (1 - \omega) y_n; \quad (10)$$

ω — величина, постоянная для данного типа катализатора и сечения аппарата.

Приведенные выше задачи решались методом наискорейшего спуска для случая трех секционного реактора, при ограничениях (4), где $\mu = 0,35$; $L = 4,0$.

Для первых двух задач минимизации (5), (6) использовался алгоритм (11), обеспечивший хорошую сходимость:

$$l_i^{(*)} = l_i - g \left(\frac{\partial I_i}{\partial l_i} \right); \quad (11)$$

(*) — значение l_i в последней итерации,
 g — шаг итерации.

При минимизации (7)–(10) использовался алгоритм Фельдбаума:

$$l_i^{*} = l_i - g \left(\frac{\frac{\partial I_{III}}{\partial l_i}}{\sqrt{\left(\frac{\partial I_{III}}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{III}}{\partial l_2}\right)^2}} \right). \quad (12)$$

В выражении (8) $\Phi_1 = 0,374$; $\Phi_1 = 0,689$. В результате установлено, что для оптимального в смысле минимизации (5) расположения решеток следует располагать их плотно, начиная с конца реактора, на расстоянии 0,35 м друг от друга. При решении второй задачи было получено, что необходимо плотное расположение секционирующих решеток, начиная с начала реактора, с расстоянием между ними 0,35 м. Аналогичное расположение решеток необходимо и при минимизации (8)–(9). В случае, когда требовалось увеличить конверсию пропилена в обоих фазах, т. е. доставлялся минимум (10), было получено, что решетки следует располагать с неравномерным шагом, уменьшающимся к концу реактора ($l_1 = 2,0$, $l_2 = 1,65$ и $l_2 = 0,35$ м).

Однако для случая многосекционного реактора, когда число решеток больше трех, метод, использованный выше, оказывается очень трудоемким, а выражения функционалов, строящиеся на функциях (3), громоздки. Этой трудоемкости в какой-то мере удастся избежать в случае применения дискретного принципа максимума [3, 4]. Покажем методику применения принципа максимума к решению задач оптимального расположения секционирующих решеток по высоте реактора. Введем функцию Гамильтона

$$H_i = x_{y_i} y_i + x_{z_i} z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13)$$

(где n — число решеток), а также сопряженную систему:

$$\begin{aligned} x_{y_{n-1}} &= x_{y_n} \frac{\partial y_n}{\partial y_{n-1}} + x_{z_n} \frac{\partial z_n}{\partial y_{n-1}}; \\ x_{z_{n-1}} &= x_{y_n} \frac{\partial y_n}{\partial z_{n-1}} + x_{z_n} \frac{\partial z_n}{\partial z_{n-1}}, \end{aligned} \quad (14)$$

граничными условиями которой являются

$$x_{y_n} = \frac{\partial I}{\partial y_n}, \quad x_{z_n} = \frac{\partial I}{\partial z_n}. \quad (15)$$

Подставив вычисленные по (15) значения x_{y_n} , x_{z_n} в выражения (14), определяем $x_{y_{n-1}}$, $x_{z_{n-1}}$. Частные производные определяют из выражения для решений системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} y_i &= f_i(H, y_{i-1}, z_{i-1}), \\ z_i &= \varphi_i(H, y_{i-1}, z_{i-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

После определения x_{y_n} , x_{z_n} строится функция Гамильтона для i -ой секции, минимум которой ищем методом наискорейшего спуска по алгоритмам (10) или (11).

Приращение функционала определяется по формуле приращения целевой функции [3, 5], которая в нашей задаче будет иметь вид

$$\delta I = \sum_{i=1}^n q_i \delta l_i,$$

где

$$q_i = \frac{\partial H_i}{\partial l_i}.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока приращение функционала достигнет величины

$$\delta I = 0,$$

после чего процесс заканчивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Серебряков Б. Р., Мусатов С. Р. В сб. докладов Всесоюз. совещ. по химическим реакторам. Новосибирск, 1965.
2. Ойгенблик А. А. и др. "Хим. пром.", 1967, № 6.
3. Фан Лянь-цэнь, Вань Чу-сен. "Дискретный принцип максимума" Изд. "Мир", М., 1967.
4. Андреев Д. А. "Автом. и телемех.", 1968, № 7.
5. Розоноэр Л. И. "Автом. и телемех.", 1959, № 12.

О. К. Ханмэмедов

Сексијаландырылмыш реакторун оптималь лајинэ едилмэси хаггында

ХҮЛАСЭ

Акрил туршусунун нитрили синтез просеси сексијаландырылмыш реакторда чошан катализатор гаты илэ бирликдэ апарылыр.

Сексијаландырылмыш реактора бир нечэ ардычыл реакторлар кими бахылмышдыр. Ардычыл реакторларда апарылан просеслэр ики хэтти дифференциал тэнлик системлэ тэјин олунур.

Мэгалэдэ мүхтәлиф функционаллар үчүн сексијаландырылан торларын реакторун бојунча оптималь јерләшдирилмэ мәсәләлэри верилмишдир. Бу мәсәләлэр 3 сексијалы реакторлар үчүн Фелдбаум алгоритминдән истифадэ етмәклэ градијент үсулу илэ һәлл едилмишдир. Бундан башга, мэгалэдэ чохсексијалы реакторларын дискрет максимум үсулу илэ һәлли методу да верилмишдир.

Р. М. МУСТАФАЕВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Большой практический и теоретический интерес представляют задачи вытеснения газа жидкостью и жидкости газом, возникающие в связи с эксплуатацией газовых месторождений при водонапорном режиме, закачкой газа в нефтяные пласты и сооружением подземных хранилищ газа в водоносных пластах, в частности в горизонтальных и пологозалегающих. Теоретическое исследование проблемы хранения газа в горизонтальных и пологозалегающих водоносных пластах и успешная опытно-промышленная проверка разработанной методики впервые в мировой практике были осуществлены под руководством И. А. Чарного [1].

При создании и циклической эксплуатации подземных хранилищ газа в водоносных пластах важное значение имеют вопросы изменения давления в хранилище и положения контура газовой области в процессе закачки и отбора газа. В математическом отношении эти вопросы связаны с исследованием задач, описываемых уравнениями в частных производных параболического типа с подвижным граничным условием. Точное решение одной такой задачи, применительно к случаю эксплуатации единичной скважины в бесконечном водоносном горизонтальном пласте, рассмотрено в [2—4], а численное решение для случая конечного горизонтального пласта кругового радиуса дано в [5]. Иной подход рассмотрения этих вопросов на основе метода „подвижных источников и стоков“ применяется в [6]. Исследование задач родственного типа — проблемы Стефана посредством редукции задач к системе нелинейных интегральных уравнений проведено в [7].

В настоящей статье рассматривается приближенный метод решения одной двумерной нестационарной задачи с подвижной границей, который сводится к решению некоторой системы интегро-дифференциальных уравнений.

2. Пусть через прямолинейный разрез (галерею) конечной длины, имитирующий прямолинейную цепочку гидродинамически совершенных скважин, расположенных в неограниченном горизонтальном водоносном пласте постоянной мощности h с непроницаемой кровлей и подошвой, с известным давлением p_0 в начальный момент времени, с заданным произвольным весовым расходом $G_r(t)$ нагнетается газ. Требуется определить давление газа и положение

эллиптического контура газовой зоны, пренебрегая вязкостью газа и считая давление в газовой зоне равномерно распределенным. Для решения задачи используется решение уравнения теплопроводности

$$\kappa \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{kK}{m\mu_0}, \quad (1)$$

при начальном условии

$$p(x, y, 0) = p_0, \quad (2)$$

дающее распределение давления в водоносном пласте в виде выражения для конечной линии источника длиной $2l$ вдоль оси x , с интенсивностью $Q_0(t)$ на единицу длины [8], формально справедливого в рассматриваемой области $D: \{x \geq a(t), y \geq b(t), t > 0\}$:

$$p = p_0 + \frac{p_0}{4\pi kh} \int_0^t \int_{-l}^l \frac{Q_0(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\xi d\tau. \quad (3)$$

Такой подход позволяет избежать осложнений, связанных с нахождением специальных видов решения уравнения теплопроводности (1), удовлетворяющих определенным условиям на подвижной границе [2, 3]. Вместо этого при решении неизвестная интенсивность $Q_0(t)$ определяется так, чтобы выполнялись требуемые условия. К уравнению (3) добавляются условия материального баланса на подвижной границе и условие, определяющее запас газа в пласте, следующее из известного весового расхода.

В качестве условий на подвижной границе раздела между областью, занятой водой, и областью, занятой газо-водяной смесью, примем

$$m\sigma \frac{da}{dt} = - \frac{k}{\mu_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{\substack{x=a(t), \\ y=0}}, \quad (4)$$

$$m\sigma \frac{db}{dt} = - \frac{k}{\mu_0} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\substack{x=0, \\ y=b(t)}}, \quad (5)$$

причем коэффициент σ , учитывающий неполноту вытеснения, меняется в зависимости от направления движения границы раздела: $\sigma = \sigma_1$ при увеличении пластового объема газа и $\sigma = \sigma_2$ при его уменьшении ($\sigma_1 < \sigma_2$).

Запас газа, приведенный к объему при нормальных условиях: $p_n = p_{ат} = 1 \text{ кг/см}^2$, $T_n = 20^\circ\text{C}$, равен

$$W_n(t) = \frac{Z(p_n, T_n)}{Z(p, T)} m\sigma h a(t) b(t) \frac{p}{p_n} \frac{T_n}{T}. \quad (6)$$

С учетом формул (4) и (5), соответственно, получим:

$$m\sigma \frac{da}{dt} = \frac{1}{4\pi h} \int_0^t \left[e^{-\frac{(a-l)^2}{4\kappa(t-\tau)}} - e^{-\frac{(a+l)^2}{4\kappa(t-\tau)}} \right] \frac{Q_0(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (7)$$

$$m\sigma \frac{db}{dt} = \frac{b}{8\pi kh} \int_0^t \int_{-l}^l \frac{Q_0(\tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{\xi^2+b^2}{4\kappa(t-\tau)}} d\xi d\tau. \quad (8)$$

Уравнения (6), (3) при соответствующих значениях x и y , (7) и (8) образуют замкнутую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для четырех неизвестных функций времени: $p(t)$, $Q_0(t)$, $a(t)$ и $b(t)$.

Введем безразмерные переменные:

$$\frac{p(t)}{p_0} = \frac{p}{p_0} = \bar{p}, \quad \frac{t}{T_0} = z, \quad \frac{\tau}{T_0} = \varepsilon, \quad \frac{2Q_0(\tau)l}{kh p_0} = Q(\varepsilon), \quad (9)$$

$$\frac{2Q_0(t)l}{kh p_0} = Q(z), \quad \frac{a}{l} = \alpha, \quad \frac{b}{l} = \beta, \quad \frac{\xi}{l} = \gamma; \quad (10)$$

T_0 — произвольный масштаб времени.

Уравнения (3), (6) — (8) в новых переменных принимают вид:

$$\bar{p} = 1 + \frac{1}{8\pi} \int_0^z \int_{-1}^1 \frac{Q(\varepsilon)}{z - \varepsilon} e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta^2}{z - \varepsilon}} d\gamma d\varepsilon, \quad (11)$$

$$\frac{d\sigma}{dz} = \frac{\eta}{4A} \int_0^z \frac{Q(\xi)}{z - \varepsilon} \left[e^{-A \frac{(\alpha-1)^2}{z - \varepsilon}} - e^{-A \frac{(\alpha+1)^2}{z - \varepsilon}} \right] d\varepsilon, \quad (12)$$

$$\frac{d\beta}{dz} = \frac{\beta\eta}{2} \int_0^z \int_{-1}^1 \frac{Q(\varepsilon)}{(z - \varepsilon)^2} e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta^2}{z - \varepsilon}} d\gamma d\varepsilon, \quad (13)$$

$$\alpha\beta \frac{Z(p, T)}{Z(p_0, T)} \bar{p} = f(z), \quad (14)$$

где

$$A = \frac{l^2}{4\kappa T_0}, \quad A(z) = \frac{ab}{4\kappa T_0}, \quad \eta = \frac{1}{8\pi} \frac{kp_0}{p_0 m \sigma z} = \frac{1}{8\pi} \frac{p_0}{K\sigma},$$

$$f(t) = \frac{p_n T}{p_0 T_n} \frac{W_n(t)}{4\pi m \sigma h T_0 A}; \quad (15)$$

$A(z)$ — функция, характеризующая изменение газового объема;
 $f(z)$ — известная безразмерная функция безразмерного времени z .

3. При решении задачи применялся численный метод, предложенный И. А. Чарным [2, 3]. Схема расчета основана на разбиении промежутка интегрирования $[0, z]$ на N частей: $[0, z_1]$; $[z_1, z_2]$, ..., $[z_{N-1}, z_N]$, достаточно малой длины ($H = z_1 - z_{1-1}$) с последующим усреднением функции $Q(z)$ по некоторому закону в пределах каждого отрезка. Будем считать функцию $Q(z)$ внутри каждого интервала $[z_{i-1}, z_i]$ постоянной и обозначим ее Q_1 . Так как решение (3) есть результат суперпозиции непрерывно действующих тепловых источников, то очевидно, что с увеличением числа отрезков решение будет более точным.

Выбрав шаг H , примем $z_s = sH$ ($s = 1, 2, \dots$). В результате система (11) — (14) для $z = z_s$ приобретет вид:

$$\bar{p}_s = 1 + \frac{Q_1}{8\pi} \int_0^{z_1} \int_{-1}^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{z_s - \varepsilon}}}{z_s - \varepsilon} d\gamma d\varepsilon + \dots + \frac{Q_s}{8\pi} \int_{z_{s-1}}^{z_s} \int_{-1}^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{z_s - \varepsilon}}}{z_s - \varepsilon} d\gamma d\varepsilon, \quad (16)$$

$$\frac{d\sigma}{dz} \Big|_{z=z_s} = \frac{\mu}{4A} \left[Q_1 \int_0^{z_1} \left(e^{-A \frac{(\alpha_s-1)^2}{z_s - \varepsilon}} - e^{-A \frac{(\alpha_s+1)^2}{z_s - \varepsilon}} \right) \frac{d\varepsilon}{z_s - \varepsilon} + \dots \right.$$

$$\left. + Q_s \int_{z_{s-1}}^{z_s} \left(e^{-A \frac{(\alpha_s-1)^2}{z_s - \varepsilon}} - e^{-A \frac{(\alpha_s+1)^2}{z_s - \varepsilon}} \right) \frac{d\varepsilon}{z_s - \varepsilon} \right], \quad (17)$$

$$\frac{d\beta}{dz} \Big|_{z=z_s} = \frac{\beta_s \eta}{2} \left[Q_1 \int_0^{z_1} \int_{-1}^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{z_s - \varepsilon}}}{(z_s - \varepsilon)^2} d\gamma d\varepsilon + \dots + Q_s \int_{z_{s-1}}^{z_s} \int_{-1}^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{z_s - \varepsilon}}}{(z_s - \varepsilon)^2} d\gamma d\varepsilon \right], \quad (18)$$

$$\alpha_s \beta_s \frac{Z(p_s, T_s)}{Z(p_0, T)} \bar{p}_s = f_s. \quad (19)$$

После некоторых преобразований выражения (16) — (18) будут выглядеть следующим образом:

$$\bar{p}_s = 1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^s Q_s \int_0^1 \int_0^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{(s-1+\lambda)H}}}{s-1+\lambda} d\gamma d\lambda, \quad (s = \overline{1, N}) \quad (20)$$

$$\frac{d\sigma}{dz} \Big|_{z=z_s} = \frac{\eta}{4A} \sum_{l=1}^s Q_l \int_0^1 \frac{e^{-A \frac{(\alpha_s-1)^2}{(s-1+\lambda)H}} - e^{-A \frac{(\alpha_s+1)^2}{(s-1+\lambda)H}}}{s-1+\lambda} d\lambda, \quad (s = \overline{0, N-1}) \quad (21)$$

$$\frac{d\beta}{dz} \Big|_{z=z_s} = \frac{\beta_s \eta}{A} \sum_{l=1}^{s-1} (Q_{l+1} - Q_l) \int_0^1 \frac{e^{-A \frac{\gamma^2 + \beta_s^2}{(s-1)\lambda H}}}{\gamma^2 + \beta_s^2} d\gamma. \quad (s = \overline{0, N-1}) \quad (22)$$

4. В качестве примера численных расчетов рассмотрим следующие случаи задачи (19) — (22), решенной на ЭЦВМ „БЭСМ-2М“ с использованием метода Рунге—Кутты второго порядка:

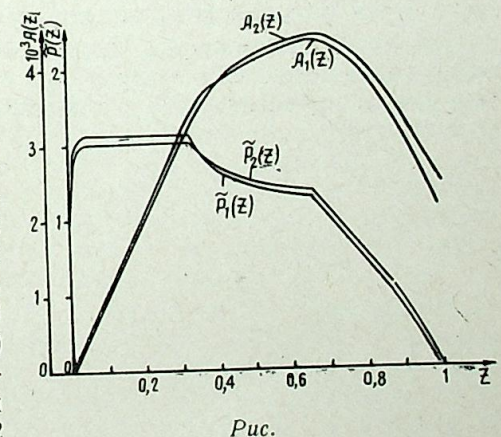
$$f(z) = \begin{cases} 3\Phi z, & 0 < z < \frac{1}{3}, \\ \Phi, & \frac{1}{3} \leq z < \frac{2}{3}, \\ 3\Phi(1-z), & \frac{2}{3} \leq z \leq 1; \end{cases} \quad (23)$$

$\bar{p}_0 = 1$; $\eta = 0,3079 \ 8633 \cdot 10^{-2}$; а) $\Phi_1 = 0,9652 \ 7202$; $A_1 = 0,53263090 \cdot 10^{-2}$;
 б) $\Phi_2 = 0,4390 \ 7840$; $A_2 = 0,1170 \ 9382 \cdot 10^{-2}$; в) $\Phi_3 = 0,24698160$;
 $A_3 = 0,0208 \ 1668$.

Газ принят идеальным, т. е. $Z(p, T) = 1$.

Расчетная схема технологического процесса состояла из закачки в водоносный пласт в течение четырех месяцев 100 млн. м^3 газа с постоянным весовым расходом, четырехмесячного нейтрального периода (простой газохранилища) и последующего отбора в течение четырех месяцев с постоянным весовым расходом всего закачанного газа.

На рисунке представлены кривые изменения давления $\bar{p}(z)$ на подвижной границе и функции $A(z)$ для различной длины цепочки скважин. Индексы 1, 2 при $p(z)$ и $A(z)$ соответствуют



значениям длин цепочек в 6,07 и 12 км. Как видно из рисунка, газовый объем некоторое время (порядка декады) продолжает расширяться и после начала отбора, т.е. начало его уменьшения отстает от начала отбора. Коэффициент вытеснения при извлечении газа был принят в два больше, чем при закачке. Расчет ряда вариантов показал, что изменение коэффициента вытеснения при отборе газа слабо влияет на исследуемые параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А., Астрахан Д. И., Власов А. М., Евгеньев А. Е., Гомельгас В. А., Филинов М. В. Хранение газа в горизонтальных и полого-залегających водоносных ластах. „Недра“, 1978.
2. Чарный И. А. „Изв. АН СССР ОТН, мех. и машиностр.“, 1962, № 5.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика, Гостоптехиздат, 1963.
4. Чарный И. А., Мухидинов Н. М. „Газовая промышленность“, 1962, № 11.
5. Пирмамедов В. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967, № 3—4.
6. Хейн А. Л. Гидродинамический расчет подземных хранилищ газа. „Недра“, 1968.
7. Рубинштейн Л. И. Проблема Стефана. „Звизгзне“, 1967.
8. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде, Гостоптехиздат, 1949.

Поступило 13. VI 1968

Р. А. Мустафаев

Мүтәһәррик сәһһәдди ион өлчүлү гәрарлашмамыш бир сүзүлмә мәсәләсинин тәғриби һәлли

ХҮЛАСӘ

Су лајларында јералты газ амбарларынын јарадылмасы вә истисмары заманы газын вурулма вә көтүрүлмәси просесиндә лајын су һиссәсиндә тәзјигин дәјишилмәси, газ зонасы сәһһәдди вәзијјәтинин өјрәнилмәсинин бөјүк әһәмијјәти вардыр.

Мәгаләдә газын дүзхәтли кәсикдән (галерејадан) вурулма вә көтүрүлмәси заманы газ зонасынын еллиптик сәһһәддинин вәзијјәти, су һиссәсиндә тәзјигин дәјишилмәсинин тәғриби һесаблама үсулу верилмишдир. Бу заман дүзхәтли кәсик гејри-мәһдуд үфиги үст вә алт гатларда су кечирмәјән лајда јерләшән һидродинамик тамам гујулар зәнчирини көстәрир. Бундан әлавә, сујун тәзјиги вә газын ихтијари мәхарәчи верилмишдир. Мәсәлән, бә'зи интегродиференсиал тәнликләр системинин һәллине кәтирилмишдир.

Әдәди һесабламаларда И. А. Чарнынын дәгиг схеминин 2-чи тәртиб дәгигли Рунке-Кутт үсулу илә бирләшмәси тәтбиг олунмушдур. Техноложии просесин конкрет мисаллары „БЕСМ-2М“ ЕҺМ-да һәлл едилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1969, № 5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 5

М. А. МАМЕДОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИПОТЕТИЧЕСКИХ И РЕАЛЬНЫХ КОМЕТ ПО ВЕЛИЧИНЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

В 1957 г. советские астрономы проф. С. К. Всехсвятский, О. И. Мещерякова-Бабич под названием „Распределение элементов орбит в теории извержения“ опубликовали в „Астрономическом журнале“ свои исследования о происхождении комет. Авторы, предполагая равное распределение направлений взрыва и величин скоростей, получили около 700 гелиоцентрических орбит на сфере действия Юпитера. Сопоставляя теоретическое и эмпирическое распределение элементов орбит полученных и реальных комет, они делают общий вывод о происхождении комет. В первой части работы авторы предполагают, что были открыты все кометы, обладающие перигелийным расстоянием $q < 2 a \cdot e$. Далее аналогично принимают, что открыты все кометы с $q < 3 a \cdot e$.

Мы считаем, что основными недостатками исследований в этой области являются недопустимые упрощения в поставленной задаче. Авторы этих работ решали задачу о движении комет под действием притяжения к Солнцу и Юпитеру, методом задачи о двух телах. Указанный недостаток относится, в частности, и к вышеупомянутой работе.

Однако, как замечают сами авторы [5], целью проделанных ими вычислений не являлся анализ отдельных особенностей распределения элементов короткопериодических комет, который может представить независимую интересную проблему. Они считают, что с точки зрения кометной космогонии было бы интересно проведение более подробных вычислений с учетом возмущений как в области гелиоцентрического, так и планетоцентрического движения комет вблизи Юпитера. Такие вычисления были выполнены в настоящей работе, при учете всех возможных вариантов взрыва от поверхности Юпитера и его спутника Ио. Кроме того были учтены некоторые особенности небесной механики при вычислении орбит гипотетических комет, которые увеличивают точность окончательных результатов.

Учитывая качество и количество полученных нами результатов (вычислено около 2000 гелиоцентрических орбит на сфере действия Юпитера), было решено произвести подобную [5] работу — найти распределение теоретических и эмпирических орбит гипотетических комет по элементам при фиксированном q , но уже с более точными данными.

Известие, что могут наблюдаться все кометы при $q < 2 a \cdot e$ и во

многих случаях—кометы с перигельным расстоянием $q < 3 a \cdot e$. Считаем, что наблюдались все кометы;

1. при $q < 2 a \cdot e$.

2. при $q < 3 a \cdot e$.

Составляем таблицы, показывающие теоретическое и эмпирическое распределение полуосей (табл. 1 и 2).

Таблица 1

$q < 2 a \cdot e$										
a	3	3—3,5	3,5—4	4—4,5	4,5—5	5—5,5	5,5—6	6—6,5	6,5—7	7—7,5
Теор. распр.	6	100	62	0	0	0	0	0	0	0
Эмпир. распр.	18	64	56	8	4	1	5	2	2	0

Таблица 2

$q < 3 a \cdot e$										
a	3	3—3,5	3,5—4	4—4,5	4,5—5	5—5,5	5,5—6	6—6,5	6,5—7	7—7,5
Теор. распр.	6	101	142	49	14	17	57	16	2	0
Эмпир. распр.	18	66	70	11	3	6	5	2	2	0

Графическое изображение результатов табл. 1 и 2 представлено на рис. 1 и 2. Здесь на оси абсцисс отложены значения больших полуосей, а на оси ординат—число комет в соответствующих интервалах.

В табл. 3 и 4 приведены данные теоретического и эмпирического распределения эксцентриситетов орбит при фиксированном q .

Таблица 3

$q < 2 a \cdot e$										
e	0,1—0,2	0,2—0,3	0,3—0,4	0,4—0,5	0,5—0,6	0,6—0,7	0,7—0,8	0,8—0,9	0,9—1,0	
Теор. распр.	0	0	0	22	64	49	0	0	0	
Эмпир. распр.	0	0	1	15	47	39	32	7	21	

Таблица 4

$q < 3 a \cdot e$										
e	0,1—0,2	0,2—0,3	0,3—0,4	0,4—0,5	0,5—0,6	0,6—0,7	0,7—0,8	0,8—0,9	0,9—1,0	
Теор. распр.	11	70	103	128	49	0	0	0	0	
Эмпир. распр.	0	17	21	50	39	32	7	34	30	

Распределение эксцентриситетов орбит, указанное в табл. 3 и 4, графически изображено на рис. 3 и 4.

В табл. 5 приведено распределение перигельных расстояний при фиксированном q ($q < 2 a \cdot e$). (рис. 5).

Рассматривая рисунки, легко заметить удовлетворительное согласие теоретических и эмпирических кривых, но при $0,7 < e < 0,9$ ($q < 2 a \cdot e$); $0,8 < e < 1,0$ ($q < 3 a \cdot e$); $0,2 < q < 0,3$ ($q < 3 a \cdot e$), а также при $a < 3,0$ ($q < 2 a \cdot e$) теоретические распределения заметно расходятся с результатами наблюдений.

Имея в виду работы в области исследования комет [1—2], можно считать, что такое отклонение допустимо, поскольку орбиты этих небесных тел подвергаются весьма значительным изменениям в случае

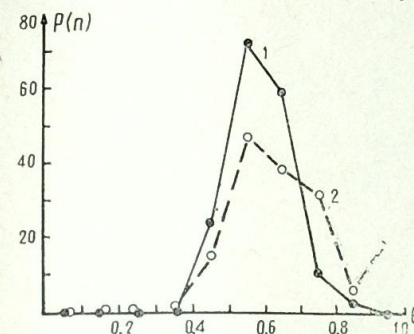


Рис. 1. Теоретическое (1) и эмпирическое (2) распределение эксцентриситетов орбит при $q < 2 a \cdot e$.

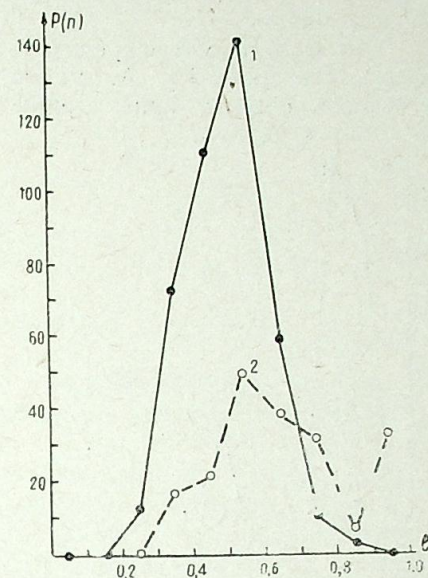


Рис. 2. Теоретическое (1) и эмпирическое (2) распределение эксцентриситетов орбит при $q < 3 a \cdot e$.

достаточно близкого приближения к одной из больших планет, например, к Юпитеру или Сатурну. Если даже перигельные расстояния комет лежат внутри орбиты Юпитера, то они должны довольно заметно изменить форму орбиты под действием возмущения.

Таблица 5

q	0—0,5	0,5—1,0	1,0—1,5	1,5—2,0	2,0—2,5
Теор. распр.	0	32	71	66	78
Эмпир. распр.	9	32	76	57	25

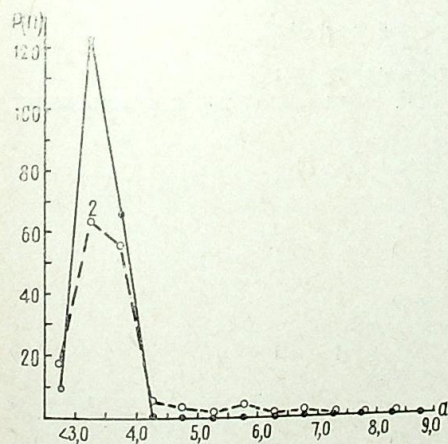


Рис. 3. Теоретическое (1) и эмпирическое (2) распределение полуосей орбит при $q < 4 a \cdot e$.

В дальнейшем предполагается исследовать движения некоторых из этих двух тысяч гипотетических комет в межпланетном пространстве. Такая работа представляла бы интерес с точки зрения сопоставления орбит гипотетических комет с реальными (семействами Юпитера или Сатурна).

Сейчас известно более 70 короткопериодических комет „семейства Юпитера“, более 10 короткопериодических комет „семейства Сатурна“, а также „семейства Урана и Нептуна“. Исследование движения гипо-

тетических комет в межпланетном пространстве и сравнение картины их с движениями реальных короткопериодических комет (семействами больших планет) может дать возможность построить теорию происхождения комет на основании гипотезы Лагранжа.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Ю. А. Рябову за полезные советы при выполнении настоящей работы.

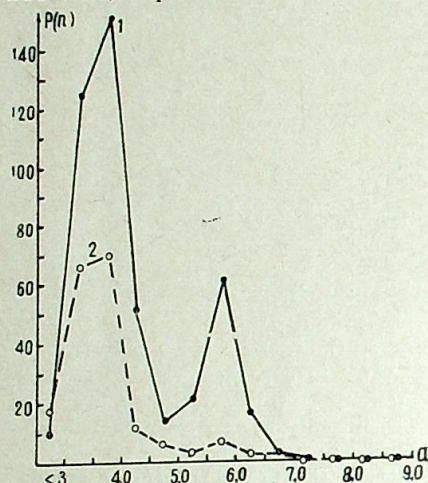


Рис 4. Теоретическое (1) и эмпирическое (2) распределение полуосей орбит при $q \angle 3$ а. е.

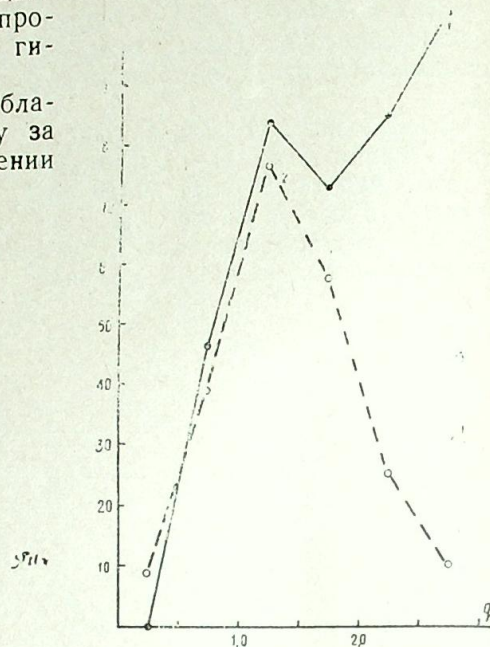


Рис 5. Теоретическое (1) и эмпирическое (2) распределение перигелийных расстояний орбит при $q \angle 3$ а. е.

ЛИТЕРАТУРА

1. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 25,4, 1948.
2. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 27, 1, 1950.
3. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 29, 63, 1952.
4. Всехсвятский С. У. „Астр. ж.“, 32,5, 1955.
5. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 34,4, 1957.
6. Всехсвятский С. К., Бабий О. И., Казютинский В. В. „Астр. ж.“, 25,3, 1958.
7. Духновский П. Г. Публикации киевской обс. № 6, 1954.
8. Духновский П. Г. „Астр. ж.“, 34,1, 1957.
9. Казимирчак-Полонская Е. И. Тр. ИТА, 7, 1961.
10. Мамедов М. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 4, 1969, № 3.
11. Мамедов М. А. „ДАН Азерб. ССР“, №2, 1969.
12. Фесенков В. Г. „Астр. ж.“, 26, 79, 1949.
13. Фесенков В. Г. „Астр. ж.“, 28,2, 1951.
14. Орлов С. В. „Астр. ж.“, 13,3, 1936.
15. Орлов С. В. „Астр. ж.“, 16,1, 1939.
16. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 31,1, 1957.
17. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 35,1, 1958.
18. Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 4, 10, 1951.
19. Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 5, № 5, 1963.
20. Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 5, № 7, 1953.
21. Чеботарев Г. А. Бюлл. ИТА, 5, № 9, 1954.

Поступило 23. IV 1969

М. Э. Маммәдов

Гипотетик вә реал каметләрин орбит элементләринә көрә пәјланмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 2000-дәк гипотетик каметин вә 500-ә гәдәр мұшаһидә олуван каметин орбита элементләринә көрә пәјланмасы верилмишдир. Бундан башга көстәрилмишдир ки, бу пәјланмалар бир-биринә јахындыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 5

М. М. МУСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛНЕЧНОГО СПЕКТРОГРАФА АСП-20 ШЕМАХИНСКОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

При спектральных исследованиях, особенно при изучении распределения интенсивностей в линиях, приходится учитывать искажение, вносимое инструментом. Для оценки значений искажений и по возможности их устранения требуется специальное исследование каждого спектрального аппарата, на котором ведутся исследования.

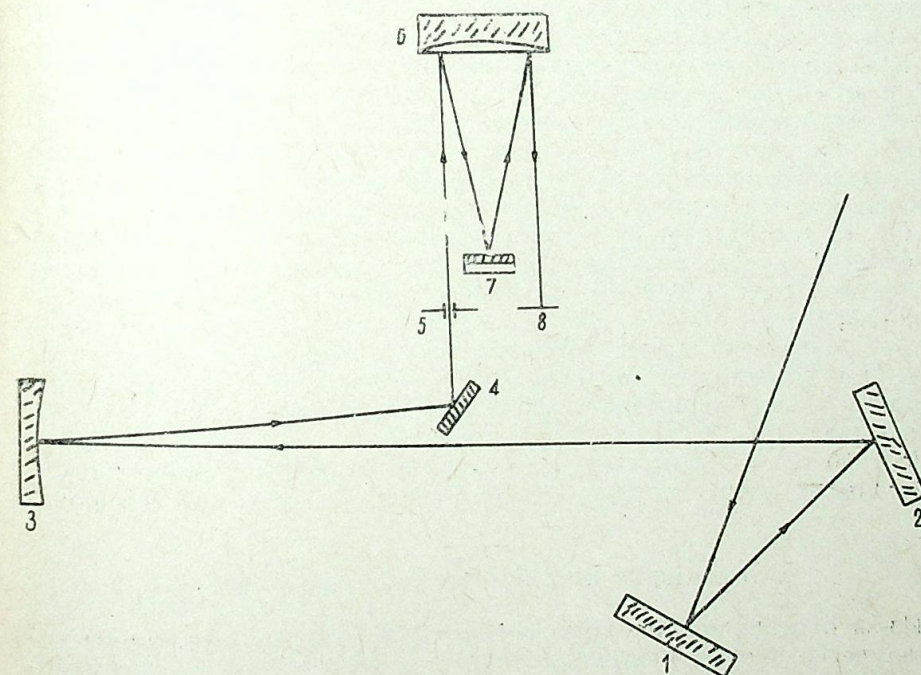


Рис. 1.

Настоящая статья посвящена исследованию качества щели и инструментального контура спектрографа. Рассматриваемый дифракционный спектрограф АСП-20 предназначен для солнечных наблюдений. Он используется в комбинации с горизонтальным Солнечным телескопом АЦУ-5, который имеет следующие данные: первичное фокус-

ное расстояние—17 м, диаметры целостатного, дополнительного и главного зеркал—440 мм.

На рис. 1 представлена оптическая схема сочетания телескопа АЦУ-5 со спектрографом АСП-20, где 1—целостатное зеркало, 2—дополнительное зеркало, 3—главное зеркало, 4—диагональное зеркало, 5—щель спектрографа, 6—коллиматорное и камерное зеркало, 7—дифракционная решетка, 8—кассета.

Спектрограф АСП-20 автоколлимационный с фокусным расстоянием 6,97 м и относительным отверстием 1/58. Размер заштрихованной площадки дифракционной решетки 150×120 мм, число штрихов 600 на 1 мм, общее число штрихов 90000. Максимум концентрации энергии находится во втором порядке в области длин волн 5500 Å. Фактор дисперсии в области λ 4000 Å° в первом порядке—2,23 Å°/мм, во втором—1,16 Å°/мм, в третьем—0,73 Å°/мм. В области λ 6300 Å° в третьем порядке он составляет 0,66 Å°/мм. Теоретическая разрешающая сила в третьем порядке 270000.

Исследование качества щели спектрографа АСП-20

Исследование щели в основном сводится к определению качества щечек щели, которые должны быть строго параллельными между собой и на их ножках не должно быть выступов и зазубрин. Для выявления наличия вышеуказанных недостатков неоднократно фотографировали спектр центра диска Солнца с полной высотой и при разных величинах ширины щели. Полученные спектрограммы тщательно фотометрировались. В центральной части щели, в пределах 12 мм, клиновидности и других дефектов не обнаружено.

При получении спектра немаловажное значение имеет перпендикулярность его к направлению дисперсии. Для проверки перпендикулярности спектра к направлению дисперсии полученные спектрограммы измеряли на УИМ-21. Обнаружен небольшой наклон спектра, который уменьшается с увеличением длины волны в области λ 4000 Å° и линейное отклонение от нормали составляет 0,059 мм при высоте спектра 12 мм. При микрофотометрировании участка спектра высотой около 1 мм (на практике берется еще меньше) соответствующее отклонение будет 0,0049 мм. Перпендикулярность спектра к направлению дисперсии обеспечивается параллельным расположением щели к штрихам решетки, а последнее—вращением решетки в оправе и узла щели. При этом нужно добиваться того, чтобы спектр по всей длине находился на одном уровне в фокальной плоскости, а щель стояла вертикально.

Обращение с узлом щели спектрографа АСП-20 неудобно в связи с тем, что не предусмотрены микрометрические винты для его поворота.

Определение инструментального контура

Из-за ограниченной разрешающей силы спектрографа, приемников излучения и конечной ширины щели спектрографа идеально-монокроматическое излучение превращается в полосу определенной ширины, где происходит перераспределение энергии, характерное для данного прибора.

В случае линии конечной ширины подобное распределение испытывает каждый ее узкий элемент, излучение одной длины волны налагается на область других длин волн. В результате истинное распределение интенсивностей в линии искажается, поэтому для определения истинных контуров фраунгоферовых линий необходимо знать

инструментальный контур данного прибора и при необходимости учесть его влияние по известной формуле:

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) N(y-x) dx, \quad (1)$$

где $S(y)$ —наблюдаемый контур линии, $W(x)$ —истинный контур линии $N(y-x)$ —инструментальный контур. Известно, что слабые и средние по интенсивности линии поглощения достаточной точности задаются контуром Фойгта и определяются параметрами β_1, β_2, a_0 .

Инструментальный контур также можно представить контуром Фойгта. Используя известные таблицы Эльсте [2], где табулирована функция Фойгта, если известны параметры инструментального контура, можно найти фойгтовские параметры истинного контура линии по формулам:

$$\begin{aligned} \beta_{1\text{ист}} &= \beta_{1\text{наб}} - \beta_{1\text{ин}}, \\ \beta_{2\text{ист}}^2 &= \beta_{2\text{наб}}^2 - \beta_{2\text{ин}}^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где индексы обозначают: истинный, наблюдаемый и инструментальный, соответственно; a_0 —глубина линии в ее центре.

Используя соотношения (2), можно решить и обратную задачу, т. е. определить фойгтовские параметры инструментального контура, если известны наблюдаемые и истинные параметры линий поглощения. Нами был использован метод определения инструментального контура по линиям поглощения [1].

Из „Фотометрического атласа Солнечного спектра Миннаерта“ [3] подбирались несколько тончайших линий атмосферного кислорода в области λ 6300 Å° (λ 6290,2 Å°; 6292,95 Å°; 6295,97 Å°). Как указывалось выше, для определения параметров инструментального контура нужно знать наблюдаемые и истинные параметры исследуемой линии. При этом в качестве исходного материала использован спектр центра диска Солнца, полученный с шириной щели 0,04 мм в третьем порядке.

Фойгтовские параметры наблюдаемого контура определяются по табл. 1 Эльсте; по наблюдаемому параметру P из таблицы находим b_1 и b_2 ,

$$P = \frac{W}{a_0 h}, \quad b_1 = \frac{\beta_1}{h}, \quad b_2 = \frac{\beta_2}{h}, \quad (3)$$

где h —полуширина контура, W —эквивалентная ширина. Эти параметры можно определять и не измеряя эквивалентной ширины линии W ; задается несколько численных оценок V и с наблюдаемого контура линии снимаются соответствующие каждому значению V ряд значений U , где

$$V = \frac{a_\lambda}{a_0}; \quad U = \frac{2\Delta\lambda}{h}, \quad (4)$$

a_λ —глубина линии в разных ее точках.

Из табл. 2 и 3 [2] по известным V и U находим b_1 , а затем по нему из табл. 1 находим P и b_2 (нами применялся второй вариант). Истинные параметры линии определены по таблицам Эльсте и Аллена [4] (табл. 2 и 3) с предположением, что W не зависит от инструмента.

Далее по формуле (2) находим параметры инструментального контура:

$$\beta_{1\text{ин}} = 8,2 m\text{Å}, \quad \beta_{2\text{ин}}^2 = 644,14 m\text{Å}^2.$$

По найденному соотношению $\beta_1/\beta_2 = \alpha$ из табл. 1 [2] находим $b_{1\text{ин}} = 0,1585$; $b_{2\text{ин}} = 0,491$, а из соотношения (3)—полуширину инструмен-

тального контура $h_{\text{ин}} = 51,68 \text{ м.А}^\circ$. Зная параметр $b_{\text{ин}}$ инструментального контура, по табл. 2 [2] находим соответствующие U для разных значений V .

Так как известна полуширина инструментального контура, по формуле (4) определяем $\Delta\lambda$ для всех значений V . При этом центральная интенсивность инструментального контура считается равной единице. На рис. 2 дается аппроксимированный инструментальный контур спектрографа АСП-20 для третьего порядка.

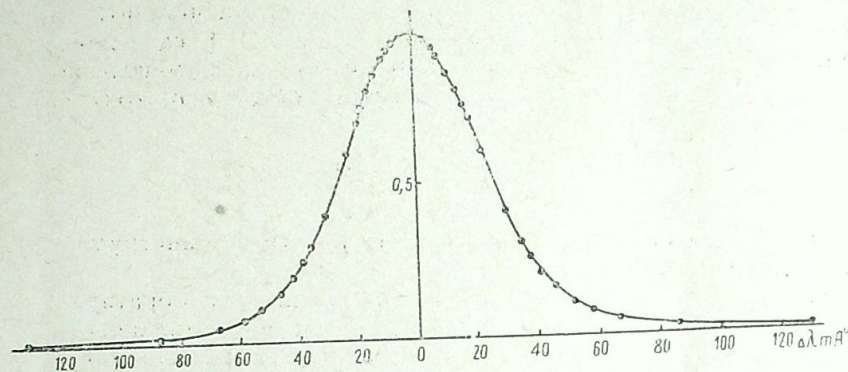


Рис. 2.

Ширина инструментального контура на уровне 0,41 от максимальной интенсивности составляет 58 м.А° , что соответствует разрешающей силе примерно 109000 в области $\lambda 6300 \text{ А}^\circ$. Если известна полуширина инструментального контура для одного порядка, то можно найти ее и для других порядков [5]. В данном случае она оценивалась для первого и второго порядков в области $\lambda 4000 \text{ А}^\circ$, примерно 175,9 и $90,48 \text{ м.А}^\circ$, соответственно. Для любой области спектра, независимо от порядков, можно приблизительно оценить полуширину инструментального контура, в каждом случае умножая фактор дисперсии (в $\text{А}^\circ/\text{мм}$) на $0,078 \text{ мм}$. В области $\lambda 4000 \text{ А}^\circ$ для третьего порядка полуширина инструментального контура равна $56,94 \text{ м.А}^\circ$.

Одним из недостатков данного метода является то, что при определении истинных параметров линий используются литературные данные. Для низких порядков спектра контуры фраунгоферовых линий можно полностью принимать за инструментальные. Следует отметить, что существенным недостатком примененного метода является то, что почти невозможно обнаружить асимметрию и вторичные пики, если таковые имеют место. Было бы хорошо определять инструментальный контур для других порядков непосредственно и желательнее "методом тонких эмиссионных линий".

Говоря о рассеянном свете в спектрографе АСП-20, судя по наблюдаемой центральной остаточной интенсивности сильных фраунгоферовых линий (НиК Са 11), можно сказать, что в третьем порядке он пренебрежительно мал.

Хорошее заводское зачернение стенок спектрографа, а также использование фильтров для срезания участков спектра, налагающихся от других порядков, сильно уменьшают рассеянный свет в спектрографе. Дифракты, установленные внутри спектрографа во избежание попадания на фокальную плоскость света от щели, отраженного в камерном и коллиматорном зеркалах, одновременно препятствуют и прямому попаданию света от поверхности коллиматорного зеркала и "бликов", обусловленных дефектами зеркала и металлической части спектрографа (в основном оправы оптических частей и дифрактов).

Так как рассеянный свет в спектрографе зависит от многих факторов, то трудно говорить о его постоянном количественном значении вообще. Для этого необходимо провести специальные исследования для всех порядков и при разной высоте щели.

В заключение можно сказать, что исследуемый спектрограф АСП-20 вполне пригоден для получения спектрограмм достаточного высокого качества. Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность Г. Ф. Симкину, С. Г. Мамедову за советы и Р. Э. Гусейнову за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпинский В. Н. Изв. ГАО № 178, 84, 1965.
2. Elste Zs. Aph., 33, 39, 1953.
3. Minnaert M., Mulders G.F.W., Hautgast J. Photometric Atlas of the Solar spectrum. Amsterdam, 1940.
4. Allen C. W. Aph. J. 85, № 3, 156, 1937.
5. Кожевников Н. И. и Ризов Е. Ф. Сообщ. ГАИШ, № 126, 31, 1963.

Поступило 1. VI 1969

М. М. Мусаев

Шамахи астрофизика рәсәдханасы күнәш спектрографы АСП-20-нин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Спектрограф АСП-20 Шамахи астрофизика рәсәдханасынын үфги Күнәш телескопу илә биркә ишләйр. Тәдгигатда спектрографын жарыг вә чиһаз контуру өјрәнилмишдир. Чиһаз контуруну тәдгиг етмәк үчүн "удулма хәтләри" үсулундан истифадә олунмушдур. Бундан өтрү Миннајертин "Күнәш спектринин фотометрик Атласындан" $\lambda 6300 \text{ А}^\circ$ далға узунлуғу областында бир нечә чох назик удулма хәтти сечилмиш вә һәммин областда Күнәш диски мәркәзинин спектри алынмышдыр. Сечилмиш хәтләрин Фојгт кәмијјәтләринә көрә чиһаз контурунун Фојгт кәмијјәтләри вә жарымени тәјин едилмишдир. Чиһаз контурунун жарымени 6300 А° областында үчүнчү тәртиб үчүн тәхминән 52 м.А° -дир. Спектрографын тәчрүби ајырдетмә гүввәси тәхминән 109000-дир.

Спектрограф жарығынын орта һиссәсиндә, 12 мм -лик областда һеч бир нөгсан јохдур. Спектрографда сәпәләнмиш ишыг үчүнчү тәртибдә нәзәрә алынмајачаг дәрәчәдә аздыр. Умумијјәтлә, тәдгиг олунан спектрограф АСП-20 јахшы кејфијјәтли спектрограмлар алмаг үчүн тамамилә гәнаәтбәхшдир.

В. В. СТРИГИН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

В настоящее время при изучении неподвижных точек операторов широко используется понятие вращения векторного поля [1—3], свойства которого подробно изучены в [3]. Однако в упомянутых работах вращение векторных полей определялось лишь для операторов, определенных на границе Γ области $\mathcal{Q}$ банахова пространства E , которые не имеют на Γ неподвижных точек.

Ю. Г. Борисович [4—6] ввел понятие относительного вращения векторного поля, которое может обращаться в нуль на части границы Γ области $\mathcal{Q}$. С помощью этого понятия удалось определить вращение слабо вполне непрерывных векторных полей. Оказалось, что относительное вращение обладает многими важными свойствами вращения векторного поля [4—6].

В настоящей работе было продолжено изучение свойств относительного вращения: дано несколько иное определение относительного вращения, которое оказывается более подходящим при рассмотрении гомотопных векторных полей, и установлены теоремы о постоянстве относительного вращения при гомотопии, когда множество T , относительно которого вычисляется вращение, непрерывно меняется (в [6] рассматривался случай, когда T фиксированно).

1. Пусть E — n -мерное евклидово пространство, U —область E , а $\bar{U}$ —замыкание U . Предположим, что на $\bar{U}$ задан непрерывный оператор F , действующий, в выпуклое замкнутое ограниченное множество T . Будем пока считать, что множество T телесно. Кроме того, предполагаем, что $\dot{T} \cap U \neq \emptyset$.

Относительное вращение определяется следующим образом [6]. В множестве T введем топологию, индуцированную топологией E . Пусть $U_T = U \cap \dot{T}$ и $\dot{U}_T$ —относительная граница U_T в этой топологии. Предположим, что

$$Fx \neq x, x \in \dot{U}_T.$$

Пусть G —множество нулей поля $Fx - x$, лежащих на границе Γ_T области U_T , а G_ε — ε -окрестность G . Введем в рассмотрение векторное поле

$$\Phi_\varepsilon x = E_\varepsilon x - x, \quad (2)$$

где

$$F_\varepsilon x = \begin{cases} Fx, & x \notin G_\varepsilon, \\ Fx + \rho(x, G_\varepsilon)(U_0 - Fx), & x \in G_\varepsilon; \end{cases}$$

$\dot{U}_\varepsilon$ —граница G_ε , а U_0 —внутренний элемент T . При малых ε поле (2) не обращается в нуль на Γ_T , поэтому можно определить вращение $\gamma(\varepsilon)$ поля (2) на Γ_T . Оказывается, $\gamma(\varepsilon)$ не зависит от ε и от способа продолжения оператора F на G_ε , при котором значения оператора принадлежат T . Это общее вращение и называется относительным вращением поля

$$\Phi x = Fx - x \quad (3)$$

на $\dot{U}_T$ и обозначается через $\gamma(\Phi, \dot{U}_T)$.

Пусть теперь множество T нетелесно и Π —несущая плоскость T . Обозначим через U^π пересечение $U \cap \Pi$. Пусть $\dot{U}_T^\pi$ —относительная граница $U^\pi \cap \dot{T}$ в индуцированной топологии T и $Fx \neq x$ при $x \in \dot{U}_T^\pi$. Относительное вращение поля (3) на $\dot{U}_T^\pi$, рассматриваемое в плоскости Π , и называют в этом случае относительным вращением поля (3) на $\dot{U}_T$.

2. Нам удобно относительное вращение определить несколько иначе. Пусть S —нули поля (3), лежащие на $\dot{U} \cap \dot{T}$, а S_ε — ε -окрестность S в пространстве E . Рассмотрим векторное поле

$$\tilde{F}_\varepsilon x = \tilde{F}_\varepsilon x - x, \quad (4)$$

где

$$\tilde{F}_\varepsilon x = \begin{cases} Fx, & x \notin S_\varepsilon, \\ Fx + \rho(x, S_\varepsilon)(U_0 - Fx), & x \in S_\varepsilon; \end{cases}$$

$\dot{S}_\varepsilon$ —граница S_ε , U_0 —внутренний элемент T . Поле (4) при малых ε не обращается в нуль на границе $\dot{U}$ области U .

Лемма 1. Предположим, что для любой окрестности $\Sigma(x_0)$ точки x_0 ($x_0 = Fx_0$, $x_0 \in \dot{T} \cap \dot{U}$) пересечение $U \cap \dot{T} \cap \Sigma(x_0)$ не пусто. Тогда вращение γ поля (4) на $\dot{U}$ совпадает с относительным вращением поля (3) на $\dot{U}_T$.

Отметим, что в доказательстве этой леммы используется лишь тот факт, что $Fx \neq x$ на замыкании $\dot{U} \cap \dot{T}$.

Теорема 1. Предположим, что $T(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)—семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств, которое меняется непрерывно в хаусдорфовой метрике. Пусть оператор $F(\lambda, x)$ принимает значение в $T(\lambda)$ при $x \in \bar{U}$ и удовлетворяет условию $\|F(\lambda, x) - x\| > \alpha > 0$

при $x \in \varepsilon_\lambda = \dot{U}^\pi \cap T(\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$. Тогда при всех $\lambda \in [0, 1]$ относительное вращение поля

$$\Phi(\lambda)x = F(\lambda, x) - x$$

на $\dot{U}_{T(\lambda)}$ постоянно.

3. Пусть теперь E —локально выпуклое линейное топологическое пространство (ЛВТП) и T —выпуклое замкнутое ограниченное множество в E . Предположим, что на замыкании $\bar{U}$ области U задан вполне непрерывный оператор F , действующий в T . Пусть $\dot{U}_T$ —относительная граница $U \cap \dot{T}$ в индуцированной топологии множества T и $Fx \neq x$ при $x \in \dot{U}_T$. Возьмем выпуклую окрестность $U^*(\theta)$ точки θ , которая не пересекается с $(F - I)\dot{U}_T$. Пусть $\|\cdot\|$ —порожденная ею псевдонорма, а $\alpha(x_1, \dots, x_m)$ — ε -сеть компактного множества $F\bar{U}$ по этой псевдо-

норме. Обозначим через P_m оператор шаудеровского проектирования на конечномерное пространство E_m , натянутое на $x_1, \dots, x_m$. Пусть, наконец, $T_m = E_{T_m} \cap T$ и $\dot{U}_m$ — относительная граница $U \cap T_m$ в индуцированной топологии T_m . На $\dot{U}_m$ поле

$$\Phi x = Fx - x$$

5

отлично от нуля, так как $\dot{U}_{T_m} \subset \dot{U}_T$.

Определим относительное вращение поля (5) на $\dot{U}_T$ равенством

$$(\gamma = \gamma_{\Phi_m, \dot{U}_{T_m}}),$$

т. е. как относительное вращение поля

$$\Phi_m x = P_m Fx - x$$

на относительной границе $\dot{U}_{T_m}$, оказывается, что это определение корректно.

Теорема 2. *Предположим, что семейство $T(\lambda)$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) выпуклых замкнутых ограниченных телесных множеств непрерывно в смысле хаусдорфовой метрики. Пусть семейство вполне непрерывных операторов $F(\lambda, x)$ ($x \in \bar{U}$, $\lambda \in [0, 1]$) равномерно непрерывно по x, λ и принимает значения в $T(\lambda)$. Допустим, что множество $(F(\lambda) - I) \dot{U}_{T(\lambda)}$ равномерно по λ отдалено от 0 и $F(\lambda) U \cap U \neq \emptyset$. Тогда при всех $\lambda \in [0, 1]$ относительное вращение поля*

$$\Phi(\lambda) x = F(\lambda, x) - x$$

на $\dot{U}_{T(\lambda)}$ постоянно.

В заключение отметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 существенно используется одно утверждение, установленное в работе [7], сформулированное здесь в виде леммы.

Лемма 2. *Пусть M — метрическое пространство и $\lambda_0 \in M$. Предположим, что на границе Γ ограниченной области Ω банахова пространства E задано семейство операторов $A(\lambda, x)$ ($\lambda \in M$), действующих в E , и пусть выполнены следующие условия:*

- 1) оператор $A(\lambda, x)$ непрерывен по x равномерно по $\lambda \in M$;
- 2) множество значений оператора $A(\lambda, x)$ при $\lambda \in M$, $x \in \Gamma$ компактно;

- 3) при любом $x \in \Gamma$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} A(\lambda, x) = A(\lambda_0, x);$$

- 4) векторное поле

$$\Phi(\lambda) x = A(\lambda, x) - x$$

при $\lambda = \lambda_0$ не обращается в нуль на Γ и имеет на Γ вращение γ .

Тогда существует такое $\alpha > 0$, что при $\rho(\lambda, \lambda_0) < \alpha$ поле $\Phi(\lambda)$ не обращается в нуль на Γ и имеет на Γ вращение, равное γ .

Пользуясь случаем, автор выражает признательность Ю. Г. Борисовичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lerey J. Theorie des sillages es des prouves Journal de math. pures et appliquees 12 (1933).
2. Лере Ж. и Шаудер Ю. УМН, 1, 1946, № 3 и 4.
3. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.
4. Борисович Ю. Г. ДАН СССР, 131, и 1960, № 2.
5. Борисович Ю. Г. О вращении слабо непрерывных векторных полей. II Всесоюзная топологическая конф. Тбилиси, 1959.

6. Борисович Ю. Г. Теория слабо вполне непрерывных векторных полей и некоторые ее приложения. Докт. дисс., 1964.
7. Стрыгин В. В. Тр. семинара по функциональному анализу, вып. Воронеж, 1967.

Поступило 13. III 1969

В. В. Стрыгин

Векторлар мејданынын нисби фырланмасынын бир хассэси хаггында

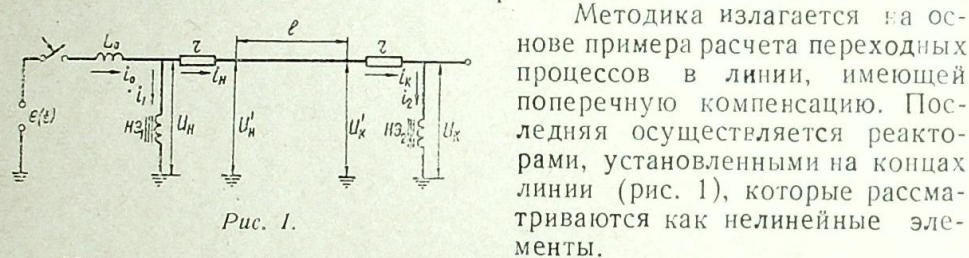
ХҮЛАСӘ

Тәдгигатларда нисби фырланмаја јени тә'риф верилмиш вә онун бә'зи хассәләри өјрәнилмишдир. Бунун әввәлки тә'рифдән үстүнлүјү һомотоп векторлар мејданыны өјрәндикдә әлверишли олмасыдыр.

Я. Б. КАДЫМОВ, З. Я. КУЛИЕВ, А. И. МАМЕДОВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В КОМПЕНСИРОВАННОЙ ЛИНИИ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕННОСТИ ПАРАМЕТРОВ И НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕАКТОРОВ

Настоящая статья посвящена применению численного метода, предложенного в работах [1, 2, 3], в случае нелинейной системы с распределенными параметрами, содержащей два нелинейных элемента.



Исходными дифференциальными уравнениями для начала линии, включаемой к генератору с э. д. с., равной $e(t)$, будут:

$$e(t) = L_0 \frac{di_0}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt}; \quad (1)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = ri_n + u'_n; \quad (2)$$

$$i_1 = \Phi_1(\psi_1(t)); \quad (3)$$

$$i_0 = i_1 + i_n, \quad (4)$$

где

L_0 — индуктивность генераторов с учетом повмсительных трансформаторов;

$e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ — э. д. с. генераторов;

r — половина активного сопротивления провода линии;

i_1, ψ_1 — ток и потокосцепление обмотки реактора, установленного в начале линии;

i_n — ток в начале линии;

$i_n = \Phi_1(\psi_1(t))$ — нелинейная связь между потокосцеплением и током обмотки реактора, установленного в начале линии.

При нулевых начальных условиях выражение (1) с учетом (4) в операторной форме представляется в виде

$$\bar{e}(p) = p\bar{\psi}_1(p) + L_0 p\bar{i}_n(p) + L_0 p\bar{i}_1(p). \quad (5)$$

В уравнении (5) изображение нелинейной функции $i_1(t)$ является не-известной функцией от параметра p , так как она зависит от искомого режима, поэтому ее зависимость от времени вначале расчета неизвестна. В выражении (5) $\bar{i}_1(p)$ условно записано как изображение нелинейной функции [6].

В общем виде связь между током и потокосцеплением в операторной форме в начале линии [3] выглядит следующим образом:

$$\bar{i}_n(p) = p\bar{\kappa}_c(p)\bar{\psi}_1(p), \quad (6)$$

где

$$\bar{\kappa}_c(p) = \frac{\bar{\kappa}_i(p)}{1 + r\bar{\kappa}_i(p)}; \quad (7)$$

$$\bar{\kappa}_i(p) = \frac{1}{z} \frac{\text{sh} p t_0}{\text{ch} p t_0} + \frac{\bar{i}_2(p)}{u'_n(p)} \frac{1}{\text{ch} p t_0}; \quad (8)$$

z — волновое сопротивление линии;

t_0 — время пробега волны в один конец линии;

$\bar{i}_2(p) = Q\{\Phi_2(\psi_2(t))\}$ — операторное изображение тока в реакторе, установленном в конце линии.

Реактивное сопротивление генераторов станции с учетом повысительных трансформаторов принято [5]

$$\omega L_0 = \kappa_2(z + r), \quad (9)$$

где κ_2 — постоянный коэффициент.

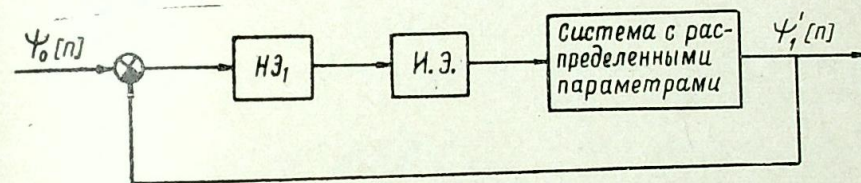


Рис. 2.

На рис. 2 представлена структурная схема нелинейной импульсной системы, построенная по методу, изложенному в работах [2, 3]. Данная схема описывается уравнением

$$\bar{\psi}_1^*(q) = \kappa K_{\bar{\psi}_1}^*(q) D\{\Phi_1(\bar{\psi}_0[n] - \bar{\psi}_1[n])\}, \quad (10)$$

где q — параметр преобразования в дискретном преобразовании Лапласа;

$\bar{\psi}_1^*(q)$ — значение потокосцепления в дискретной форме;

κ — постоянный коэффициент.

$K_{\bar{\psi}_1}^*(q)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы по потокосцеплению;

$D\{\}$ — символ, указывающий на операцию преобразования решетчатой функции по Лапласу;

$\psi_0[n], \psi_1[n]$ — значение потокосцеплений в решетчатой форме.

Передаточная функция нелинейной импульсной системы по потокосцеплению имеет вид

$$K_{\bar{\psi}_1}^*(q) = \frac{\bar{\psi}_1^*(q)}{\bar{\psi}_0^*(q)} = \frac{B'_1 F_0^*(q) e^{q t_1} + B'_{l-1} F_0^*(q) e^{q(t_{l-1})} + \dots + B'_0 F_0^*(q) + A'_1 F_0^*(q) e^{q t_2} + A'_{l-1} F_0^*(q) e^{q(t_{l-1})} + \dots + A'_0 F_0^*(q) + \dots}{\bar{\psi}_0^*(q)}$$

$$\frac{+ B_{l_2}^* F_1^*(q) e^{q l_1} + B_{l_1-1}^* F_1^*(q) e^{q(l_1-1)} + \dots + B_1^* F_1^*(q)}{+ A_{l_2}^* F_1^*(q) e^{q l_2} + A_{l_2-1}^* F_1^*(q) e^{q(l_2-1)} + \dots + A_0^* F_1^*(q)}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_0^*(q) &= \kappa \cdot D\{\Phi_1(\psi_0[n] - \psi_1[n])\}; \\ F_0^*(q) &= u_n^*(q); \\ F_1^*(q) &= i_2^*(q). \end{aligned}$$

Умножая числитель и знаменатель выражения (11) на $e^{-q(l_2-1)}$, получим уравнение нелинейной импульсной системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\{F_0^*(q) e^q (A_{l_2}^* + A_{l_2-1}^* e^{-q} + \dots + A_0^* e^{-q l_2}) + \\ &+ F_1^*(q) e^q (A_{l_2}^* + A_{l_2-1}^* e^q + \dots + A_0^* e^{-q l_2})\} \psi_1^*(q) = \\ &= \{F_0^*(q) e^q (B_{l_2}^* e^{-q(l_2-1)} + B_{l_2-1}^* e^{-q(l_2-1+1)} + \dots + \\ &+ B_0^* e^{-q l_2}) + F_1^*(q) e^q (B_{l_1}^* e^{-q(l_2-l_1)} + \\ &+ B_{l_1-1}^* e^{-q(l_2-l_1+1)} + \dots + B_0^* e^{-q l_2})\} D\{\Phi_1(\psi_0[n] - \psi_1[n])\} \cdot \kappa. \quad (12) \end{aligned}$$

На основе правил дискретного преобразования Лапласа [4] изображение [12] в области оригиналов представляется в виде:

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^n \sum_{v=0}^{l_2} (A_{l_2-v}^* f_0[m+1] + A_{l_2-v}^* f_1[m+1]) \psi_1[n-m-v] = \\ &= \kappa \sum_{m=0}^n \sum_{v=0}^{l_1} (B_{l_2-v}^* f_0[m+1] + B_{l_2-v}^* f_1[m+1]) \Phi_1(\psi_0[n-m- \\ &- l_2 + l_1 - v] - \psi_1[n-m-l_2 + l_1 - v]). \quad (13) \end{aligned}$$

Значение $\psi_1[n]$ отыскивается по рекуррентному соотношению, полученному из выражения [13]:

$$\begin{aligned} \psi_1[n] &= \frac{1}{A_{l_2}^* f_0[1] + A_{l_2}^* f_1[1]} \left\{ \kappa \sum_{m=0}^n \sum_{v=0}^{l_1} B_{l_2-1}^* f_0[m+1] + \right. \\ &+ B_{l_2-1}^* f_1[m+1] \Phi_1(\psi_0[n-m-l_2 + l_1 - v] - \psi_1[n-m- \\ &- l_2 + l_1 - v]) - \sum_{m=1}^n \sum_{v=1}^{l_2} (A_{l_2-v}^* f_0[m+1] + A_{l_2-v}^* f_1[m+1] + \\ &+ 1) \psi_1[n-m-v] \}. \quad (14) \end{aligned}$$

При пересчете воздействия ко входу нелинейного элемента [2, 3] получим следующее выражение для $\psi_0^*(q)$:

$$\psi_0^*(q) = K_0^*(q) e_0^*(q) \quad (15)$$

или

$$\begin{aligned} \psi_0^*(q) &= \frac{G_{l_1}^* F_0^*(q) e^{q l_1} + G_{l_1-1}^* F_0^*(q) e^{q(l_1-1)} + \dots + G_0^* F_0^*(q) + \\ &+ G_{l_1}^* F_1^*(q) e^{q l_1} + G_{l_1-1}^* F_1^*(q) e^{q(l_1-1)} + \dots + G_0^* F_1^*(q)}{A_{l_2}^* F_0^*(q) e^{q l_2} + A_{l_2-1}^* F_0^*(q) e^{q(l_2-1)} + \dots + A_0^* F_0^*(q) + \\ &+ A_{l_2}^* F_1^*(q) e^{q l_2} + A_{l_2-1}^* F_1^*(q) e^{q(l_2-1)} + \dots + A_0^* F_1^*(q)} e_0^*(q). \quad (16) \end{aligned}$$

Знак * указывает, что величины получены в относительных единицах. При дальнейшем изложении он опускается.

Для нахождения оригинала $\psi_0^*(q)$ воспользуемся рекуррентным соотношением (14), которое в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} \psi_0[n] &= \frac{1}{A_{l_2}^* f_0[1] + A_{l_2}^* f_1[1]} \sum_{m=0}^n \sum_{v=0}^{l_1} (G_{l_2-v}^* f_0[m+1] + \\ &+ G_{l_2-v}^* f_1[m+1]) e_0[n-m-l_2 + l_1 - v] - \\ &- \sum_{m=1}^n \sum_{v=1}^{l_2} (A_{l_2-v}^* f_0[m+1] + A_{l_2-v}^* f_1[m+1]) \psi_0[n-m-v]. \quad (17) \end{aligned}$$

Значения искомого потокосцепления находятся как разности $\psi_0[n]$ и $\psi_1[n]$:

$$\psi_1[n] = \psi_0[n] - \psi_1[n]. \quad (18)$$

Между изображениями $\bar{i}_n(p)$ и $\bar{u}_n(p)$ имеется следующая связь:

$$\bar{i}_n(p) = \frac{1}{z} \frac{\text{sh} p t_0}{\text{ch} p t_0} \bar{u}_n(p) + \bar{i}_2(p) \frac{1}{\text{ch} p t_0}. \quad (19)$$

Выражение для u_n находится при совместном решении уравнений (2) и (19).

Ток в обмотке реактора, установленного в конце линии, определяется из выражений

$$u_0' = r i_k + \frac{d \psi_2}{dt}, \quad (20)$$

$$i_k = i_2 = \Phi_2(\psi_2(t)). \quad (21)$$

Напряжение u_k в операторной форме имеет вид

$$\bar{u}_k(p) = \frac{1}{\text{ch} p t_0} \bar{u}_n(p) - \bar{i}_2(p) z \frac{\text{ch} p t_0}{\text{ch} p t_0}. \quad (22)$$

Значения $i_2[n]$ находятся по методике, разработанной в работах [2, 3].

Напряжение и ток в любой точке линии без потерь отыскиваются по выражениям

$$\begin{aligned} u^*(q, \eta) &= \frac{1}{e^{q l} + 1} \{ u_n^*(q) [e^{q l (1-\eta)} + e^{q l \eta}] - \\ &- z i_2^*(q) [e^{0,5 q l (1+2\eta)} - e^{0,5 q l (1-2\eta)}] \}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2^*(q, \eta) &= \frac{1}{e^{q l} + 1} \left\{ \frac{u_n^*(q)}{z} [e^{q l (1-\eta)} - e^{q l \eta}] + \right. \\ &+ i_2^*(q) [e^{0,5 q l (1+2\eta)} - e^{0,5 q l (1-2\eta)}] \}, \quad (24) \end{aligned}$$

где $\eta = \frac{x}{2l}$ — отношение длины x к двойной длине линии.

Следует отметить, что вышеполученные рекуррентные соотношения относятся к случаю, когда

$$\begin{aligned} \Phi_1(0) &= 0 & e[0] > 0; \\ \Phi_1(0) &> 0, & e[0] \geq 0. \end{aligned}$$

При $\Phi_1(0) = 0$, $e[0] = 0$ достаточно умножить числитель и знаменатель выражения (11) на $e^{-q l_2 + 2q}$ и далее производить расчет, как указано в настоящей работе. Описанный метод позволяет производить расчеты переходных процессов в нелинейной системе с распределенными параметрами, содержащей более двух нелинейных элементов.

Выводы

1. Разработанный метод дает возможность рассчитать переходные процессы в нелинейных электрических цепях с распределенными параметрами при произвольных формах характеристик нелинейных элементов без аппроксимации.

2. Полученные рекуррентные соотношения сводятся к выполнению арифметических операций—сложению и умножению, что может быть легко реализуемо на современных ЭЦВМ [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадымов Я. Б. Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. Физматгиз, 1968.
2. Кадымов Я. Б., Кулиев З. Я. Расчет переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами, содержащих нелинейный элемент. III Всесоюзная межвузовская конф. по теории и методам расчета нелинейных электрических цепей и систем. Изд. ФАН Уз. ССР, 1937.
3. Кадымов Я. Б., Кулиев З. Я., Мамедов А. И. „За технический прогресс“, 1968, № 8.
4. Цыпкин Я. З. Теории импульсных систем. Физматгиз, 1958.
5. Караев Р. И. Переходные процессы в линиях большой протяженности. Госэнергоиздат, 1963.
6. Гинзбург М. М. „Электричество“, 1960, № 5.

Поступило 14. IV 1969

Л. Б. Гадимов, З. Г. Гулиев, А. И. Мамматов

Компенсација едилмиш електрик хэттинин параметрларинин
пајланмасыны вэ хэттин реакторларынын гејри-хэттлијини
нэзэрэ алмаг шэрти илэ кечид просесини һесабламаға
имкан верэн эдэди метод

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә ики гејри-хәтти элементә малик олан пајланмыш параметрли електрик дөврләринин кечид просесләринин һесабланмасына имкан верэн үмуми методика тәклиф едилмишдир.

Тәдгигат заманы импульс дөврләринин нэзәријјәси әсасында јени рекуррент формуллар алынмышдыр. Бу формулалар тәләб олуна мәсәлән һесаблајычы машында һәлл едилмәсини хејли асанлашдырыр.

В. Д. ЮСУФОВА, Р. И. ПЕПИНОВ, В. А. НИКОЛАЕВ, Р. С. НУРИЕВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ВЫСОКОМИНЕРАЛИЗОВАННЫХ ВОД ПРИ РАЗЛИЧНОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРИМЫХ СОЛЕЙ

Развитие современной энергетики, металлургии, нефтехимии и других отраслей производства связано с резким повышением расхода потребляемой пресной воды. Ограниченность природных ресурсов пресной воды вызывает необходимость искусственного ее получения. Последнее обстоятельство ставит перед инженерной практикой ряд специфических вопросов, связанных с опреснением соленых вод. С этой целью в настоящее время ведутся работы по изучению возможностей широкого использования высокоминерализованных вод в водных режимах энергетических установок [6].

Отсутствие табличных данных по теплофизическим свойствам высокоминерализованных вод весьма ограничивает возможности использования критериальных уравнений, определяющих интенсивность процесса теплообмена. В литературе имеется ряд работ, посвященных исследованию физических параметров морской воды, но и они проведены в небольшом интервале температур и давлений.

В данной статье приводятся результаты исследования плотности высокоминерализованных вод в интервале $15 \div 80^\circ\text{C}$ при давлении $1 \div 250 \text{ кг/см}^2$. Плотность измерялась методом переменного объема на измерительном прессе [1], состоящем из цилиндра с полезным объемом 200 см^3 , внутри которого находится плунжер. Перемещение плунжера может осуществляться вручную или от электромотора, через червячный редуктор. Рабочий объем пресса определяется по линейной неподвижной шкале с точностью до 1 см^3 и по вращающемуся лимбу с точностью $0,02 \text{ см}^3$. Цилиндр пресса помещен в термостатирующую рубашку с термозолирующим кожухом. Давление жидкости в рабочем объеме пресса измеряется образцовым манометром класса точности 0,35, откалиброванным на поршневом манометре МП-2500. Вода в термостатирующую рубашку подается из ультратермостата, поддерживающего постоянную температуру с точностью $0,02^\circ\text{C}$. Температура воды на входе термостатирующей рубашки измеряется хромель-копелевым термопарами.

Объем пресса является переменной величиной и изменяется с перемещением плунжера. Полный объем пресса включает в себя полезный (V_0) и мертвый ($V_{м.об}$):

$$V_{полн.} = V_0 + V_{м.об.}$$

(1)

С изменением температуры и давления величина мертвого объема изменяется.

Согласно методике, изложенной в [1], при давлении P и температуре T мертвый объем системы может быть представлен следующим выражением:

$$V_{м. об. pt} = V_{м. об. 0,20} + \Delta V_{м. об. p} + \Delta V_{м. об. t} - \Delta V'_{м. об.}, \quad (2)$$

где

$V_{м. об. 0,20}$ — мертвый объем системы при $P = 1 \text{ кг/см}^2$ и $t = 20^\circ\text{C}$;

$\Delta V_{м. об. p}$ — приращение мертвого объема за счет возрастания давления;

$\Delta V_{м. об. t}$ — приращение мертвого объема за счет возрастания температуры;

$\Delta V'_{м. об.}$ — приращение мертвого объема за счет термического расширения плунжера

$$\Delta V'_{м. об.} = V_{пл. 20} (K_{пл. t} - 1), \quad (3)$$

где

$V_{пл. 20}$ — объем части плунжера, находящегося в цилиндре пресса при 30°C ;

$K_{пл. t}$ — коэффициент подачи плунжера при температуре t .

Коэффициент подачи плунжера определяется по формуле

$$K_{пл. t} = \frac{V_1}{V_2}, \quad (4)$$

Здесь V_1 — действительный объем жидкости, вытесненной из пресса;

V_2 — объем, отсчитанный по шкале пресса и соответствующий V_1 .

Действительный объем V_1 определяется при помощи пикнометра. Это позволяет составить график температурной зависимости $K_{пл.} = f(t)$ и определить поправку $\Delta V'_{м. об.}$ при соответствующих температурах.

В рассматриваемом случае измерения плотности были выполнены относительным методом. Пресс при полностью введенном плунжере вакуумировался и затем постепенно заполнялся исследуемой жидкостью в объеме $\sim 200 \text{ см}^3$. В период заполнения системы жидкостью температура в термостатирующей рубашке поддерживалась равной 20°C . В этом случае объем введенной жидкости равен

$$V_1 = N_1 + V_{м. об. 1}, \quad (5)$$

где N_1 — отсчет по шкале пресса, численно равный объему жидкости в системе без учета мертвого объема.

Впускной ventиль перекрывали и производили серию замеров при различных температурах. Затем из пресса при температуре 20°C удаляли $\sim 150 \text{ см}^3$. Объем оставшейся жидкости составлял

$$V_2 = N_2 + V_{м. об. 2}; \quad (6)$$

N_2 — отсчет по шкале пресса.

Далее производились замеры при тех же давлениях и температурах, которые выдерживались на первом этапе работы. Тогда объем жидкости, удаленной из пресса, при соответствующих давлениях и температурах будет

$$V = N_1 - N_2 - \Delta V_{пл. 20} \cdot (K_{пл. t} - 1), \quad (7)$$

где

$$\Delta V_{пл. 20} = V_{пл. 20(1)} - V_{пл. 20(2)}.$$

Масса удаленной жидкости равна

$$M = \rho_{20} \cdot V_{20}, \quad (8)$$

где ρ_{20} — плотность жидкости при $t = 20^\circ\text{C}$.

Плотность жидкости при данных давлении и температуре определяется по формуле

$$\rho = \frac{M}{V}. \quad (9)$$

Без учета ошибки отнесения максимальная относительная погрешность измерения плотности составит $\approx 0,3\%$.

Таблица 1

$t [^\circ\text{C}]$	20	30	40	60	80
$\rho [\text{г/см}^3]$					
Данные [2]	0,99823	0,99567	0,99224	0,98324	0,97183
Данные опыта	0,997 ₆	0,995 ₆	0,991 ₆	0,983 ₄	0,973 ₆

На установке предварительно была измерена плотность дистиллированной воды. Полученные результаты хорошо согласуются с табличными данными [2]. В табл. 1 приведены справочные данные по плотности дистиллированной воды при $P = 1 \text{ кг/см}^2$ и результаты наших исследований.

Таблица 2

№ пробы	Сухой остаток, мг/л	Жесткость	Щелочность	Cl^-	SO_4^{2-}	NaCl	Na_2SO_4
		общая	общая				
	мг/л	мг-экв/л	мг-экв/л	мг/л	мг/л	мг/л	мг/л
1	9100	0,4	1,2	4900	800	8085	1184
2	142520	1,2	13,0	12000	13930	118800	20616
3	172040	1,2	13,0	87000	11357	143550	16808
4	14620	94,0	3,9	5600	3146	9240	4656

Для исследования были взяты пробы высоко минерализованной воды с различной концентрацией солей, получаемой в водоподготовительном цехе ГРЭС «Северная», а также морской (каспийской) воды (проба № 4). В таблице 2 приводятся данные по химическому составу изученных вод.

Таблица 3

$P = 1 \text{ кг/см}^2$					$t [^\circ\text{C}]$				
№ пробы		% Cl	% солей	S					
				%	20	30	40	60	80
1	Дорсей	0,5	0,906	11,9	1,00514	1,00245	—	—	—
2	Формула (10)	0,5	—	—	1,0051	1,0024	0,9989	0,9894	0,9665
3	Данные опыта (проба 1)	0,49	0,91	11,6	1,004 ₇	1,002 ₂	0,999 ₆	0,990 ₅	0,980 ₆

Данные по химическому составу представлены химслужбой Азэнерго. Плотность высоко минерализованных вод при $t = 20^\circ\text{C}$ определялась при помощи пикнометра. Взвешивание производилось на аналитических весах АД-200.

В обзорной статье В. Н. Слесаренко [3] приводятся данные по удельному весу морской воды с соленостью $S = 15, 20, 30, 35 \%$,

Таблица 4

Экспериментальные данные

$t [^{\circ}\text{C}]$ $P \text{ кг/см}^2$	Проба № 1				Проба № 2			
	20	40	60	80	20	40	60	80
0	1,004 ₇	0,999 ₆	0,990 ₅	0,980 ₆	1,096 ₃	1,088 ₄	1,078 ₀	1,068 ₆
20	1,005 ₅	1,000 ₄	0,991 ₂	0,981 ₃	1,097 ₁	1,089 ₂	1,078 ₇	1,069 ₄
40	1,006 ₃	1,001 ₂	0,992 ₀	0,982 ₁	1,098 ₀	1,090 ₀	1,079 ₄	1,070 ₁
60	1,007 ₁	1,002 ₀	0,992 ₈	0,982 ₉	1,098 ₇	1,090 ₇	1,080 ₁	1,071 ₀
80	1,007 ₉	1,002 ₉	0,993 ₆	0,983 ₇	1,099 ₁	1,091 ₅	1,080 ₈	1,070 ₇
100	1,008 ₇	1,003 ₈	0,994 ₄	0,984 ₅	1,100 ₁	1,092 ₂	1,081 ₅	1,072 ₅
150	1,010 ₈	1,006 ₀	0,996 ₄	0,986 ₅	1,101 ₂	1,093 ₈	1,083 ₃	1,074 ₁
200	1,012 ₈	1,008 ₁	0,998 ₄	0,988 ₅	1,103 ₆	1,095 ₆	1,085 ₁	1,076 ₀
250	1,014 ₉	1,010 ₂	1,000 ₀	0,990 ₅	1,105 ₂	1,097 ₁	1,086 ₆	1,077 ₈

$t [^{\circ}\text{C}]$ $P \text{ кг/см}^2$	Проба № 3				Проба № 4			
	20	40	60	80	20	40	60	80
0	1,120 ₃	1,112 ₆	1,104 ₄	1,088 ₈	1,008 ₀	1,000 ₉	0,992 ₆	0,983 ₆
20	1,121 ₂	1,113 ₂	1,105 ₃	1,089 ₇	1,008 ₈	1,001 ₇	0,993 ₃	0,984 ₁
40	1,122 ₀	1,113 ₉	1,106 ₀	1,090 ₇	1,009 ₆	1,002 ₆	0,994 ₁	0,985 ₁
60	1,122 ₉	1,114 ₆	1,106 ₈	1,091 ₅	1,010 ₄	1,003 ₄	0,994 ₈	0,985 ₈
80	1,123 ₆	1,115 ₂	1,107 ₅	1,092 ₃	1,011 ₁	1,004 ₂	0,995 ₅	0,986 ₆
100	1,124 ₄	1,115 ₉	1,108 ₂	1,093 ₀	1,011 ₉	1,005 ₁	0,996 ₃	0,987 ₃
150	1,126 ₁	1,117 ₆	1,109 ₇	1,094 ₈	1,013 ₉	1,007 ₁	0,998 ₂	0,989 ₁
200	1,127 ₆	1,119 ₂	1,111 ₂	1,096 ₄	1,015 ₉	1,009 ₁	1,000 ₀	0,990 ₀
250	1,128 ₉	1,120 ₆	1,112 ₇	1,097 ₉	1,017 ₉	1,011 ₂	1,001 ₉	0,992 ₇

полученные по аналитическому выражению температурной зависимости удельного веса морской воды:

$$\gamma_{\text{м.в.}} = \gamma_{\text{в.}} \cdot (1 + \beta_t \cdot 10^{-3}), \quad (10)$$

где

$\gamma_{\text{в.}}$ — удельный вес дистиллированной воды при $t = 4^{\circ}\text{C}$;
 β_t — условная плотность морской воды.

Впервые уравнение (10) было предложено Кнудсенем для интервала температур $0 \div 30^{\circ}\text{C}$ [4]. Основываясь на удовлетворительной согласованности характера изменения плотности морской воды и растворов NaCl, NaOH В. Н. Слесаренко составил диаграмму температурной зависимости удельного веса морской воды в интервале $10 \div 100^{\circ}\text{C}$.

Для исследователей значительный интерес представляет работа [5], в которой собран богатый материал по физическим параметрам морской воды. Приводимые в [5] данные охватывают область темпера-

тур $0 \div 35^{\circ}\text{C}$. Для сравнения полученных нами результатов (проба № 1) составлена следующая таблица, в которой приведены данные, взятые из [5], и расчетные значения, в которой приведены данные. Как видно из табл. 3, наши данные, полученные по уравнению (10). (проба № 1) хорошо согласуются с данными Дорсея [5]. Сопоставление наших опытных данных и расчетных значений, полученных по формуле (10), показывает, что расхождение составляет от $-0,04\%$ при 20°C до $+0,4\%$ при 80°C .

Отсутствие в литературе каких-либо данных по плотности высоко- и 3 порядка $100.000 \div 150.000 \text{ мг/л}$ не позволило нам провести сравнительный анализ полученных результатов измерений.

Как известно, основным показателем солености вод является общее количество хлористых солей, растворенных в воде. График (рис.) иллюстрирует плотность исследованных вод в зависимости от концентрации растворенных в них солей NaCl.

Полученные данные указывают на незначительное возрастание плотности в зависимости от давления. С увеличением давления от 1 до 10 кг/см^2 значение плотности возрастает в среднем на $0,5\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамуна В. Н., Требин Г. Ф., Ульянинский Б. В. Экспериментальное исследование пластовых нефтей, 1960.
2. Справочник химика, т. 1, 1951.
3. Слесаренко В. Н. „Изв. вузов, энергетика“, 1965, № 5.
4. Зубов Н. Н. Океанологические таблицы, 1957.
5. Dorsey N. E. Properties of Ordinary Water Substance. New York, 1940.
6. Макинский И. З. Тр. Азерб. индустр. ин-та им. Азизбекова, вып. 14. Баку, 1956.

Поступило 12. V 1969

В. Ч. Јусифова, Р. И. Пепинов, В. А. Николајев, Р. С. Нуријев

Һәлл олуан дузларын мұхтәлиф концентрасијасында
 јүксәк минераллашдырылмыш сујун сыхлығынын
 тәчрүбәви тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $t = 15 + 80^{\circ}\text{C}$ температур интервалында вә $p = 0 + 250 \text{ кг/см}^2$ тәзјигдә һәлл олуан дузларын мұхтәлиф концентрасијасында јүксәк минераллашдырылмыш сујун сыхлығынын тәдгиги нәтичәләри верилмишдир.

Сыхлыг дәјишән һәчм методу илә өлчүлмүшдүр. Өлчү заманы нисби хәтә $0,3\%$ -и тәшкил етмишдир.

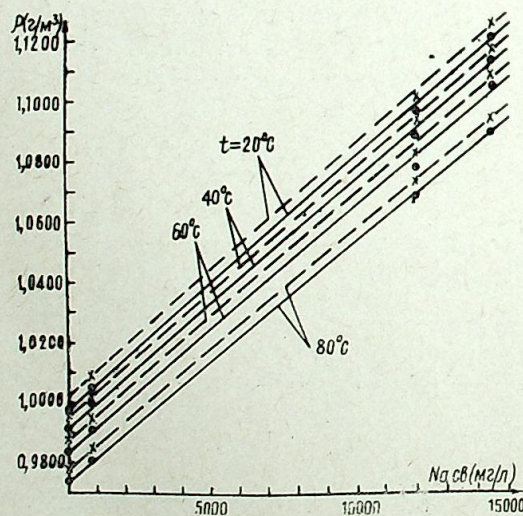


Рис. Зависимость плотности высокоминерализованных вод от концентрации растворенных солей NaCl: — — при $P = 1 \text{ кг/см}^2$; — — x — — при $P = 100 \text{ кг/см}^2$.

В. П. ДЬЯКОНОВ, Д. Г. АЛИ-ЗАДЕ

УТОЧНЕННАЯ ЗАРЯДНАЯ КОНЦЕПЦИЯ ЛАВИННОГО ТРАНЗИСТОРА

Лавинный транзистор является перспективным активным элементом многих электронных схем [1—7], в основе большинства которых лежит релаксационный генератор на лавинном транзисторе. Анализ регенеративного процесса в последнем выполнен лишь для частного случая, когда разряжаемая емкость достаточно мала, а в разрядной цепи отсутствует нагрузочное сопротивление [1, 2, 4]. Такая идеализация не имеет места в реальных схемах, что приводит к существенному количественному, а в ряде случаев и к качественному отличию между теоретическими и экспериментальными данными.

В настоящей работе уточнена картина физических процессов в релаксационном генераторе. Получены выражения для расчета основных параметров генерируемых импульсов в широком диапазоне изменения величины

разряжаемой емкости и при наличии в разрядной цепи нагрузочного активного сопротивления. Приведены результаты эксперимента, подтверждающие теоретические выводы.

Типичная схема релаксационного генератора на лавинном транзисторе [1] показана рис. 1 (а), а форма импульсов на рис. 1, б. В исходном состоянии транзистор заперт, а конденсатор C заряжен до начального напряжения U_0 . Последнее можно найти из пусковой характеристики лавинного транзистора [7] по известному значению тока управления, протекающего через сопротивление R_6 . Обычно U_0 близко к напряжению лавинного пробоя коллекторного перехода U_m . Описываемая схема может работать как в ждущем, так и в автоколебательном режимах. В ждущем режиме регенеративный процесс разряда конденсатора начинается после подачи запускающего импульса, кратковременно отпирающего транзистор.

Регенеративный процесс разряда конденсатора в работах [1, 2] анализировался методом заряда при следующих предположениях:

1. Рекомбинация в области базы отсутствует.
2. Лавинное умножение происходит в обедненном слое коллекторного перехода и описывается уравнением

$$M = \frac{1}{1 - \left(\frac{U_r}{U_m}\right)^n} \quad (1)$$

3. Напряжение на открытом (в регенеративной стадии) эмиттерном переходе пренебрежимо мало по сравнению с напряжением, падающим на конденсаторе C .
4. В стадии спада разрядного тока эмиттерный переход открыт и эффективность эмиттера γ полагается равной 1.

В этом случае для пикового тока I_p и соответствующего ему заряда неосновных носителей, накопленного в базе, Q_{sp} получены следующие выражения:

$$I_p = \frac{2Q_{sp}D_c}{W_{bp}^2} \quad (2)$$

$$Q_{sp} = \frac{CU_m}{n+1} \left[\left(\frac{U_p}{U_m}\right)^{n+1} - \left(\frac{U_0}{U_m}\right)^{n+1} \right] \quad (3)$$

Легко видеть, что (2) и (3) дают прямую пропорциональность между I_p и C . Это противоречит эксперименту, особенно при наличии в разрядной цепи нагрузочного сопротивления R . В этом случае зависимость $I_p = f(C)$ испытывает при больших C участок насыщения по току при некотором его значении I_{pmax} . Последнее очевидно из анализа вольтамперной характеристики [7] лавинного транзистора:

$$I_{pmax} = (U_0 - U_3)/R. \quad (4)$$

Отмеченное несоответствие обусловлено некорректностью предположения 3 при $R \neq 0$. Последнее не учитывает падения напряжения на сопротивлении R от протекающего по нему разрядного тока.

В стадии роста разрядного тока происходит накопление неравновесных зарядов, электронов и дырок в базе транзистора. При этом дырки инжектируются эмиттерным переходом, а электроны образуются при ударной ионизации в коллекторном переходе. В момент, когда ток достигает пикового значения, прекращается накопление зарядов.

В стадии спада разрядного тока продолжается разряд емкости. В работе [1] делается предположение, что в этот период заряд дырок, вытягивающихся в коллекторный переход, восполняется таким же зарядом дырок, инжектируемых эмиттером. Таким образом полагается, что $Q_{sp} = \text{const}$ и $\gamma = 1$. В этом случае единственной причиной, обуславливающей спад разрядного тока по величине (рис. 1, б), являются уменьшение градиента концентрации неосновных носителей, обусловленное расширением активной ширины базы в процессе разряда емкости. Анализ стадии спада при такой интерпретации физических процессов—наиболее слабое место ранней теории [1] и дает качественное расхождение с экспериментальными данными.

Можно показать, что роль модуляции эффективной ширины базовой области не может объяснить резкого спада тока, наблюдаемого во всех типах транзисторов. Во многих транзисторах, например, в диффузионных [4] и сплавных с широкой базой ширина базы меняется незначительно. В этом случае при указанной выше интерпретации спада разрядный ток должен оставаться неизменным (см. выражение 2), вплоть до полного разряда емкости. Этого не происходит. Более того, постоянная времени спада обычно намного меньше, чем

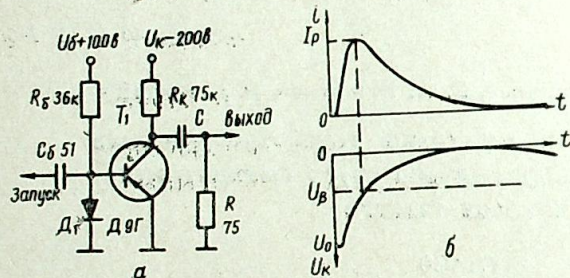


Рис. 1. а—схема релаксационного генератора на лавинном транзисторе; б—форма импульсов тока и напряжения на коллекторе транзистора.

время жизни носителей τ_p . Следовательно, учет рекомбинации не делает картину спада более корректной.

В настоящей статье излагается новая физическая интерпретация стадии спада разрядного тока, исходными предпосылками которой являются:

1. Отсутствие инжекции неосновных носителей в стадии спада, что отвечает условию $\gamma \approx 0$.
2. Концепция рассасывания неравновесных зарядов, электронов и дырок в стадии спада при сохранении электрической нейтральности базы. Ширина базы в первом приближении полагается неизменной. Более точно картина физических процессов рассматривается ниже.

АНАЛИЗ СТАДИИ РОСТА РАЗРЯДНОГО ТОКА ПРИ $R \neq 0$

После начала регенеративного процесса ток в разрядной цепи транзистор-конденсатор C — нагрузочное сопротивление R по порядку величины намного превосходит токи, протекающие через сопротивления R_b и R_k . Пренебрегая последними, можно составить физическую модель релаксационного генератора (рис. 2а).

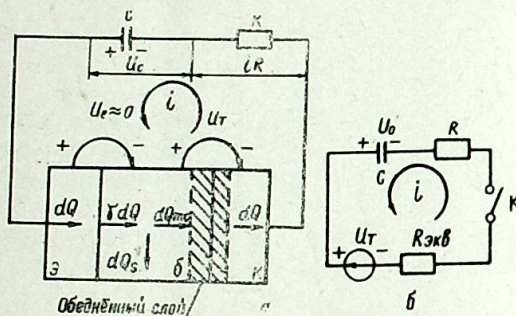


Рис. 2. а — физическая модель релаксационного генератора; б — эквивалентная схема релаксационного генератора.

торного перехода C_c . Для указанной модели можно составить следующие уравнения:

$$dQ_s = \gamma dQ - dQ_{mc}, \quad (5)$$

$$dQ = \beta M dQ_{mc}. \quad (6)$$

При написании (6) учтено умножение заряда dQ_{mc} в обедненном слое и потери части его за счет рекомбинации в базовой области (здесь β — коэффициент переноса). Эффективность эмиттера γ определяется как отношение дырочной составляющей эмиттерного тока i_{ep} к полному току:

$$\gamma = \frac{i_{ep}}{i_{ep} + i_{en}}. \quad (7)$$

Из уравнений (5) и (6) находим

$$dQ_s = \left(\gamma - \frac{1}{\beta M} \right) dQ. \quad (8)$$

Из рис. 1, б следует, что в течение всего периода разряда емкости $dU_c \geq 0$, следовательно

$$CdU_c = dQ \geq 0. \quad (9)$$

Выражения (7)–(9) позволяют качественно оценить характер физических процессов в стадии роста и спада разрядного тока. Так, в предрегенеративной стадии, когда эмиттерный переход заперт, из (7) имеем $\gamma \approx 0$, так как $i_{ep} \approx 0$, поэтому из (8) и (9) следует, что $dQ_s < 0$ при любом начальном умножении M_0 , соответствующем на-

чальному напряжению U_0 . Накопление заряда Q_s не имеет места, что отражает стабильность исходного состояния.

При подаче запускающего импульса эмиттерный переход начинает смещаться в прямом направлении и γ увеличивается. Регенеративный процесс накопления заряда и роста тока начинается тотчас же, как только γ достигнет некоторого критического значения:

$$\gamma_{кр} = 1/\beta M_0. \quad (10)$$

За исключением начальной стадии регенеративного процесса, когда ток i очень мал, в течение всего времени нарастания тока $i_{ep} \gg i_{en}$ и $\gamma \approx 1$. До тех пор, пока $\gamma \beta M > 1$, имеет место условие $dQ_s > 0$, отражающее процесс накопления заряда Q_s . Так как в стадии роста тока напряжение на транзисторе U_T падает по абсолютной величине, то M также падает. Процесс накопления заряда прекращается в момент, когда

$$\gamma \beta M = \alpha_0 M = 1. \quad (11)$$

Условию (11) отвечает напряжение на транзисторе U_T , равное

$$U_\beta = U_m \sqrt[n]{1 - \alpha_0}. \quad (12)$$

В момент, соответствующий условию (11), ток достигает пиковой величины I_p . Поскольку при этом конденсатор продолжает разряжаться, напряжения U_c и U_T продолжают падать и условие (11) сменяется на условие $\alpha_0 M < 1$, соответствующее $dQ_s < 0$. Последнее, очевидно, отражает процесс уменьшения заряда Q_s .

Найдем Q_s при $R \neq 0$. Для напряжения U_c можно записать

$$U_c = U_T - iR. \quad (13)$$

Используя (8), (1), (13) и полагая, β и γ близкими к 1, находим

$$Q_s \approx \int_{U_0}^{U_c} \left(\frac{U_T}{U_m} \right)^n C dU_c = C \int_{U_0}^{U_T - iR} \left(\frac{U_T}{U_m} \right)^n d(U_T - iR). \quad (14)$$

Уравнение (14) является интегралом с переменным верхним пределом интегрирования и отражает зависимость Q_s от изменяющихся напряжения U_T и тока i . Нас будет интересовать значение Q_s при росте тока i от 0 до I_p . Напряжение U_T при этом падает от U_0 до U_β , а заряд Q_s растет от 0 до Q_{sp} . Таким образом для момента $i = I_p$ решение (4) есть

$$Q_{sp} \approx \frac{CU_m}{n+1} \left[\left(\frac{U_\beta - I_p R}{U_m} \right)^{n+1} - \left(\frac{U_0}{U_m} \right)^{n+1} \right]. \quad (15)$$

Легко видеть, что уравнение (3) является частным случаем уравнения (15) при $R = 0$. Используя (15) совместно с (2), можно связать амплитуду разрядного тока I_p с величиной емкости C :

$$C = \frac{W_{bp}^2 (n+1)}{2 D_c U_m} \cdot \frac{I_p}{\left[\left(\frac{U_\beta - I_p R}{U_m} \right)^{n+1} - \left(\frac{U_0}{U_m} \right)^{n+1} \right]} \quad (16)$$

Зависимость (16) при $C \rightarrow \infty$ дает $I_p = I_{pmax}$, определяемое из выражения (4). Среднюю крутизну нарастания тока можно оценить, полагая, что ток растет по линейному закону [1]:

$$\frac{di}{dt} = \frac{I_p^2}{2Q_{sp}}. \quad (17)$$

Новая трактовка стадии спада разрядного тока

Самоподдерживающийся характер регенеративного процесса в стадии роста тока объясняется тем, что образующиеся при ударной ионизации электроны, входя в базу, снижают потенциальный барьер эмиттерного перехода и обуславливают инжекцию неосновных носителей в базу. В момент, когда $i = I_p$, ударная ионизация ослабевает настолько, что число электронов, входящих в базу из обедненного слоя, становится равным числу электронов, обуславливающих эмиттерную составляющую эмиттерного тока. Прекращение накопления заряда Q_s означает прекращение инжекции неосновных носителей в базу в момент $i = I_p$. Однако, поскольку в этот момент в базе имеется накопленный заряд Q_{sp} , распределенный по линейному закону [1], то диффузия дырок в слое истощения продолжает иметь место. Это и обуславливает дальнейшее протекание тока в цепи коллектора.

Уход части дырок из базы нарушает ее электрическую нейтральность. Это не будет иметь места в двух случаях: 1) если заряд дырок восстанавливается за счет инжекции; 2) если уход дырок из базы сопровождается уходом из нее такого же числа неравновесных электронов. Первый случай анализируется в [1] и, как было показано выше, противоречит наблюдаемой картине физических процессов. Во втором случае разряд емкости происходит в стадии спада следующим образом. Дырки, диффундируя к коллекторному переходу, втягиваются в него и компенсируют отрицательный заряд на коллекторной обкладке конденсаторов C . Одновременно такое же число неравновесных электронов, являющихся основными носителями, покидает базу через эмиттерный переход и компенсирует положительный заряд на эмиттерной обкладке конденсатора. Таким образом конденсатор продолжает разряжаться, но это сопровождается уменьшением неравновесных зарядов, которые были накоплены в базе за период роста тока. Уменьшение заряда Q_s приводит к пропорциональному уменьшению разрядного тока, если при этом не меняется ширина базы. Таким образом подобная трактовка легко объясняет резкий спад тока вплоть до 0.

Представляет интерес оценка времени спада. Рассмотрим вначале случай, когда $R = 0$. Поскольку эмиттерный ток обусловлен только электронной составляющей, то $i_{sp} = 0$ и из (7) $\gamma = 0$. Так как в стадии спада $|U_T| < |U_B|$, то $\beta M \approx 1$. Учитывая эти условия и дифференцируя (8) по времени, получим

$$\frac{dQ_s}{dt} = -\frac{dQ}{dt} = -i \quad (18)$$

или

$$\int_0^t i dt + Q_s = 0. \quad (19)$$

Поскольку $|U_T| > 0$, то можно по-прежнему считать, что заряд Q_s распределен по линейному закону. Тогда

$$Q_s = \frac{W_b^2}{2D_e} \cdot i = \tau_{np} \cdot i, \quad (20)$$

где

$$\tau_{np} = \frac{1}{\omega_s} = \frac{W_b^2}{2D_e}$$

(τ_{np} — время пролета неосновных носителей (дырок) через базу).

Из (19) и (20) имеем

$$\int_0^t i dt + \tau_{np} \cdot i = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) описывает экспоненциальный характер спада тока с постоянной времени, не зависящей от емкости конденсатора C и равной времени пролета τ_{np} .

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ЛАВИННОГО ТРАНЗИСТОРА В СТАДИИ СПАДА РАЗРЯДНОГО ТОКА

Экспоненциальный характер спада тока хорошо подтверждается экспериментом и данными ряда работ [3, 4]. Можно найти некоторое эквивалентное сопротивление $R_{эkv}$, дающее такой же временной закон спада тока при разряде емкости C , какой был получен выше (21). Разряд емкости на активное сопротивление описывается выражением

$$\int_0^t i dt + R_{эkv} \cdot C \cdot i = 0. \quad (22)$$

Сопоставляя (21) и (22), можно убедиться в идентичности формул, если

$$R_{эkv} = \frac{\tau_{np}}{C}. \quad (23)$$

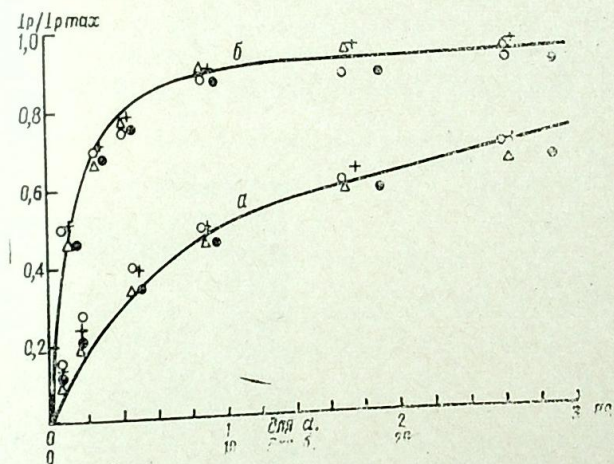


Рис. 3. Обобщенная зависимость $I_p/I_{pmax} = f(RC/\tau_{np})$.

Пиковое значение тока i при $R \neq 0$ можно найти, используя эквивалентную схему релаксационного генератора (рис. 2, б). Для момента замыкания ключа $t = 0$, $U_T = U_B$ и $i = I_p$. Таким образом

$$I_p = \frac{U_0 - U_B}{R + R_{эkv}} = I_{pmax} \frac{1}{1 + \tau_{np}/RC}. \quad (24)$$

Хотя (24) в сущности описывает ту же связь между I_p и C , что и выражение (16), но в силу своей простоты и наглядности оно более предпочтительно.

Использование эквивалентной схемы рис. 2, б для расчета временной зависимости спада требует учета эффекта модуляции эффективной ширины базовой области. Этот эффект в первом приближении

можно учесть, введя коэффициент κ в экспоненциальную зависимость спада тока:

$$i(t)_{\text{сп}} = I_p \exp \left[-\frac{t}{\kappa(RC + \tau_{\text{пр}})} \right]. \quad (24)$$

Оценивая длительность спада на уровне $I = 0,5 I_p$ из (25) получим, $\tau_{0,5} = 0,69 \kappa(RC + \tau_{\text{пр}})$. (26)

На рис. 3 представлены обобщенные теоретические зависимости амплитуды разрядного тока от величины $RC/\tau_{\text{пр}}$, рассчитанные при использовании выражения (24), а на рис. 4 показана зависимость $\tau_{0,5} = f(C)$ при следующих исходных данных: $R = 78,5 \text{ ом}$, $\kappa = 1,4$ и $\tau_{\text{пр}} = 0,09 \text{ мксек}$.

Результаты эксперимента

Для оценки правильности теоретических предпосылок исследовался релаксационный генератор (рис. 1, а), в котором использовались различные типы транзисторов как сплавных, так и диффузионных:

$U_0, \text{ в}$	$U_{\beta}, \text{ в}$	$f_{\alpha}, \text{ МГц}$ $U_T = 10 \text{ в}$	$f_{\alpha}, \text{ МГц}$ $U_T = U_{\beta}$	$\tau_{\text{пр}}, \text{ нсек}$	$I_p(a),$ $R_n = 78,5$ ом	Обознач. точек рис. 3 и 4
115	43	1,8	2,55	88,5	1,05	+
131	40	1,96	2,65	81	1,16	●
112	41	1,77	2,35	90	0,9	Δ
140	40	1,88	2,7	85	1,27	○

МП20А, МП21, МП42Б, П401, П416—П416Б и др. Во всех случаях наблюдалось качественное совпадение совокупности экспериментально наблюдаемых явлений с предсказываемыми теорией. Для количест-

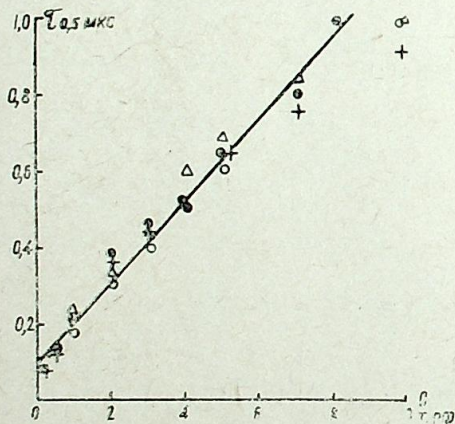


Рис. 4. Зависимость длительности выходящего импульса релаксационного генератора от емкости C .

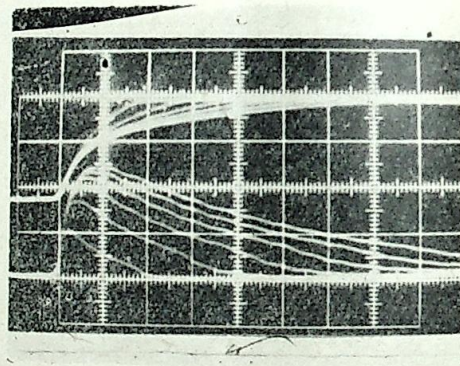


Рис. 5. Осциллограммы импульсов разрядного тока и напряжения на коллекторе транзистора при различных значениях емкости.

венной оценки были отобрано четыре образца транзисторов МП20А, параметры которых точно измерялись для каждого в отдельности (табл.).

На рис. 3 и 4 показаны точки экспериментальных зависимостей $I_p = f(C)$ и $\tau_{0,5} = f(C)$ для четырех транзисторов. Отмечается хорошее совпадение теоретических зависимостей с экспериментальными.

Некоторая систематическая ошибка в начальной части кривой а рис. 3 обусловлена тем, что емкость коллекторного перехода C_c транзисторов не принималась во внимание. Учет этой емкости приводит к значительному улучшению совпадения указанных зависимостей. Коэффициент $\kappa = 1,4$, использованный при построении теоретической зависимости $\tau_{0,5} = f(C)$ (рис. 4), вычислялся из данных замера граничной частоты f_{α} при разных коллекторных напряжениях. Эти данные приведены в таблице. Ввиду приближенности (25) указанное значение κ является усредненным для всех транзисторов, используемых в пределах показан на осциллограммах рис. 5, на которых одновременно снято по несколько импульсов при различных значениях емкости C , равных 500, 1500, 2500, 3500, 4500 и 5500 пф. Верхний луч—импульсы на коллекторе имеет масштаб 50 в/дел. и 0,2 мксек/дел., а нижний—импульс на R соответственно 20 в/дел. и 0,2 мксек/дел. Осциллограмма снята для транзистора МП20А (№ 4). Из нее хорошо видно, что в широком диапазоне изменения емкости C разрядный ток спадает экспоненциальному закону (25), вплоть до 0. Таким образом характер формы импульсов и совпадение экспериментальных данных с расчетом зависимостей (24) и (26) подтверждают правильность концепции о рассасывании неравновесных зарядов в базе лавинного транзистора в стадии спада разрядного тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamilton D.L., Gibbons I.F., Shockley W. Physical principles of avalanche transistor pulse circuits, Proc. JRE, 1959, V. 47, № 6, p. 1162—1108.
2. Пикулик В. Г., Шац С. Я. „Радиотехника“, 1964, № 11.
3. Пикулик В. Г., Шац С. Я. „Электросвязь“, 1964, № 5.
4. Каменецкий Ю. А., Кузнецов Ю. А., Смольский А. С., Киселева Е. Б. Исследование лавинного режима в германиевых транзисторах с диффузионной базой. Сб. „Полупроводниковые приборы и их применение“, под ред. Федотова, вып. 29, 1968.
5. Дьяконов В. П. „Приборы и техника эксперимента“, 1968, № 5.
6. Дьяконов В. П. „Приборы и техника эксперимента“, 1965, № 2.
7. Дьяконов В. П. „Радиотехника и электроника“, т. XIII, 1968, № 5.

Поступило 16. V 1969

В. П. Дьяконов, Ч. Н. Элизадэ

Ахын иш режиминдэ олан транзисторун дэиглэширилмиш жүк концепсијасы

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә релаксација типли генераторда баш верән физики процесләрин үмуми кедишиндән бәһс едилмишдир. Бошалан тутумун кениш диапазонда дәјишдирилмәси вә бошалма дөврәсиндә актив жүк мугавимәтинин варлығы шәраитиндә кенерасија олунан импулсларын әсас параметрләринин һесабатындан өтрү аналитик ифадәләр алынмышдыр. Мәгаләдә тәдгигатларын нәтичәси верилмишдир. Тәчрүбәләр нәзәри олараг алынмыш нәтичәлери тәсдиг етмишдир.

В. Г. КАДЫШЕВСКИЙ, Р. М. МИР-КАСИМОВ

РАСЩЕПЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РЕДЖЕ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

В работах [1—5] развивается метод описания рассеяния частиц при высоких энергиях, объединяющий характерные черты теории полюсов Редже и $SU(3)$ -симметрии. В основе его лежат следующие предположения.

а) Справедливость теоремы о факторизации реджевских вычетных функций [6], а также гипотезы о том, что при высоких энергиях в промежуточном состоянии в t -канале могут находиться реджионы, обладающие квантовыми числами мезонных нонетов 1^- и 2^+ .

б) Выполнение соотношений точной $SU(3)$ -симметрии между факторизованными вычетными функциями.

в) Наличие обменного вырождения между 1^- и 2^+ частицами, приводящего к тому, что реджионы с одинаковыми унитарными квантовыми числами лежат на одних и тех же траекториях [7].

Если предположения а), б) и в) выполняются, то можно установить связь между массовым расщеплением реджионов и расщеплением траекторий Редже, откуда нетрудно получить ряд соотношений между сечениями различных процессов. Исследованию этого круга вопросов и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим процесс

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (1)$$

где a и c — барионы, b и d — либо мезоны, либо барионы. Принимая во внимание а), амплитуду процесса (1) $M(ab \rightarrow cd)$ можно записать в виде (ср. [1])

$$M(ab \rightarrow cd) = \gamma_p^{ac}(t) \gamma_p^{bd}(t) M_p^{(v,t)} + \sum_r \{ \gamma_{sr}^{ac}(t) \gamma_{sr}^{bd}(t) M_{sr}(v, t) + \gamma_{vr}^{ac}(t) \gamma_{vr}^{bd}(t) M_{vr}(v, t) \}. \quad (2)$$

Здесь

$$M_r(v, t) = - \frac{1 \pm e^{-i\pi\alpha_r(t)}}{\sin \pi\alpha_r(t)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_r(t) + 3/2)}{\Gamma(\alpha_r(t) + 1)} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\frac{\alpha_r(t)}{r}} \quad (3)$$

— реджевская амплитуда, связанная с обменом реджионом r .

Вычетные функции γ^{lf} согласно [1] можно рассматривать как матричные элементы „кварковых токов“:

$$\delta(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \gamma_{sr}^{lf}(t) = \frac{1}{V^2} \langle f | \int d^3x q^+ \beta_{lr} q | i \rangle, \quad (4)$$

$$\delta(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \gamma_{vr}^{lf}(t) = \frac{1}{V^2} \langle f | \int d^3x q^+ \gamma_{lr} q | i \rangle. \quad (5)$$

В качестве недиагональных элементов базиса алгебры $SU(3)$ удобно выбрать следующие комбинации λ -матриц Гелл-Манна:

$$\lambda_1^{\pm} = \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2}, \quad \lambda_2^{\pm} = \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2}, \quad \lambda_3^{\pm} = \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2}. \quad (6)$$

Сделаем теперь дополнительное предположение, что частица Поме-ранчука, связанная с амплитудой M_p , есть $SU(3)$ -синглет не смешивающийся с $I = Y = 0$ -компонентой октета*. Тогда величины $\gamma_p^{lf}(t)$ совпадают с $\gamma_{s^0}^{lf}(t)$.

Для дальнейшего рассмотрения будет существенен вид траекторий $\alpha_r(t)$. Известно, что в плоскости (α, t) прямые траектории, соединяющие координаты соответствующих членов октетов 1 и 2, примерно параллельны. Эта картина может быть просто интерпретирована. Именно в пределе точной $SU(3)$ -симметрии и при наличии обменного вырождения разумно предположить, что имеется лишь одна траектория для частиц обоих свойств.

Включение умеренно сильного взаимодействия, приводящего к возникновению разности масс реджионов, расщепляет также значения $\alpha_r(0)$, оставляя неизменными наклоны траекторий. Отсюда вытекает справедливость формулы Гелл-Манна—Окубо для траекторий:

$$\alpha_{K^*}(t) = \frac{1}{4} \alpha_p(t) + \frac{3}{4} \alpha_s(t). \quad (7)$$

Поскольку $|\alpha| \sim |\Delta m^2|$, то в линейном приближении массовые формулы переносятся непосредственно на сами амплитуды:

$$M_{K^*}(v, t) = \frac{1}{4} M_p(v, t) + \frac{3}{4} M_{V_s}(v, t), \quad (8)$$

$$M_{K_2}(v, t) = \frac{1}{4} M_{\Lambda_2}(v, t) + \frac{3}{4} M_{T_8}(v, t). \quad (9)$$

Нетрудно показать, что граница $v_{\max}$ применимости указанного линейного приближения определяется формулой:

$$\lambda_{\max} = v_0 e^{\frac{1}{\Delta\alpha_{\max}}}, \quad (10)$$

где $\Delta\alpha_{\max}$ — максимальное отклонение от нерасщепленной траектории.

Подставляя сюда значения $v_0 = 1$ Бэв, $\Delta\alpha_{\max} = \frac{4}{3} (\alpha_K - \alpha_p) \approx 0,2$,

находим $v_{\max} \approx 150$ Бэв. Используя (2), можно выразить амплитуды, связанные с обменом нестранным реджионом, через амплитуды упругих столкновений πp , Kp , pp и np :

$$M_p(v, t) = M(\pi^+ p) - M(\pi^- p) = M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p),$$

$$M_{V_s}(v, t) = \frac{4}{9} [M(K^+ p) + M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)],$$

$$M_{V_1}(v, t) = [2M(pp) + 2M(pn) - 6M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p)],$$

$$M_{\Lambda_2}(v, t) = M(K^+ p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p), \quad (11)$$

* Такая ситуация имеет место, если данный реджион является синглетом относительно группы симметрии более широкой, чем $SU(3)$.

$$M_{T_s}(\nu, t) = \frac{4}{9} [4M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^- p) - M(K^0 p) - M(K^{\bar{0}} p)],$$

$$M_p(\nu, t) + M_{T_1}(\nu, t) = [2M(\pi^0 p) + M(K^+ p) + M(K^- p) + M(K^0 p) + M(K^{\bar{0}} p)].$$

Выражения для $M_{K^*}(\nu, t)$ и $M_{K_2}(\nu, t)$ в терминах упругих амплитуд легко получаются с помощью формулы (8) и (9):

$$M_{K^*}(\nu, t) = \frac{7}{12} M(K^+ p) + \frac{1}{12} M(K^0 p) - \frac{1}{12} M(\bar{K}^0 p) - \frac{7}{12} M(K^- p),$$

$$M_{K_2}(\nu, t) = \frac{4}{3} M(\pi^0 p) - \frac{1}{12} M(K^+ p) - \frac{7}{12} M(K^0 p) - \frac{7}{12} M(\bar{K}^0 p) - \frac{7}{12} M(K^- p) - \frac{1}{12} M(\bar{K} p). \quad (12)$$

На основании (2) и (12) можно установить целый ряд соотношений между амплитудами упругих и неупругих процессов:

$$M(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+) = -\sqrt{2} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^+) = 2M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda) = \sqrt{2} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) = \sqrt{\frac{1}{2}} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda) =$$

$$= 2M(\bar{K}^0 n \rightarrow \pi^0 \Sigma^0) = -\frac{2}{\sqrt{3}} M(\bar{K}^0 n \rightarrow \pi^0 \Lambda) = \quad (13)$$

$$= -\sqrt{2} M(\bar{K}^0 n \rightarrow \pi^0 \Sigma^0) = +\frac{2}{\sqrt{3}} M(K^{\bar{0}} n \rightarrow \pi^- \Lambda) =$$

$$= -\sqrt{2} M(K^- n \rightarrow \pi^0 \Sigma^-) = \frac{1}{2} [M_{K^*}(\nu, t) + M_{K_2}(\nu, t)] =$$

$$= \frac{2}{3} M(\pi^0 p) + \frac{1}{4} M(K^+ p) - \frac{1}{4} M(K^0 p) - \frac{1}{3} M(\bar{K}^0 p) - \frac{1}{3} M(\bar{K} p);$$

$$M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) = -\sqrt{2} M(\pi^0 p \rightarrow K^0 \Sigma^+) = \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} M(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda) = 2M(\pi^0 p \rightarrow K^+ \Sigma^0) = \frac{2}{\sqrt{3}} (\pi^0 p \rightarrow K^+ \Lambda) = \quad (14)$$

$$= -\sqrt{2} M(\pi^+ n \rightarrow K^+ \Sigma^0) = \sqrt{\frac{2}{3}} M(\pi^+ n \rightarrow K^+ \Lambda) = 2M(\pi^0 n \rightarrow K^0 \Sigma^0) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} M(\pi^0 n \rightarrow K^0 \Lambda) = M(\pi^- n \rightarrow K^0 \Sigma^-) =$$

$$= \frac{1}{2} (M_{K^*}(\nu, t) - M_{K_2}(\nu, t)) =$$

$$= -\frac{2}{3} M(\pi^0 p) + \frac{1}{3} M(K^+ p) + \frac{1}{3} M(K^0 p) + \frac{1}{4} M(\bar{K}^0 p) - \frac{1}{4} M(\bar{K} p);$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} M(\bar{K}^0 p \rightarrow \eta \Sigma^+) + \frac{2}{\sqrt{3}} M(\bar{K} p \rightarrow \eta \Sigma^0) =$$

$$= \frac{2}{3} M(\bar{K} p \rightarrow \eta \Lambda) = -\frac{2}{\sqrt{3}} M(\bar{K}^0 \rightarrow \mu \Sigma^0) =$$

$$= \frac{2}{3} M(\bar{K}^0 n \rightarrow \eta \Lambda) = \sqrt{\frac{2}{3}} M(\bar{K} n \rightarrow \eta \Sigma^-) = \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} (M_{K^*}(\nu, t) - \frac{1}{3} M_{K_2}(\nu, t)) =$$

$$= -\frac{2}{9} M(\pi^0 p) + \frac{11}{36} M(K^+ p) + \frac{5}{36} M(K^0 p) + \frac{1}{18} M(\bar{K}^0 p) - \frac{5}{18} M(\bar{K} p).$$

В предположении об отсутствии обменных сил, приводящих к расщеплению траекторий α_a и σ_b (a и b — векторный и тензорный реджионы с одинаковыми унитарными квантовыми числами), справедливо соотношение

$$Im(M_a(\nu, t) + M_b(\nu, t)) = 0. \quad (16)$$

Подставляя в (16) соотношения (12), будем иметь

$$8M(\pi^0 p) + 3M(K^+ p) - 3M(K^0 p) - 4M(\bar{K}^0 p) - 4M(\bar{K} p) = 0, \quad (17)$$

откуда по оптической теореме

$$3\sigma_t(K^+ n) + 4\sigma_t(K^- n) + 4\sigma_t(\bar{K} p) = 4\sigma_t(\pi^+ p) + 4\sigma_t(\pi^- p) + 3\sigma_t(K^+ p). \quad (18)$$

Здесь мы использовали известные изотопические соотношения:

$$\sigma(K^0 p) = \sigma(K^+ n); \quad \sigma(\bar{K}^0 p) = \sigma(K^- n);$$

$$\sigma(\pi^0 p) = \frac{1}{2} [\sigma(\pi^+ p) + \sigma(\pi^- p)].$$

Экспериментальные значения левой и правой частей равенств (18) таковы [8] (ошибки перенесены в правую часть):

Энергия, Бэв	Левая часть, тв	Правая часть, тв
5,5	244,5	270,7 ± 6,0
11,5	223,3	252,3 ± 13,6
19,5	226,3	256,5 ±

Для получения соотношений между сечениями можно использовать также связи между расщепленными траекториями, являющиеся аналогами массовых формул $SU(6)$ -схемы. Заметим предварительно, что амплитуды, соответствующие физическим частицам, например, $M_\omega(\nu, t)$, $M_\phi(\nu, t)$, согласно принятой выше гипотезе о линейном расщеплении реджевских амплитуд могут быть определены из равенств вида

$$M_\omega(\nu, t) = \frac{M_{V_1}(\nu, t) \cos^2 \theta - M_{V_8}(\nu, t) \sin^2 \theta}{\cos 2\theta},$$

$$M_\phi(\nu, t) = \frac{-M_{V_1}(\nu, t) \sin^2 \theta + M_{V_8}(\nu, t) \cos^2 \theta}{\cos 2\theta}, \quad (19)$$

где θ — угол смешивания (в данном случае $\theta \approx 40^\circ$). Полагая теперь $\alpha_\omega = \alpha_p$ [см., например, (9)], будем иметь

$$\left(3 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} + 1\right) \sigma_t(\pi^+ p) + \left(3 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} - 1\right) \sigma_t(\pi^- p) +$$

$$+ \left(\frac{4 + 5 \cos^2 \theta}{9 \cos 2\theta}\right) (\sigma_t(K^+ p) + \sigma_t(K^+ n)) = \left(\frac{4 + 5 \cos^2 \theta}{9 \cos 2\theta}\right) \times \quad (20)$$

$$\times (\sigma_t(K^- n) + \sigma_t(K^- p)) + 2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} (\sigma_t(pp) + \sigma_t(pn)).$$

Сравнение с экспериментом дает следующее:

Энергия, Бэв	Левая часть, mb	Правая часть, mb
5,5	702,4	$755,5 \pm 47,3$
11,5	632,0	$707,2 \pm 61,3$
19,5	641,8	$696,3 \pm ?$

Пользуясь формулой $2\alpha_{\kappa^*} = \alpha_{\omega} + \alpha_{\phi} = \alpha_{\nu_s} + \alpha_{\nu_t}$, находим соотношение

$$3(\sigma_t(\pi^+p) + \sigma_t(\pi^-p)) + \frac{31}{18}\sigma_t(K^+p) + \frac{13}{18}\sigma_t(K^+n) =$$

$$= 2(\sigma_t(pp) + \sigma_t(pn)) + \frac{13}{18}\sigma_t(K^-n) + \frac{31}{18}\sigma_t(K^-p), \quad (21)$$

также качественно согласующееся с экспериментом: С помощью массовых формул $m_{\omega}^2 = m_{A_2}^2$ и $2m_{\kappa_2}^2 = m_{\omega_2}^2 + m_{\phi_2}^2 = m_{T_8}^2 + m_{T_1}^2$ установить

Энергия, Бэв	Левая часть, mb	Правая часть, mb
5,5	212,7	$225,8 \pm 14,3$
11,5	191,4	$211,9 \pm 18,4$
19,5	194,4	$209,0 \pm ?$

какие-либо соотношения между сечениями не удастся, поскольку вклады от M_T и $\bar{M}_p$ неотделимы друг от друга. Однако благодаря параллельности траекторий имеют место равенства $M_{\omega}(\nu, t) = M_{A_2}(\nu, t)$, $2M_{\kappa_2} = M_{\omega}(\nu, t) + M_{\phi}(\nu, t)$, из которых вытекают следующие правила сумм:

$$3 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} (\sigma_t(\pi^+p) + \sigma_t(\pi^-p)) + \left(\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} + \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} - 1 \right) \sigma_t(K^+p) +$$

$$+ \left(\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} + \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} + 1 \right) \sigma_t(K^+n) = \quad (22)$$

$$= 2 \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} (\sigma_t(pp) + \sigma_t(pn)) +$$

$$+ \left(\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} + \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} - 1 \right) \sigma_t(K^-n) +$$

$$+ \left(\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta} + \frac{4}{9} \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} + 1 \right) \sigma_t(K^-p);$$

$$\frac{5}{3} (\sigma_t(\pi^+p) + \sigma_t(\pi^-p)) + \frac{13}{18} \sigma_t(K^+n) + \frac{31}{18} \sigma_t(K^+n) +$$

$$+ \frac{11}{18} \sigma_t(K^-n) = 2(\sigma_t(pp) + \sigma_t(pn)) + \frac{7}{18} \sigma_t(K^-p). \quad (23)$$

Ниже приведены экспериментальные значения соответственно для правых и левых частей (22) и (23):

Энергия, Бэв	Левая часть, mb	Правая часть, mb
5,5	700,9	$753,5 \pm 47,6$
11,5	631,8	$712,0 \pm 62,2$
19,5	641,6	$700,0 \pm ?$

Энергия, Бэв	Левая часть, mb	Правая часть, mb
5,5	151,6	$176,8 \pm 13,0$
11,5	138,3	$168,4 \pm 12,0$
19,5	139,6	$165,2 \pm ?$

Авторы искренне благодарны В. И. Журавлеву, В. А. Матвееву, Р. М. Мурадян, А. Н. Тавхелидзе и И. Т. Тодорову за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cabibba N., Horwitz L., Ne'eman Y. Phys. Lett. 22, 336 (1966).
2. Ahmadzadeh A. Phys. Rev. Lett. 16, 962 (1966).
3. Ahmadzadeh A. and Chan R. H. Phys. Lett. 22, 692 (1966).
4. Ahmadzadeh A. Phys. Lett. 22, 689 (1966).
5. Волков Д. В. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Международная школа по теор. физике. "Наукова думка", Киев, 1967.
6. Gell-Mann M. Phys. Rev. Lett. 8, 263 (1962); Gribov V. N. and Pomeryanchuk I. Ya. Phys. Rev. Lett. 8, 343 (1962).
7. Arnold R. Phys. Rev. Lett. 14, 657 (1965).
8. Барашенков В. С. Сечения взаимодействия элементарных частиц. Изд-во "Наука", М., 1966.
9. Кадышевский В. Г., Мурадян Р. М., Смородинский Я. А. Препринт ОИЯИ, Р-2061.

Поступило 20. V. 1970

В. Г. Кадышевский, Р. М. Миргасымов

Речче трајекторијаларынын парчаланмасы вэ јүксэк енержиларда ефектив кэсиклэр арасында мүнәсибәтләр

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә Речче трајекторијалары үчүн позолмуш $Su(3)$ симметриијасы эсасында, јүксэк енержиларда мезон-нуклон вэ нуклон-нуклон эффектив кэсикләри арасында бәзи мүнәсибәтләр ајдынлашдырылмышдыр.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, А. З. КУЛИЕВ, К. Ш. КАХРАМАНОВ, Э. А. АБДУЛЛАЕВ,
Г. М. БАБАЕВ

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОННОГО СИНТЕЗИРОВАННОГО И ЕСТЕСТВЕННОГО СЕРНИСТОГО СВИНЦА

Среднетемпературные (950—600°K) термоэлектрические материалы привлекают все большее внимание, что связано с более простыми условиями сброса тепла с холодных спаев (меньше площади излучателей) и значительным выбором относительно эффективных материалов. Основными материалами этого интервала являются PbTe, PbSe, GeTe и твердые растворы на основе этих веществ. Относительно худшие показатели имеет сернистый свинец, однако низкая стоимость и наличие природного соединения (галенит) могут сделать его в некоторых случаях также приемлемым для использования. Исследования последних лет [1—5] показали, что сернистый свинец позволяет глубокое легирование и обладает высокой стабильностью термоэлектрических параметров.

Целью настоящей работы являлась разработка материала для термоэлементов (ТЭ) на основе сернистого свинца, достаточно дешевого, чтобы найти широкое применение в технике, и в то же время обладающего высокой эффективностью и стабильностью. С точки зрения низкой стоимости наиболее привлекательным представлялось исследование возможности использования в качестве материалов для т/э природного соединения PbS—галенита. Выбор PbS в качестве объекта исследования из двух халькогенидов свинца определяется не только его дешевизной, но и большой шириной запрещенной зоны (ΔE).

Сернистый свинец занимает первое место по ширине запрещенной зоны среди халькогенидов свинца и обладает удовлетворительным значением u/χ_p (u —подвижность носителей, χ_p —теплопроводность решетки). По своим физико-химическим свойствам PbS может быть использован для изготовления т/э термоэлектрических генераторов (ТЭГ) с максимальной температурой горячего спаев 650—700°С.

Галенит всегда встречается в парагенезисе со сфалеритом (ZnS), по отношению к которому находится обычно в подчиненных количествах. При окислении в процессе выветривания месторождений галенит покрывается коркой англезита ($PbSO_4$), переходящего с поверхности в церуссит ($PbCO_3$). Эти труднорастворимые соединения образуют как бы плотную рубашку вокруг центральных, нетронутых разрушением участков галенита, прекращая доступ окисляющих агентов внутрь.

В Советском Союзе и за рубежом имеются многочисленные месторождения галенитосодержащих руд. Большие месторождения джанской ССР (Гюмушлуг, Башкент, Мехмана и др.). Нами были исследованы термоэлектрические свойства синтезированного PbS и галенита месторождения Гюмушлуг. Выбор этого месторождения обусловлен сравнительно высокой чистотой данного материала (1). Спектральный анализ 48 элементов показал наличие следующих примесей (их около 10-ти) в указанном месторождении: Ba, Ti, Al, Mg, Si (содержание каждого элемента в пробе $10^{-4} \div 10^{-3}\%$); Fe, Ga, Cu, Ag— $10^{-3} \div 10^{-2}\%$; Sb— $10^{-2} \div 10^{-1}\%$.

Приготовление образцов из синтезированного PbS и галенита производилось методом порошковой металлургии. Сравнение термоэлектрических свойств естественного и синтезированного PbS проведено на легированных $PbCl_2 + Pb$ образцах. На рис. 1 показана зависимость холловской концентрации электронов в PbS от концентрации введенной примеси хлора и свинца ($PbCl_2 + Pb$). Из сравнения кривых для синтезированного (1) и естественного (2) PbS видно, что галенит так же, как и синтезированный сернистый свинец, позволяет глубокое легирование.

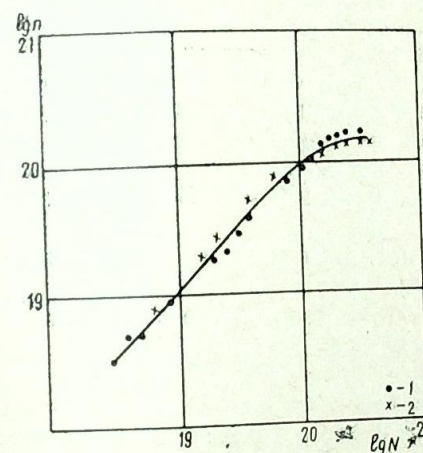


Рис. 1. Зависимость холловской концентрации электронов в сернистом свинце от концентрации введенной примеси хлора и свинца ($PbCl_2 + Pb$)

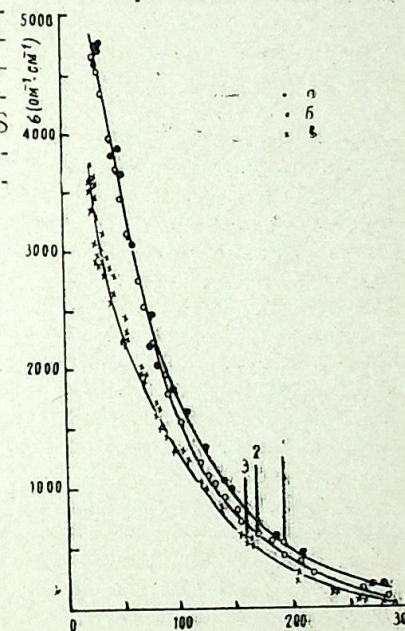


Рис. 2. Сравнительные зависимости электропроводности от термо-Э.Д.С. при $T=300^\circ K$ для синтезированного (1) и естественного (2) сернистого свинца 2 относится к монокристаллам PbS.

Легированием галенита $PbCl_2 + Pb$ можно достичь высоких концентраций (до $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$) электронов. При концентрации примеси порядка $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ холловская концентрация $2,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ получается больше введенной концентрации хлора и свинца. Столь большая (по сравнению с введенной) концентрация получается и без введения избытка свинца ($PbCl_2$), видимо, избыток его находится в самом галените. При более высоких концентрациях избыток свинца необходимо вводить в виде $PbCl_2 + Pb$, поскольку в этом случае количество свинца „не достает“ для полной компенсации; при введении только $PbCl_2$ без свинца электропроводность ($\sigma \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$) оказывается заниженной, хотя концентрация электронов в обоих случаях бывает одинаковой.

На рис. 2 представлены сравнительные электропроводности от термо-э. д. с. $\left(\alpha = \frac{\text{мкВ}}{\text{град}}\right)$ при $T = 300^\circ\text{K}$ для синтезированного (кривая 1) и естественного (3) сернистого свинца; кривая (2) относится к монокристаллическим образцам. Как видно из рисунка, свойства монокристаллических и прессованных образцов синтезированного сернистого свинца ($\text{PbCl}_2 + \text{Pb}$) практически совпадают, по крайней мере при концентрациях выше $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. При меньших концентрациях электропроводность σ (следовательно и подвижность электронов) в монокристаллах оказывается значительно выше. Это различие, видимо, связано с возможными флуктуациями содержания примесей в отдельных зернах поликристалла. Флуктуации эти особенно существенны при малом содержании примесей также и в теллуристом свинце [6], поскольку в этом случае они могут привести к появлению участков с различным знаком проводимости, при этом значительно снижается коэффициент Холла.

Такое совпадение электропроводности поликристаллических образцов с монокристаллическими (синтезированного PbS) при высоких концентрациях не наблюдается для естественного сернистого свинца. Электропроводность легированного галенита ниже, чем у синтезированного PbS при высоких концентрациях электронов на 15–20% при комнатной температуре. Однако выше 600°K этой разницы не наблюдается. По-видимому, помимо примесей, обнаруженных спектральным анализом в исследованном нами галените, имеются и неметаллические примеси, которые снижают σ легированного хлором галенита на 15–20%. С целью их выявления был произведен анализ галенита (прессованного, легированного хлором образца) микрозондовым локальным рентгеноспектральным методом на приборе типа МЗ/46 фирмы „Каめка“. При этом определялись Pb, S, Sb, Se, Te, Cl. Анализ, выполненный в рентгеновской лаборатории ИПАН СССР, дал следующие результаты:

I. Кроме основной фазы PbS (рис. 3, в и г), в виде отдельных сегрегаций (выделений) найдены две:

а) одна из них содержит Sb—83% и Pb—16%, размер выделений примерно 2 мк (рис. 3, б);

б) вторая фаза имеет в составе Pb—83%, Te—12%, S—5%, (рис. 3, д). Размеры этих выделений 8–12 мк.

II. Ввиду малого содержания Cl и Se, а также их сегрегации не обнаружены.

По-видимому, примесью, снижающей электропроводность легированного хлором галенита при комнатной температуре, является теллур, поскольку присутствие незначительного его количества в PbS сильно снижает параметры последнего [1–2].

Были исследованы температурные зависимости эффективности $(Z \text{ град}^{-1})$ прессованных образцов синтезированного и естественного PbS. Для интервала $600\text{—}300^\circ\text{C}$ наилучшим образом отвечают требованиям образцы с $n = (7\text{—}8) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; абсолютный максимум эффективности $Z_{\text{max}} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ для синтезированного и естественного PbS достигается при $450\text{—}500^\circ\text{C}$; $Z_{\text{cp}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ в интервале $600\text{—}300^\circ\text{C}$. Величина $\alpha^2 \sigma$ при $600\text{—}300^\circ\text{C}$ для синтезированного PbS и галенита достигает порядка $17\text{—}18 \cdot 10^{-6} (\text{мкВ}^2 \cdot \text{град}^{-2} \cdot \text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1})$. Это объясняется, видимо, во-первых тем, что примеси в галените находятся в малом процентном отношении $\sim 0,001\%$ и тем, что большей частью основные примеси являются „полезными“. Здесь, разуме-

ется, нельзя легко обобщить правила, которым следуют действия примесей в естественном PbS, так как резко выступает взаимосвязь различных примесей и дефектов в области $\sim 500\text{—}600^\circ\text{C}$.

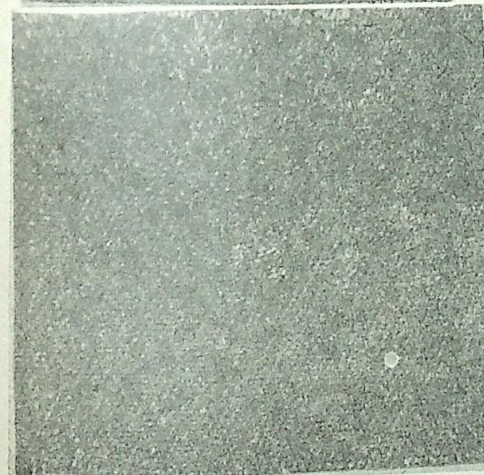
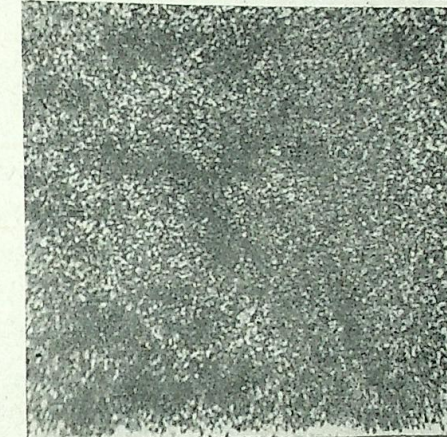
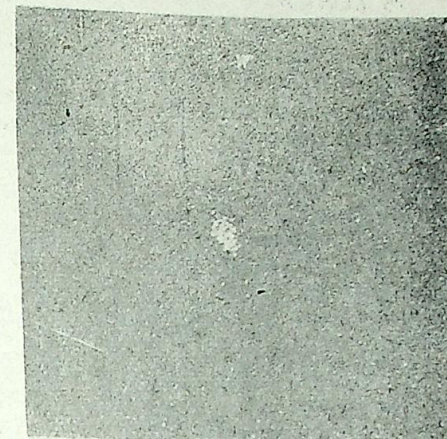


Рис. 3. А—электронное изображение. Б, В, Г, Д—рентгеновские изображения.

При разработке тэ для интервала температур $650\text{—}300^\circ\text{C}$ в паре с электронным галенитом было использовано железо, которое обладает дырочной проводимостью, высокой электропроводностью ($\sigma = 15000 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$) и низкой термо-э. д. с. ($\alpha = +18 \text{ мкВ/град}$). В качестве дополнительной прослойки между железом и сернистым

свинцом успешно был использован антимонид никеля. Исследованы вольтамперные характеристики полученных элементов и собрана термобатарея.

В интервале 600—300°C получаемая мощность с 1 см² составляла 1,1 Вт при токе $I=6$ А.

Термоэлектрический генератор с термоэлементами на основе галенита (n -ветвь) и железа (p -ветвь) на газеом топливе для интервала 650—300°C может быть использован в различных отраслях народного хозяйства, в частности он мог бы обеспечить катодную защиту нефти и газопроводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Кулиев А. Г., Кахраманов К. Ш. Авт. свид. № 39162 (1966).
2. Абдуллаева Г. В., Алиева Л. И., Кахраманов К. Ш., Кулиев А. З. Изв. АН. Азерб. ССР, серия физ.-техн. матем. наук* 1967, № 2.
3. Ненсберг Е. Д., Петров А. Изв. АН. ССР*, т. 2, 1406, 1965, № 6.
4. Ненсберг Е. Д. ДАН СССР*, т. 160, 1304, 1965, № 4—6.
5. Абдуллаев Г. Б., Кулиев А. З., Кахраманов К. Ш. ДАН Азерб. ССР*, т. 12, 1967, № 1.
6. Ефимова Б. А. Ставицкая Т. С. Изв. АН СССР*, т. 1, 1967, № 1.

Поступило 30. V 1969

Г. Б. Абдуллаев, А. З. Гулиев, К. Ш. Кахраманов, Е. А. Абдуллаев,
Н. М. Бабаев

Тәбии вә синтез олунмуш электрон типли гургушун
күкүрдүн термоэлектрик хассәләри

ХҮЛАСӘ

Бу тәдқиғатда гургушун күкүрдүн әсасында термоэлектрик материал ишләйб һазырланмышдыр. Еләчә дә Күмүшлү јатағында (Азәрбајҹан ССР) чыхарылан галенитин термоэлектрик хассәләри тәдқиғ едилмишдир.

300—900 К температур интервалында РвS-нин ефективлијинин температурдан асылылығы өјрәнилмишдир.

АЗӘРБАЈҹАН ССР ЕЛМЈӘР АКАДЕМЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРІ
Физика-техника вә рижәјјат елмләри серијасы, 1969, № 5.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 5

Ю. М. СЕИДОВ и М. Н. АБДУЛЛАЕВ

СПИН-ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ ПРИМЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ (УЧЕТ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОБМЕННОЙ МОДЕЛИ), II

Ранее [1] нами исследовалась примесная задача в ферромагнитных кристаллах с учетом диполь-дипольного взаимодействия. Предполагалось, что чистый ферромагнитный кристалл состоит из магнитных атомов одного сорта, образующих одну магнитную подрешетку. Был найден спектр спиновых колебаний ферромагнитного кристалла с учетом диполь-дипольного взаимодействия, содержащего примесный атом с отличным значением спина S' и обменного интеграла I' от идеального.

В данной статье рассматривается задача возникновения локальных магнитных уровней в антиферромагнитных кристаллах с учетом диполь-дипольного взаимодействия, содержащих примесный атом замещения. Примесная задача в антиферромагнетиках впервые исследовалась в работе [2] для линейной цепочки. Аналогичная задача была решена для трехмерного антиферромагнитного кристалла [3]. В обоих случаях влияние диполь-дипольного взаимодействия на спектр локальных колебаний не рассматривалось. Как в работе [1], так и здесь предполагается, что обменный интеграл с примесной матрицей того же знака, что и внутри матрицы. Поэтому примесный спин будет ориентироваться в направлении спинов своей подрешетки. Это означает, что спин примесного атома, находящегося в соответствующей подрешетке, направлен вдоль суммарного момента подрешетки.

Рассмотрим двухподрешеточный Гайзенбергский антиферромагнетик с помощью гамильтониана, с учетом диполь-дипольного взаимодействия:

$$\begin{aligned}
 H &= H_{\text{ex}} + H_a + H_z + H_{\text{dip-dip}}, \\
 H_{\text{ex}} &= \sum_{n\Delta} I_{n,n+\Delta} \vec{S}_n \vec{S}_{n+\Delta} - 2 \sum_{\Delta} I_{1,1+\Delta} \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta} + 2 \sum_{\Delta} I'_{1,1+\Delta} \vec{S}_1' \vec{S}_{1+\Delta}, \\
 H_a &= A \sum_{n\Delta} \vec{S}_n \vec{S}_{n+\Delta} - 2A \sum_{\Delta} S_1^z S_{1+\Delta}^z + 2A' \sum_{\Delta} S_1'^z S_{1+\Delta}^z, \\
 H_z &= -\mu g H^z \left(\sum_n S_n^z + \sum_{n,\Delta} S_{n+\Delta}^z \right) - \mu H^z (g S_1^z - g' S_1'^z),
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
H_{\text{dip-dip}} = & \frac{1}{2} g^2 \mu^2 \sum_{n\Delta} \{ R_{n,n+\Delta}^{-3} \vec{S}_n \vec{S}_{n+\Delta} - 3 R_{n,n+\Delta}^{-5} (\vec{R}_{n,n+\Delta} \vec{S}_n) \times \\
& \times (\vec{R}_{n,n+\Delta} \vec{S}_{n+\Delta}) \} - g^2 \mu^2 \sum_{\Delta} \{ R_{1,1+\Delta}^{-3} \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta} - \\
& - 3 R_{1,1+\Delta}^{-5} (\vec{R}_{1,1+\Delta} \vec{S}_1) (\vec{R}_{1,1+\Delta} \vec{S}_{1+\Delta}) \} + g_1^2 \mu^2 \sum_{\Delta} \{ R_{1,1+\Delta}^{-3} \vec{S}_1' \vec{S}_{1+\Delta}' - \\
& - 3 R_{1,1+\Delta}^{-5} (\vec{R}_{1,1+\Delta} \vec{S}_1') (\vec{R}_{1,1+\Delta} \vec{S}_{1+\Delta}') \} = \sum_{n\Delta} M_{n,n+\Delta} (S_n^+ S_{n+\Delta}^+ + \\
& + S_n^- S_{n+\Delta}^-) - \sum_{n\Delta} N_{n,n+\Delta} S_n^z S_{n+\Delta}^z - \sum_{n\Delta} L_{n,n+\Delta}^+ S_n^- S_{n+\Delta}^+ - \\
& - \sum_{n\Delta} L_{n,n+\Delta}^- S_n^+ S_{n+\Delta}^- - \sum_{n\Delta} K_{n,n+\Delta}^+ (S_n^z S_{n+\Delta}^+ - S_n^- S_{n+\Delta}^z) - \\
& - \sum_{n\Delta} K_{n,n+\Delta}^- (S_n^z S_{n+\Delta}^- - S_n^+ S_{n+\Delta}^z) - 2 \sum_{\Delta} M_{1,1+\Delta} (S_1^+ S_{1+\Delta}^+ + S_1^- S_{1+\Delta}^-) + \\
& + 2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta} S_1^z S_{1+\Delta}^z + 2 \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^+ S_1^- S_{1+\Delta}^+ + 2 \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^- S_1^+ S_{1+\Delta}^- + \\
& + 2 \sum_n K_{1,1+\Delta}^+ (S_1^z S_{1+\Delta}^+ - S_1^- S_{1+\Delta}^z) + 2 \sum_{\Delta} K_{1,1+\Delta}^- (S_1^z S_{1+\Delta}^- - S_1^+ S_{1+\Delta}^z) + \\
& + 2 \sum_{\Delta} M_{1,1+\Delta}' (S_1'^+ S_{1+\Delta}'^+ + S_1'^- S_{1+\Delta}'^-) - 2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta}' S_1'^z S_{1+\Delta}'^z - \\
& - 2 \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}'^+ S_1'^- S_{1+\Delta}'^+ - 2 \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}'^- S_1'^+ S_{1+\Delta}'^- - 2 \sum_{\Delta} K_{1,1+\Delta}'^+ (S_1'^z S_{1+\Delta}'^+ - \\
& - S_1'^- S_{1+\Delta}'^z) - 2 \sum_{\Delta} K_{1,1+\Delta}'^- (S_1'^z S_{1+\Delta}'^- - S_1'^+ S_{1+\Delta}'^z).
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
M_{n,n+\Delta} &= \frac{1}{2} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} (\alpha_{n,n+\Delta}^2 + \beta_{n,n+\Delta}^2) \right\}, \\
N_{n,n+\Delta} &= \frac{1}{2} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} (1 - 3 \gamma_{n,n+\Delta}^2), \\
L_{n,n+\Delta}^{\pm} &= g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} \left\{ \frac{3}{4} (\alpha_{n,n+\Delta}^2 - \beta_{n,n+\Delta}^2) \pm \frac{3}{2} i \sigma_{n,n+\Delta} \beta_{n,n+\Delta} \right\}, \\
K_{n,n+\Delta}^{\pm} &= \frac{3}{4} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} (\alpha_{n,n+\Delta} \pm i \beta_{n,n+\Delta}).
\end{aligned}$$

В выражении (1) индекс n пробегает все узлы, а Δ — узлы, ближайшие к данному; примесный узел имеет индекс 1; S_1 — оператор спина примесного атома. В (1) первый член описывает обменное взаимодействие в антиферромагнитном кристалле, второй и третий члены дают анизотропию и зеемановское взаимодействие. Последний член описывает диполь-дипольное взаимодействие в неидеальном антиферромагнитном кристалле.

Перейдем в выражении (1) от операторов спина к Бозе операторам a_n ; a_n^+ и b_n ; b_n^+ спиновых отклонений согласно соотношениям [4]:

$$\begin{aligned}
S_n^z &= S - a_n^+ a_n, & S_{n+\Delta}^z &= -S + b_{n+\Delta}^+ b_{n+\Delta}, \\
S_n^+ &= (2S)^{1/2} a_n, & S_{n+\Delta}^+ &= (2S)^{1/2} b_{n+\Delta}^+, \\
S_n^- &= (2S)^{1/2} a_n^+, & S_{n+\Delta}^- &= (2S)^{1/2} b_{n+\Delta}.
\end{aligned} \quad (2)$$

После перехода к операторам Бозе по формуле (2) в спин-волновом приближении гамильтониан (1) (квадратичный по операторам a_n^- ; a_n^+ и $b_{n+\Delta}$; $b_{n+\Delta}^+$) примет вид

$$\begin{aligned}
H = & d_1^+ \sum_{n,\Delta} a_n^+ a_n + d_1^- \sum_{n,\Delta} b_{n+\Delta}^+ b_{n+\Delta} + d_2 \sum_{n,\Delta} (a_n^+ b_{n+\Delta}^+ + a_n b_{n+\Delta}) - \\
& - d_3^+ \sum_{n,\Delta} a_n^+ b_{n+\Delta} - d_3^- \sum_{n,\Delta} a_n b_{n+\Delta}^+ + \alpha_1 \sum_{\Delta} a_1^+ a_1 + \alpha_2 \sum_{\Delta} b_{1+\Delta}^+ b_{1+\Delta} + \\
& + \gamma \sum_{\Delta} (a_1^+ b_{1+\Delta}^+ + a_1 b_{1+\Delta}) - \beta^+ \sum_{\Delta} a_1^+ b_{1+\Delta} - \beta^- \sum_{\Delta} a_1 b_{1+\Delta}^+. \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
d_1^{\pm} &= (I_{n,n+\Delta} + A + N_{n,n+\Delta}) S \pm g \mu H^2, \\
d_2 &= (I_{n,n+\Delta} + 2 M_{n,n+\Delta}) S, & d_3^{\pm} &= 2 S L_{n,n+\Delta}^{\pm}, \\
\alpha_1 &= 2 (I'_{1,1+\Delta} - I_{1,1+\Delta} + A' - A + N'_{1,1+\Delta} - N_{1,1+\Delta}) S + \mu (g - g_1) H^2; \\
\alpha_2 &= 2 \{ S' (I_{1,1+\Delta} + A' + N'_{1,1+\Delta}) - S (I_{1,1+\Delta} + A + N_{1,1+\Delta}) \}; \\
\gamma &= 2 \{ (S' S)^{1/2} (I'_{1,1+\Delta} + 2 M'_{1,1+\Delta}) - S (I_{1,1+\Delta} + 2 M_{1,1+\Delta}) \}, \\
\beta^{\pm} &= 4 \{ (S' S)^{1/2} L'_{1,1+\Delta} - S L_{1,1+\Delta}^{\pm} \}.
\end{aligned}$$

Учитывая в данном случае обменное и диполь-дипольное взаимодействие только между ближайшими атомами, гамильтониан можно записать в виде (3). Подобное предположение мы сделали в работе [1] при получении гамильтониана (2).

Рассмотрим одночастную функцию Грина:

$$\begin{aligned}
G_{nm}^1(t-t') &= \langle\langle a_n(t)/a_m(t') \rangle\rangle; & G_{nm}^3(t-t') &= \langle\langle a_n^+(t)/a_m(t') \rangle\rangle; \\
G_{nm}^2(t-t') &= \langle\langle b_n(t)/a_m(t') \rangle\rangle; & G_{nm}^4(t-t') &= \langle\langle b_n^+(t)/a_m(t') \rangle\rangle. \quad (4)
\end{aligned}$$

Используя метод двухвременной функции Грина, можно показать, что функции (4) в энергетическом представлении [5] подчиняются следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
\{E - z d_1^+\} G_{nm}^1(E) &= \frac{1}{2\pi} \delta_{nm} + d_2 \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^4(E) - d_3^+ \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^2(E) + \\
& + \sum_p V_{np}^1 G_{pm}^1(E) + \sum_p V_{np}^2 G_{pm}^2(E) + \sum_p V_{np}^5 G_{pm}^5(E), \\
\{E + z d_1^+\} G_{nm}^3(E) &= -d_2 \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^2(E) + d_3^- \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^4(E) - \\
& - \sum_p V_{np}^1 G_{pm}^3(E) - \sum_p V_{np}^2 G_{pm}^4(E) - \sum_p V_{np}^7 G_{pm}^4(E), \\
\{E - z d_1^-\} G_{nm}^2(E) &= d_2 \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^3(E) - d_3^- \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^1(E) + \\
& + \sum_p V_{np}^3 G_{pm}^2(E) + \sum_p V_{np}^4 G_{pm}^4(E) + \sum_p V_{np}^6 G_{pm}^1(E), \\
\{E + z d_1^-\} G_{nm}^4(E) &= -d_2 \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^1(E) + d_3^+ \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^3(E) - \\
& - \sum_p V_{np}^3 G_{pm}^4(E) - \sum_p V_{np}^4 G_{pm}^1(E) - \sum_p V_{np}^8 G_{pm}^3(E),
\end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
V_{np}^1 &= \alpha_1 \delta_{n1} \delta_{p1}, & V_{np}^5 &= -\beta^+ \sum_{\Delta} \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}, \\
V_{np}^2 &= \gamma \sum_{\Delta} \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}, & V_{np}^6 &= -\beta^+ \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1},
\end{aligned}$$

$$V_{np}^3 = \alpha_2 \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p,1+\Delta}, \quad V_{np}^7 = -\beta^- \sum_{\Delta} \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta},$$

$$V_{np}^4 = \gamma \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1}, \quad V_{np}^8 = -\beta^+ \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1}.$$

Из последних уравнений при $V=0$ получаем системы, которые совпадают с уравнениями идеального антиферромагнитного кристалла, т. е.

$$\begin{aligned} \{E - d_1^+ z\} G_{nm}^{01}(E) &= \frac{1}{2\pi} \delta_{nm} + d_2 \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^{04}(E) - d_3^+ \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^{02}(E), \\ \{E + d_1^+ z\} G_{nm}^{03}(E) &= -d_2 \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^{02}(E) + d_3^- \sum_{\Delta} G_{n+\Delta m}^{04}(E), \\ \{E - d_1^- z\} G_{nm}^{02}(E) &= d_2 \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^{03}(E) - d_3^- \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^{01}(E), \\ \{E + d_1^- z\} G_{nm}^{04}(E) &= -d_2 \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^{01}(E) + d_3^+ \sum_{\Delta} G_{n-\Delta m}^{03}(E). \end{aligned} \quad (6)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{nm}^{01}(E) &= N^{-1} \sum_{\kappa} (2\pi)^{-1} \frac{D_1(\kappa)}{D(\kappa)} e^{i\kappa(n-m)}, \\ G_{nm}^{02}(E) &= N^{-1} \sum_{\kappa} (2\pi)^{-1} \frac{D_2(\kappa)}{D(\kappa)} e^{i\kappa(n-m)}, \\ G_{nm}^{03}(E) &= N^{-1} \sum_{\kappa} (2\pi)^{-1} \frac{D_3(\kappa)}{D(\kappa)} e^{-i\kappa(n-m)}, \\ G_{nm}^{04}(E) &= N^{-1} \sum_{\kappa} (2\pi)^{-1} \frac{D_4(\kappa)}{D(\kappa)} e^{-i\kappa(n-m)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} D(\kappa) &= \{E^2 - (zd_1^+)^2\} \{E^2 - (zd_1^-)^2\} + 2d_2^2 |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| \{E^2 - z^2 |d_1^+ d_1^-|\} - \\ &- 2 |d_3^+ d_3^-| |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| \{E^2 + z^2 |d_1^+ d_1^-|\} + |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-|^2 \{d_2^2 - |d_3^+ d_3^-|\}, \\ D_1(\kappa) &= \{E^2 - (zd_1^-)^2\} (E + d_1^+ z) + d_2^2 (E + d_1^- z) |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| - \\ &- |d_3^+ d_3^-| (E - d_1^- z) |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-|, \\ D_2(\kappa) &= -d_3 \gamma_{\kappa}^- \{(E + d_1^+ z)(E + d_1^- z) + |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| (d_2^2 - |d_3^+ d_3^-|)\}, \\ D_3(\kappa) &= 2z |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| d_2 d_3^- d_1^-, \quad \gamma_{\kappa}^{\pm} = \sum_{\Delta} e^{\pm i\kappa\Delta}, \\ D_4(\kappa) &= d_2 \gamma_{\kappa}^- \{E^2 - (zd_1^+)^2\} + d_2 \gamma_{\kappa}^- |\gamma_{\kappa}^+ \gamma_{\kappa}^-| (d_2^2 - |d_3^+ d_3^-|). \end{aligned}$$

Решения уравнения $D(\kappa)=0$ определяют спектр элементарных возбуждений в антиферромагнитном кристалле с учетом диполь-дипольного взаимодействия в спин-волновом приближении. В символическом виде уравнение (5) можно записать следующим образом:

$$\left(\hat{V}_0 + \hat{V} \right) \begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \\ \hat{G}^3 \\ \hat{G}^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $\hat{V}$ — оператор возмущения. При $V=0$ уравнение (8) пере-

ходит в уравнение для идеального антиферромагнитного кристалла (учет диполь-дипольного взаимодействия), т. е.

$$V_0 \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \\ \hat{G}^{03} \\ \hat{G}^{04} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Подставив (9) в символическую запись уравнения (8), получим уравнение в матричном виде для функции Грина антиферромагнитного кристалла:

$$\left(\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V} \right) \begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \\ \hat{G}^3 \\ \hat{G}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \\ \hat{G}^{03} \\ \hat{G}^{04} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{V}_0^{-1} &= \begin{pmatrix} \hat{G}_{nm}^{11} & -\hat{G}_{nm}^{12} & -\hat{G}_{nm}^{13} & \hat{G}_{nm}^{14} \\ -\hat{G}_{nm}^{21} & \hat{G}_{nm}^{22} & \hat{G}_{nm}^{23} & -\hat{G}_{nm}^{24} \\ \hat{G}_{nm}^{31} & -\hat{G}_{nm}^{32} & \hat{G}_{nm}^{33} & \hat{G}_{nm}^{34} \\ -\hat{G}_{nm}^{41} & \hat{G}_{nm}^{42} & -\hat{G}_{nm}^{43} & \hat{G}_{nm}^{44} \end{pmatrix}, \\ \hat{V} &= - \begin{pmatrix} V_{np}^1 & V_{np}^5 & 0 & V_{np}^2 \\ V_{np}^6 & V_{np}^3 & V_{np}^4 & 0 \\ 0 & -V_{np}^2 & -V_{np}^1 & -V_{np}^7 \\ -V_{np}^4 & 0 & -V_{np}^8 & -V_{np}^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10a)$$

Матричные элементы для уравнения (10) определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \\ \hat{G}^3 \\ \hat{G}^4 \end{pmatrix}_{nm} = \sum_p \frac{[(\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{np}}{\det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}]} \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \\ \hat{G}^{03} \\ \hat{G}^{04} \end{pmatrix}_{pm} \quad (11)$$

Находим спектр элементарных возбуждений в антиферромагнитном кристалле (учет диполь-дипольного взаимодействия) с примесью, исходя из уравнения в антиферромагнетиках с примесью:

$$\det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}] = 0. \quad (12)$$

Можно показать, что основной детерминант $\det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}]$ разбивается на произведение множителей. Число этих множителей определяется числом ближайших соседей (z). При $z=2$

$$\det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}] = \det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}]_1 \cdot \det[\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}]_2. \quad (13)$$

Этот результат также можно получить, если учесть точечную симметрию возмущения V , отвечающего неприводимым представлениям группы O_h .

Спектр дополнительных полюсов

Для нахождения спектра локальных состояний используем полюса функции Грина $\hat{G}$, даваемые формулой (11). Как было показано в работе [1], спектр дополнительных полюсов функции Грина определяется уравнениями:

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = 0, \quad \det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_2 = 0. \quad (14)$$

При $z = 2$ эти уравнения имеют вид:

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = \{1 + A_{56} - A_{66}\} \{1 + A_{11;12} - A_{12;12}\} - (A_{11;6} - A_{12;6}) (A_{5;12} - A_{6;12}),$$

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_2 = \{(1 - A_{11})(1 - A_{65} - A_{66}) - 2A_{15} A_{61}\} \{(1 - A_{77})(1 - A_{12;11} - A_{12;12}) - A_{12;7} (A_{7;11} + A_{7;12})\} - \{(1 - A_{11}) A_{67} + A_{17} A_{61}\} \{(1 - A_{12;11} - A_{12;12}) (A_{75} + A_{76}) + 2A_{12;5} (A_{7;11} + A_{7;12})\} - \{(1 - A_{11}) (A_{6;11} + A_{6;12}) + A_{61} (A_{1;11} + A_{1;12})\} \{A_{12;7} (A_{75} + A_{76}) + (1 - A_{77}) (A_{12;5} + A_{12;6})\} - \{2A_{15} A_{67} + A_{17} (1 - A_{65} - A_{66})\} \{A_{71} (1 - A_{12;11} - A_{12;12}) + A_{12;1} (A_{7;11} + A_{7;12})\} - \{2A_{15} (A_{6;11} + A_{6;12}) + (A_{1;11} + A_{1;12}) (1 - A_{65} - A_{66})\} \{A_{71} A_{12;7} + A_{12;1} (1 - A_{77})\} + \{A_{17} (A_{6;11} + A_{6;12}) - A_{67} (A_{1;11} + A_{1;12})\} \{A_{71} (A_{12;5} + A_{12;6}) - A_{12;1} (A_{75} + A_{76})\}, \quad (15)$$

где A_{nm} — матричные элементы матрицы $(\hat{V}_0^{-1} \hat{V})$, которые определяются следующим образом:

$$A_{nm} = (\hat{V}_0^{-1} \hat{V})_{nm}. \quad (16)$$

Для анализа спектра выбираем уравнение (15). С помощью выражений (10а) это уравнение можно записать в более простом виде:

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = 1 - \frac{V_{22}^3}{2\pi} \{G_{22}^{22} - G_{23}^{22} - (G_{22}^{44} - G_{23}^{43})\} - \left(\frac{V_{22}^3}{2\pi}\right)^2 \{(G_{22}^{22} - G_{23}^{22}) (G_{22}^{44} - G_{23}^{44}) + (G_{22}^{42} - G_{23}^{42}) (G_{22}^{24} - G_{23}^{24})\}. \quad (17)$$

Используя выражения (7) для функции Грина и ограничиваясь только линейными членами относительно V_{22}^3 , уравнение (17) получим в виде

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = 1 - \frac{V_{22}^3}{N} \sum_k \frac{8 d_1 \{ (E^2 - (2d_1)^2 + (d_2^2 + |d_3^+ d_3^-|) \cos^2 \kappa) \sin^2 \kappa - (2d_1)^2 \} - |d_3^+ d_3^-| [E^2 + (2d_1)^2] \cos^2 \kappa + 16 [a_2^4 + |d_3^+ d_3^-|^2] \cos^4 \kappa}{[E^2 - (2d_1)^2]^2 + 8 [a_2^2 (E^2 - (2d_1)^2) - |d_3^+ d_3^-| (E^2 + (2d_1)^2)] \cos^2 \kappa}. \quad (18)$$

Приравняв знаменатели последнего выражения к нулю можно определить нижнюю и верхнюю границы полосы спектра в рассматриваемом антиферромагнетике. Действительно, для нижней границы полосы спектра дают

$$[E^2 - (2d_1)^2]^2 + 8 \{d_2^2 [E^2 - (2d_1)^2] - |d_3^+ d_3^-| [E^2 + (2d_1)^2] + 16 [a_2^4 + |d_3^+ d_3^-|^2]\} = 0; \quad (19)$$

верхняя граница полосы спектра определяется из уравнения

$$E^2 - (2d_1)^2 = 0. \quad (20)$$

Выполнив интегрирование по κ в уравнении (18), получаем следующее уравнение, связывающее энергию примесного уровня и V_{22}^3 , т. е.

$$V_{22}^3 = \left\{ 4 d_1 \left[\frac{1}{E^2 - (2d_1)^2} + \frac{d_2^2 + |d_3^+ d_3^-|}{4 (a_2^4 + |d_3^+ d_3^-|^2)} \right] \right\}^{-1}. \quad (21)$$

Здесь

$$V_{22}^3 = 2 \{ (I'_{1,1+\Delta} + A' + N'_{1,1+\Delta}) S' - (I_{1,1+\Delta} + A + N_{1,1+\Delta}) S \}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеидов Ю. М. и Абдуллаев М. Н. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1969, № 4.
2. Гусейнов Н. Г., Сеидов Ю. М. ЖЭТФ, 51, 1084 (1966).
3. Lovesey S. W. Proc. phys. soc. vol. 1, 102 (1968).
4. Holstein T., Primakoff H. Phys. rev., 58, 1098 (1940).
5. Зубарев Д. Н. УФН, 71, 71 (1960).

Поступило 5. VII 1969

Ю. М. Сеидов, М. Н. Абдуллаев

Магнит низамлы кристалларда (дипол-дипол гаршылыгылы тәсирини нәзәрә алмагла) ашгар халларынын спин далға нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Һейзенбергин мүбадилә модели әсасында (дипол-дипол гаршылыгылы тәсирини нәзәрә алмагла) антиферромагнит кристалларда ашгар халларынын спектри һесаблинмышдыр. Бундан башга, "ашгар параметри" илә ашгар халларынын енержиси арасында әләгә јарадан тәнлик алынмышдыр. Һәр ики ифадәдә дипол-дипол гаршылыгылы тәсирини ајдын көстәрмәк үчүн һесабламанын сонунда хәтти кристала бахылмышдыр. Һесаблама заманы ики заманлы Грин формализминдән истифадә едилмишдыр.

МҮНДӘРИЧАТ

Ә. Х. Хәлилов, Ф. Г. Әлиев. NaCl+Ag фосфорларында индуксияланмыш рәңк мәркәзләринә микродефектларын тәбиәти вә пәйланмасынын тәсиринин тәдгиги	3
К. П. Мәмәдов, С. Б. Бағыров. Селенин бә'зи хәссәләринә тәзјигин тәсире	8
С. Ә. Зейналов, С. А. Әлиев, И. И. Әлиев. $\text{In}_{0.5}\text{Sb}$ дә кечиричи зонанын гурулушу вә электронларын сәпилмә механизми	12
Н. Ә. Әлиев, Б. А. Әһмәдов, Р. А. Ақопјан. Термик с'малын нөвүндән асылы олараг мөһкәмліјин рентгенографик тәдгиги	18
Ә. Х. Хәлилов, Ф. Г. Фәтуллаев. Мүхтәлиф нөв ионлашдырычы шүәларла һәјәчанлашдырылмыш $\text{KCl}+\text{Ag}$ фосфорларында индуксияланмыш активлашдыричи рәңк мәркәзләринин әмәлә кәлмәсинин тәдгиги	22
Һ. М. Һәсәнов. Бир интерполјасија чохәддиси һаггында	28
Ј. А. Созоненко, Ш. М. Мүтәллимов. Еластик рабитәләрә нормал зәрбә	33
Р. С. Әфәндијев. Бир өлчүсү галан өлчүләрә нисбәтән чох кичик олан областларда ики тәртибли, дәјишән әмсаллы, еллиптик типли тәндик үчүн којулмуш сәрһәд мәсәләсинин кичик параметрә көрә асимптотикасы	38
С. Ә. Гулијев. Мүхтәлиф шәкилләрдә олан ики рабитәли бир мүстәви мәсәлә һаггында	46
Л. М. Глускин, Р. Б. Фейзуллаев. Графларын һомоморфизмләри вә симметрија	54
Р. И. Кажлаев, М. Г. Шаһтахтински, А. А. Гулијев. В груп элементләри бәрк мәнсулларынын термодинамик хәссәләринин тәдгиги	57
З. Ә. Әлиев. Чохөдчүлү хәтти интеграл тәндикләрин тәгриби һәлли һаггында	62
О. К. Ханмәмәдов. Сексијаландырылмыш реакторун оптимал дәјиһә едилмәси һаггында	67
Р. А. Мустафаев. Мүтәһаррик сәрһәдли ион өлчүлү гәрарлашмашы бир сүзүлмә мәсәләсинин тәгриби һәлли	72
М. Ә. Мәмәдов. Һипотетик вә реал каметләрин орбит элементләринә көрә пәйланмасы	77
М. М. Мусаев. Шамаһы астрофизика рәсәдханасы күнәш спектрографы АСП-20-нин тәдгиги	81
В. В. Стрыкин. Векторлар мејданынын нисби ғырланмасынын бир хәссәси һаггында	86
Ј. Б. Гәдимов, З. Г. Гулијев, А. И. Мәмәдов. Компенсација едилмиш електрик хәттинин параметрләринин пәйланмасыны вә хәттин реакторларынын гејри-хәттәлијини нәзәрә алмаг шәрти илә кечид просесини һесабламаға имкан верән әдәди метод	90
В. Ч. Јусифова, Р. И. Пепинов, В. А. Николаев, Р. С. Нуријев. Һәлл олуан дузларын мүхтәлиф консентрасијасында јүксәк минераллашдырылмыш сүјүн сыхлығынын тәчрүбәви тәдгиги	95
В. П. Дјаконков, Ч. Һ. Әлизадә. Ахын иш режиминдә олан транзисторун дәгигләшдирилмиш јүк консепсијасы	100
В. Г. Кадышевски, Р. М. Миргасымов. Речче трајекторијаларынын парчаланмасы вә јүксәк енержиләрдә еффејтив кәсикләр арасында мүнәсибәтләр	108
Һ. Б. Абдуллаев, А. З. Гулијев, К. Ш. Гәһрәманов, Е. А. Абдуллаев, Һ. М. Бабаев. Тәбии вә синтез олуномуш электрон типли гурғушун күкүрдүн термоэлектрик хәссәләри	114
Ј. М. Сејидов, М. Н. Абдуллаев. Магнит низамлы кристалларда (дипол-дипол гаршылыгы тәсирини нәзәрә алмагла) ашгар һалларынын спин далға нәзәријәсинә даир	119

СОДЕРЖАНИЕ

А. Х. Халилов, Ф. Г. Алиев. Исследование влияния природы и распределения микродефектов на наведенные центры окраски в фосфорах	3
К. П. Мамедов, С. Б. Багиров. Влияние давления на некоторые свойства селена	8
С. А. Зейналов, С. А. Алиев и М. И. Алиев. Структура зоны проводимости и механизм расселения электронов $\text{In}_{0.5}\text{Ga}_{0.5}\text{Sb}$	12
Н. А. Алиев, Б. А. Ахмедов, Р. А. Ақопян. Рентгенографическое исследование прочности в зависимости от вида термообработки	18
А. Х. Халилов, Ф. Г. Фатуллаев. Исследование создания наведенных активаторных центров окраски в фосфорах $\text{KCl} + \text{Ag}$ возбужденных различными видами ионизирующей радиации	22
Г. М. Гасанов. Об одном интерполяционном полиноме	28
Ю. А. Созоненко, Ш. М. Муталлимов. Прямой удар по гибким связям	33
Р. С. Эфендиев. Асимптотика решения по малому параметру краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в тонких областях	38
С. А. Кулиев. Об одной задаче для двусвязной области некоторого вида	46
Л. М. Глушкин, Р. Б. Фейзуллаев. Гомоморфизмы графов и симметрия	54
Р. И. Кажлаева, М. Г. Шахтахтинский, А. А. Кулиев. Исследование термодинамических свойств твердых растворов элементов группы VB	57
З. А. Алиева. О приближенном решении многомерных линейных интегральных уравнений	62
О. К. Ханмамедов. К вопросу оптимального проектирования секционированного реактора	67
Р. М. Мустафаев. Приближенное решение одной двумерной задачи нестационарной фильтрации с подвижной границей	72
М. А. Мамедов. Распределение гипотетических и реальных комет по величине элементов орбит	77
М. М. Мусаев. Исследование солнечного спектрографа АСП-20 Шемахинской астрофизической обсерватории	81
В. В. Стрыгин. Об одном свойстве относительного вращения векторного поля	86
Я. Б. Кадымов, З. Я. Кулиев, А. И. Мамедов. Численный метод расчета переходных процессов в компенсированной линии с учетом распределенности параметров и нелинейных характеристик реакторов	90
В. Д. Юсуfoва, Р. И. Пепинов, В. А. Николаев, Р. С. Нуриев. Экспериментальное исследование высокоминерализованных вод при различной концентрации растворимых солей	95
В. П. Дьяконов, Д. Г. Ализаде. Уточненная зарядная концентрация лавинного транзистора	100
В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов. Расщепление траекторий Редже и соотношения между сечениями при высоких энергиях	108
Г. Б. Абдуллаев, А. З. Кулиев, К. Ш. Кахраманов, Э. А. Абдуллаев, Г. М. Бабаев. Термоэлектрические свойства электронного синтезированного и естественного сернистого свинца	114
Ю. М. Сеидов и М. Н. Абдуллаев. Спин-волновая теория примесных состояний в магнитоупорядоченных кристаллах (учет диполь-дипольного взаимодействия в обменной модели), II	119