

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

4

1969

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ

УДК 534. 28

Х. М. ХАЛИЛОВ, Ф. А. ГАМБАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСИЛЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В СУЛЬФИДЕ КАДМИЯ И НЕЛИНЕЙНОСТИ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Усиление упругих колебаний дрейфом носителей тока в пьезополупроводниках наблюдалось рядом авторов [1—5]. Оно сводится к тому, что дрейф электронов в пьезополупроводниках со скоростью, превышающей скорость звука, приводит к передаче энергии в бегущую упругую волну, а следовательно к усилению ультразвуковых колебаний. Сильная связь движения носителей тока с упругими колебаниями в данном случае обусловлена пьезоэлектрическими свойствами кристаллов. Возникающая при этом нелинейность вольтамперных характеристик еще недостаточно описана.

Как известно, при распространении продольных волн из одной среды в другую в качестве передающей очень удобно использовать жидкости. А для поперечных волн требуется упругая среда. Обычно применяется эпоксидная смола. При этом повторное использование преобразователя и кристалла практически затруднено ввиду почти невозможного отклеивания преобразователя и кристалла. Кроме того, эпоксидная смола является диэлектриком. В данной статье предлагается при изготовлении акустического усилителя поперечных волн использовать электропроводящий клей (электрические потери при приложении поля исключаются) с подбираемым акустическим импедансом z и поэтому пригодным при изучении различных кристаллов.

На установке, блок-схема которой показана на рис. 1, исследовались образцы из монокристалла сульфида кадмия, вырезанные в виде параллелепипеда, одно из ребер которого (по оси x) ориентировалось перпендикулярно гексагональной оси c . Ультразвуковые колебания создавались с помощью кварцевых пластинок (а) у-среза

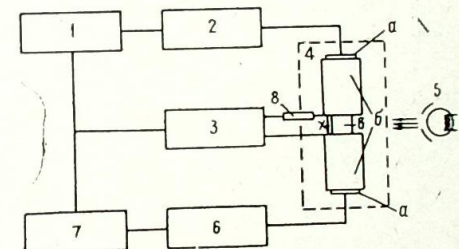


Рис. 1. 1—запускающий генератор; 2—генератор ВЧ колебаний; 3—генератор прямоугольных импульсов большой амплитуды; 4—кварцедержатель; а) пластины из монокристаллического кварца у-среза, б) буфера из плавленного кварца, в) монокристалл сульфида кадмия; 5—мощный источник света (500 вт) 6—супергетеродинный приемник; 7—осциллограф; 8—резистор.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Подписано к печати 3/II 1970. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,44. Печ. лист. 12,16. Уч.-изд. лист. 11,04. ФГ 01053. Заказ 234. Тираж 770. Цена 80 коп.

Государственный Комитет Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Типография „Красный Восток“. Баку, ул. Ази Асланова, 80.

п 52824

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

на основных частотах 12 и 15,5 МГц и соответственно на гармониках 36; 60; 46; 5; 77,5 МГц.

Кристаллы после нанесения индиевых контактов (вакуум 10^{-5} мм рт. ст.) приклеивали к кварцевым буферам с помощью электропроводящего клея. В направлении распространения упругих колебаний подавали специально сконструированные для этой цели генератора подавали прямоугольные импульсы, амплитуду и длительность которых соответственно можно было менять в пределах 0,6–5 кВ и от 3–60 мксек. Максимальное усиление, полученное на частоте 77,5 МГц, равнялось 57 дБ/см, что несколько ниже теоретического, рассчитанного по формуле (4):

$$\alpha = \frac{\kappa^2}{2} \cdot \frac{\omega_c}{v_s \gamma} \left[1 + \frac{\omega_c^2}{\gamma^2 \omega^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c \omega_a} \right)^2 \right]^{-1},$$

где $\kappa^2 \approx \frac{l^2}{\epsilon c}$ — квадрат константы электромеханической связи,

$\omega_c = \frac{\sigma}{\epsilon}$ — релаксационная частота,

$\omega_d = \frac{v_s}{D}$ — диффузионная частота.

В этих соотношениях σ — проводимость, ϵ — диэлектрическая постоянная, v_s — скорость поперечной ультразвуковой волны в CdS, D — коэффициент диффузии, e — пьезопостоянная, c — упругая постоянная, μ — подвижность носителей, E_d — напряженность дрейфа.



Рис. 2. Вольтамперные характеристики сульфида кадмия при различной интенсивности освещения.

Относительно низкий коэффициент усиления можно объяснить наличием в кристалле дефектов, создающих неоднородность проводимости по длине и, следовательно, неоднородность поля, а также тем, что при больших напряжениях (2–3 кВ) самовозбуждение мешает наблюдать усиление и резко снижает его значение.

По вольтамперным характеристикам (рис. 2), снятым для различной интенсивности освещения, видно, что на начальных участках, соответствующих малым приложенным напряжениям, в кристалле протекает обычный омический ток. Только после критического значения напряжения, когда колебания решетки становятся интенсивными, ток достигает значения насыщения и в нем обнаруживаются колебания, которые быстро затухают. Как видно из рисунка, при малой проводимости кристалла эта нелинейность выявляется яснее. Колебания тока снимались по идентичным колебаниям напряжения на тщательно подобранных сопротивлениях 9,85; 19,7 ком, соединя-

емых последовательно с кристаллом. В образце длиной 10 мм возникали колебания с частотой в 400 кГц.

На рис. 3 представлена зависимость порога возбуждения колебаний при комнатной температуре от электропроводности образца, регулируемого мощным источником света. Нами было исследовано несколько образцов, из которых два имели неправильную ориентировку. В последних не получалось усиления, но наблюдались насыщения вольтамперных характеристик и слабые колебания тока. Подвижность носителей, оцененная по критическому напряжению ($E_{кр}$) и скорости поперечных ультразвуковых колебаний, равнялась 120 см/сек. Из рисунка видно, что для построения усилителей надо подбирать кристаллы с низким критическим напряжением и высокой подвижностью носителей.

Уменьшение потери акустической энергии в промежуточных слоях достигалось максимально упругой склейкой и подбором акустического импеданса клея (ϵ_2) так, чтобы выполнялось классическое соотношение $\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$, где ϵ_1 — акустический импеданс кварца, ϵ_3 — акустический импеданс сульфида кадмия; $\epsilon = \rho v_s$, где ρ — плотность, а v_s — в данном случае скорость распространения поперечной ультразвуковой волны.

Материалы	CdS	Кварц	Zn	Фосфор	Клей
$S, \text{см}^3$	4,82	2,65	7,1	3,14	3,61
$v_s \cdot 10^5 \frac{\text{см}}{\text{сек}}$	1,78	3,76	2,41	2,70	2,52
$z \cdot 10^{-5} \frac{\text{з}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$	8,40	9,90	17,1	8,50	9,1

Основой для клея служил зубной цемент (фосфат), акустический импеданс которого близок к импедансу CdS. В него добавлялась $1/6$ весовая часть цинкового порошка. Параметры сред даны в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutson A. R., Mc Fee J. H. and White D. L. Phys. rev. Lett., vol. 7, p. 237, 1961.
2. Okada J. and Mathino H. Japan J. Appl. phys., vol. 2, p. 736, 1963.
3. Okada J. and Mathino H. Japan J. appl. phys., vol. 3, p. 698, 1964.
4. White D. L. J. appl. phys., vol. 33, p. 2547, 1962.
5. Jshiguro T., Uchida J., Suzuki T. and Sasaki Y. JEEE Transactions, vol. SU-12, 1, p. 9, 1965.

Поступило 21. IX 1968

Х. М. Халилов, Ф. А. Ганбаров

Кадмиум сульфид монокристалында ултрасэс далгаларын
күчлэндирилмэси вэ вольтампер характеристикасынын
гејри-хэттилијинин тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Кадмиум сульфид монокристалында 12 + 77,5 МГц тезликли ултрасэс далгаларынын күчләнмэси вэ һәмчинин вольтампер характеристикасынын гејри-хэттилији тәчрүби олараг өјрәнилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, кристалын дүзкүн истигамәтләнмәмәси нәтичәсиндә волтампер характеристикада эәиф дојма вә чәрәјанын аз рәгси мүшаһидә олунур.

Акустик иткини ара лајларда азалтмаг мәгсәди илә јахшы електриккечиричилијә малик јапышган тәклиф едилмишдир. Күчләндирмә әмсалынын азлыгы (77,5 Мкс-дә 57 дб/см) тәдгиг олунан кристалларда ашгарларын вә дефектләрин чохлуғу илә изаһ едилир.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, А. З. КУЛИЕВ, Э. М. ТУХТАСИНОВ,
К. Ш. КАХРАМАНОВ

ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКЦИИ И РАБОТА ПОДВОДНОГО ПОЛУПРОВОДНИКОВОГО ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ГЕНЕРАТОРА НА ГАЗОВОМ ТОПЛИВЕ (ТЭГГ-ПВ) ДЛЯ КАТОДНОЙ ЗАЩИТЫ МОРСКИХ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ОСНОВАНИЙ

Современные термоэлектрические агрегаты представляют собой автономные системы, состоящие из собственно термоэлектродгенератора (источник тепла, блока термобатарей, систем, обеспечивающих тепло-съем и теплопередачу), а также из необходимого комплекса автоматики и вспомогательных агрегатов. Несмотря на то, что ТЭГ пока имеют малый к.п.д., сложную конструкцию и большую стоимость, их надежность и большой срок службы относительно других источников электроэнергии делают ТЭГ незаменимыми. Имеются различные по назначению конструкции ТЭГ и источником тепла в них являются такие топлива, как природный или сжиженный газ и др.

Известно, что к.п.д. и мощность ТЭГ во многом определяются эффективностью термоэлементов и конструктивным оформлением самих термоэлементов в ТЭГах. Для успешной работы ТЭГ важны оба условия. И если в настоящее время имеются эффективные термоэлектрические батареи для ТЭГ, то разработка конструкций ТЭГ очень сильно отстает. Достаточно сказать, что термоэлементы из-за конструктивного оформления теряют в генераторах 20—30% к.п.д. (относительных).

Состояние разработки и исследования ТЭГ требуют усиления работы по улучшению и созданию их новых конструкций. Следует отметить, что конструкции ТЭГ сильно зависят от области их применения для наземных, морских или космических объектов. Особый интерес в последнее время вызывают морские объекты, что связано с защитой от коррозии морских индивидуальных оснований под буровые вышки, сооружение которых в Советском Союзе занимает особое место и которые находятся вдали от линии электроэнергии. Значительную долю нефти в Азербайджане составляет морская добыча. Поэтому проблема катодной защиты этих сооружений не должна вызывать сомнений.

Одним из эффективных методов является электрохимическое воздействие на коррозионные процессы в море путем катодной поляризации стали от внешнего источника тока (катодная защита). Выгодно было бы применять в качестве источников питания для катодной за-

щиты ТЭГ, которые используются для этих целей как в Советском Союзе, так и за рубежом [1].

Существует ряд изотопных генераторов морского и метеорологического назначения системы SNAP-7, SNAP-7B, SNAP-7E, SNAP-21, SNAP-23 и др. [1]. Значительное число ТЭГ этого типа применяется для энергоснабжения морских и океанских навигационных буев. Наиболее крупной изотопной моделью ТЭГ является SNA-7D, в котором в качестве топлива используется Sr^{90} в виде Sr TiO_3 . Модель SNAP-7, обслуживающая антарктическую метеостанцию, расположена в море и имеет температуру холодных спаев -50°C ; мощность термобатарей 10 Вт. Модель SNAP-21 мощностью 10 Вт предназначена для военных целей [1].

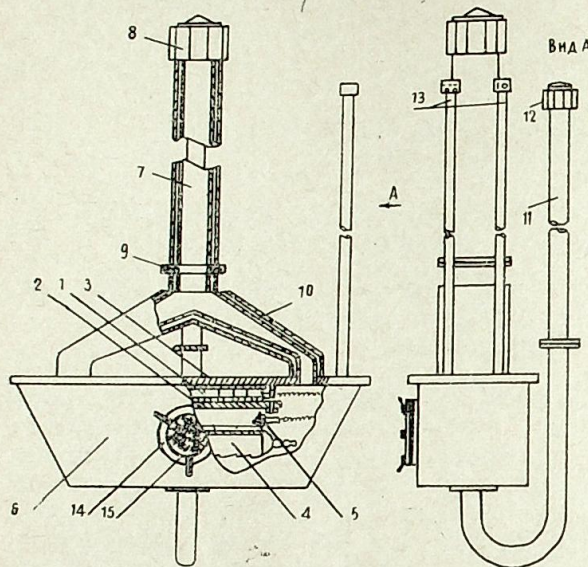


Схема подводного полупроводникового термоэлектрического генератора на газовом топливе для катодной защиты морских оснований: 1—термобатарея; 2—горячая плита; 3—холодная плита; 4—горелка инфракрасного излучения; 5—запальные свечи; 6—металлический кожух; 7—вытяжная труба; 8—12 ветро-дождезащитное устройство; 9—фланцы; 10—дымоход; 11—входная труба; 13—труба; 14—иллюминатор; 15—плоское стекло.

кой конструкции генератора с естественным водяным охлаждением на газовом топливе, предназначенной для работы под водой и представляющей собой комплекс газовой горелки инфракрасного излучения и термоэлектрической батареи, заключенных в металлическую герметическую камеру.

При конструировании ТЭГГ-ПВ решен ряд сложных технических задач, связанных с охлаждением холодных спаев генератора, устранением конденсаций водяных паров внутри камеры, системой дистанционного зажигания газогорелочного устройства и автоматической подачи газа, системой естественной тяги, которая необходима для нормальной работы инфракрасных газовых горелок.

Принцип действия ТЭГГ-ПВ следующие: термоэлектрическая батарея зажата между двумя медными пластинами, одна из которых разогревается газовой горелкой, а другая одновременно является верхней крышкой ТЭГГ-ПВ и при погружении в воду охлаждается ею.

Предлагаемый ТЭГГ-ПВ схематически изображен на рисунке. Ос-

новной узел генератора—термобатареи (1) состоит из 120 полупроводниковых элементов размерам $10 \times 10 \times 5$ каждый. Элементы изготовлены из сплавов Bi-Te-Se и Bi-Te-Sb методом горячего прессования. Термоэлектрическая эффективность $2 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$. Ветви термоэлементов последовательно соединены медными коммутационными пластинками. Собственно генератор состоит из четырех последовательно соединенных батарей размером $130 \times 130 \text{ мм}$ каждая. Термоэлектрическая батарея зажата между двумя пластинами (3—холодная, 2—горячая) и электроизолирована от них. Горячая плита разогревается двумя беспламенными горелками инфракрасного излучения (4) и ввиду ее большой теплопроводности обеспечивает равномерное распределение температуры по всей площади горячих спаев.

Для работы генератора под водой и обеспечения естественного водяного охлаждения термобатарея и газовая горелка заключены в металлический кожух (6)—герметичную камеру. Выход продуктов сгорания осуществляется через вытяжную трубу (7), которая заканчивается ветро-дождезащитным устройством (8). Для поддержания горения в нижнюю часть камеры естественно поступает свежий воздух через входную трубу (11), имеющую на конце ветро-дождезащитное устройство (12). Входная и вытяжная трубы разборные и для соединений имеют фланцы (9), между которыми проложены резиновые прокладки. Таковые выводы от термоэлектрических батарей на поверхность осуществляются проводом ПШ через трубу (13). Ввод газа осуществляется через трубу (13), посредством гибкого шланга с внутренним диаметром 12 мм. На передней стенке имеется иллюминатор (14) с плоским стеклом (15) и резиновой прокладкой. Вытяжная труба (7) и дымоход (10) одновременно снаружи омываются водой, а с внутренней стороны нагреваются продуктами сгорания газа. Поэтому для исключения конденсации водяных паров вытяжная труба (7) и дымоход (10) изготовлены с двойными стенками.

В процессе эксплуатации ТЭГГ-ПВ предусматривается периодическое включение и выключение горелки. Поэтому конструкция имеет дистанционную систему зажигания газовых горелок, состоящих из запальных свеч (5) и магнето. С помощью магнето на свечах (5) создается искра, которая легко воспламеняет газ, поступающий в камеру.

Система автоматики обеспечивает безопасность работы газогорелочной системы и при нарушении нормальной работы горелки сразу прекращается подача газа в камеру. Генератор погружается в воду и жестко крепится на любое основание. Таковые выводы, термодары для контроля работы термобатареи и горелок, а также гибкий шланг для подачи газа подсоединяются к приборному щиту, который находится на поверхности. Газ может быть проведен как от магистральных линий, имеющих в большом количестве на морских нефтяных промыслах Азербайджана, так и от индивидуального газового баллона. С помощью дистанционной системы зажигания газовые горелки зажигаются и регулируется их работа.

Результаты испытаний показали следующее:

1) опытная конструкция ТЭГГ-ПВ (модуль) в погруженном состоянии работает нормально, удовлетворяет предъявляемым к нему техническим требованиям;

2) теплосъем с холодных спаев термобатареи, омываемой водой, позволяет создавать необходимый перепад температуры на спаев термобатареи $\Delta T = 120 \div 140^\circ\text{C}$;

3) система зажигания с помощью запальных свеч и магнето газовых горелок работала успешно.

Следует отметить, что в ТЭГах подобного типа наиболее перспек-

тивно использование каскадных термобатарей, что резко повысит к.п.д. устройства и главный их параметр—электрическую мощность на единицу веса.

Заключение

В подводном термоэлектрическом генераторе отсутствуют радиаторы для охлаждения холодных спаев, что намного упрощает конструкцию и уменьшает вес. Охлаждение спаев производится непосредственно морской водой. При этом намного улучшаются эксплуатационные характеристики ТЭГГ-ПВ. В связи с достаточной стабильностью температуры морской воды на глубинах 3—7 м резкие изменения метеорологических условий не сказываются на работе генератора. Опытная конструкция ТЭГГ-ПВ в настоящее время установлена для промышленных испытаний на коррозионной станции института „Гипроморнефть“ на Южной эстакаде НПУ „Артемнефть“.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иорданашвили Е. К. Термоэлектрические источники питания. Изд-во „Советское радио“, 1968.

Поступило 20. V 1969

Б. Б. Абдуллаев, А. З. Гулиев, Е. М. Тухтаинов,
К. Ш. Гәбрәманов

Фәрди дənиз буругларыны коррозиядан горумаг үчүн
суалты газ јаначаглы јарымкечиричи термоелектрик
кенераторун иши вə конструксиясынын хүсусијјəтлєри

ХҮЛАСӘ

Мəгалəдə фəрди дənиз буругларыны коррозиядан горумаг үчүн газ јаначаглы јарымкечиричи суалты термоелектрокенераторун ишлəниб һазырланмасындан бəһс едилмишдир.

„ТГГ-ПВ“-нин конструксиясыны вермəк үчүн ашағыдакы мурəккəб техники мəсəлəлəр һəлл едилмишдир:

- 1) кенераторун сојуг лəһиминин сојудулмасы;
- 2) камеранын дахилиндə су бухарларынын конденсасиясыны арадан галдырмаг;
- 3) газјандырма гурғусунда вə газы автоматик вермəк үчүн дистансија јандырма системи.

УДК 669 01: 537 312.62

Г. Ш. ГАСАНОВ, Я. Д. ВИШНЯКОВ

ВЛИЯНИЕ ДЕФЕКТОВ УПАКОВКИ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ

В материалах с очень низкой энергией дефектов упаковки (д. у.) значительная концентрация д. у. создается холодной деформацией. Измеряя избыточное удельное электросопротивление таких деформированных образцов, можно определить удельное электросопротивление д. у. Произвести такого типа эксперименты относительно легко, но трудно получить точную величину плотности д. у. в массивных образцах.

На основе литературных данных можно сказать, что все расчеты, связанные с вычислением электросопротивления д. у., пока еще в значительной мере приближенные, и по этой причине экспериментальные величины электросопротивления для единичного д. у., включая и данные, полученные для закаленных образцов, также являются лишь ориентировочными. Поэтому в большинстве экспериментальных работ прежде всего установлена качественная связь между изменением вероятности образования д. у. α и электросопротивлением.

В данной работе также делалась попытка установить непосредственно качественную связь между изменением вероятности образования д. у. α и деформационным приростом электросопротивления. В качестве объекта исследования были взяты медь и ее сплавы с цинком (23,52; 27,3; 31,4; 33,4 вес. % Zn), галлием (0,01; 0,02; 0,1; 15; 18 вес. % Ga) и германием (0,01; 0,02; 0,1; 5; 8 вес. % Ge). Метод приготовления сплавов и образцов описан в работе [1]. Электросопротивление образцов измерялось компенсационным методом. При этом относительная ошибка составляла $1 \div 1,2\%$.

Рассмотрим результаты для чистой меди и ее сплавов с малым содержанием галлия и германия. В работе [1] показано, что малые количества галлия и германия в сплаве с медью увеличивают склонность ее к образованию д. у. Следует также ожидать увеличения прироста электросопротивления после деформации в малолегированных сплавах меди по сравнению с чистой медью, так как д. у. увеличивают электросопротивление металла. Результаты измерений, приведенные в табл. 1, показывают, что прирост электросопротивления в действительности увеличивается при переходе от чистой меди к сплавам.

На рис. 1 представлены зависимости удельного электросопротивления от температуры отжига деформированного и закаленного образ-

цов чистой меди (характер изменения удельного электросопротивления сплавов с малым содержанием галлия и германия при этих обработках подобен характеру изменения указанных параметров в чистой меди).

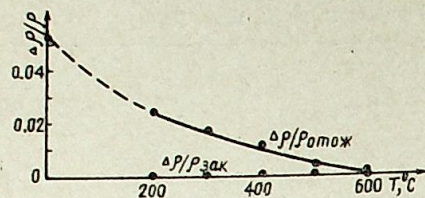


Рис. 1. Зависимость прироста удельного электросопротивления меди, обусловленного деформацией ($\Delta\rho = \rho_{\text{деф}} - \rho_{\text{отож}}$) и закалкой ($\Delta\rho = \rho_{\text{т}} - \rho_{\text{зак}}$), от температуры отжига.

Хотя следить за изменением вероятности образования д. у. α в чистой меди и ее разбавленных сплавах при отжиге деформированного образца было невозможно из-за малости величины α , тем не менее очевидно, что спад электросопротивления при температуре отжига 200°C (выдержка при каждой температуре один час) обусловлен рекристаллизационным отжигом (температура начала и конца рекристаллизации для чистой меди соответственно равна 90 и 210°C [2]) и уходом вакансий.

ρ_1 — удельное сопротивление отожженного образца, ρ_2 — удельное сопротивление деформированного образца на 50% после отжига, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, α — вероятность образования дефектов упаковки после деформации отожженного образца.

Величины удельного электросопротивления и вероятности образования дефектов упаковки сплавов на основе меди

Легирующий элемент	Концентр., вес. %	ρ_1	ρ_2	$\Delta\rho$	α , %
Цинк	0	1,72	1,79	0,07	0,6
	23,52	5,62	6,45	0,83	2,1
	27,3	6,40	7,22	0,82	2,3
	31,4	6,50	7,40	0,9	2,5
	33,4	6,90	8,10	1,1	2,5
Галлий	0,01	1,73	1,80	0,07	0,5
	0,02	1,73	1,84	0,11	0,9
	0,1	1,81	2,05	0,24	0,9
	15	12,29	15,32	3,03	3,0
	18	14,74	18,40	3,66	2,9
Германий	0,01	1,76	1,84	0,08	1,2
	0,02	1,78	1,90	0,12	1,0
	0,1	1,80	2,24	0,44	1,0
	5	16,63	17,43	0,80	1,8
	8	21,85	23,81	1,96	2,9

Вообще говоря, поскольку при холодной деформации точечные дефекты, дислокации и д. у. возникают в кристалле одновременно, то качественная интерпретация таких экспериментов весьма сложна. Температурный интервал, в котором исчезают дефекты определенного типа, зависит от подвижности последних. Подвижность точечных дефектов резко увеличивается с повышением температуры [3]. Результаты работы [4] показывают, что вакансии, созданные в поликристаллической меди деформацией при температуре — 183°C, быстро отжигаются при 20°C, тогда как в дислокационной структуре при этом существенного изменения не происходит. Дислокации отжигаются при более высоких температурах по сравнению с вакансиями. Поэтому уменьшение электросопротивления деформированного образца при отжиге при сравнительно высоких температурах в основном связано с уменьшением плотности дислокаций и д. у.

Закалка увеличивает, по отношению к отожженному состоянию образца, величину электросопротивления меди (рис. 2). Однако отжиг после закалки (рис. 1) и старение (рис. 2) при комнатной температуре и при 100°C не изменяли электросопротивления закаленной меди. Отсутствие зависимости электросопротивления закаленной меди от температуры отжига после закалки, а также при старении, по-видимому, связано с тетраэдрическими дефектами упаковки, образующимися в случае закалки при высоких температурах и последующем отжиге при пониженных [5—7]. Дело в том, что при низкотемпературном отжиге в ряде металлов, в том числе и в меди, часть вакансий, скапливаясь, образует петли дислокаций и тетраэдрические д. у. Последние дают некоторый вклад в электросопротивление. Тетраэдры из д. у. в меди термически устойчивы и сохранялись при отжиге до 725°C [7].

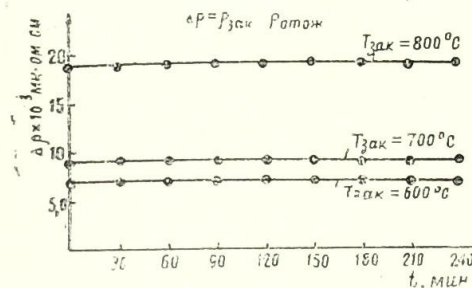


Рис. 2. Зависимость прироста удельного электросопротивления закаленной меди от времени выдержки при температуре отжига 100°C.

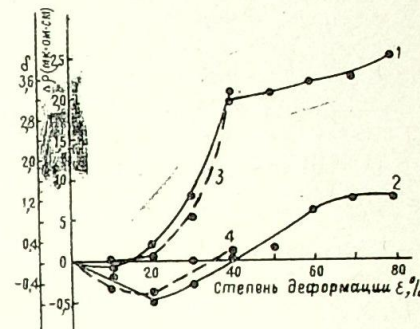


Рис. 3. Зависимость удельного электросопротивления и вероятности образования дефектов упаковки от степени деформации: 1, 3 — ($\Delta\rho$) и (δ), Cu—115 вес. % Ga; 2, 4 — ($\Delta\rho$) и (δ), Cu—8 вес. % Ge.

По мере роста валентности и количества легирующих элементов влияние д. у. на электросопротивление становится более очевидным. В сплавах медь—цинк, медь—галлий (15 и 18% Ga) и медь—германий (5 и 8% Ge) изменение прироста электросопротивления $\Delta\rho$ с составом в случае деформации отожженного образца хорошо коррелирует с изменениями вероятности образования д. у. α (табл.). Эти результаты свидетельствуют о том, что наличие д. у. в сплавах Cu—Zn, Cu—Ga и Cu—Ge дает существенный вклад в их электросопротивление.

Привлекают внимание зависимости прироста электросопротивления образцов с 15% Ga и 8% Ge (рис. 3) от степени деформации. Кажется, что при малой степени деформации эти сплавы становятся более совершенными по сравнению с состоянием их после отжига. Рентгенографическое исследование разности отношений синусов $\delta = [(\sin \theta_{200} / \sin \theta_{111})_{\text{отож}} - (\sin \theta_{200} / \sin \theta_{111})_{\text{деф}}]$, величина которой прямо пропорциональна вероятности образования д. у. α от степени деформации, показывает, что изменение электросопротивления этих сплавов в данном случае в основном обусловлено наличием в них д. у.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишняков Я. Д., Гасанов Г. Ш., Уманский Я. С., Изв. АН Азерб. ССР, физ.-техн. и матем. наук*, 1967 № 2.
2. Вишняков Я. Д., Уманский Я. С., Хаймович В. С. ФММ, 1966, 22, 2.
3. Дамаск А., Дж. Динс. Точечные дефекты в кристаллах. Изд-во „Мир“, 1966.

4. Дамаск А., Дж. Динс (см. 3, стр. 212).
5. Bell W. „Lattice Defects in quenched metals“, США, 1965, стр. 15.
6. Bell W. „Lattice Defects in quenched metals“, США, 1965, стр. 739.
7. Clarebrough L. M. „Philos Mag“, 1966, 13, 126.

Поступило 12. III 1969

Б. Ш. Насанов, Л. Д. Вишнјаков

Дүзүлүш дефектинин електрик кечирмәжә тә'сири

ХҮЛАСӘ

Дүзүлүш дефектинин електрик кечирмәжә тә'сири нәзәри олараг индијә кими там һәлл едилмәмишдир. Буна көрә дә дүзүлүш дефектинин әмәләкәлмә еһтималы илә електрик кечирмә арасындакы асылылыгы јалныз кејфијјәтчә мүйјән етмәк олар.

Бу ишдә мис-синк, мис-галлиум вә мис-корманиум хәлитәләриндә дүзүлүш дефекти илә електрик мугавимәти арасындакы мүнәсибәт тәдгиг едилмишдир. Тәдгигатлар көстәрмишдир ки, адларыны чәкдијимиз хәлитәләрдә деформасија заманы електрик мугавимәтинин артмасынын башлыча сәбәби дүзүлмүш дефектинин әмәлә кәлмәси илә әләгәдардыр.

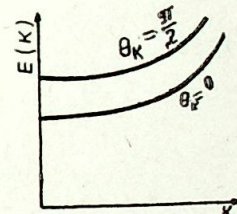
АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1969, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 4

Ю. М. СЕИДОВ, М. Н. АБДУЛЛАЕВ

СПИН-ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ ПРИМЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ (УЧЕТ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОБМЕННОЙ МОДЕЛИ)

Проблема примесных состояний в магнитоупорядоченных кристаллах исследовалась многими авторами [1—6]. Благодаря сильному возмущению, произведенному примесью, вследствие замещения в энергетическом спектре идеального ферро- и антиферромагнетика появляются дискретные уровни энергии, которые могут попасть в энергетическую полосу идеального кристалла (виртуальное состояние) или оказаться вне этой полосы (локализованное состояние). Виртуальные уровни могут значительно влиять на термодинамику, локализованные же живут долго, но обычно на термодинамике мало сказываются, так как для их возбуждения требуется значительная энергия. Примесные состояния в ферро- и антиферромагнетиках [1, 2, 3, 6] были исследованы различными авторами, но ими не учитывалась роль дипольного взаимодействия. Настоящая статья посвящена построению спин-волновой теории примесного состояния в гайзенберговском ферромагнетике с учетом диполь-дипольного взаимодействия, а также в антиферромагнетике (ферромагнитный случай).



В идеальных ферромагнетиках учет влияния диполь-дипольного взаимодействия на энергетический спектр приводит к появлению энергетической щели. Причем величина этой щели мала и зависит от углов между направлением намагниченности и волновым вектором спиновой волны. На рисунке показана зависимость энергии от волнового числа K , определяемая выражением (7), или так называемый спектр спиновых волн.

При введении примеси в идеальный материал в спектре, кроме уровней, попавших в непрерывный спектр, могут появиться примесные состояния, попавшие в энергетическую щель. Так как для возбуждения этих уровней не требуется большой энергии, то они могут вносить свои вклады в термодинамику при низких температурах. Эти примесные уровни могут играть роль и в других процессах, например, в ферромагнитном резонансе и т. д.

Гамильтониан примесной задачи с учетом диполь-дипольного взаимодействия может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}
H &= H_{06} + H_{\text{дип-дип}}, \\
H_{06} &= -I \sum_n \sum_{\Delta} \vec{S}_n \vec{S}_{n+\Delta} + 2I \sum_{\Delta} \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta} - 2I' \sum_{\Delta} \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta}, \\
H_{\text{дип-дип}} &= g^2 \mu^2 \sum_n \sum_{\Delta} R_{n,n+\Delta}^{-5} \{ R_{n,n+\Delta}^2 \vec{S}_n \vec{S}_{n+\Delta} - 3 (\vec{R}_n \vec{S}_n) (\vec{R}_{n+\Delta} \vec{S}_{n+\Delta}) \} - \\
&- 2 g^2 \mu^2 \sum_{\Delta} R_{1,1+\Delta}^{-5} \{ R_{1,1+\Delta}^2 \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta} - 3 (\vec{R}_1 \vec{S}_1) (\vec{R}_{1+\Delta} \vec{S}_{1+\Delta}) \} + \\
&+ 2 g^2 \mu^2 \sum_{\Delta} R_{1,1+\Delta}^{-5} \{ R_{1,1+\Delta}^2 \vec{S}_1 \vec{S}_{1+\Delta} - 3 (\vec{R}_1 \vec{S}_1) (\vec{R}_{1+\Delta} \vec{S}_{1+\Delta}) \}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Здесь суммирование по n ведется по всем узлам решетки, относительно Δ — по узлам, ближайшим к данному, 1 — примесный индекс, S_i — оператор спина примесного узла.

После перехода к операторам Бозе по формуле Гольштейна-Примакова в спин-волновом приближении получаем гамильтониан в виде:

$$\begin{aligned}
H_{06} &= IS \sum_n \sum_{\Delta} \{ a_n^+ a_n + a_{n+\Delta}^+ a_{n+\Delta} - a_n a_{n+\Delta}^+ - a_n^+ a_{n+\Delta} \} + \\
&+ 2IS Z \epsilon_1 a_1^+ a_1 + 2IS \rho_1 \sum_{\Delta} a_{1+\Delta}^+ a_{1+\Delta} - 2IS \gamma \sum_{\Delta} (a_1 a_{1+\Delta}^+ + a_1^+ a_{1+\Delta}), \\
H_{\text{дип-дип}} &= 2S \sum_n \sum_{\Delta} M_{n,n+\Delta} (a_n a_{n+\Delta}^+ + a_n^+ a_{n+\Delta}) - S \sum_n \sum_{\Delta} N_{n,n+\Delta} (a_n^+ a_n + \\
&+ a_{n+\Delta}^+ a_{n+\Delta}) - 2S \sum_n \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^- a_n a_{n+\Delta} - 2S \sum_n \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^+ a_n^+ a_{n+\Delta}^+ - \\
&- 2S \epsilon_2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta} a_1^+ a_1 - 2S \rho_2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta} a_{1+\Delta}^+ a_{1+\Delta} + \\
&+ 4S \gamma_2 \sum_{\Delta} M_{1,1+\Delta} (a_1 a_{1+\Delta}^+ + a_1^+ a_{1+\Delta}) + 4S \beta^- \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^- a_1 a_{1+\Delta} + \\
&+ 4S \beta^+ \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^+ a_1^+ a_{1+\Delta}^+.
\end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
M_{n,n+\Delta} &= \frac{1}{4} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} (\alpha_{n,n+\Delta}^2 + \beta_{n,n+\Delta}^2) \right\}; \\
N_{n,n+\Delta} &= \frac{1}{2} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} (1 - 3\gamma_{n,n+\Delta}^2); \\
L_{n,n+\Delta}^{\pm} &= \frac{1}{2} g^2 \mu^2 R_{n,n+\Delta}^{-3} \left\{ \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} (\alpha_{n,n+\Delta}^2 - \beta_{n,n+\Delta}^2) \pm i \alpha_{n,n+\Delta} \beta_{n,n+\Delta} \right] \right\}; \\
\epsilon_1 &= \frac{I'}{I} - 1; \quad \rho_1 = \frac{I'}{I} \frac{S'}{S} - 1; \quad \gamma_1 = \frac{I'}{I} \left(\frac{S'}{S} \right)^{1/2} - 1; \\
\epsilon_2 &= \frac{N'_{1,1+\Delta}}{N_{1,1+\Delta}} - 1; \quad \rho_2 = \frac{N'_{1,1+\Delta}}{N_{1,1+\Delta}} \frac{S'}{S} - 1; \quad \gamma_2 = \frac{M'_{1,1+\Delta}}{M_{1,1+\Delta}} \left(\frac{S'}{S} \right)^{1/2} - 1; \\
\beta^- &= \frac{L'_{1,1+\Delta}}{L_{1,1+\Delta}} \left(\frac{S'}{S} \right)^{1/2} - 1; \quad \beta^+ = \frac{L'_{1,1+\Delta}}{L_{1,1+\Delta}} \left(\frac{S'}{S} \right)^{1/2} - 1.
\end{aligned}$$

Введем функцию Грина:

$$\begin{aligned}
G_{nm}^1(t-t') &= \ll a_n(t) / a_m^+(t') \gg, \\
G_{nm}^2(t-t') &= \ll a_n^+(t) / a_m^+(t') \gg,
\end{aligned} \quad (3)$$

тогда получим уравнение движения для соответствующих функций Грина в энергетическом представлении [8], т. е.

$$\begin{aligned}
\{E - E_0\} G_{nm}^1(E) &+ 2S \sum_{\Delta} (I - 2M_{n,n+\Delta}) G_{n+\Delta,m}^1(E) + \\
&+ 4S \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^+ G_{n+\Delta,m}^2(E) - 2S \sum_p V_{np}^1 G_{pm}^1(E) - \\
&- 2S \sum_p V_{np}^{2(+)} G_{pm}^2(E) = \frac{1}{2\pi} \delta_{nm},
\end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\{E + E_0\} G_{nm}^2(E) &- 2S \sum_{\Delta} (I - 2M_{n,n+\Delta}) G_{n+\Delta,m}^2(E) - \\
&- 4S \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^- G_{n+\Delta,m}^1(E) + 2S \sum_p V_{np}^1 G_{pm}^2(E) + 2S \sum_p V_{np}^{2(-)} G_{pm}^1(E) = 0
\end{aligned}$$

где

$$E_s = 2S \sum_{\Delta} (I - N_{n,n+\Delta}),$$

δ_{nm} — символ Кронекера,

$$\begin{aligned}
V_{np}^1 &= I \left\{ \epsilon_1 z \delta_{n1} \delta_{p1} + \rho_1 \sum_{\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p,1+\Delta} - \gamma_1 \sum_{\Delta} (\delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1} + \right. \\
&+ \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}) \left. \right\} - \epsilon_2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta} \delta_{n1} \delta_{p1} + \rho_2 \sum_{\Delta} N_{1,1+\Delta} \delta_{n,1+\Delta} \delta_{p,1+\Delta} - \\
&- 2\gamma_2 \sum_{\Delta} M_{1,1+\Delta} (\delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1} + \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}), \\
V_{np}^{2(+)} &= 2\beta^+ \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^+ (\delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1} + \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}), \\
V_{np}^{2(-)} &= 2\beta^- \sum_{\Delta} L_{1,1+\Delta}^- (\delta_{n,1+\Delta} \delta_{p1} + \delta_{n1} \delta_{p,1+\Delta}).
\end{aligned}$$

При $V_{np}^1 = V_{np}^{2(+)} = V_{np}^{2(-)} = 0$ система уравнений (4) переходит в уравнение для функции Грина идеального ферромагнитного кристалла, т. е.

$$\begin{aligned}
\{E - E_s\} G_{nm}^{01}(E) &+ 2S \sum_{\Delta} (I - 2M_{n,n+\Delta}) G_{n+\Delta,m}^{01}(E) + \\
&+ 4S \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^+ G_{n+\Delta,m}^{02}(E) = \frac{1}{2\pi} \delta_{nm}, \\
\{E + E_s\} G_{nm}^{02}(E) &- 2S \sum_{\Delta} (I - 2M_{n,n+\Delta}) G_{n+\Delta,m}^{02}(E) - \\
&- 4S \sum_{\Delta} L_{n,n+\Delta}^- G_{n+\Delta,m}^{01}(E) = 0.
\end{aligned} \quad (5)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
G_{nm}^{01}(E) &= \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{2\pi} \frac{E + (E_s - \Omega_k)}{E^2 - (E_s - \Omega_k)^2 + (4S)^2 |L_k^+ L_k^-|} e^{ik(n-m)}, \\
G_{nm}^{02}(E) &= \frac{1}{N} \sum_k \frac{1}{2\pi} \frac{4S L_k^-}{E^2 - (E_s - \Omega_k)^2 + (4S)^2 |L_k^+ L_k^-|} e^{ik(n-m)},
\end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_k &= \sum_{\Delta} (I - 2M_{n,n+\Delta}) e^{ik\Delta}, \\
L_{nm}^{\pm} &= \frac{1}{N} \sum_k L_k^{\pm} e^{ik(n-m)}.
\end{aligned}$$

Приравнивая нулю знаменатели последнего выражения, можно определить спектр элементарных возбуждений магнонов с учетом диполь-дипольного взаимодействия в спин-волновом приближении, т. е.

$$E^2 - (E_s - \Omega_k)^2 + (4S)^2 |L_k^+ L_k^-| = 0. \quad (7)$$

Функция Грина для примесной задачи будет определяться из матричного уравнения

$$(\hat{V}_0 + \hat{V}) \begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \hat{I}, \quad (8)$$

здесь V — возмущение.

При $V=0$ из уравнения (8) получаем уравнение для идеального кристалла, т. е.

$$\hat{I}_0 \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \hat{I}. \quad (9)$$

С помощью (8) и (9) функция Грина для примесной задачи может быть выражена через функции Грина для идеального ферромагнетика, с учетом диполь-дипольного взаимодействия, посредством следующего уравнения в матричной форме:

$$(\hat{V}_0 + \hat{V}) \begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где

$$\hat{V}_0^{-1} = 2\pi \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} & \hat{G}^{02} \\ -\hat{G}^{02} & \hat{G}^{01} \end{pmatrix}; \quad \hat{V} = -2S \begin{pmatrix} \hat{V}^1 & \hat{V}^{2(+)} \\ -\hat{V}^{2(-)} & -\hat{V}^1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения спектра элементарных возбуждений магнонов в примесной задаче используем уравнение (10), записанное в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \end{pmatrix}_{nm} = \sum_p \frac{[(\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V})^{-1}]_{np}}{\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|} \begin{pmatrix} \hat{G}^{01} \\ \hat{G}^{02} \end{pmatrix}_p. \quad (11)$$

Из уравнения

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}| = 0 \quad (12)$$

легко можно получить спектр элементарных возбуждений, связанных с примесью в ферромагнетиках.

Можно показать, что основной детерминант (11) разбивается на произведение множителей, число которых определяется числом ближайших соседей (z). При $z=2$

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}| = \det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 \cdot \det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_2. \quad (13)$$

Этот результат получается также, если учесть точечную симметрию кубической решетки. В этом случае детерминант разбивается на произведение множителей, отвечающих неприводимым представлениям группы. Анализ полученных результатов возьмем из выражения (13).

Спектр дополнительных полюсов

Спектр дополнительных полюсов функции Грина, связанных с примесью в ферромагнитных кристаллах, определяется уровнями

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = 0, \quad \det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_2 = 0 \quad (14)$$

как было показано нами ранее. При $z=2$ эти уравнения имеют вид:

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = \{(a_{22} - a_{23})(a_{55} - a_{56}) - (a_{25} - a_{26})(a_{52} - a_{53})\}, \quad (15)$$

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_2 = \{a_{11}(a_{22} + a_{23}) - 2a_{12}a_{21}\} \{a_{44}(a_{55} + a_{56}) - 2a_{45}a_{54}\} - 2\{a_{11}a_{24} - a_{14}a_{21}\} \{a_{42}(a_{55} + a_{56}) - a_{45}(a_{52} + a_{53})\} + \{a_{11}(a_{25} + a_{26}) - 2a_{15}a_{21}\} \{2a_{42}a_{54} - a_{44}(a_{52} + a_{53})\} + \{2a_{12}a_{24} - a_{14}(a_{22} + a_{23})\} \{a_{41}(a_{55} + a_{56}) - 2a_{45}a_{51}\} - 2\{a_{12}(a_{25} + a_{26}) - a_{15}(a_{22} + a_{23})\} \{a_{41}a_{51} - a_{44}a_{51}\} + \{a_{14}(a_{25} + a_{26}) - 2a_{15}a_{24}\} \{a_{41}(a_{52} + a_{53}) - 2a_{42}a_{51}\}. \quad (16)$$

Здесь a_{nm} — матричные элементы, определяемые следующим образом:

$$a_{nm} = (\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V})_{nm}^{-1}. \quad (17)$$

Для простоты исследуем уравнение (15) или (16).

Согласно (6) такое уравнение можно записать в виде

$$\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = \{1 + V_{22}^1 (G_{22}^{01} - G_{23}^{01})\} \{1 - V_{22}^1 (\hat{G}_{22}^{01} - \hat{G}_{23}^{01})\} - (V_{22}^1)^2 (G_{22}^{02} - G_{23}^{02}) (\hat{G}_{22}^{02} - \hat{G}_{23}^{02}). \quad (18)$$

Произведя суммирование по ближайшим соседям и ограничивая только линейный член относительно $V_{22}^1 = 2(I'S' - IS) - 2(N'S' - NS)$ (при $\frac{I'}{I} \ll 1, \frac{N'}{N} \ll 1$) уравнение (18) можно записать в более простом виде:

$$1 + V_{22}^1 \frac{4}{N} \sum_k \frac{\det |\hat{I} + \hat{V}_0^{-1} \hat{V}|_1 = 4S [(I - N) - (I - 2M) \cos \kappa] \sin^2 \kappa}{E^2 - (4S)^2 [(I - N) - (I - 2M) \cos \kappa]^2 - 4|L^+ L^-| \cos^2 \kappa}. \quad (19)$$

С помощью последнего уравнения можно определить расположение локальных уровней в ферромагнитном кристалле относительно щели при $\kappa=0$. Из уравнения (19) видно, что величина энергетической щели в ферромагнитном кристалле при $\kappa=0$ определяется следующим образом:

$$E = 4S \{(2M - N)^2 - 4|L^+ L^-|\}^{1/2}. \quad (20)$$

Величина же верхней границы полосы спектра ($\kappa = \frac{\pi}{2}$)

$$E = 4S(I - N). \quad (21)$$

Произведя интегрирование в (19), можно получить значение энергетических уровней, попавших внутрь щели. Это можно делать в числовой форме, так как точное вычисление интеграла (19) приводит к сложным уравнениям для определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfram T. J. Gollaway phys. rev 130, 2207, (1963).
2. Изюмов Ю. А., Медведев М. В. ЖЭТФ, 48, 574, 1965.
3. Гусейнов Н. Г., Сеидов Ю. М. ЖЭТФ, 51, 1084, 1966.
4. Изюмов Ю. А., Медведев М. В. ЖЭТФ, 51, 517, 1966.
5. Изюмов Ю. А., Медведев М. В. ФТТ, 9, 567, 1967.
6. Lovesey S. W. Proc. phys. soc. vol. 1, 102, 1968.
7. Holstein T., Primakoff H. Phys. rev., 58, 1098, 1940.
8. Тябликов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М., 1965.

Поступило 20. V 1969

Магнит низамлы кристалларда (дипол-дипол гаршылыгы тә'сирини нәзәрә алмагла) ашгар һалларынын спин далға нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Һейзенбергин мүбадилә модели әсасында (дипол-дипол гаршылыгы тә'сирини нәзәрә алмагла) ферромагнит кристалларында ашгар һалларынын спектри верилмишдир. Һесаблама заманы ики заманлы Грин функцијасы техникасындан истифадә едилмишдир. Дипол-дипол гаршылыгы тә'сиринин ашгар һалларына тә'сирини ајдын кәстәрмәк үчүн һесабламанын ахырында хүсуси һала (хәтти кристала) бахылмышдыр.

У. М. ИМАНОВ, В. М. НАГИЕВ, А. А. ДЖАББАРОВ

**НЕСПАРЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ И НОСИТЕЛИ ЗАРЯДА В
ОКСИДНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СТЕКЛАХ НА ОСНОВЕ
ОКИСЛОВ ВАНАДИЯ И ФОСФОРА**

В настоящее время широко обсуждаются вопросы о роли неспаренных электронов в электропроводности кристаллических и стеклообразных полупроводниковых соединений на основе окислов переходных металлов. Методом электронного парамагнитного резонанса была исследована структура стекол на основе окислов ванадия и фосфора и дано качественное объяснение механизмов электропроводности в работах [1, 2, 3]. Авторы статьи [3] установили дырочный механизм проводимости в стекле при 35 мол.% P_2O_5 . В работе [1] подчеркнуто, что стекла системы $V_2O_5 - P_2O_5$ обладают электронной проводимостью при более высоких содержаниях P_2O_5 . Для выяснения этих и ряда других вопросов в настоящей работе проводились комплексные исследования электропроводности, термо-э. д. с. и спектров ЭПР стекол системы $V_2O_5 - P_2O_5$ с различным процентным содержанием P_2O_5 . Это позволило получить количественную связь между концентрациями носителей заряда и неспаренных электронов, а также между энергией активации и шириной линии ЭПР.

Исследования электрических свойств и спектров ЭПР проводились на тщательно дегазированных образцах путем длительного прогрева в высоком вакууме. Следует отметить, что для измерения термо-э. д. с. и концентрации неспаренных электронов мы брали стекла одного состава. Для исследования электропроводности и термо-э. д. с. был использован электрометрический усилитель с большим коэффициентом усиления. Измерения проводились в температурном интервале 300—625°K. Спектр ЭПР снимался на установке РЭ-1301 при комнатной и азотной температурах.

В стекле системы $V_2O_5 - P_2O_5$ при содержании 5 мол.% P_2O_5 наблюдается спектр ЭПР V^{4+} с разрешенными сверхтонкими компонентами ($g_{\parallel} = 1,91 \pm 0,01$; $g_{\perp} = 1,97 \pm 0,01$; $A_{\parallel} = 197 \pm 5$ и $A_{\perp} = 75 \pm 5$ э) (рис. 1). А при содержании 20÷55 мол.% наблюдается одна широкая изотропная линия с $g_{эф} = 1,96 \pm 0,01$ (рис. 2), где с увеличением содержания P_2O_5 интенсивность сигнала ЭПР V^{4+} растет только до 40 мол.%. При дальнейшем увеличении содержания P_2O_5 от 40 до 55 мол.% интенсивность падает.

Уменьшение интенсивности сигналов ЭПР с увеличением содержания ионов V^{4+} связано с тем, что при больших концентрациях P_2O_5

(более 40 мол.%) большая часть ионов V^{4+} объединяется в связанные обменными силами группы, внутри которых действуют быстрые релаксационные процессы, ограничивающие возможность наблюдения сигнала от ионов, входящих в эти группы [3]. Спектр ЭПР в стекле, содержащем 55 мол. % P_2O_5 , состоит из

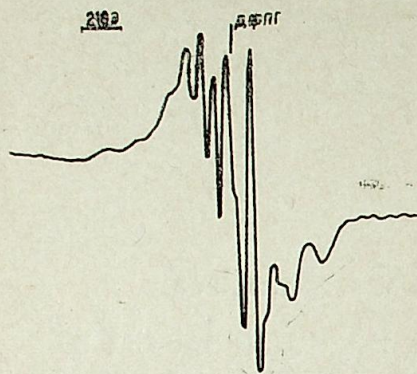


Рис. 1. Линия ЭПР V^{4+} при 77°K в стекле 95 $V_2O_5 \cdot 5P_2O_5$

двух частей: широкая часть линии ЭПР обусловлена „изолированными“ ионами, не входящими в состав таких групп, а узкая часть линии — сильным обменным взаимодействием (рис. 2, е). Концентрация парамагнитных центров определялась путем двойного графического интегрирования первой производной этих линий. В качестве эталонного образца использовались навески монокристаллов $CuSO_4 \cdot 5H_2O$. Полученные результаты приведены в таблице.

В кристаллических образцах системы $V_2O_5 - P_2O_5$ (содержание P_2O_5 от 5 до 12 мол. %), полученных путем

термической обработки, ширина линии ЭПР, как было обнаружено в работе [2], сильно зависит от температуры, т. е. происходят сильные релаксационные процессы. Такие процессы могут быть приписаны иону V^{4+} в малоискаженном тетраэдре, где g-фактор близок к 2. Все исследованные нами образцы имели отрицательные значения для коэффициента термо-э. д. с. α , причем с уменьшением V_2O_5 (P_2O_5 — абсолютные значения α уменьшаются). Для всех образцов температурная зависимость α имеет характер насыщения. В интервале 300 ÷ 375°K α растет, а в дальнейшем остается постоянной (табл.).

Как известно, термо-э. д. с. невырожденного полупроводника связана с концентрацией носителей заряда выражением $\alpha = \frac{\kappa}{2} (A -$

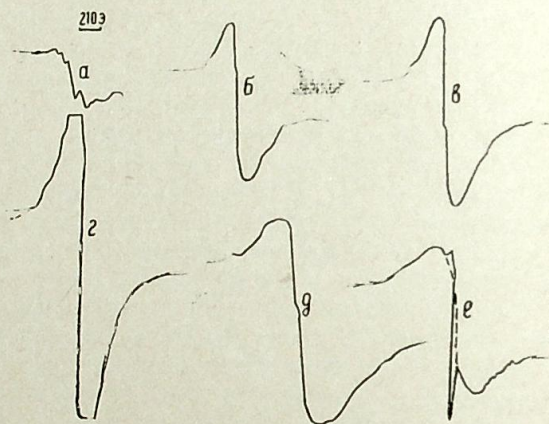


Рис. 2. Линия ЭПР V^{4+} при 300°K в стеклах $(100-n) V_2O_5 \cdot nP_2O_5$, n равно: а—10; б—20; в—30; г—40; д—50; е—55.

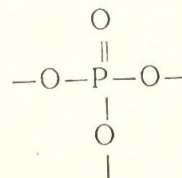
— $\ln p$). Отсюда можно заключить, что в стекле двойных систем $V_2O_5 - P_2O_5$ концентрация носителей заряда не зависит от температуры и n растет с увеличением содержания P_2O_5 .

Сопоставление найденных значений $N_{нз}$ и n показывает (табл.), что имеется корреляция между концентрацией неспаренных электронов и носителей заряда и всегда сохраняется условие $N_{нз} > n$ для низких содержаний P_2O_5 составляет 3 порядка, а для высоких содержаний — 4 порядка. Кроме того, с повышением содержания P_2O_5 от 5 до 40 мол. % электропроводность при комнатной температуре уменьшается от 10^{-5} до $10^{-8} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ (рис. 3), а концентрации неспаренных электронов и носителей заряда увеличиваются. Электропроводность

обусловлена обменом валентности между ионами ванадия: переход от пятивалентного состояния к четырехвалентному соответствует переходу электрона от иона низшей к иону высшей валентности. С увеличением концентрации неспаренных электронов, а следовательно и концентрации носителей заряда вместо ожидаемого повышения наблюдается уменьшение электропроводности.

V_2O_5 (% мол.)	P_2O_5 (% мол.)	δH (э)	$N_{нз}$ (см ⁻³)	n (см ⁻³)	α ($\frac{\text{мкВ}}{\text{град}}$)	ΔE_n (эВ)
95	5	—	$1,2 \cdot 10^{17}$	$9 \cdot 10^{13}$	—900	0,65
90	10	—	$5,9 \cdot 10^{17}$	$3,3 \cdot 10^{14}$	—800	0,66
85	15	225 ± 10	$3 \cdot 10^{18}$	$1,2 \cdot 10^{15}$	—700	0,67
80	20	247 ± 10	$1,45 \cdot 10^{19}$	$4,5 \cdot 10^{15}$	—600	0,68
75	25	270 ± 10	$7,2 \cdot 10^{19}$	$1,6 \cdot 10^{16}$	—500	0,70
70	30	288 ± 10	$3,7 \cdot 10^{20}$	$6,1 \cdot 10^{16}$	—400	0,75
65	35	305 ± 10	$1,8 \cdot 10^{21}$	$2,7 \cdot 10^{17}$	—300	0,80
60	40	324 ± 10	$7 \cdot 10^{21}$	$8 \cdot 10^{17}$	—150	0,84
50	50	—	—	—	отрицательно	—

Это может быть объяснено тем, что тетраэдры



в ванадиевофосфорнокислородном каркасе входят между тетраэдрами четырехвалентного и пятивалентного ванадия

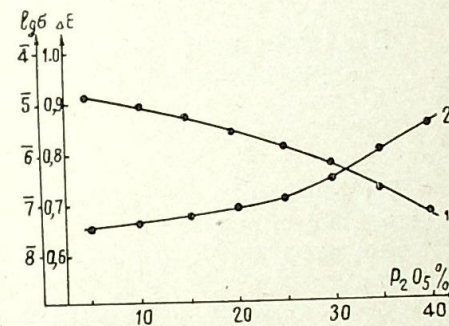
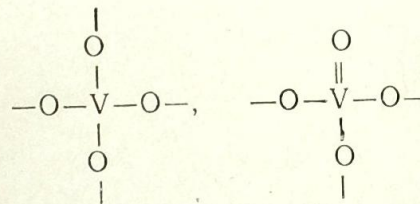


Рис. 3. Зависимость $\lg \sigma$ (1) и энергии активации (ΔE) (2) от процентного содержания P_2O_5 .

и затрудняют переход электрона от иона V^{4+} к иону V^{5+} . Поэтому в стеклах, содержащих более высокую концентрацию, не все неспаренные электроны участвуют в переносе заряда.

Следует отметить, что в кристаллических и стеклообразных полупроводниках на основе окислов ванадия и фосфора обращает на себя внимание также корреляция между шириной линии ЭПР δH и энергией активации ΔE_n носителей заряда (табл. 1). Значения энергии активации носителей заряда ΔE_n для каждого из образцов, определенные из температурного хода $\lg \sigma$, приведены в таблице. При увеличении отношения V_2O_5/P_2O_5 ширина линии ЭПР ионов V^{4+} и энергия активации уменьшаются. Это связано с тем, что при уменьшении содержания фосфора в фосфорнокислородном каркасе уменьшается и расстояние между ионами V^{4+} и V^{5+} т. е. энергетические уровни неспаренных электронов приближаются к зоне проводимости.

Заклучение

1. Проведено комплексное исследование электропроводности, термо-е. д. с. и спектров ЭПР стекол системы $V_2O_5-P_2O_5$.

2. Обнаружен электронный механизм проводимости в этих стеклах при содержании P_2O_5 от 5 до 50 мол. %.

3. С увеличением содержания P_2O_5 от 5 до 40 мол. % интенсивность сигнала ЭПР растет.

Установлена корреляция между концентрацией неспаренных электронов и носителей заряда, где сохраняется условие $N_{нэ} > n$, причем отношение $N_{нэ}/n$ для низких содержаний составляет 3 порядка, а для высоких содержаний—4 порядка.

4. Определена связь между энергией активации ΔE_n и шириной линии ЭПР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе В. А., Патрина И. Б. и Поберовская Н. С. ФТТ, т. 11, в. 4, 656 (1960).
2. Нагиев В. М. ФТТ, 7, № 9, 2726 (1965).
3. Богомолова Л. Д., Лазукин В. Н., Петровых Н. В. „ДАН СССР, физика“, т. 177, № 2 (1967).

Поступило 12. III 1969

Л. М. Иманов, В. М. Нагыјев, А. Э. Чаббаров

Ванадий в фосфор оксидлери эсасында алынмыш оксид
жарымкечиричи шүшэлэрдэ тэклэнмиш электронлар вэ
жүкдашыжычылар

ХҮЛАСЭ

P_2O_5 -ин мүхтәлиф фаизлери үчүн $V_2O_5-P_2O_5$ системиндән олан шүшэлэрин електрик кечиричилији, термо ЕНГ-си, вэ ЕПР спектри комплекс тәдгиг олунмушдур. Жүкдашыжычылар илэ тэклэнмиш электронларын концентрасијасы вэ һәмчинин активасија енержиси илэ ЕПР хәтләринин ени арасында коррелјасија варлыгы мүәјјән едилмишдир.

К. Н. МАМЕДОВ, А. С. АББАСОВ

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СУЛЬФИДОВ ГАЛЛИЯ

Диаграмма состояния бинарной системы Ga—S (рис. 1) изучена в [1, 2]. Подтверждено, [2] что галлий и сера образуют ряд химических соединений: Ga_2S , GaS , Ga_4S_5 и Ga_2S_3 . Существующие методы синтеза (прямой однотемпературный и двухтемпературный в замкнутом объеме и создание противодавления) оказались неудовлетворительными при синтезах с участием серы. Поэтому сплавы с участием серы синтезировались в замкнутом объеме так, что все время для регулирования давления сохранялся градиент температуры, увеличивалась поверхность реакционной сферы, а также устранялось образование корки на поверхности реагирующих компонентов, что приводило к ускоренному безвзрывному синтезу.

Для синтеза брали эвакуированную ампулу длиной 25—30 см, с нужным количеством исходных веществ. Затем при постоянном вращении вручную ампулу погружали в горячую печь (нагретую на 10—15° выше температуры плавления синтезируемого вещества), наклонную на $2/3$. Наружную часть ампулы при возникновении в ней паров серы охлаждали водой с целью уменьшения внутреннего давления. При охлаждении пары серы, конденсируясь, снова возвращаются в зону реакции. А так как к этой зоне все вещества находятся в расплавленном состоянии, то галлий ведет себя очень активно и реакция протекает ускоренно, в течение 10—15 минут. При этом внутри ампулы наблюдается пламя, количество паров серы уменьшается и тем самым исключается возможность взрыва.

По мере уменьшения паров серы ампула постепенно полностью погружается в печь, которая переводится в вертикальное состояние и вместе с ампулой несколько раз перемещается, затем дается выдержка в течение 0,5—1 часа. После этого отключенная печь постепенно охлаждается. При наличии в системе галлий—сера более 60 ат% S образования соединений не происходит [1].

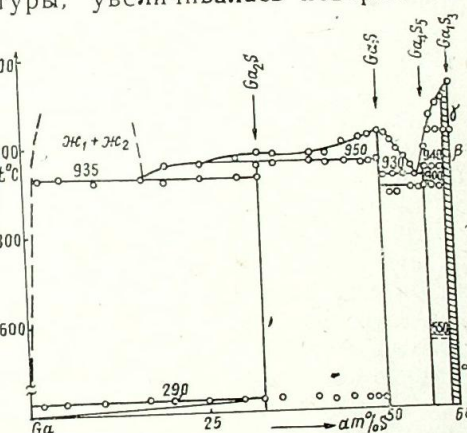


Рис. 1. Диаграмма состояния бинарной системы Ga—S

Сплавы области от чистого галлия до Ga_2S_3 (33,3 ат% S) являются двухфазными. При $29,8^\circ\text{C}$ имеет место невариантное плавление вырожденной эвтектики около чистого галлия. При 935°C происходит монотектический процесс с образованием двух жидких слоев состава Ж_1 и Ж_2 . В области диаграммы 25—33 ат% S имеются эффекты при $29,8$, 935 , 960°C и температуре, соответствующей ликвидусу. Соединение Ga_2S_3 образуется по перитектической реакции между расплавом и соединением GaS при 960°C : $\text{Ж} + \text{GaS} \rightleftharpoons \text{Ga}_2\text{S}_3$.

Следует отметить, что при синтезе из элементов галлия и серы соединение Ga_2S_3 получается в очень незначительном количестве. Заметные количества Ga_2S_3 получаются по реакции $\text{Ga}_2\text{S}_3 + 4\text{Ga} \rightleftharpoons 3\text{Ga}_2\text{S}$, при нагревании в вакууме с последующим резким охлаждением расплава. При этом Ga_2S_3 оседает в виде черного сажеобразного налета, и в этой верхней части слитка в виде черного сажеобразного налета, и в этом случае реакция тоже неполная, так как в расплаве остаются непрореагировавший галлий и GaS . Установлена неизвестная ранее температура перитектического плавления Ga_2S_3 , равная 960°C , хотя Хан и Франк существование этого соединения ставили под сомнение [3].

Между Ga_2S_3 и GaS лежит двухфазная область, состоящая из Ga_2S_3 и GaS . Однако исследование сплавов этой части диаграммы показало наличие металлического галлия, который крайне медленно взаимодействует с GaS , образуя Ga_2S_3 . Даже отжиг при 870°C в течение 640 часов не привел к равновесному состоянию. GaS , по нашим данным, плавится конгруэнтно при $1015 \pm 5^\circ\text{C}$. Для него практически гомогенная область не найдена. Во всех сплавах со стороны галлия остается непрореагировавший галлий, исключая GaS , со стороны Ga_4S_5 сплавы также двухфазные. Микротвердость GaS равна 40 кг/мм^2 при нагрузке 2 г.

Между GaS (50 ат% S) и Ga_4S_5 (55,5 ат% S) расположена эвтектика с температурой плавления 930°C и 55 ат% S.

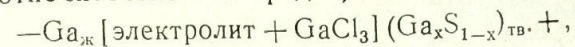
Ga_4S_5 образуется из расплава, содержащего 55,3 ат% S, и соединения по перитектической реакции $\text{Hc} + \text{Ga}_2\text{S}_3 \rightleftharpoons \text{Ga}_4\text{S}_5$ при 940°C . Установлено, что при 900°C Ga_4S_5 претерпевает полиморфное превращение (эффект при 900°C хорошо наблюдается у всех сплавов состава 15—59 ат% S). Для подтверждения этого снята термограмма Ga_4S_5 до и после закалки при 920°C . На термограмме отожженного и закаленного при 920°C Ga_4S_5 эффект при 900°C отсутствует. Как правило, снова он появляется после вторичного нагрева. Таким образом установлены ранее неизвестные температуры перитектического плавления и полиморфного превращения Ga_4S_5 , равные соответственно 940 и 900°C . Микротвердость Ga_4S_5 равна 260 кг/мм^2 при нагрузке 20 г.

Между Ga_4S_5 и Ga_2S_3 (60 ат% S) находится двухфазная область, состоящая из Ga_4S_5 и Ga_2S_3 . Соединение Ga_2S_3 получается конгруэнтно при 1120°C . Для Ga_2S_3 найдена гомогенная область со стороны галлия до 1 ат% Ga, со стороны серы растворимость практически отсутствует.

Ga_2S_3 имеет несколько полиморфных превращений: α , β и γ . На термограммах переход μ в β осуществляется при 1020°C (этот эффект наблюдается и у сплавов состава 57—60 ат% S), а переход β в α на термограммах и на дебаграммах не фиксируется. Отожженный при температурах 300°C в течение 1100 часов и 480°C в течение 750 часов Ga_2S_3 по качеству не отличается от Ga_2S_3 , отожженного при 800°C в течение 385 часов.

Дебаграммы всех образцов Ga_2S_3 не отличаются друг от друга, относятся к низкосимметричным структурам и характеризуют β -модификацию Ga_2S_3 . Очевидно, это связано с тем, что Ga_2S_3 из расплава кристаллизуется всегда в виде β -модификации.

Нами исследованы термодинамические свойства некоторых сульфидов галлия Ga_2S_3 и Ga_4S_5 по фазовым областям Ga_2S_3 —S и Ga_4S_5 — Ga_2S_3 . В работе был применен метод электродвижущих сил с жидким электролитом. Изучались э. д. с. гальванических элементов (концентрационных относительно электродов) вида.



где x —мольная доля галлия в сплаве. Э. д. с. гальванических элементов измерялась в интервале 320 — 420°K .

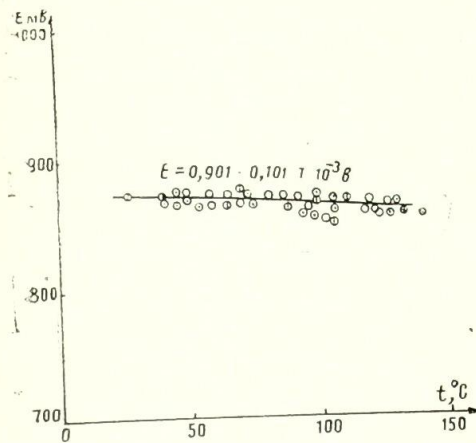


Рис. 2. Зависимость э. д. с. от температуры для сплавов, относящихся к области Ga_2S_3 —S.

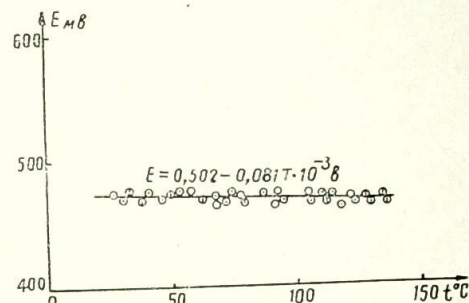


Рис. 3. Зависимость э. д. с. от температуры для сплавов, относящихся к области Ga_4S_5 — Ga_2S_3 .

Хлорид галлия готовился согласно методике, описанной в [4]. В качестве электролита был применен обезвоженный глицерин с растворенными в нем солями KCl (4%) и GaCl_3 (0,2%). Гальванический элемент осуществлялся в H-образных пирексовых ячейках, описание которых дано в [5, 6, 7]. Токоотводом служила вольфрамовая проволока диаметром 0,5 мм. Опыты длились более 2 недель. Графики зависимости э. д. с. от температуры для изученных областей представлены на рис. 2, 3.

Таблица 1

Фазовая область	Реакция	$E = f(T), \text{ в}$
Ga_2S_3 —S	$\text{Ga} + 1,5\text{S} = 0,5\text{Ga}_2\text{S}_3$	$0,901 - 0,101 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 5 \cdot 10^{-3}$
Ga_4S_5 — Ga_2S_3	$2\text{Ga} + 5\text{Ga}_2\text{S}_3 = 3\text{Ga}_4\text{S}_5$	$0,502 - 0,081 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 4 \cdot 10^{-3}$
GaS — Ga_4S_5	$\text{Ga} + \text{Ga}_4\text{S}_5 = 5\text{GaS}$	$0,453 - 0,101 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 2 \cdot 10^{-3}$

Уравнения зависимости э. д. с. от температуры, приведены в табл. 1. Постоянство величины э. д. с. при постоянной температуре, воспроизводимость ее значений при нагреве и охлаждении указывают на обратимость работы гальванического элемента. Значение величины э. д. с., а также ее температурная зависимость позволили рассчитать свободную энергию, энтальпию и энтропию образования соединений Ga_2S_3 и Ga_4S_5 из элементов для изученного температурного интервала.

по известным соотношениям термодинамики:

$$\Delta G^\circ = -zFE_T, \quad (1)$$

где z —заряд иона галлия,
 E —величина э. д. с.,
 F —число Фарадея,

$$\Delta S^\circ = zF \frac{dE}{dT}, \quad (2)$$

$$\Delta H^\circ = zF \left(T \frac{dE}{dT} - E \right). \quad (3)$$

Методом наименьших квадратов [8] определялись погрешности в величинах ΔG° , ΔH° , ΔS° . На основании полученных данных по теплотам образования, а также литературных сведений по теплотам сублимации элементов Ga, S [9] были вычислены энергии образования из

Таблица 2

Фаза	320 — 420°K		
	$-\Delta H^\circ \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$-\Delta S^\circ \frac{\text{э. е.}}{\text{моль}}$	$-\Delta G^\circ_{370^\circ} \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$
Ga ₂ S ₃	124,7±2,0	13,9±1,4	121,5±0,7
Ga ₄ S ₅	217,2±8,0	25,0±2,7	213,4±1,2
GaS	49,7±2,0	6,4±1,0	48,6±0,1

Ga₂S₃ и Ga₄S₅ атомов. Результаты представлены в табл. 3 и сопоставлены с имеющимися литературными данными [10], полученными при калориметрическом сжигании. Следует отметить, однако, что в работе [10] отсутствуют характеристика веществ, данные по их чистоте, а также учет полноты сгорания.

Таблица 3

Фаза	298°K				
	$-\Delta G^\circ \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$-\Delta S^\circ \frac{\text{э. е.}}{\text{моль}}$	$-\Delta H^\circ \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$S^\circ \frac{\text{э. е.}}{\text{моль}}$	$H^\circ_{\text{ат}} \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$
Ga ₂ S ₃	120,5±0,7	5,1±1,4	123,4±2,0 136,8±3,0 (10)	37,9±1,4	424,1
Ga ₄ S ₅	212,4±1,2	7,3±2,7	214,6±8,0	70,8±2,7	759,1
GaS	48,3±0,1	2,0±1,0	48,8±2,0 46,4±3,0 (10)	15,6±1,0	170,8

В заключение авторы выражают благодарность П. Г. Рустамову и Б. Н. Мардахаеву за интерес к работе и ценные советы.

Выводы

1. Рассмотрены некоторые особенности выбора электрода сравнения и электролита по исследованию термодинамических свойств бинарной системы Ga—S.

2. Экспериментально получены температурные зависимости э. д. с. реакции образования Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS из компонентов в температурном интервале 320 — 420°K.

3. Методом э. д. с. впервые экспериментально получены данные по свободной энергии образования Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS.

4. Из температурных зависимостей э. д. с. получены энтропии образования Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS.

5. Рассчитаны из экспериментальных данных энтальпии образования Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS.

6. Вычислены стандартные величины свободной энергии, энтропии и энтальпии образования Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS при 298°K.

7. Рассчитаны энергии атомизации изученных веществ.

8. Вычислены абсолютные энтропии Ga₂S₃, Ga₄S₅ и GaS при 298°K.

ЛИТЕРАТУРА

1. Journal of the electrochemical Society, 113, 8, 1966.
2. Мардахаев Б. Н. Автореф. канд. дисс. Баку, 1967.
3. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. М., 1962.
4. Брауэр Г. Руководство по препаративной неорганической химии. ИЛ., 1956.
5. Герасимов Я. И., Аббасов А. С., Никольская А. В. „ДАН СССР“, 147, 1962, № 4.
6. Герасимов Я. И., Аббасов А. С., Никольская А. В., Васильев В. П. „ДАН СССР“, 156, 1964, № 1.
7. Герасимов Я. И., Аббасов А. С., Никольская А. В., Васильев В. П. „ДАН СССР“, 156, 1964, № 5.
8. Налимов Б. В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., 1960.
10. Stull D., Sinke G. Thermodynamic properties of the elements, Advances in chem., Ser. № 18, Washington, 1916.
11. Hahn H., Burrow F. Ostereich. chem. Ztg. 57, 134, 1956.

Поступило 12. III 1969

К. Н. Маммадов, А. С. Аббасов

Галиумун бə'зи сульфидлəринин термодинамик хассəлəри

ХҮЛАСƏ

Электрик хэрəkəт гүввəsi методу илə илк дəфə олараг Ga₂S₃ вə Ga₄S₅ бирлəшмэлəринин термодинамик хассəлəри (сəрбəст энерги, энтропија вə энталпија) өјрəнилмишдир.

Тəчрүби материал эсасында стандарт шəраитдə тəдгиг олунан бирлəшмэлəрин сəрбəст энержиси, энтропија вə энталпијасы хесабланмышдыр. Бундан əлавə, хəмин бирлəшмэлəрин атомлашдырылма энержиси дə мүəјјан едилмишдир.

А. А. АБДУРАХМАНОВ, М. Н. ЕЛЧИЕВ, Л. М. ИМАНОВ

МИКРОВОЛНОВОЙ ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$

В результате исследования этилового спирта был идентифицирован вращательный спектр, происхождение которого связано с наличием транс-изомера [1]. Дальнейшие исследования спектра с целью обнаружения переходов, связанных с другими поворотными изомерами, не увенчались успехом [2]. В связи с этим сделано заключение о том, что наиболее "устойчивым" является транс-изомер, соответствующий наличию в молекуле плоскости симметрии, в которой расположены тяжелые атомы и атом водорода гидроксильной группы, образующие вытянутую цепь.

Работы по исследованию спектра нормального пропилового спирта [3, 4] подтвердили сделанное заключение о маловероятности существования других изомеров, обусловленных поворотом гидроксильной группы относительно остова молекулы.

Изучение спектра изопропилового спирта $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$ является следующим этапом проводимых в лаборатории исследований молекул в ряду спиртов и меркаптанов. Выбор объекта обусловлен тем, что в исследуемой молекуле существуют благоприятные условия для поворотного изомеризма за счет ориентации гидроксильной группы относительно остова молекулы. Молекула изопропилового спирта привлекает внимание и тем, что она, как показал теоретический расчет спектра в трех возможных поворотных конфигурациях, представляет собой "сжатый волчок", а это в отличие от широко изучаемых молекул типа "вытянутый волчок" обещает насыщенный спектр.

Экспериментальные исследования молекулы $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$ проводились на обычном радиоспектрометре с электрической модуляцией [4]. В поглощающую ячейку запускали продукт марки "ОЧ" с гарантированным 99%-ным содержанием образца. При температуре -50°C и давлении 10^{-2} мм рт. ст. снимали спектр в диапазоне частот 11,8—31,3 кГц при различных значениях модулирующего напряжения.

Впервые нами было обнаружено и зарегистрировано большое количество спектральных линий. Часть спектра от 11,8 до 20 кГц приводится в табл. 1. Интенсивность переходов условно подразделена на 3 категории, из которых сильные линии соответствуют интенсивности 10^{-6} см⁻¹, а слабые— 10^{-8} см⁻¹.

Чрезмерная насыщенность спектра, наложение компонент одной линии на другую, множество дублетных линий, отсутствие линий с

Таблица 1
Частоты (МГц) и интенсивности линий молекулы $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$ в диапазоне 11800—20000 МГц

Частота	Интенсивность	Частота	Интенсивность	Частота	Интенсивность
1	2	3	4	5	6
11863	средняя	12960	слабая	13762	слабая
11868	"	12972	"	13770	средняя
11879	"	12973	средняя	13784,6	сильная
11950	слабая	12982	слабая	13790	слабая
11970	"	12991,0	"	13801	"
12000	"	13008	средняя	13809	"
12032	"	13019	слабая	13811	"
12050	"	13020	"	13827	"
12055	"	13040	"	13837	"
12056	"	13060	"	13847	средняя
12076	средняя	13089	"	13876	слабая
12110	слабая	13110	"	13882	"
12141	"	13130	сильная	13903	"
12150	средняя	13140	слабая	13928	"
12176	"	13144	"	13946	"
12182	слабая	13155	"	13951	"
		13160	"		
12188	"	13189,2	средняя	13994	"
12215	"	13203,3	"	14014	средняя
12240	"	13236	сильная	14037	слабая
12270	средняя	13243	"	14050	"
12307	слабая	13251	слабая	14054	"
12329	"	13266	"	14059	"
12343	"	13269	средняя	14077	средняя
12350	"	13285	слабая	14080	сильная
12361	"	13297	"	14090	слабая
12437	"	13313	"	14096	слабая
12454	"	13320	средняя	14099	"
12490	"	13330	"	14113	"
12500	"	13347	"	14119	"
12510	"	13355	средняя	14130	"
12522	"	13364	слабая	14138	"
12535	"	13373	сильная	14150	"
12552	"	13381	средняя	14152	"
12560	"	13395	слабая	14169,0	"
12582	"	13400	сильная	14171,6	"
12593	средняя	13404	слабая	14193	"
12629	"	13410	"	14210	средняя
12635	слабая	13416	"	14216	слабая
12656	"	13430	средняя	14220	средняя
12664	"	13440	слабая	14250	слабая
12680	"	13448	"	14262	"
12692	"	13465,1	средняя	14310	"
12694	"	13477	слабая	14316,4	средняя
12702	"	13484	средняя	14350	слабая
12716	"	13499	слабая	14380	средняя
12729	"	13507	"	14404	сильная
12736	"	13510	"	14423	средняя
12755	"	13534	"	14430	слабая
12780	"	13540	сильная	14439	"
12783	"	13554	"	14465,9	сильная
12804	сильная	13584,8	слабая	14510	"
12810	средняя	13596	сильная	14530	средняя
12824	слабая	13620	слабая	14542	"
12840	"	13650	"	14556	"
12857	сильная	13694,1	средняя	14563	"
12876	слабая	13695,7	"	14573	"
12883	сильная	13702,0	слабая	14580	"
12892	слабая	13705,1	"	14627,2	"
12911	"	13719,5	средняя	14639,0	"
12920	средняя	13735	слабая	14670	"
12940	слабая	13740	"	14697	"

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6
14710	средняя	15527	слабая	16337	средняя
14711	"	15540	средняя	16350	слабая
14720	слабая	15560	"	16376	"
14753	"	15570	"	16400	средняя
14765	"	15580	слабая	16406,0	слабая
14798	"	15590,9	"	16414	"
14804	"	15600	"	16423	"
14810	сильная	15616	"	16442	"
14824	слабая	15628	средняя	16449	"
14830	сильная	15642	слабая	16456	средняя
14841,3	"	15652	"	16485,8	слабая
14845,9	слабая	15738	"	16493,9	"
14851	"	15742	средняя	16517	"
14855,9	средняя	15759	слабая	16547	"
14858	слабая	15763	"	16558	слабая
14888	"	15784	"	16564	"
14892	"	15798	"	16574	"
14902	"	15803	"	16580	"
14912	"	15810	"	16600	"
14916	"	15819	слабая	16608	"
14920	"	15845	"	16610	"
14933,0	средняя	15860	сильная	16622	"
14958	слабая	15874	слабая	16635	"
14971	"	15890	"	16643	"
14979	средняя	15907	сильная	16652	слабая
14987	слабая	15917	слабая	16656	"
15000	"	15923	"	16660	"
15008	"	15935	"	16663	"
15036	средняя	15943	"	16690	"
15044	слабая	15953	слабая	16697	"
15058	"	15959	"	16706	"
15062	"	15972	"	16717	"
15082	"	15980	"	16728	средняя
15085	средняя	15998	"	16739	слабая
15100	"	16003	"	16744	"
15117	слабая	16013	"	16754	"
15151	"	16029	"	16764	"
15188	"	16053	"	16766	"
15200	"	16060	средняя	16780	"
15258	средняя	16080	слабая	16791	"
15270	слабая	16086	"	16800	"
15274	"	16094	"	16812	"
15283	"	16100	"	16827,2	"
15290	"	16110	"	16836	слабая
15294	"	16130	"	16840	"
15304	"	16135	"	16844	"
15323	"	16140	"	16882	"
15340	"	16160	"	16892	"
15344	"	16169	"	16921	сильная
15355,6	средняя	16177	слабая	16928	средняя
15367,4	слабая	16190	"	16942	"
15385,2	средняя	16200	"	16950	"
15388,5	"	16204	средняя	16957	"
15397,6	сильная	16210	слабая	16972	слабая
15415,4	средняя	16219	"	16990	"
15420	слабая	16220	"	17020	"
15443	"	16237	"	17030	"
15447	"	16250	"	17045,5	сильная
15450	"	16260	"	17048	слабая
15462	средняя	16263,0	средняя	17062	"
15471	слабая	16270	слабая	17075,7	средняя
15478	"	16282,6	"	17098	слабая
15490	средняя	16284	"	17104	"
15500	слабая	16300	"	17130,3	слабая
15510	"	16319	средняя	17137	"
				17144	"

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5	6
17180	слабая	18238	средняя	19113	средняя
17188	"	18242	слабая	19118	"
17194	"	18246	"	19130	сильная
17208	"	18286	"	19130,8	"
17214	"	18296	"	19142	средняя
17220	"	18326	"	19156	слабая
17263	"	18338	средняя	19165	"
17278	"	18360	слабая	19183	сильная
17288	"	18376	"	19197	слабая
17292	"	18383,6	сильная	19220,1	"
17298	"	18430	слабая	19230	"
17301	"	18456	"	19242	"
17307	средняя	18460	"	19246	"
17317	слабая	18466	"	19258	средняя
17344,8	сильная	18478	"	19280	слабая
17363,7	средняя	18480	"	19290	"
17398	слабая	18503,0	средняя	19309	средняя
17414	"	18518	"	19320	сильная
17440	"	18540	"	19324	слабая
17441	сильная	18550	"	19336	"
17484	средняя	18558	"	19368	средняя
17498	слабая	18562	"	19382	"
17508	"	18580	"	19405,3	"
17560	"	18588	"	19420	сильная
17576	средняя	18600,7	средняя	19428	слабая
17590	слабая	18634	"	19445	"
17600	слабая	18650	слабая	19452	"
17668	средняя	18654	средняя	19477	"
17684	слабая	18728	слабая	19486	средняя
17696	"	18730	"	19500	слабая
17707	"	18760	"	19504	средняя
17716	"	18764	"	19520	слабая
17718	"	18780	"	19584	сильная
17752	"	18810	"	19590	слабая
17760	"	18840	средняя	19616	средняя
17798	сильная	18854	слабая	19632	слабая
17810	слабая	18858	"	19650	"
17816	"	18864	"	19656	"
17828	"	18872	"	19660	слабая
17860	средняя	18874	"	19678	средняя
17875	слабая	18881	"	19680	"
17884	"	18888	"	19682	слабая
17900	"	18906	"	19694	средняя
17906	"	18916	"	19740	слабая
17941,0	"	18928	средняя	19786,6	сильная
17992	слабая	18954	слабая	19796,8	сильная
18010	"	18976	"	19819	слабая
18046	"	18990	средняя	19836	"
18060	"	19002	слабая	19842	"
18073,3	сильная	19008	средняя	19849	сильная
18106	слабая	19014	слабая	19864	слабая
18120	"	19050	сильная	19875	"
18122	"	19052	слабая	19884	"
18138	"	19060	"	19900	"
18144	"	19062	"	19902	сильная
18158	средняя	19080	сильная	19938	средняя
18204	слабая	19098	средняя	19962	слабая
18230	"	19099	слабая	20012	сильная
		19100	"		

явно выраженными разрешенными компонентами, а также критичность условий эксперимента (температура и давление внутри ячейки) создавали большие дополнительные трудности в расшифровке спектра. Кроме того высокая чувствительность теоретически рассчитанного параметра асимметрии χ к исходным структурным параметрам значительно расширяла поисковый диапазон частот, что также осложняло идентификацию.

Таблица 2

Переход	Частота, Мгц	
	измерено	вычислено*
$3_{03}-3_{12}$	17075,7	170816,6
$4_{13}-4_{22}$	16406,0	1649,8
$5_{23}-5_{32}$	15415,4	15413,7
$6_{33}-6_{42}$	14316,4	14314,4
$7_{43}-7_{52}$	13465,1	13454,0
$8_{53}-8_{62}$	13189,2	13179,4
$9_{63}-9_{72}$	13784,6	13754,8
$10_{73}-10_{82}$	15388,5	1538,0

Несмотря на неблагоприятные условия, удалось идентифицировать серию Q^p = ветви от $J=3$ до $J=10$ с $\Delta k_{-1}=1, \Delta k_{+1}=-1$. По пересечению переходов на графике Q -ветви $[A-C=f(\chi)]$ получены эффективные значения параметра асимметрии $\chi = +0,615$ и $A-C=3889,4$ Мгц, по которым вычислены частоты переходов этой серии (табл. 2).

Наблюдаемые аномалии в частотах свидетельствуют о нежесткости структуры, что можно приписать сильному взаимодействию внутреннего вращения группы ОН относительно остова молекулы с вращением молекулы в целом. Дальнейшие исследования позволят выяснить причину этих аномалий. Принадлежность идентифицированного спектра к какой-либо конкретной конфигурации окончательно не выяснена. Предполагается, что расшифрованная серия обусловлена транс-конфигурацией, имеющей плоскость симметрии.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", (1967).
2. Иманов Л. М., Каджар Ч. О., Исаев И. Дж. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1967, № 3, 4.
3. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. Оптика и спектроскопия, т. 22, 840. (1967).
4. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. Оптика и спектроскопия, т. 25, 954 (1968).

Поступило 13. III 1969

Х. М. ХАЛИЛОВ, Ш. О. ОРУДЖЕВА, Г. А. МАМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНО-ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКА В МОНОКРИСТАЛЛЕ TlSe

В исследовании физических свойств и строения твердых тел важнейшее значение приобретают акустические методы. Данные, полученные этими методами, связаны с термодинамическими характеристиками исследуемого вещества.

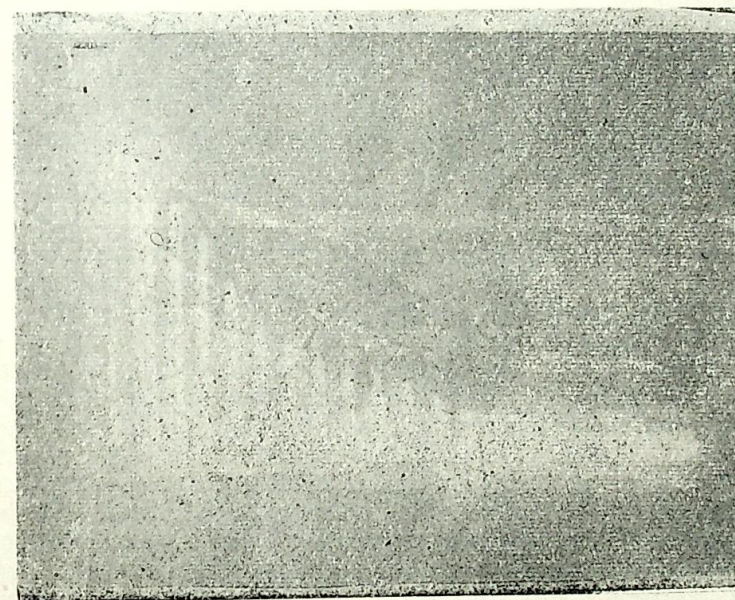


Рис. 1

В настоящей работе нами измерялось поглощение ультразвуковых волн в монокристалле TlSe вдоль кристаллографического направления $[001]$ в диапазоне частот $3 \cdot 10^7 - 1,5 \cdot 10^8$ гц, в интервале $20 - 310^\circ\text{C}$. Для этой цели из одного и того же монокристалла изготавливали два образца разной длины с плоскопараллельными торцами, отшлифованными на специальном приборе с точностью до одного микрона. Измерения производились эхо-импульсным методом. Генератор подавал радиоимпульсы длительностью $1-3$ мксек, частота повторения которых задавалась блоком синхронизации, на кварцевый преобразователь x -среза, формирующий продольные ультразвуковые импульсы. Серия

отраженных от плоскопараллельных граней образца ультразвуковых импульсов воспринималась тем же преобразователем и после усиления поступала на осциллограф. На рис. 1 представлена осциллограмма эхo-импульсов на частоте 56 Мгц.

Следует отметить, что преобразователь приклеивали к торцу образца с помощью специально приготовленного клея, выдерживающего высокие температуры. Одна часть его состояла из канифоли, а две трети—из вакуумной смазки. Связующий слой притиранием был доведен до минимальной толщины.

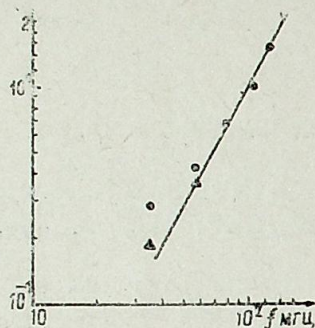


Рис. 2

Максимальная относительная ошибка измерений затухания составляла 8—10%. Кривая частотной зависимости поглощения представлена на рис. 2. Кружками показаны значения коэффициента поглощения в дб/см без поправки на дифракцию, треугольниками—после учета этих потерь. Использование двух образцов позволяло автоматически учитывать потери в преобразователе и промежуточном слое между преобразователем и образцом. Как видно, зависимость α от f носит квадратичный характер.

Поглощение ультразвука в неметаллических твердых телах обусловлено различными механизмами, которые можно подразделить на две группы: акустические потери вследствие внутреннего трения и релаксации и рассеяние из-за дефектов кристалла. Произведенные нами расчеты коэффициентов поглощения показывают, что существенную роль в поглощении ультразвука в монокристалле TlSe играют фонon-фононные взаимодействия.

Ахиезер (1) разработал теорию поглощения звука в твердом теле для $\omega\tau < 1$, где ω —круговая частота, τ —время релаксации тепловых фононов. Звуковые волны возмущают равновесное распределение тепловых фононов. Модулированные фононы релаксируют к новому тепловому равновесию через фонon-фононные столкновения, что выражается в потере звуковой энергии. Более общее развитие идеи Ахиезера дано Вудруфом и Эхренричем (2) и представлено в виде формулы:

$$\alpha = \frac{c_v T \gamma^2 \omega^2 \tau}{3 \rho c^5},$$

c_v —удельная теплоемкость, γ —постоянная Грюнайзена, ρ —плотность, c —скорость звука.

Как известно, наличие теплопроводности также обуславливает поглощение звука, поскольку тепло из мест более сжатых и имеющих более высокую температуру, передается к местам менее сжатым. Расчет показал, что для монокристалла TlSe потери звуковой энергии вследствие теплопроводности очень незначительны. В основном ответ-

ственными за поглощение ультразвуковых волн являются фонon-фононные столкновения.

Нами исследовалась также температурная зависимость поглощения (рис. 3). Оказалось, что на всех частотах поглощение слабо зависит от температуры и подчиняется следующему закону:

$$\alpha = \alpha_0 + 0,00071 T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. ЖЭТФ, т. 8, вып. 12, 1318 (1938).
2. Woodruff T. O., Ehrenreich H. Phys. Rev. 123, 1553 (1961).

Поступило 13. III 1969

Х. М. Халилов, Ш. О. Оручова, Н. Э. Маммадов

TlSe монокристаллында ултрасэсин удулмасынын температур вэ тезликдэн асыллыгынын тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Тэдгигат үчүн TlSe монокристаллы алынмыш вэ $3,5 \cdot 10^7$ — $1,5 \cdot 10^8$ лс тезлик, 20—310°C температур интервалында ултрасэсин удулмас өржөнилмишдир. Тэчрүбэлэр көстөрик ки, TlSe монокристаллында ултрасэсин удулмасы квадратик гануна табедир. Алынмыш нәтичэлэр Ахијезерин нәзәри һесабатыны өдәјир.

Ултрасэсин удулма әмсалынын температурдан асылылығы $\alpha = \alpha_0 + 7,1 \cdot 10^{-4} T$ ганунуна табедир, башга сөзлә хәттидир.

Х. М. ПАШАЕВ

НЕУПРУГОЕ МАГНИТНОЕ РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ НА ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЯХ В КРИСТАЛЛАХ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ АТОМАМИ ВНЕДРЕНИЯ

В работе [1] развита динамическая теория ферромагнетика с изолированными примесными атомами внедрения, приближенно справедливая в интервале температур от 0 до точки Кюри. Намереваясь выявить все результаты в предельно простой форме, для невозмущенной матрицы мы приняли модель простой кубической решетки с примесью в междоузлии (1/2, 1/2, 1/2) (рис. 1). Задача решалась методом запаздывающих функций Грина в двухпараметрическом приближении (в качестве параметров в теории фигурируют отношение обменных интегралов I'/I и отношение спинов σ'/σ). Было показано, что характерным для такой системы является возмущение колебаний целой группы спинов, включая примесный. В результате появляются хаотически расположенные области с аномальной динамической неупорядоченностью. При этом вблизи примесного

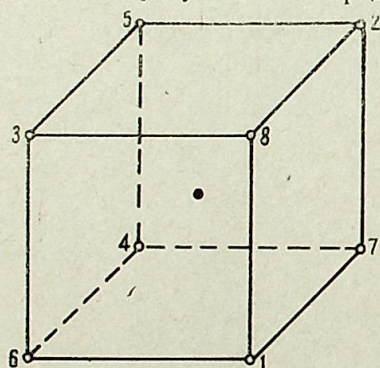


Рис. 1

спина, например, в случае резкого ослабления обменного взаимодействия, могут возникать долгоживущие примесные уровни.

Подобного рода деформация спектра элементарных возбуждений в кристаллах с примесями впервые была исследована Лифшицем [2] и Каганом [3], а влияние резонансной перестройки спектра на термодинамические и кинетические свойства слабых растворов изучалось в работах [4–8].

В настоящей статье описывается, каким образом из экспериментов по рассеянию медленных нейтронов можно непосредственно извлечь информацию об особенностях спектра ферромагнетика с примесными атомами внедрения. Как известно, интересующее нас дважды дифференциальное сечение неупругого рассеяния нейтронов записывается в следующем виде:

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{4} (r_0 \gamma)^2 \frac{\kappa'}{\kappa} [1 + (\vec{e} \vec{m})^2] \sum_{\vec{n}, \vec{m}} F_{\vec{n}}(\vec{q}) F_{\vec{m}}(\vec{q}) \times \{ \langle S_{\vec{n}}^+(t) S_{\vec{m}}^-(0) \rangle_{\omega} + \langle S_{\vec{n}}^-(t) S_{\vec{m}}^+(0) \rangle_{\omega} \}, \quad (1)$$

где суммирование ведется по всем узлам решетки, а также по всем занятым междоузлиям. Обозначения в (1) общепринятые (см., например, [9]).

Выражение (1) нужно понимать как усредненное по всем возможным расположениям примесных центров. Проводя это усреднение в явной форме, после несложных преобразований получим

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{2} (r_0 \gamma)^2 \frac{\kappa'}{\kappa} [1 + (\vec{e} \vec{m})^2] \cdot \left[n(\omega) + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right] \times \{ c \cdot a_0^2 K_1(\omega) + c \cdot 2a(a_0 - a) K_2(\vec{q}, \omega) + a^2 K_3(\vec{q}, \omega) \}, \quad (2)$$

где $a = F(\vec{q}) \sqrt{\sigma}$, $a_0 = F'(q) \sqrt{\sigma'}$ (величины со штрихами относятся к примесным атомам), $\sigma = \langle S^z \rangle$, $n(\omega)$ — функция распределения для частиц Бозе, c — концентрация примесей. Кроме этого, функции K_i ($i = 1, 2, 3$) суть Фурье-компоненты от мнимых частей соответствующих функций Грина, найденных в [1].

Анализ сечения рассеяния начнем с рассмотрения некогерентного рассеяния на самом примесном спине. Соответствующее этому процессу слагаемое в (2) есть

$$K_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega} \frac{\text{Im} D_s(\omega)}{[\text{Re} D_s(\omega)]^2 + [\text{Im} D_s(\omega)]^2}, \quad (3)$$

где

$$D_s(\omega) = 1 - \frac{\omega}{16 I' \sigma} \{ 1 - 2 \sigma' I' [G_{11}^0(\omega) + 3 G_{12}^0(\omega) + 3 G_{16}^0(\omega) + G_{15}^0(\omega)] \}, \quad (4)$$

$$G_{\vec{n} \vec{m}}^0(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{\exp(i \vec{q} (\vec{n} - \vec{m}))}{\omega - \omega_{\vec{q}}}.$$

Здесь и в дальнейшем используются те же обозначения, что и в [1].

Легко видеть, что при обращении $\text{Re} D_s(\omega)$ в нуль, если одновременно $\text{Im} D_s \ll 1$ (или просто равно 0, если $\omega = 24 I \sigma$), функция K_1 резко возрастает и даже может быть представлена в виде некоего лоренциана. Причем положение максимума на энергетической шкале, как следует из (4), определяется согласно равенству:

$$\frac{\omega_{\text{рез.}}(s)}{24 I \sigma} = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{I'}{I} \frac{1}{1 + 0,66 I' \sigma' / I \sigma} \ll 1 & (\text{квазилокальная частота}), \\ \frac{2}{3} \frac{I'}{I} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\sigma'}{\sigma} \right) \gg 1 & (\text{локальная частота}). \end{cases}$$

Таким образом, если неупругое рассеяние на примеси оказывается доминирующим, то частоты квазилокальных (или локальных) колебаний можно непосредственно измерить. С другой стороны, если даже $a_0 = 0$ и существует когерентное рассеяние на флуктуациях спинов матрицы, то локализованные возбуждения опять же могут быть экспериментально измерены. Действительно, в этом случае

$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega d\omega} \approx K_3(\vec{q}, \omega), \quad (5)$$

$$K_3(\vec{q}, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{c P_{\vec{q}}(\omega)}{(\omega - \omega_{\vec{q}} - c \text{Re} P_{\vec{q}})^2 + (c \text{Im} P_{\vec{q}})^2}, & \omega \approx \omega_{\vec{q}}, \\ \frac{1}{\pi} G_0^2(\vec{q}) \cdot c \text{Im} P_{\vec{q}}(\omega), & \omega \neq \omega_{\vec{q}}, \end{cases} \quad (6)$$

$$K_3(\vec{q}, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{c P_{\vec{q}}(\omega)}{(\omega - \omega_{\vec{q}} - c \text{Re} P_{\vec{q}})^2 + (c \text{Im} P_{\vec{q}})^2}, & \omega \approx \omega_{\vec{q}}, \\ \frac{1}{\pi} G_0^2(\vec{q}) \cdot c \text{Im} P_{\vec{q}}(\omega), & \omega \neq \omega_{\vec{q}}, \end{cases} \quad (7)$$

$G_0(\vec{q})$ — пространственная Фурье-компонента гриновской функции идеального ферромагнетика. Явное выражение для $P_{\vec{q}} = \text{Re } P_{\vec{q}} - i \text{Im } P_{\vec{q}}$ выписано в приложении.

При фиксированном значении импульса, переданного (для определенности) нейтроном кристаллу, функция K_3 от аргумента ω обнаруживает два максимума (если соответствующая $\omega_{\vec{q}}$ заметно отлична от резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$). Первый максимум наблюдается при $\omega \approx \omega_{\vec{q}}$, а другой — при $\omega = \omega_{\text{рез}}$. Причем

$$K_3(\vec{q}, \omega \approx \omega_{\text{рез}}) \approx -c \frac{1}{\pi} \frac{1}{8} \frac{\sigma'}{\sigma} \frac{\omega}{(\omega - \omega_{\vec{q}})^2} \frac{\text{Im } D_s}{(\text{Re } D_s)^2 + (\text{Im } D_s)^2} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[\sum_{\vec{l}-\vec{2}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{2}) \sum_{\vec{l}-\vec{6}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{6}) + \sum_{\vec{l}-\vec{5}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{5}) \right] \right\}. \quad (8)$$

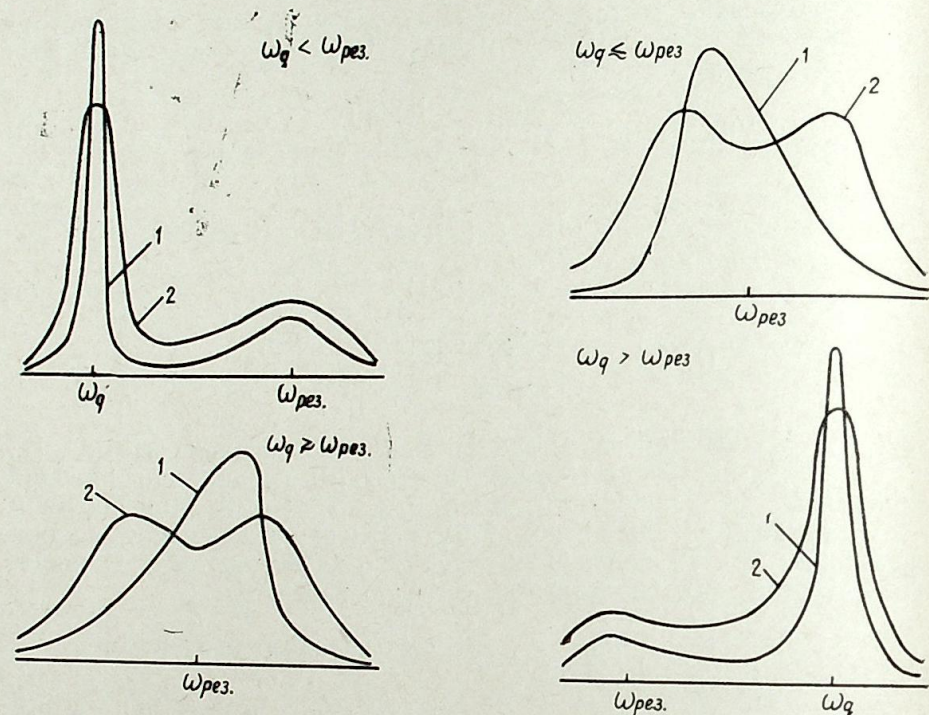


Рис. 2

Интенсивность резонансного пика пропорциональна числу примесных центров и зависит от ориентации вектора $\vec{q}$ относительно осей обратной решетки. В случае, когда $\omega_{\vec{q}} \approx \omega_{\text{рез}}$, ситуация, как явствует из расчета, следующая. При малых концентрациях когерентный пик асимметричен, а при увеличении концентрации вместо одного пика возникают два (см. рис. 2, кривые 1 и 2 соответствуют разным значениям концентрации. Причем 1 соответствует меньшей концентрации).

В заключение отметим, что интерференционный член сечения, а именно

$$K_2(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) \cos \left(\frac{b q_x}{2} \right) \cos \left(\frac{b q_y}{2} \right) \cos \left(\frac{b q_z}{2} \right) \text{Im } \frac{G_{\vec{q}}^0}{D_s} \quad (9)$$

(b — период решетки)

в некоторой степени вуалирует рассеяние на примесях и на атомах матрицы, не меняя, однако, общей картины.

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность А. П. Жернову за внимание к работе и советы.

Приложение

$$P_{\vec{q}}(\omega) = -\frac{\omega}{8 D_s} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sum_{\vec{l}-\vec{2}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{2}) + \sum_{\vec{l}-\vec{6}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{6}) + \sum_{\vec{l}-\vec{5}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{5}) \right) \right] + 2 \sigma' \left\{ \frac{1}{D_p} \left[3 - \frac{1}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{2}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{2}) + \frac{1}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{6}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{6}) - \frac{3}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{5}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{5}) \right] + \frac{1}{D_d} \left[3 - \frac{1}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{2}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{2}) - \frac{1}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{6}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{6}) + \frac{3}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{5}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{5}) \right] + \frac{1}{D_f} \left[1 + \frac{1}{4} \sum_{\vec{l}-\vec{2}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{2}) - \sum_{\vec{l}-\vec{6}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{6}) - \sum_{\vec{l}-\vec{5}} \cos \vec{q}(\vec{l}-\vec{5}) \right] \right\}.$$

Суммирования $\sum_{\vec{l}-\vec{2}}$, $\sum_{\vec{l}-\vec{5}}$ и $\sum_{\vec{l}-\vec{6}}$ означают следующее. Узлы кубической решетки в первой координационной сфере вокруг примесного атома попарно сгруппированы. Существуют три неэквивалентные группы таких пар. По ним и осуществляются указанные суммирования. Выражения для D_p , D_d и D_f даны в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Аугст Г. Р., Жернов А. П., Пашаев Х. М. ФТТ, 10, 2658, 1968.
2. Лифшиц И. М. ЖЭТФ, 17, 1076; 1947; 18, 203, 1948; Nuovo Cim., 3 Suppl., 4, 716, 1956.
3. Каган Ю., Иосилевский Я. А. ЖЭТФ, 42, 259, 1962; 44, 284, 1963.
4. Каган Ю., Жернов А. П. ЖЭТФ, 50, 1107, 1966.
5. Yu. Izyumov. Proc. Phys. Soc. 87, 521, 1966.
6. Каган Ю., Жернов А. П., Пашаев Х. М. Тр. Междунар. конф. "Localized excitations in Solids" (США, сентябрь 1967).
7. Жернов А. П., Аугст Г. Р., ФТТ, 9, 2196, 1967.
8. Жернов А. П., Аугст Г. Р. ФТТ, 11, 684, 1969.
9. Изюмеов Ю. А. УФН, 80, 31, 1963.

Поступило 30. V 1961

Х. М. Пашаев

Тэчрид олунмуш ашгар атомлара малик кристалларда
локал сэвијјэлэрдэн нејтронларын гејри-эластик магнит
сэпилмэси

ХҮЛАСЭ

Тэчрид олунмуш ашгар атомлара малик ферромагнитларда нејтронларын гејри-эластик сэпилмэси үчүн дифференциал эффектив кэсик несабланмышдыр. Мүэјјэнләшдирилмишди ки, магнон спектринин белә мэхсусијјэтләри тэчрүби јолла мүшаһидә едилә биләр.

УДК 539.3

И. А. БАХТИЯРОВ, Г. С. ВОЛЬПЕ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ДЕТАЛЯХ С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ КОНСТАНТАМИ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ЗАПРЕССОВКЕ

Данная статья посвящена изучению напряженного состояния пластинки, имеющей отверстие, в которое вставлена шайба из другого материала при помощи прессовой посадки. Толщина пластинки и шайбы одинакова. Скачок вектора смещения δr перпендикулярен линии сопряжения и величина его задана. Решение предлагаемой задачи выполнено на основе способа, изложенного в работах [2—5,7,9].

Обозначим через S_2 двухсвязную область с упругими константами μ_2, ν_2 , ограниченную извне окружностью L_2 с радиусом R , а изнутри—правильным криволинейным многоугольником L_1 с числом сторон $N=3, 4, 6, 8, \dots$. Пусть односвязная область S_1 с контуром L_1 и упругими константами μ_1, ν_1 при помощи прессовой посадки посажена в вырез области S_2 . Пластика и шайба расположены в плоскости $z = x + iy$. Центр окружности совпадает с центром многоугольника. Боковая поверхность пластинки свободна от внешних усилий.

Согласно исследованиям Г. В. Колосова и Н. И. Мухелишвили решение указанной задачи сводится к нахождению двух пар функций $\varphi_i(z), \psi_i(z)$ ($i=1, 2$), регулярных соответственно в областях S_1 и $S = S_1 + S_2$, удовлетворяющих определенным граничным условиям [1]. Решение данной задачи сводится к нахождению пары регулярных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ внутри L_2 , удовлетворяющих следующим граничным условиям [8]:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-t_2} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-t_2} d\bar{t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \overline{\omega'(t)} d \frac{t-t_2}{t-t_2} = \\ = \varphi(t_2) + t_2 \overline{\varphi'(t_2)} + \overline{\psi(t_2)} \text{ на } L_2, \quad (1)$$

$$c_1 \omega(t_1) + c_2 \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-t_1} dt + c_3 \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_1}{t-t_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \omega(t) d \ln \frac{t-t_1}{t-t_1} \right] = c_4 \varphi(t_1) - c_3 [t_1 \overline{\varphi'(t_1)} + \\ + \overline{\psi(t_1)}] + 2g(t_1) \text{ на } L_1, \quad (2)$$

где $g(t) = u + iv$ —скачок вектора смещения;
 c_i ($i=1, 2, 3, 4$)—известные постоянные;
 $\omega(t)$ —новая некоторая неизвестная функция, введенная при помощи специального соотношения на L_1 .

Возьмем функцию, конформно отображающую внешность правильного криволинейного многоугольника L_1 , с высокой степенью аппроксимирующего правильный прямолинейный многоугольник на внешность единичного круга γ_1 плоскости ζ [5]:

$$z = \omega(\zeta) = A \zeta \sum_{v=0}^{\infty} m_v \zeta^{-Nv} \quad (m_0 = 1), \quad (3)$$

где $A = \frac{R_0}{\sum_{v=0}^{\infty} m_v}$; R_0 —радиус окружности, описанной вокруг правильного многоугольника.

Для конкретной задачи вполне достаточно ограничиться первыми четырьмя членами, т. е. $m_v = 0$ при $v > 3$.

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ ищем в форме бесконечных рядов:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{z}{R} \right)^k \quad (a_0 = 0); \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{z}{R} \right)^k. \quad (4)$$

Неизвестную функцию $\omega(t)$ на контуре γ_1 в плоскости ζ будем искать в виде ряда Фурье [3, 4]:

$$\omega(t) = \omega^*(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \tau^k + \alpha_{-k} \tau^{-k}). \quad (5)$$

Функция $\omega(t)$ с учетом (3) принимает вид

$$\omega(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} \left(\frac{t}{A} \right)^{k-Nn} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k} \frac{1}{b_0^{(k)}} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(k)} \left(\frac{t}{A} \right)^{-k-Nn}. \quad (6)$$

Коэффициенты $b_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k)}$ определяются рекуррентными соотношениями [6, 7]. Учитывая выражение (6), вычисляем интегралы, входящие в условие (1), затем вычисленные интегралы и граничные значения $\varphi(z)$, $z\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ подставляем в условие (1) и окончательно получаем:

$$\sum_{v=-N+1}^{\infty} S_v^{(0)} \frac{1}{t_2^v} + \sum_{v=1}^{\infty} S_v^{(1)} \frac{1}{t_2^v} + \sum_{v=1}^{\infty} S_v^{(2)} t_2^v + \sum_{v=-N+1}^{\infty} S_v^{(3)} t_2^v + S_k^{(4)} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(5)} \frac{1}{t_2^{Nn-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(6)} \frac{1}{t_2^{N-1+Nn}} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(7)} \frac{1}{t_2^{2N-1+Nn}} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(8)} \frac{1}{t_2^{3N-1+Nn}} + \sum_{p=N-1}^{\infty} S_p^{(9)} t_2^p + \sum_{p=N-1}^{\infty} S_p^{(10)} t_2^p + \sum_{p=N-1}^{\infty} S_p^{(11)} t_2^p +$$

$$+ \sum_{p=N-1}^{\infty} S_p^{(12)} t_2^p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{t_2}{R} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k \left(\frac{R}{t_2} \right)^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left(\frac{R}{t_2} \right)^k. \quad (7)$$

Звездочка, приписанная к знаку суммы, указывает, что при переходе к смежному значению индекс суммирования возрастает на величину N .

Коэффициенты $S_v^{(0)}, S_v^{(1)}, S_v^{(2)}, S_v^{(3)}, S_k^{(4)}, S_n^{(5)}, S_n^{(6)}, S_n^{(7)}, S_n^{(8)}, S_p^{(9)}, S_p^{(10)}, S_p^{(11)}, S_p^{(12)}$ определяются следующими формулами:

$$S_v^{(0)} = - \sum_{k=NE\left(\frac{v+N-1}{N}\right)-v}^{\infty} a_k \frac{b_{k+v}^{(k)}}{N} A^v; \quad S_v^{(1)} = - \sum_{k=v-NE\left(\frac{v-1}{N}\right)}^{\infty} a_{-k} \frac{\beta_{v-k}^{(k)}}{N} A^v;$$

$$S_v^{(2)} = \sum_{k=v-NE\left(\frac{v-1}{N}\right)}^{\infty} a_k \frac{\beta_{v-k}^{(k)}}{N} \left(\frac{A}{R^2} \right)^v;$$

$$S_v^{(3)} = \sum_{k=NE\left(\frac{v+N-1}{N}\right)-v}^{\infty} a_{-k} \frac{b_{k+v}^{(k)}}{N} \left(\frac{A}{R^2} \right)^v; \quad S_k^{(4)} = Q_0 + Q_1(k) + Q_{10}(k);$$

$$S_n^{(5)} = Q_2(k) b_n A^{Nn-1};$$

$$S_n^{(6)} = Q_3(k) \frac{1}{b_0^{N-1}} \beta_n^{(N-1)} A^{N-1+Nn}; \quad S_n^{(7)} = Q_4(k) \frac{1}{b_0^{2N-1}} \beta_n^{(2N-1)} A^{2N-1+Nn};$$

$$S_n^{(8)} = Q_5(k) \frac{1}{b_0^{3N-1}} \beta_n^{(3N-1)} A^{3N-1+Nn};$$

$$S_p^{(9)} = \sum_{k_1=\frac{p+1}{N}}^{\infty} Q_6(k, k_1) \frac{b_{\frac{Nk_1-1}{N}}^{(Nk_1-1)}}{N} \frac{1}{A^p};$$

$$S_p^{(6)} = \sum_{k_1=\frac{p+1}{N}}^{\infty} Q_7(k_1) \frac{b_{\frac{Nk_1-1}{N}}^{(Nk_1-1)}}{N} \frac{1}{A^p}; \quad S_p^{(11)} = \sum_{k_1=\frac{p+1}{N}}^{\infty} Q_8(k, k_1) \frac{b_{\frac{Nk_1-1}{N}}^{(Nk_1-1)}}{N} \frac{1}{A^p};$$

$$S_p^{(12)} = \sum_{k_1=\frac{p+1}{N}}^{\infty} Q_9(k, k_1) \frac{b_{\frac{Nk_1-1}{N}}^{(Nk_1-1)}}{N} \frac{1}{A^p};$$

$$\text{где } Q_1(k) = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (k - Nn - 1) P_n \left[m_0 \sum_{n=0}^{\frac{k-1}{N}} \gamma_{k-Nn-1} + \right.$$

$$+ m_1 \sum_{n=1}^{\frac{k+N-1}{N}} \gamma_{k-Nn+N-1} + m_2 \sum_{n=2}^{\frac{k+2N-1}{N}} \gamma_{k-Nn+2N-1} + m_3 \sum_{n=3}^{\frac{k+3N-1}{N}} \gamma_{k-Nn+3N-1} +$$

$$+ \frac{1}{A} \left[m_2 \sum_{k=N-1}^{2N-1} k a_{-k} \sum_{n=0}^{\frac{2N-1-k}{N}} P_n \gamma_{\frac{2N-1-Nn-k}{N}} (Nn + k + 1) + \right. \\ \left. + m_3 \sum_{k=N-1}^{3N-1} k a_{-k} \sum_{n=0}^{\frac{3N-1-k}{N}} P_n \gamma_{\frac{3N-1-Nn-k}{N}} (Nn + k + 1) \right];$$

$$Q_2(k) = - \frac{m_0}{A} \sum_{k=N}^{\infty} k a_k \sum_{n=1}^{\frac{k}{N}} P_n \gamma_{\frac{k-Nn}{N}} (k - Nn - 1);$$

$$Q_3(k) = - \frac{m_1}{A} \sum_{k=N}^{\infty} k a_k \sum_{n=1}^{\frac{k}{N}} P_n \gamma_{\frac{k-Nn}{N}} (k - Nn - 1);$$

$$Q_4(k) = - \frac{m_2}{A} \sum_{k=N}^{\infty} k a_k \sum_{n=1}^{\frac{k}{N}} P_n \gamma_{\frac{k-Nn}{N}} (k - Nn - 1);$$

$$Q_5(k) = - \frac{m_3}{A} \sum_{k=N}^{\infty} k a_k \sum_{n=1}^{\frac{k}{N}} P_n \gamma_{\frac{k-Nn}{N}} (k - Nn - 1);$$

$$Q_6(k, k_1) = \frac{1}{A} \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \gamma_{k_1} \left[-m_0 \frac{P_{k-2}}{N} + (N-1) m_1 \frac{P_{k+N-2}}{N} + \right. \\ \left. + (2N-1) m_2 \frac{P_{k+2N-2}}{N} + (3N-1) m_3 \frac{P_{k+3N-2}}{N} \right];$$

$$Q_7(k_1) = -(N-1)(N-2) \frac{m_1}{A} a_{-N+2} \gamma_{k_1};$$

$$Q_8(k, k_1) = -(2N-1) \frac{m_2}{A} \sum_{k=N-2}^{2N-2} k a_{-k} \gamma_{k_1} \frac{P_{2N-2-k}}{N};$$

$$Q_9(k, k_1) = -(3N-1) \frac{m_3}{A} \sum_{k=N-2}^{3N-2} k a_{-k} \gamma_{k_1} \frac{P_{3N-2-k}}{N};$$

$$Q_{10}(k) = b_0^{(-1)} A [Q_6(k, 0) + Q_7(0) + Q_8(k, 0) + Q_9(k, 0)];$$

$$Q_0 = N(N-1) \frac{m_1}{A} a_{-N+1} \gamma_0; \quad P_e = - \sum_{n=1}^e P_{e-n} Q_n; \quad P_0 = 1,$$

Символ $E \left(\frac{k+1}{N} \right)$ означает целую часть, содержащуюся в $\frac{k+1}{N}$.

Сравнивая в (7) коэффициенты при одинаковых степенях t_2 , получаем первую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} S_0^{(0)} + S_0^{(3)} + S_k^{(4)} = a_0 + 2a_2 + d_0, \\ \varepsilon_0(\nu) S_0^{(0)} + S_0^{(2)} + S_0^{(3)} + \varepsilon_1(\nu) S_0^{(5)} + \varepsilon_2(\nu) [S_0^{(9)} + S_0^{(10)} + \\ + S_0^{(11)} + S_0^{(12)}] = \frac{a_\nu}{R^\nu} + \varepsilon_1(\nu) \frac{a_1}{R}, \\ S_0^{(0)} + S_0^{(1)} + \varepsilon_0(\nu) S_0^{(3)} + \varepsilon_2(\nu) [S_0^{(5)} + S_0^{(6)}] + \varepsilon_3(\nu) S_0^{(7)} + \\ + \varepsilon_4(\nu) S_0^{(8)} = (\nu+2) a_{\nu+2} R^\nu + d_\nu R^\nu; \quad (\nu=1, 2, 3, \dots, \infty), \end{cases} \quad (8)$$

(8a)

(8b)

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(\nu) &= 1, \text{ если } \nu \leq N-1; \quad \varepsilon_1(\nu) = 1, \text{ если } \nu = 1; \\ \varepsilon_2(\nu) &= 1 \quad \nu = N-1, 2N-1; 3N-1, \dots, \infty \\ \varepsilon_3(\nu) &= 1 \quad \nu = 2N-1; 3N-1, 4N-1, \dots, \infty; \\ \varepsilon_4(\nu) &= 1 \quad \nu = 3N-1, 4N-1, 5N-1, \dots, \infty; \end{aligned}$$

остальные $\varepsilon_k(\nu) = 0$ ($0 \leq k \leq 4$), если ν не соответствует вышеуказанным значениям.

Вычисляя интегралы, входящие в условие (2), и переходя к τ_1 , а также преобразуя вид скачка вектора смещения

$$\begin{aligned} 2 \delta r e^{i\varphi} &= m_0 \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu (\tau_1^{N\nu+1} + \tau_1^{-N\nu+1}) - (N-1) m_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu (\tau_1^{N\nu-N+1} + \\ &+ \tau_1^{-N\nu-N+1}) - (2N-1) m_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu (\tau_1^{N\nu-2N+1} + \tau_1^{-N\nu-2N+1}) - \\ &- (3N-1) m_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu (\tau_1^{N\nu-3N+1} + \tau_1^{-N\nu-3N+1}) \end{aligned}$$

здесь

$$M_\nu = \frac{2 \delta r}{V h_0} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q C_{2q}^{2q-1} E_{\nu-1}^{(q)} C_{2q}^{(2q-1)} = \frac{(2q-1)!!}{2q!!};$$

$$h_0 = m_0^2 + (N-1)^2 m_1^2 + (2N-1)^2 m_2^2 + (3N-1)^2 m_3^2;$$

$$E_e^{(q)} = \frac{1}{e E_0} \sum_{n=1}^e (nq - e + n) E_n E_{e-n}^{(q)}; \quad E_0^{(q)} = E_0^q;$$

$$E_0 = \frac{(N-1)(2N-1) m_1 m_2 - (N-1) m_0 m_1 + (2N-1)(3N-1) m_2 m_3}{h_0};$$

$$E_1 = \frac{(N-1)(3N-1) m_1 m_3 - (2N-1) m_0 m_2}{h_0};$$

$$E_2 = -\frac{(3N-1) m_0 m_3}{h_0}; \quad E_n = 0 \text{ при } n > 2,$$

и после некоторых математических выкладок, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ_1 , получим вторую бесконечную линейную алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} F_{11}(\kappa) = 0; \\ F_{10}(\kappa, \nu + \eta_0(\nu) F_2(\kappa) + \eta_1(\nu) F_1\left(\frac{\nu+1}{N}\right) = m_0 M_{\frac{\nu-1}{N}} \eta_2(\nu) - \\ - (N-1) m_1 \eta_3(\nu) M_{\frac{\nu+N-1}{N}} - (2N-1) m_2 \eta_3(\nu) M_{\frac{\nu+2N-1}{N}} - \\ - (3N-1) m_3 \eta_3(\nu) M_{\frac{\nu+3N-1}{N}}; \\ F_9(\kappa, \nu) + \eta_4(\nu) F_3(\kappa) + \eta_5(\nu) F_4(\kappa) + \eta_6(\nu) F_5(\kappa) + \\ + \eta_0(\nu) F_1(0) = m_0 \eta_1(\nu) M_{\frac{\nu+1}{N}} - (N-1) m_1 \eta_7(\nu) M_{\frac{\nu-N+1}{N}} - \\ - (2N-1) m_2 \eta_8(\nu) M_{\frac{\nu-2N+1}{N}} - (3N-1) \times \\ \times m_3 \eta_9(\nu) M_{\frac{\nu-3N+1}{N}} - (2N-1) m_2 \eta_4(\nu) M_1 - \\ - (3N-1) m_3 \eta_{10}(\nu) M_{\frac{\nu+1}{N}} \quad (\nu=1, 2, 3, \dots, \infty) \end{cases} \quad (9)$$

(9a)

(9b)

где

$$\begin{aligned} \eta_0(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = 1; \quad \eta_1(\nu) = 1, \text{ если } \nu = (N-1), (2N-1), (3N-1), \dots, \infty; \\ \eta_2(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (N+1), (2N+1), \dots, \infty; \\ \eta_3(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = 1, (N+1), (2N+1), \dots, \infty; \\ \eta_4(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = N-1; \quad \eta_5(\nu) = 1, \text{ если } \nu = 2N-1; \\ \eta_6(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (3N-1); \\ \eta_7(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (2N-1), (3N-1), \dots, \infty; \\ \eta_8(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (3N-1), (4N-1), \dots, \infty; \\ \eta_9(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (4N-1), (5N-1), \dots, \infty; \\ \eta_{10}(\nu) &= 1, \text{ если } \nu = (N-1), (2N-1); \end{aligned}$$

$\eta_k(\nu) = 0$ ($0 \leq k \leq 10$), если ν не соответствует вышеуказанным значениям.

Здесь

$$\begin{aligned} F_0(\kappa) &= \sum_{k=N}^{\infty} \kappa a_k \left(m_0 \gamma_{\frac{k}{N}} + m_1 \gamma_{\frac{k+N}{N}} + m_2 \gamma_{\frac{k+2N}{N}} + m_3 \gamma_{\frac{k+3N}{N}} - \right. \\ &- \left. \left(N a_{-N} m_1 \gamma_0 + \sum_{k=N}^{2N} a_{-k} m_2 \gamma_{\frac{2N-k}{N}} + \sum_{k=N}^{3N} a_{-k} m_3 \gamma_{\frac{3N-k}{N}} \right) \right); \\ F_1(\kappa_1) &= [-a_1 m_0 + (N-1) m_1 a_{-N+1} + (2N-1) m_2 a_{-2N+1} + \\ &+ (3N-1) m_3 a_{-3N+1}] \gamma_{\kappa_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\kappa) &= a_{-1} m_0 \gamma_0 - \sum_{k=N-1}^{\infty} \kappa a_k m_0 \gamma_{\frac{k+1}{N}}; \quad F_4(\kappa) = a_{-1} m_2 \gamma_0 - \\ &- \sum_{k=N-1}^{\infty} \kappa a_k m_2 \gamma_{\frac{k+1}{N}}; \end{aligned}$$

$$F_3(\kappa) = a_{-1} m_1 \gamma_0 - \sum_{k=N-1}^{\infty} \kappa a_k m_1 \gamma_{\frac{k+1}{N}}; \quad F_5(\kappa) = a_{-1} m_3 \gamma_0 - \sum_{k=N-1}^{\infty} \kappa m_3 a_k \gamma_{\frac{k+1}{N}};$$

$$\begin{aligned} F_6(\kappa, p) &= \sum_{k=1}^{\infty} \kappa a_k \left(\frac{A}{R} \right)^k [\eta_0(\kappa) m_0 D_{k+p-2}^{(k-1)} + m_1 D_{k+p+N-2}^{(k-1)} + \\ &+ m_2 D_{k+p+2N-2}^{(k-1)} + m_3 D_{k+p+3N-2}^{(k-1)}] + 2m_0 a_2 \left(\frac{A}{R} \right)^2 D_p^{(1)}; \end{aligned}$$

$$\eta_0(\kappa) = \begin{cases} 1, & \text{если } \kappa \geq 3, \\ 0, & \text{если } \kappa < 3; \end{cases}$$

$$F_7(\kappa, p) = \sum_{\kappa=p+2}^{\infty} m_0 \kappa a_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa-p-2}^{(\kappa-1)}; \quad F_8(p) = m_0 a_1 \frac{A}{R} D_{p-1}^{(0)};$$

$$F_9(\kappa, \nu) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa+\nu}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa+\nu-Nn}^{(\kappa-Nn)} (c_2 + c_3) -$$

$$- c_3 \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} a_{-\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa+\nu}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa+\nu-Nn}^{(\kappa-Nn)} + c_3 F_7(\kappa; \nu) + c_3 \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} d_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa-\nu}^{(\kappa)} -$$

$$- c_4 \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa+\nu}^{(\kappa)} + c_1 a_{-\nu};$$

$$F_{10}(\kappa, \nu) = c_1 a_{\nu} - \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} a_{\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa-\nu}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa-\nu-Nn}^{(\kappa-Nn)} (c_2 + c_3) +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{-\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa-\nu}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa-\nu-Nn}^{(\kappa-Nn)} - c_4 \sum_{\kappa=\nu}^{\infty} a_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa-\nu}^{(\kappa)} +$$

$$+ c_3 \left[F_6(\kappa, \nu) + F_8(\nu) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} d_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa-\nu}^{(\kappa)} \right];$$

$$F_{11}(\kappa) = c_3 F_0(\kappa) + c_1 \sigma_0 - c_2 \sigma_0 - 2c_3 \sigma_0 - c_4 \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa}^{(\kappa)} +$$

$$+ c_3 F_6(\kappa, 0) + c_3 \sum_{\kappa=0}^{\infty} d_{\kappa} \left(\frac{A}{R}\right)^{\kappa} D_{\kappa}^{(\kappa)} - c_3 \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{-\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa-Nn}^{(\kappa-Nn)} -$$

$$- (c_2 + c_3) \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{\kappa}{N}\right)} b_n^{(\kappa)} D_{\kappa-Nn}^{(\kappa-Nn)},$$

где

$$D_q^{(\kappa)} = \frac{1}{p Q_0} \sum_{q=1}^{\kappa p} (q\kappa - p + q) Q_q D_{p-q}^{(\kappa)}, \quad p \geq 1.$$

$$Q_0 = D_0 = D_0^{(\kappa)} = 1; \quad Q_q = m_{\frac{q}{N}};$$

$$D_q^{(\kappa)} = 0 \text{ при } q > 3\kappa \text{ и } q \text{ не кратном } N.$$

При заданных относительных размерах и упругих постоянных для каждого конкретного случая из бесконечной системы уравнений (8а), (8б), (9а), (9б), с учетом (8) и (9), выделяются первые несколько уравнений, при совместном решении которых определяются искомые неизвестные $a_0, a_{\kappa}, a_{-\kappa}, a_{\kappa}, d_0, d_{\kappa}, (\kappa = 1, 2, \dots)$. Выбор количества уравнений зависит от степени точности, с которой в рассматриваемых примерах желательно получить отыскиваемое решение. Зная коэффициенты $a_0, a_{\kappa}, a_{-\kappa}, a_{\kappa}, d_0, d_{\kappa}$, определяем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Определив эти функции нетрудно по известной формуле [8, 9] определить и искомые функции $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ и $\varphi_2(z), \psi_2(z)$, а затем и поле напряжений в сопрягаемых средах по формуле:

$$\sigma_r - i\sigma_{\theta} = \operatorname{Re} \varphi_j'(z) - \bar{z} e^{2i\theta} \varphi_j''(z) - e^{2i\theta} \psi_j'(z) \quad (j = 1, 2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1965.
2. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. XXVII, вып. 9, 1940.
3. Амензаде Ю. А., Асланкулов Т. "Прикладная механика", ССМ и кибернетика АН УССР, т. 11, вып. 10, 1966.
4. Амензаде Ю. А. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, 1963, № 5.
5. Найман М. И. Сб. "Расчеты на прочность", вып. 3, 1958.
6. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
7. Вольпе Г. С. Сб. Механика, физика, математика. Сборник научных трудов, ВЗИПП, М., 1968.
8. Мустафаев Дж. М., Мамедов А. А. "Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова, серия физ.-матем. наук", 1966, № 4.
9. Scherman D. J. On the problem of plane strain in nonhomogeneous media, Proceedings of an U. U. T. A. M. Symposium held in Warsaw, Sept, 1958.

Поступило 24. III 1968

И. А. Бэхтијаров, Г. С. Волпе

Мүхтәлиф еластики сабитләре малик олан деталларын
пресләнмәсиндә јаранан кәркинликли вәзијјәтә даир

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда дүзкүн чохбучаглы дешијә малик олан даирәви лөв-
һәјә пресләмә јолу илә дүзкүн чохбучаглы формалы шајбанын кејди-
рилмәсиндә јаранан кәркинликли вәзијјәти тәјин едән $\varphi(z)$ вә $\psi(z)$
аналитик функцијалары тәјин етмәк үчүн чәбри тәнликләр системи
гурулмушдур. Бурада лөвһә вә шајбанын мүхтәлиф материаллардан
олдуғу нәзәрдә тутулмушдур.

Э. Дж. АСЛАНОВ, Ю. И. ДОМШЛАК

О НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, СВЯЗАННЫХ С РЕШЕНИЯМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Пусть H_1 и H_2 суть комплексные гильбертовы пространства, K — линейный ограниченный оператор, действующий из H_1 в H_2 . В работе [1] показано, что для любого $\xi \in H_2$ существует единственный элемент $\eta \in H_1$, минимизирующий функционал

$$E(\eta) = (K\eta - \xi, K\eta - \xi)_2 + \alpha(\eta, \eta)_1, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

определяемый единственным образом из уравнения

$$\alpha\eta + K^*K\eta = K^*\xi. \quad (2)$$

Замечание. Из доказательства этой теоремы в работе [1] можно видеть, что ограничение $\alpha > 0$ нужно лишь для заведомой непрерывной обратимости оператора $\alpha I + K^*K$. Если же оператор K^*K сам непрерывно обратим, то можно положить в (1) $\alpha = 0$. Тогда решение уравнения (2) примет вид

$$\eta = (K^*K)^{-1}K^*\xi. \quad (3)$$

Заметим также, что оператор K^*K может быть непрерывно обратим и в том случае, если оператор K имеет ограниченный обратный, определенный не на всем пространстве H_2 .

2. Рассмотрим теперь произвольное комплексное гильбертово пространство H со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\|$ и гильбертово пространство $L_2 = L_2(H, [0, T])$ с естественно определяемым скалярным произведением

$$[x, y] = \int_0^T (x(t), y(t)) dt.$$

Теорема. Пусть B и D суть линейные ограниченные операторы из L_2 в L_2 . Тогда для любых заданных $\xi_1 = \xi_1(t) \in L_2$ и $\xi_2 = \xi_2(t) \in L_2$ существует единственный элемент $\eta = \eta(t) \in L_2$, минимизирующий функционал

$$E(\eta) = \int_0^T \|B\eta - \xi_1\|^2 dt + \int_0^T \|D\eta - \xi_2\|^2 dt + \alpha \int_0^T \|\eta\|^2 dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (4)$$

который определяется единственным образом из уравнения

$$(\alpha I + B^*B + D^*D)\eta = B^*\xi_1 + D^*\xi_2, \quad (5)$$

причем для случая $\alpha = 0$ надо дополнительно предположить, чтобы хотя бы один из операторов B и D был бы непрерывно обратим. Этот случай ($\alpha = 0$) исследован в одной неопубликованной работе З. И. Халилова (отчет о научно-исследовательской работе в 1965 г.).

Доказательство. Применим к доказательству этой теоремы результат из [1], приведенный выше. В качестве H_1 возьмем L_1 , а в качестве H_2 — пространство $L_2 \times L_2$ с естественно определяемым скалярным произведением:

$$(\langle \xi_1, \xi_2 \rangle, \langle \eta_1, \eta_2 \rangle)_2 = [\xi_1, \eta_1] + [\xi_2, \eta_2].$$

В качестве оператора K , действующего из H_1 в H_2 , возьмем оператор $K\eta = \langle B\eta, D\eta \rangle$. Тогда из приведенного результата вытекает, что элемент $\eta \in L_2$, минимизирующий функционал (4), существует и определяется из уравнения (2), где $\xi = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$. Оператор K^*K имеет непрерывный обратный* ввиду обратимости хотя бы одного из операторов B и D , поэтому уравнение (5) разрешимо и при $\alpha = 0$.

Найдем оператор K^* , действующий, очевидно, из H_2 в H_1 . Ввиду того, что

$$(K\eta, \langle \xi_1, \xi_2 \rangle)_2 = (\langle B\eta, D\eta \rangle, \langle \xi_1, \xi_2 \rangle)_2 = [B\eta, \xi_1] + [D\eta, \xi_2] = [\eta, B^*\xi_1 + D^*\xi_2],$$

имеем

$$K^* \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = B^*\xi_1 + D^*\xi_2.$$

Таким образом уравнение (2) для нашего случая примет вид (5), что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим теперь задачу Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad u(t) \Big|_{t=0} = \varphi, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где A — линейный ограниченный оператор в H .

В работе [2] (см. также [3]) была рассмотрена задача о нахождении управления $f \in L_2$, минимизирующего функционал

$$E(f) = \int_0^T \|u(t) - g(t)\|^2 dt + \alpha \int_0^T \|f(t)\|^2 dt,$$

где $g(t) \in L_2$ — заданная функция. Рассмотрим теперь аналогичную задачу, где «цена управления» остается прежней, а в «цену отклонения» введем производную решения. Точнее говоря, рассматривается следующая

Задача. Найти $f(t) \in L_2$, минимизирующую функционал

$$E(f) = \int_0^T \|u(t) - h(t)\|^2 dt + \int_0^T \|u'(t) - h'(t)\|^2 dt + \alpha \int_0^T \|f(t)\|^2 dt, \quad \alpha \geq 0, \quad (7)$$

где $u(t)$ есть решение задачи (6), а $h(t)$ — заданная трижды непрерывно дифференцируемая функция.

Решение. Если обозначить

$$Bf = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau, \quad Df = f(t) - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} Af(\tau) d\tau,$$

* Сам оператор K имеет ограниченный обратный, но определенный лишь на некотором подпространстве. Поэтому (3), вообще говоря, нельзя записать в виде $\eta = K^{-1}\xi$.

то функционал (7) примет вид (4). Таким образом, минимизирующая функция $f(t) \in L_2$ определяется из уравнения (5), которое нужно выписать для нашего случая.

Нетрудно показать, что

$$B^*f = \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} f(\tau) d\tau, \quad B^*Bf = \int_0^T \int_0^\tau e^{-(\tau-t)A^*} e^{-(\tau-s)A} f(s) ds d\tau,$$

$$D^*Df = f(t) + \int_t^T \int_0^\tau e^{-(\tau-t)A^*} A^*A e^{-(\tau-s)A} f(s) ds d\tau - \int_0^t e^{-(t-\tau)A} Af(\tau) d\tau -$$

$$- \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} A^* f(\tau) d\tau, \quad D^*f = f(t) - \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} A^* f(\tau) d\tau.$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$(1 + \alpha)f(t) + \int_t^T \int_0^\tau e^{-(\tau-t)A^*} (A^*A + I) e^{-(\tau-s)A} f(s) ds d\tau -$$

$$- \int_0^t e^{-(t-\tau)A} Af(\tau) d\tau - \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} A^* f(\tau) d\tau = G(t), \quad (8)$$

где

$$G(t) = h'(t) + Ae^{-tA}\varphi + \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} [h(\tau) - A^*h'(\tau) -$$

$$- (I + A^*A)e^{-\tau A}\varphi] d\tau.$$

Причем из условий задачи видно, что $G(t)$ дважды непрерывно дифференцируема. Очевидно, (8) имеет единственное решение, так как (8) есть другая запись уравнения (5), которое разрешимо единственным образом.

Сведем уравнение (8) к эквивалентной граничной задаче для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Продифференцировав (8), получим

$$(1 + \alpha)f'(t) + \int_t^T \int_0^\tau e^{-(\tau-t)A^*} A^* (A^*A + I) e^{-(\tau-s)A} f(s) ds d\tau -$$

$$- (A^*A + I) \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^2 f(\tau) d\tau +$$

$$+ (A^* - A)f(t) - \int_t^T e^{-(\tau-t)A^*} A^* f(\tau) d\tau = G'(t). \quad (9)$$

Поддействовав на все члены (8) оператором $-A^*$ и сложив с (9), получим

$$(1 + \alpha)f'(t) - (\alpha A^* + A)f(t) + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} (A^2 - I)f(\tau) d\tau =$$

$$= h''(t) - h(t) - (A^2 - I)e^{-tA}\varphi. \quad (10)$$

Продифференцировав (10), будем иметь

$$(1 + \alpha)f''(t) - (\alpha A^* + A)f'(t) + (A^2 - I)f(t) -$$

$$- \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A(A^2 - I)f(\tau) d\tau = h'''(t) - h'(t) + A(A^2 - I)e^{-tA}\varphi. \quad (11)$$

Поддействовав на все члены (10) оператором A и складывая с (11) получим дифференциальное уравнение

$$(1 + \alpha)f''(t) - \alpha(A^* - A)f'(t) - (I + \alpha A^*A)f(t) =$$

$$= h'''(t) + Ah''(t) - h'(t) - Ah(t) \quad (12)$$

с граничными условиями

$$(1 + \alpha)f(T) - \int_0^T e^{-(T-\tau)A} Af(\tau) d\tau = h'(T) + Ae^{-TA}\varphi, \quad (13)$$

$$(1 + \alpha)f'(0) - (\alpha A^* + A)f(0) = h''(0) - h(0) - (A^2 - I)\varphi, \quad (14)$$

которое получается, если положить в (8) $t = T$ и в (10) $t = 0$.

Для случая $\alpha = 0$ решение задачи может быть доведено до конца. Положим в (12), (13), (14) $\alpha = 0$ и $h(t) = 0$, тогда задача примет вид:

$$f''(t) - f(t) = 0, \quad (15)$$

$$f(T) - \int_0^T e^{-(T-\tau)A} Af(\tau) d\tau = Ae^{-TA}\varphi, \quad (16)$$

$$f'(0) - Af(0) = (I - A^2)\varphi. \quad (17)$$

Все решения уравнения (15), очевидно, имеют вид

$$f(t) = e^t \cdot x + e^{-t} \cdot y, \quad (18)$$

где $x, y \in H$ подлежат определению из (16) и (17).

Подставив (18) в (16) и (17), относительно x и y получим систему:

$$[e^{-TA} + e^T(A + I)^{-1}(I - e^{-T(A+I)})]x +$$

$$+ [e^{-TA} - e^{-T}(A - I)^{-1}(I - e^{-T(A-I)})]y = Ae^{-TA}\varphi,$$

$$(A - I)x + (A + I)y = (A^2 - I)\varphi. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что матричный оператор в левой части (19) имеет обратный, равный.

$$\frac{1}{e^T + e^{-T}} \begin{pmatrix} A + I & -e^{-TA} + e^{-T}(A - I)^{-1}(I - e^{-T(A-I)}) \\ -(A - I) & e^{-TA} + e^T(A + I)^{-1}(I - e^{-T(A+I)}) \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$x = \frac{e^{-2T}}{e^{-2T} + 1} (A + I)\varphi \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{e^{-2T} + 1} (A - I)\varphi. \quad (20)$$

Подставив (20) в (19), будем иметь окончательное решение нашей вариационной задачи для случая: $\alpha = 0, h(t) = 0$.

$$f(t) = \frac{\text{ch}(T-t)}{\text{ch } T} A\varphi - \frac{\text{sh}(T-t)}{\text{ch } T} \varphi. \quad (21)$$

Замечание. Выражением $C^{-1}(I - e^{-C})$ для удобства пользуемся и в случае отсутствия обратного у оператора C . Строго говоря, под этим выражением понимается

$$C^{-1}(I - e^{-C}) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{C^j}{(j+1)!}.$$

Если $h(t) \neq 0$, то простой заменой задача может быть сведена к рассмотренному случаю и окончательно

$$f(t) = Ah(t) + h'(t) + \frac{\text{ch}(T-t)}{\text{ch } T} A(\varphi - h(0)) -$$

$$- \frac{\text{sh}(T-t)}{\text{ch } T} (\varphi - h(0)).$$

Сведение интегрального уравнения к задаче для дифференциального уравнения, приведенное нами, можно считать эвристикой. Все эти шаги оказываются обоснованными, если функцию $f(t)$ из (21) подставить в уравнение (8) при $(\alpha = 0)$ и непосредственно убедиться в том, что она и в самом деле является его решением.

4. Приведем одно из возможных применений этой вариационной задачи. Пусть некий процесс описывается задачей Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(x)u(t, x) + \int_{\Omega} K(x, y)u(t, y)dy = f(t, x),$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу.

Требуется найти управление $f(t, x)$, минимизирующее функционал

$$E(f) = \int_0^1 \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx dt + \int_0^1 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|^2 dx dt.$$

Если область Ω и ядро $K(x, y)$ таковы, что оператор

$$Ku = \int_{\Omega} K(x, y) d(y) dy$$

является ограниченным в $H = L_2(\Omega)$ и если $|a(x)| \leq M$, то можно применить наш результат и тогда

$$f(t, x) = \frac{\text{ch}(T-t)}{\text{ch} T} \left\{ \int_{\Omega} K(x, y)\varphi(y)dy + a(x)\varphi(x) \right\} - \frac{\text{sh}(T-t)}{\text{ch} T} \varphi(x).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Халилов З. И., Асланов Э. Дж. „ДАН СССР“, 169, 1969, № 5.
2. Асланов Э. Дж. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1955, № 5.
3. Асланов Э. Дж. Тр. ИК АН Азерб. ССР, т. 5, 1968.

Поступило 18. VI 1968

Е. Ч. Асланов, J. И. Домшлак

**Нилберт фэзасында дифференциал тэнликлэрин нэлли
илэ элагэдар олан бэ'зи вариасија
мэсэлэлэри наггында**

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ нилберт фэзасында (7) функционалына минимум верэн функцијанын (8) тэнлијини өдэмэсиндэн бэ'нс едилмишдир. Алынган мүчэррэд нэтичэ интегродифференциал тэнлик үчүн гојулмуш бир вариасија мэсэлэсинэ тэтбиг олунамшдур.

УДК 517—537

З. Н. ГАСАНОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПОЛОСЕ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОВ ДИРИХЛЕ

Рассмотрим класс функций $B_p(\bar{D})$, аналитических в полосе $D = \{x_1 < x < x_2, -\infty < y < \infty\}$, непрерывных в замкнутой полосе $\bar{D}$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{B_p(\bar{D})} = \sup_{x_1 < x < x_2} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x + iy)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Наряду с этим рассмотрим величину

$$\|f\|_{B_p(\gamma_j)} = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x_j + iy)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad j = 1, 2, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

где γ_j — прямая $z = x_j + iy$ ($-\infty < y < \infty$), $j = 1, 2$.

Определим теперь наилучшее приближение функции $f(z) \in B_p(\bar{D})$ посредством полиномов Дирихле

$$Q_n(z) = \sum_{v=1}^{2n} c_v e^{m_v z}$$

в смысле нормы нашего пространства

$$A_n(f; \bar{D})_{B_p(\bar{D})} = \inf_{Q_n} \|f(z) - Q_n(z)\|_{B_p(\bar{D})}$$

и наилучшее приближение функции посредством полиномов

$$P_1(y) = \sum_{v=1}^n a_v e^{i\lambda_v y} \text{ и } P_2(y) = \sum_{v=1}^n b_v e^{i\mu_v y},$$

где λ_v и μ_v — любые действительные числа в смысле нормы $B_p(\gamma_j)$ ($j = 1, 2$):

$$A_n(f; \gamma_j)_{B_p(\gamma_j)} = \inf_{(P_j)} \|f(x_j + iy) - P_j(y)\|_{B_p(\gamma_j)}, \quad j = 1, 2.$$

В данной работе мы изучали поведение наилучшего приближения $A_n(f; \bar{D})_{B_p(\bar{D})}$ по области $\bar{D}$, исходя из поведения наилучших прибли-

жений $A_n(f; \gamma_j)_{B_p(\gamma_j)}$ ($j = 1, 2$) вдоль граничных прямых γ_1, γ_2 при $1 \leq p \leq \infty$.

Аналогичные задачи нами были решены в работе [3], когда аппаратом приближения служат целые функции. Сначала требуется доказать основные леммы, которые базируются на следующей теореме:

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — измеримая функция, для которой интеграл

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x)|^p dx \quad (p > 1)$$

ограничен по T . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|f(x)|}{\sqrt{1+x^2}} \right)^p dx < \infty \quad (p > 1).$$

Доказательство. В самом деле, интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \left(\frac{|f(x)|}{\sqrt{1+x^2}} \right)^p dx &= \int_{-A}^A \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{d}{dx} \int_0^x |f(t)|^p dt = \\ &= \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} \int_0^A |f(t)|^p dt - \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} \int_0^{-A} |f(t)|^p dt - \\ &- \int_{-A}^A \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}}} \right\} \left\{ \int_0^x |f(t)|^p dt \right\} dx = \frac{1}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} \int_{-A}^A |f(t)|^p dt + \\ &+ \int_0^A \frac{px}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} \left(\int_{-x}^x |f(t)|^p dt \right) dx = \frac{2A}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{2A} \int_{-A}^A |f(t)|^p dt + \\ &+ \int_0^A \frac{2px^2}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} \left(\frac{1}{2x} \int_{-x}^x |f(t)|^p dt \right) dx \leq \\ &\leq \left\{ \frac{2A}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} + \int_0^A \frac{2px^2 dx}{(1+x^2)^{\frac{p}{2}+1}} \right\} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt \leq \\ &\leq \left\{ \frac{2A}{(1+A^2)^{\frac{p}{2}}} + 2p \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-1} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{(p-1)A^{p-1}} \right) \right\} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Из условия теоремы и из последнего неравенства следует, что при $A \rightarrow \infty$ и $1 < p < \infty$ интеграл

$$\int_{-A}^A \left(\frac{|f(x)|}{\sqrt{1+x^2}} \right)^p dx$$

конечен. При $p = 2$ эта теорема доказана Н. Винером [1].

Теорема 2. Пусть $F(z)$ аналитична в полосе $\bar{D}$ и пусть в этой области справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^p dy < \infty \quad (x_1 \leq x \leq x_2, \quad p > 1).$$

Тогда в полосе $x_1 < x < x_2$ имеет место равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x_2+it)}{x_2+it-z} dz - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x_1+it)}{x_1+it-z} dt.$$

Эту теорему при $p = 2$ доказали Н. Винер и Р. Пэли [2]. При $p > 1$ доказательство аналогично, но вместо неравенства Буняковского применяется неравенство Гельдера. На основании теоремы 1, если $f(x+iy)$ аналитична в полосе $\bar{D}$ и

$$\int_{-T}^T |f(x+iy)|^p dy = O(T) \quad (p > 1)$$

равномерно по x при $x_1 \leq x \leq x_2$, функция

$$\frac{f(x+iy)}{x+iy-c} \quad (x_1 < x_2 < c) \quad (1)$$

будет равномерно принадлежать $L_p(p > 1)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$. Теперь докажем лемму, которая очень важна для дальнейшего.

Лемма. Если $f(x+iy)$ аналитична в полосе $\bar{D}$ и

$$\int_{-T}^T |f(x+iy)|^p dy = O(T) \quad (p > 1) \quad (2)$$

равномерно по x при $x_1 \leq x \leq x_2$, то при $x_1 < x < x_2$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2+it) K_1(z-x_2-it) dt - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1+it) K_2(z-x_1-it) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$K_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) e^{zt} dt \quad (\operatorname{Re} z < 0),$$

$$K_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n(t) - 1] e^{zt} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (4)$$

являются преобразованиями Фурье, соответственно, функций $e^{xt} \varphi_n(t)$, $e^{xt} [\varphi_n(t) - 1]$, а функция $\varphi_n(t)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < n, \\ \frac{t-n}{2} & \text{при } n \leq t < n+2, \\ 1 & \text{при } n+2 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство. На основании теоремы 2 для функции (1) при $x_1 < x < x_2$ справедливо равенство

$$\frac{f(z)}{z-c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_2+it) dt}{(x_2+it-c)(x_2+it-z)} -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1+it) dt}{(x_1+it-c)(x_1+it-z)}.$$

Отсюда имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2+it) \left(\frac{1}{x_2+it-z} - \frac{1}{x_1+it-c} \right) dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1+it) \left(\frac{1}{x_1+it-z} - \frac{1}{x_1+it-c} \right) dt. \quad (6)$$

На бесконечности при любом $x < 0$ будем иметь $K_1(x+iy) = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$, а при любом $x > 0$ $K_2(x+iy) = O\left(\frac{1}{y^2}\right)$.

Рассмотрим теперь при $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} \xi < c$ функцию

$$h_1(\xi) = \frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi-c} - K_1(z-\xi) =$$

$$= \int_0^n e^{(z-\xi)t} dt + \int_n^{n+2} \left(1 - \frac{t-n}{2}\right) e^{(z-\xi)t} dt + \int_0^\infty n^{(\xi-c)t} dt \quad (7)$$

и при $\operatorname{Re} \xi < \operatorname{Re} z$ функцию

$$h_2(\xi) = \frac{1}{\xi-z} - \frac{1}{\xi-c} - K_2(z-\xi) =$$

$$= \int_0^n e^{(z-\xi)t} dt + \int_n^{n+2} \left(1 - \frac{t-n}{2}\right) e^{(z-\xi)t} dt + \int_0^\infty e^{(\xi-c)t} dt. \quad (8)$$

Из (7) и (8) видно, что $h_1(\xi)$ и $h_2(\xi)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию, которая имеет порядок $O\left(\frac{1}{(Im \xi)^2}\right)$ на бесконечности. Тогда по теореме Коши будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2+it) h_1(x_2+it) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+it) h_2(x_1+it) dt = 0.$$

Отсюда в силу (6) получаем равенство (3). Из сходимости интеграла (2) следует, что интегралы в правой части равенства (3) сходятся абсолютно.

Теперь установим связь между величинами $A_n(f; \bar{D}_p)_{B_p(\bar{D}_p)} (\rho > 0)$ и $A_n(f; \gamma_j)_{B_p(\gamma_j)} (j=1, 2)$ при $1 \leq p \leq \infty$. Пусть полиномы $P_j(y) (j=1, 2)$ наименее уклоняются от функции $f(x_j+iy) \in B_p(\gamma_j) (j=1, 2)$ среди всевозможных полиномов вида $\sum_{k=1}^n d_k e^{i a_k y}$. Рассмотрим разность

$$f(z) - Q_n(z) = f(z) - \sum_{v=1}^{2n} c_v e^{m_v z}.$$

Определим m_v и c_v следующим образом:

$$m_{2v-1} = \mu_v, \quad m_{2v} = \lambda_v, \quad c_{2v-1} = b_v e^{-\mu_v x_2} \varphi_n(\mu_v),$$

$$c_{2v} = -a_v e^{-\lambda_v x_1} [\varphi_n(\lambda_v) - 1] \quad (v=1, 2, 3, \dots),$$

где λ_v, μ_v и a_v, b_v — соответственно, показатели и коэффициенты данных полиномов $P_1(y)$ и $P_2(y)$. Тогда

$$f(z) - Q_n(z) = f(z) - \left\{ \sum_{v=1}^n c_{2v-1} e^{m_{2v-1} z} + \sum_{v=1}^n c_{2v} e^{m_{2v} z} \right\} =$$

$$= f(z) - \sum_{v=1}^n b_v e^{i \mu_v y} \{ \varphi_n(\mu_v) e^{\mu_v (x-x_2)} \} + \sum_{v=1}^n a_v e^{i \lambda_v y} \{ [\varphi_n(\lambda_v) - 1] e^{\lambda_v (x-x_1)} \}. \quad (9)$$

В силу преобразования обратного преобразования (4) находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(\mu_v) e^{\mu_v (x-x_2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-x_2+it) e^{-i \mu_v t} dt, \\ [\varphi_n(\lambda_v) - 1] e^{\lambda_v (x-x_1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-x_1+it) e^{-i \lambda_v t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

На основании (10) равенство (9) примет следующий вид:

$$f(z) - Q_n(z) = f(x+iy) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-x_2+it) \left\{ \sum_{v=1}^n b_v e^{i \mu_v (y-t)} \right\} dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-x_1+it) \left\{ \sum_{v=1}^n a_v e^{i \lambda_v (y-t)} \right\} dt =$$

$$= f(x+iy) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-x_2-it) P_2(y+t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-x_1-it) P_1(y+t) dt.$$

На основании тождества (3) при $x_1 < x < x_2$ получим

$$f(x+iy) - Q_n(x+iy) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(x_2+iy+it) -$$

$$- P_2(y+t) \} K_1(x-x_2-it) dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(x_1+iy+it) - P_1(y+t) \} K_2(x-x_1-it) dt. \quad (11)$$

Из равенства (11) в силу неравенства Минковского имеем

$$\left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x+iy) - Q_n(x+iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{ f(x_2+iy+it) - P_2(y+it) \} \times \right. \right.$$

$$\times K_1(x - x_2 - it) dt \left| dy \right|^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2\pi} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \times \right. \\ \left. \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x_1 + iy + it) - P_1(y + t)\} K_2(x - x_1 - it) dt \right|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Отсюда в силу обобщенного неравенства Минковского, учитывая определение наилучшего приближения, получаем

$$\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x + iy) - Q_n(x + iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq A_n(f; \gamma_2)_{B_p(\gamma_2)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x - x_2 - it)| dt + \\ + A_n(f; \gamma_1)_{B_p(\gamma_1)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_2(x - x_1 - it)| dt. \quad (12)$$

Теперь оценим интегралы

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x - x_2 - it)| dt \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_2(x - x_1 - it)| dt$$

при $x_1 < x < x_2$. В силу (4), выбирая n подходящим образом, непосредственно получаем

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x - x_2 - it)| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(\tau) e^{(x-x_2-it)\tau} d\tau \right| dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_n^{n+2} \frac{\tau - n}{2} e^{(x-x_2-it)\tau} d\tau + \int_{n+2}^{\infty} e^{(x-x_2-it)\tau} d\tau \right| dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2(x - x - it)} \int_n^{n+2} e^{(x-x_2-it)\tau} d\tau \right| dt \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(x_2 - x)^2 + t^2} = \frac{1}{2(x_2 - x)}.$$

Следовательно, при $x_1 < x < x_2$

$$P_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_1(x - x_2 - it)| dt \leq \frac{1}{2(x_2 - x)}; \quad (13)$$

аналогично

$$P_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_2(x - x_1 - it)| dt \leq \frac{1}{2(x - x_1)}. \quad (14)$$

В силу (13) и (14) неравенство (12) примет вид

$$\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x + iy) - Q_n(x + iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x - x_1} A_n(f; \gamma_1)_{B_p(\gamma_1)} + \frac{1}{x_2 - x} A_n(f; \gamma_2)_{B_p(\gamma_2)} \right\} \quad (15)$$

при $x_1 < x < x_2$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Из неравенства (15) при $x_1 + \rho \leq x \leq x_2 - \rho$

$$\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(x + iy) - Q_n(x + iy)|^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \frac{1}{2\rho} \{A_n(f; \gamma_1)_{B_p(\gamma_1)} + A_n(f; \gamma_2)_{B_p(\gamma_2)}\}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Отсюда, полагая $\rho = \frac{1}{m_{2n}}$, приходим к следующему заключению.

Теорема 3. Если функция $f(z) \in B_p(\bar{D})$, то

$$m_{2n}^{-1} A_n(f; \bar{D}_{1/m_{2n}})_{B_p(\bar{D}_{1/m_{2n}})} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \{A_n(f; \gamma_1)_{B_p(\gamma_1)} + A_n(f; \gamma_2)_{B_p(\gamma_2)}\}$$

при $1 \leq p \leq \infty$, где $A_n(f; \bar{D}_{1/m_{2n}})_{B_\infty(\bar{D}_{1/m_{2n}})} = A_n(f; \bar{D}_{1/m_{2n}})$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(z)$ внутри полосы $\bar{D}_{1/m_{2n}}$ посредством полиномов Дирихле $Q_n(z)$.

Известно, что для $f(z) \in B_p(\gamma_j)$ ($j = 1, 2$), $1 \leq p \leq \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f; \gamma_j)_{B_p(\gamma_j)} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Отсюда и из теоремы 3 следует

Следствие. Если $f(z) \in B_p(\bar{D})$ ($1 \leq p \leq \infty$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n}^{-1} A_n(f; \bar{D}_{1/m_{2n}})_{B_p(\bar{D}_{1/m_{2n}})} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения. М. 1963.
2. Влнер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., 1964.
3. Гасанов З. Н. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 3.

Поступило 18. IV 1968

З. Н. Гасанов

Комплекс дәјишәнли функцијаларын золагда
Дирихле полиномлары васитәсилә јахынлашмасы

ХҮЛАСӘ

Золагда аналитик функцијаларын Дирихле полиномлары васитәсилә ән јахшы јахынлашмасынын тәртиби золагын сәрһәд хәтләри үзрә ән јахшы јахынлашмаларын тәртиби васитәсилә өјрәнилмишдир.

Р. И. МУРАДОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Краевая задача для уравнения смешанного типа исследована в работах [3, 4, 5, 6] и т. д. В [5, 6] рассмотрена смешанная задача для уравнения, являющегося гиперболическим в одной части области и параболическим в другой, в зависимости от значения коэффициента при второй производной по времени.

В [6] исследована смешанная задача для гиперболического уравнения, вырождающегося при $t = 0$. В отличие от предыдущих авторов мы рассмотрим краевую задачу для уравнения гиперболического в одной части области, параболического в другой части и вырождающегося в начальной плоскости.

Рассмотрим уравнение

$$A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u + f(x, t) \quad (1)$$

в цилиндре $Q = D \times (0 < t < T)$, где D — ограниченная область в E^n с границей Γ , $(x = (x_1, \dots, x_n))$. Пусть область D разделена $(n-1)$ -мерной поверхностью на подобласти D_1 и D_2 . Обозначим через Γ_1 границу раздела этих областей. Тогда цилиндрическая поверхность $S = \Gamma_1 \times (0 < t < T)$ разбивает цилиндр Q на два подцилиндра: $Q_1 = D_1 \times (0 < t < T)$ и $Q_2 = D_2 \times (0 < t < T)$.

Пусть далее

$$a_{ij} = a_{ij}, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq a_0 t^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

(a_0, α — положительные постоянные) для любого действительного вектора

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n);$$

$B(x, t) \geq \lambda_0 > 0$ при $(x, t) \in Q_2 \cup S$, $\lambda_0 = \text{const} > 0$,

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, t) \in Q_1, \\ 0, & \text{если } (x, t) \in Q_2 \cup S. \end{cases}$$

Задача поставлена следующим образом: найти непрерывную в $\bar{Q}$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в Q , начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= 0 \quad \text{при } (x, t) \in Q, \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)|_{t=0} &= 0 \quad \text{при } (x, t) \in Q_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и граничному условию

$$u(x, t)|_B = 0, \quad (3)$$

где

$$B = \Gamma \times (0 < t < T).$$

В качестве основных пространств возьмем $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}'$, определенные в [6]. Обобщенным решением задачи (1)–(3) будем называть такую функцию $u(x, t) \in \mathcal{Q}$, при которой для любой функции $v(x, t)$ вида $v(x, t) = \int_0^t w(x, \tau) d\tau$, где $w(x, t)$ такова, что

$$w(x, t)|_B = 0 \text{ и } \iint_Q \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 dx dt < +\infty,$$

выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} & - \iint_{Q_1} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} dx dt + \iint_Q B(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} v dx dt + \iint_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \times \\ & \times \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt - \iint_Q \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx dt - \\ & - \iint_Q c(x, t) u v dx dt = \iint_Q f(x, t) v dx dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть функции $a_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) непрерывны в $\bar{Q}$ и имеют ограниченные первые производные по t при $t > 0$ и пусть $b_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) суть $O\left(t^{\frac{\alpha-1}{2}} \beta(t)\right)$ для каждого $x \in D$, где $\beta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, а $B(x, t)$, $c(x, t)$ непрерывны. Пусть далее

$$\sum_{i,j=1}^n \left((\alpha + \delta_0) a_{ij} - t \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \xi_i \xi_j \geq \nu_0 t^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad (*)$$

(ν_0, δ_0 — положительные постоянные).

Тогда, если $f(x, t)$ имеет конечный интеграл

$$\iint_Q \frac{f^2(x, t)}{t^{\alpha+\epsilon_0}} dx dt,$$

то существует обобщенное решение $u(x, t)$ задачи (1)–(3).

Условие (*) носит характер ограничений на поведение коэффициентов $a_{ij}(x, t)$ при $t = 0$. Условие на коэффициенты $b_i(x, t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) означает, что при $0 < \alpha < 1$ $b_i(x, t)$ могут быть неограниченными при $t = 0$, а при $\alpha \geq 1$ должны стремиться к нулю. Кроме того, предположим, что функция $f(x, t)$ дополнительно удовлетворяет условию (Δ):

$$\left. \begin{aligned} f(x, t) & \text{ непрерывна в } \bar{Q} \quad (0 < \alpha < 1), \\ f(x, t) & = O(t^{\alpha-1+\epsilon_0}), \quad \epsilon_0 > 0 \text{ и } f(x, t) \text{ непрерывна в } \bar{Q} \quad (\alpha \geq 1). \end{aligned} \right\} (\Delta)$$

Доказательство. Для доказательства будем применять аналог метода Галеркина, развитый М. Н. Вишиком [1]. Пусть $\{u_k(x)\}$ ($k=1, 2, \dots$) — последовательность функций, образующих линейно независимую систему элементов в $\dot{w}_2^{(1)}(D)$. Обозначим через $H(D)$ подпространство гильбертова пространства $\dot{w}_2^{(1)}(D)$, состоящее из всех элементов $\dot{w}_2^{(1)}(D)$, гармонических в D_2 . Возьмем в $H(D)$ фундаментальную систему функций $\{u_k(x)\}$, $k=1, 2$, и ради несущественных упрощений будем считать ее ортонормированной в $L_2(D)$, так что

$$\int_D u_k u_l dx = \delta_{kl} \text{ и } u_k(x) \in \dot{w}_2^{(2)}(D).$$

Приближенное решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) u_k(x).$$

Неизвестные коэффициенты $c_k(t)$ определяем следующим образом: подставляя в (1) вместо $u(x, t)$ функции $u_n(x, t)$, скалярно умножая обе части на $u_s(x)$ ($s=1, 2, \dots, n$) и интегрируя по области D , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (для $0 \leq t \leq T$):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n c_k''(t) \int_D u_k(x) u_s(x) dx + \sum_{k=1}^n c_k'(t) \int_D B(x, t) u_k(x) u_s(x) dx + \\ & + \sum_{k=1}^n c_k(t) \left(\int_D \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_s}{\partial x_i} dx - \int_D \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} u_s dx - \right. \\ & \left. - \int_D c(x, t) u_k(x) u_s(x) dx \right) = \int_D f(x, t) u_s(x) dx \quad (s=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

Для однозначной разрешимости полученной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) с начальными данными достаточно убедиться, что функции $\{u_i(x)\}$ линейно независимы в D_1 , и определители Грама любого порядка n , составленные из

$\int_D u_k u_l dx \equiv a_{kl}$, отличны от нуля. Действительно, если $u(x) = \sum_{k=1}^n y_k \times$

$\times u_k(x) \equiv 0$ в D_1 , то $u(x) \in \dot{W}_2^{(1)}(D_2)$. Но $u(x)$ гармонична в D_2 и поэтому из обращения ее в нуль на границе Γ_1 (точнее из принадлежности ее к $\dot{W}_2^{(1)}(D_2)$) следует, что она равна нулю и в D_2 , т. е. $u(x) \equiv 0$ в D , что невозможно из-за ортогональности $u_k(x)$ в $L_2(D)$.

Начальные условия $c_k(0)$, $c_k'(0)$ возьмем нулевыми, т. е.

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Тогда приближенное решение $u_n(x, t)$ при $t=0$ будет обращаться в нуль вместе с $\frac{\partial u_n}{\partial t}$ на всей области D . Это будет верно как в гиперболической части области, так и в параболической (в силу условия теоремы $(f(x, t)|_{t=0})$). Легко можно убедиться, что система (5) при условиях (6) имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 1 мы проведем в достаточно узкой полосе вблизи $t=0$ ($0 \leq t \leq t_0$). Выше уровня $t=t_0$ уравнение (1) перестает быть вырожденным и для него справедливы теоремы существования и единственности решения смешанных задач [8]. В доказательстве мы пользуемся оценками, характеризующими порядок стремления к

нулю при $t \rightarrow 0$ решений уравнений (5), в зависимости от поведения $f(x, t)$ при $t \rightarrow 0$.

Лемма. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям теоремы 1, а $f(x, t)$ удовлетворяет условию (A), то

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{c'(t)}{t^{\alpha+\delta_0}}$ существует и равен нулю. Здесь $0 < \delta_0 < 1 - \alpha$ при $0 < \alpha < 1$

и $0 < \delta_0 < \epsilon_0$ при $\alpha \geq 1$. Эти неравенства и определяют величину δ_0 , входящую в формулировку теоремы 1.

Преобразуя систему (5) к интегральному уравнению и пользуясь правилом Лопиталя, легко можно доказать лемму. Умножив обе части (5) на $t^{-(\alpha+\delta_0)} c_s'(t)$, просуммировав по s от 1 до n и проинтегрировав по t от 0 до некоторого t_0 (t_0 определяется при доказательстве теоремы), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt + \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} B(x, t) \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\ & + \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial t} dx dt - \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} \times \\ & \times \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt - \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} c(x, t) u_n \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt = \\ & = \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} f(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial t} dx dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Произведя элементарные преобразования, а также пользуясь леммой, условиями теоремы 1, наложенными на коэффициенты уравнения (1), и применяя неравенство

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2, \quad \epsilon > 0, \quad (8)$$

получаем оценки

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0+1}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M, \\ & \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M, \quad \int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\delta_0+1}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq M, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$M = \text{const} > 0.$$

Пользуясь теоремой о слабой компактности, можно утверждать, что существуют такие подпоследовательности индексов n_k , для которых $\left\{ \frac{\partial u_{n_k}}{\partial t} \right\}$ и $\left\{ \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \right\}$ слабо сходятся соответственно к $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Тогда в силу вполне непрерывности оператора вложения $\{u_{n_k}(x, t)\}$ сходится сильно к функции $u(x, t)$, имеющей обобщенные первые производные по t и x . В этом случае в силу известной теоремы функционального анализа для предельных функций справедлива следующая оценка:

$$\int_0^{t_0} \int_{D_1} \frac{1}{t^{\alpha+\delta_1+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M, \quad \int_0^{t_0} \int_{D_2} \frac{1}{t^{\alpha+\delta_0}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M,$$

$$\int_0^{t_0} \int_D \frac{1}{t^{\delta_0+1}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq M. \quad (10)$$

Умножая обе части равенства (5) на произвольные функции $d_s(t)$, просуммируем по s от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до T . Далее, интегрируя по частям первый интеграл левой части, будем иметь

$$-\int_0^T \int_Q \frac{\partial u_n}{\partial t} \frac{\partial v_m}{\partial t} dx dt + \int_0^T \int_Q B(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial t} v_m dx dt +$$

$$+ \int_0^T \int_Q \sum_{ij=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \frac{\partial v_m}{\partial x_i} dx dt - \int_0^T \int_Q \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} v_m dx dt -$$

$$- \int_0^T \int_Q c(x, t) u_n v_m dx dt = \int_0^T \int_Q f(x, t) v_m dx dt, \quad (11)$$

где
$$v_m(x, t) = \sum_{s=1}^m d_s(t) u_s(x), \quad d_s(T) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Легко показать, что с помощью $v_m(x, t)$ можно приблизиться к любой функции $v(x, t)$, представимой интегралом.

В соотношении (11), фиксируя m , переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$ в первых сомножителях (n пробегает подпоследовательность n_k), а затем, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим выражение (4), которое определяет обобщенное решение задачи (1)–(3).

Теорема 2 (единственность решения). Пусть функции $a_{ij}(x, t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) непрерывны в $\bar{Q}$ и имеют ограниченные первые производные по t при $t > 0$ и пусть $b_i(x, t)$, $\frac{\partial b_i}{\partial t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

суть $O\left(t^{\frac{\alpha-1}{2}} \beta(t)\right)$ для каждого $x \in D$, где $\beta(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow 0$, а $B(x, t)$, $\frac{\partial B}{\partial t}$, $c(x, t)$ непрерывны в Q . Пусть далее

$$\sum_{ij=1}^n \left((\alpha + \delta_0) a_{ij} - t \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \xi_i \xi_j \geq \mu_0 t^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0 \quad (*)$$

(μ_0, δ_0 — положительные постоянные). Если, кроме того, имеет место соотношение

$$\sum_{ij=1}^n \left(\gamma a_{ij} + t \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right) \xi_i \xi_j \geq N t^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \left(0 < \gamma < \frac{1}{2} \right), \quad (**)$$

то обобщенное решение задачи (1)–(3) единственно в классе функций $u(x, t) \in \mathcal{Q}$.

В соотношении (4), полагая $f(x, t) \equiv 0$, выбирая $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_{t_1}^t \frac{1}{\tau^\gamma} u(x, \tau) d\tau, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

(где $t_1 > t_0$, t_0 определены при доказательстве существования решения) и пользуясь энергетическим неравенством (10), после некоторых преобразований введем $u(x, t) \equiv 0$. Далее, пользуясь методикой [1, 6, 7], при наличии дополнительных предположений доказываются теоремы о гладкости обобщенного решения задачи (1)–(3). После этого, применяя теоремы вложения С. Л. Соболева [2], получаем, что производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) непрерывны в Q , т. е. обобщенное решение задачи (1)–(3) будет классическим. В заключение, пользуясь случаем, приношу благодарность Г. К. Намазову за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. Матем. сб., 39 (81) № 1, 1956.
2. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, 1950.
3. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Вестник ЛГУ, 1965, № 19.
4. Корзюк В. Н. Дифференциальные уравнения, т. IV, № 10, 1968.
5. Краснов М. Л. Тр. МЭИ, вып. 28, 1956.
6. Краснов М. Л. Матем. сб., 49 (91), № 1, 1959.
7. Friedrichs K. Comm. Pure and Appl. Math., 6, 1953, № 3.
8. Мурадов Р. И., Намазов Г. К. "ДАН Азерб. СССР" (в печати).

Поступило 6. V 1969

Р. И. Мурадов

Гарышыг типли чырлашан тэнлик үчүн сэрһэд мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә областын бир һиссәсиндә гиперболик, о бири һиссәсиндә параболик олан тэнлик үчүн гојулмуш сэрһэд мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлијиндән бәһс едилмишдир.

УДК 518. 517. 948

А. М. МАМЕДОВ, З. А. АЛИЕВА

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕТИКОЧИСЛОВЫХ СЕТОК К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

В настоящей статье рассматривается задача о нахождении приближенного решения уравнений (1) и (2):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_s^2} = f(x_1, \dots, x_s) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) U(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial x_s^2} = f(x_1, \dots, x_s) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \cdot g[U(y_1, \dots, y_s)] dy_1 \dots dy_s \quad (2)$$

в классе $E_s^\alpha(C)$ при граничном условии

$$U|_\Gamma = 0. \quad (3)$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_s)$, $g(U)$ и $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$ — нечетные функции из класса $E_s^\alpha(C)$ и $E_{2s}^\alpha(C)$, соответственно [1]. Обозначим коэффициенты Фурье функций $f(x_1, \dots, x_s)$ и $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$ соответственно через

$$C_f(m_1, \dots, m_s) \text{ и } C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s).$$

Построим функцию

$$V_0(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{+\infty} B(m_1, \dots, m_s) C_f(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}, \quad (4)$$

где

$$B(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } (m_1, \dots, m_s) = (0, \dots, 0), \\ -\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{m_1^2 + \dots + m_s^2}, & \text{если } (m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0). \end{cases}$$

Очевидно, функция (4) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_s^2} = f(x_1, \dots, x_s) \quad (5)$$

и граничному условию (3).

Построенную функцию (4) принимаем за начальное приближение решения задачи {(1), (3)} и определяем первое приближение из уравнения

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_s^2} = f(x_1, \dots, x_s) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) V_0(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s.$$

Пусть $C_0(m_1, \dots, m_s)$ есть коэффициент Фурье функции

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) V_0(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s.$$

Так как

$$C_0(m_1, \dots, m_s) = \sum_{n_1, \dots, n_s = -\infty}^{\infty} C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s) \int_0^1 \dots \int_0^1 V_0(y_1, \dots, y_s) e^{2\pi i(n_1 y_1 + \dots + n_s y_s)} dy_1 \dots dy_s,$$

то легко заметить, что построенная функция

$$V_1(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) [C_f(m_1, \dots, m_s) +$$

$$+ \lambda C_0(m_1, \dots, m_s)] \cdot e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}$$

удовлетворяет также задаче {(1), (3)}.

Продолжая таким образом, можем найти решения $V_2, V_3, \dots, V_n, \dots$:

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 V_n}{\partial x_s^2} = f(x_1, \dots, x_s) +$$

$$+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) V_{n-1}(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s, \quad (6)$$

где

$$V_n(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) [C_f(m_1, \dots, m_s) +$$

$$+ \lambda C_{n-1}(m_1, \dots, m_s)] \cdot e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

$$C_{n-1}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{n_1, \dots, n_s = -\infty}^{\infty} C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s) \int_0^1 \dots \int_0^1 V_{n-1}(y_1, \dots, y_s) e^{2\pi i(n_1 y_1 + \dots + n_s y_s)} dy_1 \dots dy_s.$$

Докажем, что последовательность $\{V_n(x_1, \dots, x_s)\}$ при

$$|\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{2\pi^2}{C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2s}}, \frac{1}{C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{2s} \cdot \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \sqrt{s}} - 1\right)} \right\} \quad (7)$$

сходится равномерно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x_1, \dots, x_s) = V(x_1, \dots, x_s)$$

есть единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3). Единственность доказывается методом от противного. Допустим, что существует два различных решения U_1 и U_2 уравнения (1), удов-

летворяющих условиям (3). Разность $U_1 - U_2 = W$ будет решением уравнения

$$\Delta W = \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) W(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s = f(x_1, \dots, x_s)$$

при тех же условиях (3). Тогда [3] решение задачи Дирихле имеет оценку

$$|W| < \max |\varphi| + (e^{\beta d} - 1) \max |f|.$$

В нашем случае

$$\varphi \equiv 0, \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad d = \sqrt{s},$$

$$\max |f| = \max \left| \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) W(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s \right| \leq \leq |\lambda| C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s} \max |W|.$$

Тогда

$$\max |W| \leq |\lambda| C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s} \cdot \left(e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sqrt{s}} - 1 \right) \cdot \max |W|,$$

отсюда получим, что $W \equiv 0$, т. е. решение задачи $\{(1), (3)\}$ единственно.

Теперь покажем, что $\{V_n(x_1, \dots, x_s)\}$ сходится равномерно. Для этого рассмотрим ряд

$$V_0 + (V_1 - V_0) + \dots + (V_n - V_{n+1}) + \dots \quad (8)$$

Оценим общий член этого ряда:

$$\begin{aligned} V - V_{n-1} &= \lambda \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) [C_{n-1}(m_1, \dots, m_s) - \\ &- C_{n-2}(m_1, \dots, m_s)] \cdot e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} = \\ &= \lambda \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) \sum_{n_1, \dots, n_s = -\infty}^{\infty} C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s) \int_0^1 \dots \\ &\dots \int_0^1 [V_{n-1}(y_1, \dots, y_s) - V_{n-2}(y_1, \dots, y_s)] \times \\ &\times e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s + n_1 y_1 + \dots + n_s y_s)} dy_1 \dots dy_s. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \max_{0 < x_i < 1} |V_n - V_{n-1}| &\leq |\lambda| \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} |B(m_1, \dots, m_s)| \times \\ &\times \sum_{n_1, \dots, n_s = -\infty}^{\infty} |C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s)| \times \\ &\times \max_{0 < x_i < 1} |V_{n-1} - V_{n-2}| \quad (i = \overline{1, s}), \text{ то,} \end{aligned}$$

Обозначив

$$\max_{0 < x_i < 1} |V_{n-1} - V_{n-2}| = \nu_{n-1} \text{ и зная, что}$$

$$|B(m_1, \dots, m_s)| \leq \frac{1}{4\pi^2 (\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\omega} \quad \left(\omega = \frac{2}{s} \right),$$

получим

$$\nu_n \leq \frac{|\lambda| C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s}}{4\pi^2} \cdot \nu_{n-1} \leq \left(\frac{|\lambda| C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s}}{4\pi^2} \right)^n \cdot \nu_0.$$

По условию

$$q = \frac{|\lambda| C \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^{2s}}{4\pi^2} < 1. \quad (9)$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ вытекает, что ряд (8) сходится равномерно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(x_1, \dots, x_s) = V(x_1, \dots, x_s).$$

Пространство $E_s^{\alpha+\omega}(C)$ полное [2], следовательно,

$$V(x_1, \dots, x_s) \in E_s^{\alpha+\omega}(C).$$

Легко доказать, что ряд для

$$\begin{aligned} \Delta V_n(x_1, \dots, x_s) &= -4\pi^2 \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) [C_f(m_1, \dots, m_s) + \\ &+ \lambda C_{n-1}(m_1, \dots, m_s)] \times (m_1^2 + \dots + m_s^2) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} [C_f(m_1, \dots, m_s) + \lambda C_{n-1}(m_1, \dots, m_s)] \cdot e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \end{aligned}$$

сходится равномерно. Таким образом получим

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_s) &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) [C_f(m_1, \dots, m_s) + \\ &+ \lambda \sum_{n_1, \dots, n_s = -\infty}^{\infty} C_K(m_1, \dots, m_s, n_1, \dots, n_s) \times \\ &\times \int_0^1 \dots \int_0^1 V(y_1, \dots, y_s) e^{2\pi i(n_1 y_1 + \dots + n_s y_s)} dy_1 \dots dy_s] \cdot e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (10) \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{m} = -\infty}^{\infty} \sum_{\vec{n} = -\infty}^{\infty} B(\vec{m}) \cdot C_K(\vec{m}, \vec{n}) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s + n_1 y_1 + \dots + n_s y_s)} = \\ = H(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s), \\ \sum_{\vec{m} = -\infty}^{\infty} B(\vec{m}) C_f(\vec{m}) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} = F(x_1, \dots, x_s); \end{aligned}$$

тогда уравнение (10) примет вид:

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_s) &= F(x_1, \dots, x_s) + \\ &+ \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 H(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) V(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s. \quad (11) \end{aligned}$$

Очевидно,

$$H(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \in E_{2s}^2(C/4\pi^2), \quad F(x_1, \dots, x_s) \in E_s^2(C/4\pi^2).$$

Рассмотрим теперь вопрос о приближенном решении уравнения (11). Определим тригонометрический многочлен с помощью равенств

$$Q(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\overline{m_1, \dots, m_s} < N_1} B(m_1, \dots, m_s) \tilde{C}(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

$$\tilde{C}(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{N_1} \sum_{\kappa=1}^N F\left(\left\{\frac{a_1 \kappa}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s \kappa}{N}\right\}\right) \cdot e^{-2\pi i \frac{m_1 a_1 + \dots + m_s a_s}{N} \kappa},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_s$ — оптимальные коэффициенты [1], $N = P$ — простое число,

$$N_1 = \left\lceil \frac{\sqrt{N}}{\ln^{\frac{s}{2}} N} \right\rceil.$$

В работе [1] доказано, что

$$F(x_1, \dots, x_s) = Q(x_1, \dots, x_s) + O(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N),$$

где

$$\gamma_2 = \max \left[\alpha s + s - \frac{(\alpha - \omega + 1)}{2} s, \quad s - 1 + \frac{(\alpha + \omega - 1)}{2} s \right].$$

В уравнении (11) заменим $F(P)$ через $Q(x_1, \dots, x_s)$ и, применяя квадратурную формулу с параллелепипедальными сетками, получим

$$V(P) = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N H(P, M_j) V(M_j) + Q(P) + O(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N) + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right),$$

где

$$M_{\kappa} = \left(\left\{ \frac{a_1 \kappa}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s \kappa}{N} \right\} \right).$$

Вместо P напишем M_{κ} , отбросив остаточные члены, будем иметь

$$z_{\kappa} = \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N H(M_{\kappa}, M_j) z_j + Q(M_{\kappa}) \quad (12)$$

или

$$z_{\kappa} + \sum_{j=1}^N a_{\kappa j} z_j = Q(M_{\kappa}), \quad (13)$$

где

$$a_{\kappa j} = -\frac{\lambda H(M_{\kappa}, M_j)}{N} \quad (j, \kappa = \overline{1, N}).$$

Если

$$V(M_{\kappa}) - z_{\kappa} = W_{\kappa}, \quad \text{то} \quad W_{\kappa} + \sum_{j=1}^N a_{\kappa j} W_j = b_{\kappa},$$

$$b_{\kappa} = O(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N) + O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha s} N).$$

Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & 1+a_{NN} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nj-1} & b_N & a_{Nj+1} & \dots & 1+a_{NN} \end{vmatrix},$$

тогда, очевидно,

$$W_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, N}),$$

Согласно [1]

$$|\Delta| = |\Delta(\lambda)| > \frac{1}{2} |D(\lambda)|,$$

где $D(\lambda)$ — знаменатель Фредгольма;

$$W_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = O(N^{-\frac{\beta+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N) + O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha s} N).$$

Таким образом

$$V(M_{\kappa}) = z_{\kappa} + O(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N) + O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha s} N).$$

Отсюда, кстати, следует, что при $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \equiv 0$ имеет место результат Н. М. Коробова. Аналогичный вопрос рассматривается для уравнения (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.
2. Мамедов А. М., „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, № 3.
3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., 1966.

Поступило 16. IV 1969

Ә. М. Мәммәдов, З. Ә. Әлијева

Әдәди нәзәри үсүлун бир сыра сәрһәд мәсәләсинин тәғриби һәллине тәтбиғи һағгында

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә $E_s^{\alpha}(C)$ синфиндә $\{(1), (3)\}$ вә $\{(2), (3)\}$ сәрһәд мәсәләсинин тәғриби һәлли верилмишдир. Көстәрилән мәсәләләри өдәјән $\{V_n\{x_1, \dots, x_s\}\}$ функцијалары гурулмуш вә $\{(1), (3)\}$ мәсәләсинин һәлли чохөлчүлү интеграл тәнлијин тәғриби һәлли мәсәләсинә кәтирилмишдир. Бундан башга, интерполјасија вә квадратур дүстурларын көмәји илә мәсәләнин тәғриби һәлли верилмиш, тәғриби һәлл илә дәғиг һәлл арасындакы хәта гијмәтләндирилмишдир.

УДК 519.45

Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

ГОМОМОРФИЗМЫ ГРАФОВ

Пусть дано непустое множество Ω . Произвольное подмножество ρ декартова квадрата Ω^2 называется бинарным отношением между элементами множества Ω . Множество Ω с заданным на нем бинарным соотношением ρ называется графом (Ω, ρ) . Пусть (Ω_1, ρ_1) , (Ω_2, ρ_2) — пара графов. Гомоморфизмом графа (Ω_1, ρ_1) в граф (Ω_2, ρ_2) называется следующее отображение φ множества Ω_1 в Ω_2 :

$$\forall x, y \in \Omega_1, \{(x, y) \in \rho_1 \rightarrow (\varphi x, \varphi y) \in \rho_2\}. \quad (1)$$

Настоящая работа является опытом изучения пары графов (Ω_1, ρ_1) , (Ω_2, ρ_2) с помощью алгебраических систем их гомоморфизмов (см. ниже теорему).

1. Полугрудой называется непустое множество S с одной определенной на нем алгебраической операцией $\forall x, y, z \in S [x y z] = t \in S$, удовлетворяющей условию типа ассоциативности:

$$[s_1 s_2 s_3 s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]].$$

Пусть $S_1^* = S^*(\Omega_1, \Omega_2)$, $S_2^* = S^*(\Omega_2, \Omega_1)$ — множества всех отображений Ω_1 в Ω_2 и Ω_2 в Ω_1 , соответственно. В множестве $S(\Omega_1, \Omega_2) = S_1^* \times S_2^*$ введем следующую тернарную операцию:

$$[(\varphi_1, \psi_1) (\varphi_2, \psi_2) (\varphi_3, \psi_3)] = (\varphi_3 \circ \psi_2 \circ \varphi_1, \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3). \quad (2)$$

Относительно этой операции $S(\Omega_1, \Omega_2)$ является, как нетрудно проверить, полугрудой — так называемой скрещенной полугрудой отображений [2, 3]. Если (Ω_1, ρ_1) , (Ω_2, ρ_2) — пара графов, то обозначим через $\Gamma \rho_2(\Omega_1, \Omega_2)$ и $\Gamma \rho_1(\Omega_2, \Omega_1)$ совокупность всех гомоморфизмов (Ω_1, ρ_1) в (Ω_2, ρ_2) и, соответственно, (Ω_2, ρ_2) в (Ω_1, ρ_1) ; $S \rho(\Omega_1, \Omega_2) = \Gamma \rho_2(\Omega_1, \Omega_2) \times \Gamma \rho_1(\Omega_2, \Omega_1)$. $S \rho(\Omega_1, \Omega_2)$ по определению является множеством всех пар (φ, ψ) , где φ и ψ — гомоморфизмы графа (Ω_1, ρ_1) в (Ω_2, ρ_2) и графа (Ω_2, ρ_2) в (Ω_1, ρ_1) , соответственно. Очевидно, $S \rho(\Omega_1, \Omega_2)$ является подполугрудой скрещенной полугруды $S(\Omega_1, \Omega_2)$ относительно действия (2). Все не приведенные здесь определения см. в [1].

В данной работе для некоторых классов графов показано, как строение полугруды $S \rho(\Omega_1, \Omega_2)$ исчерпывающим образом характеризует графы (Ω_1, ρ_1) , (Ω_2, ρ_2) . Характеристика более широких классов графов с помощью скрещенных полугруд будет дана автором в дальнейших работах. Основной в настоящей работе является следующая

Теорема. Пусть ρ_1 и ρ_2 — несимметричные отношения квазипорядка на множествах Ω_1 и Ω_2 , соответственно; σ_1 и σ_2 — рефлексивные бинарные отношения на множествах Ω_1 и Ω_2 , соответ-

ственно. Полугруды $S \rho(\Omega_1, \Omega_2)$ и $S \sigma(\Omega_1, \Omega_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда:

1) графы (Ω_1, σ_1) изоморфны графам (Ω_1, ρ_1) или

2) графы (Ω_1, σ_1) изоморфны графам (Ω_1, ρ_1^{-1}) ($i = 1, 2$).

Всякий изоморфизм f полугруды $S \rho(\Omega_1, \Omega_2)$ на полугруды $S \sigma(\Omega_1, \Omega_2)$ имеет вид

$$\forall (\varphi, \psi) \in S \rho(\Omega_1, \Omega_2) f(\varphi, \psi) = (\xi_2 \varphi \xi_1^{-1}, \xi_1 \psi \xi_2^{-1}), \quad (3)$$

где ξ_1 — изоморфизм графа (Ω_1, ρ_1) или соответственно (Ω_1, ρ_1^{-1}) на граф (Ω_1, σ_1) ($i = 1, 2$).

Доказательство теоремы приведено ниже в пп. 2—5.

2. Пусть ω — отношение квазипорядка на множестве Ω , e — любой элемент из этого множества; σ — рефлексивное бинарное отношение на множестве Ω , U, V — любые фиксированные элементы на множестве Ω , причем $U \neq V$. Построим следующее отображение множества Ω в множество Ω :

$$\forall h \in \Omega \quad \theta(h) = \begin{cases} U, & \text{если } (h, e) \in \omega, \\ V, & \text{если } (h, e) \notin \omega, \end{cases} \quad (4)$$

и будем это отображение записывать так: $\theta = \theta[\Omega, \omega, e, U, V]$.

Лемма. Если ω симметрично или $(U, V) \in \sigma$, то θ является гомоморфизмом графа (Ω, ω) в граф (Ω, σ) .

Доказательство. Пусть h_1, h_2 — любые элементы из множества Ω , причем $(h_1, h_2) \in \omega$. Если $(h_2, e) \in \omega$, то $(h_1, e) \in \omega$ в силу транзитивности отношения ω . Тогда по определению $(\theta h_1, \theta h_2) = (U, U) \in \sigma$, так как отношение σ рефлексивно. Если $(h_1, e) \notin \omega$, $(h_2, e) \notin \omega$, то $(\theta h_1, \theta h_2) = (V, V) \in \sigma$. Если ω симметрично, то не может быть одновременно $(h_1, e) \in \omega$ и $(h_2, e) \notin \omega$. Если же $(U, V) \in \sigma$ и одновременно справедливы $(h_1, e) \in \omega$, $(h_2, e) \notin \omega$, то по определению $(\theta h_1, \theta h_2) = (U, V) \in \sigma$. Таким образом во всех случаях $(h_1, h_2) \in \omega \rightarrow (\theta h_1, \theta h_2) \in \sigma$ и, следовательно, $\theta \in \Gamma \sigma(\Omega, \Omega)$.

Лемма. Пусть ω — нетривиальное отношение квазипорядка на множестве Ω ; π, σ — произвольные рефлексивные отношения на множестве Ω , тогда

$$\Gamma \pi(\Omega, \Omega) = \Gamma \sigma(\Omega, \Omega) \rightarrow \pi \cap \pi^{-1} = \sigma \cap \sigma^{-1}. \quad (5)$$

Доказательство. По условию $\omega \neq \Delta(\Omega)$. Поэтому найдутся такие элементы $x, y \in \Omega$, что $x \neq y$ и $(x, y) \in \omega$. Обозначим через (z, t) любую пару элементов из множества Ω , для которой $(z, t) \in \sigma$ и $(t, z) \in \sigma$. Тогда любое отображение φ множества Ω в множество Ω является гомоморфизмом графа (Ω, ω) в граф (Ω, σ) , а следовательно и гомоморфизмом графа (Ω, ω) в граф (Ω, π) . Среди этих отображений, очевидно, найдется и такое отображение φ , что $\varphi x = z$, $\varphi y = t$. Из $(x, y) \in \omega$ и из того, что φ — гомоморфизм графа (Ω, ω) в (Ω, π) следует

$$(\varphi x, \varphi y) = (z, t) \in \pi.$$

Точно также покажем, что и $(t, z) \in \pi$. Таким образом

$$\forall z, t \in \Omega [(z, t) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \rightarrow (z, t) \in \pi \cap \pi^{-1}].$$

Аналогично можно получить и обратную импликацию, а следовательно и равенство (5).

4. **Лемма.** Пусть ρ_1 — несимметричные отношения квазипорядка на множествах Ω_1 ; π_1 — произвольные рефлексивные отношения на множествах Ω_1 . Тогда

$$S \rho(\Omega_1, \Omega_2) = S \pi(\Omega_1, \Omega_2) \rightarrow \pi_1 = \rho_1 \vee \pi_1 = \rho_1^{-1}. \quad (6)$$

Доказательство. Достаточность условий леммы очевидна. Докажем их необходимость. По условию найдутся такие элементы $x_1, y_1 \in \mathcal{Q}_1$, что $x_1 \neq y_1$ и

$$(x_1, y_1) \in \rho_1 \wedge (y_1, x_1) \notin \rho_1 \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

Если

$$\psi = \theta [\mathcal{Q}_2, \rho_2, x_2, x_1, y_1], \quad (8)$$

то по лемме п. 2 ψ является гомоморфизмом графа $(\mathcal{Q}_2, \rho_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$, а следовательно и гомоморфизмом графа $(\mathcal{Q}_2, \pi_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \pi_1)$. Допустим, что

$$(x_1, y_1) \in \pi_1 \wedge (y_1, x_1) \notin \pi_1. \quad (9)$$

Пусть ε —следующее отображение множества $\{x_1, y_1\}$ на себя:

$$\varepsilon x_1 = y_1, \quad \varepsilon y_1 = x_1.$$

Если z, t —любые элементы из множества $\mathcal{Q}_2$ и $(z, t) \in \pi_2$, то из (9) и из того, что ψ есть гомоморфизм графа $(\mathcal{Q}_2, \pi_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \pi_1)$, следует $\psi z = \psi t$. Но тогда и $\varepsilon \psi z = \varepsilon \psi t$; из рефлексивности отношения π_1 имеем $(\varepsilon \psi z, \varepsilon \psi t) \in \pi_1$. Таким образом $\varepsilon \psi$ есть гомоморфизм графа $(\mathcal{Q}_2, \pi_2)$ в $(\mathcal{Q}_1, \pi_1)$ и, следовательно, $\varepsilon \psi$ есть гомоморфизм графа $(\mathcal{Q}_2, \rho_2)$ в $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$. Но $(x_2, y_2) \in \rho_2$, тогда $(\varepsilon \psi x_2, \varepsilon \psi y_2) = (\varepsilon x_1, \varepsilon y_1) = (y_1, x_1) \in \rho_1$, что противоречит равенству (7). Полученное противоречие устанавливает неверность, по крайней мере, хотя бы одного из соотношений (9). Если $(x_1, y_1) \in \pi_1 \cap \pi_1^{-1}$, то мы снова получаем противоречие с (7). Значит либо

$$(x_1, y_1) \in \pi_1, \quad (y_1, x_1) \notin \pi_1 \quad (10)$$

либо

$$(x_1, y_1) \notin \pi_1, \quad (y_1, x_1) \in \pi_1. \quad (11)$$

Пусть x_0, y_0 —любые элементы из множества $\mathcal{Q}_1$; λ —отображение множества $\{x_1, y_1\}$ на множество $\{x_0, y_0\}$: $\lambda x_1 = x_0, \lambda y_1 = y_0$. Если ψ —отображение множества $\mathcal{Q}_2$ в $\mathcal{Q}_1$, определяемое в (8), то $(\lambda \psi x_2, \lambda \psi y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) = (x_0, y_0)$. Если $\lambda \psi$ —гомоморфизм графа $(\mathcal{Q}_2, \rho_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$, то $(x_0, y_0) \in \rho_1$, т. е.

$$\lambda \psi \in \Gamma_{\rho_1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1) \rightarrow (x_0, y_0) \in \rho_1. \quad (12)$$

Обратно, пусть $(x_0, y_0) \in \rho_1$; z, t —произвольные элементы из множества $\mathcal{Q}_2$ и $(z, t) \in \rho_2$. Если $\lambda \psi z = \lambda \psi t$, то $(\lambda \psi z, \lambda \psi t) \in \rho_1$, так как ρ_1 рефлексивно. Если же, $\lambda \psi z \neq \lambda \psi t$, то $\psi z \neq \psi t$ в силу взаимной однозначности отображения λ . Из $\psi \in \Gamma_{\rho_1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1)$ и $(z, t) \in \rho_2$ следует, что $(\psi z, \psi t) \in \rho_1$. Но $\psi(\omega_2) = \{x_1, y_1\}$ и из (7) имеем: $\psi z = x_1$; $\psi t = y_1$. Тогда $(\lambda \psi z, \lambda \psi t) = (\lambda x_1, \lambda y_1) = (x_0, y_0) \in \rho_1$. Следовательно, если $(x_0, y_0) \in \rho_1$, то $\lambda \psi$ есть гомоморфизм графа $(\mathcal{Q}_2, \rho_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$, т. е.

$$(x_0, y_0) \in \rho_1 \rightarrow \lambda \psi \in \Gamma_{\rho_1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1). \quad (13)$$

Из (12) и (13) вытекает, что

$$(x_0, y_0) \in \rho_1 \leftrightarrow \lambda \psi \in \Gamma_{\rho_1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1). \quad (14)$$

Теперь, если для (x_1, y_1) справедливы соотношения (10), то, учитывая, что ψ есть гомоморфизм также и графа $(\mathcal{Q}_2, \pi_2)$ в граф $(\mathcal{Q}_1, \pi_1)$, получаем следующее:

$$(x_0, y_0) \in \pi_1 \leftrightarrow \lambda \psi \in \Gamma_{\pi_1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1). \quad (15)$$

Из (14) и (15) следует

$$\forall x_0, y_0 \in \mathcal{Q}_1 \{ (x_0, y_0) \in \rho_1 \leftrightarrow (x_0, y_0) \in \pi_1 \},$$

т. е.

$$\rho_1 = \pi_1.$$

Если же (x_1, y_1) удовлетворяют соотношениям (11), то аналогично можно показать, что $\pi_1 = \rho_1^{-1}$.

Допустим теперь, что $\rho_1 = \pi_1$, а $\rho_2 \neq \pi_2$, тогда $\pi_2 = \rho_2^{-1}$. По условию найдутся такие $x_2, y_2 \in \mathcal{Q}_2$, что $(x_2, y_2) \in \rho_2 \wedge (y_2, x_2) \notin \rho_2$. Пусть x_1 —некоторый фиксированный элемент из множества $\mathcal{Q}_1$ и $\varphi = \theta[\mathcal{Q}_1, \rho_1, x_1, x_2, y_2]$ есть отображение множества $\mathcal{Q}_1$ в $\mathcal{Q}_2$. По лемме п. 2. при $(x_2, y_2) \in \rho_2$ отображение φ является гомоморфизмом графа $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$ в $(\mathcal{Q}_2, \rho_2)$, а следовательно и $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$ в $(\mathcal{Q}_2, \rho_2^{-1})$. По условию $(x_2, y_2) \in \rho_2 \wedge (y_2, x_2) \notin \rho_2$, а в силу гомоморфизма графа $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$ в $(\mathcal{Q}_2, \rho_2^{-1})$ получаем, что $(x_2, y_2) \in \rho_2^{-1}$, т. е. $(y_2, x_2) \in \rho_2$, что приводит к противоречию с (7).

Итак, $\rho_1 = \pi_1 \rightarrow \rho_2 = \pi_2$. Аналогично можно показать, что

$$\pi_1 = \rho_1^{-1} \rightarrow \pi_2 = \rho_2^{-1}.$$

5. Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы. Достаточность условий теоремы очевидна. Докажем их необходимость.

Пусть $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$, (Σ_1, σ_1) ($i = 1, 2$)—две пары графов, для которых полугруды $S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ и $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$ изоморфны; f —произвольный изоморфизм полугруды $S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ на полугруды $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Для произвольного $x \in \mathcal{Q}_2$ ($y \in \mathcal{Q}_1$) обозначим через ε_x (β_y) отображение множества $\mathcal{Q}_1$ на множество $\{x\}$ ($\mathcal{Q}_2$ на $\{y\}$).

Пусть далее $S_2 = S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ —множество всех пар (α_x, β_y) . Из рефлексивности всех рассматриваемых отношений следует, что

$$S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) \subseteq S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2); \quad S_2(\Sigma_1, \Sigma_2) \subseteq S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2).$$

Известно [3], что $S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ ($S_2(\Sigma_1, \Sigma_2)$) является единственным минимальным идеалом полугруды $S(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ ($S(\Sigma_1, \Sigma_2)$), а следовательно и подполугруды $S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ ($S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$), поэтому $f S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = S_2(\Sigma_1, \Sigma_2)$. $S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ ($S_2(\Sigma_1, \Sigma_2)$) является вполне простой полугрудой без нуля [4] над единичной группой.

Произвольный изоморфизм f полугруды $S_2(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ на полугруды $S_2(\Sigma_1, \Sigma_2)$ имеет вид [3]

$$f(\varepsilon_x, \beta_y) = (\varepsilon'_x, \beta'_y), \quad (16)$$

где $y' = \xi_1 y$, $x' = \xi_2 x$, ξ_i ($i = 1, 2$)—взаимно однозначные отображения множеств $\mathcal{Q}_1$ на множества Σ_1 .

Обозначим для любых $(\varphi, \psi) \in S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$; $x \in \mathcal{Q}_2$, $y \in \mathcal{Q}_1$; $(\varphi, \psi)(y, x) = (\varphi y, \psi x)$. Обозначая $f(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$, имеем:

$$\begin{aligned} [f(\varphi, \psi)](y', x') &= (\varphi', \psi')(y', x') = [(\alpha'_x, \psi') \cdot (\alpha'_x, \beta'_y) \cdot (\varphi', \beta'_y)](y', x') = \\ &= [f(\alpha_x, \psi) \cdot f(\alpha_x, \beta_y) \cdot f(\varphi, \beta_y)](y', x') = [f(\varphi \circ \beta_y \circ \alpha_x, \psi \circ \alpha_x \circ \beta_y)](y', x') = \\ &= [f(\alpha_{\varphi y}, \beta_{\psi x})](y', x') = [f(\alpha_u, \beta_v)](y', x') = \\ &= (\alpha'_u, \beta'_v)(y', x') = (u', v') = (\xi_2 u, \xi_1 v) = (\xi_2 \varphi y, \xi_1 \psi x) = \\ &= (\xi_2 \varphi \xi_1^{-1} y', \xi_1 \psi \xi_2^{-1} x') = (\xi_2 \varphi \xi_1^{-1}, \xi_1 \psi \xi_2^{-1})(y', x'). \end{aligned}$$

Таким образом

$$f(\varphi, \psi) = (\xi_2 \varphi \xi_1^{-1}, \xi_1 \psi \xi_2^{-1}). \quad (17)$$

В множествах $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$, соответственно, определим следующие бинарные отношения:

$$\left. \begin{aligned} (x_1, y_1) \in \gamma_1 &\leftrightarrow (\xi_1 x_1, \xi_1 y_1) \in \sigma_1, \\ (x_2, y_2) \in \gamma_2 &\leftrightarrow (\xi_2 x_2, \xi_2 y_2) \in \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как f —изоморфизм полугруды $S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ на полугруды $S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2)$, то для любых $(\varphi, \psi) \in S(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ из (1), (16), (18), (17) следует:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) \in S\rho(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) &\leftrightarrow f(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi') \in S\sigma(\Sigma_1, \Sigma_2) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \forall x'_1, y'_1 \in \mathcal{Q}_1, x'_2, y'_2 \in \mathcal{Q}_2 \{ (x'_1, y'_1) \in \sigma_1 \wedge (x'_2, y'_2) \in \sigma_2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow (\varphi' x_1', \varphi' y_1') \in \sigma_2 \wedge (\psi' x_2', \psi' y_2') \in \sigma_1 \rightarrow \\
& \rightarrow \forall \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \Sigma_1 \wedge \xi_1, \xi_2 \in \Sigma_2 \{ (\xi_1 x_1, \xi_1 y_1) \in \sigma_1 \wedge (\xi_2 x_2, \xi_2 y_2) \in \sigma_2 \rightarrow \\
& \rightarrow (\varphi' \xi_1 x_1, \varphi' \xi_1 y_1) \in \sigma_2 \wedge (\psi' \xi_2 x_2, \psi' \xi_2 y_2) \in \sigma_1 \} \rightarrow \\
& \rightarrow \forall x_1, y_1 \in \Sigma_1 \wedge x_2, y_2 \in \Sigma_2 \{ (x_1 y_1) \in \gamma_1 \wedge (x_2 y_2) \in \gamma_1 \rightarrow \\
& \rightarrow (\xi_2 \xi_1^{-1} \varphi' \xi_1 x_1, \xi_2 \xi_1^{-1} \varphi' \xi_1 y_1) \in \sigma_2 \wedge (\xi_1 \xi_1^{-1} \psi' \xi_2 x_2, \xi_1 \xi_1^{-1} \psi' \xi_2 y_2) \in \sigma_1 \} \rightarrow \\
& \rightarrow \forall x_1, y_1 \in \Sigma_1 \wedge x_2, y_2 \in \Sigma_2 \{ (x_1, y_1) \in \gamma_1 \wedge (x_2, y_2) \in \gamma_2 \rightarrow \\
& \rightarrow (\xi_2^{-1} \varphi' \xi_1 x_1, \xi_2^{-1} \varphi' \xi_1 y_1) \in \gamma_2 \wedge (\xi_1^{-1} \psi' \xi_2 x_2, \xi_1^{-1} \psi' \xi_2 y_2) \in \gamma_1 \} \rightarrow \\
& \rightarrow \forall x_1, y_1 \in \Sigma_1 \wedge x_2, y_2 \in \Sigma_2 \{ (x_1, y_1) \in \gamma_1 \wedge (x_2, y_2) \in \gamma_2 \rightarrow \\
& \rightarrow (\varphi x_1, \varphi y_1) \in \gamma_2 \wedge (\psi x_2, \psi y_2) \in \gamma_1 \} \rightarrow (\varphi, \psi) \in S \gamma (\Sigma_1, \Sigma_2),
\end{aligned}$$

т. е.

$$S \rho (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2) = S \gamma (\Sigma_1, \Sigma_2).$$

Из леммы п. 4 теперь следует, что либо $\gamma_1 = \rho_1 \wedge \gamma_2 = \rho_2$, либо $\gamma_1 = \rho_1^{-1} \wedge \gamma_2 = \rho_2^{-1}$. Из (18) вытекает, что f является изоморфизмом графа $(\mathcal{Q}_1, \rho)$ на граф (Σ_1, σ_1) (или соответственно графа $(\mathcal{Q}_1, \rho_1^{-1})$ на граф (Σ_1, σ_1) ($i = 1, 2$)). Окончание доказательства теоремы следует из (17). Итак, теорема полностью доказана.

6. Можно было бы вместо $S \rho (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ рассматривать ее подполугруды $S_\mu \rho (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$, состоящие из всех пар (φ, ψ) , где $|\varphi \mathcal{Q}_1| < \mu$, $|\psi \mathcal{Q}_2| < \mu$ ($\mu \geq 3$). И в этом случае теорема остается справедливой.

Если $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2$; $\rho_1 = \rho_2$, то $S \rho (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2)$ превращается в множество всех эндоморфизмов графа $(\mathcal{Q}_1, \rho_1)$. В этом случае результат статьи вытекает из [1].

В заключение, пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность научному руководителю проф. Л. М. Глускину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глускин Л. М. УМН. т. XVI 1961, № 5 (101).
2. Вагнер В. В. Укр. матем. ж., т. 11. 1959, № 3.
3. Глускин Л. М. Идеалы полугруд. Сб. Саратовского гос. ун-та, 1965.
4. Глускин Л. М. Вполне простые полугруды. Сб. Саратовского гос. ун-та, 1965.

Поступило 24. IV 1969

Р. Б. Фејзуллајев

Графларын гомоморфизмләри

ХҮЛАСӘ

Илк дәфә оларак бир чүт графын тәдгигиндә јарымгрудлар (бир тернар чәбри әмәлијјатлы системләр) нәзәријјәсинин тәтбиги өјрәнилмишдир.

Мәғаләдә изоморфизм, јахуд антизоморфизм хәтәсы илә фәргләнән вә мүәјјән јарымгрудларла характеризә олуған бир синиф графлар ајрылышындан бәһс едилмишдир.

А. Х. САЛИМОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОПЕРЕДАЧИ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННОГО ЧЛЕНА МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Газификация крупных городов и предприятий требует сооружения мощной сети магистральных и внутригородских газопроводов. В связи с этим возникает ряд газодинамических задач, связанных с неустановившимся движением газа в трубе. Правильное решение этих задач позволит еще более рационально организовать эксплуатацию существующих линий и строительство новых.

Как известно, нестационарное изотермическое движение газа в горизонтальном цилиндрическом трубопроводе при малом числе Маха описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\lambda \rho \omega^2}{2d}, & D: \begin{cases} t > 0 \\ 0 < x < l \end{cases}, \\
-\frac{\partial P}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial x},
\end{aligned} \quad (1)$$

где P , ρ , ω — соответственно, средние в сечении трубы давление, плотность и скорость движения газа;

c — скорость звука в газе;

x — координата, направленная по оси трубы;

t — время;

l — длина трубы;

d — диаметр трубы;

λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (1) является нелинейной и способа точного ее решения в аналитическом виде в настоящее время не существует. В частности, если пренебрегать инерционным членом $\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t}$, то система (1) упрощается.

Исследованию упрощенной системы посвящены работы [2, 3, 4].

Получение решений системы (1) и упрощенной системы (когда пренебрегают инерционным членом) с одинаковыми начальными и краевыми условиями позволяет оценить практическую погрешность этого допущения, а также изучить процессы, когда влияние инерционного члена является значительным.

Введением безразмерных величин систему (1) приводим к следующему виду:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{A} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + F(P, Q) \right], \quad (2)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} = C \frac{\partial Q}{\partial x},$$

где $F(P, Q) = \frac{\varphi(Q)}{2P} \{ \varphi(Q) = \varphi_1[Q, \lambda(Q)] \}$, P — давление, Q — нормальный расход, A, C — величины, зависящие от параметров трубы.

За начальные значения принимаем стационарное решение системы (2):

$$t=0, P = \sqrt{P_0 - \varphi(Q_0)} x,$$

где P_0 — давление в начале трубы, $Q_0 = \cos \pi t$. А граничные условия зададим в виде ($t > 0$):

$$Q(0, t) = Q_0, Q(1, t) = Q_0 + \bar{Q} \sin 2\pi t,$$

где $\bar{Q}$ — амплитуда расхода.

В частности, если $Q_0 = 1, P_0 = 1$, то начальные и краевые условия для системы (2) примут вид:

при $t=0 \quad P = \sqrt{1 - \varphi(1)} x, Q = 1;$ (3)

при $t > 0 \quad Q(0, t) = 1, Q(1, t) = 1 + \bar{Q} \sin 2\pi t.$

Для решения (2)–(3) применим метод интегральных соотношений [5]. Разобьем область D на N равных полос прямыми $x_k = kh$ ($h = 1/N$ — шаг разбиения) и проинтегрируем каждое уравнение системы (3) по x в интервале (x_{k-1}, x_{k+1}) :

$$-\frac{d}{dt} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} Q dx = \frac{1}{A} \left[P_{k+1} - P_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} F(P, Q) dx \right], \quad (4)$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} P dx = C (Q_{k+1} - Q_{k-1}) \quad (k = \overline{1, N-1}).$$

Интеграл, входящий в правую часть первого уравнения системы (4), раскрываем по формуле Симпсона:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} F(P, Q) dx = \frac{h}{3} (F_{k-1} + 4F_k + F_{k+1}), \quad (5)$$

где

$$F_k = F(P_k, Q_k) = F[P(x_k, t), Q(x_k, t)].$$

Подынтегральные функции в левой части системы (4) можно аппроксимировать по-разному. Для данной задачи примем, что при

$$x_{k-1} < x < x_{k+1}$$

$$\frac{1}{2h} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} Q dx = Q_k, \quad \frac{1}{2h} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} F dx = P_k. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим:

$$\frac{dQ_k}{dt} = -\frac{1}{2hA} \left[P_{k+1} - P_{k-1} + \frac{h}{3} (F_{k-1} + 4F_k + F_{k+1}) \right],$$

$$\frac{dP_k}{dt} = -\frac{C}{2h} (Q_{k+1} - Q_{k-1}) \quad (k = \overline{1, N-1}). \quad (7)$$

Система (7) состоит из $2N-2$ обыкновенных дифференциальных уравнений с $2N$ неизвестными.

Для определения граничных значений P_0 и P_N по заданным Q_0 и Q_N используем первое уравнение системы (2):

$$-\frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=0} = \varphi(1)$$

$$-\frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x=1} = 4A\pi\bar{Q} \cos 2\pi t \cdot P + \varphi(Q_N). \quad (8)$$

Аппроксимируя производную квадрата давления:

$$\frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x_{k+1}} = \frac{1}{2h} (P_{k+1}^2 - 4P_k^2 + 3P_{k-1}^2); \quad \frac{\partial P^2}{\partial x} \Big|_{x_{k-1}} = -$$

$$-\frac{1}{2h} (3P_{k-1}^2 - 4P_k^2 + P_{k+1}^2),$$

входящую в уравнения (8), для граничных значений P получим:

$$P_0 = \sqrt{\frac{4P_1^2 - P_0^2 + 2h\varphi(1)}{3}}$$

$$P_N = \frac{\sqrt{(4A\pi h \bar{Q} \cos 2\pi t)^2 - 3(P_{N-2}^2 - 4P_{N-1}^2 + 2h\varphi(Q_N) - 4\bar{Q}A\pi h \cos 2\pi t)}}{3} \quad (9)$$

Уравнения (7), (9) составляют замкнутую систему дифференциальных и алгебраических уравнений. Эта система с начальными условиями

$$Q_k(0) = 1, P_k(0) = \sqrt{1 - \varphi(1)} x_k \quad (k = \overline{1, N-1}) \quad (10)$$

позволяет определять неизвестные функции.

Полученная задача (7), (9), (10) решена на ЭЦВМ БЭСМ-2М с применением метода Рунге–Кутты. При этом за характерные величины принимались:

$$d = 0,5 \text{ м}; l = 10^5 \text{ м}; g = 9,81 \text{ м/сек}^2; c = 400 \text{ м/сек};$$

$$T = 86400 \text{ сек}; \gamma_{\text{ам}} = 1 \text{ кг/м}^3; P_0 = 56 \text{ атм}; Q_{\text{но}} = r \frac{10^6 \text{ нм}^3}{\text{сутки}}. \quad (11)$$

Расчеты производились для значений r и $\bar{Q}$:

Таблица 1

r	$\bar{Q}$
4	0,1; 0,15; 0,18
3,5	0,1; 0,2; 0,25
3	0,2; 0,3; 0,35
2,5	0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,45
2	0,4; 0,5; 0,6

В расчетах для выражения λ использовались следующие формулы:

$$1) \quad \lambda = 0,1 \left(\frac{1,46 \kappa}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25} \text{ — формула Альтшуля};$$

$$2) \quad \lambda = 0,067 \left(\frac{158}{\text{Re}} + \frac{2\kappa}{d} \right)^{0,2} \text{ — формула Ходановича—Адишария};$$

3) $\lambda = K Re^{-3}$ — формула типа Блазиуса. На рис. 1 и 2 представлены графики изменения давления для случая $\varphi(Q) = \beta Q^2$ ($\beta = \text{const}$, зависящая от характерных величин (11)).

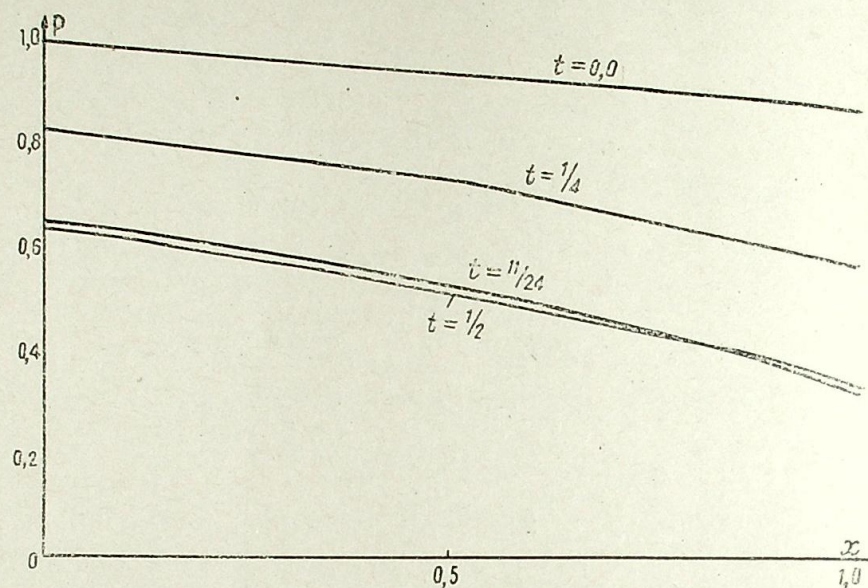


Рис. 1

В табл. 2 приведены значения P для приближений $N = 4, 8, 16$ в разных точках трубы, при фиксированном значении $t = 0.25$ (6 час). В последних двух столбцах этой таблицы приведены разности последовательных приближений.

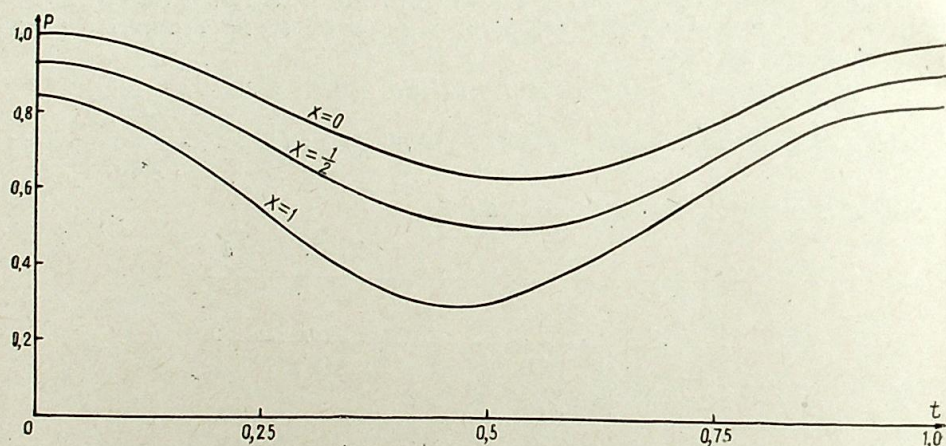


Рис. 2

Расчеты показали, что при решении практических задач можно ограничиваться VII—IX приближениями, которые дают 2—3 верных знака после запятой. При расчетах проверялось выполнение условия материального баланса:

$$A(\tau) = \int_0^1 P(x, t) dx, \quad (12)$$

Таблица 2

$r = 3, \bar{Q} = 0.3$					
x	$P_{(N=4)}$	$P_{(N=8)}$	$P_{(N=16)}$	$\Delta_{8,4}$	$\Delta_{16,8}$
0,00	0,8246	0,8258	0,8261	0,0012	0,0003
0,25	0,7750	0,7765	0,7769	0,0015	0,0004
0,50	0,7146	0,7164	0,7169	0,0018	0,0005
0,75	0,6392	0,6413	0,6419	0,0021	0,0006
1,00	0,5396	0,5428	0,5428	0,0032	0,0008

полученное интегрированием второго уравнения системы (2) по t и по x в интервалах $(0, \tau)$ и $(0, 1)$, соответственно. Для сравнения результаты решений, полученные с учетом инерционного члена (P_1) и без его учета (P_2) [4], приведены в табл. 3. Как видно, значения дав-

Таблица 3

t	$P_1(0, t)$	$P_2(0, t)$	$P_1(1, t)$	$P_2(1, t)$
0,0000	1,00000	1,00000	0,83359	0,83359
0,0417	0,99417	0,99411	0,82013	0,81987
0,0834	0,97867	0,97847	0,78728	0,78702
0,1250	0,95170	0,95111	0,74031	0,73944
0,1667	0,91536	0,91484	0,68160	0,68085
0,2084	0,87245	0,87213	0,61465	0,61408
0,2501	0,82615	0,82591	0,54360	0,54264
0,2917	0,77980	0,77936	0,47338	0,47267
0,3334	0,73625	0,73610	0,40893	0,40868
0,3750	0,69834	0,69795	0,35631	0,35580
0,4167	0,66790	0,66784	0,32107	0,32106
0,4584	0,64648	0,64661	0,30783	0,30814
0,5000	0,63511	0,63526	0,30765	0,31828
0,5410	0,63474	0,63485	0,34785	0,34838
0,5830	0,64561	0,64570	0,39263	0,39337
0,6250	0,66785	0,66852	0,44756	0,44904
0,6660	0,70019	0,70162	0,50854	0,51001
0,7080	0,74215	0,74333	0,57249	0,57360
0,7500	0,79017	0,79325	0,63624	0,63746
0,7910	0,83943	0,84062	0,69534	0,69692
0,8330	0,88771	0,88821	0,74865	0,74953
0,8750	0,92981	0,93088	0,79158	0,79274
0,9167	0,96382	0,96448	0,82205	0,82278
0,9584	0,98673	0,98717	0,83764	0,83803
1,0000	0,99706	0,99748	0,83713	0,83741
1,0417	0,99426	0,99441	0,82014	0,82025
1,0834	0,97867	0,97877	0,78736	0,78735
1,1250	0,95170	0,95141	0,74037	0,73842

лений с учетом инерционного члена и без его учета для вышеприведенных данных (11) практически мало отличаются. А это подтверждает обоснованность пренебрежения инерционным членом при решении задач подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Основы газовой динамики. Гостоптехиздат. 1961.
2. Салимов А. Х. Исследование некоторых нестационарных задач движения в магистральных газопроводах. Отчет лаборатории численных методов и программирования ИК АН Азерб. ССР, 1967.

3. Салимов А. Х. „ДАН Азерб. ССР“, 1968, № 12.
 4. Салимов А. Х., Абуталиев Ф. Б. К численному решению задачи движения газа в магистральных газопроводах методом сеток. Вопросы кибернетики и вычислительной математики, вып. 25, Изд-во „ФАН“ УзССР.
 5. Дородницын А. А. Тр. III Всесоюз. матем. съезда. т. II, М., Изд-во АН СССР, 1956.

Поступило 16. VI 1969

Ә. Х. Сәлимов

Эталетли һәдди нәзәрә алмагла труба илә гәрарлашмајан газәтүрмә мәсәләсинин интеграл мүнәсибәтләри методу илә һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә үфғи цилиндрик трубада газын изотермик гәрарлашмајан һәрәкәтини тәсвир едән гејри-хәтти дифференциал тәнликләр системи үчүн гојулмуш бир сәрһәд мәсәләсинин интеграл мүнәсибәтләри методу илә әдәди һәлли верилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 4

А. А. ГУСЕИНЗАДЕ

ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗД ВОЛЬФ-РАЙЕ

В работе [1] анализировались имеющиеся гипотезы, выдвинутые для объяснения происхождения звезд WR.

Современные данные наблюдений позволили нам выявить их недостатки. Предложен наиболее вероятный путь эволюции звезд WR из звезд спектрального типа O.

В настоящей статье приводятся некоторые факты, свидетельствующие о правдоподобности предложенной схемы. $O \rightarrow Of \rightarrow WR$ образования звезд WR.

1. Звезды WR по степени возбуждения непрерывного спектра относятся к спектральному типу O. Поэтому звезды O, Of и WR можно рассматривать как объекты одного спектрального класса. При этом возможны три случая: звезды с линиями поглощения, звезды с линиями излучения и звезды с линиями поглощения и излучения. В спектре звезд O наблюдаются линии поглощения, в спектре звезд WR — линии излучения, а звезды Of оказываются промежуточными, в спектре которых наблюдаются как линии поглощения, так и линии излучения.

2. Робертс [2] выявил, что звезды WR распределены в интервале $\pm 18^\circ$ галактической широты. Звезды O и Of в основном расположены в плоскости галактики, вдоль ее рукавов, т. е. так же, как и звезды WR. Естественно, что о генетической связи объектов можно говорить, если они расположены в одной и той же широте галактики. Поскольку это условие удовлетворяется для звезд O, Of и WR, то можно судить об их генетической связи.

3. Наблюдаемое различие в свойствах указанных звезд можно объяснить степенью их неустойчивости. Если интенсивность линий излучения звезды может служить мерой неустойчивости ее атмосферы, то звезды O являются стабильными, Of менее стабильными, а WR более неустойчивыми. Поскольку основным процессом является потеря массы, то возможный путь эволюции может быть в одном направлении, т. е. от звезды O к звездам WR. Так как масса звезд O больше массы WR, то эволюция в обратном направлении не осуществится.

4. Если действительно звезды WR образуются из звезд O по предложенной схеме, то мы можем наблюдать этот процесс эволюции. Отметим, что всего 13% звезд O являются звездами Of. Это можно объяснить двумя причинами: во-первых, небольшим темпом процесса становления звездами Of, во-вторых, тем, что этот процесс начался недавно.

5. В спектре звезд Of в эмиссии наблюдаются в основном линии H_α , H_β , $\lambda 5876 \text{ HeI}$, $\lambda 4686 \text{ HeII}$, $\lambda 5696 \text{ C III}$, $\lambda 4634-41 \text{ N III}$, $\lambda 4057 \text{ N IV}$, $\lambda 4603-19 \text{ N V}$, т. е. линии, которые в спектре звезд WR

являются наиболее сильными линиями излучения, а в спектре звезд O — сильными линиями поглощения. Наверно, по мере нарушения стабильности звезд O вокруг них развивается газовая оболочка, в которой образуются линии излучения. Поскольку в спектре звезд O наблюдаются линии и излучения, и поглощения, то следует вывод о небольшом размере их оболочки по сравнению со звездами WR .

6. Изучение звезд O с умеренной и высокой дисперсией обнаруживает, что линии мультиплета $\lambda\lambda$ 4634—41 N III часто довольно слабые и практически встречаются во всех звездах O и O f. По интенсивности линий мультиплета $\gamma\gamma$ 4634—41 N III звезды O и O f не являются отдельными группами, а переход от звезд O к O f и обратно является непрерывным. Это может быть указанием на образование звезд O f из звезд O по мере нарушения их стабильности. Звезды O , эволюционируя, наступают на стадию нестабильности. Нестабильное состояние звезд O наблюдается как у звезды O f.

7. Звезды спектрального типа O являются молодыми объектами в галактике, которые имеют возраст 10^{-7} лет. Звезды O гораздо многочисленнее, чем O f и WR , поэтому обсуждаемый путь эволюции статистически количественно оправдывается. Как отмечено выше, многочисленность звезд O f и WR можно объяснить тем, что их процесс образования из звезд O начался недавно.

8. По современным представлениям об эволюции звезд после выгорания водорода в ядре звезды в реакцию вступает гелий. Этот процесс приводит к изменению структуры звезды. Изменение внутреннего строения звезды приводит ряд нестационарных состояний. Наблюдаемые звезды O f и WR соответствуют этим нестационарным состояниям звезд O .

Возраст звезд O 10^7 лет есть время выгорания в них водорода. Нахождение звезд в звездных ассоциациях указывает на то, что если даже для звезд O вне ассоциаций водород выгорел, то для них эта стадия еще не наступила. Отметим, что возраст ассоциаций 10^{-6} лет. Если предложенный путь эволюции является правдоподобным, то звезды O f и WR образовались недавно. По мере эволюции следует ожидать нарушения их стабильности все больше и тем самым увеличения числа звезд O f и WR на будущее. Таким образом имеется основание сделать вывод о том, что малочисленность звезд O f и WR обусловлена как небольшим темпом образования их из звезд O , так и тем, что этот процесс начался недавно.

9. Наблюдения дают возможность судить о характере переходной стадии. Каким протекает дальнейшая эволюция после становления стабильной звездой O f? Увеличивается ли после этого нестабильность звезды O f непрерывно или она может стать опять на время стабильной звездой O ? Наблюдение указывает на то, что звезда O f, теряя свою оболочку, может снова стать обычной звездой O . Примером может служить звезда НД 108 (O f). Эмиссионные линии водорода λ 4650 с III и γ 5876 H α время от времени совершенно исчезают и становятся линиями поглощения и наоборот. Иначе говоря, процесс нарушения стабильности звезд O не является непрерывным путем чередования ряда стабильных и нестабильных состояний. Завершением этой стадии является становление звезды O звездой O f.

Оболочка звезд O f является нестационарной. Так, например, звезды НД 190429 и НД 34656 обнаруживают изменение эмиссионных линий в течение одной ночи. Материя из звезд O f истекает гораздо меньше, чем из WR . В этой стадии у звезд O f обнаруживается главный признак звезд WR — разделение их на азотную и углеродную последовательности. Представителями азотной последовательности звезд O могут быть звезды НД 190429 и НД 16691, а углеродной — 9 Sge и

НД 192639. Как в звездах WR , так и в O f разделение на азотную и углеродную последовательности не является четким, т. е. имеются промежуточные объекты. Такими объектами для WR могут быть звезды НД 62910, НД 104994, НД 143414, а для O f — Цефея и НД 14947. Как между звездами O и O f, так O f и WR наблюдаются промежуточные объекты. Примером последних могут быть звезды НД 66451 и НД 160641. Таким образом переход $O \rightarrow O$ f $\rightarrow WR$ является непрерывным. Непрерывность перехода указывает на правдоподобность эволюционного смысла предложенной схемы.

Если звезды WR действительно образуются из звезд O вследствие нарушения их стабильности, т. е. после начала потери массы из последних, то по мере истечения материи должны вскрываться более горячие слои звезд. Поэтому должны расти их температура и болометрическая звездная величина, что и наблюдается:

$$T_c < T_{of} < T_{WR} \text{ и } M_{Бол}(O) < M_{Бол}(O_f) < M_{Бол}(WR).$$

Вследствие потери вещества должна уменьшаться масса:

$$M_o > M_{of} > M_{WR},$$

что также наблюдается.

Если правдоподобно предложенная схема эволюции, то в системе двойных звезд компонентами O f и WR должны быть звезды O , а это наблюдается. Мы можем ожидать наличия двойных систем с обоими компонентами O f и WR . Отсутствие двойных систем с обоими компонентами звезд WR может быть следствием образования их из звезд O , где для разного темпа эволюции достаточно заполнение поверхности Роша одним из компонентов. В связи с этим поиск и обнаружение двойных звезд с обоими компонентами WR представляет большой интерес.

Как для объяснения происхождения звезд WR , так и для объяснения происходящих в них явлений основной гипотезой является истечение материи. Основным противоречием этой гипотезы с наблюдениями является наличие звезд WR в системе двойных звезд, компонентами которых бывают звезды O . По предложенной схеме эволюции звезд $O \rightarrow O$ f $\rightarrow WR$ это противоречие становится само по себе понятным наблюдательным фактом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гусейнзаде. Канд. дисс., 1968 (доложено на симпозиуме в г. Ереване)
2. Roberts M. C. A. J., 67, 1, 1960.

Поступило 8. IV 1969

А. А. Гусейнзаде

Волф-райе улдузларынын текамүлү

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә Волф-Райе нөвлү улдузларын башга улдузлардан төрә-мәси үчүн, әввәл едилмиш тәклифин — $oof \rightarrow WR$ һәгигәтә ујғунлуғуна дәләләт едән бир сыра мушаһидә сәнәдләри верилмишдир. Бир спектр синфинә мәнсуб олан o , of вә WR улдузларынын биринин дикәриндән төрәмәсиндән асылы олараг үч һал мушаһидә едилмишдир: 1. Дајаныглы һал. Бунун заһири әләмати улдузун спектриндә анчаг удулма хәтләринин олмасыдыр. Белә хәтләрә O улдузлары маликдир.

2. Дајаныгсыз һал. Бурада шүаланма хәтләри көрүнүр. Бу һала of улдузлары мисал ола биләр.

3. Там дајаныгсыз һал. Бу заман күчлү шүаланма хәтләри мушаһидә едилир. WR белә улдузлардандыр. Бу улдузларда

удулма хэтлэри көрүнмүр. Нәмин улдузларын көстәрилән Јолла әмәлә кәлмәси кәсилмәз тәрздәдирсә, онларын арасында сәкин сәрһәд олмамалыдыр. Нәгингәтән бунларын һеч биринә дахил олмајан аралыг улдузлар мөвчуддур. Бир сыра спектр хәтләринин интенсивлијинә көрә o улдузларындан of улдузларына вә әксинә кечид кәсилмәздир. o , of вә WR улдузлаынын биринин o биринә чеврилмәсинин әсас сәбәби маддә иткисидир. Буна көрә дә кечид анчаг бир истигамәтдә ола биләр— $o \rightarrow of \rightarrow WR$. Чүнки o улдузларынын күтләси WR улдузларындан бөјүкдүр, of улдузлары исә бунларын арасындадыр, јәни $M_o > M_{of} > M_{WR}$ -дир. of улдузлары сајча o улдузларынын 13%-ни тәшkil едир. Бу, белә изаһ едилир ки, әввәлән көстәрилән улдузларын биринин дикәриндән төрәмәси һадисәсинин башланмасына узун мүддәт лазым олмур. Икинчиси, o улдузларынын of вә WR улдузларына чеврилмә сүр'әти бөјүк дејилдир. Нәр ики һалда of вә WR улдузларынын кәләчәкдә сајча чоһалмасыны көзләмәк лазымдыр. Нәзырда o улдузларынын дајаныглы һалдан дајаныгсыз һалә кечмә сәбәбләри мә'лум дејилдир.

И. А. АСЛАНОВ, Я. А. МАМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА ДВУХМЕТРОВОГО ТЕЛЕСКОПА ШАО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Двухметровый телескоп Шемахинской астрофизической обсерватории сдан в эксплуатацию фирмой Карл Цейсс Йена в сентябре 1966 года. Общие данные, а также данные приемной аппаратуры приведены в табл. 1 [1].

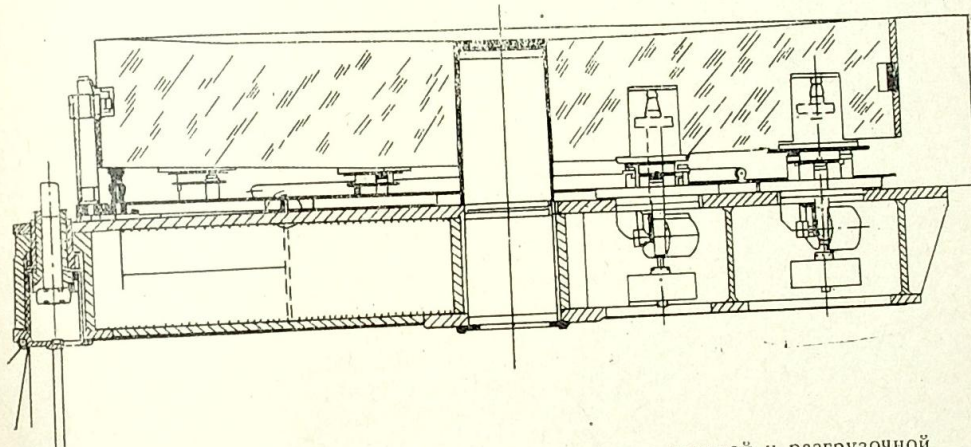


Рис. 1. Конструктивный разрез главного зеркала с оправой и разгрузочной системой

Главное зеркало параболическое, с диаметром свободного отверстия 2000 мм. Фокусное расстояние 9000 мм. Толщина зеркала 310 мм. В центральной части имеется отверстие размером 250 мм, через которое проходит бленда диаметром 235 мм, закрепленная в оправе зеркала. Разгрузочных элементов насчитывается 18. Оправа главного зеркала представляет собой систему из платформы шестиугольной формы, закрепленной в шести точках. На платформе установлены три буфера, отстоящие друг от друга на 120°. Зеркало одной стороной лежит на этих буферах, высоты которых можно регулировать. Передняя опора зеркала представляет собой установленные вдоль основной трубы три противостоящих буферам продольные штанги, которые одновременно служат компенсаторами гнущия основной трубы. Штанги состоят из двух частей. Концы первых частей скреплены с платформой, а вторые концы продеты в пазы зеркала. Именно они являются компенсаторами гнущия основной трубы. Первая и вторая

части штанги связаны между собой шарикоподшипником. На рис. 1 показан конструктивный разрез зеркала с оправой и разгрузочной системой. Имеется возможность центровки главного зеркала относительно оправы. Это осуществляется четырьмя трехопорными тягами. Тыльная сторона зеркала вентилируется.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследовались преимущественно сферическая аберрация, астигматизм, кома и степень концентрации света главным зеркалом. Для исследования главного зеркала применялась диаграмма с гексагональной сеткой, с 82 отверстиями диаметром 30 мм. Диафрагма крепится

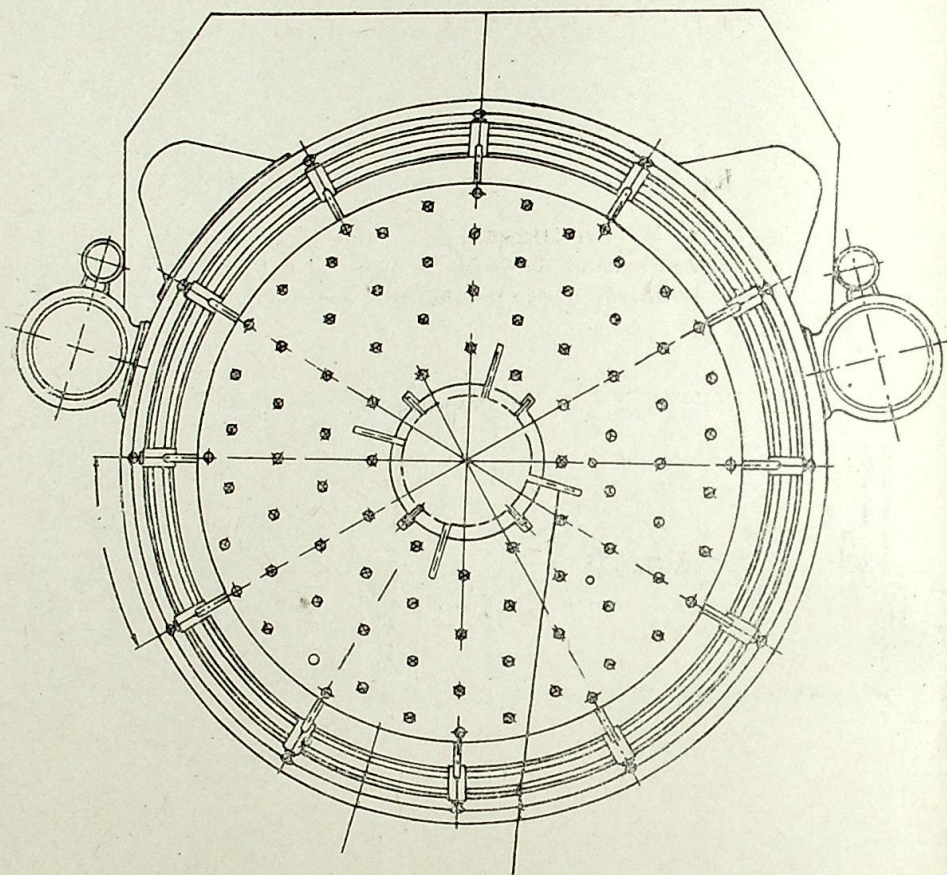


Рис. 2. Фронтальный разрез трубы с телескопа с диафрагмой.

на конце трубы, на расстоянии 150—200 см от фокуса зеркала, при помощи двадцати опор по краям трубы. Центр ее укрепляется на системе кассетодержателя главного фокуса. Имеется возможность центровки относительно оптической оси зеркала. На рис. 2 показан фронтальный разрез конца трубы с диафрагмой. Диапазон шкалы фокусировки телескопа 100 мм. Визуальный отсчет положения фокуса возможен с точностью до 0,01 мм. Положение фокуса без коррекционной системы дает возможность делать Гартмановскую пару снимков, применяя кассетное устройство главного фокуса. Предфокальные и зафокальные снимки делались на одну и ту же фотопластинку, при передвижении. Использовались фотопластинки ZU-2 фирмы ORWO. На рис. 3 представлена гартмановская пара снимков. Первоначально было получено около 10 негативов за фокусом для опреде-

Таблица 1

Основные данные двух метрового телескопа и его светоприемников

Оптическая система	Основные данные	Светоприемники и их данные	Вспомогательные узлы	Примечание
Первичный	$D=2\text{ м}, F=9\text{ м}, \omega=6' \times 6' \times$ $\times 6'$ без коррекцион- ной системы, $\omega=21' \times$ $\times 21'$ с коррекционной системой	I. Кассетное устройство а) размеры фотопластины $6 \times 6\text{ см}$ б) двухэтажная кассета $6 \times 6, 2 \cdot 7\text{ см}$ в) штриховая кассета II. Дифракционный спектрограф а) коллиматор $d=75, f=337$, решетки: $1.80 \times 110\text{ мм}^2$ 650 штрих/мм, $2.80 \times 110\text{ мм}^2$ 610 штрих/мм.	1. Устройство для фокусировки с помощью ножа Фуке 2. Боковой телескоп для ведения наблюдения по полю. 3. Компенсатор изменения фокуса с температурой 4. Юстировочная лампа 5. Источник железной дуги и неона	1. Искатели $d=110\text{ мм}, f=1130\text{ мм}$ 2. Гид $d=300\text{ мм}, f=7500\text{ мм}$ 3. Фотогид $d=300\text{ мм}, f=7500\text{ мм}$ 4. Фантомное управление 5. Автоматическая смена звезд 6. Кабина наблюдателя
	Фокус Кассегрена	$D=2\text{ м}, F=29,5\text{ м},$ $d=58\text{ см}, f=-7,2\text{ м},$ $\omega=7' \times 2'$	I. Кассетное устройство а) размеры фотопластины $6 \times 6\text{ см}$ б) двухэтажная кассета $6 \times 6\text{ см}, 2 \times 7\text{ см}$ II. Дифракционный спектрограф. Коллима- тор $f=1664,6, d/f=1/14,1$, решетки: $139 \times 150\text{ мм}$ 660 штрих/мм с углом отражения 10° и $140 \times 150\text{ мм}$ 660 штрих/мм с углом отражения 20°	1. Устройство для фокусировки с помощью ножа Фуке 2. Источник и оптическое устройст- во для калибровки 3. Источник железной дуги и неона 4. Источник двойной искры для призмленного спектрографа

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5																
		<table> <tr> <th>f</th><th>d/f</th><th>$\frac{d\gamma}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$</th><th>Размеры фото- пластинки (мм)</th></tr> <tr> <td>220</td><td>1/1,5</td><td>25:37:5:75</td><td>12,5×60</td></tr> <tr> <td>540</td><td>1/3,6</td><td>10:15:30</td><td>19,5×126</td></tr> </table>	f	d/f	$\frac{d\gamma}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$	Размеры фото- пластинки (мм)	220	1/1,5	25:37:5:75	12,5×60	540	1/3,6	10:15:30	19,5×126						
f	d/f	$\frac{d\gamma}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$	Размеры фото- пластинки (мм)																	
220	1/1,5	25:37:5:75	12,5×60																	
540	1/3,6	10:15:30	19,5×126																	
		III. 2×2 призмный спектрограф. Коллиматор-обратная система Кассегрена $d=45 мм$, $f=660 мм$, фактор дисперсии $y H\gamma \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$																		
		<table> <tr> <th>f</th><th>d/f</th><th>ИВК-7</th><th>F_2</th></tr> <tr> <td>82,5</td><td>1:1,5</td><td>300</td><td>180</td></tr> <tr> <td>137,5</td><td>1:2,5</td><td>150</td><td>90</td></tr> </table>	f	d/f	ИВК-7	F_2	82,5	1:1,5	300	180	137,5	1:2,5	150	90						
f	d/f	ИВК-7	F_2																	
82,5	1:1,5	300	180																	
137,5	1:2,5	150	90																	
		IV. Звездный фотометр ФЭУ типа Р12—52 с мультиселочным катодом предназначен для фотометрии до $7500 A^\circ$																		
Фокус куде	$D=2 м$, $F=72 м$, $d=58 см$, $f=-5,7 м$	I. Спектрограф типа куде параболическое зеркало коллиматора $d=150 мм$, $f=5400$, относительное отверстие 1:36, дифракционная решетка 150×180 600 штрих/мм с углом отражения 23° Камеры <table> <tr> <th>f</th><th>d/f</th><th>$\frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$</th><th>Размеры фото- пластинки (мм)</th></tr> <tr> <td>350</td><td>1:2</td><td>24:16</td><td>9×120</td></tr> <tr> <td>700</td><td>1:4</td><td>12:8</td><td>13,3×240</td></tr> <tr> <td>1400</td><td>1:8</td><td>6:4</td><td>18,5×400</td></tr> </table>	f	d/f	$\frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$	Размеры фото- пластинки (мм)	350	1:2	24:16	9×120	700	1:4	12:8	13,3×240	1400	1:8	6:4	18,5×400	1. Фильтры системы U. B. V. 2. Перфоратор 1. Фотогид для гидирования по звезде на щели 2. Вращатель поля 3. Источник и оптическое устройство для калибровки 4. Источник железной дуги и неона 5. Набор светофильтров	
f	d/f	$\frac{d\lambda}{dx} \left(\frac{A^\circ}{мм} \right)$	Размеры фото- пластинки (мм)																	
350	1:2	24:16	9×120																	
700	1:4	12:8	13,3×240																	
1400	1:8	6:4	18,5×400																	

ления оптимальной звездной величины и времени экспозиции при разных положениях телескопа. В табл. 2 приведены данные наблюдений. Как известно, для получения снимков высокого качества особенно важно, чтобы температура передней и обратной стороны зеркала, а также вдоль всей его поверхности была одинаковой, т. е.

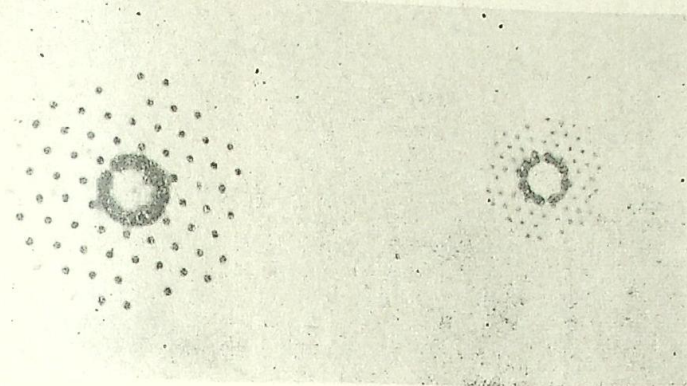


Рис. 3. Гартмановская пара снимков.

чтобы не было никаких температурных градиентов. Кроме этого, обязательным условием является высокое качество изображения. Температурный режим зеркала проверялся по дистанционному измерителю температуры, датчики которого расположены как на передней, так и на обратной стороне зеркала, а также внутри трубы. Время экспозиции для получения нормальных снимков составляет 1—1,5 мин для звезд 3—4 величины.

Таблица 2

№ негатива	Объект	Спектральный класс	Звездная величина	Часовой угол	Время экспозиции, сек
158	ϵ Aur	F5	3, 1—3,8	0h59m32s	90
405	γ Boo	F0	3,0	01 28	90
409	η Dra	G5	2,89	1 57 07	90
410	η Dra	G5	2,89	1 57 07	90
412	α CrB	AO	2,31	1 56 41	90
414	β Ohh	K0	2,94	2 03 07	90

Некоторые негативы были специально сделаны при плохих условиях (например, негатив № 414). Из 24 негативов для измерения выбрано 6 пар с нормальным почернением, так как первое пробное исследование показало, что результаты сильно зависят от плотности почернения негативов. Для обработки применялся метод, разработанный Бека [2] и Фельтхамма [3], а также проанализированный Марксом Пфау [4] при исследовании 36-дюймового рефлектора. Были учтены также замечания, сделанные в работе Мейэлл и Василевского [4].

Как отмечено выше, для исследования зеркала применялась диафрагма с гексагональной сеткой. Все отверстия были пронумерованы как на диафрагме, так и на негативах. Подобная нумерация давала возможность ориентироваться в участках зеркала и выбирать любые направления для вычисления характеристик зеркала. Измерение негативов производилось на координатноизмерительной машине „Аскограф-рекорд“ [6]. Результаты выдавались на перфолену по международному пятиканальному телеграфному коду на протокол в виде номера точки с соответствующими координатами x и y на машине „Optima

527". Отсчет шкалы, соответствующей фокусу, производится по формуле

$$h = h_1 + \frac{l}{l_1 + l_2} (h_2 - h_1), \quad (1)$$

где l_1 и l_2 — расстояния между двумя симметричными изображениями на предфокальном и зафокальном негативах соответственно h_1 и h_2 — отсчеты шкалы фокусировки для предфокального и зафокального снимков.

Таблица 3

Зоны с радиусом в мм № негатива	370	430	580	650	780	880	950	995	T
158	22,376	22,276	22,412	22,346	22,353	22,457	22,286	22,222	0,128
405	21,851	22,023	22,003	22,020	21,953	22,018	21,783	21,780	0,162
409	21,840	21,870	21,905	22,010	21,573	22,070	21,875	21,777	0,170
410	22,265	21,752	21,808	21,689	21,339	21,604	21,495	21,302	0,202
412	22,141	22,023	22,319	22,022	21,902	21,811	21,887	21,864	0,178
414	21,639	21,156	21,627	21,610	21,526	21,696	21,589	20,671	0,370

Еся поверхность зеркала была разделена на 8 зон, размеры которых выбирались по расположению точек. Радиусы этих зон следующие: 370; 430; 580; 650; 780; 880; 950; 995 мм. В табл. 3 приведены результаты вычислений по формуле (1) отсчетов шкалы фокусировки для разных зон. В первом столбце приведены номера негативов, в 2—9 столбцах — фокусное расстояние для соответствующих зон, а в последнем — среднее значение постоянной Гартмана.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ ТОЧЕК ПРОХОЖДЕНИЯ

Как известно, для вычисления отсчетов, соответствующих фокусу, по методу Гартмана нужно трансформировать точки по известной формуле:

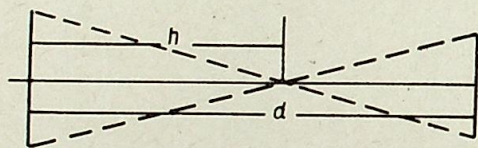


Рис. 4

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + \frac{h}{d} (x''_1 - x'_1), \\ y_1 &= y'_1 + \frac{h}{d} (y''_1 - y'_1), \end{aligned} \quad (2)$$

где x_1 и y_1 — трансформированные, а x'_1 , y'_1 , x''_1 , y''_1 — измеренные координаты в зафокальной и предфокальной плоскостях, d — расстояние между этими плоскостями, h — расстояние до фокальной плоскости зеркала (рис. 4). Таким образом мы имеем два множества точек, находящихся на параллельных плоскостях (за- и предфокальные плоскости): точки множества A имеют координаты (x'_1, y'_1) , а точки множества B — координаты (x''_1, y''_1) . Координатами центра для множества A являются x_c , y_c , а для множества B — x'_c , y'_c . Координаты центра множеств A и B определяются усреднением координат как по x , так и по y . Если координаты точек центров множеств A и B определены, то можно определить координаты x_c , y_c на плоскости, находящейся на расстоянии h множества A , по формуле:

$$\begin{aligned} x_c &= x'_c + \frac{h}{d} (x''_c - x'_c), \\ y_c &= y'_c + \frac{h}{d} (y''_c - y'_c). \end{aligned} \quad (3)$$

По трансформированным координатам на плоскости, находящимся на расстоянии h от плоскости множества A , определяем расстояние между точками x'_1, y'_1 и x_c, y_c по формуле

$$l_1 = \sqrt{(x'_1 - x_c)^2 + (y'_1 - y_c)^2}. \quad (4)$$

Теперь задача ставится следующим образом: найти h , при котором максимальный процент точек (2) попадает в кружок наименьшего радиуса (4). Пусть q есть целая часть от произведения $\frac{Pn}{100}$, где n —

количество точек, P — процент света от звезды, концентрированный в кружке данного диаметра. Вычисленные по формуле (4) значения l_1 упорядочиваются по возрастанию и затем берется q -ое от начала l_q . После этого производится одномерный поиск такого значения h , при котором r_q принимает минимальное значение, когда $P = 50, 60, 70, 80, 100\%$.

Таким образом находим h . Плоскость, находящаяся от множества A на расстоянии h , должна быть на таком расстоянии, чтобы $\frac{\Sigma l_1}{n}$ было минимальным:

$$\frac{\Sigma r_1}{n} = \frac{1}{n} \Sigma \left[\left(x'_1 + \frac{h}{d} (x''_1 - x'_1) + x'_c - \frac{h}{d} (x''_c - x'_c) \right)^2 + \left(y'_1 + \frac{h}{d} (y''_1 - y'_1) + y'_c - \frac{h}{d} (y''_c - y'_c) \right)^2 \right],$$

$$\frac{d(\Sigma r_1)}{dh} = \frac{2}{h} \left\{ \frac{1}{d} \frac{n}{\Sigma} [(x'_1 - x'_c)(x''_1 - x''_c - x'_1) + (y'_1 - y'_c)(y''_1 - y''_c - y'_1)] \right\} +$$

$$x'_c + (y'_1 - y'_c)(y''_1 - y''_c - y'_1 + y'_c)] + \frac{h}{a^2} \sum_{i=1}^n [(x'_i - x'_c - x'_1 + x'_c)^2 + (y'_i - y'_c - y'_1 + y'_c)^2] = 0,$$

$$h = \frac{d \sum_{i=1}^n [(x'_i - x'_c)(x''_i - x''_c + x'_1 + x'_c) + (y'_i - y'_c)(y''_i - y''_c - y'_1 + y'_c)]}{\sum_{i=1}^n [(x''_i - x'_c - x'_1 + x'_c)^2 + (y''_i - y'_c - y'_1 + y'_c)^2]}$$

Как видно из приведенных формул, вычисление диаграммы точек прохождения является трудоемким делом. Однако все операции по вычислению и трансформировке координат были запрограммированы для ЭВМ Минск-22. Вычислительная работа выполнена в Институте теоретических проблем химической технологии Азербайджанской ССР. Ввод данных осуществлялся с записи на пятиканальном международном телеграфном коде. Кодировка осуществлялась при измерении координат точек на координатно-измерительном приборе „Аскорекорд“.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Как известно, по формуле (1) можно получить положение фокусов для различных зон зеркала и различных азимутов. Первый будет показывать наличие сферической аберрации, а второй — радиальный

астигматизм (на оси) данного зеркала. Сферическая aberrация характеризуется технической постоянной T (постоянной Гартмана), являющейся величиной диаметра кружка рассеяния, выраженной стотысячных долях фокусного расстояния.

В табл. 3 приведены значения постоянной Гартмана для различных зон зеркала. Как видно из таблицы, T зависит от положения телескопа. Самое лучшее значение получается при часовом угле: $t = 0^h 59^m$, $\delta = +43^\circ 46'$ (негатив №434), самое худшее — при $t = 2^h 03^m$, $\delta = +4^\circ 35'$ (негатив №414).

Как указано выше вся поверхность зеркала была разделена на 8 зон, для исследования было выбрано 6 пар негативов. Известно, что при исследовании зеркала с диафрагмой освещается только 2% его поверхности и полученная информация относится к этой части зеркала. Информацию от другой части поверхности можно получить путем поворота диафрагмы вокруг оптической оси, что более удобно при использовании диаграммы с гексагональной сеткой. Как показывает теневая картина зеркала, на его поверхности отсутствуют заметные недостатки, поэтому полученные значения можно отнести ко всей поверхности зеркала. При вычислении постоянной Гартмана мы иногда отбрасывали одну или две пары точек из общего их числа, что составляло всего 3%. Помимо этого, учитывая ориентацию отверстий относительно разгрузочных элементов, можно грубо определить их работу в зависимости от положения телескопа. Как показывает табл. 3, разгрузочные элементы работают неплохо. Значение постоянной Гартмана 0,13 говорит в том, что главное зеркало отличного качества.

Для сравнения приведем таблицу значений технической постоянной T для известных зеркал диаметром больше 1,5 м (табл. 4).

Таблица 4

Обсерватория	D , см	T
Техас	210	0,05
Торонто	188	0,20
Виктория	184	0,12
Делавар	172	0,14
Поломар	200	0,15
ШАО	200	0,13

Диаметр кружка рассеяния равен $\rho'' = 2'',06$. В нашем случае имеем $\rho'' = 0'',27$. Поэтому приблизительно при 30% от общего числа ясных ночей диаметр турбулентного диска $\sim 0'',5$.

Для изучения астигматизма на оси надо сравнить фокусы для зоны с азимутом φ и $\varphi + 90^\circ$ [7]. При наличии астигматизма на оси сечением конуса является эллипс, поэтому положению фокуса для двух азимутов будет:

$$h_{y, \varphi} = h_{y, \varphi_0} + a \sin^2 (\varphi - \varphi_0),$$

$$h_{y, \varphi \pm 90} = h_{y, \varphi} + a \cos^2 (\varphi - \varphi_0);$$

их полусумма

$$\frac{1}{2} (h_{y, \varphi} + h_{y, \varphi \pm 90} - h_y = -\frac{a}{2} \cos (\varphi - \varphi_0),$$

разность

$$\Delta h_{y, \varphi} = h_{y, \varphi} - h_y = -\frac{a}{2} \cos (\varphi - \varphi_0),$$

отсюда получаем

$$\Delta h_{y, \varphi} + \frac{a}{2} \cos (\varphi - \varphi_0) = 0.$$

Зная $\Delta h_{y, \varphi}$ и φ , решаем последнее уравнение по способу наименьших квадратов и определяем величину $a/2$, которая характеризует астигматизм на оси. Это уравнение решалось по способу наименьших квадратов как для внутренней, так и для внешней зоны в отдельности. Результаты определения таковы:

$$\text{для внутренней зоны } \frac{a}{2} = 0,14,$$

$$\text{для внешней } \frac{a}{2} = 0,07.$$

С другой стороны, согласно критерию Релея допустимая фокусировка определяется по формуле $\Delta F = m^2 \lambda$, где $m = \frac{F}{D}$. Величина ΔF для этих зон соответственно равна 0,065 и 0,009.

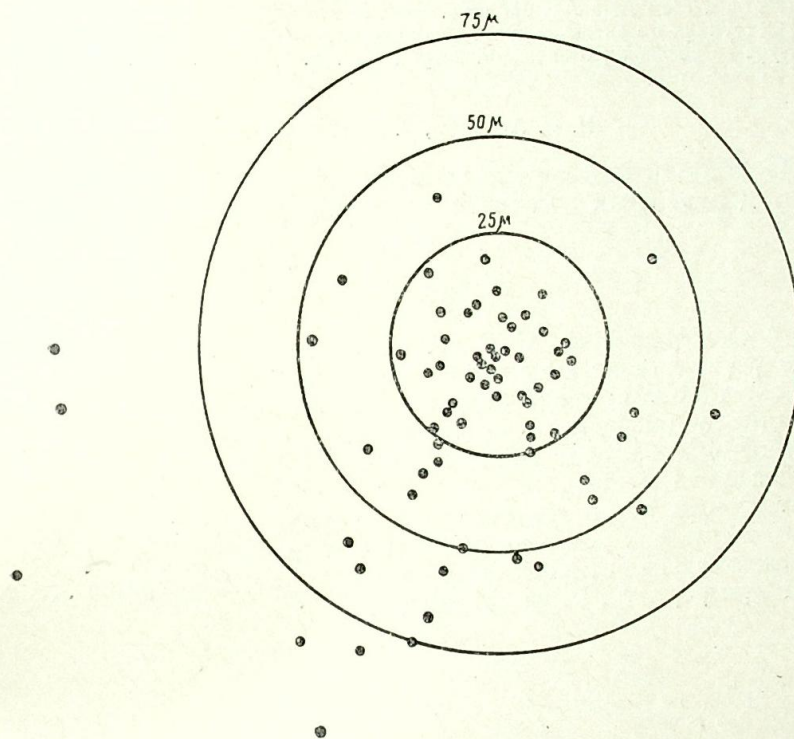


Рис. 5. Диафрагма точек прохождения

Для определения комы фотографировалось скопление М 71. Размеры фотопластинки 60×60 мм, поле в главном фокусе $21' \times 21'$. На краю поля радиусом 29 мм, размер комы составляет 10 μ . Затем поле постепенно убывает до радиуса 13 мм (поле $9'$) и кома достигает 6,8 μ . Свободное от комы поле без коррекционной системы составляет $7',0$. Острые комы направлено к оптической оси.

Немаловажное значение имеет определение концентраций изображений на оптической оси. Из вышеприведенных фотографий звезд с диафрагмой Гартмана и обработки данных, т. е. вычисление диаграммы точек прохождения видно, сколько процентов света от звезды концентрируется в кружке данного диаметра (рис. 5, негатив № 407). Как видно из рисунка, весь свет собирается в кружке диаметром $1''$, что еще раз свидетельствует о высоком качестве главного зеркала.

На рисунке приведена только одна диаграмма точек прохождения из шести.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность начальнику вычислительного центра Института теоретических проблем химической технологии АН Азербайджанской ССР Махмудову за составление программы для ЭВМ Минск-22 и проведение вычислений, а также Н. Н. Михельсону за обсуждение рукописи статьи.

Поступило 19.VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Иенш. Иенское обозрение, 1967, № 3.
2. N. U. Mayall, S. Vasilevskis. Astron. J., 1960, 65. № 5, 304—317.
3. Günlü Fehikam m. Jinar Jahrbuch, 1962, 87—94.
4. G. Hans. Besk Jinar Jahrbuch, 1962—75—85.
5. Marks, Pfau Asta Astronomika, 1964, № 6.
6. Инструкция по эксплуатации „Аскорекод“.
7. Курс астрофизики и звездной астрономии. т. 1, М.—Л. 1957.

И. Э. Асланов, J. A. Мәммәдов

Азәрбајҹан Елмләр Академијасы Шамаһы астрофизика
рәсәдханасынын 2 метрлик телескопунун баш күзкүсүнүн
тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Азәрбајҹан ССР ЕА ШАР-нын 2 метрлик телескопунун баш күзкүсүнүн тәдгигиндән бәһс едилмишдир.

Тәдгигатларда сферик абберасија, астигматизм кома вә баш күзкүнүн сәтһинә дүшән шүә дәстәсинин онун фокусуна топланма фаизи өјрәнилмишдир. Гартман әксләри Минск-22 рижәзијјат машыны васитәсилә һесаблинмишдир.

Гартман сабитинин телескопун борусунун вәзијјәтиндән вә күзкүнүн зоналары дан асылылығы да тәдгиг олунмушдур.

Тәдгигатларын нәтичәси кәстәрмишдир, ки, 2 метрлик телескопун баш күзкүсү ә'ла кәјфијјәтлидир.

АЗӘРБАЈҹАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә рижәзијјат елмләри сәријасы, 1969, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 4

В. Д. КУБЕНКО, З. М. ЗУЛЬФУГАРОВ

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОКОЛО КРУГОВОЙ ПОЛОСТИ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Основные соотношения теории упругости с несимметричным тензором напряжений содержатся в работах [2,4]. В [1] дано общее решение динамической плоской задачи этой теории в полярных координатах установившихся внешних воздействий. В данной работе вычислены значения напряжений на контуре круговой, цилиндрической полости и вне его, обусловленные падающей плоской гармонической волной сжатия.

1. Основные уравнения и общее решение

В случае установившихся волновых движений имеем следующую систему уравнений плоской моментной теории упругости [2]:

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\omega^2}{c_1^2} \varphi = 0; \quad \nabla^2 \psi_1 + \frac{\omega^2}{c_2^2} \psi_1 = 0; \quad \nabla^2 \psi_2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \psi_2 = 0. \quad (1,1)$$

Здесь ∇^2 оператор Лапласа; ω —круговая частота;

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}; \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}; \quad l^2 = \frac{B}{4\mu}; \quad (1,2)$$

$$c_3^2 = \frac{2l^2\omega^2}{\sqrt{1 + \frac{4l^2\omega^2}{c_2^2} + 1}}; \quad c_4^2 = \frac{2l^2\omega^2}{\sqrt{1 + \frac{4l^2\omega^2}{c_2^2} + 1}};$$

λ и μ —постоянные Ляме, B —новая упругая постоянная, ρ —плотность.

Потенциалы φ , ψ_1 , ψ_2 связаны с v в котором смещений при помощи следующей формулы (отметим, что движение происходит в плоскости, которую отнесем к декартовым координатам x, y или полярным r, θ):

$$\vec{U} = \text{Re} \{ [\text{grad } \varphi + \text{rot } \kappa (\psi_1 + \psi_2)] e^{-i\omega t} \}, \quad (1,3)$$

где $\vec{\kappa}$ —орт нормали, направленной по оси z .

В случае плоской деформации напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_r = \text{Re} \left\{ \left[-\lambda \frac{\omega^2}{c_1^2} \varphi + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial \theta} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\};$$

$$\sigma_\theta = \text{Re} \left\{ \left[-\omega^2 \varphi - 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial \theta} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\};$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[\omega^2 (\psi_1 + \psi_2) + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial r} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial \theta^2} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\}; \\
\tau_{\theta r} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[-\omega^2 (\psi_1 + \psi_2) + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \frac{\partial^2 (\psi_1 + \psi_2)}{\partial r^2} \right) \right] e^{-i\omega t} \right\}; \\
\mu_{\theta} &= \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{l}{a} \right)^2 \omega^2 - 1} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{l}{a} \right)^2 \omega^2 + 1} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right] e^{-i\omega t} \right\}; \\
\mu_r &= \operatorname{Re} \left\{ \left[\left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{l}{a} \right)^2 \omega^2 - 1} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{l}{a} \right)^2 \omega^2 + 1} \right) \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right] e^{-i\omega t} \right\}.
\end{aligned} \tag{1,4}$$

Здесь μ_r и μ_{θ} — моментные напряжения.

В полярных координатах общее решение уравнений (1,1), описывающее расходящиеся волны, имеет вид:

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_1} r \right) \cdot (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta); \\
\psi_1(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(1)} \left(\frac{\omega}{c_3} r \right) (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta); \\
\psi_2(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} K_m \left(\frac{\omega}{c_4} r \right) (E_m \cos m\theta + F_m \sin m\theta),
\end{aligned} \tag{1,5}$$

где H_m — цилиндрическая функция Ханкеля 1-го рода; K_m — функция Макдональда; $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m$ — неопределенные постоянные.

2. Граничная задача

Пусть в упругом пространстве, содержащем круговую цилиндрическую полость радиуса a (ось полости совпадает с осью z системы координат r, θ, z), распространяется плоская гармоническая волна сжатия. Если направление движения принять параллельным оси ox , то потенциал φ будет иметь вид

$$\varphi^I = -\frac{1}{\omega^2} e^{i\omega(\xi_1 x - t)}; \quad \psi^I = 0. \tag{2,1}$$

Ему соответствуют напряжения:

$$e_x^I = e^{i\omega(\xi_1 x - t)}; \quad \sigma_y^I = \frac{\nu}{1-\nu} e^{i\omega(\xi_1 x - t)}; \quad \tau_{xy} = 0. \tag{2,2}$$

Граничные условия состоят в отсутствии напряжений на контуре полости:

$$[\sigma_r^I + \sigma_r^{II}]_{r=a} = 0; \quad [\tau_{r\theta}^I + \tau_{r\theta}^{II}]_{r=a} = 0, \tag{2,3}$$

где $\sigma_r^{II}, \tau_{r\theta}^{II}, \tau_{r\theta}^{III}$ — напряжения, порожденные отраженными волнами (1, 5).

Для удовлетворения граничным условиям используется разложение плоской волны в полярных координатах [3]:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\omega}{c_1} r} &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m \left(\frac{\omega}{c_1} r \right) \cos m\theta; \\
\epsilon_m &= \begin{cases} 1, & m=0; \\ 2, & m \geq 1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2,4}$$

Подставляя (1,5), (2,4) в (2,3), находим постоянные $A_m, B_m, \dots, F_m$.

3. Числовые результаты

При вычислениях в рядах (1,5), (2,4) удерживалось 16 членов, что обеспечивало в выбранном диапазоне частот точность до 10^{-4} . На рис. 1 показано максимальное за период колебания значение напря-

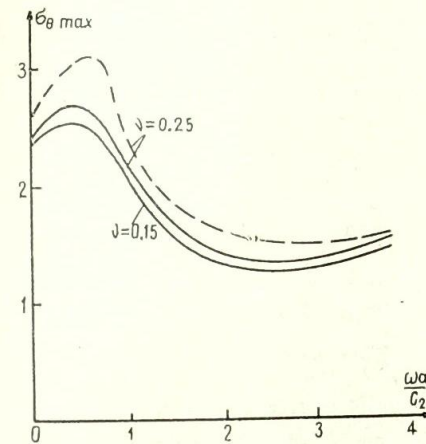


Рис. 1

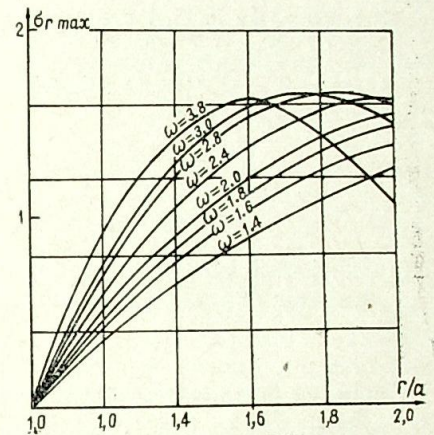


Рис. 2

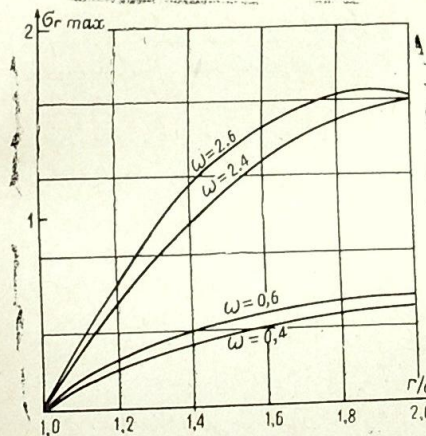


Рис. 3

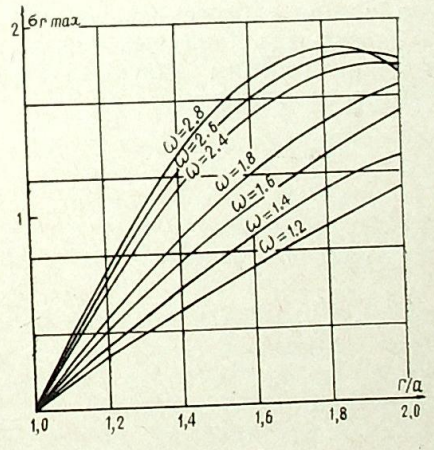


Рис. 4

жения $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta \max}$, отнесенное к амплитуде напряжений в падающей волне в точке контура $\theta = \frac{\pi}{2}$, в зависимости от безразмерной частоты $\omega = \frac{\omega a}{c_2}$. Сплошные линии представляют $\sigma_{\theta \max}$ для $l/a = \frac{1}{3}$ и $\nu = 0,15$.

0,25 (ν — коэффициент Пуассона), пунктирные — для $l/a = 0$, т.е., когда моментные напряжения отсутствуют.

На рис. 2 представлено напряжение $\sigma_{r \max}$ по сечению $\theta = \pi$ при $l/a =$, $\nu = 0,15$ для различных значений ω . Рис. 3 соответствует значениям $l/a = \frac{1}{3}$, $\nu = 0,25$, а на рис. 4 представлен случай $l/a = 0$, $\nu = 0,15$. Рис. 2—4 показывают, что, при некоторых значениях частоты падающей волны на определенном удалении от контура отверстия появляется зона повышенных напряжений, которые, по-видимому, обуславливают явление откола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кубенко В. Д., Шульга Н. А. „Прикладная механика“ т. III. вып. 2, 1967.
2. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. „Механика“, 1964, № 4.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. II. ИЛ, М., 1960.
4. Савин Г. Н. Основы плоской задачи моментной теории упругости. Изд-во Киевского гос. ун-та, 1965.

Поступило 19. II 1968

В. Д. Кубенко, З. М. Зулфугаров

Еластикијјэтин момент нэзэријјэсинин динамик мустэви мэсэлэсиндэ даирэви гуршаг этрафында кэркинлик вэзијјэти наггында

ХҮЛАСЭ

Кэркинлик тензору гејри-симметрик олан мүнит үчүн еластикиј-јэт нэзэријјэсинин эсас тэнликлэри вэ мүнасибэтлэринэ эсасэн, даирэви цилиндр гуршагын сэрхэддинэ вэ ејнилэ дэ мүнитин дахилинэ дүшэн гармоник сыхычы далгаларынын тезлијиндэн асылы оларат кэркинлијин гијмэти һесаблинмышдыр.

Тэдгигатда динамики кэркинлијин пайланма эмсалы илэ дүшэн гармоник сыхычы далганын тезлији арасындакы үмуми асылылыг ифадэси алынмышдыр.

А. А. АБДУЛАЕВ, Г. А. АЛИ-ЗАДЕ, А. К. МАМЕДОВА

ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ ПРИ АВАРИЙНЫХ РЕЖИМАХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Одной из важнейших задач в области разработки и внедрения различных установок на полупроводниковых приборах является обеспечение их надежной защиты от недопустимых перегрузок и коротких замыканий. Удовлетворение этих требований существующей аппаратурой защиты приводит к значительному увеличению установленной мощности полупроводниковых приборов из-за необходимости снижения их коэффициента использования. При этом особое значение приобретает правильный выбор коэффициента запаса вентилей в зависимости от возможных режимов их работы в преобразованных установках.

§ 1. Анализ допустимых ударных нагрузок на вентили

Анализ существующих средств защиты тиристорных преобразователей показывает, что уже при значении времени $t \approx 0,01$ сек большинство их обеспечивает надежную защиту вентилей от возможных аварийных режимов установок [1]. Поэтому наибольший интерес представляет рассмотрение допустимых ударных нагрузок на вентили в течение времени их воздействия, на превышающем 0,01 сек. При этих условиях задача сводится к рассмотрению переходных тепловых режимов полупроводниковых приборов под воздействием одиночного импульса [2].

На рис. 1 для некоторых типов приборов приведены зависимости максимально допустимой мощности от времени. Указанные кривые получены для температуры перегрева перехода 100°C в предположении, что импульс мощности тепловых потерь $P(t)$ прямоугольной формы. Как видно из рисунков, обобщенная температура и допустимые значения мощности тепловых потерь, а следовательно и тока резко уменьшаются с увеличением времени воздействия ударной нагрузки.

Одной из важных характеристик прибора при ударных нагрузках является скорость изменения температуры V_T , которая связана с температурой перегрева $p - n$ перехода простым соотношением [2]:

$$\Delta T(t) = P_0(R_1 - \tau_1 V_T). \quad (1)$$

При амплитудном значении мощности $P_0 = 1$

$$V_T = \frac{R_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1}, \quad (2)$$

где R_1 , τ_1 — соответственно, тепловое сопротивление и тепловая постоянная времени $p-n$ -перехода и прилегающих к нему областей пластинки полупроводника.

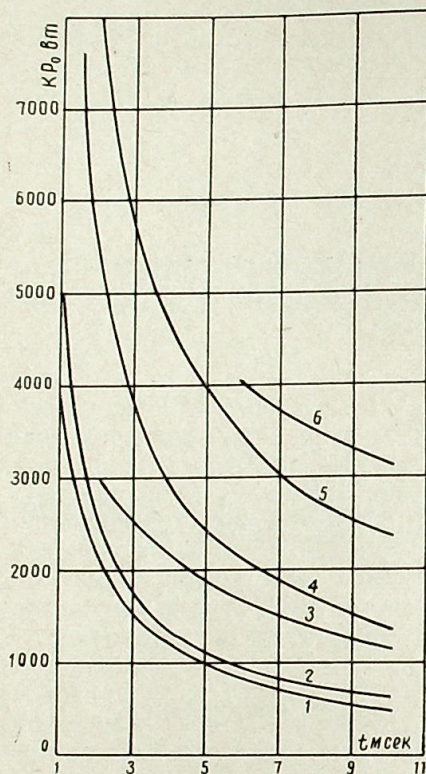


Рис. 1. Зависимости максимально допустимой мощности $p-n$ -перехода приборов от времени воздействия ударной нагрузки:

- 1—Д-235; 4—ПВК-100;
2—Д-238; 6—ВКДУ-1150;
3—ПВК-50 5—ПВК-200;

В общем случае допустимая температура перегрева $p-n$ -перехода при ударных нагрузках будет определяться из выражения

$$\Delta T(t) = T_{п макс} - \Delta T_{\infty} - T_{окр}, \quad (3)$$

где $\Delta T_{п макс}$ — максимально допустимая температура $n-p$ -перехода, гарантируемая заводом-изготовителем;

ΔT_{∞} — температура перегрева перехода при номинальной нагрузке и квазиустановившемся тепловом режиме [3];

$T_{окр}$ — температура окружающей среды.

Очевидно, что допустимые значения ударных нагрузок существенным образом будут зависеть от величины суммы $\Delta T_{\infty} + T_{окр}$. При $T_{п макс} = T_{\infty} + T_{окр}$ вообще никакие перегрузки прибора недопустимы и он должен отключаться мгновенно. При $\Delta T_{\infty} = 0$ допустимы

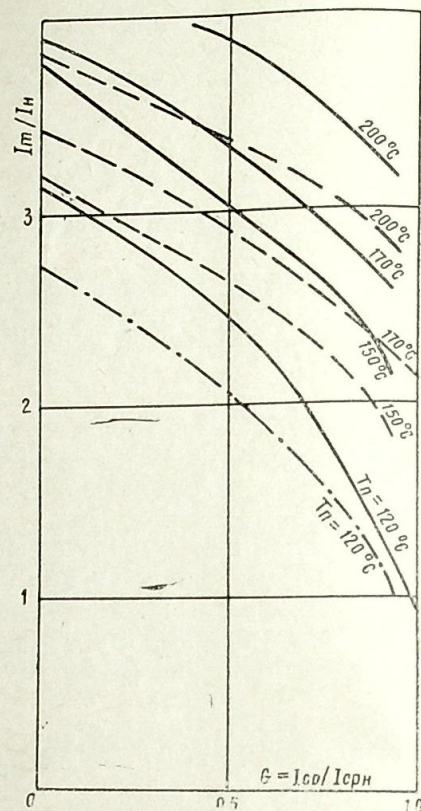


Рис. 2. Зависимости допустимых ударных нагрузок вентилей ВКДУ-150 от G :

— 10 м сек; — 7 м сек.

максимальные значения перегрузок в заданном временном интервале. Таким образом, степень перегрузки прибора будет определяться в основном режимом его работы, предшествовавшим аварийному режиму установки. В каждом конкретном случае в рассматриваемом интервале времени допустимые значения ударных нагрузок могут быть легко определены по уравнениям (1)–(3) и данным [3, 4].

Представляет интерес рассмотреть зависимости допустимых ударных нагрузок от установленного запаса по току относительно номинальных параметров приборов (коэффициента использования G).

В качестве примера на рис. 2 приведены данные по приборам типа ВКДУ-150, рассчитанные для различных $\Delta T_{п макс}$. Кривые соответствуют значениям времени воздействия ударной нагрузки ≈ 7 и 10 мсек. Хотя с уменьшением коэффициента использования приборов G допустимые нагрузки растут, тем не менее между этими параметрами существует явная нелинейная зависимость. Причем степень этой нелинейности, т. е. характер функции $I_m (I_n = f(G))$, существенным образом зависит от тепловых параметров, конструкции полупроводникового прибора, вида его вольтамперной характеристики, длительности воздействия ударных нагрузок и температуры $p-n$ -перехода, предшествовавшей аварийному режиму. Поэтому возможны случаи, когда допустимые нагрузки на вентили будут расти значительно медленнее, чем относительное уменьшение коэффициента их использования G . Этот вывод является довольно существенным и указывает на необходимость серьезного подхода к выбору коэффициента использования вентиля.

§ 2. Токи короткого замыкания (к. з.) в преобразовательных установках

При работе преобразовательных установок наиболее тяжелыми аварийными режимами, являющимися по существу неуправляемыми, можно считать короткие замыкания на общих шинах постоянного тока и обратный пробой вентиля, приводящий к режиму прерывистого к. з. на зажимах выпрямителя. Токи к. з. даже за слишком короткий промежуток времени могут достигать значительных величин, опасных для вентиля.

Произведенные расчеты показывают, что в большинстве случаев токи к. з. даже за ограниченный промежуток времени $3 \div 5$ м сек успевают достигнуть почти установившегося значения тока к. з., величина которого в диапазоне изменения U_k трансформатора ($5 \div 10$)% может принимать значения $(20 \div 10) I_n$ [5].

Для ограничения токов к. з. применяются трансформаторы с повышенным напряжением к. з. U_k , поэтому представляет интерес рассмотреть зависимость величины тока к. з. от U_k . Эти зависимости в относительных единицах показаны на рис. 3 (кривая 1). На этом же рисунке приведена зависимость $\tau_{макс} / \tau_{макс 2\%}$ от $U_k / U_{к 2\%}$ (кривая 2). В этом случае $i_{кз}$ и время протекания $\tau_{макс}$ берутся относительно трансформатора с $U_k = 2\%$.

Как видно из рисунка, на начальных участках возрастания U_k максимальные значения токов к. з. резко уменьшаются, а при относительных больших значениях их это изменение невелико. Аналогичный характер изменения от U_k наблюдается и для $\tau_{макс}$: при малых напряжениях к. з. $\tau_{макс}$ возрастает резко, а при больших параметрах прибора, т. е. эти зависимости и реальные тепловые параметры прибора, можно в той или иной мере воспользоваться вариацией параметров трансформатора для ограничения токов к. з., особенно если время срабатывания защиты значительно меньше времени, при котором ток к. з. достигает максимального значения.

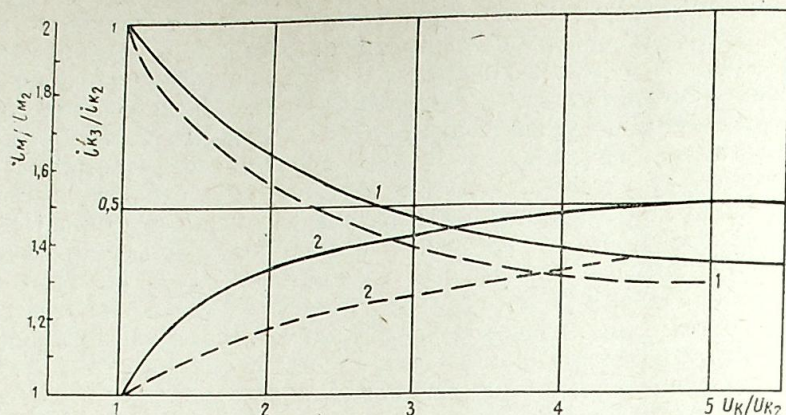


Рис. 3. Зависимость величины тока к. з. (1) и времени его протекания $\tau_{\max}$ (2) от U_k трансформатора: — $U_k > 100$ кВа; --- $U_k < 100$ кВа.

§ 3. Связь между допустимой температурой перегрева полупроводниковых приборов и скоростью изменения токов короткого замыкания в преобразовательных установках и обоснование времени действия защиты

Для упрощения дальнейшего анализа примем, что в цепи к. з., кроме реактанса трансформатора, нет никаких дополнительных токоограничивающих элементов. Кроме того, будем считать, что время срабатывания аппаратуры защиты не превышает 7 мсек. Последнее позволяет рассматривать лишь линейные участки нарастания токов к. з. во времени [6, 7].

На рис. 4 представлены зависимости от времени токов к. з. и мгновенных значений мощности тепловых потерь для некоторых типов полупроводниковых приборов. Эти зависимости построены на основании данных рис. 3, также вольтамперных характеристик вентиля. В качестве номинального тока выпрямителя для схемы Ларионова берется 0,8 $I_{\max}$. Для каждого типа вентиля $I_{\max}$ берется как $I_0 \pi$, исходя из однопериодной схемы. Сравнение этих рисунков с данными рис. 2, с учетом коэффициента формы, показывает, что даже для трансформаторов с $U_k = 11\%$ время, необходимое для надежной защиты, в зависимости от типа прибора, не должно превышать 2 ÷ 3 мсек. Этому условию не удовлетворяет ни одно известное устройство защиты [1, 5].

Для уточнения времени действия защиты определим температуру перегрева приборов при длительностях токов к. з. от 0 до 3 мсек. При этом, как это очевидно, зависимость $P = f(t)$ можно взять линейной. Тогда эквивалентная мощность импульсов прямоугольной формы определится как в [2 и 3]:

$$P = \frac{1}{\tau} \int_0^t (t) dt. \quad (4)$$

На рис. 5 представлены зависимости температуры перерыва перехода приборов при их номинальных параметрах от времени протекания токов к. з., полученные на основании (1) — (4). При этом $\Delta T_{\infty} + T_{\text{окр}} = 0$.

Как следует из рисунка, при максимальном использовании номинальных параметров вентиля в преобразовательных установках пол-

ное время действия защиты в зависимости от U_k трансформатора не должно превышать 1—2 мсек, а при бестрансформаторном подключении преобразователя к сети—0,5 мсек.

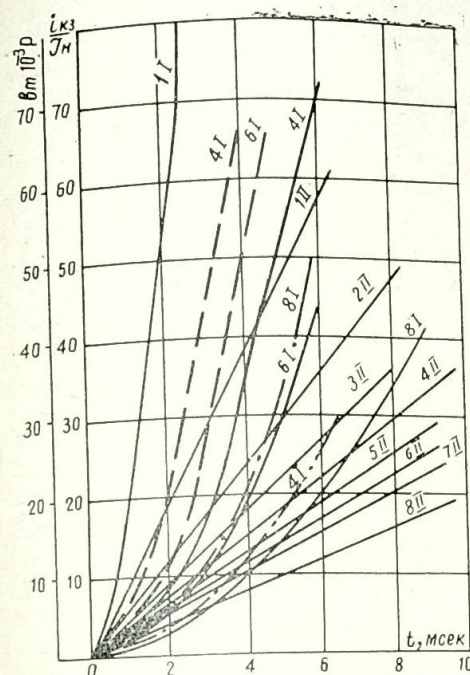


Рис. 4. Зависимости токов короткого замыкания и мощности потерь от времени: 1— $U_k = 2\%$; 2— $U_k = 3\%$; 3— $U_k = 4\%$; 4— $U_k = 5\%$; 5— $U_k = 6\%$; 6— $U_k = 7\%$; 7— $U_k = 8\%$; 8— $U_k = 11\%$;

$$I - P = f(t); \quad II - \frac{I_{\text{кз}}}{I_n} = f(t);$$

— ВКДУ-150; — — — ПГК-200; — — — ПВК-100

Таким образом анализ тепловых режимов приборов в наиболее тяжелых аварийных режимах установок показывает, что при максимальном использовании номинальных параметров вентиля и отсутствии вспомогательных токоограничивающих устройств полное время срабатывания защиты не должно превышать 1—2 мсек. Последнее, в частности, может быть обеспечено, например, для тиристорных устройств их коммутацией [8].

В заключение авторы выражают благодарность акад. Г. Б. Абдулаеву за ценные замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трахтман Л. М. Вопросы защиты моторных вагонов однофазно-постоянного тока с кремниевыми выпрямителями от перегрузок и коротких замыканий. В сб. "Полупроводники и их применение в электротехнике". Рига, 1962.
2. Абдулаев А. А. "Вестник электропромышленности", № 4.
3. Абдуллаев А. А. Тепловой режим полупроводниковых приборов при импульсных нагрузках. В сб. "Применение полупроводниковых элементов в приборостроении, под ред. проф. Н. И. Чистякова. М., 1966.
4. Давидов Н. Д. "Электричество", 1966, № 4.
5. Corbyn D. B., Potter N. L. The characteristics and protection of Semiconductor rectifiers. "Proc. Instn Electr. Engrs A 107, № 33, 1960.
6. Kummel Fritz. Kunzschlubschutz von Thyristor—Stromrichtern in Dreiphasen—Brücken—schaltung. "Electrotechn. Zs." A 86, № 9, 1965.

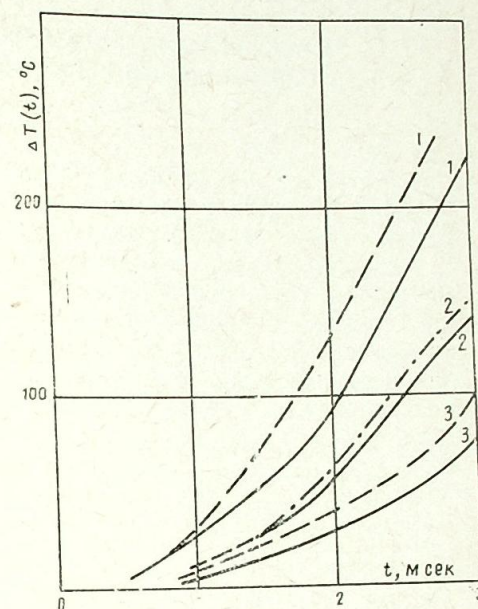


Рис. 5. Зависимость температуры перегрева $p-n$ -перехода приборов от длительности протекания токов к. з.: 1— $U_k = 5\%$; 2— $U_k = 7\%$; 3— $U_k = 10\%$; — ВКДУ-150; — — — ПВК-200; — — — ПВК-100.

Поступило 28. II 1969

А. А. Абдуллаев, Б. Э. Элизадэ, Э. Г. Маммэдова

Чевиричи гургуларда баш верэн авария режиминдэ яримкечиричи чиназлардакы истилик просеслэри

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ чевиричи гургуларын авария режиминдэ баш верэн зэрбэли жүкләнмэдэ яримкечиричи вентиллэрдэки истилик режимлэринин эсаслы тәһлили верилмишдир.

Бундан элавэ, чевиричилэрдэ максимал бурахыла билэн параметрлэрин (күч, ани дәјишән чэрэјан вэ $p-n$ кечиддэки температур) ани дәјишән чэрэјанын тә'сир мүддэти, вентиллэрин истифадэ әмсалы вэ трансформаторун гыса гапанма кәркинлијиндән асылылығы ајдынлашдырылмышдыр. Мүһафизэ гурғусунун ишәдүшмә мүддәтинә гаршы тәләбат да мүәјјән едилмишдир.

Я. Б. КАДЫМОВ, Г. Б. АБДУЛОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Одним из методов приближенного аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений является метод последовательных приближений Пикара [1, 2]. При этом исходное дифференциальное уравнение приводится к виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

а искомое решение последовательно уточняется по формуле

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx. \quad (2)$$

В инженерной практике часто при применении метода Пикара получение необходимого результата весьма затрудняется из-за резкого увеличения объема вычислительных работ по мере продолжения процесса приближений и получения громоздких выражений, совершенно непригодных для дальнейшего использования.

В настоящей статье излагается способ аналитического решения нелинейных дифференциальных уравнений методом последовательных приближений, который в ряде случаев имеет существенно преимущество перед методом Пикара. Представим уравнение (1) путем прибавления к обеим частям члена κy в следующем виде:

$$\frac{dy}{dx} + \kappa y = \varphi(x, y), \quad (3)$$

где $\varphi(x, y) = f(x, y) + \kappa y$; κ — постоянный коэффициент.

Запишем для уравнения (3) эквивалентное равенство:

$$y_x = y_0 e^{-\kappa(x-x_0)} + e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} \varphi(x, y_x) dx, \quad (4)$$

где y_x — решение дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Построим приближенное решение дифференциального уравнения (3) при указанном начальном условии методом последовательного приближения по следующей формуле:

$$y_n = y_0 e^{-\kappa(x-x_0)} + e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} \varphi(x, y_{n-1}) dx. \quad (5)$$

Пусть в области $R\{0 \leq x - x_0 \leq h, |y - y_0| \leq b\}$ функция $\varphi(x, y)$ непрерывна, $M_f \geq \max |f(x, y)|$ и выполняется условие Липшица:

$$|\varphi(x, \bar{y}) - \varphi(x, y)| \leq N_\varphi |\bar{y} - y|. \quad (6)$$

Для оценки погрешности n -го приближения $\varepsilon_n(x) = |y_x - y_n|$ вычтем из равенства (4) формулу (5):

$$y_x - y_n = e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} [\varphi(x, y_x) - \varphi(x, y_{n-1})] dx.$$

Переходя к абсолютным значениям и принимая во внимание (6), получим

$$\varepsilon_n(x) \leq e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} N_\varphi \varepsilon_{n-1}(x) dx. \quad (7)$$

Определим погрешность нулевого приближения $\varepsilon_0(x)$ так же, как и при методе Пикара [1]:

$$\varepsilon_0(x) \leq M_f(x - x_0). \quad (8)$$

Неравенство (8) справедливо и для рассматриваемого метода, так как уравнения (3) и (1) имеют одно и то же решение. Далее, используя формулу (7), последовательно находим:

$$\varepsilon_1(x) \leq N_\varphi e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} \varepsilon_0(x) dx \leq \frac{N_\varphi M_f}{\kappa^2} [\kappa h - 1 + e^{-\kappa h}],$$

$$\varepsilon_2(x) \leq N_\varphi e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} \varepsilon_1(x) dx \leq \frac{N_\varphi^2 M_f}{\kappa^3} [\kappa h - 2 + (2 + \kappa h)e^{-\kappa h}],$$

$$\varepsilon_3(x) \leq N_\varphi e^{-\kappa x} \int_{x_0}^x e^{\kappa x} \varepsilon_2(x) dx \leq \frac{N_\varphi^3 M_f}{\kappa^4} \left[\kappa h - 3 + \left(3 + 2\kappa h + \frac{\kappa^2 h^2}{2!} \right) e^{-\kappa h} \right].$$

В итоге для погрешности n -го приближения получим

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{N_\varphi^n M_f}{\kappa^{n+1}} \left\{ \kappa h - n + \left[n + (n-1)\kappa h + (n-2) \frac{\kappa^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{\kappa^{n-1} h^{n-1}}{(n-1)!} \right] e^{+\kappa h} \right\}$$

или, после элементарных преобразований,

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{N_\varphi^n M_f}{\kappa^{n+1}} \left\{ \kappa h - n - (\kappa h - n) \left[1 + \kappa h + \frac{\kappa^2 h^2}{2!} + \dots + \frac{\kappa^n h^n}{n!} \right] e^{-\kappa h} + \frac{\kappa^{n+1} h^{n+1}}{n!} e^{-\kappa h} \right\}.$$

В правой части последнего неравенства в квадратные скобки заключен конечный отрезок ряда Маклорена функции $e^{\kappa h}$. С учетом выражения для остаточного члена указанного ряда получим

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{N_\varphi^n M_f}{\kappa^{n+1}} \left\{ \kappa h - n - (\kappa h - n) \left[e^{\kappa h} - \frac{\kappa^{n+1} h^{n+1}}{(n+1)!} e^{\kappa h} \right] e^{-\kappa h} + \frac{\kappa^{n+1} h^{n+1}}{n!} e^{-\kappa h} \right\}$$

или

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{M_f N_\varphi^n h^{n+1}}{(n+1)!} [(1+n)e^{-\kappa h} + (\kappa h - n)e^{-\kappa(h-\theta)}].$$

Как следует из полученного неравенства, на отрезке $[x_0, x_0 + h]$ $\varepsilon_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. с увеличением n функция y_n стремится к функции y_x , являющейся, как мы полагали, требуемым решением уравнения (3). Представим последнее неравенство в виде

$$\varepsilon_n(x) \leq \frac{M_f N_\varphi^n h^{n+1}}{(n+1)!} \mu, \quad (9)$$

где

$$\mu = (1+n)e^{-\kappa h} + (\kappa h - n)e^{-\kappa(h-\theta)}. \quad (10)$$

Величина θ в равенстве (10) может быть найдена из ряда Маклорена функции $e^{\kappa h}$ в зависимости от произведения $\kappa \cdot h$ и степени остаточного члена $n+1$.

Таблица 1

κh	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$n+1$									
2	0,244	0,265	0,282	0,306	0,333	0,360	0,392	0,424	0,456
3	0,190	0,203	0,217	0,235	0,250	0,270	0,291	0,315	0,340
4	0,158	0,166	0,172	0,186	0,200	0,220	0,229	0,247	0,267

В табл. 1 даны расчетные значения отношения θ/h в зависимости от κh и $n+1$, а в табл. 2—соответствующие значения множителя μ , вычисленные по формуле (10). Формула для оценки погрешности приближенного решения по методу Пикара имеет следующий вид [1]:

$$\varepsilon_{nn} \leq \frac{M_f N_f^n h^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (11)$$

где N_f —постоянная Липшица для функции $f(x, y)$ в R по переменному y .

Таблица 2

κh	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$n+1$									
2	6,75	4,15	2,24	1,45	1,00	0,736	0,565	0,355	0,265
3	10,6	6,70	3,05	1,73	1,00	0,622	0,508	0,279	0,196
4	15,4	7,00	3,65	1,87	1,00	0,556	0,327	0,196	0,153

Из сравнения (9) и (11) следует, что излагаемый способ последовательных приближений имеет преимущество по сравнению с методом Пикара, в первую очередь, в тех случаях, когда $N_\varphi \leq N_f$ и $\kappa > 0$. В этом случае сходимость процесса приближений при излагаемом способе существенно возрастает как из-за уменьшения значения постоянной Липшица N_φ по сравнению с N_f , так и из-за того, что множитель μ в (9) меньше единицы. Причем, как видно из табл. 2, множитель μ уменьшается по мере увеличения h и приобретает достаточно небольшие значения. Это говорит о возможности построения искомого

приближенного решения при данном способе на сравнительно больших отрезках изменения независимого переменного. В случае же $k < 0$ множитель $\mu > 1$. Однако и в этом случае, если N_φ существенно меньше, чем N_f , рассмотренный способ может оказаться значительно целесообразнее метода Пикара, так как в обоих случаях значение постоянной Липшица оказывает определяющее влияние на скорость сходимости итерационного процесса. Вообще, если только $N_\varphi < N_f$, то независимо от значений множителя μ можно указать такое значение μ , после которого правая часть неравенства (9) будет меньше, чем правая часть неравенства (11).

При построении приближенного решения для заданного дифференциального уравнения по формуле (5) основным является выбор коэффициента k , определение которого можно рекомендовать исходя из получения минимального значения для постоянной Липшица N_φ . Для этой цели может быть использовано следующее выражение:

$$k = - \frac{\max [f'_y(x, y)] + \min [f'_y(x, y)]}{2}, \quad (12)$$

где $\max [f'_y(x, y)]$ и $\min [f'_y(x, y)]$, соответственно, максимальное и минимальное значения функции $f'_y(x, y)$ в R .

Пример

Построить приближенное решение для дифференциального уравнения $y' = x - y^2$ при $y(0) = 1$. В данном примере $f(x, y) = x - y^2$. Определим коэффициент k на основе анализа функции $f(x, y)$ при значениях y , близких к $y(0) = 1$. Возьмем значения y , ограниченные неравенством $|y - 1| \leq 0,5$. Для принятых значений получим

$$-3 \leq f'_y(x, y) \leq -1, \quad N_f = 3.$$

Из формулы (12) находим $k = 2$. Таким образом имеем:

$$\varphi(x, y) = x - y^2 + 2y, \quad -0,6 \leq \varphi'_y(x, y) \leq 0,6, \quad N_\varphi = 0,6.$$

Из полученных значений для N_f , N_φ и k целесообразность формулы (5) очевидна. Приняв в качестве нулевого приближения $y_0 = 1$, по формуле (5) последовательно находим:

$$y_1 = \frac{1}{4} (2x + 3e^{-2x} + 1),$$

$$y_2 = \frac{1}{8} \left[x(8 - x) + [(1 + 9x - 3x^2)e^{-2x} - \frac{9}{4}(1 - e^{-4x})] \right].$$

Оценим погрешности второго приближения. При этом для повышения точности уточним пределы изменения функции y в зависимости от x по уже имеющимся приближениям y_1 и y_2 . Значения y_1 и y_2 в зависимости от x , рассчитанные по соответствующим выражениям, приведены в табл. 3, из которой видно, что на отрезке $[0, 2]$ значения первого и второго приближений искомой функции находятся в пределах, ограниченных неравенством $|y - 1| \leq 0,25$, поэтому дадим оценку погрешности при изменении функции y в указанных пределах.

В области, определенной указанными выше значениями x и y имеем:

$$|f(x, y)| < 1,6, \quad -0,5 \leq \varphi'_y(x, y) \leq 0,5,$$

следовательно,

$$M_f = 1,6, \quad N_\varphi = 0,5$$

Далее по формуле (9) вычисляем расчетные значения погрешности второго приближения. Значения, полученные для $\varepsilon_2(x)$, приведены в табл. 3. Здесь же даны значения искомого решения, найден-

ные численным методом с точностью до третьего десятичного знака. Как видно из этой таблицы, на отрезке $[0, 2]$ первое приближение, полученное по предлагаемому способу, достаточно близко к искомому решению, а второе практически полностью совпадает с искомым решением. Таким образом расчетные значения погрешности $\varepsilon_2(x)$ факти-

Таблица 3

x	0,2	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
y_1	0,853	0,783	0,801	0,918	1,081	1,250
y_2	0,852	0,780	0,785	0,903	1,074	1,251
y_x	0,852	0,780	0,783	0,902	1,073	1,251
$y_{пз}$	0,851	0,744	0,737	0,700	0,463	0,415
$\varepsilon_2(x)$	0,001	0,003	0,016	0,040	0,07	0,104

чески оказываются завышенными. Однако указанные значения для сравнительно грубой оценки погрешности вполне приемлемы. По методу же Пикара, также начиная с нулевого приближения $y = 1$, для искомого решения, например, на третьем приближении получим следующее выражение:

$$y_{пз} = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{13x^4}{12} - \frac{49x^5}{60} + \frac{13x^6}{30} - \frac{233x^7}{1260} + \frac{29x^8}{480} - \frac{31x^9}{2160} + \frac{x^{10}}{400} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Значения функции $y_{пз}$ в зависимости от x , вычисленные по последнему выражению, указаны в табл. 3.

Из полученного выражения для функции $y_{пз}$, а также по данным табл. 3 видно, что третье приближение по методу Пикара наряду со своей громоздкостью значительно расходится на отрезке $[0, 2]$ с искомым решением. Дальнейшее продолжение процесса приближения при методе Пикара практически не целесообразно, так как уже на четвертом приближении мы получим многочлен 23-ой степени, причем по точности незначительно отличающийся от третьего приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа, изд. 3. "Наука". 1967.
2. Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений. ИЛ. 1955.

Поступило 2. IV 1969

УДК 537 315

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. МУСЛИМОВ, Г. А. МИРОНОВ

ГРОЗОУПОРНОСТЬ ПОДСТАНЦИЙ С УПРОЩЕННОЙ СХЕМОЙ ГРОЗОЗАЩИТЫ

Исследование проводилось на двух типовых схемах подстанций. Первая (рис. 1, а) позволяет исследовать подстанции с различным числом отходящих линий и установленных трансформаторов, с одной или двумя системами шин. Вторая (рис. 1, б) дает возможность исследовать тупиковые подстанции с одним или двумя трансформаторами, питаемыми отдельными отпайками от транзитных линий. Эти подстанции не имеют системы шин.

Грозоупорность подстанций, имеющих систему шин. Грозоупорность подстанции характеризуется кривой опасных параметров волны напряжения, приходящей с ЛЭП. Эта кривая представляет собой зависимость амплитуды волны напряжения от ее крутизны. При сочетании указанных параметров приход волны может представлять опасность для изоляции элементов подстанционного оборудования. Для снятия кривых опасных параметров необходимо знать вольтсекундные характеристики изоляции. Наиболее ответственным и дорогим оборудованием подстанции являются трансформаторы, вольтсекундные характеристики изоляции которых расположены ниже подобных характеристик других элементов подстанции.

Кривая напряжений, выдерживаемых трансформаторной изоляцией, до сих пор является дискуссионной. Московский электрозавод (МЭЗ) разработал графики допустимых эксплуатационных волн для

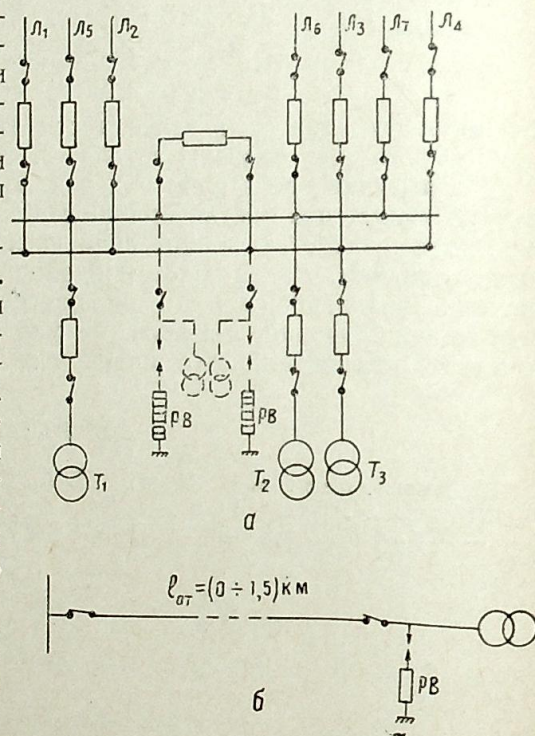


Рис. 1

трансформаторов 35—220 кВ [1], которые, однако, не учитывают уменьшения прочности изоляции в эксплуатации вследствие кумулятивного эффекта при многократных воздействиях атмосферных перенапряжений.

В последнее время предложено разработать универсальные критерии для выбора кривой выдерживаемых трансформаторной изоляцией напряжений, единой для всех трансформаторов данного класса, которая должна основываться на нормированном испытательном напряжении [2]. На основании этих положений определены допустимые значения импульсного напряжения для трансформаторов 35—500 кВ. Кривая выдерживаемых напряжений для трансформаторов 110 кВ согласно [3], с учетом допустимых значений импульсных напряжений [2], представлена на рис. 2.

Кривая опасных параметров подстанции зависит от количества линий и разрядников, подключенных к ее системе шин, от количества трансформаторов на ней, от выдерживаемых напряжений трансформатора и местонахождения его относительно линий, по которой на подстанцию приходит волна грозовых перенапряжений, от расстояния между трансформатором и разрядником для каждой конкретной подстанции и, наконец, от мощности и конструкции трансформатора.

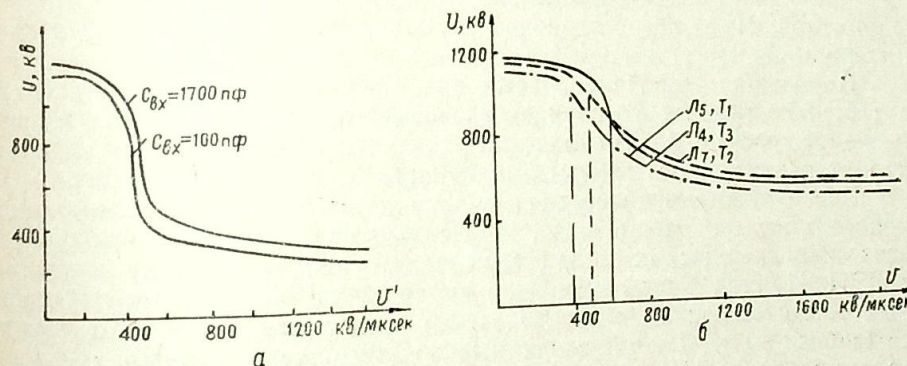


Рис. 3.

В результате возникает много вариантов исследования, просмотр которых даже с помощью анализатора грозоустройства подстанции требует очень большого времени. Число вариантов опасных параметров можно уменьшить путем построения "абсолютной кривой опасных параметров" исследуемой подстанции. Замена трансформатора только его входными емкостями приводит к существенным ошибкам при исследовании длительных процессов на его входе, если вентильный разрядник на шинах не срабатывает. При этом для уменьшения погрешности следует пользоваться эквивалентной схемой замещения, состоящей из параллельно включенных $L_{об}$ и $C_{вх}$, где $L_{об}$ — индуктивность короткого замыкания обмотки ВН трансформатора; $C_{вх}$ — его входная емкость.

Кривая опасных параметров приходящей с ЛЭП волны напряжения при различных величинах входной емкости построена для трансформатора представлена на рис. 3 а. Эта зависимость построена для

трансформатора— T_1 установленного на подстанции (рис. 1. а), когда волна приходит по линии L_1 .

С увеличением входной емкости от 100 до 1700 пф (что соответствует увеличению мощности на фазу трансформаторов от 2500 до 40000 ква) кривая опасных параметров смещается вверх, т. е. в сторону больших амплитуд и крутизны, что ведет к уменьшению вероятности прихода на подстанцию опасных волн. Это объясняется тем, что с ростом емкости уменьшается коэффициент отражения напряжения от узла, где подключена эта емкость. Таким образом, если трансформаторы на модели будут имитироваться наименьшими реально возможными входными емкостями, то построенная кривая опасных параметров будет самой низкой из всех кривых, построенных при больших величинах входной емкости.

Зависимость кривых опасных параметров от расположения линии, по которой на подстанцию приходит волна, и от места установки исследуемого трансформатора иллюстрирует рис. 3, б. Причем обе эти зависимости отчетливо проявляются при крутизне входящей с ЛЭП волны $V' = 350$ кВ/мксек, когда колебательная составляющая воздействующей на трансформатор волны, обусловленная многократными отражениями от узловых точек подстанции, имеет заметную амплитуду по сравнению с величиной аperiodической составляющей воздействующей на трансформатор волны. Отметим, что волна с косоугольным фронтом подавалась на модель подстанции по той линии, приход волны напряжения по которой является самым опасным для исследуемого трансформатора. На рассматриваемой схеме подстанции приход волны по линиям L_3, L_5, L_6 является наиболее опасным. Приход волны с такими же параметрами по любой другой линии приводит к значительно меньшим перенапряжениям на этом трансформаторе. Наиболее благоприятным случаем является приход волны по линии L_7 .

Небольшое различие кривых для благоприятного (кривые 1, 2) и тяжелого (кривая 3) случаев позволяет сделать заключение: нижняя—абсолютная кривая опасных параметров с некоторым запасом характеризует грозоупорность подстанции такого типа в целом.

Грозоупорность подстанции можно характеризовать „абсолютной кривой опасных параметров“, представляющих нижнюю огибающую всех кривых опасных параметров волны напряжения, приходящих с ЛЭП. Приход волны напряжения по одной из линий, подключенных к системе шин рассматриваемой подстанции, с параметрами, лежащими выше, чем определяемые по „абсолютной кривой опасных параметров“, будет опасным для какого-либо трансформатора этой подстанции.

Для типовых схем с упрощенной схемой грозозащиты (один РВ на две системы шин или без РВ) необходимыми условиями построения абсолютной кривой опасных параметров являются следующие: трансформаторы имитируются наименьшими входными емкостями; РВ подключается к ячейке системы шин, где обеспечивается наиболее слабая защита того или другого из исследуемых трансформаторов; волна грозовых перенапряжений на модель подстанции подается по тем линиям, со стороны которых возникают наибольшие перенапряжения.

На рис. 4 представлена кривая опасных параметров для четырех подстанций. Нижняя огибающая этих кривых относится к случаю, когда на подстанции не срабатывает РВ ($V_{ср} = 285$ кВ). Как видно из этих кривых, при крутизне входящей с ЛЭП волны $V' \geq 400$ кВ/мксек для различных подстанций установленный там разрядник даже при срабатывании не защищает трансформатор от опасных перенапряжений. Исключение составляет лишь тупиковый режим работы подстанции, когда

срабатывание разрядника существенно сдвигает кривую опасных параметров вверх. Однако и в этом случае при $V' > 400$ кВ/мксек область, защищаемая разрядником, невелика.

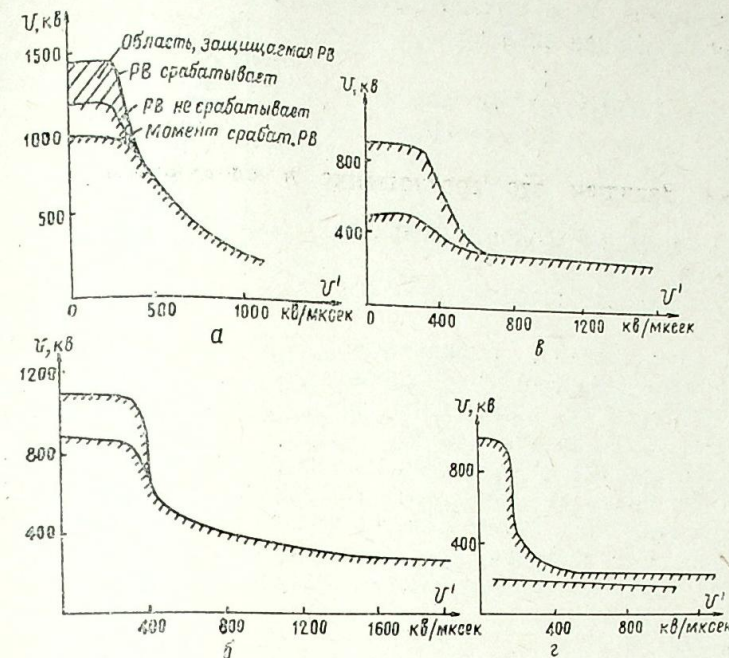


Рис. 4. На подстанции: а) семь отходящих линий и три трансформатора; б) пять линий и три трансформатора; в) три линии и два трансформатора; г) три линии и два трансформатора.

Как видно из рис. 4, влияние разрядника на уменьшение области опасных параметров (площадь графика между двумя заштрихованными кривыми) с уменьшением числа отходящих от подстанции линий увеличивается. Так, для подстанции с семью отходящими линиями и тремя трансформаторами входящая волна амплитудой $V > 1100$ кВ по любой из семи линий при любой крутизне приводит к опасному перенапряжению на трансформаторах, когда РВ не срабатывает, а при срабатывании разрядника волна с такой же крутизной становится опасной при амплитуде $V > 1400$ кВ. Для подстанции с одним трансформатором и одной линией эти же параметры при любой крутизне равны, соответственно, 225 и 1000 кВ.

Грозоупорность подстанции на отпайках. Для исследования грозоупорности подстанций, находящихся на отпайке от транзитных линий, отпайки моделировались цепочечной схемой L, C .

При этом длина отпайки варьировалась в пределах $0 \div 1,5$ км, что позволило выяснить роль отражений волны между подстанцией и транзитной линией, а также затухание волны на отпайке. Кривые опасных параметров при различных длинах отпайки, при подходе волны по транзитным линиям представлены на рис. 5.

С увеличением длины отпайки кривые опасных параметров поднимаются вверх, так как при этом увеличивается и затухание волны. Причем в реальной линии в силу затухания волны за счет импульсной короны эта разность станет еще больше.

Был исследован случай прямого удара молнии в провод на отпайке. При этом кривые опасных параметров (рис. 6) построены для двух значений волнового сопротивления канала молнии: $z = 130, 500$ ом, которым соответствуют токи в канале 200, 40 ка [4].

Волна подавалась через волновое сопротивление канала молнии на различные точки $x = 120, 440, 1080, 1400$ м отпайки протяженностью 1540 м.

Как известно, токи молнии с амплитудой, превышающей значение

$$I_m = \frac{z(I_m) + \frac{1}{2} z_{пр}}{z(I_m) \cdot \frac{1}{2} z_{пр}} \cdot V,$$

где $z_0(I_m)$ — волновое сопротивление канала молнии,

$z_{пр}$ — волновое сопротивление провода,

V — напряжение, определяемое вольтсекундной характеристикой гирлянды ЛЭП, приводят к перекрытию гирлянды ЛЭП у ближайшей опоры.

Расчеты показывают, что токи молнии с амплитудой, превышающей 4–5 кА, приводят к перекрытию гирлянды ЛЭП при $z = 500$ Ом. Отсюда следует, что более целесообразно проводить исследование грозоупорности подстанции при ударе молнии в отпайки при больших z . Как видно из представленных результатов (рис. 6), с ростом

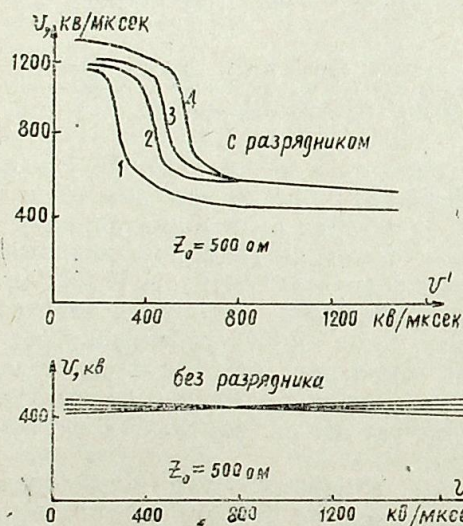


Рис. 5. 1. $x = 40$ м; 2. $x = 440$ м; 3. $x = 1000$ м; 4. $x = 1560$ м.

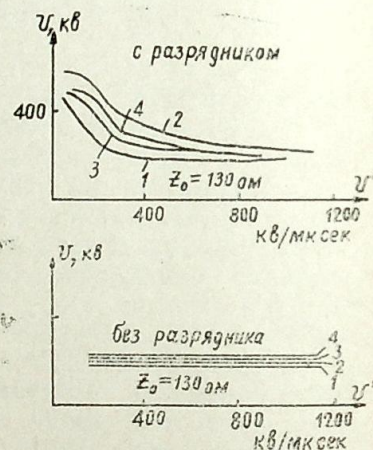
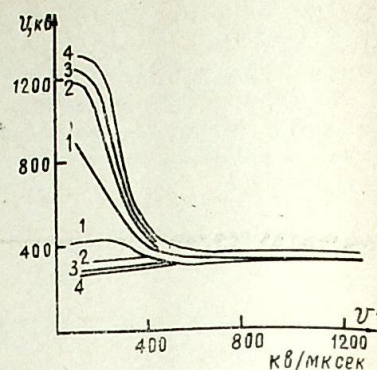


Рис. 6. 1 — $x = 120$ м; 2. $x = 440$ м; 3. $x = 750$ м; 4 — $x = 1080$ м; $l_{от} = 1560$ м.

волнового сопротивления канала молнии кривые опасных параметров сдвигаются вверх, так как амплитуды преломленной волны на ЛЭП уменьшаются и растет коэффициент отражения бегущей волны от места удара. Эти кривые также сдвигаются вверх при удалении места удара молнии от подстанции. Причем это проявляется сильнее при срабатывании разрядника на подстанции.

Выводы

1. С ростом числа подключенных к системе шин подстанции линий вероятность появления на подстанции опасных перенапряжений

уменьшается. Это в более значительной степени проявляется при срабатывании разрядника, установленного на системе шин подстанции. С увеличением числа отходящих линий область кривых опасных параметров для изоляции трансформаторов, защищаемых РВ, суживается. Это обстоятельство должно быть учтено при выяснении целесообразности установки РВ.

2. Вентильные разрядники, установленные от трансформаторов на расстоянии, допустимом по РУ, не защищают изоляции последнего от приходящих волн, имеющих крутизну порядка $V' > 300$ кВ/мксек. Когда волна приходит по транзитным линиям, увеличение длины отпайки смещает кривую опасных параметров вверх, т. е. при этом улучшается грозоупорность подстанции, но и увеличивается количество ударов молнии в отпайку. Последние два фактора должны учитываться при расчете появления на подстанции опасных перенапряжений.

3. Кривые опасных параметров могут служить основой для расчета вероятности прихода на различные подстанции опасных волн и вероятности грозовых повреждений электрооборудования, установленного на подстанциях, в зависимости от ряда факторов. Использование этих кривых позволит выяснить степень и целесообразность упрощения схемы грозозащиты различных подстанций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гост 1516-60. Трансформаторы, аппараты и изоляторы высокого напряжения. Нормы и методы испытания электрической прочности изоляции. М., 1960.
2. Сапожников А. В. «Электрические станции», 1968, № 4.
3. Руководящие указания по защите от перенапряжений электротехнических установок переменного тока 3–500 кВ, защита распределительных участков 3–330 кВ от волн, набегающих с линии. Проект «Электрические станции», № 8, 1968.
4. Горин Б. Н. Процессы формирования тока длиной искры молнии. Дисс. М., 1967.

Поступило 2. IV 1969

Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов, Г. А. Миронов

Садэләшдирилмиш илдырымдан мұһафизә схемли
жарымстансијаларын илдырым дајаныглыгы

ХҮЛАСӘ

Мәлумдур ки, жарымстансијаларын ЕВХ-ләри илә кәлән илдырым ифрат кәркинликләринә гаршы дајаныглыгы «тәһлүкәли параметрләр әјриси» илә характеризә едилир. Лакин садәләшдирилмиш илдырым-дан мұһафизә схемли жарымстансијалар үчүн гурулмуш белә әјриләр мәонларын илдырым дајаныглыгы һаггында там мәлумат вермир. Мәонларын илдырым дајаныглыгы һаггында там мәлумат вермир. Мәонларын илдырым дајаныглыгы һаггында там мәлумат вермир. Мәонларын илдырым дајаныглыгы һаггында там мәлумат вермир.

Азәрбајҹан баш енеркетика системинин мұхтәлиф жарымстансијалары үчүн «мүтләг тәһлүкәли параметрләр әјриси» гурулмушдур. һәмин әјриләрин анализиндән ашағыдакы нәтичәләрә кәлмәк олар:

1. Жарымстансија шининә гошулмуш ЕВХ-нин сајынын чоһалмасы илә онун аваданлыгы үчүн тәһлүкәли ифрат кәркинликләрин жарым-масы еһтималы азалыр. Шинә гошулмуш бошалдычы ишләјәндә бу азалма даһа чоһ олур.

2. Трансформаторла бошалдычы арасындакы мәсафә рәһбәр кәс-тәришләрдә дәрч олунмуш бурахыла билән мәсафәјә үјүн оlanda белә бошалдычы трансформатору диклији $V' > 300$ кВ/мксек сан олан,

ЕВХ илэ кэлэн ифрат кэркинлик далгаларындан мұһафизэ едэ бил-мир.

3. Мүтлэг тәһлүкәли параметрләр әјрисі "јарымстансіјада јер-ләшдірілмиш аваданлығларда баш верән ифрат кэркинликләрін јаранма еһтималыны вә онларын ЕВХ-дән кэлән ифрат кэркинликләрлә зәдәләнмәси еһтималыны һесабламағ үчүн истифадә олуна биләр. Бунлар електрик јарымстансіјаларында садәләшдірілмиш илдырымдан мұһафизэ схемләри ишләдилдикдә нәзәрә алынмалыдыр.

М. Н. АЛИЕВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ПАРАМАГНЕТИКАХ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. При прохождении звуковой волны через парамагнитный кристалл имеет место целый ряд эффектов, обусловленных спин-фононным взаимодействием. Одним из таких эффектов является изменение скорости распространения звука в парамагнетике. Впервые этот эффект наблюдал Шайрен [1], а качественное объяснение его было дано Джекобсоном и Стивенсом [2]. Более полное исследование вопроса о парамагнетиках со слабым спин-фононным взаимодействием проведено Альтшулером и Кочелаевым [3].

Наша задача заключалась в рассмотрении данного эффекта в парамагнетиках при низких температурах и произвольных спин-фононных взаимодействиях. Для решения этой задачи необходимо записать уравнение дисперсии смешанных спин-фононных волн в парамагнетике при низких температурах [4]:

$$(\Omega(\kappa)_{1,2})^2 = \frac{1}{2} \left\{ (\omega_0^2 + \omega_\kappa^2) \pm \left[(\omega_0^2 - \omega_\kappa^2)^2 + \frac{16}{(h/2\pi)^2} |B_\kappa|^2 \omega_0 \omega_\kappa \right]^{1/2} \right\}, \quad (1)$$

$$B_\kappa = -G_{44} \left(\frac{S^3 h/2\pi}{m \omega_\kappa} \right)^{1/2} [(\kappa_z p_y + \kappa_y p_z) + i(\kappa_z p_x + \kappa_x p_z)],$$

где ω_0 — ларморова частота, ω_κ — частота фонона, G_{44} — константа спин-фононного взаимодействия, m — масса одной частицы, κ — волновой вектор, p — вектор поляризации фонона.

Рассмотрим уравнение (1) в предельных случаях коротких ($\kappa \rightarrow \infty$) и длинных ($\kappa \rightarrow 0$ волн).

Для этого выделим явную зависимость B_κ и ω_κ от модуля волнового вектора:

$$\omega_\kappa = v \cdot \kappa,$$

$$B_\kappa = B_x(\kappa)^{1/2},$$

где v — скорость звука, $x = \frac{\kappa}{\kappa}$.

Разлагая (1) в ряд по степеням κ ($\kappa \rightarrow 0$) и $\frac{1}{\kappa}$ ($\kappa \rightarrow \infty$), с учетом (2)

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(\kappa) &= \omega_0, \\ \Omega_2(\kappa) &= \left(1 - \frac{4|Bx|^2}{(h/2\pi)^2 \omega_0 v}\right)^{\frac{1}{2}} v \cdot \kappa \end{aligned} \right\} \kappa \rightarrow 0, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(\kappa) &= v \cdot \kappa \\ \Omega_2(\kappa) &= \left(\omega_0^2 - \frac{4\omega_0|Bx|^2}{(h/2\pi)^2 v}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \kappa \rightarrow \infty.$$

Второе из уравнений (3) описывает акустические волны с измененной скоростью звука. Запишем это соотношение в следующем виде:

$$\Omega_2(\kappa) = v' \cdot \kappa,$$

где

$$v' = [v^2 - (\Delta v)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta v = \frac{2}{(h/2\pi)^2} \left(\frac{|Bx|^2}{\omega_0} v \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Здесь v — скорость звуковой волны в отсутствие спин-фононного взаимодействия, v' — измененная скорость звука, Δv — поправка к скорости звука, обусловленная спин-фононным взаимодействием.

Из уравнений (4) видно, что сильное взаимодействие между спинами и фононами может привести к значительному изменению скорости распространения звуковой волны. Если спин-фононное взаимодействие настолько велико, что $(\Delta v)^2 > v^2$, то измененная скорость распространения звуковой волны v' оказывается мнимой. Очевидно, это приводит к неустойчивости кристаллической решетки. Исходя из этих соображений, можно получить критерий допустимой величины коэффициента спин-фононного взаимодействия, аналогичный условию Венцеля для допустимой величины константы взаимодействия электронов с решеткой, полученной при рассмотрении теории сверхпроводимости [5].

Условие вещественности измененной скорости распространения звуковой волны дает следующее соотношение:

$$|Bx|^2 < \frac{(h/2\pi)^2 \omega_0 v}{4}. \quad (5)$$

Подставив в (5) выражение $|Bx|^2$, в случае продольной звуковой волны находим допустимое значение константы спин-фононного взаимодействия G_{44} :

$$G_{44} < \left(\frac{(h/2\pi)^2 \omega_0 \rho v_c^2}{16 \cdot C \cdot x_z^2 (1 - x_z^2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где ρ — плотность кристалла, C — концентрация парамагнитных ионов, v_l — скорость продольного звука.

Численные оценки для хорошо изученного кристалла MgO, в который внедрены ионы F^{++} , при $v_l = 9,7 \cdot 10^5$, относительной концентрации $D = 10^{-3}$, постоянном внешнем магнитном поле $H = 10^4$ э дают

$$G_{44} < 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Наглядное выражение для скорости распространения звуковой волны можно записать в случае малых поправок, разлагая (4) в ряд

$$v' = v + v_n, \quad (7)$$

где

$$v_n = -2 \frac{|Bx|^2}{(h/2\pi)^2 \omega_0}. \quad (8)$$

Относительное изменение скорости распространения звуковой волны будет таково:

$$\frac{v_n}{v} = -8 G_{44}^2 \frac{C x_z^2 (1 - x_z^2)}{(h/2\pi)^2 \omega_0 v_c^2}. \quad (9)$$

Оценку величины $\frac{v_n}{v}$ производим на основании вышеприведенных данных:

$$\frac{v_n}{v} = 8,3 \cdot 10^{-3}.$$

2. Мы рассмотрели влияние спин-фононного взаимодействия на скорость распространения звуковой волны в парамагнитном кристалле. Выяснилось, что спин-фононное взаимодействие обуславливает „перенормировку“ скорости распространения звука. Теперь рассмотрим изменение теплоемкости парамагнетика в связи с явлением „перенормировки“ скорости звука и обсудим возможный эксперимент по обнаружению этого изменения.

Выражение для теплоемкости твердого тела при низких температурах общеизвестно:

$$C_v = \frac{Q}{v_c} T^3. \quad (10)$$

Здесь Q — константа, v_c — средняя скорость распространения звука в твердом теле. Рассмотрим теплоемкость парамагнетика в двух случаях, когда выполняются условия:

$$1) (h/2\pi)^2 \omega_0 \ll \kappa T$$

и

$$2) (h/2\pi)^2 \omega_0 \gg \kappa T.$$

Если в парамагнетике имеет место первое условие, то из (3) и (10) получаем теплоемкость парамагнетика в следующем виде:

$$C_v = \frac{Q}{v_c^3} T^3. \quad (11)$$

Уравнения (4) и (10) дают выражение для теплоемкости парамагнетика во втором случае:

$$C_v = \frac{Q}{[v^2 - (\Delta v)^2]^{\frac{3}{2}}} T^3. \quad (12)$$

Сравнивая (12) и (11), можно увидеть, что достаточно сильное спин-фононное взаимодействие может привести к значительному увеличению теплоемкости парамагнетика. Это можно проверить следующим экспериментом. Сперва надо измерить теплоемкость кристалла с высокой концентрацией парамагнитных ионов, при низких температурах и отсутствии внешнего постоянного магнитного поля (удовлетворяется первое условие). Затем измерения производятся с включением внешнего постоянного магнитного поля большой интенсивности (удовлетворяется второе условие). При этом должен наблюдаться „скачок“ величины теплоемкости парамагнетика. Оценки относительного изменения скорости звука, произведенные в первой части, позволяют надеяться, что эффект будет наблюдаемым. Измерив величину „скачка“ теплоемкости, можно судить о „перенормировке“ скорости звука в парамагнетике и косвенным образом получить информацию о спин-фононном взаимодействии.

В заключение автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Б. И. Кочелаеву за полезное обсуждение результатов работы.

1. Shiven N. S. Phys. rev., 128, 2103 (1962).
2. Jacobson E. H., Stevens K. W. Phys. rev., 129, 2036, (1963).
3. Альтшулер С. А., Кочелаев Б. И. ЖЭТФ, 49, 862 (1965).
4. Алнев М. Н., Кочелаев Б. И. „Изв. вузов“, 2, 8, (1968).
5. Wentzel G. Phys. rev., 83, 168 (1951).

Поступило 21. IV 1969

М. Н. Әлиев

Сәсин парамагнетикләрдә ашағы температурларда јајылмасы

ХУЛАСӘ

Тәдгигатда сәсин јајылма сүр'әтинин спин-фонон гаршылыгы тә'сириндән мејдаңа чыхан дәјишмәси һесабыланмышдыр. Мүәјјән едилмишдәр ки, ашағы температурларда парамагнетикдә ашгарларын концентрасијасы јүксәк олдуғда кифәјәт гәдәр күчлү магнит сәһәләриндә сәсин сүр'әти хејли дәјишир.

Тәчрүбәләрдән спин-фонон гаршылыгы тә'сир әмсалынын мүмкүн гијмәти үчүн ифадә алынмыш вә гијмәтләндирилмишдир. Сәсин јајылма сүр'әтинин дәјишмәсилә әлағәдар оларағ парамагнетикин истилик тутумунун дәјишмәси тәдгиг едилмишдир. Истилик тутумунун бу чүр дәјишмәсини көрмәк үчүн тәчрүби нәтичәләр тәклиф олунмушдур.

Р. М. МИР-КАСИМОВ

ОБМЕННОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ И СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

В предыдущей работе [1] гипотеза об обменном вырождении была использована для получения ряда линейных соотношений между сечениями различных процессов при высоких энергиях, в основе расчетов которой лежала модель [2—6].

Рассмотрим процесс

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (1)$$

где a и c — барионы, а b и d — либо мезоны, либо барионы. Предположим [2], что: а, выполняется теорема о факторизации реджевских вычетных функций; б) при высоких энергиях в промежуточном состоянии в t -канале могут находиться реджионы, обладающие квантовыми числами мезонных нонетов 1^- и 2^+ . Тогда амплитуду процесса (1) $M(ab \rightarrow cd)$ можно записать в виде

$$M(ab \rightarrow cd) = \gamma_p^{ac}(t) \gamma_p^{bd}(t) \cdot M_p(v, t) + \sum_r \{ \gamma_{sr}^{ac}(t) \gamma_{sr}^{bd}(t) M_{sr}(v, t) + \gamma_{vr}^{ac}(t) \gamma_{vr}^{bd}(t) M_{vr}(v, t) \}. \quad (2)$$

Здесь

$$M_r(v, t) = - \frac{1 \pm e^{-i\pi\alpha_r(t)}}{\sin\pi\alpha_r(t)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_r(t) + 3/2)}{\Gamma(\alpha_r(t) + 1)} \left(\frac{v}{v_0} \right)^{\alpha_r(t)} \quad (3)$$

— реджевская амплитуда, отвечающая обмену реджионом r . Вычетные функции γ^{if} согласно [2] можно рассматривать как матричные элементы „кварковых токов“:

$$\delta(\vec{p}_i - \vec{p}_l) \gamma_{sr}^{if}(t) = \frac{1}{V^2} \langle f | \int d^3x q^{+\beta\lambda} q | i \rangle, \quad (4)$$

$$\delta(\vec{p}_i - \vec{p}_l) \gamma_{vr}^{if}(t) = \frac{1}{V^2} \langle f | \int d^3x q^{+\lambda} q | i \rangle, \quad (5)$$

причем в качестве недиагональных элементов базиса алгебры $SU(3)$ взяты следующие комбинации λ -матриц:

$$\lambda_{14}^{\pm} = \frac{\lambda_1 \pm i\lambda_2}{2}, \lambda_{24}^{\pm} = \frac{\lambda_4 \pm i\lambda_5}{2}, \lambda_3^{\pm} = \frac{\lambda_6 \pm i\lambda_7}{2}. \quad (6)$$

Частица Померанчука считается связанной с $SU(3)$ синглетом, не смешивающимся с $I = Y = 0$ — компонентой октета. Это приводит к тому, что $\gamma_p^{if}(t) = \gamma_{s^0}^{if}(t)$.

Далее предположим, что между частицами 1^- и 2^+ имеется обменное вырождение и поэтому реджионы с одинаковыми числами лежат на одних и тех же траекториях. Траектории $a'(t)$ представляют собой семейство параллельных прямых в плоскости (s, t) [8]. Как было подчеркнуто в [1], отсюда следует справедливость формулы Гелл-Манна-Окубо для траекторий

$$\alpha_{K^*}(t) = \frac{1}{4} \alpha_p(t) + \frac{3}{4} \alpha_s(t). \quad (7)$$

Далее в работе [1] предполагалось, что соотношение (7) в линейном приближении приводит к таким же соотношениям между амплитудами. Это приближение справедливо при не очень больших энергиях. Кроме того, хотя оно и приводит к соотношениям между сечениями, согласующимися с экспериментальными данными, его трудно оправдать теоретически.

В настоящей работе мы получим некоторые нелинейные соотношения между сечениями, не прибегая к указанному приближению. Для мнимой части амплитуды $M_z(\nu, t)$ выполняется соотношение

$$\alpha_t(t) = \frac{\partial \ln \operatorname{Im} M_z(\nu, t)}{\partial \ln s}. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в (7), получаем

$$\frac{\partial \ln \operatorname{Im} M_{K^*}(\nu, t)}{\partial \ln s} = \frac{1}{4} \frac{\partial \ln \operatorname{Im} M_p(\nu, t)}{\partial \ln s} + \frac{3}{4} \frac{\partial \ln \operatorname{Im} M_s(\nu, t)}{\partial \ln s}, \quad (6)$$

откуда после интегрирования следует

$$f(t), \operatorname{Im} M_{K^*} = (\operatorname{Im} M_p)^{1/4} \cdot (\operatorname{Im} M_s)^{3/4}. \quad (10)$$

Можно показать, что постоянная интегрирования $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = 1 + \varepsilon(t), \quad (11)$$

где $\varepsilon(t)$ — величина второго порядка малости по расщеплению траекторий. Будем считать $f(t) = 1$. Аналогичное (10) соотношение существует и для нонета 2^+ :

$$\operatorname{Im} M_{K_2} = (\operatorname{Im} M_{A_2})^{1/4} (\operatorname{Im} M_{T_8})^{3/4}. \quad (12)$$

Используя (2), можно выразить амплитуды, связанные с обменом нестарым реджионом через амплитуды упругих столкновений τp , K_p , p, p и p, p :

$$M_p(\nu, t) = M(\pi^+ p) - M(\pi^- p) = M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p),$$

$$M_{V_s}(\nu, t) = \frac{4}{9} [M(K^+ p) + M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)],$$

$$M_{V_1}(\nu, t) = [2M(pp) + 2M(pn) - 6M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p)],$$

$$M_{A_2}(\nu, t) = M(K^+ p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p),$$

$$M_{T_8}(\nu, t) = \frac{4}{9} [4M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^- p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p)], \quad (13)$$

$$M_p(\nu, t) + M_{T_1}(\nu, t) = 2M(\pi^0 p) + M(K^+ p) + M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p).$$

Выражения для $\operatorname{Im} M_{K^*}(\nu, t)$ и $\operatorname{Im} M_{K_2}(\nu, t)$ через упругие амплитуды получаются из (10) и (12):

$$\operatorname{Im} M_{K^*}(\nu, t) = \sqrt{\frac{8}{27}} \{ \operatorname{Im} [M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)] \}^{1/4} \times \{ \operatorname{Im} [M(K^+ p) + M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)] \}^{3/4} =$$

$$= 2^{1/4} \sqrt{\frac{8}{27}} \{ \operatorname{Im} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) \}^{1/4} \cdot \{ \operatorname{Im} [M(K^+) + M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)] \}^{3/4}.$$

$$\operatorname{Im} M_{K_2} = \sqrt{\frac{8}{27}} \{ \operatorname{Im} [M(K^+ p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p)] \}^{1/4} \times \{ \operatorname{Im} [4M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^- p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p)] \}^{3/4} =$$

$$= 6^{1/4} \sqrt{\frac{8}{27}} \{ \operatorname{Im} M(\pi^- p \rightarrow \eta^0 n) \}^{1/4} \times \{ \operatorname{Im} [4M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^- p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p)] \}^{3/4}.$$

С помощью (2), (10), (12), (13) и (14) можно получить теперь целый ряд соотношений между амплитудами упругих и неупругих процессов см., например, [1]:

$$M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) = \frac{1}{2} [M_{K^*}(\nu, t) + M_{K_2}(\nu, t)] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{27}} \{ [M(K^+ p) - M(K^0 p) + M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)]^{1/4} \times$$

$$\times [M(K^+ p) + M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) - M(K^- p)]^{3/4} +$$

$$+ [M(K^+ p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p) + M(K^- p)]^{1/4} \times$$

$$\times [4M(\pi^0 p) - M(K^+ p) - M(K^- p) - M(K^0 p) - M(\bar{K}^0 p)]^{3/4} \}. \quad (15)$$

Если имеется обменное вырождение, то справедливо

$$\operatorname{Im}(M_a(\nu, t) + M_b(\nu, t)) = 0, \quad (16)$$

где a и b — векторный и тензорный реджионы с одинаковыми внутренними квантовыми числами. Подставляя сюда соотношения (14) и пользуясь оптической теоремой, получаем

$$[A^{(+)} - A^{(-)}]^{1/4} [A_{V_s}^{(+)} - A_{V_s}^{(-)}]^{3/4} = [A_{A_2}^{(+)} - A_{A_2}^{(-)}]^{1/4} [A_{T_8}^{(+)} - A_{T_8}^{(-)}]^{3/4}. \quad (17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_p^{(+)} = \sigma(\pi^+ p), \quad A_p^{(-)} = \sigma(\pi^- p),$$

$$A_{V_s}^{(+)} = \sigma(K^+ p) + \sigma(K^+ n), \quad A_{V_s}^{(-)} = \sigma(K^- p) + \sigma(K^- n),$$

$$A_{A_2}^{(+)} = \sigma(K^+ p) + \sigma(K^- p), \quad A_{A_2}^{(-)} = \sigma(K^+ n) + \sigma(K^- n),$$

$$A_{T_8}^{(+)} = 2A_p^{(+)} + 2A_p^{(-)}, \quad A_{T_8}^{(-)} = A_{V_s}^{(+)} + A_{V_s}^{(-)},$$

$$A_{V_1}^{(+)} = 2\sigma(pp) + 2\sigma(pn) + A_{V_s}^{(-)}, \quad A_{V_1}^{(-)} = 3A_p^{(+)} + 3A_p^{(-)} + A_{V_s}^{(+)}.$$

Мы воспользовались изотопическими соотношениями:

$$\sigma(K^0 p) = \sigma(K^+ n); \quad \sigma(\bar{K}^0 p) = \sigma(K^- n);$$

$$\sigma(\pi^0 p) = \frac{1}{2} [\sigma(\pi^+ p) + \sigma(\pi^- p)],$$

а также изменили знак в (17), поскольку

$$A_p^{(+)} - A_p^{(-)} < 0 \quad \text{и} \quad A_{V_s}^{(+)} - A_{V_s}^{(-)} < 0.$$

Для сравнения равенства (17) с экспериментом следует возвести его в четвертую степень и сгруппировать в правой и левой его частях положительные члены. Выполнив эти действия, придем к соотношению

$$A_p^{(+)} \cdot A_{V_s}^{(+)} (A_{V_s}^{(+)^2} + 3A_{V_s}^{(-)^2}) + A_p^{(-)} A_{V_s}^{(-)} (A_{V_s}^{(-)^2} + 3A_{V_s}^{(+)^2}) +$$

$$+ A_{A_2}^{(+)} A_{T_8}^{(+)} (A_{T_8}^{(+)^2} + 3A_{T_8}^{(-)^2}) + A_{A_2}^{(-)} A_{T_8}^{(-)} (A_{T_8}^{(-)^2} + 3A_{T_8}^{(+)^2}) =$$

$$= A_{A_2}^{(+)} A_{T_8}^{(+)} (A_{T_8}^{(+)^2} + 3A_{T_8}^{(-)^2}) + A_{A_2}^{(-)} A_{T_8}^{(-)} (A_{T_8}^{(-)^2} + 3A_{T_8}^{(+)^2}) + \\ + A_p^{(+)} A_{V_8}^{(-)} (A_{V_8}^{(-)^2} + 3A_{V_8}^{(+)^2}) + A_p^{(-)} A_{V_8}^{(+)} (A_{V_8}^{(+)^2} + 3A_{V_8}^{(-)^2}). \quad (19)$$

Экспериментальные значения правой и левой частей (19) при некоторых энергиях получены следующие [9]:

Энергия, Гэв	Левая часть, мб	Правая часть, мб
6	$(28,0 \pm 1,4) \cdot 10^7$	$(28,0 \pm 1,4) \cdot 10^7$
12	$(21,7 \pm 1,0) \cdot 10^7$	$(21,7 \pm 1,0) \cdot 10^7$
18	$(20,1 \pm 1,8) \cdot 10^7$	$(19,8 \pm 1,8) \cdot 10^7$

Используем теперь соотношения между траекториями, которые вытекают из массовых формул $SU(6)$ -симметрии. Отметим сперва, что мнимые части амплитуд, соответствующих физическим частицам, например, $M_\omega(\nu, t)$ и $M_\phi(\nu, t)$, при помощи соотношений (8) и (11) могут быть определены из равенств вида

$$\text{Im} M_\phi(\nu, t) = [\text{Im} M_{V_8}(\nu, t)]^{\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta}} [\text{Im} M_{V_1}(\nu, t)]^{-\frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}}, \\ \text{Im} M_\omega(\nu, t) = [\text{Im} M_{V_8}(\nu, t)]^{-\frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}} [\text{Im} M_{V_1}(\nu, t)]^{\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta}} \quad (20)$$

где θ — угол смешивания.

Соотношение $\sigma_\omega = \sigma_p$ [9] приводит к связи между сечениями:

$$[A_1^{(+)} - A_1^{(-)}]^{\frac{\cos^2 \theta}{\sin 2\theta}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}} [A_p^{(+)} - A_p^{(-)}] [A_{V_8}^{(+)} - A_{V_8}^{(-)}]^{\frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}} \quad (21)$$

Аналог массовой формулы $\sigma_\omega = \alpha_{A_2}$ дает

$$[A_{V_1}^{(+)} - A_{V_1}^{(-)}]^{\frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\theta}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}} [A_{A_2}^{(+)} - A_{A_2}^{(-)}] [A_{V_8}^{(+)} - A_{V_8}^{(-)}]^{\frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}}. \quad (22)$$

С помощью выражения $2\sigma_{K^*} = \sigma_\omega + \sigma_\phi$ приходим к соотношению

$$\frac{4}{9} [A_p^{(+)} - A_p^{(-)}] [A_{V_8}^{(+)} - A_{V_8}^{(-)}] = [A_{V_1}^{(+)} - A_{V_1}^{(-)}]^2 \quad (23)$$

или

$$\frac{4}{9} [A_p^{(+)} A_{V_8}^{(+)} + A_p^{(-)} A_{V_8}^{(-)}] + 2A_{V_1}^{(+)} A_{V_1}^{(-)} = \\ = \frac{4}{9} [A_p^{(+)} A_{V_8}^{(-)} + A_p^{(-)} A_{V_8}^{(+)}] + A_{V_1}^{(+)^2} + A_{V_1}^{(-)^2}. \quad (24)$$

Сравнение с экспериментом показало следующее:

Энергия, Гэв	Левая часть, мб	Правая часть, мб
6	$(85,0 \pm 2,9) \cdot 10^3$	$(85,2 \pm 3,1) \cdot 10^3$
12	$(75,2 \pm 2,7) \cdot 10^3$	$(75,5 \pm 2,9) \cdot 10^3$
18	$(71,6 \pm 3,2) \cdot 10^3$	$(71,9 \pm 3,2) \cdot 10^3$

Наконец, с помощью равенства $2\alpha_{K^*} = \alpha_\omega + \alpha_\phi = \alpha_{V_8} + \alpha_{V_1}$ получаем

$$\frac{4}{9} [A_{A_2}^{(+)} - A_{A_2}^{(-)}] [A_{T_8}^{(+)} - A_{T_8}^{(-)}]^3 = [A_{V_8}^{(+)} - A_{V_8}^{(-)}]^2 [A_{V_1}^{(+)} - A_{V_1}^{(-)}]^2 \quad (25)$$

или

$$\frac{4}{9} A_{A_2}^{(+)} A_{T_8}^{(+)} (A_{T_8}^{(+)^2} + 3A_{T_8}^{(-)^2}) + \frac{4}{9} A_{A_2}^{(-)} A_{T_8}^{(-)} (A_{T_8}^{(-)^2} + 3A_{T_8}^{(+)^2}) + \\ + 2A_{V_8}^{(+)} A_{V_8}^{(-)} (A_{V_1}^{(+)^2} + A_{V_1}^{(-)^2}) + 2A_{V_1}^{(+)} A_{V_1}^{(-)} (A_{V_8}^{(+)^2} + A_{V_8}^{(-)^2}) = \\ = \frac{4}{9} A_{A_2}^{(+)} A_{T_8}^{(-)} (A_{T_8}^{(-)^2} + 3A_{T_8}^{(+)^2}) + \frac{4}{9} A_{A_2}^{(-)} A_{T_8}^{(+)} (A_{T_8}^{(+)^2} + 3A_{T_8}^{(-)^2}) + \\ + (A_{V_8}^{(+)^2} + A_{V_8}^{(-)^2}) (A_{V_1}^{(+)^2} + A_{V_1}^{(-)^2}) + 4A_{V_8}^{(+)} A_{V_8}^{(-)} A_{V_1}^{(+)} A_{V_1}^{(-)}. \quad (26)$$

Соотношения (26) также удовлетворительно согласуются с экспериментом:

Энергия, Гэв	Левая часть, мб	Правая часть, мб
6	$(31,2 \pm 2,9) \cdot 10^7$	$(28,7 \pm 2,9) \cdot 10^7$
12	$(33,4 \pm 2,3) \cdot 10^7$	$(33,8 \pm 2,4) \cdot 10^7$
18	$(31,0 \pm 3,5) \cdot 10^7$	$(31,0 \pm 4,0) \cdot 10^7$

В заключение свою благодарность С. Б. Герасимову, В. Г. Кадышевскому и В. А. Матвееву за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М. Препринт ОИЯИ, Р2—3251. 1967.
2. Cabubbo N, Horwitz L, Neeman Y. Phys. rev., 22, 336 (1966).
3. Ahmadzadeh A. Phys. Rev. Lett., 16, 952 (1966).
4. Ahmadzadeh A. and Chan C. H. Phys. Lett., 22, 692 (1966).
5. Ahmadzadeh A. Phys. Lett., 22, 669 (1966).
6. Д. В. Волков. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Международная школа по теоретической физике. "Наука думка", Киев, 1967.
7. Gell-Mann M. Phys. rev. Lett., 8, 263 (1962); Gribov V. N. and Pomanchuk I. Ya., Phys. rev. Lett., 8, 343 (1962).
8. Arnold R. Phys. rev. Lett., 14, 657 (1965).
9. Galbraith W. et al. Phys. rev. 138, B913 (1965).
10. Кадышевский В. Г., Мурадян Р. М., Смородинский Я. А. Препринт ОИЯИ, Р—2061, Дубна, 1966.

Р. М. Мир-Гасимов

Мүбадилә чырлашмасы вә жүксәк енержиләрдә эффектив кәсикләр арасында мүнәсибәтләр

ХҮЛАСӘ

Речче полжуслары нәзәрийәси вә мүбадилә тоггушмасы гипотезиндән истифадә едиләрәк, жүксәк енержиләрдә мезон-нуклон вә нуклон-нуклон тоггушмалары эффектив кәсикләр арасында бәзи мүнәсибәтләр алынмышдыр.

А. К. КАГРАМАНОВ

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ

В последнее время работы по некорректным задачам [1, 4, 5] открыли возможность к решению некоторых казалось бы неразрешимых задач подземной гидродинамики. Предположим, что рассматривается нефтяной пласт, ограниченный достаточно гладкими линиями S_1 и S_2 . Внутренний контур S_1 не меняется, а внешний водонефтяной контакт S_2 с течением времени либо приближается к S_1 , либо удаляется от него. При такой постановке видно, что задание значения давления или дебита на S_2 фактически невозможно.

Возникает естественная необходимость замены условия на S_2 другим условием на S_1 и нахождения решения в заданной области; после этого, задавая первоначальную форму, управление перемещением любого отмеченного контура при помощи давления и дебита на внутренней границе не представляет особой трудности.

Рассмотрим простейший случай. Пусть изучается радиальное течение в пласте, ограниченном окружностями $r = r_1$ и $r = r_2$, соответственно, изнутри и снаружи.

Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

На окружности $r = r_1$ задаются условия:

$$p|_{r=r_1} = P_0, \\ r \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\frac{\mu}{2\pi kh} \cdot q_0.$$

При этом закон стягивания контура выражается формулой:

$$r^2 = r_0^2 - \frac{q_0}{\pi m h} \cdot t,$$

где m — пористость пласта, r_0 — начальное расстояние точек контура нефтеносности от скважины. Однако известно, что решение, полученное таким образом, вообще говоря, неустойчиво.

Доказана единственность решения задачи Коши для линейных параболических уравнений второго порядка и рассмотрены некоторые задачи нахождения поля давления [2, 3]. Для получения приближенного устойчивого решения применяется один из известных методов регуляризации [1, 4, 5].

Рассмотрим задачу нахождения давления в любой точке ограниченного пласта, когда на расстоянии r_1 известны изменения дебита и давления при фильтрации жидкости к системам неравнодебитных, произвольно расположенных скважин. Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial p}{\partial t},$$

с условиями, на окружности $r = r_1$ и на плоскости $t = 0$. Для упрощения задачи используем прием, обеспечивающий возможность применения метода последовательной смены установившихся состояний. Разделим весь пласт на две области: возмущенную и невозмущенную. Внутренняя граница возмущенной области находится на стенке скважины, а внешняя непрерывно расширяется и одновременно служит внутренней границей невозмущенной области. Предполагается, что во всей возмущенной области давление распределяется так, как будто бы движение жидкости в данный момент времени [6] установившееся. В этом случае требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$p|_{r=r_1} = p_1(\theta), \quad (2)$$

$$r \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\frac{\mu}{2\pi kh} \cdot q(\theta). \quad (3)$$

Общим решением уравнения (1) будет

$$p = c_0 \ln r + \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta). \quad (4)$$

Разлагая граничные условия в ряд Фурье, получим:

$$p_1(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta),$$

$$q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta).$$

Приравняв эти ряды при $r = r_1$, соответственно решению и производному от решения получим выражения для коэффициентов, входящих в решение. Подставляя их в (4), находим

$$p = B_0 + \bar{D}_0 \ln \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \cdot [(nA_n + \bar{C}_n) \sin n\theta + (nB_n + \bar{D}_n) \cos n\theta] + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-n} \cdot [(nA_n - \bar{C}_n) \sin n\theta + (nB_n - \bar{D}_n) \cos n\theta], \quad (5)$$

где

$$\bar{C}_n = -\frac{\mu}{2\pi kh} \cdot C_n, \quad \bar{D}_n = -\frac{\mu}{2\pi kh} \cdot D_n.$$

С помощью (5) можно написать формулы для вычисления потенциалов и линий тока:

$$\Phi = \kappa B_0 + \kappa \bar{D}_0 \ln \frac{r}{r_1} + \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \cdot [(n A_n + \bar{C}_n) \sin n\theta + (n B_n + \bar{D}_n) \cos n\theta] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-n} \cdot [(n A_n - \bar{C}_n) \sin n\theta + (n B_n - \bar{D}_n) \cos n\theta],$$

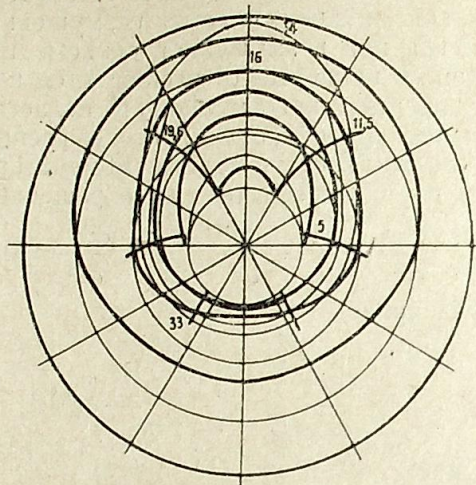


Рис. 1.

$$\psi = \kappa \bar{D}_0 \cdot \theta + \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^n \cdot [(n B_n + \bar{D}_n) \sin n\theta - (n A_n + \bar{C}_n) \cos n\theta] + \frac{\kappa}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^{-n} \cdot [(n A_n - \bar{C}_n) \cos n\theta - (n B_n - \bar{D}_n) \sin n\theta] + C.$$

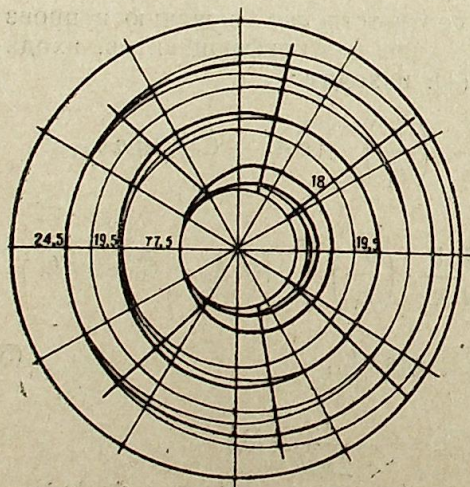


Рис. 2.

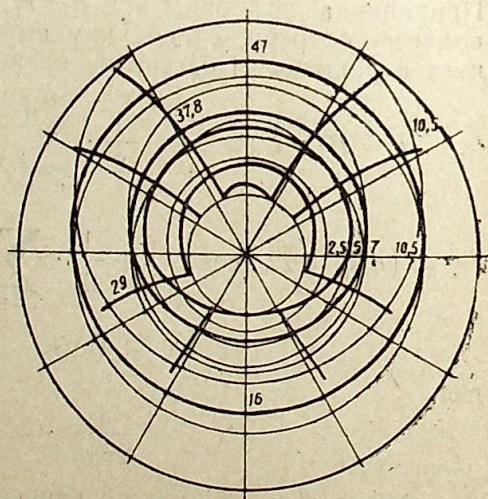


Рис. 3.

При помощи формулы

$$m \cdot \frac{du}{dt} = \bar{W}'_u(r, \theta),$$

где

$$W = \Phi + i\psi, u = \frac{r}{r_1} + i\theta,$$

легко найти уравнения движения частиц нефти к окружности $r = r_1$. Результаты расчетов для трех случаев показаны на рис. 1—3. Рассматривается однородный пласт, ограниченный окружностью $r = 20$. Внутри окружности $r = 1$ расположены четыре скважины с забойными давлениями 15, 20, 22, 25. На $r = 20$ также заданы значения давлений:

1) $p|_{r=20} = 110 + 20 \cos \theta$; 2) $p|_{r=20} = 50 + 20 \sin \theta$; 3) $p|_{r=20} = 20 + 40 \sin \theta$.

Сначала решена прямая задача: определено поле давлений в многосвязной области методом сеток. Расчеты производились на ЭЦВМ на БЭСМ-2М. Результаты для каждого случая при $r = 1$ приведены ниже:

I случай

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
p	35,98	35,87	35,49	34,97	34,56	34,05	34,01
q	26,04	25,89	25,47	25,00	24,52	24,13	24,04
θ	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
p	34,13	34,52	35,00	35,47	35,89	35,98	
q	24,47	24,54	25,01	25,50	25,83	26,04	

II случай

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
p	20,01	21,03	21,77	21,99	21,80	21,04	20,03
q	10,03	10,10	9,92	10,04	10,00	10,05	10,07
θ	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
p	18,97	18,21	17,96	18,19	18,93	20,01	
q	10,01	10,06	10,07	9,98	9,99	10,03	

III случай

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
p	50,08	51,51	52,52	52,98	52,57	50,50	50,03
q	-10,02	-9,50	-9,25	-9,04	-9,28	-9,53	-9,99
θ	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
p	48,51	47,46	47,01	47,43	48,54	50,08	
q	-10,51	-10,87	-11,00	-10,92	-10,48	-10,02	

Предположим, что нам задана область, ограниченная окружностями $r=1$, $r=4$, на $r=1$ заданы вышеуказанные условия (значения дебитов и давлений). Найдено решение в рассмотренной области. Картина поля потенциалов и линий тока позволяет исследовать изменение любого отмеченного контура за каждый промежуток времени. После давлений построено для всех трех случаев: I. $P=35$ (рис. 1); II. $P=20$ (рис. 2) и III. $P=20$ (рис. 3). Первоначальную форму контура брали в виде окружности. Последующие изменения показаны жирными линиями.

Сравнивались значения давлений для граничной задачи и задачи Коши на окружности $r=3$. Ниже приведено сравнение для I случая.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°
p_1	65,54	65,22	64,13	62,51	60,99	59,83	59,56	59,78	61,12	62,54
p_2	65,48	65,17	63,98	62,53	61,14	59,84	59,49	59,86	61,19	62,57
δ	0,06	0,05	0,15	0,02	0,15	0,01	0,07	0,08	0,07	0,03

В таблице обозначены:

p_1 —решение методом сеток,

p_2 —решение задачи Коши,

δ —модуль разницы между решениями.

Результаты расчетов показали, что максимальное отклонение для рассматриваемых примеров составляет 0,53%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антохин Ю. Т. ДУ т. 1, 1956, № 2.
2. Гасанов Ф. Г., Каграманов А. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук“, 1955, № 6.
3. Гасанов Ф. Г., Каграманов А. К. Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной конференции по математическим методам решения задач подземной нефтяной гидродинамики. Баку, 1957.
4. Иванов В. К. Матем. сб., т. 61 (103), 1963 № 2.
5. Тихонов А. Н. „ДАН СССР“, т. 151, 1963, № 3.
6. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.

Поступило 7. V 1969

А. Г. Гәһрәманов

Гапалы нефттилик контурунун һәрәкәтинин тәдгиги һаггында

ХҮЛАСӘ

Намар әјриләрлә әһатә олунмуш нефт лајынын дахили контурунда, ики шәрт верилдикдә, нефтин һәрәкәтинә бахылмышдыр. Мәсәлән һәллиндә гәрарлашмыш вәзијәтләрин бир-бирини ардычыл әвәз етмәси үсулу тәтбиг олунмушдур. Көстәрилмишдир ки, дајаныглы һәллин алынмасы үчүн регулјарлашдырма үсулундан истифадә етмәк лазымдыр.

М. М. РАСУЛОВ, Г. А. МЕХТИЕВ, Р. И. МУСТАФАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПРИВОДА НА АНАЛОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

В некоторых областях промышленности для регулирования скорости вращения применяются сравнительно несложные электромеханические устройства. К числу таких устройств относится система привода с механическим дифференциалом, нашедшая применение в электроприводах подачи инструмента буровых установок, в горнодобывающей промышленности и в других отраслях. Однако, несмотря на обилие модификаций электродифференциального привода (ЭДП), их исследованию посвящено недостаточное количество работ. Некоторые аналитические исследования характеристик ЭДП приведены в работах [1, 2]. Наличие двух степеней свободы в приводах с механическим дифференциалом усложняет решение задач, связанных с неустановившимися процессами, и поэтому в опубликованных работах авторы пренебрегают не только электромагнитными переходными процессами в электрических машинах, входящих в ЭДП, но и принимают линейными механические характеристики указанных двигателей, что при исследованиях режимов пуска и реверса дает значительную погрешность.

В настоящей статье дается методика моделирования двухдвигательного дифференциального привода переменного тока на аналоговой вычислительной машине (АВМ). При моделировании учитывается нелинейность механических характеристик асинхронных двигателей, входящих в ЭДП.

Принципиальная схема ЭДП переменного тока изображена на рис. 1. Основные параметры и статические характеристики этого привода применительно для подачи бурового инструмента приведены в работах [3, 4].

Р. Обозначения в схеме рис. 1 следующие:

- P —дифференциальный редуктор;
- AD_1, AD_2 —короткозамкнутые асинхронные двигатели;
- UB —управляемый выпрямитель;
- DP —сглаживающий дроссель;
- AI —трехфазный инвертор на кремниевых управляемых выпрямителях.

Двигатель AD_1 через зубчатое зацепление с передаточным отношением i_1 вращает одну из конических шестерен дифференциального редуктора. Регулируемый двигатель AD_2 через передачу i_2 вращает вторую шестерню дифференциального редуктора в противоположном

направлении. Движение с вала сателлитов через передачу i_3 передается на выходной вал редуктора. При пренебрежении электромагнитными переходными процессами в двигателях основные уравнения дифференциального привода будут нижеследующими.

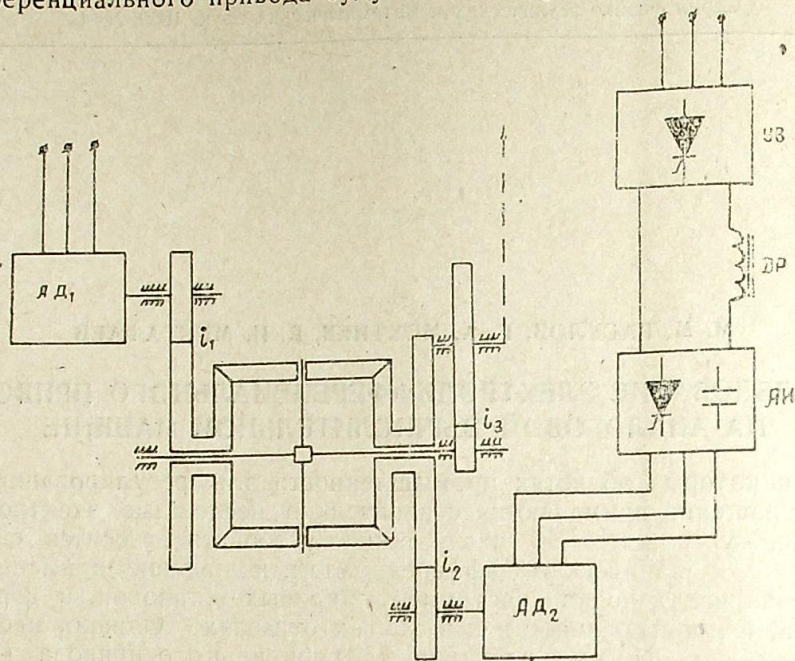


Рис. 1

Уравнение движения для вала двигателя АД₁:

$$\frac{dn_1}{dt} A_1 - \frac{dn_2}{dt} B_1 = -M_1(n_1) + \frac{M_{\text{вых}}}{2i_1 i_3} \quad (1)$$

Уравнение движения для вала двигателя АД₂:

$$\frac{dn_2}{dt} A_2 - \frac{dn_1}{dt} B_2 = M_2(n_2) - \frac{M_{\text{вых}}}{2i_2 i_3} \quad (2)$$

Уравнение движения выходного вала ЭДП:

$$\frac{dn_3}{dt} A_3 = M_3 - M_{\text{вых}} \quad (3)$$

Уравнение скорости вращения вала дифференциального механизма:

$$n_3 = n_1 c_1 - n_2 c_2, \quad (4)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{375} \left[(GD^2)_1 + \frac{(GD^2)_3}{i_1^2 i_3^2} \right],$$

$$A_2 = \frac{1}{375} \left[(GD^2)_2 + \frac{(GD^2)_3}{i_2^2 i_3^2} \right],$$

$$A_3 = \frac{(GD^2)_3}{375},$$

$$B_1 = \frac{(GD^2)_3}{i_1^2 i_3^2 375},$$

$$B_2 = \frac{(GD^2)_3}{i_2^2 i_3^2 375}.$$

Подставив значения n_1 и n_2 в формулы (1), (2), (3), после необходимых преобразований получим:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_3}{dt} B'_1 + M_1(n_1) A'_1 + K_1 M_{\text{вых}}; \quad (5)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = \frac{dn_3}{dt} B'_2 + M_2(n_2) A'_2 - K_2 M_{\text{вых}}; \quad (6)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = M_1(n_1) A'_3 + M_2(n_2) A'_3 - K_3 M_{\text{вых}}; \quad (7)$$

где

$$B'_1 = \frac{2i_2 i_3 B_1}{A_1 - \frac{i_2}{i_1} B_1}, \quad K_1 = \frac{1}{2i_1 i_3 \left(A_1 - \frac{i_2}{i_1} B_1 \right)},$$

$$B'_2 = \frac{2i_1 i_3 B_2}{A_2 - \frac{i_1}{i_2} B_2}; \quad K_2 = \frac{1}{2i_2 i_3 \left(A_2 + \frac{i_1}{i_2} B_2 \right)},$$

$$A'_1 = \frac{1}{A_1 - \frac{i_2}{i_1} B_1}, \quad K_3 = \frac{1}{A_3} = A'_3.$$

$$A'_2 = \frac{1}{A_2 - \frac{i_1}{i_2} B_1}.$$

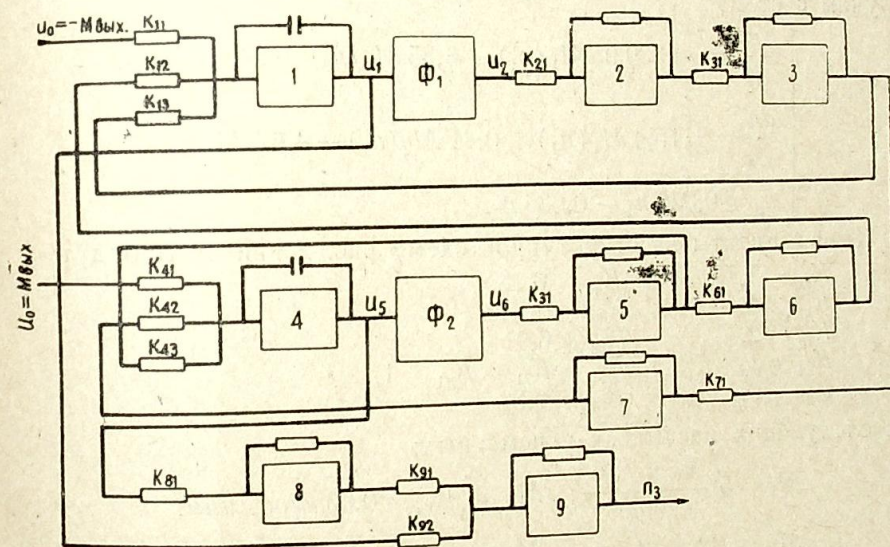


Рис. 2.

Подставив значение $\frac{dn_3}{dt}$ из (7) в (5) и (6), после соответствующих преобразований получим:

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = M_1(n_1) \varepsilon_1 + M_2(n_2) L_1 + \pi_1 M_{\text{вых}}, \\ \frac{dn_2}{dt} = M_1(n_1) \varepsilon_2 + M_2(n_2) L_2 + \pi_2 M_{\text{вых}}, \\ n_3 = n_1 c_1 - n_2 c_2, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_1 - B_1 A_3, & L_2 &= B_2 A_3, \\ \varepsilon_2 &= A_2 + B_2 A_3, & \pi_1 &= K_1 - B_1 K_3, \\ L_1 &= -B_1 A_3, & \pi_2 &= B_2 K_3 - K_2. \end{aligned}$$

Схема набора задачи, соответствующая системе уравнений (8), приведена на рис. 2, где Φ_1 и Φ_2 — функциональные преобразователи, воспроизводящие кусочно-линейную аппроксимацию механических характеристик двигателей АД₁ и АД₂.

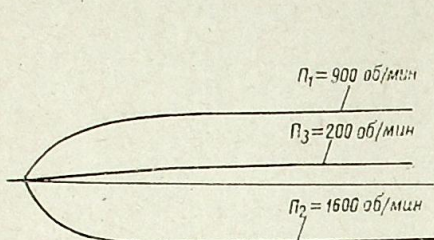


Рис. 3

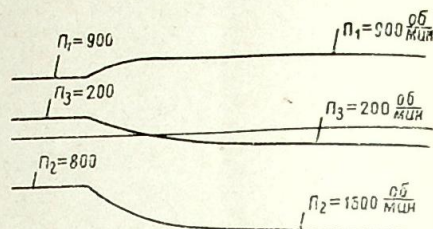


Рис. 4

Приняв параметры установки ЭДП:

$$\begin{aligned} i_1 &= 2,24; & (GD^2)_1 &= (GD^2)_2 = 2,3 \text{ кгм}^2; \\ i_2 &= 3,45; & (GD^2)_3 &= 244 \text{ кгм}, \\ i_3 &= 4; \end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -339,95 M_1(n_1) - 6,35 M_2(n_2) + 24,85 M_{\text{вых}}, \\ \frac{dn_2}{dt} = 115,4 M_1(n_1) + 0,41 M_2(n_2) - 4,67 M_{\text{вых}}, \\ n_3 = 0,056 n_1 - 0,036 n_2. \end{cases}$$

Коэффициенты на структурной схеме рис. 2 при этом будут:

$$\begin{aligned} K_{11} &= 1,7, & K_{41} &= 0,28, \\ K_{12} &= 1, & K_{42} &= 0,246, \\ K_{13} &= 2, & K_{43} &= 6,91, \\ K_{21} &= 1, & K_{51} &= K_{71} = K_{81} = 1, \\ K_{31} &= 0,1, & K_{61} &= 0,3 \end{aligned}$$

при следующих масштабах переменных:

$$M_1 = 5 \frac{\text{маш.сек}}{\text{сек}}; \quad M_{n_1} = M_{n_2} = 0,06 \text{ в/об. мин};$$

$$M_m = 0,2 \text{ в/кгм}; \quad M_{n_3} = 1 \text{ в/об. мин}.$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} n_{10} &= 1000 \text{ об/мин}; & (U_{10} &= 60 \text{ в}); \\ n_{20} &= 800 \text{ об/мин} & (U_{20} &= 48 \text{ в}); \\ M_{\text{вых}} &= 200 \text{ кгм}; & (U_0 &= 40 \text{ в}). \end{aligned}$$

По условию работы ЭДП для осуществления реверса скорость n_{20} должна меняться от 800 до 1600 об/мин, а напряжение-аналог U_{20} — от 48 до 90 в.

На рис. 3 и 4 показаны осциллограммы пуска и реверса ЭДП, полученные на АВМ. Сопоставление их с осциллограммами рис. 5 и 6, снятыми непосредственно на электродинамической модели (рис. 1),

показывает достаточную для инженерных расчетов точность и указывает на правомерность предложенной методики моделирования.

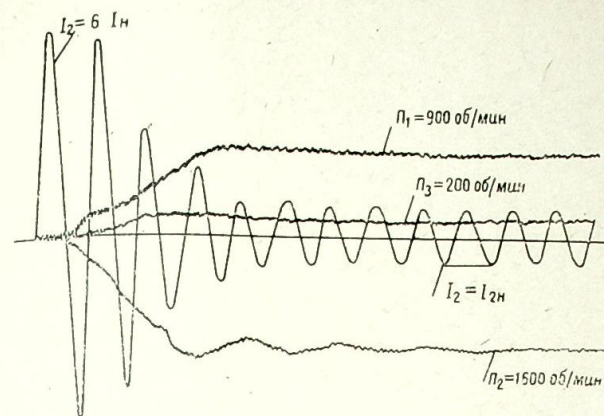


Рис. 5.

Как видно из осциллограмм рис. 4 и 6, при изменении скорости вращения регулируемого двигателя (n_2) происходит реверс выходного вала ЭДП. Данная методика позволяет исследовать и другие неуставы

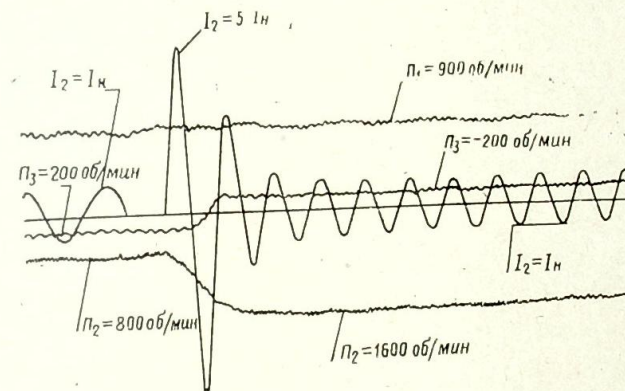


Рис. 6.

новившиеся режимы работы ЭДП. На основании вышеизложенного можно заключить, что с помощью предложенной методики моделирования на АВМ можно более точно раскрыть картину переходных процессов ЭДП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голован А. Т. Основы электропривода. Госэнергониздат, 1958.
2. Гудков В. С. "Электричество", 1956, № 10.
3. Кадымов Я. Б., Мехтиев Г. А. Тр. АзНИИ энергетики им. Есьмана И. Г.
4. Мехтиев Г. А. Дифференциальный привод подачи бурового инструмента на переменном токе. Материалы I республиканской конференции молодых ученых, Баку, 1966.

Поступило 21. I 1969

МҮНДӘРИЧАТ

Х. М. Хәлилов, Ф. А. Гәнбәров. Кадмий сульфид монокристаллында ултрасес далгаларын күчләндримәси вә волтампер характеристикасының гејри-хәттилијинин тәдгиги	3
Һ. Б. Абдуллаев, А. З. Гулиев, Е. М. Тутасинов, К. Ш. Гәһрәманов. Ферди дәннз буругларыны коррозиядан горумаг үчүн суалты газ јаначаглы јарымкечиричи термoeлектрик кенераторун иши вә конструксиясының хусусијјәтләри	7
Г. Ш. Гасанов, Ј. Д. Вишнјакoв. Дүзүлмүш дифектинин електрик кечирмәјә тәсири	11
Ј. М. Сејидов, М. Н. Абдуллаев. Магнит низамлы кристалларда (дипол-дипол гаршыдыглы тәсирири нәјәрә алмагла) ашгар һалларының спин далга нәзәријјәсинә даир	15
Л. М. Иманов, В. М. Нағыев, А. Ә. Чаббаров. Ванадий вә фосфор оксидләри әсасында алынмыш оксид јарымкечиричи шүшәләрдә тәкләнмиш электронлар вә јүкдашыјычылар	21
К. Н. Мәмәдов, А. С. Аббасов. Галиумун бәзи сульфидләринин термодинамик хассәләри	25
А. А. Абдулрәһимов, М. Н. Јолчуев, Л. М. Иманов. $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$ молекулун микродалгалы һәрләнән спектри	30
Х. М. Хәлилов, Ш. О. Оручова, Һ. Ә. Мәмәдов. TlSe монокристаллында ултрасәсиң удулмасының температур вә тезликдәнасыллыгының тәдгиги	35
Х. М. Пашаев. Тәчрид олунмуш ашгар атомлара малик кристалларда локал сәвијјәләрдән нейтронларын гејри-еластик магнит сәпилмәси	38
И. Бәхтијаров, Г. С. Волпе. Сыхылма нәтичәсиндә баш верән еластики констактлы һиссәләрдә кәркирлик вәзијјәтинин тәјин едилмәсинә даир	42
Е. Ч. Асланов, Ј. И. Домшлак. Гилберт фәзасында диференсиал тәнликләрин һәлли илә әлагәдар олан бәзи вариасија мәсәләләри һагында	50
З. Н. Һәсәнов. Комплекс дәјишәнли функцияларын золагда Дирихле полиномлары вәситәсилә јахынлашмасы	55
Р. И. Мурадов. Гарышыг типли чырлашар тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләси	62
Ә. М. Мәмәдов, З. Ә. Әлијева. Әдәди нәзәри үсулун бир сыра сәрһәд мәсәләсинин тәгриби һәллинә тәтбиги һагында	68
Р. Б. Фејзуллаев. Графларын һомоморфизмләри	74
Ә. Х. Сәлимов. Әталәтли һәдди нәзәрә алмагла труба илә гәрарлашма-јан газәтүрмә мәсәләсинин интеграл мүнәсибәтләри методу илә һәлли	79
А. А. Һүсәјнзәдә. Волф-рајје улдузларының тәкамүлү	85
И. Ә. Асланов, Ј. А. Мәмәдов. Азәрбајчан Елмәр Академијасы Шамахы Астрофизика рәсәдханасының 2 метрлик телескопунун баш күзкүсүнүн тәдгиги	89
В. Д. Кубенко, З. М. Зүлфугаров. Еластикијјәтин момент нәзәријјәсинин динамик мүстәви мәсәләсиндә даирәви гуршаг әтрафында кәркинлик вәзијјәти һагында	99
А. А. Абдуллаев, Һ. Ә. Әлизәдә, Ә. Г. Мәмәдов. Че-виричи гургуларда баш верәр аварија режиминдә јарымкечиричи чиһазлардакы истилик просесләри	103
Ј. Б. Гәдимов, Г. Б. Абдулов. Ардычыл јахынлашма методу илә бир гајдалы гејри-хәтти диференсиал тәнликләрин тәгриби аналитик һәлли	109
Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов, Г. А. Миронов. Сәдәләшдирилмиш илдырымдан мүнәфизә схемли јарымстансияларын илдырым да-	

јаныглыгы	114
М. Н. Әлиев. Сәсин парамагнетикләрдә ашағы температурларда јайыл-масы	121
Р. М. Мир-Гасымов. Мүбадилә чырлашмасы вә јүксәк енержиләрдә эффектив кәсикләр арасында мүнәсибәтләр	125
А. Г. Гәһрәманов. Гапалы нефтдилик контурунун һәрдәкәтинир тәд-гиги һагында	130
М. М. Рәсулов, Г. А. Мәһдијев, Р. И. Мустафајев. Ана-логлу һесаблама машынында электродиференсиал өтүрүчүсүнүн тәдгиги	135

СОДЕРЖАНИЕ

Х. М. Халилов, Ф. А. Гамбаров. Исследование усиления ультразвуковых колебаний в сульфиде кадмия и нелинейности вольтамперных характеристик	3
Г. Б. Абдуллаев, А. З. Кулиев, Э. М. Тухтасинов, К. Ш. Кахраманов. Особенности конструкции и работа подводного полупроводников термоэлектрического генератора на газовом топливе (ТЭГГ-ПВ) для катодной защиты морских индивидуальных оснований	7
Г. Ш. Гасанов, Я. Д. Вишняков. Влияние дефектов упаковки на электропроводность	11
Ю. М. Сеидов, М. Н. Абдуллаев. Спин-волновая теория примесных состояний в магнитоупорядоченных кристаллах (учет диполь-дипольного взаимодействия в обменной модели)	15
Л. М. Иманов, В. М. Нагиев, А. А. Джаббаров. Неспаренные электроны и носители заряда в оксидных полупроводниковых стеклах на основе оксидов ванадия и фосфора	21
К. Н. Мамедов, А. С. Аббасов. Термодинамические свойства некоторых сульфидов галлия	25
А. А. Абдурахманов, М. Н. Елчиев, Л. М. Иманов. Микроволновой вращательный спектр молекулы $\text{CH}_3\text{CHONCH}_3$	30
Х. М. Халилов, Ш. О. Оруджева, Г. А. Мамедов. Исследование температурно-частотной зависимости поглощения ультразвука в монокристалле	35
Х. М. Пашаев. Неупругое магнитное рассеяние нейтронов на локализованных возбуждениях в кристаллах с изолированными атомами внедрения	38
И. А. Бахтияров, Г. С. Вольпе. К определению напряженного состояния в деталях с различными упругими константами, возникающего при запрессовке	42
Э. Дж. Асланов, Ю. И. Домшлак. О некоторых вариационных задачах в гильбертовом пространстве, связанных с решением дифференциальных уравнений	50
З. Н. Гасанов. Приближение функций комплексного переменного в полосе посредством полиномов Дирихле	55
Р. И. Мурадов. Краевая задача для вырождающего уравнения смешанного типа	62
А. М. Мамедов, З. А. Алиева. О применении теоретикочисловых сеток к приближенному решению некоторых граничных задач	68
Р. Б. Фейзуллаев. Гомоморфизмы графов	74
А. Х. Салимов. Решение задачи нестационарной газопередачи с учетом инерционного члена методом интегральных соотношений	79
А. А. Гусейнзаде. Эволюция звезд Вольф-Райе	85
И. А. Асланов, Я. А. Мамедов. Исследование главного зеркала двухметрового телескопа ШАО АН Азербайджанской ССР	89
В. Д. Кубенко, З. М. Зульфугаров. О напряженном состоянии около круговой полости в динамической плоской задаче моментной теории упругости	99
А. А. Абдулаев, Г. А. Ализаде, А. К. Мамедова. Тепловые режимы полупроводниковых приборов при аварийных режимах преобразовательных установок	103
Я. Б. Кадымов, Г. Б. Абдулов. О приближенном аналитическом решении нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка методом последовательных приближений	109
Ч. М. Джуварлы, М. М. Муслимов, Г. А. Миронсв. Грозоупорность подстанций с упрощенной схемой грозозащиты	114
М. Н. Алиев. Распространение звука в парамагнетиках при низких тем-	

пературах	121
Р. М. Мир-Касимов. Обменное вырождение соотношения между сечениями при высоких энергиях	125
А. К. Каграманов. Об исследовании движения замкнутого контура нефтеносности	130
М. М. Расулов, Г. А. Мехтиева, Р. И. Мустафаев. Исследование электродифференциального привода на аналоговой вычислительной машине	135