

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХӨБӨРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

3

1969

„ЕЛМ“ НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ

Б. С. АЛИЕВА, В. И. ТАГИРОВ, А. А. КУЛИЕВ, С. И. ТАИРОВ,
М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОГО АКЦЕПТОРНОГО УРОВНЯ МЕДИ В ТВЕРДЫХ РАСТВОРАХ ГЕРМАНИЯ С КРЕМНИЕМ

Результаты теоретических работ [1, 2, 3] хорошо объясняют только возбужденные состояния мелких уровней, тогда как основные состояния и особенно глуболежащие уровни, используемые при решении ряда прикладных задач, еще не нашли удовлетворительной интерпретации. В связи с этим представляет интерес исследование глубоких уровней в сплавах германия с кремнием. Известно [4, 5], что примесные атомы меди в чистом германии и кремнии создают несколько глубоких уровней.

В настоящей статье приводятся результаты исследований электрических свойств сплавов германия с кремнием, легированных медью. Образцы в виде параллелепипеда размером $1,5 \times 4 \times 1$ мм³ вырезали из монокристаллических слитков, выращенных вытягиванием из расплава [6]. После шлифовки и травления образцы с тонким слоем меди на поверхности, нанесенной электролитически, подвергали изотермическому отжигу, после чего с их поверхности удаляли избыточную медь.

Электропроводность и коэффициент Холла монокристаллов германий—кремний, легированных медью, измерялись компенсационным методом в интервале 77—300°К. Как показали измерения, до введения меди кристаллы обладали проводимостью p -типа, создаваемой мелкими акцепторными уровнями. Присутствие таких уровней несколько затрудняет точное определение глубины залегания энергетических уровней примеси меди в сплавах германий—кремний, особенно в тех случаях, когда концентрация меди и мелких акцепторов сравнимы, так как при этом уравнение нейтральности заряда не имеет удобного решения (даже приближенного).

В работе [7] дано обсуждение решения уравнения нейтральности и показано применение его при определении энергии активации примесных уровней в полупроводниках. В этой же работе показана возможность определения энергии активации одного уровня при наличии другого (более мелкого). При этом одной из необходимых величин является наклон касательной к температурной зависимости концентрации носителей тока, который не всегда удается определить точно. Поэтому в настоящей работе энергия активации меди в сплавах германий—кремний определялась другим путем.

В области примесной проводимости, когда мелкие акцепторы ионизованы полностью, уравнение нейтральности заряда кристалла в

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

легированных медью сплавах записывается в следующем виде:

$$P = N_a + N_{Cu} - n_{Cu}, \quad (1)$$

где P — концентрация дырок в валентной зоне, N_a — концентрация мелких акцепторов, N_{Cu} — концентрация меди, n_{Cu} — концентрация нейтральных центров из первого акцепторного уровня меди (вклад остальных уровней меди не учитывается). P и n_{Cu} выражаются следующими формулами [8, 9]:

$$P = N_v \exp \left(-\frac{E_F + \Delta E}{kT} \right), \quad (2)$$

$$N_v = 2 \left(\frac{2\pi m^* kT}{h^2} \right)^{3/2},$$

$$n_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{1 + \frac{1}{2} \exp [(E_F + \Delta E - \epsilon_{Cu})/kT]}, \quad (3)$$

где E_F — уровень Ферми, ΔE — ширина запрещенной зоны, m^* — эффективная масса дырок, h — постоянная Планка, ϵ_{Cu} — энергия активации меди.

Введем обозначения:

$$P_1 = \frac{1}{2} N_v \exp \left(-\frac{\epsilon_{Cu}}{kT} \right). \quad (4)$$

Подставляя (2) и (3), в (1) и используя (4), получим

$$P_1 = \frac{P^2 - PN_a}{(N_a + N_{Cu}) - P}. \quad (5)$$

Зная N_a , N_{Cu} и P , можно определить P_1 при $(N_a + N_{Cu}) > P > N_a$. С другой стороны, выражение (4) показывает, что из наклона зависимости $\lg P_1$ от обратной температуры можно вычислить значение энергии активации ϵ_{Cu} .

На рис. 1 представлена температурная зависимость коэффициента Холла и электропроводности легированного медью сплава германий—кремний, содержащего 12 ат% Si. При относительно высоких температурах коэффициент Холла имеет постоянное значение, что соответствует полной ионизации как атомов меди, так и мелких акцепторных центров. С понижением температуры до некоторого значения коэффициент Холла увеличивается, стремясь к насыщению. Это насыщение определяется концентрацией мелких акцепторов. Ход температурной зависимости электропроводности определяется как изменением концентрации носителей тока, так и подвижности дырок.

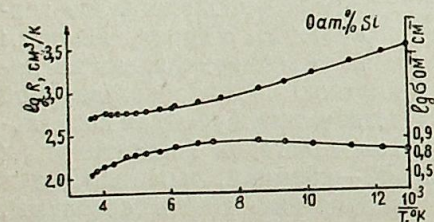


Рис. 1. Температурная зависимость коэффициента Холла (R) и электропроводности (b) легированного медью сплава германий—кремний, содержащего 12 ат % кремния

На рис. 2 показаны зависимости $\lg (P_1 T^{-3/2})$ от $\frac{1000}{T}$ для различных составов сплава. Из наклонов этих зависимостей определена энергия активации меди. При этом концентрация меди и мелких акцепторов вычислялась как по насыщениям кривых рис. 1, так и сравнением коэффициента Холла до и после легирования.

Изменение энергии активации меди от содержания кремния в сплаве иллюстрирует рис. 3. С ростом концентрации кремния энергия активации первого акцепторного состояния меди увеличивается, т. е. энергетический уровень меди смещается в сторону зоны проводимости.

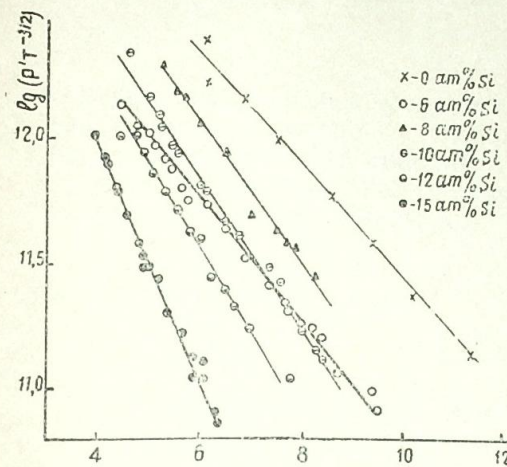


Рис. 2. Зависимость $\lg (P_1 T^{-3/2}) = f(\frac{1000}{T})$ для различных составов сплавов германий—кремний, легированных медью.

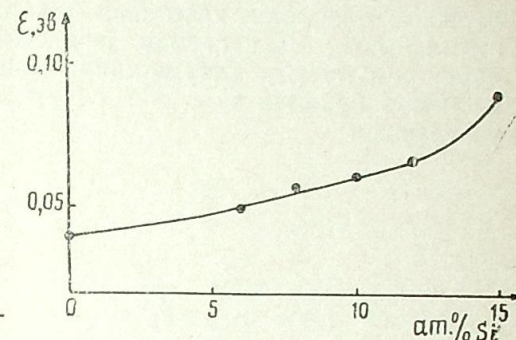


Рис. 3. Изменение энергии активации первого акцепторного уровня меди в зависимости от содержания кремния в сплаве германий—кремний.

Такое же смещение наблюдалось и для донорного уровня золота [10]. Это показывает, что в сплавах Ge—Si с ростом концентрации кремния от вершины валентной зоны удаляется (11) не только зона проводимости, но и остальные разрешенные уровни, локализованные в запрещенной зоне кристалла.

В заключение отметим, что медь подобно золоту обладает S' -валентным электроном и можно было ожидать, что ее поведение в сплавах германий—кремний будет напоминать золото. Однако проведенные нами исследования не выявили донорного уровня меди в сплавах германий—кремний, хотя не исключено, что измерения при более низких температурах дадут положительный результат. В то же время можно думать, что этот уровень находится в самой валентной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohn W. Solid State Physics, 5, 257, 1957.
2. Schechter D. J. Phys. Chem. Solids, 23, 237, 1962.
3. Miller A. M. K. Zs. Naturf., 20a, 11, 1476, 1969.
4. Woodlury H. H. W. W. Tyler 105, 1, 84, 1957.
5. Schibli, Milnes A. G. Mater. Sciand Engng, 2, 4, 173, 1967.
6. Тахиров С. И., Тагиров В. И., Шахтахтинский М. Г., Вигдорович В. Н., Кулиев А. А. ДАН СССР, серия химич., 176, 4, 851, 1967.
7. Витовский Н. А., Машовец Т. В. и Рывкин С. М. СТРП, 4 10, 2849, 1962.
8. Самойлович А. Г. к Коренблит Л. Л. УФН, 57, 4, 577, 1955.
9. Смит Р. Полупроводники. ИЛ, М., 1962.
10. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтахтинский М. Г., Кулиев А. А. ФТП, 5, 747, 1968.
11. Herman F. Phys rev., 95, 3847, 1954.

Поступило 18. II 1969

Керманиум-силисиум бəрк мəһлулларында мисин биринчи аксептор сəвијјəсинин тəдгиги

ХҮЛАСƏ

Тəдгигатда мислə ашгарланмыш керманиум-силисиум бəрк мəһлул-ларынын електрик хассəлəri өјрəнилмиш вə онларын əсасында мис атомларынын бу системдə јаратдығы биринчи аксептор сəвијјəсинин дəринлији мүјјэн едилмишдир. Мəһлулда силисиумун фаизи артдыг-ча мисин биринчи аксептор сəвијјəsi кристалын валент зонасындан узаглашыр.

УДК. 536. 45: 533. 99.

Т. А. МУХТАРОВА

ОДИН ИЗ МЕТОДОВ УЧЕТА ЗАКАЛКИ АЦЕТИЛЕНА В ПРОЦЕССЕ ПИРОЛИЗА МЕТАНА В ПЛАЗМЕННОЙ СТРУЕ ВОДОРОДА

Как показано в работе [1], при температурах, не превышающих 3500°K, и дозвуковых скоростях высокотемпературной газовой струи систему уравнений гидродинамики и химической кинетики можно при определенных условиях свести к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно концентрации $C_i^*(z)$, температуры $T(z)$ и времени процесса t . Для рассматриваемого случая пиролиза метана в плазменной струе водорода эта система приобретает следующий вид:

$$C_1'(z) = -\frac{1}{v(z)} \kappa_1 C_1(z), \quad (1)$$

$$C_2'(z) = \frac{1}{v(z)} \left[\frac{1}{2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \kappa_1 C_1(z) - \kappa_2 C_2(z) \right], \quad (2)$$

$$C_3'(z) = \frac{1}{v(z)} \left[\frac{\mu_3}{\mu_2} \kappa_2 C_2(z) - \kappa_3 C_3(z) \right], \quad (3)$$

$$C_4'(z) = \frac{2}{v(z)} \frac{\mu_4}{\mu_3} \kappa_3 C_3(z), \quad (4)$$

$$C_5'(z) = \frac{1}{v(z)} \left[\frac{\mu_5}{\mu_1} \kappa_1 C_1(z) + \frac{\mu_5}{\mu_2} \kappa_2 C_2(z) + \frac{\mu_5}{\mu_3} \kappa_3 C_3(z) \right], \quad (5)$$

$$T'(z) = -\frac{\left[\frac{N}{M} - 2v(z) \right] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 C_i'(z) (h_{ij} T^j(z) + h_i^0) + v(z) R T(z) \sum_{i=1}^5 \frac{C_i'(z)}{\mu_i}}{\left[\frac{N}{M} - 2v(z) \right] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 C_i(z) h_{ij} j T^{j-1}(z) + v(z) R \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(z)}{\mu_i}}, \quad (6)$$

$$t'(z) = \frac{1}{v(z)}, \quad (7)$$

где скорость потока $v(z)$ определяется из уравнения:

$$v(z) = \frac{N}{2M} - \sqrt{\left(\frac{N}{2M} \right)^2 - R T(z) \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(z)}{\mu_i}}. \quad (8)$$

Результаты решения системы уравнений (1)–(8) при начальных условиях:

$$v_0 = 3 \cdot 10^4 \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad C_{1,0} = 0,95,$$

$$T_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ К}, \quad C_{2,0} = C_{3,0} = C_{4,0} = 0, \quad (9)$$

$$C_{5,0} = 0,05$$

представлены на рис. 1. Как видно из этого рисунка, к моменту времени $\sim 0,5 \cdot 10^{-3}$ сек концентрация ацетилена достигает максимума, а затем начинает падать. По мере роста температуры процесс разложения ацетилена ускоряется. Повышение температуры струи является

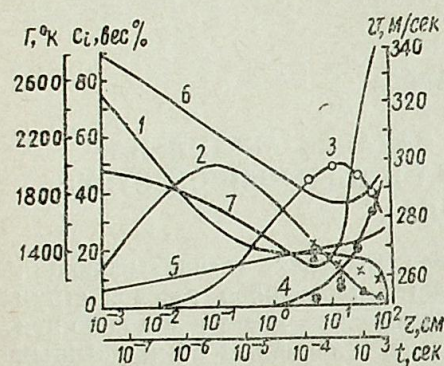


Рис. 1. Изменение концентраций (кривые 1–5) продуктов разложения метана, температуры (кривая 6) и скорости (кривая 7) плазменной струи водорода в зависимости от длины реактора z (или времени процесса t).

поэтому нежелательным с точки зрения целевого назначения процесса — получения ацетилена. Для его устранения или задержки необходимо резкое понижение температуры плазменной струи в процессе реакции до значения, ниже которого ацетилен практически не разлагается, т. е. необходима „закалка“ продуктов реакции. Пространственно-временные масштабы заделки выбираются в зависимости от распределения концентраций и скоростей образования и разложения веществ, участвующих в реакции.

Представляется вероятным, что начинать принудительную закалку следует в некоторой точке $z = z_0$, расположенной левее точки $z = z_m$, соответствующей максимуму целевого продукта, получаемого при расчете процесса без заделки. Это предположение подтверждается ниже результатами расчетов. До сих пор нами исследовалось адиабатическое течение без подвода или потерь тепла, т. е. при постоянной полной энергии поля течения. Принудительная закалка требует введения в определенном месте реактора внешних отрицательных источников (стоков) тепла определенной интенсивности. Тогда уравнение энергии в рассматриваемом нами приближении принимает вид [2]

$$\rho v \frac{dU}{dz} + \frac{d}{dz} p v + \rho v^2 \frac{dv}{dz} + \rho Q = 0, \quad (10)$$

где Q — энергосодержание в 1 сек на 1 г смеси от внешних источников. Интегрирование этого уравнения дает

$$\rho v \left(U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + \int_{z_0}^z \rho Q dz = \text{const} \quad (11)$$

(т. к. $Q \neq 0$ при $z \geq z_0$).

Уравнение (6) для $T'(z)$ в рассматриваемом случае преобразуется к виду

$$T'(z) = - \frac{\left[\frac{N}{M} - 2v(z) \right] \left\{ \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 C_i'(z) [h_{ij} T^j(z) + h_i^0] + \frac{Q}{v(z)} \right\} + \left[\frac{N}{M} - 2v(z) \right] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 C_i(z) h_{ij} j T^{j-1}(z) + v(z) R \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(z)}{\mu_i} + v(z) R T(z) \sum_{i=1}^5 \frac{C_i'(z)}{\mu_i}}{\left[\frac{N}{M} - 2v(z) \right] \sum_{i=1}^5 \sum_{j=-1}^8 C_i(z) h_{ij} j T^{j-1}(z) + v(z) R \sum_{i=1}^5 \frac{C_i(z)}{\mu_i} + v(z) R T(z) \sum_{i=1}^5 \frac{C_i'(z)}{\mu_i}} \quad (12)$$

Будем подбирать интенсивность постоянных внешних источников (стоков) тепла Q таким образом, чтобы знак $T'(z)$ в уравнении (12) не менялся, а абсолютное значение $T'(z)$ быстро росло, тогда температура смеси $T(z)$ довольно быстро упадет до значения, ниже которого ацетилен практически не разлагается.

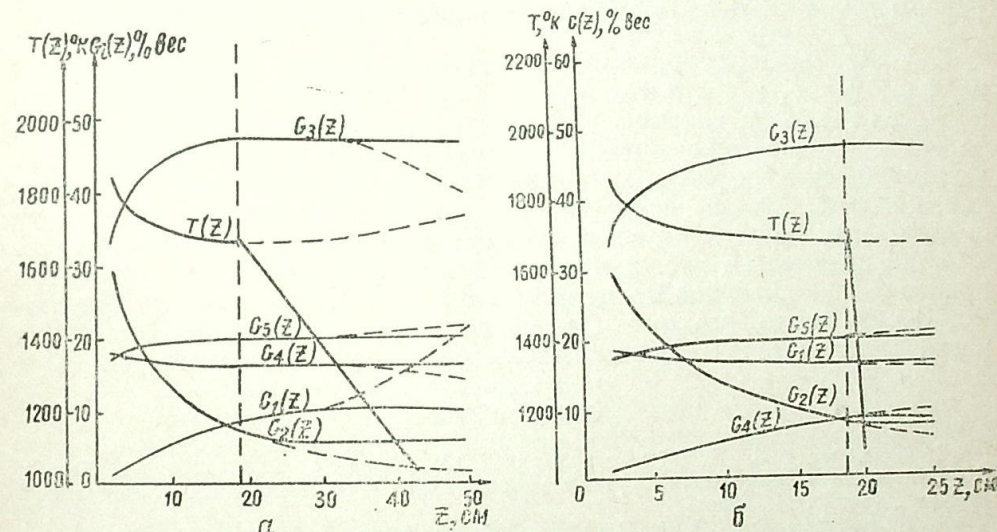


Рис. 2. Кривые изменения C_i и T при наличии заделки и без нее (пунктир):

а. $Q = 10^6 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$; б. $Q = 10^7 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$; C_1 — CH₄, C_2 — C₂H₄, C_3 — C₂H₂, C_4 — C, C_5 — H₂

Расчет влияния заделки на ход исследуемого процесса производился двумя способами. В одном случае численно решалась рассматриваемая выше система уравнений (1)–(7) с начальными условиями (9) в интервале $0 \leq z \leq 100$, причем в некоторой точке $z_0 < z_m$, z_m — координата максимума концентрации ацетилена, уравнение (6) для $T'(z)$ заменялось уравнением (12), учитывающим дополнительный отрицательный градиент температуры, создаваемый внешними источниками. В этом случае совместность уравнения (12) с рассмотренной ранее системой предполагается.

Во втором случае численно решалась приведенная выше система уравнений (1)–(7) с уравнением (12) для $T'(z)$ вместо уравнения (6) в интервале $z_m - 1 \leq z \leq 100$, причем в качестве начальных условий при решении такой системы уравнений выбирались значения функций

$C_1(z)$, $T(z)$ и $v(z)$ в точке $z_m=1$, полученные при решении рассматриваемой задачи без закалки.

Численное интегрирование системы уравнений для обоих случаев приводит к одним и тем же результатам. Результаты численного интегрирования приведенной системы уравнений представлены на рис. 2. Здесь приведены правые части кривых для $C_1(z)$ и $T(z)$, полученных без закалки и при наличии ее. Как видно из этого рисунка,

введение внешнего источника тепла интенсивностью $10^6 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$ в

точке $z_0 = 19 \text{ см}$ приводит к сохранению в плазменной струе практически всего образовавшегося в ней ацетилена (с потерей $\sim 1\%$), вплоть до значения $z = 50 \text{ см}$, где температура плазменной струи понижается до значения $T \approx 400^\circ\text{K}$, при котором скорость разложения ацетилена и других продуктов реакции стремится к нулю. Повыше-

ние интенсивности внешнего источника тепла до $10^7 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$ приводит

к тому, что разложение ацетилена и других продуктов реакции практически прекращается уже при $z = 20 \text{ см}$, где температура плазменной струи понижается до $T = 1400^\circ\text{K}$. Градиент температуры $T'(z)$ в этом случае при $z = 20 \text{ см}$ того же порядка, что и градиент температуры при $z = 50 \text{ см}$ в случае источника интенсивностью $10^6 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{сек}}$.

Оптимальный выбор момента начала закалки z_0 зависит от целого ряда факторов, в частности от T_0 и z_m . При этом очевидно, что закалка при $z_0 > z_m$, так же как и при z_0 , значительно меньших z_m , нерациональна с точки зрения получения наибольшего измеряемого выхода ацетилена. Расчеты показали также, что изменение z_0 в случае, когда $z_0 < z_m$, в некотором диапазоне значений приводит к несущественному изменению величины измеряемого выхода ацетилена [3].

Как следует из рис. 2, принудительная закалка продуктов реакции приводит к понижению температуры по закону, близкому к линейному. В результате реакция „замораживается“, разложение ацетилена резко замедляется и измеряемый выход его увеличивается [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Меламед В. Г., Мухтарова Т. А., Полак Л. С., Хаит Ю. Л. Сб. „Кинетика и термодинамика химических реакций в низкотемпературной плазме“. Изд-во „Наука“, М., 1965.
1. Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B. Molecular Theory of, Gases and Liquids, N. X., 1954, Chapter XI.
3. Бухман Ф. А., Меламед В. Г., Полак Л. С., Хаит Ю. Л. Сб. „Кинетика и термодинамика химических реакций в низкотемпературной плазме“. Изд-во „Наука“, М., 1965.
4. Мухтарова Т. А. Канд. дисс., М., 1966.

Поступило 14. I 1969

Т. А. Мухтарова

Гидроген плазмасы шырнағында метан пиролизи просеси заманы асетиленин бәркимәсинин һесабаалыныма методлары

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә жүксәк температурлу газ шырнағында вә ја ашағы температурлу плазмада кедән кимјәви реаксия мәһсулларынын бәркимәсини нәзәрә алан әдәди методлардан бәһс едилмишдир. Хүсуси һалда, мүәјјән шәртләр дахилиндә, гидроген плазмасы шырнағында метан пиролизи просеси заманы асетиленин бәркимәсинә аид һесаблама верилмишдир.

УДК 539.239:538.113

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Н. И. ИБРАГИМОВ, Ш. В. МАМЕДОВ, А. Х. ИБАДОВ

ДИНАМИКА РАСПАДА СОСТОЯНИЙ С ПЕРЕНОСОМ ЗАРЯДА В СЕЛЕНЕ

В предыдущих работах [1—4] методом ЭПР был исследован процесс донорно-акцепторного взаимодействия в селене и влияние на него предистории, термообработки и примесей. Было высказано предположение, что при взаимодействии цепей селена с акцепторными молекулами кислорода и йода в результате затягивания электронного облака конца цепи селена на молекулярную орбиту акцептора образуются комплексы с переносом заряда (КПЗ), обуславливающие парамагнетизм селена. Методика этих исследований заключалась в том, что селен различной предистории и с различным содержанием примесей подвергался последовательной термообработке в интервале $T_{\text{обр}} = 500 \div 1000^\circ\text{K}$ и при 300°K в нем изучалось ЭПР-поглощение. Оказалось, что интенсивность сигнала возрастает с увеличением $T_{\text{обр}}$, достигает максимального значения I_T при определенной T_T и резко спадает до нуля при $T_{\text{обр}} \geq 750^\circ\text{K}$. Из зависимости интенсивности сигнала от $T_{\text{обр}}$ были определены энергии активации процесса зарождения и необратимого распада КПЗ. Если энергия активации образования комплексов зависела от предистории образца, природы и содержания примесей, то энергия необратимого распада во всех случаях была $1,2 \text{ эВ}$.

По нашему мнению, необратимый распад КПЗ происходит из-за того, что при $T_{\text{обр}} \geq 750^\circ\text{K}$ цепочечная структура селена полностью разрушается и имеет место химическое связывание акцептора с селеном (разрушается заложенная в селен информация о длинах цепей и исчезает активность примесей).

Эти исследования, носящие полустатистический характер, оказались плодотворными и позволили получить дополнительную информацию о свойствах селена. Однако такая методика не позволяла изучить динамику процесса донорно-акцепторного взаимодействия, поэтому возникла необходимость в проведении опытов, при которых спектр ЭПР регистрировался в процессе изменения температуры образца.

Измерения производились на стандартном радиоспектрометре сантиметрового диапазона. Температура образца изменялась при помощи кварцевой печи, помещенной непосредственно в резонатор. Нагревательным элементом печи служила платиновая проволока, расположенная вдоль оси печи в продольных каналах кварцевой трубки. Испытания показали, что некоторое уменьшение добротности резонатора связано с качеством кварца печи, а наличие внутри резо-

натора платиновой проволоки с током не сказывается на форме и интенсивности сигнала [5]. На рис. 1 показано расположение печи, образца и термопары в резонаторе. Такая система позволяла нагревать образец до 1200°K . Для предотвращения нагрева резонатор охлаждали проточной водой. Контрольные измерения с парамагнитными образцами различной природы подтвердили общую стабильность установки. Измерением температуры внутри печи по всей ее длине (80 мм) было установлено, что на среднем участке печи, охватывающем образец, перепад температуры не превышает $3\div 5^\circ\text{C}$.

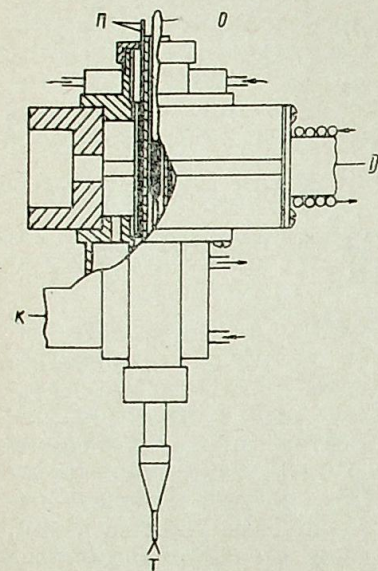


Рис. 1. Схема резонатора с печью: П—выводы нагревателя печи; Т—термопара; О—образец; К—к клемму; Д—к приемнику; водяное охлаждение.

Температура образца измерялась хромель-копелевой термопарой, соприкасающейся с образцом. Для точного измерения температуры образца была произведена градуировка показаний термопары в печи.

Было изготовлено 5 серий образцов из предварительно закислещенного селена, причем образцы серии 1, 2, 3, 5—из селена 99,9999% чистоты (В-5), а серии 4—из технического селена 99,99% чистоты (В-3):

- Серия 1—Se В-5, $p = 1 \text{ мм Hg}$,
- Серия 2—Se В-5 с 0,05 ат % Тl, $p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ мм Hg}$,
- Серия 3—Se В-5, $p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ мм Hg}$,
- Серия 4—Se В-3 с 0,02 мол. % Br_2 , $p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ мм Hg}$,
- Серия 5—Se В-3 с 0,005 мол. % J_2 , $p = 5 \cdot 10^{-5} \text{ мм Hg}$.

Материал в ампулах, запаянных после откачки до указанных давлений, подвергался поэтапной термообработке до достижения максимальной интенсивности I_m при $T_{\text{обр}} = T_m \approx 720^\circ\text{K}$, после чего термообработка образцов прекращалась. Эти образцы помещали в резонатор с печью и регистрировали спектр ЭПР при различных температурах в процессе нагрева образца. Время между двумя последовательными измерениями выбиралось достаточным для установления в образце постоянной температуры. Для определения исходных концентраций парамагнитных центров N_0 (см. табл.) в образцах различ-

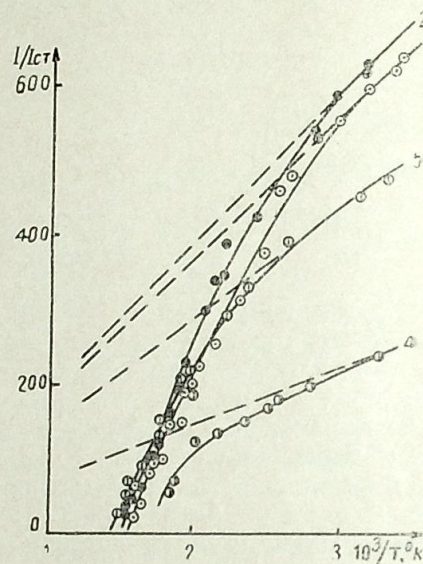


Рис. 2. Зависимость интенсивности сигнала ЭПР-поглощения от обратной температуры (числами обозначены кривые, относящиеся к соответствующим сериям образцов).

ных серий при комнатной температуре в качестве стандарта использовали ДФПГ.

На рис. 2 показана зависимость интенсивности сигнала от обратной температуры для образцов различных серий. В пределах погрешностей эксперимента ($\pm 2\%$) прямой (нагрев) и обратный (охлаждение) ход изменения интенсивности с температурой совпадают. Пунктирные прямые соответствуют ходу интенсивности при постоянной концентрации парамагнитных частиц и неизменной форме и ширине линии поглощения. Во всей области измерения температуры g -фактор оставался неизменным, ширина линии ΔH_m с увеличением температуры возрастала от 6 до 12 э. Опыты при температурах ниже комнатной (до 77°K) показали, что g -фактор не меняется, а интенсивность практически следует закону Кюри [2].

Как известно, закон Кюри связан с тепловым перераспределением электронов между зеемановскими уровнями. Его соблюдение означает постоянство концентрации парамагнитных центров. Как видно из рис. 2, наблюдается отклонение зависимости $I(T)$ от закона Кюри, что обусловлено изменением как концентрации парамагнитных центров, так и ширины линии ЭПР. При $T \approx 700^\circ\text{K}$ из-за уменьшения концентрации и в особенности уширения линии сигнал ЭПР становится ненаблюдаемым. Концентрация парамагнитных частиц N определялась посредством приведения интенсивности I при данной T к интенсивности I_k при комнатной температуре T_k и ее сравнения с интенсивностью от стандартного образца $I_0^{\text{ст}}$ по формуле

$$N = N_0^{\text{ст}} \cdot \frac{I (\Delta H_m)^2}{I_0^{\text{ст}} (\Delta H_{m0}^{\text{ст}})^2} \cdot \frac{T}{T_k}, \quad (1)$$

где $N_0^{\text{ст}}$ — концентрация в стандартном образце, $\Delta H_{m0}^{\text{ст}}$ — ширина линии стандарта, ΔH_m — ширина линии образца при данной T .

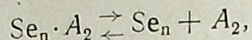
Таким образом, зная экспериментальную зависимость $I(T)$ и учитывая ширину линии, можно определить зависимость $N(T)$. Изменение концентрации от $\frac{I}{T}$ для образцов различных серий показано на

рис. 3. Как видно с T повышением температуры концентрация уменьшается и характер кривых не зависит от рода примеси и исходной концентрации парамагнитных центров. Нижний предел значений измеренных концентраций определялся чувствительностью прибора при данных T и ΔH_m .

В ряде работ [6—8] изучалась температурная зависимость статической магнитной восприимчивости селена вплоть до 1000°K и было обнаружено возрастание парамагнитной доли восприимчивости с повышением температуры. Эти экспериментальные результаты плохо согласуются друг с другом, однако все авторы сходятся на том, что увеличением парамагнетизма обусловлено вкладом свободно-радикальных концов цепей селена. Поскольку чувствительность ЭПР-измерений намного превосходит чувствительность статических магнитных измерений, то в наших экспериментах должно было наблюдаться возрастание парамагнетизма жидкого селена с повышением температуры. Из рис. 3 видно, что происходит монотонное уменьшение концентрации парамагнитных центров, а при $T \geq 700^\circ\text{K}$ сигнал становится ненаблюдаемым. Таким образом высокотемпературные ЭПР-исследования также подтверждают предположение, что причиной возникновения парамагнетизма селена являются донорно-акцепторные взаимодействия.

Полученная зависимость концентрации парамагнитных центров в селене от температуры может быть интерпретирована исходя из представления о цепочечной структуре селена и существования в нем

состояний с переносом заряда. Представляется следующий механизм распада комплексов:



где A_2 —акцепторная молекула.

Константа реакции такого распада равна

$$K = \frac{[\text{Se}_n] \cdot [\text{A}_2]}{[\text{Se}_n \cdot \text{A}_2]}.$$

Поскольку процесс взаимодействия акцепторных молекул с цепями селена происходит на поверхности надмолекулярных образований [4], то скорость реакции будет зависеть не от объемной концентрации цепей селена, а от величины поверхности этих образований. Поэтому скорость реакции изменяется только в зависимости от концентрации акцептора. Процесс обратимого распада комплексов будет определяться константой

$$K' = [\text{A}_2]. \quad (2)$$

Концентрация акцепторных молекул $[\text{A}_2]$ пропорциональна концентрации распавшихся комплексов N_p , т. е.

$$[\text{A}_2] = \alpha N_p; \quad (3)$$

α —параметр, слабо зависящий от температуры и характеризующий долю свободного объема между надмолекулярными образованиями в общем объеме образца.

Энергию обратимого распада парамагнитных центров ΔE можно определить из уравнения

$$\frac{\partial \ln K'}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} = - \frac{\Delta E}{R}. \quad (4)$$

Из (2), (3) и (4) имеем

$$\frac{\partial \ln \alpha N_p}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} = - \frac{\Delta E}{R}. \quad (5)$$

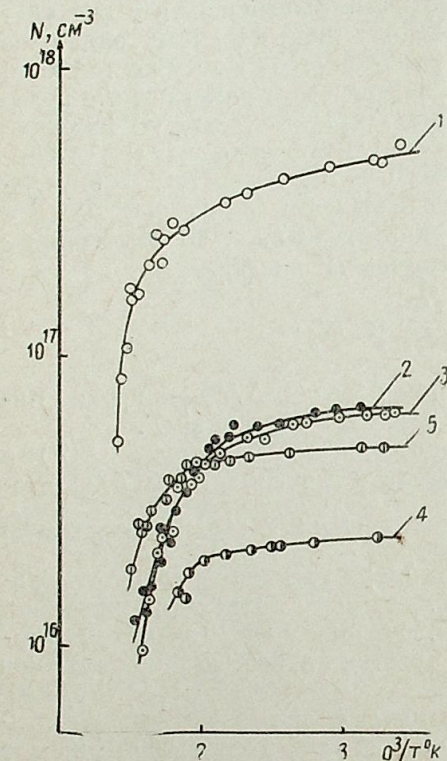


Рис. 3. Зависимость концентрации парамагнитных центров от обратной температуры для образцов различных серий.

N_p становится равной исходной концентрации КПЗ N_0 , получаем (ΔE выражена в эВ)

$$N_p = N_0 \cdot \exp \left[\frac{\Delta E}{\kappa} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{T} \right) \right]. \quad (6)$$

Так как $N_0 = N + N_p$, то из (6) можно определить температурную зависимость концентрации ЭПР-центров в селене:

$$N = N_0 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\Delta E}{\kappa} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{T} \right) \right] \right\}. \quad (7)$$

На основе экспериментальных данных была построена зависимость $\lg \frac{N_0 - N}{N_0}$ от $\frac{1}{T}$, которая для различных серий образцов

приведена на рис. 4. Как видно, экспериментальные точки достаточно хорошо укладываются на прямые, что свидетельствует о справедливости выражения (7). Необходимо отметить, что все прямые пересекают ось абсцисс, в точке, которая соответствует $\theta = 720 \pm 20^\circ \text{K}$. Из наклона прямых были определены ΔE для каждой серии образцов. Величины ΔE и θ приведены в таблице.

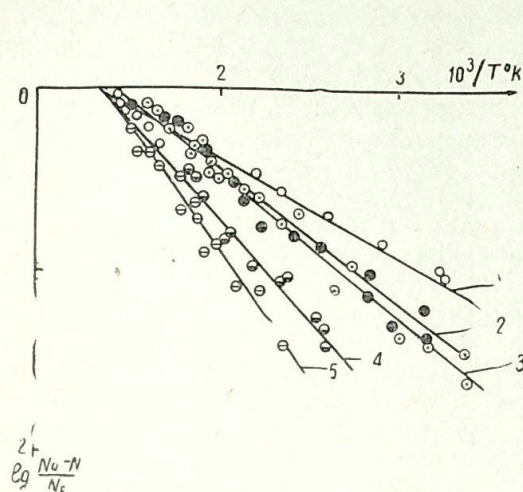


Рис. 4. Зависимость $\lg \frac{N_0 - N}{N_0}$ от $\frac{1}{T}$ (1, 2, 3, 4, 5—образцы соответствующих серий).

Выражение (7) может быть представлен в другой форме, если ввести энтропийный член:

$$\frac{N}{N_0} = 1 - \exp \left(\frac{\Delta S}{R} \right) \exp \left(- \frac{\Delta E}{RT} \right). \quad (8)$$

Из экспериментально определенных ΔE и θ было вычислено изменение энтропии при распаде кислородных, бромных и йодных комплексов, которое оказалось равным 4,2; 6,8 и 8,7 $\frac{\text{кал}}{\text{моль} \cdot \text{град}}$.

Серия	1	2	3	4	5
$N_0 \cdot 10^{-16}$ (1/см³)	51,0	6,9	6,4	2,3	4,8
E , эВ ($\pm 0,02$)	0,12	0,15	0,14	0,22	0,28
θ , °K ($\pm 20^\circ$)	700	720	720	740	740

соответственно. Кривые на рис. 3 построены после подстановки в выражение (7) найденных значений ΔE и θ . Как видно, кривые хорошо описывают экспериментально полученную зависимость концентрации парамагнитных центров от температуры.

В образовании состояний с переносом заряда основную роль играют потенциал ионизации донора и сродство к электрону акцептора. В нашем случае донорной компонентой комплекса является цепь селена. Можно предположить, что в условиях опыта изменение

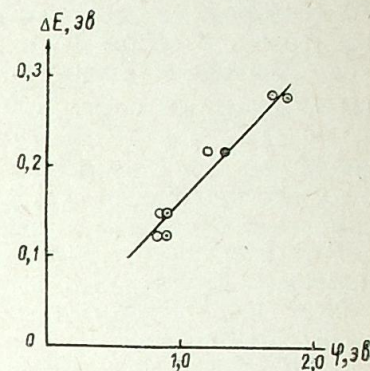


Рис. 5. Зависимость энергии активации обратимого распада КПЗ от сродства к электрону акцепторной молекулы: $\bigcirc$ —соответствуют экспериментально определенным значениям ϕ ; $\odot$ соответствуют теоретически рассчитанным значениям ϕ .

потенциала ионизации цепи вследствие возможного изменения ее длины пренебрежимо мало. Поэтому естественно ожидать, что энергия связи комплекса будет определяться величиной сродства к электрону акцепторной компоненты.

Энергии активации обратимого распада комплексов с O_2 , Br_2 и I_2 равны 0,14; 0,22 и 0,28 эв, соответственно. Как видно, ΔE растет от кислорода к йоду, что коррелирует с возрастанием их сродства к электрону. В самом деле, сродство к электрону O_2 и I_2 , определенное экспериментально, равно $\varphi_1 = 0,89$ эв [9] и $\varphi_3 = 1,8$ эв [10], а вычисленные из спектральных данных равны: $\varphi_1' = 0,87$ эв [11], $\varphi_2' = 1,2$ эв и $\varphi_3' = 1,7$ эв [12]. На рис. 5 приведен график, показывающий изменение энергии активации обратимого распада комплексов с изменением сродства к электрону акцепторной молекулы. Эта зависимость описывается выражением $\Delta E = 0,16 \varphi$, что позволяет определить экспериментально ожидаемую величину сродства к электрону молекулы Br_2 ($\varphi_2 = 1,3$ эв, что соответствует черной точке на графике). Необходимо отметить, что вычисленные величины φ' меньше экспериментальных.

При изучении влияния предварительной термообработки на образование КПЗ в селене было установлено, что энергия активации этого процесса изменяется при добавлении таллия [4]. Казалось бы в исследованиях, носящих динамический характер, как-то должно проявиться воздействие таллия на энергию связи комплекса. Однако ΔE в образцах серий 1, 3 и 2 (0,05 ат. % Тl) оказались одинаковыми. Это указывает на то, что в этих образцах образуются одни и те же кислородные комплексы. Вышеуказанное влияние таллия на энергию активации образования КПЗ, возможно, обусловлено его воздействием на надмолекулярную структуру селена. По-видимому, этот энергетический параметр характеризует зарождение КПЗ в результате сложного процесса предварительной термообработки материала, причем энергия связи комплекса входит в нее как составная часть.

Параметр θ в выражении (7) является температурой, при которой происходит полный распад комплексов. Последнее может иметь место из-за разрушения донорной компоненты комплекса при определенной температуре. То обстоятельство, что зависимости $\lg \frac{N_0 - N}{N_0}$ от $\frac{1}{T}$

для образцов различной предыстории, содержащих различного рода примеси, сходятся в одной точке, соответствующей $\theta = 720 \pm 20^\circ K$, а также то, что необратимый распад КПЗ в полустатических экспериментах начинается при $T \approx 750^\circ K$, позволяет прийти к заключению, что при $T = \theta \approx 750^\circ K$ происходит разрушение цепочечной структуры в жидком селене. Следует отметить, что процесс обратимого распада комплексов наблюдается только тогда, когда время выдержки при температурах, близких к θ , не превышает $5 \div 10$ мин.

Как указывалось выше, вне зависимости от предыстории материала, содержания и рода примесей в нем энергия активации необратимого распада составляет $\Delta E_n = 1,2$ эв. Было высказано предположение, что необратимый распад обусловлен разрушением цепочечной структуры селена, причем ΔE_n , вероятно, характеризует теплоту, сопровождающую этот процесс. В работе [13] рассмотрена равновесная полимеризация селена и установлено, что при отделении от длинной цепи кольца Se_8 выделяется около 0,1 эв. Из этих данных мы оценили энергию раскрытия кольца Se_8 , которая оказалась равной $\Delta E_8 \approx 1,3$ эв. Авторы работы [13], используя полученную ими взаимосвязь между ΔE_8 и средней длиной цепи, которую они принимают равной $\approx 10^4$ при $T = 493^\circ K$, находят для ΔE_8 величину около 1,1 эв. Наши оценки приводят к средней длине цепи $\sim 10^5 \div 10^6$, что по

данным [13] соответствует $\Delta E_8 = 1,2 \div 1,3$ эв. Отметим, также, что энергия активации превращения моноклинного селена в гексагональный равна 1,2 эв [14]. Таким образом значение $\Delta E_8 \approx 1,3$ эв представляется хорошим приближением к истинной величине энергии раскрытия кольца Se_8 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Джуварлы Т. Ч., Алиев Г. М. ДАН Азерб. ССР, 20, 10, 13 (1964).
2. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 6, 16 (1967).
3. Abdullayev G. B., Ibragimov N. I., Mamedov Sh. V. Proceeding of first International symposium on Selenium and Tellurium, p. 321, Perg. press (1969).
4. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Абу талыбова З. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 6 (1968).
5. Чайкин А. М. ПТЭ, 6, 178 (1963).
6. Massen, Weiss, Poullis. Trans. Far. soc., 60, 493, 2, 317 (1964).
7. Shotaro Tobisawa. Bull. Chem. soc. Japan, 33, 7, 889 (1960).
8. Bush G. und Vogt O. Helv. phys. Acta, 30, 4, 224 (1957).
9. Машенко А. Н. и др. ЖТЭХ, 1, 3, 381 (1965).
10. Briegleb G. Angew. chem., 76, 324 (1964).
11. Бучельникова Н. С. УФН, 65, 151 (1958).
12. Person W. B., J. Chem. Phys., 38, 1, 109 (1963).
13. Eisenberg A., Tobolsky A. V. J. Polymer Sci., 46, 147, 19 (1960).
14. Abdullayev G. B., Asadov Y. G. and Mamedov K. P. Proceeding of first International symposium on Selenium and Tellurium, p. 179, Perg. press (1969).

Поступило 5. III 1969

Г. Б. Абдуллаев, Н. И. Ибрагимов, Ш. В. Мамедов, А. Х. Ибадов
Селендә јуккечирмә һалынын парчаланмасынын динамикасы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә O_2 , Br_2 , J_2 вә Тl ашгарлары вурулмуш селендә $300 \div 750^\circ K$ температур интервалында, электрон парамагнит удулмасынын тәдгигинин нәтичәләри верилмишдир. Мүәјјән едилмишдир ки, парамагнит мәркәзләрин (јуккечирмә комплексләри) консентрасијасынын температурдан асылылығы

$$N = N_0 \left\{ 1 - \exp \left[\frac{\Delta E}{k} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{T} \right) \right] \right\}$$

ифадәси илә тәјин олулмушдур. O_2 , Br_2 , J_2 илә әмәлә кәлән комплексләрин дәнән парчаланмасынын активасија енержиси ΔE , ујғун олараг. 0,12; 0,24 вә 0,28 эв-ә бәрәбәрдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, ΔE илә аксептор молекулунун електрона һәрислији арасында коррелјасија мөвчуддур. Маје селендә зәнчирвары гурулушун дағылмасы баш верән температурла ујғунлашдырылан парамагнит мәркәзләрин там парчаланмасы температуру $\theta = 720 \pm 20^\circ K$ -дир. Se_8 һалгаларынын ачылма енержисинин мигдары да гијмәтләндирилмишдир.

Ч. О. КАДЖАР, А. А. АББАСОВ, Л. М. ИМАНОВ К МЕТОДУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОЙ СТРУКТУРЫ МОЛЕКУЛ

В микроволновой спектроскопии структура молекул определяется методом Крайчмана [1], согласно которому все атомы молекулы последовательно замещаются их изотопами и координаты замещенного атома определяются из выражения

$$|a| = \left[\mu^{-1} (P'_{aa} - P_{aa}) \left(1 + \frac{P'_{bb} - P_{bb}}{P_{bb} - P_{aa}} \right) \left(1 + \frac{P'_{cc} - P_{cc}}{P_{cc} - P_{aa}} \right) \right]^{1/2}, \quad (1)$$

где P_{aa} , P_{bb} , P_{cc} , P'_{aa} , P'_{bb} и P'_{cc} — вторичные моменты исходной молекулы и молекулы, у которой один атом замещен его изотопом; $\mu = \frac{1}{M} \cdot M(M' - M)$; M и M' — молекулярные веса исходной и изотопзамещенной молекулы. Вторичные моменты связаны с моментами инерции следующим образом:

$$\begin{aligned} 2P_{aa} &= I_b + I_c - I_a, \\ 2P_{bb} &= I_a + I_c - I_b, \\ 2P_{cc} &= I_a + I_b - I_c. \end{aligned}$$

Координаты b и c атомов определяются из выражения (1) циклической перестановкой индексов.

Если произведено последовательное замещение всех атомов, получается 3 n координат, по которым, используя простые геометрические соотношения, можно найти структурные параметры молекулы (r_s -структура). Как правило, обходятся меньшим числом замещений. Так, для молекулы асимметричного волчка достаточно (в случае отсутствия симметрии отдельных групп атомов молекулы) $n-2$ изотопических замещений. Координаты двух атомов, оставшихся незамещенными, определяются из уравнений моментов инерции и центра тяжести молекулы, записанных в той же системе координат (r_0 -структура):

$$\begin{aligned} \sum m_i a_i^2 &= P_a, & \sum m_i a_i &= 0, \\ \sum m_i b_i^2 &= P_b, & \sum m_i b_i &= 0, & \sum m_i a_i b_i &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Точность, с которой определяются координаты незамещенных атомов из этих выражений, в основном характеризуется погрешностью в координатах тяжелых атомов. Неопределенность в координатах атомов водорода будет сказываться при этом тем меньше, чем больше масса атомов остова молекулы. Поэтому, если нет возможности произвести достаточное число изотопических замещений,

для определения вероятной структуры все координаты атомов водорода могут быть взяты приближенными. Тогда для определения структуры будет достаточно $N-3$ замещений, где N — число тяжелых атомов в молекуле.

Задача облегчается еще тем, что при наличии симметрии в молекуле некоторые координаты атомов водорода могут быть определены без изотопических замещений. Так, для молекул, обладающих плоскостью симметрии и имеющих вне плоскости n пар атомов водорода, расстояние c от этих атомов до плоскости симметрии определяется из выражения

$$4n \cdot mc^2 = I_a + I_b - I_c. \quad (3)$$

Учитывая вышесказанное, для молекул с тремя тяжелыми атомами, например, типа $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{X}$ структуру, близкую к r_0 -структуре, можно получить всего одним изотопическим замещением атома X или углерода метильной группы.

Определение структуры молекулы при указанных допущениях производится в следующем порядке. Координаты одного из тяжелых атомов определяются изотопическим замещением из уравнений (1). Координаты остальных атомов в произвольной системе координат (рис. 1) определяется как показано в табл. 1.

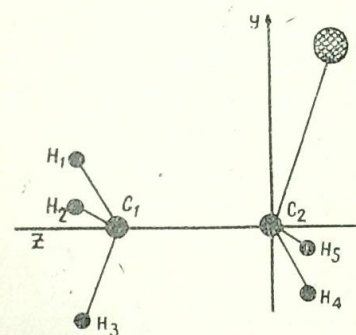


Рис. 1

Таблица 1

Координаты атомов молекул типа $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{X}$ в произвольной системе координат

Атомы	z	y	x
$\text{H}_{1,2}$	$r_{c-h} + a_z$	a_y	$\pm a_x$
H_3	$r_{c-h} + a_z$	$-2a_y$	0
$\text{H}_{4,5}$	$-a_z$	$-a_y$	$\pm a_x$
C_1	r_{c-c}	0	0
C_2	0	0	0

Здесь значения проекций межатомного расстояния (r_{c-h}), a_x , a_y и a_z находятся из уравнения (3) и заданием тетраэдрического угла; r_{c-c} определяется после перехода к системе главных осей из уравнений (2). Необходимые для перехода к главным осям координаты центра тяжести и угол поворота осей θ находятся по известным из литературы структурным параметрам.

За счет взаимной компенсации погрешностей найденные таким способом координаты центра тяжести и угол поворота осей обычно оказываются очень близкими к определенным из r_0 - или r_s -структуры. Особенно близкие значения получаются при использовании структурных параметров, найденных как в работах [2-5], минимизацией разности между экспериментально найденными вращательными постоянными и вращательными постоянными, рассчитанными вариацией структурных постоянных (табл. 2).

Предложенная методика расчета вероятной структуры проверялась на молекулах класса $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{X}$, структурные параметры которых ранее были определены методом последовательных изотопических замещений. Полученные структурные параметры этих молекул приводятся в табл. 3 вместе с параметрами, определенными вариацией структурных параметров и найденными изотопическими замещениями r_0 - и r_s -структуры. Как видно из таблицы, полученные структурные параметры оказываются более близкими к параметрам r_0 - и r_s -струк-

Таблица 2

Координаты центра тяжести в (Å) и угол поворота* осей для молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{X}$

	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$			$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$			$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br}$		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
x_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y_0	0,5360	0,5342	0,5466	0,9277	0,9242	0,9233	1,3400	1,3286	1,3213
z_0	0,3051	0,3080	0,3095	0,0280	0,0292	0,0483	-0,3108	-0,2875	-0,2473
θ	28°55'	32°42'	31°50'	42°58'	42°48'	42°30'	44°42'	47°25'	46°50'

* I—найденные из изотопических замещений [7,10,11].
 II—определенные минимизацией разности между экспериментальными и рассчитанными A, B, C [2—5].
 III—взяты из литературы [6].

тур, чем найденные в вышеуказанных [работах вариацией структурных параметров.

Особенно следует отметить то, что значение $r_{\text{C-S}}$ для молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$ получается более приемлемым по сравнению со значением, найденным в работе [7], которое не укладывается в ряд 1,526 Å; 1,524 Å; 1,533 Å; 1,518 Å; 1,520 Å молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_3$ [8], $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ [9], $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$ [7], $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$ [10], $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br}$ [11], как это указывалось нами [12].

Таблица 3

Структура* молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{X}$

	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$			$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Cl}$			$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{Br}$		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
$r(\text{C}-\text{C})$ Å	1,533	1,540	1,523	1,520	1,5495	1,530	1,518	1,5495	1,522
$\angle \text{CCX}$	109°27'	109°28'	108°48'	111°02'	110°30'	111°30'	111°02'	110°30'	111°27'
$r(\text{C}-\text{X})$ Å	1,379	1,375	1,378	1,788	1,7785	1,791	1,950	1,940	1,946
$r(\text{C}-\text{H}_{1,2,3})$ Å	1,084	1,091	1,100	1,089	1,101	1,065	1,087	1,110	1,081
$r(\text{C}-\text{H}_{4,5})$ Å	1,092	1,091	1,110	1,091	1,101	1,068	1,093	1,110	1,084
$\angle \text{CSH}$	111°17'	109°28'	109°59'	111°36'	111°53'	110°55'	112°15'	110°9'	111°50'

* I—найденные из изотопических замещений [7,10,11].
 II—определенные минимизацией разности между экспериментальными и рассчитанными A, B, C [2—5].
 III—найденные по предложенному методу.

Относительно большее значение $r_{\text{C-S}}$ у молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{F}$ в работе [7] получалось за счет того, что из-за малости координаты одного из атомов углерода авторы поместили его в центре тяжести. В работе [13] уточнено значение этого межатомного расстояния. Величина $r_{\text{C-S}} = 1,520$ Å действительно оказывается меньше, чем в работе [7], и более близкой к полученной в настоящей работе ($r_{\text{C-S}} = 1,523$ Å).

Таблица 4

Координаты атомов (Å) молекулы этилмеркаптана

	a	b	c
$\text{H}_{1,2}$	0,6813	-1,3069	$\pm 0,8901$
H_3	2,6728	-0,1222	0
$\text{H}_{4,5}$	1,679	0,9932	$\pm 0,8901$
H_6	-1,7889	-0,9378	0
C_1	1,6927	0,3760	0
C_2	0,5892	-0,6842	0
S	-1,0284	0,1806	

Таблица 5

Структурные параметры молекулы этилмеркаптана

$r(\text{C}-\text{H}_{1,2,3})$	1,090 Å
$r(\text{C}-\text{H}_{4,5})$	1,093 Å
$r(\text{C}-\text{C})$	1,530 Å
$r(\text{C}-\text{S})$	1,829 Å
$r(\text{S}-\text{H})$	1,350 Å
$\angle \text{CC H}_{1,2,3}$	109°34'
$\angle \text{CC H}_{4,5}$	109°42'
$\angle \text{CC S}$	108°26'
$\angle \text{CSH}$	96°26'

Используя предложенную методику, мы определили структуру молекулы этилмеркаптана. Определив координаты атома серы замещением ^{32}S на ^{34}S из уравнений (1), принимая $r_{\text{S-H}} = 1,335$ Å и $\angle \text{CSH} = 96°30'$ такими же, как молекулы метилмеркаптана [14], и считая углы HCH тетраэдрическими, в той же последовательности рассчитаны координаты атомов водорода в главной системе координат (табл. 4). Структурные параметры молекулы этилмеркаптана (табл. 5), определенные по этим координатам, оказываются близкими к ожидаемым из анализа данных работ [14] и табл. 3.

Таблица 6

Главные моменты инерции и вращательные постоянные $\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$ и $\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$

Вращательные параметры	$\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$		$\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$	
	эксперим.	рассчитан.	эксперимен.	рассчитан.
A (Mg)	28 416,5	28 483,6	28 329,5	28 396,1
B	5 485,6	5 485,5	5 566,4	5 566,2
C	4 881,7	4 883,6	4 784,5	4 786,3
I_a (а.е. массы Å ²)	17,7900	17,7481	17,8447	17,8028
I_b	92,1560	92,1576	94,2030	94,2055
I_c	103,5563	103,5161	105,6581	105,6188

Сравнение экспериментально полученных вращательных постоянных и моментов инерции с рассчитанными по этой структуре показывает хорошее согласие как для молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$, так и для $\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$ (табл. 6).

ЛИТЕРАТУРА

- Kraitchman J. Am. J. Phys. 21, 17 (1953).
- Wagner R. S. and Dailey B. P. J. Chem. Phys. 26, 1588 (1957).
- Wagner R. S., Dailey B. P. and Solimine N. J. J. Chem. Phys. 26, 1593 (1957).
- Барчуков А. И., Мурина Т. М. и Прохоров А. М. „Оптика и спектроскопия“, 4, 521 (1958).
- Kraitchman J. and Dailey B. P. J. Chem. Phys. 23, 184 (1955).
- Волькенштейн М. В. Строение и физические свойства молекул. ИАН СССР. М.—Л., 1955.
- Bak B., Detoni S., Hansen-Nygard L., Tormad Nielsen J. and Rastup-Andersen R. Spectrochim Acta, 16, 376 (1960).

8. Lide D. R. J. Chem. Phys. 33, 1524 (1960).
9. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 3, 33 (1967).
10. Schvendeman R. H. and Jacobs G. P. J. Chem. Phys., 36, 1245 (1962).
11. Flandgan C., Pierce L. J. Chem. Phys., 38, 2963 (1963).
12. Каджар Ч. О., Исаев И. Дж., Иманов Л. М. „Ж. структ. химии“, 9, № 3, 445 (1968).
13. Tipton A. B., Britt C. O., Boggs J. F. J. Chem. Phys., 46, 1606 (1967).
14. Kojima T. J. Phys. soc. Japan, 15, 1281 (1960).

Поступило 4. III 1969

Ч. О. Гачар, А. Э. Аббасов, Л. М. Иманов

Молекулларын мүмкүн ола билэн гурулуш параметрлеринин
тә'јин едилмәси методу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бир груп молекулларын гурулуш параметрлерини тә'јин етмәк үчүн садә үсул тәклиф едилмишдир. Ағыр атомларын координатлары Крајчман тәнликлериндән тапылмышдыр. Гидроген атомларынын координатларыны тә'јин етмәк үчүн мә'лум параметр-ләрден истифадә олунамушдур.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 3

Г. Х. АЖДАРОВ, В. И. ТАГИРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЛЕГИРОВАННЫХ ЦИНКОМ СПЛАВОВ ГЕРМАНИЙ—КРЕМНИЙ

Исследование электрических свойств легированных цинком сплавов германия с кремнием привлекает внимание в связи с тем, что благодаря расположению своих энергетических уровней в запрещенной зоне кристалла цинк является подходящей примесью для создания полупроводниковых приборов из этого материала. Однако интенсивное испарение цинка при температуре плавления сплавов германий—кремний сильно затрудняет их легирование цинком. Поэтому, прежде чем изложить результаты исследований электрических свойств, вкратце остановимся на методике легирования цинком сплавов германий—кремний осуществленной в настоящей работе.

При выращивании монокристаллов системы германий—кремний вытягиванием из расплава [1] не удается вводить цинк в кристаллы в количестве, превышающем концентрацию посторонних примесей. Удовлетворительным методом легирования оказалась зонная кристаллизация, хотя при этом методе довольно трудно выращивать монокристаллы системы германий—кремний.

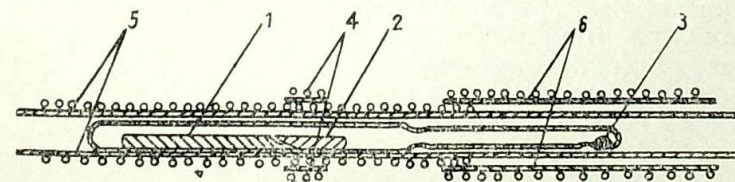


Рис. 1. Схема зонной плавки для выращивания легированных цинком кристаллов германий—кремний. 1—слиток сплавов германий—кремний; 2—монокристаллическая затравка германия; 3—источник цинка 4, 5, 6—нагреватели.

На рис. 1 представлена схема установки для выращивания легированных цинком монокристаллов германий—кремний. Слиток сплава германий—кремний (1) желаемого состава размещается в горизонтальной ампуле, в одном конце которой имеется резервуар для цинка (3). К слитку прилагается монокристаллическая затравка из германия (2). В месте соприкосновения концы слитка и затравки имеют клинообразную форму. Это позволяет в начале зонной плавки плавно увеличивать концентрацию кремния в выращенном кристалле от нуля до желаемого значения, которое в дальнейшем остается неизменным. Температурный режим устанавливается при помощи трех нагревателей, мощности которых регулируются независимо друг от друга. Нагреватель (6) служит для создания определенного давления цинка в

предварительно эвакуированном рабочем объеме, нагреватели (4) и (5), соответственно, служат для расплавления зоны и предотвращения конденсации цинка на стенках контейнера. Расплавленная зона первоначально создавалась в близком к слитку участке затравки, а затем передвигалась в направлении слитка со скоростью 1–2 мм/час. Из полученных кристаллов в поперечном направлении вырезались образцы размером $10 \times 2 \times 1$ мм³.

Электрические свойства сплавов германий—кремний, легированных цинком, определялись обычным компенсационным методом. Измерения проводились в интервале $77 \div 450^\circ\text{K}$.

На рис. 2 показана температурная зависимость электропроводности легированных цинком кристаллов, содержащих различные концентрации кремния. Поскольку изменение электропроводности существенно зависит от подвижности носителей тока, то из рис. 2 трудно представить роль

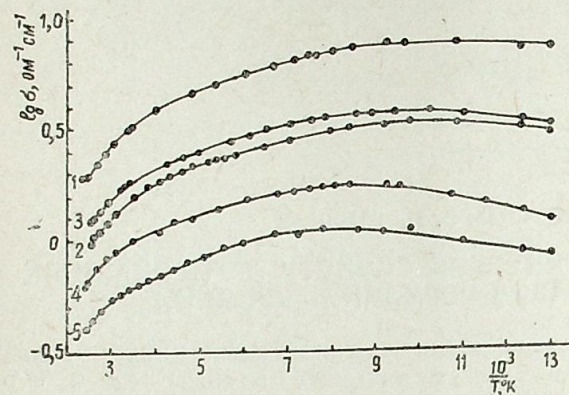


Рис. 2. Температурная зависимость электропроводности легированных цинком сплавов германий—кремний для различных составов
1—1,0 ат. % Si; 2—6,0 ат. % Si; 3—8,0 ат. % Si; 4—11,5 ат. % Si; 5—15,0 ат. % Si.

отдельных энергетических уровней цинка в электропроводности кристалла. Температурная зависимость концентрации носителей тока легированного цинком сплава, содержащего 15 ат. % кремния, характерная для всех составов сплава, представлена на рис. 3. При температурах, близких к точке кипения жидкого азота, проводимость кристалла обусловлена мелкими акцепторными уровнями, расположенными ниже первого уровня цинка. С повышением температуры начинается переход электронов из валентной зоны в первый акцепторный уровень цинка, который продолжается до его полного заполнения,

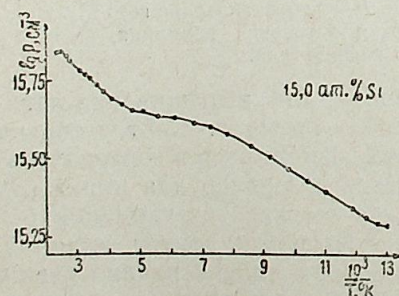


Рис. 3. Температурная зависимость концентрации носителей тока (дырок) легированного цинком сплава германий—кремний, содержащего 15 ат. % кремния.

после чего наблюдается насыщение концентрации носителей тока. Дальнейшее повышение температуры приводит к переходу электронов и во второй акцепторный уровень, который тоже заполняется при более высоких температурах.

Таким образом, в температурном интервале, где работает первый уровень цинка, его второй уровень не может оказать заметного влияния на характеристики кристалла. А когда работает второй уровень, первый уровень всегда вносит свой вклад в характеристики кристалла, для исключения которого нужно дополнительно легировать кристалл примесью *n*-типа так, чтобы она компенсировала первый уровень цинка полностью, а второй либо не компенсировала бы совсем, либо только частично.

Вычисленные нами значения энергии активации цинка в сплаве германий—кремний, содержащем 15 ат. % Si, равны $\epsilon_1 = 0,06$ и $\epsilon_2 = 0,185$ эв, тогда как для германия $\epsilon_1 = 0,03$ и $\epsilon_2 = 0,09$ эв [2, 3]. Отсюда видно, что легирование сплавов германий—кремний цинком дает возможность получить полупроводниковый материал с широким диапазоном характеристик.

На рис. 4 показана температурная зависимость холловской подвижности дырок для различных составов сплава. В интервале $180 \div 450^\circ\text{K}$ подвижность дырок в логарифмическом масштабе линейно зависит от температуры. Наклон этих зависимостей не чувствителен к изменению состава сплава. В интервале $180 \div 450^\circ\text{K}$ для всех составов сплава холловская подвижность дырок от температуры изменяется как $\mu_p \sim T^{-1,6}$.

Кроме того, с повышением концентрации кремния в сплаве подвижность дырок уменьшается. Это показывает, что в указанном температурном интервале рассеяние носителей тока на беспорядках сплава играет существенную роль. С понижением температуры доля рассеяния носителей тока на ионизированных примесях увеличивается, что приводит к отклонению от линейной зависимости ниже 180°K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Таиров С. И., Тагиров В. И., Шахтактинский М. Г., Вигдорич В. Н., Кулиев А. А. „ДАН СССР, серия химич.“, 176, 4, 851, 1967.
2. Tyler W. W., Woodbury H. H., Phys. rev., 102, 3, 649, 1956.
3. Borrello S. R., Levinstein H. J. Appl. phys., 33, 10, 2946, 1962.

Поступило 12. III 1969

Н. Х. Эждаров, В. И. Таиров

Синклэ ашгарланмыш керманиум-силисиум
бэрк мэхлулланын elektrik хассэлэринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә золагәртмә үсүлү илә керманиум-силисиум бэрк мэхлулланын синклэ ашгарланмасы вә һәмин кристалларын elektrik хассэлэринин тэдгигиндән алынан нәтичәләр шәрһ едилмишдир. Дахилиндә 15ат% силисиум олан мэхлулда синк ашгарынын јаратдығы биринчи вә икинчи аксептор сәвијјәләри үчүн $E_1 = 0,06$ эв вә $E_2 = 0,185$ эв-дир.

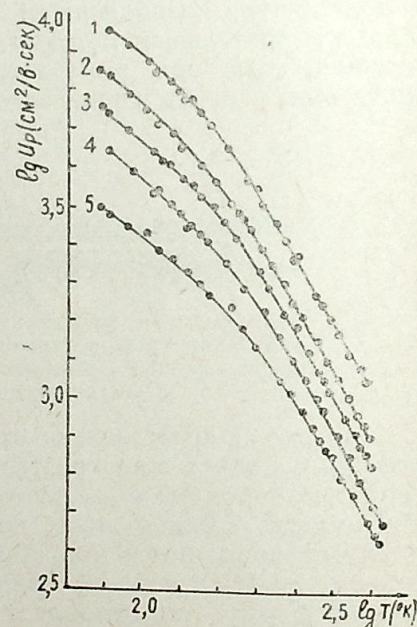


Рис. 4. Температурная зависимость подвижности дырок сплавов германий—кремний, легированных цинком: 1—1,0 ат. % Si; 2—6,0 ат. % Si; 3—8,0 ат. % Si; 4—11,5 ат. % Si; 5—15,0 ат. % Si.

Ч. О. КАДЖАР, Г. А. АБДУЛЛАЕВ, Л. М. ИМАНОВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ СПЕКТР, СТРУКТУРА И ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ МОЛЕКУЛЫ ПРОПАРГИЛОВОГО СПИРТА

Продолжая радиоспектроскопическое исследование спиртов [1] и меркаптанов [2], мы попутно изучали микроволновый вращательный спектр молекулы пропаргилового спирта HCCH_2OH , структура и дипольный момент которой до сих пор точно не определены.

В диапазоне 13,0—33,5 т. Мгц было записано около пятисот спектральных линий, особое внимание среди которых привлекала серия интенсивных линий с эффектом Штарка первого порядка, похожих на линии внутреннего заторможенного вращения метилового спирта. Другая серия линий была идентифицирована по характерному эффекту Штарка и отнесена к переходам, связанным с μ_a составляющей дипольного момента (табл.). Вращательные постоянные $B=4700,5$ Мгц и $C=4232,1$ Мгц были определены из переходов $1_{10}-2_{11}$ и $1_{11}-2_{12}$.

Переходы	Ч а с т о т ы		Переходы	Ч а с т о т ы	
	измер.	расч.		измер.	расч.
$1_{11}-2_{12}$	17 396,7	17 396,8	$2_{02}-3_{03}$	26 774,9	26 774,8
$1_{01}-2_{02}$	17 859,5	17 859,4	$2_{21}-3_{22}$	26 798,0	26 797,8
$1_{10}-2_{11}$	18 333,7	18 333,6	$2_{20}-3_{21}$	26 820,9	26 820,9
$2_{12}-3_{13}$	26 091,9	26 991,6	$2_{11}-3_{12}$	27 496,4	27 496,9

Переходы, относящиеся к двум другим составляющим дипольного момента, не были обнаружены и поэтому точное значение вращательной постоянной A определить не удалось. Несмотря на это, была сделана попытка оценки дипольного момента. Дипольный момент определялся по величине смещения штарковских компонент $M=1,2$ переходов $2_{11}-3_{12}$ и $2_{12}-3_{13}$ для набора вращательных постоянных A от 30000 до 34500 Мгц. При этом составляющая дипольного момента по оси наименьшего момента инерции μ_a изменялась от 1,01 до 0,98 D , максимальные значения двух других составляющих были: $\mu_b=0,516 D$, $\mu_c=0,177 D$.

Близкое к нулю значение μ_c указывает на то, что гидроксильная группа должна лежать либо в плоскости симметрии молекулы, либо составлять с ней небольшой угол. Если дипольный момент группы $\text{H}-\text{C}\equiv\text{C}-\text{C}$ считать направленным от ординарной связи к тройной и

считать, что общий дипольный момент можно представить в виде векторной суммы отдельных связей, то такое распределение составляющих дипольного момента и заниженный общий дипольный момент получаются только для формы, близкой к затененной. Для определения вращательной постоянной A и угла поворота группы OH относительно оси $\text{C}-\text{O}$ необходимо исследовать изотопически замещенные образцы этой молекулы. Из настоящей же работы можно сделать выводы, что молекула находится либо в цис-форме ($180^\circ \text{O}-\text{H}$), либо в деформированной гош-форме; вращательная постоянная A должна быть в пределах $33500 \div 33800$ Мгц, а составляющая дипольного момента $\mu_a=0,99 \pm 0,04 D$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967, № 3, 4.
2. Каджар Ч. О., Аббасов А. А., Иманов Л. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 5.

Поступило 16. I 1969

Ч. О. Гачар, Г. А. Абдуллаев, Л. М. Иманов

Пропаркил спирти молекулунун микродалгадакы спектри, гурулушу вә дипол моменти

ХҮЛАСӘ

17,0—33,5 мГц тезлик диапознунда пропаркил спирти молекулунун микродалгадакы спектри тәдгиг олушмушдур. Молекулун әсас һалы үчүн фырланма сабитләринин гүмәти тапылмышдыр: $B=4700,5$ м/һс, $C=4232,1$ м/һс. Дипол моментинин a оху үзрә компонентинин $\mu_a=0,99 \pm 0,04 D$ олдуғу мүәјјән едилмишдир.

Р. Г. ФАРАДЖЕВ, В. И. ДОЦЕНКО

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Решение многих вопросов современной автоматики, науки и техники сводится к определению характеристик управляемых объектов, т. е. к проблеме идентификации. В случае, когда исследуемый объект обладает существенной инерционностью, возникает необходимость в определении не только статических, но и динамических характеристик. С другой стороны, знание динамических характеристик важно не только для систем управления, но также и для построения оптимизирующих и адаптивных систем управления [1].

Как известно, в основе любого метода идентификации лежит анализ реакции системы на определенные типовые воздействия. В зависимости от того, является ли воздействие детерминированным или вероятностным, динамические характеристики линейных систем определяются при помощи детерминистских и вероятностных методов. Хотя статистические методы определения динамических характеристик, основанные на применении корреляционного анализа, имеют ряд достоинств по сравнению с другими экспериментальными методами, тем не менее приходится констатировать, что при практическом использовании этих методов встречаются некоторые трудности, главные из которых заключаются в следующем [2—4]: построение генераторов тестовых случайных сигналов относительно трудоемко; выполнение операции умножения двух сигналов—входного и выходного довольно сложно; теоретически требуется неограниченное время усреднения, тогда как практически оно ограничено каким-то значением, что приводит к ошибке. Кроме того, согласно корреляционному методу, динамические характеристики могут быть получены в виде весовой функции только тогда, когда входным испытательным сигналом является „белый шум“.

Для определения всех этих трудностей с недавнего времени стали пользоваться так называемыми псевдослучайными числами. Важным классом таких тест-сигналов являются M -последовательности, об основных свойствах которых будет сказано ниже.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА M -ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Упомянутые выше M -последовательности порождаются специальными классами автономных линейных последовательностных машин (ЛПМ) над полем $GF(2)$. Работа двоичной автономной ЛПМ в наибо-

лее общем виде описывается однородным разностным уравнением вида

$$x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{m-1} x[n-m+1] + x[n-m] = 0, GF(2) \quad (1)$$

где $a_i \in GF(2)$, а символ $+$ означает суммирование по $mod 2$, m —порядок ЛПМ.

Каждому нетривиальному двоичному начальному условию $\{x[-1], x[2], \dots, x[-m]\}$ по рекуррентному соотношению (1) ставится в соответствие некоторая периодическая решетчатая функция, получившая название нулевой последовательности (НП). Очевидно, число таких НП равно $2^m - 1$ и период M не превышает целого числа $2^m - 1$, т. е. всегда $M \leq 2^m - 1$. В случае, если $M = 2^m - 1$, такие НП называются НП максимальной длины или M -последовательностями [5—6]. Для анализа свойства M -последовательностей может быть применен весь тот аппарат, который развит в работах [7—9]. Здесь упомянем лишь некоторые из свойств, которые понадобятся для дальнейшего изложения поставленной выше задачи идентификации.

Свойство сложения. Сумма двух M -последовательностей данной автономной ЛПМ является также M -последовательностью этой ЛПМ. Это свойство следует из факта, что M -последовательности являются решениями линейного по операциям $(GF(2))$ однородного уравнения (1).

Свойство сдвига. Множество M -последовательностей исходной автономной ЛПМ замкнуто относительно фазового сдвига. Действительно, любая M -последовательность уравнения (2) задается формулой:

$$x[n] = \sum_{v=0}^{m-1} c_v \cdot \varepsilon^{2^v n}, GF(2^m), \quad (2)$$

здесь все вычисления ведутся над расширением поля $GF(2)$, т. е. $GF(2^m)$, а $\alpha_v = \varepsilon^{2^v}$ ($v = 0, 1, \dots, m-1$) есть простые корни примитивного многочлена

$$P^*(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + 1, GF(2); \quad (3)$$

при сдвиге $\mp \tau$

$$x[n \pm \tau] = \sum_{v=0}^{m-1} c'_v \cdot \varepsilon^{2^v n}, GF(2^m), \quad (4)$$

где $c'_v = c_v \cdot \varepsilon^{\mp 2^v \tau}$, $GF(2^m)$,

$$v = 0, 1, \dots, m-1.$$

Теперь периодичность $x[n \pm \tau]$ из (4) с периодом $2^m - 1$ очевидна, так как α_v есть примитивные циклические элементы поля $GF(2)$.

С другой стороны, коэффициенты c_v , как и c_v , могут быть выбраны всего $2^m - 1$ способами, кроме того, $x[n \pm \tau]$ из (4) удовлетворяет соотношению (1). Последнее доказывается очевидным образом. Это свойство позволяет все M -последовательности данной ЛПМ получить лишь из одной, осуществляя при этом сдвиг исходной последовательности на $\tau = 1, 2, \dots, 2^m - 2$. Свойства сложения сдвига M -последовательностей напоминают об аналогичных свойствах стационарных шумовых последовательностей. Это становится понятным также при определении корреляционной функции M -последовательностей.

Свойство „вероятности“. Определим автокорреляционную функцию M -последовательности следующим образом:

$$R_{xx}[\tau] = \frac{\sum_{n=-N}^N x[n] x[n+\tau]}{2N+1},$$

$$\text{где } N = \frac{M-1}{2} = 2^{m-1} - 1.$$

Тогда $R_{xx}[\tau]$ определяет собой периодическую решетчатую функцию аргумента τ , принимающую значение $N + 1/(2N+1)$ в точках $\tau = rM$ и значение $N + 1/(2N+1)$ во всех остальных точках.

Если в M -последовательности заменить нули на -1 , то для полученной таким образом последовательности $x'[n] \in \{-1, 1\}$ будем иметь:

$$R_{x'x'}[0] = 1, R_{x'x'}[\varepsilon] = -\frac{1}{2N+1} \text{ при } \varepsilon \neq rM.$$

Очевидно, в качестве генераторов таких M -последовательностей могут быть употреблены любые автономные ЛПМ. Например, регистр сдвига логической операции сложение по mod^2 в цепи обратной связи.

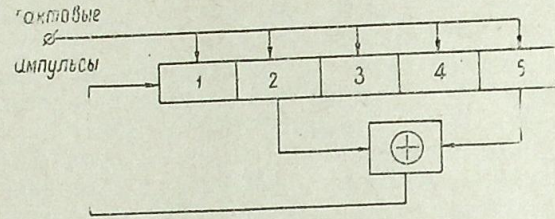


Рис. 1

Так, на рис. 1 представлена структурная схема регистра сдвига, представляющего собой автономную ЛПМ с характеристическим многочленом $z^5 + z^2 + 1$. На рис. 2(а), для этого случая изображена M -последовательность $x^k[n]$ и ее автокорреляционная функция $R_{xx}[\tau]$, а на рис. 2(б)—последовательность $x'[n]$ и $R_{x'x'}[\tau]$.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ M -ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Рассмотрим некоторые вопросы применения M -последовательностей для идентификации линейных объектов автоматического управления. Сигнал, снимаемый с упомянутого выше регистра сдвига (автономная ЛПМ), представляет M -последовательность, в которой осуществляется запоминание ее значений в интервале между тактами. Такие сигналы в отличие от M -последовательностей будем в дальнейшем именовать псевдослучайными двоичными сигналами (ПСДС). На рис. 3 изображена M -последовательность и соответствующий ей ПСДС для характеристического полинома $z^5 + z^2 + 1$. ПСДС, пропущенное через формирующее устройство, будет иметь вид, изображенный на рис. 4(а), а соответствующие ему автокорреляционная функция и спектральная плотность изображены на рис. 4(б, в). Спектральные и корреляционные свойства ПСДС таковы, что позволяют в некотором диапазоне частот рассматривать его как „белый шум“. Последнее обстоятельство и явилось основной причиной применения ПСДС в качестве испытательного сигнала.

Если исследуемый объект характеризуется высоким уровнем шумов, то в таких случаях используют корреляционные методы определения динамических характеристик. Так, из интегрального уравнения Винера—Хопфа следует:

$$R_{xy}[\tau] = \int_0^\infty \kappa(t) R_{xx}(t - \tau) dt, \quad (7)$$

где $R_{xy}(\tau)$ —взаимокорреляционная функция выходного сигнала $x(t)$ с выходом $y(t)$, $R_{xx}(t)$ —автокорреляционная функция входного воздействия $x(t)$; $\kappa(t)$ —весовая функция объекта.

Можно найти динамическую характеристику объекта в форме весовой функции $\kappa(t)$, экспериментально определив $R_{xx}(\tau)$ и $R_{xy}(\tau)$. Если в качестве входного сигнала применить ПСДС, то его автокорреляционную функцию, рассматриваемую в пределах одного периода $M\Delta$, можно аппроксимировать в виде дельта-функции с соответству-

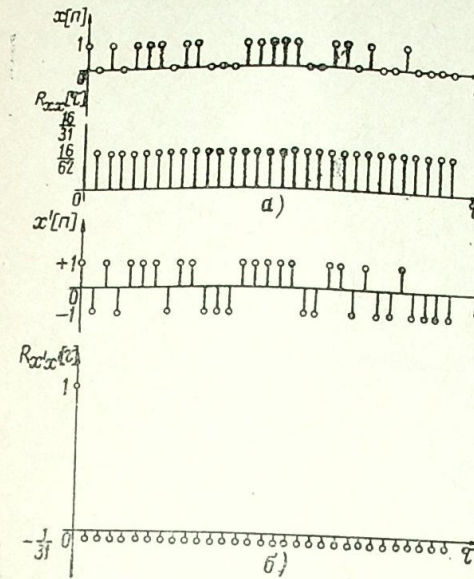


Рис. 2

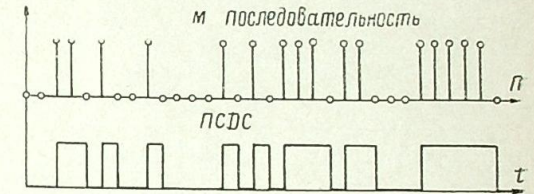


Рис. 3

ющим весом и постоянной составляющей [2]:

$$R_{xx}[\tau] = \frac{a^2 \Delta (M+1)}{M} \delta(\tau) - \frac{1}{M} a^2. \quad (8)$$

Тогда решение уравнения (7) значительно упрощается. С учетом (8) из (7) будем иметь:

$$\begin{aligned} \kappa(\tau) &= \frac{R_{xy}(\tau) + E}{a^2 \Delta \left(\frac{M+1}{M} \right)} \text{ при } \tau > 0, \\ \kappa(0) &= \frac{R_{xy}(0) + E}{a^2 \Delta (M + 1/M)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$E = \frac{a^2}{M} \int_0^{M\Delta} \kappa(\tau) d\tau; \quad (10)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{M\Delta} \int_0^{M\Delta} y(t) x(t - \tau) dt. \quad (11)$$

Указанные выше соотношения справедливы при условии, что $M\Delta \gg T_{\text{усп}}$, где $T_{\text{усп}}$ —время успокоения объекта. С учетом сказанного при больших $\tau = -R_{xy}(\tau_0)$ (в конце периода) $\kappa(\tau_0) = 0$ и из (9) получим:

$$E = -R_{xy}(\tau_0). \quad (12)$$

Таким образом, согласно (9) и (12), задача определения весовой функции $\kappa(t)$ свелась к задаче нахождения значений $R_{xy}(\tau)$. ПСДС можно складывать с установкой на входе объекта, что позволяет производить идентификацию объекта в режиме его нормальной работы.

На рис. 5 представлена блок-схема процесса идентификации линейного объекта с использованием ПСДС. Выходной сигнал объекта $y(t)$ и инвертированный $\{-y(t)\}$ подаются на интеграторы через контакторы. Процесс переключения контактов управляется сигналами $x(t - \nu\Delta)$ $\nu = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 2$. При использовании ПСДС операция

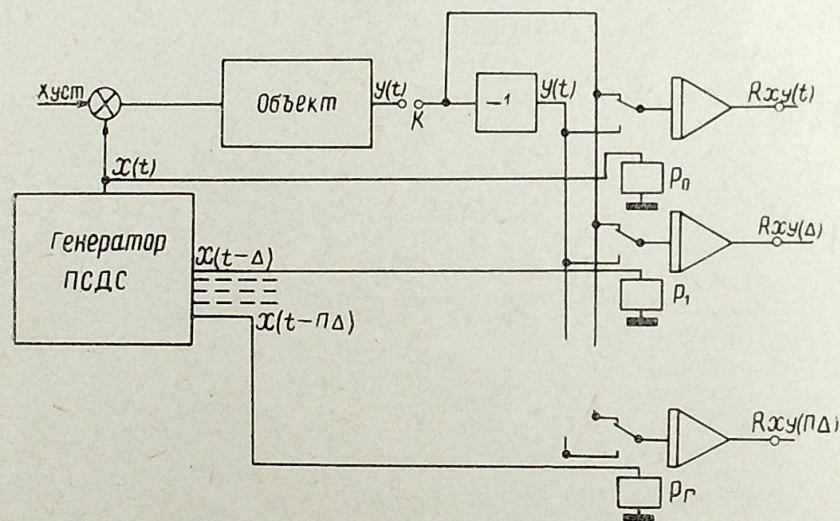
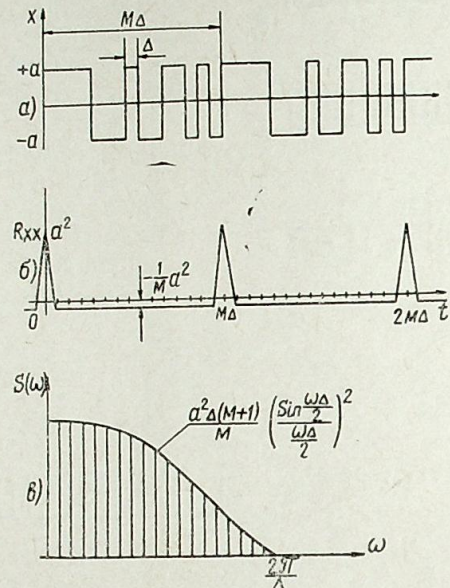


Рис. 4.

переумножения, необходимая для получения корреляционных функций, осуществляется весьма просто. После интегрирования в течение периода (или целого числа периодов) разомкнутся контакты K и на выходах интеграторов запомнятся и значения взаимокорреляционной функции выходной величины объекта ПСДС.

Полученные значения $R_{xy}(\tau)$ с учетом (9) будут определять ординаты весовой функции $k(t)$. Причем число одновременно полученных ординат равно числу имеющихся в распоряжении интеграторов. Рассмотренная блок-схема может быть взята за основу как при раз-

работке специализированного вычислительного устройства, т. е. идентификатора, так и при составлении алгоритма расчета, если в процессе эксперимента происходит регистрация данных, а их последующая обработка производится на ЦВМ. Для получения задержанных последовательностей $x[n - \tau]$, $\tau = 1, 2, \dots, 2^k - 2$ используются указанные выше свойства сдвига и сложения.

Можно также рассматривать вопросы, связанные с анализом погрешностей [4] метода идентификации с использованием ПСДС и выбором параметров ПСДС, а также идентификацию многомерных систем управления.

Заключение

Использование псевдослучайных последовательностей в задачах идентификации создает радикальные преимущества, преодолевая те трудности, которые возникают при применении известных корреляционных методов. Действительно, во-первых, генерировать их довольно легко, поскольку для этого нужны простые регистры сдвига с обратной связью (двоичные автономные ЛПМ), во-вторых, для выполнения операции умножения требуется простое реле с двумя устойчивыми состояниями, в-третьих, за время усреднения достаточно взять лишь длину периода M -последовательности. Кроме того, как было указано, в определенном частотном диапазоне эти последовательности ведут себя как «белый шум», что позволяет найти характеристику исследуемого объекта в виде весовой функции.

Развитая методика может явиться основой для составления как алгоритмов расчета и оценки характеристик системы, так и для создания специализированного вычислительного устройства, т. е. идентификатора. Полученные результаты нетрудно распространить и на случай многомерных как непрерывных, так и дискретных систем управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. Изд-во «Наука», 1968.
2. Izawa and Furuta, Simultaneous identification of multiple input and output systems Preprint IFAC. Tokyo Symposium on Systems Engineering for Control Systems Design.
3. Briggs P. A. N., Hammond P. H., et al. Correlation Analysis of Process Dynamics Using Pseudo-Random Binary Test Perturbation, Proc. Inst. Mec. Eng. 1964-1965, 179, p. 37.
4. Cummins J. D. A note on errors and Signal to noise ratio of binary cross correlation measurements of systems impulse response. Automatic Energy Establishment Winfrith, Report 329.
5. Davies W. D. T. Generation and properties of maximum-length sequences, Control August, 1966.
6. Цирлер Н. Линейные возвратные последовательности. Кибернетический сб. вып. 6. М., 1963.
7. Цыпкин Я. З., Фараджев Р. Г. «ДАН СССР», т. 166, 1966, № 3.
8. Фараджев Р. Г. «Изв. АН СССР, серия технич. кибернетика», 1965, № 5.
9. Фараджев Р. Г. «Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук», 1969, № 1.

Поступило 17. X 1968

Р. Н. Фарэзов, В. Н. Доссенко

Псевдотэсадүфи ардычыллыгын тэтбиги илэ идарэетмэ системинин идентификасиясы

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә хәтти ардычыллыг машинлары нәзәријјәсинә әсасән, хәтти идарәетмә системи үчүн идентификасия мәсәләсинин һәллин-дән өтрү алгоритм тәклиф олунмушдур. Бу алгоритмин автоматик

идарәетмә системләриндә тәтбиги үчүн јени блок-схем гурулмуш вә бу схемин индијә гәдәр мөвчуд идентификасија схемләриндән мүәјјән үстүнлүјү гејд едилмишдир.

Тәклиф едилән идентификасија үсулуна әсасән јени хусусиләшмиш һесаблама гурғусу (идентификатор) гурмаг олар.

УДК 517.948:513.88

С. Я. ЯКУБОВ и Л. Ш. АБДУЛКЕРИМОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. В комплексном банаховом пространстве E рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\left. \begin{aligned} u^{(n)}(t) + A(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) u^{(n-1)}(t) &= \\ &= f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) \quad (0 < t \leq T), \\ u^{(k)}(0) &= u_k \quad (k = 0, n-1), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где линейный неограниченный оператор $A(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ действует в E при каждом $t \in [0, T]$ и некоторых $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ из E .

Функцию $u(t)$ будем называть решением на $[0, T]$ задачи (1), если она $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, n раз непрерывно дифференцируема на $(0, T]$, удовлетворяет уравнению на $(0, T]$, начальным условиям и обладает, кроме того, тем свойством, что функции

$$A(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) u^{(n-1)}(t), f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$$

непрерывны на $(0, T]$.

Пусть $A_0 = A(0, u_0, \dots, u_{n-1})$.

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1°. замкнутый линейный оператор A_0 имеет всюду плотную область определения $D(A)$, причем при всех $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ имеет место неравенство

$$\|R(\lambda; -A_0)\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1};$$

2°. при любых

$$t \in [0, T] \text{ и } v_0, \dots, v_{n-2} \in D(A), v_{n-1} \in D(A_0^\alpha)$$

таких, что

$$\|A_0 v_i\| \leq R(i = 0, n-2), \|A_0^\alpha v_{n-1}\| \leq R,$$

где R — некоторое положительное число, замкнутый линейный оператор $A(t, v_0, \dots, v_{n-1})$ имеет область определения $D(A)$ при некотором $\alpha \in [0, 1]$;

3°. при любых

$$t, \tau \in [0, T] \text{ и } v_0, \dots, v_{n-2}, w_0, \dots, w_{n-2} \in D(A),$$

$$v_{n-1}, w_{n-1} \in D(A_0^\alpha)$$

таких, что

$$\|A_0 v_i\|, \|A_0 w_i\| \leq R, \|A_0^\alpha v_{n-1}\|, \|A_0^\alpha w_{n-1}\| \leq R,$$

имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} & \| [A(t, v_0, \dots, v_{n-1}) - A(\tau, w_0, \dots, w_{n-1})] A_0^{-1} \| \leq \\ & \leq C(R) \left[|t - \tau|^\varepsilon + \sum_{k=0}^{n-2} \|A_0(v_k - w_k)\| + \|A_0^\alpha(v_{n-1} - w_{n-1})\| \right], \\ & \|f(t, v_0, \dots, v_{n-1}) - f(\tau, w_0, \dots, w_{n-1})\| \leq \\ & \leq C(R) \left[|t - \tau|^\varepsilon + \sum_{k=0}^{n-2} \|A_0(v_k - w_k)\| + \|A_0^\alpha(v_{n-1} - w_{n-1})\| \right]; \end{aligned}$$

4°. $u_i \in D(A)$ ($i = 0, n-2$), $u_{n-1} \in D(A_0^\beta)$ при некотором $\beta > \alpha$ и $\|A_0 u_i\|, \|A_0^\alpha u_{n-1}\| < R$.

Тогда существует единственное решение задачи (1) на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение задачи (1) на $[0, T]$. Тогда вектор-функция $v(t) = (v_1(t), \dots, v_{n-1}(t), v_n(t))$, где

$$v_1(t) = A_0 u(t), \dots, v_{n-1}(t) = A_0 u^{n-2}(t), v_n(t) = u^{(n-1)}(t), \quad (2)$$

является решением следующей задачи Коши:

$$v'(t) + A(t, v(t)) v(t) = F(t, v(t)), \quad v(0) = v_0 \quad (3)$$

в топологическом произведении $E^n = E \times \dots \times E$, где

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t, v) = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & -A_0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B(t, v) \end{pmatrix},$$

$$B(t, v) = A(t, A_0^{-1} v_1, \dots, A_0^{-1} v_{n-1}, u_n),$$

$$F(t, v) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ f(t, A_0^{-1} v_1, \dots, A_0^{-1} v_{n-1}, v_n) \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} A_0 u_0 \\ \vdots \\ A_0 u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Легко доказывается и обратное утверждение. Покажем, что к задаче (3) применимы результаты работы [1]. Очевидно, $D(A(t, v)) = D(A) = E \times \dots \times E \times D(A)$ плотно в E^n . С другой стороны, если обозначить $A_0 = A(0, v_0)$, то из формулы

$$R(\lambda; -A_0) = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (\lambda + 1)^{-1} & (\lambda + 1)^{-1} A_0 R(\lambda; -A_0) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R(\lambda; -A_0) \end{pmatrix}$$

при всех $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ следует неравенство

$$\|R(\lambda; -A_0)\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1}.$$

Далее в силу

$$A_0^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} R(\lambda; -A_0) d\lambda$$

(см. [2]) получаем

$$A_0^{-\alpha} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & K_\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_0^{-\alpha} \end{pmatrix},$$

где K_α — некоторый ограниченный оператор. Отсюда вытекает

$$A(t, A_0^{-\alpha} v) A_0^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C(t, v) A_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$C(t, v) = A(t, A_0^{-1} v_1, A_0^{-1} v_2, \dots, A_0^{-1} [v_{n-1} - v_n], A_0^{-1} v_n).$$

Кроме того,

$$F(t, A_0^{-\alpha} v) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_2 + v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} - K_\alpha v_n \\ f(t, A_0^{-1} v_1, A_0^{-1} v_2, \dots, A_0^{-1} [v_{n-1} - K_\alpha v_n], A_0^{-\alpha} v_n) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) в силу условий 2°, 3°, следует, что существует число R_1 такое, что при всех $t, \tau \in [0, T]$, $v, w \in E^n$ с $\|v\|_{E^n}, \|w\|_{E^n} \leq R_1$ имеют место неравенства:

$$\| [A(t, A_0^{-\alpha} v) - A(\tau, A_0^{-\alpha} w)] A_0^{-1} \| \leq C(R_1) [|t - \tau|^\varepsilon + \|v - w\|],$$

$$\|F(t, A_0^{-\alpha} v) - F(\tau, A_0^{-\alpha} w)\| \leq C(R_1) [|t - \tau|^\varepsilon + \|v - w\|].$$

Значит в силу [1] задача (1) имеет единственное решение на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

2. В ограниченном цилиндре $Q = [0, T] \times \Omega$, где Ω — ограниченная область n -мерного евклидова пространства R^n , рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^l u(t, x)}{\partial t^l} + \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_{\alpha, k} \left(t, x, u, \dots, D^{2m-1} u, \dots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}, \dots \right. \\ & \left. \dots, D^{2m-1} \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}} \right) D^\alpha \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} = \end{aligned}$$

$$= f \left(t, x, u, \dots, D^{2m-1} u, \dots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}, \dots, D^{2m-1} \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}} \right) \quad (6)$$

с граничными условиями

$$C_j(x, D) u|_\Gamma = \sum_{|\alpha| \leq m_j} C_\alpha^j(x) D^\alpha u(t, x)|_\Gamma = 0 \quad (j = \overline{1, m}; m_j \leq 2m - 1) \quad (7)$$

и начальными условиями

$$\frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = U_k(x) \quad (k = \overline{0, l-1}). \quad (8)$$

Пусть $W_p^{2m}(\Omega, C)$ — подпространство функций $W_p^{2m}(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию (7).

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1°. Функции $a_{\alpha, k}(t, x, z), f(t, x, z)$ ($z = z_1, z_2, \dots, z_s$) непрерывны по совокупности переменных в области $\{t \in [0, T], x \in \Omega, z_i \in \mathbb{R}\}$,

где Z — комплексная плоскость, причем удовлетворяют по t условию Гельдера с показателем $\varepsilon > 0$, а по z_k — условию Липшица в каждом ограниченном множестве $|z_k| \leq R$ с константой, зависящей лишь от R ;

2°. $C_a^j(x) \in C^{2m-j}(\bar{\Omega})$ имеет место неравенство

$$(-1)^m \sum_{|z| \leq 2m} a_{\alpha, l-1}(t, x, z) \xi^\alpha \geq a \sum_{i=1}^n \xi_i^{2m}, \quad a = \text{const},$$

при любом вещественном $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$;

3°. граница Γ области Ω непрерывно дифференцируема $2m$ раз и выполнено условие Шапиро — Лопатинского;

4°. $u_k(x) \in W_p^{2m}(\Omega, C)$ при некотором $p > n$.

Тогда задача (6) — (7) — (8) имеет единственное решение в некотором цилиндре $Q_0 = [0, t_0] \times \Omega$.

Доказательство. При фиксированном $t \in [0, T]$ и $v_0(x), \dots, v_{l-1}(x) \in C^{2m-1}(\bar{\Omega})$ в банаховом пространстве $L_p(\Omega)$ рассмотрим линейный оператор $A(t, v_0, \dots, v_{l-1})$, порожденный дифференциальным выражением

$$A(t, v_0, \dots, v_{l-1})u = \sum_{|z| \leq 2m} a_{\alpha, l-1}(t, x, v_0(x), \dots, D^{2m-1}v_0(x), \dots, v_{l-1}(x), \dots, D^{2m-1}v_{l-1}(x)) D^\alpha u(x) + \omega u(x) \quad (9)$$

и граничными условиями (7), где ω — некоторое фиксированное достаточно большое число.

Из работ [3, 4] в силу условий 2°, 3° следует, что $A[t, v_0, \dots, v_{l-1}]$ будет замкнутым линейным оператором в L_p и имеет место неравенства

$$\| [A(t, v_0, \dots, v_{l-1}) + \lambda I]^{-1} \| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1}, \quad (10)$$

$$\| u \|_{W_p^{2m}} \leq D \| [A(t, v_0, \dots, v_{l-1}) + \lambda I] u \|_L, \quad u \in W_p^{2m}(\Omega, C). \quad (11)$$

Так как по теореме вложения С. Л. Соболева при $p > n$ имеет место включение $W_p^{2m}(\Omega) \subset C^{2m-1}(\bar{\Omega})$, то из (10) следует, что оператор $A_0 = A(0, u_0, \dots, u_{l-1})$ в пространстве $L_p(\Omega)$ удовлетворяет условию 1° теоремы 1. Неравенство (11) показывает, что к оператору A_0^* применимы результаты [5], из которых следует, что если α достаточно близко к единице, то $D(A_0^*) \subset C^{2m-1}(\bar{\Omega})$ и

$$\| u \|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})} \leq C \| A_0^* u \|_{L_p} \quad (u \in D(A_0^*)). \quad (12)$$

Пусть $v_0, \dots, v_{l-1}, w_0, \dots, w_{l-1} \in D(A_0^*)$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \| [A(t, v_0, \dots, v_{l-1}) - A(\tau, w_0, \dots, w_{l-1})] u \|_{L_p} \leq \\ & \leq C \max |a_{\alpha, l-1}(t, x, v_0(x), \dots, D^{2m-1}v_0(x), \dots, v_{l-1}(x), \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}v_{l-1}(x)) - a_{\alpha, l-1}(\tau, x, w_0(x), \dots, D^{2m-1}w_0(x), \dots, \\ & \dots, w_{l-1}(x), \dots, D^{2m-1}w_{l-1}(x))| \| u \|_{W_p^{2m}} \end{aligned} \quad (13)$$

при любом $u \in W_p^{2m}(\Omega, C)$.

С другой стороны, в силу (12) для любых $v_0, \dots, v_{l-1}, w_0, \dots, w_{l-1} \in D(A_0^*)$ для которых $\| A_0^* v_i \| \leq R, \| A_0^* w_i \| \leq R$, имеют место неравенства

$$\| v_i \|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})} \leq C(R), \quad \| w_i \|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})} \leq C(R).$$

Тогда из условия 1 в силу (12) и (13) получаем неравенство

$$\| [A(t, v_0, \dots, v_{l-1}) - A(\tau, w_0, \dots, w_{l-1})] u \|_{L_p} \leq C(R) [|t - \tau|^\varepsilon +$$

$$\begin{aligned} & + \| v_0 - w_0 \|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})} + \dots + \| v_{l-1} - w_{l-1} \|_{C^{2m-1}(\bar{\Omega})}] \| u \|_{W_p^{2m}} \leq \\ & \leq C(R) [|t - \tau|^\varepsilon + \| A_0^*(v_0 - w_0) \|_{L_p} + \dots + \| A_0^*(v_{l-1} - \\ & \dots - w_{l-1}) \|_{L_p}] \| A_0 u \|_{L_p}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что оператор $A(t, v_0, \dots, v_{l-1})$ удовлетворяет первому пункту условий 3 теоремы 1.

Теперь рассмотрим нелинейный оператор

$$\begin{aligned} f(t, v_0, \dots, v_{l-1}) = & - \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{|z| \leq 2m} a_{\alpha, k}(x, t, v_0(x), \dots, D^{2m-1}v_0(x), \dots, \\ & \dots, v_{l-1}(x), \dots, D^{2m-1}v_{l-1}(x)) D^\alpha u_k(x) + f(t, x, v_0(x), \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}v_0(x), \dots, v_{l-1}(x), \dots, D^{2m-1}v_{l-1}(x)) + \omega v_{l-1}(x). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу условия 1 для любых $t, \tau \in [0, T]$, $v_0, \dots, v_{l-2}, w_0, \dots, w_{l-2} \in D(A_0)$, $v_{l-1}, w_{l-1} \in D(A_0^*)$, для которых $\| A_0 v_i \|, \| A_0 w_i \| \leq R$

$$(i = \overline{0, l-2}), \quad \| A_0^* v_{l-1} \| \| A_0^* w_{l-1} \| \leq R,$$

имеем

$$\begin{aligned} & \| f(t, v_0, \dots, v_{l-1}) - f(\tau, w_0, \dots, w_{l-1}) \|_{L_p} \leq \\ & \leq C \max_{x \in \bar{\Omega}} |a_{\alpha, k}(t, x, v_0, \dots, D^{2m-1}v_0, \dots, v_{l-1}, \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}v_{l-1}) - a_{\alpha, k}(\tau, x, w_0, \dots, D^{2m-1}w_0, \dots, w_{l-1}, \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}w_{l-1})| \sum_{k=0}^{l-2} \| v_k - w_k \|_{W_p^{2m}} + C \max |a_{\alpha, k}(\tau, x, w_0, \dots, D^{2m}w_0, \dots, \\ & \dots, w_{l-1}, \dots, D^{2m-1}w_{l-1})| \sum_{k=0}^{l-2} \| v_k - w_k \|_{W_p^{2m}} + C \max |f(t, x, v_0, \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}v_0, \dots, v_{l-1}, \dots, D^{2m-1}v_{l-1}) - f(\tau, x, w_0, \dots, \\ & \dots, D^{2m-1}w_0, \dots, w_{l-1}, \dots, D^{2m-1}w_{l-1})| + C \| v_{l-1} - w_{l-1} \|_{L_p} \leq \\ & \leq C(R) \left[|t - \tau|^\varepsilon + \sum_{k=0}^{l-2} \| v_k - w_k \|_{W_p^{2m}} + \| v_{l-1} - w_{l-1} \|_{C^{2m-1}} \right] \leq \\ & \leq C(R) \left[|t - \tau|^\varepsilon + \sum_{k=0}^{l-2} \| A_0(v_k - w_k) \| + \| A_0^*(v_{l-1} - w_{l-1}) \| \right]. \end{aligned}$$

Итак, оператор $f(t, v_0, \dots, v_{l-1})$, определенный равенством (14), удовлетворяет второму пункту условия 3° теоремы 1. Условие 4° теоремы 1 также выполняется, поскольку

$$u_k(x) \in D(A) \cap W_p^{2m}(\Omega, C).$$

Тогда в силу теоремы 1 абстрактная задача Коши

$$\begin{aligned} & u^{(l)}(t) + A(t, u(t), \dots, u^{(l-1)}(t)) u^{(l-1)}(t) = \\ & = f(t, u(t), \dots, u^{(l-1)}(t)) \quad u^{(k)}(0) = u_k \quad (k = \overline{0, l-1}), \end{aligned}$$

где операторы $A(t, v_0, \dots, v_{l-1})$, $f(t, v_0, \dots, v_{l-1})$ определены соответственно равенствами (9) и (14), имеет в пространстве $L_p(\Omega)$ единственное решение на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$.

Результаты данной работы при $n = 2$ получены С. Я. Якубовым и являются улучшением работы [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболевский П. Е. Тр. Московского матем. об-ва, т. 10, 1961.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
3. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., 15, 2, 119—147, 1962.
4. Agmon S. and Nirenberg L. Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space. Comm. on Pure and Appl. Math., XVI, 2, 121—239, 1963.
5. Глушко В. П. и Крейн С. Г. „ДАН СССР“. 122, 1958, № 6.
6. Абдулкеримов Л. Ш., Якубов С. Я. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 2.

Поступило 30. VIII 1968

С. Я. Якубов, Л. Ш. Абдулкеримов

Банах фэзасында јүксәктәртибли гејри-хәтти параболик тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин һәлли һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә (1) Коши мәсәләсинин һәлл олунмасы үчүн кафи шәртләр тапылмышдыр. Исбат едилмишдир ки, оператор $A_0 = A(0, u_0, \dots, u_{n-1})$ аналитик јарымгруп јаратдыгда $A(t, v_0, \dots, v_{n-1}) A_0^{-1}$ вә $(t, v_0, \dots, v_{n-1})$ операторлары мүәјјән һамарлыг шәртләрини өдәикдә (1) мәсәләсинин јеканә локал һәлли вардыр. Алынап нәтичә-әр (6)—(7)—(8) гарышыг мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији мәсәләсинә тәтбиг олунмушдур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1969, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 3

УДК 517.522.2.

А. А. ГАМИДОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ПОЛИНОМАМИ ЛАГРАНЖА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть $S_n: z_{1n}, \dots, z_{nn}$ множество n различных точек, расположенных на множестве C комплексной плоскости z , и значения функции $f(z)$ конечны в каждой точке из S_n .

Известно, что единственный полином степени не больше $n-1$, который совпадает с $f(z)$ в точках S_n , может быть записан в виде полинома Лагранжа:

$$L_n(f; z) = \sum_{k=1}^n f(z_{kn}) \rho_k(z), \quad (1)$$

где

$$\rho_k(z) = \frac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_{kn})(z - z_{kn})} \quad (2)$$

и

$$\omega_n(z) = (z - z_{1n})(z - z_{2n}) \dots (z - z_{nn}). \quad (3)$$

Вопросу равномерной сходимости полиномов $L_n(f; z)$ при различных предположениях относительно $f(z)$ и множества S_n посвящен ряд работ [1, 2]. В случае, когда $L_n(f; z)$ — полином, интерполирующий $f(z)$ в корнях степени n из единицы, сходимость $L_n(f; z)$ к $f(z)$ изучена в пространстве $L_2(C)$, если $f(z)$ аналитична внутри $C: |z|=1$, непрерывна на [3, 4]. Кроме этого, в работе [4] изучена сходимость интерполяционных полиномов $L_n(f; z)$ к функции $f(z)$ в пространстве $L_2(C)$, если $f(z)$ аналитична внутри C , непрерывна на C , а C — аналитическая кривая и S_n — множество фейерových точек.

Настоящая статья посвящена изучению сходимости в смысле нормы пространства $L_p(\gamma)$ последовательности $(L_n(f; z))$ в зависимости от природы S_n и функции $f(z)$. Пусть C — спрямляемая жорданова кривая, содержащая начало координат, и такая, что функция $w = \psi(z)$, конформно отображающая внутренность C на внутренность единичного круга $|w| \leq 1$, удовлетворяет условиям:

$$\inf_{z \in C} |\Phi'(z)| \geq d > 0; \quad \Phi(0) = 0.$$

Пусть, кроме того, $z = \varphi(w)$ — функция, обратная функции $w = \psi(z)$.

В книге Уолши [1] доказано, что если $f(z)$ непрерывна на C , то $f(z)$ может быть равномерно приближена на C полиномами от z и

$\frac{1}{z}$. В дальнейшем нам необходим аналог этого утверждения в пространстве $L_p(C)$, доказательство которого получается тем же методом, с незначительными изменениями.

Лемма. Если функция $z = \varphi(w)$ имеет ограниченную производную на $|w| = 1$, то произвольную функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию

$$\int_C |f(z)|^p |dz| < +\infty \quad (p \geq 1),$$

можно приблизить на C в смысле метрики $L_p(C)$ полиномами от z и $\frac{1}{z}$.

Допустим, что $f(z)$ удовлетворяет следующим условиям:

а)
$$\int_C |f(z)|^p |dz| < +\infty \quad (p \geq 1);$$

б) Существуют такие полиномы $P_m(z)$ и $q_m\left(\frac{1}{z}\right)$ степени m , что

$$\int_C \left| f(z) - P_m(z) - q_m\left(\frac{1}{z}\right) \right|^p |dz| < \varepsilon \quad \text{при } m \geq N \quad (4)$$

и для любых точек z_{kn} из S_p

$$\left| f(z_{kn}) - P_m(z_{kn}) - q_m\left(\frac{1}{z_{kn}}\right) \right| < \varepsilon \quad \text{при } m \geq N,$$

где $S_p: z_{1n}, \dots, z_{pn}$ — различные точки, расположенные на C . Класс функций, удовлетворяющих условиям а) и б), обозначим через $\Lambda_p(C)$.

На основании леммы и а) следует, что $P(z)$ и $q\left(\frac{1}{z}\right)$, удовлетворяющие условию (4), всегда существуют. Кроме того, если $f(z)$ непрерывна на C , то а) и б) всегда удовлетворяются. Внутренность C обозначим через D .

Теорема 1. Пусть C удовлетворяется условием леммы и $f(z) \in \Lambda_p(C)$.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} |L_n(z^{-n}; t)|^p |dt| = 0 \quad (5)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{\gamma} |\rho_k(t)|^p |dt| \right)^{1/p} \leq M < +\infty, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} |L_n(f; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{1/p} = 0, \quad (7)$$

где

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt; \quad (8)$$

γ — произвольная спрямляемая кривая, расположенная в D и M — число, не зависящее от n ,

Доказательство. Пусть $P(z)$ и $q_m\left(\frac{1}{z}\right)$ — полиномы, фигу-

рирующие в условии б). Очевидно, что если $m < n$, то

$$L_n(P_m; z) = P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_n(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Не уменьшая общности, можно предполагать, что $q_m\left(\frac{1}{z}\right)$ — полином, не содержащий свободного члена. Тогда

$$\int_C \frac{q_m(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Следовательно,

$$L_n(f; z) - F(z) = \sum_{k=1}^n \left[f(z_{kn}) - P_m(z_{kn}) - q_m\left(\frac{1}{z_{kn}}\right) \right] \rho_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_m(\xi) + q_m(\xi) - f(\xi)}{\xi - z} d\xi + L_n(q_m; z). \quad (9)$$

Далее

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |L_n(z; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} \left| \sum_{k=1}^n \left[f(z_{kn}) - P_m(z_{kn}) - q_m\left(\frac{1}{z_{kn}}\right) \right] \rho_k(z) \right|^p |dz| \right)^{1/p} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\gamma} \int_C \frac{|P_m(\xi) + q_m\left(\frac{1}{\xi}\right) - f(\xi)|^p}{|\xi - z|^p} d\xi |dz| \right)^{1/p} + \left(\int_{\gamma} |L_n(q_m; z)|^p |dz| \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Таким образом на основании условий б), (5), (6), получается (7).

Следствие 1. При наличии условий теоремы 1, если C — кривая Ляпунова,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} |L_n(f; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{1/p} = 0 \quad (p > 1).$$

Доказательство. Известно [5], что если C — кривая Ляпунова и $\varphi(t) \in L(C)$

($p > 1$), то

$$\left(\left| \int_C \int_C \frac{\varphi(t)}{t-z} dt \right|^p |dz| \right)^{1/p} \leq M_p \left(\int_C |\varphi(t)|^p |dz| \right)^{1/p}. \quad (10)$$

Таким образом на основании (10) из (9) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\gamma} |L_n(f; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \left(\int_{\gamma} \left| \sum_{k=1}^n \left[f(z_{kn}) - P_m(z_{kn}) - q_m\left(\frac{1}{z_{kn}}\right) \right] \rho_k(z) \right|^p |dz| \right)^{1/p} \leq \\ & + M_p \left(\int_{\gamma} \left| f(\xi) - P_m(\xi) - q_m\left(\frac{1}{\xi}\right) \right|^p |d\xi| \right)^{1/p} + \left(\int_C |L_n(q_m; z)|^p |dz| \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Пусть функция $f(z) \in L_p(C)$ ($p \geq 1$) и аналитична в D . Тогда существует такой полином $P_m(z)$, что

$$\int_C |P_m(z) - f(z)|^p |dz| < \varepsilon \quad \text{при } m \geq N. \quad (11)$$

Допустим, что среди полиномов $P_m(z)$, удовлетворяющих условию (11), существуют такие, что

$$|P_m(z_{kn}) - f(z_{kn})| < \varepsilon \quad \text{при } m \geq N.$$

Класс функций, обладающий вышеуказанными свойствами, обозначим через $N_p(C)$.

Теорема 2. Если

$$f(z) \in N_p(C) \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{\gamma} |\rho_k(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}} \leq M < +\infty, \quad (12)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} |L_n(f; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} = 0, \quad (13)$$

где γ — спрямляемая кривая, лежащая в D , $F(z)$ определяется равенством (8) и M — число, не зависящее от n .

Доказательство. Пусть $f(z) \in N_p(C)$. Тогда существует такой полином $P_m(z)$ степени $\leq m$, что при $m \geq N$

$$\int_C |f(t) - P_m(t)|^p |dt| < \varepsilon$$

и

$$|f(z_{kn}) - P_m(z_{kn})| < \varepsilon.$$

Учитывая, что

$$L_n(P_m; z) \equiv P_m(z), \quad m < n$$

и

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_m(t)}{t-z} dt,$$

получим

$$|L_n(f; z) - F(z)| = \left| \sum_{k=1}^n [f(z_{kn}) - P_m(z_{kn})] \rho_k(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P_m(t) - f(t)}{t-z} dt \right|. \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\int_{\gamma} |L_n(f; z) - F(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\gamma} \left| \sum_{k=1}^n [f(z_{kn}) - P_m(z_{kn})] \rho_k(z) \right|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \int_C \frac{P_m(t) - f(t)}{t-z} dt \right|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f(z_{kn}) - P_m(z_{kn})| \left(\int_C |\rho_k(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left[\left(\int_C |P_m(t) - f(t)|^p |dt| \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_C \frac{|dt|}{|t-z|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании определения класса $N_p(C)$ и (12) получается (13).

Теорема 3. Если $f(z) \in N_p(C)$ ($p > 1$), C — кривая Ляпунова и

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_C |\rho_k(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq M < +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_C |F(z) - L_n(f; z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

где M — число, не зависящее от n , и $F(z)$ — функция, определяемая равенством (9).

Доказательство получается на основании определения класса $N_p(C)$ ($p > 1$) и неравенства (10) из тождества (14).

Следствие 2. Пусть $f(z)$ аналитична в D , непрерывна на DUC . Если C — кривая Ляпунова и

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_C |\rho_k(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq M < +\infty, \quad (15)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_C |f(z) - L_n(f; z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

где M — число, не зависящее от n .

Доказательство. Если $f(z)$ аналитична в D , непрерывна на DUC , то $f(z) \in N_p(C)$ и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt = f(z).$$

Следовательно, на основании теоремы 3 получается следствие 2.

Замечание. Если выполняется условие следствия 2, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C |f(z) - L_n(f; z)|^p W(z) |dz| = 0,$$

где $W(z)$ — любая ограниченная положительная C функция.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961.
2. Curtiss J. H. J. of Mathematics and Mechanics, vol. 9, № 2, March, 1960.
3. Walsh J. L. and Sharma A. Notices of the American Mathematical society, vol. 10 (1953), p. 491.
4. Curtiss J. H. Duk. Math. J., 32, № 20, 1965.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.

Поступило 12. II 1968

А. Э. Хамидов

Комплекс областында Лагранжын интерполјасија
полиномларынын орта жыгылмасы наггында

ХУЛАСӘ

Верилмиш функција вә интерполјасија дүјүнләри мүүјјән шәртләри өдәдикдә Лагранж полиномларынын жыгылан олмасы ајдынлашдырылмышдыр.

УДК 13Б 1256

А. С. ДИКАНСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе [7] Х. Шефером было впервые введено понятие σ -отображения в локально выпуклом пространстве, обобщившее понятие обобщенных операторов Фредгольма в банаховом пространстве, введенное в 1951 г. Ф. Аткинсоном. Для σ -отображений Х. Шефером [7, 8] был доказан ряд результатов, известных ранее для Φ -операторов и сведенных в обзорной статье И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [3]. А. С. Маркус и А. А. Фельдман [5] рассматривали вопрос о возмущении σ -отображений ограниченными отображениями. А. Пич [6] ввел понятие φ - и γ -отображений, первое из которых обобщает понятие σ -отображения на случай, когда отображение задано не на всем пространстве, и доказал ряд утверждений, схожих с утверждениями Х. Шефера для σ -отображений.

В дальнейшем везде через E и F обозначаются произвольные полные локально выпуклые пространства, а через E' и F' — их сопряженные. Через $L(E, F)$, соответственно $L(E, F)$, обозначается совокупность линейных (соответственно непрерывных линейных) отображений E в F . Через $P(E, F)$, соответственно $P(E, F)$, обозначается множество всех отображений с конечномерной областью значений из $L(E, F)$, соответственно из $L(E, F)$. При $E=F$ обозначаем $L(E) \equiv L(E, E)$ и так далее. Кроме того, рассматривается объединение $\Lambda(E, F) = \cup L(M, F)$, причем M пробегает все линейные подмножества из E .

Определение А. Отображение $T \in L(E, F)$, соответственно $T \in \Lambda(E, F)$, называется σ -отображением (соответственно φ -отображением), если T — открытое отображение, область значений $R(T)$ замкнута и имеет конечную размерность m и нуль-пространство, $N(T)$ которого имеет конечную размерность n .

Определение В. Отображение $T \in \Lambda(E, F)$ называется γ -отображением, если существует компактное подмножество $K \subset E$ такое, что $T(K)$ есть окрестность нуля в $R(T)$, $R(T)$ замкнуто и имеет конечную соразмерность m и нуль-пространство $N(T)$ имеет конечную размерность n . Разность $\kappa = m - n$ называется индексом отображения T .

Определение С. φ -(соответственно γ -) отображение называется φ^d -(соответственно γ^d -) отображением, если область определения его плотна в E .

Совокупность всех σ -отображений из E в F обозначается через $\Sigma(E, F)$, всех φ -отображений — через $\Phi(E, F)$, всех γ -отображений — через $\Gamma(E, F)$, всех компактных отображений — через $K(E, F)$, а через $\Phi^d(E, F)$ и $\Gamma^d(E, F)$ обозначаются множества всех φ^d - и γ^d -отображений, соответственно.

Через $\Sigma_\sigma(E, F)$, $\Sigma_\gamma(E, F)$ обозначаются совокупность σ -отображений в слабой и Макки-топологиях, соответственно в E и F . Кроме того, $\Sigma'_\sigma(E', F')$ означает множество σ -отображений по отношению к слабым топологиям $\sigma(E', F)$ и $\sigma(E', F')$. Аналогично $\Sigma'_\gamma(F', E')$. Подобные обозначения применяются для φ -, γ -, φ^d - и γ^d -отображений.

Из всех имеющихся работ отображения, сопряженные к вышеуказанным отображениям, изучались лишь [8], причем здесь изучались отображения, сопряженные к σ -отображениям. В настоящей работе изучались отображения, сопряженные к φ^d - и γ^d -отображениям, а также возмущение φ -отображений ограниченными отображениями. А. Пичем [6] доказана следующая

Теорема 1. Отображение $T \in \Lambda(E, F)$ есть φ -отображение тогда и только тогда, когда существуют отображения $U, V \in L(F, E)$, $P \in P(E)$ и $Q \in P(F)$ такие, что имеют место выражения

$$UT \subset J - P \text{ и } TV = J - Q,$$

причем, если T — φ -отображение, то можно добавочно найти

$$U = V, QT \subset TP = 0 \text{ и } PU = U = Q = 0.$$

Аналогично тому, как это делается в гильбертовом пространстве, доказываются следующие леммы для сопряженных отображений.

Лемма 1. Пусть A и B — линейные отображения из локально выпуклого пространства E в локально выпуклое пространство F , причем $B \in L(E, F)$, а $A+B$ плотно задано. Тогда $(A+B)' = A' + B'$.

Лемма 2. Пусть E, F и G — локально выпуклые пространства, A и B — соответственно, линейные отображения из E в F и из F в G , а их произведение плотно задано. Тогда

$$(BA')' \supset A' B'.$$

Если дополнительно предположить, что $B \in L(F, G)$, то

$$(BA)' = A' B.$$

Лемма 3. Если $A \subset B$, где A — линейное отображение с плотной областью из E в F , а $B \in L(E, F)$, то $A' = B'$.

Имеет место

Теорема 2. Пусть $T \in \Phi^d(E, F)$, тогда T' , являющееся сопряженным к T , принадлежит $\Phi_\sigma^d(F', E')$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать $T' \in \Phi_\sigma^d(F', E')$, покажем, что существуют такие отображения $U', V' \in L_\sigma(E', F')$ и $P' \in P_\sigma(F')$, $Q' \in P_\sigma(E')$, при которых имеют место выражения

$$V' T' \subset J' - Q' \text{ и } T' U' = J' - P', \quad (1)$$

а область определения T' слабо плотна в F' .

Так как T является φ^d -отображением, то значит (на основе теоремы 2.2 Ф. Браудера [1]) T является и слабо открытым отображением. А это, в свою очередь (согласно теореме 1 и предложению 6 гл. IV, § 4 Н. Бурбаки [2]), означает, что существуют такие отображения

$$U, V \in L_\sigma(F, E), P \in P_\sigma(E) \text{ и } Q \in P_\sigma(F), \text{ что} \\ UT \subset J - P \text{ и } TV = J - Q. \quad (2)$$

Перейдем теперь к дуальным отношениям в каждом из выражений (2). Используя леммы 1—3, получаем (1). Применяя снова теорему 1, получаем $T' \in \Phi^d(F', E')$. Так как φ -отображение всегда замкнуто, то на основе леммы 2.1 (III) Ф. Браудера [1] заключаем, что область определения слабого φ -отображения T' слабо плотна в F' , что окончательно и доказывает теорему.

Применяя утверждения 10° и 11° § 5 из работы Г. Кёте [4], легко заключаем, что $\Phi^d(F', E') = \Phi^d(F', E')$. Доказательство следующей теоремы получается сразу из доказательства теорем 2 и 1.

Теорема 2'. Пусть $T \in \Phi^d(E, F)$. Тогда существуют отображения $U' \in \mathcal{L}_s(F', E')$, $P \in P_s(E')$ и $Q \in P_s(F')$ такие, что имеют место выражения

$$T'U' = J' - P' \text{ и } U'T' \subset J' - Q'.$$

При этом добавочно можно найти $P'T' \subset T'Q' = 0$ и $Q'U' = P'U' = 0$.

Так как $R(T)$ замкнуто, T — гомоморфизм, то согласно теореме 2.1 Ф. Браудера [1] φ -оператор T нормально разрешим и φ -оператор T' также нормально разрешим.

Теорема 3. Пусть $T \in \Phi^d(E, F)$ и $K \in \mathcal{K}(E, F)$, тогда $T' - K' \in \Phi^d(F', E')$, а $\chi(T' - K') = \chi(T')$.

Доказательство. Известно, что $K' \in \mathcal{K}_s(F', E')$. Из предложения 5 А. Пича [6] следует, что $T - K \in \Phi^d(E, F)$ и $\chi(T - K) = \chi(T)$. Следовательно, на основании теоремы 2 можно заключить, что $T' - K' \in \Phi^d(F', E')$, причем $\chi(T' - K') = \chi(T')$.

Теорема 4. Пусть $T \in \Gamma^d(E, F)$. Тогда отображение T' принадлежит $\Gamma_s^d(F', E')$.

Доказательство этой теоремы приводится аналогично доказательству теоремы 2, с учетом предложения 11 А. Пича [6] и того, что каждое Γ^d -отображение есть Φ^d -отображение. Также легко доказывается следующая теорема.

Теорема 5. Пусть $T \in \Gamma^d(E, F)$ и $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Тогда $T' - A' \in \Gamma_s^d(F', E')$ и $\chi(T' - A') = \chi(T')$.

Перейдем к рассмотрению возмущений φ -отображений ограниченными отображениями. Пусть B есть ограниченное отображение из локально выпуклого пространства E в локально выпуклое пространство F . Это означает, что в E существует такая окрестность нуля V , что $B(V)$ есть ограниченное множество в F . Будем говорить, что B ограничено на окрестности V . Следуя А. С. Маркусу и И. А. Фельдману [5], обозначим через $S(V, F)$ множество всех линейных отображений из E в F и ограниченных на V ($\subset E$). Превратим $S(V, F)$ в локально выпуклое пространство, введя в него топологию равномерной сходимости на V , то есть за базисные окрестности нуля в $S(V, F)$ примем множества вида $W = \{B: BV \subset U\}$, где U пробегает совокупность окрестностей нуля в F . Следующая теорема для σ -отображений доказана А. С. Маркусом и И. А. Фельдманом [5].

Теорема 6. Пусть $T \in \Phi(E, F)$ и V — некоторая окрестность нуля в E . Тогда существует такая окрестность нуля W в $S(V, F)$, что для всякого $B \in W$ отображение $T + B \in \Phi(E, F)$, $\chi(T + B) = \chi(T)$ и $\dim N(T + B) \leq \dim N(T)$.

Доказательство. Для доказательства используем метод, предложенный С. Надем для банаховых пространств и обобщенный А. Пичем [6] на локально выпуклые пространства.

Рассмотрим подпространство $E_0 = D(T)$ в E и введем в нем локально выпуклую топологию, где в качестве окрестностей нуля берутся пересечения $V \cap T^{-1}(U)$ окрестностей нуля $X \in E$ с прообразом $T^{-1}(U)$ окрестностей нуля $U \in F$. Очевидно, что π -отображение

T вследствие этого переходит в σ -отображение T_0 , действующее из E_0 в F . Действительно, непрерывность T_0 следует из определения. Кроме того, T_0 остается открытым, ибо $T_0[X \cap T^{-1}(U)] = T(X) \cap U$, а $T(X) \cap U$ согласно определению есть окрестность нуля в $R(T)$. Все остальные свойства φ -отображения остаются неизменными, в частности $\dim N(T) = \dim N(T_0)$ и $\text{codim } R(T) = \text{codim } R(T_0)$.

Далее пусть $S_0 \in \Sigma(E_0, F)$, тогда $Sx = S_0x$ при $x \in E$ есть φ -отображение, так как все существенные свойства S_0 отображение S сохраняет, лишь может быть потеряна ее непрерывность. Очевидно также, что отображение B будет ограниченным и на E_0 , так как топология E_0 слабее топологии E . Через $S(V_1, F)$ обозначим множество всех линейных ограниченных отображений, действующих из E_0 в F и ограниченных на $V_1 = V \cap T^{-1}(U)$. Превратим $S(V_1, F)$ в локально выпуклое пространство, введя в нем топологию равномерной сходимости на V_1 . Тогда на основании теоремы 1 А. С. Маркуса и И. А. Фельдмана [6] заключаем, что $T_0 + B_0$ также будет σ -отображением E_0 в F , $\chi(T_0 + B_0) = \chi(T_0)$ и $\dim N(T_0 + B_0) \leq \dim N(T_0)$. Значит $T + B$ будет φ -отображением из E в F , $\chi(T + B) = \chi(T)$ и $\dim N(T + B) \leq \dim N(T_0)$.

Аналогично теореме 6 доказывается теорема, обобщающая теорему 2 А. С. Маркуса и И. А. Фельдмана [5], где предполагается, что B — аналитическая функция параметра λ в пространстве $S(V, F)$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6 с той лишь разницей, что $T \in \Phi^d(E, F)$. Тогда отображение $T' + B'$, являющееся сопряженным к $T + B$, принадлежит $\Phi_s^d(F', E')$ и $\chi(T' + B') = \chi(T')$.

Доказательство. Предложение 10 Х. Шефера [8] гласит, что если B есть ограниченное линейное отображение E в F , то сопряженное ему отображение T' является сильно ограниченным. На основании одного результата Н. Бурбаки (см. [2], гл. IV, § 3, п. 2) сильно ограниченное отображение является слабо ограниченным. Применяя теперь теоремы 2 и 6, получаем то, что требовалось доказать.

В заключение выражаю глубокую благодарность доц. Г. Н. Агаеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Браудер Ф. Функциональный анализ и уравнения в частных производных. Сб. переводов „математика“, 4/3 (1960).
2. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., 1959.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. УМН. XII, 2(74), 1957.
4. Köthe G. General linear transformation of locally convex spaces. „Math. ann.“ 1965, 159, 5, 309—328.
5. Маркус А. С., Фельдман И. А. „Изв. Молдавского ФИАН СССР“, (76), 1960.
6. Pietzch A. Unstetige lineare Abbildungen in lokalkonvexen Vektorräumen. „Math. Ann.“, 1960, 140, 2, 153—164.
7. Schaefer H. Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen. „Math. Zeit.“, 1956, 66, 2, 147—163.
8. Schaefer H. On the Fredholm alternative in locally convex linear spaces. „Studia math.“, 1959, 3, 229—248.

Поступило 24. IV 1968

А. С. Дикански

Локал габарыг мүүжэн синиф ин'икас вэ онларын
гошмасы наггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ ашагыдакы теорем исбат олунмушдур.

Экэр там локал габарыг E фэзасыны башга там локал габарыг,

э засына T ин'икасы φ^d -ин'икасыдырса (ујгун олараг γ^d -ин'икасыдыр), онда T -ја гошма олан T' ин'икасы да φ^d -нин ин'икасыдыр (ујгун олараг γ^d -ин'икасыдыр).

Бундан элавэ, мэгалэдэ φ -ин'икасларын мэхдуд ин'икасларла. нэјэчанланма теоремы исбат едилмишдир.

М. Х. НАСИБОВ

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ МЕТОДАМИ РИССА И РИМАНА В СУММИРОВАНИИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Связь между методами Рисса и Римана для простых числовых рядов изучалась авторами работа [1, 2, 3]. В настоящей работе результат [2] обобщается на случай двойных числовых рядов.

Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} U_{m, n}. \quad (1)$$

Метод Рисса. Пусть $p, q > 0$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \rightarrow \infty$, $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{\lambda_m < \xi} \sum_{\mu_n < \theta} \left(1 - \frac{\lambda_m}{\xi}\right)^p \left(1 - \frac{\mu_n}{\theta}\right)^q \cdot U_{m, n} \rightarrow S.$$

при $\xi, \theta \rightarrow \infty$, тогда ряд (1) называется $(R, \lambda_m, \mu_n, p, q)$ суммируемым к числу S .

Метод Римана. Пусть p и q — рациональные числа с нечетными знаменателями, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \rightarrow \infty$, $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \rightarrow \infty$, и

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda_m u}{\lambda_m u}\right)^p \left(\frac{\sin \mu_n v}{\mu_n v}\right)^q \cdot U_{m, n} \rightarrow S$$

при $u, v \rightarrow 0$, тогда ряд (1) называется $(R, p, q, \lambda_m, \mu_n)$ суммируемым к числу S .

Пусть функции $a_{m, n}(u, v)$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) определены на некотором плоском множестве E и (x_0, y_0) — некоторая предельная точка этого множества. Рассмотрим бесконечную матрицу $\|a_{m, n}(x, y)\|$.

Определение. Следуя В. Г. Челидзе [4], бесконечную матрицу $\|a_{m, n}(x, y)\|$ будем называть матрицей класса R , если элементы удовлетворяют условиям:

1) существует такое положительное число M , что

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} |a_{m, n}(x, y)| < M \quad \text{на множестве } E;$$

2) $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m, n}(x, y) = 1;$

$$3) \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(x, y) = 0 \text{ для любого фиксированного } n;$$

$$4) \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(x, y) = 0 \text{ для любого фиксированного } m.$$

В работе В. Г. Челидзе [4] доказана следующая
Теорема А. Если $\|a_{m,n}(x, y)\|_E$ есть матрица R , а сходящаяся двойная последовательность $\{S_{m,n}\}$ удовлетворяет условиям:

1) двойной ряд

$$F(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}(x, y) S_{m,n}$$

абсолютно сходится в области E ;

$$2) \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}(x, y) S_{m,n} = 0 \text{ для любого фиксированного } n;$$

$$3) \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}(x, y) S_{m,n} = 0 \text{ для любого фиксированного } m, \text{ то}$$

$$\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} F(x, y) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n};$$

Для $m, n \geq 1$ положим

$$t_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_m}\right) \left(1 - \frac{\mu_j}{\mu_n}\right) \cdot U_{i,j}. \quad (2)$$

Далее пусть

$$a_m(u) = \left[\frac{\omega(\lambda_m u)}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} - \frac{\omega(\lambda_{m+1} u)}{\lambda_{m+2} - \lambda_{m+1}} \right] \cdot \lambda_{m+1},$$

$$b_n(v) = \left[\frac{\omega(\mu_n v)}{\mu_{n+1} - \mu_n} - \frac{\omega(\mu_{n+1} v)}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \right] \cdot \mu_{n+1},$$

где

$$\omega(\lambda_m u) = c(\lambda_m u) - c(\lambda_{m+1} u),$$

$$c(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда } x = 0, \\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p, & \text{когда } x \neq 0. \end{cases}$$

Теорема. Если $\lambda_0 = 0$, $0 < a \leq \lambda_{m+1} - \lambda_m \leq b$, $\mu_0 = 0$, $0 < c \leq \mu_{n+1} - \mu_n \leq d$ для всех m и n и ряд (1) суммируем методом $(R, \lambda_m, \mu_n, 1, 1)$ к числу t и кроме того, выполнены условия:

$$1) t_{m,n} = O(\lambda_n^\beta) \text{ при любом фиксированном } n;$$

$$2) t_{m,n} = O(\mu_n^\beta) \text{ при любом фиксированном } m;$$

$$3) \sup_{0 < v < \eta} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n(v) t_{m+1, n+1} \right| = A_m < +\infty, m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$4) \sup_{0 < u < \eta} \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m(u) \cdot t_{m+1, n+1} \right| = B_n < +\infty, n = 0, 1, 2, \dots,$$

то ряд (1) суммируем методом $(R, p, q, \lambda_m, \mu_n)$ к числу t для всех $p, q > 2$, p и q — рациональные числа с нечетными знаменателями и $0 < \alpha < p - 2$, $0 < \beta < q - 2$, η — произвольное число.

Для доказательства теоремы сперва докажем некоторые леммы. Рассмотрим следующие ряды:

$$\tau(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c(\lambda_m u) \cdot c(\mu_n v) \cdot U_{m,n}, \quad (3)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega(\lambda_m u) \omega(\mu_n v) S_{m,n}. \quad (4)$$

Лемма 1. Если последовательность $\{S_{m,n}\}$ частных сумм ряда (1) удовлетворяет условиям:

$$1) \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_m^p} \sum_{n=0}^k S_{m,n} \omega(\mu_n v) = 0$$

для любого фиксированного k ;

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_n^q} \sum_{m=0}^l S_{m,n} \omega(\lambda_m u) = 0$$

для любого фиксированного l ;

3) существуют натуральные числа M_1 и N_1 такие, что

$$|S_{m,n}| \leq Q \lambda_m \mu_n, \text{ когда } m > M_1, n > N_1,$$

где Q — некоторая положительная постоянная, тогда из сходимости одного из рядов (3) и (4) следует сходимость другого и равенство их сумм.

Доказательство. Пусть ряд (3) сходится и пусть $M > M_1$, $N > N_1$. На основании преобразования Абеля имеем:

$$\sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c(\lambda_m u) c(\mu_n v) U_{m,n} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \omega(\lambda_m u) \omega(\mu_n v) S_{m,n} +$$

$$+ c(\lambda_M u) \sum_{n=0}^{N-1} \omega(\mu_n v) S_{M,n} + c(\mu_N v) \sum_{m=0}^{M-1} \omega(\lambda_m u) S_{m,N} +$$

$$+ c(\lambda_M u) c(\mu_N v) S_{M,N} = I_{M,N}^1 + I_{M,N}^2 + I_{M,N}^3 + I_{M,N}^4.$$

Очевидно, что

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_{M,N}^4 = 0.$$

Далее имеем

$$|I_{M,N}^2|^2 \leq \frac{1}{(\lambda_M u)^p} \left| \sum_{n=0}^{N-1} S_{M,n} \cdot \omega(\mu_n v) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\lambda_M u)^p} \sum_{n=0}^{N_1} \omega(\mu_n v) S_{M,n} + \frac{1}{(\lambda_M u)^p} \left| \sum_{n=N_1+1}^{N-1} \omega(\mu_n v) S_{M,n} \right| <$$

$$> \frac{1}{(\lambda_M u)^p} \cdot \left| \sum_{n=0}^{N_1} \omega(\mu_n v) S_{M,n} \right| + \frac{Q \lambda_M}{(\lambda_M u)^p} \sum_{n=N_1+1}^{N-1} \mu_n \cdot |\omega(\mu_n v)| = 0$$

при $M, N \rightarrow \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_{M,N}^2 = 0.$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_{M,N}^3 = 0.$$

Затем, так как предел левой части равенства (5) существует, когда $M, N \rightarrow \infty$, то будем иметь

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} I_{M, N}^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega(\lambda_m u) \cdot \omega(\mu_n v) S_{m, n}.$$

Лемма доказана.

Следствие. Если последовательность $\{S_{m, n}\}$ частных сумм ряда (1) удовлетворяет условиям:

- 1) $S_{m, n} = O(\lambda_m^{\alpha+2})$ при любом фиксированном n ;
 - 2) $S_{m, n} = O(\mu_n^{\beta+2})$ при любом фиксированном m ;
 - 3) $|S_{m, n}| \leq Q \lambda_m \mu_n$ для $m > M_1, n > N_1$,
- то из сходимости одного из рядов (3) и (4) следует сходимость другого и равенство их сумм.

Лемма 2. Если последовательность $\{t_{m, n}\}$ удовлетворяет условиям:

- 1) $t_{m, n} = O(\lambda_m^{\alpha})$ при любом фиксированном n ;
- 2) $t_{m, n} = O(\mu_n^{\beta})$ при любом фиксированном m ;
- 3) существуют натуральные числа M_1 и N_1 такие, что $|t_{m, n}| \leq Q$, когда $m > M_1, n > N_1$, то последовательность частных сумм $\{S_{m, n}\}$ ряда (1) удовлетворяет условиям:

- 4) $S_{m, n} = O(\lambda_m^{\alpha+1})$ при любом фиксированном n ;
- 5) $S_{m, n} = O(\mu_n^{\beta+1})$ при любом фиксированном m ;
- 6) $|S_{m, n}| \leq Q \lambda_m \mu_n$ для $m > M_1, n > N_1$

Доказательство. Из (2) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_m \mu_n t_{m, n} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (\lambda_m - \lambda_i) (\mu_n - \mu_j) U_{ij} = \lambda_m \mu_n S_{m, n} + \\ &+ \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \lambda_i \mu_j U_{ij} - \lambda_m \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mu_j U_{ij} - \mu_n \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \lambda_i U_{ij}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_m, \mu_n, t_{m, n}) &= \lambda_{m+1} \mu_{n+1} t_{m+1, n+1} - \lambda_{m+1} \mu_n t_{m+1, n} - \\ &- \lambda_m \mu_{n+1} t_{m, n+1} + \lambda_m \mu_n t_{m, n} = (\lambda_{m+1} - \lambda_m) (\mu_{n+1} - \mu_n) \cdot S_{m, n}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$S_{m, n} = \frac{\Delta(\lambda_m, \mu_n, t_{m, n})}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)(\mu_{n+1} - \mu_n)}.$$

Так как

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1} - \lambda_1} = O(\lambda_m), \quad \frac{\mu_n}{\mu_{n+1} - \mu_1} = O(\mu_n), \quad (7)$$

то при условиях 1, 2 и 3 из (6) получим 4, 5 и 6. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть

$$a_{m, n}(u, v) = a_m(u) \cdot b_n(v),$$

тогда матрица $\|a_{m, n}(u, v)\|$ является матрицей класса R .

Доказательство. В работе [2] доказано, что при условии $\lambda_0 = 0, 0 < a \leq \lambda_{m+1} - \lambda_m \leq b$ имеет место:

- 1) $a_m(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$ для всех m ;
- 2) $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m(u)|$ ограничено для всех $u < 0$;
- 3) $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(u) \rightarrow 1$ при $u \rightarrow 0$.

Так как и матрица $\|b_n(v)\|$ удовлетворяет аналогичным условиям, то $\|a_{m, n}(u, v)\|$ будет матрицей класса R .

Доказательство теоремы. По условию теоремы

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} t_{m, n} = t.$$

Докажем, что

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} \tau(u, v) = t.$$

Из условий 1 и 2 теоремы следует, что в силу лемм 1 и 2 можно взять

$$\tau(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \omega(\lambda_m u) \omega(\mu_n v) \cdot S_{m, n}. \quad (8)$$

Если вынести выражение $S_{m, n}$ из (6) ряд (8), то получим

$$\tau(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega(\lambda_m u) \omega(\mu_n v)}{(\lambda_{m+1} - \lambda_m)(\mu_{n+1} - \mu_n)} \cdot \Delta(\lambda_m, \mu_n, t_{m, n}). \quad (6)$$

В силу (7) и

$$\omega(\lambda_m u) = O\left(\frac{1}{\lambda_m^p}\right), \quad \omega(\mu_n v) = O\left(\frac{1}{\mu_n^q}\right),$$

а также условий 1, 2 теоремы, применяя преобразования Абеля, из (9) легко получить

$$\tau(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m, n}(u, v) \cdot t_{m+1, n+1}. \quad (10)$$

Так как $\|a_{m, n}(u, v)\|$ является матрицей класса R , то остается доказать, что последовательность $\{t_{m, n}\}$ удовлетворяет условиям теоремы А.

Абсолютная сходимость ряда (10) в окрестности точки $u=0, v=0$ вытекает из условия теоремы.

Далее из условия 4 теоремы имеем

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} a_{m, n}(u, v) \cdot t_{m+1, n+1} \right| \leq |b_n(v)| \cdot \sup_{0 < v < \eta} \left| \sum_{m=0}^{\infty} a_m(u) \cdot t_{m+1, n+1} \right| =$$

$$= |b_n(v)| \cdot B_n \rightarrow 0 \quad \text{при } v \rightarrow 0.$$

Значит для любого фиксированного n

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m, n}(u, v) \cdot t_{m+1, n+1} = 0.$$

Аналогично получим

$$\lim_{u, v \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m, n}(u, v) \cdot t_{m+1, n+1} = 0$$

для любого фиксированного m .

Теорема доказана.

Следствие. Если $\lambda_0 = 0, 0 < a \leq \lambda_{m+1} - \lambda_m \leq b, \mu_0 = 0, 0 < c \leq \mu_{n+1} - \mu_n \leq d$ для всех m и n и ряд (1) суммируем методом $(R, \lambda_m, \mu_n, 1, 1)$ к числу t и, кроме того, последовательность $\{t_{m, n}\}$ ограничена, то ряд (1) суммируем методом $(R, p, q, \lambda_m, \mu_n)$ к числу t для всех $p, q > 2$, p и q — рациональные числа с нечетными знаменателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burkhill H. on Riesz and Riemann summability, Proc. Cambridge Philos. Soc. 57(1961) 55—60.
2. Burkhill H. and Petersen G. M. A. relation between Riesz and Riemann sums mability, Proc. Amer. Math. Soc. 12(1961), 453—456.
3. Russel C. On Riesz and Siemann summability, Frans. of the Amer. Math. Soc. 104 (1964).
4. Челидзе В. Г. Некоторые вопросы теории двойных рядов. 1968.

Поступило 3. VIII 1958

Икигат сыраларын чәмләшмәсиндә Рис вә Риман үсуллары арасындакы мүнәсибәт

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә икигат әдәди сыраларын Рис үсулу илә чәмләнән заманы мүнәсир шәртләр дахилиндә һәмин сыраларын Риман үсулу илә дә чәмләнән олдуғу исбат едилмишдир. Башга сөzlә, Рис мә'нада хусуси чәмләр ардычыллыгы теоремин 1, 2, 3 вә 4 шәртләрини өдәјәрәк $(R, \lambda_m, \mu_n, 1, 1)$ үсулу илә t әдәдинә чәмләнән икигат әдәди сыранын $(R, p, q, \lambda_m, \mu_n)$ үсулу илә дә һәмин әдәдә чәмләнән олмасынын доғрулуғу сүбүт едилмишдир.

Л. Ш. АБДУЛКЕРИМОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ
ОПЕРАТОРАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Рассмотрим задачу Коши

$$u'(t) = Au(t) + f(t) \quad (0 < t \leq T), \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

в банаховом пространстве E с оператором A , удовлетворяющим следующему условию:

1°. Оператор A замкнут, имеет всюду плотную область определения $D(A)$ и

$$\|R(\lambda; A)\| \leq C(1 + |\tau|)^{-\beta} \quad (\lambda = \sigma + i\tau, \sigma \geq 0)$$

при некотором $\beta \in (0, 1]$. Под решением $u(t)$ задачи (1) будем понимать решение ослабленной задачи Коши [1]. Основной результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1° с $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$, а функция $f(t)$ удовлетворяет одному из следующих условий:

а) $f(t)$ непрерывно дифференцируема и производная удовлетворяет условию Гельдера

$$\|f'(t) - f'(s)\| \leq \kappa |t - s|^{\frac{1-2\beta}{\beta} + \varepsilon};$$

б) значения $f(t) \in D(A)$, и функция $Af(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера

$$\|Af(t) - Af(s)\| \leq \kappa |t - s|^{\frac{1-2\beta}{\beta} + \varepsilon}.$$

Тогда при любом $u_0 \in D(A)$ задача (1) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Разрешимость задачи (1) при условии 1° в случае, когда $\beta \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$, исследована в [1] (теорема 6.9 гл. I) и [2], в случае когда $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ — в [3, 4], а в общем случае, при $\beta \in (0, 1]$ — в [1] (теоремы 6.3, 6.4 гл. I).

В первом случае требуется, чтобы $f(t)$ удовлетворяла условию Гельдера, во втором от $f(t)$ требуется непрерывная дифференцируемость, в третьем — дважды непрерывная дифференцируемость или выполнение условия, что $f(t) \in D(A)$ и $Af(t)$ непрерывно

дифференцируема. В данной статье в случае $\frac{1}{3} < \beta \leq \frac{1}{2}$ улучшаются некоторые результаты из [1] и [5].

Замечание. Теорема 1 при $0 < \beta \leq \frac{1}{3}$ становится тривиальной, так как в этом случае $f(t) = xt + y$, где $x, y \in E$.

Доказательство (а). В [6] доказано, что оператор A , резольвента которого удовлетворяет условию 1° , порождает бесконечно дифференцируемую полугруппу $U(t)$, для которой $U(t)A^{-1}$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$. По терминологии [1] это означает, что ослабленная задача Коши для однородного уравнения $u'(t) = Au(t)$ корректна на $D(A)$.

Рассмотрим функцию
$$g_h(t) = \int_0^{t-h} U(t-s)f(s)ds.$$

Интегрирование по частям дает следующую формулу:

$$g_h(t) = U(t)A^{-1}f(0) - U(h)A^{-1}f(t-h) + \int_0^{t-h} U(t-s)A^{-1}f'(s)ds.$$

В силу того, что полугруппа $U(t)$ сильно непрерывна на $D(A)$ при $t \geq 0$, существует

$$\lim_{h \rightarrow 0} g_h(t) = g(t) = U(t)A^{-1}f(0) - A^{-1}f(t) + \int_0^t U(t-s)A^{-1}f'(s)ds.$$

Отсюда функция $\psi_h(t) = g_h(t) + U(h)A^{-1}f(t-h)$ имеет предел при $h \rightarrow 0$, равный $\psi(t) = g(t) + A^{-1}f(t)$. Далее

$$g_h(t) = U(t)f(0) - U(h)A^{-1}f'(t-h) + U(h)A^{-1}f'(t-h) + \int_0^{t-h} U(t-s)f'(s)ds = U(t)f(0) + \int_0^{t-h} U(t-s)f'(s)ds.$$

Последний интеграл запишем в следующем виде:

$$\int_0^{t-h} U(t-s)f'(s)ds = \int_0^{t-h} U(t-s)f'(t)ds + \int_0^{t-h} U(t-s)[f'(s) - f'(t)]ds = [U(t) - U(h)]A^{-1}f'(t) + \int_0^{t-h} U(t-s)[f'(s) - f'(t)]ds.$$

В первом члене правой части при $h \rightarrow 0$ можно перейти к пределу. Кроме того,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U(t-s)[f'(s) - f'(t)]\|ds \leq \\ & \leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{\beta-1}{\beta}} (t-s)^{\frac{1-2\beta}{\beta} + \varepsilon} ds \leq \int_0^t (t-s)^{-1+\varepsilon} ds = Ct^\varepsilon. \end{aligned}$$

Это показывает, что интеграл $\int_0^{t-h} U(t-s)[f'(s) - f'(t)]ds$ при $h \rightarrow 0$ сходится равномерно относительно t .

Таким образом $\lim_{h \rightarrow 0} g_h' = U(t)f(0) + \int_0^t U(t-s)f'(s)ds$. Значит функ-

ция $g(t)$ имеет производную $g'(t) = U(t)f(0) + \int_0^t U(t-s)f'(s)ds$. Далее

при $h \rightarrow 0$ выражение $A\psi_h(t) = U(t)f(0) + \int_0^{t-h} t(U-s)f'(s)ds$ имеет предел. Отсюда в силу замкнутости оператора A значение $\psi(t) = g(t) + A^{-1}f(t) \in D(A)$ и $A\psi(t) = Ag(t) + f(t)$. Но так как $g_h(t) = A\psi_h(t)$, то $g'(t) = Ag(t) + f(t)$. Это показывает, что функция $u(t) = U(t)u_0 + g(t)$ является решением задачи (1).

Доказательство (б). Так как оператор-функция $U(t-s)A^{-1}$ сильно непрерывна по совокупности переменных и вектор-функция $Af(s)$ непрерывна, то функция $g(t) = \int_0^t U(t-s)f(s)ds$ также непрерывна.

Далее в формуле

$$g_h(t) = U(h)f(t-h) + \int_0^{t-h} U(t-s)Af(s)ds \quad (2)$$

при $h \rightarrow 0$ можно перейти к пределу, так как

$$\begin{aligned} \int_0^{t-h} U(t-s)Af(s)ds &= [U(t) - U(h)]f(t) + \\ &+ \int_0^{t-h} U(t-s)A[f(s) - f(t)]ds. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|U(t-s)A[f(s) - f(t)]\|ds \leq \\ & \leq \int_0^t (t-s)^{\frac{\beta-1}{\beta}} (t-s)^{\frac{1-2\beta}{\beta} + \varepsilon} ds \leq t^\varepsilon < \infty. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу при $h \rightarrow 0$, в формуле (2) получаем, что функция $g(t)$ удовлетворяет уравнению $g'(t) = Ag(t) + f(t)$. Это показывает, что функция $u(t) = U(t)u_0 + g(t)$ является решением задачи (1) на $[0, T]$.

Теперь рассмотрим задачу с возмущенным членом:

$$u'(t) = (A+B)u(t) + f(t), \quad u(0) = u_0, \quad (3)$$

где A, B — неограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве E . В силу [7] можем сформулировать теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, далее пусть оператор B подчинен оператору A с порядком $\alpha < \beta$, т. е. $BA^{-\alpha}$ ограничен. Тогда при любом $u_0 \in (D)(A)$ задача (3) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Теперь рассмотрим задачу Коши для уравнения второго порядка:

$$u''(t) = Au'(t) + Bu(t) + f(t), \quad u(0) = u, \quad u'(0) = u_1. \quad (4)$$

На операторы A и B будем налагать следующие условия: 2° . Оператор BA^{-1} подчинен оператору A с порядком α ($0 < \alpha < 1$). При любом $\lambda = \sigma + i\tau$ с $\sigma > \omega$, где ω — некоторое действительное число, и при некоторых β, β_0 ($0 < \beta, \beta_0 < 1$) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)\| &\leq M(1 + |\tau|)^{-\beta}, \\ \|R(\lambda; BA^{-1})\| &\leq M_0(1 + |\tau|)^{-\beta_0}. \end{aligned}$$

Под решением задачи (4) будем иметь решение ослабленной задачи Коши [1].

Разрешимость задачи (4) с условиями $2^\circ, 3^\circ$ в случае $\frac{2}{3} < \beta + \beta_0 - 1 \leq 1$ исследована в [7, 8], в случае $0 < \beta + \beta_0 - 1 \leq 1$ — в [1]. В каждом из этих случаев требуется, чтобы $\alpha < \beta + \beta_0 - 1$, а от $f(t)$ в первом случае требуется удовлетворение условия Гельдера с показателем $\gamma > \frac{1}{\beta + \beta_0 - 1} - 1$, во втором — непрерывная дифференцируемость, в третьем — дважды непрерывная дифференцируемость.

Теорема 3. Пусть выполнены условия $2^\circ, 3^\circ$ при некоторых β, β_0 , с $0 < \beta + \beta_0 - 1 \leq \frac{1}{2}$ и $\alpha < \beta + \beta_0 - 1$, далее функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и производная удовлетворяет условию Гельдера

$$\|f'(t) - f'(s)\| \leq \kappa |t - s|^{\frac{1}{\beta + \beta_0 - 1} - 2 + \varepsilon}.$$

Тогда задача (4) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Доказательство теоремы ведется путем приведения уравнения высшего порядка к системе [3, 4, 7, 8].

В заключение выражаю искреннюю благодарность С. Я. Якубову за помощь, оказанную при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1947.
2. Якубов С. Я. ДАН СССР, 176, 3 (1967).
3. Якубов С. Я. ДАН СССР, 155, 5 (1964).
4. Якубов С. Я. Тр. Ин-та математики и механики АН Азерб. ССР, 1967.
5. Абдулкеримов Л. Ш. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 1.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.
7. Якубов С. Я. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 1.
8. Якубов С. Я. ДАН СССР, 168, 4 (1966).

Поступило 18. VI 1968

Л. Ш. Абдулкеримов

Банах фəзасында сабит операторлу дифференциал тənликлər үчүн Коши мäsäləсинин һəлли һаггында

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə А оператору 1° шəртини өдədикдə (1) Коши мäsäləсинин Банах фəзасында һəлл олунмасы үчүн кафи шəртләр тапылмышдыр. Исбат едилмишдир. Исбат едилмишдир ки, 1° шəртиндə $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ олдугда мäsäləсинин һəлли үчүн биринчи теоремин α вə β шəртинин өдənməsi кифајəтдир. Даһа сонра 2° вə 3° шəртлəri дахилиндə (4) мäsäləсинин һəлл олунмасы үчүн кафи шəртләр мүəјјəнлəшдирилмишдир.

Мəгалəдə С. Г. Крејнин вə мүəллифин əлдə етдији бə'зи нəтичəләр јахшылашдырылмышдыр.

И. Г. ТАГИЕВ

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ КОЛЕБАНИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим уравнение свободных колебаний пологих оболочек переменной кривизны. Исходными являются уравнения технической моментной теории В. З. Власова. Характер работы таких оболочек при действии нормальной вынуждающей периодической силы в значительной степени зависит от выбора закона изменения кривизны. В свою очередь, эта зависимость приводит к уравнениям с переменными коэффициентами, методы решения которых развиты недостаточно. В данной статье дается метод решения задачи о свободных колебаниях пологих оболочек переменной кривизны.

§ 1. Динамическая задача теории пологих оболочек приводит к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^* - Eh \nabla_k^2 w^* &= 0, \\ \Delta^2 w^* + \frac{1}{D} \nabla_k^2 \varphi^* + \frac{\gamma h}{gD} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1,1)$$

где E, h, D, g, γ — постоянные величины; t — время; Δ — двумерный оператор Лапласа;

$$\Delta_k(\dots) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\kappa_2 \frac{\partial \dots}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\kappa_1 \frac{\partial \dots}{\partial \beta} \right). \quad (1,2)$$

Здесь α, β — криволинейные ортогональные координаты срединной поверхности оболочки; $\kappa_1(\alpha, \beta)$ и $\kappa_2(\alpha, \beta)$ — кривизна срединной поверхности, соответственно вдоль линии $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$; φ^*, w^* — функции нормального перемещения и напряжений.

Если считать, что свободные колебания рассматриваемой системы происходят по гармоническому закону с круговой частотой ω , то можно принять

$$\left. \begin{aligned} w^* &= (\alpha, \beta) \sin \omega t, \\ \varphi^* &= \varphi(\alpha, \beta) \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

С учетом последних выражений система (1,1) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi - Eh \nabla_k^2 w &= 0, \\ \Delta^2 w + \frac{1}{D} \nabla_k^2 \varphi - \frac{\gamma h \omega^2}{gD} w &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1,4)$$

Пусть система (14), при заданных граничных условиях рассматривается в области G . Используя средние значения кривизны κ_{1c} и κ_{2c}

в области G , оператор ∇_k^2 представим в виде

$$\nabla_k^2(\dots) = \kappa_{2c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 + \varepsilon_2 \sigma_2) \frac{\partial(\dots)}{\partial \alpha} \right] + \kappa_{1c} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(1 + \varepsilon_1 \sigma_1^*) \frac{\partial(\dots)}{\partial \beta} \right], \quad (1,5)$$

где

$$\varepsilon_l = \frac{\kappa_l^{(1)} - \kappa_l^{(10)}}{\kappa_l^{(1)} + \kappa_l^{(10)}}. \quad (1,6)$$

Здесь $\kappa_l^{(1)}$ и $\kappa_l^{(10)}$ — соответственно, наибольшее и наименьшее значения кривизны. Предполагая $\varepsilon = \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и полагая $\varepsilon_1 = m\varepsilon_2 = m\varepsilon$,

$m\sigma_1^* = \sigma_1$, уравнения (1,4) перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi - Eh \left\{ \kappa_{2c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 + \varepsilon \sigma_2) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right] + \kappa_{1c} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(1 + \varepsilon \sigma_1) \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right] \right\} &= 0, \\ \Delta^2 w + \frac{1}{D} \left\{ \kappa_{2c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[(1 + \varepsilon \sigma_2) \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] + \kappa_{1c} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[(1 + \varepsilon \sigma_1) \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] \right\} - \lambda w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1,7)$$

$$\text{где} \quad \lambda = \frac{\gamma h w^2}{\partial D}. \quad (1,8)$$

Форма уравнений (1,7) указывает на возможность разложения искомых величин φ , w и λ в ряды вида

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^{(0)} + \varepsilon \varphi^{(1)} + \varepsilon^2 \varphi^{(2)} + \dots, \\ w &= w^{(0)} + \varepsilon w^{(1)} + \varepsilon^2 w^{(2)} + \dots, \\ \lambda &= \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1,9)$$

Подставляя (1,9) в систему уравнений (1,7) приходим к следующим зацепляющимся системам с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^{(0)} - Eh \nabla_{\kappa c}^2 \varphi^{(0)} &= 0, \\ \Delta^2 w^{(0)} + \frac{1}{D} \nabla_{\kappa c}^2 \varphi^{(0)} - \lambda^{(0)} w^{(0)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1,10_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^{(1)} - Eh \Delta_{\kappa c} \varphi^{(1)} &= Eh \nabla_{\kappa c}^2 w^{(0)}, \\ \Delta^2 w^{(1)} + \frac{1}{D} \nabla_{\kappa c}^2 \varphi^{(1)} - \lambda^{(0)} w^{(1)} &= \frac{1}{D} \nabla_{\kappa c}^2 \varphi^{(0)} + \lambda^{(1)} w^{(0)}; \end{aligned} \right\} \quad (1,10_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^{(n)} - Eh \Delta_{\kappa c}^2 \varphi^{(n)} &= Eh \nabla_{\kappa c}^2 w^{(n-1)}, \\ \Delta^2 w^{(n)} + \frac{1}{D} \nabla_{\kappa c}^2 \varphi^{(n)} - \lambda^{(0)} w^{(n)} &= -\frac{1}{D} \Delta_{\kappa c} \varphi^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{(n-k)} w^{(k)}, \end{aligned} \right\} \quad (1,10_n)$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\kappa c}^2 &= \kappa_{2c} \frac{\partial^2 \dots}{\partial \alpha^2} + \kappa_{1c} \frac{\partial^2 \dots}{\partial \beta^2}, \\ \Delta_{\kappa c}^2 &= \kappa_{2c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sigma_2 \frac{\partial \dots}{\partial \alpha} \right) + \kappa_{1c} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sigma_1 \frac{\partial \dots}{\partial \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1,11)$$

Уравнения (1,10₀) представляют собой уравнения свободных колебаний пологой оболочки двойкой постоянной кривизны. Последующие системы (1,10₁)—(1,10_n) могут быть рассмотрены как уравнения вынужденных колебаний, поскольку величина $\lambda^{(0)}$, входящая в левые части их, является собственным значением уравнений (1,10₀). Поэтому для существования ограниченных решений системы (1,10₁)—(1,10_n) необходимо и достаточно, чтобы правые части этих уравнений

были ортогональными к собственным функциям однородной системы (1,10₀). Это требование позволяет однозначно определить неизвестные коэффициенты $\lambda^{(l)}$ ($l=1, 2, \dots$). Для нахождения коэффициентов $\varphi^{(l)}$ и $w^{(l)}$ их надо разложить по собственным функциям системы (1,10₀).

Уравнения свободных колебаний пологих цилиндрических оболочек некругового очертания получаются, если в (1,1) положить $\kappa_1=0$. В соответствии с этим получим следующие зацепляющиеся системы с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^{(0)} - Eh \kappa_c \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \Delta^2 w^{(0)} + \frac{\kappa_c}{D} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \alpha^2} - \lambda^{(0)} w^{(0)} &= 0; \\ \Delta^2 \varphi^{(1)} - Eh \kappa_c \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \alpha^2} &= Eh \kappa_c \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \alpha^2}, \\ \Delta^2 w^{(1)} + \frac{\kappa_c}{D} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \alpha^2} - \lambda^{(0)} w^{(1)} &= -\frac{\kappa_c}{D} \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial \alpha^2} + \lambda^{(1)} w^{(0)}; \end{aligned} \right\} \quad (1,12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi^{(n)} - Eh \kappa_c \frac{\partial^2 w^{(n)}}{\partial \alpha^2} &= Eh \kappa_c \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 w^{(n-1)}}{\partial \alpha^2}, \\ \Delta^2 w^{(n)} + \frac{\kappa_c}{D} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \alpha^2} - \lambda^{(0)} w^{(n)} &= \frac{\kappa_c}{D} \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 \varphi^{(n-1)}}{\partial \alpha^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{(n-k)} w^{(k)}. \end{aligned} \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Таким образом на основе данного метода задача о свободном колебании оболочек переменной кривизны сводится к зацепляющимся задачам о свободных колебаниях оболочек постоянной кривизны. Для решения полученных уравнений при известных краевых условиях можно применить методы решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 2. В заключение дадим асимптотическую оценку точности полученных формул для собственных значений цилиндрической оболочки. Для этого оборвем разложения (1,9) на квадратичных членах и введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} W &= w - (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2), \\ \Phi &= \varphi - (\varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2), \\ \Lambda &= \lambda - (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (2,1)$$

Легко показать, что величины W , Φ и Λ удовлетворяют системе:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \Phi - Eh \kappa_{(\beta)} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} &= \varepsilon^3 Eh \kappa_c \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \alpha^2}, \\ \Delta^2 W + \frac{\kappa_{(\beta)}}{D} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \Lambda W &= \\ = -\varepsilon^3 \left[\frac{\kappa_c}{D} \sigma_{(\beta)} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} - (\lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1 + \varepsilon \lambda_2 w_2) \right] + \\ + \Lambda (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2). \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

Последняя система уравнений с помощью замен

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{\kappa_{(\beta)}} \Delta^2 \psi - \varepsilon^2 Eh \kappa_c \sigma_{(\beta)} W_2, \\ \Phi &= Eh \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

сводится к одному уравнению относительно функции ψ :

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\kappa(\beta)} \Delta^2 \psi \right) + \frac{Eh\kappa(\beta)}{D} \frac{\partial^4 \psi}{\partial \alpha^4} - \frac{\lambda}{\kappa(\beta)} \Delta^2 \psi =$$

$$= \varepsilon^2 \left\{ Eh\kappa_c \Delta^2 (\sigma(\beta) w_2) - \frac{\kappa_c \sigma(\beta)}{D} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} + \right.$$

$$\left. + (\lambda_1 w_2 + \lambda_1 w_1 + \varepsilon \lambda_2 w_2) + Eh\kappa_c \sigma(\beta) w_2 (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2) \right\} +$$

$$+ \Lambda \{ (w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2) + \varepsilon^3 Eh\kappa_c \sigma(\beta) w_2 \}. \quad (2, 4)$$

Входящая в левую часть (2, 4) величина λ является собственным значением исходной задачи, поэтому правая часть этого уравнения должна быть ортогональной к собственной функции Φ_0 исходной системы (1, 4). Из этого условия получим

$$\Lambda = \frac{\varepsilon^3 \int_G \frac{\kappa_c \sigma(\beta)}{D} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} - (\lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1 + \varepsilon \lambda_2 w_2) - \int_G [w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 +$$

$$- Eh\kappa_c \{ \Delta^2 (\sigma w_2) - \sigma(\beta) (\lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2) w_2 \} \Phi_0 d\alpha d\beta}{+ \varepsilon Eh\kappa_c \sigma(\beta) w_2 \} \Phi_{0(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta}. \quad (2, 5)$$

Здесь при $\varepsilon \rightarrow 0$ знаменатель стремится к постоянной, а числитель — к нулю. Поэтому будем иметь

$$\Lambda = \varepsilon^3 w(\varepsilon), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad C(\varepsilon) \rightarrow 0. \quad (2, 6)$$

На основе оценки (2, 6) можно заключить, что при сохранении в рядах (1, 9) первых трех членов погрешность в определении собственных значений λ будет величиной третьего порядка малости относительно малого параметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Б. В. Избранные труды, т. I. Изд-во АН СССР, М., 1963.
2. Филиппов А. Н. Колебания механических систем. Изд-во „Наукова Думка“, Киев, 1965.
3. Ониашвили А. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, М., 1957.

Поступило 9. VII 1967

И. Н. Тагыјев

Азгабарыглы дэјишэн эјриликли өртүклэрин сэрбэст
рэгс мәсэлэлэринин һәллине даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә азгабарыглы дэјишэн эјриликли өртүклэрин сэрбэст рэгс тәнликләри (1, 4), кичик параметр дахил етмәклә, сабит эјриликли өртүклэрин сонсуз илишән (1, 10) рэгс тәнликләри системинә кәтирилмишдир. Биринчи тәнлик сэрбэст рэгс тәнлијидир. О бири тәнликләрэ исә мәчбури рэгс тәнлији кими бахылыр вә бунларын сағ тәрәфләринин биринчи тәнлијин мәхсуси функцијаларыны ортогонал олмасы шәртиндән мәхсуси гијмәтин сонракы јахынлашмалары тапылмышдыр. Мәхсуси гијмәтләр үчүн хәта асимптотик олараг гијмәтләндирилмишдир.

Г. Н. АГАЕВ и А. М. АХМЕДОВА

К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Смешанные задачи для линейных параболических уравнений и систем уравнений высокого порядка с общими граничными операторами и бесконечно гладкими коэффициентами изучались в работах М. С. Аграновича и М. И. Вишика [1]. Ими получена теорема существования и единственности для этих задач. Общей теорией разрешимости смешанных задач для линейных параболических уравнений занимались Т. Я. Загорский [2], С. Д. Эйдельман [3], Л. Н. Слободский [4] и др.

Значительное число работ посвящено исследованию граничных задач для квазилинейных параболических уравнений второго порядка с непрерывными и разрывными коэффициентами. Эти работы наиболее полно отражены в статье О. А. Олейник, С. Н. Кружкова [5] и в монографии О. А. Ладыженской, В. А. Солонниковой, Н. Н. Уралъцева [6]. А. Г. Гюльмисарян [7] полученные М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком результаты перенес на случай, когда коэффициенты операторов терпят разрывы первого рода. Сравнительно мало изучены смешанные задачи для нелинейных параболических уравнений высшего порядка с общими граничными операторами.

Недавно появилась статья Буи ан Тона [8] о квазилинейных параболических уравнениях с непрерывными коэффициентами. Однако смешанная задача для параболических уравнений высшего порядка с разрывными коэффициентами, когда правые части уравнений и граничных условий нелинейны, до сих пор не изучена. В связи с этим в настоящей статье рассматривается вопрос о разрешимости смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений с разрывными коэффициентами и общими граничными операторами.

Разрешимость поставленной задачи устанавливается на основании теоремы Лере—Шаудера в следующей формулировке Ф. Е. Браудера [9].

Теорема. Пусть G — открытое подмножество банахова пространства X , C — отображение $\bar{G} \times [0, 1]$ в X , чей образ предкомпактен, и такое, что $C_t(x) = C(x, t)$ — каждое отображение G в X не имеет неподвижных точек на границе G . Тогда, если $J - C_0$ есть гомеоморфизм, то $(J - C_1)u = 0$ имеет решение u в G (т. е. C_1 имеет неподвижную точку в G). Здесь J — единичный оператор. Ниже нами применяется также следующая (см. [10], [13])

Лемма 1. Пусть $f(x, t, u_1, \dots, u_N)$ непрерывная по $u = (u_1, \dots, u_N)$ почти для всех $x \in G \subset R^n$, $t \in [0, T]$ и измеримо по (x, t)

для всех u_1 . Предположим, что существует функция $h(t) \in L_p(0, T)$ такая, что $|f(x, t, u_1, \dots, u_N)| \leq |h(t)|^p + C_1 \left(1 + \sum_{r=1}^N |u_r|^{c_r}\right)$, C_1 ,

c_r — постоянные. Пусть $z = \prod_{r=1}^N L^{c_r p}(\Omega)$ для некоторого $p \geq 1$. Тогда отображение топологического произведения z в $L^p(\Omega)$, данное следующим выражением:

$T(u_1, \dots, u_N)(x, t) = f(x, t, u_1(x, t), \dots, u_N(x, t))$,
будет непрерывным отображением z в $L^p(\Omega)$. Здесь $\Omega = G \times [0, T]$.

Перейдем к изложению поставленной задачи. Пусть G — ограниченная область в R^n с границей Γ , G_1 — подобласть G с границей Γ_1 , не имеющей с Γ общих точек, $G_2 = G \setminus \overline{G_1}$. На границы Γ и Γ_1 накладывается следующее условие: Γ и Γ_1 можно покрыть конечной системой областей U_j (соответственно V_j) в R^n таких, что в каждой из U_j (V_j) определено невырожденное бесконечно гладкое преобразование координат $x \rightarrow y$ переводящей $\Gamma \cap U_j$ и $\Gamma_1 \cap V_j$ в гиперплоскость $y_n = 0$. При таком отображении прилегающая к Γ часть области G_2 оказывается лежащей в полупространстве $y_n > 0$, а при отображении границы Γ_1 прилегающая к ней часть области Ω_1 лежит в полупространстве $y_n < 0$, прилегающая же к границе Γ_1 часть области Ω_2 лежит в полупространстве $y_n > 0$. При этом требуется выполнение следующего условия: если начало координат исходной системы перенести в любую точку P границы Γ , либо Γ_1 и если локальная координата в области покрытия, то требуется, чтобы в точке P имело бы место

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Через Ω , Ω_1 , Ω_2 будем обозначать цилиндры $\Omega = G \times (0 < t < T)$, $\Omega_1 = G_1 \times (0 < t < T)$, а через S_Γ и S_{Γ_1} — боковые поверхности Ω и Ω_1 ; $S_\Gamma = \Gamma \times (0 < t < T)$, $S_{\Gamma_1} = \Gamma_1 \times (0 < t < T)$.

Пусть κ — неотрицательное целое число и $W^{\kappa, 2}(G)$ — гильбертово пространство:

$W^{\kappa, 2}(G) = \{u; u \in L^2(G), D^\alpha u \in L^2(G) \text{ для } |\alpha| \leq \kappa\}$
с нормой

$$\|u\|_{W^{\kappa, 2}(G)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq \kappa} \|D^\alpha u\|_{L^2(G)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично определяется пространство $W^{\kappa, 2}(0, T)$ с нормой $\|u\|_{W^{\kappa, 2}(0, T)}$.

Определим $W^{\kappa, p, 2}(\Omega)$, где κ и p — неотрицательные целые числа как пополнение пространства $C^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W^{\kappa, p, 2}(\Omega)} = \left\{ \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{W^{\kappa, 2}(G)}^2 dt + \int_G \|u(x, \cdot)\|_{W^{p, 2}(0, T)}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$W^{\kappa, p, 2}$ — гильбертово пространство.

Если κ — неотрицательное число, мы определим $W^{\kappa, 2}(\Gamma)$ как пополнение $C^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|u\|_{W^{\kappa, 2}(\Gamma)} = \left\{ \sum_{j=1}^N \|\varphi_j u\|_{W^{\kappa, 2}(E^{n-1})}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\{\varphi_j\}$ — конечное разбиение единицы, соответствующее покрытию

границы Γ^* . Определим $W^{\kappa, p, 2}(\Gamma)$, где κ, p — неотрицательные числа как пополнение $C^{(\infty)}(\Gamma)$ по норме

$$\|u\|_{W^{\kappa, p, 2}(\Gamma)} = \left\{ \int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{W^{\kappa, 2}(\Gamma)}^2 dt + \int_\Gamma \|u(x, \cdot)\|_{W^{p, 2}(0, T)}^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$W^{\kappa, p}(\Gamma)$ — тоже гильбертово пространство.

Рассмотрим прямую сумму Соболевских пространств [11]:

$$W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2} = W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega) = W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega_1) + W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega_2).$$

Всякую функцию $u(x, t) \in W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} u_i(x, t) \in \mathcal{Z}_i \\ 0 & (x, t) \in \Omega \setminus \Omega_i \quad i = 1, 2. \end{cases}$$

Для такого вида функций

$$\|u\|_{W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}^2 = \|u_1\|_{W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega_1)}^2 + \|u_2\|_{W_{x, t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega_2)}^2.$$

При $(x, t) \in S_{\Gamma_i}$ под $u_i(x, t)$ понимается предельное значение $u(x, t)$ со стороны Ω_i ($i = 1, 2$).

Рассмотрим в цилиндрической области $\Omega = G \times (0 < t < T)$ уравнение

$$A^i \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_i = f_i(x, t, u, \dots, D^m u) \text{ в } \Omega_i \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

При граничных условиях на S_{Γ_1} и S_Γ

$$B_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_i|_{S_{\Gamma_1}} + C_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_2|_{S_{\Gamma_1}} = g_j(x'', t), \quad x'' \in \Gamma_1, \quad j = 1, \dots, 2m. \quad (2)$$

$$R_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_2|_{S_\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Здесь $D_x = (D_{x_1} \dots D_{x_n})$, $D_{x_k} = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$, A^i , B_j , C_j , R_j — линейные

дифференциальные операторы в частных производных. Коэффициенты операторов A^i , B_j бесконечно гладкие по (x, t) в Ω_1 , а коэффициенты A^2 , C_j , R_j бесконечно гладкие в Ω_2 . Операторы A^1 , A^2 имеют порядки $2m$, операторы же B_j^i , C_j — порядки m_j , а операторы R_j — порядки r_j . При этом порядок оператора определяется как наивысший из порядков входящих в него членов, а порядок члена

$$D_x^\alpha \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} \frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}$$

принимается равным

$$|\alpha| + 2b\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_n + 2b\beta.$$

Здесь b — некоторое фиксированное целое число, удовлетворяющее неравенствам $1 \leq b \leq m$ и являющееся делителем числа m . Число $2b$ называется параболическим весом задачи;

$$f_i(x, t, \xi_1, \dots, \xi_m) \quad (i = 1, 2)$$

* Норма $\|\varphi_j u\|_{W^{\kappa, 2}(E^{n-1})}$ берется в локальных координатах. Аналогично определяется и пространство $W^{\kappa, 2}(\Gamma_1)$ с нормой $\|u\|_{W^{\kappa, 2}(\Gamma_1)}$.

как функции многих переменных заданы в области
 $\{(x, t) \in \Omega_1 - \infty < \xi_1 < +\infty, j = 1, \dots, m\}$.

В настоящей работе исследовалась разрешимость смешанной задачи для уравнения (1) при граничных условиях (2), (3) и начальных условиях

$$\left. \frac{\partial^\kappa u}{\partial t^\kappa} \right|_{t=0} = \varphi_\kappa(x) \quad (\kappa = 0, \dots, x-1, x \in G), \quad (4)$$

где

$$x = \frac{m}{b}.$$

Через $A_0^1, A_0^2, B_{j0}, C_{j0}, R_{j0}$ обозначим главные части операторов A^1, A^2, B_j, C_j, R_j , символы которых суть однородные полиномы порядков $2m, 2m, m_j, m_j, C_j$ соответственно. На операторы A^1, B_j, C_j, R_j накладываются следующие условия.

Условие 1. $A_0^1(x, \alpha, \xi, q^{2b}) \neq 0$ при $x \in G_1, Im \xi = 0$,

$$|\arg q| \leq \frac{\pi}{4b}, \quad |\xi| + |q| \neq 0, \quad 0 \leq x \leq T.$$

При $n = 1$ дополнительно предполагается, что корни многочленов $A_0^1(x, \lambda, q)$ ($i = 1, 2$) поровну распределяются между верхней и нижней полуплоскостью.

Условие 2. а) задача

$$A_0^1 \left(0, \alpha, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_1(\xi', x_n, q^{2b}) = 0, \quad x_n < 0, \quad (5)$$

$$A_0^2 \left(0, \alpha, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_2(\xi', x_n, q^{2b}) = 0, \quad x_n > 0 \quad (6)$$

с граничными условиями

$$B_j \left(0, \alpha, \xi' - i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_1(\xi', x_n, q^{2b})|_{x_n=-0} + \\ + C_j \left(0, \alpha, \xi' - i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_2(\xi', x_n, q^{2b})|_{x_n=+0} = \\ = \tilde{g}_j(\xi', q^{2b}), \quad j = 1, \dots, 2m$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений* $m = m_1 + m_2$ для любых $\tilde{g}_j(\xi', q^{2b})$.

б) задача

$$A_0^2 \left(0, \alpha, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_2(\xi', x_n, q^{2b}) = 0, \quad x_n > 0, \\ R_{j0} \left(0, \alpha, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q^{2b} \right) v_2|_{x_n=0} = \psi_j(x'', t), \quad j = 1 \dots m$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений для любых $\tilde{\psi}_j(\xi', q^{2b})$.

Здесь задачи а) и б) получены из исходной задачи (1)–(4), предполагая $f_1 \equiv 0, f_2 \equiv 0, \varphi_\kappa \equiv 0, T = \infty$ посредством последовательного применения преобразований Лапласа и Фурье. Условие 1 в рассматриваемом случае не что иное, как условие параболичности по

* Под устойчивым решением понимается пространство функций $v(\xi', x_n, q^{2b})$, имеющих вид

$$v(\xi', x_n, q^{2b}) = \begin{cases} v_1(\xi', x_n, q^{2b}), & x_n < 0 \\ v_2(\xi', x_n, q^{2b}), & x_n > 0 \end{cases}$$

и являющихся такими решениями (5) и (6), которые стремятся к нулю, когда $x_n \rightarrow \pm \infty$.

И. Г. Петровскому [12] каждого из операторов A^1 и A^2 , а условию. 2 эквивалентно условию Т. Я. Загорского [2].

При условиях 1 и 2 доказана следующая

Теорема. Пусть $f_1(x, t, \xi_1, \dots, \xi_m)$ — функция, измеримая относительно (x, t) в Ω_1 и непрерывная относительно $\xi_1, \dots, \xi_m$. Предполагая, что существует функция $h(t) \in L^2([0, T])$ такая, что

$$|f_1(x, t, u, \dots, D^m u)| \leq |h(t)| + M_1 \left\{ 1 + \sum_{|a| < m} |D^a u| \right\}, \quad (7)$$

где M_1 — постоянные.

Кроме того, предположим, что существует элемент $u_0 \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$, удовлетворяющий условию

$$\left[\frac{\partial^\kappa u_0}{\partial t^\kappa} \right]_{t=0} = \varphi_\kappa(x) \quad (\kappa = 0, \dots, x-1), \text{ и}$$

и если

$$A^1 u_0 = f_1^0(x, t) b \cdot \Omega_1,$$

$$B_j u_0|_{\Gamma_2} + C_j u_0|_{\Gamma_1} = g_j^0(x', t), \quad R_j u_0|_{\Gamma} = \psi_j^0(x'', t),$$

то после продолжения функций $f_1^0, f_2^0, g_j^0 - g_j^0, \psi_j - \psi_j^0$ нулем при $t < 0$ имеет место

$$f_1^0 \in L_2(G_1 \times (-\infty, T)),$$

$$f_2^0 \in L_2(G_2 \times (-\infty, T)),$$

$$g_j - g_j^0 \in W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})|^{2b}}(\Gamma_1 \times (-\infty, T)),$$

$$\psi_j - \psi_j^0 \in W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})|^{2b}}(\Gamma_1 \times (-\infty, T)).$$

Тогда нелинейная смешанная задача (1)–(4) имеет нетривиальное

решение $u \in W_{x,t(\Omega)}^{2m, \frac{m}{b}, 2}$, если

$$(f(x, t, 0, \dots, 0), g_1, \dots, g_{2m}, \psi_1, \dots, \psi_m, \psi_0, \dots, \psi_{x-1})$$

есть ненулевой вектор из топологического произведения

$$L^2(\Omega) \times \prod_{j=1}^{2m} W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})|^{2b}}(\Gamma_1) \times \\ \times \prod_{j=1}^m W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})|^{2b}}(\Gamma) \times \prod_{j=0}^{x-1} W_x^{2m-2b_j-b}(G).$$

Доказательство. Если $v \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$, то функции $f_i(x, t, \lambda v, \dots, \lambda D^m v)$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, на основании (7) принадлежат $L^2(\Omega_1)$ в силу [7]. Тогда в силу результатов Гюльмисаряна [7] линейная параболическая смешанная задача:

$$A' \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_i = f_i(x, t, \lambda v, \dots, \lambda D^m v), \quad i = 1, 2; \quad (1')$$

$$B_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_1|_{\Gamma_1} + C_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_2|_{\Gamma_1} = \\ = g_j(x'', t), \quad x'' \in \Gamma_1, \quad j = 1, \dots, 2m; \quad (2')$$

$$R_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) u_2|_{\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (3')$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \left. \frac{\partial^{x-1} u}{\partial t^{x-1}} \right|_{t=0} = \varphi_{x-1} \quad (4')$$

имеет единственное решение $u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$.
Запишем эту задачу в виде $T(\lambda)v = u$.

Следовательно, каждому из заданных $\lambda \in [0, 1]$ и $v \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ соответствует одно решение $u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ задачи (1')–(4'). При этом получается нелинейное отображение оператора $T(\lambda)v$, отображающего $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ в себя, и оно определено на всем $[0, 1] \times W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$. Задача (1')–(4') эквивалентна уравнению $T(\lambda)v = u$.

Итак, для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $T(1)$ имеет неподвижную точку. Для этой цели докажем следующие леммы.

Лемма 2 $T(\lambda)$ — вполне непрерывный, т. е. непрерывный и компактный оператор.

Доказательство. Сперва докажем непрерывность оператора $T(\lambda)v$. Предположим, что $v_n \rightarrow v$ в $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda$. Пусть $u_n = T(\lambda_n)v_n$, $u = T(\lambda)v$. Тогда в силу результата Гюльмисаряна [7] имеем следующую оценку:

$$\|u_n - u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \|f_1(x, t, \lambda_n v_n, \dots, \lambda_n D^m v_n) - f_1(x, t, \lambda, v, \dots, \lambda D^m v)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (8)$$

C_1 — постоянные, не зависящие от $u_n, u, f, \lambda, \lambda_n$; $\lambda_n D^m v_n$ сходятся по мере к $\lambda D^m v$ при $n \rightarrow \infty$ для $|\alpha| \leq m$. Далее, применяя лемму 1 получаем, что отображение

$$F(\lambda)W = f(x, t, \lambda, W, \lambda D^m W) \text{ из } \prod_{j=1}^m L^2(\Omega) \times [0, 1]$$

в $L^2(\Omega)$ непрерывно. Следовательно, в силу неравенства (8) при $n \rightarrow \infty$ $u_n \rightarrow u$ в $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$.

Теперь докажем, что $T(\lambda)$ — компактный оператор. Пусть $\|v_n\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq M$, тогда в силу теоремы вложения Л. Н. Слободского

[4] $\{v_n\}$ компактна в пространстве $W_{x,t}^{2m-1, \frac{m}{b}-1}(\Omega)$. При этом из $\{v_n\}$ можно выделить сходящуюся в $W_{x,t}^{2m-1, \frac{m}{b}-1}(\Omega)$ последовательность $\{v_{n_r}\}$. Так как $T(\lambda)$ непрерывно, то $\{u_{n_r}\}$ сходится, т. е. $\{u_n\}$ есть компактное множество в $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$.

Лемма 2. Оператор $J - T(0)$ есть гомеоморфизм в $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$.

Действительно, пусть $v \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$. Тогда $T(\lambda)v$ есть нелинейное отображение $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ в себя. Значит и $T(0)v$ тоже есть отображение $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ в себя. Следовательно,

$$[J - T(0)]v \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega).$$

Теперь пусть $u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$. Докажем, что существует $v \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ такое, что $[J - T(0)]v = u$, т. е. $v - T(0)v = u$.

Рассмотрим оператор $T(0)$. Очевидно, что при $\lambda = 0$ имеем:

$$A^1 u_0 = f_1(x, t, 0, 0, \dots, 0) \text{ в } \Omega_1; \quad (9)$$

$$B_j u_0|_{\Gamma_1} + C_j u_0|_{\Gamma_1} = g_j(x'', t), \quad j = 1, \dots, 2m, \quad x'' \in \Gamma_1; \quad (10)$$

$$R_j u_0|_{\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad j = 1, \dots, m, \quad x' \in \Gamma; \quad (11)$$

$$u_0|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \left. \frac{\partial^{x-1} u}{\partial t^{x-1}} \right|_{t=0} = \varphi_{x-1}(x), \quad x = \frac{m}{b}. \quad (12)$$

В силу результата Гюльмисаряна [7] существует единственное решение $T(0)v = u_0 \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ задачи (9)–(12). Тогда существует и $v = u_0 + u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$, т. е. оператор $J - T(0)$ устанавливает изоморфизм в пространстве $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$. Непрерывность оператора $J - T(0)$ очевидна. Теперь докажем непрерывность оператора $[J - T(0)]^{-1}$.

Пусть $[J - T(0)]v_n = u_n$, $[J - T(0)]v = u$ и пусть $u_n \rightarrow u$. Тогда $\|u_n - u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} = \|v_n - T(0)v_n - v + T(0)v\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} = \|v_n - v\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}$.

Отсюда получаем, что $v_n \rightarrow v$ при $u_n \rightarrow u$.

Следовательно, оператор $[J - T(0)]$ непрерывный.

Лемма 4. Если u есть решение $u = T(\lambda)u$ из $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, то $\|u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq M$, где M — постоянная, не зависящая от λ .

Доказательство. Пусть u — решение $u = T(\lambda)u$. Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$A' \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (13)$$

$$A^2 \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_2 = 0 \text{ в } \Omega_2; \quad (14)$$

$$B_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_2|_{\Gamma_1} + C_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_2|_{\Gamma_1} = g_j(x'', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1, 2, \dots, 2m; \quad (15)$$

$$R_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) W_2|_{\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1, \dots, m; \quad (16)$$

$$W|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \left. \frac{\partial^{x-1} W}{\partial t^{x-1}} \right|_{t=0} = \varphi_{x-1}(x), \quad x = \frac{m}{b}. \quad (17)$$

В силу работы Гюльмисаряна [7] существует единственное решение $W \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$ задачи (13)–(17) и имеет место следующая оценка:

$$\|W\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \left\{ \sum_{j=0}^{x-1} \|\varphi_j\|_{W_{x,t}^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} \right\},$$

Пусть $\gamma > 0$. Деля замену $W = e^{\gamma t} \hat{W}$, рассмотрим двойственную к (13)–(17) задачу:

$$A^1 \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{W} = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (18)$$

$$A^2 \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{W}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega_2; \quad (19)$$

$$B_j \hat{W}_1|_{\Gamma_1} + C_j \hat{W}_2|_{\Gamma_1} = e^{-\gamma t} g_j(x'', t), \quad x'' \in \Gamma_1, \quad j = 1 \dots 2m; \quad (20)$$

$$R_j \hat{W}_2|_{\Gamma} = e^{-\gamma t} \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1 \dots m; \quad (21)$$

$$\hat{W}|_{t=0} = \varphi_0(x) = v_0(x), \quad \frac{\partial \hat{W}}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\gamma \varphi_0 + \varphi_1 = v_1(x), \dots, \frac{\partial^{x-1} \hat{W}}{\partial t^{x-1}} \Big|_{t=0} = v_{x-1}(x). \quad (22)$$

В силу той же работы [7] для решения двойственной задачи (18)–(22) имеет место следующая оценка:

$$\|\hat{W}\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{x-1} \|\gamma_j\|_{W_{x,t}^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} \right\}. \quad (23)$$

C — постоянная, не зависящая от $\hat{W}$, g_j , ψ_j . В силу единственности решения задачи (13)–(17) имеем

$$\|e^{-\gamma t} W\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \left\{ \sum_{j=1}^{x-1} \|\gamma_j\|_{W_{x,t}^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} \right\}.$$

Далее пусть v — единственное решение задачи:

$$A^1 \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) v_1 = f_1(x, t, \lambda u, \dots, \lambda D^m u) \quad \text{в } \Omega_1,$$

$$A^2 \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) v_2 = f_2(x, t, \lambda u, \dots, \lambda D^m u) \quad \text{в } \Omega_2;$$

$$B_j \left(x, t, D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) v_2|_{\Gamma} = 0;$$

$$\frac{\partial^\kappa v}{\partial t^\kappa} \Big|_{t=0} = 0, \quad \kappa = 0, \dots, x-1, \quad m = b x.$$

Поступая описанным выше образом и применяя результаты Гюльмисаряна [7], получим следующую оценку:

$$\|e^{-\gamma t} v\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \{ \|e^{-\gamma t} f_1(x, t, \dots, \lambda u, \dots, \lambda D^m u)\|_{L^2(\Omega_1)} + \|e^{-\gamma t} f_2(x, t, \lambda u, \dots, \lambda D^m u)\|_{L^2(\Omega_2)} \} \leq C \{ \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(0,T)} + M_1 \|e^{-\gamma t} u_1\|_{W_{x,t}^{m,0}(\Omega_1)} + M_2 \|e^{-\gamma t} u_2\|_{W_{x,t}^{m,0}(\Omega_2)} \}; \quad (24)$$

C, M_1, M_2 — положительные постоянные, не зависящие от u_1, h, v, λ и $\gamma > 0$.

С другой стороны, если u есть решение $u = T(\lambda) u$, то для $(u - W - v)$ имеем следующую смешанную задачу:

$$A^1(u - W - v) = 0,$$

$$B_j(u - W - v)|_{\Gamma_1} + C_j(u - W - v)|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$R_j(u - W - v)|_{\Gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial^\kappa (u - W - v)}{\partial t^\kappa} \Big|_{t=0} = 0.$$

В силу единственности решения смешанной задачи имеем $u - W - v = 0$, т. е.

$$u = W + v.$$

Тогда, учитывая оценки (9) и (10), имеем

$$\|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \{ \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(0,T)} + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} + \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \sum_{j=0}^{x-1} \|\varphi_j\|_{W_x^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + M_1 \|e^{-\gamma t} u_1\|_{W_{x,t}^{m,0}(\Omega_1)} + M_2 \|e^{-\gamma t} u_2\|_{W_{x,t}^{m,0}(\Omega_2)} \}.$$

На основании интерполяционного неравенства

$$\|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{m,0}(\Omega)}^2 \leq \varepsilon \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}^2 + \kappa(\varepsilon) \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \kappa(\varepsilon) > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

возьмем $\varepsilon > 0$ таким, что

$$CM \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} &\leq C \left\{ \sum_{j=1}^{x-1} \|\varphi_j\|_{W_x^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \right. \\ &+ \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(0,T)} + \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \\ &\left. + \kappa(\varepsilon) \|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} \right\}. \quad (25) \end{aligned}$$

Далее

$$\|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^T \|e^{-\gamma t} u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \int_G e^{-2\gamma t} u^2(x, t) dx dt.$$

Применяя интегрирование по частям, имеем

$$\|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2\gamma)^{-1} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + (\gamma)^{-1} \int_0^T \int_G e^{-2\gamma t} u \frac{\partial u}{\partial t} dx dt.$$

Применяя неравенство $ab < \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$, получим

$$\|e^{-\gamma t} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2\gamma)^{-1} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|e^{-2\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}^2.$$

Учитывая эту оценку, из (11) имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} &\leq C \left\{ \sum_{j=1}^{x-1} \|\varphi_j\|_{W_x^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(0,T)} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} + \\ &\left. + \kappa(\varepsilon) \frac{1}{2\gamma} \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \kappa(\varepsilon) \frac{1}{2\gamma} \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем такое значение γ , чтобы $\frac{C\kappa(\varepsilon)}{2\gamma} < 1$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} &\leq C \left\{ \sum_{j=1}^{x-1} \|\varphi_j\|_{W_x^{2m-2b_j-b}(\Gamma)} + \|e^{-\gamma t} h\|_{L^2(0,T)} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|'_{W_{x,t}^{2m-m_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(m_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma_1)} + \\ &\left. + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|'_{W_{x,t}^{2m-r_j-\frac{1}{2}, \frac{m}{b}-(r_j+\frac{1}{2})/2b}(\Gamma)} \right\}. \end{aligned}$$

Так как $\|u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq C \|e^{-\gamma t} u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)}$,

то получим $\|u\|_{W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)} \leq M$.

Тем самым лемма доказана.

Итак, оператор $T(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лере—Шаудера. Следовательно, $T(1)$ имеет неподвижную точку, т. е. $T(1)u = u$. Таким образом нелинейная смешанная задача (1)–(4)

имеет решение $u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$. Так $\{f_1(x, t, 0, \dots, 0), g_1, \dots, g_{2m}, \psi_1, \dots, \psi_m, \varphi_0, \dots, \varphi_{x-1}\}$ — ненулевой вектор, u нетривиально. При более сильных предположениях на $f_1(x, t, \xi_1, \dots, \xi_m)$ доказывается единственность решения.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим, что функция f_1 бесконечно дифференцируема по $(x, t, \xi_1, \dots, \xi_m)$ в Ω_1 . Тогда нелинейная смешанная задача (1)–(4) имеет

единственное решение $u \in W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $u^1(x, t)$ и $u^2(x, t)$ — два решения нелинейной смешанной задачи с одними и теми же правыми частями $f, g_j, \psi_j, \varphi_j$.

$$A^1 u_1^1 = f_1(x, t, u, \dots, D^m u) \text{ в } \Omega_1,$$

$$B_j u_1^1|_{\Gamma_1} + C_j u_1^1|_{\Gamma_1} = g_j(x'', t), \quad x'' \in \Gamma_1, \quad j = 1 \dots 2m,$$

$$R_j u_1^1|_{\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1 \dots m,$$

$$u^1|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \frac{\partial^{x-1} u^1}{\partial t^{x-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_{x-1}(x)$$

и

$$A^1 u_1^2(x, t) = f_1(x, t, u, \dots, D^m u) \text{ в } \Omega_1,$$

$$B_j u_1^2|_{\Gamma_1} + C_j u_1^2|_{\Gamma_1} = g_j(x'', t), \quad x'' \in \Gamma_1, \quad j = 1 \dots 2m,$$

$$R_j u_1^2|_{\Gamma} = \psi_j(x', t), \quad x' \in \Gamma, \quad j = 1 \dots m,$$

$$u^2|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \frac{\partial^{x-1} u^2}{\partial t^{x-1}} \Big|_{t=0} = \varphi_{x-1}(x).$$

Пусть $v = u^1 - u^2$. Запишем приращение f в виде

$$\Delta f = f(x, t, u^1, \dots, D^m u^1) - f(x, t, u^2, \dots, D^m u^2) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x, t, \tau u^1 + (1-\tau)u^2, \tau Du^1 + (1-\tau)Du^2, \dots, \tau D^m u^1 +$$

$$+ (1-\tau)D^m u) d\tau = v \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u} d\tau + v_x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u_x} d\tau + \dots +$$

$$+ D^m v \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial (U_x)^m} d\tau.$$

Введем обозначения

$$a_m = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial D^m u} d\tau, \quad a_{m-1} = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial D^{m-1} u} d\tau, \dots, \quad a = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u} d\tau,$$

Тогда получим тождество

$$\Delta f \equiv a_m D^m v + a_{m-1} D^{m-1} v + \dots + a v.$$

Учитывая последнее для $v = u^1 - u^2$ и обозначая $\tilde{A} = A - \Delta f$, получаем следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} \tilde{A} v &= 0, \\ B_j v|_{s_{\Gamma_1}} + C_j v|_{s_{\Gamma_2}} &= 0, \quad R_j v|_{s_{\Gamma}} = 0, \\ v|_{t=0} &= 0, \dots, \left. \frac{\partial^{x-1} v}{\partial t^{x-1}} \right|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

В силу единственности решения линейной смешанной задачи эта однородная задача имеет только нулевое решение $v \equiv 0$. Следовательно, $u^1 = u^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович М. С. и Вишик М. И. УМН, т. XIX, вып. 3, 1964.
2. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Изд-во Львовского ун-та, 1961.
3. Эйдельман С. Д. Матем. сб. т. 33(75), 1953, № 2.
4. Слободецкий Л. Н. Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, 197 (1958).
5. Олейник О. А., Кружков С. Н. УМН, т. XV в. 5, 1960.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Изд-во „Наука“, М., 1967.
7. Гюльмисарян А. Г., „Изв. АН Арм. ССР, т. XVIII, вып. 1. 1965.
8. Bui an Ton. Duke Mathematical Jour., vol 34, Number 3, 1967.
9. Browder F. E. Math. Ann. 162, 2, 280—283.
10. Browder F. E. Trans. Amer. Math. soc, 117. (1965), 530—550.
11. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
12. Петровский И. Г. Бюлл. МГУ, секция А. I. вып. 7, 1935.
13. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, М., 1956.

Поступило 4. III 1969

Н. Н. Агаџев, А. М. Әһмәдова

Јүксәк тәртибли кәсилән әмсаллы гејри-хәтти параболик тәнлик үчүн гарышыг мәсәләнин һәлли нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) тәнлијинин (2), (3) сәрһәд шәртләрини, (4) башлангыч шәртини өдәјән һәллинин варлыг вә јеканәлији ујғун олараг 1 вә 2 теоремләри васитәсилә исбат олунмушдур.

Гејд етмәк лазымдыр ки, (1)—(4) мәсәләсини һәлл етмәк үчүн гојулан мәсәлә ујғун оператор тәнликлә әвәз олунмушдур ки, һәмин

оператор (T_{λ}) компактдыр, $W_{x,t}^{2m, \frac{m}{b}, 2}$ (Ω) фәзасында комеоморфизм тәшкил едир вә $T(\lambda)$ операторунун сәрһәддә тәрпәнмәз нөгтәси јохдур. Даһа доғрусу, һәмин оператор Лере-Шаудер принципинин бүтүн шәртләрини өдәјир. Беләликлә, һәллин варлыгы алыныр вә әләвә шәртләр дахилиндә һәллин јеканәлији исбат олунур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазијјат елмләри серијасы, 1969, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 3

УДК 519.45+519.48

А. К. СЛИПЕНКО, Р. Б. ФЕЙЗУЛЛАЕВ

ОБ ИДЕАЛЬНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЯХ ОПЕРАТИВОВ

В настоящей статье рассматриваются идеальные эквивалентности некоторых классов позиционных операторов [1], в частности симметрических ассоциативов и альтернативов. Некоторые результаты, известные для полугрупп [2, 3] и полугруд [4], оказываются верны для ассоциативов и альтернативов [1]. Основные результаты настоящей работы сформулированы в теоремах пп. 1.2, 1.6, 2.4. При этом использована следующая символика: $\wedge$ —символ конъюнкции, $\forall$ —квантор всеобщности, $\leftrightarrow$ —логическая эквивалентность, $|X|$ —мощность множества X , $P(x)$ —множество всех подмножеств множества X . Основные сведения из теории бинарных отношений, использованные в статье, можно найти в работе [2].

§ 1.

1.1. Оперативом называется множество S с одной всюду определенной n -арной операцией: $S = \{s_1 s_2 \dots s_n\}$, где $s, s_i \in S$. Если операция удовлетворяет ассоциативному закону, т. е. $[s_1, s_2 \dots s_{2n-1}] = [s_1 s_2 \dots s_{k-1} [s_k \dots s_{k+n-1}] s_{n-k} \dots s_{2n-1}]$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то S называется ассоциативом; если же n —нечетное, то $[s_1 s_2 \dots s_{2n-1}] = [s_1 \dots s_{k-1} [s_k s_{k+1} \dots s_{k+n-1}] s_{k+n} \dots s_{2n-1}]$ при k нечетном и $[s_1 s_2 \dots s_{2n-1}] = [s_1 \dots s_{j-1} [s_j s_{j+1} \dots s_j] s_{k+j} \dots s_{2n-1}]$ при j четном (косоассоциативный закон), то S называется альтернативом [1]. 2—ассоциатив есть полугруппа, а 3—альтернатив—полугруда В. В. Вагнера [4].

Термин „оператив“ будем применять для обозначения ассоциативов и альтернативов, хотя обычно (см. напр. [1]) он употребляется в более широком смысле. Если $A_1 \leq S$, то через $[A_1 A_2 \dots A_n]$ обозначим множество всех произведений $[a_1 a_2 \dots a_n]$, где $a_i \in A_i$. Последовательность k одинаковых сомножителей $aa \dots a$ будем обозначать a^k . Непустое множество A оператора S называется k -идеалом, если $[S^{k-1} AS^{n-k}]$. 1-идеал называется правым идеалом, n -идеал—левым идеалом, k -идеал ($k \neq 1, n$), называется $(k-1)$ -латеральным идеалом. Если A —левый и правый идеал, то A называется двусторонним идеалом; если же A — k -идеал для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, то A называют идеалом оператора S . Главным k -идеалом, порожденным элементом $a \in S$, называется наименьший k -идеал, содержащий элемент a (обозначать его будем $k[a]$).

1.2. Элементы a, b назовем k -идеально эквивалентными, если они порождают один и тот же главный k -идеал. Обозначим лево-

идеальную эквивалентность через l , правую— r , двустороннеидеальную— ρ , κ -латерально-идеальную— λ_κ , идеальную— g ; легко видеть, что для оператора S

$$\begin{aligned}(a, b) \in l &\leftrightarrow a \cup [S^{n-1} a] = b \cup [S^{n-1} b], \\(a, b) \in r &\leftrightarrow a \cup [a S^{n-1}] = b \cup [b S^{n-1}], \\(a, b) \in \rho &\leftrightarrow a \cup [a S^{n-1}] \cup [S^{n-1} a] \cup [S^{n-1} a S^{n-1}] = \\&= b \cup [b S^{n-1}] \cup [S^{n-1} b] \cup [S^{n-1} b S^{n-1}], \\(a, b) \in g &\leftrightarrow a \cup \left\{ \bigcup_{\kappa=1}^n [S^{\kappa-1} a S^{n-\kappa}] \right\} \cup [S^{n-1} a S^{n-1}] = \\&= b \cup \left\{ \bigcup_{\kappa=1}^n [S^{\kappa-1} b S^{n-\kappa}] \right\} \cup [S^{n-1} b S^{n-1}].\end{aligned}$$

Теорема. Пусть $[S^n] = S$. Главный κ -латеральный идеал $\lambda_\kappa = [a]$ ассоциатива S равен

$$\lambda_\kappa [a] = a \cup \left\{ \bigcup_l [S^l a S^m] \right\}, \quad (1)$$

где $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ $l:d$ (d —наибольший общий делитель κ и $n-1$), m —наименьший неравный нулю положительный вычет числа $n-l-1$ по модулю $n-1$. Главный κ -латеральный идеал $\lambda_\kappa [a]$ альтернатива S определяется формулой (1) при κ четном, если κ нечетно, то

$$\lambda_\kappa [a] = a \cup [S^\kappa a S^{n-\kappa-1}] \cup [S^{n-1} a S^{n-1}].$$

Доказательство. Пусть S —ассоциатив, $[S^n] = S$. Главный κ -латеральный идеал, порожденный элементом a , должен, кроме a содержать элементы:

$$\begin{aligned}[S^\kappa a S^{n-\kappa-1}], [S^\kappa [S^\kappa a S^{n-\kappa-1}] S^{n-\kappa-1}], \\[S^\kappa [S^\kappa [S^\kappa a S^{n-\kappa-1}] S^{n-\kappa-1}] S^{n-\kappa-1}].\end{aligned} \quad (2)$$

Каждый член последовательности (2) ассоциатива S , учитывая, что $[S^n] = S$, можно привести к виду $[S^l a S^m]$, где натуральное l ($l, m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$) такое, что сравнение $xl \equiv \kappa \pmod{n-1}$ разрешимо. Последнее имеет решение тогда, когда l делится на наибольший общий делитель (κ и $n-1$). Отметим еще, что $m \equiv n-l-1 \pmod{n-1}$. Если S —альтернатив, κ четно, то рассуждения подобны вышеизложенным. Если же κ нечетно, то члены последовательности (2), начиная со второго, можно преобразовать к виду $[S^{n-1} a S^{n-1}]$. Этим и доказывается теорема.

Следствие. В ассоциативе S , $[S^n] = S$, $\lambda_i [a] \subseteq \lambda_j [a]$ тогда и только тогда, когда i делится на наибольший общий делитель j и $n-1$. Этот же результат справедлив и для альтернатива при четных i, j .

1.3. Теорема. Пусть оператор S удовлетворяет условию $[S^n] = S$, тогда

$$a \lambda_\kappa b \leftrightarrow (a \in \lambda_\kappa [b] \wedge b \in \lambda_\kappa [a]).$$

Доказательство. Пусть сначала S —ассоциатив:

1) если $a \lambda_\kappa b$, то $\lambda_\kappa [a] = \lambda_\kappa [b]$ и, следовательно, $a \in \lambda_\kappa [b]$, $b \in \lambda_\kappa [a]$;

2) пусть теперь $a \in \lambda_\kappa [b]$, $b \in \lambda_\kappa [a]$. На основании теоремы 1

$$\lambda_\kappa [a] = a \cup [S^d a S^{n-d-1}] \cup [S^{2d} a S^{n-2d-1}] \cup \dots \cup [S^{n-1} a S^{n-1}],$$

где d —наибольший общий делитель.

Тогда $a \in [S^{dm} b S^{n-dm-1}]$, $b \in [S^{dl} a S^{n-dl-1}]$ при некоторых $l, m \in \left\{1, 2, \dots, \frac{n-1}{d}\right\}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}[S^d a S^{n-d-1}] &\subseteq [S^d [S^{dm} b S^{n-d-1}]] \subseteq [S^{(m+1)d} b S^{n-(m+1)d-1}] \\ \text{аналогично} \quad [S^{2d} a S^{n-2d-1}] &\subseteq [S^{(m+2)d} b S^{n-(m+2)d-1}], \\ &\dots \dots \dots \\ [S^{n-1} a S^{n-1}] &\subseteq [S^{md} b S^{n-md-1}]\end{aligned}$$

(везде, где показатель превышает $n-1$, берем натуральный вычет по $\text{mod } (n-1)$). Отсюда видим, что $\lambda_\kappa [a] \subseteq \lambda_\kappa [b]$. Аналогично можно доказать обратное включение. Если теперь S —альтернатив, κ четно, то доказательство совпадает с приведенным. Если же κ нечетно, то, доказывая достаточность, рассмотрим два случая: 1) $a \in [S^\kappa b S^{n-\kappa-1}]$ и 2) $a \in [S^{n-1} b S^{n-1}]$. В обоих случаях легко показать, что $\lambda_\kappa [a] \subseteq \lambda_\kappa [b]$. Аналогично доказывается обратное включение. Доказанная теорема справедлива для левоидеальных и правоидеальных эквивалентностей.

1.4. В дальнейшем через $L_1(R_1)$ будем обозначать классы, на которые разбивает эквивалентность $l(r)$ оператор S .

Лемма. Если $a_1 \in L_1 \cap R_1$, $a_2 \in L_2 \cap R_2$, то $L_1 \cap R_2 \neq \emptyset \leftrightarrow L_2 \cap R_1 \neq \emptyset$.

Из леммы следует перестановочность эквивалентностей l и r . Обозначим $D = l \circ r$ (здесь $\circ$)—произведение бинарных отношений.

Теорема. Отношение D является эквивалентностью на множестве S .

Доказательство утверждений п. 1.4. мы опускаем, так как метод его совпадает с методами доказательств соответствующих утверждений для полугрупп и полугруд (см. напр. [2.4]).

1.5. В заключение параграфа рассмотрим некоторые свойства левых, правых и двусторонних идеалов. Если L, R, Δ —некоторые классы элементов оператора S относительно эквивалентностей r, l, ρ (см. п. 1.2) и если $a \in L$ (соответственно $a \in R, \Delta$), то, очевидно, $[S^{n-1} L] \cup L = [S^{n-1} a] \cup a$ (соответственно:

$$\begin{aligned}[RS^{n-1}] \cup R &= [a S^{n-1}] \cup a; \Delta \cup [S^{n-1} \Delta] \cup [S^{n-1}] \cup [S^{n-1} \Delta S^{n-1}] = \\&= a \cup [S^{n-1} a] \cup [a S^{n-1}] \cup [S^{n-1} a S^{n-1}].\end{aligned}$$

Лемма. $[S^{n-1} L] \cup L$ и $[S^{n-1} L] \setminus L$ (соответственно: $[RS^{n-1}] \cup U R$ и $[RS^{n-1}] \setminus R$; $[\Delta S^{n-1}] \cup [S^{n-1} \Delta] \cup [S^{n-1} \Delta S^{n-1}]$ и $[\Delta S^{n-1}] \cup U [S^{n-1} \Delta] \cup [S^{n-1} \Delta S^{n-1}] \setminus R$) являются левыми (соответственно правыми, двусторонними) идеалами.

Доказательство. Его мы приведем для двусторонних идеалов оператора S . То, что $\Delta \cup [S^{n-1} \Delta] \cup [\Delta S^{n-1}] \cup [S^{n-1} \Delta S^{n-1}]$ является двусторонним идеалом, мы уже отметили выше. Очевидно, $[S^{n-1} \Delta] \cup [\Delta S^{n-1}] \cup [S^{n-1} \Delta S^{n-1}] \setminus \Delta = \rho[a] \setminus \Delta$, где $a \in \Delta$. Пусть $B = \rho[a] \setminus \Delta \neq \emptyset$ и пусть $[S^{n-1} B]$ не $\subseteq B$, тогда в множестве $[S^{n-1} B]$ найдется элемент $z \notin B$. При некоторых $x_1 \in S$, $t \in B$, $z = [x_1 x_2 \dots x_{n-1} t]$. Тогда $z \in [S^{n-1} t] \subseteq [S^{n-1} \rho[a]] \subseteq \rho[a]$ и $z \in \rho[a] \setminus \Delta$, значит $z \in \Delta$ и $\rho[a] = \rho[z]$. Но тогда $\rho[a] = \rho[z] = z \cup [S^{n-1} z] \cup [z S^{n-1}] \cup [S^{n-1} z S^{n-1}] \subseteq t \cup [t S^{n-1}] \cup [S^{n-1} t] \cup [S^{n-1} t S^{n-1}] = \rho[t]$. С другой стороны, так как $t \in B$, $\rho[t] \subseteq B \cup [S^{n-1} B] \cup [B S^{n-1}] \cup [S^{n-1} B S^{n-1}] \subseteq \rho[a] \cup [S^{n-1} \rho[a]] \cup [\rho[a] S^{n-1}] \cup [S^{n-1} \rho[a] S^{n-1}] = \rho[a]$. Однако равенство $\rho[a] = \rho[t]$ невозможно, так как $a \in \Delta$,

$t \in \Delta$, следовательно, $[S^{n-1}B] \subseteq B$ и B — левый идеал. Аналогично можно доказать, что B — правый идеал.

1.6. Идеалы T_1 и T_2 ($T_1 \subset T_2$) называются соседними, если не существует такого идеала T , что $T_1 \subset T \subset T_2$.

Лемма. *Левые (соответственно правые, двусторонние) идеалы $[S^{n-1}L] \setminus L$ и $[S^{n-1}L] \setminus L$ (соответственно $[RS^{n-1}] \setminus R$ и $[RS^{n-1}] \setminus R$, $[\Delta S^{n-1}] \cup [S^{n-1}\Delta] \cup [S^{n-1}\Delta S^{n-1}] \setminus \Delta$ и $[\Delta S^{n-1}] \cup [S^{n-1}\Delta] \cup [S^{n-1}\Delta S^{n-1}] \cup \Delta$) — соседние.*

Доказательство. Пусть существует такой левый идеал T , что $[S^{n-1}L] \setminus L \subset T \subset [S^{n-1}L] \cup L$, тогда существует элемент $l \in T$ такой, что $l \in L$. Но тогда $[S^{n-1}l] \cup l \subseteq T$ и выходит, что $[S^{n-1}L] \cup L \subseteq T$. Получили противоречие. Доказательство для правых и двусторонних идеалов аналогично.

Теорема. *Теоретико-множественная разность двух левых (правых, двусторонних) идеалов $T_2 \setminus T_1$ есть l -класс (r , p -класс) тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 — соседние идеалы.*

Доказательство. Необходимость вытекает из лемм пп. 1.5 и 1.6. Достаточность. Докажем, например, что если T_2 и T_1 — соседние двусторонние идеалы, то $T_2 \setminus T_1$ является p -классом. Пусть $a \in T_2 \setminus T_1$, тогда очевидно, $T_1 \cup [S^{n-1}a] \cup [aS^{n-1}] \cup [S^{n-1}aS^{n-1}] \cup a$ — двусторонний идеал, содержащий T_1 и не равный ему. Следовательно,

$$T_1 \cup [S^{n-1}a] \cup [aS^{n-1}] \cup [S^{n-1}aS^{n-1}] \cup a = T_2.$$

Следовательно,

$$T_2 \setminus T_1 \subseteq a \cup [S^{n-1}a] \cup [aS^{n-1}] \cup [S^{n-1}aS^{n-1}].$$

Если возьмем любой элемент $a_1 \in T_2 \setminus T_1$ ($a_1 \neq a$), то для a_1 можно провести такие же рассуждения. Следовательно, $a \in p[a_1]$. Отсюда легко видеть, что элементы $T_2 \setminus T_1$ содержатся в единственном p -классе Δ . Пусть некоторый элемент $x \in \Delta$ не принадлежит $T_2 \setminus T_1$. Так как $x \in p[a]$, то $x \in T_2$ и $x \in T_1$, но с другой стороны $a \in p[x]$, а поэтому $a \in T_1$. Полученное противоречие доказывает, что $x \in T_2 \setminus T_1$.

Замечание. Утверждения пп. 1.4—1.6 справедливы для произвольных p -оперативов (см. [1]).

§ 2.

2.1. Исследуем D -строение симметрических ассоциативов и альтернативов полных и частичных отображений. Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_{n-1}$ — некоторые непустые множества. $P(\mathcal{Q}_i \times \mathcal{Q}_j)$ — множество всех бинарных отношений между элементами $\mathcal{Q}_i$ и $\mathcal{Q}_j$; $\Phi_i \subseteq (\mathcal{Q}_i \times \mathcal{Q}_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n-2$; $\Phi_{n-1} \subseteq P(\mathcal{Q}_{n-1} \times \mathcal{Q}_1)$. Пусть $F = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \dots \times \Phi_{n-1}$ ($\times$ — знак декартова произведения). Элементами F являются упорядоченные последовательности — «векторы» $f_1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_{n-1}^1)$, где $\varphi_j^1 \in \Phi_j$. Множество F является ассоциативом относительно операции:

$$f = [f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n], \quad (3)$$

если j -я компонента φ_j вектора-произведения (3) получается по формуле:

$$\varphi_j = \varphi_j^1 \circ \varphi_{j+1}^2 \circ \dots \circ \varphi_{n-1}^{n-j} \circ \varphi_1^{n-j+1} \circ \dots \circ \varphi_n^1. \quad (4)$$

Последняя является альтернативом относительно операции (3), если j -я компонента вектор-произведения f получается по формуле (4) при j нечетном, а если j четное, то

$$\varphi_j = \varphi_j^1 \circ \varphi_{j+1}^{n-1} \circ \dots \circ \varphi_{n-1}^{j+1} \circ \varphi_1^j \circ \dots \circ \varphi_n^1. \quad (5)$$

Если Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) является множеством всех полных (частичных) отображений множества $\mathcal{Q}_i$ в $\mathcal{Q}_{i+1}$, то оператив f называется симметрическим оперативом полных (частичных) отображений. 2.2. Как обычно, первой (второй) проекцией преобразования φ_1 множества $\mathcal{Q}_1$ в $\mathcal{Q}_{i+1}$ называется множество $pr_1 \varphi_1$ (соответственно $pr_2 \varphi_1$) всех элементов $\omega \in \mathcal{Q}_1$ ($\xi \in \mathcal{Q}_{i+1}$) таких, что $\varphi_1(\omega) = \xi$ при некоторых $\xi \in \mathcal{Q}_{i+1}$ (соответственно, при некотором $\omega \in \mathcal{Q}_1$).

Лемма. Пусть $\max |pr_2 \varphi_1|_{i=1}^{n-1} > \min |\mathcal{Q}_k|_{k=1}^{n-1}$ для вектора $a = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ симметрического оператива полных (частичных) отображений. arb (соответственно $alb, arb, agb, a \lambda_k b$) тогда и только тогда, когда $a = b$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из правил умножения векторов ассоциатива или альтернатива. Если выполняется условие леммы и $b \neq a$, то, например, для лево-адеальной эквивалентности $b \in [F^{n-1}a]$ при любом $a \in F$.

2.3. Для каждой проекции φ_1 вектора a симметрического ассоциатива (альтернатива) F определим разбиение $\pi_{\varphi_1} = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}$ множества $pr_1 \varphi_1$ (для оператива полных отображений множества $\mathcal{Q}_1$). Это разбиение определяет отношение эквивалентности на множестве $pr_1 \varphi_1$.

Лемма. Пусть $a = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, $b = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ — элементы симметрического ассоциатива (альтернатива) (полных) отображений. Если $\max |pr_2 \varphi_1|_{i=1}^{n-1} \leq \min |\mathcal{Q}_k|_{k=1}^{n-1}$, то:

$$1) alb \leftrightarrow (pr_2 \varphi_1 = pr_2 \psi_1, i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$2) arb \leftrightarrow (pr_1 \varphi_1 = pr_1 \psi_1 \wedge \pi_{\varphi_1} = \pi_{\psi_1}, i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Доказательство. 1) исходя из правил (см. п. 2.1) умножения векторов симметрического ассоциатива, для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$a \in [F^{n-1}b] \rightarrow pr_2 \varphi_1 \subseteq pr_2 \psi_1; \quad a \in [F^{n-1}b] \rightarrow pr_2 \psi_1 \subseteq pr_2 \varphi_1.$$

Отсюда

$$alb \leftrightarrow a \in [F^{n-1}b] \wedge b \in [F^{n-1}a] \rightarrow pr_2 \psi_1 = pr_2 \varphi_1.$$

Этим доказана необходимость условия. Для доказательства достаточности условия необходимо подобрать такие $f_j, f'_j \in F$, чтобы при всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

$$pr_2 \psi_1 = pr_2 \varphi_1 \rightarrow b = [f_1 f_2 \dots f_{n-1} a] \wedge a = [f'_1 f'_2 \dots f'_{n-1} b].$$

Это легко сделать, учитывая симметричность ассоциатива и то условие, что

$$\max |pr_2 \varphi_1|_{i=1}^{n-1} \leq \min |\mathcal{Q}_k|_{k=1}^{n-1};$$

$$2) arb \leftrightarrow a \in [b F^{n-1}] \wedge b \in [a F^{n-1}] \rightarrow (pr_1 \varphi_1 \subseteq pr_1 \psi_1 \wedge pr_1 \psi_1 \subseteq pr_1 \varphi_1) \wedge (\pi_{\varphi_1} \subseteq \pi_{\psi_1} \wedge \pi_{\psi_1} \subseteq \pi_{\varphi_1}) \leftrightarrow pr_1 \varphi_1 = pr_1 \psi_1 \wedge \pi_{\varphi_1} = \pi_{\psi_1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Обратно, если $pr_1 \varphi_1 = pr_1 \psi_1 \wedge \pi_{\varphi_1} = \pi_{\psi_1}$, то легко подобрать $f_1, f'_1 \in F$ так что

$$a = [b f_2 f_3 \dots f_n] \wedge b = [a f'_2 f'_3 \dots f'_n].$$

2.4. Рангом проекции φ_1 ($\text{rang } \varphi_1$) вектора симметрического оператива F называется $|pr_2 \varphi_1|$ или $|pr_1 \varphi_1 / \pi_{\varphi_1}|$ (эти кардинальные числа, конечно, равны).

Теорема. Пусть F — ассоциатив (альтернатива) (полных) отображений. $a, b \in F$;

$$a = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \quad b = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1});$$

$$\max |pr_2 \varphi_i|_{i=1}^{n-1} \leq \min |\varphi_k|_{k=1}^{n-1},$$

$$aDb \leftrightarrow (\text{rang } \varphi_i = \text{rang } \psi_i, i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Доказательство. Пусть aDb , тогда найдется элемент $c \in F$ такой, что alc и crb . Согласно леммам 2 и 3 соответствующие компоненты a и c , а также c и b имеют один и тот же ранг. Обратно, предположим, что $\text{rang } \varphi_i = \text{rang } \psi_i, i = 1, 2, \dots, n-1$. Всегда можно подобрать такой вектор $c = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, что $pr_2 \varphi_i = pr_2 \xi_i, pr_1 \xi_i = pr_2 \psi_i; \pi_{\xi_i} = \pi_{\psi_i} (i = 1, 2, \dots, n-1)$. Но тогда, согласно леммам 2, 3, alc, crb и, следовательно, aDb .

2.5. Теорема п. 2.4 справедлива и для симметрических альтернативов частичных или полных отображений, хотя доказательство приводится несколько иначе.

2.6. Теорема. Идеальные эквивалентности D и ρ симметрического оператора F частичных (полных) отображений совпадают.

Доказательство. Если $\max |pr_2 \varphi_i|_{i=1}^{n-1} > \min |\varphi_k|_{k=1}^{n-1}$, то классы таких элементов оператора F как по эквивалентности ρ , так и по эквивалентности D состоят из одного элемента (см. п. 2.2). Следовательно, для таких векторов теорема справедлива. Рассмотрим теперь векторы, для которых $\max |pr_2 \varphi_i|_{i=1}^{n-1} \leq \min |\varphi_k|_{k=1}^{n-1}$. Если $a = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, $b = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, то $b \in \rho[a]$ тогда и только тогда, когда $\text{rang } \psi_i \leq \text{rang } \varphi_i; i = 1, 2, \dots, n-1$. Это вытекает из правил образования $\rho[a]$ и правил умножения векторов ассоциатива и альтернатива. 1) пусть $a \rho b$, тогда $\rho[a] = \rho[b]; b \in \rho[a]$ и $a \in \rho[b]$, следовательно, $\text{rang } \psi_i \leq \text{rang } \varphi_i, \text{rang } \varphi_i \leq \text{rang } \psi_i$, поэтому $\text{rang } \varphi_i = \text{rang } \psi_i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Тогда, согласно утверждениям пп. 2.4, 2.5.— aDb . 2) Если aDb , то вследствие $D \leq \rho$ ($r \leq \rho$ и $l \leq \rho$) $a \rho b$. Этим и доказывается утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глускин Л. М. Позиционные операторы. Матем. сб., 68, 3 (1965).
2. Clifford A. H., Preston G. B. The algebraic theory of semi-groups, Providence, 1961.
3. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., 1960.
4. Мустафаев Л. Г. Об идеальных эквивалентностях полугрупп. Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре. Тарту, 1966.
5. Воробьев Н. Н. Уч. зап. ЛГПИ им. Герцена, 103, 1955.

Поступило 4. III 1969

А. К. Слипенко, Р. Б. Фејзуллаев

Оператив үзәриндә идеал эквивалентликләр һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә оператив ән мүнһүм синифләри олан ассоциативләрин альтернативләринин идеал эквивалентликләри верилмишдир. Ишин биринчи һиссәсиндә баш латерал, сол, сағ вә икитәрәfli идеаллар тәтбиг олунмушдур. Икинчи һиссәдә исә идеал эквивалентликләрин көмәји илә ассоциатив вә альтернатив инкаслар өjrәнилмишдир.

АЗӘРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 3

М. А. МАМЕДОВ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТ ГИПОТЕТИЧЕСКИХ КОМЕТ—ПРОДУКТОВ ИЗВЕРЖЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ЮПИТЕРА

Существует две группы гипотез. Согласно одним, комета образуется за пределами солнечной системы, а согласно другим—внутри солнечной системы. Еще в конце XVIII века французские астрономы Лагранж и Лаплас выдвинули свои гипотезы о происхождении комет. Согласно гипотезе Лагранжа, все кометы (периодические и непериодические) возникли в результате катастрофических взрывов планет и в зависимости от начальных скоростей получили разные орбиты. Кометы с умеренными эксцентриситетами являются короткопериодическими, другие—с эксцентриситетами, близкими к единице, названы долгопериодическими. Согласно гипотезе Лапласа, кометы возникли где-то в межзвездном пространстве. Они движутся по всем направлениям. Когда некоторые из них проникают в сферу действия Солнца, они начинают двигаться вокруг его по равным коническим сечениям. Кометы, имеющие малые перигельные расстояния, мы называем долгопериодическими. Короткопериодические кометы возникли из долгопериодических в результате действия на них планетных возмущений.

Астроном Каландро в результате исследований пришел к выводу, что все кометные орбиты, для которых большие полуоси заключаются в пределах от 2.60 до 6.28 радиусов земной орбиты, первоначально были параболическими и, только благодаря вхождению кометы в сферу действия Юпитера, преобразовались в эллиптические. Поскольку почти для всех короткопериодических комет, за исключением кометы Энке, большие полуоси заключаются в указанных выше пределах, то Каландро считает, что происхождение всех этих орбит объясняется возмущениями Юпитера.

В 1938 г. Корлин развил другую гипотезу о происхождении комет. Он предполагал, что кометы приходят в межгалактическое пространство, где они зарождаются в начале жизни галактики, постепенно концентрируясь из рассеянной межзвездной сферы. Для захвата кометы Солнцем Корлин предполагает наличие по соседству с Солнцем неподвижной по отношению к нему галактической среды, в результате сопротивления которой происходит значительное уменьшение первоначальной скорости кометы.

Акад. О. Ю. Шмидт выдвинул галактическую гипотезу, объясняющую происхождение комет путем захвата Солнцем космической материи при его прохождении через облако в центральной плоскости галактики. В своей гипотезе О. Ю. Шмидт указывает, что ядра комет могут образовываться и распадаться даже сейчас.

Проф. С. В. Орлов высказал новую гипотезу о происхождении комет, согласно которой образование комет произошло, якобы, в результате столкновения астероидов с метеоритами.

С. К. Всехсвятский выдвинул гипотезу образования короткопериодических комет в результате извержений, происходящих на поверхности Юпитера или его спутников. Обосновывая эту гипотезу, он часто обращает внимание на тот факт, что при сближении кометы, Лексела с Юпитером в 1767 г. (за три года до открытия кометы), согласно исследованию Арреста, расстояние между ними было равно 0.0196 а. е., а при сближении кометы Брукса с Юпитером в 1842 г. (за 3,5 года до открытия) — 0,0511 а. е. Комета Вольфа наблюдалась в 1875 г. на расстоянии 0,0824 а. е. от Юпитера. По мнению Т. К. Всехсвятского, эти кометы являются продуктом извержения с поверхности Юпитера.

С. К. Всехсвятский рассматривает величину начальной скорости кометы во время взрыва на поверхности Юпитера. Он предполагает, что планета (в нашем случае Юпитер) движется по кругу с радиусом D . Тогда скорость ее на орбите будет равна (если пренебречь массой планеты m и положить массу Солнца ($M = 1$))

$$v_0 = \frac{\kappa}{\sqrt{D}},$$

где κ — постоянная тяготения. Для скорости движения u относительно планеты имеем формулу

$$u^2 = \kappa^2 m \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{A} \right), \quad (1)$$

где A — полуось планетоцентрической орбиты кометы;
 r — расстояние до центра планеты;
 m — масса планеты.

Положив здесь $r = \Delta$, где Δ — радиус планеты, получим формулу для скорости извержения u_0 . Положив $r = \rho$, где ρ — радиус сферы действия планеты, получим формулу для относительной скорости u_p на границе сферы действия планеты:

$$u_p^2 = \kappa^2 m \left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{A} \right). \quad (2)$$

Из этих соотношений получим

$$u_p^2 = u_0^2 + \frac{2\kappa^2 m (\Delta - \rho)}{\Delta \rho}.$$

Так как Δ мало по сравнению с ρ , то приближенно

$$u_p^2 = u_0^2 - \frac{2\kappa^2 m}{\Delta}.$$

Если направления скоростей u_p и v_0 совпадают, то для гелиоцентрической скорости v в момент достижения кометой сферы действия получим формулу

$$v = u_p + v_0 = \sqrt{u_0^2 - \frac{2\kappa^2 m}{\Delta}} + \frac{\kappa}{\sqrt{D}}. \quad (3)$$

При диаметрально противоположных направлениях u_p и v получим формулу

$$v = u_p - v_0 = \sqrt{u_0^2 - \frac{2\kappa^2 m}{\Delta}} - \frac{\kappa}{\sqrt{D}}. \quad (4)$$

Пусть скорость кометы v на границе сферы действия равна парабол-

ической скорости относительно Солнца, т. е.

$$v = \kappa \sqrt{\frac{2}{D}}.$$

Подставляя это значение v в соотношения (3) и (4), получим

$$u_0^2 = \frac{\kappa^2 (\sqrt{2} - 1)^2}{D} + \frac{2\kappa^2 m}{\Delta} \quad (5)$$

и (если $u_p \parallel v_0$)

$$u_0^2 = \frac{\kappa^2 (\sqrt{2} + 1)^2}{D} + \frac{2\kappa^2 m}{\Delta} \quad (6)$$

(Если u_p направлено противоположно v_0).

Подставляя значения m , D , Δ для Юпитера

$$\left(m = \frac{1}{1047}, \Delta = \frac{1}{2120} \text{ а. е.}, D = 5,20 \text{ а. е.} \right),$$

можно получить:

$$\text{а) } u_0 = 59,8 \text{ км/сек,}$$

$$\text{б) } u_0 = 67,3 \text{ км/сек.}$$

Далее С. К. Всехсвятский показывает, что при некоторых условиях начальная скорость для образования Юпитеровой кометы будет меньше среднего значения скорости, которая равна 60 км/сек, поэтому учитывается скорость вращения планеты вокруг ее оси (12,6 км/сек), предполагаемой для простоты перпендикулярной к плоскости орбиты. Пусть извержение происходит на экваторе планеты. Введем обозначения:

v — линейная скорость точки экватора;

u_0 — скорость взрыва, направленная к радиусу планеты под углом.

Тогда начальная скорость кометы на поверхности планеты будет

$$G^2 = v^2 + u_0^2 + 2u_0 \sin \psi. \quad (7)$$

Здесь, когда начальная скорость взрыва перпендикулярна к поверхности планеты, $\psi = 0$ и $G^2 = v^2 + u_0^2$.

Если, $\psi = +90^\circ$, то $G = v \pm u_0$.

Предельное значение этой скорости $G_{\min}$ (а вместе с тем предельное $u_{\min}$), необходимое для того, чтобы комета покинула сферу действия планеты и стала двигаться по гелиоцентрической орбите, вычисляется из условия, что афелийное расстояние планетоцентрической орбиты кометы равно радиусу сферы действия планеты, полагаемому $\rho = 0,3$.

Для $\psi = 0^\circ$ получим $u_{\min} = 58,3 \text{ км/сек,}$

" $\psi = 90^\circ$ " $u_{\min} = 46,9$ " (u_0 и v совпадали),

$\psi = -90^\circ$ " $u_{\min} = 72,9$ " .

Отсюда видно, I и II случаи должны быть более частыми, чем III, потому что в I и II случаях начальные скорости меньше. Таким образом, с точки зрения теории извержения комет орбит с меньшим e , с большими перигелийными расстояниями и с прямым движением должно быть больше.

С. К. Всехсвятский предполагает, что короткопериодические орбиты с малыми q будут образовываться при несколько большей величине начальной скорости. При увеличении скорости будут получаться эллиптические и гиперболические орбиты. Сначала будем получать кометы с прямым движением (поскольку они отвечают малым начальным скоростям, они должны быть частыми). При $\psi = 0$ и большой скорости ($u_0 = 60,1 \text{ км/сек}$) появляются орбиты с обратным дви-

жением. При дальнейшем увеличении скорости после некоторых ее предельных значений все гелиоцентрические орбиты будут гиперболическими. Предельное значение для u_0 соответствует $84,8 \text{ км/сек}$. При увеличении угла вылета θ от 0° до 180° орбиты кометы будут резкими гиперболами. Многие из этих гипербола будут обладать большими перигельными расстояниями и поэтому окажутся недоступными для наблюдений.

С. К. Всехсвятский считает, что на поверхности больших планет (Юпитер, Сатурн, Нептун), а также, вероятно, и Солнца, в результате мощных процессов происходят извержения, в результате которых и образуются малые тела солнечной системы. Вероятно, в далеком прошлом процессы на поверхности планет и Солнца были более интенсивными и было больше извержений. Поэтому кометы, которые преобразовались тогда, имели всевозможного рода орбиты: гиперболические и эллиптические—с различными размерами и с любыми углами наклона. Но из них в пределах солнечной системы остались только те, которые обладали эллиптическими орбитами.

Таким образом, можно думать, что большинство долгопериодических комет было образовано очень давно. Известно, что их орбиты за это время должны были измениться в результате возмущений, воздействия солнечной радиации и других причин.

„Старые“ короткопериодические кометы, быстро распадаясь, теряли газовые оболочки и перестали существовать как кометы. Весьма существенной задачей является определение в комплексе параболических комет таких, которые образованы недавно („молодых“) комет. Для этого нужно детально изучать орбиты с целью выяснения возможных сближений с той или другой планетой (такие кометы должны иметь большое перигельное расстояние). Вероятно, среди наблюдавшихся комет целый ряд может быть отнесен к Солнцу.

Далее С. К. Всехсвятский указывает, что наблюдая три галилеевых спутника Юпитера, исследователи отмечали исключительно высокое альbedo их поверхностей. Такая высокая отражательная способность может быть только на льду, снегу или замороженной углекислоте и других соединениях, находящихся в твердом состоянии. С другой стороны, эти спутники „слишком“ близки к Юпитеру, поэтому они могут испытывать мощное приливное содействие со стороны планет. Самый большой спутник Сатурна—Титан. Таким образом извержения, происходящие на поверхности спутников, могут дать космическое тело, обладающее всеми особенностями комет. Для того, чтобы покинуть поверхность спутника, продуктам извержения требуется начальная скорость порядка $1\text{—}3 \text{ км/сек}$. Точнее: для спутников Юпитера— $4\text{—}7 \text{ км/сек}$, для спутников Сатурна— 3 км/сек и для спутника Нептуна— 2 км/сек .

С. К. Всехсвятский считает, что все периодические кометы существуют сравнительно недолго, быстро теряют свою газовую оболочку и переходят в семью астероидов. Существует также гипотеза о происхождении долгопериодических комет, принадлежащих акад. В. Г. Фесенкову. Согласно этой гипотезе, кометы могли образоваться так же, как астероиды и метеориты, в результате распада планеты, двигавшейся ранее между орбитами Марса и Юпитера.

Предположим, что при взрыве планеты имел место равномерный выброс вещества по всем направлениям со скоростью v . Определим распределение полученных орбит по большим полуосьям (a) и эксцентриситетам (e) для разных скоростей разлета v . Известно, что осколками малой величины должны получить большую начальную скорость, чем более крупные осколки. Поэтому некоторые первоначальные астероиды с массой 10^{15} г и менее были отброшены от него, на весьма

большие расстояния (приблизительно с параболическими или гиперболическими скоростями). В таком случае после удаления осколков от Солнца приблизительно на десять тысяч а. е. они будут подвержены заметным возмущениям со стороны ближайших звезд. Такие осколки, ушедшие далеко от солнечной системы, могут не вернуться в нее и смогут на весьма продолжительное время сохранить свой первоначальный запас газов, не расходуя его в холодном межзвездном пространстве. После длительного времени некоторые из них могут в результате возмущений тех же звезд опять вернуться к Солнцу. Тогда при близком расстоянии их газовое содержание под действием кометы, хотя они и существовали на больших расстояниях от Солнца со времени распада родоначальной планеты.

В 1949 г. С. К. Всехсвятский, имея в виду малую вероятность таких огромных скоростей, как $58,3\text{—}60,1 \text{ км/сек}$ взрыва на поверхности Юпитера, пришел к гипотезе, что короткопериодические кометы могут образоваться в результате извержений на спутниках Юпитера.

В 1954 г. П. Г. Духновский, рассматривая один из случаев выброса комет с поверхности Юпитера, вычислил гелиоцентрические орбиты для некоторых искусственных условий на поверхности Юпитера и сравнивал распределение элементов с наблюдениями. Результаты П. Г. Духновского не подтвердили теории извержения. С. К. Всехсвятский пишет, что в работе П. Г. Духновского не сказано о том, как подсчитывались теоретические распределения. Видно, что автор вычислил элементы гелиоцентрической орбиты только для двух значений начальной скорости Юпитера— $58,0$ и $59,0 \text{ км/сек}$, в зависимости от планетографических координат. Распределение орбиты по q оказалось совершенно отличным от наблюдаемого. Этого не было бы, отмечает С. К. Всехсвятский, если бы П. Г. Духновским использовались данные и для промежуточных значений скорости ($58,1$; $58,2$; $58,3$; ...). Автор рассматривает извержения Юпитера, приводящие к вылету продуктов извержений, перпендикулярно к поверхности планеты. На основании начальной скорости и планетографических координат точки вылета определяли планетоцентрическое движение. Далее по скорости на границе сферы действия планеты производилось определение элементов гелиоцентрической орбиты. Но при этом не учитывались возможности нерадиальных выбросов, отклонение поверхности планеты от сферы, полная неубедительность предположения о равномерном распределении центров вулканической активности по поверхности планеты и т. д., а главное не рассматривались извержения на больших спутниках Юпитера.

В 1958 г. С. К. Всехсвятский, отвечая П. Г. Духновскому, привел вычисления, в которых были взяты три конкретных значения для v , для каждого из этих значений вычислялось 60 орбит. Однако анализ отдельных особенностей распределений элементов короткопериодических комет не являлся целью этих вычислений, что может представить независимую интересную проблему. С. К. Всехсвятский считает интересным проведение более подробных вычислений с учетом возмущений в области как гелиоцентрического, так и планетоцентрического движения комет вблизи Юпитера.

Противоположную позицию занимает астроном К. А. Штейнс. По его мнению, теория извержения не в силах объяснить природу происхождения комет. Он считает важным выяснить, имеют ли кометы межзвездное происхождение или они образуются на окраине солнечной системы. По его мнению, вокруг Солнца, на больших расстояниях от него, движется много комет, представляющих собой так

называемое кометное облако. Из-за притяжения близких звезд некоторые из этих комет меняют свое направление и начинают двигаться к Солнцу. Спустя миллионы лет, наблюдатели отмечают их как новые кометы. Эти кометы при движении к солнцу имеют параболические орбиты. Наблюдатели легко отмечают новые кометы, потому что они интенсивно выделяют газы и становятся ярче старых. Кроме того, у новых комет хвост содержит много пыли. К. А. Штейнс показывает, что такие параболические кометы изменяют свою орбиту в результате силы притяжения Юпитера, Сатурна и других планет и становятся короткопериодическими.

Е. И. Казимирчак-Полонская пришла к выводу, что некоторые короткопериодические кометы, принадлежащие семейству Юпитера, при прохождении через сферу действия Юпитера испытывают мощные возмущения, в результате которых существенно изменяются форма орбиты и скорость движения кометы.

Весьма интересен вопрос по проверке указанных выше гипотез о происхождении комет при помощи качественного и количественного анализа движений комет или гипотетических небесных тел, из которых образовались кометы. Мы ставим вопрос о численном анализе движения гипотетических небесных тел в рамках гипотезы Лагранжа.

В данной статье излагаются предварительные результаты, характеризующие движение рассматриваемых небесных тел — продуктов извержений от поверхности Юпитера до границы его сферы действия.

§ 1. Вычисление исходных данных

Предполагаем, что в начальный момент t_0 на поверхности Юпитера происходит извержение будущей кометы. Принимаем, что комета удаляется от поверхности Юпитера по оси u , средний радиус Юпитера равен 68775 км. или 0,00045983 а. е.

Обозначим: (x, y, z) — прямоугольные гелиоцентрические координаты кометы относительно неподвижной системы координат;

$(x_\odot, y_\odot, z_\odot)$ — координаты Солнца относительно подвижной системы координат;

(x, y, z) — ювицентрические координаты комет относительно подвижной системы координат (рис. 1).

Согласно обозначениям ювицентрические координаты кометы будут:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, \\ x &= 0,0004583 \text{ а. е.}, \\ y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Для того, чтобы космическое тело покинуло сферу действия Юпитера, необходима так называемая вторая космическая скорость. Она находится следующим образом. Из интеграла живых сил известно, что для Земли

$$v_3 = \kappa \sqrt{\frac{2m_3}{R_3}}, \quad (8)$$

а для Юпитера

$$u_{10} = \kappa \sqrt{\frac{2m_{10}}{R_{10}}},$$

где m_3, R_3, m_{10}, R_{10} — соответственно, массы и радиусы Земли и Юпи-

тера. Из соотношения (8) можно написать следующее:

$$\begin{aligned} u_{10} &= v_3 \sqrt{\frac{m_{10}}{m_3} \cdot \frac{R_3}{R_{10}}} \\ m_{10} &= 313.59 m_3, \\ R_{10} &= 10.82 R_3, \\ v_3 &= 11.19 \text{ км/сек.} \end{aligned} \quad (9)$$

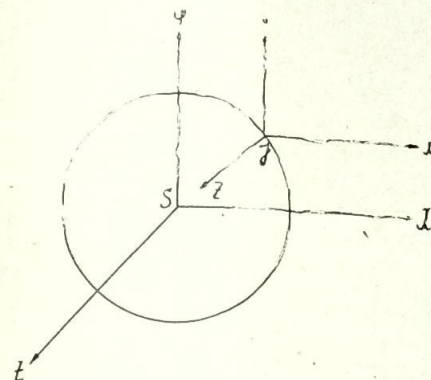


Рис. 1

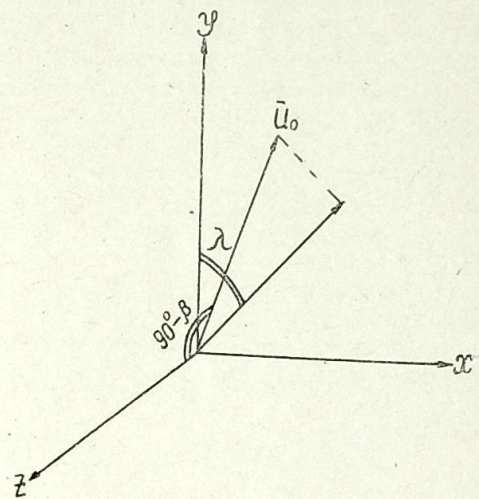


Рис. 2

Подставив в формулу (9) значения m_{10}, R_{10}, v_3 , получим $v_{10} = 60.279 \text{ км/сек}$ или $0.03483684 \text{ а. е./сутки}$. В общем случае направление скорости u_0 характеризуется углами λ и β (λ — угол между проекцией u_0 на плоскости xu и осью y , а β — угол между u_0 и плоскостью xu) (рис. 2):

поэтому

$$\begin{aligned} x &= u_0 \cos \beta \sin \lambda, \\ y &= u_0 \cos \beta \cos \lambda, \\ z &= u_0 \sin \beta. \end{aligned}$$

В нашем случае $\lambda = 0, \beta = 0$ и $u_0 = 0.03483684 \text{ а. е./сутки}$ поэтому

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0.03483684 \text{ а. е./сутки}, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Целесообразно исследовать движение кометы в ювицентрической системе координат, то есть Юпитер рассматривается как центральное тело, комета — как его временный спутник, а Солнце — как возмущающее тело. Для простоты считаем, что Солнце движется вокруг Юпитера по кругу, поэтому координаты Солнца вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x_\odot &= a \cos \frac{2\pi}{T} \cdot t, \\ y_\odot &= a \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t, \\ z_\odot &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $a = -5.2028$ а. е. является средним расстоянием Солнца от Юпитера; T — полный оборот Солнца вокруг Юпитера; $t = 0$ — начальный момент извержения.

§ 2. Интегрирование методом Рунге—Кутты с переменным шагом

Часто бывает, что при гелиоцентрическом движении кометы „слишком“ близко приближаются к большим планетам. В таком случае, как впервые указал Даламбер (1773), целесообразно принимать за центральное тело планету, а комету — как ее временный спутник, за Солнце и (если нужно) другие планеты — как возмущающие тела. Более конкретно развил эту идею Лаплас. Он же ввел в небесную механику новый термин — сфера действия планет. Внутри этой сферы (полагая, что искомая область действительно является сферой) целесообразно исследовать движения комет в планетоцентрической (йовиоцентрической) системе координат.

Обозначим через F , R силу притяжения Солнца и возмущающую силу планеты, через F_1 , R_1 — силу притяжения планеты и возмущающую силу Солнца. Тиссеран указывал, что тогда понятие „сфера действия“ планеты математически можно выразить следующим образом

$$\frac{F}{R} = \frac{F_1}{R_1},$$

где

$$F = \frac{\kappa^2 M}{r^2},$$

$$R = \kappa^2 m \left[\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{(r - \rho)^2} \right],$$

$$F_1 = \frac{\kappa^2 m}{\rho^2},$$

$$R_1 = \kappa^2 M \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + \rho)^2} \right].$$

Отсюда для радиуса сферы действия получаем

$$\rho = r \sqrt[5]{\frac{1}{2} \left(\frac{m}{M} \right)^2}. \quad (12)$$

Выражение (12) можно записать в более точном виде:

$$\rho = r \sqrt[5]{\frac{m^2}{1 + 3 \cos^2 \varphi}},$$

где φ — угол между направлением от планеты к Солнцу и к комете. Лаплас получил для сферы действия планеты более простую формулу:

$$\rho = r \sqrt[5]{m^2}.$$

Дифференциальные уравнения йовиоцентрического движения кометы выражаются в векторной форме:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\kappa^2 m_{\text{Ю}} \frac{\bar{r}}{r^3} + \kappa^2 M \left[\frac{\bar{r}_{\odot} - \bar{r}}{\Delta_{\odot}^3} - \frac{\bar{r}_{\odot}}{r_{\odot}^3} \right], \quad (13)$$

где $\bar{r}(x, y, z)$ — вектор йовиоцентрического положения кометы, а $\bar{r}_{\odot}(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot})$ — соответствующий вектор положения Солнца.

В момент извержения $t_0 = 0$ расстояние кометы от Солнца почти

равно расстоянию Юпитера от Солнца. В таком случае второй член в уравнении (13) представляет собой разность двух величин, мало отличающихся друг от друга. Поэтому приведем его к более удобному виду. После некоторых преобразований дифференциальное уравнение (13) принимает вид:

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\kappa^2 m_{\text{Ю}} \frac{\bar{r}}{r^3} + \kappa^2 [S \bar{r}_{\odot} - \bar{r}] / \Delta_{\odot}^3, \quad (14)$$

$$S = [1 + (1 + 2h)^{3/2}], \quad h = \frac{\left(\frac{x}{2} - x_{\odot} \right) x + \left(\frac{y}{2} - y_{\odot} \right) y + \left(\frac{z}{2} - z_{\odot} \right) z}{r_{\odot}^2}.$$

На следующем этапе дифференциальные уравнения (14) интегрируются методом Рунге—Кутты, по начальным условиям движения — координатам и компонентам скорости. До перехода к следующему шагу автоматически проверяется расстояние кометы от Юпитера. При выходе кометы из сферы действия Юпитера вычисляются элементы извержения по положениям и скоростям. Начиная с этого момента (обозн. t_1), целесообразно перейти от йовиоцентрического движения к гелиоцентрическому. Для этого гелиоцентрические координаты кометы определяются следующим образом. Если обозначим через $\bar{R}$ и $\dot{\bar{R}}$ векторы гелиоцентрического положения и скорости кометы через $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\bar{r}_{\odot}$, $\dot{\bar{r}}_{\odot}$ — векторы йовиоцентрических положений и скоростей кометы (на сфере действия Юпитера в момент t) и Солнца, то

$$\bar{R}(x, y, z) = \bar{r}(x, y, z) - \bar{r}(x_{\odot}, y_{\odot}, z_{\odot}), \quad (15)$$

$$\dot{\bar{R}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \dot{\bar{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - \dot{\bar{r}}(\dot{x}_{\odot}, \dot{y}_{\odot}, \dot{z}_{\odot}),$$

$$\dot{x}_{\odot} = \frac{2\pi}{T} a \sin \frac{2\pi}{T} (t_1 - t_0),$$

$$\dot{y}_{\odot} = -\frac{2\pi}{T} a \cos \frac{2\pi}{T} (t_1 - t_0),$$

$$\dot{z}_{\odot} = 0.$$

Последнее получается из формулы (8).

§ 3. Вычисление элементов орбит гипотетических комет

Обратное значение большой полуоси $1/a$ и соответственно элементы комет интересно вычислять после значительного промежутка времени (после выхода из сферы действия Юпитера и в межпланетном пространстве). Это необходимо для проверки положения кометы относительно Юпитера, Солнца и других больших планет, а также для отождествления теоретических положений кометы с наблюдаемыми.

Известно, что:

- 1) если $1/a > 0$, то есть $e < 1$, орбита есть эллипс;
- 2) если $1/a = 0$, то есть $e = 1$, орбита является параболой;
- 3) если $1/a < 0$, то есть $e < 1$, орбита является гиперболой.

В первом случае элементы кометы вычисляются на основании следующей формулы:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{R} - \frac{v^2}{\kappa^2}, \quad (16)$$

где v — полная скорость кометы относительно Солнца;

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

λ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
u_0	.0349029					
a	+ 5.1453	+ 8.0201	+ 8.0511	+ 5.5888	+ 4.1889	+ 3.9684
e	0.1495	.3598	.3566	.1649	.2699	.3224
q	4.3761	5.1346	5.1797	4.6669	3.0584	2.6889
u_0	.0349607					
a	+ 6.1460	+ 16.9840	+ 14.8170	+ 5.9206	+ 3.6744	+ 3.4811
e	.3282	.6979	.6557	.3138	.4702	.5182
q	4.1287	5.1312	5.1014	4.0625	1.9467	1.6771
u_0	.0350185					
a	+ 7.4799	+ 111.930	+ 39.8739	+ 6.3916	+ 3.4658	+ 3.2377
e	0.4626	.9542	.8733	.4124	.5823	.6373
q	4.0196	5.1316	5.0532	3.7558	1.4481	1.1742
u_0	.0350761					
a	+ 9.1496	-29.022	-88.277	6.9693	+ 3.3509	+ 3.0824
e	0.5723	1.1769	1.0568	.4913	.6608	.7228
q	3.9640	5.1339	5.0152	3.5452	1.1366	.85451
u_0	.0351339					
a	+ 12.1450	-13.476	-22.502	+ 7.6814	+ 3.2829	+ 2.9724
e	0.6764	1.3812	1.2214	.5597	.7207	.7883
q	3.9297	5.1371	4.9826	3.3824	-9169	.6293
u_0	.0351628					
a	+ 13.7220	-10.756	-16.633	+ 8.0965	+ 3.2602	+ 2.9289
e	0.7102	1.4778	1.2986	.5909	.7458	.8154
q	3.9020	5.1388	4.9680	3.3133	.8286	.5407

u_0 , км/сек	60.34	60.39	60.44	60.49	60.54
β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
a	+ 4.69161	+ 5.1453	+ 5.6006	+ 6.1460	+ 6.6942
e	0.0555	0.1495	0.2451	0.3282	0.3920
q	4.4312	4.3761	4.2277	4.1287	4.0807
tq_i	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Из интеграла площадей известно, что

$$\begin{aligned} y\dot{z} - y\dot{z} &= \kappa \sqrt{p} \sin i \sin \Omega, \\ x\dot{z} - x\dot{z} &= \kappa \sqrt{p} \sin i \cos \Omega, \\ x\dot{y} - x\dot{y} &= \kappa \sqrt{p} \cos i. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда параметры орбиты:

$$p^2 = (y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2, \quad (18)$$

$$e = \left(1 - \frac{p}{a}\right)^{1/2}, \quad (19)$$

$$q = a(1 - e) \quad (20)$$

Таблица 1

	180°	-30°	-60°	-90°	-120°	-150°	-180°
u_0	+ 5.0960	+ 8.4398	+ 7.4764	+ 5.1165	+ 4.0282	+ 4.0664	+ 5.5128
a	.1841	.3879	.3172	.1585	.2994	.3002	.1813
e	4.1577	5.1648	5.1044	4.3056	2.8222	2.8455	4.5132
u_0	+ 5.2308	+ 17.872	+ 13.686	+ 5.6103	+ 3.6011	+ 3.5170	+ 5.4812
a	.3184	.7122	.6303	.3065	.4850	.5085	.3150
e	3.5649	5.1443	5.0599	3.8904	1.8546	1.7286	3.7544
u_0	+ 5.3197	+ 14.2277	+ 34.0455	+ 6.1202	+ 3.4157	+ 3.25813	+ 5.5097
a	.4078	.9641	.8525	.4052	.5923	.6314	.4046
e	3.1504	5.1382	5.0225	3.6402	1.3926	1.2010	3.2806
u_0	+ 5.4003	-27.778	-125.562	+ 6.7099	+ 3.3120	+ 3.0954	+ 5.5571
a	.4777	1.1849	1.0397	.4848	.6984	.7190	.4749
e	2.8207	5.1377	4.9900	3.4569	1.0982	.8699	2.9178
u_0	+ 5.4799	-13.261	-24.082	+ 7.4110	+ 3.2504	+ 2.9817	+ 5.6154
a	.5360	1.3876	1.2060	.55308	0.7267	.7856	.5835
e	2.5426	5.1392	4.9610	3.3121	0.8884	.6394	2.6197
u_0	+ 5.5207	10.617	-17.427	+ 7.8181	+ 3.2103	+ 2.9369	+ 5.6481
a	.5620	1.4841	1.2839	.5844	.7512	.8131	.5596
e	2.4180	5.1403	4.9475	3.2494	.8036	.5490	2.4875

Таблица 2

	60.59	60.64	60.69	60.74	60.79	60.84
β	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
a	+ 7.4799	+ 8.0797	+ 9.1496	+ 10.5123	+ 12.1450	+ 13.7220
e	0.4626	0.5183	0.5723	0.6247	0.6764	0.7102
q	4.0196	3.9884	3.9540	3.9449	3.9297	3.9020
tq_i	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Наклонны орбиты i найдутся при помощи формулы

$$\operatorname{tg} i = \left[\frac{(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (x\dot{z} - z\dot{x})^2}{(x\dot{y} - y\dot{x})^2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

По формулам (9) получено, что параболическая скорость на поверхности Юпитера равна 60.20 км/сек. Начиная от параболической скорости, предполагая, что кометы выбрасываются по оси u от точки $x = r$ и меняя скорость через 0.01 км/сек, мы интегрировали уравнение движения кометы до сферы действия Юпитера (14). На сфере действия Юпитера получены гелиоцентрические координаты кометы. При вычислении оказалось, что скорости u_0 от 60.28 до 60.34 км/сек дают почти круговую орбиту с радиусом близким 19016795 км от

центра Юпитера. А скорость 60.34 км/сек после 364.34 суток вылета дает на сфере действия Юпитера почти круговую орбиту с эксцентриситетом $e = 0.05$.

Нами были вычислены скорости для каждого значения u_0 от 60.34 до 60.85 км/сек с интервалом $\Delta u_0 = 0.01 \text{ км/сек}$ и значения сферических координат ($\lambda = 0, \beta = 0$), соответствующие элементом 55 гелиоцентрических орбит. Для этих орбит эксцентриситет e варьируется от 0.05 до 0.71 . Орбиты, близкие к параболическим, при указанных скоростях извержения отсутствуют. Меньше всех варьируется для этих орбит перигельное расстояние (от 4.4 до 3.9).

Далее мы рассматривали случаи, когда скорость извержения остается в плоскости орбиты Юпитера ($\beta = 0$), но варьировали направление скорости ($\lambda = \pm 30^\circ, \pm 60^\circ, \pm 90^\circ, \pm 120^\circ, \pm 150^\circ, \pm 180^\circ$).

Для каждого значения скорости извержения u_0 (от 60.34 до 60.85 км/сек) с интервалом $\Delta u_0 = 0.05 \text{ км/сек}$ с помощью интегрирования уравнений движения по методу Рунге—Кутты от поверхности до сферы действия Юпитера были получены соответствующие гелиоцентрические орбиты (табл. 1, 2). Выяснено, что перигельные расстояния q изменяются незначительно: от 4.5 а. е. при $u_0 = 60.34 \text{ км/сек}$ до $q = 3.9 \text{ а. е.}$ при $u_0 = 60.82 \text{ км/сек}$. При одной и той же скорости извержения u_0 , но при разных λ (от 0 до $\pm 180^\circ$) элементы e и q значительно варьируются.

При этом имеют место даже случаи, когда при $\lambda = 0$ орбита эллиптическая, а при некоторых $\lambda \neq 0$ и той же скорости u_0 орбита гипотетической кометы гиперболическая.

Заключение

В дальнейшем предполагаем рассмотреть:

1. Вычисление гелиоцентрических орбит гипотетических комет, образующихся в случае, когда скорости извержения u_0 направлены под различными углами β к плоскости орбиты Юпитера.

2. Анализ распределения элементов гипотетических комет, соответствующих случаю равновероятного распределения направления скорости извержения u_0 и случаю различных законов распределения величин u_0 .

3. Влияние планетных возмущений на орбиты гипотетических комет.

4. Анализ движения гипотетических комет—продуктов извержения с поверхности спутников Юпитера и других планет.

В заключение автор считает приятным долгом выразить сердечную благодарность доктору физ.-матем. наук С. Г. Макову за предложенную тему работы и доктору физ.-матем. наук, проф. Ю. А. Рябову за многочисленные ценные советы и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 2, 68, 1925.
2. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 5, 40, 1928.
3. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 10, 1, 1933.
4. Всехсвятский С. К. „Мироведение“, 20, 77, 1931.
5. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 11, 437, 1934.
6. Всехсвятский С. К. „Природа“, № 9, 6, 1938.
7. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 25, 4, 1948.
8. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 27, 1, 1950.
9. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 29, 63, 1952.
10. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 32, 5, 1955.
11. Всехсвятский С. К. Публикация Киевской обсерватории, № 5, 1953.
12. Всехсвятский С. К. „Астр. ж.“, 34, 4, 1957.

13. Всехсвятский С. К., Бабич О. И., Казютинский В. В. „Астр. ж.“, 35, 3, 1958.
14. Всехсвятский С. К. Природа и происхождение комет и метеорного вещества, 1967.
15. Духновский П. Г. Публикация Киевской обсерватории, № 6, 1954.
16. Духновский П. Г. „Астр. ж.“, 34, 1, 1957.
17. Фесенков В. Г. Тр. Главной астрономической обсерватории, 1, 1922.
18. Фесенков В. Г. „Астр. ж.“, 26, 79, 1949.
19. Фесенков В. Г. „Астр. ж.“, 28, 2, 1951.
20. Орлов С. В. „Усп. астр. наук“, 2, 101—121, 1941.
21. Орлов С. В. „Астр. ж.“, 13, 3, 1936.
22. Орлов С. В. „Астр. ж.“, 16, 1, 1939.
23. Шмидт О. Ю. „ДАН СССР“, 45, № 6, 1944.
24. Шмидт О. Ю. „ДАН СССР“, 49, № 1, 1945.
25. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 32, 1955.
26. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 30, 1953.
27. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 31, 1, 1957.
28. Штейнс К. А. „Уч. зап. Латв. ун-та“, 20, 3, 1958.
29. Штейнс К. А. „Астр. ж.“, 34, 1, 1958.
30. Казимирчак-Полонская Е. К. Тр. ИТА, 7, 1961.

Поступило 27. II 1969

УДК 536.2

Н. А. НИКОЛЬСКИЙ, Р. И. ПЕПИНОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КОЛЬРАУША В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Одной из важных задач высокотемпературной теплофизики является создание новых и совершенствование известных методов исследования физических свойств тугоплавких металлов и сплавов при высоких температурах. Среди известных работ особый интерес представляет электрический метод, позволяющий осуществить комплексное исследование тепло- и электропроводности металлов на одной установке. Наиболее известным вариантом электрического метода является метод Кольрауша, в котором рассматривается случай, когда тепловые потери с боковой поверхности образца, нагреваемого током, отсутствуют. Подробный математический анализ этого метода был выполнен Кольраушем в 1902 г. [1].

Принцип работы установки по методу Кольрауша заключается в следующем. Концы образца, через который проходит электрический ток, поддерживаются при определенной температуре. Допустим, что тепловые потери с боковой поверхности образца отсутствуют. Тепло, выделяемое в образце, будет отводиться от центральной части образца к концевым участкам. Величина температурного градиента вдоль образца зависит от электрической и тепловой проводимости. При наступлении стационарного состояния линии тока, по которым течет электричество, будут совпадать с линиями теплового потока. Достигнутое стационарное состояние математически описывается следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{q}_m - q_v = 0, \\ \operatorname{div} \vec{j} = 0, \\ \lambda = \lambda(t), \\ \sigma = \sigma(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

где (1) и (2), соответственно, дифференциальное уравнение теплопроводности и уравнение непрерывности плотности электрического тока. Уравнения (3) и (4) характеризуют температурные зависимости тепло- и электропроводности испытуемого образца. В первом приближении для небольшого интервала температур (100÷200°C) можно полагать, что эти зависимости линейные.

Решение данной системы уравнений приводит к следующему выражению:

$$\left[\frac{\lambda}{\sigma} \right]_{\text{ср}} \cdot t + \frac{1}{2} U^2 + A \cdot U + B = 0, \quad (5)$$

где t и U — температура и электрический потенциал в любой точке образца. A и B — постоянные интегрирования.

В случае симметричного расположения образца относительно осей координат решение уравнения (5) примет вид

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{(\Delta U)^2}{2 \Delta t}, \quad (6)$$

где $\Delta t = t_2 - \frac{t_1 + t_3}{2}$ — среднеарифметический перепад температуры

на рабочем участке образца.

Для определения тепло- и электропроводности необходимо определить температуру образца в трех точках, напряжение между точками, силу тока, нагревающего образец, и геометрические размеры рабочего участка.

Егер и Диссельхорст [4,5] доказали, что метод Кольрауша можно применить и в случае, когда существует теплообмен между боковой поверхностью образца и окружающей средой. В таком случае дифференциальное уравнение теплового равновесия принимает вид:

$$\lambda \frac{d^2 t}{dx^2} + \sigma \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot P}{S} (t_0 - t) = 0, \quad (7)$$

где t_0 — средняя температура окружающей среды,

ϵ — коэффициент теплоотдачи,

S — площадь поперечного сечения образца,

P — периметр образца.

Исследуя λ и σ в интервале температур 18÷100°C, Егер и Диссельхорст разработали систему поправок, учитывающих потери тепла боковой поверхностью образца.

Если измеренная разность температур в цилиндрическом образце при наличии теплообмена равна $\Delta t = t_2 - \frac{t_1 + t_3}{2}$, то по Егеру и Дис-

сельхорсту можно определить такую поправку к Δt , которая давала бы разность температур в образце, соответствующую условиям компенсации. Решение уравнения (7) выражается следующим образом:

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{(\Delta U)^2}{2(\Delta t - \epsilon \cdot N)}, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad \epsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma \cdot P}{\lambda \cdot S} \cdot l^2 = \frac{\alpha \cdot l^2}{\lambda \cdot r},$$

$$N = t_0 - t_2 + \frac{\Delta t}{6}. \quad (9)$$

Величины ϵ и N определяются экспериментально.

В 1935 г. Тимрот создал установку, работающую по принципу Егера и Диссельхорста, и исследовал на ней различные марки сталей в области температур 0÷900°C [7]. Предположив, что ϵ является величиной, характеризующей теплообмен между образцом и печью через цилиндрический слой изоляции, Тимрот выразил α через теплопроводность изоляции, а именно:

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{r \cdot \ln \frac{R}{r}},$$

где λ_0 —коэффициент теплопроводности изоляции,
 R —радиус печи,
 r —радиус стержня.
 Отсюда

$$\varepsilon = \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot m,$$

где

$$m = \frac{l^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{R}{r}}.$$

Подставив значение ε в выражение (8), получим

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{(\Delta U)^2}{2 \Delta t} + \frac{m \cdot \lambda_0}{\Delta t \cdot \sigma} \cdot N. \quad (10)$$

Аналогичные работы были выполнены Кржижановским [8] и Неймарком [9], изучавшими тепло- и электропроводность сталей при температурах $0 \div 900^\circ\text{C}$.

В 1937 г. Микрюков [6] предложил другой метод учета влияния теплообмена образца с окружающей средой. Он полагал, что в принципе можно поправку на тепловой обмен между образцом и окружающей средой свести к нулю, если положить в уравнении (8) $N=0$ т. е.

$$t_0 - t_2 + \frac{\Delta t}{6} = 0.$$

В опытах Микрюкова исследуемый стержень помещался в электрическую печь, внутри которой создавался вакуум. В стационарном состоянии измерялась температура пространства, окружающего стержень, и температура образца в трех точках. После этого по стержню пропускали ток с таким расчетом, чтобы температура середины стержня была выше температуры середины печи на величину $\frac{\Delta t}{6}$. При этом

считали, что выполнение условия $t_2 - t_0 = \frac{\Delta t}{6}$ сводит поправку на теплообмен между образцом и окружающей средой к нулю. Однако исследования, проведенные Шелепухиным [14], показали, что между образцом и печью существует неконтролируемый теплообмен. Действительно, в общем случае тепловые потери образца определяются потерями за счет теплопроводности, конвективного теплообмена с окружающей средой и излучения. В условиях вакуума потери определяются только излучением. При этом тепловые потери растут с повышением температуры пропорционально разности четвертых степеней температур. Поэтому для такого случая уравнение (7) следует писать в следующем виде:

$$\lambda \frac{d^2 t}{dx^2} + \sigma \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 - \frac{\varepsilon \cdot P \cdot c}{S} (T^4 - T_0^4) = 0. \quad (11)$$

Очевидно, что для подобного случая система поправок Егера и Диссельхорста себя не оправдывает. Эксперименты Шелепухина показали, что при работе в условиях вакуума, начиная с 300°C и выше, расчет поправок по способу Микрюкова не дает правильных результатов из-за растущих потерь тепла вследствие излучения.

В 1963 г. Поздняк и Ахметзянов [10] исследовали тепло- и электропроводность ниобия по методу Микрюкова. Полученные ими данные выпадают из общего хода тепло- и электропроводности ниобия, известного по результатам исследований различных экспериментаторов.

ров. Это позволяет предполагать наличие систематической ошибки в работе Поздняк и Ахметзянова.

Проведенный анализ работ, в которых теплообмен образца с окружающей средой учитывается системой поправок Егера и Диссельхорста, показал, что в области высоких температур указанную систему поправок применить невозможно. Использование метода Кольрауша в области высоких температур требует иного решения поставленной задачи.

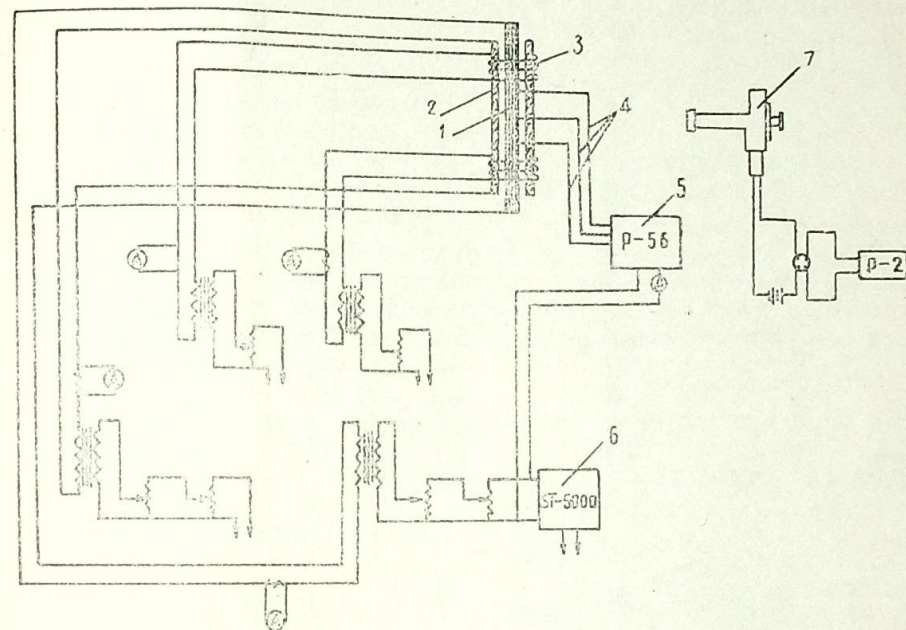


Рис. 1. Электрическая схема установки:

1—образец; 2—компенсационный экран; 3—дополнительные нагреватели; 4—потенциметрические щупы; 5—потенциометр переменного тока Р-56; 6—стабилизатор напряжения; 7—оптический пирометр.

Рассмотрим систему, состоящую из цилиндрического образца и окружающего его компенсационного экрана. На концевых участках экрана располагаются концевые нагреватели. Электрические цепи образца, компенсационного экрана и концевых нагревателей представляют отдельные контуры переменного тока (рис. 1). Вывод уравнения (6) предполагает строгое соблюдение условий компенсации, т. е. отсутствие радиальных тепловых потоков (потерь) образца. Компенсация достигается уравниванием температур по высоте рабочего участка образца и экрана в противоположных точках. Температура измеряется оптическим пирометром (например, ОППИР-09 с телеобъективом Юпитер-11). Для измерения температуры образца и внутренней поверхности экрана в последнем просверливаются небольшие отверстия (диаметром $0,5 \div 0,7$ мм). Помимо смотровых отверстий, в компенсационном экране имеются вольтажные щупы, касающиеся поверхности образца. Смотровые отверстия в экране просверливаются по направлению касательной к поверхности образца, что позволяет одновременно измерять температуру образца и экрана.

Существование продольных температурных градиентов в образце приводит к тому, что кольцевой зазор между образцом и экраном вдоль образца становится неизотермичным и его излучение отличается от излучения абсолютно черного тела. Вычисление степени черноты такой неравномерно нагретой системы представляет

сложную задачу. Из теории лучистого теплообмена известно, что эффективное излучение, исходящее с поверхности серого тела, представляет собой сумму из собственного и отраженного излучения:

$$E_{\text{эф}} = E_{\text{соб}} + E_{\text{отр}}$$

или

$$E_{\text{эф}} = \epsilon \cdot E_o + R \cdot E_{\text{пад}}, \quad (12)$$

где ϵ — степень черноты,

R — коэффициент отражения,

$E_{\text{пад}}$ — плотность падающего излучения,

E_o — плотность излучения абсолютно черного тела,

$E_{\text{эф}}$ — плотность эффективного излучения.

Расчет температуры поверхности образца и внутренней поверхности экрана производится на основе зонального метода количественной оценки суммарного эффективного излучения. Согласно этому методу поверхность образца и экрана разбивается на ряд зон и составляется уравнение для эффективного излучения площадки i образца с учетом излучения на нее окружающих ее зон k экрана (рис. 2). Для данного случая уравнение (12) имеет вид:

$$E_{\lambda \text{ эф} i} = (1 - \epsilon_{\lambda i}) \sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{ik}^{(n)} = \epsilon_{\lambda i} \cdot E_{o \lambda i}, \quad (13)$$

где φ_{ik} — угловой коэффициент для отдельных зон — кольцевых площадок экрана.

При этом не учитывается излучающая поверхность смотрового отверстия, так как влияние смотрового отверстия на эффективное излучение площадки i образца ничтожно мало и им можно пренебречь.

Данное уравнение (12) получено на основе анализа излучающих систем, выполненного Суриновым [11] и Поляк [12]. Основная трудность при решении подобного уравнения заключается в определении угловых коэффициентов φ_{ik} . Для нахождения угловых коэффициентов коаксиально расположенных цилиндров Хрусталева разработал численный метод с использованием электронной вычислительной машины [13]. Расчет, выполненный Хрустальевым, показывает, что при малом кольцевом зазоре между образцом и экраном наблюдается резкое уменьшение угловых коэффициентов φ_{ik} по высоте образца. Нами выполнен расчет угловых коэффициентов зон k высотой 1 мм при зазоре между образцом и экраном 0,75 мм (диаметр образца равен 5 мм, диаметр экрана — 7/6,5 мм). Рассмотрим сумму в левой части уравнения (13):

$$\sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{ik}^{(n)}. \quad (14)$$

При расчете φ_{ik} мы ограничились девятью зонами, так как уже для такого числа зон k сумма их угловых коэффициентов достаточно

близка к единице ($\sum_{k=0}^n \varphi_{ik} = 0,994$). Зная величины φ_{ik} и соответствующие $E_{\lambda \text{ эф} k}$, можно подсчитать сумму (14).

Анализ показывает, что величину суммарного эффективного излучения внутренней поверхности экрана можно определить на основании опытного измерения по одной средней зоне k_o . Следовательно, для суммы (14) имеем

$$\sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{ik}^{(n)} = E_{\lambda \text{ эф} k_o} \cdot \varphi_{i k_o} = E_{\lambda \text{ эф} 2} \cdot \varphi_{i 2}. \quad (15)$$

Такое решение получено благодаря резкому уменьшению угловых коэффициентов φ_{ik} по высоте, что вызвано выбором малого кольцевого зазора между образцом и экраном. В таком случае высота активно излучающего участка экрана невелика и распределение по ней эффективного излучения близко к линейному. После подстановки уравнение (13) примет вид

$$E_{\lambda \text{ эф} i} - (1 - \epsilon_{\lambda i}) \cdot \varphi_{i 2} \cdot E_{\lambda \text{ эф} 2} = \epsilon_{\lambda i} \cdot E_{o \lambda i}. \quad (16)$$

Аналогично уравнению (13) составим уравнение для эффективного излучения площадки k внутренней поверхности экрана с учетом излучения на нее видимой части зон k внутренней поверхности экрана и зон i поверхности образца:

$$E_{\lambda \text{ эф} k} - (1 - \epsilon_{\lambda k}) \cdot \sum_{i=0}^n E_{\lambda \text{ эф} i} \cdot \varphi_{ki}^{(n)} - (1 - \epsilon_{\lambda k}) \cdot \sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{kk}^{(n)} = \epsilon_{\lambda k} \cdot E_{o \lambda k} \quad (17)$$

В данном случае влияние смотрового отверстия на эффективное излучение площадок k экрана очень мало и им можно пренебречь. Рассмотрим первую сумму в левой части уравнения (17):

$$\sum_{i=0}^n E_{\lambda \text{ эф} i} \cdot \varphi_{ki}^{(n)}. \quad (18)$$

График, представленный на рис. 3 (б), иллюстрирует резкое падение угловых коэффициентов φ_{ik} по высоте экрана. Аналогично предыдущему резкое убывание угловых коэффициентов φ_{ki} позволяет считать, что

$$\sum_{i=0}^n E_{\lambda \text{ эф} i} \cdot \varphi_{ki}^{(n)} = E_{\lambda \text{ эф} i_o} \cdot \varphi_{k i_o} = E_{\lambda \text{ эф} 1} \cdot \varphi_{k 1}. \quad (19)$$

Рассмотрим вторую сумму в левой части уравнения (17):

$$\sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{kk}^{(n)}. \quad (20)$$

По сравнению с предыдущими угловыми коэффициентами величина φ_{kk} изменяется менее резко по высоте образца (рис. 3, в). Однако и для суммы (20) можно ограничиться расчетом по девяти зонам и написать, что

$$\sum_{k=0}^n E_{\lambda \text{ эф} k} \cdot \varphi_{kk}^{(n)} = E_{\lambda \text{ эф} k_o} \cdot \varphi_{k k_o} = E_{\lambda \text{ эф} 2} \cdot \varphi_{22}. \quad (21)$$

После подстановки значений частных сумм (20) и (21) уравнение (17) примет вид.

$$E_{\lambda \text{ эф} 2} - (1 - \epsilon_{\lambda 2}) \cdot \varphi_{21} \cdot E_{\lambda \text{ эф} 1} - (1 - \epsilon_{\lambda 2}) \cdot \varphi_{22} \cdot E_{\lambda \text{ эф} 2} = \epsilon_{\lambda 2} \cdot E_{o \lambda 2}. \quad (22)$$

Согласно свойству замыкаемости лучистого обмена

$$\varphi_{22} = 1 - \varphi_{21}.$$

Тогда уравнение (17) преобразуется в следующее выражение:

$$E_{\lambda \text{ эф} 2} - (1 - \epsilon_{\lambda 2}) \cdot \varphi_{21} \cdot E_{\lambda \text{ эф} 1} - (1 - \epsilon_{\lambda 2}) \cdot (1 - \varphi_{21}) \cdot E_{\lambda \text{ эф} 2} = \epsilon_{\lambda 2} \cdot E_{o \lambda 2}. \quad (23)$$

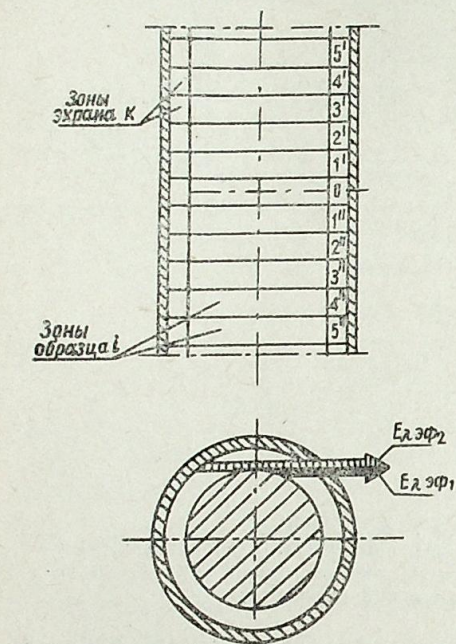


Рис. 2. Зональный метод расчета эффективного излучения образца и экрана.

Таким образом для образца и внутренней поверхности экрана получим систему уравнений из (16) и (23):

$$\begin{cases} E_{\lambda\varphi_1} - (1 - \varepsilon_{\lambda_1}) \cdot \varphi_{12} \cdot E_{\lambda\varphi_2} = \varepsilon_{\lambda_1} \cdot E_{0\lambda_1}, \\ E_{\lambda\varphi_2} - (1 - \varepsilon_{\lambda_2}) \cdot \varphi_{21} \cdot E_{\lambda\varphi_1} - (1 - \varepsilon_{\lambda_2}) \cdot (1 - \varphi_{21}) \cdot E_{\lambda\varphi_2} = \varepsilon_{\lambda_2} \cdot E_{0\lambda_2}. \end{cases} \quad (24)$$

Основное условие компенсации $E_{\lambda\varphi_1} = E_{\lambda\varphi_2}$ достигается уравнением яркостей образца и экрана в противоположных точках. В таком случае

$$E_{\lambda\varphi_1} = E_{\lambda\varphi_2} = E_{0\lambda_1} = E_{0\lambda_2}. \quad (25)$$

Следовательно, при соблюдении условий компенсации мы создаем модель абсолютно черного тела и температура, измеряемая по этому излучению, является истинной.

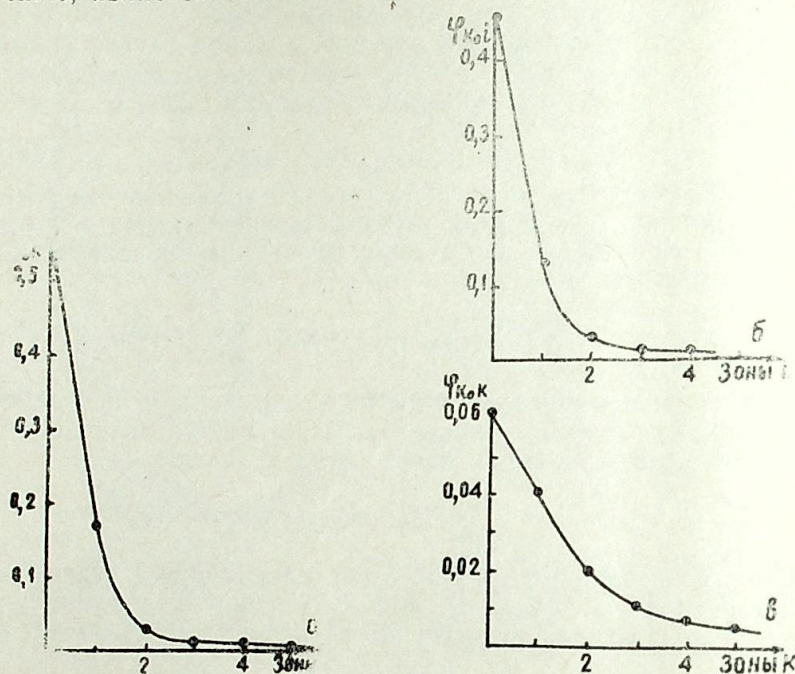


Рис. 3. а. Изменение углового коэффициента φ_{kl} по зонам k ; б. Изменение углового коэффициента φ_{ki} по зонам i ; в. Изменение углового коэффициента φ_{kk} по зонам k .

Произведенный таким образом расчет показывает, что необходимым условием применимости метода Кольрауша в области высоких температур является выбор такого минимального кольцевого зазора между образцом и экраном, при котором наблюдается резкое уменьшение угловых коэффициентов по длине образца.

В общем случае, помимо неизотермичности кольцевого зазора, на излучение полости может также влиять наличие отверстия, через которое производится измерение температуры, т. е. незамкнутость полости. Выполненный нами анализ показывает, что при выбранной конфигурации системы образец—экран влияние незамкнутости полости на степень черноты отверстия пренебрежимо мало и им можно пренебречь.

Согласно уравнению (7)

$$\lambda = \sigma \cdot \frac{(\Delta U)^2}{2 \Delta t},$$

$$\sigma (\Delta U)^2 = \frac{I \cdot \Delta U \cdot l}{S}$$

или

$$\lambda = \frac{I \cdot \Delta U \cdot l}{2 \cdot S \cdot \Delta t},$$

где I —сила тока, нагревающего образец;

ΔU —падение напряжения на рабочем участке образца;

S и l —площадь поперечного сечения и длина рабочего участка образца.

Полученное уравнение справедливо для случая, когда все тепло, выделяемое в образце, отводится за счет теплопроводности. Наличие смотровых отверстий, отверстий для потенциометрических измерений и контакта вольтажных щупов с поверхностью образца приводит к некоторой потере тепла. Поэтому количество тепла, отводимое теплопроводностью, будет меньше, чем выделяемое внутренними источниками образца:

$$Q' = Q_v - Q_{\text{потери}},$$

где $Q_v = I \cdot \Delta U$ —мощность внутренних источников рабочего участка образца, определяемая по электрическим измерениям. Тепловые потери складываются из количеств тепла, отводимого теплопроводностью по потенциометрическим щупам, и тепла, излучаемого через смотровые и вольтажные отверстия.

С учетом тепловых потерь коэффициент теплопроводности определяется по следующему уравнению:

$$\lambda = \frac{(I \cdot \Delta U - Q_{\text{потери}}) \cdot l}{2 \cdot S \cdot \Delta t}. \quad (27)$$

Электропроводность вычисляется по известной формуле:

$$\sigma = \frac{I}{\Delta U} \cdot \frac{l}{S}. \quad (28)$$

Погрешность измерений теплопроводности оценивается в $\pm 10\%$, электропроводности— $\pm 3\%$.

Разработанная методика значительно расширяет температурный диапазон исследований методом Кольрауша. Помимо этого, предлагаемая методика имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами измерения тепло- и электропроводности. Известные методы требуют предварительного исследования температурной зависимости степени черноты исследуемых веществ. Изучение же степени черноты—физического параметра, зависящего от многих факторов,—создает дополнительные трудности и служит источником погрешности измерения тепло- и электропроводности. В случае же сверления пирометрических каналов в образце необходимо соблюдать геометрические размеры каналов и учитывать их влияние на результаты измерений. Использование образцов в виде тонких проволок требует учета неоднородности образцов и возможного распыла их при нагреве в условиях вакуума.

Разработанная методика лишена перечисленных недостатков и позволяет получить надежные данные по тепло- и электропроводности металлов и сплавов в интервале $1000 \div 2000^\circ\text{C}$. Следует добавить, что метод Кольрауша позволяет проводить измерения тепло- и электропроводности на одних и тех же образцах в одних и тех же условиях. Это обстоятельство разрешает вычислить и получить более надежные данные числа Лоренца—параметра, характеризующего строение вещества и способы переноса тепла в нем.

Данная методика легла в основу конструирования и монтажа установки, на которой были проведены измерения тепло- и электропро-

водности металлов при температурах $t = 1000 \div 2000^\circ\text{C}$ и в условиях вакуума. Результаты измерений тепло- и электропроводности, числа Лоренца вольфрама, молибдена и ниобия хорошо согласуются с литературными данными.

Выводы

1. Разработана методика, позволяющая расширить диапазон использования метода Кольрауша для измерения тепло- и электропроводности материалов металлического класса.

2. Предлагается новый способ создания модели абсолютно черного тела для измерения температуры опытных образцов, находящихся в условиях тепловой компенсации по высоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohlrausch F. Z. Annalen der Physik, 1900, Bd. 1, S. 132.
2. Diesselhorst H. Zs. f. instrument, 1902, Bd. 22, S. 115.
3. Kannuliik w. G. and Laby F. H. Proc. Roy. soc. 1928, vol. 121 p. 640; 1933 vol. 141, p. 144.
4. Jaeger W., Diesselhorst H. Verhandlungen Deutschen Physikalischen Gesellschaft, 1900, Bd. 2, S. 39.
5. Diesselhorst H. Annalen der Physik, 1900, Bd. 1, S. 312.
6. Микрюков В. Е. Теплопроводность и электропроводность металлов и сплавов. М., 1959 г.
7. Тимрот Д. Л. Ж. технич. физики, т. 5, 1935, №6.
8. Кржижановский Р. Е. Заводская лаборатория, 1957, №8; „Теплоэнергетика“, 1958, №1.
9. Неймарк Б. Е. „Теплоэнергетика“, 1958, №1.
10. Поздняк Н. Г., Ахметзянов К. Г. „Теплофизика высоких температур“, т. 5, 1953, №2.
11. Суринов Ю. А. Изв. АН. СССР, Отд. техн. наук, 1948, №7; 1956, №3, 4, 9; 1952, №1, 2.
12. Поляк Г. Л. Сб. „Конвективный лучистый теплообмен“, М., 1960 г.
13. Хрусталева Б. В. Сб. „Теплообмен в элементах энергетических установок“, М., 1966.
14. Шелепухин П. Р. „Заводская лаборатория“, т. 19, 1935, №1.

Поступило 30. VII 1968

Н. А. Николски, Р. И. Пепинов

Колрауш методунун жүксак температур саһәсиндә истифадә олунмасы

ХҮЛАСӘ

Металларын ејни вахтлы истилик вә електрик кечирмәләринин өлчүлмә методу һазырланмышдыр. Ишин әсасыны Колрауш идејасы тәшкил едир. Мәгаләдә кәстәрилмишдыр ки, жүксак температурларда Екерин вә Дисселхорстун дүзәлиш системи шүаланмада артан истилик иткиләри һесабына тәтбиг олуна биләр.

Нүмунәнин вә компенсацион экранын ујғун коаксиал системинин сечилмәси онларын һүндүрлүк бојунча ефектив шүаланмасынын јайылмасыны дүзхәтләшдирир. Һүндүрлүк бојунча ефектив шүаланмасынын јайылмасыны дүзхәтләшдирир. Һүндүрлүк бојунча истилик компенсацијасы шәраитиндә олан тәчрүбәви нүмунәнин температуруну өлчәмәк үчүн мүтләг гара чисмин моделинин јарадылмасынын јени үсулу верилмишдыр.

Компенсација нүмунәнин температурларынын бәрәбәрләшдирилмәси нәтижәсиндә алынмышдыр. Температур оптик пирометр вәситәсилә өлчүлүшдү (мәсәлән, „Јупитер-11“ телеобјективи илә тәмин олунмуш ОППР-09).

Нүмунәнин, компенсацион экранын вә әлавә ғыздырычыларын електрик дөврәси мүстәгил дә ишән чәрәјан дөврәләриндән ибарәтдир Системин ғыздырылмасы ваккумда апарылмышдыр.

Истиликкечирмә әмсалынын хәтасы ± 10 , електриккечирмә әмсалынын хәтасы исә $\pm 3\%$ гәјмәтләндирилмишдыр.

УДК—539.3

М. А. АЗИМОВ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ, I

Сначала рассмотрим задачу 1:

$$Au = -f(x) \quad (x_3 > 0), \quad (1)$$

$$u|_{x_3=0} = 0, \quad (2)$$

где

$$A = \Delta + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}; \quad \operatorname{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{div} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right); \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

полагая при этом $\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i \quad (i = 1, 2, 3)$.

Решение задачи (1)–(2) хорошо известно, но цель настоящей работы—указать новый метод ее решения, которое пригодно и для некоторых других еще нерешенных задач теории упругости. Особенность этого метода заключается в том, что, он как и метод Фурье, приводит к алгебраическим вычислениям, но выражает ответ непосредственно через фундаментальную матрицу систем уравнений Ламе.

В дальнейшем будут рассмотрены вспомогательные операторы, которые значительно облегчают нахождение решения поставленной задачи (1) (2),

т. е. $I, \theta = \partial_3 I + \delta e_3' - e_3 \delta'; \Delta; \theta \Delta$ и Δ^2 , где $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$;

$$\delta = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}; \delta' = (\partial_1, \partial_2, \partial_3); \quad \theta = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ \partial \end{pmatrix};$$

$$\theta' = (-\partial_2, \partial_1, 0); e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_1' = (1, 0, 0); e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2' = (0, 1, 0); e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Действие над операторами рассматривается сначала формально алгебраически. В применении к конкретным функциям действие получаемых операторов далее истолковывается должным образом. В частности встречаются операторы ∂_3^{-1} , $(\partial_1^2 + \partial_2^2)^{-1}$, которые будем понимать следующим образом. Если функция $f(x)$ определена при $x_3 \geq 0$, то

$$\partial_3^{-1} f(x) = - \int_{x_3}^{+\infty} f(x_1, x_2, t) dt;$$

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)^{-1} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln V(x_1 - \eta_1)^2 + (x_2 - \eta_2)^2 \times$$

$$\times f(\eta_1, \eta_2, x_3) d\eta_1, d\eta_2.$$

Конечно, при этом функция $f(x)$ будет предполагаться такой, которая обеспечивает существование этих интегралов.

Далее, прежде чем решить задачу (1)–(2), сперва докажем две Леммы.

Лемма 1. Любая рациональная операторная матрица X с постоянным коэффициентом, могущая содержать в знаменателях только степени ∂_3 и $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$, может быть представлена (и притом единственным образом) в виде:

$$X = X_0 + \theta X_1 + \Delta X_2 + \theta \Delta X_3 + \Delta^2 X_4, \quad (3)$$

где X_0, X_1, X_2 и X_3 не содержат ∂_3 (могут содержать в знаменателе только Δ_2), а X_4 — может содержать ∂_3 в знаменателе и в числителе, еще в знаменателе могут быть только Δ_2 .

Доказательство: Пусть

$$X = \frac{Y}{\partial_3^q \Delta_2^p}, \quad (4)$$

где Y — полиномиальная матрица от ∂_1, ∂_2 и ∂_3 с постоянным коэффициентом. Известно, что $\Delta = \Delta_2 = \partial_3^2$, $\frac{1}{\partial_3} + \frac{\partial_3}{\Delta_2} = \frac{\Delta}{\partial_3 \Delta_2}$, $\frac{1}{\partial_3} = \frac{\Delta}{\partial_3 \Delta_2} - \frac{\partial_3}{\Delta_2}$

$$\text{или } \frac{1}{\partial_3} = - \left(\frac{\partial_3}{\Delta_2} + \frac{\Delta \partial_3}{\Delta_2^2} \right) + \frac{\Delta^2}{\partial_3 \Delta_2^2}, \quad \frac{1}{\partial_3^3} = \left(- \frac{\partial_3}{\Delta_2} - \frac{\partial_3 \Delta}{\Delta_2^2} \right)^2 + \Delta^2 (\dots),$$

где $(\dots)$ выражает все остальные члены бинома, таким образом, равенство (4) примет вид

$$X = \frac{Y}{\Delta_2^p} \left(- \frac{\partial_3}{\Delta_2} - \frac{\partial_3 \Delta}{\Delta_2^2} \right)^q + \Delta^2 (\dots) = \frac{Z}{\Delta_2^p} + \Delta^2 (\dots), \quad (5)$$

где Z — полином. Поделив неполным образом Z на Δ^2 (по ∂_3), получим

$$Z = Z_0 + \partial_3 Z_1 + \partial_3^2 Z_2 + \partial_3^3 Z_3 + \Delta^2 (\dots), \quad (6)$$

где Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 — полиномы от ∂_1, ∂_2 без ∂_3 . **Доказательство** получается применением алгоритма Евклида.

Принимая во внимание выражение θ , равенство (6) можно преобразовать следующим образом: $\partial_3 Z_1 = \theta Z_1 - (\delta e_3' - e_3 \delta') Z_1$;

$$\partial_3^2 Z_2 = \Delta Z_2 - \Delta_2 Z_2, \quad \partial_3^3 Z_3 = \partial_3 \Delta Z_3 - \partial_3 \Delta_2 Z_3$$

или

$$\partial_3^3 Z_3 = \theta \Delta Z_3 - (\delta e_3' - e_3 \delta') \Delta Z_3 - \theta \Delta_2 Z_3 + (\delta e_3' - e_3 \delta') \Delta_2 Z_3,$$

следовательно,

$$Z = [Z_0 - \Delta_2 Z_2 + (\delta e_3' - e_3 \delta') \Delta_2 Z_3] + \theta (Z_1 - \Delta_2 Z_3) +$$

$$+ \Delta [Z_2 - (\delta e_3' - e_3 \delta') Z_3] + \theta \Delta Z_3 + \Delta^2 (\dots). \quad (6^*)$$

Подставляя (6*) в (5), получим (3). Легко проверить, что такое разложение единственно. Выражение (3) для X — будем называть каноническим.

Лемма 2. Пусть κ — положительное или отрицательное целое, тогда для любой V достаточно быстро убывающей при $x_3 \rightarrow \infty$, имеет место равенство $\partial_3^k (x_3 v) = x_3 \partial_3^k v + \kappa \partial_3^{k-1} v$ (7) или (в операторной форме) $\partial_3^k x_3 = x_3 \partial_3^k + \kappa \partial_3^{k-1}$ (7*), следовательно (7*), при $\kappa = 0, 1$ очевидно.

Пусть при $\kappa = -1$ имеем:

$$\partial_3 (x_3 \partial_3^{-1} v - \partial_3^{-2} v) = x_3 \partial_3 (\partial_3^{-1} v) + \partial_3^{-1} v - \partial_3 (\partial_3^{-2} v) = x_3 v.$$

Следовательно, если v такова, что $x_3 \partial_3^{-1} v - \partial_3^{-2} v \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$, то $x_3 \partial_3^{-1} v - \partial_3^{-2} v = \partial_3^{-1} (x_3 v)$. Методом полной индукции можно доказать справедливость (7) для произвольных целых κ . Таким образом лемма 2 доказана полностью.

Теперь займемся решением поставленной задачи. Решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u(x) = \int_{y_3 > 0} [\omega(x-y) - P(x, y)] f(y) dy, \quad (8)$$

где $\omega(x-y)$ является фундаментальным решением уравнения Ламе. Как известно, фундаментальная матрица имеет вид.

$$\omega(x-y) = \frac{1}{8\pi p} \frac{1}{(\lambda+2p)} \left[\frac{\lambda+3p}{|X-Y|} I + \frac{\lambda+p}{|X-Y|^3} (X-Y)(X-Y)' \right],$$

$$\text{где } X-Y = \begin{pmatrix} x_1-y_1 \\ x_2-y_2 \\ x_3-y_3 \end{pmatrix}, \quad (X-Y)' = (x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3).$$

Если ввести оператор $T = \frac{1}{p} \left(\Delta I - \frac{\lambda+p}{\lambda+2p} \partial \partial' \right)$, то $\omega(x-y) = -$

$\frac{1}{8\pi} T^x |x-y|$, где T^x показывает дифференцирование по x . Заметим, что если $AT = \Delta^2$, то $\Delta^2 |x-y| = 0$. Будем искать $P(x, y)$ в

виде $P(x, y) = -\frac{1}{8\pi} T^x p^y |x-\bar{y}|$, где $y = (y_1, y_2, -y_3)$. Таким образом $P(x, y)$ не имеет особенности в верхнем полупространстве. Поэтому $P(x, y)$ по x есть решение однородной системы Ламе. Очевидно, что определенная таким образом $u(x)$ в равенстве (8) удовлетворяет заданной системе. Принимая во внимание выражение $P(x, y)$, равенство (8) получим в виде

$$u(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_{y_3 > 0} [T^x |x-y| - T^x p^y |x-\bar{y}|] f(y) dy. \quad (8^*)$$

Учитывая условие (2), из (8*) получим

$$T^x |x-y|_{|x_3=0} = T^x p^y |x-\bar{y}|_{|x_3=0}. \quad (8^{**})$$

p^y будем искать в виде $p^y = \sum_k y_3^k p_k$ (8***), где p_k — суть операторы

от $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}$ с постоянными коэффициентами. Таким образом

$$T^x p^y |x-\bar{y}| = T^x \sum_k y_3^k p_k |x-\bar{y}| = \sum_k y_3^k T^x p_k |x-\bar{y}| =$$

$$= \sum_k y_3^k S^y p_k |x - \bar{y}|,$$

где

$$I S^y I = T^x; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что

$$(y_3 \Delta - 2 \partial_3) |x - \bar{y}| = 0,$$

можно заключить, что уравнение [8*] будет выполнено, если

$$T^y - \sum_{k=0}^2 y_3^k S^y p_k = \xi (y_3 \Delta - 2 \partial_3), \quad (9)$$

где ξ — оператор вида $\xi = \sum_k \xi_k \partial_3^k$ и ξ_k — операторы с дифференцирова-

нием только по $\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ вообще с переменными коэффициентами.

Опуская индекс y , в (9) получим

$$T - S p_0 - y_3 S p_1 - y_3^2 S p_2 = \xi (y_3 \Delta - 2 \partial_3). \quad (9^*)$$

На основании леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} \xi (y_3 v) &= \sum_k \xi_k \partial_3^k (y_3 v) = \sum_k \xi_k (y_3 \partial_3^k v + k \partial_3^{k-1} v) = \\ &= y_3 \sum_k \xi_k \partial_3^k v + \sum_k k \xi_k \partial_3^{k-1} v = y_3 \xi v + \xi^1 v, \end{aligned}$$

Итак,

$$\xi (y_3 v) = y_3 \xi v + \xi^1 v, \quad (10)$$

где ξ^1 — оператор, полученный формальным дифференцированием ξ по ∂_3 . В данном случае, что подтверждается дальнейшими вычислениями, можно взять $\xi = \xi_0 + y_3 \xi_1$. (10*)

Учитывая (10) и (10*), выражение (9*) примет вид:

$$T - S p_0 - y_3 S p_1 - y_3^2 S p_2 = y_3 (\xi_0 + y_3 \xi_1) \Delta + (\xi_0^1 + y_3 \xi_1^1) \Delta - 2 (\xi_0 + y_3 \xi_1) \partial_3. \quad (11)$$

Для решения поставленной задачи достаточно сравнить коэффициенты при y_3^k , чтобы получить

$$T - S p_0 = \xi^1 \Delta - 2 \xi_0 \partial_3, \quad (11_1)$$

$$- S p_1 = (\xi_0 + \xi_1) \Delta - 2 \xi_1 \partial_3, \quad (11_2)$$

$$- S p_2 = \xi_1 \Delta. \quad (11_3)$$

Из этих уравнений алгебраически найдем неизвестные операторы p_k и ξ_k . Для этого сначала упростим уравнение. Пусть $p_k = I q_k$, $\xi_k = I \eta_k$, тогда $q_k = I p_k$, $\eta_k = I \xi_k$. После такой замены уравнения (11₁), (11₂), (11₃), примут вид:

$$T q_0 = -\eta_0^1 \Delta + 2 \eta_0 \partial_3 + I T, \quad (\widetilde{11}_1)$$

$$T q_1 = -(\eta_0 + \eta_1^1) \Delta + 2 \eta_1 \partial_3, \quad (\widetilde{11}_2)$$

$$T q_2 = -\eta_1 \Delta. \quad (\widetilde{11}_3)$$

Перейдем к решению этих уравнений. Сперва будем решать уравнение ($\widetilde{11}_1$). Пусть $\eta_0 = 3_0 + 3_1 \partial_3 + \Delta 3$ (12) (в таком виде можно записать любой целый оператор), где $3_0, 3_1$ — операторы, в которых нет ∂_3 . Из (12) имеем

$\eta_0^1 = 3_1 + 2 \partial_3 + \Delta 3^1$ и $2 \eta_0 \partial_3 - \eta_0^1 \Delta = 2 3_0 \partial_3 + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 - \Delta^2 3^1$ или, принимая во внимание выражение

$$\partial_3 = \theta + e_3 \delta' - \delta e_3,$$

получим

$$2 \eta_0 \partial_3 - \eta_0^1 \Delta = 2 \theta 3_0 + 2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 - \Delta^2 3^1.$$

Таким образом уравнение ($\widetilde{11}_1$) примет вид

$$T q_0 = 2 \theta 3_0 + 2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 + I T - \Delta^2 3^1. \quad (\widetilde{11}_1)$$

Известно, что

$$\begin{aligned} T &= \frac{\Delta}{\mu} \left(1 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + \mu)} \partial_3 (\delta e_3' + e_3 \delta') - \\ &\quad - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta \delta' - \Delta_2 e_3 e_3'). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I T - T I = \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} \partial_3 (e_3 \delta' - \delta e_3).$$

Подставляя эти выражения в ($\widetilde{11}_1$) и обозначая $q_0 - I = r_0$, получим

$$\begin{aligned} T r_0 &= \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} \partial_3 (e_3 \delta' - \delta e_3) + 2 \theta 3_0 + 2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 + \\ &\quad + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 - \Delta^2 3^1 \end{aligned} \quad (3)$$

или учитывая выражение ∂_3 , уравнение (13) получим в виде

$$\begin{aligned} T r_0 &= \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (e_3 \delta' - \delta e_3) - \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta') + \\ &\quad + 2 \theta 3_0 + 2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 - \Delta^2 3^1. \end{aligned} \quad (13^*)$$

Разложение T можно выразить так:

$$T = \frac{\Delta}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (\delta e_3' + e_3 \delta'). \quad (14)$$

Простой проверкой можно убедиться, что:

$$T \theta = \frac{1}{\mu} \theta \Delta \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right). \quad (14^*)$$

После всей этой подготовки решение уравнения (13*) будем искать в виде

$$r_0 = \theta s_1 + \Delta s_2. \quad (15)$$

Учитывая выражения (14), (14*) и (15), уравнение (13*) получим в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_0 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (\delta e_3' + e_3 \delta') s_0 + \\ &+ \frac{1}{\mu} \theta \Delta \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_1 + \frac{\Delta^2}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_2 - \\ &- \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta \Delta (\delta e_3' + e_3 \delta') s_2 = \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (e_3 \delta' - \delta e_3) - \\ &- \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta') + 2 \theta 3_0 + 2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 + \\ &\quad + 3_1 \Delta - 2 \Delta 3_1 - \Delta^2 3^1. \end{aligned} \quad (15)$$

Сравнивая члены при $I, \theta, \Delta, \theta \Delta$ и Δ^2 , из (15) получим:

$$2 (e_3 \delta' - \delta e_3) 3_0 - \Delta_2 3_1 - \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta') = 0, \quad (15_1)$$

$$\frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') s_0 = \frac{2 (\lambda + \mu)}{\mu (\lambda + 2\mu)} (e_3 \delta' - \delta e_3) + 2 3_0 = 0, \quad (15_2)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_0 = 3_1, \quad (15_3)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_1 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') s_3 = 0, \quad (15_4)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) s_2 = -3^I. \quad (15_5)$$

Из (15₂) найдем 23₀ и из (15₃) — ξ , подставив в (15₁), получим:

$$\left(2\Delta_2 - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 e_3 e_3' - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \delta \delta' \right) s_0 = 0.$$

Отсюда $s_0 = 0$, следовательно, $3_1 = 0$.

Так как s_1 можно выразить через s_2 , то, полагая $s_2 = 0$, будем иметь $s_1 = 0$, $s = 0$, а это значит, что согласно (15) $r_0 = 0$, т. е. $q_0 = I$. (16)

Так как $s_0 = 0$, то из (15₂) получаем

$$3_0 = \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' - e_3 \delta'). \quad (17)$$

Следовательно, из (12), полагая произвольно $3 = 0$ и учитывая (17), получим

$$\eta_0 = \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' - e_3 \delta'). \quad (18)$$

Теперь займемся решением второго уравнения (11₂):

$$Tq_1 = -(\eta_0 + \eta_1^I) \Delta + 2\eta_1 \partial_3. \quad (19)$$

Пусть
отсюда

$$2\eta_1 \partial_3 - \Delta \eta_1^I = 2\theta t_0 + 2(e_3 \delta' - \delta e_3') t_0 + t_1 \Delta - 2\Delta_2 t_1 - \Delta^2 t^I.$$

Учитывая выражения (18) и (19), уравнение (11₂) получим в виде

$$Tq_1 = \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \Delta (e_3 \delta' - \delta e_3') + 2\theta t_0 + 2(e_3 \delta' - \delta e_3') t_0 + \Delta t_1 - 2\Delta_2 t_1 - \Delta^2 t^I. \quad (20)$$

Будем искать q_1 в виде

$$q_1 = v_0 + \theta v_1 + \Delta v_2, \quad (21)$$

Учитывая выражения (14), (14*) и (21), из (20) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_0 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (\delta e_3' + e_3 \delta') v_0 + \\ & + \frac{1}{\mu} \theta \Delta \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_1 + \frac{\Delta^2}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_2 - \\ & - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta \Delta (\delta e_3' + e_3 \delta') v_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \Delta (e_3 \delta' - \delta e_3') + \\ & + 2\theta t_0 + 2(e_3 \delta' - \delta e_3') t_0 + \Delta t_1 - 2\Delta_2 t_1 - \Delta^2 t^I \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая коэффициенты при $I, \theta, \Delta, \theta \Delta$ и Δ^2 ,

$$2(e_3 \delta' - \delta e_3') t_0 - 2\Delta_2 t_1 = 0, \quad (22_1)$$

$$-\frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') v_0 = 2t_0, \quad (22_2)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_0 = \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (e_3 \delta' - \delta e_3') + t_1, \quad (22_3)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_1 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') v_2 = 0, \quad (24_4)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) v_2 = -t^I. \quad (22_5)$$

Из (22₁) и (22₂) получим

$$-\frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta \delta') v_0 = 2\Delta_2 t_1$$

или

$$t_1 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu (\lambda + 2\mu)} \left(e_3 e_3' - \frac{\delta \delta'}{\Delta_2} \right) v_0.$$

Подставляя последнее в (22₃), находим

$$v_0 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} (e_3 \delta' - e_3 \delta'). \quad (23)$$

Следовательно,

$$t_1 = -\frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} (e_3 \delta' + \delta e_3'). \quad (24^*)$$

Из (22₂) и (23) найдем

$$t_0 = -\frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} (\delta \delta' - \Delta_2 e_3 e_3'). \quad (24)$$

Принимая во внимание (24), (24*), из (19) будем иметь

$$\eta_1 = -\frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} \theta (e_3 \delta' + \delta e_3'), \quad (25)$$

Полагая произволы v_1, v_2 равными нулю, из (21) получим

$$q_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} (e_3 \delta' - \delta e_3'). \quad (21^*)$$

Наконец, займемся решением третьего уравнения: $Tq_2 = -\Delta \eta_1$. Так как η_1 — известно, то

$$Tq_2 = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} \theta \Delta (\delta e_3' + e_3 \delta'). \quad (11_3)$$

Пусть

$$q_2 = l_0 + \theta l_1 + \Delta l_2. \quad (26)$$

С учетом (14*) и (26) уравнение (11₃) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_0 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta (\delta e_3' + e_3 \delta') l_0 + \\ & + \frac{1}{\mu} \theta \Delta \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_1 + \frac{\Delta^2}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_2 - \\ & - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} \theta \Delta (\delta e_3' + e_3 \delta') l_2 = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} \theta \Delta (\delta e_3' + e_3 \delta'). \end{aligned} \quad (27)$$

Сравнивая коэффициенты при $I, \theta, \Delta, \theta \Delta$ и Δ^2 , получим:

$$-\frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') l_0 = 0, \quad (27_1)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_0 = 0, \quad (27_2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_1 - \frac{\lambda + \mu}{\mu (\lambda + 2\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta') l_2 = \\ & = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu (\lambda + 2\mu) (\lambda + 3\mu)} (\delta e_3' + e_3 \delta'), \end{aligned} \quad (27_3)$$

$$\frac{1}{\mu} \left(I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} e_3 e_3' \right) l_2 = 0. \quad (27_4)$$

Из (27₂) имеем $l_2 = 0$, из (27₃) получаем

$$l_1 = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} e_3 \delta' + \frac{(\lambda + \mu)^2 \delta e_3'}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)}.$$

Следовательно, из (26) найдем

$$q_2 = \theta \left[\frac{(\lambda + \mu)^2 \delta e_3'}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} + \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} e_3 \delta' \right]$$

или, учитывая выражение θ , будем иметь

$$q_2 = \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} (\partial_3 e_3 \delta' + \delta \delta') + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} (\partial_3 \delta e_3' - \Delta_2 e_3 e_3').$$

Так как

$$p_0 = l q_0, \text{ то } p_0 = l, p_1 = l q_1, p_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} l (e_3 \delta' - \delta e_3'),$$

$$p_1 = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} (\delta e_3' + e_3 \delta'); p_2 = l q_2,$$

$$P(x, y) = -\frac{1}{8\pi} T^x p^y |X - \bar{Y}|; p^y = \sum_{k=0}^2 y_3^2 p_k = p_0 + y_3 p_1 + y_3^2 p_2$$

или

$$p^y = l - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 (\delta e_3' + e_3 \delta') - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \partial_3 e_3 \delta' + \\ + \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \delta \delta' + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \partial_3 \delta e_3' + \\ + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \Delta_2 e_3 e_3'.$$

Следовательно,

$$P(x, y) = -\frac{1}{8\pi} \left\{ T |X - \bar{Y}| - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 T^x e_3 \delta' |X - \bar{Y}| - \right. \\ - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 T^x \delta e_3' |X - \bar{Y}| - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 T^x \partial_3 e_3 \delta' |X - \bar{Y}| + \\ + \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 T^x \delta \delta' |X - \bar{Y}| + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \partial_3 T^x \delta e_3' |X - \bar{Y}| + \\ \left. + \frac{(\lambda + \mu)^2 y_3^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} \Delta_2 T^x e_3 e_3' |X - \bar{Y}| \right\}.$$

Так как

$$\delta = \partial_1 e_1 + \partial_2 e_2, \delta' = \partial_1 e_2' + \partial_2 e_2',$$

то имеем:

$$P(x, y) = \omega(x - \bar{y}) - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 \frac{\partial}{\partial y_3} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_1' - \\ - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_2' - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 \frac{\partial}{\partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_3' - \\ - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_3' - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_1' - \\ - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_2' + \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_1' + \\ + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_2' +$$

$$+ \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_1' + \\ + \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_2' + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_1} \omega(x - \\ - \bar{y}) e_1 e_3' + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \frac{\partial^2}{\partial y_3 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_3' + \\ + \frac{(\lambda + \mu)^2}{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)} y_3^2 \Delta_2 \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3'. \quad (28)$$

Задача 2:

$$Au = -f(x) (x_3 > 0), \quad (1)$$

$$u|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2). \quad (2)$$

Для решения данной задачи рассмотрим формулу Бетти в матричной форме:

$$\int_S [\omega' P_v(\eta) - P(\omega) \eta'] ds = \int_D [\omega' A \eta - (A \omega)' \eta] dx; \quad (3)$$

для любых матриц η , ω — высота три, ν — орт внешней нормали к S . Формула (3) верна и для бесконечной области, если

$$\omega' A \eta - (A \omega)' \eta = 0 \left(\frac{1}{|x|^{3+\varepsilon}} \right); \quad \omega' P_v(\eta) - P(\omega) \eta' = 0 \left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}} \right).$$

В этой формуле

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, A = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \partial \partial',$$

$$P(\eta) = \sum_{l=1}^3 \nu_l X_l(\eta), X_l(\eta) = \begin{pmatrix} x_{1l}(\eta) \\ x_{2l}(\eta) \\ x_{3l}(\eta) \end{pmatrix}, X_{lj}(\eta) = \mu \left(\frac{\partial \eta_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_j}{\partial x_l} \right) +$$

$$+ \delta_{lj} \lambda \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3} \right);$$

$$l, j = (1, 2, 3); \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

В формуле (3) положим $\omega = \omega(x - y)$, $y \in D$ это значит, что функция имеет внутри D разрыв в точке y . Следовательно, к функциям η и ω непосредственно нельзя применить формулу Бетти в области D . Однако формула Бетти применима к этим функциям в области $D \setminus D_\varepsilon$ с границей $S \cup S_\varepsilon$, где D_ε — шар радиуса ε с центром в точке y и ограниченной S_ε . Применяя формулу Бетти, имеем

$$\int_S \{\omega'(x - y) P_v(\eta) - [P_v(\omega(x - y))]'\eta\} d_x S + \int_{S_\varepsilon} \{\omega'(x - y) P_v(\eta) - \\ - [P_v(\omega(x - y))]'\eta\} d_x S = \int_{D \setminus D_\varepsilon} \{\omega'(x - y) A \eta - [A \omega(x - y)]'\eta\} dx. \quad (4)$$

Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow \infty$, обычным образом получим

$$\int_S \{\omega'(x - y) P_v(\eta) - [P_v(\omega(x - y))]'\eta\} dS - \eta(y) = \int_D \omega'(x - y) A \eta dx$$

или

$$\eta(y) = - \int_D \omega'(x - y) A \eta dx + \int_S \{\omega(x - y) P_v(\eta) - \\ - [P_v(\omega(x - y))]'\eta\} dS. \quad (5)$$

Пусть D — верхнее полупространство, (5) положим $\omega = \omega(x - y)$ —

$P(x, y)$, где $P(x, y)$ определяется из (28), а η есть решение задачи (1) и (2), тогда:

$$\eta(y) = - \int_{x_3 > 0} [\omega(x-y) - P(x, y)]' (-f) dx - \int_{x_3=0} \{P, [\omega(x-y) - P(x, y)]\}' \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Заменяя y через x наоборот, получим:

$$\eta(y) = \int_{y_3 > 0} [\omega(x-y) - P(x, y)]' f dy - \int_{y_3=0} \{P, [\omega(x-y) - P(x, y)]\}' \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

или положим

$$g(x, y) = \omega(x-y) - P(x, y),$$

а потом обычным образом по формуле Бетти доказывается, что

$$g(x, y) = g'(y, x).$$

Следовательно,

$$\eta(x) = u(x) = \int_{y_3 > 0} g(x, y) f dy - \int_{y_3=0} P(g(x, y)) \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я. Б. „ДАН СССР“, т. 79, 1951.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1949.

Поступило 18. X 1968

УДК—533.9

М. А. АЗИМОВ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ, II

Рассмотрим задачу 3:

$$Au = -f(x) \quad (x_3 > 0), \quad (1)$$

$$Bu|_{x_3=0} = 0, \quad (2)$$

где: $A = \mu \Delta + (\lambda + \mu) \partial \partial'$; $B = \mu \partial_3 I + \mu \partial e_3' + \lambda e_3 \partial'$;

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3); \quad \partial = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix};$$

$$\partial' = (\partial_1, \partial_2, \partial_3); \quad \partial = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \partial' = (\partial_1 \partial_2, 0); \quad \partial = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ \partial' \end{pmatrix};$$

$$\partial' = (-\partial_2, \partial_1, 0); \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$e_1' = (1, 0, 0); \quad e_2' = (0, 1, 0); \quad e_3' = (0, 0, 1).$$

Целью является выражение решения этой задачи через фундаментальную матрицу. Решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u_n^*(x) = \int_{y_3 > 0} [\omega(x-y) - P(x, y)] f(y) dy. \quad (3)$$

Здесь:

$$\omega(x-y) = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left[\frac{\lambda+3\mu}{|X-Y|} I + \frac{\lambda+\mu}{|X-Y|^3} (X-Y)(X-Y)' \right],$$

а $P(x, y)$ будем искать в виде:

$$P(x, y) = -\frac{1}{8\pi} T^x p^y |x - \bar{y}|; \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{\mu} \left(\Delta I - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \partial \partial' \right), \quad \omega(x-y) = -\frac{1}{8\pi} T^x |x-y|, \quad (5)$$

где

$$\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3).$$

Принимая во внимание (4) и (5), равенство (3) можно записать в виде

$$u(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_{y_3 > 0} [T^x |x-y| - T^x p^y |x-\bar{y}|] f(y) dy. \quad (6)$$

Учитывая условие (2), получим

$$[B^x T^x |x-y| - B^x T^x p^y |x-\bar{y}|] |_{x_3=+0} = 0. \quad (5^*)$$

Пусть

$$p^y = p_0^y + y_3 p_1^y + y_3^2 p_2^y, \quad (5^{**})$$

где p_k^y — дифференциальный оператор с дифференцированием по y с постоянными коэффициентами. Принимая во внимание (5**), из (5*) получим

$$[B^x T^x |x-y| - \sum_{k \geq 0} y_3^k B^x T^x p_k^y |x-y|] |_{x_3=+0} = 0$$

или

$$[-B^y T^y |x-y| - \sum_{k \geq 0} y_3^k \tilde{B}^y \tilde{T}^y p_k^y |x-\bar{y}|] |_{x_3=+0} = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{B}^y, \tilde{T}^y$ получаются соответственным образом.

Из B^y, T^y путем замены ∂_1 через $-\partial_1, \partial_2$ через $-\partial_2$ и ∂_3 через ∂_3 , получим

$$B^y = \mu \partial_3 I + \mu \partial e_3' + \lambda e_3 \partial'$$

(производная по y);

$$\tilde{B}^y = \mu \partial_3 I + \mu \begin{pmatrix} -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} e_3' + \lambda e_3 (-\partial_1, -\partial_2, \partial_3); \quad \tilde{B}^y = IB^y J, \quad (7)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, -1 \end{pmatrix};$$

$$T^y = \frac{1}{\mu} \left(\Delta I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \partial \partial' \right);$$

$$\tilde{T}^y = \frac{1}{\mu} \left(\Delta I - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right) \begin{pmatrix} -\partial_1 \\ -\partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} (-\partial_1, -\partial_2, \partial_3),$$

итак

$$IT^y I = \tilde{T}^y \quad (8)$$

С учетом (7) и (8) выражение (6) примет вид

$$BT + \sum_{k \geq 0} y_3^k \tilde{B} \tilde{T} p_k = \xi (y_3 \Delta - 2 \partial_3) [1]. \quad (9)$$

Пусть $\xi = \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k$, где ξ_k — оператор без y_3 , следовательно, на основании леммы 2 в работе [1] имеем

$$\xi y_3 \Delta = \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k y_3 \Delta = \sum_{k \geq 0} y_3^k (y_3 \xi_k + \xi_k^1) \Delta = \sum_{k \geq 1} y_3^k \xi_{k-1} \Delta + \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k^1 \Delta,$$

где ξ_k^1 — формальные производные по ∂_3 от ξ_k .

Так как

$$\xi \partial_3 = \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k \partial_3,$$

то из (9) получим

$$BT + \sum_{k \geq 0} y_3^k \tilde{B} \tilde{T} p_k = \sum_{k \geq 1} y_3^k \xi_{k-1} \Delta + \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k^1 \Delta - 2 \sum_{k \geq 0} y_3^k \xi_k \partial_3. \quad (10^*)$$

Сравнивая коэффициенты при y_3^k ($k = 0, 1, 2$), имеем:

$$BT + \tilde{B} \tilde{T} p_0 = \xi_0^1 \Delta - 2 \xi_0 \partial_3,$$

$$\begin{aligned} \tilde{B} \tilde{T} p_1 &= \xi_0 + \xi_1^1 \Delta - 2 \xi_1 \partial_3, \\ \tilde{B} \tilde{T} p_j &= \xi_{j-1} \Delta + \xi_j^1 \Delta - 2 \xi_j \partial_3 \end{aligned} \quad (10)$$

или, полагая $p_j = I q_j$, $\xi_j = I \eta_j$ и умножая на I слева, получим:

$$IBT + BT q_0 = \eta_0^1 \Delta - 2 \eta_0 \partial_3, \quad (10,0)$$

$$BT q_1 = \eta_0 \Delta + \eta_1^1 \Delta - 2 \eta_1 \partial_3, \quad (10,1)$$

$$BT q_2 = \eta_1 \Delta + \eta_2^1 \Delta - 2 \eta_2 \partial_3, \quad (10,2)$$

$$BT q_j = \eta_{j-1} \Delta + \eta_j^1 \Delta - 2 \eta_j \partial_3. \quad (1,j)$$

Так как

$$IT = TI + \frac{2(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \partial_3 (e_3 \delta' - \delta e_3') \quad (11) \text{ и } IB = BI + 2(\delta e_3' - \lambda e_3 \delta'), \quad (12)$$

$$IBT = BTI + \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \partial_3 B (e_3 \delta' - \delta e_3') + 2(\mu \delta e_3' - \lambda e_3 \delta') T. \quad (13)$$

Сравнивая (13) и (10,0), после упрощения получим:

$$\begin{aligned} BTR_0 &= \eta_0^1 \Delta - 2 \eta_0 \partial_3 + 2 \Delta \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) + \\ &+ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 (e_3 \delta' - \delta e_3'), \end{aligned}$$

где

$$R_0 = I + a_0 \quad (14);$$

$$BT = -\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \theta (\delta \delta' - \Delta^2 e_3 e_3') - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta \delta e_3' + \Delta \theta;$$

$$BT \theta = \Delta [\Delta_2 (e_3 e_3' - 1) + \delta \delta'] + 2 \theta \Delta \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) + \Delta^2.$$

Произведя замену $\eta_j = \alpha_j + \partial_3 \beta_j + \Delta \gamma_j$ и беря производную по ∂_3 , будем иметь

$$\begin{aligned} \eta_j^1 &= \beta_j + 2 \partial_3 \gamma_j + \Delta \gamma_j^1 \text{ и } \eta_j^1 \Delta - 2 \eta_j \partial_3 = 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_j + \\ &+ 2 \Delta_2 \beta_j - 2 \theta \alpha_j - \Delta \beta_j + \Delta^2 \gamma_j^1. \end{aligned} \quad (15)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

Таким образом, с учетом (15) система (10) примет вид:

$$\begin{aligned} BTR_0 &= \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 (e_3 \delta' - \delta e_3') + 2 \Delta \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) + \\ &+ 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_0 + 2 \Delta_2 \beta_0 - 2 \theta \alpha_0 - \Delta \beta_0 + \Delta^2 \gamma_0^1, \end{aligned} \quad (10,0)$$

$$BT q_1 = \Delta [\alpha_0 - (\delta e_3' - e_3 \delta') \beta_0] + \theta \Delta \beta_0 + \Delta^2 \gamma_0 + 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_1 + 2 \Delta_2 \beta_1 - 2 \theta \alpha_1 - \Delta \beta_1 + \Delta^2 \gamma_1^1, \quad (10,1)$$

$$BT q_2 = \Delta [\alpha_1 - (\delta e_3' - e_3 \delta') \beta_1] + \theta \Delta \beta_1 + \Delta^2 \gamma_1 + 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_2 + 2 \Delta_2 \beta_2 - 2 \theta \alpha_2 - \Delta \beta_2 + \Delta^2 \gamma_2^1, \quad (10,2)$$

$$\dots$$

$$BT q_j = \Delta [\alpha_{j-1} - (\delta e_3' - e_3 \delta') \beta_{j-1}] + \theta \Delta \beta_{j-1} + \Delta^2 \gamma_{j-1} + 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_j + 2 \Delta_2 \beta_j - 2 \theta \alpha_j - \Delta \beta_j + \Delta^2 \gamma_j^1. \quad (10,j)$$

$$\dots$$

Для того, чтобы решить систему (10), сперва докажем лемму. Для разрешимости операторного уравнения

$$BTX = r_0 + \theta r_1 + \Delta r_2 + \theta \Delta r_3 + \Delta^2 r_4 \quad (16)$$

(где r_0, r_1, r_2 без ∂_3 , а r_4 — может иметь в знаменателе только ∂_3^k, Δ_2^l) необходимо и достаточно, чтобы

$$r_0 = 0; \vartheta' r_1 = 0; e_3' r_2 = 0; \delta' r_2 = -e_3' r_1. \quad (17)$$

При выполнении условия (17) решение уравнения (16) имеет вид

$$X = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') r_1 + \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2} r_3 - \theta \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2^2} r_2 - \\ - \Delta \left[\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^3} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta\delta') r_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\delta\delta' - \Delta_2 e_3 e_3') r_3 \right] + \\ + \theta \left(\frac{\delta}{\Delta_2} f' + e_3 g' \right) + \Delta \left[\frac{\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} \delta g' + \frac{\vartheta}{\Delta_2} h' + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3 f' \right] + \\ + \theta \Delta X_3 + \Delta^2 X_4, \quad (18)$$

где f', g', h', X_3 и X_4 — произволы.

Доказательство. Пусть уравнение (16) имеет решение вида

$$X = \frac{Y}{\partial_3^k \Delta_2^l} \quad (Y \text{ — целая операторная матрица}) \text{ или}$$

$$X = X_0 + \theta X_1 + \Delta X_2 + \theta \Delta X_3 + \Delta^2 X_4, \quad (18)$$

где X_1, X_2, X_3 не зависят от ∂_3 . Подставляя в уравнение (16) и принимая во внимание выражение BT и $BT\theta$, получим

$$\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \theta (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') X_0 - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta \delta e_3' X_0 + \\ + \theta \Delta X_0 + \Delta [\Delta_2 (e_3 e_3' - 1) + \delta\delta'] X_1 + \\ + 2\theta \Delta \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) X_1 + \Delta^2 X_1 + \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \theta \Delta (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') X_2 - \\ - \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta^2 \delta e_3' X_2 + \theta \Delta^2 X_2 + \\ + \Delta^2 [\Delta_2 (e_3 e_3' - 1) + \delta\delta'] X_3 + 2\Delta^2 \theta \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) X_3 + \\ + \Delta^3 X_4 + \Delta^2 BTX_4 = r_0 + \theta r_1 + \Delta r_2 + \theta \Delta r_3 + \Delta^2 r_4. \quad (16)$$

Сравнивая коэффициенты при $1, \theta, \Delta, \theta \Delta, \Delta^2$ имеем:

$$r_0 = 0; \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') X_0 = r_1 \quad (17_1^*);$$

$$-\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' X_0 - \vartheta\vartheta' X_1 = r_2; \quad (17_2^*)$$

$$X_0 + 2 \left(\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) X_1 + \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') X_2 = r_3, \quad (17_3^*)$$

$$\text{отсюда} \quad r_0 = 0, \vartheta' r_1 = 0, e_3' r_2 = 0, \delta' r_2 = -e_3' r_1,$$

т. е. необходимость доказана

Докажем теперь достаточность, т. е. при выполнении условия (17) имеет место формула (18). Действительно: умножая (17₁^{*}) соответственно на δ', e_3 и g' , получим:

$$-\frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \delta' X_0 = \delta' r_1; \quad \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 e_3' X_0 = e_3' r_1;$$

$$\vartheta r_1' = 0 \text{ и } \vartheta x_0' = \vartheta' r_3.$$

Отсюда

$$\delta' x_0' = -\frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} \delta' r_1; \quad e_3' x_0' = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3' r_1; \quad \vartheta' x_0' = \vartheta' r_3,$$

и так как

$$I = \frac{\delta\delta' + \vartheta\vartheta'}{\Delta_2} + e_3 e_3', \quad (19)$$

то, следовательно,

$$X_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') r_1 + \frac{\vartheta\vartheta' r_2}{\Delta_2}. \quad (20)$$

то, следовательно,

$$X_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\Delta_2 l_3 l_3' - \delta\delta') r_1 + \frac{\vartheta\vartheta' r_3}{\Delta_2} \quad (20)$$

Из (17₂) имеем

$$-\Delta_2 \vartheta' X_1 = \vartheta' r_2;$$

$\delta' X_1$ и $e_3' X_1$ — произволы, обозначим их соответственно: $\delta' X_1 = f'$; $e_3' X_1 = g'$, тогда на основании формулы (19) и наконец из (17₃), умножая соответственно на δ', e_3 и ϑ' получим

$$\delta' x_2 = -\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^2} \delta' r_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} \delta' r_3 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} g',$$

$$e_3' x_2 = -\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^2} e_3' r_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3' r_3 + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} f'.$$

$\vartheta' x_2 = h'$ — произвол,

тогда на основании (19) имеем

$$X_2 = \frac{\delta}{\Delta_2} \left[-\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^2} \delta' r_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} \delta' r_3 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} g' \right] + \\ + \frac{\vartheta}{\Delta_2} h' + e_3 \left[-\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^2} e_3' r_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3' r_3 + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} f' \right]$$

или

$$X_2 = -\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)\Delta_2^3} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta\delta') r_1 - \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\delta\delta' - \Delta_2 e_3 e_3') r_3 + \\ + \frac{\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} \delta g' + \frac{\vartheta}{\Delta_2} h' + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3 f'. \quad (22)$$

Следовательно, принимая во внимание (20), (21), (22) и разложение X , получим (18), т. е.

$$X = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') r_1 + \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2} r_3 - \theta \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2^2} r_2 - \\ - \Delta \left[\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^3} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta\delta') r_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\delta\delta' - \Delta_2 e_3 e_3') r_3 \right] + \\ + \theta \left(\frac{\delta}{\Delta_2} f' + e_3 g' \right) + \Delta \left[\frac{\mu}{\lambda + \mu} g' + \frac{\vartheta h'}{\Delta_2} + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)\Delta_2} e_3 f' \right] + \\ + \theta \Delta X_3 + \Delta^2 X_4,$$

что и требовалось доказать.

Сравнивая (18) и (4), можно убедиться, что все произволы в формуле (18) можно заранее взять равными нулю. Следовательно, решение операторного уравнения (16) будет иметь вид

$$X = \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)\Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta\delta') r_1 + \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2} r_3 - \theta \frac{\vartheta\vartheta'}{\Delta_2^2} r_2 -$$

$$-\Delta \left[\frac{(\lambda + 2\mu)^2}{4(\lambda + \mu)^2 \Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta') r_1 + \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu) \Delta_2^2} (\delta \delta' - \Delta_2 e_3 e_3') r_3 \right]. \quad (23)$$

Теперь займемся нахождением решения систем уравнений (10). При этом все эти уравнения имеют решение вида (23),

На самом деле, уравнения $(\bar{10}, 0)$:

$$r_0 = \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 (e_3 \delta' - \delta e_3') + 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_0 + 2\Delta_2 \beta_0;$$

$$r_1 = -2\alpha_0; r_2 = 2 \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} \delta e_3' - e_3 \delta' \right) - \beta_0; r_3 = 0.$$

На основании леммы из условия разрешимости уравнения $(\bar{10}, 0)$ находим:

$$\alpha = -\frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta'); \beta_0 = 2(\delta e_3' - e_3 \delta'). \quad (17^{**})$$

Следовательно,

$$R_0 = \frac{2\mu}{(\lambda + \mu) \Delta_2} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta \delta') - \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \frac{\Delta}{\Delta_2^2} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta'). \quad (24)$$

Для уравнения $(\bar{10}, 1)$:

$$r_0 = 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_1 + 2\Delta_2 \beta_1; r_1 = -2\alpha_1;$$

$$r_2 = \alpha_0 - (\delta e_3' - e_3 \delta') \beta_0 - \beta_1; r_3 = \beta_0.$$

Принимая во внимание условия разрешимости (17) и выражение (17**), находим

$$\alpha_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 (\delta e_3' + e_3 \delta'), \beta_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\Delta_2 e_3 e_3' - \delta \delta'), \quad (17^{***})$$

тогда

$$q_1 = 2(\delta e_3' - e_3 \delta'). \quad (25)$$

В уравнение $(\bar{10}, 2)$:

$$r_0 = 2(\delta e_3' - e_3 \delta') \alpha_2 + \Delta_2 \beta_2; r_1 = -2\alpha_2; r_2 = \alpha_1 - (\delta e_3' - e_3 \delta') \beta_1 - \beta_2; r_3 = \beta_1.$$

Принимая во внимание условия (17) и выражение (17**), находим, что

$$\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0 \text{ и } q_2 = \frac{\Delta}{\Delta_2} (\Delta_2 e_3 e_3' + \delta \delta'). \quad (26)$$

Так как в следующих уравнениях в решении сразу появляется Δ^2 , то поэтому достаточно взять только решение уравнений $(\bar{10}, 0)$; $(\bar{10}, 1)$; $(\bar{10}, 2)$.

Таким образом на основании (4), (15), (5**), (24), (25), (26) получим

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -\frac{1}{8\pi} T^x p^y |x - \bar{y}| = -\frac{1}{8\pi} T^x \left\{ -\frac{2\mu}{(\lambda + \mu) \Delta_2} \delta \delta' + \right. \\ &+ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} e_3 e_3' - \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \frac{\Delta}{\Delta_2^2} \delta \delta' - \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)^2} \frac{\Delta}{\Delta_2} e_3 e_3' - I + \\ &+ 2y_3 (\delta e_3' - e_3 \delta') + y_3^2 \frac{\Delta}{\Delta_2} \delta \delta' + y_3^2 \Delta e_3 e_3' \left. \right\} |x - \bar{y}| = - \\ &= -\frac{1}{8\pi} T^x \left\{ -\frac{2\mu}{\lambda + \mu} \left(-\partial_3^{-2} - \partial_3^{-4} \Delta + \frac{1}{a_3^4} \Delta^2 \right) (\partial_1^2 e_1 e_1' + \partial_1 \partial_2 e_1 e_2' + \right. \\ &+ \partial_2 \partial_1 e_2 e_1' + \partial_2^2 e_2 e_2') + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} e_3 e_3' - \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} (\partial_3^{-4} \Delta - \partial_3^{-4} \Delta^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \dots) (\partial_1^2 e_1 e_1' + \partial_1 \partial_2 e_1 e_2' + \partial_2 \partial_1 e_2 e_1' + \partial_2^2 e_2 e_2') - \\ &- \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \left(-\partial_3^{-2} \Delta + \frac{1}{\partial_3^{-4} \Delta} \Delta \Delta^2 - \partial_3^{-4} \Delta^2 \right) e_3 e_3' - I + \\ &+ 2y_3 (\partial_1 e_1 e_3' + \partial_2 e_2 e_3' - \partial_1 e_3 e_1' - \partial_2 e_3 e_2') + \\ &+ y_3^2 \left(-\partial_3^{-2} \Delta - \partial_3^{-4} \Delta^2 + \frac{1}{\partial_3^{-4} \Delta} \Delta \Delta^2 \right) \partial_1^2 e_1 e_1' + \partial_1 \partial_2 e_1 e_2' + \\ &+ \partial_2 \partial_1 e_2 e_1' + \partial_2^2 e_2 e_2' + y_3^2 \Delta e_3 e_3' \left. \right\} |X - \bar{Y}|. \end{aligned}$$

Это преобразование сделано для того, чтобы было можно вынести скалярные дифференциальные операторы перед T^x . Это можно записать также в виде

$$\begin{aligned} P(y, x) &= \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \partial_3^{-2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_1' + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_2' + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_1' + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_2' \left. \right] + \\ &+ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \partial_3^{-4} \Delta \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_1' + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_2' + \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_1' + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_2' \left. \right] + \frac{2}{\lambda + \mu} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3' - \\ &- \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \partial_3^{-4} \Delta \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_1' + \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_2' + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_1' + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_2' \left. \right] + \\ &+ \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \partial_3^{-2} \Delta \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3' - I \omega(x - \bar{y}) + \\ &+ 2y_3 \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_3' + \frac{\partial}{\partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_3' - \right. \\ &- \frac{\partial}{\partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_1' - \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_2' \left. \right] - y_3^2 \partial_3^2 \Delta \left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_1' + \right. \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_2' + \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_1' + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_2' \left. \right] + y_3^2 \Delta \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3' \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3' + 2y_3 \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_1 e_3' + \frac{\partial}{\partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_2 e_3' - \right. \\ &- \frac{\partial}{\partial y_1} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_1' - \frac{\partial}{\partial y_2} \omega(x - \bar{y}) e_3 e_2' \left. \right] + \\ &+ y_3^2 \Delta \omega(x - \bar{y}) e_3 e_3' - I \omega(x - \bar{y}) + \\ &+ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_{-\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_1' dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_2' dt + \\
& + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_1' dt + \\
& + \frac{2\mu}{\lambda + \mu} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_2' dt + \\
& + \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)^2}{3!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_1' dt + \\
& + \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{3!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_2' dt + \\
& + \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{3!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_1' dt + \\
& + \frac{\lambda\mu}{(\lambda + \mu)^2} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{3!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_2' dt + \\
& + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + \mu)^2} \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \Delta^y \omega(x - \bar{y}_t) e_3 e_3' dt + \\
& - y_3^2 \left[\int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_2' dt + \right. \\
& + \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \omega(x - \bar{y}_t) e_1 e_2 dt + \\
& + \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_1' dt + \\
& \left. + \int_{+\infty}^{y_3} \frac{(y_3 - t)}{1!} \Delta^y \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \omega(x - \bar{y}_t) e_2 e_2' dt \right],
\end{aligned}$$

где $y_t = (y_1, y_2, t)$, $\bar{y}_t = (y_1, y_2, -t)$.

Задача 4:

$$A u = -f(x) \quad (x_3 > 0), \quad (1)$$

$$B u|_{x_3=0} = \alpha(x_1, x_2), \quad (2)$$

где $A = \nu \Delta + (\lambda + \mu) \partial \partial'$; $B = \frac{1}{2} \partial_3 I + \mu \partial e_3' + \lambda e_3 \partial'$.

Для разрешения этой задачи рассмотрим формулу Бетти в матричной форме. Пусть:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \quad B_\nu(u) = \sum_{l=1}^3 \nu_l X_l(u);$$

$$X_l(u) = \begin{pmatrix} X_{1l}(u) \\ X_{2l}(u) \\ X_{3l}(u) \end{pmatrix}; \quad X_{lj} = \nu \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) + \delta_{lj} \lambda \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \quad (i \neq j' = 1, 2, 3), \quad \delta_{lj} = \begin{pmatrix} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{pmatrix},$$

тогда имеет место

$$\int_S [v' B_\nu(u) - B_\nu'(v)] ds = \int_D [v' A u - (A v)' u] dx. \quad (3)$$

Для любых матриц u, v высоты три, ν — орт внешней к S нормали. Эта формула верна и для бесконечной области, если

$$v' A u - (A v)' u = 0 \left(\frac{1}{|x|^{\varepsilon+3}} \right), \quad v' B_\nu(u) - B_\nu'(v) u = 0 \left(\frac{1}{|x|^{\varepsilon+2}} \right).$$

В формуле (3) положим $v = \omega(x - y)$; $y \in D$, значит эта функция имеет разрыв внутри D в точке y поэтому непосредственно применить формулу Бетти в области D к функциям u и $v = \omega(x - y)$ нельзя. Однако формула применима к этим функциям в области $D \setminus D_\varepsilon$ с границей $S \cup S_\varepsilon$, где D_ε — шар радиуса ε с центром в точке y , ограниченной S_ε . Затем, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, обычным образом получаем требуемое [1]. Действительно, применяя формулу Бетти, имеем

$$\int_S [\omega'(x - y) B_\nu(u) - [B_\nu(\omega(x - y))]' u] dx + \int_{S_\varepsilon} [\omega'(x - y) B_\nu(u) - [B_\nu(\omega(x - y))]' u] dx = \int_{D \setminus D_\varepsilon} [\omega'(x - y) A u - [A \omega(x - y)]' u] dx, \quad (4)$$

так как

$$\int_{S_\varepsilon} B_\nu(\omega(x - y))' u(x) dx = \int_{S_\varepsilon} B_\nu'(\omega(x - y)) [u(x) - u(y)] dx + \int_{S_\varepsilon} B_\nu(\omega(x - y))' dx \cdot S \cdot u(y), \quad (5)$$

то переходя к пределу в (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая (5), получим

$$u(y) = - \int_S \omega'(x - y) A u dx + \int_S [\omega(x - y) B_\nu(u) - [B_\nu(\omega(x - y))]' u] dS. \quad (6)$$

Пусть D — верхнее полупространство и в равенстве (6) положим $v = \omega(x - y) - P(x, y)$,

где $P(x, y)$ определяется из (28).

Следовательно,

$$u(y) = \int_{x_3 > 0} [\omega(x - y) - P(x, y)] f(x) dx + \int_{x_3=0} \{ [\omega(x - y) - P(x, y)] B_\nu(u) dx_1 dx_2 - \int_{x_3=0} [B_\nu(\omega(x - y) - P(x, y))]' u \} dx_1 dx_2, \quad (7)$$

так как

$$B_\nu(u) = \sum_{l=1}^3 \nu_l X_l(u); \quad \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad B_\nu(u) = -X_3(u) = - \begin{pmatrix} X_{13}(u) \\ X_{23}(u) \\ X_{33}(u) \end{pmatrix} = - \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x_3} + \mu \partial e_3' + \lambda e_3 \partial' u \right) = -B u.$$

Тогда (7) примет вид

$$u(y) = \int_{x_2=0} [\omega(x-y) - P(x, y)] f(x) dx - \int_{x_2=0} \omega(x-y) - \\ - P(x, y) \chi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

или, заменяя y через x , а x через y , получим

$$u(x) = \int_{y_2=0} [\omega(y-x) - P(y, x)]' f(y) dy - \int_{y_2=0} [\omega(y-x) - \\ - P(y, x)] \chi(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я. Б. „ДАН СССР“, т. 79, 1951.
2. Мусхелишвили Н. И. „Некоторые основные задачи математической теории упругости“. Изд. АН СССР, 1949.

Поступило 30. VIII 1968

М. Ә. Әзимов

Жарымфәзада еластиклик нәзәријјәсинин әсас мәсәләләринин
оператор үсулу илә һәлли, II

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә бахылан мәсәләләр јени оператор үсулунун тәтбиғи илә һәлл едилмишдир. Бу үсулун көмәклији илә гојулмуш мәсәләләрин һәлли чәбри һесабламаја кәтирилмиш вә сонра бу һәлләр фундаментал матрис вәситәсилә ифадә олуномушдур.

А. Н. ШНУЛИН

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ МАГНИТОВ В ЭПР-ИССЛЕДОВАНИЯХ

Настоящая статья посвящена опыту применения к ЭПР-исследованиям сильных магнитных полей напряженностью до 50 кэ, полученных в соленоидах со сверхпроводящей обмоткой. Показано, что применение сверхпроводящего теплового ключа, приводящее к значительному гистерезису, при изучении ЭПР-сигналов нецелесообразно. Предварительное длительное азотное охлаждение соленоида значительно уменьшает общий расход жидкого гелия. Переход соленоида в нормальное состояние в криостате емкостью до 5 л не является взрывоопасным. Получение без значительных тепловых потерь глубины модуляции до 300 э не представляет каких-либо затруднений.

Применительно к ЭПР-исследованиям некоторых кристаллов, легированных элементами из групп железа и редких земель, использование сильных магнитных полей может дать много полезной информации, которую невозможно получить с помощью полей до 20000 э, достигаемых обычными магнитами.

В последнее время появилось много работ [1, 2, 3, 4], посвященных этому методу. В нашем случае сильные магнитные поля планировалось использовать для перехвата уровней, один из которых является нижним синглетом, а другой — крамеровским дублетом, отстоящим от основного синглетного состояния на расстоянии до 20 см⁻¹. Успех нахождения последней величины при данном максимальном поле соленоида и данной частоте микроволнового излучения (37,5 кМгц) ЭПР-спектрометра определялся, конечно, значением g -фактора исследуемого парамагнитного иона в кристалле. Большое зеемановское расщепление дублета, обусловленное наложением сильного магнитного поля, позволяет приблизить один из подуровней дублета к основному синглетному уровню и наблюдать индуцируемый высокочастотным полем переход между ними. В статье описываются некоторые подробности работы со сверхпроводящим соленоидом в применении к ЭПР-исследованиям парамагнитных ионов в кристаллах. Результаты последних будут опубликованы позже.

СОЛЕНОИД

Соленоид представлял собой латунный каркас, на который была намотана сверхпроводящая проволока диаметром 0,33 мм, учитывая медную и обычную изоляцию, и 0,27 мм без нее. Внутренний рабочий диаметр соленоида 16,2 мм, внешний 100 мм, высота 105 мм.

предельный ток 16 а, критическое поле 53000 э. Наличие коррекции обеспечивало неоднородность поля $0,33 \times 10^{-4}$ в сфере диаметром 16 мм.

Соленоид был снабжен сверхпроводящим тепловым ключом, который позволял работать в режиме незатухающего тока. При переключении источника питания не в воде соленоида в этот режим и отключении источника питания не было отмечено сколько-нибудь заметного изменения поля. Это регистрировалось на осциллографе по линии поглощения ЭПР-сигнала какого-либо образца с парамагнитными ионами. Однако соленоид обладал значительным гистерезисом. Линия резонансного поглощения дифенилпикрилгидразила, например, при развертке поля в сторону увеличения наблюдалась при токе 3,82 а, а в обратном направлении — при токе 3а. Кроме того, после многократного реверсирования поля линия наблюдалась при другом значении тока, питающего магнит. Эти явления не зависели от скорости развертки поля. Время установления поля в соленоиде было слишком большим, что неудобно для быстрого нахождения линии резонансного поглощения.

После удаления сверхпроводящего ключа гистерезис не наблюдался. Многократное реверсирование поля в том и другом направлении приводило к одному и тому же значению тока, при котором наблюдалась спектральная линия. Время установления поля значительно уменьшилось, линия наблюдалась при одном и том же значении поля, установление линии на осциллографе стало таким же простым делом, как и на обычном магните. По-видимому, при проведении ЭПР-исследований на видеоспектроскопе целесообразно работать без сверхпроводящего теплового ключа.

При превышении критического тока сверхпроводящий соленоид перешел в нормальное состояние. Это явление сопровождалось приглушенным ударом внутри гелиевого дьюара и резким падением до нуля тока, питающего соленоид. В результате этого перехода сгорела часть сверхпроводящей проволоки, подходящей к контакту, соединяющему сверхпроводящую проволоку с медным проводом от блока питания соленоида.

После устранения повреждения при новом переходе из сверхпроводящего состояния в нормальное характер повреждения повторился. Второй переход произошел при меньшем значении тока, но градуировочная кривая зависимости напряженности магнитного поля от питающего тока осталась без изменения. Для построения этой кривой были использованы кристаллы, легированные парамагнитными ионами, с известными g -факторами. График представлял прямую линию.

Питание соленоида осуществлялось с помощью аккумуляторных батарей напряжением 6 в с транзисторной схемой регулирования силы тока. Для защиты транзисторов от больших обратных напряжений, возникающих при переходе соленоида из сверхпроводящего состояния в нормальное, в питающей схеме использовался шунт, закорачивающий транзисторы. Наличие шунта и большой индуктивности (около 20 гн) соленоида устраняет необходимость в больших емкостях, вводимых в транзисторные схемы для защиты последней от обратных напряжений и сглаживания скачков при регулировании тока соленоида. Емкости увеличили бы и без того большое время установления тока в соленоиде вследствие его высокой индуктивности и малого сопротивления медного покрытия сверхпроводящей проволоки при гелиевых температурах. Ни один переход в нормальное состояние соленоида не привел к повреждению хотя бы одного транзистора.

Для грубой развертки поля использовался проволоочный потенциометр сопротивлением в 20 ком, для тонкой регулировки-прецезиль-

ный потенциометр типа ППМЛ-М сопротивлением в 1 ком. На рис. 1 показан соленоид с волноводной секцией и резонатором перед погружением в гелиевый дьюар.

КРИОСТАТ

Для охлаждения соленоида до 4,2°К и сохранения жидкого гелия на время эксперимента был использован посеребренный стеклянный дьюар, внутренний диаметр и длина которого составляли соответственно 108 и 630 мм. Соединение капли с дьюаром осуществлялось с помощью грибового уплотнения, которое выдерживает большие механические усилия и особенно удобно при работе со сверхпроводящими соленоидами. При переходе соленоида в нормальное состояние вследствие бурного выкипания гелия и подъема давления в криостате уплотнение может быть выбито из-под капли. Применение же грибового уплотнения ни разу не привело к такому результату. Диаметр выпускной трубы составлял 16 мм.

В качестве азотного криостата использовался ящик, склеенный из пенопласта. После нескольких заливок его жидким азотом температурные натяжения вызывали в нем трещины, причем не в клееных швах, но в самом материале. Этого можно избежать, если внутрь пенопластового ящика плотно вставить стакан из нержавеющей стали толщиной 0,15 мм.

Ввиду большой массы соленоида (около 5 кг) на его охлаждение идет много жидкого гелия. Из соображений экономии жидкого гелия охлаждение последним надо начинать после того как температура соленоида достигнет 77°К. При предварительном азотном охлаждении продолжительностью 18—20 часов расход жидкого гелия на охлаждение системы от 77 до 4,2°К составлял 5 л, а при 4-часовом охлаждении — 15—18 л. Продолжительность заполнения криостата по времени обычно не превышала двух часов. Заливочного объема жидкого гелия хватало на 1—1,5 часа работы, в зависимости от частоты и скорости изменения магнитного поля. Столь большие тепловые потери были обусловлены недостаточной длиной криостата. Для уменьшения этих потерь под капкой была установлена ванна с жидким азотом, через которую пропускались тоководы, несущая труба, измеритель уровня жидкого гелия и сливная трубка. Кроме того, на крепежном стержне было установлено два отполированных тепловых экранов из меди. Термоконтактируя с восходящим потоком испаряющегося гелия, эти экраны, имея промежуточную температуру между 77 и 4,2°К, отражали тепло, идущее от капли к соленоиду. Все это увеличило продолжительность эксперимента почти в 2 раза.

Ввиду невозможности визуального наблюдения за уровнем гелия был сделан гелиевый уровнемер, основанный на явлении сверхпроводимости. Катушку уровнемера крепили к тонкой трубке из нержавеющей стали и с помощью фторопластового вакуумного уплотнения на капке дьюара ее можно было установить на любой высоте соленоида. Так что всегда можно было контролировать процесс заливки криостата жидким гелием и следить за изменением его уровня во время эксперимента.

ЭПР-СПЕКТРОМЕТР

Для проведения экспериментов по парамагнитному резонансному поглощению был изготовлен ЭПР-спектрометр, работающий на длине волны 8 мм. Волновод, входящий внутрь гелиевого дьюара, был сде-

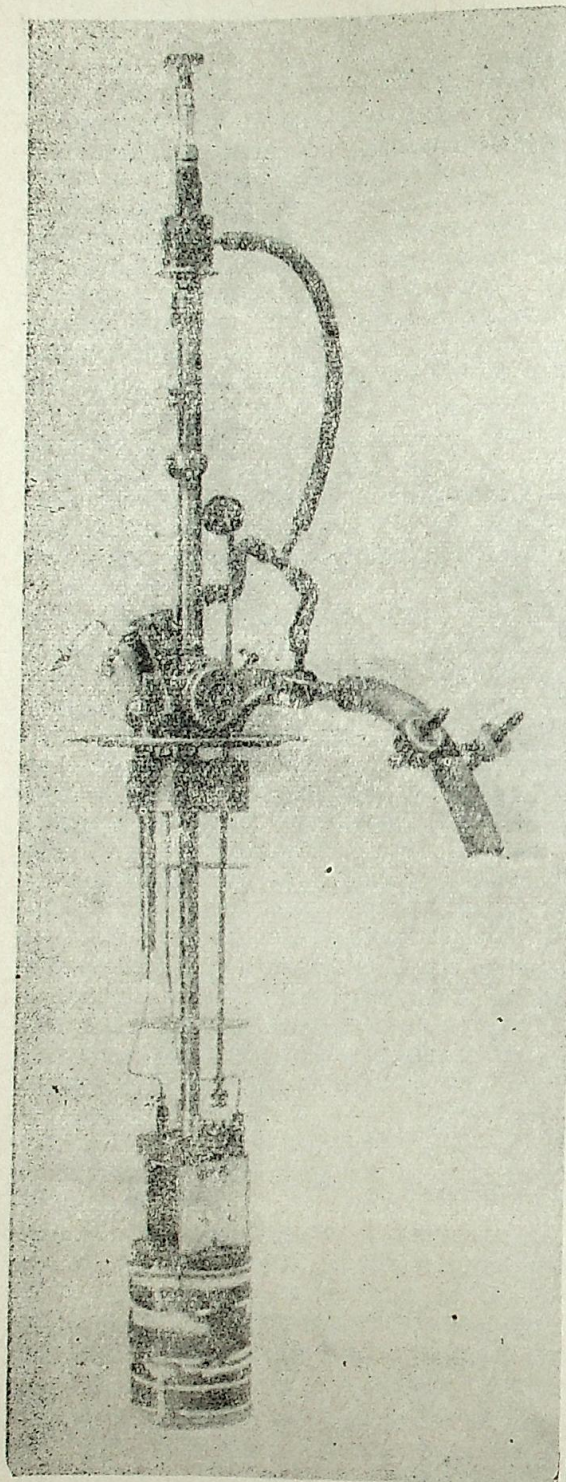


Рис. 1. Вид соленоида с волноводной секцией и резонатором перед погружением в гелиевый криостат.

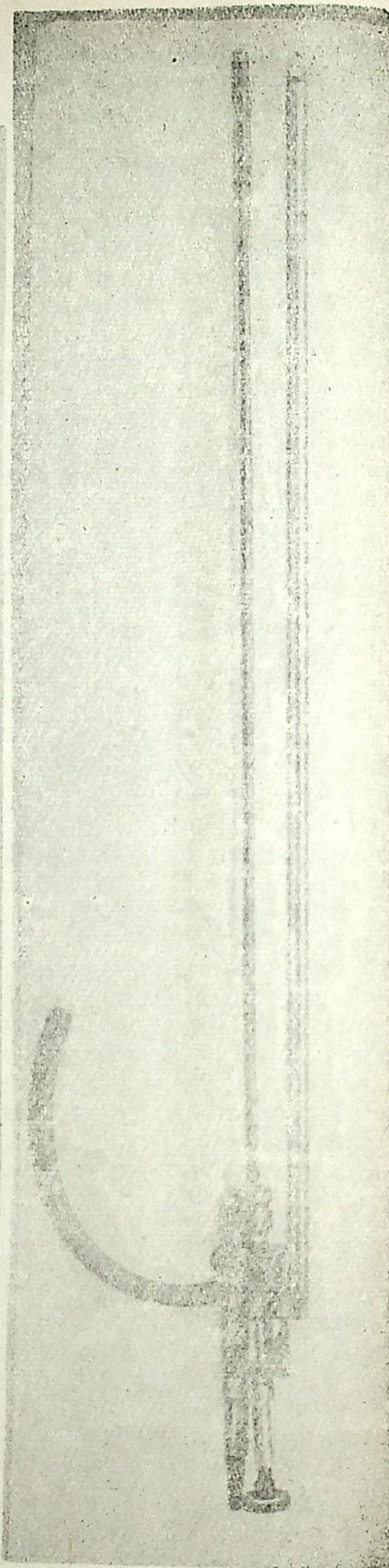


Рис. 2. Обсадная труба с модуляционной обмоткой и волноводная секция с резонатором.

дан из нержавеющей стали и заканчивался на конце прямоугольным резонатором с настроечным поршнем.

Образец помещали внутри резонатора на столике из фторопласта в пучности напряженности магнитного поля микроволны типа H_{102} , перпендикулярной основному полю соленоида. Конец столика, выходящий из резонатора, через маленькую шестеренку был связан с тягой, позволяющей осуществлять ориентацию образца.

Волновод с резонатором вставляли в тонкостенную трубу из нержавеющей стали и соединяли с ней вне криостата посредством вакуумного уплотнения. Перед опусканием волноводной секции в криостат с жидким гелием пространство между трубой и волноводом откачивали вакуумным насосом или заполняли газообразным гелием.

Труба из нержавеющей стали, служившая для крепления соленоида к капке дьюара, продолжалась выше капли и заканчивалась фторопластовым уплотнением, через которое производилось медленное погружение обсадной трубы с волноводной секцией внутрь криостата и отверстия соленоида.

Между фторопластовым уплотнением и капкой находился вакуумный кран, который открывался при погружении и закрывался при удалении волновода из криостата. Это предотвращало попадание воздуха и влаги в криостат. Такая конструкция позволяла производить смену образцов непосредственно во время эксперимента. Кроме того, она дает возможность точно установить кристалл в геометрическом центре соленоида, т. е. в месте максимальной напряженности магнитного поля, что особенно важно в случае плохой однородности магнитного поля. Погружение резонатора можно было производить как вручную, так и с помощью червячной передачи, контролируя глубину погружения по нониусу.

Обсадная труба, в которую входила волноводная секция с резонатором, в нижней своей части протачивалась до толщины стенок 0,15 мм на длине 120 мм. На это место медным проводом ПЭВ-2 диаметром 0,1 мм наматывалась в один слой катушка, которая служила для модуляции магнитного поля соленоида с частотой 50 гц.

При токе 250 ма глубина модуляции была около 300 э, что можно было легко установить по количеству линий спектра, например, Nd^3 в $CaWO_4$, наблюдаемых на осциллографе. В первоначальном варианте модуляционную катушку наматывали непосредственно на крепежную трубу, которая проходила через все отверстие соленоида. Однако глубина модуляции оказалась недостаточной. Можно было добиться достаточного размаха модуляции увеличением тока, но это было нежелательно из-за возрастания потерь жидкого гелия. Такая намотка была бы более удобной, ибо постоянно оставалась бы в криостате.

При размещении модуляционной катушки на подвижной обсадной трубе один конец обмотки необходимо присоединить к разъемному контакту, а другой можно припаять непосредственно к самой трубе. В нашей конструкции на торце обсадной трубы находилась вилка, к которой припаивали один конец модуляционной катушки, а в нижней части отверстия соленоида размещалась контактная втулка. При погружении обсадной трубы в отверстие соленоида вилка входила в это контактное гнездо и замыкала цепь питания модуляционной катушки. Волноводная секция с резонатором и обсадная труба с модуляционной обмоткой показаны на рис. 2.

В заключение автор благодарит В. Н. Шахтарина за изготовление соленоида, Н. Н. Михайлова и М. М. Зайтова за ценные советы, и М. А. Хайруллина за помощь в изготовлении спектрометра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Low W. Physical Review, vol 134, 1964, No. 6A, p. 1479—1481.
2. Girard B., Sauzade M. Nuclear Instruments and Methods, vol. 25, p. 269—89, January 1964.
3. Sauzade M., Girard B. IEEE Trans. Magnetics (USA), vol. mag.—2, No. 3, 323—6 (Sept. 1926).
4. Sauzade M., Pontnav J., Lesas L. „Phys. Lesters“, vol. 19, p. 617—618, 1956.

А. Н. Шнулин

Ифрат кечиричи магнитлэрин ЕПР тэдгигатларында тэтбиги һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ЕПР тэдгигатларында магнит саһәси 50 ке-дәк олан ифрат кечиричи соленоидин тэтбигиндән бәһс олунмушдур. Ајдын-лашдырылмышдыр ки, ифрат кечиричи ачарын бу саһәдә истифадә едилмәси һистерезисин әмәлә кәлмәсинә сәбәб олур вә онун пара-магнит резонанс удулма тәчрүбәсиндә тэтбиги мәгсәдәујгун дејилдир.

Спектрометрин конструксијасы маје һелиум температурунда нүмунәви билаваситә дәјишмәјә имкан вермишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмлэри серијасы, 1969, № 3.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 3

Я. Б. КАДЫМОВ, З. Я. КУЛИЕВ, А. И. МАМЕДОВ

К МЕТОДУ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В электротехнике практикой выдвигается важная проблема по оптимизации переходных процессов в системах с распределенными параметрами. Целью настоящей статьи является расчет оптимального по быстродействию переходного процесса в упомянутых системах. В основе этого расчета лежит метод, основанный на применении теории импульсных систем и устранении влияния запаздывания в системе на динамику процесса [1, 2, 3].

Приведение исходной непрерывной системы позволяет использовать важное свойство последних, заключающееся в том, что при определенных условиях импульсная характеристика, начиная с некоторого значения n , равна нулю [1]. При этом импульсная система обладает бесконечной степенью устойчивости и переходный процесс заканчивается за конечное время.

Рассмотрим подключение однородной цепи конечной длины через линейные индуктивность L_1 и сопротивление r_1 к источнику напряжения (рис. 1). Для начала цепи можно написать следующее уравнение в дискретной форме [2]:

$$I_{1x}^*(q, \varepsilon) = F^*(q, 0) K_1^*(q, \varepsilon) - U_{1x}^*(q, \varepsilon) K_1^*(q, \varepsilon), \quad (1)$$

где

$F^*(q, 0)$ —изображение входной величины по дискретному преобразованию Лапласа;

$K_1^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{r_1} \left(1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\alpha_1}} e^{-\alpha_1 \varepsilon} \right)$ —передаточная функция импульсной системы;

ε —вещественный параметр, причем

$$0 \leq \varepsilon \leq 1; \alpha_1 = \frac{2t_0}{\lambda} \cdot \frac{r_1}{L_1};$$

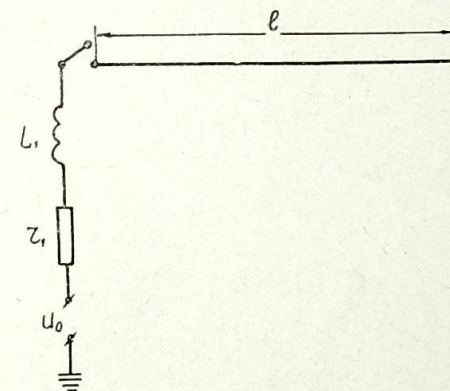


Рис. 1

λ — относительный период повторения решетчатой функции;
 t_0 — время пробега волны в один конец цепи;

$I_{1x}^*(q, \varepsilon)$, $U_{1x}^*(q, \varepsilon)$ — дискретное изображение смещенной решетчатой функции по току и напряжению в начале цепи.

Между током и напряжением в начале цепи в дискретной форме имеется следующая связь [2]:

$$I_{1x}^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{z} K_c^*(q, 0) U_{1x}^*(q, \varepsilon), \quad (2)$$

где $K_c^*(q, 0) = \frac{e^{\lambda q} - 1}{e^{\lambda q} + 1}$ — значение коэффициента связи в дискретной форме без учета потерь;

z — волновое сопротивление упомянутой цепи.

Уравнение (1) с учетом (2) представим в следующем виде:

$$U_{1x}^*(q, \varepsilon) = \frac{K_p^*(q, \varepsilon)}{1 + K_p^*(q, 0)} F^*(q, 0), \quad (3)$$

где $K_p^*(q, \varepsilon)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы по напряжению:

$$K_p^*(q, \varepsilon) = \frac{z K_1^*(q, \varepsilon)}{K_c^*(q, 0)}. \quad (4)$$

Из-за введения в выражении (3) приближения ($\varepsilon = 0$ в характеристическом уравнении) образуется погрешность, допустимая в инженерных расчетах. Подставляя значения $K_1^*(q, \varepsilon)$ и $K_c^*(q, 0)$ в (4), получим

$$K_p^*(q, \varepsilon) = \frac{B_{\lambda+1}(\varepsilon) e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda}(\varepsilon) e^{\lambda q} + B_1(\varepsilon) e^q + B_0(\varepsilon)}{A_{\lambda+1}(0) e^{(\lambda+1)q} + A_{\lambda}(0) e^{\lambda q} + A_1(0) e^q + A_0(0)}, \quad (5)$$

где

$$B_{\lambda+1}(\varepsilon) = B_1(\varepsilon) = \frac{z}{r_1} (1 - e^{-\alpha_1 \varepsilon}); \quad A_{\lambda}(0) = -e^{-\alpha_1};$$

$$B_{\lambda}(\varepsilon) = B_0(\varepsilon) = -\frac{z}{r_1} (e^{-\alpha_1} - e^{-\alpha_2 \varepsilon}); \quad A_1(0) = -1;$$

$$A_{\lambda+1}(0) = 1; \quad A_0(0) = e^{-\alpha_1}$$

Желаемую передаточную функцию замкнутой импульсной системы представим в виде [1]

$$K_{з.ж.}^*(q, 0) = e^{-\eta q}, \quad (6)$$

где η — относительное время запаздывания. Желаемая оптимальная передаточная функция разомкнутой импульсной системы определяется по формуле:

$$K_{р.ж.}^*(q, 0) = \frac{K_{з.ж.}^*(q, 0)}{1 - K_{з.ж.}^*(q, 0)}. \quad (7)$$

Выражение (7) с учетом (6) принимает следующий вид:

$$K_{р.ж.}^*(q, 0) = \frac{1}{e^{\eta q} - 1}. \quad (8)$$

Передаточная функция дополнительной импульсной цепи при

последовательной коррекции находится по формуле:

$$K_d^*(q, 0) = \frac{K_{р.ж.}^*(q, 0)}{K_p^*(q, 0)}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) значения $K_{р.ж.}^*(q, 0)$ и $K_p^*(q, 0)$, получим

$$K_d^*(q, 0) = \frac{A_{\lambda+1}(0) e^{(\lambda+1)q} + A_{\lambda}(0) e^{\lambda q} + A_1(0) e^q + A_0(0)}{A_{\lambda+\eta}(0) e^{(\lambda+\eta)q} + B_{\lambda}(0) e^{\lambda q} + B_{\eta}(0) e^{\eta q} + B_0(0)}, \quad (10)$$

где

$$B_{\lambda+\eta}(0) = B_{\lambda}(0); \quad B_{\eta}(0) = B_0;$$

$$B_{\lambda}(0) = -B_{\lambda}(0); \quad B_0(0) = -B_0(0).$$

Введем обозначение

$$\lambda + \eta = \kappa \lambda, \quad (11)$$

где κ — коэффициент, значение которого будет найдено ниже. Из выражения (10) видно, что физическая реализуемость системы осуществляется при выполнении следующего условия:

$$\kappa \lambda \geq \lambda + 1. \quad (12)$$

Так как относительный период повторения решетчатой функции является всегда положительной величиной, то

$$\kappa \geq 1 + \frac{1}{\lambda}. \quad (13)$$

Между непрерывным аргументом t и текущими дискретными значениями n в общем случае существует следующая связь:

$$t = nT' = \frac{T}{\lambda} n = \frac{2t_0}{\lambda} n. \quad (14)$$

Для желаемого времени переходного процесса $t_{ж}$ имеем:

$$t = t_{ж}, \quad n = \eta.$$

При этом выражение (14) примет вид

$$t_{ж} = \frac{2t_0}{\lambda} \eta. \quad (15)$$

Значение η найдем из выражения (11):

$$\eta = \lambda (\kappa - 1). \quad (16)$$

Подставив значение η в выражение (15), получим

$$t_{ж} = 2t_0 (\kappa - 1). \quad (17)$$

Таким образом для выбора $t_{ж}$ необходимо установить величину λ в зависимости от заданной погрешности, затем по выражению (13) найти величину κ .

Воспользовавшись выражениями (13) и (17), найдем минимальное значение для желаемого времени переходного процесса $t_{мин.ж.}$:

$$t_{мин.ж.} = \frac{2t_0}{\lambda}. \quad (18)$$

Исходя из вышеизложенного, на рис. 2 показана структурная схема замкнутой импульсной системы при наличии дополнительной импульсной цепи. Для построенной структурной схемы имеем следующее выражение выходной величины в дискретной форме:

$$U_{1x}^*(q, \varepsilon) = \frac{K_d^*(q, 0) K_p^*(q, \varepsilon)}{1 + K_d^*(q, 0) K_p^*(q, 0)} F^*(q, 0), \quad (19)$$

где

$$1 + K_d^*(q, 0) K_p^*(q, 0) = \frac{e^{\eta q}}{e^{\eta q} - 1}, \quad (20)$$

Подставляя (20) и (21) в уравнение (19), получим

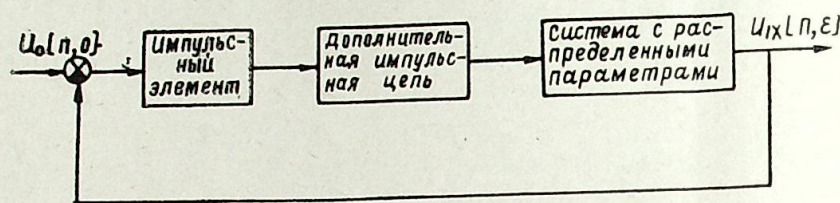
$$U_{ix}^*(q, \epsilon) = \frac{B_{\lambda+1}(\epsilon) e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda}(\epsilon) e^q + B_0(\epsilon)}{B'_{\lambda+\eta}(0) e^{(\lambda+\eta)q} + B'_{\eta}(0) e^{\eta q}} F^*(q, 0), \quad (22)$$

$$U_{ix}^*(q, \epsilon) = \frac{B_{\lambda+1}(\epsilon) e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda}(\epsilon) e^q + B_0(\epsilon)}{B'_{\lambda+\eta}(0) e^{(\lambda+\eta)q} + B'_{\eta}(0) e^{\eta q}} F^*(q, 0), \quad (22)$$

$$B_{\lambda+1}(\varepsilon) = B_1(\varepsilon) = \frac{z}{r} (1 - e^{-\alpha_1 \varepsilon});$$

$$B_\lambda(\varepsilon) = B_0(\varepsilon) = -\frac{z}{r_1}(e^{-\alpha_1} - e^{-\alpha_1 \varepsilon});$$

$$B'_{\lambda+\tau_1}(0) = B'_\eta(0) = \frac{z}{r_1} (1 - e^{-\alpha_1}).$$



Выражение (22) представим в виде

$$U_{1x}^*(q, \varepsilon) = K_{3u1x}^*(q, \varepsilon) F^*(q, 0), \quad (23)$$

где $K_{\text{ззlx}}^*(q, \varepsilon)$ — передаточная функция замкнутой импульсной системы по напряжению;

$$K_{\text{zulx}}^*(q, \varepsilon) = \frac{B_{\lambda+1}(\varepsilon) e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda}(\varepsilon) e^{\lambda q} + B_1(\varepsilon) e^q + B_0(\varepsilon)}{B'_{\lambda+\eta}(0) e^{(\lambda+\eta)q} + B'_{\eta}(0) e^{\eta q}}. \quad (24)$$

Переходный процесс в любой n -ый момент времени будем искать по правилам замкнутых импульсных систем [1]:

$$u_{1x}[n, \varepsilon] = \sum_{m=0}^n \kappa_{3u1x}[m, \varepsilon] f[n-m, 0], \quad (25)$$

где $f[n-m]$ — входная величина в решетчатой форме;

$\kappa_{31x}[m, \varepsilon]$ — импульсные характеристики по напряжению, которые отыскиваются по рекуррентному соотношению:

$$\kappa_{3\text{ulx}}[n, \varepsilon] = \frac{1}{B_l} \left\{ B_{l-n}(\varepsilon) - \sum_{\nu=1}^l B'_{l-\nu} \kappa_{3\text{ulx}}[n - \nu, \varepsilon] \right\}; \quad (26)$$

$l = \lambda + \eta$ — наивысшая степень многочлена по e^q , находящегося в знаменателе выражения (24).

Ток в начале цепи определяется выражением (2).

Значение тока и напряжения в любой точке цепи отыскиваются по методике, изложенной в работах [1,3].

Передаточная функция рассматриваемой системы без коррекции будет

$$U_{1x}^*(q, \varepsilon) = \frac{B_{\lambda+1}(\varepsilon) e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda}(\varepsilon) e^{\lambda q} + B_1(\varepsilon) e^q + B_0(\varepsilon)}{A_{\lambda+1}(0) e^{(\lambda+1)q} + A_{\lambda}(0) e^{\lambda q} + A_1(0) e^q + A_0(0)} F^*(q, 0). \quad (27)$$

где

$$B_{k+1}(\varepsilon) = B_1(\varepsilon) = \frac{2}{r_1} (1 - e^{-a_1 \varepsilon});$$

$$B_1(\varepsilon) = B_0(\varepsilon) = -\frac{z}{r_1}(e^{-\alpha_1} - e^{-\alpha_1 \varepsilon});$$

$$A_{\lambda+1}(0) = 1;$$

$$A_\lambda(0) = \frac{z}{r_1} - \left(\frac{z}{r_1} + 1 \right) e^{-\alpha_1};$$

$$A_1(0) = -1;$$

$$A_0(0) = \frac{z}{r_1} - \left(\frac{z}{r_1} - 1 \right) e^{-\alpha_1}.$$

Согласно изложенной методике произведен численный расчет для случая включения электрической цепи с распределенными парамет-

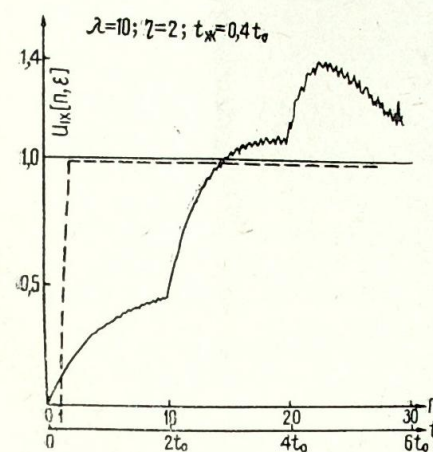


Рис. 3

$$= 2t_0, \lambda = 10, t_{\text{ж}} = 0,4t_0.$$

На рис. 3 изображены кривые зависимости напряжения от времени для начальной точки цепи. Непрерывная кривая рассчитана для случая без коррекции, а пунктирная кривая — с учетом дополнительной импульсной цепи при последовательной коррекции. Из сопоставления приведенных кривых можно установить, что условие конечной длительности переходного процесса обеспечивает в определенном смысле его оптимальное протекание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Кадымов Я. Б. Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. Физматгиз, 1968.
3. Кадымов Я. В., Листенгартен Б. А., "Автоматика и телемеханика", 1967, № 11.
4. Кадымов Я. Б., Джуварлы Ч. М., Абдуррахманов М. И., Кулиев З. Я., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем., наук", 1963, № 4.
5. Кулиев З. Я., Талыбова Р. А., "АН Азерб. ССР," 1963, № 11.

Поступило 10. III 1969

Ж. Б. Гәдимов, З. Ј. Гули'ев, А. И. Мәммәдов

Пајланмыш параметрли хэтти електрик дөврэлэринин оптимал кечид
просеслэринин һесабланмасы методикасына даир

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә импульс системләринин нәзәријәси әсасында, пәјланмыш параметрли електрик дөврәләринин оптимал кечид просесләринин һесабланмасы методикасы верилмишдир.

Көстәрилән систем үчүн тәләб олунан минимал заман һесапла-
маға имкан верән јени үсул тәклиф едилмишдир. Ахырда исә һәмин
методика әсасында конкрет һесаплама апарылмышдыр.

Ф. А. АЗИЗОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Как известно, путем применения методов теории потенциала исследовано много краевых задач для уравнения второго порядка эллиптического типа; установлена разрешимость основных краевых задач для таких уравнений при условии достаточной гладкости коэффициентов и границы области.

Представляет интерес применение метода теории потенциала к решению краевых задач для уравнений высшего порядка, например, для бигармонического уравнения, имеющего многочисленные применения. Однако до настоящего времени лишь для небольшого круга задач удалось найти потенциалы, с помощью которых соответствующая краевая задача сводится к регулярным интегральным уравнениям типа Фредгольма второго рода.

З. Я. Шапиро [1] и Я. Б. Лопатинский [2] предложили общий метод, дающий возможность найти потенциалы, которые специально приспособлены для данной краевой задачи и с помощью которых эта задача приводится к регулярной системе интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода.

О. И. Панич [3] построил общую теорию таких потенциалов и исследовал различные краевые задачи для бигармонических уравнений. В указанных работах граница области берется из класса A_4 . Говорят, что граница s области g принадлежит классу A_k , если для достаточно малой окрестности произвольной точки $t \in s$ уравнение границы s представляется в виде

$$x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

и имеет непрерывную производную до k -го порядка включительно, причем k -я производная удовлетворяет условию Гельдера. Когда граница области обладает угловыми особенностями, то получается интегральное уравнение сингулярного типа, к которому метод Фредгольма не применяется.

Граничные задачи теории потенциала для контуров с угловыми точками (в случае плоскости) и для поверхностей с угловыми линиями (в случае пространства) изучены Карлеманом [4] и Радоном [5]. Еще раньше Заремба, применяя метод Пуанкаре, решил задачу Дирихле для контуров с угловыми точками. В данном случае применяются методы исследования, принадлежащие Карлеману [4], которые заключаются в разбиении ядра интегрального уравнения (решающего поставленную задачу, имеющую особенности в окрестности угловой точки) на два ядра, одно из которых является ограниченным, а к дру-

гому применим метод последовательных приближений. В результате получаются новые, эквивалентные с исходным интегральные уравнения, к которым, оказывается, применим метод Фредгольма.

В данной статье рассматривается краевая задача для бигармонического уравнения в плоской области границы, которая имеет конечное число угловых точек. Пусть g — односвязная область ограниченная контуром C . Предполагаем, что контур C состоит из конечного числа дуг непрерывной кривизны, пересекающихся в точках $p_1, p_2, \dots, p_n$ под углами (отличными от 0 и 2π) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, соответственно (рис. 1).

Берем начало отсчета в нулевой точке внутри дуги $p_n \sim p_1$. В дальнейшем через s и t будем обозначать криволинейные абсциссы точек контура C , а криволинейные абсциссы вершин $p_1, p_2, \dots, p_n$ обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_n$, соответственно. Расстояние от некоторой точки p до точки t контура C обозначим через r_{pt} .

Задача состоит в следующем: требуется найти решение бигармонического уравнения

$$\Delta^2 U = 0,$$

представляемое в виде потенциала:

$$W(p) = \frac{1}{\pi} \int_C \cos^2(p_{pt}, n_t) \mu_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_C \frac{\cos^3(r_{ot}, n_t)}{r_{pt}} \mu_1(t) dt, \quad (1)$$

которое удовлетворяло бы на границе области условию:

$$\kappa_1(s) u_1(s) - \kappa_2(s) u_2(s) = f_1(s), \quad (2)$$

$$\left(\frac{du(s)}{dn} \right)_1 - \left(\frac{du(s)}{dn} \right)_2 = f_2(s) \text{ при } s \neq s_i, \quad (3)$$

где $\kappa_i(s)$ и $f_i(s)$ ($i = 1, 2$) — непрерывные функции, заданные на границе C .

Предельные значения этих потенциалов, их нормальных производных, операторов Лапласа и нормальных производных от оператора Лапласа исследовал Панич [3]. Подставляя соответствующие формулы из этой работы в краевые условия (2) и (3), получим систему интегральных уравнений:

$$\mu_1(s) - \frac{A(s)}{\pi} \int_C \cos^2(r_{ts}, n_t) \mu_2(t) dt - \frac{2A(s)}{\pi} \int_C \frac{\cos^3(r_{ts}, n_t)}{r_{ts}} \mu_1(t) dt = \tilde{f}_1(s),$$

$$\mu_2(s) + 2\kappa(s) \mu_1(s) = f_2(s) \text{ при } s \neq s_i, \quad (4)$$

где $A(s) = \frac{\kappa_2(s) - \kappa_1(s)}{\kappa_2(s) + \kappa_1(s)}$, $f_1(s) = \frac{f_1(s)}{\kappa_1(s) \kappa_2(s)}$, $\kappa(s)$ — кривизна кривой.

С. Исключая $\mu_2(s)$ из системы уравнения (4), получим

$$\begin{aligned} \mu_2(s) + \frac{2A(s)}{\pi} \int_C \cos^2(r_{ts}, n_t) \kappa(t) \mu_1(t) dt - \\ - \frac{2A(s)}{s_{ts}} \int_C \frac{\cos^3(r_{ts}, n_t)}{r_{ts}} \mu_1(t) dt = \\ = \tilde{f}_1(s) - \frac{A(s)}{\pi} \int_C f_2(t) \cos^2(r_{ts}, n_t) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Обозначим } \tilde{f}_1(s) - \frac{A(s)}{\pi} \int_C f_2(t) \cos^2(r_{ts}, n_t) dt$$

и $\frac{2A(s)}{\pi} \left[\frac{\cos^3(r_{ts}, n_t)}{r_{ts}} - \kappa(t) \cos^2(r_{ts}, n_t) \right]$ соответственно через $f(s)$ и $\kappa(s, t)$.

Тогда

$$F_1(s) - \lambda \int_c \kappa(s, t) \mu_1(t) dt = f(s), \quad s \neq s_1, \quad (6)$$

где $\lambda = 1$.

Теперь рассмотрим проведение ядра $\kappa(s, t)$ в окрестности угловой точки (s_1, s_1) . Оно определено в области $0 < \frac{s}{t} < l$ и непрерывно в той же области, за исключением точек $t = s_1, s = s_1$. При фиксированном s , отличном от s_1 , $\kappa(s, t)$ будет функцией t , для которой $t = s_1$,

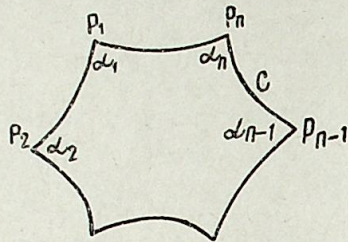


Рис. 2

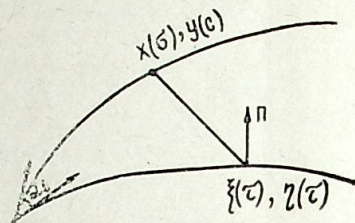


Рис. 1

являющееся точкой разрыва первого рода. Для $s = s_1$ и $t = s_1$, имеющих одинаковый знак, т. е. для точек s и t , лежащих по одну сторону от угловой точки, очевидно, ядро $\kappa(s, t)$ является непрерывным. Пусть $s = s_1 < 0, t = s_1 < 0$ и $s_1 - s = \sigma, t - s_1 = \tau$. Обозначив координаты угловых абсцисс s и t через $x(\sigma), y(\sigma)$ и $\xi(\tau), \eta(\tau)$, соответственно (рис. 2), получим.

$$\kappa(s, t) = \frac{2A(s)[\eta'(\tau)(\xi(\tau) - x(\sigma)) + \xi'(\tau)(y(\sigma) - \eta(\tau))]^3}{\pi r_{ts}^2} - \frac{2A(s)x(\tau)[\eta'(\tau)(\xi(\tau) - x(\sigma) + \xi'(\tau)(y(\sigma) - \eta(\tau))]^2}{\pi r_{ts}^2},$$

$$\text{где } r_{ts} = \sqrt{[x(\sigma) - \xi(\tau)]^2 + [y(\sigma) - \eta(\tau)]^2}.$$

Разлагая функции, входящие в эти равенства, по формуле Тейлора, ограничиваясь произвольными второго порядка в начале координат и перенеся начало координат в угловую точку, для ядра $\kappa(t, s)$ легко получаем

$$\kappa(s, t) = \frac{2A}{\pi} \left[\frac{\sigma^3 \sin^3 \alpha_1}{\Delta^2} + R(s, t) \right], \quad (7)$$

где $\Delta = \sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau \cos \alpha_1$ и $R(s, t)$ — ограниченная часть ядра $\kappa(s, t)$ в окрестности $\sigma = \tau = 0$. Очевидно, можно подобрать такое число $0 < \kappa < 1$, что при $\sigma\tau > 0$ имело бы место $\Delta > \kappa(\sigma^2 + \tau^2)$.

Мы рассмотрели случай положительных σ и τ . Совершенно аналогично будут обстоять дела и в случае отрицательных значений этих величин. Очевидно, такая перестановка не влияет на результат вычисления. Поэтому при $(s - s_1)(t - s_1) < 0$ в обоих случаях имеем

$$\kappa(s, t) = \frac{2A \sin^3 \alpha_1}{\pi} \cdot$$

$$\frac{|s - s_1|^3}{[|s - s_1|^2 + |t - s_1|^2 - 2|t - s_1||s - s_1| \cos \alpha_1]^2} + R(s, t). \quad (8)$$

Введем ядра $g_1(s, t)$, определяемые на контуре следующим образом:

1°.

$$g_1(s, t) = \frac{2A(s) \sin^3 \alpha_1}{\pi} \cdot$$

если $|s - s_1| < \delta, |t - s_1| < \delta, (t - s_1)(s - s_1) < 0$, тогда за δ берем число меньшее, чем $\frac{s_{s+1} - s_1}{2}$.

2°. $g_1(s, t) = 0$ во всех остальных точках. Положим

$$G(s, t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(s, t), \quad (10)$$

$$\kappa(s, t) = G(s, t) + H(s, t). \quad (11)$$

$H(s, t)$ является ограниченной и непрерывной функцией всюду, за исключением конечного числа отрезков, параллельных координатным осям. С обеих сторон этих отрезков, за исключением конечного числа точек, которым соответствуют точки (s_1, s_1) , она принимает определенные значения (которые, вообще говоря, между собой не равны). При $t \neq s_1, s = s_1$ функция $H(s, t)$ непрерывна.

Пусть α_i — положительные числа, значения которых меньше единицы. Рассмотрим интеграл

$$J = \int_c |g_1(s, t)| |t - s_1|^{\alpha_i} dt. \quad (12)$$

Оценивая его, получим

$$J \leq m \left[\frac{\sin \alpha_1 \theta}{\sin \alpha_1 \pi} - \frac{\alpha_i \sin \theta \cos(\alpha_i + 1) \theta}{\sin \alpha_1 \pi} \right] |s - s_1|^{-\alpha_i} \text{ при } |s - s_1| < \delta, \quad (13)$$

$$\text{где } m = \max_{(5)} |A(s)| < 1, \theta = \max_{1 \leq i \leq n} |\pi - \alpha_i|,$$

$$\text{а в случае } \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$I \leq \int_c |g_1(s, t)| dt \leq \frac{m}{m} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right] \text{ при } |s - s_1| < \delta. \quad (14)$$

Допустим, что $f(s)$ в области $|s - s_1| < \delta$ удовлетворяет неравенству $|f(s)| \leq A_i |s - s_1|^{-\alpha_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

где A_i — постоянные числа. Интегральное уравнение

$$\varphi(s) - \lambda \int_c G(s, t) \varphi(t) dt = f(s) \quad (15)$$

имеет решение, разлагающееся в степенной ряд по степеням λ , сходящееся при $|\lambda| < R'$, где R' — наименьшее из чисел

$$\frac{\sin \alpha_i \pi}{\sin \alpha_i \theta - \alpha_i \sin \theta \cos(\alpha_i + 1) \theta} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Пусть

$$R = \frac{2\pi}{(2\theta - \sin 2\theta)}.$$

Так как $\lim R' = R$ при $\alpha_i \rightarrow 0$, то решение (12), то решение (15) для $|\lambda| < R$ будет голоморфной функцией, если $f(s)$ является ограниченной.

Можно составить резольвенту $G(s, t, \lambda)$ ядра $G(s, t)$ и доказать, что она как функция своего первого и второго аргумента

удовлетворяет следующим двум интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} G(s, t, \lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau) G(\tau, t, \lambda) d\tau &= G(s, t), \\ G(s, t, \lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau, \lambda) G(\tau, t) d\tau &= G(s, t), \end{aligned} \quad (17)$$

где l — длина контура C . С помощью уравнений резольвенты (17) решение (15) выражается в виде

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_C G(s, t, \lambda) f(t) dt. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$v_1(s) - \lambda \int_0^l \kappa(s, t) v_1(t) dt = f(s), \quad (6)$$

Предположим, что $f(s)$ непрерывна при $s \neq s_1$, а в остальных точках ограничена.

Рассмотрим функции $\mathcal{Q}(s, t, \lambda)$ и $F(s, \lambda)$, которые определяются из следующих уравнений:

$$\mathcal{Q}(s, t, \lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau) \mathcal{Q}(\tau, t, \lambda) d\tau = H(s, t), \quad (19)$$

$$F(s, \lambda) - \lambda \int_0^l G(s, \tau) F(\tau, \lambda) d\tau = f(s). \quad (20)$$

Функция $\mathcal{Q}(s, t, \lambda)$ удовлетворяет тем же условиям непрерывности, что и $H(s, t)$, потому что решение (19) представляется через $H(s, t)$ и выражением $\int_0^l G(s, t, \lambda) H(s, t) dt$, которое непрерывно или имеет разрывы первого рода вместе с $H(s, t)$. $F(s, \lambda)$ голоморфна $|\lambda| < R$, так как (20) фактически имеет вид

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^l G(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

решение которого голоморфно в $|\lambda| < R$. Выразив в (6) $\kappa(s, t)$ через $G(s, t) + H(s, t)$, получим

$$\Phi(s) - \lambda \int_0^l G(s, t) \Phi(t) dt = 0, \quad (21)$$

где

$$\Phi(s) = v_1(s) - \lambda \int_0^l \mathcal{Q}(s, t, \lambda) v_1(t) dt - F(s, \lambda).$$

Согласно вышеуказанному, уравнение (21) в области $|\lambda| < R$ не имеет отличных от нуля решений. Следовательно, все решения уравнения (6) удовлетворяют уравнению

$$\mu(s) - \lambda \int_0^l \mathcal{Q}(s, t, \lambda) \mu(t) dt = F(s, \lambda), \quad (22)$$

к которому метод Фредгольма применим.

Примечание. Если $\theta > \frac{\pi}{2}$, то сфера Карлемана $|\lambda| < \frac{\pi}{\theta}$ охва-

тывает сферу $|\lambda| < R$, примененную в данной задаче. Если $\theta < \frac{\pi}{2}$, то сфера $|\lambda| < R$ охватывает сферу Карлемана $|\lambda| < \frac{\pi}{\theta}$. Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то сферы совпадают друг с другом. Во всех рассмотренных случаях $R > 1$.

Данную задачу для трехмерного случая можно исследовать аналогичным образом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро З. Я. Первая краевая задача для эллиптических систем дифференциальных уравнений. Матем. сб., т. 28 (70) (1951).
2. Лопатинский Я. Б. Укр. матем. М., т. 5, 1953, №2.
3. Панич О. И. О потенциалах для полугармонического уравнения четвертого порядка. Матем. сб., т. 30 (92), № 3, 1960.
4. Carleman T. Über das Neumann—Poincaresché Problem für ein Gebiet in Esken Uppsala, 1916.
5. Радон И. Успехи матем. наук, т. I. вып. 3—4 (13—14), 1946.

Поступило 3. VI 1967

Ф. Э. Эзизов

БиҺармоник тәнлик үчүн бучаг мөхсусијјәтли областда бир сәрһәд мәсәләси һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы мәсәләјә бахылмышдыр: Тутаг ки, g областы сонлу сәјда бучаг нөггәләри олан гапалы c әјрис илә әһатә олунмушдур.

Областын дахилиндә вә харичиндә $\Delta^2 U = 0$ тәнлијини, сәрһәд-диндә

$$\kappa_1(s) U_1(s) - \kappa_2(s) U_2(s) = f_1(s)$$

$$\left(\frac{du}{dn} \right)_1 - \left(\frac{du}{dn} \right)_2 = f_2(s)$$

сәрһәд шәртләрини өдәјән, $g + c$ гапалы областында кәсиммәз u_i функцијанын тапылмасы тәләб олунур. Бурада $\kappa_i(s)$ вә $f_i(s)$ ($i = 1, 2$) сәрһәддә верилмиш кәсиммәз функцијалардандыр.

Мәсәләнин һәлли:

$$U(p) = \frac{1}{\pi} \int_c \cos^2(r_{pt}, n_t) v_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_c v_1(t) \frac{\cos^3(r_{pt}, n_t)}{r_{pt}} dt$$

шәклиндә ахтарылмагла, сингулјар интеграл тәнлијә кәтирилмиш вә бу тәнлијә эквивалент олан Фредһолм интеграл тәнлији грулмушдур.

МҮНДЭРИЧАТ

Б. С. Элијева, В. И. Тагиров, Э. А. Гулијев, С. И. Тагиров, М. Г. Шахтактинский. Керманиум-силисиум бэрк мөһлулларында мисин биринчи аксептор сәвијјесинин тәдгиги	3
Т. А. Мухтарова. Гидрокен плазмасы шырнагында метан пиролизин просеси заманы асетиленин бәркимәсинин һесабаалыма методлары	7
Һ. Б. Абдуллајев, Н. И. Ибраһимов, Ш. В. Мәммәдов, А. Х. Ибадов. Селендә жүккечирмә һалынын парчаланмасынын динамикасы	11
Ч. О. Гачар, А. Э. Аббасов, Л. М. Иманов. Молекулларын мүм-күн ола билән гурулуш параметрләринин тәјин едилмәси методу	18
Һ. Х. Әждәров, В. И. Тагиров. Синклә ашгарланмыш керманиум-силисиум бэрк мөһлулларынын elektrik хассәләринин тәдгиги	23
Ч. О. Гачар, Һ. А. Абдуллајев, Л. М. Иманов. Пропаркил спирти молекулунун микродалгадакы спектри, гурулушу вә дипол моменти	26
Р. Һ. Фәрәчов, В. И. Доссенко. Псевдотәсадүфи ардычыллыгын тәтбиги илә идарәетмә системинин идентификасијасы	28
С. Ј. Јагубов, Л. Ш. Абдулкәримов. Банах фәзасында жүксәк-тәртибли гејри-хәтти параболлик тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин һәлли һаггында	35
А. Э. Һәмидов. Комплекс областында Лагранжын интерполјасија поли-номларынын орта јығылмасы һаггында	41
А. С. Диканский. Локал габарыг мүәјјән синиф ин'икас вә онларын гош-масы һаггында	46
М. Х. Нәсиров. Икигат сыраларын чәмләшмәсиндә Рис вә Риман үсул-лары арасындакы мүнәсибәт	51
Л. Ш. Абдулкәримов. Банах фәзасында сабит операторлу дифе-ренсиал тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин һәлли һаггында	57
И. Һ. Тагыјев. Азгабарыглы дәјишән әјриликли өртүкләрин сәрбәст рәгс мәсәләринин һәллине даир	61
Һ. Н. Агајев, А. М. Әһмәдова. Јүксәк тәртибли кәсилән әмсаллы гејри-хәтти параболлик тәнлик үчүн гарышыг мәсәләнин һәлли нәзәријјесинә даир	65
А. К. Слипенко, Р. Б. Фейзуллајев. Оператив үзәриндә идеал эквивалентликләр һаггында	77
М. А. Мәммәдов. Јупитер сәтһиндән—вулкан пүскүрмәси нәтичәсиндә ајрылан—һипотетик кометләрин кәмијјәт анализи	83
Н. А. Никольский, Р. И. Пепинов. Колрауш методунун жүксәк температур сәһәсиндә истифадә олунмасы	96
М. Э. Әзимов. Јарымфәзада еластиклик нәзәријјесинин әсас мәсәләлә-ринин оператор үсулу илә һәлли, I	105
М. Э. Әзимов. Јарымфәзада еластиклик нәзәријјесинин әсас мәсәләлә-ринин оператор үсулу илә һәлли, II	115
А. Н. Шнулин. Ифрат кечиричи магнитләрин ЕПР тәдигатларында тәтбиги һаггында	125
Ј. Б. Гәдимов, З. Ј. Гулијев, А. И. Мәммәдов. Пајланмыш параметрли хәтти elektrikдәврәләринин оптимал кечид просесләринин һесабла-масы методикасына даир	131
Ф. Э. Әзимов. Биһармоник тәнлик үчүн бучаг мәхсусијәтли областда бир сәрһәд мәсәләси һаггында	136

СОДЕРЖАНИЕ

Б. С. Алиева, В. И. Тагиров, А. А. Кулиев, С. И. Тагиров, М. Г. Шахтактинский. Исследование первого акцепторного уровня меди в твердых растворах германия с кремнием	3
Т. А. Мухтарова. Один из методов учета закалки ацетилена в процессе пиролиза метана в плазменной струе водорода	7
Г. Б. Абдуллаев, Н. И. Ибрагимов, Ш. В. Мамедов, А. Х. Иба-дов. Динамика распада состояний с переносом заряда в селене	11
Ч. О. Каджар, А. А. Аббасов, Л. М. Иманов. К методу определения вероятной структуры молекул	18
Г. Х. Аждаров, В. И. Тагиров. Исследование электрических свойств легированных цинком сплавов германий—кремний	23
Ч. О. Каджар, Г. А. Абдуллаев, Л. М. Иманов. Микроволновый вращательный спектр, структура и дипольный момент молекулы пропаргило-вого спирта	26
Р. Г. Фараджев, В. И. Доценко. Об идентификации систем управления с использованием псевдослучайных последовательностей	28
С. Я. Якубов и Л. Ш. Абдулкеримов. О разрешимости задачи Коши для нелинейных параболических уравнений высших порядков в банаховом про-странстве	35
А. А. Гамидов. О приближении в среднем функций интерполяционными полиномами Лагранжа в комплексной области	41
А. С. Диканский. О некоторых классах отображений в локально вы-пуклых пространствах	46
М. Х. Насиров. Соотношение между методами Рисса и Римана в сум-мировании двойных рядов	51
Л. Ш. Абдулкеримов. О разрешимости задачи Коши для дифферен-циальных уравнений с постоянными операторами в банаховом пространстве	57
И. Г. Тагнев. К решению задачи о свободном колебании пологих обо-лочек переменной кривизны	61
Г. Н. Агаев и А. М. Ахмедова. К теории разрешимости смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высшего порядка с раз-рывными коэффициентами	65
А. К. Слипенко, Р. Б. Фейзуллаев. Об идеальных эквивалентностях операторов	77
М. А. Мамедов. Численный анализ орбит гипотетических комет—продук-тов извержения на поверхности Юпитера	83
Н. А. Никольский, Р. И. Пепинов. О возможности использования метода Кольрауша в области высоких температур	96
М. А. Азимов. Решение основных задач теории упругости для полупро-странства операторным методом	105
М. А. Азимов. Решение основных задач теории упругости для полупро-странства операторным методом, II	115
А. Н. Шнулин. Опыт применения сверхпроводящих магнитов в ЭПР-исследованиях	125
Я. Б. Кадымов, З. Я. Кулиев, А. И. Мамедов. К методу расчета оптимального по быстродействию переходного процесса в линейной системе с распределенными параметрами	131
Ф. А. Азизов. Об одной краевой задаче для бигармонического уравнения в области с угловыми особенностями	136

Сдано в набор 26/V-1969 г. Подписано к печати 1/X 1969-г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 4,50. Печ. лист. 12,33. Уч.-изд. лист. 11,78 ФГ 17399. Заказ 148. Тираж 770. Цена 80 коп.

Государственный Комитет Совета Министров Азербайджанской ССР по печати.
Типография „Красный Восток“. Баку, ул. Ази Асланова, 80.