

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

2

1969

„ЕЛМ“ НƏШРИЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО „ЭЛМ“
БАКЫ – БАКУ

УДК 621. 397. 001. 621. 391. 1

А. Б. ЛЕВИТ, Ч. А. ЭФЕНДИЕВ

ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ К РАСЧЕТУ ДАТЧИКА ТЕЛЕВИЗИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (ТВА)

Анализ большого числа телевизионных автоматов свидетельствует о том, что до последнего времени разработка телевизионных систем подобного типа проводилась без достаточно глубокого исследования как источника визуальных сообщений—объекта, так и системы преобразования и логической обработки визуальной информации—телевизионного датчика и анализирующих устройств.

Данная статья посвящена исследованию путей рационального построения телевизионных датчиков систем ТВА. Задачи телевизионно-вычислительной автоматики выдвигают требования к датчикам, существенно отличающиеся от требований телевидения вообще. В ТВА, как правило, необходимо лишь передать информацию о состоянии определенных участков объекта, характеризующих протекание управляемого процесса.

В связи с этим одной из основных задач, предшествующих разработке датчика ТВА, является изучение визуальных особенностей поля наблюдения—управляемого объекта. Наиболее удобным методом такого изучения представляется подход к управляемому процессу как к некоторому дифференциальному источнику сообщений [1].

Управляемый технологический процесс—поле наблюдения рассматривается как некая поверхность Γ , излучающая или отражающая лучистую энергию. Каждое состояние управляемого процесса характеризуется мгновенным пространственным распределением мощностей $W_1(x, y, z)$ и спектральных составов $\Delta_1(x, y, z)$ потоков лучистой энергии, излучаемых различными участками поверхности Γ . Если по условиям задачи этот объект воспринимается получателем сообщений как плоский черно-белый, то состояние управляемого процесса описывается уравнением

$$dW_1 = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy. \quad (1)$$

В основу дальнейших исследований положим выражение (1), так как подавляющее большинство источников сообщений ТВА может быть описано именно этим выражением.

В качестве примера рассмотрим систему автоматического управления технологическим процессом формирования алюмосиликатного

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. Б. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов (отв. секретарь), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Сдано в набор 26/III 1969 г. Подписано к печати 26/VIII 1969 г. Формат бумаги 70×108^{1/16}. Бум. лист. 4,00. Печ. лист. 11,30. Уч.-изд. лист. 8,6. ФГ 17377. Заказ 87. Тираж 770. Цена 80 коп.

Государственный Комитет Совета Министров Азербайджанской ССР по печати. Типография „Красный Восток“. Баку, ул. Ази Асланова, 80.

752827
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

катализатора. Внешняя картина этого процесса может быть представлена в виде некоторой области Π_1 (рис. 1), из которой вытекают струи алюмосиликагеля—светлые полосы, попадающие в область Π_2 . Поле зрения наблюдателя (датчика) ограничено областью Π_3 , в которой распределены струи геля. Нарушение технологического процесса проявляется в изменении траекторий струй, т. е. в искривлении светлых полос в области Π_3 .

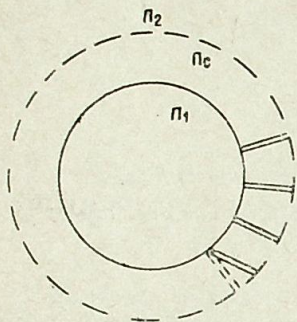


Рис. 1. Характерные области объекта автоматизации—источника сообщений.

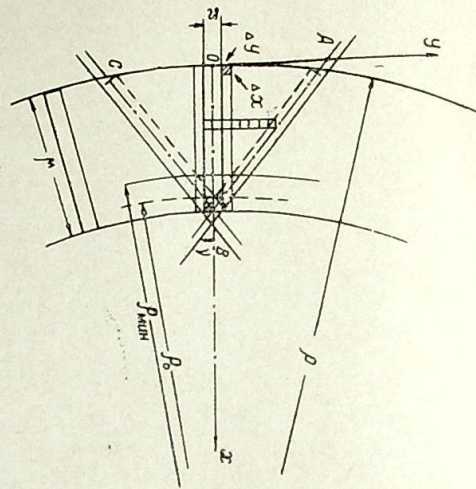


Рис. 2. К исследованию характеристик источника сообщений.

Примем, что нарушение технологического процесса характеризуется отклонением любой из n струй геля от радиального направления на угол $\pm \nu$ (рис. 2). Следовательно, полная информация о состоянии каждой струи геля будет содержаться в зоне треугольника ABC , а всего в области Π_3 будет n таких треугольных зон. Каждая из этих зон может рассматриваться как плоский дифференциальный источник визуальных сообщений, образованный N интегральными источниками.

Условимся, что площадь интегрального источника $\Delta \Upsilon = \Delta x \Delta y$, причем $\Delta x = \Delta y$. Тогда, при условии $r \gg \mu$ (рис. 2), количество интегральных источников, образующих рассматриваемый дифференциальный источник сообщений, с достаточной точностью может быть определено по формуле:

$$N = \frac{1}{\Delta \Upsilon} [(r - r_{\min})^2 \lg \nu + \mu \theta], \quad (2)$$

где r —максимальный радиус области Π_3 , $r_{\min}$ —минимальный радиус области Π_3 , на котором еще можно регистрировать отклонение струй с заданным пространственным разрешением $\Delta \Upsilon$, μ —длина струи в области Π_3 , θ —ширина струи.

Таким образом в рассматриваемом случае источник визуальных сообщений будет представлять собой n идентичных зон, состояние каждой из которых будет полностью характеризовать состояние управляемого процесса (вне зависимости от состояния остальных $n-1$ зон). В свою очередь, в каждой i -й зоне будем иметь N интегральных источников. Если размеры интегрального источника выбраны таким образом, что естественные флуктуации ширины и направления струй геля при нормальном течении процесса существенно меньше линей-

ных размеров интегрального источника (Δx и Δy), то в любой i -й зоне всегда будет содержаться $l = \frac{\mu \theta}{\Delta \Upsilon}$ интегральных источников с энергетическим состоянием „1“ и $N-l$ интегральных источников с энергетическим состоянием „0“ (фон). Иными словами, согласно формуле (2), в любой i -й зоне относительное количество интегральных источников $\alpha = \frac{l}{N}$, отличающихся по яркости от фона, будет

$$\alpha = \frac{\mu \theta}{(r - r_{\min})^2 \lg \nu + \mu \theta}. \quad (3)$$

Следовательно, алфавит рассматриваемого источника визуальных сообщений

$$A = \left[\frac{N!}{(\alpha N)! [(1 - \alpha) N]!} (m - 1)^{\alpha N} \right]^n$$

и, как известно [1], предельная энтропия такого источника сообщений окажется

$$H_{\text{пред}} = nN [\alpha \log_2 (m - 1) - \alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha)] \frac{\text{дв ед}}{\text{символ}} \quad (4)$$

Подставляя в (4) выражения (2) и (3) и учитывая, что в данном случае количество различаемых градаций яркости $m = 2$, окончательно получим

$$H_{\text{пред}} = - \frac{n}{\Delta \Upsilon} \left[\mu \theta \log_2 \frac{\mu \theta}{(r - r_{\min})^2 \lg \nu + \mu \theta} + (r - r_{\min})^2 \lg \nu \log_2 \frac{(r - r_{\min})^2 \lg \nu}{(r - r_{\min})^2 \lg \nu + \mu \theta} \right] \frac{\text{дв ед}}{\text{символ}}. \quad (5)$$

Выражение (5) показывает, что, как и следовало ожидать, вся информация о состоянии управляемого процесса в данном случае содержится в геометрической составляющей энтропии источника сообщений и что предельная энтропия рассматриваемого источника сообщений существенно зависит от ширины области Π_3 , т. е. от $r - r_{\min}$, от количества струй n и от ширины струи θ .

Однако, с точки зрения выявления требований к телевизионному датчику, предельная энтропия источника визуальных сообщений является необходимой, но недостаточной информационной характеристикой источника. Действительно, любой источник сообщений полностью характеризуется двумя параметрами: предельной информационной содержательностью символа сообщения—значением $H_{\text{пред}}$ и минимальным временным интервалом $T_{\min}$ между смежными (по времени) символами сообщения, т. е. скоростью смены символов—скоростью протекания управляемого процесса.

Иначе говоря, полной информационной характеристикой источника сообщений (применительно к проектированию датчика сигнала) является его предельная информационная производительность

$$h_{\text{пред}} = \frac{H_{\text{пред}}}{T_{\min}} \frac{\text{дв ед}}{\text{сек}}.$$

Телевизионный датчик ТВА-должен обеспечить преобразование входных сообщений в электрический сигнал без потерь информации, т. е. пропускная способность датчика сигнала C_d должна быть согласована с информационной производительностью источника сообщений $h_{\text{пред}}$. При этом безнаказанно завышать пропускную способность датчика—увеличивать его избыточность U_d нельзя. Завышение избыточ-

ности как правило влечет за собой необоснованное усложнение датчика, в результате чего возрастает стоимость и снижается эксплуатационная надежность, кроме того, усложняется анализирующее устройство телевизионного автомата. Следовательно, исходные требования к датчику ТВА можно сформулировать в следующем виде:

$$C_d \geq h_{\text{пред}}, \quad T_k \leq T_{\text{мин}}, \quad U_d = \min \left\{ 1 - \frac{h_{\text{пред}}}{C_d} \right\}, \quad (6)$$

где T_k — время анализа поля наблюдения, т. е. длительность кадра. Второе неравенство условий (6) по существу представляет собой требование к разрешающей способности датчика по времени, т. е. требование к быстродействию датчика. Результаты исследований Ч. А. Эфендиева [2] показали, что быстродействие телевизионного датчика, использующего видикон, значительно превышает скорость протекания процесса формирования алюмосиликатного катализатора. Поэтому длительность кадра телевизионного датчика примем равной некоей величине $T_k < T_{\text{мин}}$ [2] и будем считать, что разрешающая способность по времени обеспечивается. Тогда, поскольку яркостная составляющая энтропии источника сообщений отсутствует, первое неравенство условия (6) будет удовлетворяться, если телевизионный датчик будет обладать достаточной пространственной разрешающей способностью. Пространственная разрешающая способность телевизионного датчика зависит от размера апертуры электронного пучка передающей трубки.

Обозначим площадь сечения такого пучка $\Delta \Gamma_{\text{до}}$. В процессе развертки раstra апертура считывающего пучка меняется из-за несовершенства систем статической и динамической фокусировки, а также из-за различного дефокусирующего влияния потенциалов поверхности мишени. Кроме того, пространственная разрешающая способность датчика снижается из-за мгновенных нестабильностей амплитуд и частот токов развертки [1]. В результате воздействия всех этих факторов оказывается, что элементу поверхности объекта $\Delta \Gamma_i$ соответствует уже не один элемент на мишени трубки, а некоторая область Γ' .

В связи с этим для предотвращения потерь информации в телевизионном датчике ТВА масштабный коэффициент M , при проецировании объекта на мишень передающей трубки, следует выбирать не по размерам апертуры трубки, а по размерам области Γ' , т. е. при условии

$$M \geq \frac{\Gamma'}{\Delta \Gamma}. \quad (7)$$

Абсолютное значение области Γ' будет определяться суммарным воздействием ряда случайных факторов на процесс развертки раstra и будет зависеть от качества выполнения схемных узлов и элементов.

Примем следующие обозначения: σ_1 — среднее квадратичное значение отклонения центра считывающей апертуры вследствие дрейфа магнитных полей фокусирующей системы; σ_2 — среднее квадратичное значение отклонения размеров апертуры, обусловленное неоднородностью распределения потенциалов на поверхности мишени; σ_3 — среднее квадратичное значение отклонения центра апертуры вследствие мгновенных нестабильностей амплитуды и частоты тока развертки и σ_4 — среднее квадратичное значение отклонения центра апертуры из-за нестабильности системы центрирования раstra.

В связи с тем, что все факторы, воздействующие на мгновенное положение и размер считывающей апертуры, являются статистически и функционально независимыми случайными величинами, результирующее среднее квадратичное отклонение апертуры будет

$$\sigma_{\text{рез}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2},$$

а распределение суммарного случайного отклонения центра считывающей апертуры, согласно теореме А. М. Ляпунова, можно полагать нормальным. Тогда, располагая экспериментальными значениями составляющих среднее квадратичных отклонений, можно найти среднее квадратичное отклонение результирующей случайной функции, а затем, задавшись значением p — вероятности того, что проекция i -го элемента объекта выйдет за пределы i -й области на мишени трубки, можно определить размеры этой области как

$$\Gamma' = (\epsilon_0 + 2a\sigma_{\text{рез}})^2, \quad (8)$$

где $\epsilon_0 = \sqrt{\Delta \Gamma_{\text{до}}}$ — линейный размер апертуры пучка, a — аргумент интеграла вероятностей, соответствующий принятому значению вероятности p . Значение вероятности p в каждом отдельном случае выбирается исходя из назначения ТВА и характера последствий того, что i -й элемент объекта с вероятностью $1-p$ будет воспринят телевизионным датчиком, а следовательно и ТВА в целом, как $(i-1)$ -й или $(i+1)$ -й элемент объекта.

Таким образом, если масштабный коэффициент при проецировании объекта на мишень передающей трубки выбран в соответствии с условием (7), телевизионный датчик будет обеспечивать преобразование входных визуальных сообщений в электрический сигнал без потерь информации.

Обратимся теперь к последнему равенству условий (6) и покажем, как влияет избыточность пропускной способности телевизионного датчика на закон разложения входного изображения. Для этой цели сопоставим значения избыточности пропускной способности датчика ТВА при стандартной растровой развертке и при кольцевой развертке. Сравнение этих двух законов разложения проведем при условии $T_k = \text{const}$, т. е. при постоянной временной разрешающей способности датчика ТВА.

Если применить в телевизионном датчике автомата, управляющего процессом формирования алюмосиликатного катализатора, стандартную растровую развертку, то формат кадра окажется квадратным, с размером стороны квадрата 2ρ (рис. 3). Следовательно, при масштабном коэффициенте M , обеспечивающем необходимую пространственную разрешающую способность датчика ТВА, весь растр будет содержать $N_p = \frac{4\rho^2}{\Delta \Gamma}$ элементов разложения. В то же время,

согласно формуле (3), при n струях геля в области Γ_c (рис. 1) участки поля наблюдения, в которых содержится информация о ходе управляемого процесса, будут состоять всего лишь из

$$N = \frac{n}{\Delta \Gamma} [(p - p_{\text{мин}})^2 \lg v + \mu_0]$$

элементов разложения.

Таким образом значительная часть времени кадра будет потрачена на считывание элементов изображения, не несущих никакой информации. Вместе с тем для сохранения временной разрешающей

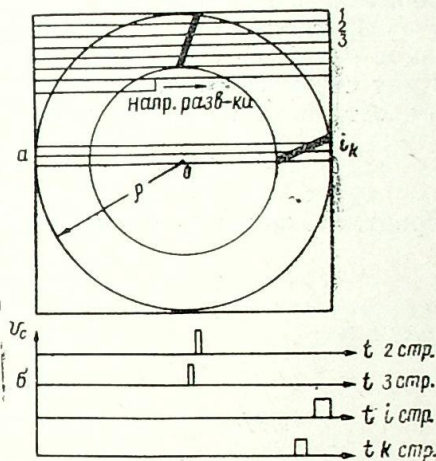


Рис. 3. К анализу датчика с построчным сканированием квадратным растром

способности датчика ТВА придется пропорционально возросшему числу считываемых элементов разложения расширить полосу пропускания телевизионного датчика. В результате появится избыточность пропускной способности телевизионного датчика, пропорциональная числу бесполезно считываемых элементов разложения, т. е.

$$I_{д\ p} = 1 - \frac{n[(p - p_{мин})^2 \operatorname{tg} \nu + \mu \theta]}{4p^2}. \quad (9)$$

При максимально возможном значении n , соответствующем минимальному значению избыточности, и с учетом того, что $p - p_{мин} \approx \mu$, а $\mu \ll p$, формула (9) примет вид

$$I_{д\ p} \approx 1 - \frac{\pi \mu}{4p} \left[1 + \frac{\theta}{(p - p_{мин}) \operatorname{tg} \nu} \right]. \quad (10)$$

Учитывая, что $\mu \ll p$, а $\theta < (p - p_{мин}) \operatorname{tg} \nu$ (см. рис. 2), получаем, согласно (10), что при стандартной растровой развертке даже минимальная избыточность телевизионного датчика оказывается чрезвычайно большой—близкой к единице. Отметим, что, поскольку в формуле (10) не учитывается время обратного хода строчной развертки, фактическая избыточность датчика ТВА будет еще больше.

Обратимся теперь к кольцевой развертке. В этом случае за то же самое время T_k будет считываться только область Π_c . [Иначе говоря, будет считываться $N_{кольц} = \pi(p^2 - p_{мин}^2)$ элементов разложения. Избыточность телевизионного датчика в этом случае будет

$$I_{д\ кольц} = 1 - \frac{n[(p - p_{мин})^2 \operatorname{tg} \nu + \mu \theta]}{\pi(p^2 - p_{мин}^2)}.$$

Принимая, как и в предыдущем случае, значение n максимальным:

$$n = \frac{\pi p}{(p - p_{мин}) \operatorname{tg} \nu},$$

получим

$$I_{д\ кольц} = 1 - \frac{p \left[(p - p_{мин}) + \frac{\mu \theta}{(p - p_{мин}) \operatorname{tg} \nu} \right]}{(p + p_{мин})(p - p_{мин})},$$

или, учитывая, что $p \approx p_{мин}$ и $\mu \approx p - p_{мин}$,

$$I_{д\ кольц} \approx 1 - 0,5 \left[1 + \frac{\theta}{(p - p_{мин}) \operatorname{tg} \nu} \right]. \quad (11)$$

Таким образом при кольцевой развертке избыточность телевизионного датчика оказывается менее 50%, т. е. существенно меньше, чем при стандартной растровой развертке.

Выражение (11) показывает, что избыточность телевизионного датчика при кольцевой развертке в сильной мере зависит от ширины области Π_c (от разности $p - p_{мин}$). Действительно, с уменьшением значения $p - p_{мин}$ в формуле (11) избыточность датчика ТВА стремится к нулю.

Рассмотренный пример приложения теории информации к проектированию датчика ТВА позволяет сделать следующие выводы:

1. Расчет и проектирование датчиков ТВА всегда должны опираться на результаты анализа информационных свойств источника сообщений—объекта управления.

2. Параметры и тип развертки, данные оптической системы, размеры апертуры считывающего пучка передающей трубки и другие параметры датчика ТВА должны определяться из условий оптималь-

ного согласования пропускной способности телевизионного датчика с информационной производительностью источника визуальных сообщений—управляемого объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левит А. Б. Введение в общую теорию телевидения М., „Сов. радио“, 1967.
2. Эфендиев Ч. А. „За технический прогресс“, 1968. № 2.

Поступило 17. X. 1968

А. Б. Левит, Ч. А. Эфендиев

Информасија нэзэријјэси эсасында телевизија автоматик системи веричисинин гурулмасы һаггында

ХҮЛАСЭ

Телевизија-һесабајычы гургуларын истехсалат просесларинин автоматик идарэ системлариндэ кениш тэтбиг едилмэси, һәмин системларин эсас елементи олан веричиларин сәмэрэли үсулларла элверилиши шәкилдэ гурулмасы һазырда мүнүм бир мәсэлэ кими мөвгэ тутмушдур.

Мәгаләдә телевизија веричиларинин лајиһәләндирилмәси үчүн информасија нэзэријјэси үсулларындан истифадэ едилмәси тәклиф олунур. Көстәрилир ки, веричинин параметрләри автоматлашдырылмыш объектларин информасија параметрларинин арашдырылмасы эсасында сечилмәлидир. Мәһз буна көрә дә ачылмасыны идарэ едән оптик системләри, ишыг-електрик енержи чевиричиларинин хүсусиј-јәтләри тәјин едилир.

Тәклиф олунан үсулдан истифадэ едилдикдә һазырланмыш телевизија веричиси мүнхәлиф манеәләрә гаршы дајаныглы, автоматлашдырылмыш систем исә хејли садәләшмиш олур.

УДК 517.946

Р. И. МУРАДОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Смешанной задаче для параболических уравнений с разрывными коэффициентами посвящены работы [1, 3, 4, 5] и др. Вырождающиеся параболические уравнения рассматривали О. А. Олейник [2], Г. И. Макаренко [6] и А. М. Ильин [7]. Настоящая статья посвящена решению смешанной задачи для вырождающихся параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами при условии сопряжения содержащих производную по времени от искомой функции.

Пользуясь методикой О. А. Олейник [1], доказываем существование и единственность решения поставленной задачи. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u + f(x, t) \quad (1)$$

в прямоугольнике

$$D = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}.$$

Пусть коэффициенты уравнения (1) — достаточно гладкие функции всюду в D , кроме точек линии $x = \xi$, где они и их производные могут терпеть разрыв первого рода по x . Кроме того, предположим, что

$$c(x, t) \leq 0, \quad a(x, t) \geq a_0 t^\alpha, \quad \text{где } a_0 = \text{const} > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1/9.$$

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, t)$, непрерывную в $\bar{D}$, удовлетворяющую уравнению (1) в $D_1 = \{0 < x < \xi, 0 < t \leq T\}$, $D_2 = \{\xi < x < l, 0 < t \leq T\}$, начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$u(x, t)|_{x=\xi-0} = u(x, t)|_{x=\xi+0},$$

$$a(x, t) \kappa_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - a(x, t) \kappa_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=\xi} + \sigma u|_{x=\xi} = \chi(t), \quad (4)$$

где $\kappa_i(t) \geq \kappa_0 > 0$ ($i = 1, 2$) — гладкие функции в D_i ($i = 1, 2$), $\delta \leq 0$ — заданное число, $\sigma(t) \leq 0$ и $\chi(t)$ — известные гладкие функции на $[0, T]$.

Теорема 1. Пусть: 1) $a(x, t)$ непрерывна в $\bar{D}_i$ ($i = 1, 2$) ($x \neq \xi$) и имеет ограниченные производные до третьего порядка по t при $t > 0$;

2) $b(x, t)$, $c(x, t)$, $\kappa(t)$ непрерывны в $\bar{D}_i$ ($i = 1, 2$) и имеют ограниченные производные по t до третьего порядка;

3) $f(x, t) = O(t^{\beta+\varepsilon_0})$, $\sigma(t) = O(t^{\gamma+\varepsilon_0})$, $\chi(t) = O(t^{\gamma+\varepsilon_0})$, $\beta \geq 3$, $\gamma \geq 4$, ε_0 — малое число, $\delta \leq 0$, $\sigma(t) \leq 0$. Пусть далее

$$a - \frac{1}{4} t \frac{\partial a}{\partial t} \geq \bar{a}_0 t^\alpha, \quad \bar{a}_0 = \text{const} > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{9}.$$

Тогда существует по крайней мере одно решение задачи (1) — (4).

Доказательство. Введем следующие функции:

$$\kappa(x, t) = \begin{cases} \kappa_1(t) & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \kappa_2(t) & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(x) = \begin{cases} \delta_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \delta_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases} \quad \bar{\sigma}(x, t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \sigma_2(t) & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\bar{\chi}(x, t) = \begin{cases} \chi_1(t) & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \chi_2(t) & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

где $\delta_2 - \delta_1 = \delta$, $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$, $\chi_2 - \chi_1 = \chi$. Обозначим через $a^h, b^h, c^h, f^h, \delta^h, \sigma^h, \chi^h$, соответственно, усреднения функций

$$\kappa a, \left(b - a \frac{\partial \kappa}{\partial x}\right), \kappa c, \kappa f, \bar{\delta}, \bar{\sigma}, \bar{\chi},$$

где h — радиус усреднения. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\kappa^h \frac{\partial u^h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + c^h u^h + f^h + \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h - \frac{\partial \chi^h}{\partial x}. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи получим как предел при $h \rightarrow 0$ решений уравнений (5) при условиях (2) и (3). Установим некоторые равномерно по h интегральные оценки для $u^h(x, t)$ и их производных.

Умножим уравнение (5) на $\frac{1}{t^4} \frac{\partial u^h}{\partial t}$ и проинтегрируем его по области D , тогда будем иметь

$$\int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \kappa^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt = \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial u^h}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + a^h u^h + f^h + \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h - \frac{\partial \chi^h}{\partial x} \right\} dx dt. \quad (6)$$

Преобразуем интегралы:

$$I_1 = \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial}{\partial x} \left((a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt = -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} (a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} (a^h + \\
& + h) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} (a^h + h) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial a^h}{\partial t} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt - 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} (a^h + h) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} (a^h + h) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx - 2h \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt - \\
& - 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \left(a^h - \frac{1}{4} t \frac{\partial a^h}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt.
\end{aligned}$$

По правилам Лопиталля легко проверяется, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^l \frac{1}{t^4} (a^h + h) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx = 0,$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial^2 \sigma^h}{\partial x \partial t} (u^h)^2 dx dt + 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} u^h dx dt + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial x^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt = - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} x^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} dx dt = \\
& = \int_0^t \frac{1}{t^4} x^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial x^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt + 4 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} x^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt.
\end{aligned}$$

Подставив значения интегралов I_1, I_2, I_3 в (6), получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \kappa^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{h}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx + \\
& + 2h \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} a^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \left(a^h - \frac{1}{4} t \frac{\partial a^h}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx - 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 dx dt - \\
& - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt = \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \\
& + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial \sigma^h}{\partial t} u^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt + \\
& + \int_0^t \frac{1}{t^4} x^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \frac{\partial x^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt + \\
& + 2 \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^5} x^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt.
\end{aligned} \tag{7}$$

Применяя неравенство

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{8}$$

оцениваем все члены в правой части равенства (7).

Пользуясь условием (1), преобразуем выражение

$$\begin{aligned}
(u^h)^2 &= \left(\int_0^t \frac{1}{t^2} \frac{\partial u^h}{\partial t} dt \right)^2 \leq \int_0^t t^4 dt \cdot \int_0^t \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dt = \\
&= \frac{\tau^5}{5} \int_0^t \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Отбрасывая некоторые члены в левой части (7) и учитывая, что

$$\frac{\partial \delta^h}{\partial x} \leq 0, \quad \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} \leq 0, \quad \text{будем иметь}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \left[\kappa_0 - \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{Mt^2}{10\varepsilon} \right] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 [a_0 - \varepsilon] dx + \\
& + \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^{5-\alpha}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{\bar{a}_0}{2} - \frac{Mt^{1-\alpha}}{2\varepsilon} - 2\varepsilon t^{1-\alpha} \right] dx dt \leq M.
\end{aligned}$$

Через M обозначено постоянное число, независимое от h . Подбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, а затем при фиксированном ε взяв достаточно малое t так, чтобы выражения в квадратных скобках были положительны, получим оценки:

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx < M, \quad \int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^4} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt < M$$

$$\int_0^t \int_0^l \frac{1}{t^{5-\alpha}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt < M. \quad (9)$$

Следовательно, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx < M, \int_0^t \int_0^l (u^h)^2 dx dt < M, \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt < \\ < M, \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt < M. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь получим интегральную оценку для производных второго, третьего и четвертого порядков от $u^h(x, t)$ по t в окрестности точек $x = \xi$.

Пусть $R_\kappa = \left\{ |t| \leq \frac{\rho}{\kappa}, |x| \leq \frac{\rho}{\kappa} \right\} (\kappa = \overline{1,6})$

—прямоугольник с центром в точке A , где $\rho > 0$ —достаточно малое число. Предполагаем, что точка A лежит на прямой $x = \xi$ и является началом координат.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi_\kappa(x, t) = \left(t^2 - \left(\frac{\rho}{\kappa} \right)^2 \right)^2 \left(x^2 - \left(\frac{\rho}{\kappa} \right)^2 \right)^2 (\kappa = \overline{1,6}).$$

Дифференцируя уравнение (5) по t , умножая на $\frac{1}{t^2} \Phi_1 \frac{\partial u^h}{\partial t}$ и интегрируя его по области R_1 , будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{R_1} \int \frac{1}{t^2} \Phi_1 \left(\kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} + \frac{\partial \kappa^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial t} \right) dx dt = \int_{R_1} \int \frac{1}{t^2} \Phi_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left((a^h + h) \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} + \frac{\partial b^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} + c^h \frac{\partial u^h}{\partial t} + \frac{\partial c^h}{\partial t} u^h + \right. \\ \left. + \frac{\partial f^h}{\partial t} + \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \frac{\partial^2 \sigma^h}{\partial x \partial t} u^h - \frac{\partial^2 x^h}{\partial x \partial t} \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Произведя преобразование, аналогичное предыдущим, и учитывая (9), получим оценку

$$\int_{R_2} \int \frac{1}{t^{2-\alpha}} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt < M. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнение (5) по t , умножая на $\frac{1}{t^{1-\alpha}} \Phi_2 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2}$ и интегрируя по R_2 , после некоторых выкладок получаем оценку

$$\int_{R_3} \int \frac{1}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 dx dt < M. \quad (13)$$

Далее дифференцируя уравнение (5) два раза по t , умножая его сперва на $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}}} \Phi_3 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2}$, а затем на $\frac{1}{t^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}} \Phi_4 \frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3}$ и интегрируя

соответственно по областям R_3 и R_4 , будем иметь оценки:

$$\begin{aligned} \int_{R_4} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\alpha}} \left(\frac{\partial^3 u^h}{\partial x \partial t^2} \right)^2 dx dt < M, \\ \int_{R_5} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}} \left(\frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3} \right)^2 dx dt < M. \end{aligned} \quad (14)$$

Наконец, дифференцируя уравнение (5) три раза по t , умножая его на $\frac{1}{t^{\frac{1}{8}-\frac{\alpha}{8}}} \Phi_5 \frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3}$, а затем на $\Phi_6 \frac{\partial^4 u^h}{\partial t^4}$ и интегрируя соответственно по областям R_4 и R_5 , получим оценки:

$$\int_{R_5} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{8}-\frac{\alpha}{8}}} \left(\frac{\partial^4 u^h}{\partial x \partial t^3} \right)^2 dx dt < M, \int_{R_6} \int \left(\frac{\partial^4 u^h}{\partial t^4} \right)^2 dx dt < M. \quad (15)$$

Пользуясь полученными интегральными оценками (9)–(15) и методикой работы О. А. Олейник [1], доказываем, что все производные $u^h(x, t)$ до четвертого порядка равномерно ограничены по норме L_2 в каждой внутренней подобласти D' области D_1 и D_2 . Применяя теорему вложения С. Л. Соболева [8], можем утверждать, что предел $u(x, t)$ последовательности $\{u^h(x, t)\}$ удовлетворяет уравнению (1) в каждой внутренней точке D_1 и D_2 и условиям (2) и (3). Покажем теперь выполнение второго условия сопряжения. Запишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (c^h u^h) - \frac{\partial x^h}{\partial x} = \\ = \kappa^h \frac{\partial u^h}{\partial t} - \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} - \sigma^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - c^h u^h - f^h. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрируя (16) по x от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$ получим

$$(a^h + h) \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \delta^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \sigma^h u^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - x^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} B^h dx,$$

где

$$B^h = \kappa^h \frac{\partial u^h}{\partial t} - \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} - \sigma^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - c^h u^h - f^h.$$

Из полученных интегральных оценок следует, что

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} B^h dx \rightarrow 0 \text{ при } h, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует выполнение второго условия сопряжения. Таким образом, существование решения задачи (1)–(4) доказано.

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$ непрерывна, имеет непрерывные производные по t в D , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0$$

в D_1 и D_2 , однородным начальным и граничным условиям

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0$$

и условию сопряжения вида

$$l(u) = ak_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - ak_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=\xi} + \sigma u \Big|_{x=\xi} = 0,$$

где

$$\kappa_2(t), \kappa_1(t) \geq \kappa_0 > 0, \quad \sigma \leq 0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) единственное.

Нам нужно доказать, что однородная задача (1)–(4) ($f \equiv 0, \kappa \equiv 0$) имеет только тривиальное решение. Пользуясь принципом максимума, можем утверждать, что $u(x, t)$ (решение однородной задачи) не принимает своего положительного максимума и отрицательного минимума внутри D_1, D_2 и при $t = T$ ($x \neq \xi$). Покажем, что $u(x, t)$ не принимает своего положительного максимума при $x = \xi$. На самом деле, если функция $u(x, t)$ принимает свой положительный максимум при $x = \xi$, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и из теоремы 1 работы [9] следует, что

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi-0} > 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\xi+0} < 0. \quad (17)$$

Следовательно, в силу (17) и $\sigma \leq 0$ получается, что $l(u) < 0$. Это противоречие показывает, что $u(x, t)$ не достигает своего наибольшего положительного значения при $x = \xi$. Аналогично можно показать, что $u(x, t)$ не достигает своего отрицательного минимума при $x = \xi$. Следовательно $|u(x, t)|$ достигает своего максимума при $t = 0$ или на боковых сторонах $D, x = 0, x = l$. Отсюда вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$ в D .

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. Изв. АН СССР, серия матем., т. 25, № 1, 1961.
2. Олейник О. А. Матем. сб., т. 69 (111), № 1, 1966.
3. Самарский А. А. ДАН СССР, т. 121, № 2, 1958.
4. Камынин Л. И. ДАН СССР, т. 139, № 5, 1961.
5. Намазов Г. К. ДАН СССР, т. 145, № 6, 1962.
6. Макаренко Г. И. Тр. МЭИ, вып. XXVIII, 1956.
7. Ильин А. М. Матем. сб., т. 50 (92), 1960.
8. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.
9. Выборны Р. ДАН СССР, т. 117, № 4, 1957.
10. Краснов М. Л. Матем. сб., 49 (91), № 1, 1959.

Поступило 30. VIII 1968

Р. И. Мурадов

Кәсилән әмсаллы чырлашан параболик тәнлик үчүн
гарышыг мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә икинчи тәртіб кәсилән әмсаллы чырлашан параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәллинин варлыгы вә жека-нәлији верилмишдир.

Е. М. ГАСЫМОВА

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕСАМОСOPЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу, порождаемую на полуоси дифференциальной операцией

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad (A)$$

и краевым условием

$$y_1(0) = 0, \quad (B)$$

где $p(x), q(x)$ — произвольные комплекснозначные функции, непрерывные на полуоси $0 \leq x \leq \infty$.

Обозначим через $\omega(\lambda, x) = \begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, x) \\ \omega_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ решения систем уравнений

$$L \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ при начальных данных } \omega_1(\lambda, 0) = 0, \quad \omega_2(\lambda, 0) = -1.$$

Введем линейное пространство Z , состоящее из всех целых функций экспоненциального типа, суммируемых на вещественной оси с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа и со следующим определением сходимости: последовательность $F_n(\lambda) \in Z$ сходится к $F(\lambda)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| d\lambda = 0 \quad (1)$$

и степени σ_n функций $F_n(\lambda)$ ограничены в совокупности: $\max \sigma_n < \infty$.

В настоящей статье показывается, что имеет место формула разложения.

Каждой несамосопряженной краевой задаче (A) — (B) соответствует некоторый линейный непрерывный функционал R , определенный на Z , такой, что, справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)] dx = R[E_f(\lambda) E_g(\lambda)], \quad (2)$$

где

$$E_f(\lambda) = \int_0^\infty [f_1(x) \omega_1(\lambda, x) + f_2(x) \omega_2(\lambda, x)] dx$$

для любой пары финитных вектор-функций $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ из $L^2[0, \infty)$.

$E_f(\lambda)$ будем называть ω -преобразованием Фурье вектор-функции $f(x)$. Аналогичная задача для уравнения Штурма-Лиувилля решена в работе [1]. Существенную роль при решении задачи играет следующая теорема:

Теорема. Решения $\omega(\lambda, x)$ можно выразить через $\begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$ с помощью операторов преобразования в виде:

$$\begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, x) \\ \omega_2(\lambda, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x, t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \quad (3')$$

$$\begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, x) \\ \omega_2(\lambda, x) \end{pmatrix} + \int_0^x H(x, t) \omega(\lambda, t) dt, \quad (3)$$

где ядра $K(x, t)$ $H(x, t)$ непрерывны по обоим переменным и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$K_{11}(x, 0) = K_{21}(x, 0) = H_{11}(x, 0) = H_{21}(x, 0). \quad (4)$$

Эта теорема известна из работы [2]. Допустим, что нам удалось построить на оси $-\infty < \lambda < +\infty$ функцию $R(\lambda)$ такую, что матрица

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) \omega(\lambda, x) \overline{\omega(\lambda, y)}^* d\lambda \quad (5)$$

равна в области $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$ дельта-функции Дирака $\delta(x - y)$, умноженной на единичную матрицу E .

Умножив обе части равенства (5) на

$$\begin{pmatrix} f_1(x) g_1(y) & f_2(x) g_1(y) \\ f_1(x) g_2(y) & f_2(x) g_2(y) \end{pmatrix},$$

обозначим полученные после умножения матрицы через $C = (c_{ij})$. Проинтегрировав элементы c_{11} и c_{22} матрицы C по обоим переменным и сложив, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty [u_{11}(x, y) f_1(x) g_1(y) + u_{12}(x, y) f_1(x) g_2(y)] dx dy + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty [u_{21}(x, y) f_2(x) g_1(y) + u_{22}(x, y) f_2(x) g_2(y)] dx dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\lambda) E_g(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) E_f(\lambda) E_g(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(x - y) f_1(x) g_1(y) dx dy + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(x - y) f_2(x) g_2(y) dx dy = \int_0^\infty [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)] dx. \end{aligned}$$

Покажем теперь, как можно построить нужную нам функцию $R(\lambda)$.

Имеем

$$E_f(\lambda) = \int_0^\infty [f_1(x) \omega_1(\lambda, x) + f_2(x) \omega_2(\lambda, x)] dx. \quad (6)$$

* $\tilde{\omega}(\lambda, y)$ обозначает транспортированную матрицу $\omega(\lambda, y)$.

Умножив обе части равенства (6) на $\begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, y) \\ \omega_2(\lambda, y) \end{pmatrix} R(\lambda)$ и проинтегрировав по переменной λ , получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\lambda) \begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, y) \\ \omega_2(\lambda, y) \end{pmatrix} R(\lambda) d\lambda = \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись теперь формулой (3), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\lambda) \begin{pmatrix} \sin \lambda y \\ -\cos \lambda y \end{pmatrix} R(\lambda) d\lambda - \int_0^y H(y, t) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \end{pmatrix}.$$

Теперь можем написать

$$\begin{aligned} E_f(\lambda) R(\lambda) = & -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^y (H_{21}(y, t) H_{22}(y, t)) f(t) dt + \right. \\ & \left. + f_2(y) \right] \cos \lambda y dy + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^y (H_{11}(y, t) H_{12}(y, t)) + f(t) dt + \right. \\ & \left. + f_1(y) \right] \sin \lambda y dy. \end{aligned}$$

Допустим, что

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \delta(x), \\ f_2(x) &= -\delta(x). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R(\lambda) = & \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [H_{21}(y, 0) - H_{22}(y, 0)] \cos \lambda y dy + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [H_{11}(y, 0) - H_{12}(y, 0)] \sin \lambda y dy. \end{aligned}$$

Используя формулу (4), можем записать, что

$$R(\lambda) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H_{22}(y, 0) \cos \lambda y dy + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty -H_{12}(y, 0) \sin \lambda y dy.$$

Напишем теперь такое выражение;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} E_f(\lambda) E_g(\lambda) d\lambda - \int_0^\infty [C_1(x) H_{12}(x, 0) + C_2(x) H_{22}(x, 0)] dx, \quad (7)$$

где

$$C_1(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\lambda) E_g(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (8)$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_f(\lambda) E_g(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (9)$$

Покажем, почему мы имеем право записать такое выражение. Из представления решений $\begin{pmatrix} \omega_1(\lambda, x) \\ \omega_2(\lambda, x) \end{pmatrix}$ через $\begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix}$ с помощью операторов преобразования (3') и (3) и теоремы Палей-Винера [3] следует, что $E_f(\lambda)$ и $E_g(\lambda)$ — целые функции экспоненциального типа $\leq u$, где u — некоторое положительное число, с суммируемым квадратом на вещественной оси $-\infty < \lambda < +\infty$. Поэтому $E_f(\lambda)$ $E_g(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа $\leq 2u$, суммируемая на вещественной оси $-\infty < \lambda < +\infty$. Тогда из теоремы Палей-Винера [3] следует, что $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — финитные функции. Отсюда заключаем, что выражение (7) является конечным числом.

Теперь, рассуждая в обратном порядке, нетрудно показать справедливость равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} E_f(\lambda) E_g(\lambda) d\lambda - \int_0^{\infty} [C_1(x) H_{12}(x, 0) + C_2(x) H_{22}(x, 0)] dx = \\ = \int_0^{\infty} [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)] dx,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются формулами (8) и (9).

Каждому элементу $F(\lambda) \in Z$ поставим в соответствие единственное вполне определенное число:

$$R[F(\lambda)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} F(\lambda) d\lambda - \int_0^{\infty} [C_1(x) H_{12}(x, 0) + C_2(x) H_{22}(x, 0)] dx,$$

где

$$C_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\ C_2(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

Теперь можем сказать, что задан функционал $R[F(\lambda)]$, определенный на линейном пространстве Z .

Легко проверить, что функционал $R[F(\lambda)]$ линеен и непрерывен. Функционал R называется спектральной функцией несамосопряженной краевой задачи. Таким образом имеет место теорема.

Теорема. Каждой краевой задаче (A) — (B) соответствует некоторая спектральная функция (или функционал) R , определенная на Z , такая, что

$$\int_0^{\infty} [f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)] dx = R[E_f(\lambda) E_g(\lambda)],$$

где $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольные финитные вектор-функции, принадлежащие $L^2[0, \infty)$, а $E_f(\lambda)$ и $E_g(\lambda)$ — их ω -преобразования Фурье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А. Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка. Матем. сб., т. 52, 1960, № 2.

2. Гасымов М. Г., Левитан Б. М., ДАН СССР, т. 167, 1966, № 5.
3. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.—Л.: Гостехиздат, 1947.

Поступило 30. VIII 1968

Е. М. Гасимова

Өз-өзүнө гошма олмајан бир тәртиб дифференциал операторун мэхсуси функцијаларына көрә ајрылыш

ХҮЛАСӘ

Магаләдә бир тәртибли Дирак типли өз-өзүнә гошма олмајан һәр бир дифференциал оператора гаршы спектрал функција ролуну ојајан бир үмүмиләшмиш функцијанын ујғун олдуғу исбат едилмишдир.

М. М. САДЫХОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Рассмотрим следующее дифференциально-экстремальное уравнение с запаздывающим аргументом:

$$x'(t) = \max_{q \in S} [a(q, t) x(t - \omega) + f(q, t)]. \quad (1)$$

Здесь $a(q, t)$ и $f(q, t)$ — определенные на $S \times [0, \infty)$ непрерывные функции; S — ограниченное замкнутое множество, образованное значениями управляющего параметра q в каждый момент времени t ; $\omega > 0$ — постоянное число; $x(t)$ — искомая функция. Обозначим значение функции $x(t)$ на $[0, \omega]$ через $\varphi_0(t)$, которую предположим непрерывной.

Если применим метод шагов, то решение $x(t)$ на каждом из интервалов $j\omega < t \leq (j+1)\omega$ ($j = 1, 2, \dots$) определяется при помощи непрерывной функции $\varphi_j(t)$, поэтому правая часть (1) в каждом из этих интервалов является известной непрерывной функцией от t и q . Тогда правая часть (1) в каждом из интервалов $j\omega < t \leq (j+1)\omega$ ($j = 1, 2, \dots$) достигает максимума ввиду ограниченности и замкнутости S .

Обозначим через $q_0^{(j)}(t)$ значение управляющего параметра, дающее максимум выражению $F_j(q, t) = [a(q, t) \varphi_{j-1}(t - \omega) + f(q, t)]$, и положим $F(q, t) = F_j(q, t)$, если $j\omega < t \leq (j+1)\omega$ ($j = 1, 2, \dots$). Тогда очевидно, что если $q_0(t)$ дает максимум функции $F(q, t)$ на (ω, ∞) , то $q_0(t) = q_0^{(j)}(t)$, если $j\omega < t \leq (j+1)\omega$ ($j = 1, 2, \dots$).

В дальнейшем $q_0(t)$ назовем параметром, дающим максимум на (ω, ∞) . Надо отметить, что $q_0(t)$ может быть многозначным, но и в этом случае, в силу единственности максимума, мы можем выбрать одну из них.

Теорема 1. Пусть

- $\varphi_0(t)$ определена и непрерывна на $[0, \omega]$;
- функции $a(q, t)$ и $f(q, t)$ определены на $S \times [0, \infty)$ и непрерывны;
- S — ограниченное замкнутое множество. Тогда существует одна и только одна функция $x(t)$, определенная при $t \geq 0$, непрерывная при $t \geq 0$, удовлетворяющая начальному условию $x(t) = \varphi_0(t)$ на $[0, \omega]$ и уравнению (1) при $t > \omega$. Далее эта функция $x(t)$ принадлежит классу $C^1(\omega, \infty)$. Если $\varphi_0(t) \in C^1[0, \omega]$, то $x'(t)$ непрерывна в точке ω тогда и только тогда, когда

$$\varphi_0'(\omega - 0) = a(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega) \varphi_0(0) + f(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega). \quad (2)$$

Доказательство. Так как $a(q, t)$ и $f(q, t)$ непрерывны на $S \times [0, \infty]$, а $x(t)$ определяется на каждом из интервалов $j\omega < t \leq (j+1)\omega$ ($j = 1, 2, \dots$) при помощи непрерывных функций $\varphi_j(t)$, то $F_j(q, t)$ непрерывны на $S \times [j\omega < t \leq (j+1)\omega]$ и значит $F(q, t)$ также непрерывна на $S \times [\omega, \infty)$, а из ограниченности и замкнутости множества S имеем, что $F(q, t)$ достигает своего наибольшего значения по $q \in S$. Хотя $q_0(t)$ может быть разрывной функцией, однако выражение $F(q_0(t), t)$ на (ω, ∞) будет непрерывным относительно t . С другой стороны, на (ω, ∞)

$$x'(t) = F(q_0(t), t).$$

Отсюда получаем, что $x(t) \in C^1(\omega, \infty)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Для того, чтобы функция $x(t)$ была из $C^1[0, \infty)$, она должна обеспечить непрерывность $x'(t)$ в точке $t = \omega$. Так как $\varphi_0(t) \in C^1[0, \omega]$, то $x'(\omega - 0) = \varphi_0'(\omega - 0)$. На отрезке $\omega < t \leq 2\omega$ уравнение (1) принимает вид

$$x'(t) = \max_{q \in S} [a(q, t) \varphi_0(t - \omega) + f(q, t)].$$

По условию при $t \in (\omega, 2\omega)$ $q_0(t) = q_0^{(1)}(t)$, тогда

$$x'(t) = a(q_0^{(1)}(t), t) \varphi_0(t - \omega) + f(q_0^{(1)}(t), t).$$

Если здесь перейти к пределу при $t \rightarrow \omega + 0$, то имеем

$$x'(\omega + 0) = a(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega + 0) \varphi_0(0) + f(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega + 0).$$

Тогда из равенства $x'(\omega - 0) = \varphi_0'(\omega - 0)$ и из последнего соотношения получаем, что $x'(t)$ будет непрерывной в точке $t = \omega$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_0'(\omega - 0) = a(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega) \varphi_0(0) + f(q_0^{(1)}(\omega + 0), \omega).$$

Таким образом получаем, что при выполнении этого соотношения $x(t) \in C^1[0, \infty)$.

Теорема 2. Пусть: а) $\varphi_0(t) \in C^1[0, \omega]$;

б) $a(q, t)$ и $f(q, t)$ имеют непрерывные первые производные по q и t на $[A, B] \times [0, \infty)$;

в) $q_0(t)$ непрерывна и имеет ограниченную кусочно-непрерывную производную на $[\omega, \infty)$. Тогда $x(t) \in C^2(2\omega, \infty)$. Кроме того, если $\varphi_0(t) \in C^2[0, \omega]$, то для того, чтобы было $x(t) \in C^2(\omega, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия (2) теоремы 1 или равенства $a(q_0(2\omega), 2\omega) = 0$.

Доказательство. Так как $q_0(t)$ на $[\omega, \infty)$ дает максимум выражению $F(q, t)$, имеем

$$x'(t) = a(q_0(t), t) x(t - \omega) + f(q_0(t), t), \quad t \geq \omega. \quad (3)$$

Дифференцируя это выражение при $t > 2\omega$ (конечно на тех интервалах, в которых $q_0(t)$ дифференцируема), получим

$$x''(t) = a(q_0(t), t) x'(t - \omega) + \left[\frac{\partial a(q_0(t), t)}{\partial t} x(t - \omega) + \frac{\partial f(q_0(t), t)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial a(q_0(t), t)}{\partial q} x(t - \omega) + \frac{\partial f(q_0(t), t)}{\partial q} \right] \frac{dq_0(t)}{dt}, \quad t > 2\omega. \quad (4)$$

Из (4) видно, что на тех интервалах, где $\frac{dq_0(t)}{dt}$ непрерывна, непрерывна и $x''(t)$. В частности, если $\frac{dq_0(t)}{dt}$ непрерывна на $t > 2\omega$, то $x''(t)$ также непрерывна в этой области.

Теперь покажем, что если в любой точке $t = \beta$ интервала $(2\omega, \infty)$, в которой существуют неравные левая и правая производные $q_0(t)$, $x''(t)$ также непрерывна. По условию существуют такие последовательные интервалы (α, β) и (β, γ) , что в каждом из них $\frac{dq_0(t)}{dt}$ является непрерывной. Из (4) при $t \rightarrow \beta - 0$ и $t \rightarrow \beta + 0$ будем иметь

$$x''(\beta - 0) - x''(\beta + 0) = \left[\frac{\partial a(q_0(\beta), \beta)}{\partial q} x(\beta - \omega) + \frac{\partial f(q_0(\beta), \beta)}{\partial q} \right] \left[\frac{dq_0(\beta - 0)}{dt} - \frac{dq_0(\beta + 0)}{dt} \right]. \quad (5)$$

В точке $t = \beta$ $q_0(\beta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial a(q_0(\beta), \beta)}{\partial q} x(\beta - \omega) + \frac{\partial f(q_0(\beta), \beta)}{\partial q} = 0. \quad (6)$$

В самом деле, при $\alpha < t < \beta$ и $\beta < t < \gamma$ $q_0(t)$ может быть задана различными формулами:

1) в каждом из указанных интервалов $q_0(t)$ является внутренней точкой (A, B) ;

2) в одном из интервалов $q_0(t)$ может быть внутренней, а в другом граничной точкой.

В обоих случаях ввиду непрерывности $q_0(t)$ в точке $t = \beta$ $q_0(\beta)$ является решением (6). А это показывает, что $x''(t)$ непрерывна в точке $t = \beta$ и $x(t) \in C^2(2\omega, \infty)$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Предполагая существование левой и правой производных $q(t)$ (притом неравных), повторяя вышеизложенные рассуждения, получаем, что $x''(t)$ непрерывна на $\omega < t < 2\omega$. Остается обеспечить непрерывность $x''(t)$ в точке $t = 2\omega$. При $t \rightarrow 2\omega - 0$ и $t \rightarrow 2\omega + 0$ имеем

$x''(2\omega - 0) - x''(2\omega + 0) = a(q_0(2\omega), 2\omega) [x'(\omega - 0) - x'(\omega + 0)].$ (6)
Отсюда получаем, что $x''(t)$ непрерывна в точке $t = 2\omega$ тогда и только тогда, когда правая часть равна нулю. Это выполняется либо при выполнении (2), либо при $a(q_0(2\omega), 2\omega) = 0$. Таким образом мы показали, что $x(t) \in C^2(\omega, \infty)$.

Следствие. Пусть $\varphi_0(t) \in C^2[0, \omega]$ и выполняется условие (2), а $a(q, t)$ и $f(q, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда для того, чтобы $x(t)$ была из $C^2(0, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_0(\omega - 0) &= a(q_0(\omega), \omega) \varphi_0(+0) + \left[\frac{\partial a(q_0(\omega), \omega)}{\partial t} \varphi_0(+0) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial f(q_0(\omega), \omega)}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial a(q_0(\omega), \omega)}{\partial q} \varphi_0(+0) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial f(q_0(\omega), \omega)}{\partial q} \right] \frac{dq_0(\omega + 0)}{dt}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь покажем, что множество параметров $q(t)$, использованных в теореме 2, непусто. Для этого рассмотрим уравнение

$$x'(t) = \max_{0 < q < t} [a(t - q) x(t - \omega) + f(q)], \quad (8)$$

$$x(t) = \varphi(t) \text{ при } t \in [-\omega, 0].$$

Для этого уравнения справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\omega > 0$ — постоянное число, начальная функция $\varphi(t) > 0$ и монотонно возрастает на $[-\omega, 0]$. Кроме того, пусть $a(t)$ и $f(t)$ — строго монотонно возрастающие функции в области $t \geq 0$ и выполняются условия:

- 1) $a''(t), f''(t) < 0$; 2) $a(0), f(0) \geq 0$; 3) $a'(0) \varphi(-\omega) < f'(0)$;
- 4) $a'(0) \varphi(0) > f'(\infty)$.

Тогда в области $t \geq 0$ существует такое значение $t = \bar{t} > 0$, что максимизирующая в ней функция $q(t)$ имеет вид

$$q_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \bar{t}, \\ \bar{q}(t), & t \geq \bar{t}, \end{cases} \quad \bar{q}(t) < t,$$

где $\bar{q}(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > \bar{t}$ и $q(\bar{t}) = \bar{t}$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений и построим последовательные приближения следующим образом:

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\omega, 0], \\ \varphi(0), & t > 0, \end{cases}$$

$$x_{n+1}(t) = \max_{0 < q < t} [a(t - q) x_n(t - \omega) + f(q)], \quad (9)$$

$$x_n(t - \omega) = \varphi(t - \omega) \text{ при } t \leq \omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Если $n = 0$,

$$x_1(t) = \max_{0 < q < t} [a(t - q) x_0(t - \omega) + f(q)],$$

$$x_1(t - \omega) = \varphi(t - \omega) \text{ при } t \leq \omega.$$

Из условия 3) очевидно, что если t достаточно близко к нулю то для q , принадлежащих $[0, t]$, функция $a(t - q) x_0(t - \omega) + f(q)$ относительно q является монотонно возрастающей, а поэтому достигает своего максимума при $q = t$. Наибольшее значение таких t является решением уравнения

$$a'(0) x_0(t - \omega) = f'(t).$$

По условиям теоремы это уравнение имеет единственное решение t_1 (t_1 назовем критическим значением t). При $t \geq t_1$ уравнение $a'(t - q) x_0(t - \omega) = f'(q)$ имеет единственное решение $q_1(t)$ и оно удовлетворяет условию $q_1(t_1) = t_1$. Таким образом первое приближение имеет вид

$$x_1(t) = \begin{cases} a(0) x_0(t - \omega) + f(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ a(t - q_1(t)) x_0(t - \omega) + f(q_1(t)), & t \geq t_1, \end{cases}$$

$$x_1(t - \omega) = \varphi(t - \omega), \text{ если } t \leq \omega.$$

Теперь рассмотрим второе приближение:

$$x_2(t) = \max_{0 < q < t} [a(t - q) x_1(t - \omega) + f(q)],$$

$$x_2(t - \omega) = \varphi(t - \omega), \text{ если } t \leq \omega.$$

Обозначим $D(q) = -a'(t - q) x_1(t - \omega) + f'(q)$; $D(0) > 0$. Отсюда видно, что при t , достаточно близком к нулю, для всех $q \in [0, t]$ знак $D(q)$ остается положительным. Поэтому выражение $a(t - q) \times x_1(t - \omega) + f(q)$ достигает своего максимума при $q = t$. Единственное критическое значение t_2 является решением уравнения $D(t) = 0$. При $t \geq t_2$ уравнение $D(q) = 0$ имеет единственное решение $q_2(t)$, что удовлетворяет условию $q_2(t_2) = t_2$. Таким образом второе приближение имеет вид

$$x_2(t) = \begin{cases} a(0) x_1(t - \omega) + f(t), & 0 \leq t \leq t_2, \\ a(t - q_2(t)) x_1(t - \omega) + f(q_2(t)), & t \geq t_2, \end{cases}$$

$$x(t - \omega) = \varphi(t - \omega), \text{ если } t \leq \omega.$$

Построим функции вида

$$q_0^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq t_2, \\ q_2(t), & t \geq t_1 \end{cases} \text{ и } q_0^{(2)}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq t_2, \\ q_2(t), & t \geq t_2. \end{cases}$$

Тогда из уравнений, определяющих t_1, t_2 , и из выражений $q_0^{(1)}(t), q_0^{(2)}(t)$ видно, что $t_1 \geq t_2$ и $q_0^{(1)}(t) \geq q_0^{(2)}(t)$. Повторяя эти рассуждения для остальных приближений и построив функции $q_0^{(n)}(t)$, получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{а) } t_1 &\geq t_2 \geq \dots \geq t_n \geq \dots > 0, \\ \text{в) } q_0^{(1)}(t) &\geq q_0^{(2)}(t) \geq \dots \geq q_0^{(n)}(t) \geq \dots, \\ \text{с) } x_2'(t) &\leq x_2'(t) \leq \dots x_n'(t) \leq \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \bar{t}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} q_0^{(n)}(t) = \bar{q}(t)$.

Тогда $\bar{q}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и этим доказательство завершается.

Замечание. Приведенные выше факты справедливы и для задачи

$$y'(t) = \max_{q \in S} [a(q, t) y(t) + b(q, t) y(t - \omega) + d(q, t)], \quad (11)$$

$$y(t) = g(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq \omega,$$

так как, используя идею из [1] (гл. XI), уравнение (11) можно свести к уравнению вида (1).

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность проф. К. Т. Ахмедову и доценту К. К. Гасанову за постановку задачи и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Изд-во "Мир", 1967.
3. Садыгов М. М., Ахмедов К. Т., Гасанов К. К. "Уч. зап. АГУ". № 4, 1967.

Поступило 18. VI 1968

М. М. Садыгов

**Кечикэн аргументли экстремал-дифференсиал тэнликлэрин
һәллэринин хассәләри һаггында**

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә

$$x'(t) = \max_{q \in S} [a(q, t) x(t - \omega) + f(q, t)] \quad (1)$$

тәнлијинин $0 \leq t \leq \omega$ олдугда $x(t) = \varphi(t)$ шәртини өдәјән һәллинин биринчи вә икинчи тәртиб терәмәләринин кәсимләзлији өјрәнилир.

УДК 517.512

АРИФ С. ДЖАФАРОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ ФУРЬЕ—ЛЕЖАНДРА

1. Пусть $f(x) \in L_2[-1, 1]$, Следуя Г. В. Жидкову [5], обозначим

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x(\cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta)) d\theta, \quad h > 0.$$

Положим далее

$$\omega_2(\delta; f) = \sup_{h < \delta} \left\{ \int_{-1}^1 [\Delta_h f(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\Delta_h f(x) = f(x) - f_h(x).$$

Пусть функция $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит к классу $\tilde{H}_2^l[\omega]$, если к этой функции r раз применим дифференциальный оператор Лежандра

$$L = \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx},$$

т. е. существует функция $L^r f(x) = f^{[r]}(x)$ ($f^{(0)}(x) \equiv f(x)$), причем $f^{[r]}(x) \in L_2[-1, 1]$ и выполняется неравенство

$$\omega_2(\delta; f^{[r]}) \leq C_1 \omega(\delta),$$

где C_1 — постоянная, не зависящая от δ . В случае $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha < 2$, мы получаем осредненный класс Гельдера $\tilde{H}_2^l$, где $l = 2r + \alpha$, рассмотренный Г. В. Жидковым [6]. Следует заметить, что подобные классы для функций, заданных и непрерывных на единичной сфере, были рассмотрены ранее [7, 8].

Основным результатом является

Теорема 1. Пусть функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет (l_2) — условию С. М. Лозинского [2]: существует константа $C_2 > 1$ такая, что

$$1 < \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(C_2 \delta)}{\omega(\delta)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\omega(C_2 \delta)}{\omega(\delta)} < C_2^2. \quad (1)$$

Тогда для того, чтобы $f(x) \in \tilde{H}_2^l[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n^{(2)}(f) \leq \frac{C_3}{n^{2r}} \omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $E_n^{(2)}(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на $[-1, 1]$ алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$ в метрике L_2 ; C_3 — постоянная, не зависящая от n .

Доказательство теоремы 1 будет следовать из теорем 2 и 3, в которых устанавливаются связи между поведением коэффициентов Фурье — Лежандра функции $f(x)$ и дифференциальными свойствами этой функции.

II. Пусть $f(x)$ — функция, суммируемая с квадратом на $[-1, 1]$. Обозначим

$$b_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_k(x) dx, \quad a_k^2 = \frac{2b_k^2}{2k+1}, \quad (2)$$

$$R_n^{[r]}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} k^{4r} a_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и заметим, что в силу замкнутости систем $\{P_k(x)\}$

$$R_n^{[0]}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}} = E_n^{(2)}(f). \quad (3)$$

Лемма. Если к функции $f(x)$ r раз применим оператор Лежандра L и результат применения $f^{[r]}(x) \in L_2[-1, 1]$, то при любом натуральном n справедливо неравенство

$$\left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f^{[r]} \right) \right\}^2 \leq \frac{C_4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \{R_k^{[r]}(f)\}^2, \quad (4)$$

где постоянная C_4 зависит только от r .

Доказательство. На основании теоремы сложения для полиномов Лежандра

$$P_k(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) = \\ = P_k(x) P_k(\cos h) + 2 \sum_{m=1}^k \frac{(\kappa-m)!}{(\kappa+m)!} P_m^*(x) P_m^*(\cos h) \cos m \theta$$

имеем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi P_k(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \cos \theta) d\theta = P_k(x) P_k(\cos h).$$

С другой стороны,

$$L^r P_k(x) = (-1)^r \kappa^r (\kappa+1)^r P_k(x).$$

Поэтому из соотношения

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_k(x)$$

получим (см. [5])

$$\Delta_h f^{[r]}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^r \kappa^r (\kappa+1)^r [1 - P_k(\cos h)] b_k P_k(x).$$

Отсюда, в силу равенства Парсеваля, учитывая (2) и

$$\int_{-1}^1 [P_k(x)]^2 dx = \frac{2}{2k+1},$$

будем иметь

$$\int_{-1}^1 [\Delta_h f^{[r]}(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^{2r} (\kappa+1)^{2r} [1 - P_k(\cos h)]^2 a_k^2(f). \quad (5)$$

Для полиномов Лежандра $P_k(\cos h)$ при любом h и κ имеют место неравенства

$$|P_k(\cos h)| \leq 1, \quad 1 - P_k(\cos h) \leq \frac{1}{2} h^2 \kappa^2; \quad (6)$$

первое из этих неравенств хорошо известно, второе доказано в работе [5].

Из (5) и (6) получаем

$$\int_{-1}^1 [\Delta_h f^{[r]}(x)]^2 dx = \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \right\} \kappa^{2r} (\kappa+1)^{2r} [1 - P_k(\cos h)]^2 a_k^2 \leq \\ \leq 2^{2r} \cdot \frac{1}{4} h^4 \sum_{k=1}^{n-1} \kappa^4 \kappa^{4r} a_k^2 + 4 \cdot 2^{2r} \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^{4r} a_k^2.$$

Отсюда

$$\left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f^{[r]} \right) \right\}^2 \leq \frac{C_5(r)}{n^4} \left[\sum_{k=1}^n \kappa^4 \kappa^{4r} a_k^2 + n^4 \{R_n^{[r]}(f)\}^2 \right]. \quad (7)$$

Но

$$\sum_{k=1}^n \kappa^4 \kappa^{4r} a_k^2 \leq C_6 \sum_{k=1}^n \kappa^3 \{R_k^{[r]}(f)\}^2. \quad (8)$$

С другой стороны, так как последовательность $\{R_n^{[r]}(f)\}$ монотонна:

$$R_1^{[r]}(f) \geq R_2^{[r]}(f) \geq \dots \geq R_k^{[r]}(f) \geq R_{k+1}^{[r]}(f) \geq \dots,$$

то

$$\{R_n^{[r]}(f)\}^2 \leq \frac{C_7}{n^4} \sum_{k=1}^n \kappa^3 \{R_k^{[r]}(f)\}^2. \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9) следует неравенство (4). Лемма доказана. Ниже от функции $\omega(\delta)$ будем требовать, чтобы она удовлетворяла еще одному из следующих условий;

а) существует число $\alpha > 0$ и константа $C_8 > 0$ такие, что для $0 < \delta < \eta$

$$\eta^{-\alpha} \omega(\eta) \leq C_8 \delta^{-\alpha} \omega(\delta)$$

— (N^a) — условие С. Б. Стечкина [3];

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega \left(\frac{1}{k} \right) = V \left(\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right)$$

— (B) — условие Н. К. Бари [2].

Теорема 2. Пусть функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условиям $(N^a, 0 < a < 2)$ и (B) . Тогда если

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}} = O \left(\frac{1}{n^{2r}} \omega \left(\frac{1}{n} \right) \right), \quad (10)$$

то $f(x) \in \tilde{H}_2^r[\omega]$.

Доказательство. Имеем из (10)

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2 \leq \frac{C_9}{n^{4r}} \omega^2 \left(\frac{1}{n} \right),$$

откуда

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \kappa^{4r} a_k^2 \leq C_9 \omega^2 \left(\frac{1}{n} \right).$$

Поэтому

$$\sum_{k=n}^{\infty} \kappa^{4r} a_k^2 = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=2^v n}^{2^{v+1}n-1} \kappa^{4r} a_k^2 \leq C_9 \sum_{v=0}^{\infty} \omega^2 \left(\frac{1}{2^v n} \right).$$

Далее, на основании неравенства (см. [9], стр. 43)

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\rho_k|^{s'} \right\}^{\frac{1}{s'}} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^s \right\}^{\frac{1}{s}} \quad (1 \leq s \leq s' < \infty) \quad (11)$$

и условия (B) получаем

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^{4r} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_{10} \sum_{v=0}^{\infty} \omega \left(\frac{1}{2^v h} \right) = C_{10} \omega \left(\frac{1}{n} \right) + C_{10} \sum_{v=1}^{\infty} \omega \left(\frac{1}{2^v h} \right) \leq$$

$$\leq C_{10} \omega \left(\frac{1}{n} \right) + C_{11} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=2^{v-1}n+1}^{2^v n} \frac{1}{k} \omega \left(\frac{1}{k} \right) = C_{10} \omega \left(\frac{1}{n} \right) +$$

$$+ C_{11} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} \omega \left(\frac{1}{k} \right) \leq C_{10} \omega \left(\frac{1}{n} \right) + C_{12} \omega \left(\frac{1}{n} \right) = C_{13} \omega \left(\frac{1}{n} \right).$$

Итак, при условии (B) из (10) следует, что

$$R_n^{[r]}(f) = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^{4r} a_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}} = O \left(\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right). \quad (12)$$

Воспользуемся теперь леммой 1 и условием (N^α) . Пусть $0 < \delta \leq 1$, положим в неравенстве (4) $n = [\delta^{-1}]$ и заметим, что тогда $n\delta \geq \frac{1}{2}$ и,

в силу условия (N^α) ,

$$\kappa^\alpha \omega \left(\frac{1}{k} \right) \leq C_8 \delta^{-\alpha} \omega(\delta), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому, на основании (12) (напомним, что $0 < \alpha < 2$)

$$\{\omega_2(\delta; f^{[r]})\}^2 \leq C_{14} n^{-4} \sum_{k=1}^n \kappa^3 \omega^2 \left(\frac{1}{k} \right) \leq$$

$$\leq C_{15} n^{-4} \delta^{-2\alpha} \omega^2(\delta) \sum_{k=1}^n \kappa^{3-2\alpha} \leq C_{16} (n\delta)^{-2\alpha} \omega^2(\delta) \leq C_{17} \omega^2(\delta).$$

Итак,

$$\omega_2(\delta, f^{[r]}) = O(\omega(\delta)),$$

т. е. $f(x) \in \tilde{H}_2^r[\omega]$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[-1, 1]$, то

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\delta^{\frac{1}{2}}\right). \quad (13)$$

На самом деле, как известно [4], для функции $f(x)$, имеющей ограниченное изменение $b_k = O\left(\kappa^{-\frac{1}{2}}\right)$. Поэтому

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2(f) \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{-\frac{1}{2}}\right),$$

откуда в силу теоремы 2 и следует (13).

Теорема 3. Пусть функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию (B) и пусть $f(x) \in \tilde{H}_2^r[\omega]$, и пусть $\kappa = 2^r + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} (1 + \gamma) \geq 0$, где γ — любое вещественное число, $0 < p \leq 2$, если $\kappa > 0$ и $1 \leq p \leq 2$, если $\kappa = 0$. Тогда

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^\gamma |a_k(f)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(n^{-\kappa} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (14)$$

В случае $\kappa > 0$ достаточно требовать, чтобы $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Будем пользоваться следующим неравенством [5] для полинома Лежандра $P_\kappa(\cos h)$:

$$1 - P_\kappa(\cos h) \geq \frac{4}{3\pi^3} \kappa^2 h^2 \quad (0 \leq \kappa h \leq \pi). \quad (15)$$

Положим $h = n^{-1}$ и заметим, что при $\kappa = n, n+1, \dots, 2n-1$, $1 \leq \kappa h < 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2 &\leq \frac{1}{n^{4r}} \sum_{k=n}^{2n-1} \kappa^4 h^4 \kappa^{4r} a_k^2 \leq \\ &\leq \frac{C_{18}}{n^{4r}} \sum_{k=n}^{2n-1} [1 - P_\kappa(\cos h)]^2 \kappa^{2r} (\kappa+1)^{2r} a_k^2 \leq \frac{C_{19}}{n^{4r}} \omega^2 \left(\frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

в силу условия теоремы и равенства (5), откуда, применяя неравенство Гельдера, находим для любого γ

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \kappa^\gamma |a_k|^p \leq C_{20} \left\{ \sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2 \right\}^{\frac{p}{2}} \cdot n^{1 - \frac{p}{2} + \gamma} \leq \frac{C_{21}}{n^{p\kappa}} \omega^p \left(\frac{1}{n} \right).$$

Поэтому

$$\sum_{k=n}^{\infty} \kappa^\gamma |a_k|^p = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=2^v n}^{2^{v+1}n-1} \kappa^\gamma |a_k|^p \leq C_{21} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\omega^p \left(\frac{1}{2^v n} \right)}{(2^v n)^{p\kappa}}. \quad (16)$$

В случае, когда $\kappa > 0$ получаем из (16), используя монотонность функции $\omega(\delta)$,

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^\gamma |a_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_{22}}{n^\kappa} \omega \left(\frac{1}{n} \right) \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^v} \right)^\gamma \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_{23}}{n^\kappa} \omega \left(\frac{1}{n} \right),$$

и соотношение (14) при $\kappa > 0$ доказано.

Пусть теперь $\kappa = 0$. В этом случае неравенство (16) принимает вид

$$\sum_{k=n}^{\infty} \kappa^\gamma |a_k|^p \leq C_{21} \sum_{v=0}^{\infty} \omega^p \left(\frac{1}{2^v n} \right),$$

откуда на основании неравенства (11) (по условию, в случае $\kappa = 0$, $b \geq 1$)

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^\gamma |a_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C_{24} \sum_{v=0}^{\infty} \omega \left(\frac{1}{2^v n} \right).$$

Отсюда, используя условие (B), так же как и при доказательстве теоремы 2, заключаем, что

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \kappa^{\gamma} |a_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O \left(\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right).$$

Теорема доказана.

В работе [2] доказано, что условие (l_2) равносильно одновременному выполнению условий $(N^{\alpha}, 0 < \alpha < 2)$ и (B). Поэтому из теорем 2 и 3 (при $\gamma = 0, p = 2$) и соотношения (3) следует теорема 1. Заметим, что теорема 3 не охватывает случаи, когда $r = 0, \gamma = 0, p = 1$. При этом имеет место следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Г. Лоренца ([1], стр. 208).

Теорема 4. Если $\omega_2(\delta; f) = O(\delta^{\alpha})$ и $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ ($0 < p \leq 2$),

то

$$\left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(f)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O \left(\frac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}}} \right). \quad (17)$$

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 3. Если $\alpha > \frac{1}{2}$, то теорему 4 можно применить при $p = 1$, и так как в этом случае правая часть (17) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то из теоремы 4 следует результат Г. В. Жидкова [5] об абсолютной сходимости ряда $\sum a_n(f)$. Эта последняя будет также доказана иначе (см. следствие 5.1.1).

III. Рассмотрим вопрос об условиях сходимости ряда, составленного из коэффициентов Фурье—Лежандра функции $f(x)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |a_n(f)|^{\beta}. \quad (18)$$

Теорема 5. Пусть $N > 1$ — целое неотрицательное число, $0 < \beta \leq 2, -\infty < \gamma < \infty$. Тогда сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta}$$

влечет сходимость ряда (18).

Доказательство. В силу (5) имеем

$$\left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \left[1 - P_k \left(\cos \frac{1}{N^n} \right) \right]^2 a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right),$$

откуда на основании неравенства (15)

$$\left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} a_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_{25} \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right). \quad (*)$$

Далее, на основании неравенства Гельдера при $0 < \beta < 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} |a_k|^{\beta} &\leq \left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} a_k^2 \right\}^{\frac{\beta}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} 1^{\frac{2}{2-\beta}} \right\}^{\frac{2-\beta}{2}} \leq \\ &\leq C_{26} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta} \cdot N^{n(1-\frac{\beta}{2})}, \end{aligned}$$

отсюда и из (*) для любого γ и $0 < \beta \leq 2$ получаем

$$\sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \kappa^{\gamma} |a_k|^{\beta} \leq C_{27} N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} |a_n|^{\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \kappa^{\gamma} |a_k|^{\beta} \leq C_{27} \sum_{n=1}^{\infty} N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta} < \infty.$$

Теорема доказана.

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f \right) \right\}^{\beta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \kappa^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{\kappa}; f \right) \right\}^{\beta} > \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta} \sum_{k=N^{n-1}}^{N^n-1} \kappa^{\gamma-\frac{\beta}{2}} > C_{28} \sum_{n=1}^{\infty} N^{n(\gamma+1-\frac{\beta}{2})} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{N^n}; f \right) \right\}^{\beta}, \end{aligned}$$

то из теоремы 5 вытекает

Следствие 5.1. Пусть $0 < \beta \leq 2, -\infty < \gamma < \infty$.

Тогда сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma-\frac{\beta}{2}} \left\{ \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f \right) \right\}^{\beta} \quad (19)$$

влечет сходимость ряда (18).

Следствие 5.1.1. Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_2 \left(\frac{1}{n}; f \right)}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|. \quad (21)$$

Этот результат является аналогом соответствующего результата О. Саса (см. [1], стр. 609, а также замечание 1 на стр. 612) об абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Ряд (20) сходится, если, например, $\omega_2(\delta; f) = O(\delta^{\alpha}), \alpha > \frac{1}{2}$. Поэтому из этого

следствия вытекает вышеуказанный результат Г. В. Жидкова. Заметим, что сходимость ряда (21) обеспечивает абсолютную сходимость почти всюду на $[-1, 1]$ ряда Фурье—Лежандра функции $f(x)$.

В самом деле, в силу неравенства Шварца

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} |b_n P_n(x)| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \int_{-1}^1 |P_n(x)| dx \leq \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \cdot \left\{ \int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{2n+1}} |b_n| = \\ &= \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \end{aligned}$$

откуда и следует, что ряд $\sum b_n P_n(x)$ сходится абсолютно почти всюду на $[-1, 1]$.

Следствие 5.1.2. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f \right),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)| < \infty,$$

т. е. ряд Фурье—Лежандра функции $f(x)$ сходится абсолютно (и равномерно) на $[-1, 1]$. Действительно, нужно положить в следствии 5.1

$\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ и учесть (2). Условие следствия 5.1.2 выполняется,

если, например, $\omega_2(\delta; f) = O(\delta^\alpha)$, $\alpha > 1$.

Отметим, что вопросы, рассмотренные в данной статье для тригонометрических рядов Фурье, рассматривались многими авторами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды М, 1961.
2. Бари Н.К. и Стечкин С.Б. Тр. Московского матем. об-ва, т. 5, 1956.
3. Стечкин С.Б. Изв. АН СССР, серия матем., т. 15, № 3, 1951.
4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций ИЛ, М., 1952.
5. Жидков Г.В. ДАН СССР, серия матем., т. 169, № 5, 1966.
6. Жидков Г.В. Применение некоторых классов функций к краевым задачам математической физики. Автореф., М., 1964.
7. Кушниренко Г.Г. Научные доклады высшей школы, серия физ.-матем. наук, № 4, 1958.
8. Джафаров Ариф С. О порядке наилучших приближений непрерывных на единичной сфере функций посредством конечных сферических сумм. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций Баку, 1965.
9. Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства ИЛ, М., 1948.
10. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье Матем. сб., т. 44 (86), № 1, 1958.
11. Кокилашвили В.М. Некоторые замечания относительно коэффициентов Фурье и классов функций, Сообщ. АН Груз. ССР, т. XXVIII, № 1, 1962.
12. Джафаров Ариф С. ДАН Азерб. ССР, № 8, 1964.
13. Джафаров Ариф С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 2, 1964.

Поступило 1. X 1968

Ариф С. Джафаров

Фурье—Лежандр сыраларынын бэ'зи хассэлэри

ХҮЛАСЭ

ха Мэгалэдэ Лежандр чохэдлилэри үзрэ Фурье сыраларынын бэ'зи лассэлэри өјрәнилir. Биринчи һиссэдә мүәјјән гејри-дөври функција-сәр синфинин дахили гурулуш хассэлэри ашкар едилir. Икинчи һис-р дә Фурье—Лежандр әмсалларынын тәбиәти илә функцијанын дифе-енциал хассэлэри арасында дүз вә тәрс әлагәләр өјрәнилir. Нәһајәт, үчүнчү һиссэдә Фурье—Лежандр сыраларынын мүтләг јығылма мәсә-эләринә бахылir.

УДК 539.376+532.135

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. МИРСАЛИМОВ

НАПРЯЖЕННАЯ ПОСАДКА ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛ

Для произвольного линейного вязко-упругого тела рассмотрена плоская задача о напряженной посадке, являющаяся аналогом известной упругой задачи Д. И. Шермана [1]. Пусть в некоторое вязко-упругое тело, ограниченное внешним контуром L_0 и внутренним L , вставлено другое вязко-упругое тело, контур которого мало отличается от L . Оба тела имеют одинаковые вязко-упругие постоянные. Предполагаются выполняющимися условия плоской задачи. Считается, что на внешнем контуре L_0 заданы усилия (первая основная задача) или смещения (вторая задача). Будем предполагать, что на контуре L выполняются условия жесткого сцепления в любой момент времени t . Отсюда следует, что вектор скорости непрерывен в каждой точке контура L в любой момент времени. Следовательно, граничные условия, выполняющиеся на контуре L , должны быть следующими:

$$[u + iv] = \Delta \text{ на } L, \quad (1)$$

$$[x_n + i y_n] = 0 \text{ на } L. \quad (2)$$

Здесь u, v — компоненты вектора смещения, скобка $[x]$ означает скачок величины x , Δ — начальная величина скачка вектора смещения (упругий натяг), x_n, y_n — компоненты нормального условия, приложенного к некоторой дуге. Условие (1) появилось после интегрирования граничного условия для скоростей $[\dot{u} + i\dot{v}] = 0$ на L .

В плоской задаче линейной вязко-упругости имеют место соотношения, аналогичные формулам Колосова—Мусхелишвили в плоской теории упругости:

$$\varphi(s) + s \overline{\varphi'(s)} + \overline{\psi(s)} = f(s) = i \int_0^s (x_n + i y_n) ds, \quad (3)$$

$$z\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \psi(z) = 2\mu(u + iv). \quad (4)$$

Здесь $\varphi(z), \psi(z)$ — аналитические функции z в области внутри L , а также области между L_0 и L ; κ и μ — линейные вязко-упругие операторы по времени, постоянные для данного материала:

$$\kappa y = \int_0^t \kappa(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

$$\mu y = \int_0^t \mu(t - \tau) y(\tau) d\tau;$$

s —аффикс произвольной дуги, на которой берется интеграл в (3).
При помощи (1)–(4) граничные условия для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на L можно записать так:

$$[\varphi] + s[\varphi'] + [\psi] = 0 \quad \text{на } L, \quad (5)$$

$$x[\varphi] - s[\varphi'] - [\psi] = \Delta(s) \alpha(t) \quad \text{на } L. \quad (6)$$

Здесь

$$\alpha(t) = 2 \int_0^t \mu(t - \tau) d\tau.$$

Функция $\alpha(t)$, как видно, легко определяется по заданному оператору вязко-упругости 2μ ; она равна функции релаксации сдвигового напряжения.

Далее совершенно аналогично упругой задаче, вводятся функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$:

$$\varphi(z) = (1 + x)^{-1} \alpha(t) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Delta(s) ds}{s - z} + \varphi_1(z); \quad (7)$$

$$\psi(z) = (1 + x)^{-1} \alpha(t) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h(s) ds}{s - z} + \psi_1(z). \quad (8)$$

Здесь
$$h(s) = -\overline{\Delta'(s)} - \overline{s} \Delta'(s); \quad \Delta'(s) = \frac{d\Delta(s)}{ds}.$$

На основании (5), (6) функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ аналитичны всюду внутри L_0 , а на самом контуре L_0 удовлетворяют обычному краевому условию первой или второй основной задачи вязко-упругости с видоизмененной правой частью. Таким образом полученный результат совершенно аналогичен результату Д. И. Шермана в соответствующей задаче теории упругости.

Заметим, что особенно простой результат получается в том случае, когда внешний контур L_0 свободен от нагрузок. В этом случае вязко-упругие величины (напряжения) равны соответствующим упругим величинам, помноженным на функцию времени $g(t)$:

$$g(t) = (1 + x)^{-1} \alpha. \quad (9)$$

Напомним, что если коэффициент Пуассона ν вязко-упругого тела не зависит от времени, то величина x также не будет зависеть от времени ($x = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $x = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ для плоского напряженного состояния).

Если внешний контур жестко зашлемлен (т. е. $u + iv = 0$ на L в любой момент времени), а коэффициент Пуассона постоянен, то в этом случае вязко-упругие напряжения и деформации также равны соответствующим упругим величинам, умноженным на функцию (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И., ДАН СССР, т. XXVII, № 9, 1940.

Поступило 30. VIII 1968

Г. П. Черепанов, В. М. Мирсалимов

Өзүллү-эластик чисимлэрин кәркинликлі пәрчимләнмәси ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ихтијари хәтти өзүллү-эластик чисимлэрин мүстәви мәсәләсинин кәркинликлі пәрчимләнмәси мәсәләләриндән бәһс олу-нур.

Нәтичәдә Д. И. Шерманын һәлл етдији еластики мәсәләјә ујғун һәлл алыныр.

УДК 539.374

А. Д. ХАЛИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАПРОНОВОЙ НИТИ

Для исследования поведения материалов при импульсивных нагружениях важную роль играет установление закона деформирования. Существуют различные методы определения динамической диаграммы $\sigma \sim \epsilon$ сжатия. Некоторые из них приводятся в монографии [1] и в отдельных научных публикациях.

В методах Х. А. Рахматулина, В. С. Ленского, К. А. Керимова и Р. И. Надеевой, основанных на деформационной теории при продольном ударе, в основу заложена экспериментальная зависимость остаточной деформации от скорости удара. Основным недостатком этих методов является ограниченность их применения, они годны для конкретной схемы $\sigma(\epsilon)$ и применимы в основном к металлам. Другим недостатком является невозможность применения этих методов для материалов с малыми остаточными деформациями. Непригодны они и для исследования полимерных нитей. В работе [3] разработаны теоретические основы метода определения диаграммы $\sigma(\epsilon)$ свободные от вышеуказанных недостатков. Однако реализован он не был.

Настоящая статья посвящена определению динамической диаграммы $T = T(\epsilon)$ для капроновых нитей с помощью метода [3], основанного на экспериментальном измерении напряжения в закрепленном конце образца, и исследованию некоторых динамических характеристик указанного материала.

Определяющие соотношения и метод исследований

Пусть имеется стержень длиной l , по одному концу которого производится удар со скоростью v_0 , а другой конец жестко закреплен. При помощи пьезодатчиков измеряются напряжения в закрепленном конце стержня с течением времени. Волновую картину удара на характеристической плоскости x, t иллюстрирует рис. 1.

Ясно, что в области OAB все характеристики положительного наклона будут прямолинейными. Область ABC является областью взаимодействия падающих и отраженных волн и поэтому все характеристики ее будут криволинейными. Покажем, что криволинейная характеристика AB является гиперболой. Обозначим через x_0, t_0 координаты точек на характеристике AB . Эти координаты удовлетворяют уравнениям характеристик положительного и отрицательного направления, соответственно:

$$\frac{x_0}{t_0} = a(ux_0); \quad \frac{dx_0}{dt_0} = -a(ux_0),$$

где $a(u_{x_0})$ — скорость распространения пластических волн. Исключив из последних уравнений $a(u_{x_0})$, получим

$$x_0 t_0 = \text{const } t = \frac{l^2}{a_0} = c_0. \quad (1)$$

В области ABC все характеристики положительного наклона считаем гиперболами типа (1) и вдоль AB они будут касательными к центрированным волнам. Найдем теперь на AB связь между временем и деформацией их. Если $N'M' = M'l$, то справедливы соотношения

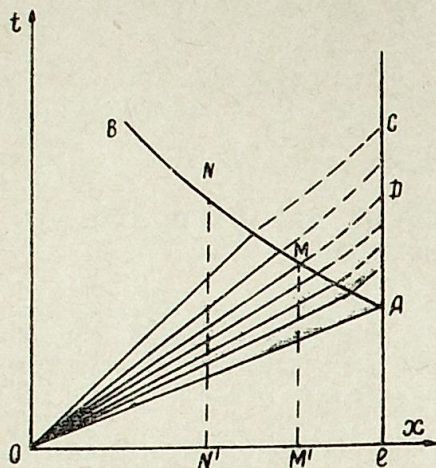


Рис. 1.

условия характеристик AB и AM соответственно будут:

$$u_{t_0} = - \int_0^{u_{x_0}} a(u_x) du_x, \quad u_t = \int_0^{u_x} a(u_x) du_x + c, \quad (3)$$

то постоянная c определяется следующим образом: Приравняем скорости частицы в точке M : $\int_0^{u_{x_0}} a(u_x) du_x = \int_0^{u_x} a(u_x) du_x + c$

$$\text{или } c = -2 \int_0^{u_{x_0}} a(u_x) du_x.$$

Так как скорость частицы в закрепленном конце равна нулю, то из последних соотношений будем иметь

$$2 \int_0^{u_{x_0}} a(u_x) du_x = \int_0^{u_x} a(u_x) du_x. \quad (4)$$

В первом приближении возьмем $a = a_0 - a_1 u_x$, (*) подставляя (*) в (4), получим

$$-2 \left[a_0 u_{x_0} - \frac{1}{2} a_1 u_{x_0}^2 \right] = -a_0 u_x + \frac{1}{2} a_1 u_x^2.$$

Решая это уравнение относительно u_x , получим

$$u_x = \frac{a_0}{a_1} - \sqrt{\left(\frac{a_0}{a_1}\right)^2 - 4 \left(\frac{a_0}{a_1} u_{x_0} - \frac{1}{2} u_{x_0}^2\right)}. \quad (5)$$

Уравнение (2) даст

$$a_0 - a_1 u_x = \frac{1}{4c_0} \left(l + \frac{c_0}{t} \right)^2 \quad \text{или} \quad u_{x_0} = \frac{a_0}{a_1} \left[1 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{t_A}{t} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$u_x = \frac{a_0}{a_1} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{t_A}{t} \right)^4 - 1} \right]. \quad (7_1)$$

Так как скорость распространения волн в упруго-пластическом теле определяется по формуле

$$a^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad \text{то } \sigma = \int_0^{u_x} \rho_0 a^2 du_x$$

или

$$\sigma = \int_0^{u_x} \rho_0 (a_0^2 - 2a_0 a_1 u_x + a_1^2 u_x^2) du_x. \quad (7_2)$$

Для определения a_1 приравняем значение напряжения (7₂) к экспериментально измеренным значениям $\sigma = \sigma(t)$ в точке t_c . Это условие даст нам следующее соотношение для определения a_1 :

$$\rho_0 \left[a_0^2 u_x(t_c) - a_0 a_1 u_x^2(t_c) + \frac{a_1^2}{3} u_x^3(t_c) \right] = \sigma(t_c), \quad (8)$$

где ρ_0 — массовая плотность единицы длины в недеформированном состоянии (для нити основы ленты $\rho_0 = 16,347 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^2}$). В

выражение (8) входит неизвестная величина t_c , которая определяется из краевых условий. Таким образом вдоль характеристики AB можем записать

$$2V_0 = \int_0^{u_x} (a_0 - a_1 u_x) du_x = a_0 u_x - \frac{a_1}{2} u_x^2. \quad (9)$$

Подставляя в последнее уравнение (7₁) и решая его относительно t , получим:

$$\begin{aligned} 2v_0 &= \frac{a_0^2}{a_1} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{t_A}{t_c} \right)^4 - 1} \right] - \frac{1}{2} \frac{a_0^2}{a_1} \left[1 - \sqrt{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{t_A}{t_c} \right)^4 - 1} \right]^2 = \frac{a_0^2}{a_1} - \frac{a_0^2}{16a_1} \left(1 + \frac{t_A}{t_c} \right)^4; \\ 1 - 2v_0 \frac{a_1}{a_0^2} &= \frac{1}{16} \left(1 + \frac{t_A}{t_c} \right)^4; \\ t_c &= \frac{t_A}{2 \sqrt[4]{1 - 2v_0 \frac{a_1}{a_0^2} - 1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (10) в (7₁), будем иметь:

$$\begin{aligned} u_x(t_c) &= \frac{a_0}{a_1} \left[1 - \sqrt{1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2}} \right], \\ u_x^2(t_c) &= \frac{a_0^2}{a_1^2} \left[1 - 2\sqrt{1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2}} + 1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2} \right], \\ u_x^3(t_c) &= \frac{a_0^3}{a_1^3} \left[1 - 3\sqrt{1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2}} + 3 \left(1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2} \right) - \left(1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8), с помощью (10) получим уравнение для определения a_1 :

$$\frac{\rho_0 a_0^3}{3a_1} \left[1 - \left(1 - 4v_0 \frac{a_1}{a_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] = \kappa t_A \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{1 - 2v_0 \frac{a_1}{a_0^2} - 1}} - 1 \right). \quad (12)$$

Обозначим $x = 2v_0 \frac{a_1}{a_0^2}$ и запишем последнее в виде

$$x = 9,046 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{[1 - \sqrt{(1 - 2x)^3}]}{2\sqrt[4]{(1 - x) - 1}}. \quad (13)$$

Уравнение (13) решаем графически и находим $x = 0,317$. Следовательно, $a_1 = 8566$ м/сек (здесь погрешность составляет 0,001%). Зная значения a_0 и a_1 и выражения для $u = u(t)$ и $T = T(t)$, мы можем полностью построить динамическую диаграмму $T = T(\varepsilon)$ для капроновой нити.

Построение динамической диаграммы для капрона

Испытаниям на продольный удар подвергалась нить основы ткацкой капроновой ленты ЛТК-60-7000. В процессе эксперимента измерялась скорость распространения упругой волны a_0 . Для нити основы экспериментальным путем установлено $a_0 = 1800 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, массовая плот-

ность единицы длины нити основы

$$\rho_0 = 16,347 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг сек}}{\text{м}^2}.$$

Эксперименты на продольный удар производились при длине испытуемой нити основы $l = 0,94$ м. Опыты были проведены для скоростей удара $v_0 = 8,7; 16,8; 41,8; 52,4; 60, 76, 100 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$. Для измерения

натяжения на закрепленном конце применялся пьезодатчик из титаната бария. После обработки экспериментальных данных для каждой скорости удара получили зависимость натяжения от времени $T = T(t)$ в точке закрепления (рис. 2).

Аппроксимируя кривые, представленные на рисунке, получаем

$$T = \left[1 - \frac{\text{th}(1 - t)}{\text{th}1} \right]^n. \quad (14)$$

где n — постоянный параметр,

T — натяжение нити, t — время.

Задавая параметру n различные значения, находим зависимость $T = T(t)$ для определенного значения скорости удара v_0 .

Решаем поставленную задачу для прямолинейной зависимости

$$T = \kappa t, \quad (15)$$

где $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{\text{сек}}$ — коэффициент пропорциональности.

Запишем выражение для $u = u(t)$:

$$u_x = \frac{a_0}{a_1} \left[1 - \sqrt[4]{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{t_A}{t} \right)^4 - 1} \right]. \quad (16)$$

Исключив из (15) и (16) параметр t , получим

$$u_x = \frac{a_0}{a_1} \left[-1 \sqrt[4]{\frac{1}{8} \left(1 + \frac{\kappa t_A}{\kappa t_A + T} \right)^4 - 1} \right], \quad (17)$$

где t_A — время прихода упругой волны от ударяемого конца до заземленного (рис. 3).

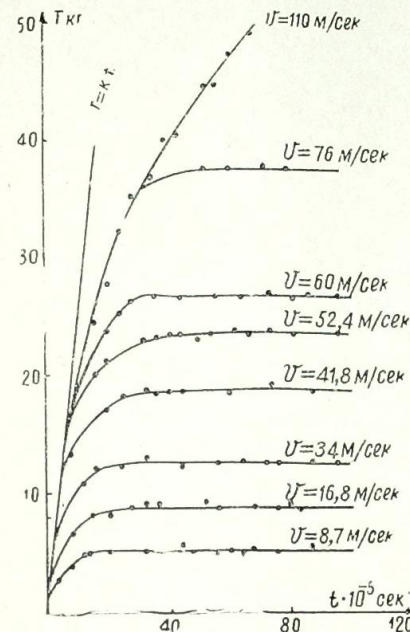


Рис. 2.

На графике представлены; I — динамическая зависимость $T \sim \varepsilon$ для капроновой нити, вычисленная согласно (17); II — динамическая диаграмма, вычисленная методом поперечного удара.

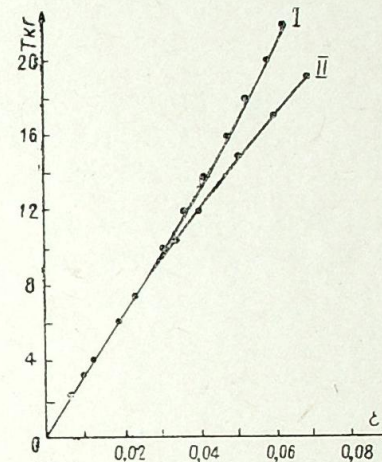


Рис. 3.

Сопоставляя графики, видим, что в начальном участке они полностью совпадают. Начиная с некоторого значения T они немного расходятся. По-видимому, это расхождение обусловлено принятым нами приближением. В дальнейшем этим же методом построим динамическую диаграмму данного материала с учетом вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.
2. Керимов К. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1960. № 3.
3. Рахматулин Х. А., Керимов К. А. Методика исследования законов динамического сопротивления материалов. Материалы Всесоюз. симпозиума по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Баку, 1954.

Поступило 30. VIII 1968

А. Д. Халилов

Капрон сапын динамик характеристикаларынын тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Тэгдим олуан ишдэ узунуна зэрбэ үсулу илэ капрон сапын динамик характеристикалары тэ'жин едилир.

Тәдирүбәдән алынган $\sigma = \sigma(t)$ функцијасыны биләрәк, [3]-дә верилән үсүл әсасында капрон сап үчүн $T = T(\epsilon)$ динамик диаграм гурулур.

Алынмыш нәтичәләр тәдгиг олуан материал үчүн енинә зәрбә үсулу илә алыннан нәтичәләрлә мугајисә едилир.

Тәдгиг олуан үсулун галыг деформасијаларын өлчүлмәсинә әсасланан үсулдан үстүнлүжү көстәрилир.

Я. Д. МАМЕДОВ

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЗЕЙДЕЛЯ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной статье приводятся общие достаточные условия для сходимости последовательных приближений Зейделя к решению следующей задачи:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad (1)$$

где

$$\vec{x} = (x^1, \dots, x^m), \quad \vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m), \quad \vec{f}(t, \vec{x}) = (f_1, \dots, f_m).$$

Кроме того, показано, что скорость сходимости этих приближений к решению быстрее, чем скорость обычных последовательных приближений.

Вспомогательная лемма. Построим следующие последовательности:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0^i(t) &= Nt, \\ \frac{d\epsilon_n^i(t)}{dt} &= \varphi_i[t, \epsilon_{n-1}^1(t), \dots, \epsilon_{n-1}^m(t)], \quad \epsilon_n^i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ \delta_0^i(t) &= Nt, \\ \frac{d\delta_n^i(t)}{dt} &= \varphi_i[t, \delta_n^1(t), \dots, \delta_n^{i-1}(t), \delta_{n-1}^i(t), \dots, \delta_{n-1}^m(t)], \quad \delta_n^i(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_n^i(t)}{dt} &= \varphi_i[t, \delta_n^1(t), \dots, \delta_n^{i-1}(t), \delta_{n-1}^i(t), \dots, \delta_{n-1}^m(t)], \quad \delta_n^i(0) = 0 \\ &(i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\varphi_i(t, u^1, \dots, u^m)$ ($0 \leq t \leq T$, $0 \leq u^i \leq 2r$, $i = 1, \dots, m$) — непрерывные функции,

а $NT \leq 2r$;

$$N = \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 1 \leq i \leq m}} \varphi_i(t, 2r, \dots, 2r).$$

Лемма. Пусть положительная непрерывная вектор-функция

$$\vec{\varphi}(t, \vec{u}) = (\varphi_1(t, u^1, \dots, u^m), \dots, \varphi_m(t, u^1, \dots, u^m)) \quad (0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq u^i \leq 2r)$$

не убывает по $\vec{u}$ и задача

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\varphi}(t, \vec{u}), \quad \vec{u}(0) = 0 \quad (4)$$

имеет только нулевое решение. Тогда последовательности вектор-функций $\vec{\varepsilon}_n(t)$ и $\vec{\delta}_n(t)$ положительны, не возрастают

$$\vec{\delta}_n(t) \leq \vec{\varepsilon}_n(t) \quad (5)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\varepsilon}_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{\delta}_n(t) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Положительность $\vec{\varepsilon}_n(t)$ и $\vec{\delta}_n(t)$ следует из того, что вектор-функция $\varphi(t, u)$ положительна. Докажем их невозрастание. Из (2) имеем

$$\frac{d \varepsilon_1^i(t)}{dt} = \varphi_1[t, \varepsilon_0^1(t), \dots, \varepsilon_0^m(t)] \leq \varphi_1[t, 2r, \dots, 2r] \leq N = \frac{d \varepsilon_0^i(t)}{dt},$$

$$\varepsilon_1^i(t) \leq \varepsilon_0^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Допустим, что

$$\varepsilon_n^i(t) \leq \varepsilon_{n-1}^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда из (2)

$$\frac{d \varepsilon_{n+1}^i(t)}{dt} = \varphi_1[t, \varepsilon_n^1(t), \dots, \varepsilon_n^m(t)] \leq \varphi_1[t, \varepsilon_{n-1}^1(t), \dots, \varepsilon_{n-1}^m(t)] =$$

$$= \frac{d \varepsilon_n^i(t)}{dt},$$

$$\varepsilon_n^i(t) \leq \varepsilon_{n-1}^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Следовательно, $\vec{\varepsilon}_n(t)$ не возрастает.

Докажем, что $\vec{\delta}_n(t)$ не возрастает. Из (3) имеем

$$\frac{d \delta_1^i(t)}{dt} = \varphi_1[t, \delta_0^1(t), \dots, \delta_0^m(t)] \leq \varphi_1[t, 2r, \dots, 2r] \leq N = \frac{d \delta_0^i(t)}{dt},$$

$$\delta_1^i(t) \leq \delta_0^i(t).$$

Если

$$\delta_1^k(t) \leq \delta_0^k(t) \quad (k = 1, \dots, m-1),$$

то

$$\frac{d \delta_1^m(t)}{dt} = \varphi_m[t, \delta_1^1(t), \dots, \delta_1^{m-1}(t), \delta_0^m(t)] \leq \varphi_m[t, \delta_0^1(t), \dots, \delta_0^m(t)] \leq$$

$$\leq \varphi_m[t, 2r, \dots, 2r] \leq N = \frac{d \delta_0^m(t)}{dt}, \quad \delta_1^m(t) \leq \delta_0^m(t).$$

Следовательно,

$$\delta_1^i(t) \leq \delta_0^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Допустим, что

$$\delta_n^i(t) \leq \delta_{n-1}^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Из (3) имеем

$$\frac{d \delta_{n+1}^1(t)}{dt} = \varphi_1[t, \delta_n^1(t), \dots, \delta_n^m(t)] = \varphi_1[t, \delta_{n-1}^1(t), \dots, \delta_{n-1}^m(t)] =$$

$$= \frac{d \delta_n^1(t)}{dt},$$

$$\delta_{n+1}^1(t) \leq \delta_n^1(t).$$

Если

$$\delta_{n+1}^k(t) \leq \delta_n^k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

то

$$\frac{d \delta_{n+1}^m(t)}{dt} = \varphi_m[t, \delta_{n+1}^1(t), \dots, \delta_{n+1}^{m-1}(t), \delta_n^m(t)] \leq$$

$$\leq \varphi_m[t, \delta_n^1(t), \dots, \delta_n^{m-1}(t), \delta_n^m(t)] = \frac{d \delta_n^m(t)}{dt},$$

$$\delta_{n+1}^m(t) \leq \delta_n^m(t),$$

следовательно,

$$\delta_{n+1}^i(t) \leq \delta_n^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Применяя метод математической индукции, заключаем, что $\vec{\delta}_n(t)$ не возрастает.

Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость (5), так как справедливость (6) следует из того, что $\vec{\varepsilon}_n(t)$ и $\vec{\delta}_n(t)$ сходятся (так как они не возрастают и ограничены снизу) и задача (4) имеет только нулевое решение. Учитывая

$$\delta_0^i(t) = \varepsilon_0^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и предполагая

$$\delta_{n-1}^i(t) \leq \varepsilon_{n-1}^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

из (2), (3) и из того, что $\vec{\delta}_n(t)$ не возрастает, имеем

$$\frac{d \delta_n^i(t)}{dt} \leq \varphi_i[t, \delta_n^1(t), \dots, \delta_n^{i-1}(t), \delta_{n-1}^i(t), \dots, \delta_{n-1}^m(t)] \leq$$

$$\leq \varphi_i[t, \delta_{n-1}^1(t), \dots, \delta_{n-1}^{i-1}(t), \delta_{n-1}^i(t), \dots, \delta_{n-1}^m(t)] \leq$$

$$\leq \varphi_i[t, \varepsilon_{n-1}^1(t), \dots, \varepsilon_{n-1}^m(t)] = \frac{d \varepsilon_n^i(t)}{dt},$$

$$\delta_n^i(t) \leq \varepsilon_n^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Применяя метод математической индукции, получаем справедливость (5). Лемма доказана.

Последовательные приближения Пикара. Прежде чем исследовать сходимость приближений Зейделя, рассмотрим обычные последовательные приближения

$$\frac{d \vec{x}_n(t)}{dt} = \vec{f}[t, \vec{x}_{n-1}(t)], \quad \vec{x}_0(t) = \vec{x}_0, \quad \vec{x}_n(0) = \vec{x}_0. \quad (7)$$

Имеет место

Теорема 1. Пусть вектор-функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ определена и непрерывна по совокупности переменных в

$$R = [0, T] \times [x_0^1 - r, x_0^1 + r] \times \dots \times [x_0^m - r, x_0^m + r]$$

и

$$MT \leq r, \quad M = \max_{\substack{(t, x) \in R \\ 1 \leq i \leq m}} |f_i(t, \vec{x})|. \quad (8)$$

Пусть, кроме того, в R выполнено условие

$$|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})| \leq \vec{\varphi}(t, |\vec{x} - \vec{y}|),$$

где $\vec{\varphi}(t, u)$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда последовательность вектор-функций $\vec{x}_n(t)$, определенных равенствами (7), сходится к единственному решению задачи (1) причем скорость сходимости определяется следующим образом:

$$|\vec{x}_n(t) - \vec{x}(t)| \leq \vec{\varepsilon}_{n-1}(t), \quad (9)$$

где $\vec{\varepsilon}_n(t)$ определяется равенствами (2).

Доказательство. Из условия (8) следует, что $(t, \vec{x}_n(t)) \in R$. Для доказательства теоремы достаточно установить справедливость (9), так как из леммы будет следовать также сходимость приближений к решению (существование и единственность решения задачи (1) очевидны).

Пусть $\vec{v}_n(t) = |\vec{x}_n(t) - \vec{x}(t)|$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{v}_n(t) &\leq \int_0^t |\vec{f}[s, \vec{x}_{n-1}(s)] - \vec{f}[s, \vec{x}(s)]| ds \leq \int_0^t \varphi[s, |\vec{x}_{n-1}(s) - \vec{x}(s)|] ds, \\ \vec{v}_n(t) &\leq \int_0^t \varphi[s, \vec{v}_{n-1}(s)] ds, \quad \vec{v}_n(0) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При $n = 1$ имеем

$$\vec{v}_1(t) \leq \int_0^t \varphi[s, \vec{v}_0(s)] ds \leq \int_0^t \varphi[s, 2r\vec{e}] ds \leq Nt\vec{e} = \vec{\varepsilon}_0(t),$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор.

Допустим, что

$$\vec{v}_n(t) \leq \vec{\varepsilon}_{n-1}(t).$$

Тогда из (10)

$$\vec{v}_{n+1}(t) \leq \int_0^t \varphi[s, \vec{v}_n(s)] ds \leq \int_0^t \varphi[s, \vec{\varepsilon}_{n-1}(s)] ds = \vec{\varepsilon}_n(t).$$

Применяя метод математической индукции, утверждаем справедливость (9) при всех n .

Последовательные приближения Зейделя. Перейдем к вопросу о сходимости последовательных приближений Зейделя

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_n^i(t)}{dt} &= f_i[t, y^1(t), \dots, y_n^{i-1}(t), y_{n-1}^i(t), \dots, y_{n-1}^m(t)], \\ y_0^i(t) &= x_0^i, \quad y_0^i(0) = x_0^i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

к решению задачи (1).

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда последовательности вектор-функций $\vec{x}_n(t)$, определенные равенствами (11), сходятся к единственному решению задачи (1), причем скорость сходимости определяется следующим образом:

$$|\vec{y}_n(t) - \vec{x}(t)| \leq \vec{\delta}_{n-1}(t), \quad (12)$$

где $\vec{\delta}_n(t)$ определены равенствами (3).

Доказательство. Из условия (8) следует, что $(t, \vec{x}_n(t)) \in R$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Действительно, пусть $(t, \vec{y}_{n-1}(t)) \in R$ и докажем, что $(t, \vec{y}_n(t)) \in R$. Имеем

$$|y_n^1 - x_0^1| \leq \int_0^t |f(s, x_0^1, \dots, x_0^m)| ds \leq MT \leq r.$$

Допустим, что $|y_n^\kappa - x_0^\kappa| \leq r$ ($\kappa = 0, 1, \dots, m-1$). Тогда

$$|y_n^m - x_0^m| \leq \int_0^t |f_m[s, y_n^1(s), \dots, y_n^{m-1}(s), y_{n-1}^m(s)]| ds \leq MT \leq r,$$

т. е. $(t, \vec{y}_n(t)) \in R$. Применяя метод математической индукции, утверждаем, что при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем $(t, \vec{y}_n(t)) \in R$.

Теперь докажем (12). Отсюда в силу леммы будет следовать и сходимость $\vec{y}_n(t)$. Пусть $W_n^i(t) = |y_n^i(t) - x^i(t)|$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Тогда

$$\begin{aligned} W_n^i(t) &\leq \int_0^t |f_i[s, y_n^1(s), \dots, y_n^{i-1}(s), y_{n-1}^i(s), \dots, y_{n-1}^m(s)] - \\ &\quad - f_i[s, x^1(s), \dots, x^{i-1}(s), x^i(s), \dots, x^m(s)]| ds \leq \\ &\leq \int_0^t \varphi_i[s, |y_n^1(s) - x^1(s)|, \dots, |y_n^{i-1}(s) - x^{i-1}(s)|, y_{n-1}^i(s) - \\ &\quad - x^i(s)|, \dots, |y_{n-1}^m(s) - x^m(s)|] ds, \end{aligned} \quad (13)$$

$$W_n^i(t) \leq \int_0^t \varphi_i[s, W_n^1(s), \dots, W_n^{i-1}(s), W_n^i(s), \dots, W_{n-1}^m(s)] ds$$

$$(i = 1, 2, \dots, m).$$

Очевидно, что $W_1^i(t) \leq \delta_0^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

Допустим, что

$$W_{n-1}^i(t) \leq \delta_{n-2}^i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Тогда из (13)

$$W_n^i(t) \leq \int_0^t \varphi_i[s, W_{n-1}^1(s), \dots, W_{n-1}^m(s)] ds \leq \int_0^t \varphi_i[s, \delta_{n-2}^1(s), \dots, \delta_{n-2}^m(s)] ds \leq \delta_{n-1}^i(t).$$

Пусть $W_n^\kappa(t) \leq \delta_{n-1}^\kappa(t)$ ($\kappa = 1, \dots, m-1$). Тогда из (13)

$$\begin{aligned} W_n^m(t) &\leq \int_0^t \varphi_m[s, W_n^1(s), \dots, W_n^{m-1}(s), W_{n-1}^m(s)] ds \leq \\ &\leq \int_0^t \varphi_m[s, \delta_{n-1}^1(s), \dots, \delta_{n-1}^{m-1}(s), \delta_{n-1}^m(s)] ds = \delta_{n-1}^m(t), \end{aligned}$$

следовательно,

$$W_n^i(t) \leq \delta_{n-1}^i(t).$$

В силу метода математической индукции утверждаем, что при всех n

$$|\vec{W}_n(t)| \leq \vec{\delta}_{n-1}(t),$$

что и требовалось доказать.

Замечания: 1. Заметим, что последовательные приближения Зейделя сходятся к решению быстрее, чем обычные последовательные приближения. Это следует из того, что (в силу леммы) $\vec{\delta}_n(t) \leq \vec{\varepsilon}_n(t)$.

2. Далее заметим, что, если положить

$$\varphi_i(t, u^1, \dots, u^m) = L \sum_{j=1}^m u^j \quad (L > 0, LmT \leq 1, 0 \leq u^i \leq 2r),$$

то результаты работы [1], как частный случай, следуют из теоремы 2.

3. Наконец заметим, что результаты этой статьи можно перенести на дифференциальные уравнения в банаховых пространствах (см. [2, 3]) и интегральные уравнения [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Глебов Е. П., Потаненко А. А. „Изв. вузов, математика“ № 5, 1963.
2. Wazewski T. Sur une extensions du procede de J. Jungman pour etablir la convergence des approximations successives, Bull. de L'Academie Poion. des selense Ser. des sci. Math., astr. et phys., Vol. VIII, № 1, 1960.
3. Кибенко А. В., Красносельский М. А., Мамедов Я. Д. „Уч. зап. АГУ“, № 3, 1961.
4. Мамедов Я. Д. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук“, №1, 1962.

Поступило 8. XII 1968

Я. Ч. Мамедов

Зејдел ардычыл жахынлашмаларынын ади диференсиал тэнликлэри системинин хэллинэ жыгылмасы наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Зејдел ардычыл жахынлашмаларынын диференсиал тэнликләр системинин хэллинэ жыгылмасы үчүн кафи шэртләрден бәһс олунур. Исбат едилир ки, бу жахынлашмаларын жыгылма сүр'әти ардычыл жахынлашмаларын жыгылма сүр'әтиндән жахшыдыр.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә рижәзијјат елмләри серијасы, 1969, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 2

Д. В. САЛЕХОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ФУНКЦИЙ ИЗ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА-ОРЛИЧА

Банахово пространство E измеримых функций на $[0, 1]$ называют симметрическим, если: 1) из $|x(t)| \leq |y(t)|$ и $y(t) \in E$ вытекает $\|x\|_E \leq \|y\|_E$; 2) из $x(t) \in E$ и равноизмеримости функций $|x(t)|$ и $|y(t)|$ следует $\|x\|_E = \|y\|_E$. Всякое симметрическое пространство E выражается формулой $\|x_e\|_E = \varphi(me)$, где $x_e(t)$ — характеристическая функция измеримого множества $e \subset [0, 1]$, определяющая функцию $\varphi(t)$, называемую фундаментальной. Будем предполагать, что фундаментальная функция $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ и вогнута.

Пусть E' — двойственное к E пространство, т. е. E' — класс таких функций $y(t)$, что для любой функции $x \in E$

$$\int_0^1 x(t) y(t) dt < \infty.$$

Известно, что общий вид линейного функционала в E_0 , где E_0 — замыкание в пространстве E множества ограниченных функций, является интегральным и сопряженное к E_0 пространство E_0^* совпадает с E' . Обозначим через R_E линейное множество функций $x \in E_0$ таких, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|x_{(0,h)}\|_E}{\|x_{(0,h)}\|_E} = 0, \quad (1)$$

где $x_{(0,h)}(t)$ — характеристическая функция интервала $(0, h)$.

Если для функции $x \in E$ в точке $t = t_0$ выполняется

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|[x(t) - x(t_0)] x_{(t_0-h, t_0+h)}(t)\|_E}{\|x_{(t_0-h, t_0+h)}(t)\|_E} = 0,$$

то точка $t = t_0$ называется точкой Лебега — Орлича функции $x(t)$ [1]. Соотношение (1) означает, что в класс R_E входят те и только те функции $x(t)$ из E_0 , которые обращаются в нуль при $t = 0$ и для которых точка $t = 0$ является точкой Лебега — Орлича.

В работе [2] Б. И. Коренблюм сформулировал необходимое и достаточное условие представимости в точках Лебега функций $x \in L_p \times \times (p > 1)$ сингулярным интегралом:

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(t, s) x(s) ds. \quad (2)$$

В аналогичной форме К. Танбером [3] и Р. Таберским [4] были найдены необходимые и достаточные условия представимости формулой (2) функций из пространства L_p ($p \geq 1$) и Орлича в точках Лебега-Орлича. Ниже доказывается теорема 3, из которой результат Р. Таберского вытекает как следствие. Основой доказательства теоремы 3 является схема, изложенная Б. И. Коренблумом в упомянутой выше работе. Результаты этой статьи были опубликованы без доказательства [1].

Пусть $x \in R$. Положим

$$\|x\|_{R_E} = \sup_{0 < h < 1} \frac{\|x_{(0, h)}\|_E}{\|x_{(0, h)}\|_E}. \quad (3)$$

Пространство R_E полное. Докажем это. Пусть

$$\|x_n - x_m\|_{R_E} \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty$$

т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sup_{0 < h < 1} \frac{\|(x_n - x_m)_{(0, h)}\|_E}{\|x_{(0, h)}\|_E} = 0. \quad (4)$$

При $h = 1$ имеем, в частности,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_E = 0.$$

Так как E —полное пространство, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t) \in E_0$. Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0 < h < 1} \frac{1}{\varphi(h)} \|(x_n - x_m)_{(0, h)}\|_E < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

при $n, m > n_0(\varepsilon) = n_0$. Переходя к пределу в (5), при $m \rightarrow \infty$ получим

$$\sup_{0 < h < 1} \frac{1}{\varphi(h)} \|(x_n - x_0)_{(0, h)}\|_E < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Пусть $n > n_0$. Так как точка $t = 0$ для функции $x_n(t)$ является точкой Лебега-Орлича, то при $h < h_0(\varepsilon)$

$$\frac{\|x_n_{(0, h)}\|_E}{\varphi(h)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (7)$$

Пользуясь выражениями (6) и (7), при фиксированном $n > n_0$ и любом $h < h_0$ получим

$$\frac{\|x_0_{(0, h)}\|_E}{\varphi(h)} \leq \frac{\|(x_0 - x_n)_{(0, h)}\|_E}{\varphi(h)} + \frac{\|x_n_{(0, h)}\|_E}{\varphi(h)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $x_0 \in R_E$. Из (6) вытекает

$$\|x_0 - x_n\|_{R_E} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

Полнота пространства R_E доказана.

Теорема 1. Пусть функция $K(t)$ такая, что для любой функции $x \in R_E$ существует

$$J(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 K(t) x(t) dt. \quad (8)$$

Тогда $J(x)$ —линейный функционал в R_E .

Доказательство. Обозначим

$$J_h(x) = \int_h^1 x^*(t) K(t) dt; \quad x \in R_E.$$

Функция $K(t) x_{(h, 1)}(t)$ —линейный функционал в E_0 . Следовательно,

$$\begin{aligned} |J_h(x)| &\leq \|x_{(h, 1)}\|_E \|K_{(h, 1)}\|_{E_0^*} \leq \|x\|_E \|K_{(h, 1)}\|_{E_0^*} = \\ &= \|x_{(0, 1)}\|_E \frac{\|x\|_E}{\|x_{(0, 1)}\|_E} \|K_{(h, 1)}\|_{E_0^*} \leq \varphi(1) \|x\|_{R_E} \|K_{(h, 1)}\|_{E_0^*}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что при любом h интеграл $J_h(x)$ —линейный функционал в R_E . Соотношение (8) означает, что последовательность функционалов J_h сходится при $h \rightarrow 0$ на любом элементе $x \in R_E$. По теореме Банаха—Штейнгауса $J(x)$ —линейный функционал в R_E . Теорема доказана.

Обозначим через $\|J\|_R$ норму функционала $J(x)$ в R_E . Пусть $h_0 = 1$ и число $q < 1$. Обозначим через h_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) числа, определенные следующими формулами:

$$h_{n+1} = \varphi^{-1}[q\varphi(h_n)]. \quad (9)$$

Так как функция $\varphi(t)$ вогнута, то из (9) следует, что $h_n \leq q^n h_0$ и, следовательно, $h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $C(K)$ следующее выражение:

$$C(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(h_n) \|K_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*}.$$

Лемма 1. Имеет место следующее неравенство:

$$q(1-q)C(K) \leq \|J\|_R \leq C(K). \quad (10)$$

Доказательство. Докажем правую часть неравенства (10). Пусть $x \in R_E$ и $C(K) < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |J(x)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \int_{h_{n+1}}^{h_n} x(t) K(t) dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_{(h_{n+1}, h_n)}\|_E \|K_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_{(0, h_n)}\|_E \|K_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(h_n) \|K_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} \|x\|_{R_E}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|J\|_R \leq \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(h_n) \|K_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} = C(K).$$

Правая часть неравенства (10) доказана. Докажем левую часть. Пусть $\|J\| < \infty$. Тогда

$$\int_{h_{n+1}}^{h_n} x(t) K(t) dt < \infty$$

для любого $x \in E_0$ и поэтому

$$K(t) x_{(h_{n+1}, h_n)}(t) \in E_0^* \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Пусть $x_n(t)$ —такие функции из E_0 , то при любом n

$$\|x_n x_{(h_{n+1}, h_n)}\|_E = 1 \quad (11)$$

и

$$\left| \int_{h_{n+1}}^{h_n} x_n(t) K(t) dt \right| \geq \| Kx_{(h_{n+1}, h_n)} \|_{E_0^*} - \varepsilon. \quad (12)$$

При этом $x_n(t)$ будем считать равной нулю вне интервала (h_{n+1}, h_n) . Возьмем функцию

$$x_p^*(t) = \begin{cases} \varphi(h_n) |x_n| \operatorname{sign} K(t), & t \in (h_{n+1}, h_n), \\ 0, & t \in (0, h_{p+1}). \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, p,$$

Функция $x_p^* \in R_E$. Покажем это. Пусть $0 < h \leq 1$ и s — такое число, что $h_{s+1} < h \leq h_s$. Пользуясь (9) и (11), находим

$$\begin{aligned} \frac{\|x_p^* x_{(0, h)}\|_E}{\varphi(h)} &\leq \frac{\|x_p^* x_{(0, h_s)}\|_E}{\varphi(h_{s+1})} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varphi(h_{s+1})} \sum_{n=s}^p \|x_n x_{(h_{n+1}, h_n)}\|_E \varphi(h_n) \leq \\ &\leq \frac{1}{\varphi(h_{s+1})} \sum_{n=s}^p \varphi(h_n) \leq \frac{1}{\varphi(h_{s+1})} \sum_{n=s}^{\infty} \varphi(h_n) \leq \\ &\leq \frac{\varphi(h_s)}{\varphi(h_{s+1})} (1 + q + q^2 + \dots) = \frac{1}{q(1-q)}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|x_p^*\|_{R_E} \leq \frac{1}{q(1-q)}$$

при любом p . Снова, пользуясь (11) и (12), получим

$$\begin{aligned} \|J\|_R \|x_p^*\|_{R_E} &\geq \left| \int_0^1 x_p^*(t) K(t) dt \right| = \\ &= \sum_{n=0}^p \varphi(h_n) \int_{h_{n+1}}^{h_n} |x_n(t) K(t) dt| \geq \\ &\geq \sum_{n=0}^p \varphi(h_n) \|Kx_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} - \varepsilon \sum_{n=0}^p \varphi(h_n). \end{aligned}$$

Из (9) следует, что

$$\sum_{n=0}^p \varphi(h_n) = \varphi(h_0) \sum_{n=0}^p q^n < \frac{\varphi(h_0)}{1-q},$$

поэтому

$$\|J\|_R \|x_p^*\|_{R_E} \geq \sum_{n=0}^p \varphi(h_n) \|Kx_{(h_{n+1}, h_n)}\|_{E_0^*} \frac{\varphi(h_0)}{1-q}.$$

Так как p и ε произвольны, то из полученного неравенства следует левая часть неравенства (10). Лемма доказана. Из леммы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Общий вид линейного функционала в R_E может быть задан следующей формулой:

$$J(x) = \int_0^1 x(t) K(t) dt,$$

где $K(t)$ — такая функция, что при любом h функция $K(t) x_{(h, 1)}(t)$ принадлежит пространству E_0^* и имеет место неравенство (10).

Доказательство. Пусть $J(x)$ — линейный функционал в R_E . Тогда $J(x)$ — линейный функционал на $P_h R_E$, где P_h — оператор проектирования: $P_h x = x(t) x_{(h, 1)}(t)$ ($x(t) \in R_E$).

Если $x \in P_h R_E$, то

$$\begin{aligned} \|x\|_{R_E} &= \sup_{0 < \tau < 1} \frac{\|x x_{(h, \tau)}\|_E}{\|x_{(0, \tau)}\|_E} = \\ &= \sup_{h < \tau < 1} \frac{\|x x_{(h, \tau)}\|_E}{\|x_{(0, \tau)}\|_E} \leq \frac{\|x x_{(h, 1)}\|_E}{\varphi(h)}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\|x\|_{R_E} \leq \frac{1}{\varphi(h)} \|x x_{(h, 1)}\|_E. \quad (13)$$

Из неравенства (13) следует, что линейный функционал на $P_h R_E$ является линейным функционалом на $P_h E_0$. Но всякий линейный функционал на $P_h E_0$ можно расширить с сохранением нормы на пространство E_0 . В E_0 линейный функционал имеет интегральный вид. Следовательно, на подпространстве $P_h R_E$ функционал $J(x)$ имеет вид

$$J(x) = \int_h^1 K_h(t) x(t) dt,$$

причем $K_h(t) = K(t) x_{(h, 1)}(t) \in E_0^*$, где $K(t)$ — некоторая функция.

Так как для любого $x \in R_E$

$$\|x - x x_{(h, 1)}\|_{R_E} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

то для любого $x \in R_E$

$$J(x) = \int_0^1 K(t) x(t) dt. \quad (14)$$

При этом, как уже установлено, при любом h функция

$$K(t) x_{(h, 1)}(t) \in E_0^*$$

и на основании леммы 1

$$C(K) < \infty.$$

Пусть функция $K(t)$ такая, что при любом h функция

$K(t) x_{(h, 1)}(t) \in E_0^*$ и $C(K) < \infty$. Из леммы 1 при этих условиях следует, что (14) — линейный функционал в R_E . Теорема доказана. Положим

$$J_n(x) = \int_0^1 K_n(t) x(t) dt.$$

Теорема 3. Для любой функции $x \in E_0$, для которой точка $t=0$ является точкой Лебега — Орлича, имеет место соотношение

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x) \quad (15)$$

тогда и только тогда, когда:

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h K_n(t) dt = 1$$

при любом h , $0 < h \leq 1$;

2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \varphi(h_v) \|K_n z_{(h_v+1, h_v)}\|_{E_0^*} < \infty,$$

где числа h_v удовлетворяют (9) при $q < 1$ и $h_0 = 1$.

Доказательство необходимости. Пусть для любой функции $x \in E_0$, для которой точка $t=0$ является точкой Лебега-Орлича, имеет место (15). Полагая $x_h(t) = z_{(0, h)}(t)$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^h K_n(t) dt = 1$$

при любом h ; $0 < h \leq 1$, т. е. выполнено первое условие теоремы. По предположению для любого $x \in R_E$ при фиксированном n

$$J_n(x) = \int_0^1 K_n(t) x(t) dt < \infty.$$

Из этого на основании теоремы 1 следует, что $J(x)$ — линейный функционал в R_E . Так как по условию теоремы последовательность линейных функционалов $J_n(x)$ сходится на любом элементе $x \in R_E$, то нормы $\|J_n(x)\|_R$ равномерно ограничены. Далее, применяя теорему 2, убеждаемся, что выполнено второе условие теоремы. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть для последовательности ядер $K_n(t)$ выполнены первое и второе условия теоремы. Соотношение (15) будет иметь место для любой функции $x \in E_0$, для которой $t=0$ является точкой Лебега-Орлича, если оно имеет место для любой функции $x \in R_E$. Действительно, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\| [x(t) - x(0)] z_{(0, h)} \|_E}{\| z_{(0, h)} \|_E} = 0,$$

то

$$x_0(t) = [x(t) - x(0)] \in R_E$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(t) x_0(t) dt = 0 \quad (16)$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(t) x(t) dt = x(0) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(t) dt = x(0).$$

Второе условие теоремы означает, что J_n — линейный функционал в R_E (следует из теоремы 2) при любом n и нормы последовательности функционалов J_n равномерно ограничены.

В силу равномерной ограниченности норм J_n соотношение (16) будет иметь место для любой функции $x \in R$, если оно выполняется на некотором плотном в R множестве. Множество функций вида $x(t) z_{(h, 1)}(t)$, где $x(t) \in R_E$, $h > 0$, плотно в R_E . Пусть $h > 0$ фиксировано. В подпространстве $P_h R_E$ пространства R_E множество ступенчатых функций всюду плотно. Так как из первого условия теоремы вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} K_n(t) dt = 0$$

при любых α, β ($0 < \alpha < \beta \leq 1$), то на любой ступенчатой функции (16) выполнено. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салехов Д. В. „ДАН СССР“, т. 175, № 5, 1967.
2. Коренблум Б. И. „ДАН СССР“, т. LVIII, № 6, 1947.
3. Tandori K. Über die Konvergenz singulärer Intergrale, Acta Scient. Math. Szeged 15 (1954), str. 223—230.
4. Taberski R. O zbieznosci calek osobliwych w punktach Lebesgue'a—Orlicza pewnych funkcyi, Roczn. Polsk. towarz., mat. Ser. I, Prace mat.; 5, 33 (1961).

Поступило 30. XI 1968

Д. В. Салехов

Симметрик фазалардан олан функцијаларын Лебег-Орлич нөгтэлэриндэ сингулјар интегралларла тэсвири

ХҮЛАСЭ

Тутаг ки, $x(t)$ симметрик фазадан көтүрүлмүш функция $t=0$ исэ бу функция үчүн Лебег-Орлич нөгтәсидир.
Мәгаләдә

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 K_n(t) x_0(t) dt$$

тәсвиринин доғрулуғу үчүн зәрури вә кафи шәртләр тапылып.

УДК 687. 335. 713

Я. Б. КАДЫМОВ, З. Я. КУЛИЕВ, С. И. МЯЧИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

Вычислительные машины непрерывного действия (ВМНД) широко используются для решения задач в различных областях науки и техники. Основным назначением ВМНД является решение обыкновенных дифференциальных уравнений. При реализации дифференциальных уравнений на ВМНД полученное решение несколько отличается от точного решения исходного (оригинального) дифференциального уравнения. Погрешность в решениях дифференциальных уравнений является результатом изменения корней характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению, из-за несовершенства реальных решающих блоков. Изменение корней характеристического уравнения в некоторых случаях может привести к изменению качественного характера решения, что и являлось предметом исследования в настоящей работе.

Изменение характера решения на ВМНД проследим на примере дифференциального уравнения, решение которого имеет колебательный характер с постоянной амплитудой. Вследствие сдвига корней характеристического уравнения решение такого дифференциального уравнения на ВМНД может быть либо затухающим, либо расходящимся. Очевидно, затухающее решение не приведет к неустойчивости структурной схемы, а только уменьшит точность решения. Однако расходящееся решение приведет к неустойчивости, что вызовет повышение напряжения на выходах усилителей за пределы линейного диапазона.

Как было указано выше, сдвиг корней обусловлен несовершенством используемых решающих блоков. Эти несовершенства можно учесть, если дополнить обычную схему решающего усилителя паразитными емкостями и сопротивлениями утечек. На рисунке показана

схема реального операционного усилителя, передаточной функцией которого будет

$$\kappa(p) = \frac{z_f(p)}{z_i(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{G(p)} \left(1 + \frac{z_f(p)}{z_i(p)} + \frac{z_f(p)}{z_s(p)} \right)}, \quad (1)$$

где $z_f(p)$ — импеданс обратной связи усилителя,
 $z_i(p)$ — импеданс входной цепи,
 $z_s(p)$ — импеданс цепи утечки,
 $G(p)$ — передаточная функция операционного усилителя по прямому каналу.

Имея в виду, что $C_1 \approx 0$, для импедансов получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} z_1 &= R_i, \\ z_f &= \frac{R_f}{1 + pR_fC_f}, \\ z_s &= \frac{R_s}{1 + pR_sC_s}. \end{aligned} \quad (2)$$

С достаточной степенью точности передаточную функцию можно представить в виде

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + pT_0}, \quad (3)$$

где G_0 — коэффициент усиления операционного усилителя на нулевое частоте,

T_0 — постоянная времени операционного усилителя.

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим

$$\kappa(p) = - \frac{\frac{R_f}{R_i}}{\gamma p^2 + \beta p + \alpha}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{1}{G_0} \left(1 + \frac{R_f}{R_i} + \frac{R_f}{R_s} \right), \\ \beta &= R_f C_f + \frac{T_0}{G_0} \left(1 + \frac{R_f}{R_i} + \frac{R_f}{R_s} \right) + \frac{1}{G_0} (R_f C_f + R_f C_s), \\ \gamma &= \frac{T_0}{G_0} (R_f C_f + C_s R_f). \end{aligned}$$

Учитывая $G \gg 1$ и пренебрегая малыми членами $\left(\frac{1}{G_0} R_f C_s \ll 1 \right)$, выражения для коэффициентов α , β , γ упрощаются и принимают следующий вид:

а) для сумматора

$$\begin{aligned} \alpha_c &\approx 1, \\ \beta_c &\approx R_f C_f + \frac{T_0}{G_0} \left(1 + \frac{R_f}{R_i} + \frac{R_f}{R_s} \right); \\ \gamma_c p^2 &\ll 1 \end{aligned}$$

для частот от 0 до сотен кГц.

б) для интегратора

$$\alpha_u \approx \frac{1}{R_y C} + \frac{1}{G_0} \frac{1}{R_i C},$$

$$\beta_u \approx 1,$$

$$\gamma_u \approx \frac{T_0}{G_0},$$

где R_v — сопротивление утечки интегрирующего конденсатора C .
Учитывая вышеизложенное, передаточные функции будут:

а) для сумматора

$$\kappa_c(p) = - \frac{\frac{R_f}{R_i}}{1 + pT_s}, \quad (5)$$

где $T_s = \beta_c$ — постоянная времени сумматора;

б) для интегратора

$$\kappa_u(p) = - \frac{\frac{T_f}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}}{\frac{1}{R_i C}}, \quad (6)$$

где T_1 — низкочастотная постоянная времени интегратора,

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{R_y C} + \frac{1}{G_0} \frac{1}{R_i C};$$

T_2 — высокочастотная постоянная времени интегратора,

$$T_2 = \frac{T_0}{G_0}.$$

Анализ выражений (5) и (6) показывает, что реальные передаточные функции сумматора и интегратора на порядок выше соответствующих идеальных передаточных функций. Поэтому при решении дифференциальных уравнений m -го порядка на ВМНД фактически решаются уравнения более высокого порядка. В работе [1] показано, что при этом, помимо появления дополнительных корней, корни характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению, претерпевают сдвиги. Дополнительные корни определяются членами вида $-\frac{1}{T_1}$ и $-\frac{1}{T_2}$. Поэтому, если T_1 и T_2 до-

статочно малы, то соответствующие им решения дифференциального уравнения будут быстро затухать.

Сдвиг в корнях характеристического уравнения проследим на примере дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0, \quad (7)$$

так как его решение представляет незатухающее гармоническое колебание и малая погрешность решающих элементов сказывается на качественном характере процесса. Для рассматриваемого уравнения (7) сдвиг будет [2]

$$e = \omega^2 \left(T_2 + \frac{T_s}{2} \right) - \frac{1}{T_1}, \quad (8)$$

где ω — частота решения.

Таким образом выражение (8) дает возможность определять предельную частоту, при которой решение становится неустойчивым, т. е. начиная с которой решение уравнения (7) получается расходящимся. Для этого, полагая в выражении (8) $e = 0$, найдем

$$\omega_{пр}^2 = \frac{1}{T_1 \left(T_2 + \frac{T_s}{2} \right)}. \quad (9)$$

Учитывая, $T_s \approx 3T_2$, выражение примет вид

$$\omega_{пр}^2 = \frac{1}{2,5 T_1 T_2}. \quad (10)$$

При решении уравнения (7) на ВМНД типа МПТ-9-2 при следующих параметрах усилителя У-3М:

$$G_0 = 10^8, \quad R_f = 1 \text{ Мом}, \quad R_i = 1 \text{ Мом}, \quad R_s = 1 \text{ Мом}$$

$$C_f \approx 0, \quad C = 10^{-6} \text{ ф}, \quad R_v = 10^5 \text{ Мом}, \quad T_0 = 100 \text{ сек}$$

величина предельной частоты, вычисленная по формуле (10), $\omega_{пр}^2 = 4$. Значение предельной частоты, найденное экспериментально $\omega_{пр.э}^2 = 3,35$.

Выражение (8) позволяет исследовать влияние различных паразитных параметров на устойчивость структурной схемы. Рассмотрим влияние сопротивления утечки интегрирующего конденсатора на устойчивость решения. При выводе выражений (5) и (6) полагалось, что $R_y \gg 1$ и $R_y \gg R_i$. Из выражения (8) видно, что беспредельное увеличение R_y не увеличивает устойчивость структурной схемы. Так если $R_y \rightarrow \infty$ (при неизменных значениях T_1 и T_2), сдвиг корня станет положительным. Для получения устойчивости структурной схемы вплоть до частоты $\omega_{пр}$ выражение для R_y будет иметь вид

$$R_y = \frac{G_0}{2,5 C \omega_{пр}^2 T_0}. \quad (11)$$

Например, для получения $\omega_{пр}^2 = 40$ величина $R_y = 10^{10} \text{ ом}$, что на порядок ниже сопротивления утечки используемого интегрирующего конденсатора.

Выводы

1. Предложена методика оценки устойчивости структурных схем, набираемых на ВМНД.
2. Получено выражение для предельного значения частоты решения на ВМНД.
3. Получено выражение для предельного значения сопротивления утечки интегрирующего конденсатора при данных параметрах решающих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маснее А. В. Some Limitations on the accuracy of Electronic Differential Analyzers. Proc. J. R. E; 40, № 3, March, 1952.
2. Certain errors in Electronic Differential Analyzers: I Bandwidth Limitations Trans. J. R. E, vol. EC-6, № 4, 1957.

Поступило 13. VI 1968

Фасиләсиз типли һесаблајычы машинларда һәлл олуна
диференсиал тәнликләрин һәллинин
дајаныглыгы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгалә фасиләсиз типли һесаблајычы машинларда диференсиал тәнликләрин һәлли заманы бурахылан хәтаны һәлледиши гурғуларын параметрләриндән асылы олараг һесабламаға имкан верән ифадәнин анализинә һәср едилир.

Мәгаләдә тәклиф едилмиш метод васитәсилә фасиләсиз типли һесаблајычы машинларын критик тезлији вә интеграллајычы конденсаторун ахма мугавимәтинин оптимал гијмәти тәјин едилмишдир.

УДК 621. 3. 082. 73

М. С. КАСИМЗАДЕ

СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТОРОНЫ
ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

В [1, 2, 3] описывается принцип работы, устройство и указывается область применения электрокинетических измерительных преобразователей (ЭКП). При преобразовании неэлектрических величин в электрический сигнал ЭКП работает в генераторном режиме. Обладая свойством обратимости, преобразователь может функционировать и в двигательном режиме, преобразуя электрический сигнал на входе в механическое движение на выходе. В обоих режимах работы электрокинетические преобразователи можно отнести к электромеханическим, точнее к электрогидромеханическим системам.

Для исследования свойств, разработки метода расчета электрокинетических преобразователей важен правильный выбор электрической схемы замещения его электрической стороны. В генераторном режиме, являясь источником электрической энергии, ЭКП может быть представлен источником э.д.с. или тока.

Представление источника электрической энергии той или иной схемой замещения формально зависит от режима его работы, определяемого соотношением между сопротивлением нагрузки (z_n) и внутренним сопротивлением ($z_{вн}$) источника [4]. На наш взгляд, при выборе схемы замещения источника необходимо также учитывать принцип генерирования электрической энергии, на что в известной литературе не обращается должного внимания.

Электрокинетические преобразователи отличаются достаточно высоким значением внутреннего сопротивления, порядка десятков и сотен *ком*. Исходя из этого, а также из принципа работы и поведения преобразователя в режимах „холостого хода“ и „короткого замыкания“, следует, что электрокинетический преобразователь в генераторном режиме должен представляться источником тока.

Действительно, как видно из рис. 1, потенциал протекания между электродами ЭЭ в отдельном капилляре, в соответствии с ионной теорией, обусловлен конвективным поверхностным током I_1 , вызванным движением ионов диффузной части двойного слоя под воздействием внешнего давления $p(t)$. В стационарном режиме, при отсутствии нагрузки, ток I_1 по величине равен объемному току I_2 , протекающему под воздействием потенциала протекания по внутреннему сопротивлению жидкости ($z_{вн}$) в обратном направлении. В режиме нагрузки сопротивление $z_{вн}$, состоящее из активной и емкостной сла-

гаемых, и сопротивление нагрузки (z_n) оказываются подключенными к электродам параллельно (рис. 2). Если источник энергии—электрическая сторона ЭКП при этом представлен не источником тока, а источником напряжения (э.д.с.), то при коротком замыкании на клеммах напряжение между ними, следовательно, и токи на нагрузке

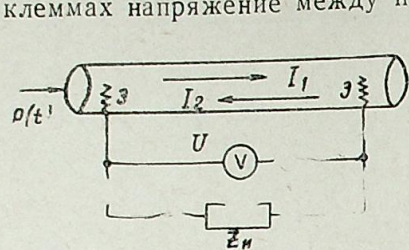


Рис. 1

и на внутреннем сопротивлении, падали бы до нуля, что противоречит действительному положению. В реальном преобразователе при коротком замыкании на клеммах $U=0$, $I_2=0$, но $I_{кз}=I$ (рис. 2), т. е. весь генерируемый источником ток I протекает к месту короткого замыкания.

В соответствии со схемой рис. 2 при холостой работе преобразователя $I=I_1=I_2$; при работе же с нагрузкой происходит перераспределение тока между $z_{вн}$ и z_n . Напряжение на клеммах преобразователя при нагрузке будет $U=I_2 z_{вн}=I_n z_n=I \frac{z_n \cdot z_{вн}}{z_n + z_{вн}}$.

При $z_n \gg z_{вн}$ $U \cong I z_{вн}$, т. е. напряжение на клеммах преобразователя будет сохраняться приблизительно постоянным при изменениях нагрузки. Следовательно, для обеспечения минимального изменения напряжения на клеммах ЭКП необходимо соблюдать условие $z_n \gg z_{вн}$. Представляет интерес раскрыть характер внутреннего сопротивления $z_{вн}$ ЭКП.

На рис. 3, а представлена полная схема электрической цепи ЭКП, а на рис. 3, б—элементы преобразователя, поясняющие эту схему.

При этом приняты обозначения:

ЭЭ — электроды ЭКП из перфорированного металла;

ПП — пористая перегородка;

АА — слой жидкости между электродами и поверхностью пористой перегородки;

r — активное сопротивление капилляров, заполненных жидкостью (рис. 3, в);

r_1 , r_1 —активное сопротивление слоя жидкости АА;

r_2 , r_2 —активное сопротивление перехода жидкость—электрод (рис. 3, в);

C_1 , C_1 —емкость каждого электрода по отношению к жидкости;

C —межэлектродная емкость ЭКП.

Переходные сопротивления r_1 , r_1 могут быть доведены до весьма незначительных величин сближением электродов к поверхности пористой перегородки и доведены до нуля, например, металлизацией поверхности перегородки. Поэтому ими практически можно пренебречь. Что касается частичных емкостей C_1 , C_1 , то независимо от способа выполнения электродов они будут иметь значительную величину, достигающую до 30—35 мкф/см² [5.]

Сопротивление r , приближенно может быть определено из зависимости $r \cong \frac{h}{\lambda_0 W S_n}$, где h , W , S_n —соответственно, толщина, пористость и площадь пористой перегородки, λ_0 —удельная электропровод-

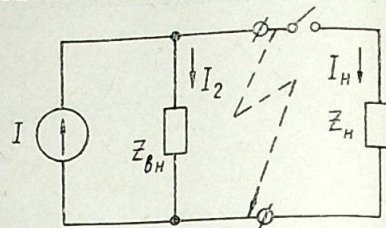


Рис. 2

ность жидкости. Сопротивления r_2 , r_2 обусловлены переходом зарядов от жидкости к электроду, т. е. разрядом ионов на электродах, и зависят от частоты. Эти сопротивления являются как бы сопротивлениями утечки конденсаторов емкостью C_1 , C_1 . Сопротивления r_1 , r_2 , r_2 и емкости C_1 , C_1 , будучи соединенными последовательно с сопротивлением жидкости r , будут ограничивать ток нагрузки. Межэлектродная емкость C относительно мала. Как показали наши измерения, эта емкость имеет порядок сотни пикофард. В зависимости от

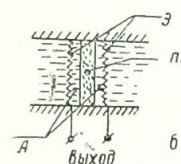
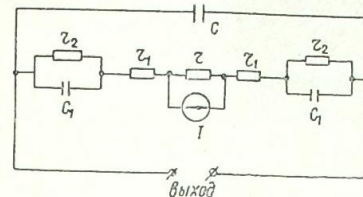


Рис. 3

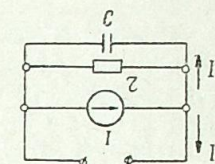
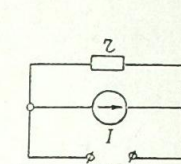
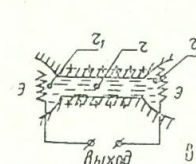


Рис. 4

рабочего частотного диапазона эквивалентная схема рис. 3, а может быть упрощена.

В области низких и инфранизких частот сопротивления r_2 , r_2 малы, поэтому ими, по сравнению с r , можно пренебречь. С другой стороны, в области таких частот шунтирующее влияние емкости C будет незначительным, а сопротивления $x_{c1} = \frac{1}{\omega C_1}$, обусловленные емкостями C_1 , C_1 , будут большими. Малые сопротивления r_2 , r_2 будут шунтировать емкостные сопротивления x_{c1} и сводить их ограничивающие влияния до минимума.

Исходя из этого, для области низких и инфранизких частот схема рис. 3, а может быть приведена к виду, показанному на рис. 4, а. В области повышенных и высоких частот (средних звуковых и ультразвуковых частот) сопротивление $x_c = \frac{1}{\omega C}$, обусловленное емкостью C , становится соизмеримым с сопротивлением r , а x_{c1} уменьшается и становится намного меньше r_2 , т. е. шунтирует r_2 , и, будучи незначительным по сравнению с r , может не учитываться. Если считать $r_1=0$, то для области повышенных и высоких частот получим схему замещения, представленную на рис. 4, б.

Хотя схемы замещения рис. 3, а, (4а, б) относились к генераторному режиму, они остаются без изменений и в двигательном (электроосмотическом) режиме. Но в последнем случае к выходным клеммам будет подведено напряжение извне. Полученные схемы замещения позволяют проводить аналитическое исследование процессов в электрокинетических преобразователях в стационарных и переходных режимах, а также получить соответствующие зависимости для их расчета и конструирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимзаде М. С. Тр. Энергетического ин-та АН Азерб. ССР, т. XV, Баку, 1962.
2. Касимзаде М. С. Электрокинетические преобразователи и возможности их применения. Автоматический контроль и методы электрических измерений (Тр. III конф., 1961 г.), т. II. Новосибирск РИО СО АН СССР, 1964.

3. Hardway E. V. Electrokinetic Transducers. Instruments, vol 26. № 8, 1953.
4. Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Основы теории цепей. Изд-во "Энергия". 1965
5. Скорчелетти В. В. Теоретическая электрохимия. Госхимиздат. Л., 1959.

Поступило 10. VI 1968

М. С. Гасымзаде

Электрокинетик өлчү чевиричилэринин elektrik тэрэфинин эвэзетмә схеми

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә көстәрилер ки, электрокинетик чевиричиләрин хусуси-
jәтләринин тәдгиги вә бу чевиричиләрин һесапланма үсулларыны иш-
ләйиб һазырламаг үчүн онларын elektrik тэрэфинин эвэзетмә схе-
минин дүзкүн сечмәк лазымдыр.

Ишләмә принципинә әсасән электрокинетик өлчү чевиричиси
кенератор режиминдә чәрәјән мәнбәји кими көстәрилә биләр. Мүхтә-
лиф тезлик диапазонларында кенератор вә мүһәррик режимли елек-
трокинетик чевиричинин там вә садәләшдирилмиш эвэзетмә схемләри
верилмишдир.

АЗӘРБАҢҢАН ССР ЕЛМЛӘР АҚАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 2

УДК 621. 316. 93:554. 594. 22

Д. А. КУЛИЕВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЯДОВ МОЛНИИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Теоретические предпосылки к определению температуры
молнии по относительным интенсивностям мультиплетов

Известно, что в результате спонтанного перехода $i \rightarrow k$ атома,
или r -кратно ионизованного иона, интенсивность спектральной линии,
т. е. энергия, излучаемая единицей объема в секунду ($\text{эрг/см}^{-3}\text{сек}$),
выражается как [1]

$$I_{ik} = h/2\pi \cdot \omega_{ik} \cdot A_{ik} \cdot N_i^r, \quad (1)$$

где A_{ik} — коэффициент Эйнштейна для спонтанного излучения;
 N_i^r — концентрация атомов на уровне i ($r=0$ — нейтральный
атом, $r=1$ — однократный ион и т. д.);

$h/2\pi = \frac{h}{2\pi}$; h — постоянная Планка;

ω_{ik} — частота эмитированного фотона.

Величины N_i^r существенно зависят от тех условий, в которых нахо-
дится излучающая среда. В общем случае заселенность уровня i
можно найти, приравняв число актов возбуждения и девозбуждения
уровня i в одну секунду.

Если обозначить суммарную вероятность излучательных и безыз-
лучательных переходов с уровня i на все остальные уровни (вклю-
чая непрерывный спектр) через Γ_i (сек^{-1}) и полное число актов воз-
буждения уровня i в $1 \text{ см}^3/\text{сек}$ через q_i ($\text{см}^{-3} \cdot \text{сек}^{-1}$), то в стационар-
ных условиях

$$q_i = N_i^r \cdot \Gamma_i; I_{ik} = h/2\pi \cdot \omega_{ik} \cdot A_{ik} \cdot \frac{q_i}{\Gamma_i}.$$

Величины q_i, Γ_i могут определяться целым рядом самых различных про-
цессов. К таким процессам относятся: спонтанное и вынужденное излу-
чение атомов, поглощение, столкновение атомов и ионов с электро-
нами и друг с другом и т. д. Относительная роль перечисленных
факторов сильно зависит от конкретных условий. Так, например, при
малых плотностях большую роль играют радиационные переходы, а
при больших плотностях — столкновения с окружающими частицами.

При достаточно больших плотностях радиационные переходы
играют пренебрежимо малую роль, по сравнению с безызлучатель-

ными, и среда может находиться в состоянии термодинамического равновесия. Это означает, что полные концентрации ионов N^+ и концентрация электронов Ne удовлетворяют формуле Саха

$$\frac{Ne}{2} \cdot \frac{N^{r+1}}{S_{r+1}} = \frac{N^r}{S_r} \left(\frac{mkT}{2\pi \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{I_r}{kT}}, \quad (2)$$

и распределение атомов и ионов по уровням является больцмановским:

$$N_i^r = N_1^r \frac{g_i}{g_1} \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} = q_i \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} \cdot \frac{N^r}{S_r}, \quad (3)$$

где N_1^r — концентрация на основном уровне;

$$S_1 = \sum_i q_i \cdot \exp\left[-\frac{E_i}{kT}\right] \text{ — статистическая сумма;}$$

g_i — статистические веса уровней;

I_r — потенциал ионизации r -кратного иона;

E_i — энергии, отсчитываемые от основного уровня.

Поскольку $N^0 + N^1 + N^2 + \dots = N$ и концентрация электронов Ne может быть выражена через концентрации ионов (предполагается, что плазма в целом нейтральна), заданные плотности (т. е. N) и температуры полностью определяют все числа N_i^r .

Согласно вышеприведенным уравнениям, при малых T ионы практически отсутствуют и $N_i^0 \ll N_i^1 \approx N^0$. При увеличении T числа N_i^0 ($i \neq 1$) сначала возрастают, а затем вследствие ионизации атомов начинают убывать. Причем ионизация начинается не при $kT \sim I$, а при значительно меньших температурах. Это связано с величиной предэкспоненциального множителя в формуле Саха. При $kT \sim I$ газ почти полностью ионизован. Поскольку E_i и I — величины одного порядка, концентрации атомов в возбужденных состояниях всегда малы ($N_i \ll N_1$). Такого же типа зависимость от T (с максимумом при некоторой температуре) имеет место и для чисел N_i^r ($r \neq 0$). Таким образом при заданной плотности спектр некоторого r -кратного иона может наблюдаться лишь в некотором определенном интервале температур.

Согласно (1) и (3) интенсивность линии $i - k$ равна

$$I_{ik} = \frac{h}{2\pi} \cdot \omega_{ik} \cdot A_{ik} \cdot \frac{g_i}{g_1} \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} \cdot N_i^r = \frac{h}{2\pi} \cdot \omega_{ik} \cdot A_{ik} \cdot g_i \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} \cdot \frac{N^r}{S_r},$$

а интенсивности двух каких-либо линий $i - k$ и $j - l$ относятся как

$$\frac{I_{ik}}{I_{jl}} = \frac{g_i}{g_j} \cdot \frac{A_{ik}}{A_{jl}} \cdot \frac{\omega_{ik}}{\omega_{jl}} \cdot e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}}. \quad (4)$$

Логарифмируя выражение (4), введя силу осциллятора $f = A\lambda^2$ и решая относительно температуры, находим

$$T = \frac{E_i - E_j}{\left(k \cdot \ln \frac{I_{ik} \cdot g_j \cdot \lambda_{jl}^3 \cdot f_{ik}}{I_{jl} \cdot g_i \cdot \lambda_{ik}^3 \cdot f_{jl}} \right)}. \quad (5)$$

Молния как источник света с некоторым приближением может быть отнесена к числу „больцмановских излучателей“, т. е. она удовлетворяет условиям (2) и (3). Следовательно о канал молнии можно рассматривать как плазму, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия и с помощью выражения (5) определить ее среднюю температуру. Однако такой способ определения средней температуры по спектрограммам молнии, как это справедливо отмечается

в [2], сопряжен со значительным разбросом и требует большого количества сравнений интенсивностей линий.

Автором данной статьи предлагается более рациональный способ расшифровки спектров, суть которого заключается в том, что для определения температуры достаточно только одного сравнения интенсивности каждого мультиплета с эффективным средним значением интенсивностей остальных мультиплетов.

Учитывая, что при данной температуре эффективная интенсивность мультиплетов выражается как

$$\Sigma I = \Sigma \frac{g_i f_i}{\lambda_i^3} \cdot \exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right),$$

расчетная формула (4), после ряда преобразований, в окончательном виде может быть записана следующим образом:

$$\frac{I_{ik}}{\Sigma I} = \frac{g_i f_{ik}}{\lambda_{ik}^3 \cdot e^{\frac{E_i}{kT}} \cdot \Sigma \frac{g_j \cdot f_{jl}}{\lambda_{jl}^3 \cdot e^{\frac{E_j}{kT}}}}. \quad (6)$$

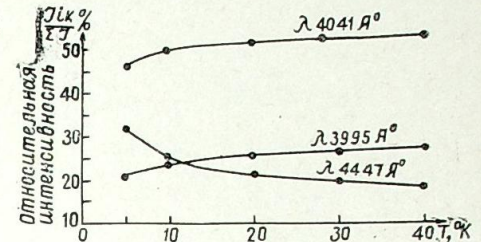


Рис. 1. Кривые относительной интенсивности трех мультиплетов NII

По данным [3] большая часть линии в спектрах молнии относится к NII, а меньшая, соответственно, к NI, OII и OI. Поэтому нами были выбраны довольно сильные три линии ($\lambda = 3995; 4041; 4447 \text{ Å}$) однократно ионизированного азота NII и для них построены расчетные кривые (рис. 1), иллюстрирующие зависимость $T = f\left(\frac{I_{ik}}{\Sigma I}\right)$. Значения всех величин (кроме T), входящих в окончательную формулу (6), относящихся к выбранным линиям NII, сведены в нижеследующую таблицу.

Длина волны, Å	Переходы	Потенциал возбуждения, эв		Угловое квантовое число j	Сила осциллятора, f	Интенсивность
		нижний	верхний			
3995	$3s' P^0 - 3p' D$	18,42	21,51	1—2	0,62	10
4041	$3d^3 F^0 - 4f^3 C$	23,04	26,10	4—5	0,79	5
4447	$3p' P - 3d D^0$	20,33	23,10	1—2	0,61	10

Определив по вышеизложенному способу температуру канала молнии на разных уровнях, можно судить о характере ее изменения вдоль разрядного канала.

Определение расстояния до места удара молнии

Наряду с температурой канала молнии на основании спектрограммы можно определить расстояние между пунктами регистрации и удара молнии. Свет, излучаемый каналом молнии, в атмосфере испытывает частичное поглощение. Известно, что чем короче волна, тем она сильнее поглощается. Внесением поправки на эти поглощения можно определить расстояние до разряда.

На рис. 2 представлено семейство кривых поглощения для различных расстояний, с помощью которых можно определить поправки на относительную интенсивность всех мультиплетов. Допустим, что I_1 и

I_2 — теоретические интенсивности двух линий, а S_1 и S_2 их фактические интенсивности без поправок на поглощение. Поправки на эти интенсивности пусть будут κ_1 и κ_2 , тогда $\kappa_1 S_1 = I_1$ и $\kappa_2 S_2 = I_2$ (остальными погрешностями пренебрегаем), откуда

$$\kappa_1 / \kappa_2 = \frac{I_1 \cdot S_2}{I_2 \cdot S_1} \quad (7)$$

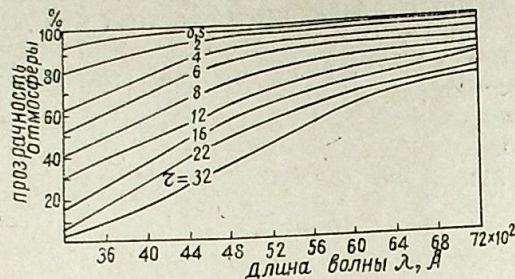


Рис. 2. Изменение прозрачности атмосферы для различных длин волн с изменением удаленности места удара молнии (r — удаленность в км).

Правая часть выражения (7) определяется по полученному спектру $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)$ и по известной температуре $\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$. Определив таким путем κ_1 / κ_2 , с помощью рис. 2 находим расстояние до разряда молнии.

Определение изменения степени ионизации вдоль канала

Пусть I_{n21} и I_{n22} — интенсивности линий ионизированных атомов в нижней и верхней частях канала,

I_{km1} и I_{km2} — интенсивности линий нейтральных атомов на тех же уровнях, что и ионизированных;

$\frac{I_{n21}}{I_{km1}}$ и $\frac{I_{n22}}{I_{km2}}$ — относительные интенсивности ионизированных и нейтральных атомов в нижней и верхней частях разряда.

Сравнение этих величин

$$\kappa = \frac{I_{n21} \cdot I_{km2}}{I_{km1} \cdot I_{n22}} \geq 1$$

позволит определить изменение степени ионизации в разных частях канала молнии. Чтобы свести к минимуму погрешности при определении температуры, степени ионизации и т. д., необходимо выбрать линии, коэффициент поглощения которых был бы одинаков. Этому условию удовлетворяют линии, у которых длины волн отличаются несущественно, например:

$$\begin{cases} \lambda 3995 \text{ НII}, & \lambda 4661,5 \text{ ОII}, \\ \lambda 4041 \text{ НII}, & \lambda 4699,2 \text{ ОII}. \end{cases}$$

При определении удаленности, наоборот, выбираются линии, коэффициенты которых существенно отличаются. Для этого необходимо выбрать линии с сильно отличающимися длинами волн, например:

$$\begin{cases} \lambda 3995 \text{ НII}, & \lambda 4661,5 \text{ ОII}, \\ \lambda 5679 \text{ НII}, & \lambda 5206,7 \text{ ОII}. \end{cases}$$

Наиболее удобным при исследовании случайного процесса, каким является молния, оказывается бесщелевой спектрограф, так как сама молния является как бы щелью и лучи, идущие от нее, параллельны. Преимущество его в том, что он не требует точной направленности на исследуемый объект, и его светосила выше, чем у щелевого спектрографа.

На рис. 3 показана схема разработанного нами бесщелевого спектрографа, где в качестве диспергирующего элемента используется диф-

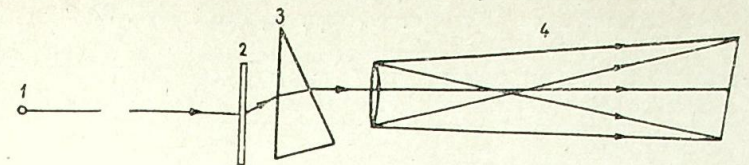


Рис. 3. Принципиальная схема бесщелевого спектрографа:

1 — источник света; 2 — дифракционная решетка $600 \frac{\text{штр}}{\text{мм}}$; 3 — поворотная призма; 4 — фотокамера $f = 600 - 800 \text{ мм}$.

ракционная решетка 600 штр/мм и для увеличения дисперсии (порядка 20 Å/мм при $\lambda = 4500 \text{ Å}$) служит фотокамера с $F = 80 \text{ см}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Собельман, И. И. Введение в теорию атомных спектров. Физматгиз, 1963.
2. Melvin A. J. Geoph. R., 3, 1963.
3. Wallace C. J. Geoph. R., 65, 1211, 1960.

Поступило 15. VI 1967

Ч. А. Гулијев

Спектрал үсүлү васитәсилә илдырым бошамаларынын тәдгигинә даир

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә көстәрилик илдырым бир ишыг мәнбәји кими „болтсман шүабурахычылары“ чәркәсинә дахил едилә биләр. Белә һалда илдырым каналынын температуруну спектр васитәсилә тәјин етмәк үчүн бир мултиплетин интенсивлијини јердә галан мултиплетләрин интенсивлијилә јалһыз бир дәфә мугајисә етмәк кифајәтдир. Нәтичәдә спектри охумаг асанлашыр вә һесабламалар садәләшир. Спектр хәтләринин интенсивлијини мугајисә етмә үсүлү илә илдырым вуран јерлә мушаһидәчи арасында мәсафәни тапмаг да олар. Бу мәгсәдлә күчлү вә бир-биринә мүмкүн гәдәр јахын олан спектр хәтләри сечилмиш, далға узунлуғу мүхтәлиф олан ишыг шүаларынын мәсафәдән асылы олараг атмосфердә удулмасы нәзәри олараг һесапланмыш вә әјриләр шәклиндә верилмишдир.

УДК 678.7

Р. Х. АБРАМОВ, М. А. БАГИРОВ, В. П. МАЛИН

О РАЗРУШЕНИИ ПОЛИМЕРНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ НАГРЕВА, ВЫЗВАННОГО БОМБАРДИРОВКОЙ ИХ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СТАРЕНИИ

Ранее [1] был приведен расчет распределения температуры в диэлектрике при бомбардировке его заряженными частицами, образующимися в результате ионизации в воздушных прослойках диэлектрика, представляемого в виде неограниченной по высоте и ширине и полуограниченной по толщине пластины. С диэлектриком граничит газовый (воздушный) зазор, в котором имеет место электрический разряд. Образующиеся в результате электрического разряда электроны и ионы бомбардируют диэлектрик, нагревая его. Для простоты предполагается, что все тепло выделяется в поверхностном слое толщиной l , причем мощность, выделяемая в единице объема слоя, постоянна. Выделяемое в поверхностном слое тепло распространяется по всему объему диэлектрика в результате теплопроводности, а также передается с поверхности в газовый зазор (теплообмен по закону Ньютона). Задача решалась методом Лапласа.

Если начало координат взято на поверхности диэлектрика, то решение этой задачи имеет вид [1]:

$$\Theta_1(x, t) = b [t - I_1(x, t) - I_2(x, t)], \quad 0 \leq x \leq l; \quad (1)$$

$$Q_2(x, t) = b [I_1(x, t) - I_2(x, t)], \quad l \leq x \leq \infty,$$

где x —координата по толщине диэлектрика, t —время;

$$I_1(x, t) = \frac{1}{2} \left[\left(t + \frac{(l-x)^2}{4at} \right) \operatorname{erfc} \frac{|l-x|}{2\sqrt{at}} - \right. \\ \left. - |l-x| \sqrt{\frac{t}{\pi a}} \exp \left(-\frac{(l-x)^2}{4at} \right) \right];$$

$$I_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t du \left[2 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{au}} - \operatorname{erfc} \frac{x+l}{2\sqrt{au}} \right] +$$

$$+ \int_0^t du \left[\operatorname{erfc} \frac{x+l}{2\sqrt{a(t-u)}} - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a(t-u)}} \right] \exp(H^2 au) \operatorname{erfc}(H\sqrt{au});$$

a —температуропроводность диэлектрика,

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \text{—интеграл Гаусса;}$$

где α —коэффициент теплоотдачи с поверхности диэлектрика в газовый зазор и λ —теплопроводность диэлектрика;

$$b = \frac{\omega \lambda}{a},$$

здесь ω —мощность, выделяемая в единице объема поверхностного слоя.

По формуле (1) нами построены зависимости приведенной температуры Θ/b от времени воздействия электрических разрядов в точках $x=0$ (на поверхности) и $x=20 \text{ мк}$ для полистирольной (ПС) пленки толщиной 20 мк (рис. 1). Для расчета использовались следующие значения параметров полистирола [2]:

$$a = 0,6 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}; \quad \lambda = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{кал}}{\text{сек} \cdot \text{см} \cdot \text{град}}; \quad H = 1 \frac{1}{\text{см}}.$$

За толщину поверхностного слоя, в котором происходит выделение тепла, взято $l = 2 \text{ мк}$. Эта цифра выбрана исходя из следующих соображений. Согласно [3] полимер, подвергнутый действию электрических разрядов, можно рассматривать состоящим из двух слоев: тонкого поверхностного слоя, в котором происходят основные процессы старения (для полистирола, подвергавшегося действию электрических разрядов в воздухе, окислению, поперечному сшиванию и деструкции [4]), и основного слоя незатронутой массы полимера. Поскольку количество геля (нерастворимого осадка, состоящего из сшитых молекул) составляет (по нашим экспериментальным данным) 10–12% от общего веса, можно предположить, что толщина состаренного слоя для 20-микронной ПС пленки приблизительно равна 2 мк .

Для оценки повышения температуры полимера в результате бомбардировки его электронами и ионами нужно определить b .

По [1]

$$b = \frac{\lambda}{a} \omega,$$

где

$$\omega = \frac{\epsilon_{\text{общ}}}{l} = \frac{1}{l} [N_i \epsilon_i + N_e \epsilon_e] f k m_0;$$

$N_i, N_e, \epsilon_i, \epsilon_e$ —число и средняя энергия электронов и ионов, бомбардирующих диэлектрик при одной искре, k —число разрядов за полупе-

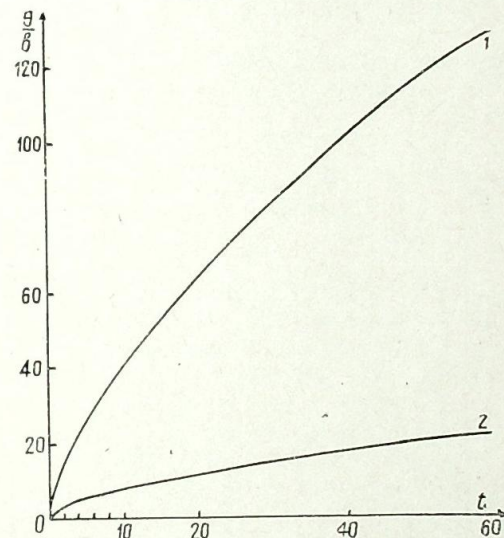


Рис. 1. Зависимость приведенной температуры Θ/b от времени воздействия электрических разрядов:

1—при $x=0$; 2—при $x=20 \text{ мк}$.

риод, m_0 —число искр за один разряд, f —частота приложенного напряжения.

По [5]

$$\kappa = \left[\frac{2 \frac{c_1}{c_1 + c_2} U_m - U_{\text{пог}}}{U_{\text{пр}} - U_{\text{пог}}} \right],$$

где c_1 —емкость диэлектрика, c_2 —емкость газового зазора, $U_{\text{пр}}$ —напряжение пробоя газа, $U_{\text{пог}}$ —напряжение погасания разряда;

$$N_i = N_e = \rho \eta V = \rho \eta \pi r^2 h,$$

ρ —число молекул в единице объема, V —объем искры, η —коэффициент ионизации, r_0 —радиус искры, h —длина искры (численно равна толщине газового зазора).

Все расчеты производились для 1 см² испытательной ячейки, в которой производилось электрическое старение полимерной пленки [4]. Определенные для этой ячейки $U_{\text{пр}}$ и $U_{\text{пог}}$ составляли (в среднем) 5,8 и 5 кВ эфф, соответственно. Диаметр канала искры $2r_0$ принимался для расчета $\approx 0,01$ см [6]; $\rho = 2,69 \cdot 10^{19}$ см⁻³ (число Лошмидта); $\eta = 0,01$ [7]; $m_0 = 1$, так как по [8] одной искрой разряжается площадь диэлектрика диаметром меньше или равным 1 см; $f = 50$ гц.

Средние энергии ионов найдем исходя из того, что температура ионов азота в искре по [9] равна 800°K. Тогда $\epsilon_i = \frac{3}{2} kT = 0,1 \text{ эв}$, где

κ —постоянная Больцмана. Поскольку энергетические параметры разряда в кислороде близки к параметрам разряда в азоте, можно предположить, что средние энергии ионов кислорода имеют величины того же порядка.

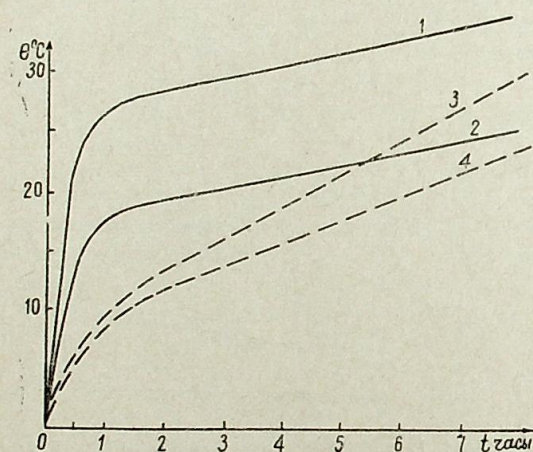


Рис. 2. Теоретически вычисленные и экспериментальные зависимости повышения температуры от времени воздействия электрических разрядов для $x = 20$ мк (сплошная линия—теоретические кривые, пунктирная—экспериментальные): 1, 3—при напряжении на ячейке 11 кВ; 2, 4—при 10 кВ.

ски вычисленных значений температуры с экспериментальными показывает, что они ниже экспериментальных. Это может быть объяснено в основном двумя причинами:

- 1) не совсем точным значением экспериментальных параметров, использованных для теоретического расчета (в настоящее время эти параметры определены довольно приближенно);
- 2) не учтено то, что в увеличение температуры полимера, кроме бом-

бардировки его заряженными частицами, вносят также свой вклад нагрев полимера за счет теплопроводности в результате непосредственного соприкосновения его поверхности с каналом искры разряда и нагрев полимера за счет диэлектрических потерь. Вместе с тем теоретически определенная температура имеет вполне разумное значение что указывает на приемлемость выполненного в [1] расчета. Более быстрое уменьшение скорости подъема температуры, полученной в экспериментальной зависимости, можно объяснить, если учесть допущение, сделанное в [1]: пренебречь как боковыми теплотериями, так и теплотериями с нижней поверхности диэлектрика.

Ориентировочно оценим, чему равна температура на поверхности ПС пленки (в точке $x = 0$). Используя из рис. 2 значения температуры и умножая на коэффициент, показывающий, во сколько раз $\theta(x = 0)$ больше $\theta(x = 20 \text{ мк})$ (из теоретических кривых рис. 1), найдем повышение температуры на поверхности полимера (для больших значений времени экспериментально найденные значения температуры определялись путем экстраполяции кривых рис. 2). Полученные таким образом значения температуры на поверхности ПС пленки (подсчитанное повышение температуры плюс температура среды 20°С) приведены в таблице.

Температура на поверхности ПС пленки, подвергнутой действию электрических разрядов

$t, \text{ час}$	5	10	20	40	60
$u, \text{ кВ}$					
10	100	120	125	135	137
11	124	150	155	169	173

Так как температура термического разложения ПС равна 300°С, а термоокислительной деструкции 190°С [2], то при температурах, приведенных в таблице, невозможно не только термическое разложение полимера, но даже термоокислительная деструкция. Поскольку эти значения температуры, вероятно, завышены, можно сделать вывод, что нагрев поверхности полимера в результате бомбардировки его заряженными частицами, образующимися в зоне электрического разряда, не дает решающего вклада в эрозию полимеров, которая наблюдается при экспериментальном изучении процесса электрического старения. Так, в нашем случае при напряжении на испытательной ячейке 10 кВ за 20 часов электрического старения толщина ПС пленки уменьшилась на 25%.

Выводы

1. Вычислены температуры на поверхности ПС пленки, создаваемые в результате бомбардировки ее заряженными частицами, образующимися при ионизации воздушных прослоек. Найденное удовлетворительное соответствие между теоретически вычисленными значениями температуры и измеренными.

Нагрев поверхности полимера в результате бомбардировки заряженными частицами не оказывает значительного влияния на эрозию полимера, наблюдаемую в процессе его электрического старения.

1. Багиров М. А., Малин В. П. „Изв. АН Азерб. ССР. серия физ.-техн. и матем. наук“, 1968, № 2.
2. Николаев А. Ф. Синтетические полимеры и пластические массы на их основе. „Химия“, М.—Л. 1966.
3. Badian L., Bui—Ai, Lacoste R., Mayerek C. C. г. Acad. sci., 261, № 11, 2181, 1965.
4. Багиров М. А., Волченков Е. Я., Малин В. П. Тр. конференции молодых ученых и аспирантов АН Азерб. ССР, 139, 1966.
5. Койков С. Н. Вопросы радиоэлектроники. Сб. III, вып. 10 87, 1965.
6. Ашурлы З. И., Малин В. П., Емельянов Ю. М., Бабаян В. А., Багиров М. А. ЖФХ (в печати).
7. Nail C. D. Electron. Industr., 17, 74, 1958.
8. Boring N. Arch. f. Electrotechn., 48, № 1, 7, 1963.
9. Hori K., Fuji I. J. Inst. Electr. Engrs., Japan, 86, № 4 14, 1966.
- Самойлович В. Г., Попович М. П., Емельянов Ю. М., Филлипов Ю. В. ЖФХ, том XL, выпуск 3, стр. 531, 1966.

Поступило 12. VIII 1968

Р. Х. Абрамов, М. Э. Бағыров, В. П. Малин

Электрик көһнәлмәси заманы жүклү зәррәчикләрин бомбардманы һесабына баш верән ғызманын тәсирилә полимер диелектрикләринин дағылмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Әввәлки ишдә [1] диелектрикин һава бошлуғунда јаранан електрик бошалмасынын тәсирилә әмәлә кәлән жүклү зәррәчикләрин бомбардманы нәтичәсиндә диелектрикин ғызма температурунун һесабына үсулу верилмишдир. Бу мәгаләдә исә һава тәбәғәсиндәки ионлашманын һесабына јаранан жүклү зәррәчикләрин тәсирилә полистирол плјонканын сәтһиндәки температурун һесабына һаггында верилмишдир.

Температурун нәзәри вә тәҷрүби гијмәтләри арасында ғәнаәтбәхш ујғунлуғ алынмишдир. Мүәјјән едилмишдир ки, полимерин ерозијаға уғрамасы үчүн бошалма зонасындакы электрон вә ионларын бомбардманы һесабына јаранан сәтһи ғызма һәлледици амил дејил.

Х. М. ХАЛИЛОВ, Я. Ш. ПАЛАГАШВИЛИ, А. И. АГАЕВ,
В. М. ЗУЕВ, Э. ДЖАЛАЛ КЫЗЫ

МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ АМПЛИТУДЫ СМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ В ПРОДОЛЬНОЙ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВОЛНЕ

В различных ультразвуковых исследованиях, например, при измерении амплитудно зависимого внутреннего трения, необходимо знать амплитуду смещения Δd и деформацию η в продольной ультразвуковой волне, распространяющейся в исследуемом образце. Измерение указанных величин в мегагерцевом диапазоне частот представляет большие трудности. В работе [1] описаны различные методы измерения амплитуды смещения и деформации в мегагерцевом диапазоне частот, однако все они являются очень сложными и косвенными и требуют применения дополнительной аппаратуры. Амплитуда смещения и деформации в них определяются:

- а) по эквивалентному электрическому сопротивлению излучающего кварца;
- б) по скорости нагревания образцов под действием ультразвука;
- в) по подавлению сигнала ядерного магнитного резонанса под действием ультразвука;
- г) по интенсивности первого дифракционного максимума.

Как отмечают авторы, наиболее точным является последний метод, однако он применим только в случае прозрачных образцов. Остальные методы менее точны.

Известные емкостные методы измерения очень малых перемещений основаны на изменении резонансной частоты колебательного контура, в который включен конденсатор, образованный неподвижным электродом и электродом, закрепленным на перемещающемся объекте, смещение которого необходимо измерить. Однако эти методы пригодны только для измерений фиксированных смещений. Кроме того, они требуют тщательной температурной стабилизации элементов контура и весьма точной установки очень малого зазора (порядка нескольких микрон) между электродами, как это сделано в работе [2].

В настоящей статье предлагается метод измерения амплитуды смещения и деформации в продольной ультразвуковой волне в твердых телах в мегагерцевом диапазоне частот в импульсном режиме.

Измерения Δd и η производились следующим образом. С генератора радиоимпульсов (ГРИ) импульсы длительностью 2 мксек, с частотой заполнения 10 Мгц подаются на излучающую кварцевую пластинку x -среза, работающую на основной гармонике, которая расположена на исследуемом образце (рис. 1). В ГРИ предусмотрена возможность регулировки амплитуды выходного импульса, что необ-

ходимо для изменения интенсивности ультразвукового потока, излучаемого кварцевой пластинкой. Продольные колебания через акустически связующий слой (трансформаторное масло) поступают на исследуемый образец.

Для установки начального зазора d между неподвижным измерительным электродом и поверхностью исследуемого образца приспособлена головка микрометра, на конце подвижной части которого укреплен посеребренный электрод размером 10×10 мм². Это устройство позволяет производить отсчет величины установленного зазора, обеспечивая плоскопараллельность между поверхностью исследуемого образца и измерительным электродом при установке начального зазора.

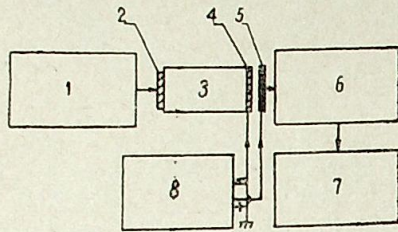


Рис. 1. Блок-схема установки: 1—генератор радиоимпульсов; 2—кварцевая пластинка; 3—исследуемый образец; 4—электрод на поверхности исследуемого образца (для непроводящих образцов); 5—неподвижный измерительный электрод; 6—измерительный приемник с аттенуатором; 7—осциллограф; 8—источник поляризующего напряжения.

К обкладкам конденсатора C , образованного поверхностью исследуемого образца и измерительным электродом, подключается источник постоянного (поляризующего) напряжения U^* . В случае, если исследуемый образец не является проводником, на его поверхность наносят электрод напылением тонкого слоя серебра или приклеивают фольгу. В отсутствие ультразвуковых колебаний емкость этого конденсатора равна C_0 и напряжение

на нем равно величине приложенного к нему поляризующего напряжения, т. е. $U_{C_0} = U$.

При подаче на излучающую кварцевую пластинку радиоимпульсов через образец распространяются продольные ультразвуковые колебания и поверхность его колеблется с частотой ультразвука. При этом емкость конденсатора C периодически меняется около начального значения C_0 и в контуре, образованном этим конденсатором и индуктивностью, включенной на входе приемника, появляется переменный ток той же частоты 10 МГц. Переменное напряжение с этого контура усиливается приемником прямого усиления. После детектирования через котодный повторитель видеоимпульсы с выхода приемника поступают на осциллограф.

Очевидно, что отношение амплитуды продетектированного импульса ΔU к величине поляризующего напряжения U равно отношению изменения расстояния между неподвижным измерительным электродом и колеблющейся под действием ультразвука поверхностью исследуемого образца Δd к величине начального зазора d :

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta d}{d} = \alpha. \quad (1)$$

Измерив значение ΔU и вычислив α из отношения (1), при известном начальном зазоре d легко вычислить и амплитуду смещения Δd в продольной ультразвуковой волне:

$$\Delta d = \alpha \cdot d. \quad (2)$$

Из равенства (2) видно, что чувствительность данного метода измерения амплитуды смещения в ультразвуковой волне зависит от ве-

* В случае ионных кристаллов типа NaCl для устранения влияния зарядов, возникающих на их поверхности в процессе деформации, электрод, расположенный на исследуемом образце, необходимо соединять с заземленным полюсом источника поляризующего напряжения

личины начального зазора и отношения (1). Для повышения чувствительности желательно брать минимально возможную величину d и при выбранном зазоре величину поляризующего напряжения U . Кроме того, чувствительность метода сильно зависит и от чувствительности измерительного приемника.

В нашем случае при чувствительности приемника, равной 5 мкВ (амплитудного значения входного сигнала), при $d=0,1$ мм и $U=100$ В минимальное значение α будет следующим

$$\alpha = \frac{5 \cdot 10^{-6} \text{ В}}{100 \text{ В}} = 5 \cdot 10^{-8};$$

минимальная амплитуда смещения, которую можно измерить, равна

$$\Delta d = d \cdot \alpha = 0,1 \text{ мм} \cdot 5 \cdot 10^{-8} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ А}.$$

Таким образом предлагаемый метод измерения амплитуды смещения в продольной ультразвуковой волне обеспечивает чувствительность порядка сотых долей ангстрема.

Максимальное значение деформации в продольной ультразвуковой волне в режиме стоячих волн определится как

$$\eta = \frac{\Delta d}{\lambda/2}, \quad (3)$$

где λ —длина ультразвуковой волны, распространяющейся в исследуемом образце со скоростью V при частоте f . Погрешность метода определяется в основном точностью измерений $\Delta U, U$ и d и составляет не более 20%.

На рис. 2 представлены измеренные этим методом амплитуда смещения и максимальная деформация в монокристалле NaCl в зависимости от напряжения на кварцевой пластинке диаметром 10 мм, излучающей продольные ультразвуковые колебания. Полученные результаты хорошо согласуются с данными [1]. Основными преимуществами предложенного метода являются высокая чувствительность, простота измерений и отсутствие необходимости во вспомогательной аппаратуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aiers G. A, Fleury P. A. J. Acoust. soc. Am., 36, 1297, 1964.
2. Sproull R. L. Phil Mag., 5, 815, 1960.

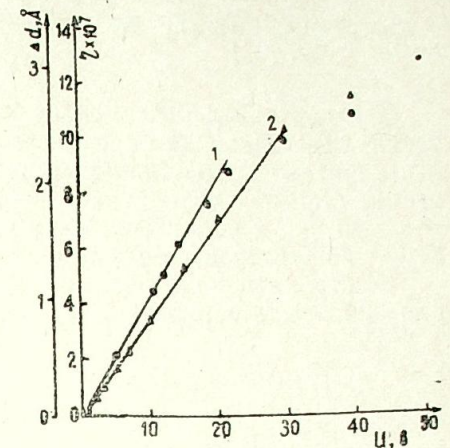


Рис. 2. Зависимость амплитуды смещения и деформации в кристаллах NaCl от напряжения на кварцевой пластинке: 1—экспериментальная кривая, полученная оптическим методом, при диаметре кварцевой пластинки 13 мм; 2—экспериментальная кривая, полученная электростатическим методом, при диаметре кварцевой пластинки 10 мм.

Бәрк чисимләрдә узунуна ултрасәс далгаларынын јаратдығы
јердәјишмәнин вә деформасијанын өлчүлмәси методу

ХҮЛАСӘ

Бундан әввәл мә'лум олан методлардан фәргли олараг, мегагерс-тезликли диапазонда бәрк чисимләрдә узунуна ултрасәс далгаларынын јаратдығы јердәјишмәнин амплитудуну вә деформасијаны билә-васитә өлчмәк үчүн електростатик метод тәклиф едилмишдир. Бу методун үстүн чәһәтләри: өлчү садәлији, көмәкчи гурғудан истифадә-етмәк вә јүксәк һәссаслыгдыр.

Көстәрилән метод кичик јердәјишмәләри ултрасәс вәситәси илә-өлчмәјә имкан верир.

О. А. ГОЛИКОВА, Э. О. ДЖАФАРОВ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ
РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ $Zr-Ta-C$

Карбиды циркония и тантала являются перспективными материалами, на основе которых возможно создание высокотемпературных сплавов различного назначения. В работах [1, 2, 3] были исследованы электрические свойства этих карбидов в зависимости от состава по углероду и выявлен ряд закономерностей, определяющих такие параметры, как концентрация носителей тока, подвижность, эффективная масса.

В данной работе исследовалась тройная система $Zr-Ta-C$ [разрезы $ZrC-TaC$; $Zr_{0,5}Ta_{0,5}C_z$ ($z < 1$)]. Были измерены электропроводность (σ), термо-э. д. с. (α), коэффициент Холла (R) и теплопроводность (κ) при комнатной температуре. На рис. 1 представлены зависимости концентрации ($n = \frac{1}{eR}$), электропроводности и термо-э. д. с.

от состава для разреза $ZrC-TaC$ [$Zr_xTa_yH_{1,0}$; $x + y = 1$]. Концентрация растет по мере увеличения содержания Ta -металла V группы. Аналогичный результат наблюдался также в случае систем $ZrC-NbC$ [4], $TiC-VC$ [5] при замещении металла IV группы металлом V группы и, очевидно, он является общим.

Зависимость удельного сопротивления от состава можно было бы отнести за счет изменения концентрации носителей тока. Однако соответствующая зависимость термо-э. д. с. не может быть объяснена изменением концентрации. Действительно, начиная с $x = 0,9$ термо-э. д. с. не падает с ростом n , а остается постоянной.

По-видимому, даже сравнительно небольшое содержание Ta (5 ат %) в ZrC приводит к значительному изменению зонной структуры. Постоянство термо-э. д. с. может быть связано с изменением эффективной массы. Была сделана оценка относительного изменения эффективной массы. Известно, что в случае сильного вырождения*

$$\alpha = \frac{\pi^2}{3} \frac{\kappa_0}{l} (r + 1) \frac{\kappa T}{\mu},$$

где

$$\mu = \frac{h^2}{2m^*} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3},$$

* Электронный газ в данном случае можно считать сильно вырожденным: $n \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$, термо-э. д. с.—порядка единиц мкВ/град.

т. е. при $T = \text{const}$

$$\alpha = \frac{A(r, m^*)}{n^{2/3}} \quad (1)$$

Из экспериментальных значений термо-э.д.с. и концентрации можно по формуле (1) определить A для состава $x = 0,94$. Затем, пред-

Образцы	$\alpha_{\text{эксп}}$	$\alpha_{\text{выч.}}$	$m^*/m^* (x=0,94)$
$Zr_{0,94}Ta_{0,06}C_{1,0}$	-9,55	-9,55	1,00
$Zr_{0,90}Ta_{0,10}C_{1,0}$	-4,99	-5,65	0,885
$Zr_{0,80}Ta_{0,20}C_{1,0}$	-4,92	-4,50	1,09
$Zr_{0,70}Ta_{0,30}C_{1,0}$	-5,4	-3,42	1,58
$Zr_{0,60}Ta_{0,40}C_{1,0}$	-5,88	-3,10	1,89
$Zr_{0,50}Ta_{0,50}C_{1,0}$	-5,36	-2,70	1,99
$Zr_{0,40}Ta_{0,60}C_{1,0}$	-5,35	-2,64	2,03
$Zr_{0,30}Ta_{0,70}C_{1,0}$	-5,82	-2,54	2,50
$Zr_{0,20}Ta_{0,80}C_{1,0}$	-5,75	-2,70	2,13
$Zr_{0,10}Ta_{0,90}C_{1,0}$	-5,60	-2,04	2,74

полагая $r = \text{const}$ и $m^* = \text{const}$ и используя экспериментальные величины концентрации, по формуле (1) можно вычислить термо-э.д.с.

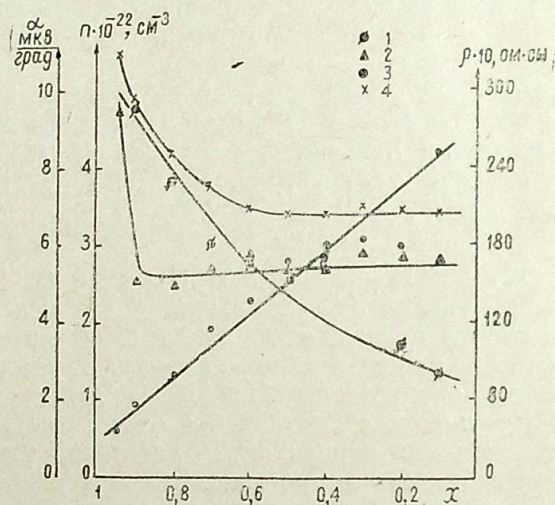


Рис. 1. Зависимости удельного сопротивления (1), термо-э. д. с. (2), концентрации (3) от состава (x) для $Zr_x Ta_y C_{1,0}$ ($x+y=1$) и термо-э. д. с. (4) для $Zr_x Nb_y C_{1,0}$ ($x+y=1$) при комнатной температуре,

в зависимости от состава. Как было показано ранее [6], подвижность носителей тока нечувствительна к росту углеродных вакансий в решетке карбида, поэтому предположение $r = \text{const}$ представляется обоснованным.

Поскольку $\alpha \sim m^*$, отношение экспериментального и вычисленного значений термо-э.д.с. дает величину относительного изменения эффективной массы в зависимости от состава. Оценка показала, что в 2,7 раза (табл.).

Следует отметить, что и в системе $ZrC-NbC$ наблюдалось постоянство термо-э. д. с., но начиная с больших содержаний Nb в ZrC (20 ат %) (см. рис. 1). Более сильное изменение зонной структуры карбида циркония при замещении атомов циркония танталом можно связать с большим отличием свойств атомов (размеры, масса) Zr и Ta по сравнению с Zr и Nb , которые в периодической таблице стоят

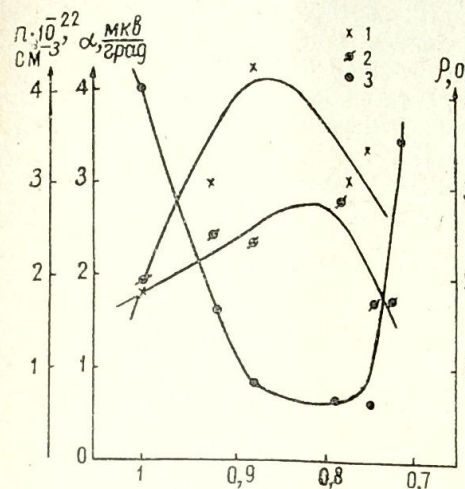


Рис. 2. Зависимости удельного сопротивления (1), термо-э. д. с. (2) и концентрации от состава по углероду (z) для $Zr_{0,5} Ta_{0,5} C_z$ при 300°K

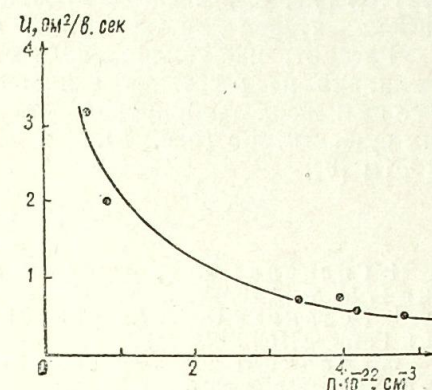


Рис. 3. Зависимость подвижности от концентрации для $Zr_{0,5} Ta_{0,5} C_z$,

рядом. Вследствие значительного изменения зонной структуры ZrC при малом содержании тантала не представляется возможным сравнивать подвижности носителей тока в твердом растворе и в карбиде, как это было сделано для системы $ZrC-NbC$ [4].

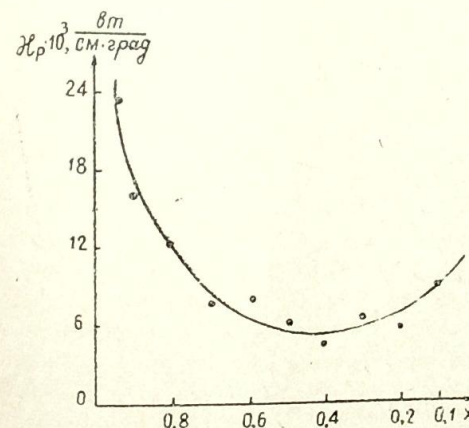


Рис. 4. Зависимость теплопроводности решетки от состава (x) для твердого раствора $ZrC-TaC$.

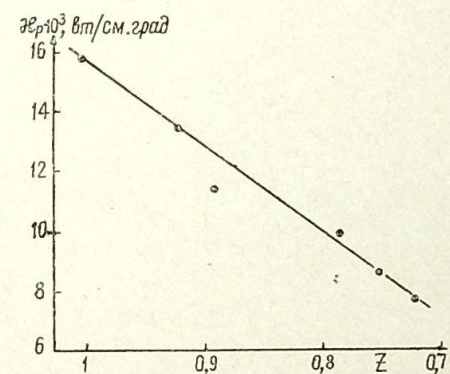


Рис. 5. Зависимость теплопроводности решетки от состава по углероду (z) для $Zr_{0,5} Ta_{0,5} C_z$.

Зависимости концентрации, удельного сопротивления, термо-э.д.с. от состава разреза $Zr_{0,5} Ta_{0,5} C_z$ характерны для дефектных карбидов V группы [3, 7], поэтому можно думать, что зонная структура в данном случае близка к зонной структуре TaC (рис. 2).

Как было установлено, на монокарбидах IV группы и системах $Zr-Nb-C$ и $Ti-C-O$ не наблюдается корреляция между подвиж-

ностью носителей тока и числом дефектов в металлоидной подрешетке [4, 6]. Однако наблюдается всегда одна и та же зависимость подвижности от концентрации носителей тока: падение подвижности с ростом концентрации, этот результат подтверждается также на примере $Zr_{0,5}Ta_{0,5}C_z$ (рис. 3).

Рассмотрим теплопроводность твердых растворов. Теплопроводность кристаллической решетки определялась как $\chi_p = \chi_{экс} - \chi_{эл}$, где $\chi_{эл}$ — электронная теплопроводность, рассчитанная по Видеману-Францу с использованием экспериментальных электропроводностей. Как следует из рис. 4, зависимость теплопроводности решетки разреза $ZrC-TaC$ характерна для твердых растворов [8].

Рассмотрение теплопроводности $Zr_{0,5}Ta_{0,5}C_z$ может дать сведения о влиянии на рассеяние фононов углеродных вакансий. С ростом числа вакансий теплопроводность падает, т.е. рассеяние фононов на них существенно (рис. 5). К такому же выводу приходит и автор работы [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Голикова О. А., Джафаров Э. О., Августиник А. И., Климашин Г. М. ФТТ, 10, 1968.
2. Голикова О. А., Джафаров Э. О., Августиник А. И., Климашин Г. М. ФТП (в печати).
3. Голикова О. А., Джафаров Э. О., Августиник А. И., Климашин Г. М. Тезисы докладов III Всесоюзной конференции по теплофизическим свойствам вещества при высоких температурах. Баку, 1968.
4. Голикова О. А., Джафаров Э. О., Августиник А. И., Кудряшова Л. В., Орданьян С. С. ФТТ, 9, 1967.
5. J. Phys. Soc. Jap., 19, 136, 1968.
6. Августиник А. И., Голикова О. А. и др. Исследования в области химии силикатов и окислов. Изд-во "Наука", 244, 1965.
7. Августиник А. И., Голикова О. А., Нешпор В. С., Орданьян С. С. Изв. АН СССР, серия неорганич. материалы, 3, № 2, 1967.
8. Иоффе А. Ф. Физика полупроводников. Изд. АН СССР, 1957.
9. Williams W. S. J. Amer. Ceram. Soc., 49, 157, 1961.

Поступило 8. XII 1968

М. И. АЛИЕВ и Х. Я. ХАЛИЛОВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ($2InSb$)_x—($ZnSnSb_2$)_{1-x}

Исследование твердых растворов типа $A^{III}B^V-A^{II}B^{IV}C_2^V$ представляет определенный интерес. Соединения типа $A^{II}B^{IV}C_2^V$ являются электронными аналогами как элементов IV группы, так и соединений $A^{III}B^V$. В ряде таких растворов получены полупроводники с большой подвижностью носителей тока.

О получении твердых растворов $2InSb-ZnSnSb_2$ сообщалось ранее [1—4], однако физические свойства этих сплавов не исследовались. Нами было проведено комплексное исследование физических свойств растворов $(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$ в зависимости от состава (от $x=1$ до 0,7) и температуры (от 80 до 500°K). Результаты исследований электрических свойств описаны в работе [4].

В настоящей статье приводятся результаты исследования теплопроводности твердых растворов $(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$. На рис. 1 показана зависимость общей теплопроводности ($\chi_{общ}$) от температуры. Решеточная теплопроводность (χ_p) была определена вычитанием электронной теплопроводности из общей, а при высоких температурах также и теплопроводности, обусловленной биполярной диффузией. $\chi_э$ вычислялась по закону Видемана-Франца:

$$\chi_э = L \sigma T = A \left(\frac{\kappa}{e} \right)^2 \sigma T, \quad (1)$$

где L — число Лоренца, σ — электропроводность, κ — постоянная Больцмана, e — заряд электрона. Коэффициент A зависит от механизма рассеяния носителей тока и степени их вырождения.

Из термомагнитных исследований нами установлено, что для образцов 1—5 в области примесной проводимости доминирующим механизмом рассеяния носителей тока является рассеяние на акустичес-

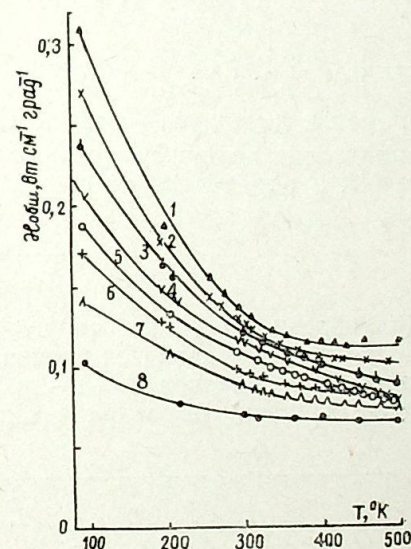


Рис. 1. Температурная зависимость теплопроводности твердых растворов $InSb-ZnSnSb_2$ (составы сплавов в соответствии с нумерацией образцов приводятся в табл. 1)

ких колебаниях решетки. В образцах 6 ÷ 8 в области температур исследования дырочный газ является сильно вырожденным (при 100°K $\mu^* = 7 \div > 20$, а при 500°K $\mu^* = 4 \div 12$). Для образцов с сильно вырожденным газом носителей было взято значение $A = \frac{\pi^2}{3}$.

Расчеты показали, что для образцов 1 ÷ 5 χ_3 составляет незначительную долю $\chi_{\text{общ}}$. Так, для образца 1 при 300°K $\chi_3 = 0,0001$ вт/см. град. при 500°K — 0,009 вт/см. град; для образца 5 при 500°K $\chi_3 = 0,0012$ вт/см. град.

В образцах 6 ÷ 8 χ_3 составляет ощутимую долю от $\chi_{\text{общ}}$. Например при 300°K для образца 6 $\frac{\chi_3}{\chi_{\text{общ}}} = 0,13$; при 500°K — 0,17; для образца 8

при 300°K $\frac{\chi_3}{\chi_{\text{общ}}} = 0,41$, при 500°K — 0,45. В этих образцах собственная проводимость наступает при гораздо более высоких температурах, чем в области исследования. Кроме того, у них очень высокая концентрация носителей тока. Поэтому можно считать, что в них перенос тепла электромагнитным излучением и биполярной диффузией практически отсутствует.

В образцах 1 ÷ 5 вблизи области собственной проводимости начинает заметно сказываться теплопроводность через биполярную диффузию. Для этих образцов нами была вычислена также дополнительная теплопроводность:

$$\Delta \chi_{n-p} = \frac{4ab}{(1+ab)^2} \left(\frac{\kappa}{e} \right)^2 \sigma T \left(\frac{\Delta \epsilon}{\kappa T} + 2 \right)^2, \quad (2)$$

где $a = \frac{n}{p}$, $b = \frac{u_n}{u_p}$ — отношение концентраций и подвижностей электронов и дырок, $\Delta \epsilon$ — ширина запрещенной зоны [5,6]. $\Delta \epsilon$ нами была определена из зависимости $\lg RT^{3/2}$ от $1/T$ и оказалась равной 0,33 эв [4]; b определено из соотношения

$$\frac{R_{\text{max}}}{R_{\text{min}}} = \frac{(b-1)^2}{4b}. \quad (3)$$

Для образцов 1 ÷ 3 получено $b = 33$.

В табл. 1 приводятся значения ряда основных характеристических параметров сплавов InSb—ZnSnSb₂ при комнатной температуре, а также значения биполярной теплопроводности $\Delta \chi_{n-p}$ при 400 и 500°K.

Таблица 1

Номер сплава	x	$\sigma, \text{ом}^{-1} \text{см}^{-1}$	$P, \text{см}^{-3}$	$R \sigma, \text{см}^2/\text{в.сек}$	$\alpha, \text{мкв/град}$	$\chi_{\text{общ}} \cdot 10^3, \text{вт/см.град}$	$\chi_3 \cdot 10^3, \text{вт/см.град}$		$\Delta \chi_{n-p} \cdot 10^3, \text{вт/см.град}$
							300°K	500°K	
1	0,99999	37	$1,2 \cdot 10^{16}$	18717	— 270	134	—	—	20,4
2	0,99995	69	$1,8 \cdot 10^{17}$	2408	+ 80	125	—	—	9,2
3	0,9999	61	$2,5 \cdot 10^{17}$	1544	+ 80	121	—	—	6,9
4	0,9995	154	$3,9 \cdot 10^{18}$	240	+ 236	116	—	—	2,4
5	0,999	191	$4,3 \cdot 10^{18}$	308	+ 200	109	—	—	2,3
6	0,99	1674	$5,4 \cdot 10^{19}$	193	+ 88	97	12,3	13,8	—
7	0,90	2500	$1,8 \cdot 10^{20}$	108	+ 44	88	18	20	—
8	0,70	3933	$2,3 \cdot 10^{20}$	86	+ 33	72	29	32	—

На рис. 2 представлена зависимость теплового сопротивления решетки от $T \cdot W_p$ для сплавов InSb—ZnSnSb₂ с малым содержанием второго компонента линейно зависит от T , что указывает на доминирующую роль трехфононных процессов. Мы попытались сравнить величину $\chi_p \cdot T$, полученную из эксперимента для сплавов InSb—ZnSnSb₂ (образцы 1 ÷ 4), с вычисленной по формуле Лейбфрида—Шлемана:

$$\chi_p = \frac{5,7 \cdot \bar{A} \cdot \delta \cdot \theta_D^3}{\gamma^2 T}, \quad (4)$$

где $\bar{A}$ — средний атомный вес, δ — кубический корень из объема, занимаемого одним атомом, θ_D — дебаевская температура, γ — постоянная Грюнайзена.

Такое сравнение ранее было сделано для чистого InSb [7,8]. Согласно формуле (4) $\chi_p \cdot T = 43$ вт/см, а по экспериментальным данным эта величина составляет 45 вт/см. В случае твердого раствора также отмечается хорошее согласие эксперимента с теорией. Для сплавов 1 ÷ 4 получается $\chi_p \cdot T = 40; 38; 37; 35$ вт/см, соответственно. В образцах с большим содержанием ZnSnSb₂ (6 ÷ 8) наблюдается наличие независимых от температур участков W_p .

Расчеты, произведенные на основании теории рассеяния фононов на точечных дефектах, показывают, что длина свободного пробега фононов $\bar{l}$ значительно снижается с увеличением содержания ZnSnSb₂ в сплавах и становится порядка постоянной решетки. Значения $\bar{l}$ и времени релаксации для рассеяния фононов точечными дефектами $\tau^{-1} = A' \omega^4$ были оценены с учетом изменения только масс атомов. Для сплава $(2\text{InSb})_x - (\text{ZnSnSb}_2)_{1-x}$ вклад от изменения массы в параметр A' может быть вычислен по формуле:

$$A' = \frac{x(1-x)}{4\pi \bar{V}^3 N} \cdot \frac{(M_{2\text{InSb}} - M_{\text{ZnSnSb}_2})^2}{\bar{M}^2}, \quad (5)$$

где $\bar{M} = x M_{2\text{InSb}} + (1-x) M_{\text{ZnSnSb}_2}$ — средняя масса молекулы, $N = \frac{\rho \cdot n}{\bar{M}}$, — число молекул в единице объема, n — число Авогадро, ρ — плотность, $\bar{V}$ — средняя скорость звука. Используя эти данные и скорость звука для InSb, определялась средняя длина свободного пробега фононов. Значения τ и $\bar{l}$ при комнатной температуре для образцов 6 ÷ 8 приведены в табл. 2.

Как видно из этой таблицы, с увеличением содержания ZnSnSb₂ в сплаве средняя длина свободного пробега фононов уменьшается. Постоянная решетка в сплавах InSb—ZnSnSb₂ уменьшается с ростом концентрации дефектов. Последние искажают распределение потенциала в решетке, а ее сжатие увеличивает степень ангармоничности сил, действующих между атомами. Поэтому с ростом степени дефектности наблюдается уменьшение длины свободного пробега фононов.

Как показал А. Ф. Иоффе, когда длина свободного пробега ста-

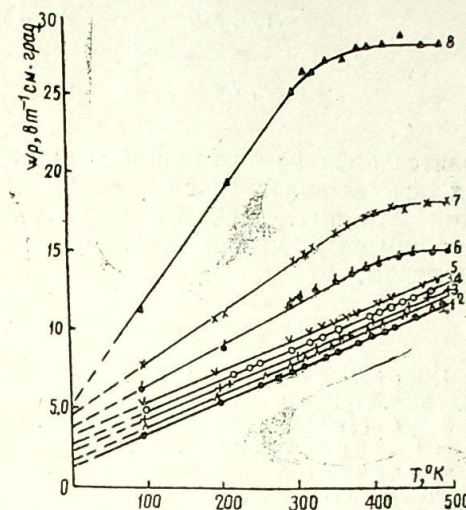


Рис. 2. Температурная зависимость теплового сопротивления решетки InSb—ZnSnSb₂ (составы сплавов в соответствии с нумерацией образцов приводятся в табл. 1).

Таблица 2

№ образца	6	7	8
$\tau \cdot 10^{13}$, сек	123,31	13,14	3,52
$L \cdot 10^3$, см	394,62	38,43	11,26

новится порядка постоянной решетки, перенос тепла в полупроводниках осуществляется посредством обмена квантами энергии между соседними атомами. Постоянство теплового сопротивления в сплавах с большим содержанием $ZnSnSb_2$, по-видимому, связано с этим обстоятельством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Войцеховский А. В., Горюнова Н. А. Докл. XX научн. конф. Ленинград. инж.-строит. ин-та, физика, Л., 1962.
2. Woolley J. G., Williams E. W. I. Electrochem. soc., 111, 210 (1964).
3. Войцеховский А. В. Укр. физ. ж., 9, 796 (1964).
4. Халилов Х. Я. и Алиев М. И. „Изв. АН СССР, серия неорганические материалы“, IV, 1, 144, 1968.
5. Давыдов Б. И. и Шмушкевич И. М. УФН, XXIV, 1, 24, 1940.
6. Девяткова Е. Д., Петров А. В. и Смирнов И. А. ФТТ. 3, 5. 1438, 1961.
7. Stuckes A. D. Phys. rev., 107, 427, 1957.
8. Драбл Дж. и Гольдсмит Г. Теплопроводность полупроводников. ИЛ, 1963.

Поступило 5. XI 1968

М. И. Әлиев, Х. Я. Халилов

**$(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$ бэрк мэхлулларынын
истиликкечирмәси**

ХҮЛАСӘ

Ишдә $(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$ бэрк мэхлулларынын истиликкечирмәси кениш температур интервалында ($80^\circ \div 500^\circ K$) тәдгиг олунмушдур. $ZnSnSb_2$ 0,1 мол% олан бэрк мэхлулларда мэхсуси кечиричилик областында истиликкечирмәжә электрон-дешик чүтүнүн вердији элавә һәмчинин $ZnSnSb_2$ 1÷30 мол% олан бэрк мэхлулларда электрон компонентинин истиликкечирмәжә вердији элавә һесабыланмышдыр.

Гәфәсин истилик мугавимәтинин температурдан асылылыгына әсәсән көстәрилир ки, истиликкечирмәдә үч фонону просес үстүнлүк тәшкил едир.

УДК 538. 115

Ф. М. ГАШИМЗАДЕ и Ю. М. СЕИДОВ

**СВОЙСТВА СИММЕТРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ
В МАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ С КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ
СИММЕТРИЕЙ D_{3d}^6**

Теоретико-групповые методы уже прочно утвердились при исследовании одночастичных состояний (элементарных возбуждений) в кристаллах, не обладающих магнитным упорядочением. Этот метод позволяет установить степень вырождения состояний, классифицировать их по типам симметрии, найти закон дисперсии элементарных возбуждений. Далее можно получить правила отбора, полезные при интерпретации оптических спектров, а также при исследовании рассеяния элементарных возбуждений друг на друге (например, электрон—фонон, экситон—фонон).

В последнее время появляются работы, в которых эти методы распространяются на магнитоупорядоченные кристаллы. При этом возможно исследование как старой задачи—электронного, фононного и экситонного спектра в магнитоупорядоченной фазе, так и нового типа элементарных возбуждений, присущих только магнитным кристаллам—магнонов (спиновых волн). Впервые Диммок и Уилер [1] получили таблицы характеров неприводимых представлений магнитных пространственных групп MnF_2 и MnO_2 и исследовали вопрос о дополнительном вырождении, возникающем из-за симметрии относительно обращения знака времени. Последняя встречается в кристаллах с магнитной симметрией в комбинации с другими элементами симметрии пространственной группы.

В данной работе на примере четырех возможных магнитных структур в структуре с кристаллографической симметрией D_{3d}^6 , а именно; $FeCO_3$, $MnCO_3$, $CoCO_3$ и Cr_2O_3 [3] исследовано изменение характера одночастичных состояний при переходе из неупорядоченной фазы в магнитоупорядоченную, а также спектра новых возбуждений (магнонов), их вырождения, закона преобразования соответствующих блоховских функций, расположение экстремальных точек в k -пространстве, т. е. точек, в которых $grad \epsilon(\vec{k}) = 0$, где $\epsilon(\vec{k})$ —энергия элементарных возбуждений. Найден вид $\epsilon(\vec{k})$ для спиновых волн во всех вышеуказанных типах магнитных структур. Для этого составлены таблицы однозначных и двузначных малых неприводимых представлений пространственной группы D_{3d}^6 и соответствующих магнитных пространственных групп. Симметрия относительно инверсии времени

учтена с помощью критериев Херринга, обобщенных на случай магнитных групп Диммоком и Уилером [2]. Экстремальные точки найдены по формулам, выведенным следуя Пикусу [4] и совпадающим с одной из формул, полученных Рашбой [5] и Шекой [6]. Закон дисперсии для спиновых волн был получен методом Латтинжера [7].

Пространственная группа D_{3d}^6

Кристаллографическая структура карбонатов марганца, железа, кобальта и никкеля, а также Fe_2O_3 и Cr_2O_3 обладает симметрией пространственной группы D_{3d}^6 . Основными трансляциями являются вектора трансляций ромбоэдрической решетки Браве. Элементарная ячейка представляет собой вытянутый ромбоэдр и содержит два магнитных иона в случае карбонатов и четыре — в случае Fe_2O_3 и Cr_2O_3 (рис. 1 и 2). Элементами точечной группы являются: тождественное

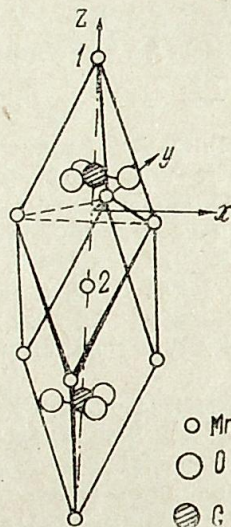


Рис. 1. Кристаллографическая структура карбонатов.

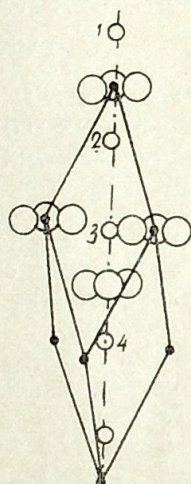


Рис. 2. Кристаллографическая структура гематита.

преобразование $E(a_1a_2a_3)$; повороты на 120° и 240° вокруг ромбоэдрической оси: $C_3^1(a_2a_1a_3)$, $C_3^2(a_2a_3a_1)$; инверсия $I(\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3)$; три отражения в вертикальных плоскостях, проходящих через ромбоэдрическую ось со скольжением вдоль нее на величину

$$\vec{\tau} = \frac{1}{2}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3);$$

$$\bar{\sigma}_1(a_1a_3a_2), \bar{\sigma}_2(a_3a_2a_1), \bar{\sigma}(a_2a_1a_3);$$

зеркальные повороты вокруг оси шестого порядка: $IC_3^1(\bar{a}_3\bar{a}_1\bar{a}_2)$, $IC_3^2(\bar{a}_2\bar{a}_3\bar{a}_1)$; повороты вокруг трех осей второго порядка, перпендикулярных к ромбоэдрической оси кристалла: $\bar{I}\sigma_1(\bar{a}_1\bar{a}_3\bar{a}_2)$, $\bar{I}\sigma_2(\bar{a}_3\bar{a}_2\bar{a}_1)$, $\bar{I}\sigma_3(\bar{a}_2\bar{a}_1\bar{a}_3)$. Здесь $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — основные вектора трансляций решетки, знак $\sim$ указывает на сопровождение соответствующего элемента симметрии скольжением на вектор $\vec{\tau}$.

Зона Бриллюэна для решетки Браве ромбоэдрической структуры показана на рис. 3, заимствованном у Костера [8]. Она ограничена плоскостями $\pm \frac{1}{2}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3)$, $\pm \frac{1}{2}\vec{b}_1$, $\pm \frac{1}{2}\vec{b}_2$, $\pm \frac{1}{2}\vec{b}_3$, $\pm \frac{1}{2}(\vec{b}_1 + \vec{b}_2)$, $\pm \frac{1}{2}(\vec{b}_1 + \vec{b}_3)$, $\pm \frac{1}{2}(\vec{b}_2 + \vec{b}_3)$, где $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$ являются векторами обратной решетки. На рис. 4 для удобства показаны проекции этих векторов на плоскость xy перпендикулярной

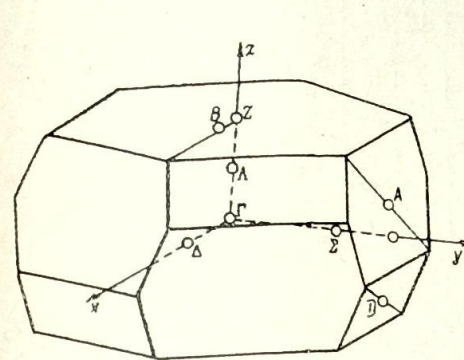


Рис. 3. Зона Бриллюэна ромбоэдрического кристалла.

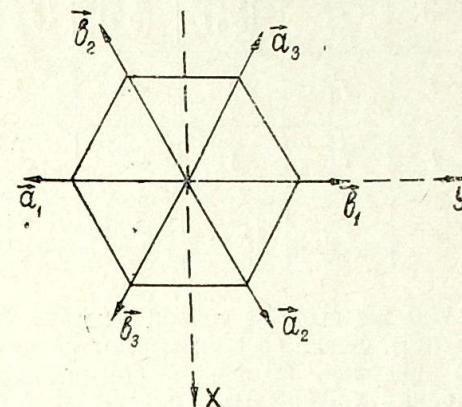


Рис. 4. Расположение проекций векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в плоскости $\perp$ оси z .

ромбоэдрической оси. Симметричные точки, линии и плоскости, показанные на рис. 3, имеют следующие координаты, выраженные в векторах обратной решетки:

$$\Gamma(0) - D_{3d}, \quad Z\left(\frac{\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3}{2}\right) - D_{3d},$$

$$A\left(\frac{\vec{b}_1}{2}\right) - C_{2h}, \quad D\left(-\frac{\vec{b}_2 + \vec{b}_3}{2}\right) - C_{2h},$$

$$\Lambda\left[\mu(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3)\right] - C_{3v}, \quad \Delta\left[\mu(\vec{b}_2 - \vec{b}_3)\right] - C_2,$$

$$\Sigma\left[\mu\vec{b}_1 + \mu_1(\vec{b}_2 + \vec{b}_3)\right] - C_s, \quad B\left[\mu(\vec{b}_2 - \vec{b}_3) + \frac{\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3}{2}\right] = C_2,$$

где μ и μ_1 принимают значения $0 \leq \mu, \mu_1 \leq 1/2$.

Неприводимые представления двойных групп для перечисленных точек зоны Бриллюэна приведены в табл. 1—7, которые получены стандартными методами, описанными в литературе (см, например, [9]). В табл. 9—12 даны условия совместности неприводимых представлений в окрестности симметричных точек, а в табл. 13 — условия совместности однозначных и двузначных представлений двойной группы для прослеживания влияния спина и спин-орбитальных эффектов. Результаты анализа на дополнительное вырождение по критериям Херринга сведены в табл. 1—7, где обозначения соответствуют трем случаям Вигнера:

a — нет дополнительного вырождения;
 b — имеется дополнительное вырождение и два комплексно сопряженных представления встречаются вместе;
 c — имеется дополнительное вырождение и размерность представления удваивается.

Таблица 1

24	Γ	E	$\bar{E}$	C_3^1	C_3^2	$\tilde{\sigma}_1$	σ_2	σ_3
a	$\Gamma_1^\pm$	1	1	1	1	-1	-1	-1
a	$\Gamma_2^\pm$	1	1	1	1	-1	-1	-1
a	$\Gamma_3^\pm$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$
b	$\Gamma_1^\pm$	1	-1	-1	1	i	i	i
b	$\Gamma_2^\pm$	1	-1	-1	1	$-i$	$-i$	$-i$
a	$\Gamma_3^\pm$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\omega^2 \\ i\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ i\omega & 0 \end{pmatrix}$

В том же столбце таблиц указано полное число элементов двойной группы. Знаки ($\pm$) указывают на четность или нечетность относительно инверсии, нумерация со штрихом внизу употребляется для обозначения двузначных представлений. Введены обозначения: $\omega = \exp \times \left(i \frac{2\pi}{3} \right)$, $\delta = \exp(i\mu\pi)$, $\eta = \exp i(\mu + 2\mu_1)\pi$. То обстоятельство,

что модули характеров однозначных и двузначных представлений совпадают, помогает в нашем случае простым способом построить закон дисперсии элементарных возбуждений [4].

Из табл. 1—7 видно, что без учета спина в точках Γ , A , Z , вдоль линий Δ и B имеется двухкратное вырождение электронных состояний, а в точке Z и четырехкратное, причем вдоль линии B это вырождение обусловлено симметрией относительно обращения знака времени. С учетом спина в произвольной точке зоны Бриллюэна имеется двухкратное смыкание зон из-за симметрии относительно инверсии времени. В точках Z и A вырождение становится четырехкратным.

Пользуясь критериями, выведенными Рашбой [5] и Шекой [6], получены места расположения экстремальных точек спектра. Анализ показывает, что экстремумы располагаются в точках Γ и D , а также могут располагаться в одной точке на линиях Δ и A , за исключением Δ_3 и на плоскости Σ . В точках A , Z и на линии B экстремумов нет. Причем A_1 , A_1' , Δ_3 , B_1 , B_2 , B_1' , B_2' , Z_2 , Z_3 , Z_2' , Z_3' имеют наклон во всех направлениях, а Z_1 и Z_1' — вдоль K_z .

Магнитная пространственная группа структуры FeCO_3

Магнитная структура FeCO_3 получается из кристаллографической структуры (рис. 1), если спины магнитных ионов направлены антипараллельно, вдоль ромбоэдрической оси [3]. При этом все элементы симметрии пространственной группы D_{3d}^6 сохраняются и в магнитоупорядоченной фазе, за исключением симметрии относительно инверсии времени, которая не входит ни в какие комбинации с пространственными элементами симметрии. Такую же симметрию имеет и магнитная структура $\alpha = \text{Fe}_2\text{O}_3$ при $T < 250^\circ\text{K}$ [10]. Таблицы неприводимых представлений те же, что и для неупорядоченной фазы, кроме столбца, имеющего отношение к симметрии относительно инверсии

Таблица 2

48	Z	E	$E_{1/2}$	$\bar{E}$	C_3^1	C_3^2	$\tilde{\sigma}_1$	σ_2	$\tilde{\sigma}_3$	I	IC_3^1	IC_3^2	$\tilde{I}\sigma_1$	$\tilde{I}\sigma_2$	$\tilde{I}\sigma_3$
a	Z_1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
b	Z_2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega \\ -i\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega^2 \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega \\ i\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega^2 \\ i\omega & 0 \end{pmatrix}$
b	Z_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega \\ -i\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i\omega^2 \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\omega \\ -i\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\omega^2 \\ -i\omega & 0 \end{pmatrix}$
c	Z_1'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
d	Z_2'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$
d	Z_3'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 3

16	A	E	$E/2\tau$	$\bar{E}$	$\tilde{\sigma}_1$	I	$I\tilde{\sigma}_1$
a	A_1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
c	A_1'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Таблица 4

8	D	E	$\bar{E}$	$\tilde{\sigma}_1$
a	$D_1^\pm$	1	1	1
u	$D_1^\pm$	1	1	-1
b	$D_1^\pm$	1	-1	i
b	$D_1^\pm$	1	-1	-i

Таблица 5

12	Λ	E	$\bar{E}$	C_3^1	C_3^2	$\tilde{\sigma}_1$	$\tilde{\sigma}_2$	$\tilde{\sigma}_3$
a	Λ_1	1	1	1	1	δ	δ	δ
a	Λ_2	1	1	1	1	$-\delta$	$-\delta$	$-\delta$
a	Λ_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \delta\omega \\ \delta\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \delta\omega^2 \\ \delta\omega & 0 \end{pmatrix}$
b	Λ_1'	1	-1	-1	1	$i\delta$	$i\delta$	$i\delta$
b	Λ_2'	1	-1	-1	1	$-i\delta$	$-i\delta$	$-i\delta$
a	Λ_3'	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ i\delta & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\delta\omega \\ i\delta\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & i\delta\omega^2 \\ i\delta\omega & 0 \end{pmatrix}$

Таблица 6

4	Δ/B	E	$\bar{E}$	$\tilde{\sigma}_1$
a/s	Δ_1	1	1	1
a/s	Δ_1	1	1	-1
s	Δ_1'	1	-1	i
s	Δ_2'	1	-1	-i

Таблица 7

4	Σ	E	$\bar{E}$	$\tilde{\sigma}_1$
a	Σ_1	1	1	η
a	Σ_2	1	1	$-\eta$
s	Σ_1'	1	-1	$-i\eta$
s	Σ_2'	1	-1	$-i\eta$

Таблица 8

4	A'/D'	E	$\bar{E}$
a	$A_1'^\pm$	1	1
a	$A_1'^\pm$	1	-1

Таблица 9

Γ	Σ	Δ	Λ
$\Gamma_1^\pm$	Σ_1	Δ_1, Δ_2	Λ_1
$\Gamma_1^\pm$	Σ_2	$\Delta_{2,1}$	Λ_2
$\Gamma_3^\pm$	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	$\Delta_1 + \Delta_2$	Λ_3
$\Gamma_1^\pm$	Σ_1'	Δ_1', Δ_2'	Λ_1'
$\Gamma_2^\pm$	Σ_2'	Δ_2', Δ_1'	Λ_2'
$\Gamma_3^\pm$	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$\Delta_1' + \Delta_2'$	Λ_3'

Таблица 11

A	Σ	B
A_1	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	$B_1 + B_2$
A_1'	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$B_1' + B_2'$

Таблица 10

Z	Σ	B	Λ
Z_1	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	$B_1 + B_2$	$\Lambda_1 + \Lambda_2$
Z_2	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	$B_1 + B_2$	Λ_3
Z_3	$\Sigma_1 + \Sigma_2$	$B_1 + B_2$	Λ
Z_1'	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$B_1' + B_2'$	$\Lambda_1' + \Lambda_2'$
Z_2'	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$B_1' + B_2'$	Λ_3'
Z_3'	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$B_1' + B_2'$	Λ_3'

Таблица 12

D	Σ	Δ
$D_1^\pm$	Σ_1	$\Delta_{1,2}$
$D_2^\pm$	Σ_2	$\Delta_{2,1}$
$D_1^\pm$	Σ_1'	Δ_1', Δ_2'
$D_2^\pm$	Σ_2'	Δ_2', Δ_1'

Таблица 13

$D_{1/2}^\pm$	$\Gamma_1^\pm$	$\Gamma_2^\pm$	$\Gamma_3^\pm$	Z_1	Z_2	Z_3	A_1	$D_1^\pm$
	$\Gamma_3^\pm$	$\Gamma_3^\pm$	$\Gamma_1^\pm + \Gamma_2^\pm + \Gamma_3^\pm$	$Z_2' + Z_3'$	$Z_1' + Z_2'$	$Z_1' + Z_3'$	$2A_1'$	$D_1^\pm + D_2^\pm$

Продолжение табл. 13

$D_2^\pm$	Λ_1	Λ_2	Λ_3	Σ_1	Σ_2	Δ_1	Δ_2
$D_2^\pm + D_1^\pm$	Λ_3'	Λ_3'	$\Lambda_1' + \Lambda_2' + \Lambda_3'$	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$\Sigma_1' + \Sigma_2'$	$\Delta_1' + \Delta_2'$	$\Delta_1' + \Delta_2'$

времени. Степень вырождения состояний непосредственно видна из табл. 1-7. Благодаря отсутствию симметрии относительно инверсии времени вырождение вдоль линии B снимается.

Анализ на экстремум производится по простой формуле [4]:

$$\frac{1}{n} \sum_{g \in G_{\vec{k}_0}} \chi_g(g) |\chi(g)|^2 = 0, \quad (1)$$

где n —порядок группы $G_{\vec{k}_0}$ волнового вектора $\vec{k}_0$, g —элементы симметрии этой группы, $\chi_g(g)$ —характеры представления, по которому преобразуются компоненты импульса, $\chi(g)$ —характеры рассматриваемого неприводимого представления группы $G_{\vec{k}_0}$. Проверка с помощью формулы (1) показывает, что снова точки Γ и D являются экстремальными, экстремумы могут располагаться в одной точке на линиях B , Δ , A , за исключением Λ_3 и Λ_6 и на плоскости Σ . Представления Λ_3 , Λ_6 , A_1 , A_1' имеют наклон во всех направлениях, а Z_2 , Z_3 , Z_2' , Z_3' —вдоль κ_x и κ_y ; Z_1 , Z_1' —вдоль κ_z .

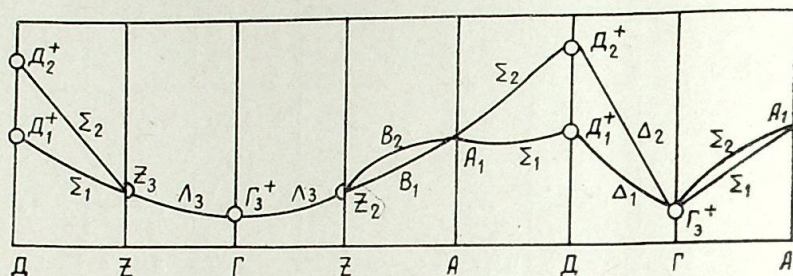


Рис. 5. Вид $\epsilon(\vec{k})$ для спиновых волн в FeCO_3 .

На рис. 5 показан ход кривых $\epsilon(\vec{k})$ для ветвей спиновых волн в структуре FeCO_3 , установленный на основе табл. 9—12. Кружочками на рисунке обозначены точки нулевого наклона. Видно удвоение периода $\epsilon(\vec{k})$ вдоль направления ромбоэдрической оси.

Магнитная пространственная группа структуры MnCO_3

Магнитная структура MnCO_3 получается из кристаллографической структуры, если спины магнитных ионов расположены антипараллельно, в одной из плоскостей симметрии, перпендикулярно к ромбоэдрической оси. Элементами симметрии получающейся магнитной пространственной группы являются: E , σ_1 , I , $\bar{\sigma}_1$. Как и в структуре FeCO_3 отсутствует симметрия относительно инверсии времени. Такой же симметрией обладает магнитная структура $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ при $250^\circ\text{K} < T < 950^\circ\text{K}$, у которого спины магнитных ионов чередуются следующим образом: $(+ - - +)$. Обе структуры допускают существование слабого ферромагнетизма с результирующим магнитным моментом, направленным перпендикулярно плоскости симметрии [3]. Хотя трансляционные периоды решетки не изменяются и вид зоны Бриллюэна в магнитной структуре сохраняется, полной идентичности симметричных точек нет.

Ниже приведены соответствия между симметриями точек зоны Бриллюэна в немагнитной и магнитной структурах:

$\Gamma_{\text{магн}} \rightarrow D_{\text{немагн}}$; $Z_{\text{магн}} \rightarrow A_{\text{немагн}}$; но $D_{\text{магн}} \rightarrow D_{\text{немагн}}$,
 $A \rightarrow_{\text{магн}} A_{\text{немагн}}$, $\Lambda_{\text{магн}} \rightarrow \Sigma_{\text{немагн}}$, $\Delta_{\text{магн}} \rightarrow \Delta_{\text{немагн}}$, $B_{\text{магн}} \rightarrow B_{\text{немагн}}$,
 $\Sigma_{\text{магн}} \rightarrow \Sigma_{\text{немагн}}$, если спины расположены в соответствующей плоскости симметрии. В противном случае $D_{\text{магн}}$ и $A_{\text{магн}}$ обладают симметрией C_2 , а Λ' , Δ' , A' , Σ' не обладают никакой симметрией. Неприводимые представления берутся из табл. 3—8. Понижение симметрии по сравнению со структурой FeCO_3 приводит к снятию вырождения во всех точках зоны Бриллюэна, за исключением точки Z и точки A , расположенной на плоскости симметрии. Это обстоятельство сопровождается

снятием вырождения и внутри „звезды“ $\vec{k}$. Анализ на экстремум, проведенный по формуле (1), показывает, что точки Γ , D являются экстремальными, экстремумы могут быть расположены в одной точке на линиях или плоскости симметрии. Точка A , не расположенная в плоскости спинов (A'), также является экстремальной. В точках Z и A наклон имеется во всех направлениях.

На рис. 6 показан ход кривых $\epsilon(\vec{k})$ по всей зоне Бриллюэна для двух ветвей спиновых волн в структуре MnCO_3 . Неэквивалентные точки на рис. 6 различаются штрихом. Сопоставление рис. 5 и 6 позволяет проследить за изменением спектра спиновых волн в Fe_2O_3 при

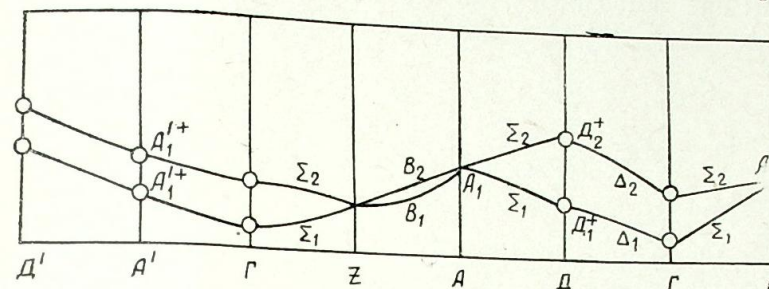


Рис. 6. Вид $\epsilon(\vec{k})$ для спиновых волн в MnCO_3 .

изменении его магнитной симметрии. Наиболее интересным является появление щели в точке $\vec{k} = 0$ и на границе зоны в точке A' , а также вдоль ромбоэдрической оси. Более подробный анализ с учетом четырех ветвей спиновых волн в структуре Fe_2O_3 будет дан в другой работе.

Магнитная пространственная группа структуры CoCO_3

Магнитная структура CoCO_3 получается из кристаллографической, если спины магнитных ионов расположить вдоль одной из осей второго порядка [3]. Эта структура также допускает существование слабого ферромагнетизма. Элементами симметрии являются: T , I , $\theta\bar{\sigma}$, $\theta\bar{I}\bar{\sigma}$, где θ —антиунитарный оператор обращения времени Вигнера. Таким образом группа симметрии этой структуры содержит антиунитарные операторы. Неприводимые представления группы унитарных операторов содержатся в табл. 8. Соответствия между симметриями точек зоны Бриллюэна неупорядоченной и магнитоупорядоченной фазы следующие: $(\Gamma, Z, A, D)_{\text{магн}} \rightarrow A'$. Остальные точки не обладают элементами симметрии унитарной группы. Однако точки, расположенные на линиях Δ и B , вдоль направлений спинов, а также на плоскости Σ , перпендикулярной этому направлению, содержат в качестве элементов симметрии антиунитарные операторы. Анализ на дополнительное вырождение состояний в этих точках с помощью критериев, введенных Диммоком и Уилером, показывает, что вдоль линии B , включая точки Z и A , имеется двухкратное вырождение из-за симметрии относительно инверсии времени.

Для нахождения экстремальных точек в случае группы, содержащей антиунитарные операторы, были видоизменены критерии Рашби и Шеки, следуя выводу, предложенному Пикусом [4]. Поскольку действие антиунитарного оператора сводится к взятию комплексного сопряжения и замене аргумента функции $\vec{r}$ на $V_0^{-1}\vec{r}$, где V_0 в нашем случае есть $\bar{\sigma}$ или $\bar{I}\bar{\sigma}$, то полученная функция может быть выражена

через линейную комбинацию $\varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r})$, если нет дополнительного вырождения (случай *a*), или же объединяется с функциями $\varphi_{\vec{k}_0}(\vec{r})$ если имеется дополнительное вырождение (случаи *b* и *c*). Критериями нулевого наклона в первом случае являются

$$\frac{1}{2n} \sum_{g \in G \rightarrow \vec{k}_0} \{ \chi_0(g) | \chi(g) |^2 + \gamma_{\chi} (V_0 g) \chi [(V_0 g)^2] \} = 0, \quad (2)$$

где $\gamma = \mp 1$, соответственно, для однозначных и двузначных представлений. Во втором случае критериями нулевого наклона является одновременное выполнение условий (1) и (2).

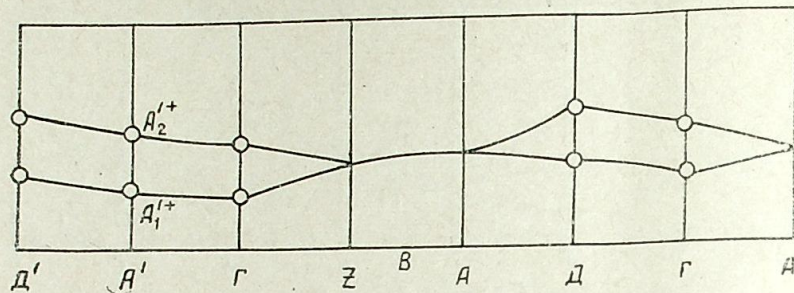


Рис. 7. Вид $\epsilon(\vec{\kappa})$ для спиновых волн в CoCO_3 .

Таким образом получено, что экстремумы располагаются в точках Γ , D , D' и A' , а также могут быть в одной точке на линии Δ и на плоскости Σ . В точках A и Z и на линии B имеются наклоны во всех направлениях.

Ход кривых $\epsilon(\vec{\kappa})$ для двух ветвей спиновых волн в структуре CoCO_3 показан на рис. 7. Интересно, что вдоль линии B две ветви сливаются, чего нет в структурах FeCO_3 и MnCO_3 .

Магнитная пространственная группа структуры Cr_2O_3

Эта структура получается при расположении спинов на плоскости симметрии в порядке $(+ - + -)$ и обладает элементами симметрии E , θJ . В произвольной точке зоны Бриллюэна нет вырождения для однозначных представлений и имеется двухкратное вырождение для двузначных. Точки Γ , Z , A и D являются экстремальными, согласно критерию (2).

Закон дисперсии для магнонов в структурах карбонатов

Как показано в работах [4,7], матрицу $D(\kappa)$ оператора энергии можно построить следующим образом:

$$D(\kappa) = \sum_{t, r, s} C_s^{t, r} \sum_i \varphi_{si}^t(I) f_{si}^r(\kappa), \quad (3)$$

где под κ подразумеваются не только компоненты волнового вектора $\vec{\kappa}$, но и компоненты тензора деформации ϵ_{ij} , магнитного поля H_i и т. д.: $\varphi_{si}^t(I)$ — функции от матриц углового момента; $f_{si}^r(\kappa)$ — функции от κ , ϵ_{ij} и H_i и т. д., являющиеся базисными функциями представлений T_s и T_s^* ; i — нумерация функций внутри представления T_s ; r — номер всевозможных функций f , преобразующихся по данной строке неприводимого представления T_s ; t нумерует такие же функции от

J . В сумму входят те неприводимые представления, которые содержатся в прямом произведении $T_0 \times T_0^*$, где T_0 — представление, по которому преобразуются в нашем случае спиновые волны. Здесь мы воспользуемся этим методом нахождения закона дисперсии для спиновых волн в выше рассмотренных структурах.

Спиновые волны в структуре FeCO_3 преобразуются как Λ_3 в произвольной точке на оси Λ . В качестве матриц I возьмем матрицы представления Λ_3 , однако модули характеров этого представления и (3) в любом представлении [4]. В прямом произведении $\Lambda_3 \times \Lambda_3^*$ держаться один раз единичное представление Λ_1 , один раз Λ_2 и один раз Λ_3 . Таким образом матрицу $D(\kappa)$ можно записать в виде

$$D(\kappa) = a_1 \cdot f_1^r(\kappa) \cdot I + a_2 \cdot f_2^r(\kappa) \cdot I_z + a_3 (f_{31}^r(\kappa) \cdot I_+ + f_{32}^r(\kappa) \cdot I_-) \quad (4)$$

$$\text{где } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$f_1^r(\kappa) = \{C, \kappa_x^2, \kappa_y^2, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \kappa_z\}, \quad (6)$$

$$f_2^r(\kappa) = H_z, \quad (7)$$

$$f_{31}^r(\kappa) = f_{32}^r(\kappa) = \{\kappa_+^2, \kappa_+ \kappa_z, \kappa_+, \epsilon_+, \epsilon_{+z}, H_+\}. \quad (8)$$

Подставляя (5)–(8) в (4) и приравнявая определитель $D(\kappa) = 0$, получим закон дисперсии $\epsilon^2(\kappa)$ для спиновых волн в окрестности произвольной точки на линии Λ . В точке Γ следует положить коэффициенты при линейных по κ членах равными нулю, так как из предыдущего анализа нам известно, что эта точка экстремальная; аналогично следует положить коэффициент при κ_z равным нулю в точке Z . Интересной особенностью найденного закона дисперсии является аналитическое разложение $\epsilon^2(\kappa)$ при $H_z = 0$, несмотря на слияние двух ветвей.

Рассмотрим теперь произвольную точку на плоскости Σ . Аналогично предыдущему находим

$$D(\kappa) = (a_1 I + a_2 I_x) f_1^r(\kappa) + (a_3 I_z + a_4 I_y) f_2^r(\kappa), \quad (9)$$

$$\text{где } I_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$f_1^r(\kappa) = \{C, \kappa_y, \kappa_z, \kappa_x^2, \kappa_y^2, \kappa_z^2, \kappa_y \kappa_z, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{yz}, H_x\}, \quad (11)$$

$$f_2^r(\kappa) = \{\kappa_x \kappa_z, \kappa_y \kappa_x, \kappa_x, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, H_y, L_z\}. \quad (12)$$

В точке D коэффициент при линейных по κ членах следует положить равными нулю, так как в этой точке имеется экстремум. В точке A коэффициент C под корнем следует положить равным нулю, так как здесь нет расщепления.

Спиновые волны в структуре MnCO_3 в точках Γ и D имеют такой же закон дисперсии, как в точке D структуры FeCO_3 , а в точках Z и A , как в точке A структуры FeCO_3 . Остается рассмотреть точки D' и A' с симметрией C_i . Здесь

$$D(\kappa) = (a_1 I + a_2 I_z + a_3 I_x + a_4 I_y) f_1^r(\kappa), \quad (13)$$

где

$$f_1^r(\kappa) = \{C, \kappa_i \kappa_j, \epsilon_{ij}, H_i\}, \quad i, j = x, y, z, \quad (14)$$

В структуре CoCO_3 в точках D' и A' закон дисперсии для спиновых волн такой же, как (13).

В произвольной точке на плоскости Σ

$$D(\kappa) = (a_1 I + a_2 I_z + a_3 I_y) f_1^r(\kappa) + a_4 I_x f_2^r(\kappa), \quad (15)$$

где

$$f_1^r(\kappa) = \{C, \kappa_x, \kappa_x^2, \kappa_y^2, \kappa_z^2, \kappa_y \kappa_z, \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{yz}, H_y, H_z\}, \quad (16)$$

$$f_2^r(\kappa) = \{\kappa_x \kappa_z, \kappa_x \kappa_y, \kappa_y, \kappa_z, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yx}, H_x\} \quad (17)$$

—функции, преобразующиеся по представлениям Σ_1^+ и Σ_2^+ группы Σ . В точках Γ и D линейные члены аннулируются, а вдоль линии B постоянный коэффициент C и все коэффициенты при членах κ_x , κ_x^2 находятся под корнем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dimmock J. O. and Wheeler R. G. Phys. Rev., 127, 391, 1962.
2. Dimmock J. O. and Wheeler R. G. J. Phys. a chem. Solids, 23, 729 1962.
3. Дзялошинский И. Е. ЖЭТФ, 32, 1547, 1957.
4. Пикус Г. Е. ЖЭТФ, 41, 1258, 1507, 1961.
5. Рашба Э. И. ФТТ, 1, 407, 1959.
6. Шека В. И. ФТТ, 2, 1211, 1960.
7. Luttinger J. M. Phys. rev., 102, 1030, 1956.
8. Koster G. F, Solid State Physics, ed. by F. Seitz and. Turnbull, Acad. Press. Inc., N. U, 1957, v. 5, p. 209.
9. Ковалев О. В. Неприводимые представления пространственных групп. Киев, 1961
10. Боровик—Романов А. С. Антиферромагнетизм и ферриты. Итоги науки. № 4 М., 1962

Поступило 28. I 1969

Ф. М. Нашимзаде, J. М. Сеидов

Элементар ојанмаларын D_{3d}^6 кристаллографик структурлу магнит кристалларында симметрия хассэлери

ХҮЛАСӘ

Ади кристаллографик D_{3d}^6 группундан спинларин гәфәсдә низамлы һала кечмәси нәтижәсиндә әмәлә кәлән магнит фәза группларынын групп нәзәријәси өјрәнилмишдир.

Бриллјуен зонасынын симметрик нөгтәләриндә спин далғасынын енержиси үчүн дисперсија гануну вә онун мүхтәлиф харици амилләрдән мәсәлән, магнит саһәсиндән, деформасијадан вә електрик саһәсиндән асылылығы өјрәнилмишдир.

УДК 539. 293:537. 322

С. А. АЛИЕВ

ТЕРМОМАГНИТНЫЕ И ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДОГО РАСТВОРА $Cd_{0,1}Hg_{0,9}Te$ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Многочисленные исследования, проведенные за последние годы, показывают, что зонная структура $HgTe$ сложна и ни одна модель не дает полного объяснения всех экспериментальных результатов. Согласно Харману и др. [1] зона проводимости $HgTe$ перекрывается с валентной зоной при $\kappa \neq 0$ ($|\epsilon_{gt}| = 0,02$ эв). В работе [2] найдено, что приведение $R_H \cdot T^{3/2}$ остается постоянным в широком интервале температур (от 20 до 400°K). Такую особенность $HgTe$ авторы объясняют применяя зонную структуру серого олова, предложенную Гровсом и Полом [3].

Существенной особенностью данной модели, в противоположность конфигурации зон всех изученных полупроводников со структурами алмаза с цинковой обманкой, является локализация уровня Γ_8 над уровнем Γ_6 . При $\kappa = 0$ зона проводимости вырождается с зоной тяжелых дырок и $\epsilon_g = 0$. Сплав $HgTe$ с $CdTe$ образует непрерывный ряд твердых растворов [4]. При этом можно ожидать получения полупроводников с любой наперед заданной шириной запрещенной зоны в широком интервале ($1,4 \div 0,01$ эв). В таких твердых растворах, в зависимости от величины ϵ_g , происходят существенные изменения электрических, тепловых и оптических свойств. При малом содержании Cd ($0,1 \div 0,2$), вследствие малого значения эффективной массы, подвижность электронов увеличивается на порядок по сравнению с $HgTe$. Высокая подвижность электронов и малая фоновая доля теплопроводности твердых растворов $Cd_xHg_{1-x}Te$ делают их удобными для исследования термомагнитных и гальваномагнитных свойств.

Настоящая статья посвящена комплексному исследованию кинетических эффектов твердого раствора $Cd_{0,1}Hg_{0,9}Te$ в широком интервале температур (2—300°K) и магнитных полей (до 22 э). Крупнокристаллические образцы, приготовленные сплавлением отдельных компонентов с последующей кристаллизацией методом Бриджмена, были отожжены в атмосфере насыщенных паров ртути. Рентгеноструктурный анализ указывает на однофазность исследованного образца (вторая фаза занимает около 1% поверхности образца)*.

* Автор выражает благодарность А. М. Заславскому за проведение рентгеновского анализа.

На рис. 1 и 2 представлены кривые зависимости коэффициента Холла R (рис. 1а, слабые магнитные поля) и магнетосопротивления от напряженности магнитного поля при различных температурах. На рис. 3 показана температурная зависимость коэффициентов Холла R (при слабом поле), электропроводности σ и холловской подвижности $R\sigma$ электронов. Из этих рисунков следует, что область смешанной

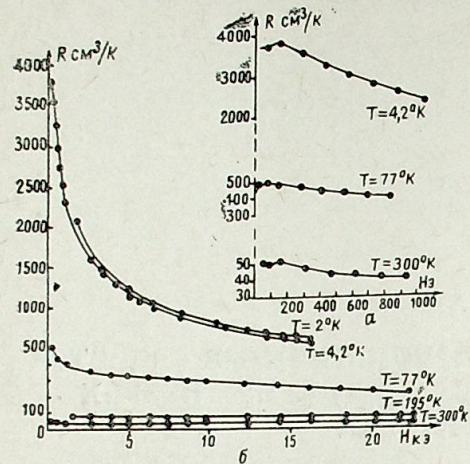


Рис. 1. Зависимость коэффициента Холла от напряженности магнитного поля при различных температурах.

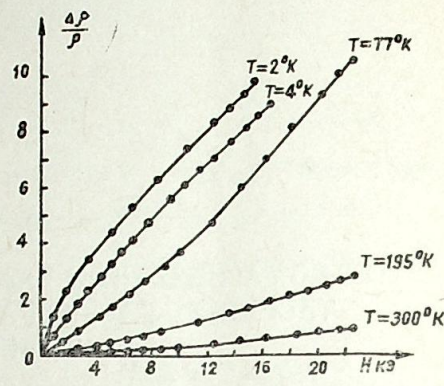


Рис. 2. Зависимость магнетосопротивления от напряженности поля при различных температурах.

проводимости простирается от комнатной температуры до самых низких. Концентрация электронов (при гелиевых температурах) $n = 1.7 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$, подвижность, оцененная по $R\sigma$, растет от 30 000 $\text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ при 300°K до 280 000 $\text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ при 2°K.

На смешанный характер проводимости указывает и представленная на рис. 4 зависимость безразмерного поля Нернста ϵ_y от напряжен-

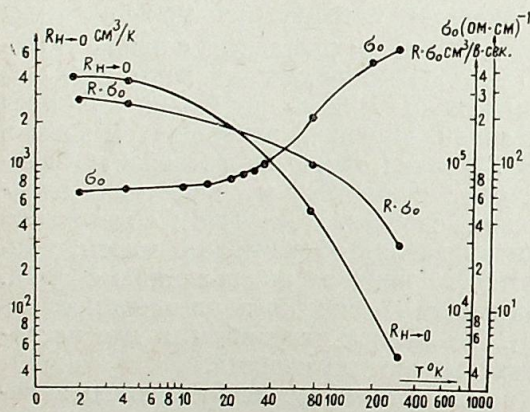


Рис. 3. Температурная зависимость $R_{H=0}$ и $R\sigma$.

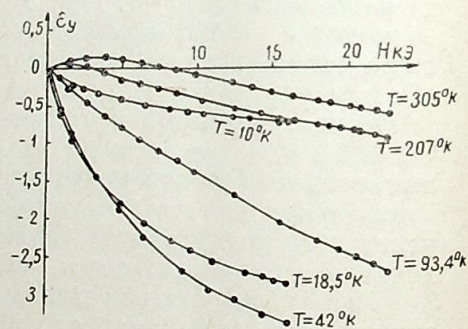


Рис. 4. Зависимость безразмерного поля Нернста ϵ_y от магнитного поля при различных температурах.

ности магнитного поля. Согласно теории [5] при $n_+ \neq n_-$ зависимость $\epsilon_y(H)$ имеет такой же характер, как и для примесной проводимости, т. е. при $\left(\frac{u_{\pm} H}{c}\right)^2 \ll 1$ $\epsilon_y \sim \left(\frac{u_{\pm} H}{c}\right)$, а при $\frac{u_{\pm} H}{c} \gg 1$ $\epsilon_y \sim \left(\frac{u_{\pm} H}{c}\right)^{-1}$

(при $\frac{u_{\pm} H}{c} = 1$ ϵ_y проходит через максимум). Если же $n_+ = n_-$, то в сильных магнитных полях ϵ_y не убывает, а увеличивается с ростом $\frac{uH}{c}$, как в случае слабых полей. Из рис. 4 видно, что ниже 200°K ϵ_y растет с ростом $\frac{uH}{c}$ ($\frac{uH}{c} \approx 50$). Такая зависимость ϵ_y связана с тем, что для дырок $\frac{u_{\pm} H}{c} \ll 1$.

На рис. 5 представлены экспериментальные данные о зависимости магнетотермо-э. д. с. $\Delta\alpha(H)$ от напряженности магнитного поля при различных температурах. Из этого рисунка видно, что при 200° и H , достигая больших значений. При низких температурах изменение термо-э. д. с. в магнитном поле достигает настолько больших значений, что изменяет и знак α (рис. 6). Это хорошо видно из рис. 7, на котором показана температурная зависимость $\Delta\alpha$ при различных значениях H .

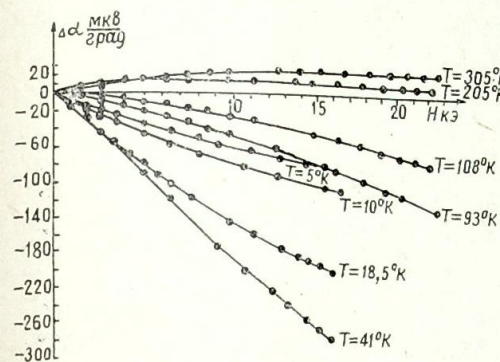


Рис. 5. Зависимость магнетотермо-э. д. с. $\Delta\alpha$ от напряженности поля при различных температурах.

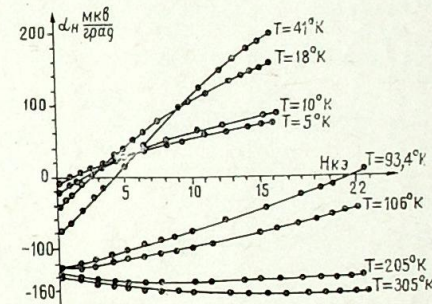


Рис. 6. Зависимость термо-э. д. с. α_H от поля при различных температурах.

Исходя из приведенных здесь результатов по гальвано-и термо-магнитным свойствам, можно полагать, что в исследованном образце в интервале 200÷300°K эффекты ведут себя как в случае полупроводника с одним типом носителей тока. Это может быть объяснено большим отношением подвижностей $\left(b = \frac{n_-}{n_+}\right)$ в указанном интервале.

В работе [6] была определена ширина запрещенной зоны твердых растворов $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$, согласно которой для $x = 0,1$ $\epsilon_g = 0,1 \text{ эв}$. При дальнейшем теоретическом анализе, основываясь на результатах работы [7], было принято, что в $\text{Cd}_{0,1}\text{Hg}_{0,9}\text{Te}$ закон дисперсии соответствует теории Кейна. Из экспериментальных данных с помощью приближенной формулы [8]

$$\alpha_{\infty} = \frac{\kappa_0}{e} \left\{ \frac{\frac{5}{2} F_{3/2} + \frac{21}{4} \delta F_{3/2} + \frac{27}{16} \delta^2 F_{3/2} - \frac{11}{32} \delta^3 F_{3/2} + \frac{39}{256} \delta^4 F_{3/2}}{\frac{3}{2} F_{1/2} + \frac{15}{4} \delta F_{1/2} + \frac{21}{16} \delta^2 F_{1/2} - \frac{9}{32} \delta^3 F_{1/2} + \frac{33}{256} \delta^4 F_{1/2}} \right\} \quad (1)$$

определялось значение приведенного химпотенциала, которое равно

2,2 и 3 при 300 и 200°K, соответственно. Здесь $\delta = \frac{\kappa_0 T}{\varepsilon_g}$. По данным α_∞ и R_∞ с помощью формулы

$$m^* = \frac{e}{\pi^2 \kappa_0^2 T} \left(\frac{3h^3}{8\pi e R_\infty} \right)^{2/3} \cdot \alpha_\infty \quad (2)$$

при 300°K определялась эффективная масса электронов на уровне Ферми $\frac{m^*}{m_0} = 0,015$. Затем, согласно формуле

$$n = \frac{1}{e c R_\infty} = \frac{4\pi}{h^2} (2m_0^* \kappa_0 T)^{3/2} \left\{ F_{1/2} + \frac{5}{2} \delta F_{3/2} + \frac{7}{2} \delta^2 F_{5/2} - \frac{3}{16} \delta^3 F_{7/2} \right\} \quad (3)$$

была оценена и эффективная масса на дне зоны проводимости, для которой было получено $\frac{m_0^*}{m_0} = 0,008$.

Для определения параметра механизма рассеяния r , с помощью которого в теории определяется зависимость времени релаксации τ от положения носителей тока в зоне, имеющего в случае нестандартной зоны вид

$$\tau = \tau_0 (\kappa^2)^{r - \frac{1}{2}} \frac{d\varepsilon}{d\kappa}, \quad (4)$$

использовались экспериментальные данные о термо-э. д. с. α , магнетотермо-э. д. с. в сильном магнитном поле $\Delta\alpha_\infty$ и эффекте Нернста в слабом магнитном поле θ_1 . В случае нестандартной зоны эти величины зависят как от параметра r , так и от параметра нестандартности зоны γ , определяемого вырождением:

$$\gamma = \frac{n}{m^*} \frac{dm^*}{dn}. \quad (5)$$

В случае сильного вырождения эти коэффициенты выражаются следующими формулами [9]:

$$\alpha = \frac{\pi^{2/3} \kappa_0^2 m^* T^{1/2}}{3eh^2 (3n)^{2/3}} \{2r + 3 - 6\gamma\}, \quad (6)$$

$$\Delta\alpha_\infty = \frac{\pi^{2/3} \kappa_0^2 m^* T}{3eh^2 (3n)^{2/3}} \{6\gamma - 2r\}, \quad (7)$$

$$\theta_1 = R\gamma \frac{\pi^{2/3} \kappa_0^2 m^* T}{3eh^2 (3n)^{2/3}} \{6\gamma - 2r\}^*. \quad (8)$$

Пользуясь формулой Кейна для концентрационной зависимости эффективной массы:

$$\frac{m^*/m_0}{1 - m^*/m_0} = \frac{m^*}{m_0} \sqrt{1 - \frac{2h^2 \kappa^2}{\varepsilon_g} \cdot \frac{m_0 - m_0^*}{m_0 m_0^*}} \quad (9)$$

* Ввиду отсутствия соответствующего знака постоянная Планка в формулах (6), (7), (8), (9) представлена в виде $h = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек.

и соотношением (5), по известным значениям m^*/m_0 , m_0^*/m_0 , ε_g и n вычисляли параметр $\gamma = 0,28$. Зная γ , по формулам (6), (7), (8) определили параметр r . Из всех трех эффектов получено, что при 300 и 200°K r близок 1/2. Ввиду того, что вырождение было несильным, $r = 1/2$:

$$\alpha = \frac{\kappa_0}{e} \left\{ \frac{3F_2 - 4\delta F_3 + \frac{35}{12} \delta^2 F_4 + \dots}{2F_1 - 3\delta F_2 + \frac{7}{3} \delta^2 F_3 + \dots} - \mu^* \right\}. \quad (10)$$

Расхождение не превышало 5 ÷ 6%.

Исходя из этих результатов, на данном этапе исследований нельзя делать однозначного заключения о механизме рассеяния носителей тока, хотя в теории значение $r = 1/2$ соответствует рассеянию на оптических фононах.

Автор выражает благодарность Ф. М. Гашимзаде за участие в обсуждении полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Strauss A. S. Harman Proceedings of the Inter Conf. of phys. Semic. Exeter, 703, 1962.
2. Piotrkowski R., Porowski S., Dziuba Z., Ginter L., Gierat and Sosnowski L. Phys. stat. Sol., 8 K135 (1965).
3. Groves S. and Paul W. Phys. rev. letters, 11, 194 (1963).
4. Ray and B., Spencer P. M. Phys. stat. sol., 371 (1967).
5. И. М. Цидильковский. Термоманитные явления в полупроводниках. Физматгиз, 1960.
6. Blue. Phys. chem. sol, 9, 325 (1959).
7. Gatazka R. R. and Sosnowski L. Phys. stat. sol., 20, 113 (1967).
8. Шалыт С. С., Алиев С. А. ФТТ, 6, 1979, 1964.
9. Kolodziejzak I., Sosnowski L. Acta phys. Polon., 21, 399, 1962.

Поступило 8. VIII 1968

С. А. Элиев

Cd_{0.1}Hg_{0.9}Te бэрк мэхлулунун ашагы температурларда термоманит вэ галваноманит хассэлэри

ХҮЛАСӨ

2—300° K температур интервалында Cd_{0.1}Hg_{0.9}Te бэрк мэхлулунун термо вэ галваноманит хассэлэри комплекс тэдгиг олуишудур.

R , $\frac{\Delta\rho}{\rho}$, ε_y вэ $\Delta\alpha$ -нын экспериментал гижмэтлэринин магнит сахэси вэ

температур асылылыгына эсасэн мүнүшдир ки, тэдгигат апарылмыш температур интервалында Cd_{0.1}Hg_{0.9}Te бэрк мэхлулунун кечиричилиги гарышыг характер дашыыр.

α_∞ вэ R_∞ -ун гижмэтлэринэ эсасэн 300°K-да електонларын эффектив күтлэлэринин Ферми савијјесиндеки $\frac{m^*}{m_0} = 0,015$ вэ кечиричилик зола-

гынын дибиндеки $\frac{m_0^*}{m_0} = 0,008$ гижмэтлэри несаланмышдыр. α_0 , Q_1 вэ

$\Delta\alpha_\infty$ кинетик эмсаллар эсасында, отаг температурунда кечиричилик золагынын гејри-параболиклијини нэзэрэ алмагла, сепилмэ механизми

параметринин эффектив гижмэти тэјин едилмишдир — $r = \frac{1}{2}$.

Д. Б. БАЯСАНОВ, В. Л. ШПАКОВ

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОПРОВОДАХ

1°. Движение газа по магистральному горизонтальному газопроводу постоянного сечения описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^2}{\partial x} &= aQ|Q|, \\ -\frac{\partial P}{\partial t} &= b \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $P(x, t)$ —давление,
 $Q(x, t)$ —расход газа,
 x —координата точки трубы,
 t —время,

a и b —коэффициенты, зависящие от параметров трубы и перекачиваемого газа.

Решение системы уравнений (1) ищется на полосе $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, где l —длина трубы, при известных начальных и граничных условиях. Однако получение его является весьма сложной задачей. Решение находится только численными методами, наиболее распространенными среди которых являются разностные методы [1]. При использовании разностных методов для решения системы уравнений (1) очень важно произвести рациональный выбор величины шагов разбиений по x и t : выбор малых шагов, заведомо обеспечивающих хорошую точность решения, зачастую приводит к недопустимому увеличению машинного времени решения задачи, поэтому на практике широко используется метод пробных решений с различными величинами шагов разбиения. Сравнение отдельных решений с экспериментальными данными позволяет добиваться удовлетворительных результатов.

2°. Для большого количества практических задач оказывается допустимым рассматривать трубу как некоторую систему, имеющую один входной и один выходной параметр. Например, если на одном конце трубы ($x=0$) расположена автоматизированная компрессорная станция, поддерживающая давление постоянным (левое граничное условие $P(0, t) = P_0 = \text{const}$), то давление на другом конце будет функционально зависеть только от расхода:

$$P(l, t) = F(Q(l, t)), \quad (2)$$

где F —некоторый функционал, определенный начальным состоянием системы (начальными условиями) и функцией времени $Q(l, t)$. В этом случае можно рассматривать $Q(l, t)$ как входной, а $P(l, t)$ как выходной параметр.

Зная те или иные свойства замкнутой системы, состоящей, например, из газопровода и потребителя, для которого известна зависимость Q от P (величины потребления газа от давления) и некоторых внешних параметров q , будем иметь

$$Q = F_1(P, q). \quad (3)$$

Тогда задача исследования влияния изменения параметров q (q —вектор) сводится к исследованию поведения замкнутой системы (рис. 1). Таким образом выяснение свойств функционала (2) позволяет производить дальнейшее исследование всей системы, пользуясь хорошо разработанными методами теории автоматического регулирования [2].

В случае, когда отклонения давления и расхода от некоторого стационарного режима незначительны, нелинейную систему (1) можно заменить линеаризованной и тогда функционал F становится линейным, а его свойства можно описать заданием амплитудно-фазовых характеристик.

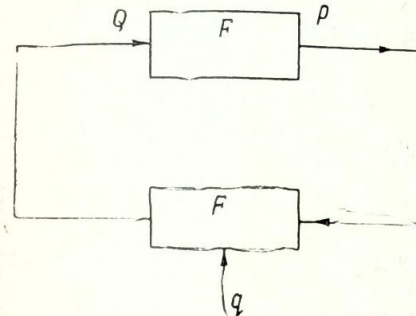


Рис. 1. Замкнутый контур газопровод-потребитель.

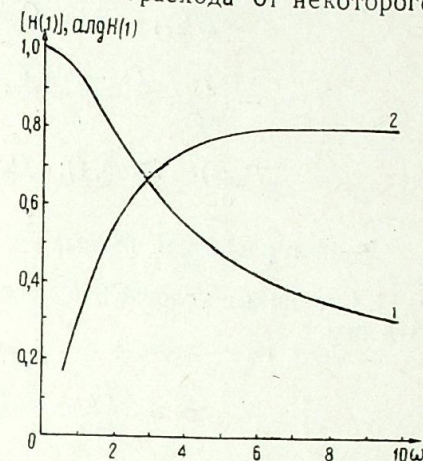


Рис. 2. Амплитудно- и фазово-частотная характеристики функционала F :

1—амплитудно-частотная;
2—фазово-частотная.

3°. Итак рассмотрим линеаризованные уравнения транспорта газа, которые путем замены переменных всегда можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} &= Q \\ -\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $x \in [0, 1]$.

Пусть $P(0, t) \equiv 0$, тогда функционал F будет зависеть только от начальных данных ($P(x, 0), x \in [0, 1]$). В этом случае легко определить его амплитудно-фазовые характеристики. Полагая $Q(1, t) = e^{i\omega t}$, ищем квазистационарное решение системы (4) в виде

$$P(x, t) = H(x) e^{i\omega t}, \quad Q(x, t) = v(x) e^{i\omega t}, \quad (5)$$

уже не зависящее от начальных данных. После подстановки (5) система уравнений (4) превращается в систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Решая ее, получаем

$$H(1) = -\alpha \frac{1+i}{i\omega} \cdot \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha}) \cos \alpha + i(e^\alpha + e^{-\alpha}) \sin \alpha}{(e^\alpha + e^{-\alpha}) \cos \alpha + i(e^\alpha - e^{-\alpha}) \sin \alpha}, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2}}$$

Полученные по формуле (6) амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики функционала F при приведении системы уравнений (1) к виду (4) представлены на рис. 2.

4°. При расчетах как на ЭЦВМ, так и на аналоговых моделирующих установках (в первом случае методом сеток, во втором методом прямых) погрешность решения в конечном счете обусловлена неточностью реализации функционала F .

В случае использования для численного решения метода прямых производится разбиение оси x , частные производные по x заменяются их конечно-разностными выражениями. Таким образом система (4) заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-(P_{\kappa+1} - P_{\kappa}) = Q_{\kappa} h, \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1; \quad (7)$$

$$-\frac{dP_{\kappa}}{dt} = \frac{Q_{\kappa} - Q_{\kappa-1}}{h}, \quad \kappa = 1, \dots, n-1,$$

где

$$P_{\kappa}(t) = P(\kappa h, t); \quad Q_{\kappa}(t) = Q\left(\frac{2\kappa+1}{2}h, t\right);$$

h —шаг разбиения равный $\frac{1}{n}$, если решение ищется на отрезке $[0, 1]$. Граничные условия 3° в конечно-разностной форме можно записать в виде

$$P_0(t) \approx 0, \quad -\frac{dP_n}{dt} = \frac{2}{h}(e^{i\omega t} - Q_{n-1}). \quad (8)$$

Как и в 3°, ищем квазистационарное решение системы (7), (8) в виде

$$P_{\kappa}(t) = H_{\kappa} e^{i\omega t} \quad Q_{\kappa}(t) = v_{\kappa} e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Подстановка выражений (9) в уравнения (7) и (8) приводит к системе алгебраических уравнений:

$$H_{\kappa+1} = H_{\kappa} - h v_{\kappa}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1; \\ v_{\kappa} = v_{\kappa-1} - i\omega h H_{\kappa}, \quad \kappa = 1, \dots, n-1; \quad (10)$$

$$v_n = v_{n-1} - \frac{i\omega h}{2} H_n;$$

$$H_0 = 0; \quad v_n = 1.$$

Система (10) легко решается методом прогонки [3], и на ЭЦВМ можно получить зависимость H_n от ω .

На рис. 3 и 4 представлены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики функционала F при его аппроксимации путем решения системы (4) методом прямых, при 8 и 2 звеньях разбиения отрезка $[0, 1]$ оси x . Крестиками нанесены точные значения рис. 1. Из графиков видно, что с уменьшением числа звеньев разбиения n амплитудно-частотная характеристика почти не меняется (при $n=2$ погрешность не более 2,5% при $\omega \leq 10$), фазово-частотная же изменяется значительно.

В случае проведения расчетов на ЭЦВМ методом сеток указанным выше способом можно определить погрешность, связанную с дискретизацией оси x , а погрешность дискретизации оси времени можно

определять машинным экспериментом, сравнения решения, получаемые при различных шагах по времени.

5°. В заключение рассмотрим пример конкретного газопровода ПГРС Шебелинская—Харьков. Длина участка 57,3 км, диаметр трубопровода 0,41 м, среднее значение давления 45 ата, расхода—170 тыс. нм³/час.

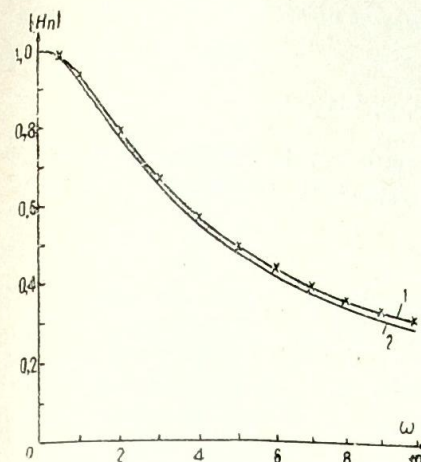


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики H_n ; 1—при $n=8$; 2—при $n=2$.

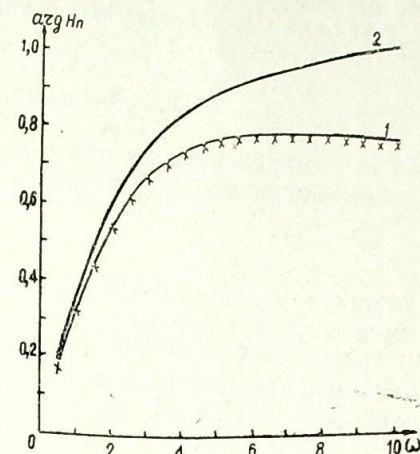


Рис. 4. Фазово-частотные характеристики H_n ; 1—при $n=8$; 2—при $n=2$.

Линеаризуя уравнения (1), приходим к линейной системе:

$$-\frac{\partial P^*}{\partial x^*} = a^* Q^*; \\ -\frac{\partial P^*}{\partial t^*} = b^* \frac{\partial Q^*}{\partial x^*}, \quad (11)$$

где P^* —отклонение величины давления от среднего значения (ата), Q^* —отклонение расхода от среднего значения (тыс. нм³/час), $a^* = 0,0185$, $b^* = 0,352$, x^* —координата точки трубы (1 маш. ед. = 10 км), t^* —время (час).

Решение ищется на отрезке $0 \leq x^* \leq 5,73$ маш. ед.

С помощью замены переменных

$$Q^* = \frac{Q}{la^*}, \quad x = \frac{x^*}{l}, \quad P^* = P, \quad t = \frac{b^*}{l^2 a^*} t^*$$

система уравнений (11) приводится к виду, рассматриваемому в пункте 3°. При этом

$$\omega = \frac{l^2 a^*}{b^*} \omega^*,$$

где ω^* —циклическая частота реального изменения расхода (рад/час). Если положить период колебания расхода равным 24 часам, то $\omega \approx 0,45$.

Непосредственно из графиков (рис. 3 и 4) следует, что для таких медленных колебаний расхода можно ограничиться всего двумя звеньями разбиения ($n=2$) для довольно широкого класса практических расчетов (амплитудно-частотная характеристика функционала F выполняется практически точно, а по фазе дискретизация приводит к дополнительному сдвигу на 0,02 рад или 11,5 град).

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Б. М. Тер-Микаэлян Т. М. Решение инженерных задач на цифровых вычислительных машинах. Изд-во "Энергия", М.—Л., 1964.
2. Айзерман М. А. Лекция по теории автоматического регулирования. Физматгиз М., 1958.
3. Шаманский В. Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Изд-во АН УССР. Киев, 1963.
4. Баясанов Д. Б. Автоматическое управление магистральными газопроводами. Изд-во "Недра", М.—Л., 1964.

Поступило 24. VI 1968

Д. Б. Баясанов, В. Л. Шпаков

Газ кэмәрində кечид просесләринин ахтарышлары заманы амплитуд фаз характеристикаларындан истифадə үсулу

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə амплитуд фаз характеристикаларындан истифадə едərək хəгə фəрглəri методу үчүн гапалы автоматик тəнзим системлəринə дахил олан макистрал газ кэмəрлəриндə газын хəрəkəтиндən бəһс едилмишдир. Газ кэмəрлəринин амплитуд фаз характеристикаларынын хесабланмасы, мүнəндис методикасы вə мұхтəлиф методларла онун тəгриби модели ЕНМ-дə мұəјјəнлəшдирилмишдир. Бу методлар конкрет олараг газ кэмəри мисалында ишыгландырылмышдыр.

АЗƏРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə ријазийат елмлəri серијасы, 1969, № 2
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 2

УДК 53. 9293. 537322

Д. И. ЛАЙНЕР, Г. К. САМЕДОВ

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОАКТИВНОЙ ПРИМЕСИ $PbCl_2$ НА ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ $PbTe-SnTe-PbS$

Авторы [1], рассмотрев вопрос о влиянии примесей галогенов свинца ($PbBr_2$, $PbCl_2$, PbJ_2) на термоэлектрические свойства n - $PbTe$, пришли к выводу, что наиболее надежной донорной примесью, при помощи которой можно значительно увеличить концентрацию носителей тока, является двойная примесь вида $PbBr_2 + Pb$ (избыток свинца), при этом соотношение между числом введенных атомов галогена и получаемых электронов равно единице. Авторами [2] установлено, что термоэлектрические параметры (α и σ) не зависят от вида легирующей примеси и от количества внесенного избыточного свинца.

Настоящая статья посвящена изучению влияния электроактивной примеси $PbCl_2$ на термоэлектрические свойства тройной системы $PbTe-SnTe-PbS$. Для изучения влияния примеси в качестве исходных составов были взяты сплавы № 111 (95% $PbTe + 1,25\%$ $SnTe + 3,75\%$ PbS) и № 113 (90% $PbTe + 5\%$ $SnTe + 5\%$ PbS). Примеси вводились по методике, указанной в работе [1]. Общий вес сплава составлял 100 г, а избыток свинца был принят равным 1 вес%, т. е. 1 г. Образцы, полученные методом порошковой металлургии, подвергались отжигу при $600^\circ C$ в течение трех суток.

Нами произведены измерения электропроводности, коэффициента Зеебека. э.д.с. Холла при комнатной температуре, вычислены концентрация и подвижность носителей тока в предположении, что $\chi = 0$.

На рис. 1 показана зависимость электропроводности и коэффициента Зеебека от содержания $PbCl_2$ в исходном составе № 111. Такая же зависимость представлена на рис. 2 (исходным составом является сплав № 113). Как видно из графиков, увеличение содержания $PbCl_2$

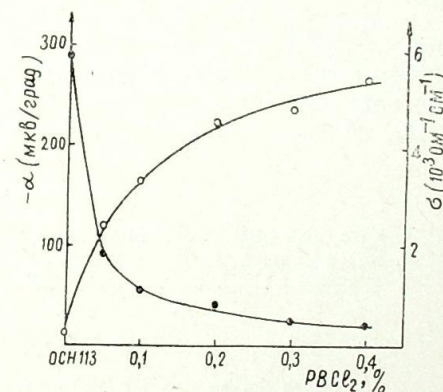


Рис. 1. Зависимость электропроводности и коэффициента Зеебека от содержания примеси $PbCl_2$ в исходном составе № 111.

УДК 548:522.22 539.293:537.311.3

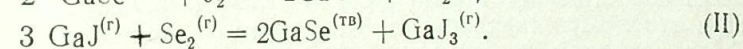
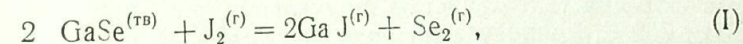
Т. Х. АЗИЗОВ, М. Х. АЛИЕВА, А. З. МАМЕДОВА, К. А. ШАРИФОВ

ПОЛУЧЕНИЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ n - и p -GaSe ГАЗОТРАНСПОРТНЫМ МЕТОДОМ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Получение совершенных тонких слоистых монокристаллов широкозонных полупроводников создает благоприятное обстоятельство для исследования их фотоэлектрических свойств. В [1] приводятся некоторые сведения о выращивании монокристаллов GaSe газотранспортным методом и исследовании подвижности носителей тока в них. Получение монокристаллов p -GaSe этим методом описано также в работе [2]. Однако фотоэлектрические свойства n - и p -GaSe, полученных таким способом, не исследовались. В связи с этим в настоящей работе была поставлена цель — получить монокристаллы n -GaSe газотранспортным методом и исследовать некоторые физические свойства монокристаллов обоих типов. Нами по нижеприведенному режиму получены монокристаллы n -GaSe из газовой фазы и измерены некоторые физические свойства n - и p -GaSe.

Выращивание монокристаллов

Анализ литературных данных [3—6] позволяет предполагать, что перенос моноселенида галлия йодидным методом протекает следующим образом:



Реакция (I) протекает в области высоких температур. При этом образуются газообразные соединения, которые переходят в зону с низкой температурой. В последней протекает реакция диспропорционирования йодидов с выделением галлия [3—6], который в присутствии паров селена* (p_2 , AS_2 в работах [3—6]) образует соединения GaSe (GaP , GaAs).

На основании значений энтальпии образования и энтропии, участвующих в реакции (II) веществ, можно получить ΔH и ΔS для данной реакции. В таблице приведены термодинамические величины, необходимые для расчета зависимости $\lg K$ от T , где K — константа равновесия, T — температура.

* Газообразный селен состоит в основном из двухатомных молекул [7]

сопровождается значительным повышением электропроводности. При этом коэффициент Зеебека уменьшается, приближается к постоянству.

На рис. 3 показана зависимость концентрации и подвижности от содержания PbCl_2 . С увеличением содержания PbCl_2 концентрация носителей тока растет, а их подвижность уменьшается за счет появления дополнительных центров рассеяния носителей тока.

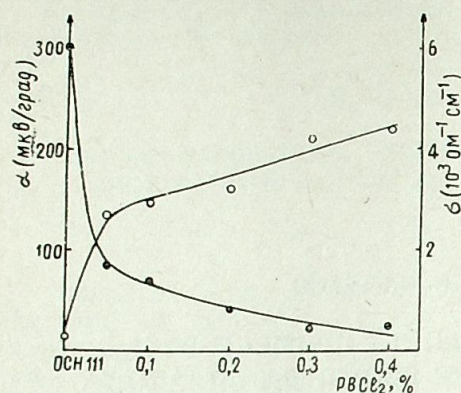


Рис. 2. Зависимость электропроводности и коэффициента Зеебека от содержания PbCl_2 в исходном составе № 113.

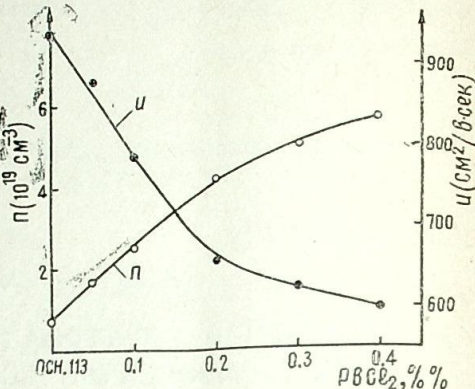


Рис. 3. Зависимость концентрации и подвижности носителей тока от содержания PbCl_2 в исходном составе № 113.

Из рис. 1 и 2 видно, что влияние примеси PbCl_2 на термоэлектрические свойства составов № 111 и 113 однообразно. Согласно модели, предложенной Вагнером [3], при введении примесных молекул PbCl_2 образуется твердый раствор замещения или смешанная кристаллическая структура, что фактически повышает растворимость избыточного свинца. При затвердевании дополнительные молекулы PbCl_2 замещают соответствующее число молекул PbTe , SnTe , PbS , в результате чего образуются вакантные узлы свинца, которые заполняются атомами избыточного свинца, и вследствие того, что валентные электроны этих внедренных атомов не участвуют в химической связи, переходят в зону проводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковальчик Т. Л., Маслаковец Ю. П. ЖТФ, т. 26, 1956 № 11.
2. Девяткова Е. Д., Смирнов И. А. ФТТ, т. 3, 1961, № 8.
3. Wagner C. „J. chem phys“, 18.62 (1950).

Поступило 8. VII 1968

Д. И. Лајнер, Ы. Г. Сәмәдов

Электроактив PbCl_2 ашгарынын PbTe — SnTe — PbS
системы хәлитәләринин термоэлектрик хассәләринә тәсири

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә электроактив PbCl_2 ашгарынын үчгәт PbTe — SnTe — PbS системы хәлитәләринин термоэлектрик хассәләринә тәсири мәсәләләриндән бәһс олуңур. Отаг температурунда электрик кечирмә, Зеебек әмсалы вә һолл еһг-нин өлчмә нәтижәләри кәстәрир ки, 111 (95% PbTe + 1,25 % SnTe + 3,75 % PbS) вә 113 №-ли (90% PbTe + 5% SnTe + 5% PbS) хәритәләрдә PbCl_2 ашгарынын мигдары артдыгча, жүкдашыјычыларын концентрасијасы артыр вә онларын жүрүклүјү азалыр. Јүкдашыјычыларын концентрасијасынын артмасы исә электрик кечирмәнин артмасына вә Зеебек әмсалынын азалмасына сәбәб олуңур.

Значения стандартных энтальпий образования и энтропии компонентов, участвующих в реакции (II)

Вещество	ΔH°_{298} , кал/моль	S°_T э. е./моль		C_p^{**} кал/град·моль
		298 °К	1300 °К	
GaSe	-35,0 [8]	16,9 [9]	35,0	$11,3 + 3 \cdot 10^{-3} T$ [9]
GaJ ₃	39 [3]	80,0 ***	107	20
Se ₂	33,1 [12]	60,2 [12]	72,0	8,47 [12]
GaJ	27 [3]	61,7 [3]	74,0	$8,94 - 0,15 \cdot 10^{-3} T^{-2}$ [13]

Для указанной реакции эта зависимость имеет вид

$$\lg K = \frac{14614,0}{T} - 12,6.$$

Полученное выражение позволяет построить температурную зависимость $\lg K = f(T)$ в практически важном температурном интервале. Из рис. 1 видно, что при некоторой температуре $\lg K$ меняет знак.

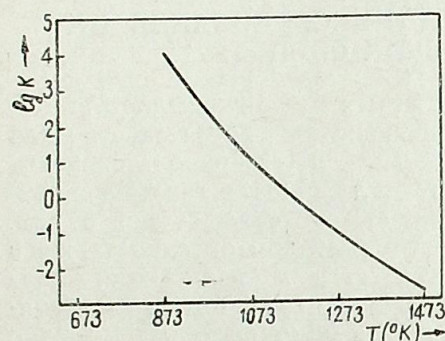


Рис. 1. Зависимость логарифма константы равновесия от температуры для монокристаллов GaSe.

Это означает, что до этой температуры („критической“) реакция (II) протекает вправо с выделением GaSe, а выше „критической“ — в обратном направлении. Транспорт GaSe в наших опытах осуществляется при $T \approx 1100^\circ\text{K}$. „Критическая“ температура, найденная из зависимости $\lg K = f(T)$, равна $\approx 1150^\circ\text{K}$. Согласно эксперименту и расчету (в пределах погрешности) можно считать реакцию (II) допустимой. Режим выращивания монокристаллов GaSe и регулирования температуры кристаллизационной зоны приведены в работе [2]. В качестве легирующей примеси взято олово. Первые серии опытов проводились при следующих условиях: количество исходного вещества GaSe брали 1 ÷ 15 г, температуру „горячей“ зоны принимали $900-800^\circ\text{C}$, „холодной“ — $790-700^\circ\text{C}$, концентрация йода достигала 3—15 мг/см³, легирующей примеси добавляли 0,05—5 ат% Sn, продолжительность процесса составляла 5—30 суток. Установлено, что кристаллы с высокой фоточувствительностью получают при температурном перепаде $870 \div 760^\circ\text{C}$, концентрации йода 10 мг/см³ и времени переноса 8 суток. При этом выращивались монокристаллы в виде пластинок n^- и p^- GaSe размером $(6-10) \times (3-8) \times (0,08-0,3)$ мм³ и $(10-25) \times (3-8) \times (0,05-0,2)$ мм³.

Этим же методом нами одновременно получены в ампуле n^- и p^- GaSe. В качестве легирующей примеси был взят Mn (5 ат%). Газотранспортным методом получены монокристаллы GaSe, где транспортер — йод был заменен GaJ₃. Последний синтезирован в бомбе с перемешиванием [14]. Однако для повышения качества синтеза в этой ме-

** Уравнение температурной зависимости C_p для GaSe составлено по данным C_p для GaSe при комнатной температуре [9] и в предположении, что кривые температурных зависимостей теплоемкостей для JnSe и GaSe параллельны. Значение теплоемкости для GaJ₃ взято равным C_p для GaCl₃, GaF₃.

*** Энтропия GaF₃ вычислена методом сравнительного расчета [10—11] на основании данных для BCl₃, BF₃.

тодике были произведены некоторые изменения: нагревательную проволоку не наматывали на ампулу, а помещали в трубчатую кварцевую печь, открытые концы которой закрывали асбестом. Это обеспечивало равномерный обогрев ампулы со всех сторон, а также давало преимущества (например, отпадала необходимость в использовании такого переносчика (GaJ₃) для каждого опыта синтеза). Преимущество оттачки не нужно охлаждать ту часть ампулы, где находится транспортер с веществом.

Полученные кристаллы контролировались рентгеновским методом. Рентгенографический анализ по методу вращения и дебаграммы указывает на гексагональную структуру кристаллов GaSe с параметрами $a = 3,76 \pm 0,01$ Å; $c = 15,94 \pm 0,01$ Å. Монокристалличность полученных образцов подтверждена методом Лауэ.

Электрофизические свойства

Для исследования электрофизических свойств отбирали три типа образцов, полученных из газовой фазы:

- Чистый p^- -GaSe;
- p^- -GaSe, легированный оловом Sn;
- n^- -GaSe, полученный путем легирования p^- -GaSe оловом.

Средние размеры образцов $(0,3 \times 0,2 \times 0,03)$ см³.

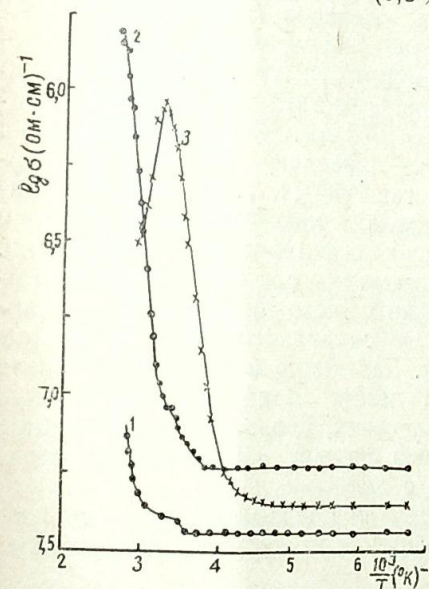


Рис. 2. Температурная зависимость электропроводности монокристаллов p^- -GaSe (кривая 1), p^- -GaSe:Sn (кривая 2) и n^- -GaSe (кривая 3).

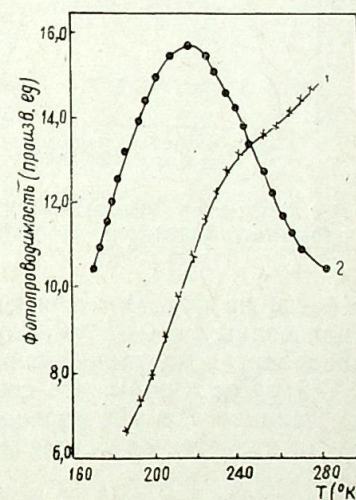


Рис. 3. Температурная зависимость фотопроводимости монокристаллов p^- -GaSe (кривая 1) и p^- -GaSe:Sn (кривая 2).

В исследуемой области омические контакты из индия впаивали в торцы кристалла. При измерениях напряжение на образцах не превышало 75 в. Для спектральных измерений использовался монохроматор УМ-2.

При 300°K темновая проводимость исходных чистых монокристаллов p^- -GaSe лежала в пределах $\sigma_T \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ ом⁻¹ см⁻¹, а монокристаллов с примесью Sn — в пределах $\sigma_T \sim 10^{-7} \div 10^{-8}$ (ом. см)⁻¹.

Темновая проводимость монокристаллов n -GaSe равна $\sigma_T \sim 10^{-6} \div 10^{-7}$ ом $^{-1}$ ·см $^{-1}$.

На рис. 2 показана температурная зависимость электропроводности для трех исследуемых образцов. Наклон зависимости $\lg \sigma_T$ от $\left(\frac{1}{T}\right)$ дает энергию активации $\Delta E = 0,35$ эв для легированного p -GaSe, а для нелегированного $\Delta E = 0,46$ эв. Энергия активации для n -GaSe равна $\Delta E = 0,36$ эв. Из исследуемых образцов значительной фоточувствительностью обладал только p -GaSe с примесью Sn. При 300°K и освещенности 2400 лк. отношение $\frac{\sigma_{св}}{\sigma_T}$ для p -GaSe:Sn достигало 2.10 ($\sigma_{св}$ — проводимость при освещении), для n -GaSe ~ 10 , а для p -GaSe без примеси — 2 ÷ 3.

На рис 3 представлена температурная зависимость фотопроводимости для I (p -GaSe без примеси) и II (с примесью Sn) типа образцов. Как видно, в той же области температур, где фототок I типа образцов увеличивается, имеется сильное уменьшение фототока для II типа. В области температур 173—300°K фототок II типа образцов уменьшается на 1 ÷ 2 порядка, что свидетельствует о наличии температурного гашения. Нужно отметить также что для II типа образцов (p -GaSe:Sn) наблюдается инфракрасное гашение фотопроводимости (рис. 4). Спектр ИК-гашения простирается до волны длиной $\lambda = 0,73$ мк. Для наглядности на рисунке приведена зависимость процента гашения (т. е. отношение разности между максимальным током и током в стационарном состоянии, достигаемом после включения дополнительного источника света, к величине максимального тока) от длины волны. Как видно из рисунка, кривая

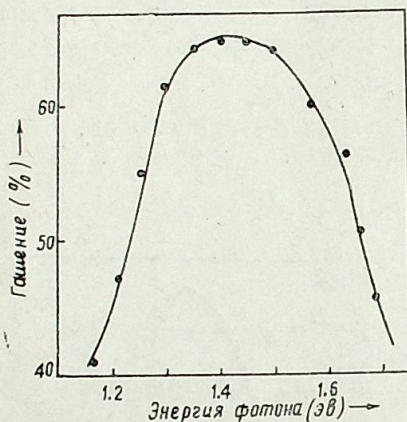


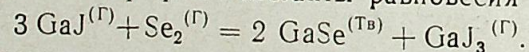
Рис. 4. Спектральная зависимость процента гашения монокристаллов p -GaSe:Sn.

ИК-гашения фототока для p -GaSe:Sn имеет один максимум при длине волны $\lambda = 0,87$ мк. Глубина залегания уровня рекомбинации, определенная по длинноволновому краю спектра ИК-гашения; равна $\sim 0,75$ эв от C -зоны, что согласуется с данными [15].

Наличие T и ИК-гашения в p -GaSe:Sn показывает, по-видимому что Sn является очувствляющим уровнем в монокристаллах p -GaSe.

Выводы

1. Кристаллы GaSe, выращенные газотранспортным методом, имели однофазную (гексагональную) структуру. При этом выражены пластинчатые монокристаллы GaSe размером до $25 \times 8 \times 0,3$ мм 3 с p -типом проводимости, удельным сопротивлением порядка $10^6 \div 10^8$ ом·см.
2. На основании термодинамического расчета выведена температурная зависимость логарифма константы равновесия реакции



3. Исследована температурная зависимость электропроводности в примесной области. Энергия активации примеси в n -GaSe $\Delta E = 0,36$ эв в p -GaSe с примесью Sn $\Delta E = 0,35$ эв, а в чистом p -GaSe $\Delta E = 0,46$ эв.

Обнаружено, что в области температур 173—300°K фотопроводимость p -GaSe, легированного Sn, уменьшается с увеличением температуры, тогда как у чистого p -GaSe она увеличивается. В монокристаллах p -GaSe:Sn обнаружено оптическое и температурное гашение фотопроводимости. Определена глубина залегания очувствляющих центров рекомбинации.

В заключение авторы выражают благодарность акад. Г. Б. Абдул-старшему научному совету и обсуждение результатов работы, а также дении рентгено-фазового анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fivaz R., Mooser E. Phys., rev vol. 163, № 3, 1967.
2. Азизов Т. Х. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 3 26., 1978.
3. Алферов Ж. И., Корольков В. И., Михайлова—Михеева И. П., Романенко В. Н. и Тучкевич В. М. ФТТ, т. 6, вып. 8, 1964.
4. Сильвестри В., Лайонс В. Сб. "Кристаллизация из газовой фазы" Изд-во "Мир", М., 1965.
5. Песков О. Г. Автореферат. Л., 1968.
6. Johnston W. D. J. Electrochem sol., 11, 2, 1963.
7. Илларионов В. В., Лапина Л. М. "ДАН СССР", 114, 1021, 1957.
8. Hahn H., Bugow F., Angew chem, 68, 382, 1956.
9. Мамедов К. К., Керимов, И. Г., Кострюков В. А., Мехтиева М. И. "Физика и техника полупроводников" 1, 441, 1967.
10. Шарифов К. А. ЖФХ, 40, 218, 1966.
11. Шарифов К. А. ЖФХ, 41, 1794, 1967.
12. Термические константы веществ, вып. II. М., 1966.
13. Термодинамические свойства неорганических веществ (справочник), под общ. ред. А. П. Зефирова. Атомиздат М. 1965.
14. Гаджиев С. Н., Наджафов Ю. Б., Шарифов К. А. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 5, 51, 1961.
15. Bube R. H. Phys. rev., 115, 1159, 1959.

Поступило 14. I 1969

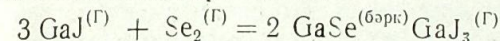
Т. Х. Эзизов, М. Х. Элијева, А. З. Мәммәдова, К. Э. Шарифов

GaSe монокристалларынын газотранспорт үсулу
илә алынмасы вә бир сыра физики хәссәләринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Көстәрилмишдир ки, газотранспорт үсулу илә алынган GaSe монокристаллары бир фазалы (гексогонал) гурулуша маликдир. P -кечиричилијә малик олан GaSe кристалларынын хусуси мугавимәти $\rho \sim 10^8$ ом·см, гадаған олунмуш золағынын ени 1,98 эв-дир.

Термодинамик һесабламалара әсасән



реаксијасынын таразлыг әмсалынын температур асылылығы тәјин едилмишдир.

Ашгаркечиричилик областында електриккечирмәнин температур асылылығы өјрәнилмишдир. n -GaSe, p -GaSe: Sn вә тәмиз p -GaSe кристаллары үчүн ашгарларын активләшмә енержиси ујғун оларак 0,36 эв; 0,35 эв 0,46 эв тәјин едилмишдир.

173—300°K температур интервалында Sn ашгарлы p -GaSe монокристалларынын фотокечиричилији температурун артмасы илә азалыр, һалбуки тәмиз p -GaSe кристалларында артма мүшаһидә олунур. Sn ашгарлы p -GaSe кристалларында фотокечиричилијин температур вә оптик сөнмәси тәдгиг едилмиш вә Sn ашгарынын һәссаслашдырычы мәркәз ролуну ојнамасы мугәјјән едилмишдир.

А. К. АГАМАЛИЕВ, И. А. ВЕРДИЕВ
**ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ
НА ГИПЕРБОЛОИДАХ И НА КОНУСЕ**

Релятивистки инвариантное разложение функций, заданных на гиперboloиде (в сферической системе координат), можно осуществить разными путями. Например, разложение на двуполостном гиперboloиде можно осуществить сведя задачу к разложению регулярного представления $T_{g_0} f(g) = f(gg_0)$ на неподвижные компоненты. Действительно, так как любую точку $x(a, \theta, \varphi)$ на двуполостном гиперboloиде можно получить из вершины гиперboloида последовательным применением преобразования Лоренца $g_x^{0,3}(a)$, вращения $u_x(-\varphi, \theta, \varphi)$ а сама вершина инвариантна относительно любых вращений $u(\alpha, \beta, \gamma)$ (стационарная подгруппа), то каждой точке, с точностью до вращений, можно сопоставить элемент группы Лоренца $g = ug_x^{0,3} u_x$. Следовательно, функцию $f(x)$, заданную на двуполостном гиперboloиде, можно рассматривать как функцию на группе, которая не зависит от вращения $u(\alpha, \beta, \gamma)$.

Именно таким способом впервые И. С. Шапиро [1], используя результаты работы И. М. Гельфанда и Н. А. Наймарка [2] о разложении регулярного представления на неподвижные компоненты, получил инвариантное разложение скалярной функции, заданной на двуполостном гиперboloиде. Его результат обобщен на произвольное поле функций в работах [3,4]. Н. Я. Виленкин и Я. С. Смородинский [5] показали, что интегральное преобразование Шапиро [1] сводится к разложению скалярной функции по унитарным собственным функциям оператора Лапласа, заданного на двуполостном гиперboloиде.

Вышеуказанный метод неприменим для функций, заданных на однополостном гиперboloиде. Это следует из того факта, что стационарная подгруппа заданной точки (вершины) однополостного гиперboloида некомпактна. Поэтому И. М. Гельфанд и М. И. Граев разработали более общий метод—метод интегральной геометрии [6], с помощью которого было получено релятивистки инвариантное разложение скалярной функции, заданной на гиперboloиде. Ими показано, что разложение на однополостном гиперboloиде существенно отличается от разложения на двуполостном гиперboloиде. На однополостном гиперboloиде функция разлагается не только в интеграл по непрерывному переменному, но и в сумму по дискретному переменному. Таким образом из результатов работы [5] следует, что оператор Лапласа, заданный на однополостном гиперboloиде, имеет унитарные собственные функции не только для непрерывного, но и для дискретного спектров собственных значений [7].

Решение релятивистских уравнений методом разделения переменных также является общим, с помощью которого можно получить релятивистки инвариантное разложение любого поля функций, заданного на гиперboloиде. В работах [8,9] рассмотрены релятивистские уравнения для векторного поля с массой, отличной от нуля—уравнение Прока и уравнение Дирака. Показано, что разложение решения в области внутри светового конуса по определенным матричным элементам представления группы Лоренца и использование рекуррентных формул для них приводит к полному разделению переменных. В области вне светового конуса рекуррентные формулы, позволяющие произвести разделение переменных, получаются от первоначальных заменой a на $a \pm i \frac{\pi}{2}$ (рекуррентные формулы вне светового конуса).

Поэтому угловая зависимость (θ, φ) в разложении вне светового конуса такая же, что и в области внутри светового конуса, но зависимость от a определяется унитарными решениями рекуррентных формул вне светового конуса.

Данная статья посвящена отысканию этих решений. Показано, что рекуррентные формулы обладают унитарными решениями, соответствующими не только непрерывному спектру, но также и дискретному спектру собственных значений. Первые из них получаются аналитическим продолжением $a \rightarrow a + i \frac{\pi}{2}$ матричных элементов представления преобразования Лоренца, а последние выражаются через линейные комбинации присоединенных функций Лежандра. Приводится также полная система функций, заданная на конусе [10].

1. Полные системы функций на двуполостном гиперboloиде. Известно (см. кн. Д. П. Желобенко [11] и Н. Я. Виленкина [12]), что матричные элементы представления (конечномерные, а также бесконечномерные) группы G образуют полную систему функций, по которой может быть разложена любая функция $f(g)$, заданная на группе G . А функцию $f(x)$, заданную на двуполостном гиперboloиде, как отмечалось выше, можно рассматривать как функцию $f(g)$ на группе Лоренца. Следовательно, определенные матричные элементы представления группы Лоренца образуют полную ортогональную систему функций на двуполостном гиперboloиде. Как было показано в [13], а также в [8,9], этой системой являются функции

$$\sum_{\lambda=-j}^j D_{M\lambda}^{(j)}(\varphi, \theta, -\varphi) \Phi_{L,\lambda,j}^{(p,m)}(a), \quad (1)$$

где $D_{M\lambda}^{(j)}(\varphi, \theta, -\varphi)$, $\Phi_{L,\lambda,j}^{(p,m)}(a)$ —матричные элементы унитарного представления группы вращения и преобразования Лоренца [14], соответственно.

Условия ортогональности записывается в следующем виде:

$$\sum_{\lambda,\lambda'} \int D_{M'\lambda'}^{(j')*}(\varphi, \theta, -\varphi) \Phi_{L,\lambda',j'}^{(p',m')}(a) D_{M\lambda}^{(j)}(\varphi, \theta, -\varphi) \Phi_{L,\lambda,j}^{(p,m)}(a) \text{sh}^2 a da \sin \theta d\theta d\varphi = N_I N_{L,j}^{(\lambda,m)} \delta_{MM'} \delta_{jj'} \delta(p-p') \quad (2)$$

или

$$\sum_{\lambda=-j}^j \int \Phi_{L,\lambda,j}^{(p,m')*}(a) \Phi_{L,\lambda,j}^{(p,m)}(a) \text{sh}^2 a da = N_{L,j}^{(p,m)} \delta_{mm'} \delta(p-p'),$$

где непрерывный параметр p принимает значения $0 \leq p < \infty$, а дискретное число $\frac{m}{2}$ —значения $-j \leq \frac{m}{2} \leq j$;

$$N_1 = \frac{4\pi}{2I+1}; N_{l,j}^{(p,m)} =$$

$$= 2\pi \frac{(I-j)! [2(I+1)]^2 \left(j + \frac{|m|}{2}\right)! \left(j - \frac{|m|}{2}\right)!}{(I+j)! \left(I+1 + \frac{|m|}{2}\right)! \left(I - \frac{|m|}{2}\right)! \left(I+1 - \frac{|m|}{2}\right)! 2j!} \times$$

$$\times \prod_{\kappa=1+\frac{|m|}{2}}^j \left(\frac{\rho^2}{4} + \kappa^2\right) \left| \frac{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + \frac{|m|}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\rho}{2} + I+1\right)} \right|^2.$$

В частности, скалярное, спинорное, векторное поля разлагаются по полной системе функций (1) при $j=0$, $j=\frac{1}{2}$, $j=0,1$ соответственно. Одночастные спиральные состояния со спином s разлагаются по этой системе при $j=s$ [13].

Функции $\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}(a)$ при $\lambda=j$ удовлетворяют уравнению

$$\left[\frac{d^2}{da^2} + 2(1+j) \operatorname{cth} a \frac{d}{da} - \frac{I(I+1) - j(j+1)}{\operatorname{sh}^2 a} - \frac{im\rho}{2} \operatorname{cth} a + (1+j)^2 + \frac{\rho^2 - m^2}{4} \right] \Phi_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}(a) = 0 \quad (3)$$

с граничным условием

$$\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}(a=0) = \delta_{l,j}.$$

Функции $\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}(a)$ с другими значениями индекса λ получаются из рекуррентных соотношений

$$\gamma_j \Phi_{l,\lambda-1,j}^{(p,m)}(a) - \gamma_{\lambda+1} \Phi_{l,\lambda+1,j}^{(p,m)}(a) = 2 \operatorname{sh} a \left(\lambda \frac{d}{da} + \lambda \operatorname{ch} a - i \frac{m\rho}{4} \right) \Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}(a) \quad (4)$$

$$\text{где } \gamma_\lambda = \sqrt{(I+\lambda)(I-\lambda+1)(j+1)(j-\lambda+1)}$$

Все рекуррентные формулы, необходимые для разделения переменных в релятивистских уравнениях, приведены в работе Строма [14 а]. Решение уравнения (3) имеет вид [14 г]

$$\Phi_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}(a) =$$

$$= e^{-i\pi(I-j)} \left(\frac{\operatorname{cth}^2 a - 1}{4} \right)^{\frac{1}{2}(1+j)} \left(\frac{\operatorname{cth} a - 1}{2} \right)^{-(1-j)} \left(\frac{\operatorname{cth} a - 1}{\operatorname{cth} a + 1} \right)^{\left(\frac{i\rho}{4} - \frac{m}{4}\right)} \times$$

$$\times F\left(I+1 + \frac{i\rho}{2}, I+1 - \frac{m}{2}, 2I+2, \frac{2}{1 - \operatorname{cth} a}\right). \quad (5)$$

Используя определение обобщенных функций Лежандра [15], через гипергеометрические ряды получаем

$$\Phi_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}(a) =$$

$$= 2e^{-i\pi(I-j-\frac{m}{2}-\frac{i\rho}{2})} \frac{\Gamma(2I+1)}{\Gamma\left(I - \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(I + \frac{i\rho}{2} + 1\right)} \times$$

$$\times (\operatorname{ch}^2 a - 1)^{\frac{1}{2}(1+j)} Q_{I-\frac{\rho}{2}-\frac{1}{2}m}^{(1)}(\operatorname{ch} a). \quad (6)$$

В этом также можно убедиться, произведя подстановку $\Phi_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}(a) = (\operatorname{sh} a)^{-(1+j)} f_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}(a)$ и замену переменных $z = \operatorname{ch} a$ в уравнении (3), что приведет к уравнению для обобщенных функций Лежандра. Решение рекуррентной формулы (4) для положительных значений λ можно представить в виде

$$\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}(a) = (\operatorname{sh} a)^{-(1+j)} \sum_{\kappa=-(j-\lambda)}^{j-\lambda} \sum_{\kappa'=0}^{j-\lambda-\kappa} C_{\kappa,\kappa'}^\lambda(p,m,I,j) \times$$

$$\times Q_{I-\frac{\rho}{2}+\kappa, -\frac{m}{2}+j-\lambda-|\kappa|-2\kappa}^{(1)}(\operatorname{ch} a),$$

$$\text{где } C_{0,0}^{\lambda=j} = 2e^{-i\pi(I-j-\frac{m}{2}-\frac{i\rho}{2})} \frac{\Gamma(2I+1)}{\Gamma\left(I - \frac{m}{2} + 1\right) \Gamma\left(I + \frac{i\rho}{2} + 1\right)}. \quad (7)$$

В этом легко убедиться, используя рекуррентные соотношения для обобщенных функций Лежандра, приведенные в приложении (п. 1 и 2). Выражения этих матричных элементов для отрицательных значений λ можно определить из соотношения

$$\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,-m)}(a) = \Phi_{l,-\lambda,j}^{(p,m)}(a). \quad (8)$$

Подставляя (7) в (4), можно получить рекуррентные соотношения для коэффициентов $C_{\kappa,\kappa'}^\lambda$, общее решение которых представляет громоздкую задачу. Поэтому здесь мы их приводить не будем.

2. Полные системы функций на однополостном гиперboloиде. Перейдем к определению полной системы функций, заданных на однополостном гиперboloиде. Как показано в [8, 9], зависимость от углов (θ, φ) задается так же, как на двуполостном гиперboloиде, — матричными элементами представления группы вращений, а зависимость от переменного a определяется унитарными решениями уравнений, которые получаются из (3) и (4) заменой a на $a \pm i\frac{\pi}{2}$. Унитарные решения, соответствующие непрерывному спектру собственных значений $(0 \leq \rho < \infty, -j \leq \frac{m}{2} \leq j)$, получаются аналитическим продолжением матричных элементов унитарного представления преобразования Лоренца:

$$\Phi_{l,\lambda=j,j}^{(p,m)}\left(a \pm i\frac{\pi}{2}\right) = (1 - \operatorname{th}^2 a)^{\frac{1}{2}(1+j)} \left\{ B_{\pm}(\rho, m, I, j) P_{\frac{\rho}{2}, -\frac{1}{2}m}^I(\operatorname{ch} a) + \right.$$

$$\left. + B_{\pm}(-\rho, m, I, j) P_{-\frac{\rho}{2}, \frac{m}{2}}^I(\operatorname{ch} a) \right\}, \quad (9)$$

где

$$B_{\pm}(\rho, m, I, j) = \frac{\pi}{2^{1+j}} \frac{\Gamma(2I+2) e^{\pm i\frac{\pi}{2}(j+1-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\rho) + i\frac{\pi}{2}(I-j)}}{\sin\left[\pi\left(\frac{m}{2} + i\frac{\rho}{2}\right)\right] \Gamma\left(I+1 + \frac{m}{2}\right) \Gamma\left(I+1 + i\frac{\rho}{2}\right)}.$$

Верхний или нижний знак у этой функции берется в соответствии со знаком ρ .

При получении (9) нами была использована формула 2.10 (2) [16] аналитического продолжения гипергеометрического ряда. Эти матричные элементы для произвольного значения λ имеют вид

$$\Phi_{l,\lambda,j}^{(p,m)}\left(a \pm i\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{1}{2}(I+j)} \left\{ \sum_{\kappa=-j}^{I-\lambda} \sum_{\kappa'=0}^{j-\lambda-|\kappa|} C_{\kappa, \kappa'}^{\lambda}(\rho, m, I, j) P_{\frac{\rho}{2} + \kappa, -\frac{m}{2} + j - \lambda - |\kappa| - 2\kappa}^I(\text{th} a) + \right. \\ \left. + \sum_{\kappa=-(-j-\lambda)}^{j-\lambda} \sum_{\kappa'=0}^{j-\lambda-|\kappa|} \tilde{C}_{\kappa, \kappa'}^{\lambda}(-\rho, -m, I, j) P_{-\frac{\rho}{2} - \kappa, \frac{m}{2} + j - \lambda - |\kappa| - 2\kappa}^I(\text{th} a) \right\}, \quad (10)$$

где

$$\tilde{C}_{\kappa=0, \kappa'=0}^{\lambda=j} = B(\rho, m, I, j).$$

Для отыскания унитарного решения дискретного спектра собственных значений, т. е. когда $\rho = 0$, $\frac{m}{2} > j$, перепишем уравнение (3),

заменив a на $a \pm i \frac{\pi}{2}$:

$$\left(\frac{d^2}{da^2} + 2(j+1) \text{th} a \frac{d}{da} + \frac{I(I+1) - j(j+1)}{\text{ch}^2 a} + (1+j) - \frac{m^2}{4} \right) \varphi_{I, \lambda, j}^{(m, j)}(a) = 0 \quad (11)$$

Сделав подстановку $\varphi_{I, \lambda, j}^{(m, j)}(a) = (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{1+j}{2}} f_I^m(a)$, получим

$$\left(-\frac{d^2}{da^2} - \frac{I(I+1)}{\text{ch}^2 a} + \frac{m^2}{4} \right) f_I^m(a) = 0. \quad (12)$$

Функция $f_I^m(a)$ удовлетворяет следующему условию квадратичной интегрируемости:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_I^m(a)|^2 (\text{ch} a)^{-2j} da < \infty. \quad (13)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (11) внешне походит на уравнение Шредингера (с точностью до эффективной потенциальной энергии) для радиальной части волновой функции с потенциальной энергией $u(a) = -\frac{I(I+1)^*}{\text{ch}^2 a}$. На двуполостном гиперboloиде эта потенци-

альная энергия заменяется на $u(a) = \frac{I(I+1)}{\text{sh}^2 a}$. Поэтому, если полной

системой функции на двуполостном гиперboloиде являются решения уравнений (3) и (4) (с непрерывным спектром собственных значений $0 \leq \rho < \infty$, $\frac{|m|}{2} < j$), соответствующие свободному движению на бес-

конечности (когда $a \rightarrow \infty$), то на однополостном гиперboloиде из-за отрицательности потенциальной энергии полную систему функций образуют решения, соответствующие свободному движению на бесконечности (непрерывному спектру собственных значений $0 \leq \rho < \infty$, $\frac{m}{2} \leq j$), и решения, соответствующие связанному состоянию (дискретному спектру собственных значений $\rho = 0$, $\frac{m}{2} = \kappa \geq j$).

Решения уравнения (12), удовлетворяющие условию (13), а также обладающие определенной симметрией относительно замены $\text{ch} a$ на $-\text{ch} a$ (свойства унитарности), выражаются через присоединенные

* Авторы выражают благодарность А. М. Переломову, указавшему им на возможность такого объяснения.

функции Лежандра:

$$f_I^{\kappa}(a) = P_{\kappa}^I(\text{th} a) = \frac{2^{-\kappa} \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-I+\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+I+\kappa}{2}\right)} \times \\ \times (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{\kappa}{2}} F\left(-\frac{I-\kappa}{2}, \frac{I+\kappa+1}{2}, \frac{1}{2}, \text{th}^2 a\right) \quad (14)$$

при $I = 2\pi + \kappa$ ($\pi = 0, 1, 2, \dots$);

$$f_I^{\kappa}(a) = P_{\kappa}^I(\text{th} a) = \frac{2^{1-\kappa} \pi^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1+I+\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-I+\kappa}{2}\right)} \times \\ \times \text{th} a (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{\kappa}{2}} F\left(-\frac{I-\kappa-1}{2}, \frac{I+\kappa}{2} + 1, \frac{3}{2}, \text{th}^2 a\right) \\ I = 2\pi + 1 + \kappa.$$

при

В этом легко убедиться, сделав замену переменных $z = \text{th} a$ в (12), используя формулу 3.22 [16]. Следовательно, решения уравнения (11) имеют вид

$$\varphi_{I, \lambda = \pm j}^{\kappa, j}(a) = (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{1+j}{2}} P_{\kappa}^I(\text{th} a). \quad (15)$$

Выражение функций $\varphi_{I, \lambda}^{\kappa, j}(a) = \varphi_{I, -\lambda}^{\kappa, j}$ для произвольных значений λ можно получить с помощью рекуррентной формулы;

$$\gamma_{\lambda} \varphi_{I, \lambda-1}^{\kappa, j}(a) - \gamma_{\lambda+1} \varphi_{I, \lambda+1}^{\kappa, j}(a) = -i 2\lambda \text{ch} a \left(\frac{d}{da} + \text{th} a \right) \varphi_{I, \lambda}^{\kappa, j}(a), \quad (16)$$

которая получается из (4) заменой a на $a - i \frac{\pi}{2}$ при $\rho = 0$. Используя рекуррентные формулы (п. 1 и 2) при $\mu = 0$ для присоединенных функций Лежандра, $\varphi_{I, \lambda}^{\kappa, j}(a)$ можно представить в виде

$$\varphi_{I, \lambda}^{\kappa, j}(a) = (1 - \text{th}^2 a)^{\frac{1+j}{2}} \sum_{l=0}^{I-\lambda} A_{\lambda, l} P_{\kappa+I-\lambda-2l}^I(\text{th} a). \quad (17)$$

Коэффициент $A_{\lambda, l}$ определяется из соотношений:

$$\gamma_{\lambda} A_{\lambda-1, l} - \gamma_{\lambda+1} A_{\lambda+1, l-1} = a(\lambda, l) A_{\lambda, l} + b(\lambda, l) A_{\lambda, l-1}, \quad (18)$$

где

$$A_{\lambda=j, l=0} = 1, \quad a(\lambda, l) = \lambda \left(1 - \frac{i}{\kappa+j-\lambda-2l} \right), \\ b(\lambda, l) = \lambda \left(1 + \frac{j}{\kappa+j-\lambda-2l+2} \right) (I+\kappa+j - \\ - \lambda - 2l + 2) (I - \kappa - j + \lambda + 2l - 1).$$

Таким образом приходим к выводу, что решения, соответствующие дискретному спектру собственных значений $\rho = 0$, $\kappa > j$, при целых значениях моментов j и I выражаются через линейные комбинации присоединенных функций Лежандра, а при полуцелых значениях моментов j и I равны нулю. Последнее утверждение следует из того, что при $\rho = 0$ (так же, как при $\frac{m}{2} = \kappa = 0$) моменты j и I не могут

принимать полуцелых значений. Действительно, при $j = 1/2$, как трудно увидеть, уравнения (10) и (14) несовместны. Следовательно, в релятивистски инвариантном разложении поля функций, соответствующих полуцелым моментам (например, решения уравнения Дирака), области вне светового конуса отсутствует дискретный спектр.

Условия ортогональности для функций $\varphi_{l,\delta}^{k,j}(a)$ записываются в следующем виде:

$$\sum_{\lambda=-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{l,\lambda}^{k,j*}(a) \varphi_{l,\lambda}^{k,j}(a) \operatorname{ch}^2 a da = N_l^{k,j} \delta_{kk'} \quad (19)$$

Здесь мы приведем выражения для нормировочных множителей $N_l^{k,j}$ решений при $j=0$, $j=1$, по которым разлагаются скалярная (при $j=0$) и векторная функции:

$$N_l^{k,0} = \frac{l-\kappa}{2} B\left(\frac{l-\kappa}{2}, 1+\kappa\right) B\left(\frac{l-\kappa+1}{2}, \kappa\right); \quad (20)$$

$$N_l^{k,j=1} = N_l^{k,j=0} \frac{2(\kappa^2-1)}{l(l+1)},$$

$$\kappa = 2, 4, 6, \dots$$

При вычислении интеграла (19) нами использована формула 2.8 (17) [16].

3. Полные системы функций на конусе. Для полноты изложения выпишем полную систему функций на конусе. В работе [10] методом интегральной геометрии было получено релятивистски инвариантное разложение одночастного спирального состояния $|\kappa, s, \lambda\rangle$ с массой, равной нулю ($\kappa^2 = \omega^2 - \kappa^2 = 0$). Из результатов этой работы следует, что полной системой функций на конусе является

$$Y_{l,M}^{(p,\lambda)}(\omega, \varphi, \theta) = D_{M,\lambda}^{(l)}(\varphi, \theta, -\varphi) \omega, \quad -1 \leq \frac{p}{2} \quad (21)$$

причем $Y_{l,M}^{(p,\lambda)}(\omega, \vec{n})$ преобразуется по непрерывному унитарному представлению $\chi\left(\lambda + i\frac{p}{2}, \lambda + i\frac{p}{2}\right)$ группы Лоренца. Следовательно, она является релятивистским аналогом шаровой функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используя определение обобщенных функций Лежандра через гипергеометрические ряды [16] и соотношения между смежными гипергеометрическими рядами, легко получить для них следующие рекуррентные формулы:

$$-P_{\mu+1,\nu}^l(z) + (l+\mu)(l-\mu+1)P_{\mu-1,\nu}^l(z) + 2\frac{\nu-\mu z}{\sqrt{z^2-1}}P_{\mu,\nu}^l(z) = 0; \quad (\text{п. 1})$$

$$\sqrt{z^2-2}\frac{d}{dz}P_{\mu,\nu}^l(z) = \frac{\nu z - \mu}{\sqrt{z^2-1}}P_{\mu,\nu}^l(z) + (l+\nu+1)(l-\nu)P_{\mu,\nu+1}^l(z)$$

Здесь использованы формулы (2) [16] и 2.8 (30.20) [17]. Воспользовавшись свойством $P_{\mu,\nu}^l(z) = P_{-\nu,-\mu}^l(z)$, из п. 1 получаем еще два соотношения:

$$-P_{\mu,\nu-1}^l(z) = (l-\nu)(l+\nu+1)P_{\mu,\nu+1}^l(z) + 2\frac{\nu z - \mu}{\sqrt{z^2-1}}P_{\mu,\nu}^l(z) = 0;$$

$$\sqrt{z^2-1}\frac{d}{dz}P_{\mu,\nu}^l(z) = \frac{\nu-\mu z}{\sqrt{z^2-1}}P_{\mu,\nu}^l(z) + (l+\mu)(l-\mu+1)P_{\mu-1,\nu}^l(z).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро И. С. ДАН СССР, 106, 647 (1956).
2. Гельфанд И. М. и Наймарк Н. А. Изв. АН СССР, серия мат., 11, 411, 1947.
3. Чжоу Гуанг Чжаю, Заставенко Л. Т. ЖЭТФ, 35, 1417 (1958).
4. Попов В. С. ЖЭТФ, 37, 1116 (1959).
5. Виленкин Н. Я., Смородинский Я. А. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
6. Гельфанд И. М., Граев И. И., Виленкин П. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, М., 1963.
7. Raczka R., Limic N., Neiderle I. I. Math. phys., 7, 1861, 2026 (1966); 8, 1079 (1967).
8. Агамалиев А. К., Атакишиев Н. М., Вердиев И. А. ЖЯФ, 9, 201 (1969).
9. Агамалиев А. К., Атакишиев Н. М., Вердиев И. А. ЖЯФ (в печати).
10. Вердиев И. А. ЖЯВ т. 9, 1310, 1969.
11. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Изд-во "Наука", М., 1965.
12. Желобенко Д. П. Лекции по теории групп Ли. Дубна, 1965.
13. Вердиев И. А. ЖЭТФ, 55, 1773, 1968.
14. а) Strom. S. Arkiv for Fisik band 19 hofte 5, 467 (1965); б) Вердиев И. А. Дадашев Л. А. ЖЯФ, 6, 1094 (1967); в) Дао Вонг Дик, Нгуен Ван Хьед препринт Р-277, ОНЯН (1966); г) Sciario, Toller M. I. Wath. Phys., 8, 1252 (1967).
15. Азимов Я. И. ЖЯФ, 4, 663 (1966).
16. Бейтмен В. и Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т. I. "Наука", 1965.

Поступило 18. II 1965

УДК 681.142

Я. Б. КАДЫМОВ, Б. Б. БЕНЬЯМИНОВ

ПРОЦЕССЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ В ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Решая задачу синтеза систем автоматического регулирования, удовлетворяющих определенным требованиям к качественным показателям переходного процесса, обычно ищут оптимальные настройки регулятора, пытаясь удовлетворить какому-нибудь критерию. Здесь чаще всего минимизируют суммарную квадратичную оценку. Однако в этом случае, хотя кривая переходного процесса и оказывается весьма гладкой, длительность этого процесса может оказаться неудовлетворительной. В импульсных системах возможно также реализовать процессы конечной длительности [1]. Условия конечной длительности (или бесконечной степени устойчивости) можно получить не для всякой системы. В общем случае их реализация требует введения дополнительных корректирующих цепей, которые часто оказываются неоправданными с точки зрения их практической реализации.

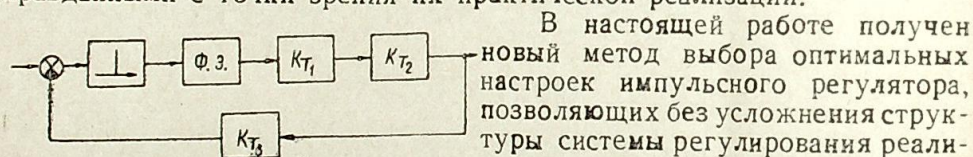


Рис. 1.

В настоящей работе получен новый метод выбора оптимальных настроек импульсного регулятора, позволяющих без усложнения структуры системы регулирования реализовать процесс конечной длительности. Сущность метода заключается в следующем. В работе [2] получено необходимое условие конечной длительности процесса. Показано, что это условие также является достаточным, если порядок системы $l=2$ и корни знаменателя передаточной функции замкнутой системы — комплексно-сопряженные числа. Выделив из области устойчивости область колебательности и найдя параметры регулятора, удовлетворяющие упомянутому условию конечной длительности процесса, мы реализуем процесс приближенной конечной длительности без введения в контур регулирования корректирующих цепей.

Рассмотрим импульсную систему регулирования температуры реактора соосной установки каталитического крекинга с шилевидным катализатором. Структурная схема системы представлена на рис. 1. Уравнения отдельных звеньев:

$$K_1 = \frac{1}{0,0062p}, \quad K_2 = \frac{3,61 e^{-10p}}{20p + 1}, \quad K_3 = \frac{1}{600}$$

—соответственно, сервомотор постоянной скорости, объект регулирования с запаздыванием (реактор), измерительное устройство.

Построим область устойчивости данной системы, используя дискретный аналог критерия устойчивости Найквиста [1]. При условиях $\tau < T$ (τ — запаздывание, T — период повторения импульсов) $m_1 = 0$, $\bar{\tau} = \frac{\tau}{T} = \tau$, $\kappa_0 = 0,97 \kappa_n$ (κ_0 — общий коэффициент усиления, κ_n — коэффициент усиления формирующего элемента) и $\varepsilon = 0$ (ε — смещение ре- шетчатой функции) передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$K^*(q, 0) = \kappa_0 \left\{ \frac{1}{e^q - 1} - \frac{e^{-\beta(1-\tau)}}{e^q - e^{-\beta}} \right\}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{T}{T_a}$ — относительный период повторения, T_a — постоянная времени реактора.

Перейдем к нормированной частотной характеристике. Положив $q = j\bar{\omega}$, получим

$$\bar{K}^*(j\bar{\omega}, 0) = \frac{K^*(j\bar{\omega}, 0)}{\kappa_0} = \frac{1}{e^{j\bar{\omega}} - 1} - \frac{e^{-\beta(1-\tau)}}{e^{j\bar{\omega}} - e^{-\beta}}. \quad (2)$$

Годограф нормированной частотной характеристики пересекает действительную ось в точках $\bar{\omega}_1 < \pi$ и $\bar{\omega} = \pi$. Система устойчива, если выполняются следующие условия:

$$\bar{K}^*(j\bar{\omega}_1, 0) > -\frac{1}{\kappa_0},$$

$$\bar{K}^*(j\pi, 0) > -\frac{1}{\kappa_0}. \quad (3)$$

Положив в равенстве (2) $\bar{\omega} = \pi$, из (3) при $T_a = 20$, $\tau = 10$ получим границы области устойчивости (рис. 2):

$$\kappa_0 < \kappa_{0gr_2} = \frac{2(e^\beta + 1)}{e^\beta - 2,298}, \quad (4)$$

$$\kappa_0 < \kappa_{0gr_1} = 1,541(e^\beta - 1). \quad (5)$$

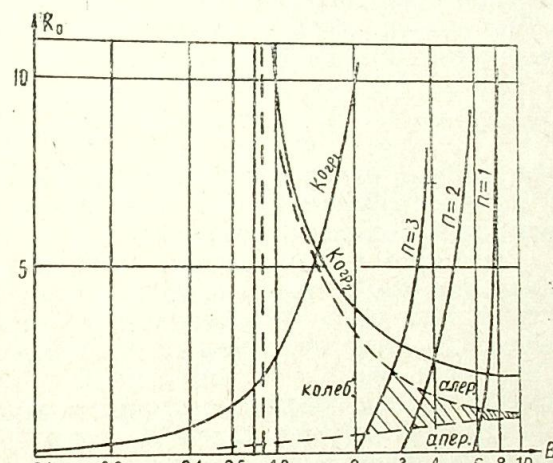


Рис. 2.

Как видно из рисунка, при значении $\beta = 0,83$ (критический период повторения [3]) вторая граничная частота терпит бесконечный разрыв, поэтому следует брать $\beta > 0,83$. При моделировании данной системы с использованием непрерывного ПИ регулятора наилучший переходный процесс имел следующие показатели качества: перерегулирование 18% и длительность 180 мин, что не может быть признано удовлетворительным. Применение импульсного регулятора дало некоторые улучшения: $\bar{\sigma} = 16\%$ и $t_{рег} = 150$ мин при настройках регулятора $\kappa_0 = 0,5$ и $\beta = 1$.

С целью уменьшения $t_{рег}$ построим в данной системе процесс конечной длительности, то есть найдем такие значения κ_0 и β , при

которых число тактов доходит до $n=2$. В [2] получено необходимое условие конечности процесса

$$b < \Delta^{1/n}, \quad (6)$$

где b — свободный член знаменателя передаточной функции замкнутой системы, l — порядок системы, Δ — полоса допустимых отклонений от установившегося значения. Нетрудно показать, что условие (6) является также и достаточным, если $l=2$ и оба корня знаменателя передаточной функции замкнутой системы — комплексно-сопряженные числа. Действительно, из (6) при $e^a = -\sigma \pm j\omega$ и $l=2$ имеем

$$n \geq 2 \frac{\ln \Delta}{\ln(\sigma^2 + \omega^2)},$$

что заведомо выполняется по сравнению с оценкой n , полученной в [4].

Выделим область колебательности по параметрам β и κ_0 , потребовав выполнения неравенства

$$a^2 - 4b < 0, \quad (7)$$

где $a = -e^{-\beta} - 1 + \kappa_0(1 - e^a e^{-\beta})$, $b = e^{-\beta} - \kappa_0 e^{-\beta}(1 - e^a)$

$$\left(a = \beta \tau_1 = \frac{\tau}{T_a} \right)$$

— коэффициенты характеристического уравнения системы.

Неравенство (7) имеет вид

$$\kappa_0^2 (1 - 1,649 e^{-\beta})^2 - 2\kappa_0 (1 + 0,649 e^{-\beta} - 1,649 e^{-2\beta}) + (1 - e^{-\beta})^2 < 0. \quad (8)$$

Решив неравенство (8), получим искомую область (рис. 2), которая целиком принадлежит области устойчивости. Теперь построим линии значений κ_0 и β , при которых реализуются процессы конечной длительности. Положив $n=2$ и $\Delta=0,05$, из (6) получим

$$\kappa_0 \leq \frac{0,05 e^{\beta} - 1}{0,649}. \quad (9)$$

Эта линия (и линии при $n=1$ и $n=3$) нанесена на рис. 2. Значения κ_0 и β , удовлетворяющие (9) и принадлежащие области колебательности, позволяют системе устанавливаться в течение двух тактов.

Для того, чтобы сравнить искомый процесс с вышеупомянутым, следовало бы положить $\kappa_0=0,5$ и найти из (9) $\beta \geq 3,27$. Но, оказывается, этот набор параметров не принадлежит области колебательности, что легко проверить по неравенству (8). Однако можно показать, что и при $\kappa_0 > 0,5$ конечные процессы более благоприятны даже по сравнению с лучшим из процессов неконечной длительности.

Пусть, например, $\kappa_0=0,75$, тогда из (9) получим $\beta \geq 3,4$. Эти значения принадлежат области колебательности и мы будем иметь $t_{\text{пер.}} = 2T = 135$ мин, а с учетом полосы допустимых отклонений ($t_{\text{пер.}} = 150$ мин взято с учетом этой полосы) $t_{\text{пер.}} \approx 125$ мин, а то есть на 25 мин меньше. Кроме того, здесь мы имеем процесс без перерегулирования, колебательный в области допустимых отклонений.

Итак, оптимальные настройки регулятора в данном случае будут: $\beta=3,4$, $\kappa_0=0,75$. Им соответствует процесс конечной длительности $n=2$ (оценка по [4] дает $n \approx 2,17$). Для улучшения свойств рассматриваемой системы введем в цепь обратной связи блок предварения (рис. 3) с передаточной функцией вида

$$W_{\text{б.п.}} = T_n p + 1, \quad (10)$$

то есть выходная величина блока предварения в переходном режиме представляет собой сумму двух сигналов: входной величины и сигнала, пропорционального производной входной величины.

Построим область устойчивости по параметрам κ_0 и β при фиксированной постоянной T_n времени предварения. В данном случае при тех же предположениях передаточная функция разомкнутой системы имеет вид (1) с множителем $1 - \frac{\beta}{\beta_n}$

перед вторым слагаемым, где $\beta_n = T/T_n$ есть относительное время предварения. Здесь могут быть использованы пневматические блоки АУС типа БП-27А или БП-28В ($T_n = 8 \div 10$ мин).

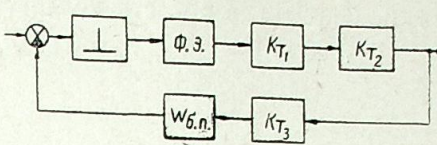


Рис. 3

Аналогично предыдущему при $\beta_n = \frac{\beta T_a}{T_n} = 2,5\beta$ получим границу области устойчивости в виде

$$\kappa_0 < \kappa_{0 \text{ гр.}} = \frac{2(e^{\beta} + 1)}{e^{\beta} - 0,979}. \quad (11)$$

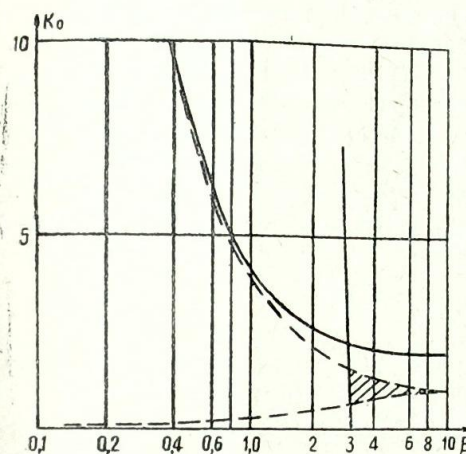


Рис. 4

Нетрудно проверить, что в данном случае первая граничная частота отсутствует.

Построим кривую для процесса конечной длительности $n=2$. Сначала выделяем из области устойчивости область колебательности, решив неравенство (7) для значений $a = -e^{-\beta} - 1 + \kappa_0(1 - 0,989 e^{-\beta})$, $b = e^{-\beta} - 0,011 \kappa_0 e^{-\beta}$ (рис. 4). Теперь для параметров κ_0 и β , принадлежащих области колебательности, условие (6), то есть

$$e^{-\beta} - 0,011 \kappa_0 e^{-\beta} \leq \Delta^{1/n}, \quad (12)$$

является необходимым и достаточным.

Найдем линию, над которой реализуется процесс конечной длительности $n=2$. Из (12) при $n=l=2$ находим

$$\kappa_0 \geq 90,91(1 - 0,05 e^{\beta}) \quad (13)$$

при $\beta \geq 3$, κ_0 может быть любым положительным числом, принадлежащим области колебательности. Эта линия представлена на рис. 4.

Пусть, например, $\beta=3$, тогда можно принять $\kappa_0=1$ и длительность процесса будет $t_{\text{пер.}} = 2T = 120$ мин, а с учетом полосы допустимых отклонений $t_{\text{пер.}} \approx 110$ мин. Итак, в системе с блоком предварения оптимальные настройки следующие: $T_n = 8$ мин (из условия минимума суммарной оценки), $\kappa_0=1$, $\beta=3$ (из условия конечной длительности). Этим параметрам соответствует процесс длительности $n=2$ (оценка по [4] дает $n \approx 2,006$).

Выше была рассмотрена система с «теоретической» функцией (10) блока предварения, которая описывает работу блока с некоторым приближением. Для уточнения результатов расчетов используем уточненную передаточную функцию блока предварения вида

$$W(p) = \frac{1,272p^2 + 8,61p + 0,88}{2,544p^2 + 1,4p + 0,88}. \quad (14)$$

Очевидно, что в данном случае область устойчивости будет не уже, чем на рис. 4.

Применим излагаемую методику к определению оптимальных значений κ_0 и β , позволяющих системе устанавливаться за число тактов $n = 3$. Определив область колебательности по (7) для значений

$$a = -1 - e^{-\beta} + \kappa_0 - 0,912\kappa_0 e^{-\beta}, \quad b = e^{-\beta}(1 - 0,088\kappa_0),$$

получим (рис. 5)

$$\kappa_0^2(1 - 0,912e^{-\beta})^2 - [2(1 + e^{-\beta})(1 - 0,912e^{-\beta}) - 0,352e^{-\beta}]\kappa_0 + (1 - e^{-\beta})^2 < 0.$$

Условие конечности процесса (6) в данном случае будет

$$\kappa_0 > \frac{1 - e^{\beta} \sqrt{0,0025}}{0,088}, \quad (15)$$

где n — число тактов до установления.

Кривые (15) для $n = 2; 3; 4$ представлены на рис. 5. Пусть $\beta = 1,8$ и $\kappa_0 = 2$, то есть $n = 3$, тогда $t_{\text{рег.}} = 108$ мин, а с учетом полосы установления $t_{\text{рег.}} \approx 100$ мин. При $\kappa_0 = 2,8; \beta = 1,22$ ($n = 4$), соответственно, $t_{\text{рег.}} = 98$ мин и $t_{\text{рег.}} \approx 90$ мин.

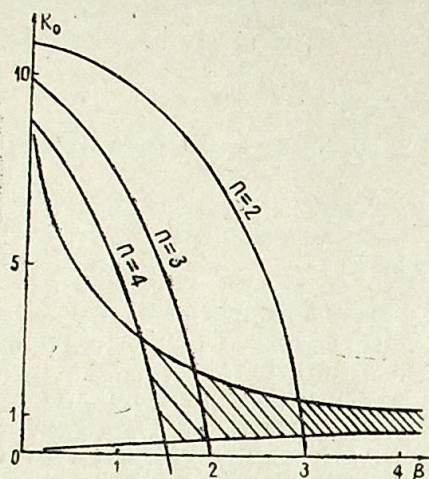


Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963.
2. Бенъяминов Б. Б. „За технический прогресс“ 1968, № 2.
3. Бенъяминов Б. Б. „За технический прогресс“, 1966, № 4.
4. Бенъяминов Б. Б. „Автоматика и телемеханика“, т. XXIII, 1962, № 5.

Поступило 24. VI 1968.

Л. Б. Гэдимов, Б. Б. Бенъяминов

Импульсу автоматик системләрде сонлу узунмүддәтлелик просесләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә импульсу тәнзимләмә системләринин сонлу узунмүддәтлелик просесләри илә синтезинә даир јени метод верилмишдир. Бу методда тәнзим контурунда әлавә коррексияедичи бәнддән истифадә етмәк лазым кәлир.

Һәмин метод оптимал системин синтезиндә гарышыгы гурғунун каталитик крекингли бирохлу реакторунун температурунун тәнзиминә тәтбиг олуишдур.

МҮНДӘРИЧАТ

- А. Б. Левит, Ч. А. Эфэндијев. Информасија нәзәријәси әсасында телевизия автоматик системи веричисинин гурулмасы һаггында 3
- Р. И. Муратов. Кәсилән әмсаллы чырлашан параболлик тәнлик үчүн гарышыг мәсәлә 10
- Е. М. Гасымов. Өз-өзүнә гошма олмајан бир тәртиб диференсиал операторун мәхсуси функцијаларына көрә ајрылыш 17
- М. М. Садыгов. Кечикән аргументли екстремал-диференсиал тәнликләрин һәлләринин хәссәләри һаггында 22
- Ариф С. Чәфәров. Фурје-Лежандр сырларынын бәзи хәссәләри. Г. П. Черепанов, В. М. Мирсәлимов. Өзүллү-еластик чисимләрин көркинликли пәрчимләnmәси 27
- А. Д. Хәлилов. Капрон сапын динамик характеристикаларынын тәдгиги. Ј. Ч. Мәмәдов. Зейдел ардычыл јахынлашмаларынын ади диференсиал тәнликләри системинин һәллине јығылмасы һаггында 35
- Д. В. Сәләхов. Симметрик фәзалардан олан функцијаларын Лебег-Орлич негтәләриндә сингулар интегралларла тәсвири 37
- Ј. Б. Гәдимов, З. Ј. Гулијев, С. И. Мјачин. Фасиләсиз типли һесаблајычы машиналарда һәлл олуиан диференсиал тәнликләрин һәллинин дајаныглыгы һаггында 43
- М. С. Гасымзадә. Электрокинетик өлчү чевирчиләринин elektrik тәрәфинин әвзәтмә схеми 49
- Ч. А. Гулијев. Спектрал үсулу васитәсилә илдирым бошалмаларынын тәдгигинә даир 56
- Р. Х. Абрамов, М. Ә. Бағыров, В. П. Малани. Електрик көһ-пәлмәси заманы јүклү зәрричикләрин бомбардманы һесабына баш верән гызманын тәсирилә полимер диелектрикләринин дағылмасы һаггында 61
- Х. М. Хәлилов, Ј. Ш. Палагашвили, А. И. Ағажев, В. М. Зүјев, Е. Чәләлгызы. Бәрк чисимләрдә узунуна ултрасәс далғаларынын јаратдыгы јердәјишмәнин вә деформасијанын өлчүлмәси методу 65
- О. А. Голикова, Е. О. Чәфәров. $Zr-Ta-C$ системи бәрк мөһлуларынын elektrik вә истилик хәссәләри 70
- М. И. Әлијев, Х. Ј. Хәлилов. $(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$ бәрк мөһлуларынын истиликкечирмәси 75
- Ф. М. Һашымзадә, Ј. М. Сәјдов. Елементар ојанмаларынын D_{3d}^6 кристаллографик структурлу магнит кристалларында симметрия хәссәләри. С. А. Әлијев. $Gd_{0.1}Hg_{0.9}Te$ бәрк мөһлулунун ашағы температурларда термомагнит вә галваномагнит хәссәләри 83
- Д. Б. Бајасанов, В. Л. Шпаков. Газ көмәриндә кечид просесләринин ахтарышлары заманы амплитуд фаз характеристикаларындан истифадә үсулу. 87
- Д. И. Лајнер, Н. Г. Сәмәдов. Электроактив $ReCl_2$ ашгарынын $PbTe-SnTe-PbS$ системи хәлитәләринин термоелектрик хәссәләринә тәсир. Т. Х. Әзизов, М. Х. Әлијева, А. З. Мәмәдова, К. Ә. Шәрифов. $CaSe$ монокристалларынын газотранспорт үсулу илә алынмасы вә бир сыра физики хәссәләринин тәдгиги 109
- А. К. Ағамалыјев, И. А. Вердијев. Конус вә киперболоиддә там системләрин функцијалары 111
- Ј. Б. Гәдимов, Б. Б. Бенъяминов. Импульсу автоматик системләрде сонлу узунмүддәтлелик просесләри 116

СОДЕРЖАНИЕ

А. Б. Левит, Ч. А. Эфендиев. Об одном приложении теории информации к расчету датчика телевизионно-вычислительной автоматической системы (ТВА)	3
Р. И. Мурадов. Смешанная задача для вырождающегося параболического уравнения с разрывными коэффициентами	10
Е. М. Гасимова. Разложение по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных операторов первого порядка	17
М. М. Садыхов. О некоторых свойствах решений дифференциально-экстремальных уравнений с запаздывающим аргументом	22
Ариф С. Джафаров. Некоторые свойства рядов Фурье—Лежандра	27
Р. П. Черепанов, В. М. Мирсалимов. Напряженная посадка вязкоупругих тел	35
А. Д. Халилов. Исследование динамических характеристик капроновой нити	37
Я. Д. Мамедов. О сходимости последовательных приближений Зейделя к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений	43
Д. В. Салехов. О представлении сингулярным интегралом функций из симметрических пространств в точках Лебега—Орлича	49
Я. Б. Кадымов, З. Я. Кулиев, С. И. Мячин. Об устройстве решения дифференциальных уравнений на вычислительных машинах непрерывного действия	56
М. С. Касимзаде. Схема замещения электрической стороны электрокинетических измерительных преобразователей	61
Д. А. Кулиев. К исследованию разрядов молнии спектральным методом	65
Р. Х. Абрамов, М. А. Багиров, В. П. Малин. О разрушении полимерных диэлектриков в результате нагрева, вызванного бомбардировкой их заряженными частицами при электрическом старении	70
Х. М. Халилов, Я. Ш. Палагашвили, А. И. Агаев, В. М. Зуев, Э. Джалал Кызы. Метод измерения амплитуды смещения и деформации в твердых телах в продольной ультразвуковой волне	75
О. А. Голикова, Э. О. Джафаров. Электрические и тепловые свойства твердых растворов системы $Zr-Ta-C$	79
М. А. Алиев и Х. Я. Халилов. Теплопроводность твердых растворов $(2InSb)_x-(ZnSnSb_2)_{1-x}$	83
Ф. М. Гашимзаде и Ю. М. Сеидов. Свойства симметрии элементарных возбуждений в магнитных кристаллах с кристаллографической симметрией L_{3d}^6	87
С. А. Алиев. Термомагнитные и гальваномагнитные свойства твердого раствора $Cd_{0,1}Hg_{0,9}Te$ при низких температурах	99
Д. Б. Баясанов, В. Л. Шпаков. Об использовании метода амплитудно-фазовых характеристик при исследовании переходных процессов в газопроводах	104
Д. И. Лайнер, Г. К. Самедов. Влияние электроактивной примеси $PbCl_2$ на термоэлектрические свойства спанов системы $PbTe-SnTe-PbS$	109
Т. Х. Азизов, М. Х. Алиева, А. З. Мамедова, К. А. Шарифов. Получение монокристаллов p - и r - $GaSe$ газотранспортным методом и последование их некоторых физических свойств	111
А. К. Агамалиев, И. А. Вердиев. Полные системы функций на гиперболюидах и на конусе	116
Я. Б. Кадымов, Б. Б. Беньяминов. Процессы конечной длительности в импульсных автоматических системах	124