

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1

1969

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГИБА ГИБКОЙ МЕМБРАНЫ

Задачей об ударе конусом по гибкой мембране занимался ряд авторов [1]. Задача о прямом ударе тупым телом по гибкой пластине рассмотрена в работе [2]. В данной статье рассматривается задача о поперечном ударе по гибкой мембране параболоидом, движущимся с постоянной скоростью v_0 . При этом предполагалось, что скорость волны сильного разрыва $b(t)$ превосходит скорость звука в материале, т. е. сначала возникает только меридиональное движение, а затем радиальное (схема Рахматулина).

Пусть на параболоид налетает гибкая мембрана бесконечной протяженности (рис. 1). Обозначим через u расстояние элемента от точки O , измеряемое вдоль образующей параболоида, γ —угол между осью ox и касательной к образующей параболоида (рис. 1). Уравнения движения в области прилегания будут [1]:

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x(u)}{r^2} \cos \gamma - \frac{(1+\nu)(1-\cos \gamma)}{r}, \quad (1)$$

где r —Лягранжева координата частицы, t —время, $a_0^2 = E/\rho_0(1-\nu^2)$, ρ_0 —начальная плотность мембраны, ν , E —коэффициент Пуассона и модуль Юнга, соответственно. Условия на волне сильного разрыва имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} b \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{b}{\cos \gamma} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \rho_0 b \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v_0 \sin \gamma \right) &= -\sigma_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ_r —меридиональное напряжение в области прилегания. В окрестности точки B (рис. 1) имеем соотношение

$$v_0 = b \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad (3)$$

Для малого времени соударения при $q \ll 1$, приняв $x \sim u$, $\cos \gamma \sim 1$, уравнения (1) приводятся к линейному виду:

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}. \quad (4)$$

Введем новые переменные

$$\xi = r + a_0 t, \quad \eta = r - a_0 t.$$

п 52827
Центральная научная
библиотека
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. А. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Р. А. Аббасов (отв. секретарь), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Решая систему уравнений (2) с учетом (3), получим новую переменную

$$\eta = \xi - 2 \frac{a_0 q}{v_0} \xi^2; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left[1 - 4q^2 \xi^2 + \frac{2v_0 q}{a_0} \xi + 2\xi^3 \left(\frac{4q^3 a_0}{v_0} - \frac{2q^3 v_0}{a_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4q^4 (a_0^2 - v_0^2)}{v_0^2} \xi^4 \left(\frac{2a_0 q}{v_0} \xi - 3 \right) - \frac{16q^4 a_0^4}{v_0^4} \xi^4 \left(1 - \frac{2a_0 q}{v_0} \xi \right)^2 \right], \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{1}{2} \left[1 - 2 \frac{v_0 q}{a_0} \xi + \frac{4q^3 v_0}{a_0} \xi^3 - \frac{4q^4}{v_0^2} (a_0^2 - v_0^2) \xi^4 \left(\frac{2a_0 q}{v_0} \xi - 3 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16q^4 a_0^4}{v_0^4} \xi^4 \left(1 - \frac{2a_0 q}{v_0} \xi \right)^2 \right], \\ u &= \xi - \frac{a_0 q}{v_0} \xi^2. \end{aligned} \quad (6)$$

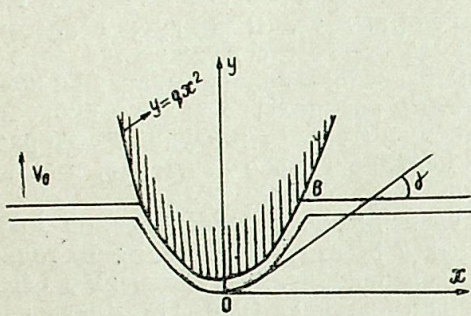


Рис. 1

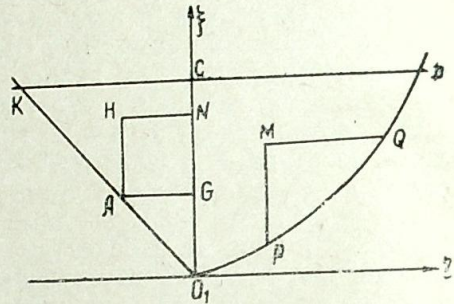


Рис. 2

Формулы (5)–(6) получены разложением в ряд по степеням ξ . Уравнение (4) в новых переменных примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{u}{(\xi + \eta)^2} = 0. \quad (7)$$

Картина движения в плоскости (η, ξ) показана на рис. 2. Решим задачу Коши в области $O_1 DC$ для уравнения (7) с условиями (6) на линии (5). Воспользуемся формулой Римана:

$$\begin{aligned} u_M &= \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_{PQ} \left[uv\xi - u\xi v - \frac{vu}{\xi + \eta} \right] d\xi - \\ &\quad - \left[uv\eta - v\eta u - \frac{uv}{\xi + \eta} \right] d\eta, \end{aligned} \quad (8)$$

где $v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ — функция Римана и для уравнения (7) имеет вид

$$v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi_0 + \eta_0}} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \psi\right). \quad (9)$$

Здесь $\psi = -(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)/(\xi_0 + \eta_0)(\xi + \eta)$, F — гипергеометрический ряд.

Подставляя (6), (9) в формулу (8), учитывая (5) и полагая, что точка $M(\xi_0, \eta_0)$ (рис. 2) попадает на линию $O_1 C$, получим

$$\begin{aligned} v &= n_1 \xi + n_2 \frac{v_0 q}{a_0} \xi^2 + n_3 \frac{a_0 q}{v_0} \xi^2 - n_4 \frac{a_0^2 q^2}{v_0^2} \xi^3 - n_5 q^2 \xi^3 + \\ &\quad + n_6 \frac{a_0 q^3}{v_0} \xi^4 - n_7 \frac{v_0 q^3}{a_0} \xi^4 + n_8 \frac{a_0^3 q^3}{v_0^3} \xi^4 = f_1(\xi), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} n_1 &= 0,5; & n_2 &= 0,505; & n_3 &= 1,08357314; \\ n_4 &= 3,9726762; & n_5 &= 4,09049999; & n_6 &= 38,8855104; \\ n_7 &= 0,58559595; & n_8 &= 13,17836267. \end{aligned}$$

Заметим, что в выражении (10) мы ограничивались четырьмя степенями ξ .

Далее решим уравнение (7) при условиях

$$v(\eta, \xi)|_{\eta=0} = f_1(\xi), \quad u(\eta, \xi)|_{\xi+\eta=0} = 0.$$

Это уравнение показывает, что функция $u(\eta, \xi)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} u(\eta, \xi) &= f_1(\xi) + f_2(\eta) - \iint_{(S)} \left[\frac{1}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{u}{(\xi + \eta)^2} \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (11)$$

где $f_2(\eta) = -f_1(-\eta)$. Здесь область S есть прямоугольник $AGNH$ в области $O_1 CK$ (рис. 2). Для его решения воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u_0(\eta, \xi) = 0.$$

Тогда (11) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$u_1(\eta, \xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

$$\begin{aligned} &\dots \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$$u_n(\eta, \xi) = u_1 + \iint_{(S)} \left[\frac{1}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} \right) + \frac{u_{n-1}}{(\xi + \eta)^2} \right] d\eta d\xi. \quad (12)$$

Не будем доказывать, что последовательности функций

$$\{u_n\}, \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial \xi} \right\}, \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial \eta} \right\}$$

в прямоугольнике $AGNH$ равномерно сходятся к предельной функции. Перейдем к вычислению приближенного решения по формуле (12). Итак, для $u_4(\eta, \xi)$ получим

$$\begin{aligned} u(\eta, \xi) &= c_1(\xi + \eta) + c_2(\xi^2 - \eta^2) + c_3(\xi^3 + \eta^3) + \\ &\quad + c_4(\xi^4 - \eta^4) - c_8 \frac{13}{64} \eta \xi (\eta + \xi) + c_4 \frac{31}{108} (\eta^3 \xi - \eta \xi^3). \end{aligned}$$

Зная функцию $u(\eta, \xi)$, определяем деформацию по формуле $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} - 1$. Таким образом получим

$$\varepsilon = 4c_2 a_0 t + 6c_3 (r^2 + a_0^2 t^2) + 4c_4 [6r^2 a_0 t + 2(a_0 t)^3] - \\ - \frac{13}{64} c_3 [6r^2 - 2(a_0 t)^2] + \frac{31}{108} c_4 [4(a_0 t)^3 - 12r^2 a_0 t],$$

$$\text{где } c_1 = 0,5, \quad c_2 = n_2 \frac{v_0 q}{a_0} + n_3 \frac{a_0 q}{v_0},$$

$$c_3 = -n_4 \frac{a_0^2 q^2}{v_0^2} - n_5 q^2,$$

$$c_4 = n_6 \frac{a_0 q^3}{v_0} - n_7 \frac{v_0 q^3}{a_0} + n_8 \frac{a_0^3 q^3}{v_0^3}; \quad V_0 > a_0.$$

В заключение приношу искреннюю благодарность Ю. А. Созоненко, под руководством которого выполнена настоящая работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Бектурсунов У. Поперечный удар по гибким связям при упругих и упруго-пластических деформациях. Дисс., МГУ, 1967.

Ш. М. Мүтәллимов

Эластик мембранын эжилмәси мәсәләсинин тәгриби һәлли

ХҮЛАСӘ

Мембрана мұхтәлиф формалы чисимлә енинә зәрбә мәсәләси илә бир чох мұәллифләр мәшғул олмушлар [1, 2].

Мәгаләдә сабит V_0 сүр'әтилә һәрәкәт едән парабалоидин эластике мембрана зәрбә мәсәләсинә бахылар. Әввәлчә Коши мәсәләси, сонра исә тәгриби үсулла гарышыг мәсәлә һәлл олунур. Алынған нәтичә кичик заман үчүн r дәјишәнинә көрә деформасияны тапмаға имкан верир.

УДК 539 375

Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, В. М. МИРСАЛИМОВ

О ВОЗДЕЙСТВИИ РЕБЕР ЖЕСТКОСТИ НА РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНЫ

Для предотвращения катастрофического развития трещины и разрушения конструкции применяется подкрепление ее ребрами жесткости. Поэтому решение задач теории упругости для пластинок с трещинами, усиленных подкрепляющими ребрами жесткости, представляет практический интерес. Этим вопросом занимались Ромуальди и Сандерс [1], Е. А. Морозова и В. З. Партон [2], Исида [3], Грейф и Сандерс [4], Блум и Сандерс [5]. Наиболее интересными являются работы [1, 2], в которых рассматривается бесконечная упругая пластина с одной прямолинейной трещиной длиной $2l$. К пластине были приклепаны поперечные стрингеры в точках $z = \pm L \pm i y_0$.

Выбор системы декартовых координат и обозначения поясняются на рис. 1. На бесконечности действует однородное растягивающее напряжение $\sigma_y = \sigma_0$. Действие приклепанных подкрепляющих ребер на схеме заменено четырьмя сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения заклепок (рис. 1). Величина сосредоточенных сил P для упрощения задачи считалась заданной. На самом деле величина сил P вполне определяется упругими и геометрическими характеристиками рассматриваемой системы, а также величиной растягивающей нагрузки σ_0 .

Ниже значение силы P определяется в зависимости от параметров задачи. При этом применяется метод „склеивания“ двух асимптотик искомого решения. Само решение упругой задачи находится методом Мусхелишвили [6]. На основе теории хрупкого разрушения Гриффитса—Ирвина [7, 8] получена зависимость длины трещины от приложенной нагрузки, а также от упругих и геометрических характеристик систем. Анализ этой зависимости показывает, что при некоторых вполне определенных условиях существует устойчивый этап развития трещины.

1. Согласно закону Гука величина силы P , действующей на каждую заклепку со стороны ребра жесткости, равна

$$P = \frac{E_s F}{2y_0} \Delta v, \quad (1)$$

здесь E_s —модуль Юнга материала ребра,
 F —площадь поперечного сечения ребра,
 $2y_0$ —расстояние между заклепками,
 Δv —взаимное смещение заклепок, равное удлинению ребра.

Обозначим через r радиус заклепки. Будем считать далее, что сосредоточенные силы, заменяющие на схеме действие заклепок на пластину, приложены строго в точках $z = \pm L \pm iy_0$, где $z = x + iy$ — комплексная переменная,

$2L$ — расстояние между ребрами жесткости.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для пластины с трещиной, растягиваемой на бесконечности и подвергаемой воздействию указанных четырех сосредоточенных сил (рис. 1). Примем естественное допущение о том, что взаимное упругое смещение точек $z = +L + i(y_0 - r)$ и $z = +L - i(y_0 - r)$ в рассматриваемой задаче теории упругости равно указанному выше взаимному смещению заклепок Δv . Это дополнительное условие представляет собой принимаемое условие "склеивания" двух асимптотик строгого решения и позволяет эффективно найти приближенное решение поставленной выше проблемы.

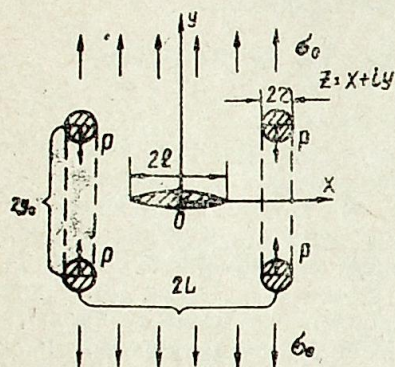


Рис. 1

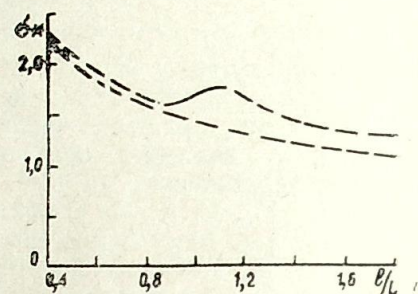


Рис. 2

Используя метод Мусхелишвили и принцип суперпозиции, взаимное смещение Δv указанных точек в рассматриваемой упругой задаче можно найти в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta v = & \frac{P}{2\pi\mu(1+\nu)h} \left\{ \nu \ln \frac{r^2(4L^2 + r^2)}{(r - 2y_0)^2[4L^2 + (2y_0 - r)^2]} + \right. \\ & + \frac{32y_0L^2(y_0 - r)}{(4L^2 + r^2)[4L^2 + (2y_0 - r)^2]} \left. \right\} + \frac{\sigma_0}{\mu} \left\{ \frac{(3-\nu)(y_0 - r)}{4} + \right. \\ & + \frac{(\nu+1)}{2\sqrt{2}} \sqrt{A-B} - \frac{y_0 - r}{\sqrt{2}} \left[L \frac{\sqrt{B+A} + (y_0 - r)\sqrt{A-B}}{A} \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{P}{\pi\mu h} \left\{ \frac{1+\nu}{32} \left(1 + \nu + \frac{7-\nu}{y_0} \right) \ln \frac{(2y_0 - r)\sqrt{4L^2 + (2y_0 - r)^2}}{r\sqrt{4L^2 + r^2}} - \right. \\ & - \frac{(7-\nu)(1+\nu)(y_0 - r)L^2}{2[c^2 + 16L^2(y_0 - r)^2]} + \left[\frac{(7-\nu)(1+\nu)}{2} - \right. \\ & - (15-\nu)y_0 \left. \right] \frac{(y_0 - r)}{8} \left[\frac{1}{r(2y_0 - r)} + \frac{c}{c^2 + 16L^2(y_0 - r)^2} \right] + \\ & + \frac{(7-\nu)}{4} y_0(y_0 - r) \frac{[2Lc + 4L(y_0 - r)^2]^2 - (c - 8L^2)^2(y_0 - r)^2}{[c^2 + 16L^2(y_0 - r)^2]^2} - \\ & + \frac{(7-\nu)y_0(y_0 - r)^3}{4r^2(2y_0 - r)^2} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$A = \sqrt{B^2 + 4L^2(y_0 - r)^2},$$

$$B = L^2(y_0 - r)^2 - l^2,$$

$$C = 4L^2 + r(2y_0 - r),$$

$$\nu = \frac{3-\nu}{1+\nu},$$

Здесь

h — толщина пластины,

ν и μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала пластины, соответственно.

Искомая сила P легко определяется по формулам (1) и (2).

2. Согласно теории Гриффитса—Ирвина напряжение σ_y на продолжении растущей трещины вблизи ее конца в хрупком теле имеет следующий характер:

$$\sigma_y \sim \frac{K_c}{\sqrt{s}} \quad \text{при } s \rightarrow 0. \quad (3)$$

Здесь s — расстояние от конца трещины,

K_c — постоянная материала, введенная впервые Ирвиным.

Вычисление напряжений по методу Мусхелишвили в сочетании с дополнительным условием (3) позволило получить следующую зависимость между l , P , σ_0 и параметрами задачи [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_0 \frac{\pi}{2} - \frac{Py_0}{\sqrt{2}h} \left[\frac{(1+\nu)L}{4D\sqrt{D-F+2L^2}} + \right. \\ + \frac{3y_0(7-\nu)L^3}{D^2(D+F-2L^2)\sqrt{D-F+2L^2}} + \frac{(7-\nu)L(2F-D-4L^2)}{2D^2\sqrt{D-F+2L^2}} + \\ \left. + \frac{y_0^2(7-\nu)L(F+D)(2F-D-4L^2)}{4D^3(D+F-2L^2)\sqrt{D-F+2L^2}} \right] = \frac{\pi K_c}{\sqrt{2}l}, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $F = y_0^2 + l^2 + L^2$, $D = \sqrt{F^2 - 4L^2 - l^2}$.

Заметим, что в работах [1, 2] рассмотрен случай плоской деформации, хотя физическая постановка задачи на самом деле предполагает выполняющимися условия плоского напряженного состояния. Формула (4), как и другие формулы, в настоящей статье отвечает плоскому напряженному состоянию.

При помощи соотношений (1), (2), (4) окончательная зависимость длины равновесной трещины l от внешней нагрузки σ_0 может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \left[G + \frac{(1+\nu)L}{4D\sqrt{D-F+2L^2}} \right] \left\{ \frac{(3-\nu)(y_0 - r)}{4} + \frac{1+\nu}{2\sqrt{2}} \sqrt{A-B} - \frac{y_0 - r}{\sqrt{2}A} \right. \\ \left. - [L\sqrt{A+B} + (y_0 - r)\sqrt{A-B}] \right\} = \\ = \frac{\sqrt{2}\pi\mu(1-\nu-b)h}{FE_s} \left(1 - \frac{\sqrt{2}K_c}{\sigma_0\sqrt{l}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

здесь

$$\begin{aligned} a = \frac{FF_s}{4\mu y_0(1+\nu)\pi h} \left\{ \nu \ln \frac{r^2(4L^2 + r^2)}{(r - 2y_0)^2[4L^2 + (2y_0 - r)^2]} + \right. \\ \left. + \frac{32y_0L^2(y_0 - r)}{(4L^2 + r^2)[4L^2 + (2y_0 - r)^2]} \right\}; \end{aligned}$$

$$b = \frac{FE_s}{2\pi y_0 h} \left\{ \frac{(1+x)}{32} \left(1+x + \frac{7-x}{y_0} \right) \ln \frac{(2y_0-r)\sqrt{4L^2+12y_0-r^2}}{r\sqrt{4L^2+r^2}} - \right. \\ \left. - \frac{(7-x)(1+x)(y_0-r)L^2}{2[c^2+16L^2(y_0-r)^2]} - \frac{7-x y_0(y_0-r)^3}{4r^2(2y_0-r)^2} + \right. \\ \left. + \frac{y_0-r}{8} \left[\frac{(7-x)(1+x)}{2} - (15-x)y_0 \right] \times \left[\frac{1}{r(2y_0-2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{C}{C^2+16L^2(y_0-r)^2} \right] + \frac{7-x}{4} y_0(y_0-r) \times \right. \\ \left. \times \frac{[2LC+4L(y_0-r)^2]^2 - (C-8L)^2(y_0-r)^2}{[C^2+16L^2(y_0-r)^2]^2} \right\}; \\ G = \frac{(7-x)L}{D^2\sqrt{D-F+2L^2}} \left[\frac{3y_0L^2}{D+F-2L^2} + \frac{1}{2}(2F-D-4L^2) + \right. \\ \left. + \frac{y_0^2(F+D)(2F-D-4L^2)}{4D(D+F-2L^2)} \right].$$

На рис. 2 представлена кривая зависимости безразмерной предельной нагрузки $\sigma_* = \sigma_0 \sqrt{L/\kappa_c}$ от безразмерной длины трещины $l_* = l/L$ для следующих значений свободных параметров:

$$\nu = 0,3; E_s = E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \epsilon = y_0/L = 0,2; \epsilon_1 = \frac{r}{L} = 0,01; \\ F/y_0 h = 1.$$

Здесь же нанесена кривая Гриффитса

$$\sigma_* \sqrt{l_*} = \sqrt{2},$$

соответствующая отсутствию подкрепляющих ребер.

Участок устойчивого роста трещины на рис. 2 обозначен сплошной линией, а неустойчивый участок — штриховой линией. Как известно, трещина устойчива, если напряжение σ_0 , необходимое для ее поддержания в подвижно-равновесном состоянии, возрастает с увеличением длины трещины. При достаточно больших y_0/L (редко поставленные заклепки) кривая может не иметь устойчивого участка. В этом случае действие подкрепляющих ребер сводится к увеличению размера подвижно-равновесной трещины, соответствующей данной нагрузке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Romualdi I. P., Sanders P. H. Fracture arrest by riveted stiffeners. Proc 4th Midwest. Conf. Solid Mech., Texas Univ. Press, 1959—1960, p. 74—90.
2. Морозова Е. А., Партон В. З. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещины. ПМТФ, 1961, № 5.
3. Isida M. Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, p. 674—675.
4. Greif R., Sanders J. L. The effect of a stringer on the stresses in a cracked sheet. Trans. ASME, ser. E. J. Appl. Mech., vol. 32, 1965, № 1, p. 59—66.
5. Bloom J. M., Sanders J. L. The effect of a riveted stringer on the stress in a cracked sheet. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, № 3, p. 561—570.
6. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во „Наука“, 1966.
7. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik, Bd. 6, Springer verlag, Berlin, 1958, p. 551—590.
8. Ивлев Д. Д. ПМТФ, № 6, 1967.

Г. П. Черепанов, В. М. Мирсәлимов

Сэртлик тилләринин жарығын инкишафына тәсири һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 2l узунлугда бир дүзхәтли жарығы олан вә пәрчимләнмиш сэртлик тилләри илә мөһкәмләндирилмиш сонсуз еластики лөвһәжә бахылыр вә лөвһә сонсузлугда дартылыр. Пәрчимләнмиш сэртлик тилләринин лөвһәжә тәсири пәрчим нөгтәләринә тәтбиг олунмуш гүввә илә әвәз едилир вә мәсәләнин параметрләриндән асылы һәммин гүввәләрин әдәди гијмәти тапылыр.

Гриффит-Ирвинин көврәк дағылма нәзәријјәси әсасында жарығын узунлугу илә дартма гүввәси арасында асылылыг тапылмышдыр. Бу асылылығын тәдгиги көстәрир ки, бәзи мүүјјән шәртләр дахилиндә жарығын инкишафынын дајаныглы мәрһәләси мөвчуддур.

И. М. МИРЗОЕВ

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ, ИСТЕКАЮЩЕЙ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК И ОБТЕКАЮЩЕЙ ЗАДАННОЕ ТЕЛО

Для определения воздействия струи на тела, помещаемые в окрестности или внутри нее, а также для ряда других задач требуется знать параметры и структуру струи, истекающей в движущуюся или спокойную среду. Начальный участок сверхзвуковой струи, на котором факторами вязкости и турбулентности пренебрегают, можно рассчитать методом характеристик для идеального газа, причем показатель адиабаты γ можно считать постоянным. В последнее время метод характеристик применялся для решения задач на электронно-вычислительных машинах в специальных переменных [1].

В работе [2] рассматривается задача истечения струи в покоящуюся среду и в спутный сверхзвуковой поток для области изэнтропического течения и пренебрегается ударной волной в струе; кроме того, течение за скачком во внешнем потоке не определяется, а для нахождения границы струи используется приближенное условие, заключающееся в том, что внешний поток действует на струю согласно корпускулярной теории Ньютона.

В работе [3] в точной постановке решается задача расчета только начального участка недорасширенной струи, вытекающей в спутный сверхзвуковой поток или (как частный случай) в покоящуюся среду. При истечении в покоящуюся среду учитывалась ударная волна в струе, а при истечении в спутный сверхзвуковой поток скачок в струе в рассчитанных случаях не возникал.

В настоящей работе в точной постановке решалась конкретная задача расчета недорасширенной струи, вытекающей в спутный сверхзвуковой поток. В статье приведены схемы и формулы, необходимый для расчета, а также некоторые основные результаты расчета: контура струи, контуров ударных волн, распределения параметров в поле течения.

1. Пусть на плоское тело набегают равномерный сверхзвуковой поток воздуха. Параметры невозмущенного внешнего потока будем обозначать индексом ∞ . Одновременно стационарная равновесная сверхзвуковая плоская струя истекает из профилированного сопла (индекс b) в равномерный сверхзвуковой внешний поток (рис. 1). При этом образуются: ударные волны MN и AC (рассматривается присоединенная ударная волна) во внешнем потоке; волны разрежения в точке K внешнего потока и в узловых точках A и B ; тангенциальный разрыв AE (контактная поверхность), отделяющий газ струи

от газа внешнего потока. Попутно отметим, что ударная волна в рассчитанных случаях по потоку не возникает. Все параметры потока с индексом ∞ перед волной MN и потока, истекающего из сопла на характеристике AO_1 или BO_1 , заданы. Требуется определить течение газа вниз по потоку, в том числе положение поверхностей разрыва MN , AC , AE и изменение давления вдоль $BD=l$. Так как параметры внешнего потока перед MN известны, то легко можно определить параметры внешнего потока после прохождения ударной волны MN , волны разрежения в точке K и ударной волны AC по известным формулам [4]. Поэтому в качестве исходных данных внешнего потока будем использовать параметры, получаемые после скачка AC .

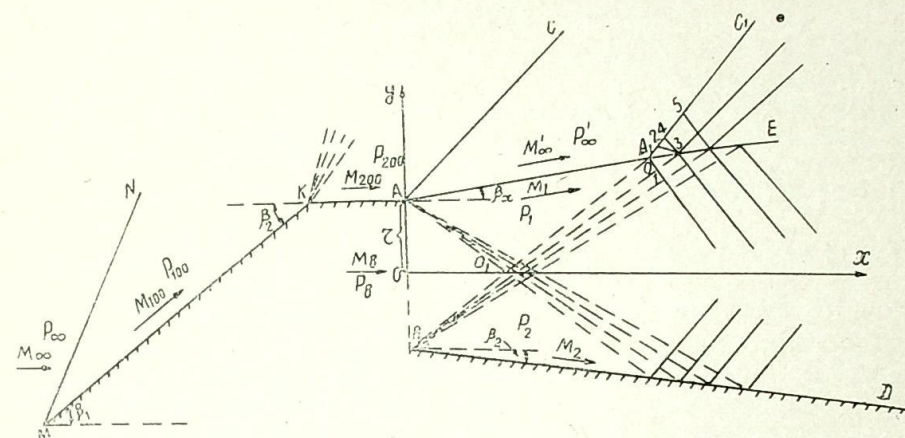


Рис. 1

2. Рассмотрим установившееся изэнтропическое безвихревое течение невязкой жидкости, истекающей из сопла. Для разработки методов решения введем уравнения характеристик для системы, состоящей из уравнений движения Эйлера и уравнения неразрывности. Если ввести полярные координаты V и β :

$$u = V \cos \beta, \quad v = V \sin \beta, \quad (1)$$

а также угол Маха μ :

$$\sin \mu = \frac{1}{M}, \quad (2)$$

то уравнения характеристик и условия на характеристиках будут иметь следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\beta \pm \mu); \quad (3)$$

$$\frac{dv}{du} = -\cot(\beta \mp \mu). \quad (4)$$

Здесь u и v — составляющие скорости V , соответственно, вдоль оси Ox и Oy , M — число Маха, x, y — декартовы координаты, β — угол наклона скорости к оси Ox . Верхний знак в этих уравнениях соответствует характеристикам первого семейства, а нижний — характеристикам второго.

Для случая точного расчета течений газа с использованием ЭВМ воспользуемся методом, предложенным в [1]. Если взять в качестве новых переменных

$$\xi = \tan \beta, \quad \eta = \cot \mu, \quad (5)$$

то уравнения характеристик (3) и условия на них (4) будут иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\xi \pm 1}{\xi \mp 1}; \quad (6)$$

$$d\zeta \mp \frac{2\xi^2(1+\zeta^2)}{(\gamma+1)(1+\xi^2)(1+\xi\zeta^2)} d\xi = 0; \quad (7)$$

$$d\Psi = \pm \frac{\sqrt{(1+\xi^2)(1+\zeta^2)}}{(\xi \mp \zeta)(1+\xi\zeta^2)^{1/2}} dx, \quad (8)$$

где

$$x = \frac{\gamma-1}{\gamma+1},$$

Ψ — функция тока.

Верхний знак в этих уравнениях относится к характеристикам первого семейства, нижний — к характеристикам второго. Эти формулы пригодны для расчета течений, в которых нет областей с $\beta \approx \pm \frac{\pi}{2}$.

В случае необходимости расчета течений с $\beta \approx \pm \frac{\pi}{2}$ вместо функции

ζ вводится функция $\bar{\zeta} = \text{ctg } \beta$.

Для того, чтобы начать расчет по потоку, сначала надо определить угол β_x — отклонение потока после выхода из сопла. Определяющей величиной положения границы струи и скачка АС относительно оси Ох является угол β_x поворота струи около угловой точки на срезе сопла, существенно уменьшающийся с увеличением M_b , γ_b и уменьшением P_b/P_∞ . Для невысоких значений P_b/P_∞ справедливы следующие приближенные формулы в области течения Прандтля — Майера и на скачке малой интенсивности:

$$P_1 = P_b - \frac{\gamma_b M_b^2 P_b}{\sqrt{M_b^2 - 1}} \cdot \beta_x, \quad (9)$$

$$P'_\infty = P_{2\infty} + \frac{\gamma_\infty M_{2\infty}^2 P_{2\infty}}{\sqrt{M_{2\infty}^2 - 1}} \cdot \beta_x; \quad (10)$$

P_1 — давление, получаемое после расширения струи в точке А; P_∞ — давление после скачка АС; параметры с индексом 2_∞ находятся перед скачком АС; Так как на линии АЕ $P_1 = P'_\infty$ то, если известны параметры потока при выходе из сопла и перед скачком АС, можно из уравнений (9) и (10) определить β_x и наоборот, если известен угол β_x , можно определить давление P_b на срезе сопла.

Для нахождения линии АЕ в поле течения применяется следующая схема расчета. Пусть рассчитана характеристика A_1C_1 (рис. 1) с точками 0, 4, 5 и следующая характеристика до точки 1. Требуется рассчитать точку 3, т. е. определить ее координаты и параметры течения с обеих сторон линии АЕ: $x_3, y_3, v_3, u_3, v'_3, u'_3$ (штрих относится к потоку ∞). Координаты x_3, y_3 определяются как пересечение линии АЕ, продолженной из нулевой точки 0, и характеристики 13 из точки 1 по формулам (3), записанным в конечных разностях:

$$\begin{aligned} y_3 - y_1 &= \text{tg}(\beta_1 + \mu_1)(x_3 - x_1), \\ y_3 &= \text{tg} \beta_x \cdot x_3 + r. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения v_3, u_3, v'_3, u'_3 приводится характеристика 32, так как параметры в точке 2 известны и условия на характеристиках (13) и 32 записываются в конечных разностях:

$$v_3 - v_1 = -\text{ctg}(\beta_1 - \mu_1)(u_3 - u_1), \quad (12)$$

$$v'_3 - v'_2 = -\text{ctg}(\beta'_2 + \mu'_2)(u'_3 - u'_2). \quad (13)$$

В уравнениях (12), (13) имеем четыре неизвестных. Остальные два уравнения выводятся из условий на контактной поверхности АЕ. Как известно, на линии АЕ направление потока одинаково и $P_3 = P'_3$. В результате получаем

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{u_3}{u_2}. \quad (14)$$

Из уравнения Бернулли для обоих газов условие $P_3 = P'_3$ записывается в виде

$$\frac{V_m^2}{2} - \frac{v_3^2 + u_3^2}{2} = \frac{V_m'^2}{2} - \frac{v_3'^2 + u_3'^2}{2} = \frac{V_\infty^2}{2} - \frac{v_\infty^2 + u_\infty^2}{2}. \quad (15)$$

Так как из соотношения между P и ρ для изэнтропического течения газа ρ можно выразить через P , получим

$$\rho_3 = \rho_0 \cdot \left(\frac{P_3}{P_0}\right)^{1/\gamma_b}, \quad \rho'_3 = \rho'_0 \cdot \left(\frac{P'_3}{P'_0}\right)^{1/\gamma_\infty}, \quad (16)$$

тогда система уравнений (12) — (16) будет замкнута. Здесь V_m, V'_m — максимальные скорости, а $P_0, \rho_0, P'_0, \rho'_0$ — параметры торможения на срезе сопла и после скачка АС.

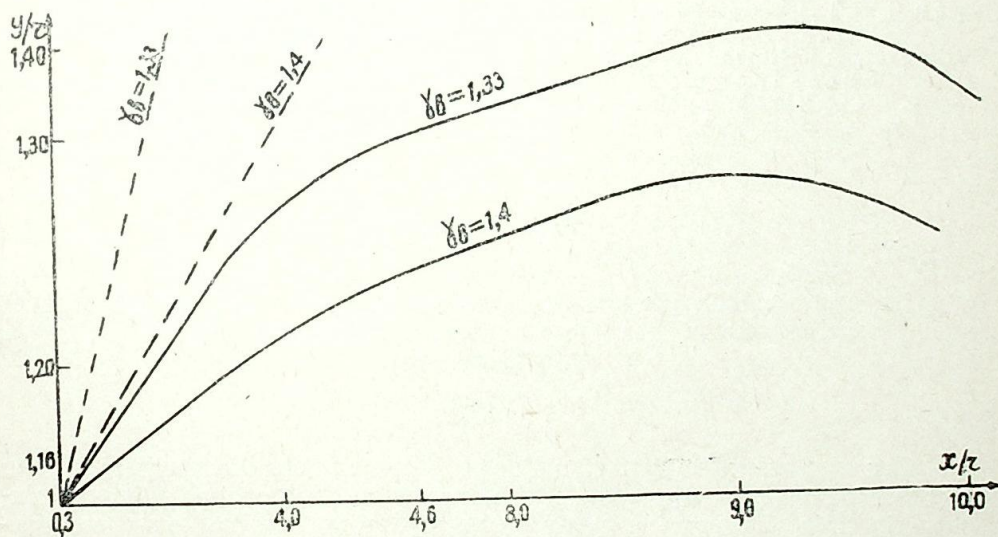


Рис. 2

Таким образом, решая систему уравнений (12) — (16), определяем неизвестные v_3, u_3, v'_3, u'_3 , а потом по известным формулам для изэнтропического течения определяем остальные параметры.

3. На рис. 2 представлены результаты расчета для случая, когда $M_\infty = 3, M_b = 2, \gamma_b = \gamma_\infty = 1.4, P_\infty = 0.4 \text{ кг/см}^2, \beta_1 = 11^\circ 44', \beta_2 = 3^\circ$.

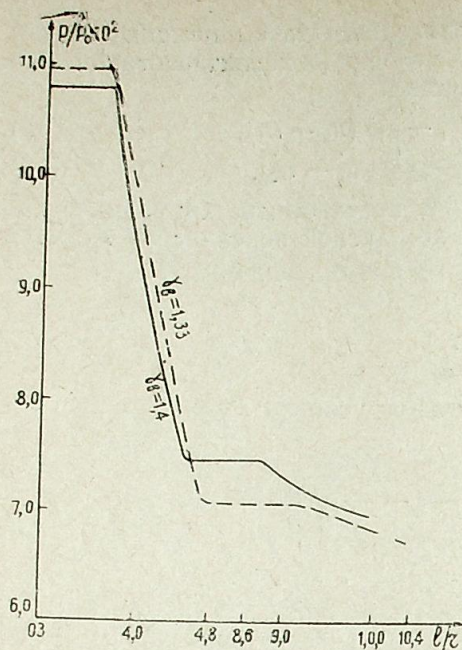


Рис. 3

Х. А. Рахматулину за ценные советы, также Н. А. Алексееву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Сагомоян А. Я., Булимович А. И., Зверев И. Н. Газовая динамика. Изд-во "Высшая школа", 1965.
2. Wand C. J. and Peterson T. B. Spreading of Supersonic Jets From Axially Symmetric Nozzles. Jet Propuls. v. 28, May 1958.
3. Емельянов В. М. "Инженерный ж." т. V, вып. 3, Изд-во АН СССР, 1965.
4. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.

Поступило 18. VII 1968

И. М. Мирзэјев

Сәс сүр'әтиндән јүксәк сүр'әтли газ селинә ахан вә верилән
чисми әһатә едән јүксәк сүр'әтли мүстәви шырнағын
һесаблинамасы

ХҮЛАСӘ

Сәс сүр'әтиндән јүксәк сүр'әтли мүстәви газ шырнағынын сәс сүр'әтиндән јүксәк сүр'әтли ејни истигамәтли газ селинә верилән чисим бојунча ахмасы һесабат характеристика методу илә апарылмышдыр. Беләликлә, зәрбә далғаларынын вә ики мүхтәлиф газы бирбириндән ајыран ајырычы сәтһин формалары, газ селини мәһдудлашдыран мүтләг дивар вә сел бојунча газ параметрләри тәјин едилмишдир.

Задавая $\beta_x = 3^\circ$, по формуле (9) находим $P_b = 0,5946 \text{ кг/см}^2$. Там же приведен расчет для случая $M_b = 2$, $M_\infty = 3$, $\gamma_b = 1,33$, $\gamma_\infty = 1,4$, $P_\infty = 0,4 \text{ кг/см}^2$, $P_b = 0,65 \text{ кг/см}^2$, $\beta_1 = 11^\circ 44'$, $\beta_2 = 3^\circ$.

Сплошная линия — контур струи, пунктирная — контур скачка АС.

Присутствие внешнего потока уменьшает кривизну границы струи и отношение давления на срезе сопла к давлению во внешнем потоке (из-за ударной волны во внешнем потоке), поэтому скачок в струе, как раньше отмечалось, появляется значительно ниже по потоку и в рассчитанных случаях не возникал. На рис. 3 показано распределение давления вдоль стенки $BD = l$ после расширения в узловой точке В.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность

О ПОЛНОТЕ В СРЕДНЕМ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Система функций действительного переменного $\{f_k(x)\}$ называется полной в среднем степени $p \geq 1$ на данном отрезке $[-a, a]$ или полной в метрике пространства $L_p(-a, a)$, где $a > 0$ — заданное число, если любая функция $\varphi(x) \in L_p(-a, a)$ аппроксимируется в смысле метрики $L_p(-a, a)$ как угодно хорошо посредством линейного агрегата функций $\{f_k(x)\}$, т. е. для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся числа $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ такие, что выполняется неравенство

$$\left\| \varphi - \sum_{k=0}^n A_k f_k \right\|_{L_p(-a, a)} = \left(\int_{-a}^a \left| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n A_k f_k(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad (p \geq 1) \quad (1)$$

при $n > N = N(\varepsilon)$.

Очевидно, классические теоремы Вейерштрасса в $L_p(-a, a)$ и $C(-a, a)$ показывают, что система степеней $\{x^k\}$ полна в пространствах $L_p(-a, a)$ и $C(-a, a)$ при любом конечном $a > 0$ и $p \geq 1$. В настоящей работе мы занимались построением общей системы функций действительного переменного, чтобы указать достаточные условия полноты этой системы в метрике пространств $L_p(-a, a)$ и $C(-a, a)$ при любом $a > 0$ и $p \geq 1$.

Пусть D — произвольная область, содержащая заданный конечный отрезок $[-a, a]$ действительной оси, и система аналитических в области D линейно независимых на отрезке $[-a, a]$ функций $\{\varphi_n(z)\}$ полна в метрике пространства $L_p(-a, a)$ (соответственно в $C(-a, a)$) при каждом заданном $a > 0$ и $p \geq 1$. Возьмем последовательность действительных или комплексных чисел $\{a_n\}$, обладающих свойством

$$0 < |a_1| < |a_2| < \dots < |a_n| < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty.$$

Обозначим через $n(r)$ число точек последовательности $\{a_n\}$, находящихся внутри круга $|z| < r$, и через $N(r)$ функцию Неванлины той же последовательности $\{a_n\}$, которая определяется равенством

$$N(r) = \sum_{|a_k| < r} \log \frac{r}{|a_k|} = \int_0^r \frac{n(t) dt}{t}. \quad (2)$$

Рассмотрим функцию $F(z, u)$, определяемую в виде ряда

$$F(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) u^n, \quad (3)$$

сходящегося для всех $z \in D$ и любых u , и займемся исследованием полноты в среднем степени $p \geq 1$ на отрезке $[-a, a]$ системы функций $\{F(x, \alpha_n)\}$, т.е. в пространстве $L_p(-a, a)$, а также в пространстве $C(-a, a)$ при заданном $a > 0$ и $p \geq 1$.

Палей и Винер, а затем Н. Левинсон*, основываясь на принципах распределения нулей целых функций, указали некоторые условия полноты системы функций $\{e^{i\alpha_n x}\}$ в метрике пространства $L_p(-a, a)$ и $C(-a, a)$. Заметим, что эти задачи являются частными случаями нашей задачи, так как в случае $\varphi_n(z) = \frac{1}{n!} (iz)^n$ имеем

$F(z; u) = e^{izu}$, т.е. система $\{e^{i\alpha_n x}\}$ является частным случаем нашей системы $\{F(x, \alpha_n)\}$. Из того, что система степеней $\{x^k\}$ полна в смысле метрики пространств $C(-a, a)$ и $L_p(-a, a)$ при конечном $a > 0$, следует естественность следующего критерия полноты в метрике пространств $C(-a, a)$ и $L_p(-a, a)$ системы функций действительного переменного $\{\psi_k(x)\}$, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть система функций $\{\varphi_k(x)\}$ полна в пространстве $L_n(-a, a)$ и каждая функция $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) аппроксимируется в смысле метрики $L_p(-a, a)$, как угодно хорошо, посредством линейной комбинации функций $\{\psi_k(x)\}$, т.е. каким бы ни было натуральное число k и сколь угодно малым число $\varepsilon > 0$, найдется натуральное число $N_k = N(\varepsilon, k)$ и числа $\{B_{n, k}\}$ такие, что выполняются неравенства

$$\left\| \varphi_k(x) - \sum_{n=0}^{N_k} B_{n, k} \psi_n(x) \right\|_{L_p(-a, a)} < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

Тогда система функций $\{\psi_n(x)\}$ также полна в пространстве $L_n(-a, a)$, где $p \geq 1$ и $a > 0$ — заданное число. Подобный критерий имеет место и в пространстве $C(-a, a)$.

1. Для исследования вопроса о полноте системы функций $\{F(x, \alpha_n)\}$ в метрике пространств $C(-a, a)$ и $L_p(-a, a)$ будем пользоваться одним интерполяционным процессом типа Лагранжа, который введен в рассмотрение нами совместно с М. В. Келдышем [2]. Рассмотрим рациональную функцию

$$\Phi_n(t, u) = \prod_{k=1}^n \frac{t - \alpha_k}{u - \alpha_k} \cdot \frac{1}{|\alpha_n|^{2n} (u - t)} \cdot \prod_{k=1}^n [|\alpha_n|^2 - \theta^2 \bar{\alpha}_k (u - t)].$$

В работе [2] показано, что функцию $\Phi_n(t, u)$ можно представить в виде

$$\Phi_n(t, u) = \frac{1}{u - t} - \sum_{k=1}^n \frac{q_{n, k}(t)}{u - \alpha_k}, \quad (5)$$

где

$$q_{n, k}(t) = \prod_{\substack{j=k \\ j \neq n}}^n \frac{t - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} \cdot \prod_{j=1}^n \left[1 - \frac{\theta^2 \bar{\alpha}_k (\alpha_j - t)}{|\alpha_n|^2} \right].$$

Умножая равенство (5) на $\frac{1}{m! \cdot 2\pi i} F(x, u)$ и интегрируя по окружности $|u| = \frac{1}{\theta} |\alpha_n| = R$ ($0 < \theta < 1$), получим

* Исследования по поводу полноты системы функций $\{e^{i\alpha_n x}\}$ систематизированы в кн. Б. Я. Левина [1].

$$\frac{1}{m!} F(x, t) - \sum_{k=1}^n \frac{q_{n, k}(t)}{m!} F(x, \alpha_k) = \frac{1}{m! \cdot 2\pi i} \int_{|u|=R} \Phi_n(t, u) F(x, u) du.$$

Продифференцируем это равенство m раз по переменному t , а затем положим $t = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m F(x, t)}{\partial t^m} \right]_{t=0} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{m!} q_{n, k}^{(m)}(0) F(x, \alpha_k) = \\ & = \frac{1}{2\pi i \cdot m!} \int_{|u|=R} \left[\frac{\partial^m \Phi_n(t, u)}{\partial t^m} \right]_{t=0} \cdot F(x, u) du = R_{n, m}(x), \end{aligned}$$

где $-a \leq x \leq a$.

Из равенства (4) видно, что

$$\frac{1}{m!} \left[\frac{\partial^m F(x, t)}{\partial t^m} \right]_{t=0} = \varphi_m(x)$$

и потому имеет

$$\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^n C_{k, m} F(x, \alpha_k) = R_{n, m}(x),$$

где

$$C_{k, m} = \frac{1}{m!} q_{n, k}^{(m)}(0).$$

В силу обобщенного неравенства Минковского из последнего равенства следует

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-a}^a |\varphi_m(x) - \sum_{k=0}^n C_{k, m} F(x, \alpha_k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi \cdot m!} \int_{|u|=r} \left| \frac{\partial^m \Phi_n(t, u)}{\partial t^m} \right|_{t=0} \cdot \left(\int_{-a}^a |F(x, u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot du. \quad (6) \end{aligned}$$

В силу формулы Коши при $0 < \rho < 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \left[\frac{\partial^m \Phi_n(t, u)}{\partial t^m} \right]_{t=0} \right| \leq \frac{m!}{2\pi} \int_{|v| \leq \rho} \left| \frac{\Phi_n(v, u)}{v^{m+1}} \right| \cdot |dv| < \\ & < m! \cdot \bar{\rho}^m \max_{|v| \leq \rho, |u| \leq R} |\Phi_n(v, u)|. \end{aligned}$$

Таким образом неравенство (6) запишется в виде

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_m(x) - \sum_{k=0}^n C_{k, m} F(x, \alpha_k) \right\|_{L_p(-a, a)} \leq \\ & \leq \bar{\rho}^m \max_{|u| \leq r, |v| \leq \rho} |\Phi_n(v, u)| \cdot \sup_{|u| \leq r} \|F(x, u)\|_{L_p(-a, a)} \quad (7) \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$M_p[F; a; r] = \max_{|u| \leq r} \|F(x, u)\|_{L_p(-a, a)} \quad (1 \leq p < \infty) \quad (8)$$

и

$$M[F; a; r] = \max_{|u| \leq r, |x| \leq a} |F(x, u)| \quad (p = \infty). \quad (9)$$

Заметим, что для максимума модуля $\Phi_n(v, u)$ при $|u| = r = \frac{1}{\theta} |a_n|$ и $|v| \leq \rho$ ($0 < \rho < 1$) имеет место неравенство (см. [2] стр. 290)

$$\max_{|u| \leq r, |v| \leq \rho} |\Phi_n(v, u)| \leq \begin{cases} A(\varepsilon, \rho) (1 + \varepsilon)^{n(r)} e^{-N(r)} \cdot \frac{r}{r - \rho}; \\ A(\varepsilon, \rho) (1 + \varepsilon)^{n(r)} \theta^{n(r\theta)} \cdot \frac{r}{r - \rho} \quad (0 < \theta < 1), \end{cases}$$

где $A(\varepsilon, \rho)$ — постоянная, не зависящая от r , $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Итак, неравенство (7) примет вид

$$\begin{aligned} & \left\| \varphi_m(x) - \sum_{k=0}^m C_{k,m} F(x, a_k) \right\|_{L_p(-a, a)} \leq \\ & \leq \begin{cases} A(\varepsilon, \rho) \cdot \frac{r}{r - \rho} (1 + \varepsilon)^n e^{-N(r)} M_p[F; a; r] \\ A(\varepsilon, \rho) \cdot \frac{r}{r - \rho} (1 + \varepsilon)^n \cdot \theta^{n(r)} M_p\left[F; a; \frac{r}{\theta}\right] \end{cases} = \\ & = \begin{cases} B(\varepsilon, \rho) \exp \left[-N(r) \left(1 - \frac{\log M_p[F; a; r]}{N(r)} \right) \right] \\ B(\varepsilon, \rho) \exp \left[-n(r) \left(\log \frac{1}{\theta} - \log M_p\left[F; a; \frac{r}{\theta}\right] \right) \right] \end{cases}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство дает нам право прийти к следующему заключению:

Теорема 1. Пусть $n(r)$ — функция плотности, $N(r)$ — функция Неванлины последовательности $\{a_n\}$ и функция $F(x, u)$ определяется рядом (4), сходящимся при $|x| \leq a$ и любом u , причем

$$M_p[F; a; r] = \max_{|z| \leq r} \|F(x, u)\|_{L_p(-a, a)}.$$

Тогда система действительных функций $\{F(x, a_n)\}$ полна в пространстве $L_p(-a, a)$, если имеет место одно из неравенств:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\log M_p[F; a; r]} > 1. \quad (10)$$

или

$$\log M_p\left[F; a; \frac{r}{\theta}\right] < C(\theta) \cdot n(r), \quad (11)$$

где $C(\theta) < \log \frac{1}{\theta} \quad (0 < \theta < 1).$

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо также в метрике пространства $C(-a, a)$ с той лишь разницей, что функция M_p , определяемая равенством (8), заменится через $M[F; a; r]$, определяемую равенством (9).

2. Отметим теперь некоторые следствия, вытекающие из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть D — некоторая область, содержащая конечный отрезок $[-a, a]$ действительной оси, функция $F(x, u)$ определяется рядом (4) при $z \in D$ и любом u , и, кроме того, функции $\varphi_n(z)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} |\varphi_n(z)|^{\frac{1}{n}} = (\sigma \rho)^p \cdot |z| \quad (z \in D). \quad (12)$$

Далее пусть $n(r)$ — функция плотности, $N(r)$ — функция Неванлины последовательности чисел $\{a_n\}$. Тогда система функций $\{F(x, a_n)\}$ полна в пространстве $L_p(-a, a)$, если имеет место одно из условий:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[N(r) - \sigma(ar)^p - \frac{\rho}{p} \log r \right] > -\infty \quad (13)$$

или

$$n(r) > \rho \sigma (ar)^p. \quad (14)$$

Доказательство. В силу условия (12) ряд (4) сходится для всех $z \in D$ и любых u , кроме того, в силу (12) имеем

$$|F(z, u)| < K(\varepsilon) \exp[(\sigma + \varepsilon)|zu|^p],$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} M_p[F; a; r] & \leq K(\varepsilon) 2^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^a e^{\rho \sigma r^p x^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \frac{K(\varepsilon) 2^{\frac{1}{p}} e^{\sigma(ar)^p}}{\left[\rho a^{1-\frac{1}{p}} p \sigma r^p \right]^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

при любом $\rho \geq 1$ и $p \geq 1$, или

$$\log M_p[F; a; r] \leq \sigma(ar)^p - \frac{1}{p} \log(\rho p \sigma r^p) - \frac{\rho - 1}{\rho p} \log a. \quad (15)$$

Благодаря этому неравенство (10) запишется в виде неравенства (13). Очевидно, в силу равенства (15) неравенство (11) выполняется, если выполняется следующее неравенство:

$$\sigma \left(\frac{ar}{\theta} \right)^p < \log \frac{1}{\theta} \cdot n(r).$$

Отсюда следует неравенство (14), если учесть, что

$$\max_{0 < \theta < 1} \left[\theta^p \log \frac{1}{\theta} \right] = \frac{1}{ep}.$$

Допустим, что $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ есть целая функция с отличными от нуля коэффициентами Тейлора $C_k \neq 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Очевидно, что выбирая $\varphi_n(z) = C_n z^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), из равенства (4) получим

$$F(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (zu)^n = f(zu).$$

Кроме того, имеем

$$M_p[F; a; r] = \max_{|u| \leq r} \left(\int_{-a}^a |f(xu)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = M_p[f; ar]$$

и

$$M[F; a; r] = \max_{|u| \leq r, |x| \leq a} |f(xu)| = M[f; ar] \quad (p = \infty).$$

Таким образом из теоремы 1 следует

Следствие 2. Если $f(z)$ — целая функция с отличными от нуля коэффициентами Тейлора $f^{(m)}(0) \neq 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), то система действительных функций $\{f(\alpha_n x)\}$ полна в пространстве $L_p(-a, a)$, если выполняется одно из условий:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r)}{\log M_p[f; ar]} > 1 \quad (10^*)$$

или

$$\log M_p \left[f; \frac{ar}{\theta} \right] < C(\theta) \cdot n(r), \quad (11^*)$$

где $C(\theta) < \log \frac{1}{\theta}$ ($0 < \theta < 1$).

В частности, если функции $\varphi_n(z) = C_n z^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяют условию (12), то это означает, что $f(z) = \sum C_n z^n$ является целой функцией конечного порядка ρ и конечного типа σ , т. е. имеет место неравенство

$$M_p[f; ar] = \max_{|u| \leq r} \left(\int_{-a}^a |f(xu)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq A(\epsilon) \left(\int_{-a}^a e^{p(\sigma+\epsilon)|x|^p} dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда в силу (15) при достаточно больших r ($r > r_0$) имеет

$$\log M_p[f; ar] \leq \sigma(ar)^p - \frac{1}{p} \log(\rho p \sigma r^p) = \frac{\rho-1}{\rho p} \log a. \quad (16)$$

Благодаря последнему выражению и следствию 2 приходим к следующему заключению:

Следствие 3. Если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ — целая функция порядка ρ типа σ , с отличными от нуля коэффициентами Тейлора $C_m \neq 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и $\{\alpha_n\}$ — последовательность комплексных чисел с характеристическими функциями $n(r)$ и $N(r)$, то система функций действительного переменного $\{f(\alpha_n x)\}$ полна в пространстве $L_p(-a, a)$, если имеет место одно из условий: (13) или (14).

Пусть теперь последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\alpha_n|^\mu} = \nu < +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$|\alpha_n| \geq \left(\frac{n}{\nu} \right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Выбирая $r = \left(\frac{n}{\nu} \right)^{\frac{1}{\mu}}$, нетрудно заметить, что $n(r) = n$ и поэтому неравенство (14) принимает вид

$$n > \rho e \sigma a^p \left(\frac{n}{\nu} \right)^{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (17)$$

Очевидно, неравенство (17) выполнится, если:

1) $\rho < \mu$ и 2) в случае $\rho = \mu$

$$a < \left(\frac{\nu}{\rho e \sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}}. \quad (18)$$

В случае $r = \left(\frac{n}{\nu} \right)^{\frac{1}{\mu}}$ можно подсчитать и функцию $N(r)$:

$$N(r) = \sum_{|\alpha_k| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha_k|} = \frac{1}{\mu} \sum_{|\alpha_k| \leq r} \log \frac{\nu}{|\alpha_k|^\mu} \leq \leq \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \log \frac{n}{k} = \frac{1}{\mu} \log \frac{n^n}{n!}.$$

Отсюда по формуле Стирлинга находим

$$N(r) \leq \frac{n}{\mu} - \frac{2}{2\mu} \log 2\pi n. \quad (19)$$

Благодаря этому для левой части неравенства (13) получим

$$N(r) - \sigma(ar)^p - \frac{\rho}{p} \log r = \frac{n}{\mu} - \frac{1}{2\mu} \log 2\pi n - \sigma a^p \left(\frac{n}{\nu} \right)^{\frac{\rho}{\mu}} - \frac{\rho}{\rho\mu} \log \frac{n}{\nu}.$$

Отсюда также видно, что неравенство (13) выполнится, если имеет место одно из условий:

1) $\rho < \mu$; 2) $\rho = \mu$ и

$$1 - \frac{\sigma\mu a^p}{\nu} > \frac{2}{e} \quad \text{или} \quad a < \left(\frac{\nu}{\mu e \sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Таким образом, приходим к следующему заключению:

Следствие 4. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$ — целая функция порядка ρ типа σ , с отличными от нуля коэффициентами Тейлора $C_m \neq 0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), и последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\alpha_n|^\mu} = \nu < +\infty.$$

Тогда система действительных функций $\{f(\alpha_n x)\}$ полна в пространстве $L_p(-a, a)$, если имеет место одно из условий:

$$1) \rho < \mu; \quad 2) \rho = \mu, \text{ но } a < \left(\frac{\nu}{\mu e \sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

В частности, пусть $f(z) = e^{z^i}$ ($\rho = 1, \sigma = 1$). Тогда в силу следствия 3 справедливо следующее:

Следствие 5. Если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ такова, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left\{ N(r) - ar + \frac{\log r}{\nu} \right\} > 0,$$

то система функций $\{e^{ia_n x}\}$ полна в $L_p(-a, a)$ теорема Н. Левинсона) при $1 \leq p \leq \infty$.

Замечание. Нетрудно заметить, что вышеприведенные утверждения имеют место также в пространстве $C(-a, a)$ (в случае $p = \infty$), если величину $M_p[F; a; r]$ заменить на $M[F; a; r]$ или соответствующими выражениями. Например, из следствия 5 видно, что условие полноты системы функций $\{e^{ia_n x}\}$ в пространстве $C(-a, a)$ имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{N(r) - ar\} \geq 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целой функции. Гостехиздат. М.—Л, 1956.
2. Ибрагимов И. И. и Келдыш М. В. Об интерполяции целых функций. Матем. сб. т. 20 (62): 2 (1947).

Поступило 30. VIII 1968

И. И. Ибрагимов

Бир функцијалар системинин орта тамлығы һагында

ХҮЛАСӘ

Верилмиш $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$ системи $[-a, a]$ парчасыны өз дахилинә алан D областында там систем олдуғда

$$F(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) u^k$$

функцијасына бахылыр. Бу сыра $z \in D$ вә u -нун бүтүн гијмәтләриндә јығылан олдуғда, һәги ги дәјишәнли функцијалардан дүзәлмиш $\{F(x; a_n)\}$ системинин $L_p(-a, a)$ ($p \geq 1$) фәзасында тамлыг шәрти тапылыр.

Ю. М. СЕИДОВ и М. Н. АБДУЛЛАЕВ

К ТЕОРИИ ДВУХМАГНОННОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В МАГНЕТО-УПОРЯДОЧЕННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Известно, что магнитное упорядочение сказывается на физических свойствах веществ. До последнего времени влияние магнитного упорядочения на оптические эффекты не исследовалось. Были известны лишь некоторые данные по оптическим спектрам магнетоупорядоченных кристаллов в оптической и далекой инфракрасной области спектра. Первоначально эти эксперименты интерпретировались на основе теории приближения одноионного молекулярного поля, согласно которой предполагалось, что каждый ион подвергается действию эффективного обменного поля. Такое приближение может объяснить лишь смещение и расщепление линии в этих кристаллах при температурах, близких к температуре Нееля. Однако такие явления, как появление экстралиний, аномальные изменения интенсивности в температурной области значительно ниже точки Нееля в рамках молекулярного приближения объяснить нельзя. Это приближение непригодно для объяснения низколежащих возбужденных состояний, где корреляции поперечного движения электронных спинов соседних ионов значительно понижают энергию возбуждения системы по сравнению со значением энергии, данной молекулярным полем.

Известно, что названными низколежащими состояниями магнетоупорядоченных кристаллов являются магныоны. Это состояние, в котором эквивалентные магнитные ионы в любой элементарной ячейке кристалла имеют одну и ту же амплитуду возбуждения, как этого требует трансляционная инвариантность решетки. Магнонные собственные значения должны сильно зависеть от положения волнового вектора $\vec{k}$ в зоне Бриллюэна для магнетоупорядоченной решетки.

Дальнейшие исследования оптических свойств магнетоупорядоченных кристаллов привели еще к одному интересному явлению к наблюдению в них Френкельского экситона, т. е. в этих кристаллах, кроме магнитного, существует электронное возбуждение. Отличие экситонов в магнетоупорядоченных кристаллах от обычных экситонов заключается в том, что они могут быть исследованы с точки зрения магнитной пространственной группы, т. е. каждое электронное возбуждение будет находиться в условиях магнитного упорядочения, а не в условиях обычной симметрии немагнитной решетки. Энергия такого экситона будет зависеть от волнового вектора $\vec{k}$, взятого из магнитной зоны Бриллюэна. Таким образом в этих кристаллах основное состояние магнитных ионов обладает орбитальным угловым моментом и

не гасится электрическим полем кристаллической решетки. Экситоны Френкеля можно наблюдать. Такого типа экситоны, помимо оптических исследований, недавно были обнаружены при исследовании рассеяния нейтронов кристаллами CoF_2 [1]. Заметим, что в этих кристаллах недавно была обнаружена аналогия Давыдовского расщепления, встречающаяся в молекулярных кристаллах и заключающаяся в снятии вырождения экситонных состояний, за счет взаимодействия если в элементарную ячейку приходят две молекулы.

В магнитных кристаллах на элементарную ячейку приходится два магнитных иона и один из них находится в возбужденном состоянии, поскольку это возбуждение (энергия возбуждения вырождения) может быть у того и другого иона. Вырождение снимается за счет взаимодействия этих ионов.

Как было показано в работе [2], наблюдаемые в некоторых антиферромагнетиках явления слабого ферромагнетизма, магнитоэлектрические эффекты и пьезомагнетизм связаны с анизотропией косвенного обменного взаимодействия. Там же [2] были найдены соответствующие выражения для оператора гамильтониана. В настоящей работе мы стремились показать, что та же самая схема получения косвенного обмена [3] может быть положена в основу вывода дипольного электрического момента в магнитоупорядоченных системах. Будем предполагать, как обычно, что интегралы перекрытия малы и они могут быть использованы как параметры малости. Предположим далее, что у нас имеется два узла — магнитоактивный и магнитонеактивный. В немагнитном узле электроны, находясь в возбужденном состоянии, могут перекрываться электронами магнитных ионов. За счет такого перекрытия электрон немагнитного иона может перейти к магнитному. Такое возбужденное состояние системы было обнаружено исследованием ЯМР. Действительно, при переходе электрона от немагнитного иона к магнитному магнитный момент магнитного иона уменьшится. Вследствие этого уменьшения магнитное поле иона у ядра тоже будет изменяться. Такое уменьшение магнитного поля у ядра иона должно вызывать смещение частоты ЯМР. Это и было обнаружено при эксперименте [4].

Как отмечено выше, электроны в немагнитном ионе находятся в P возбужденном состоянии, поэтому немагнитные ионы обладают электрическим дипольным моментом. Следовательно, при помещении нашей системы во внешнее электрическое поле в гамильтониане появится дополнительный член энергии взаимодействия с дипольным моментом, т. е. $\sum_i \vec{E} \vec{P}_i$, где i — номер немагнитного иона, $\vec{P}_i$ — его дипольный момент, $\vec{E}$ — однородное электрическое поле. Тогда гамильтониан нашей системы примет вид

$$H = \sum_{ii'} L(ii') a_i^+ a_{i'} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1 i_2 \\ i_1' i_2'}} F(i_1 i_2; i_1' i_2') a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ a_{i_2'} a_{i_1'}, \quad (1)$$

$$L(ii') = \int \varphi_i^*(x_i) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \vec{E} \vec{P}_i \right] \varphi_{i'}(x_{i'}) dx_i.$$

Поступая аналогичным образом, как в работах [1, 2], можно получить окончательное выражение для гамильтониана в электрическом поле:

$$H = H_0 - \vec{E} \vec{P}, \quad (2)$$

где

$$H_0 = \sum_{ij} I_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j - \frac{K^2}{2} \left\{ \sum_i (S_i^z)^2 + \sum_j (S_j^z)^2 \right\},$$

$$\vec{P} = \sum_{ij} \pi_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j.$$

Отсюда видно, что коэффициент перед однородным электрическим полем можно рассматривать как дипольный момент системы, т. е. этот дипольный момент связан с двумя узлами. В нашем случае эти узлы обменно связаны. Дипольный момент, обменно связанный с двумя узлами, впервые был предложен Дехтером [5] для некоторых особенностей оптического спектра, наблюдаемых при экспериментах [6] в полупроводниках. Таким образом видим, что описанный метод [3, 2] позволяет получить также дипольный момент обменно связанных пар. Появление дипольного электрического момента антиферромагнетика также связано косвенным характером обмена. Если в гамильтониане (1) учесть спин-орбитальное взаимодействие, то можно получить дополнительный дипольный момент, связанный с существованием слабого ферромагнетизма. Выражение дипольного момента, обусловленного существованием слабого ферромагнетизма было получено в работе [7] и имеет следующий вид:

$$\vec{P} = \sum_{ij} \pi_{ij} [\vec{S}_i \vec{S}_j]. \quad (3)$$

Теперь можно приступить к вычислению и исследованию диэлектрической восприимчивости, обусловленной дипольным электрическим моментом обменно связанных пар в антиферромагнетиках и слабых ферромагнетиках. Кроме того, рассмотрим диэлектрическую восприимчивость, обусловленную дипольным электрическим моментом, связанным с существованием слабого ферромагнетизма. Далее будем исследовать влияние различного рода взаимодействия (диполь-дипольного и спин-фононного) на диэлектрическую восприимчивость.

Диэлектрическая восприимчивость, обусловленная дипольным электрическим моментом обменно связанных пар

Для вычисления диэлектрической восприимчивости будем пользоваться техникой двухвременной функции Грина, которая ранее была использована [2] для вычисления магнитной восприимчивости. Легко можно показать, что она пригодна для вычисления любого отклика на внешнее возмущение.

В первом приближении по $\vec{E}$ диэлектрическая восприимчивость выражается через соответствующие функции Грина следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon(\Omega) &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\Omega(t-t')} \ll \vec{P}(t) | \vec{P}'(t') \gg = \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{i\Omega(t-t')} \theta(t-t') \langle [\vec{P}, \vec{P}'] \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Если выразить выражение (4) через дипольные моменты обменно связанных пар, т. е.

$$\vec{P} = \sum_{ij} \pi_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (5)$$

и ввести соответствующие функции Грина, то получим общее выражение диэлектрической восприимчивости, т. е.

$$\epsilon(\Omega) = -2^{-1} \pi i \sum_{ij} \sum_{l'j'} \vec{\pi}_{ij} \vec{\pi}_{l'j'} \{ G_{ij,l'j'}^I(t-t') + G_{ij,l'j'}^{II}(t-t') + G_{ij,l'j'}^{III}(t-t') + G_{ij,l'j'}^{IV}(t-t') \}_2. \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_{ij,l'j'}^I(t-t') &= \langle\langle S_i^+(t) S_j^+(t) | S_{l'}^+(t') S_{j'}^+(t') \rangle\rangle, \\ G_{ij,l'j'}^{II}(t-t') &= \langle\langle S_i^-(t) S_j^-(t) | S_{l'}^+(t') S_{j'}^+(t') \rangle\rangle, \\ G_{ij,l'j'}^{III}(t-t') &= \langle\langle S_i^+(t) S_j^+(t) | S_{l'}^-(t') S_{j'}^-(t') \rangle\rangle, \\ G_{ij,l'j'}^{IV}(t-t') &= \langle\langle S_i^-(t) S_j^-(t) | S_{l'}^-(t') S_{j'}^-(t') \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции Грина составляем с помощью гамильтониана антиферромагнетика (2). Для этого составляем уравнения движения для операторов $S_i^{\pm}(t)$, $S_j^{\pm}(t)$ и используем известную технику температурной функции Грина [9].

Опуская подробности вычисления этих функций, приведем окончательный вид Фурье образов функции, т. е.

$$\begin{aligned} G_{kk'}^I(E) + G_{kk'}^{II}(E) + G_{kk'}^{III}(E) + G_{kk'}^{IV}(E) = \\ = \frac{4\sigma E_\sigma}{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 J^2(k)} \{ \langle S_k^+ S_k^- \rangle + \langle S_k^- S_k^+ \rangle \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как

$$\begin{aligned} \langle S_k^+ S_k^- \rangle &= S(S+1) - \langle S_k^z \rangle - \langle (S_k^z)^2 \rangle, \\ \langle S_k^- S_k^+ \rangle &= S(S+1) - \langle S_k^z \rangle - \langle (S_k^z)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} G_{kk'}^I(E) + G_{kk'}^{II}(E) + G_{kk'}^{III}(E) + G_{kk'}^{IV}(E) = \\ = \frac{8\sigma E_\sigma}{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 J^2(k)} \{ S(S+1) - \langle (S_k^z)^2 \rangle \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $E_\sigma = 2\sigma \{ I(0) + K^2 \}$; $\sigma = \langle S^z \rangle$.

Как известно [8], полюс функции Грина дает энергетический спектр системы, т. е.

$$E = 2\sigma I(0) \sqrt{1 - \left[\frac{I(k)}{I(0)} \right]^2} + \frac{K^2}{I^2(0)} [2I(0) + K^2]. \quad (11)$$

При $k=0$ для спектра антиферромагнетика получаем

$$E = 2\sigma \sqrt{K^2 [2I(0) + K^2]}.$$

При $K^2=0$ получаем

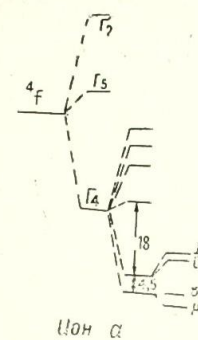
$$E = 2\sigma I(0) \sqrt{1 - \left[\frac{I(k)}{I(0)} \right]^2},$$

что совпадает с выражением [11].

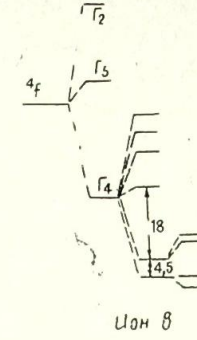
Почему оптические свойства должны зависеть от магнитного упорядочения? Теория этого явления была дана Мория [11]. Поглощение связано с двухмагнанными процессами. Как видно из формулы (11), в процессе поглощения участвуют два магнона, т. е. поглощение электромагнитного излучения сопровождается возбуждением двух магнов. Такое двухмагннное поглощение было обнаружено при эксперименте [10].

Схематически эти процессы показаны на рис. 1. Допустим, что мы имеем CoF_2 . На рисунке показаны энергетические уровни ионов Co^{++} и Co^{++} . В кристалле CoF_2 каждый ион Co^{++} окружен почти кубическим окружением фтора. Кристаллическое поле этого окружения расщепляет состояние $4F$ свободного иона Co^{++} на трип-

лет Γ_4 . Ромбическое и аксиальное искажение поля вместе со спин-орбитальным взаимодействием вызывает расщепление состояния Γ_4 на шесть Крамерских дублетов. Самые нижние дублеты отходят друг от друга частотой $4,5 \cdot 10^{12}$ cps. Следующая пара разделена друг от друга частотой $18 \cdot 10^{12}$ cps.



Ион α



Ион β

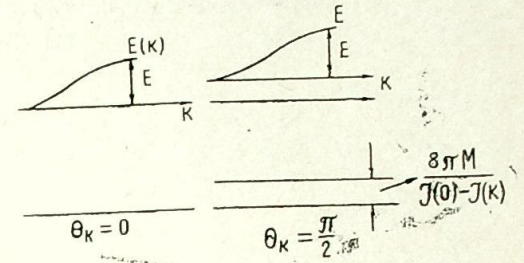


Рис. 2

Расщепление Крамерских дублетов называется существованием в антиферромагнетике обменного поля. Расщепление самого нижнего дублета показано на схеме буквами A, B, C, D. Магноны возбуждаются именно на этих уровнях.

Влияние диполь-дипольного взаимодействия на ϵ

Для изучения влияния диполь-дипольного взаимодействия добавим в гамильтониан (2) член типа

$$\frac{1}{2} g^2 \beta^2 \sum_{ij} \left\{ R_{ij}^2 \vec{S}_i \vec{S}_j - 3 (\vec{S}_i \vec{R}_i) (\vec{S}_j \vec{R}_j) \right\}. \quad (12)$$

Тогда гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} H = \sum_{ij} M_{ij} (S_i^+ S_j^+ + S_i^- S_j^-) - \sum_{ij} N_{ij} S_i^z S_j^z - \sum_{ij} L_{ij}^+ S_i^- S_j^+ - \\ - \sum_{ij} L_{ij}^- S_j^+ S_i^- - \sum_{ij} K_{ij}^+ (S_i^z S_j^+ - S_i^- S_j^z) - \sum_{ij} K_{ij}^- (S_i^z S_j^- - S_i^+ S_j^z), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$M_{ij} = \frac{1}{2} I_{ij} + \frac{1}{2} g^2 \beta^2 R_{ij}^{-3} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} (\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2) \right\},$$

$$N_{ij} = I_{ij} + \frac{1}{2} g^2 \beta^2 R_{ij}^{-3} (1 - 3 \gamma_{ij}^2),$$

$$L_{ij}^{\pm} = \left\{ \frac{3}{4} (\alpha_{ij}^2 - \beta_{ij}^2) \pm \frac{3}{2} i \alpha_{ij} \beta_{ij} \right\} R_{ij}^{-3},$$

$$K_{ij}^{\pm} = \frac{3}{2} \gamma_{ij} (\alpha_{ij} \pm \beta_{ij}) R_{ij}^{-3}.$$

Членами типа $K_{ij}^{\pm}$ будем пренебрегать, так как они являются членами более высокого порядка и играют роль в кинетике. Если учесть это, то гамильтониан примет вид

$$\begin{aligned} H = \sum_{ij} M_{ij} (S_i^+ S_j^+ + S_i^- S_j^-) - \sum_{ij} N_{ij} S_i^z S_j^z - \\ - \sum_{ij} L_{ij}^+ S_i^- S_j^+ - \sum_{ij} L_{ij}^- S_j^+ S_i^-. \end{aligned} \quad (14)$$

Для вычисления ϵ — тензора диэлектрической восприимчивости в этом случае нам надо найти соответствующие функции Грина типа (7). Аналогично предыдущему параграфу, используя обычную технику двухвременной функции Грина, получаем

$$G_{\kappa\kappa'}^I(E) + G_{\kappa\kappa'}^{II}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{III}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{IV}(E) = \frac{8\sigma E_\sigma}{E^2 - E_\sigma^2 + 14\sigma^2 M^2(\kappa)} \{S(S+1) - \langle S_\kappa^z \rangle\}. \quad (15)$$

Здесь

$$E_\sigma = 2\sigma \{N_0 + L_\kappa^+ + L_\kappa^-\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} N_0 &= \sum_i N_{ij} = \sum_j N_{ij}, \\ L_\kappa^\pm &= \sum_i L_{ij}^\pm e^{\pm i\kappa(\vec{R}_i - \vec{R}_j)}, \\ M_\kappa &= \sum_{ij} M_{ij} e^{i\kappa(\vec{R}_i - \vec{R}_j)} \end{aligned} \quad (16)$$

есть Фурье образы N_{ij} , $L_{ij}^\pm$ и M_{ij} по импульсам, которые даны в выражении (13).

Приравнявая к нулю знаменатель последнего выражения, получаем энергетический спектр системы:

$$E = \{E_\sigma^2 - 16\sigma^2 M_\kappa^2\}^{1/2} \quad (17)$$

или

$$E = 2\sigma \{[N_0 + L_\kappa^+ + L_\kappa^- + 2M_\kappa][N_0 + L_\kappa^+ + L_\kappa^- - 2M_\kappa]\}^{1/2}.$$

Таким образом учет диполь-дипольного взаимодействия приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} N_0 + L_\kappa^+ + L_\kappa^- + 2M_\kappa &\simeq I(0) + I(\kappa), \\ N_0 + L_\kappa^+ + L_\kappa^- - 2M_\kappa &\simeq I(0) - I(\kappa) + 8\pi M \sin^2 \nu_\kappa, \\ E &= 2\sigma I(0) \left\{1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)}\right]^2\right\}^{1/2} \left\{1 + \frac{8\pi M \sin^2 \nu_\kappa}{I(0) - I(\kappa)}\right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для ясности в анализе результатов влияния диполь-дипольного взаимодействия рассмотрим два частных случая:

$$E = 2\sigma I(0) \left\{1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)}\right]^2\right\}^{1/2} \quad \text{при } \theta_\kappa = 0,$$

$$E = 2\sigma I(0) \left\{1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)}\right]^2\right\}^{1/2} \left\{1 + \frac{8\pi M}{I(0) - I(\kappa)}\right\}^{1/2} \quad \text{при } \theta_\kappa = \frac{\pi}{2},$$

т. е. волновой вектор спиновой волны направлен по полю и образует с ним угол $\frac{\pi}{2}$. В этом случае спектр определяется последними выражениями. Эти два случая иллюстрирует рис. 2.

Влияние колебания решетки на оптические переходы

Рассматривая влияние спин-фононного взаимодействия на диэлектрическую восприимчивость антиферромагнетиков, будем исходить из следующего гамильтониана:

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_L + H_{SL}; \\ H_S &= \sum_{ij} I_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j, \quad H_L = \sum_q \hbar/2\pi\omega_l(q) b_{ql}^\dagger b_{ql}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} H_{SL} &= \sum_{ij} \text{grad } I_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j N^{-1/2} \sum_{ql} \left[\frac{\hbar/2\pi}{2M\omega_l(q)} \right]^{1/2} \left\{ \left(e^{i\vec{q}\vec{R}_i} - e^{i\vec{q}\vec{R}_j} \right) \vec{e}_l(q) b_{ql} + \left(e^{-i\vec{q}\vec{R}_i} - e^{-i\vec{q}\vec{R}_j} \right) \vec{e}_l^*(q) b_{ql}^\dagger \right\}, \end{aligned}$$

где $\vec{e}_l(q)$ — комплексные векторы поляризации, удовлетворяющие соотношениям ортонормировки:

$$\sum_q \vec{e}_l(q) \vec{e}_l^*(q) = \delta_{ll'}; \quad \sum_l \vec{e}_l(q) \vec{e}_l^*(q) = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (20)$$

Здесь $\vec{e}_l^a$ — проекция вектора $\vec{e}_l(q)$ на ось $a = x, y, z$.

Для решения поставленной задачи надо найти функции Грина (7) на основе вышеприведенного гамильтониана (19). Заметим, что теперь в уравнения для функции Грина (17) будут входить функции более высокого порядка, т. е. функции Грина типа:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,ql;l'j'}^1 &= \langle\langle S_{i1}^+ b_{ql} S_{j1}^+ | P \rangle\rangle, \quad \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{1+} = \langle\langle S_{i1}^- b_{ql}^\dagger S_{j1}^- | P \rangle\rangle, \\ \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{1-} &= \langle\langle S_{i1}^+ b_{ql}^\dagger S_{j1}^- | P \rangle\rangle, \quad \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{1+2} = \langle\langle S_{i1}^- b_{ql} S_{j1}^+ | P \rangle\rangle, \\ \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{2+} &= \langle\langle S_{i1}^+ b_{ql} S_{j1}^- | P \rangle\rangle, \quad \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{2-} = \langle\langle S_{i1}^- b_{ql}^\dagger S_{j1}^+ | P \rangle\rangle, \\ \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{3+} &= \langle\langle S_{i1}^+ b_{ql}^\dagger S_{j1}^- | P \rangle\rangle, \quad \Gamma_{ij,ql;l'j'}^{3-} = \langle\langle S_{i1}^- b_{ql} S_{j1}^+ | P \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично уравнениям (7) составляем уравнения движения для функции Грина (21). Затем совместно решаем эти уравнения с уравнениями для функции Грина (7). В результате находим искомую функцию Грина. Очевидно, что полюс этой функции даст нам энергетический спектр системы с учетом спин-фононного взаимодействия, т. е.

$$\begin{aligned} E^2 - [M^+(E) + M^-(E)] E - 4\sigma^2 I^2(0) \left\{1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)}\right]^2\right\} - \\ = -2\sigma I(0) [M^+(E) - M^-(E)] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $M^\pm(E)$ — так называемый массовый оператор, который определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M^+(E) &= \sum_{ql} \frac{\sigma^2 I^2(\kappa)}{(E - \hbar/2\pi\omega_l(q))^2} \left\{ \frac{1}{E - E_\kappa - \hbar/2\pi\omega_l(q)} + \frac{1}{E + E_\kappa - \hbar/2\pi\omega_l(q)} \right\} \times \\ &\times \left\{ M_{ij,1}(ql) \left[\sum_j N_{ij}^-(ql) \sigma \nu_{ql} - \sum_{ij} N_{ij}^-(ql) \langle S_i^z S_j^z \rangle + \right. \right. \\ &+ \sum_i N_{ij}^-(ql) \sigma (1 + \nu_{ql}) + |N_\kappa^+ N_\kappa^-| \left[\sigma (1 + \nu_{ql}) - \frac{1}{2} \langle S_{i1}^+ S_{j1}^- \rangle + \right. \\ &+ |N_\kappa^+ N_\kappa^-| \left[\sigma \nu_{ql} - \frac{1}{2} \langle S_{i1}^- S_{j1}^+ \rangle \right] \left. \right] + \sum_{ql} \frac{\sigma^2 I^2(\kappa)}{(E + \hbar/2\pi\omega_l(q))^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{E - E_\kappa + \hbar/2\pi\omega_l(q)} + \frac{1}{E + E_\kappa + \hbar/2\pi\omega_l(q)} \right\} \times \\ &\times \left\{ M_{ij,1}^-(ql) \left[\sum_j N_{ij}^+(ql) \sigma (1 + \nu_{ql}) + \sum_{ij} N_{ij}^+(ql) \langle S_i^z S_j^z \rangle + \right. \right. \\ &+ \sum_i N_{ij}^+(ql) \sigma \nu_{ql} + |N_\kappa^+ N_\kappa^-| \left[\sigma \nu_{ql} + \frac{1}{2} \langle S_{i1}^+ S_{j1}^- \rangle + \right. \\ &+ |N_\kappa^+ N_\kappa^-| \left[\sigma (1 + \nu_{ql}) + \frac{1}{2} \langle S_{i1}^- S_{j1}^+ \rangle \right] \left. \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$M^-(E) = - \sum_{ql} \frac{\sigma^2 I^2(\kappa)}{(E - h/2\pi\omega_l(q))^2} \left\{ \frac{1}{E - E_k - h/2\pi\omega_l(q)} + \frac{1}{E + E_k - h/2\pi\omega_l(q)} \right\} \times$$

$$\times \left\{ M_{ij}^+(q_l) \left[\sum_j N_{ij}^+(q_l) \sigma v_{ql} + \sum_{ij} N_{ij}^-(q_l) \langle S_i^z S_j^z \rangle + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_i N_{ij}^-(q_l) \sigma (1 + v_{ql}) \right] + |N_k^+ N_k^-| \left[\sigma (1 + v_{ql}) + \frac{1}{2} \langle S_i^- S_j^+ \rangle \right] -$$

$$- |N_k^+ N_k^-| \left[\sigma v_{ql} + \frac{1}{2} \langle S_i^+ S_j^- \rangle \right] \left\{ \frac{\sigma^2 I^2(\kappa)}{(E + h/2\pi\omega_l(q))^2} \times \right.$$

$$\times \left\{ \frac{1}{E - E_k + h/2\pi\omega_l(q)} + \frac{1}{E + E_k + h/2\pi\omega_l(q)} \right\} \left\{ M_{ij}^+ \left[\sum_j N_{ij}^+(q_l) \sigma (1 + v_{ql}) - \right. \right.$$

$$\left. - \sum_{ij} N_{ij}^+ \langle S_i^z S_j^z \rangle + \sum_i N_{ij}^+(q_l) \sigma v_{ql} \right] + |N_k^+ N_k^-| \left[\sigma (1 + v_{ql}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \langle S_i^+ S_j^- \rangle \right] + |N_k^+ N_k^-| \left[\sigma v_{ql} - \frac{1}{2} \langle S_i^- S_j^+ \rangle \right] \left. \right\}. \quad (23)$$

Здесь

$$N_{ij}^\pm = N^{-1/2} \left[\frac{h/2\pi}{2 M_v \omega_l(q)} \right]^{1/2} e^{\pm i q R_l} \left\{ \sum_i \text{grad } I_{ij} (e^{\pm i q R_i} - e^{\pm i q R_j}) \langle S_i^z \rangle \pm \right.$$

$$\left. \pm \sum_j \text{grad } I_{ij} (e^{\pm i q R_i} - e^{\pm i q R_j}) \langle S_j^z \rangle \right\},$$

$$N_{ij}^\pm = N^{-1/2} \left[\frac{h/2\pi}{2 M_v \omega_l(q)} \right]^{1/2} e^{\pm i q R_l} \text{grad } I_{ij} (e^{\pm i q R_i} - e^{\pm i q R_j}) \langle S^z \rangle;$$

$$v_{ql} = \langle b_{ql}^+ b_{ql} \rangle, \quad \sigma = \langle S^z \rangle,$$

$$E_k = 2\sigma I(0) \left\{ 1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)} \right]^2 \right\}^{1/2};$$

$N_k^\pm$ — Фурье образ $N_{ij}^\pm$ по импульсу.

Из уравнения (22) сразу получается обычный двухмагнонный спектр, если не учитывать спин-фононное взаимодействие:

$$E^2 = 4\sigma^2 I^2(0) \left\{ 1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)} \right]^2 \right\}. \quad (24)$$

Это выражение совпадает с ранее полученным [11]. Выделив реальную и мнимую части массового оператора (23), можно получить добавку к энергетическому спектру и члены, характеризующие затухание в спектре, т. е.

$$M^\pm(E) = M_I^\pm(E) \mp \gamma^\pm(E). \quad (25)$$

Здесь $M_I^\pm(E)$ — добавка к энергетическому спектру, $\gamma^\pm(E)$ — член затухания.

Следует заметить, что полученное выражение для ширины и смещения спектра за счет спин-фононного взаимодействия является одним, т. е. включает в себя влияние оптической и акустической ветвей. Действительно, если на элементарную ячейку приходится только один атом, то из (23) можно получить выражение для акустических фононов. Для этого надо полагать, что

$$v = 1, \quad e_l^\nu(q) = e_l^{+\nu}(q) = e_l(q).$$

В этом случае для спектра энергии антиферромагнетика с учетом спин-фононного взаимодействия имеем

$$E^2 - [M_I^+(E) + M_I^-(E)] E - 4\sigma^2 I^2(0) \left\{ 1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)} \right]^2 \right\} -$$

$$- 2\sigma I(0) [M_I^+(E) - M_I^-(E)] = 0. \quad (26)$$

Различие между выражениями $M^\pm(E)$ и $M_I^\pm(E)$ заключается в том, что $M^\pm(E)$ зависит от направления вектора поляризации $\vec{e}^\nu$. Так как $M^+(E) + M^-(E)$ и $M_I^+(E) + M_I^-(E)$ зависит также от спин-ового коррелятора типа $\langle S_i^z S_j^z \rangle$, $\langle S_i^+ S_j^+ \rangle$, $\langle S_i^- S_j^- \rangle$ (см. формулу (29), то

$$E^2 - 4\sigma^2 I^2(\kappa) \left\{ 1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)} \right]^2 \right\} - 2\sigma I(0) [M^+(E) - M^-(E)] = 0,$$

$$E^2 - 4\sigma^2 I^2(\kappa) \left\{ 1 - \left[\frac{I(\kappa)}{I(0)} \right]^2 \right\} - 2\sigma I(0) [M_I^+(E) - M_I^-(E)] = 0. \quad (27)$$

Влияние слабого ферромагнетизма на диэлектрическую восприимчивость

В случае слабого ферромагнетизма, кроме обычного обменного электрического момента, возникает другой тип электрического момента. Последний обусловлен существованием слабого ферромагнетизма и будем его называть просто дипольный электрический момент. Диэлектрическую восприимчивость, обусловленную существованием слабого ферромагнетизма, будем рассматривать в следующем параграфе. А пока исследуем влияние слабоферромагнитного члена на диэлектрическую восприимчивость, обусловленную обменной связью между двумя магнитными ионами.

Обычный слабый ферромагнетизм описывается следующим гамильтонианом:

$$H = H_0 + H_1, \quad (28)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \{ \sin^2 \theta \cos 2\varphi + \cos^2 \theta \} - \frac{1}{2} K^z \cos^2 \theta -$$

$$- \sum_{ij} D_{ij}^z \sin^2 \theta \sin 2\varphi - \mu H_0 \{ \sin \theta \cos 2\varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \},$$

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum_{ij} I_{ij} \left\{ \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^+ + S_i^- S_j^-) - S_i^z S_j^z \right\} - \frac{1}{2} K^z \left\{ \sum_i (S_i^+ S_i^+ + \right.$$

$$\left. + S_i^- S_i^- + S_i^+ S_i^- + S_i^- S_i^+) + \sum_j (S_j^+ S_j^+ + S_j^- S_j^- + S_j^+ S_j^- + S_j^- S_j^+) \right\} -$$

$$- \sum_{ij} D_{ij}^z \left\{ \frac{i}{2} (S_i^+ S_j^- - S_i^- S_j^+) \cos \theta - \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^+ - S_i^- S_j^- - \right.$$

$$\left. - S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \cos \varphi + 2 S_i^z S_j^z \cos \varphi \right\} -$$

$$- \mu \left\{ H^x \cos \varphi \left(\sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right) + H^z \cos \theta \left(\sum_i S_i^z + \sum_j S_j^z \right) \right\}.$$

Здесь H_0 — гамильтониан основного состояния, H — общий гамильтониан системы.

Исходя из гамильтониана (28), составим уравнение движения для функции Грина (7). Затем, используя обычную технику двухвременной температурной функции Грина, после длинного вычисления получаем приближенное выражение для функции Грина (7):

$$G_{\kappa\kappa'}^I(E) + G_{\kappa\kappa'}^{II}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{III}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{IV}(E) = \\ = \frac{4\sigma E_\sigma (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^- \rangle + \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^+ \rangle)}{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2} - \\ - \frac{8\sigma^2 E_\sigma (E - 2K^2) (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^+ \rangle - \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^- \rangle)}{E \{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}}. \quad (29)$$

Средние значения произведения двух операторов типа $\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^+ \rangle$ и $\langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^- \rangle$ легко можно вычислить, если учесть, что

$$i \frac{d}{dt} \langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^+ \rangle = 0, \quad i \frac{d}{dt} \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^- \rangle = 0,$$

и раскрыть эти соотношения с помощью уравнений движения для операторов S_κ^+ , S_κ^- . Тогда получим

$$-\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^+ \rangle \sim I^{-1}(0), \quad \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^- \rangle \sim I^{-1}(0).$$

Поскольку последние выражения содержат множитель $I^{-1}(0)$, то можно пренебречь вторым членом выражения (29). После этого приближения соотношение (29) принимает следующий вид:

$$G_{\kappa\kappa'}^I(E) + G_{\kappa\kappa'}^{II}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{III}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{IV}(E) = \\ = \frac{4\sigma E_\sigma}{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2} (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^- \rangle + \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^+ \rangle). \quad (30)$$

Здесь

$$E_\sigma = \sigma \{I(0) - 4K^2 + 4[D^z(0) - D^z(\kappa)] \cos \varphi + \\ + 2\mu (H^x \cos \varphi + H^+ \cos \theta)\}, \\ E_\kappa = \sigma \left\{ \frac{1}{2} I(\kappa) + D^z(\kappa) \cos \varphi \right\},$$

где $\cos \varphi$ и $\cos \theta$ получаются из минимума гамильтониана основного состояния ($\mathbf{r}_0$);

$$\cos \varphi = \frac{\mu H_0 \sin \psi + D^z}{2I - K^2}, \quad \cos \theta = \frac{\mu H_0 \cos \psi}{2I - K^2}$$

(ψ — угол между магнитным полем и осью z и μ — магнетон Бора).

Из выражения (30) легко можно получить энергетический спектр слабого ферромагнетизма:

$$E = 2\sigma \left\{ \mu^2 H_0 \sin \psi (H_D + H_0 \sin \psi) + \left[\frac{I(0)}{2} \right]^2 [1 - (I(\kappa)/I(0))^2] \right\}^{1/2}, \quad (31)$$

где $H_D = \mu^{-1} D^z$.

Диэлектрическая восприимчивость, обусловленная существованием слабого ферромагнетизма

Выше (см. также работу [5]) было показано, что микроскопическим источником слабого ферромагнетизма является анизотропный косвенный обмен. В данном случае анизотропия косвенного обмена обусловлена взаимодействием в гамильтониане (1). Таким образом дипольный момент, обусловленный существованием слабого ферромагнетизма, будет иметь вид

$$\vec{P} = \sum_{ij} \vec{\pi}_{ij} [\vec{S}_i - \vec{S}_j]. \quad (32)$$

Добавочная энергия во внешнем электрическом поле будет

$$\vec{P} \vec{E} = \vec{E} \sum_{ij} \vec{\pi}_{ij} [\vec{S}_i - \vec{S}_j]. \quad (33)$$

Так как $\vec{\pi}_{ij}$ является тензором, рассмотрим одну компоненту дипольного момента:

$$\epsilon^z(Q) = -2\pi i \ll P^z / P'^z \gg, \quad (34)$$

где

$$P^z = \sum_{ij} \pi_{ij}^z \frac{1}{2i} \{S_i^+ S_j^+ - S_i^- S_j^-\}.$$

Диэлектрическая восприимчивость, обусловленная существованием слабого ферромагнетизма с помощью соответствующих функций Грина, имеет вид

$$\epsilon(Q) = -2^{-1} \pi i \sum_{ij} \sum_{i'j'} \pi_{ij}^z \pi_{i'j'}^z \{G_{ij,i'j'}^I(t-\tau) + G_{ij,i'j'}^{II}(t-\tau) - \\ - G_{ij,i'j'}^{III}(t-\tau) - G_{ij,i'j'}^{IV}(t-\tau)\}. \quad (35)$$

Функции Грина $G_{ij,i'j'}(t-\tau)$ определяются обычным способом. После длинных вычислений получаем

$$G_{\kappa\kappa'}^I(E) + G_{\kappa\kappa'}^{II}(E) - G_{\kappa\kappa'}^{III}(E) - G_{\kappa\kappa'}^{IV}(E) = \\ = -\frac{2\sigma \{E^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}}{E \{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}} (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^- \rangle + \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^+ \rangle) - \\ - \frac{4\sigma^2 \{E^2 + 4\sigma^2 (E - 2K^2)^2\}}{E \{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}} (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^+ \rangle + \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^- \rangle).$$

Если не учитывать второй член (так как $\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^\pm \rangle \sim I^{-1}(0)$), то получим

$$G_{\kappa\kappa'}^I(E) + G_{\kappa\kappa'}^{II}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{III}(E) + G_{\kappa\kappa'}^{IV}(E) = \\ = -\frac{2\sigma \{E^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}}{E \{E^2 - E_\sigma^2 + 4\sigma^2 (E_\kappa - 2K^2)^2\}} (\langle S_\kappa^+ S_{\kappa'}^- \rangle + \langle S_\kappa^- S_{\kappa'}^+ \rangle). \quad (36)$$

Следует заметить, что в случаях, когда дипольный момент обменно связанных пар отсутствует из-за симметрии (например, в случае, когда центр симметрии находится на середине между магнитными ионами), поглощение будет обусловлено дипольным моментом за счет слабого ферромагнетизма. В этом случае поглощение также сопровождается возбуждением двух магнонов, но коэффициент поглощения будет пропорционален не производим обменного интеграла, а производным параметра слабого ферромагнетизма.

Как видно из формулы (11), в процессе поглощения участвует два магнона, т. е. поглощение света сопровождается возбуждением двух магнонов. Это было обнаружено при эксперименте [10], а также рассмотрено теоретически [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowley R. A. and Martel P. Phys. rev., Letters, 18, 162, (1967).
2. Сеидов Ю. М. ДАН СССР, 160, 4, (1965).
3. Вонсовский С. В. и Сеидов Ю. М. ДАН СССР, 107, 37 (1956).
4. Jaccarino V. NRM in magnetism (Academic Press, Ins New York (1963) vol. 2.
5. Dexter D. L., Phys. rev., 126, 1962.
6. Отчет института физики АН Азерб. ССР за 1967 г.
7. Тяблицов С. В. Методы квантовой теории магнетизма. М., 1965.
8. Зубарев Д. Н. УФН, т. 71 (1960).
9. Hally J. W. and Silvera I. Phys. rev. Letters, 15, 654, (1965).
10. Morija T. J. phys. soc. Japan, 6, 926, 1966.

Поступило 17. XII 1968

**Магнит-низамлы кристалларда ики магнонлу удулманын
нәзәријјәсинә даир**

ХҮЛАСӘ

Бә'зи низамлы магнит маддәләрдә әмәлә кәлән дипол моментләринин микромәнбәји ашкар едилимишдир. Алынмыш Һамилтон оператору әсасында диелектрик гаврајычылығы һесапланмышдыр. Бурада удулма ики магнонун бурахылмасы илә нәтичәләнмишдир. Бундан әлавә, удулма хәттинин енлији (спин фонон вә дипол гаршылыглы тә'сири һесабына) вә зәиф ферромагнитләрдә әмәлә кәлән диқәр тип електрик дипол моменти тәһлил едилимишдир.

Н. А. АЛИЕВ, Р. А. АКОПЯН, Б. А. АХМЕДОВ, М. М. МУСАЗАДЕ

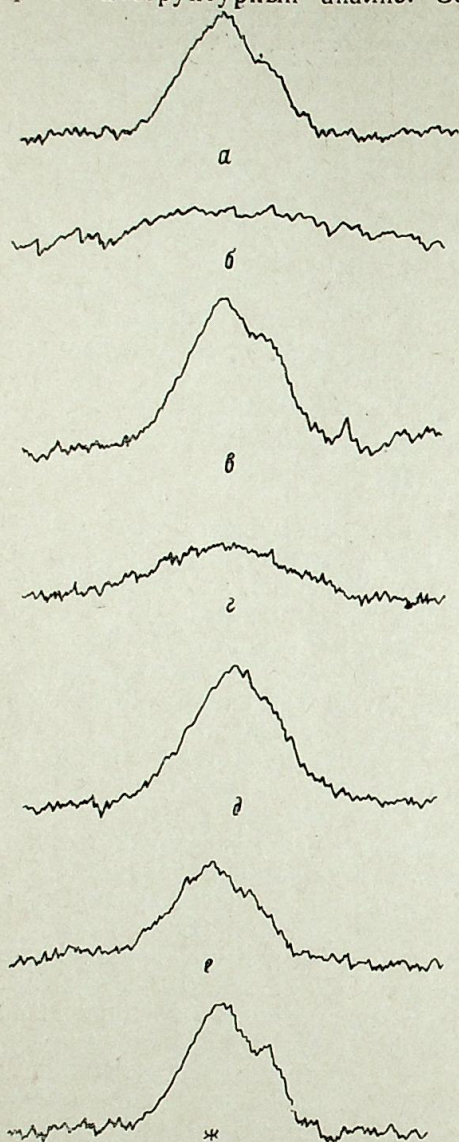
**РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЗАКАЛЕННЫХ ТРУБ ИЗ СТАЛИ 36Г2С, ПОДВЕРГНУТЫХ
ВЫСОКОМУ ОТПУСКУ**

В связи с техническим прогрессом нефтедобывающей промышленности перед металлургами встала важная задача—повышение прочностных свойств нефтепромысловых труб. Известно, что сталь можно упрочнить, используя один из следующих путей: рациональное легирование, термическую или термомеханическую обработку или, наконец, пластическую деформацию. Механизмы упрочнения стали во всех этих случаях еще неполностью исследованы [1, 2]. Для изготовления труб, используемых в нефтяной промышленности, в большинстве случаев употребляется марганцовистая сталь. Марганец является относительно дешевым легирующим элементом и нередко используется как заменитель никеля в конструкционных сталях. Однако легирование марганцем должно производиться с осторожностью, так как марганец в твердом растворе повышает твердость, пределы прочности и текучести, но снижает пластичность стали. Марганец энергично снижает критическую скорость закалки и увеличивает прокаливаемость стали.

Среди легирующих присадок, применяемых в конструкционных сталях, марганец является практически единственным элементом, способствующим росту зерна аустенита при нагреве. Это приводит к сильному уменьшению теплопроводности стали. Пониженная теплопроводность марганцовистой стали требует осторожного обращения с ней при термообработке во избежание появления трещин и коробления обрабатываемых изделий. Наиболее высокие механические свойства легированная сталь имеет после закалки и последующего отпуска. Одной из задач отпуска является уменьшение уровня внутренних напряжений, неизбежно возникающих в стали в процессе закалки за счет фазовых превращений, а также неравномерного охлаждения объекта. В работе [3] было показано, что при закалке зубчатых колес и других изделий сложной формы, изготовленных из стали 45, все охлаждающие среды (кроме масла) приводят к образованию трещин в изделии. Подобная картина наблюдалась и при закалке в воде (подаваемой через спрейер) резьбовой части труб, прокатанных из стали 36Г2С на Азербайджанском Трубопрокатном заводе им. В. И. Ленина. Учитывая это, в настоящей работе в качестве охлаждающей среды при поверхностной закалке труб, нагретых ТВЧ, применялся сжатый воздух, подаваемый через специально сконструированный спрейер.

В данной работе исследовались закаленные трубы, подвергнутые отпуску при 550, 600 и 650°C. Трубы изготавливались из стали 36Г2С.

Химический состав стали: 0,36% С; 1,60% Мп; 0,04 Сг; 0,08% Ni; 0,45% Si; 0,026% S; 0,034 P. В качестве основного метода использовался рентгеноструктурный анализ. Закалка образцов производилась при



Микрофотографии интерференционных линий (220) прокатанных труб (а); при закалке водой без отпуска (б); водой с отпуском при 600°С (в), обдувкой: без отпуска (г); с отпуском при 550°С (д); при 600°С (е), при 650°С (ж)

геновских интерференционных линий можно определить размеры блоков (D) по формуле

$$D = \frac{c\lambda}{\beta \cos \theta}, \quad (1)$$

где β —часть расширения линии на рентгенограмме образца, вызванная дисперсностью блоков;

помощи как сжатого воздуха ($P = atm$ до температуры 150°С), так и воды. Для удаления деформированного слоя, образовавшегося при механической обработке, вырезанные образцы (9×9×6 мм) про-
траивались в 25%-ом растворе азотной кислоты. Рентгенографи-
рование образцов производилось на железном излучении в камерах. Фиксировались интерференционные линии (110) и (220). Интерферен-
ционная линия (220) снималась на расстоянии 66,2 мм, а линия (110)—
на расстоянии 57,3 мм от образца до пленки. Фотометрирование рент-
генограмм производилось на микро-
фотометре МФ-4 при увеличении в 15 раз, скорости 9 мм/мин и
ширине щели 0,5 мм. Ширина ли-
нии определялась из отношения пло-
щади кривой почернения к макси-
мальной ее высоте. На рисунке
представлены микрофотограммы.
Введение поправок на K_{α} -дублет и
геометрию съемки, а также вычис-
ление размеров блоков и микро-
искажений (α -фазы) производились
так, как это описано в работе [4].
В качестве эталона использовалась
сталь 36Г2С, подвергнутая отжигу
в вакууме при 800°С в течение пяти
часов.

Известно [5], что ширина и
форма рентгеновых линий является
источником сведений о важных для
практики процессах упрочнения и
разупрочнения металлов и сплавов.
Исследование величины блоков и
внутренних напряжений (микроис-
кажений) в зависимости от термиче-
ской обработки имеет большое
значение, так как обе эти структур-
ные характеристики в значительной
мере определяют механические
свойства стали. Из расширения рент-

λ —длина волны применяемого излучения;
 θ —угол отражения Вульфа—Брегга для интерференционной линии
(110);
C—константа, зависящая от формы кристаллов, по величине близ-
кая к 1.

Величина микроискажения $\left(\frac{\Delta a}{a}\right)$ определяется по формуле

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{n}{4R} \operatorname{ctg} \theta, \quad (2)$$

где R—расстояние от образца до пленки;

n—часть расширения линий, вызванная микроискажениями;

θ —угол отражения Вульфа—Брегга для интерференционной линии
(220).

На исследуемых образцах были проведены измерения твердости и
микротвердости. Определение твердости (метод Бринеля) производи-
лось стальным шариком диаметром 5 мм, при выдержке 10 сек, под
нагрузкой 750 кг. Микротвердость измерялась на приборе ПМТ-3, при
нагрузке на алмазную пирамиду 150 г.

Результаты измерения ширины интерференционных линий объек-
тов, а также значения твердости и микротвердости приведены в
таблице.

Вид термообработки	B_1 10^{-3} рад	B_2 10^{-3} рад	D 10^{-6} см	$\frac{\Delta a}{a}$ 10^{-3}	H_V кг/мм ²	H_μ кг/мм ²
Прокатка	12,8	36,2	5,0	1,2	229	248
Нормализация	11,5	29,5	6,9	0,6	229	259
Закалка в воде	17,9	62,2	2,4	4,1	601	551
Закалка в воде с отпуском при 600°С	13,7	36,7	3,7	1,0	285	288
Закалка обдувкой	18,3	51,6	3,2	2,6	445	461
Закалка обдувкой с отпус- ком при 550°С	12,0	36,0	4,2	1,6	285	294
Закалка обдувкой с отпус- ком при 600°С	12,5	33,2	4,5	0,7	268	287
Закалка обдувкой с отпус- ком при 650°С	12,3	31,3	5,7	0,3	241	248

B_1 и B_2 —ширина линий (110) и (220), соответственно;

D—размеры областей когерентного рассеяния;

$\frac{\Delta a}{a}$ —микроискажения;

H_V —твердость;

H_μ —микротвердость.

Рентгенографическое исследование прокатанных труб показало, что
интерференционная линия (220) является размытой. Разделение эффек-
тов дисперсности блоков и микроискажений позволило установить, что
размеры блоков (размеры областей когерентного рассеяния) равны
примерно $5,0 \cdot 10^{-6}$ см, а величина микроискажения $1,2 \cdot 10^{-3}$. Как
известно, наличие дисперсной кристаллической структуры и микро-
искажений является характерным признаком упрочнения металлов и
сплавов. В результате исследования механических свойств труб (мето-
дом Давиденкова) было обнаружено наличие напряжений первого
рода. Для уменьшения этих напряжений, вызванных неравномерным

охлаждением, считалось целесообразным трубы подвергнуть соответствующей термообработке.

Для сравнительного исследования структурных изменений были выбраны различные виды термообработки. После нормализации размеры областей когерентного рассеяния, т. е. линейные размеры блоков мозаики составляют $6,9 \cdot 10^{-6}$ см. Микронискажения достигают значений $0,6 \cdot 10^{-3}$. Это объясняется тем, что после нормализации сталь находится в более стабильном (разупрочненном) состоянии. После закалки труб в воде размер блоков был равен $2,4 \cdot 10^{-6}$ см, а микронискажения $4,1 \times 10^{-3}$, что характеризует неравновесное состояние стали. При закалке стали в струе сжатого воздуха характеристики тонкой кристаллической структуры принимают значения: $D = 3,2 \cdot 10^{-6}$ см и $\frac{\Delta a}{a} = 2,6 \cdot 10^{-3}$

(см. табл.); твердость стали значительно меньше, чем в случае резкой закалки в воде. Это может быть следствием того, что при сравнительно медленном охлаждении сжатым воздухом в стали частично успевают произойти процессы распада. Однако надо отметить, что в данном случае твердость стали определяется не только субструктурой α -фазы, но также количеством и дисперсностью карбидов.

Для исследования изменений тонкой кристаллической структуры стали при нагреве закаленные в струе воздуха образцы отпускались на разные температуры. Как видно из таблицы, по мере повышения температуры отпуска увеличиваются размеры областей когерентного рассеяния и уменьшаются микронискажения, твердость и микротвердость. Необходимо отметить, что после отпуска при одной и той же температуре (600°C) исследуемые объекты обладают почти одинаковыми прочностными характеристиками как после закалки в воде, так и после обдувки сжатым воздухом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уманский Я. С., Финкельштейн Б. Н. и др. Физическое металловедение. Металлургиздат, М., 1955.
2. Кардонский В. М., Курдюмов Г. В., Перкас М. Д. Проблемы металловедения и физики металлов (VII сб. трудов ЦНИИЧерМет). М., 1962.
3. Ланкин П. А. Металловедение и термическая обработка металлов, № 4, 15, 1967.
4. Лысак Л. И. Вопросы физики металлов и металловедения (сб. научных трудов ЛМФ АН УССР), № 3, 1952.
5. Герцрикен С. Д., Дехтяр И. Я., Кривоглаз М. А. и др. Физические основы прочности и пластичности металлов. М., 1963 г.

Поступило 8. VII 1968

Н. Э. Элијев, Р. А. Аюпјан, Б. А. Әһмәдов, М. М. Мусазаде

36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш боруларын жүксәк температурлу табәксилтмәдән сонра ренткенографик тәдғиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш боруларын жив ачылмыш учларынын мүхтәлиф термики е'малдан сонра ренткенографик тәдғиги верилмишдир. Ренткенографик тәдғигатла паралел олараг нүмунәларин бәркликләри вә микробәркликләри өлчүлмүшдүр.

Мүгајисә үчүн табландырма су сыхылмыш һава васитәсилә апарылмышдыр. Тәдғигатлар нәтичәсиндә ашкар едилмишдир ки, табландырмада иштирак едән сулајычы маддәларин нөвүндән асылы олмајараг, бахылан температур интервалында 600°C -дә табы алынмыш борулар даһа мөһкәмдир.

Ф. Н. КАЗИЕВ, М. К. ШЕЙНКМАН, И. Б. ЕРМОЛОВИЧ, Г. А. АХУНДОВ

РЕКОМБИНАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПАРАМЕТРЫ РЕКОМБИНАЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ В МОНОКРИСТАЛЛЕ X InSe

Некоторые фотоэлектрические свойства поликристаллов и монокристаллов моноселенида индия изучались в работах [1—3]. Было обнаружено, что это соединение обладает довольно высокой фотопроводимостью в видимой и близкой к инфракрасной области спектра с максимумом спектральной чувствительности около 1 мкм. Однако систематического и достаточно тщательного исследования фотопроводимости в широкой области температур и освещенностей, в том числе и процессов рекомбинации в этих монокристаллах, до настоящего времени проведено не было. Оставались невыясненными топография локальных уровней в запрещенной зоне и параметры соответствующих центров.

В настоящей работе мы исследовали стационарные и кинетические характеристики фотопроводимости и ее инфракрасного гашения в монокристаллах InSe при различных температурах и освещенностях с целью установления механизма рекомбинации и определения параметров рекомбинационных центров в них. При этом мы использовали комплекс стационарных и кинетических методов исследования процессов рекомбинации в высокоомных монополярных фотопроводниках, разработанных в последнее время [4—6].

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Монокристаллы селенида индия выращивались методом, описанным в [3]. InSe имеет гексагональную решетку и кристаллизуется в слюдоподобной слоистой структуре. Из полученного монокристаллического слитка скалывались плоскопараллельные слои перпендикулярно оси С. Перед измерениями кристаллы подвергались отжигу в вакууме (10^{-4} торр) при 300°C в течение $40 \div 50$ часов с последующим медленным охлаждением (со скоростью $8 \div 10$ град/час). В результате такого отжига удельное сопротивление образцов увеличивалось в $40 \div 60$ раз и оставалось стабильным.

Омические контакты получались испарением индия в высоком вакууме на поверхность образца. Средние размеры образцов $3 \times 2 \times 0,4$ мм³. Для спектральных исследований использовались монохроматоры ДМР-4 и ИКС-21. Стационарное возбуждение осуществлялось лампами накаливания с набором фильтров, необходимых для получения слабо поглощаемого света (стекло ИКС-2 и H₂O толщиной 5 см). Во всех измерениях световой луч был направлен параллельно оси С,

а приложенное поле было перпендикулярно этой оси. Кинетика фотопроводимости исследовалась с помощью методов, описанных в [4—6]. Температурные измерения в области $77 \div 300^\circ\text{K}$ производились в специальном криостате. При измерении термостимулированной проводимости (ТСП) кривые ТСП записывались самописцем ЭПП-09М. Скорость нагрева составляла около $0,8 \text{ град/сек.}$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В нашем распоряжении было две группы образцов. Образцы I группы имели при комнатной температуре высокую фотопроводимость. Характерной особенностью таких образцов было наличие в них квазистационарной темновой проводимости, особенно резко выраженной при низких температурах (на $3 \div 4$ порядка больше темновой проводимости). Образцы II группы при комнатной температуре были менее фоточувствительны, но при понижении температуры ниже 150°K фотопроводимость в них резко увеличивалась. В этих кристаллах не наблюдалось квазистационарной проводимости. В данной статье приведены результаты исследований рекомбинационных процессов в образцах II группы.

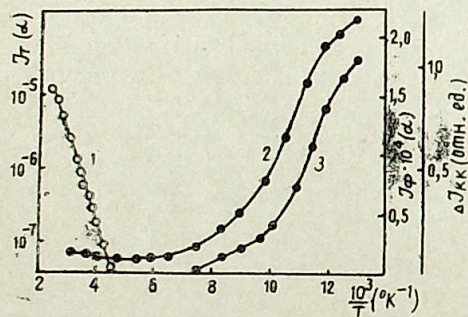


Рис. 1. Температурная зависимость темнового тока I_T (1), фототока I_F (2) и величины ИК-гашения $\Delta I_{ИК} = I_{фон} - I_{Ф}^{ИК}$ (3).

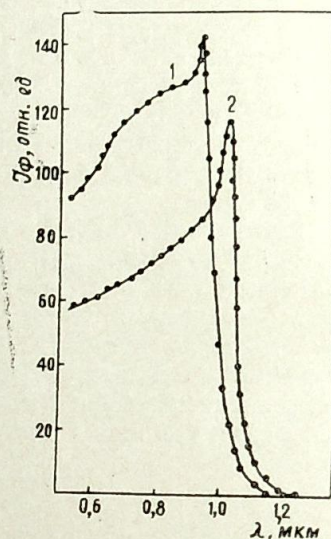


Рис. 2. Спектральная зависимость фототока при 77°K (1) и 300°K (2).

Темновая проводимость исследованных образцов была n -типа и при комнатной температуре составляла $\sigma_T \approx 10^{-4} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Холловская подвижность электронов μ_n при 300°K лежала в пределах $40 \div 60 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек.}$ При понижении температуры до 100°K σ_T уменьшалось до $10^{-8} \div 10^{-9} \text{ ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Величина μ_n при 100°K составляла $25 \div 40 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек.}$ Температурная зависимость темнового тока I_T показана на рис. 1 (кривая 1). Расчет зависимости $I_T(T^{-1})$ дает энергетическое положение донорного уровня $E_d = 0,42 \text{ эв.}$ Исследование фото-холл-эффекта по освещенностям всегда была электронноной.

На рис. 2 представлено спектральное распределение фотопроводимости (при 77 и 300°K). Узкий пик у длинноволнового спада проявляется на всех образцах и коррелирует с экситонным пиком в спектре оптического поглощения, исследованном в [7]. Ширина запрещенной зоны при 300°K составляет $E_g = 1,2 \text{ эв.}$ Температурный коэффициент ширины запрещенной зоны равен $\frac{\partial E_g}{\partial T} \approx 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ эв/град.}$ Эти данные хорошо согласуются со значениями, найденными из оптических исследований [7].

Кривые термостимулированной проводимости в исследованных образцах имеют один максимум при $T = 180^\circ\text{K}$. Энергетическое расстояние этого уровня прилипания для электронов E_t от дна зоны проводимости определялось методом Бьюба [8], а концентрация уровней прилипания N_t — по величине площади под кривой ТСП [9]. Полученные значения таковы: $E_t = 0,20 \text{ эв,}$ $N_t \approx 6 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Исследования ТСП, проведенные на различных кристаллах, выявили также уровни прилипания, расположенные на расстоянии $0,08$ и $0,16 \text{ эв}$ от дна зоны проводимости, с концентрацией $10^{13} \div 10^{15} \text{ см}^{-3}$ в разных образцах. Наши опыты показали, что уровни с $E_t = 0,08 \text{ эв}$ являются „медленными“ и обуславливают релаксацию фотопроводимости со всплесками при низких температурах [10]. Результаты этих исследований будут изложены отдельно.

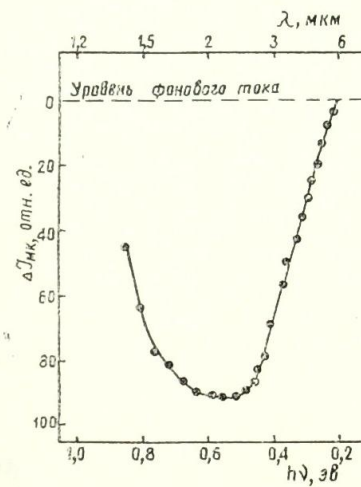


Рис. 3. Спектральная зависимость оптического гашения фототока при 77°K .

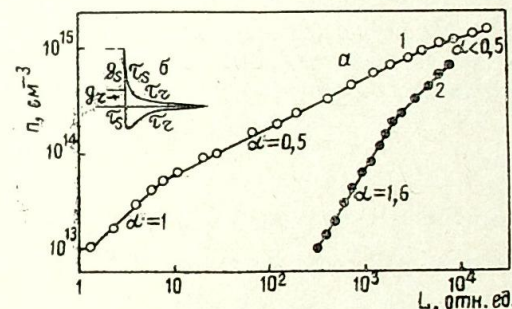


Рис. 4. а—люксамперная характеристика фототока в отсутствие (1) и при наличии (2) ИК-подсветки ($T = 77^\circ\text{K}$).

б—форма кривых релаксации фототока при возбуждении коротким собственным (вверху) и гасящим (внизу) импульсом света.

При низких температурах ($T < 140^\circ\text{K}$) наблюдалось инфракрасное гашение фототока, спектральное распределение которого показано на рис. 3, а температурная зависимость — на рис. 1 (кривая 3). По оси ординат отложена величина $\Delta I_{ИК} = I_{фон} - I_{Ф}^{ИК}$, где $I_{фон}$ и $I_{Ф}^{ИК}$ — фототоки в отсутствие и при наличии подсветки из области ИК-гашения. При снятии спектра гашения количество падающих ИК-квантов разных длин волн уравнивалось. С повышением температуры (от 77°K) наблюдалось температурное гашение фототока (рис. 1, кривая 2). При 77°K люксамперная характеристика (ЛАХ) фототока, как правило, состояла из трех участков (рис. 4а, кривая 1). При малых интенсивностях ЛАХ линейна ($I_F \sim L$), затем сублинейна ($I_F \sim L^{0,5}$). При высоких освещенностях наблюдается участок квазинасыщения ($I_F \sim L^{<0,5}$).

При наличии ИК-подсветки на ЛАХ наблюдается сверхлинейный участок ($I_{\phi} \sim L$), см. рис. 4а, кривая 2.

Приведенные факты, а также наличие быстрого ($\sim 10^{-5}$ сек) и медленного $[(0,5 \div 1) \cdot 10^{-3}$ сек] участков на кривой релаксации фототока при освещении образца короткими импульсами света на фоне подсветки (см. далее) однозначно показывают, что в исследуемых кристаллах при низких температурах основную роль в рекомбинации играют два типа рекомбинационных центров: очувствляющие (r -центры) с вероятностью захвата электронов C_{pr} и центры быстрой рекомбинации (s -центры) с вероятностью захвата электронов C_{ns} , причем $C_{pr} \ll C_{ns}$. Эффективность r - и s -центров в процессе рекомбинации характеризуется так называемыми „парциальными выходами“ g_r и g_s [5], которые определяют доли рекомбинационного потока, проходящего через r - и s -центры. Подробный анализ такой схемы и разработанные на его основе методы исследований [4–6] позволили определить основные параметры r -центров и некоторые параметры s -центров рекомбинации из исследования стационарных и кинетических характеристик фотопроводимости.

Энергетическое расстояние r -уровней от верха v -зоны E_{vr} и отношение вероятностей захвата дырок и электронов на r -центр $\frac{C_{pr}}{C_{nr}}$ ($C = \langle u \rangle S$, $\langle u \rangle$ — средняя тепловая скорость носителя, S — сечение захвата носителя на центр) определялись по температурной зависимости „характеристики гашения“ $\frac{\Delta L}{L_0}$, где ΔL — изменение интенсивности возбуждающего света L_0 , необходимое для поддержания постоянной концентрации электронов n при изменении температуры в области термического гашения фототока. Имеем [4]

$$\frac{\Delta L}{L_0} = g_s \frac{C_{pr} Q_v}{C_{nr} \cdot n} \exp \left(- \frac{E_{vr}}{kT} \right). \quad (1)$$

Здесь, как указывалось выше, g_s — доля полного рекомбинационного потока, проходящая через s -центры, $Q_v = \frac{2(2\pi m_p kT)^{3/2}}{h^3}$ — эф-

фективная плотность состояний в валентной зоне. Зависимость $\frac{\Delta L}{L_0}$

(T^{-1}) приведена на рис. 5 (кривая 1). Полученные значения таковы: $E_{vr} = 0,11 \div 0,12$ эв, $\frac{C_{pr}}{C_{nr}} = (5 \div 8) \cdot 10^3$ в разных образцах. Q_v принималось равным $3,6 \cdot 10^{17}$ см⁻³. Значение эффективной массы дырки m_p взято из [11]: $m_p = 0,13 m_0$, g_s определялось из измерений кинетики фототока (см. далее), n — из величины стационарного фототока и значения подвижности.

Другое значение E_{vr} (оптическое) было получено по длинноволновой границе спектра ИК-гашения фототока (рис. 3): $E_{vr}^0 = 0,2 \div 0,22$ эв. Такое расхождение между E_{vr} и E_{vr}^0 указывает на значительную долю ионной связи в этом соединении.

Зависимость $\frac{\Delta L}{L_0}$ от интенсивности света $I_{ик}$ из области ИК-гашения фототока $\frac{\Delta L}{L_0} = g_s \frac{\gamma I_{ик}}{C_{nr} n}$ позволяет определить сечение захвата ИК-фотона γ , переводящего электроны из v -зоны на r -центр. Величины g_s и C_{nr} определялись независимо, кинетическими методами, $I_{ик}$ — с

помощью отградуированного фотодиода. Полученное значение $\gamma \approx 0,7 \cdot 10^{-15}$ см² для $\lambda = 4,0$ мк.

Из ЛАХ фототока (при 77°К) определена величина P_{ro} [5], равная концентрации дырок на r -центрах, которые образуются из-за перелокализации электронов с r -центров на темновые вакансии на s -центрах и глубоких уровнях прилипания при некоторой подсветке образца. На участке, где наклон ЛАХ $\alpha = \frac{d(\lg n)}{d(\lg L)}$ изменяется от $\alpha = 1$ к $\alpha = 0,5$ (переход от мономолекулярного к бимолекулярному закону рекомбинации), $n = P_{ro}$. На разных образцах значение P_{ro} лежало в пределах $(3 \div 8) \cdot 10^{13}$ см⁻³. Поточке перехода ЛАХ к квазинасыщению, что соответствует полному опустошению r -центров, была определена концентрация r -центров $N_r = (0,7 \div 1,2) \times 10^{15}$ см⁻³.

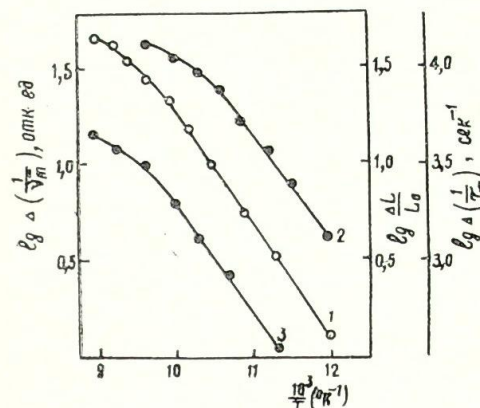


Рис. 5. Температурная зависимость величин $\frac{\Delta L}{L_0}$ (1), $\Delta \left(\frac{1}{\tau_r} \right)$ (2) и $\Delta \left(\frac{1}{\tau_s} \right)$ (3).

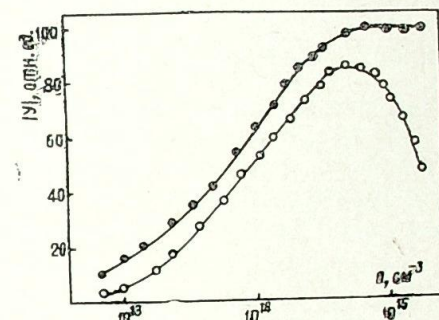


Рис. 6. Зависимость ν_{st} и ν_m^- от концентрации электронов n , созданных подсветкой.

Некоторые из указанных параметров, а также другие параметры r - и s -центров были независимо определены из исследований кинетических характеристик. Кривая спада фототока при освещении слабым импульсом собственного света на фоне подсветки (линейный режим) при 77°К состояла из двух участков с резко различным временем: $\tau_1 = (2 \div 1) \cdot 10^{-5}$ сек и $\tau_2 = (0,5 \div 1) \cdot 10^{-3}$ сек, зависящим от подсветки. При освещении образца короткими импульсами света из области ИК-гашения фототока время восстановления фототока равнялось τ_2 (рис. 4в). Эти факты, а также наличие сублинейного участка на ЛАХ (рис. 4а, кривая 1) свидетельствуют о том, что в исследованных образцах выполнялось условие $x = \frac{P_{ro} \cdot P_{so}}{(P_{ro} + n)(P_{so} + n)} \ll 1$. Здесь P_{ro} и P_{so} —

концентрации дырок на r - и s -центрах после того, как произошла перелокализация [4]. В этом случае время τ_1 и τ_2 равно характеристическому времени релаксации через s - и r -центры соответственно. При выполнении условия $|1 - x| \ll 1$ значения τ_1 и τ_2 зависят от параметров обоих типов центров [12].

Релаксация фототока, когда $x \ll 1$, описывается выражением

$$\frac{\nu}{I_0} = g_s e^{-\frac{t}{\tau_s}} + g_r e^{-\frac{t}{\tau_r}}, \quad (2)$$

где I_0 — полное число свободных пар, генерированных импульсом света, τ_s и τ_r — характеристическое время релаксации через s - и r -центры, соответственно. Относительные амплитуды участков спада фототока, согласно формуле (2), равны g_s и g_r . Для исследованных образцов $g_s = 0,7 \div 0,8$, а $g_r = 1 - g_s = 0,2 \div 0,3$. Исследовались зависимости τ_r и τ_s от концентрации электронов n , созданных подсветкой. Из зависимости $\tau_r^{-1} = C_{pr}(P_{ro} + 2n)$ получено: $C_{pr} = (4 \div 7) \cdot 10^{-12} \text{ см}^3/\text{сек}$, $P_{ro} = (5 \div 8) \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Из зависимости $\tau_s^{-1} = C_{ns}n$, где C_{ns} — вероятность захвата свободного электрона на s -центр, найдено $C_{ns} \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3/\text{сек}$.

Измерение τ_r^{-1} при разных температурах в области термического гашения фототока позволяет определить E_{vr}^T и C_{pr} из выражения

$$\Delta \left(\frac{1}{\tau_r} \right)_{n=\text{const}} = \left(\frac{1}{\tau_r} - \frac{1}{\tau_{ro}} \right)_{n=\text{const}} = C_{pr} Q_v \exp \left(- \frac{E_{vr}^T}{kT} \right). \quad (3)$$

Здесь τ_{ro} измерено до наступления T -гашения, а τ_r — в области T -гашения. Зависимость $\Delta \left(\frac{1}{\tau_r} \right)$ от T^{-1} представлена на рис. 5, кривая 2. По-

лучено $E_{vr}^T = 0,1 \div 0,12 \text{ эв}$, $C_{pr} \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{сек}$. Отношение C_{pr} , най-

денное из зависимости $\frac{\Delta L}{L_0}(T^{-1})$, близко к значению C_{pr} , полученному путем независимого измерения C_{pr} и C_{nr} .

На рис. 6 (кривая 1) показана зависимость амплитуды ИК-гашения при возбуждении коротким ($\Delta t \ll \tau_s, \tau_r$) ИК-импульсом света от концентрации электронов n , созданных собственной подсветкой. Для величины v_m^- в линейном случае имеем [5]

$$v_m^- = g_s \gamma P_r I_{ик}, \quad (4)$$

где $I_{ик}$ — число квантов в ИК-импульсе, падающих на 1 см^2 поверхности образца.

Величина v_m^- растет с ростом подсветки, так как увеличиваются g_s и P_r . С возрастанием подсветки, когда r -центры почти нацело заполняются фотодырками, $P_r \rightarrow N_r$ и рекомбинация будет определяться s -центрами, $g_s \rightarrow 1$. При этом амплитуда гашения достигает своего предельного значения, равного $v_m^- = \gamma N_r I_{ик}$. Как видно из рис. 6, v_m^- достигает насыщения при тех же значениях n , что и ЛАХ.

Кривая 2 на рис. 6 показывает зависимость стационарной величины гашения $v_{ст}$ от n . В этом случае имеем

$$\tau_{ст} = \tau_r g_s \gamma P_r i_{ик} = \tau v_m^- \frac{I_{ик}}{I_{пк}}, \quad (5)$$

где $I_{пк}$ — интенсивность ИК-лучей.

Поскольку $\frac{I_{ик}}{I_{пк}} = \text{const}$, а τ_r с ростом подсветки монотонно убывает,

то величина $v_{ст}$ должна убывать при больших n проходя до этого через максимум. Как видно из рис. 6, в области насыщения v_m^- величина $v_{ст}$ начинает убывать, что и следует из выражения (5).

Температурная зависимость амплитуды гашения $\frac{1}{v_m^-} - \frac{1}{v_{m_0}^-} = \Delta \left(\frac{1}{v_m^-} \right)$,

где $v_{m_0}^-$ — измерено до наступления гашения, а v_m^- в области гашения, также позволяет определить E_{vr}^T [4]. На рис. 5 представлены зависимости $\frac{\Delta L}{L_0}$, $\Delta \left(\frac{1}{\tau_r} \right)$ и $\Delta \left(\frac{1}{v_m^-} \right)$ от T^{-1} . Как видно, все кривые имеют

практически одинаковый наклон и дают $E_{vr}^T \approx 0,12 \text{ эв}$.

Средние значения измеренных нами параметров приведены в таблице.

Параметры центров рекомбинации

$N_r, \text{ см}^{-3}$	$E_{vr}^T, \text{ эв}$	$E_{vr}^0, \text{ эв}$	$S_{nr}, \text{ см}^2$	$S_{pr}, \text{ см}^2$	g_r	$P_{ro}, \text{ см}^{-3}$	$S_{ns}, \text{ см}^2$	$\gamma, \text{ см}^2$
10^{15}	0,12	0,2	$5 \cdot 10^{-19}$	$6 \cdot 10^{-15}$	0,25	$6 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-17}$	$7 \cdot 10^{-16}$

Как было показано выше, исследуемые монокристаллы InSe n -типа в области $77 \div 140^\circ \text{K}$ обладают рядом свойств, характерных для фоточувствительных полупроводниковых соединений типа A_2B_6 . Обнаружено присутствие двух типов центров рекомбинации: центров чувствительности (или центров класса I по Роузу [13] и центров быстрой рекомбинации (центры класса II). Ниже области термического гашения фотопроводимости чувствительность InSe сравнима с чувствительностью CdS и CdSe. Следует отметить, что и по координации атомов и характеру химической связи в слоях InSe сходен с соединениями типа CdS и CdSe.

В исследуемых кристаллах центрами чувствительности являются акцепторные центры с термической энергией ионизации $E_{vr}^T \approx 0,12 \text{ эв}$, определенной по термическому гашению фототока и оптической энергии ионизации $E_{vr}^0 = 0,20 \div 0,22 \text{ эв}$, найденной по оптическому гашению фототока. Что касается природы r -центров в InSe, то имеющиеся данные не позволяют делать на этот счет однозначных выводов.

В исследуемых кристаллах r -центры имеют сечение захвата электрона $S_{nr} \approx 5 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$ ($\langle v \rangle$ принято равным 10^7 см/сек), которое близко к значению S_{nr} , найденному на монокристаллах CdS и CdSe [4,5]. В последнем случае, как показано в [14, 15], захват электрона происходит на нейтральные (после захвата дырки) r -центры и является полностью излучательным (квантовый выход этой фотолуминесценции близок к единице) [15]. В исследованных кристаллах InSe при низких температурах мы наблюдали интенсивную полосу люминесценции с положением максимума при $\lambda = 1,1 \text{ мкм}$, поведение которой (зависимость от температуры, интенсивности возбуждения, ее кинетика) указывают на ее связь с захватом электронов на r -центры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломиец Б. Т. и Рывкин С. М. ЖТФ, 9, 987, 1947.
2. Damon R. W. and Redington R. W. Phys. rev., 96, 1498, 1954.
3. Алиева М. Х., Казиев Ф. Н., Ахундов Г. Сложные полупроводники, Баку 1966.
4. Lashkarev V. E. and Shenkman M. K. Phys. stat. Sol., 11, 429, 1965.
5. Лашкарев В. Е., Любченко А. В. и Шейнкман М. К., ФТТ, 7, 1717, 1965.
6. Сальков Е. А. и Шейнкман М. К. ФТТ, 5, 397, 1963.
7. Алиева М. Х. Автореф. канд. дисс. Баку, 1966.
8. Бьюб Р. Фотопроводимость твердых тел. ИИЛ, 1962.
9. Аркадьева Е. Н., Рывкин С. М. ФТТ, 1, 1379, 1959.
10. Лашкарев В. Е. ФТТ, 5, 437, 1963.
11. Абдуллаев Г. Б., Атакишиев С. М. и Ахундов Г. А. Сб. "Сложные полупроводники". Баку (в печати).
12. Лашкарев В. Е., Рыбалко В. В. УФЖ, 9, 372, 1966.
13. Роуз А. Основы теории фотопроводимости. Изд-во "Мир", 1966.
14. Lashkarev V. E., Shenkman M. K., Jermolovich I. B. Proc. intern. conf. of II-VI compounds, New York, 1967, p. 711.
15. Ермолович И. Б., Лукьянчикова Н. Б., Шейнкман М. К. ФТТ, 9, 2899, 1967.
16. Беленький Г. Л., Ермолович И. Б., Лукьянчикова Н. Б., Шейнкман М. К. ФТТ, 9, 3337, 1967.

**InSe монокристалларында рекомбинасија просесләри
вә рекомбинасија мәркәзләринин
параметрләри**

ХҮЛАСӘ

InSe монокристалларында фотокечиричилијин стасионар вә кинетик характеристикалары вә инфраағырмызы сөнмә просеси өјрәнилмишдир. Алынан нәтичәләр көстәрмишдир ки, ашағы температурларда рекомбинасија просесләри әсас етибарилә ики нөв рекомбинасија мәркәзләри—һәссаслашдырычы r вә s рекомбинасија мәркәзләри васитәсилә јараныр. Ишдә r рекомбинасија мәркәзләринин әсас параметрләри олан консентрасија, гадаған олунмуш золагда јерләшмә дәринлији, электрон вә дешикләрин тутма кәсији, электрону v золагдан r мәркәзә кечирән инфраағырмызы фотонун тутма кәсији тәјјин едилмишдир.

УДК 535.373.132

Ф. К. ИСАЕВ, Р. М. ЗАМАНОВА, А. Х. ХАЛИДОВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АНИОНОВ АКТИВИРУЮЩИХ
ПРИМЕСЕЙ НА ЦЕНТРЫ ОКРАСКИ И РЕКОМБИНАЦИОННУЮ
ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЮ НЕКОТОРЫХ КСІ-ФОСФОРОВ**

Повышенный интерес к изучению спектральных, поляризационных и других характеристик щелочногалогенидных кристаллов, активированных одновалентными ионами с добавками чужеродных анионов [1—12], связан с тем, что небольшое введение, например, йода открывает возможность искусственного создания новых анизотропных активаторных центров [1—5, 8, 11], всестороннее изучение которых позволяет получить обширную информацию о расположении ионов активатора, служащих ядром центров люминесценции, и строении люминесцирующего центра.

В настоящей работе мы продолжали (см. [5, 8, 12]) исследование роли чужеродных для основания кристаллической решетки анионов солей активирующей примеси в создании новых центров окраски и центров люминесценции в некоторых возбужденных при комнатной температуре рентгеновскими лучами и ультрафиолетовым излучением щелочно-галогенидных фосфорах. Измерения проводились на выращенных по методу Киропулоса из соли КСІ марки „особо чистая“ монокристаллах, активированных AgCl, AgBr, AgI марки хч, а также на фосфорах КСІ+AgI с небольшой добавкой ионов йода в виде KI марки „особо чистая“. В статье указываются концентрации солей серебра и KI, введенных в расплав. Источником рентгеновской радиации служила трубка с медным анодом ($U = 40$ кв, $I = 4,5$ ма). Время рентгенизации для абсорбционных измерений — 3 ч, люминесцентных — 45 мин.

Образцы облучались ультрафиолетовым излучением от искрового генератора с алюминиевыми электродами при напряжении 200 в, силе тока 3 а и времени облучения 5 мин. При этом не выделялись определенные линии Al-искры. Условия эксперимента для всех исследованных фосфоров были одинаковы. Для измерения использовались как свежеращенные монокристаллы, так и кристаллы, закаленные в течение 30 мин при 600°C в открытой кварцевой ампуле. Были измерены спектры основного и добавочного поглощения, фосфоресценции, интегральные кривые термостимулированной люминесценции (ТСЛ) и спектральный состав ТСЛ. Спектры поглощения измерялись на спектрофотометре СФ-4. Спектры фосфоресценции, ТСЛ и инте-

гральные кривые ТСЛ регистрировались на установке, собранной на базе спектрофотометра СФ-4 (см. также [13]).

Для регистрации излучения использовался ФЭУ-18, усилитель постоянного тока и для записи ЭПП-09. Для измерения ТСЛ образцы нагревали равномерно, со скоростью 0,08 град/сек.

Спектры поглощения

Полосы поглощения фосфора $KCl + AgCl$ исследованы в целом ряде работ [14—29, 33]. Измеренный нами в области 220—400 нм спектр активаторного поглощения нерентгенизованного $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) -фосфора состоит из двух полос с максимумами при 228 (B_1) и ~245 (C_1) нм (кривая 1, рис. 1 а), что хорошо согласуется с литературными данными.

Из рис. 1 а (кривые 1 и 2) видно, что спектры активаторного поглощения нерентгенизованных $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) - и $KCl + AgBr$ (0,5 мол %) -фосфоров идентичны, но в случае последнего наблюдается небольшое увеличение интенсивности полосы B_1 и значительное увеличение интенсивности полосы C_1 . Как видно из кривой 3 рис. 1 а, характеризующей активаторное поглощение нерентгенизованного $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) -фосфора, в области 220—400 нм, кроме B_1 - и C_1 -полос, характерных для $KCl + AgCl$ (0,5 мол %), появляется новая более интенсивная полоса при 235—237 нм (для удобства эту полосу обозначим буквой L), которая обусловлена поглощением $Ag^+ J^-$ -центров. Эти центры представляют собой ионы Ag^+ , расположенные в регулярных узлах кристаллической решетки KCl , где один из соседних ионов Cl^- замещен ионом J^- . Аналогичный результат получен и при 100°K в кристаллах $KClKJ + Ag$ с небольшим содержанием KJ [31].

Сравнение кривых 1, 2, 3 рис. 1 а показывает, что в ряду $KCl + AgCl$ (0,5 мол %), $KCl + AgBr$ (0,5 мол %), $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) наблюдается увеличение коэффициента поглощения B_1 - и C_1 -полос. Изменение концентрации активирующей примеси (AgJ) и дополнительное введение KJ приводит к резкому изменению коэффициента поглощения в максимумах полос B_1 , L , C_1 и к изменению соотношения их интенсивностей (см. кривые 4—9 рис. 1 б). Эти перераспределения интенсивностей (как выяснится и после рентгенизации фосфоров) происходят на фоне нелинейного изменения активаторного поглощения при введении в $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) ионов йода в виде KJ и дальнейшем увеличении содержания KJ , хотя во всех исследованных нами фосфорах при одинаковой концентрации активирующей примеси полосы активаторного поглощения „йодных“ фосфоров намного интенсивнее, чем соответствующие полосы „хлорных“ и „бромных“ фосфоров. Это, по-видимому, объясняется тем, что AgJ до 0,5 мол % хорошо смешивается в решетке KCl . Поэтому в KCl -фосфорах с содержанием AgJ от 0,05 до 0,5 мол % число Ag^+ -центров, ответственных за B_1 -полосу поглощения, очень мало по сравнению с центрами, ответственными за L - и C_1 -полосы поглощения из-за большой склонности ионов J^- располагаться вокруг ионов Ag^+ (L -полоса) и сложных серебряных центров (C_1 -полоса). А при больших концентрациях AgJ и дополнительном введении ионом J^- в KCl в виде KI ухудшается смешиваемость AgJ в кристалле и число Ag^+ -центров увеличивается (увеличивается интенсивность B_1 -полосы) за счет группировки ионов J^- вокруг лишь некоторых ионов Ag^+ , образуя $Ag^+ J^-$ -центры.

В процессе рентгенизации фосфора $KCl + AgCl$, кроме V^- и F^-

центров, соответствующих дыркам и электронам, локализованным на катионных и анионных вакансиях кристалла KCl , создается ряд электронных и дырочных центров окраски (A , B , C , D , E), связанных с наличием в кристаллической решетке ионов Ag^+ . Природа этих серебряных центров исследовалась в целом ряде работ [7—8, 14—20, 24—30].

Нами изучалось влияние анионов солей серебра ($AgCl$, $AgBr$, AgJ) на указанные выше центры окраски. На рис. 1 а (кривая 1) показан измеренный нами спектр поглощения $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) -фосфора после облучения кристалла рентгеновскими лучами.

Нетрудно заметить, что после рентгенизации кристалла интенсивность B_1 -полосы поглощения уменьшается, а интенсивность C_1 -полосы увеличивается вследствие появления в области C_1 -полосы дырочной A -полосы поглощения. В результате рентгенизации в спектре поглощения $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) возникает серия полос возбужденного поглощения с максимумами при 255 ÷ 267, 287, 315, 340, 435 и 560 нм, соответствующих A^1 -, B -, C -, D -, E -, F -центрам окраски, что хорошо согласуется с литературными данными (см. например [7, 14—19, 34]). Обнаружено, что спектр поглощения рентгенизованного фосфора $KCl + AgBr$ (0,5 мол %) (см. кривую 2 рис. 1 а') качественно подобен соответствующему спектру $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) -фосфора, но замена иона хлора ионом брома увеличивает F -полосу поглощения и наблюдается увеличение общего фона поглощения A^1 -, B -, C -, D - и E -центров окраски. Введение же серебра в виде йодистой соли вызывает, как видно из кривой 3 рис. 1 а', существенное изменение в спектре возбужденного поглощения:

а) появляется новая интенсивная полоса с максимумом при 365 и 380 ÷ 410 нм;

б) у фосфора $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) наблюдается рост F -полосы, которая в 2,3 раза интенсивнее F -полосы $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) и в 1,6 раз $KCl + AgBr$ (0,5 мол %) -фосфора;

в) происходит сильное изменение соотношения интенсивностей полос возбужденного поглощения центров окраски. Например, у фосфоров $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) и $KCl + AgBr$ (0,5 мол %) полосы поглощения центров окраски по величине коэффициента поглощения в максимумах полос уменьшаются в следующей последовательности: F , E , D , B , A^1 , а в случае $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) наблюдается уменьшение D - и E -полос и резкое увеличение B - и F -полос поглощения. При этом B - и F -полосы, а также полоса при 365 нм становятся доминирующими и по интенсивности идут в указанной последовательности. У фосфора $KCl + AgJ$ (0,5 мол %) так же, как у $KCl + AgCl$ (0,5 мол %) и $KCl + AgBr$ (0,5 мол %) обнаруживается уменьшение интенсивности активаторных B_1 - и L -полос поглощения.

Из рис. 1 б' (кривые 4—8) видно, что при увеличении в фосфоре $KCl + AgJ$ концентраций AgJ от 0,05 до 0,5 мол % после рентгенизации наблюдается резкое усиление B_1 - и F -полос, а также новых полос с максимумами при 365 и 380 ÷ 410 нм. Дальнейшее введение KJ вызывает существенное изменение соотношения интенсивностей полос поглощения. Как правило, увеличение концентрации ионов J^- ведет к уменьшению интенсивности полос поглощения A^1 (при 250 ÷ 265 нм), C -, D -, E -центров окраски и к увеличению интенсивности полосы поглощения B -центров, а также полос с $\lambda_{max} = 365$ и 380 ÷ 410 нм. Таким образом наличие ионов J^- в фосфоре $KCl + Ag$ приводит не только к созданию новых активаторных центров окраски, но и к преобразованию одних центров окраски в другие, которые существенно зависят от концентрации ионов J^- и кристаллофосфоре.

ТСЛ и фосфоресценция фосфоров

Спектры ТСЛ фосфоров $\text{KCl} + \text{Ag}$ исследовались в работах [9, 12, 18, 31, 32]. В настоящей работе проводилось исследование влияния анионов солей активирующей примеси на ТСЛ и фосфоресценцию фосфоров $\text{KCl} + \text{Ag}$.

В таблице приведены измеренные нами положения основных пиков ТСЛ и максимумы полос излучения для разных пиков термостимулированного свечения в различных стадиях неізотермического релаксационного процесса фосфоров, облученных Al -искрой и рентгеновскими лучами при 293°K . Как видно из этой таблицы, при нагреве облученного Al -искрой фосфора $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) от 293 до 473°K наблюдаются интенсивные пики ТСЛ при $T = 331$ и 373°K , причем основная светосумма ТСЛ сосредоточена в низкотемпературном пике. Нами в [7, 8, 34] было показано, что указанные пики фосфора $\text{KCl} + \text{AgCl}$ обусловлены термическим разрушением, соответственно, E - и F - центров окраски (см. также [35, 36]). Спектр ТСЛ фосфора $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) на всех этапах релаксационного процесса содержит три полосы с максимумами при 280 , 440 и 530 нм . При этом максимальное разгорание ультрафиолетовой полосы свечения (280 нм) происходит в температурном интервале максимума первого пика ТСЛ.

Известно, что ультрафиолетовое свечение (280 нм) связано с электронными переходами в ионах Ag^+ . Синее свечение (440 нм) и зеленое (530 нм) связаны с оптическими переходами в более сложных центрах, где электроны локализованы на дефектах, состоящих из ассоциата иона Ag^+ и анионной вакансии [9, 12, 16, 18]. Есть предположение, что полоса свечения ТСЛ при 530 нм фосфора $\text{KCl} + \text{AgCl}$ может быть отнесена к свечению C (318 нм)-центров [12].

Для фосфора $\text{KCl} + \text{AgBr}$ (0,5 мол%) облученного Al -искрой (см. таблицу), наблюдаются спектры и пики ТСЛ, характерные для $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%), лишь с той разницей, что в случае $\text{KCl} + \text{AgBr}$ (0,5 мол%) интенсивность обоих пиков (338 и 351°K) приблизительно одинакова и низкотемпературный пик, характерный для фосфора $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%), смещен на 7°C в сторону высоких температур, а высокотемпературный пик — на 10° в сторону низких температур. Анионы Br^- , введенные в кристаллическую решетку KCl в виде AgBr , мало влияют на свойства разных уровней захвата. Картина существенно меняется в случае фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%).

Как следует из таблицы, анионы J^- соли серебра вызывают резкое изменение не только кривых (см. также [8]), но и спектрального состава ТСЛ. Для облученного Al -искрой фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) наблюдаются интенсивный пик свечения при 316°K и два относительно малоинтенсивных пика при 354 и 391°K . Первый и последний пики свечения отсутствуют у фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) и $\text{KCl} + \text{AgBr}$ (0,5 мол%), а пик термовысвечивания с максимумом при 331°K (для $\text{KCl} + \text{AgCl}$) и 338°K (для $\text{KCl} + \text{AgBr}$) в незакаленном фосфоре $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) не наблюдается. Следовательно, замена Cl^- и Br^- солей активирующей примеси серебра ионами J^- соли серебра приводит к возникновению новых центров рекомбинационной люминесценции, в состав которых входят один или несколько ионов J^- , и к уменьшению центров, ответственных за пик термовысвечивания при 331°C (для $\text{KCl} + \text{AgCl}$) и 338°K (для $\text{KCl} + \text{AgBr}$). Пик ТСЛ при 320°K наблюдается и в рентгенизованных при 100°K фосфорах $\text{KCl} + \text{Ag}$ [3] и $\text{KCl} + \text{Ag}$, $\text{Pb} + \text{J}$ [12]. Пик ТСЛ при 316°K у фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) обусловлен, по-видимому, рекомбинацией термически освобожденных с Ag^+J^- -центров электронов с ло-

кализованными на Ag^+J^- - центрах дырками [3]. Природа пика ТСЛ $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) при 391°K пока не выяснена. Однако возникновение высокотемпературного пика ТСЛ электронного характера, обусловленного наличием ионов J^- в фосфоре, обнаружено одним из нас в рентгенизованных при комнатной температуре смешанных фосфорах $\text{KCl} + \text{AgJ}$ [8].

Как видно из таблицы, введение серебра в качестве активатора в KCl в виде соли AgJ меняет соотношение интенсивностей пиков свечения. Например, у фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) и $\text{KCl} + \text{AgBr}$ (0,5 мол%) пики ТСЛ при 311 и 338°K , соответственно, являются доминирующими, тогда как этот пик у $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) вообще не наблюдается.

Спектральный состав рекомбинационной люминесценции фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) при изменении температуры от 298 до 473°K , кроме полос излучения, наблюдаемых у вышеуказанных двух пиков ТСЛ фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) и $\text{KCl} + \text{AgBr}$ (0,5 мол%), характеризуется также ультрафиолетовым свечением Ag^+J^- - центров (315 нм). Интенсивность зеленого свечения (530 нм) у $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) резко уменьшается и приближается к нулю. Надо отметить, что полоса свечения при 315 нм в изученном нами интервале температур достигает наибольшей интенсивности в интервале $308 - 323^\circ\text{K}$.

Аноны J^- соли серебра наряду с созданием новых центров рекомбинационной люминесценции типа Ag^+J^- также существенно меняют (см. табл.) соотношение интенсивностей полос ультрафиолетового свечения Ag^+ , Ag^+J^- - центров и свечения более сложных центров. Так, например, полоса свечения ТСЛ фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) при 315 нм доминирует от 298 до 343°K , а дальше до 403°K , наоборот, доминирует полоса синего свечения. Видно (см. табл.), что при переходе от $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5 мол%) к $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) полоса синего свечения ТСЛ смещается в сторону длинных волн от 440 до 448 нм . От концентрации ионов J^- соли серебра сильно зависит ТСЛ фосфоров $\text{KCl} + \text{AgJ}$. Как правило, с повышением (см. табл.) концентрации ионов J^- , введенного в KCl в виде соли AgJ от $0,05$ до $0,5$ мол%, интенсивность пика свечения при 316°K увеличивается, а при дальнейшем увеличении AgJ от $0,5$ до 2 мол% уменьшается. Интенсивность пиков свечения при $343 - 354^\circ\text{K}$ и $391 - 393^\circ\text{K}$, характерных для ТСЛ фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%), при этом в основном плавно уменьшается. Аналогично изменяется и интенсивность полос излучения указанных пиков ТСЛ при варьировании содержания ионов J^- в фосфоре $\text{KCl} + \text{AgJ}$, введенных в виде соли серебра (AgJ).

Если увеличить содержание ионов J^- в $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) в виде KJ , то число пиков, характерных для ТСЛ облученного Al -искрой фосфора $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%), при тех же температурных интервалах исследования ТСЛ резко уменьшается. Например, у облученных Al -искрой фосфоров $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) + KJ (0,5 мол%) и $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) + KJ (5 мол%) кривые ТСЛ состоят лишь из одного элементарного пика при 328 и 323°K , соответственно, интенсивность которых продолжает уменьшаться с увеличением числа ионов J^- в виде KJ в фосфоре $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%). По-видимому, указанные пики ТСЛ являются результатом наложения пика свечения, связанного с наличием в фосфоре Ag^+J^- - центров и пика свечения, обусловленного оставшимися в фосфоре в незначительном количестве характерными для $\text{KCl} + \text{AgJ}$ (0,5 мол%) другими центрами.

Спектральный состав ТСЛ фосфоров $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) + KJ (0,5 мол%) и $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) + KJ (5 мол%) подобен спектральному составу ТСЛ $KCl + AgJ$ (0,5 мол%).

Следует отметить, что измерение интенсивности полос излучения пиков ТСЛ указанных фосфоров, как следует из таблицы, носит сложный характер. По мере плавного увеличения концентрации ионов J^- в $KCl + AgJ$ (0,5 мол%), вводимых в виде AgJ и KJ , наблюдается смещение полос ультрафиолетового (315 нм) и синего свечения (440 нм) в сторону длинных волн до 320 и 460 нм, соответственно. Тот факт, что анионы J^- соли серебра, кроме создания новых центров рекомбинационной люминесценции (полосы свечения при $315 \div 320$ нм), также усиливают полосы синего свечения (при $440 \div 460$ нм) при нагреве фосфора выше $333 \div 343^\circ K$, можно рассматривать как подтверждение того, что ионы серебра располагаются преимущественно рядом с более тяжелыми анионами J^- [10, 11, 12] и рядом с более сложными центрами {8,12} из-за большей поляризуемости ионов J^- по сравнению с ионами Br^- и Cl^- .

Взаимодействия иона серебра с окружающими его ионами J^- , а также изменения симметрии поля вокруг этого иона или центра, состоящего из ионов Ag^+ и других точечных дефектов решетки, настолько значительны, что очень сильно проявляются и в явлениях ТСЛ. Как следует из таблицы, аналогичные результаты в отношении ТСЛ получаются и при рентгенизации исследованных нами фосфоров. Аналогичность ТСЛ рентгенизованных и облученных Al -искрой фосфоров указывает на то, что рекомбинационная люминесценция при обоих видах возбуждения обусловлена одним и тем же механизмом.

На рис. 2 представлены кривые ($a, b, в, г, д$) и спектры ($a', б', в', г', д'$) ТСЛ закаленных и облученных Al -искрой фосфоров. Как видно из этого рисунка, кривая ТСЛ облученного Al -искрой фосфора $KCl + AgCl$ (0,5 мол%) при нагреве от 293 до $473^\circ K$ содержит один интенсивный пик при $333^\circ K$, несимметричный со стороны высоких температур. ТСЛ фосфора $KCl + AgBr$ (0,5 мол%) (кривая $б$, рис. 2) состоит лишь из одного очень интенсивного пика при $343^\circ K$. По-видимому, этот пик является результатом слияния двух пиков свечения приблизительно одинаковой интенсивности фосфора $KCl + AgBr$ (0,5 мол%), наблюдаемых до закалки при 338 и $351^\circ K$ (см. табл.). Как следует из кривых a' и $б'$ рис. 2 и таблицы, спектральный состав ТСЛ закаленных фосфоров $KCl + AgCl$ (0,5 мол%) и $KCl + AgBr$ (0,5 мол%) идентичен. На кривой ТСЛ закаленного фосфора $KCl + AgJ$ (0,5 мол%), кроме пиков при 316 и $357^\circ K$, наблюдаемых у незакаленного фосфора $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) четко наблюдается также пик при $338^\circ K$. Последний характерен для $KCl + AgCl$ (0,5 мол%)-фосфоров (кривая $а$, рис. 2, табл.). Появление пика свечения при $338^\circ K$ у закаленного фосфора $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) в отличие от незакаленного можно объяснить предполагая, что вследствие нахождения ионов J^- рядом с центрами, ответственным за пик свечения при $338^\circ K$, уменьшается термическая устойчивость указанных центров. А закалка фосфоров, наоборот, увеличивает эту устойчивость.

Следует отметить, что в процессе закалки фосфоров интенсивность пиков ТСЛ в основном увеличивается, высокотемпературные пики выявляются более четко и с большей интенсивностью, чем до закалки. Сравнение кривых ($a', б', в', г', д'$) рис. 2 и таблицы показывает, что в спектрах ТСЛ исследованных нами фосфоров после закалки резких изменений не наблюдается. Надо отметить, что из-за малой интенсивности полосы свечения при 280 нм, характерной для излучения ионов

Ag^+ , а также близкого расположения ее к полосе свечения $Ag^+ J^-$ -центров при 315 нм ультрафиолетовое свечение при 280 нм не всегда четко выявляется в спектрах ТСЛ „йодных“ фосфоров (см. рис. 2).

На рис. 2 показаны также спектры фосфоресценции исследованных нами незакаленных рентгенизованных и облученных Al -искрой закаленных фосфоров при $293^\circ K$. Как видно, спектры фосфоресценции всех исследованных нами фосфоров аналогичны со спектрами ТСЛ. В ряду фосфоров $KCl + AgCl$ (0,5 мол%), $KCl + AgBr$ (0,5 мол%), $KCl + AgJ$ (0,5 мол%), $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) + KJ (0,5 мол%), $KCl + AgJ$ (0,5 мол%) + KJ (5 мол%), интенсивность фосфоресценции увеличивается. При этом изменяется также соотношение полос фосфоресценции.

Пользуясь случаем, мы выражаем благодарность заведующему лабораторией рентгенографии ФИАН Азербайджанской ССР К. П. Мамедову и инженеру В. З. Зейналову за помощь, оказанную в рентгенизации фосфоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зазубович С. Г., Соовик Х. А. Тр. ИФА АН ЭССР, № 26, 38 (1964); Зазубович С. Г. Там же, № 28, 20 (1964); Зазубович С. Г., Лущик Н. Е. Там же, № 30, 27 (1964).
2. Зазубович С. Г., Лийдя Г. Г., Лущик Н. Е., Лущик Ч. Б. „Изв. АН СССР, серия физич.“ т. 29, 373 (1965).
3. Золотарев Г. К., Лущик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 31, 121 (1966).
4. Kleemann N., Fisher F. Internat. Conf. Luminescence, Budapest, Preprints, т. 5, 35 (1966).
5. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 1, 61 (1961).
6. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю., Мамедов А. П., Алиева Т. Д., Исаев Ф. К. Физика щелочногаллоидных кристаллов (Тр. II совещания по люминесценции) Рига, 1962.
7. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. „Изв. АН Азерб. ССР“, серия физ.-техн. и матем. наук, № 4, 135 (1963).
8. Исаев Ф. К. Дисс. Баку, Азгосуниверситет им. С. М. Кирова, 1964.
9. Исаев Ф. К., Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем.-наук“, № 4 (1966); № 1, 71 (1966); № 1 (1967).
10. Клемент Ф. Д., Тейсс Л. А. „Изв. АН СССР, серия физич.“, т. 25, № 1, 28 (1961); Клемент Ф. Д. Тр. ИФА АН ЭССР, № 7, 1957; Клемент Ф. Д. Физика щелочногаллоидных кристаллов (Тр. II совещания по люминесценции). Рига, 1962.
11. Иванова Н. И. Материалы V совещания по люминесценции (кристаллофосфоры), Тарту, 1957. Иванова Н. И., Тарасова Л. И., Жуковский А. П. Физика щелочно-галлоидных кристаллов (Тр. II совещания по люминесценции). Рига, 1962.
12. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 1, 2, 3 (1964); № 4, 5, 1965.
13. Яэк И. В., ОКК М. Ф. Тр. ИФА АН ЭССР, № 21, 96 (1962).
14. Eitel H., Schulman I. J. chem. phys., т. 22, 1549 (1954).
15. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочногаллоидных соединений. Изд-во Саратовского ун-та, 1960.
16. Гиндина Р. Н., Лущик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 15, 81 (1961).
17. Никольский В. Н. Дисс. Саратов. ун-т, 1962.
18. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 23, 175 (1963).
19. Delbecq C., Hayes W., O'Brien M., Yuster P., Proc. Roy. soc., A, 271, 1344 (1963).
20. Парфианович И. А., Шуралева Е. И., Ивахненко П. С., Бабин П. А. „Изв. АН СССР, серия физич.“, т. 29, 427 (1965).
21. Лущик Н. Е., Лущик Ч. Б. Оптика и спектроскопия, № 8, 842 (1960).
22. Лущик Н. Е., Зазубович С. Г. Тр. ИФА АН ЭССР, № 14, 141 (1961).
23. Ребане Л. А. Тр. ИФА АН ЭССР, № 11, 193 (1960).
24. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 6, 39 (1958).
25. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Тр. Ин-та физики АН Азерб. ССР, № 10, 50 (1969).
26. Парфианович И. А. ЖЭТФ, 25, 614 (1953).
27. Vander Vorst W., Dekeyser W. Physica, 23, 903 (1957).
28. Eppier R., Dricamer H. J. chem. phys., 32, 1734 (1960).

29. Вале Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 28, 93 (1964).
 30. Delbecq C., Smaler C., Yuster P. Phys. rev., 111, 1235, (1958).
 31. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 30, 42, 1966.
 32. Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 26, 121 (1964).
 33. Kämpzig W. Proc. Inter. Conf. Semiconductor, Physics, Prague, p. 705, 1950.
 34. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Изв. АН. Азерб. ССР, серия- физ.-техн. и матем. наук, 1963.
 35. Лушик Ч. Б., Зантов Ф. Н. Тр. ИФА АН ЭССР, № 4, 54, 1956.
 36. Белкин А. И., Календарев Р. И., Бердичевская С. Ю. Рад. физика, III (ионные кристаллы). Изд-во „Зинатне“, Рига, 1965.
 37. Яэк И. В. Тр. ИФА АН ЭССР, № 23, 170, 1963.

Ф. К. Исаев, Р. М. Заманова, Э. Х. Халилов

Активлешдиричи ашгар анионларынын бэ'зи КСІ фосфорларынын рэнклэнмэ маркэзлэри вэ рекомбинасијалы лүминесенсијасына тэ'сиринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ хүмүш активаторун мүхтэлиф дузларынын КСІ фосфорунда удма спектрлэринэ, термостимулэ едилмиш лүминесенсија спектрлэринэ вэ интеграл ишыгланма әјрилэринэ тэ'сиринин тэдгигиндэн бәһс олунур. Мүәјјәнлешдирилмишдир ки, КСІ + AgCl фосфорундан фәргли олараг КСІ + AgJ фосфорунун удма спектриндэ јени удма золағы, термостимулэ едилмиш лүминесенсија спектрлэриндэ вэ термостимулэ едилмиш лүминесенсија спектрлэриндэ јени шүаланма пиклэри, золаглары әмэлэ кәлир ки, бу да һәмин тип фосфорларда јени рэнк маркэзлэринин вэ ишыгверичи маркэзлэрин мејдана кәлмәсини сүбүт едир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-техника вә ријазийат елмлэри серијасы, 1969, № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 1

А. И. МУХТАРОВ, И. М. НАДЖАФОВ, С. К. АБДУЛЛАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ $l^- + l^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ ПРОЦЕССА С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

1. Изучение электромагнитной структуры элементарных частиц и возможного изменения законов электродинамики на малых расстояниях — один из важных вопросов физики наших дней. Несмотря на то, что электромагнитное взаимодействие элементарных частиц находится в хорошем согласии с экспериментом, все же имеются некоторые экспериментальные данные [1, 2] и предположения теоретического характера [3, 4] об изменении теории электромагнитного взаимодействия на малых расстояниях. По-видимому, возможные отклонения теории от эксперимента при больших энергиях обусловлены не только изменением законов электродинамики на малых расстояниях, но и вкладом других взаимодействий (например, сильных) в этих областях энергии.

За неимением законченной количественной теории сильных взаимодействий в настоящее время в теории элементарных частиц пытаются объяснить возможные отклонения законов электродинамики на малых расстояниях введением, так называемых, форм-факторов частиц и модификацией функций распространения. Учет нелокальности электромагнитного взаимодействия меняет не только сечение соответствующего процесса, но и влияет на степень поляризации частиц, а также на другие характеристики, измерения которых могут дать некоторую добавочную информацию о правильности выбранных форм-факторов, и модификации функций распространения.

Для определения влияния нелокальности и характера электромагнитного взаимодействия на малых расстояниях, а также для исследования электромагнитной структуры элементарных частиц различными авторами были рассмотрены процессы тормозного излучения, аннигиляции и рождения пар, возникающие на встречных пучках фермионов [5—12]. Одним из таких процессов является радиационная аннигиляция лептон-антилептонной пары с образованием $p\bar{p}$ -пары:

$$l^- + l^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma \quad (l^\pm = e^\pm, \mu^\pm). \quad (1)$$

В настоящей работе процесс (1) исследовался с учетом нелокальности взаимодействия формфакторов протонов и произвольных поляризаций лептонов и γ -кванта. Основной вклад в сечение процесса (1) дают диаграммы, соответствующие излучению фотона легкими частицами. Следовательно, лептоны будут более „чувствительны“ к изменениям законов электромагнитного взаимодействия. Поэтому мы

будем учитывать нелокальность взаимодействия путем модификации функций распространения только лептонов.

Согласно работам [3, 4] для учета изменения законов электродинамики на малых расстояниях функция распространения лептонов модифицируется следующим образом:

$$\frac{1}{(p_i - \kappa)^2 + m^2} \rightarrow \frac{f_i(x_i, \Lambda)}{(p_i - \kappa)^2 + m^2}, \quad (2)$$

где

$$f_i(x_i, \Lambda) = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - 2x_i}, \quad x_i = (p_i \cdot \kappa), \quad i = 1, 2,$$

$p_1 = (p_1, iE)$, $p_2 = (-p_1, iE)$, $\kappa = (\kappa, i\omega)$ — 4-импульсы лептона, антилептона и фотона, соответственно, Λ^{-1} — характеристическая длина взаимодействия. Учет круговой и линейной поляризации фотона произойдет как в работах [5, 13].

2. Первоначально ограничимся исследованием зависимости сечения от спиновых корреляций лептонов и γ -кванта в локальной теории с учетом формфакторов только протонов. В этом случае сечение, проинтегрированное по импульсам протонов, содержит всевозможные корреляции между спинами лептонов, антилептонов и γ -кванта, и его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \sigma}{d\omega d\Omega} = & \frac{\alpha^3 v_0 \omega}{12 \pi E^2 v q^4} [2M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2] \left\{ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \right. \\ & + \frac{4E^2}{x_1 x_2} \left(1 - \frac{m^2 \omega^2}{x_1 x_2} \right) \varphi_1 + 2 \left(1 - \frac{m^2 E \omega}{x_1 x_2} \right) \varphi_2 - \\ & \left. - 2(s_1 \cdot s_2) + m(\varphi_3 + \varphi_4) \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\varphi_1 = m^2 (1 + s_1 \cdot s_2) - \frac{q^2}{2} + (\kappa \cdot s_1) (\kappa \cdot s_2),$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{x_1} (\kappa \cdot s_1) (p_1 \cdot s_2) + \frac{1}{x_2} (\kappa \cdot s_2) (p_2 \cdot s_1),$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 = & \left\{ \left[\frac{2}{x_1} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) (a^+ p_1) (p_1 \kappa a s_1)_z + \frac{1}{x_1^2} \left(\frac{1}{2} (\kappa \cdot s_1) \times \right. \right. \right. \\ & \times (\kappa p_2 a^+ a)_z + \frac{1}{2} x_1 (\kappa s_2 a^+ a)_z + (a^+ p_1) (p_2 \kappa a s_1)_z + \\ & \left. \left. + (a^+ p_1) (p_1 \kappa a s_2)_z \right) \right] - [a^+ \leftrightarrow a] \right\}, \end{aligned}$$

$$\varphi_4 = \varphi_3 (a^+ \leftrightarrow a, \quad p_1 \leftrightarrow p_2, \quad s_1 \leftrightarrow s_2, \quad \kappa \rightarrow -\kappa).$$

Здесь $(abcd)_z = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma$; $F_e(q^2)$ и $F_m(q^2)$ — зарядовый и магнитный формфакторы протона; $q^2 = -4E^2(1 - \omega/E)$ — квадрат передаваемого импульса; $v_0 = \sqrt{(q^2 + 4M^2)/q^2}$; $s_1(s_2)$ — 4-вектор спина лептона (антилептона); a^+ — вектор поляризации фотона; $m(M)$ — масса лептона (протона).

Интегрируя выражение (3) по азимутальному углу вылета фотона, можно избавиться от несущественных спиновых корреляций и представить сечение в более обозримом виде:

$$\frac{d^2 \sigma}{\sin \theta d\theta} = \frac{\alpha^3 v_0}{3 E^2 v q^4} \frac{d\omega}{\omega} \frac{2M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2}{(1 - v^2 \cos^2 \theta)^2} \left\{ \omega^2 (1 + ss') \times \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (1 - v^4 \cos^4 \theta) - 2v^2 ss' \omega^2 (1 - \cos^4 \theta) + v^2 \sin^2 \theta [2m^2 (1 + ss') - \\ & - q^2 (1 - ss')] + 2m^2 \eta \eta' \left[2v^2 \sin^2 \theta - \frac{\omega^2}{E^2} (1 - v^2 \cos^4 \theta) \right] + \\ & + 2vl \omega \cos \theta \left[v \sin^2 \theta (2E - \omega) (s - s') + \right. \\ & \left. + \frac{m^2}{E^2} \cos \theta (\omega + v E \sin^2 \theta) (s + s') \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $s(s')$ и $\eta(\eta')$ — продольная и поперечная компоненты спинового вектора лептона (антилептона), l — проекция спина фотона по его импульсу, θ — угол (полярный) вылета γ -кванта. Из приведенной формулы следует, что вклад в сечение дает только продольно-продольные, поперечно-поперечные и продольно-круговые спиновые корреляции частиц; лептон-антилептонная пара может аннигилировать как с параллельными ($ss' = -1$), так и с антипараллельными ($ss' = +1$) продольными спинами, хотя второй случай маловероятен (m^2/E^2 раз меньше); поправки, зависящие от поперечных поляризаций лептонов, имеют также порядок m^2/E^2 .

Угловая зависимость сечения процесса $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p} \gamma$ при $E = 5 M$, $ss' = -1$ и для фиксированного значения квадрата передаваемого импульса ($q^2 = -20 M^2$) представлена на рис. 1. Сплошные кривые соответствуют протяженным, а пунктирные — точечным протонам. Кривые 1 и 1' относятся к случаю $ls = +1$, а 2 и 2' характеризуют сечение, просуммированное по поляризациям фотона.

Для количественного анализа формфакторов протона выбирались в виде предложенных Фубини [15]. Сечение излучения фотона в рассматриваемой реакции очень чувствительно к формфакторам протона. Учет протяженности протона приводит к заметному (в три раза) уменьшению сечения по сравнению с сечением для точечного протона, характер углового распределения не меняется.

3. Интегрируя выражение (4) по углам θ , получим энергетическое распределение фотонов:

$$\begin{aligned} d\sigma = & \frac{\alpha^3 v_0}{3 E^2 v q^4} \frac{d\omega}{\omega} [2M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2] \left\{ [2m^2 (1 + ss') - \right. \\ & - q^2 (1 - ss')] \left(\frac{1 + v^2}{2} L - 1 \right) + 2\omega^2 (1 + ss') (L - 1) - \\ & - \frac{\omega^2 ss'}{v^2} [(3 + v^4) L - 2(3 + v^2)] + m^2 \eta \eta' \left[\frac{3\omega^2}{v^2 E^2} - 2 + \left(2 - \frac{m^2}{E^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega^2}{2 E^2} - \frac{3\omega^2}{2 E^2 v^2} \right) L \right] + l(s + s') \left[\omega^2 \left(2 - \frac{m^2}{E^2} L \right) + 2m^2 \frac{\omega}{E} (L - 1) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$L = \frac{1}{v} \ln \frac{1 + v}{1 - v}.$$

где

Энергетическая зависимость сечения процесса $e^- e^+ \rightarrow p \bar{p} \gamma$ при $E = 5 M$ и $ss' = -1$ показана на рис. 2 (кривая 1 относится к протя-

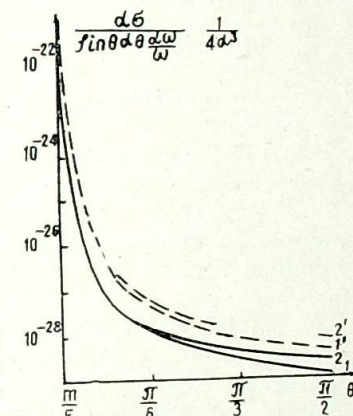


Рис. 1. Зависимость дифференциального сечения от угла вылета фотона.

женным, 2—к точечным протонам). Характер влияния протяженности протона на энергетическое распределение такое же, как в угловом распределении, т. е. эффективное сечение для протяженного протона приблизительно в три раза меньше, чем для точечного. Из кривых следует также, что с увеличением доли энергии, уносимой γ -квантом, эффективное сечение уменьшается.

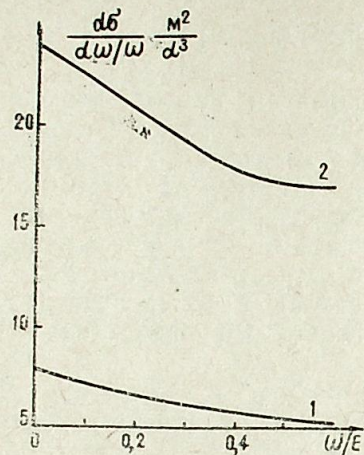


Рис. 2. Зависимость сечения процесса $e^+ + e^- \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ от энергии γ -кванта.

Из (4) и (5) видно, что угловое и энергетическое распределения радиационных фотонов чувствительны только к спиновым корреляциям ls и ls' между лептоном и γ -квантом и существенно сказывается на величине сечения. Фотоны с круговой поляризацией могут быть испущены только при аннигиляции продольно поляризованных лептонов.

4. Перейдем к исследованию процесса (1) с учетом нелокальности взаимодействия и поляризации лептонов и γ -кванта. Громоздкость вычислений не позволяет произвести расчет для произвольного спина лептонов, поэтому для ориентировочной оценки влияния нелокальности взаимодействия ограничимся только продольными спиновыми корреляциями лептона и γ -кванта (ls). В этом случае дифференциальное сечение равно

$$\frac{d^2 \sigma(s, l)}{d \omega \sin \theta d \theta} = \frac{\alpha^3 v_0 \omega}{6 E^2 v q^4} [2 M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2] (\Phi_1 + \Phi_2 + ls \Phi_3), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= f_1^2 \frac{x_2}{x_1} + f_2^2 \frac{x_1}{x_2} - \frac{4 E^2}{q^2} (f_1 - f_2)^2, \\ \Phi_2 &= \left(\frac{x_1 x_2}{\omega^2} - m^2 \right) \left[\left(m^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) \left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \right)^2 + \frac{1}{q^2} (f_1 - f_2)^2 \right], \\ \Phi_3 &= E \left\{ \left(\frac{f_2^2}{x_2^2} - \frac{f_1^2}{x_1^2} \right) [x_2 (\cos \theta - v) - 2 v E^2 \sin^2 \theta] \omega - \right. \\ &\quad \left. - m^2 \omega v \sin^2 \theta \left(\frac{f_1}{x_1} - \frac{f_2}{x_2} \right)^2 - \frac{2 x_1 E}{q^2} \cos \theta (f_1 - f_2) \left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

функции f_1, f_2 заданы формулами (2).

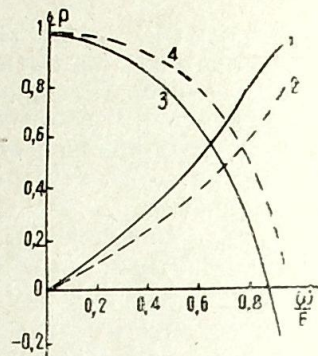


Рис. 3. Энергетическая зависимость степени круговой (кривые 1, 2) и линейной (кривые 3, 4) поляризации фотона.

Степень круговой поляризации фотона $P(l) = \frac{\Phi_3}{\Phi_1 + \Phi_2}$ зависит от вида модификации функции распространения лептонов. Энергетическая зависимость степени круговой поляризации фотона в нелокальной (кривая 1) и локальной (кривая 2) теории взаимодействия показана на рис. 3. Кривые построены для значения энергии электрона $E=6M$, угла вылета фотона $\theta=60^\circ$, параметра обрезания $\Lambda=3M$ и $s=+1$. Для фиксированного угла вылета фотона степень круговой поляризации увеличивается с ростом энергии γ -кванта, достигая максимального значения в конце спектра: $\omega_{\max} = (E^2 - M^2)/E$.

Аналогичное поведение круговой поляризации наблюдается и во всех подобных процессах, независимо от фермионной или бозонной природы образовавшейся пары [5, 14]. Поведение кривых во многом сходно с характером поляризации тормозного излучения, испускаемого при рассеянии продольно поляризованных электронов на протонах [11] и ядрах [16]. Учет нелокальности взаимодействия не изменяет характера зависимости степени круговой поляризации, а только увеличивает ее. Влияние нелокальности растет с увеличением энергии γ -кванта.

5. В заключение рассмотрим линейную поляризацию γ -кванта и исследуем влияние нелокальности взаимодействия на степень линейной поляризации фотона. Эффективные сечения, соответствующие двум линейным поляризациям фотона и усредненные по спиновым состояниям лептонов, даются выражениями

$$\frac{d^2 \sigma(a_x)}{d \omega \sin \theta d \theta} = \frac{\alpha^3 v_0 \omega}{6 E^2 v q^4} [2 M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2] (\Phi_1 + 2 \Phi_2), \quad (7)$$

$$\frac{d^2 \sigma(a_y)}{d \omega \sin \theta d \theta} = \frac{\alpha^3 v_0 \omega}{6 E^2 v q^4} [2 M^2 |F_e|^2 - q^2 |F_m|^2] \cdot \Phi_1. \quad (8)$$

Степень линейной поляризации определяется формулой

$$P(a) = \frac{\Phi_2}{\Phi_1 + \Phi_2}. \quad (9)$$

На рис. 3 кривые 3 и 4 характеризуют степень линейной поляризации γ -кванта в нелокальной и локальной ($f_1=f_2=1$) теории взаимодействия, соответственно. Степень линейной поляризации уменьшается с увеличением энергии фотона. Учет нелокальности взаимодействия в противовес круговой поляризации уменьшает степень линейной поляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fabiani F. et. all. Nuovo Cimento, 25, 655, 1962.
2. Blumenthal R. et. all. Phys. Rev., 144, 1199, 1966.
3. Дрелл С. Д., Захариазен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. ИЛ, М., 1962.
4. Drell S. D. Ann. of phys. 4, 75, 1958.
5. Мухтаров А. И., Наджафов И. М., Абдуллаев С. К. „Изв. вузов, физика“, 10, 127, 1967.
6. Мухтаров А. И., Джавадов А. В., Мурадов Р. Х. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем.“, 1, 57, 1966.
7. Соколов А. А., Керимов Б. К., Садыхов Ф. С., Яхьяев Р. Ш. „ДАН СССР“, 161, 1317, 1965.
8. Садыхов Ф. С., Джафаров И., Яхьяев Р. Ш. ЖЭТФ, 47, 1463, 1964.
9. Байер В. Н., Хозе В. А. „Ядерная физика“, 2, 287, 1965.
10. Байер В. Н., Хозе В. А. ЖЭТФ, 48, 946, 1708, 1965.
11. Sarkar S. Nuovo Cimento, 34, 141, 1964.

12. Морозов Д. ЖЭТФ, 52, 1212, 1967.
13. Соколов А. А., Мухтаров А. И., „Вестн. МГУ“, 8, 63, 1948.
14. Мухтаров А. И., Наджафов И. М., Абдуллаев С. К., „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем.“, 5, 88, 1966.
15. Fubini S. Proceedings of the aix en Provence+Oter. Conf. on Elementary Particles, September, 1961.
16. Керимов Б. К., Наджафов И. М. „Изв. АН СССР“, 22, 886, 1958.

Поступило 9. II 1968

А. И. Мухтаров, И. М. Нəcəфов, С. Г. Абдуллајев

Гаршылыгы тэ'сирин гејри-мәһәллилијинин нәзәрә алынмасы

илә $l^- + l^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ просесинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Гаршылыгы тэ'сирин гејри-мәһәллилијини вә зәррәчикләрин пол-
јаризасијасыны нәзәрә алмагла $l^- + l^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ просесиндә шүә-
ланан фотонларын енержијә вә бучаглара кәрә пәјланмасы тәдгиг
едилмишдир.

Мүәјјән олунмушдур ки, гаршылыгы тэ'сирин гејри-мәһәллили-
јинин нәзәрә алынмасы фотонун даирәви полјаризәолунма дәрәчәсини
артырыр, хәтти полјаризә олунма дәрәчәсини исә азалдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1969, № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1969, № 1

УДК 537. 226.8: 536,5

К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ, Г. А. ГАДЖИЕВ, Л. М. ИМАНОВ

АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕЛАКСАЦИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В СИСТЕМЕ ХЛОРБЕНЗОЛ—ЙОДБЕНЗОЛ

Моногалогенопроизводные бензола относятся к соединениям с
небольшими жесткими молекулами, взаимодействия между которыми
описываются преимущественно Ван-дер-Ваальсовыми силами. Знание
равновесных и динамических диэлектрических свойств таких относи-
тельно простых объектов необходимо при расшифровке диэлектричес-
кого поведения систем с разными видами релаксаторов и усложнен-
ными межмолекулярными взаимодействиями. Анализ [1, 2] темпера-
турных зависимостей диэлектрических коэффициентов трех членов
ряда C_6H_5X ($X = Cl, Br, I$), снятых в диапазоне микроволн для чист-
ых жидкостей и их концентрированных растворов в C_6H_6 и C_6H_{14} ,
показал, что кинетическими единицами, ответственными за наблюдаемое
поглощение, являются индивидуальные молекулы, причем диполь-ди-
польные силы не оказывают существенного влияния на форму кривой
поглощения. Кроме того, получены косвенные указания на сущест-
вование еще одной области поглощения, по-видимому, резонансного
типа, при более высоких частотах.

Настоящая работа была предпринята с целью дальнейшего накоп-
ления экспериментальных данных о природе и механизме микровол-
нового поглощения в этих соединениях. Выбор полярной смеси объяс-
няется стремлением проследить кинетическое поведение каждого ком-
понента в отдельности, что важно для изучения влияния ближнего
окружения на процесс молекулярной релаксации.

Экспериментальная часть. Диэлектрические проницаемости ϵ' и
показатели поглощения ϵ'' системы хлорбензол—йодбензол измерялись
на волнах длиной $\lambda = 6,32; 4,01; 3,21; 2,14; 1,18; 0,75$ см в интервале
 $30^\circ \div 40^\circ C$, при объемном соотношении компонентов 1:1. В тех же
температурных пределах измерялись равновесные диэлектрические
проницаемости ϵ_0 системы при частоте 7 Мгц.

Измерения ϵ' и ϵ'' велись по методу переменных толщин [3] на
шести установках, различавшихся только размерами сечения волно-
водов. Особое внимание уделялось устранению трансформации импе-
данса в измерительном тракте и обеспечению надежной теплоизоляции
измерительной ячейки от остальной части тракта и окружающей
среды. Внесение поправок [4] носило ограниченный характер, ибо
во многих случаях на кривых зависимостей коэффициента стоячей вол-

ны от толщины образца можно было не брать для расчета первые 1—2 экстремума, которые являются основным источником систематических ошибок. Погрешности измерения составляют: 1% для ϵ' и 2—3% для ϵ'' при $\lambda = 6,32; 4,01; 3,21; 2,14$ см; 2% для ϵ' а 3—5% для ϵ'' при $\lambda = 1,18$ и $0,75$ см.

Равновесные измерения велись по резонансному методу. Измерительная ячейка состояла из посеребренного цилиндрического конденсатора, снабженного теплоизолирующей оболочкой. Температура ячейки менялась путем непрерывного нагрева со скоростью $\sim 0,2$ град/мин. Конденсатор калибровался по гексану, бензолу, хлорбензолу и ацетону. Погрешность ϵ_0 не превышала 1%. Температура образцов измерялась медь-константановой термопарой с ошибкой $\sim 0,3^\circ$. Компоненты смеси и соединения, взятые для контрольных измерений, тщательно сушились и перегонялись на ректификационной колонке. Чистота соединений проверялась по значениям температур кипения и оптических показателей преломления. Все измерения производились только на свежеочищенных образцах.

Таблица 1

Диэлектрические коэффициенты системы хлорбензол—йодбензол

$t, ^\circ\text{C}$	ϵ_0	$\lambda = 6,32$		4,01		3,21		2,14		1,18		0,75	
		ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
30	5,19	4,69	0,98	4,25	1,21	4,00	1,26	3,55	1,23	3,00	0,96	2,79	0,73
20	5,29	4,65	1,09	4,20	1,26	3,94	1,28	3,48	1,21	2,98	0,91	2,79	0,69
10	5,38	4,57	1,19	4,10	1,31	3,82	1,31	3,39	1,19	2,96	0,86	2,78	0,65
0	5,48	4,49	1,29	4,00	1,36	3,72	1,31	3,32	1,14	2,94	0,81	2,78	0,61
-10	5,59	4,41	1,36	3,90	1,37	3,61	1,29	3,24	1,10	2,92	0,76	2,78	0,59
-20	5,70	4,34	1,41	3,77	1,35	3,50	1,25	3,17	1,03	2,90	0,70	2,78	0,55
-30	5,82	4,23	1,45	3,64	1,32	3,39	1,18	3,10	0,95	2,88	0,64	2,78	0,52
-40	5,95	4,12	1,49	3,50	1,29	3,28	1,12	3,04	0,89	2,86	0,58	2,78	0,49

Результаты. В табл. 1 сведены данные измерений ϵ' , ϵ'' и ϵ_0 . Смещение максимума на кривых $\epsilon''(\lambda)$ в сторону более коротких волн при повышении температуры (рис. 1) свидетельствует о релаксационном происхождении изученного поглощения. Согласно дуговым диаграммам, частотный ход ϵ' и ϵ'' смеси описывается уравнением Коула—Коула [5]:

$$\epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_\infty + (\epsilon_0 - \epsilon_\infty) [1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}] \quad (1)$$

или

$$\frac{\epsilon' - \epsilon_\infty}{\epsilon_0 - \epsilon_\infty} = \frac{1 + (\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon''}{\epsilon_0 - \epsilon_\infty} = \frac{(\omega\tau)^{1-\alpha} \cos \frac{\alpha\pi}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-\alpha} \sin \frac{\alpha\pi}{2} + (\omega\tau)^{2(1-\alpha)}} \quad (3)$$

где α —параметр симметричного распределения значений времени диэлектрической релаксации около наиболее вероятного значения τ , ϵ_0 и ϵ_∞ —низко- и высокочастотные пределы дисперсии.

Расхождения между измеренными и экстраполированными из дуговых диаграмм значениями ϵ_0 меньше 1%, причем для всех температур с такой же точностью выполняется соотношение

$$\epsilon_0 = \epsilon_{01} x_1 + \epsilon_{02} x_2, \quad (4)$$

где индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к йод- и хлорбензолу, x —мольная доля.

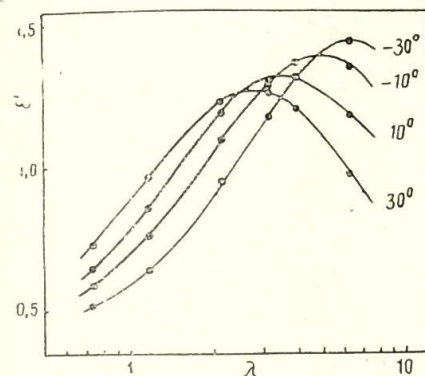


Рис. 1. Зависимость показателя поглощения ϵ'' от длины волны (λ см) при разных температурах.

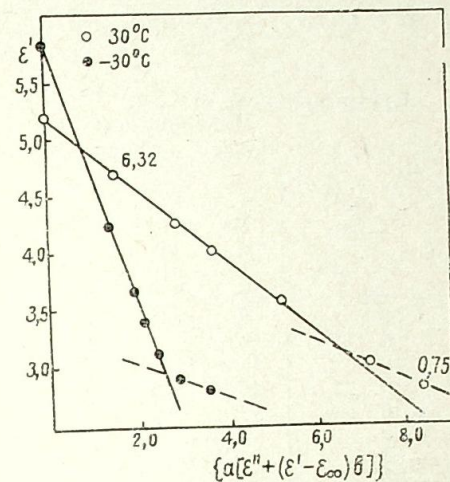


Рис. 2. Линейная диаграмма по уравнению (6). Числа у точек—длина волны (см)

Аддитивность нарушается для ВЧ-предела и ϵ_∞ смеси совпадает с ϵ_∞ чистого хлорбензола. Так, при 20°C $\epsilon_\infty(\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}) = 2,56$, $\epsilon_\infty(\text{C}_6\text{H}_5\text{J}) = 2,76$, $\epsilon_\infty(\text{смесь}) = 2,57 \pm 0,02$. Найденные из дуговых диаграмм ϵ_∞ и α приведены в табл. 2.

Таблица 2

Высокочастотные диэлектрические проницаемости ϵ_∞ и параметры распределения α времени релаксации системы хлорбензол—йодбензол

$t, ^\circ\text{C}$	30	20	10	0	-10	-20	-30	-40
ϵ_∞	2,53	2,57	2,60	2,62	2,64	2,66	2,69	2,71
α	0,03 ₀	0,03 ₃	0,03 ₈	0,03 ₉	0,04 ₂	0,04 ₈	0,04 ₉	0,05 ₀

В табл. 3 представлены значения времени релаксации τ , определенные по точкам на дуговых диаграммах согласно выражению (5):

$$(\omega\tau)^{1-\alpha} = [(\epsilon_0 - \epsilon')^2 + \epsilon''^2]^{1/2} [(\epsilon' - \epsilon_\infty)^2 + \epsilon''^2]^{-1/2}. \quad (5)$$

Указанные в последней графе табл. 3 величины $\tau_{\text{ср}}$ получены усреднением τ при $\lambda = 6,32; 4,01; 3,21; 2,14$ см. Все эти точки попадают в область максимума на кривых $\epsilon''(\lambda)$ и отвечающие им τ отклоняются от $\tau_{\text{ср}}$ всего на 3—6%. Для двух „коротковолновых“ точек отмечаются гораздо большие отклонения, систематически растущие с понижением температуры, что наводит на мысль о наличии дополнительного поглощения. Для проверки удобно воспользоваться методом линейных диаграмм. Преобразования уравнений (1)—(3) позволяют получить ряд линейных соотношений:

$$\varepsilon' = -\{a[\varepsilon'' + (\varepsilon' - \varepsilon_\infty) b]\} \omega^{1-\alpha} \tau^{1-\alpha} + \varepsilon_0, \quad (6)$$

$$\varepsilon' - \varepsilon'' b = \varepsilon'' (a \omega^{1-\alpha})^{-1} \tau^{-(1-\alpha)} + \varepsilon_\infty, \quad (7)$$

$$[(\varepsilon'')^{-1} - 2b(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)^{-1}] \omega^{1-\alpha} = [a(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)]^{-1} \omega^{2(1-\alpha)} \tau^{1-\alpha} + [a(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)]^{-1} \tau^{-(1-\alpha)}, \quad (8)$$

$$[(\varepsilon'')^{-1} - 2b(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)^{-1}] \omega^{-(1-\alpha)} = [a(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)]^{-1} \omega^{-2(1-\alpha)} \tau^{-(1-\alpha)} + [a(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)]^{-1} \tau^{1-\alpha}, \quad (9)$$

где $a = \cos(\alpha\pi/2)$, $b = \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)$.

Таблица 3

Время релаксации τ (10^{-12} сек) системы хлорбензол—йодбензол по уравнению (1) при разных длинах волн

λ (см)	6,32	4,01	3,21	2,14	1,18	0,75	$\tau_{\text{ср}}$
t °C							
30	15,1	15,3	15,2	14,7	14,4	13,9	15,1
20	17,6	17,0	16,9	16,6	16,0	15,1	17,0
10	20,5	19,5	19,6	18,8	17,9	16,8	19,6
0	23,6	22,1	22,2	21,4	20,2	18,6	22,3
-10	26,7	25,0	25,2	24,4	22,6	20,3	25,3
-20	29,8	29,3	29,5	28,4	26,1	23,0	29,3
-30	34,2	34,2	34,8	33,6	30,6	25,7	34,2
-40	39,2	40,3	41,1	39,6	36,0	28,7	40,1

При $\alpha = 0$ уравнения (6)–(7) переходят в полученные ранее Коулом [6]:

$$\varepsilon' = -\varepsilon'' \omega \tau + \varepsilon_0, \quad (10)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'' (\omega \tau)^{-1} + \varepsilon_\infty. \quad (11)$$

Если экспериментальные данные следуют уравнению (1), то графики, построенные по уравнениям (6)–(9), должны дать прямые линии с наклонами и пересечениями, равными дисперсионным параметрам

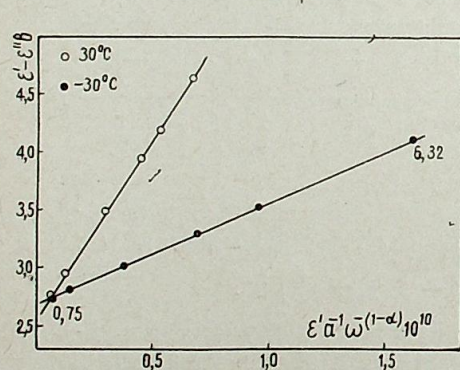


Рис. 3. Линейная диаграмма по уравнению (7).

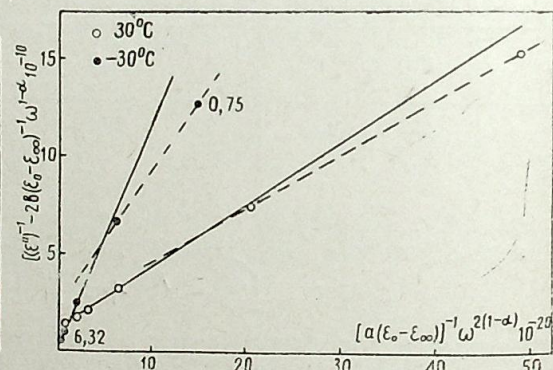


Рис. 4. Линейная диаграмма по уравнению (8).

Уравнения (7) и (9) позволяют более подробно проследить НЧ-край поглощения, а уравнение (8)—ВЧ-край.

На рис. 2–5 представлены примеры линейных диаграмм. Во всех случаях „длинноволновые“ точки ($\lambda = 6,32; 4,01; 3,21; 2,14$ см) укла-

дываются на одном отрезке прямой, наклон которого дает время релаксации, равное значениям $\tau_{\text{ср}}$ в табл. 3. Пересечения этого отрезка с осью ординат на рис. 2, 3 совпадают с ε_0 и ε_∞ , экстраполированными из дуговых диаграмм, а частное от пересечений на рис. 4, 5 равно $\tau^{-2(1-\alpha)}$.

На другой отрезок попадают только две точки. Плохое согласие между τ для них в табл. 3 и более низкие τ при $\lambda = 0,75$ см означают, что истинная прямая должна иметь меньший наклон, однако количественные оценки целесообразно отложить до получения новых ВЧ-точек. Результаты этих измерений будут сообщены отдельно.

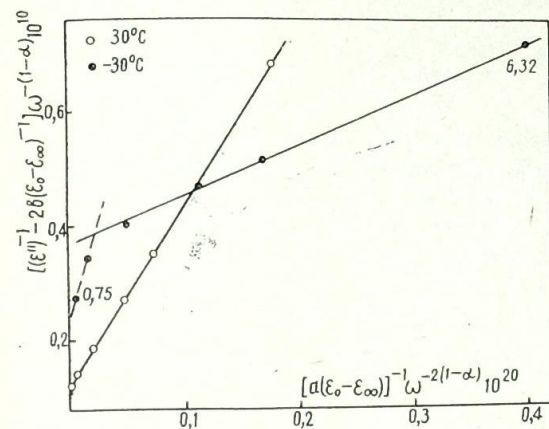


Рис. 5. Линейная диаграмма по уравнению (9).

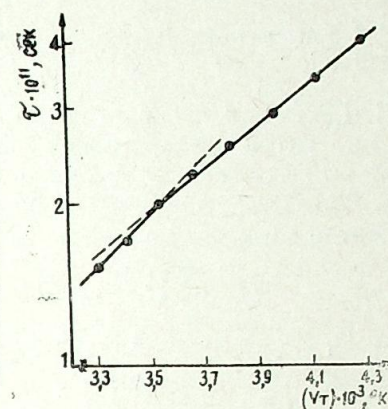


Рис. 6. Скоростной график.

Из вышеизложенного естественно заключить, что описываемое „длинноволновыми“ точками поглощение создано единственным механизмом. Между тем, на скоростном графике, построенном по значениям $\tau_{\text{ср}}$, обнаруживается четкое разделение на две области (рис. 6). Примечательно, что энергии активации для высоко- и низкотемпературной областей не отличаются в пределах погрешности оценки ($\sim 10\%$) от таковых для чистых йод- и хлорбензола, соответственно.

В случае аддитивности вкладов обеих областей в наблюдаемую дисперсию имеем:

$$\varepsilon' - \varepsilon_{\infty 2} = \Delta_1 (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{-1} + \Delta_2 (1 + \omega^2 \tau_2^2)^{-1}, \quad (12)$$

$$\varepsilon'' = \Delta_1 \omega \tau_1 (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{-1} + \Delta_2 \omega \tau_2 (1 + \omega^2 \tau_2^2)^{-1}. \quad (13)$$

Здесь принято, что ВЧ-предел $\varepsilon_{\infty 1}$ высокотемпературной области равен НЧ-пределу ε_{02} низкотемпературной области, ε_{01} и $\varepsilon_{\infty 2}$ соответствуют ε_0 и ε_∞ в уравнении (1), $\tau_1 > \tau_2$.

Уравнения (12) и (13) эквивалентны следующим [7]:

$$\varepsilon' - \varepsilon_{\infty 2} = (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{\infty 2}) [C_1 (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{-1} + C_2 (1 + \omega^2 \tau_2^2)^{-1}], \quad (14)$$

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{\infty 2}) [C_1 \omega \tau_1 (1 + \omega^2 \tau_1^2)^{-1} + C_2 \omega \tau_2 (1 + \omega^2 \tau_2^2)^{-1}], \quad (15)$$

где $C_{1,2}$ — относительный вес релаксационного процесса,

$$C_1 + C_2 = 1. \quad (16)$$

Учитывая (12)–(13) и (14)–(15), имеем:

$$C_1 = \Delta_1 (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{\infty 2})^{-1}, \quad C_2 = \Delta_2 (\varepsilon_{01} - \varepsilon_{\infty 2})^{-1}. \quad (17)$$

Результаты обработки данных в терминах уравнений (12)–(13) и (14)–(15) сведены в табл. 4. В скобках указаны τ йод- и хлорбензола

Таблица 4

Время релаксации ($\tau \cdot 10^{12}$ сек), амплитуды дисперсии (Δ_1, Δ_2) и весовые множители по уравнениям (12) — (13) и (14) — (15)

$t^\circ \text{C}$	30	20	10	0	-10	-20	-30	-40
τ_1	24,4	27,8 (28,1)	32,0 (32,3)	37,0 (38,3)	43,6 (44,5)	52,5 (51,5)	63,0 (60,5)	77,0
τ_2	11,1	12,3 (12,5)	14,2 (14,3)	16,2 (16,7)	18,2 (18,6)	21,0 (22,0)	25,2 (26,1)	30,0 (30,2)
Δ_1^*	1,04	1,06	1,09	1,12	1,15	2,18	1,22	1,26
Δ_2^*	1,62	1,67	1,70	1,75	1,81	1,85	1,91	1,97
C_1	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39

* Эти значения несколько уменьшены по сравнению с предварительно сообщенными [8].

[1]. Взятые в качестве исходных, дисперсионные параметры чистых компонентов подвергались незначительному варьированию. Окончательный отбор параметров определялся минимумами суммы среднеквадратичных отклонений вычисленных по этим уравнениям коэффициентов ($\epsilon'_{\text{выч}}, \epsilon''_{\text{выч}}$) от измеренных (ϵ', ϵ''):

$$S = \sum_{\lambda} \{ [\epsilon'_{\text{выч}} - \epsilon'] (\epsilon' \xi'')^{-1} \}^2 + [(\epsilon''_{\text{выч}} - \epsilon'') (\epsilon'' \xi')^{-1} \}^2, \quad (18)$$

где ξ', ξ'' — погрешности измерения ϵ' и ϵ'' при данной λ .

Таблица 5

Сравнение измеренных и вычисленных по (2) — (3) и (14) — (15)

ϵ' и ϵ'' при -10°C ($\tau_{\text{CP}} = 25,3 \cdot 10^{-12}$ сек, $\tau_1 = 43,6 \cdot 10^{-12}$ сек, $\tau_2 = 18,2 \cdot 10^{-12}$ сек)

λ (см)	Измеренные		По (2) — (3)		По (14) — (15)					
					$C_1 = 0,39$		$C_1 = 0,48$		$C_1 = 0,39;$ $\tau_2 = 16,4 \cdot 10^{-12}$ сек	
	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
6,32	4,41	1,36	4,48	1,33	4,46	1,31	4,35	1,33	4,53	1,27
4,01	3,90	1,37	3,89	1,36	3,90	1,34	3,80	1,31	4,00	1,33
3,21	3,61	1,29	3,61	1,30	3,63	1,29	3,54	1,24	3,73	1,29
2,14	3,24	1,10	3,21	1,07	3,22	1,10	3,26	1,03	3,30	1,13
S	—		4,87		3,54		24,83		34,72	

Для иллюстрации степени согласия между измеренными и вычисленными диэлектрическими коэффициентами в табл. 5 представлены результаты расчетов в предположении наличия одной области дисперсии с распределением времени релаксации и двух областей, каждая из которых имеет единственное τ , при разных весовых множителях. Примерно одинаковое согласие отмечается при использовании уравнений (2) — (3) или (14) — (15) с $C_1 = 0,39$, определенным по (17) с помощью оцененных ($\epsilon_{01} - \epsilon_{\infty 1}$) и найденных из дуговых диаграмм ($\epsilon_{01} - \epsilon_{\infty 2}$) амплитуд дисперсии*. При изменении C на $\sim 0,1$ и τ на $10 - 15\%$

* Это значение C_1 совпадает с вычисленным по соотношению $C_1/C_2 = n_1 \mu_1^2 / n_2 \mu_2^2$ (n — число молекул в единице объема, μ — дипольный момент) при помощи (16) если воспользоваться величинами μ , измеренными в разбавленных растворах на низких и микроволновых частотах ($1,25$ и $1,5 D$ для йод- и хлорбензола на низких и [9, 10]). Моменты в газовой фазе ($\sim 1,7 D$ для обеих молекул [11]) дают $C_1 = 0,48$ с ухудшением согласия (см. табл. 5).

расхождения с экспериментом выходят за пределы погрешностей расчета, которые для „длинноволновых“ точек не превышают в худшем случае $\sim 5\%$.

Обсуждение. Наиболее примечательным результатом выполненного анализа является кажущаяся независимость времени релаксации компонентов смеси от ближнего окружения. По существующим теориям τ молекулы определяется ее структурой и ближним окружением, которое трактуется в терминах вязкостного торможения (Дебай) или степени упорядоченности окружающих молекул, оцениваемой энтропийным членом (Эйринг—Каузмэн). Значения времени для хлор- и йодбензола отличаются друг от друга в 2,2 раза, вязкости η — в 1,9 раза, тогда как разница между молярными объемами V составляет 10% . Поэтому как в рамках дебаевской модели, так и исходя из свободного объема, необходимого для поворота молекулы $\tau_{\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}}$ в смеси должно было бы расти, а $\tau_{\text{C}_6\text{H}_5\text{I}}$ — уменьшаться, что противоречит опыту.

По Шалламаху [13] процессы молекулярной релаксации сопровождаются структурными перестройками настолько больших областей раствора, что индивидуальность компонентов становится несущественной. Исключением являются смеси, составленные из ассоциированного и неассоциированного соединений, где короткодействующие силы достаточно велики, чтобы сохранить устойчивость областей, состоящих из молекул одного сорта. Отсюда был сделан вывод [13, 14], что в системах с одним τ (смеси из двух ассоциированных или двух неассоциированных жидкостей) имеет место полная растворимость на молекулярном уровне, тогда как при наличии двух τ степень смешения определяется величиной отклонения времени и от значений для чистых компонентов. Действительно, хотя τ изо-бутилбромида превышает τ изо-бутилхлорида на множитель, меняющийся от 10 при более высокой температуре до 200 при более низкой ($-140^\circ \div -160^\circ \text{C}$), Денни [15] нашел только один максимум на кривой $\epsilon''(T)$ для эквимольной смеси этих соединений.***

В рамках классификации Шалламаха изученная нами смесь относится к нормальному типу. Согласно диаграмме состояния [16] компоненты смеси обладают неограниченной взаимной растворимостью. Наконец, ϵ_0 и η [16] смеси подчиняются правилу аддитивности. С другой стороны, анализ равновесной поляризации смеси [17] приводит к выводу о наличии отклонений корреляционного параметра от единицы, особенно заметных при понижении температуры. В цитированной работе [12] Смайк указал, что наличие двух τ при комнатной температуре необязательно противоречит низкотемпературным результатам Шалламаха—Денни, ибо с ростом температуры время жизни и размеры областей, охваченных релаксацией, могут стать пренебрежимо малыми. Однако разделение на два τ отмечено нами и при сравнительно низких температурах. Наконец, вряд ли можно объяснить на базе молекулярного смешения такие факты, как кривизна на скоростном

* Для системы $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl} - \text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$, изученной в меньшем интервале частот при 25°C [12] показана возможность описания результатов с помощью τ чистых компонентов при почти одинаковых V (различие $\sim 3\%$), $\tau_2/\tau_1 \approx 1,5$ и $\eta_2/\eta_1 \approx 1,4$.

** Заметим, что в ряду $\text{C}_6\text{H}_5 - \text{C}_6\text{H}_5\text{Cl} - \text{C}_6\text{H}_5\text{I}$ значения V находятся в отношении $0,9 : 1,0 : 1,1$, причем $\sim 40\%$ -ное уменьшение $\tau_{\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}}$ в эквимольном бензольном растворе [1] хорошо коррелирует с таким же уменьшением при переходе от $\tau_{\text{C}_6\text{H}_5\text{I}}$ к τ_{CP} смеси $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl} - \text{C}_6\text{H}_5\text{I}$. В этой связи не следует исключать возможности, что $\tau_{\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}}$ в бензольном растворе является, подобно τ_{CP} смеси, эффективной величиной, учитывающей и влияние молекул бензола.

*** Характерно, что значения $\log \beta \tau$ смеси (β — параметр асимметрии) оказались промежуточными между таковыми для чистых компонентов.

графике и неаддитивность ϵ_{∞} . Несостоятельным выглядит и предположение о высокой локализованности акта ориентации как возможной причины неизменности τ в смеси, поскольку с переходом от хлор- через бром- к йодбензолу разность между энергиями активации для вязкого течения и поворотного движения стремится к нулю [1].

Для согласованной интерпретации всей совокупности экспериментальных фактов следует принять, по крайней мере в качестве рабочей гипотезы, наличие микрообразований, сохраняющих строение чистых компонентов. Тогда переориентация молекул, входящих в микрообразования, станет возможной только после распада последних. Очевидно, продолжительность существования микрообразований не должна заметно превышать времени поворота молекул, вследствие чего время релаксации будет определяться суммой этих величин. О вероятности ориентационной упорядоченности в неассоциированных жидкостях, включая неполярные, свидетельствуют, в частности, результаты исследования поглощения в субмиллиметровом диапазоне и дальней ИК-области [18, 19], а также рассеяния света [20]. Тем не менее ограниченность доступных данных делает преждевременной дальнейшую детализацию такого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „ДАН Азерб. ССР“, 1962, 18, 3; „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1962, № 5, 6; „Ж. физич. химии“, 1963, 37, 366; 1964, 38, 2437.
2. Зулфугарзаде К. Э. Канд. дисс. Баку, 1963.
3. Poley J. Ph. J. Appl. sci. Res., 1955, B. 4, 337.
4. Van Eick A. J., Poley J. Ph. J. Appl. sci. Res., 1957, B. 6, 359.
5. Cole K. S., Cole R. H. J. chem. phys., 1941, 9, 341.
6. Cole R. H. J. chem. phys., 1955, 23, 493.
7. Budo A. Physik. Zs., 1938, 39, 706.
8. Imanov L. M., Zulfugarzade K. E., Hadshijew H. A. Zs. Ps. Chem. (Im Druck).
9. Heil H. Phys. rev., 1932, 39, 666.
10. Murty C. R., Rao D. V. J. Sci Industr. Res., 1956, 15B, 350.
11. Осипов О. А., Минкин В. И. Справочник по дипольным моментам. „Высшая школа“, М., 1965.
12. Forest A., Smyth C. P. J. phys. chem, 1965, 69, 1302.
13. Schallamach A. Trans. Farad. soc., 1946, 42A, 380.
14. Kamiyoshi K., Fujumura T. J. Phys., 1962, 23, 337.
15. Denney D. J. J. chem. phys., 1959, 30, 1019.
16. Timmermans J. The phys-chem. constants of binary systems in conc. Solut. vol. 2, N Y, 1960.
17. Зулфугарзаде К. Э., Гаджиев Г. А., Иманов Л. М., „ДАН Азерб. ССР“.
18. Chantry G. W., Gebbie H. A. Nature, 1965, 208, 378; 1967, 214, 163.
19. Leroy V., Constant E. C. r. Acad., sci., 1967, B264, 533.
20. Szöke A., Courtens E., Ben-Reuven A. Chem. Phys. letters., 1967, 1, 87.

Поступило 8. VI 1968

К. Е. Зулфугарзаде, Г. А. Гаджиев, Л. М. Иманов

Хлорбензол-йодбензол системиндә диелектрик полјаризасијасы релаксасијасынын температур асылылығынын тәһлили

ХҮЛАСӘ

Хлорбензол-йодбензол системинин $\lambda = 6,32; 4,01; 3,21; 2,14; 1,18$ вә $0,75$ см узунлуғлу далғаларда комплекс диелектрик әмсалынын вә 7 мГц тезликдә статик диелектрик әмсалынын $+30^{\circ}\text{C} \div -40^{\circ}\text{C}$ интервалында температур асылылығы өјрәнилмишдир.

Көстәрилән температур вә тезлик интервалында дисперсија об-ластынын ики һиссәдән ибарәт олмасы мӯәјјән едилмишдир.

Хлорбензол-йодбензол системиндә диелектрик полјаризасијасы релаксасијасынын температур асылылығынын тәһлили көстәрир ки, компонентларин релаксасија вахтлары јахын әтрафдан асылы дејилдир. һәм-чинин мә’лум олмушдур ки, $\lg \tau \sim \frac{1}{T}$ асылылығыны көстәрән сүр’әт

графики ики һиссәдән ибарәтдир вә ϵ_{∞} гејри-аддитивдир.

Бу нәтичәләри изаһ етмәк үчүн күман едилир ки, верилән системдә тәмиз компонентлардә олдугу кими микрогурулушлар јараныр.

УДК 523. 748: 621. 398. 694

М. Б. КЕРИМБЕКОВ, Ч. А. ЭФЕНДИЕВ

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕЛЕВИЗИОННЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НАБЛЮДЕНИЯ СОЛНЕЧНОЙ ГРАНУЛЯЦИИ

Грануляция солнечной поверхности является малоконтрастным образованием и наблюдение ее требует максимальных предосторожностей. Если метод кино съемки [1] позволяет из серии кадров выявить те, в которых атмосферные искажения минимальны (рис. 1), то применение наряду с ним электрофотометрии резко повышает точность отсчетов.



Рис. 1

Электрофотометрия солнечной поверхности (грануляции) позволила В. А. Крату [2] и Г. Я. Васильевой [3] выявить волнообразные движения на поверхности Солнца. Качество электрофотометрических наблюдений обуславливается стабильностью изображений, зависящей от условий наблюдения. Благоприятные для наблюдений условия Пулковской обсерватории позволя-

ют в ряде случаев успешно проводить исследования грануляции.

Как показали наблюдения грануляции в Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР, в земной атмосфере происходят колебательные процессы сравнительно высокой частоты, приводящие к смазыванию изображений гранул за промежутки времени меньше 0,01 сек [4]. В то же время сканирование всего солнечного изображения считывающей щелью (при обычной электрофотометрии) происходит за время приблизительно равное двум минутам.

Таким образом за время фотометрирования изображение меняется, а это может быть истолковано как изменения в атмосфере Солнца. Более того, при таком методе необходимо учитывать различного рода механические колебания, возникающие при сканировании. Достоверность полученных фотограмм не может быть проверена повторным фотометрированием, так как запись тех же участков поля грануляции невозможна из-за сдвигов солнечного изображения, обусловленных механическими вибрациями под действием ветра и другими причинами. В этих условиях применение специализированной телевизионной сис-

темы с малым временем сканирования позволяет повысить точность электрофотометрии и избавляет исследователя от необходимости многократного сравнения фотограмм для выявления истинной картины грануляции.

Использование специализированной телевизионной системы, выходным индикатором которой является электронный осциллоскоп, в сочетании с синхронизированной кино съемочной камерой, фиксирующей осциллограммы видеосигнала, позволяет производить весьма быстрые измерения поля грануляции, практически исключая влияние флуктуацией земной атмосферы и других помех.

Основным направлением при построении телевизионной электрофотометрической системы для астрофизических исследований подобного типа является применение телевизионных трубок с высокой контрастной чувствительностью и малой инерционностью. Исследование инерционных свойств передающих трубок с накоплением, проведенное в работах [5, 6], приводит к выводу о том, что в лучшем случае коэффициент быстрогодействия таких приборов с точки зрения отношения сигнал—шум, времени экспонирования фотомишени приближаются к минимально необходимому и составляет величину около 0,04 сек для видикона.

Таким образом для столь малоконтрастных изображений, какими являются картины полей грануляции солнечной поверхности, применение передающих трубок с накоплением, даже наименее инерционных (суперортиконов, супериконоскопов), невозможно.

Построение телевизионных систем, использующих принцип накопления, можно считать рациональным лишь при фотометрировании кадров непосредственной кино съемки полей грануляции. В этом случае визуальное наблюдение изображений таких полей на экране видеоприемного устройства может быть облегчено, поскольку возможно значительное контрастирование телевизионных изображений по сравнению с кинематографическими. При этом способе изучения полей солнечной грануляции возможно одновременное получение телевизионных изображений всего поля и микрофотограмм любых участков поля в виде осциллограмм выделенной строки телевизионного сигнала (рис. 2).

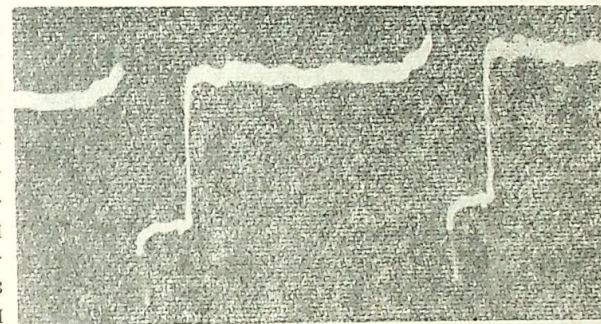


Рис. 2

Изложенным способом может производиться исследование ядер эмиссии („усов“ Северного) в касегреновском фокусе телескопа, при сравнительно низких уровнях яркости изображений.

Для непосредственных электрофотометрических исследований солнечной грануляции была выбрана телевизионная система мгновенного действия, использующая передающую трубку типа диссектор ЛИ-601. Диссектор характеризуется равномерным, по сравнению с другими передающими трубками, фоном и, кроме того, возможностью воспроизведения сигналов с средней составляющей яркости объекта, что безусловно, важно при подобных исследованиях, так как позволяет вычислить относительные перепады интенсивности световых потоков от поверхности Солнца. Кроме того, диссектор обладает высокой контрастной чувствительностью (коэффициент контрастности может быть порядка 1,5 ÷ 5%) по сравнению с передающими трубками с

накоплением [7, 8]. Характерной особенностью диссектора является наличие второго максимума чувствительности в области $\lambda = 6400 \text{ \AA}$, причем область достаточно высокой чувствительности простирается до инфракрасной области ($\lambda = 9000 \text{ \AA}$). Таким образом появляется возможность исследований поверхности Солнца в ИК-области. Использование диссектора для целей электрофотометрии открывает дополнительные возможности для исследований Солнца в инфракрасной области, представляющих научный интерес.

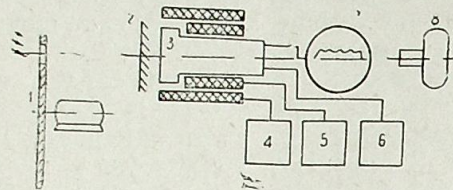


Рис. 3.

При исследованиях грануляции в интегральном спектре применялась установка с диссектором, помещенным в кассегреновском фокусе горизонтального солнечного телескопа. Изображение Солнца фокусировалось на фотокаате диссектора. Для устранения перегрузки фотокаатода большим световым потоком от телескопа перед диссектором устанавливался дисковый обтюратор с раскрытием в 270° , приводимый во вращение синхронным электродвигателем типа СД-09, питающимся от сети переменного тока с частотой 50 гц. При освещенности на целостате, равной приблизительно $5 \cdot 10^4 \text{ лк}$, световой поток ослаблялся 300 мм диафрагмой и нейтральным светофильтром НС-9 с кратностью 10^8 . При изменениях зенитного расстояния Солнца в пределах $17 \div 73^\circ$ освещенность области фотокаатода диссектора находится в пределах $2 \cdot 10^3 \text{ лк}$. При работе в импульсном режиме (обтюрация) установленные световые потоки не вызывают перегрузки фотокаатода и позволяют повысить отношение сигнал-шум системы в 200 раз, что соответствует пороговой контрастной чувствительности, равной 0,5%, т. е. точность отсчетов перепадов яркости выше, чем при обычной фотометрии, в 3—4 раза.

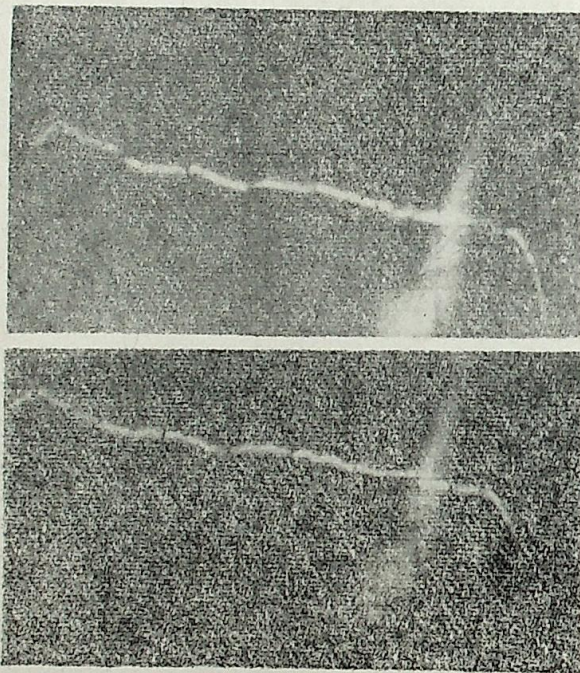


Рис. 4. а) грануляция не видна из-за атмосферных волнений; б) видна грануляция.

В данном случае исследование грануляции производилось по одному фотометрическому разрезу, в связи с чем диссектор использовался в режиме одностороннего разложения с частотой 50 гц от того же источника питания, что и двигатель обтюратора. При такой частоте сканирования высшие частоты спектра видеосигнала определяются предельной разрешающей способностью телескопа, равной 0,4", и находятся в области 10 кгц. Применение сравнительно низкочастотной развертки способствует повышению помехоустойчивости системы с точки зрения

повышения контрастной чувствительности, так как спектр частот видеосигнала достаточно узкий ($50 \div 10^4 \text{ гц}$).

Блок-схема установки представлена на рис. 3. Изображение поля грануляции Солнца через обтюратор (1) и светофильтр НС-9 (2) проецируется на фотокаатод диссектора (3), развертка которого осуществляется от блока развертки (5). Питание фокусирующей системы диссектора производится от блока (4). Видеосигнал с нагрузки диссектора поступает на электронный осциллоскоп типа С1-1 (7), с экрана которого кинокамерой (8) типа Конвас-автомат производится киносъемка осциллограмм видеосигнала, представляющих собой фотограммы. Питание всей системы производится от стабилизированного источника (6).

Пространственная разрешающая способность системы при максимальном горизонтальном усилении осциллоскопа позволяет фиксировать даже мелкоструктурные гранулы. Яркость полученных осциллограмм позволяет производить их киносъемку с частотами 12 и 25 кадров в секунду. Киносъемка осциллограмм производилась на мелкозернистую киноплёнку типа Т-10 чувствительностью 1100 ед. ГОСТа.

Для сравнения результатов исследований одновременно со съемкой осциллограмм производилась киносъемка изображений поверхности Солнца непосредственным путем с телескопа в интегральном свете.

Сравнение результатов телекиносъемки и непосредственных киносъемок изображения Солнца показало следующее:

1. В распределении интенсивности гранул (анализ по осциллограммам на киноплёнке) имеются изменения, фиксируемые от кадра к кадру при частоте киносъемки 25 кадров в секунду, обусловленные атмосферными волнениями, что подтверждает рациональность кинотелевизионного метода фотометрирования (рис. 4 а, б).

2. В то же время при непосредственной киносъемке поля грануляции с той же скоростью атмосферные волнения сильно ослабили контрасты гранул по сравнению с фоном и удается фиксировать лишь крупномасштабные гранулы.

3. Точность отсчетов интенсивности гранул (по контрасту) в 3—4 раза выше, чем при фотометрических методах исследований.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н. Ф. Купревичу за ценные советы при проведении исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керимбеков М. Б. "Солнечные данные", 1960, № 9.
2. Крат В. А. и Юдин. "Солнечные данные", 1960, № 9.
3. Васильева Г. Я. "Изв. ГАО АН СССР", 1967, № 182.
4. Керимбеков М. Б. "Солнечные данные", 1966, № 2.
5. Эфендиев Ч. А. "За технический прогресс", 1968, № 2.
6. Эфендиев Ч. А. "Изв. АН Азерб. ССР серия физ.-техн. и матем. наук" 1968, № 2.
7. Системы промышленного телевидения (Сб. статей под ред. С. И. Зеленского и К. В. Михалкова) М.—Л., Госэнергоиздат, 1962.
8. Труды научно-технической конференции ЛЭИС им. Бонч-Бруевича, вып. 1, 1965.

Поступило 30. IX 1968

**Күнәш гранулјасијасыны мүшәһидә етмәк үчүн
телевизија системинин тәтбигинә даир**

ХҮЛАСӘ

Ади електрофотометријада гејдетмә тезлијинин аз ($15'' \text{ сан}^{-1}$) олмасы Күнәш гранулларынын мәнзәрәси үзәринә дүшән атмосфер әнкәлләрини азалтмаға имкан вермир. Телевизија системинин тәтбиг едилмәси үсулунда исә гејдетмә тезлији нисбәтән јүксәк (тәгрибән 100 дәфә чох) олдуғундан атмосфер әнкәлләриндән азад ә'ла хәјал-алынма анлары оссиллограмлардан ашкара чыхарылып.

Бу үсул гранулларын мүшәһидәсинә илк дәфә тәтбиг едилмәклә даһа дәгиг олан илк нәтичәләр алынмышдыр.

И. Л. ШАЙН, Р. Г. ГАДЖИЕВ

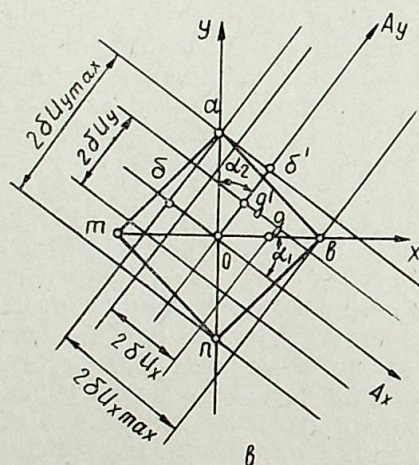
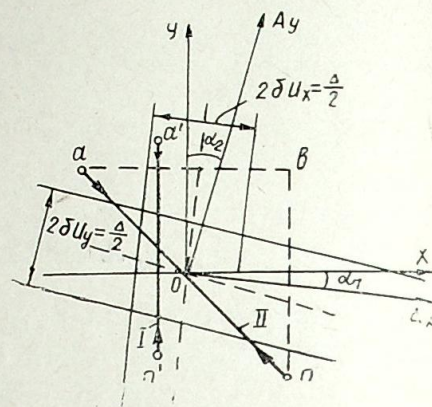
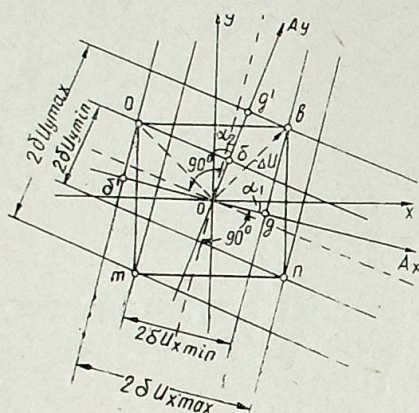
**К ВОПРОСУ ВЫБОРА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПОРОГОВЫХ
УСТРОЙСТВ ЦИФРОВЫХ СЛЕДЯЩИХ КОМПЕНСАТОРОВ
ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

Цифровые следящие системы получают все большее распространение в информационно-измерительной технике. Этим системам при-сущи периодические процессы вблизи состояния равновесия, не свя-занные с интерционностью элементов, определяемые дискретностью ввода уравнивающего параметра и выбранной величиной чувстви-тельности порогового устройства. Так, в одноконтурных системах постоянного тока периодические процессы возникают при пороге чув-ствительности меньше половины дискретного деления (ступени уравни-вования) [1]. В двухконтурных системах переменного тока пе-риодические процессы у состояния равновесия определяются не только величинами порогов чувствительности каналов уравнивания, но и степенью взаимосвязи между ними [2].

Взаимосвязь каналов уравнивания приводит к тому, что воз-никают периодические процессы с участием не только одной, но и двух, трех и большего числа ступеней уравнивающего параметра по обоим ортогональным составляющим. Для устранения этих перио-дических режимов приходится увеличивать область нечувствитель-ности каналов уравнивания и осуществлять более тщательную настройку фазовой чувствительности каналов [2]. Последнее приво-дит к усложнению конструкции компенсаторов и значительному уве-личению погрешности измерения. Наибольшую опасность для автома-тических компенсаторов представляют периодические процессы, возни-кающие вблизи состояния равновесия с участием одной или двух ступеней, так как они возникают при наименьшей степени взаимосвязи каналов уравнивания. Авторами для устранения периодических режимов применялся метод „возвратных шагов“, позволяющий одно-временно повысить точность измерения.

В качестве примера рассмотрим периодический режим, представ-ленный на рисунке (а). Сигнал рассогласования в любой момент вре-мени располагается в области нечувствительности то одного поро-гового устройства, то другого. Поэтому при поступлении каждого так-тового импульса совершается шаг только по одной составляющей уравнивающего параметра. Обязательным условием существова-ния данного периодического режима является поочередное попадание сигнала рассогласования в области нечувствительности пороговых эле-ментов. При каждом втором такте вектор сигнала рассогласования

снова возвращается в область нечувствительности предыдущего канала, но при этом сигнал рассогласования по составляющей изменяет знак на 180° по сравнению с ранее имеющимся и по этой составляющей совершается шаг уравнивания обратного знака. Так возникает периодический процесс вида „квадрат“.



Примеры периодических режимов в автоматическом компенсаторе с участием одной (а, б) и двух ступеней (в); x, y — координатные оси уравнивающего параметра; A_x, A_y — вектора фазовой чувствительности; δU_x и δU_y — пороги чувствительности соответствующих каналов уравнивания; ΔU — сигнал рассогласования в различные моменты времени; Δ — ступень уравнивающего параметра.

Из рисунка видно, что при одних и тех же углах α_1 и α_2 существует только определенная область значений δU_x и δU_y , при которых существует цикл. Действительно, цикл существует только в том случае, если вершины a и n находятся в области нечувствительности порогового устройства канала y (δU_y), а вершины b и m — в области нечувствительности канала x (δU_x). Если уменьшить (δU_y до значения δU_{ymin} или δU_x до δU_{xmin}), то некоторые вершины квадрата выйдут из вышеуказанных областей и данный периодический процесс пропадет. Правда, при этом возникают новые периодические процессы. С другой стороны, если δU_y увеличить до значения δU_{ymax} , то вершина b попадает в область нечувствительности канала y и периодический процесс также пропадет, аналогично каналу x . Граничные значения δU_x и δU_y можно определить следующим образом:

$$U_3 \text{ треугольника } aob \quad ob = \delta U_{ymin} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha_2); \quad (1)$$

$$\text{из треугольника } abg \quad og = \delta U_{xmin} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ + \alpha_1). \quad (2)$$

Эти соотношения верны для углов α_1 и α_2 меньше 45° ; при углах больше 45°

$$\delta U_{ymin} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \sin(\alpha_2 - 45^\circ), \quad (3)$$

$$\delta U_{xmin} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \sin(\alpha_1 - 45^\circ) \quad (4)$$

$$\text{из треугольника } aob' \quad \delta U_{xmax} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha_1) \quad (5)$$

$$\text{из треугольника } bog' \quad \delta U_{ymax} = \frac{\Delta}{2} \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha_2) \quad (6)$$

К особенностям данного периодического режима можно отнести то, что на каждый пороговый элемент влияет только свой угол взаимосвязи: на ($\delta U_x - \alpha_1$; на $\delta U_y - \alpha_2$). Из последних выражений видно, что для устранения данного цикла можно увеличивать ширину области нечувствительности за счет увеличения порогов чувствительности δU_x и δU_y . Однако при этом значительно возрастает погрешность измерения компенсатора, так как в момент равновесия составляющие сигнала рассогласования по осям координат могут оказаться значительно больше δU_x и δU_y [3].

Авторами для устранения данного периодического режима предлагается использование возвратных шагов по обоим составляющим, равных половине ступени уравнивающего параметра ($\frac{\Delta}{2}$). При этом сигнал рассогласования всегда будет попадать в область нечувствительности пороговых устройств. В частном случае для периодического процесса (рис., а), при использовании шагов $\frac{\Delta}{2}$ конец вектора сигнала рассогласования ΔU попадает в нулевую точку и погрешность вообще отсутствует. В общем случае, когда периодический процесс несимметричен относительно начала координат, конец вектора ΔU не попадает в нулевую точку и погрешность имеет конечное значение. При использовании данного способа пороги чувствительности каналов можно уменьшить до значений:

$$\delta U_x \geq \frac{\Delta \sqrt{2}}{4} \cos(45^\circ - \alpha_1); \quad (7)$$

$$\delta U_y \geq \frac{\Delta \sqrt{2}}{4} \cos(45^\circ - \alpha_2). \quad (8)$$

Следовательно, погрешность измерения уменьшается.

При порогах чувствительности δU_x , δU_y и шагах меньше $\frac{\Delta}{2}$ возможно появление новых периодических режимов (рис., б), аналогичных одноканальным системам. Однако они легко устраняются: I — путем использования шага $\frac{\Delta}{2}$ только по одной составляющей, II — использованием шагов $\frac{\Delta}{2}$ по обоим составляющим. В принципе можно исполь-

зовать шаг $\frac{\Delta}{2}$ только по одной составляющей для устранения всех периодических режимов. Однако чувствительность пороговых устройств и соответственно погрешность измерения при этом несколько возрастают.

Периодические процессы с участием большего числа ступеней возникают при больших углах взаимосвязи. В частности, на рис. 6 представлен периодический процесс с участием двух ступеней. Условия его существования:

$$\sin \alpha_{1(2)} \geq \frac{\delta U_{x\max}(y_{\max})}{\Delta}; \sin \alpha_2 \geq \frac{\delta U_{x\max}(y_{\max})}{\Delta}. \quad (9)$$

При $\delta U_x = 0,5\Delta$ и $\delta U_y = 0,5\Delta$ $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$. Если же $\frac{\delta U}{\Delta} < 0,5$, что следует из выражений (7) и (8), периодический процесс может возникнуть уже при углах меньше 30° , что опасно, так как в реальных схемах цифровых компенсаторов углы α_1 и α_2 доходят до $20-30^\circ$. Для устранения возможности возникновения периодического режима (рис., а) авторы предлагают использование возвратного шага величиной Δ только по одной составляющей. При этом пороги чувствительности каналов можно уменьшить в два раза.

Таким образом, используя возвратные шаги величиной $\frac{\Delta}{2}$ только по одной составляющей (при периодическом режиме только по одной из составляющих) или одновременно по двум (при периодическом режиме с поочередным вводом составляющих или при одновременном вводе по составляющим только одной ступени), или возвратный шаг Δ по одной из составляющих (при периодическом режиме с участием двух ступеней уравнивающего параметра), удастся не только устранить возникновение периодического режима, но и значительно снизить чувствительность пороговых устройств и соответственно погрешности измерения при углах взаимосвязи до $30-40^\circ$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орнатский П. П. Автоматические измерительные приборы. Изд-во "Техника", Киев, 1965.
2. Канторович В. Б., Мелик-Шахназаров А. М., Шаин И. Л. "Автоматика", 1965, № 2.
3. Шаин И. Л. О связи чувствительности и погрешности в автоматических цифровых компенсаторах переменного тока следящего уравнивания. Тезисы докл. Всесоюз. конф. по измерению комплексных величин. Баку, 1966.

И. Л. Шаин, Р. Н. Гачыев

Дәјишән чәрәјанын рәгәмли компенсаторлары үчүн мурәккәбә гурғулары һәссаслығынын сечилмәси мәсәләсинә даир

ХУЛАСӘ

Ма'лум олдуғу кими, рәгәм көстәришли дәјишән чәрәјан компенсаторларынын мувазинәт саһәси әтрафында әмәлә кәлән дәври просессләр элементләрин әталәти илә тә'јин олунмајыб, јалныз мувазинәт-ләшдиричи параметрин аддымындан вә сечилмиш һәссаслығын гиј-мәтиндән асылыдыр.

Мәгаләдә дәјишән чәрәјан компенсаторларынын мувазинәт саһәси әтрафындакы дәври просессләрин јаранма шәртләри вә бу просессләрин арадан галдырылмасы үчүн ики үсула (һәр ики мурәккәбә үзрә јарым аддым $\Delta: 2$ вә бир мурәккәбә үзрә бир аддым Δ кери) бахылыр.

Анализә көрә һәр ики мурәккәбә үзрә јарым аддым $\Delta: 2$ вә ја бир аддым Δ кери нәинки дәври просессләри арадан галдырыр, һәтта әлагә бучагларынын $30-40^\circ$ гијмәтләриндә белә өлчү хәтасы азалыр.

М. А. ГУЛИЕВ

О МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЕ ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЯ В ПЛАСТЕ С ЛОКАЛЬНОПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

При решении задач о нестационарном течении жидкости в многослойной среде были обнаружены предельные режимы, относящиеся как к первой фазе перераспределения давления, так и ко второй. Установлено, что при некоторых значениях параметров пласта и перемишки над ним фронт возмущения может не достигать естественной границы пласта. Другими словами, после достижения максимального значения фронт возмущения развиваться не будет. Если же параметры пласта и перемишки таковы, что возмущение может дойти до непроницаемой внешней границы пласта, то на внешней границе существует оптимальное значение давления, после которого оно не изменяется.

Вопросы, связанные с определением максимального значения удаления фронта возмущения и предельного значения давления на внешней непроницаемой границе рассмотрены в работах П. Я. Полу-бариновой-Кочиной [1], М. А. Гусейн-заде [2], Г. П. Гусейнова и Н. Р. Вагабовой [3]. С применением приближенных методов и средств вычислительной техники определены, соответственно, максимальное значение удаления фронта возмущения и предельное значение давления на внешней непроницаемой границе для различных режимов эксплуатации пласта [4, 5].

Допустим, что батарея скважин, заменяемая галереей, пущена в эксплуатацию с постоянным давлением P_r в полубесконечном пласте, который имеет мощность h и проницаемость κ . В начальный момент времени давление в любой точке пласта постоянное и равно p_0 . Подоснову пласта считаем непроницаемой. Над этим пластом простирается другой пласт, который отделяется от первого слабопроницаемой перемишкой и имеет постоянное давление P_0 . Перемишка между пластами содержит локальнопроницаемую зону шириной $(a_2 - a_1)$, с коэффициентом проницаемости κ_r и коэффициентом мощности b_r .

Для точного математического решения этой задачи следует интегрировать уравнение

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} \quad (1)$$

при граничных и начальных условиях

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=h} = 0; \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=a_2} = 0; \quad P|_{y=h+a_r} = P_0, \quad (2)$$

$$P = P_r \text{ при } x = 0, \quad P = p_0 \text{ при } t = 0,$$

где α — коэффициент пьезопроводности.

Вышеописанная задача решается исходя из приближенных методов [2, 6]. Рассмотрим первую фазу и допустим, что закон распределения в возмущенной зоне имеет вид

$$P = p_0 - (p_0 - P_r) \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2, \quad (3)$$

что удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ при } x = l(t),$$

$$P = P_r \text{ при } x = 0.$$

$l(t)$ — длина пробега фронта возмущения, отсчитываемая от галереи. Неизвестное $l(t)$, входящее в (3), определяем из уравнения материального баланса. Для этого обозначим через dq_1 весовое количество жидкости, отбираемое галереей за промежуток времени dt . Тогда из (3) получим

$$dq_1 = \frac{\kappa \cdot h}{\mu} \cdot \gamma_0 \cdot \frac{2 \cdot (p_0 - P_r)}{l} dt. \quad (4)$$

Весовое количество жидкости, получаемое за счет упругого запаса, имеет вид

$$q_2 = \beta^* \cdot \gamma_0 \cdot h \cdot l \cdot (P_0 - \bar{P}), \quad (5)$$

где β^* — коэффициент упругости пласта,

γ_0 — удельный вес жидкости при $P = p_0$,

$\bar{P}$ — средневзвешенное давление.

Из (3) и (5) получаем

$$dq_2 = \beta^* \cdot \gamma_0 \cdot h \cdot \frac{P_0 - P_r}{3} dl. \quad (6)$$

Обозначив количество жидкости, перетекающей через локальнопроницаемую зону кровли пласта за время dt , через dq_3 , будем иметь

$$dq_3 = Q_y \cdot dt = \left[\frac{\kappa_r \cdot \gamma_0}{\mu \cdot b_r} \int_{a_1}^{a_2} (P_0 - \bar{P}) dx \right] dt. \quad (7)$$

Исходя из уравнения (7), с учетом (3), находим

$$dq_3 = \frac{\kappa_r \cdot (P_0 - P_r)}{\mu \cdot b_r} \cdot \left[l^2 \cdot (a_2 - a_1) - l \cdot (a_2^2 - a_1^2) + \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right] \cdot dt. \quad (8)$$

Так как

$$dq_1 = dq_2 + dq_3, \quad (9)$$

то из (4), (6) и (8) получим

$$\alpha \cdot dt = \frac{l^2 dl}{6l - 3\alpha l^2 (a_2 - a_1) + 3\alpha l (a_2^2 - a_1^2) - \alpha \cdot (a_2^3 - a_1^3)}, \quad (10)$$

где α зависит от параметров пласта и перемишки;

$$\alpha = \frac{\kappa_r}{\kappa \cdot b_r \cdot h}.$$

Таким образом получаем дифференциальное уравнение для определения неизвестного $l(t)$, когда кровля пласта содержит локальнопроницаемую зону шириной $(a_2 - a_1)$. Интегрируя уравнение (10), соответственно, в пределах от 0 до t и 0 до l , получим

$$x \cdot t = -\frac{L_0 - 1 \text{ или } a_1 = B^1}{3 \cdot \alpha \cdot (a_2 - a_1)} + \frac{B^1}{18 \alpha^2 \cdot (a_2 - a_1)} \cdot \ln \frac{C + 3 \cdot \alpha \cdot L^2 \cdot (a_2 - a_1) - B \cdot L}{C} +$$

$$+ \frac{B^2 - 6 \alpha^2 \cdot (a_2^3 - a_1^3) (a_2 \cdot a_1)}{18 \alpha^2 \cdot (a_2 - a_1)^2 \cdot A} \ln \frac{L \cdot (B + A) - 2 \cdot C}{L \cdot (B - A) - 2 \cdot C}, \quad (11)$$

где

$$A = \sqrt{6 + 3 \alpha (a_2^2 - a_1^2)^2 - 12 \cdot \alpha^2 \cdot (a_2^3 - a_1^3) (a_2 - a_1)}, \quad (12)$$

$$B = 6 + 3 \cdot \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2) \quad (13)$$

и

$$C = \alpha \cdot (a_2^3 - a_1^3). \quad (14)$$

Уравнение (11) с учетом (12), (13) и (14) позволяет определить положение подвижной границы для любого момента времени. Если иметь в виду и уравнение (3), то для любого времени можно найти давление в произвольной точке пласта, кровля которого содержит локальнопроницаемую зону. Максимальное значение удаления фронта возмущения определяется из (10) в виде [2, 3]

$$l_{\max} = \frac{6 + 3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2) +}{6 \cdot \alpha \cdot (a_2 - a_1)} + \sqrt{6 + 3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2)^2 - 12 \cdot \alpha^2 \cdot (a_2^3 - a_1^3) (a_2 - a_1)}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что при течении жидкости в пласте с локальнопроницаемой кровлей фронт возмущения имеет максимальное значение, дальше которого возмущение развиваться не будет.

С помощью выведенных выше формул можно найти решение для случая, когда жидкость перетекает не через локальнопроницаемую зону, а по всей кровле пласта. Для этого в полученные формулы надо подставить $a_1 = 0$ и $a_2 = L$. Тогда

$$l^2 = \frac{6}{\alpha} \cdot (1 - e^{-2 \alpha \cdot \alpha \cdot t}), \quad (16)$$

$$l_{\max} = \sqrt{\frac{6}{\alpha}}, \quad (17)$$

что точно совпадает с формулами М. А. Гусейн-заде [2].

Следует отметить, что полученные нами формулы для определения давления в любой точке пласта для любого момента времени имеют некоторые отличия по сравнению с аналогичной формулой, полученной с применением другого метода [7]. Численные расчеты по выведенной нами формуле не составляют трудности. Однако для численных расчетов по формуле, полученной в [7], необходимо вначале решить интегральное уравнение, а потом использовать результаты в общем решении, что связано со значительными трудностями. Точность используемого нами приближенного метода оценивалась неоднократно [6].

Теперь рассмотрим задачу в той же постановке и предположим, что фронт возмущения достиг внешней непроницаемой границы пласта. Тогда

$$l(t) = L \text{ и } P_0 = P_k(t), \quad (17a)$$

где L — расстояние от галереи до внешней границы пласта, $P_k(t)$ — изменение давления на внешней непроницаемой границе.

Для этого случая количество жидкости, отбираемой галереей за промежуток времени dt , определяется из выражения

$$dq_1 = \frac{\kappa \cdot h}{\mu} \cdot \gamma_0 \cdot \frac{2 \cdot (P_k - P_r)}{L} dt, \quad (18)$$

dq_2 и dq_3 приобретают вид

$$dq_2 = -\beta^* \cdot \gamma_0 \cdot h \cdot L \cdot \frac{2}{3} dP_k \quad (19)$$

и

$$Q_y = \frac{dq_3}{dt} = \frac{\kappa_r \cdot \gamma_0}{b_r \cdot \mu} \left\{ (P_0 \cdot (a_2 - a_1) + P_k \cdot \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3L^2} - \frac{a_2^2 - a_1^2}{L} \right] - \right.$$

$$\left. - P_r \cdot \left[(a_2 - a_1) - \frac{a_2^2 - a_1^2}{L} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{3L^2} \right] \right\}. \quad (20)$$

Далее из (9) с учетом (18), (19) и (20), находим

$$x \cdot dt = -\frac{2 \cdot L \cdot dP_k}{P_k \cdot \left[\frac{3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2)}{L} + \frac{6}{L} - \frac{3 \alpha (a_2^3 - a_1^3)}{3 \cdot L^2} \right] +}$$

$$+ P_r \cdot \left[3 \alpha (a_2 - a_1) - \frac{3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2)}{L} + \frac{3 \alpha (a_2^3 - a_1^3)}{3 \cdot L} - \frac{6}{L} \right] -}$$

$$- 3 \alpha P_0 \cdot (a_2 - a_1)}. \quad (21)$$

Предельное значение давления на внешней непроницаемой границе определяется в виде [2, 3, 5]

$$(P_k)_{\text{пред}} = \frac{P_r \cdot \left[\frac{6}{\alpha} - \frac{3 \alpha (a_2^3 - a_1^2)}{3L^2} + \frac{3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2)}{L} - 3 \alpha (a_2 - a_1) \right] +}{\frac{3 \alpha \cdot (a_2^2 - a_1^2)}{L} + \frac{6}{L} - \frac{3 \alpha \cdot (a_2^3 - a_1^3)}{3 \cdot L^2} + 3 \alpha \cdot P_0 \cdot (a_2 - a_1)}. \quad (22)$$

При $a_2 = a_1$ из (22) получаем

$$(P_k)_{\text{пред}} = P_r, \quad (23)$$

которое относится к движению жидкости в пласте с непроницаемой кровлей и подошвой.

Для случая, когда жидкость перетекает через всю кровлю пласта, предельное значение определяется из (22) в виде

$$(P_k)_{\text{пред}} = \frac{P_r \cdot \left(3 - \frac{\alpha L^2}{2} \right)}{3 + \alpha \cdot L^2}, \quad (24)$$

где принято, что $a_2 = L$, $a_1 = 0$ и $P_0 = 0$.

Формула (24) совпадает с формулой М. А. Гусейн-заде [2].

Интегрируя уравнение (21), соответственно, от 0 до t и от 0 до P_k получим

$$P_k = P_r \cdot \left[1 - \frac{3 \alpha (a_2 - a_1)}{A} \right] \left(1 - e^{-\frac{A \cdot x \cdot t}{2 \cdot L}} \right), \quad (25)$$

где $P_0 = 0$ и

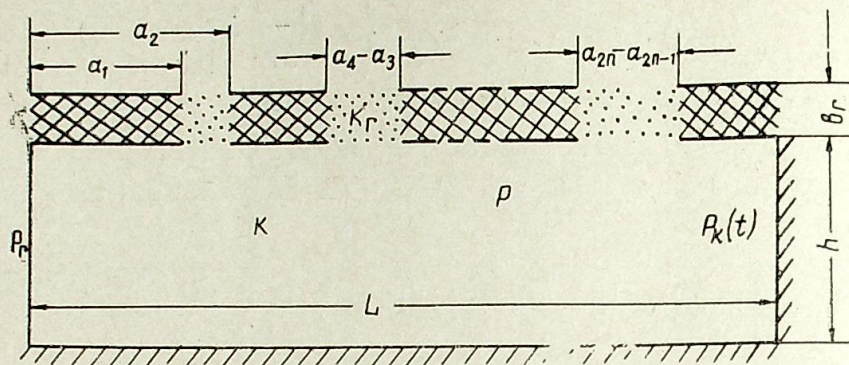
$$A = \frac{3 \alpha (a_2^2 - a_1^2)}{L} + \frac{6}{L} - \frac{3 \alpha \cdot (a_2^3 - a_1^3)}{3 \cdot L^2}. \quad (26)$$

Если кровля пласта содержит большое число локальнопроницаемых зон (рис.), то решение (25) принимает вид

$$P_k(t) = P_r \cdot \left[1 - \frac{3\alpha(a_2 - a_1 + \dots + a_{2n} - a_{2n-1})}{A} \right] \left(1 - e^{-\frac{\lambda \cdot x \cdot t}{2 \cdot L}} \right). \quad (27)$$

Для случая, когда кровля пласта непроницаема ($\alpha = 0$), получаем [2]

$$P_k = P_r \cdot \left(1 - e^{-\frac{3\alpha \cdot t}{L^2}} \right). \quad (28)$$



Если переток имеет место по всей кровле пласта ($a_1 = 0, a_2 = L, \dots, a_{2n} = a_{2n-1}$), то

$$P_k = \frac{P_r \cdot \left(3 - \frac{\alpha L^2}{2} \right)}{3 + \alpha \cdot L^2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{(\alpha L^2 + 3) \cdot t}{L^2}} \right], \quad (29)$$

Впервые эта формула выведена М. А. Гусейн-заде. Таким образом найдено решение, позволяющее определить изменение давления на внешней непроницаемой границе пласта. Следовательно, учитывая (17а) и (3), можно найти давление в любой точке упругозамкнутого пласта.

Выводы

1. Приводится решение задачи о течении жидкости в пласте, кровля которого содержит локальнопроницаемые зоны. Получены формулы для определения давления в любом сечении пласта для любого момента времени как в первой фазе перераспределения давления, так и во второй. Из полученных формул как частный случай можно найти решения для случаев, когда жидкость перетекает через всю кровлю пласта и кровля пласта непроницаема.

2. Найдено максимальное значение длины пробега фронта возмущения при течении жидкости в пласте слокальнопроницаемой кровлей. Указанное обстоятельство представляет практический интерес, заключающийся в том, что через определенный период времени галерея практически будет питаться только за счет верхнего пласта.

3. Получена зависимость для определения количества жидкости, перетекающей через локальнопроницаемую зону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Изв. Сибирского отделения АН СССР, 1960, № 5.
2. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., 1965.

3. Гусейнов Г. П., Вагабова Н. Р. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 6.
4. Гулиев М. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1964, № 5.
5. Гулиев М. А. Сб. "Вопросы вычислительной техники". Изд. АН Азерб. ССР, 1967.
6. Гулиев М. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1964, № 1.
7. Мусаяев М. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 6.

Поступило 5. IX 1965

М. А. Гулиев

Локал-кечиричи таваны олан лајда тэ'сирлэнма чэбһэсинин
максимал узунлуғу һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә локал-кечиричи таваны олан лајда мајенин гәрарлаш-мамыш ахынына даир мәсәләнин тәғриби методла һәлли верилмиш-дир. (3) пәјланма ганунундан истифадә етмәклә локал-кечиричи зона-дан мұхтәлиф һалларда ахан мајенин мигдарыны мұәјјән етмәк үчүн мұвафиг оларағ (8) вә (20) дүстурлары һасил едилмишдир.

Бахылан һалда-тә'сирләнмә чэбһэсинин максимал узунлуғуну тап-мағ үчүн (15) дүстур чыхарылмышдыр.

УДК 519.95

Р. Г. ФАРАДЖЕВ

МЕТОДЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ (ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫХ МАШИН)

Для последнего времени характерно интенсивное развитие теории автоматических систем дискретного действия. Важным классом дискретных систем являются последовательностные машины, устройства, где все логические операции сводятся к задержке на постоянное время (принимаемое за единицу), к линейным и нелинейным функциональным операциям относительно сложения и умножения поля Галуа или конечного кольца.

1. В настоящей статье предлагаются математические методы анализа и синтеза одного класса последовательностных машин, называемых линейными последовательностными машинами (ЛПМ). Эти методы формально подобны методам, известным из теории непрерывных и импульсных систем [1], и могут быть применены также при анализе и синтезе широких классов нелинейных последовательностных машин. ЛПМ могут быть описаны таблицами, графами [6], а также аналитическими способами. Воспользуемся аналитическим способом, так как он позволяет создать методы исследования ЛПМ, подобные известным методам теории дискретных систем управления [1]. Такое описание для одномерной ЛПМ (т. е. ЛПМ с одной входной величиной $x[n]$ и с одной выходной величиной $y[n]$), заданной над полем $GF(p)$, имеет вид*

$$y[n] = \sum_{i=0}^m b_i \cdot x[n-i] - \sum_{i=1}^m a_i \cdot y[n-i], \quad GF(p); \quad (1)$$

a_i и b_i — параметры машины, принимающие значения из множества $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Задача построения аналитических методов (подобных методам дискретных систем управления), исключающих конечный подбор применительно к проблемам ЛПМ, решается при помощи математического аппарата, основы которого изложены в пунктах 2 и 3. Этот аппарат основывается на понятиях модулярной функции и дискретного преобразования над полем Галуа.

* Ниже всюду вычисление ведется относительно операций полей Галуа. Чтобы отметить это обстоятельство, рядом с выражениями будем указывать соответствующее поле.

2. Под понятием модулярной функции (МФ) понимается функция целочисленного аргумента, с множеством значений из поля Галуа $GF(p^k)$. т. е. функция вида

$$y[n] = \varphi(x_1[n], x_2[n], \dots, x_r[n]), \quad GF(p^k), \quad (2)$$

где $(y[n], x_i[n]) \in GF(p^k)$ при всех целочисленных n . Можно предположить разложение периодической и стремящейся к периодической МФ на суммы элементарных функций. Эти разложения аналогичны разложениям Фурье для решетчатой функции [1]. Аналогично [1] вводится понятие разности и суммы МФ, устанавливается их специфическое свойство.

Эти результаты позволяют построить своеобразное исчисление конечных разностей над полями Галуа и предложить некоторый метод решения уравнения ПМ, подобный классическому способу анализа линейных дифференциальных и разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако такой способ связан с трудоемкими вычислениями и неэффективен при исследовании вопросов ЛПМ. Поэтому в пункте 3 предлагается операционное исчисление, подобное обычному дискретному преобразованию и приспособленному для таких задач.

3. Дискретное преобразование над конечным полем $GF(p^k)$ для МФ вида $\varphi[n]$ или, кратко, D_p -преобразование функции $\varphi[n]$, определяемое соотношением

$$\Phi^*(z) = D_p\{\varphi[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \varphi[n], \quad GF(p^k), \quad (3)$$

которое устанавливает связь между оригиналом $\varphi[n]$ и изображением $\Phi^*(z)$, является функцией символа $z = e^{-q}$, $q = sT$ и называется прямым D_p -преобразованием (обозначение D_p означает: дискретное преобразование над конечным полем с характеристикой p). Выражение (3) рассматривается как некоторый формальный ряд от одного переменного z . Множество таких формальных рядов образует некоторое кольцо $K[[z]]$, в котором полином $V^*(z)$ со свободным членом $\neq 0$ обратим. Это значит, что $[V^*(z)]^{-1}$ — формальный ряд $\in K[[z]]$.

Рассмотрим теперь множество $\bar{K}[[z]]$ дробно-рациональных выражений $\{U^*(z)/V^*(z)\}$ над полем $GF(p^k)$, где числитель — произвольный полином, а знаменатель — полином со свободным членом $\neq 0$. Это множество образует подкольцо и отображение $U^*(z)/V^*(z) \rightarrow U^*(z) \cdot [V^*(z)]^{-1}$ определяет изоморфизм $\bar{K}[[z]]$ в $K[[z]]$. При этом $U^*(z) \cdot [V^*(z)]^{-1} \in K[[z]]$ и называется разложением дробно-рациональной функции $U^*(z)/V^*(z)$. Соотношение (3) имеет смысл для некоторой МФ, если соответствующее изображение представляет разложение некоторой дробно-рациональной функции из $\bar{K}[[z]]$. Функция $\varphi[n]$, для которой (3) имеет смысл, называется преобразуемой. В класс преобразуемых входят функции вида конечной последовательности, периодические и стремящиеся к периодической МФ, изображения которых имеют вид:

$$D_p\{\varphi[n] = 0 \text{ при } n \geq \rho\} = \sum_{i=0}^{\rho-1} \varphi[i] \cdot z^i, \\ D_p\{\varphi[n] = \varphi[n+M] \text{ при } n \geq 0\} = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} \varphi[i] \cdot z^i}{1 - z^M}, \quad GF(p^k), \quad (4)$$

$$D_p \{ \varphi [n] = \varphi [n + M] \text{ при } n \geq p \} = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi [i] \cdot z^i + \frac{\sum_{l=p}^{p+M-1} \varphi [l] \cdot z^l}{1 - z^M},$$

соответственно.

Введем понятие обратного D_p -преобразования, т. е. соотношение $\varphi [n] = D_p^{-1} \{ \Phi^* (z) \}$. Последнее может быть представлено в нескольких вариантах, в частности в виде

$$\varphi [n] = \left\{ \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [\Phi^* (z)] \right\}_{z=0}, \quad GF(p^k). \quad (5)$$

Иную формулу обратного D_p -преобразования можно получить применяя известную теорему Галуа к изображению

$$\Phi^* (z) = \frac{U^* (z)}{V^* (z)} \in \bar{K} [[z]].$$

В этом случае, применяя теорему Галуа к данному изображению приводим его к одному из возможных видов из (4) и затем устанавливаем, какая МФ соответствует исходному изображению.

Действительно, пусть дано изображение $\Phi^* (z) = \frac{U^* (z)}{V^* (z)}$, где $\deg U^* (z) < \deg V^* (z)$. По теореме Галуа для каждого многочлена $V (z)$ отличным от нуля свободным членом найдется другой такой многочлен $W^* (z)$ и такое число $0 < M \leq p^m - 1$, что

$$V^* (z) \cdot W^* (z) = 1 - z^M, \quad GF(p). \quad (5')$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} D_p^{-1} \left\{ \Phi^* (z) = \frac{U^* (z)}{V^* (z)} \right\} &= D_p^{-1} \left\{ \Phi^* (z) = \frac{U^* (z) \cdot W^* (z)}{V^* (z) \cdot W^* (z)} \right\} = \\ &= D_p^{-1} \left\{ \Phi^* (z) = \frac{U^* (z) \cdot W^* (z)}{1 - z^M} \right\} = \\ &= \varphi [n] = \varphi [n + M] \text{ при } n \geq 0, \quad GF(p) \end{aligned} \quad (6')$$

Если рациональная дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, можем выделить целую и дробную части с последующим применением к дробной части алгоритма (6'). В случае же полиномиального изображения оригинал находится непосредственно. Тем самым получаем, что вышеописанная процедура позволяет найти D_p^{-1} -преобразование в наиболее общем виде.

Укажем еще один вид формулы обратного D_p^{-1} -преобразования:

$$\varphi [n] = D_p^{-1} \{ \Phi^* (z) \} = \sum_{z \in \theta} \Phi^* (z) \cdot z^{-n}, \quad GF(p^k), \quad (6)$$

где θ — множество точек полюсов $\Phi^* (z)$.

Так, для изображения $\Phi^* (z) = \frac{U^* (z)}{V^* (z)} \in \bar{K} [[z]]$

$$\varphi [n] = \sum_{v=1}^s \sum_{\mu=0}^{r_v-1} c_{v,\mu} \cdot B'_\mu [n] \cdot \varepsilon^{q_v(n-\mu-1)}, \quad GF(p^k), \quad (7)$$

где $B'_\mu [n] = B_\mu [n + \mu] = \binom{n + \mu}{\mu}$, $GF(p)$ — биномиальная МФ

$$c_{v,\mu} = \left\{ \frac{(-1)^{r_v}}{(r_v - \mu - 1)!} \left[\frac{d^{r_v - \mu - 1}}{dz^{r_v - \mu - 1}} \frac{U^* (z)}{V^* (z)} \cdot (z - \varepsilon^{a_v})^{r_v} \right] \right\}_{z=\varepsilon^{a_v}}, \quad GF(p^k)$$

и ε^{a_v} — нули полинома $V^* (z)$ с кратностью r_v .

4. Можно провести сравнение эффективности различных формул обратного D_p -преобразования, которые устанавливают соответствие (как и дискретное преобразование Лапласа [1]) между операциями над оригиналами и изображениями и позволяют в формульном виде решить уравнение ЛПМ в два этапа.

На первом этапе, подвергая (1) D_p -преобразованию (с учетом начальных условий $y [-i]$, $i = 1, 2, \dots, m$), приводим его к следующему виду:

$$Y^* (z) = \frac{P^* (z)}{Q^* (z)} \cdot X^* (z) - \frac{R^* (z)}{Q^* (z)}, \quad GF(p). \quad (8)$$

Здесь

$$P^* (z) = \sum_{i=0}^l b_i \cdot z^i,$$

$Q^* (z) = 1 + \sum_{i=1}^m a_i \cdot z^i$ называется характеристическим полиномом ЛПМ,

$$R^* (z) = \sum_{i=0}^{m-1} r_i \cdot z^i,$$

$$r_{m-1} = a_m \cdot y [-1],$$

$$r_{m-2} = a_m \cdot y [-2] + a_{m-1} \cdot y [-1], \quad GF(p),$$

$$r_0 = a_m \cdot y [-m] + a_{m-1} \cdot y [-m+1] + \dots + a_1 \cdot y [-1]. \quad (9)$$

На втором этапе по найденному изображению $Y^* (z)$ определяем искомое решение $y [n]$ при помощи одной из возможных формул обратного D_p -преобразования. Можем указать также связь между D_p -преобразованием и родственными ему преобразованиями, употребляемыми в ряде работ по теории ЛПМ [8].

5. Отметим, что разработанный аппарат позволяет полностью построить теорию ЛПМ, подобно теории линейных систем управления. Так, благодаря D_p -преобразованию можно вывести уравнение относительно изображения и основные характеристики ЛПМ. При этом понятие передаточной функции для ЛПМ, $i = 1, 2, \dots, m$, определенном состоянии, т. е. в состоянии, где $y [-i]$, $i = 1, 2, \dots, m$, определяется как отношение изображения в смысле D_p -преобразования выходной величины и входной. Обозначив ее через $K^* (z)$, согласно определению и на основании (8) имеем

$$K^* (z) = \frac{Y^* (z)}{X^* (z)} = \frac{P^* (z)}{Q^* (z)}, \quad GF(p). \quad (10)$$

Оригинал $k [n]$, соответствующий изображению $K^* (z)$, определяется собой импульсную характеристику ЛПМ и вычисляется следующим образом:

$$k [n] = - \sum_{v=1}^m \frac{P^* (\varepsilon^{a_v})}{\varepsilon^{a_v} \cdot Q (\varepsilon^{a_v})} \cdot \varepsilon^{-a_v n}, \quad GF(p^k), \quad (11)$$

где

$$Q^* (\varepsilon^{a_v}) = \left[\frac{d Q^* (z)}{dz} \right]_{z=\varepsilon^{a_v}},$$

ε^{α_v} — простые нули полинома $Q^*(z)$.

Введем понятие переходной характеристики как

$$b[n] = \sum_{m=0}^n \kappa[m] = K^*(1) - \sum_{v=1}^m \frac{P^*(\varepsilon^{\alpha_v})}{\varepsilon^{\alpha_v} \cdot (1 - \varepsilon^{\alpha_v}) \cdot Q^*(\varepsilon^{\alpha_v})} \cdot \varepsilon^{\alpha_v n}, \quad GF(p^k), \quad (12)$$

Выражения (11) и (12) определяют реакции ЛПМ на импульсное и скачкообразное воздействие. В случае, если $x[n] = \varepsilon^{\bar{\omega} n}$ — простейшая периодическая РБФ, то реакция машины определяется по формуле

$$c[n] = K^*(\varepsilon^{-\bar{\omega}}) \cdot \varepsilon^{\bar{\omega} n} - \sum_{v=1}^m \frac{P^*(\varepsilon^{\alpha_v})}{\varepsilon^{\alpha_v} \cdot (1 - \varepsilon^{\alpha_v} \cdot \varepsilon^{\bar{\omega}}) \cdot Q^*(\varepsilon^{\alpha_v})} \cdot \varepsilon^{-\alpha_v n}, \quad GF(p^k), \quad (13)$$

где $K^*(\varepsilon^{-\bar{\omega}})$ представляет своеобразную „частотную характеристику“ ЛПМ. Формулы разложения (11)–(13) позволяют получить решение многих задач анализа. Можно получить также уравнения и характеристики различных типов соединений линейных схем и изучить процессы в ЛПМ без обратной связи (б. о. с.), т. е. для ЛПМ, в которой передаточная функция имеет вид полинома, а в автономной ЛПМ, уравнение которой следует из (8) при $x[n] = 0$, определить также и длины переходной и установившейся частей процесса для ЛПМ б. о. с. при различных преобразуемых входных воздействиях, а также длину периода циклического процесса в автономной ЛПМ.

6. D_p -преобразование позволяет рассмотреть задачу о нулевых последовательностях (НП), т. е. последовательностях $x[n]$, удовлетворяющих уравнению

$$x[n] = D_p^{-1} \left\{ \frac{Q^*(z)}{P^*(z)} \right\} = D_p^{-1} \left\{ \frac{\sum_{l=0}^{l-1} \omega_l \cdot z^l}{1 + \sum_{l=1}^l b_l \cdot z^l} \right\}, \quad GF(p), \quad (14)$$

где $\omega_l \in GF(p)$ — величины, получаемые из выражений (9) заменой $m = l$, $a_l = b_l$, $x[n] = y[n]$; начальные данные $x[-i]$ ($i = 1, 2, \dots, l$) выбраны p^l -возможными способами. Среди НП особенно важны НП максимальной длины или M -последовательности, которые определяются следующим образом:

$$x[n] = \sum_{v=1}^{l-1} \frac{Q^*(\varepsilon^{p^v})}{\varepsilon^{p^v} \cdot P^*(\varepsilon^{p^v})} \cdot \varepsilon^{-p^v n}, \quad GF(p^k), \quad (15)$$

здесь $k = l$.

Можем также предложить формулу вероятностной характеристики (корреляционной функции и спектральной плотности) для M -последовательностей. Вид этих характеристик показывает, что M -последовательности в определенном частотном диапазоне ведут себя как практически „белые“ шумы и тем самым являются удобными тестсигналами. Эти свойства M -последовательностей в последнее время привлекают внимание специалистов технической кибернетики при исследовании задач идентифицирующих, оптимизирующих и адаптирующих систем [8, 10]. Соотношение (15) позволяет найти любую M -последовательность по заданным $x[i]$ ($i = 1, 2, \dots, l$), т. е. дает решение прямой задачи. Довольно легко описать алгоритм решения и обратной задачи.

7. Можно также привести формулы для вычисления процессов в ЛПМ при произвольных воздействиях и рассмотреть задачи опознавания для ЛПМ, находящейся в основном состоянии. Эти результаты аналогичным образом могут быть распространены на случай многомерных ЛПМ и ЛПМ, заданных над кольцом чисел $\{0, 1, \dots, p-1\}$ (p — составное).

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность и признательность проф. Я. З. Цыпкину за поддержку и внимание к моим работам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Фараджев Р. Г. Об одной задаче переходных процессов линейных последовательностных машин, XI научно-техническая конференция молодых специалистов ИАТ по технической кибернетике, апрель, М., 1964.
3. Фараджев Р. Г. „Изв. АН СССР, серия техн. кибернетика“, 1965, № 5.
4. Фараджев Р. Г. „Автоматика и телемеханика“, т. 27, 1966, № 5.
5. Цыпкин Я. З., Фараджев Р. Г. „ДАН СССР“, т. 166, 1966, № 3.
6. Айзерман М. А., Розоноэр Л. И., Гусев Л. А., Смирнова И. М., Таль А. А. Логика, автоматы и алгоритмы. Физматгиз, 1963.
7. Бурбаки Н. Алгебра, ч. 2. ИНЛ, 1962.
8. Фараджев Р. Г. Методы анализа линейных последовательностных машин. Канд. дисс. 1967.
9. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз, 1962.
10. Цыпкин Я. З. Адаптация и обучение в автоматических системах. Изд-во „Наука“, 1968.

Поступило 17. X 1968

Р. Н. Фарэчов

Сонлу автоматлар (ардычыллыг машинлары)
нэзэријјесиндэ импульс идарэетмэ системлэринин үсуллары

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда импульс идарэетмэ системлэри үсулларына охшар шәкилдә сонлу автоматлар (ардычыллыг машинлары) үчүн анализ вә синтез методлары јарадылмышдыр.

М. Р. САМАНДАР

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО ВАРИАНТА СЛОЖНОГО МАГИСТРАЛЬНОГО НЕФТЕПРОВОДА ПРИ ПОМОЩИ ЭЦВМ

Нефтепроводы — наиболее совершенный и выгодный вид нефте-транспорта. С ростом транспорта нефти в СССР возникает необходимость в постановке общей задачи транспорта нефти по магистральным нефтепроводам и выбора оптимального варианта с помощью ЭЦВМ.

В данной статье рассматривается задача о выборе оптимального варианта нефтепровода для наиболее сложного случая: "горячая перекачка" парафинистой и высоковязкой нефти. Для нефтепроводов предусматривается следующий состав сооружений: линейная часть, головные насосные станции (ГНС), пункты подогрева (ПП), промежуточные перекачечные станции (НС).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оптимальный вариант магистрального нефтепровода (ОВМН), обеспечивающий в заданное время подачу заданных количеств нефти потребителям по трассе и в конце нефтепровода при минимальных затратах, может определяться по минимальным капиталовложениям, эксплуатационным расходам или по приведенным затратам.

Для выбора ОВМН с помощью ЭЦВМ исходными данными являются:

- а) структура дерева линейной части нефтепровода;
- б) расход нефти у потребителей по трассе и в конце нефтепровода;
- в) характеристика нефти;
- г) точки вводов и отводов нефти по магистрали и их характеристики;
- д) возможные точки расположения ГНС, ПП, НС по трассе нефтепровода;
- е) тип и мощность насосных агрегатов и их характеристики;
- з) ассортимент труб для сооружения линейной части нефтепровода;
- ж) затраты на один километр нефтепровода и на насосные агрегаты различных типоразмеров.

На основе исходных данных, используя различные расчетные зависимости, могут быть определены: оптимальные сочетания диаметров труб на всех участках нефтепровода, включая подводы и отводы; оптимальные типы и числа ГНС, ПП, НС; оптимальные числа совмещенных станций; затраты по оптимальному варианту нефтепровода.

Метод последовательного анализа вариантов и его применение к выбору ОВМН

Метод последовательного анализа вариантов применяется в задаче выбора ОВМН в частной форме, соответствующей так называемому "принципу монотонной рекурсии". Пусть задана функция $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на совокупности $G = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ последовательностей, на которые наложены определенные ограничения. Пусть далее функция $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид $c(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi_n[x_n, x_{n-1}, \psi_{n-1} \times \dots \times [x_{n-1}, x_{n-2}, \psi_{n-2}[\dots \psi_1(x_1, x_0)]] \dots]$.

Определение. Функция $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется монотонно рекурсивной, если она является строго монотонной по ψ_k , $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Последовательности $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем называть траекториями (вариантами), а их части вида (x_1) , (x_1, x_2) , $(x_1, x_2, x_3), \dots$ отрезками траектории соответствующей длины.

Пусть требуется определить точку $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ из совокупности $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, для которой достигается

$$c(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \min_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in G} c(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Этот вариант будем называть оптимальным. Справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть заданы два отрезка длиной k :

$$(x_1^1, x_2^1, \dots, x_k^1), (x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2), \text{ причем} \\ \psi_k[x_k^1, x_{k-1}^1, \psi_{k-1}[\dots \psi_1(x_1^1, x_0^1)]] \dots < \\ < \psi_k[x_k^2, x_{k-1}^2, \psi_{k-1}[\dots \psi_1(x_1^2, x_0^2)]] \dots],$$

множество допустимых продолжений (см. ниже) отрезка $(x_1^1, \dots, x_k^1)$ включает в себя множество допустимых продолжений отрезка $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$, т.е. $\{x_{k+1}, \dots, x_n | x_1^1, \dots, x_k^1\} \supseteq \{x_{k+1}, \dots, x_n | x_1^2, \dots, x_k^2\}$. Тогда $\min c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не может достигаться на траекториях, являющихся продолжениями отрезка траектории $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_k^2)$.

При определении ОВМН в целом функцией, которую нужно минимизировать, является функция, выражающая общие затраты, которые в данном случае являются суммой затрат по отдельным участкам нефтепровода, включая и отводы (подводы). Если через x_k обозначить проектное решение по k -му расчетному участку и через c затраты по всему нефтепроводу, то

$$c(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1(x_1) + c_2(x_2) + \dots + c_n(x_n),$$

где $c_i(x_i)$ — расход на i -ый участок.

Легко показать, что функция $c(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является монотонно рекурсивной.

Общая структура алгоритма для нахождения минимума монотонно-рекурсивной функции может быть выражена следующим образом:

1. Рассчитываются и сопоставляются различные варианты участка 1. Из сравнимых (см. ниже) вариантов ЭЦВМ запоминает информацию о более перспективном варианте, т.е. варианте, имеющем меньшие затраты.

2. Перспективные варианты участка 1 продолжаются всеми вариантами участка 2 с помощью сочетаний всех вариантов участков 1 и 2. Аналогично перспективные варианты решения всех участков определяются. В результате последовательного решения всех участков определяются технические решения, обеспечивающие минимальные затраты на нефтепровод.

Как показывает практика, совмещенные ПП и ГНС экономически выгоднее отдельно сооруженных. Оптимальное число совмещенных станций может определяться следующим алгоритмом. Обозначим через n_1 и n_2 , соответственно, числа ГНС и ПП.

Пусть $n_1 > n_2$. Для того, чтобы совмещение станций было возможным, необходимо, чтобы n_2 было кратным n_1 . Существует два способа нахождения оптимального числа совмещенных станций. В общем случае $\frac{n_1}{n_2} = \kappa + \frac{c}{n_2} = \frac{\kappa n_2 + c}{n_2}$.

I Способ

Наименьшее число, которое надо прибавить к числителю, чтобы знаменатель был ему кратен, равно $(n_2 - c)$;

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\kappa n_2 + c + n_2 - c}{n_2} = \frac{n_2(\kappa + 1)}{n_2} = \kappa + 1.$$

II Способ

Изменение и числителя, и знаменателя для определения ближайшего кратного.

Увеличим знаменатель на величину d , а числитель на x . Подберем x так, чтобы отношение нового числителя к новому знаменателю стало кратным κ . Тогда

$$\frac{n_1 + x}{n_2 + d} = \kappa \frac{n_2 + d}{n_2 + d} = \frac{\kappa n_2 + \kappa d}{n_2 + d} = \frac{\kappa n_2 + c + x}{n_2 + d},$$

откуда $x = \kappa d - c$. Но x должно быть наименьшим целым числом, для которого $\kappa d - c \geq 0$, тогда полагаем d равным округленному в большую сторону значению $\frac{c}{\kappa}$. Обозначим это значение через d , тогда искомое значение $x = \kappa d - c$.

Эти способы ведут к дополнительным затратам на строительство перекачивающих станций и пунктов подогрева. Пусть K_{n_1} — вложение на строительство станций типа n_1 , а K_{n_2} — вложение на строительство станций типа n_2 . Первый способ требует дополнительных затрат на строительство $n_2 - c$ станций типа n_1 . При этом требуются дополнительные капиталовложения на сумму $K_{n_1}(n_2 - c)$. Второй способ требует дополнительных капиталовложений на сумму

$$K_{n_1}(\bar{d}\kappa - c) - \bar{d}K_{n_2}.$$

Сравниваем I и II способы и проверяем, какой из двух вариантов экономичнее. Выбираем лучший.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

При определении ОБМН используется схема последовательного анализа вариантов и минимизируется функция, которая выражает общие затраты на нефтепровод, представляющие собой сумму затрат по отдельным участкам нефтепровода, включая отводы (подводы). При анализе вариантов для выбора оптимального из них определяется условие их сопоставимости, которое обеспечивает одинаковое развитие вариантов на последующем участке. Для этого необходимо, чтобы параметры нефти, передаваемые в следующий участок, были равны соответствующим параметрам на предыдущем участке. К указанным параметрам относятся количество нефти, ее удельный вес и т. д.

Так как в предлагаемой работе сопоставление производится по давлению и температуре, то предполагается, что при изменении дав-

ления и температуры в участках изменение остальных параметров настолько мало, что ими можно пренебречь.

Сопоставление вариантов производится по следующим правилам: пусть на плоскости (p, t) определена некоторая сетка, имеющая шаг Δ . Обозначим через g_{ij} квадрат со стороной $\Delta > 0$, центр которого находится в точке (p_i, t_j) , и предположим, что для любых двух точек этого квадрата p и t могут считаться равными.

Определение. Для каждой фиксированной пары i, j все отрезки, концы которых принадлежат квадрату g_{ij} , называются сравнимыми.

Определение. Среди сравнимых отрезков лучшим считается тот, при котором функция стоимости (минимизируемая функция) принимает наименьшее значение.

Введем следующие обозначения: в κ -ом шаге $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}; \dots; p_{\kappa} t_{s_{\kappa}}}$ — лучшие отрезки, а $x_{p_0 t_{s_0}; \dots; p_{\kappa} t_{s_{\kappa}}}$ — отрезок, имеющий наименьшие суммарные затраты среди лучших отрезков, где $\kappa = 1, 2, \dots, n$; $s_{\kappa} = 1, 2, \dots, q_{\kappa}$, а q_{κ} — число лучших отрезков на κ -ом шаге. Отметим, что при $\kappa = n$ вариант $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}; \dots; p_n t_{s_n}}$ является оптимальным решением и процесс решения заканчивается.

На κ -ом шаге $x_{p_0 t_{s_0}; \dots; p_{\kappa} t_{s_{\kappa}}}$ определяется следующим образом:

1. Пусть $\kappa = 1$. Вычислим для каждого j ($j = 1, 2, \dots, q_1$) расход, соответствующий отрезкам, приводящим в квадраты, взятые на прямой $p_0 t$. Так как для каждого квадрата все входящие отрезки являются сравнимыми, то среди них выбираем лучший. Таким образом получаем $x_{p_0 t_{s_1}; p_1 t_{s_1}}$, где $s_1 = 1, 2, \dots, q_1$.

2. Пусть $\kappa = 2$. Возьмем любой квадрат g_{2j} , $j = 1, \dots, q_2$ (т. е. g_{2, s_2}). Вычислим все расходы, соответствующие отрезкам, приводящим в квадраты g_{1s_1} ($s_1 = 1, 2, \dots, q_1$), для чего сравниваем все сочетания суммы расходов $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}}$ с вычисленными расходами. Таким образом для каждого квадрата определяем лучший отрезок $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}; p_2 t_{s_2}}$ после чего определяем $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}; p_2 t_{s_2}}$.

В процессе определения лучших отрезков, на основе леммы 1 остальные отрезки отбрасываются, что при увеличении числа квадратов g_{ij} приводит к увеличению числа операций арифметическим порядком в отличие от геометрического порядка. Далее процесс продолжается аналогично и $x_{p_0 t_{s_0}; p_1 t_{s_1}; \dots; p_{\kappa} t_{s_{\kappa}}}$ является оптимальным вариантом на κ -ом шаге. Результаты расчета являются исходными данными для вычисления расхода на $(\kappa + 1)$ -ом шаге. Структура алгоритма для нахождения минимума монотонно-рекурсивной функции состоит в следующем:

1. Для всех вариантов вычисляются тепловые и гидравлические показатели и определяются затраты.

2. Лучшие варианты первого участка продолжают всеми возможными вариантами второго участка.

Запоминается информация о более перспективных сочетаниях первого и второго участков. Для развития вариантов линейной части принимается, что в концах расчетных участков давление и температура нефти принимают ряд допустимых дискретных значений.

Схема построения решения задачи оптимального варианта нефтепровода при помощи ЭЦВМ состоит в следующем:

1. Из исходных данных выбирается информация о первом участке.
2. По формулам теплового и гидравлического расчета вычисляются давление и температура в конце расчетного участка.

3. Определяются затраты по линейной части первого варианта первого участка.

4. Давление в конце первого участка принимается последовательно по соответствующей таблице, и выполняются тепловые и гидравлические расчеты до тех пор, пока давление в конце первого участка не достигнет минимально допустимого ($P_{\min}^{\text{доп}}$), при условии, что температура (соответствующая) нефти принимает значение не меньше минимально необходимого ($t_{\min}^{\text{доп}}$).

В зависимости от характеристики точки в конце расчетного участка вычисление выполняется по одному из нижеследующих способов:

1. В отмеченной точке имеется отвод (подвод):
 - а) определяются по таблице затраты на отвод (на подвод) при давлении и температуре, равных давлению и температуре в магистрале или на ближайшем участке меньшем p и t ;
 - б) затраты на отвод (подвод) суммируются с затратами по линейной части нефтепровода;
 - в) определяется количество нефти после отвода (подвода).
2. В отмеченной точке возможно сооружение ГНС, ПП или НС:
 - а) в зависимости от типа и мощности ГНС, ПП и НС определяются затраты по соответствующей таблице;
 - б) число ГНС, ПП и НС определяется по соответствующим формулам;
 - в) определяются полные затраты на ГНС, ПП и НС;
 - г) затраты по линейной части суммируются с полными затратами на ГНС, ПП и НС, с помощью чего производится выбор лучшего варианта, за последующие давления и температуру принимаются давление нагнетания станций и температура при выбранном давлении.

3. В отмеченной точке имеется отвод (подвод) и возможно сооружение ГНС, ПП и НС:

- а) принимается, что отвод сооружается до компрессорной станции. Расчеты сперва выполняются по способу 1, а затем с учетом количества нефти, поступившей в отвод, расчет выполняется по способу 2. Определяются общие затраты по линейной части, отводу, компрессорной станции;
- б) принимается, что отвод сооружается после компрессорных станций. Расчет выполняется по способу 1 с учетом (p , t) на компрессорных станциях. Сравниваются полученные общие затраты по а) и б) и выбирается способ, соответствующий меньшим затратам.

4. Построение вариантов на последующих участках выполняется аналогично построению вариантов первого участка, с той лишь разницей, что рассматриваются оставшиеся варианты после отсева неоптимальных.

Экономические расчеты

1. Определяются затраты по линейной части для данного расчетного участка: $C_l = C_i \cdot l$, где C_i — затраты на каждый километр (тыс. руб/км), l — длина участка (км).

2. Определяются затраты по станциям для данного участка:

$$C_{\text{ст.}i} = C_i'' + C_i''' + C_i'''' + C_{\text{сов.}i},$$

где C_i'' — затраты по ГНС, C_i''' — затраты по НС, C_i'''' — затраты по ПП и $C_{\text{сов.}i}$ — затраты по совмещенным станциям.

3. Определяются затраты по всему расчетному участку, включая отвод (подвод):

$$C_{\text{уч.}i} = C_l + C_{\text{ст.}i} + C_{\text{от.}i},$$

где $C_{\text{от.}i}$ — затраты на отвод (подвод).

4. Затраты по всему нефтепроводу вычисляются по формуле

$$C = \sum_{i=1}^n C_{\text{уч.}i},$$

где n — число расчетных участков нефтепровода.

Нетрудно оценить число операций, необходимых для реализации указанного выше алгоритма. Пусть на прямой p_0 имеется q_0 точек, прямой p_{k+1} лучший отрезок находится перебором q_k чисел (значений функций), что осуществляется q_{k+1} -способами, каждый из которых представляет собой отрезки двух звеньев. Таким образом количество операций равно

$$\sum_{k=1}^n q_k \cdot q_{k+1} + q_n \sim q^2 \cdot n,$$

где $q = \max_k q_k$, а n — число точек на прямой p_n .

Замечание. По этим способам при ИК АН УССР на машине М-20 решена конкретная задача „О выборе оптимального сочетания диаметров сложного магистрального нефтепродуктопровода“, что является частным случаем настоящей работы при $t = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михалевич В. С. „Кибернетика“, 1965, № 1, 2.
2. Константинов Н. Н. Эксплуатация, наладка и рационализация передового хозяйства нефтебаз. М., 1945.
3. Черников В. Н. Перекачка вязких и застывающих нефтей. Техиздат, 1958.

Поступило 8. II 1968

М. Р. Сэмэндэр

ЕРНМ васитэсилэ мурэккэб нефт кэмэрлэринин оптималь вариантынын сечилмэси

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ жүксэк өзлүлүклү вэ парафинли нефтлэрин нэглижаты үчүн мурэккэб нефт кэмэрлэринин оптималь хэллинин ардычыл тэһлил үсулу илэ тапылмасындан бэһс едилир. Верилэн кэмижэтлэрэ көрө, нефт кэмэринэ сэрф олуан үмүм хэрчин азалдылмасы эсасында диаметрлэрин оптималь бирлижи (ујгунлашмасы), гыздырма, совурма вэ бирлэшдирилмиш стансијаларын оптималь сајы тэјин едилир.

Р. А. БАЙРАМОВ

О ПРЕДИКАТНОЙ ХАРАКТЕРИЗУЕМОСТИ ПОДАЛГЕБР МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ

Пусть A — произвольное множество ($|A| \geq 2$); через $P_A^{(n)}$ обозначается совокупность всех функций, зависящих не более, чем от n аргументов, и принимающих значения из A при изменении аргументов в A ; $P_A = \bigcup_{1 \leq n < \omega} P_A^{(n)}$ — совокупность всех функций $|A|$ -значной логики;

при $A = E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ употребляется обозначение P_k . Алгебру $P_A = \langle P_A; \eta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ назовем алгеброй Поста на множестве A , алгебру $P_k = \langle P_k; \eta, \tau, \Delta, \nabla, * \rangle$ — соответственно, алгеброй Поста ранга k (определение операций $\eta, \dots, *$ см. в [1], где P_A называется итеративной алгеброй на множестве A); отметим также, что иногда ([1, 2] алгеброй Поста порядка k называют всякую алгебру из многообразия, порожденного некоторой функционально полной алгеброй $\langle E_k; F \rangle$. Во избежание путаницы мы употребляем термин „ранг“ вместо термина „порядок“ (см. также [3, 4]).

Через $L(P_A)$ (соответственно $L(P_k)$) обозначим решетку подалгебр алгебры P_A (соответственно P_k). Решетка $L(P_2)$ была полностью описана Э. Постом в [5]; им же высказана гипотеза об отсутствии принципиальных качественных различий между конечнозначными логиками. Однако в последнее десятилетие было дано несколько различных опровержений этой гипотезы (см. [6, 7, 8,] и др.), а именно: были обнаружены принципиальные отличия $P_k (k \geq 3)$ от P_2 . В качестве примера можно упомянуть результат [6] о континуальности $L(P_k)$ при $k \geq 3$ (решетка $L(P_2)$ счетна). Можно привести также некоторые качественные отличия $P_k (k \geq 4)$ от $P_l (l \leq 3)$ и далее $P_k (k \geq 5)$ от $P_l (l \leq 4)$, однако здесь мы этого делать не будем, так как общей конструкции, позволяющей для любого натурального m качественно отличать $P_k (k \geq m)$ от $P_l (l \leq m-1)$, до сих пор не существует. Установленные различия требуют более детального исследования P_k при $k \geq 3$.

Введем используемые в дальнейшем понятия и обозначения. Цепь (линейно упорядоченное множество) C в решетке $L(P_k)$ назовем внутренне неуплотняемой, если для любых $M, N \in C$ таких, что $M < N$, из $\exists K \in L(P_k) (M < K < N)$ следует $K \in C$. Множество всех внутренне неуплотняемых цепей решетки $L(P_k)$, начинающихся в P_k и кончающихся в фиксированном элементе $M \in L(P_k)$, обозначим $[(P_k, M)]$. Если $C \in [\text{comp}(P_k)]$ (определение множества $[\text{comp}(A)]$ для произвольной алгебры A см. в [9]), и $M \in C$, то глубиной элемента M в цепи C

назовем кардинальное число $h(M, C) \stackrel{\text{df}}{=} |C_{\geq M}|$, где $C_{\geq M}$ — множество элементов цепи C , содержащих M . Глубиной элемента M в решетке $L(P_k)$ назовем кардинальное число $h(M) \stackrel{\text{df}}{=} \min_{C^* \in [(P_k, M)]} |C^*| = \min_{M \in C \in [\text{comp}(P_k)]} h(M, C)$ (так как всякое множество мощностей вполне упорядочено, то пишем $\min$ вместо $\inf$).

Очевидно (в силу счетности P_k), для любого $M \in L(P_k)$ $h(M) \leq \omega$. Множество всех элементов $M \in L(P_k)$, имеющих фиксированную конечную глубину h , назовем h -ым ярусом решетки $L(P_k)$; в частности P_k . Напомним также, что для алгебры A через $l(A)$ обозначается проводимость решетки $L(A)$ (см. [9]).

Далее для любого определенного на E_k предиката ρ через $I(\rho)$ обозначим область истинности ρ , через $\text{sp}(\rho)$ — множество всех спецификаций, присутствующих в $I(\rho)$, и через $\text{St}(\rho)$ — стабилизатор предиката ρ [3]. Очевидно, $\text{St}(\rho)$ при любом ρ является подалгеброй в P_k , однако это не означает, что всякая подалгебра в P_k представима в виде $\text{St}(\rho)$ при некотором ρ . Подалгебру $M \in L(P_k)$ назовем предикатно характеризуемой, если существует определенный на E_k конечноместный предикат ρ такой, что $M = \text{St}(\rho)$. Всякая подалгебра в P_k , не содержащая тождественной функции $f(x) \equiv x$, не является предикатно характеризуемой, так как $f(x) \equiv x$ сохраняет любой предикат (такие подалгебры в P_k существуют).

Как показано А. В. Кузнецовым [10], все максимальные в P_k подалгебры (то есть элементы второго яруса $L(P_k)$) предикатно характеризуемы, причем местности характеризующих предикатов не превышают k .

Определение. Скажем, что решетка $L(P_k)$ обладает верхней границей предикатной характеризуемости (сокращенно в. г. п. х.), если существует натуральное число $\mu(k)$ такое, что для всех $\nu < \mu$ ν -ый ярус $L(P_k)$ содержит только предикатно характеризуемые подалгебры, но в μ -ом ярусе $L(P_k)$ есть хотя бы одна предикатно нехарактеризуемая подалгебра. Скажем также, что $L(P_k)$ обладает нижней границей предикатной характеризуемости (сокращенно н. г. п. х.), если существует натуральное число $\mu(k)$ такое, что $(\mu-1)$ -ый ярус $L(P_k)$ содержит хотя бы одну предикатно характеризуемую подалгебру, и для всех $\nu \geq \mu$ ν -ый ярус $L(P_k)$ таковых не содержит.

А. И. Мальцевым в [11] были поставлены следующие вопросы:

- I. Обладает ли $L(P_k)$ в. г. п. х. при любом k ? Если обладает, то вычислить или оценить $\mu(k)$.
- II. Обладает ли $L(P_k)$ н. г. п. х. при любом k ? Если обладает, то вычислить или оценить $\mu(k)$.

З а м е ч а н и е. Очевидного факта существования в P_k предикатно нехарактеризуемых подалгебр недостаточно для доказательства существования в. г. п. х. в $L(P_k)$. Для этого нужно указать не произвольную предикатно нехарактеризуемую подалгебру в P_k , а такую предикатно нехарактеризуемую подалгебру $M \in L(P_k)$, что $[(P_k, M)]$ содержит цепь C^* мощности $|C^*| < \omega$. При доказательстве отсутствия в $L(P_k)$ н. г. п. х. (такая гипотеза имеется) изолированное рассмотрение какой-либо одной цепи с желаемым свойством уже не помогает: здесь недостаточно показать, что $\exists C \in [\text{comp}(P_k)] \exists C_1 \subseteq C \forall M \in C_1 \exists \rho ((M = \text{St}(\rho)) \wedge (|C_1| = \omega))$, так как аргумент возможно, что для каждого элемента $M \in C_1$ найденной нами цепи C с указанным свойством найдется конечная цепь $C^* \in [(P_k, M)]$ и тогда $\forall M \in C_1 (h(M) < \omega_0)$. Таким образом, хотя из [5] следует, что в P_2 такой ситуации быть не

может, и поэтому в $L(P_2)$ нет н. г. п. х., перенесение этого результата на случай $k \geq 3$ требует специального исследования.

Здесь мы докажем, что $L(P_k)$ при любом $k \geq 2$ обладает в. г. п. х., и получим оценку $\bar{\mu}(k) \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4$ для $k \geq 8$, $\bar{\mu}(k) \leq k + 1$ для $k \leq 7$.

Решение вопроса о н. г. п. х. в $L(P_k)$ будет приведено автором в другой статье.

Определение. Спецификацию $x \in \text{sp}(\rho)$ назовем Π -тупиковой, если в $\text{sp}(\rho)$ не существует спецификаций, меньших x . Длиной спецификации $\|\xi_1, \dots, \xi_t\|$ назовем число t (число классов разбиения $R: \xi_1 + \dots + \xi_t$ множества $\{1, \dots, l\}$, где l — местность ρ).

Теорема 1. При любом $k \geq 2$ $L(P_k)$ обладает в. г. п. х.

Доказательство. Пусть Ω_k — симметрическая полугруппа k -ой степени; очевидно, множество $\nabla(\Omega_k)$ всех функций, зависящих не более, чем от одного аргумента, образует подалгебру в P_k . Покажем, что $\nabla(\Omega_k)$ предикатно нехарактеризуема. Допустим противное: $\exists \rho(\nabla(\Omega_k) = \text{St}(\rho))$, где местность ρ равна $l < \omega$. Пусть далее $\|\xi_1, \dots, \xi_t\|$ есть Π -тупиковая в $\text{sp}(\rho)$ спецификация максимальной длины и набор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$ — ее представитель в $I(\rho)$. Через $E_k^l(t)$ обозначим множество всех наборов из E_k^l , каждый из которых имеет не более t различных компонент. Нетрудно заметить, что предположение $\nabla(\Omega_k) = \text{St}(\rho)$ вместе с условием $\alpha \in I(\rho)$ приводит к $I(\rho) = E_k^l(t)$. Но тогда подалгебра $\text{St}(\rho)$ должна совпадать с подалгеброй $A^t \cup \nabla(\Omega_k)$, где A^t — совокупность всех функций, принимающих не более t значений, что при любом t приводит к противоречию с предположением $\nabla(\Omega_k) = \text{St}(\rho)$. Итак подалгебра $\nabla(\Omega_k)$ предикатно нехарактеризуема. С другой стороны, из [12] следует, что при $k \geq 3$ $[(P_k, \nabla(\Omega_k))]$ содержит цепь длины $k+1$; кроме того, из [5] непосредственно извлекаем $h(\nabla(\Omega_2)) = 3$. Следовательно, при любом $k \geq 2$ $h(\nabla(\Omega_k)) \leq k+1$. Конечность $h(\nabla(\Omega_k))$ вместе с предикатной нехарактеризуемостью $\nabla(\Omega_k)$ позволяют сделать заключение о существовании в $L(P_k)$ при любом $k \geq 2$ в. г. п. х.

Следствие. $\bar{\mu}(k) \leq k+1$; в частности $\bar{\mu}(2) = 3$. Сейчас мы докажем оценку для $\bar{\mu}(k)$, которая лучше предыдущей для $k \geq 8$.

Теорема 2. При $k \geq 3$ $\bar{\mu}(k) \geq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 4$.

Доказательство. Пусть $\Omega_{k,k-1} = \{S: S \in \Omega_k, |S(E_k)| \leq k-1\}$. Очевидно, множество $A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1})$ образует подалгебру в P_k причем предикатно нехарактеризуемую, так как в ней не содержится $f(x) \equiv x$. Докажем, что $h(A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1})) \leq l(\sigma_k) + 1$, где σ_k — симметрическая группа k -ой степени (в значении $l(\sigma_k)$ учтено предположение $\emptyset \in L(\sigma_k)$, вводимое для единообразия [9]). Для этого достаточно указать в $[(P_k, A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1}))]$ цепь длины $l(\sigma_k) + 1$. Известно [13], что подалгебра $A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_k)$ максимальна в P_k . Пусть далее $\{\sigma_k = M_0, M_1, \dots, M_s = \{E\}, M_{s+1} = \emptyset\} = C \in \left[\min_{\text{comp}}(\sigma_k) \right]$ и $L_i, A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1} + M_i), 1 \leq i \leq s, s = l(\sigma_k) - 2$. Нетрудно заметить, что цепь $C^* = \{P_k, A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_k), L_1, \dots, L_s, A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1})\}$ внутренне неуплотняема, т. е. $C^* \in [(P_k, A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1}))]$. Кроме того, имеем: $|C^*| = s + 3 = l(\sigma_k) + 1$. Итак, $h(A^{k-1} \cup \nabla(\Omega_{k,k-1})) \leq l(\sigma_k) + 1$; остается заметить, что $l(\sigma_k) \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 3$ [9]. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос о выполнимости равенств $\text{St}(\rho) = P_{A,\alpha}$, $\text{St}(\rho) = P_{A,\alpha}$, где $P_{A,\alpha}$ — обобщение алгебры P_A , которое мы введем

ниже. В [3] автором было найдено* необходимое и достаточное условие выполнимости $\text{St}(\rho) = P_k$ для случая конечноместных предикатов. Сейчас мы переформулируем это условие в терминах, в которых будут сформулированы обобщения.

Определение. Пусть натуральное число l — местность определенного на E_k предиката ρ , $\text{sp}(E_k^l) = \langle \text{sp}(E_k^l); \geq, \Pi \rangle$ — множество всех спецификаций наборов из E_k^l , $L_{\text{sp}}^l = \langle \text{sp}(E_k^l); \geq, \Pi \rangle$ — алгебраическая система на множестве $\text{sp}(E_k^l)$ с предикатом $\geq$ и операцией Π , вводимыми с помощью понятий укрупнения и измельчения разбиений множества $\{1, \dots, l\}$ (см. [3]). Фильтром в L_{sp}^l назовем всякую ее подсистему F , удовлетворяющую для любого натурального m условию

$$\forall y, x_1, \dots, x_m \in L_{\text{sp}}^l \left((y, x_1, \dots, x_m \in F) \leftrightarrow ((\exists z: z \geq y) \in F) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^m x_j \in F \right) \right).$$

Множество всех фильтров в L_{sp}^l обозначим $F(L_{\text{sp}}^l)$. Далее скажем, что $I(\rho)$ правильно относительно $\text{sp}(\rho)$, если для любой спецификации $x \in \text{sp}(E_k^l)$ из $x \in \text{sp}(\rho)$ следует, что $I(\rho)$ содержит все наборы из E_k^l со спецификацией x . Теперь вышеуказанное условие из [3] можно сформулировать так: для l -местного (l — натуральное число) предиката ρ $\text{St}(\rho) = P_k$ тогда и только тогда, когда $\text{sp}(\rho) \in F(L_{\text{sp}}^l)$ и $I(\rho)$ правильно относительно $\text{sp}(\rho)$. Нетрудно заметить, что случай $\text{St}(\rho) = P_A$ (A — произвольное, ρ — конечноместный предикат) исчерпывается аналогично, а именно: назвав $I(\rho)$ правильным относительно $\text{sp}(\rho)$, если для любой $x \in \text{sp}(A^l)$ из $x \in \text{sp}(\rho)$ следует принадлежность $I(\rho)$ любого набора из A^l со спецификацией x , получим следующее утверждение.

Теорема 3. Для произвольного A ($|A| \geq 2$) и произвольного l -местного (l — натуральное число) предиката ρ $\text{St}(\rho) = P_A$ тогда и только тогда, когда $\text{sp}(\rho) \in F(L_{\text{sp}}^l)$ и $I(\rho)$ правильно относительно $\text{sp}(\rho)$.

Определение. γ -местным (γ — бесконечное кардинальное число) предикатом на множестве A назовем всякое отображение A^γ в $\{0, 1\}$. Множество $\text{sp}(A^\gamma)$, система L_{sp}^γ и множество $F(L_{\text{sp}}^\gamma)$ определяются аналогично $\text{sp}(A^l)$, L_{sp}^l , $F(L_{\text{sp}}^l)$. Фильтр $F \in F(L_{\text{sp}}^\gamma)$ назовем главным, если $\exists x \in L_{\text{sp}}^\gamma (F = \{y: y \geq x\})$, что эквивалентно выполнению в F для любого кардинального числа δ условия

$$\forall x_1, \dots, x_\delta \in L_{\text{sp}}^\gamma \left((x_1, \dots, x_\delta \in F) \leftrightarrow \left(\bigwedge_{\beta < \delta} x_\beta \in F \right) \right).$$

Множество всех главных фильтров в L_{sp}^γ обозначим $F^*(L_{\text{sp}}^\gamma)$. Наконец, введем понятие, промежуточное между фильтром и главным фильтром. Фильтр $F \in F(L_{\text{sp}}^\gamma)$ назовем θ -фильтром (θ — фиксированное бесконечное кардинальное число), если

$$\forall x_1, \dots, x_\theta \in L_{\text{sp}}^\gamma \left((x_1, \dots, x_\theta \in F) \leftrightarrow \left(\bigwedge_{\beta < \theta} x_{i_\beta} \in F \right) \right); \quad x_{i_\beta} \in \{x_1, \dots, x_\theta\}$$

В зависимости от „величин“ θ, γ θ -фильтр может быть и может не быть главным фильтром. Множество всех θ -фильтров в L_{sp}^γ обозначим $F^\theta(L_{\text{sp}}^\gamma)$. Очевидно, для любого натурального l имеем $\forall \theta (F(L_{\text{sp}}^l) = F^\theta(L_{\text{sp}}^l) = F^*(L_{\text{sp}}^l))$.

Определение. Назовем $|A|$ — значной логикой с границей местностей α (α — бесконечное кардинальное число) и обозначим через $P_{A,\alpha}$ совокупность всех функций, принимающих значения из A при $P_{A,\alpha}$ — совокупности α местностей которых строго меньше α . Далее изменении аргументов в A , местности которых строго меньше α . Далее в (A, α) -алгеброй Поста назовем алгебру $P_{A,\alpha} = \langle P_{A,\alpha}; \geq \rangle$, где сис-

* С. В. Яблонский сообщил автору, что это условие найдено также И. Ж. Розенбергом, однако не опубликовано.

УДК 8Б39, 8Б569

В. Г. ГАДЖИЕВ

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ПЛОТНОСТЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ МЕР В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Известно, что когда характеристическая функция $\varphi(z)$ некоторого вероятностного распределения в R^m абсолютно интегрируема R^m по лебеговской мере, то это распределение имеет плотность $p(x)$ относительно лебеговской меры, которая определяется с помощью формулы обращения

$$p(x) = (2\pi)^{-m} \int \exp\{-i(x, z)\} \varphi(z) dz.$$

Аналогичный результат получен А. В. Скороходом в [1] для вероятностных мер в гильбертовом пространстве. Однако в гильбертовом пространстве мера, инвариантная относительно сдвигов (аналог лебеговой меры), не будет σ -конечной, что весьма ограничивает ее применение. Поэтому в [1] дается формула обращения для плотности $p(x)$ вероятностного распределения μ относительно некоторой фиксированной вероятностной меры ν_0 , и эта формула зависит от выбора ν_0 . В [1] в качестве меры ν_0 берется гауссова мера. Здесь рассматривается знакопеременная мера μ , абсолютно непрерывная относительно гауссовой меры ν_0 . Построена формула обращения, затем доказана основная теорема о формуле обращения и рассмотрен пример на применение теоремы.

2. Пусть H —сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) ; B — σ -алгебра борелевских множеств в H . Предположим, что на B заданы две меры ν_0 и μ , причем ν_0 гауссова мера с характеристическим функционалом

$$\varphi_0(z) = \int \exp\{i(z, x)\} \nu_0(dx) = \exp\left\{-\frac{1}{2} (Az, z)\right\},$$

где A —симметричный неотрицательный, вполне непрерывный оператор с конечным следом, а μ —знакопеременная конечная мера, абсолютно непрерывная относительно ν_0 , т. е. для всех $E \in B$ $\mu(E) = \int_E p(x) \nu_0(dx)$, причем $\int |p(x)| \nu_0(dx) < \infty$. Обозначим $\varphi(z) =$

$$= \int \exp\{i(z, x)\} p(x) \nu_0(dx).$$

Сначала приведем некоторые построения из [1]. Пусть $\tilde{\mu}$ —вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно ν_0 , с характери-

тема Ω сигнатурных операций позволяет выразить понятие суперпозиции для функций местности $< \alpha$. Например, $P_A = P_{A, \omega}$ и в этом случае $\Omega = \{\eta, \tau, \Delta, \nabla, *\}$.

Определение. Спецификационным Π -дефектом бесконечноместного предиката ρ назовем кардинальное число $\kappa = \min L$, где $L = \{\beta: \exists \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_\beta \in \text{sp}(\rho) (\bigcap_{\delta \leq \beta} \text{sp}(\tilde{\alpha}_\delta) \in \text{sp}(\rho))\}$; κ может быть конечным.

Если для всякого натурального l все три введенные разновидности фильтров в L_{sp}^l совпадают и поэтому для конечноместного предиката ρ условие выполнимости $\text{St}(\rho) = P_A$ не включает в себя мощностных характеристик предиката, то для бесконечного кардинального числа γ эти разновидности фильтров в L_{sp}^γ отличаются, и условие выполнимости $\text{St}(\rho) = P_{A, \alpha}$ (в том числе $\text{St}(\rho) = P_A = P_{A, \omega}$) для бесконечноместного предиката включает в себя зависимость между α и спецификационным Π -дефектом предиката. А именно: имеет место следующая

Теорема 4. Пусть ρ — γ -местный (γ —бесконечный кардинал) предикат со спецификационным Π -дефектом κ . Если $\alpha \leq \kappa$, то $\text{St}(\rho) = P_{A, \alpha}$ тогда и только тогда, когда $\text{sp}(\rho) \in F(L_{\text{sp}}^I)$ и $I(\rho)$ правильно относительно $\text{sp}(\rho)$. Если же $\alpha > \kappa$, то $\text{St}(\rho) = P_{A, \alpha}$ тогда и только тогда, когда $\text{sp}(\rho) \in F_\alpha(L_{\text{sp}}^I)$ и $I(\rho)$ правильно относительно $\text{sp}(\rho)$.

Доказательство извлекается из приведенных определений и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев А. И. Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика. Семинар, т. 5, вып. 2, 1966.
2. Rosenbloom P. Post algebras I. Postulates and general theory, Amer. J. of Math., 64, № 2, 1942.
3. Байрамов Р. А. ДАН Азерб. ССР*, 1968, № 2.
4. Байрамов Р. А. Дискретный анализ (Новосибирск), № 11, 1967.
5. Post E. Two-valued iterative systems, Princeton, 1941.
6. Янов Ю. И., Мучник А. А. ДАН СССР*, 127, № 1 (1959).
7. Мурский В. Л. ДАН СССР*, 163, № 4 (1965).
8. Линден Р. К. Тождества в двузначных исчислениях. Кибернетический сб. № 1 (1960).
9. Байрамов Р. А. Дискретный анализ (в печати).
10. Кузнецов А. В. Математика в СССР за 40 лет* т. 1, 102—115.
11. Мальцев А. И. Специальные классы моделей, спецкурс. НГУ, 1967.
12. Бурле Г. А. Дискретный анализ (Новосибирск). № 10, 1967.
13. Яблонский С. В. Тр. Матем. ин-та В. А. Стеклова, т. LI, 1958.

Поступило 17. X 1968

Р. А. Байрамов

Чохгјмэтли мэнтигин алт чэбрлэринин предикатик
сэчијјэлэндирилмэси һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә чохгјмэтли мэнтигин алт чэбрлэринин структурунда предикатик сэчијјэләнә билән алт чэбрләр үчүн јухары сәрһәддин варлығы исбат олунмуш вә бу сәрһәд гјмэтлиндирилмишдир.

стическим функционалом $\tilde{\varphi}(z)$ и плотностью $\tilde{\rho}(x)$. Допустим, что H_n — последовательность конечномерных подпространств (n означает размерность) пространства H , причем $H_n \subset H_{n+1}$ и $\bigcup_n H_n$ плотно в H , а

P_n — оператор проектирования на H_n . Обозначим через $\mu_0^n(E)$ и $\tilde{\mu}^n(E)$ меры на борелевских подмножествах в H , определенные равенствами $\mu_0^n(E) = \mu_0(P_n^{-1}E)$ и $\tilde{\mu}^n(E) = \tilde{\mu}(P_n^{-1}E)$, где $P_n^{-1}E$ — полный прообраз множества E при отображении P_n . Очевидно, $\tilde{\mu}^n$ абсолютно непрерывна относительно μ_0^n и допустим, что $\tilde{\rho}_n(x)$ есть ее плотность на H_n , а

$$\varphi_0^n(z) = \int_{H_n} \exp\{i(z, x)\} \mu_0^n(dx) = \int_H \exp\{i(z, P_n x)\} \mu_0(dx) = \varphi_0(P_n z)$$

и, аналогично, $\tilde{\varphi}^n(z) = \tilde{\varphi}(P_n z)$ являются характеристическими функциями мер μ_0^n и $\tilde{\mu}^n$. Таким образом при $z \in H_n$ функции φ_0^n и $\tilde{\varphi}^n$ совпадают с φ_0 и $\tilde{\varphi}$.

Предположим, что оператор A не имеет нулевых собственных значений. Тогда мера μ_0^n имеет на H_n плотность относительно лебеговской меры

$$\mu_0^n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det P_n A P_n)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1} x, x) \right\}, \quad (1)$$

где $\det P_n A P_n$ — детерминант матрицы оператора $P_n A P_n$ в некотором ортонормированном базисе в H_n . Поскольку μ_0^n — невырожденная гауссова мера в H_n и $\tilde{\mu}^n$ абсолютно непрерывна относительно μ_0^n , то $\tilde{\mu}^n$ также абсолютно непрерывна относительно лебеговской меры в H_n и пусть $\tilde{\rho}^n(x)$ обозначает ее плотность. Если $\int_{H_n} |\tilde{\varphi}^n(z)| dz < \infty$, тогда

известно, что

$$\tilde{\rho}^n(x) = (2\pi)^{-n} \int_{H_n} \exp \{-i(x, z)\} \tilde{\varphi}(z) dz. \quad (2)$$

Разделив (2) на (1), получим

$$\tilde{\rho}_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det P_n A P_n)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} x, x) \right\} \int_{H_n} \exp \{-i(x, z)\} \tilde{\varphi}(z) dz. \quad (3)$$

Введем на H_n гауссову меру μ_0^{*n} с плотностью относительно лебеговской меры $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det P_n A P_n)^{-\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} (Ax, x) \right\}$ и с характеристической функцией $\varphi_0^{*n}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1} z, z) \right\}$ ($z \in H_n$).

Таким образом $\varphi_0^{*n}(z) = \varphi_0^*(P_n z)$, где $\varphi_n^*(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1} z, z) \right\}$, и $\varphi_0^*(z)$ можно рассматривать как характеристический функционал некоторой обобщенной меры μ_0^* , так как A^{-1} неограничен на H . Причем по мере μ_0^* можем пока интегрировать лишь цилиндрические функции, т. е.

$$\int_H h(P_n z) \mu_0^*(dz) = \int_{H_n} h^n(x) \mu_0^{*n}(dx), \quad \text{где } h^n(x) = h(P_n x).$$

Используя это, формулу (3) можем преобразовать следующим образом, при $x \in H_n$:

$$\tilde{\rho}_n(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} x, x) \right\} \int_{H_n} \exp \{-i(z, x)\} \tilde{\varphi}^n(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} (Az, z) \right\} \mu_0^{*n}(dz)$$

или для $x \in H$

$$\tilde{\rho}_n(P_n x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} P_n x, P_n x) \right\} \int_H \exp \{-i(P_n z, P_n x)\} \frac{\tilde{\varphi}(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \mu_0^*(dz). \quad (4)$$

Для определения плотностей мер в гильбертовом пространстве основную роль играет

Лемма 1. Почти всюду по мере μ_0 на H имеет место соотношение $\lim_n \tilde{\rho}_n(P_n x) = \tilde{\rho}(x)$.

Доказательство содержится в лемме 3.1 из [2]. Используя эту лемму, можем написать, что

$$\tilde{\rho}(x) = \lim_n \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} P_n x, P_n x) \right\} \int_H \exp \{-i(P_n z, P_n x)\} \frac{\tilde{\varphi}(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \mu_0^*(dz). \quad (5)$$

Теперь приступим к построению формулы обращения.

Известно, что плотность $\rho(x)$ данной меры μ можно представить в виде разности $\rho(x) = \rho_1(x) - \rho_2(x)$, где $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ неотрицательны. Функциям $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ будут соответствовать две неотрицательные меры μ_1 и μ_2 , абсолютно непрерывные относительно μ_0 , с преобразованиями Фурье

$$\varphi_1(z) = \int \exp \{i(z, x)\} \mu_1(dx) \quad \text{и} \quad \varphi_2(z) = \int \exp \{i(z, x)\} \mu_2(dx).$$

Тогда

$$\varphi(z) = \int \exp \{i(z, x)\} \rho(x) \mu_0(dx) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z).$$

Для плотностей $\rho_1(x)$ и $\rho_2(x)$ могут быть построены функции $\rho_{1n}(P_n x)$ и $\rho_{2n}(P_n x)$, т. е. плотности соответственно мерам μ_1^n и μ_2^n относительно μ_0^n , и для них имеет место равенство (5). Тогда почти всюду по мере μ_0 будем иметь $\rho(x) = \lim_n \rho_n(P_n x)$, где

$$\begin{aligned} \rho_n(P_n x) &= \rho_{1n}(P_n x) - \rho_{2n}(P_n x) = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} P_n x, P_n x) \right\} \int \exp \{-i(P_n z, P_n x)\} \frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_n(P_n z)} \mu_0^*(dz). \end{aligned}$$

Итак

$$\rho(x) = \lim_n \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1} P_n x, P_n x) \right\} \int_H \exp \{-i(P_n z, P_n x)\} \frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \mu_0^*(dz). \quad (6)$$

Однако нельзя переходить к пределу под знаком интеграла в правой части (6), поскольку не можем интегрировать функции по мере μ_0^* , кроме цилиндрических. Но μ_0^* будет мерой в некотором расширении пространства H .

Пуст H_- — гильбертово пространство, являющееся пополнением H в метрике $(x, y)_- = (Ax, y)$. Далее пусть S — некоторый положительный симметричный оператор в H_- с конечным следом. Обозначим через H_+ гильбертово пространство, являющееся пополнением H_- в метрике $(x, y)_+ = (Sx, y)_-$. Введем также гильбертово пространство $H_+ \subset H$ со скалярным произведением $(x, y)_+ = (A^{-1}x, y)$. Очевидно

но, H_+ совпадает с областью значений оператора $A^{\frac{1}{2}}$. В [1] показано, что μ_0^* является мерой на H_- и что ее характеристический функционал определен на H_+ и равен $\varphi_0^*(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1}z, z) \right\}$, т. е. для всех $z \in H_+$ $\int_{H_-} \exp \{ i(z, x) \} \mu_0^*(dx) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (A^{-1}z, z) \right\}$.

Функция $\varphi_0(z)$, очевидно, определена на H_- . Так как μ_1 и μ_2 абсолютно непрерывны относительно μ_0 , то $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$ также определены на H_- и, следовательно, $\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$ тоже определен на H_- . Предположим теперь, что $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ продолжимо на H_- и это продолжение (обозначим его снова через $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$) абсолютно интегрируемо на H_- по мере μ_0^* , т. е.

$$\int_{H_-} \left| \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \right| \mu_0^*(dz) < \infty.$$

Тогда имеет смысл интеграл $\int_{H_-} \exp \{ -i(z, x) \} \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \mu_0^*(dz)$ ($x \in H_+$).

Отсюда, при перечисленных условиях, на H_+ определена функция

$$g(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1}x, x) \right\} \int_{H_-} \exp \{ -i(z, x) \} \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \mu_0^*(dz), \quad (7)$$

непрерывная в метрике H_+ .

3. Пусть P_n впредь означает оператор проектирования на подпространство, натянутое на первые n собственных векторов оператора A . Предположим также, что S коммутирует с A . Формулируемая ниже теорема дает связь между функцией $g(x)$, определенной формулой (7), и плотностью $\rho(x)$. По этой теореме $\rho(x)$ полностью определяется функцией $g(x)$. Сначала приведем две вспомогательные леммы.

Лемма 2. Пусть функция $\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ удовлетворяет условиям: для всех $z \in H_-$ существует предел $\lim_n (P_n z) = \psi(z)$ (предел обозначается тем же символом), причем $\int |\psi(z)| \mu_0^*(dz) < \infty$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\int |\psi(P_n z) - \psi(z)| \mu_0^*(dz) = O\left(e^{-\frac{1+\varepsilon}{2} n}\right). \text{ Тогда почти всюду по мере } \mu_0 \text{ на } H \text{ будет } \rho(x) \lim_n g(P_n x). \text{ Доказательство такое же, что и в [1].}$$

Лемма 3. Почти всюду по мере μ_0 имеем $\lim_n \rho(P_n x) = \rho(x)$.

Доказательство. Рассмотрим плотность $\rho_m(x) = \rho(P_m x)$. Ее преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \varphi_m(z) &= \int e^{i(z, x)} \rho_m(x) \mu_0(dx) = \int e^{i(z, P_m x)} P_m(x) e^{i(z, x - P_m x)} \mu_1(dx) = \\ &= \varphi(P_m z) \cdot \varphi_0(z - P_m z). \end{aligned}$$

$$\text{Отношение } \frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{\varphi(P_m z) \varphi_0(z - P_m z)}{\varphi_0(P_m z) \varphi_0(z - P_m z)} = \frac{\varphi(P_m z)}{\varphi_0(P_m z)} = \psi(P_m z)$$

продолжимо на H_- и $\int \left| \frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} \right| \mu_0^*(dz) < \infty$. Тогда для $\rho_m(x)$ существует функция $g_m(x)$, определенная формулой (7):

$$g_m(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1}x, x) \right\} \int \exp \{ -i(x, z) \} \frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} \mu_0^*(dz).$$

Из равенств

$$\frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} = \frac{\varphi(P_m P_n z) \varphi_0[(1 - P_m)P_n z]}{\varphi_0(P_m P_n z) \varphi_0[(1 - P_m)P_n z]} = \frac{\varphi(P_m z)}{\varphi_0(P_m z)} = \psi(P_m z) \text{ при } m < n$$

и

$$\int \left| \frac{\varphi_m(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} - \frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} \right| \mu_0^*(dz) = 0$$

вытекает, что $\frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)}$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда $\rho_m(x) = \lim_n g_m(P_m z)$ почти всюду по мере μ_0 . Следовательно, на H_+ имеет место равенство

$$\rho_m(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1}x, x) \right\} \int_{H_-} \exp \{ -i(z, x) \} \frac{\varphi_m(z)}{\varphi_0(z)} \mu_0^*(dz). \quad (8)$$

При любом $m > 0$ $P_m x \in H_+$ и значит для любого $x \in H$

$$\rho_m(P_m x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1}P_m x, P_m x) \right\} \int e^{-i(P_m x, P_m x)} \frac{\varphi(P_m z)}{\varphi_0(P_m z)} \mu_0^*(dz).$$

Но правая часть последнего есть $\rho_m(P_m x)$, т. е. плотность ρ^m относительно μ_0^m . Отсюда $\rho(P_m x) = \rho_m(P_m x) = \rho_m(P_m x)$. Тогда, используя лемму 1, имеем $\rho(P_m x) = \rho(x)$ почти всюду по мере μ_0 .

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: 1. $\rho(x)$ непрерывна на H_+ ; 1. $\lim_n \psi(P_n z) = \psi(z)$ для всех $z \in H_-$ и существует функция $\theta(z) \geq 0$ и $\int \theta(z) \mu_0^*(dz) < \infty$ такая, что $|\psi(P_n z)| \leq \theta(z)$ при всех n . Тогда для всех $x \in H_+$ $\rho(x) = g(x)$.

Доказательство. Действительно, из равенства (8) на H_+ имеем

$$\rho(P_n x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (A^{-1}x, x) \right\} \int_{H_-} \exp \{ -i(z, x) \} \psi(P_n z) \mu_0^*(dz).$$

Используя лемму 3, непрерывность $\rho(x)$ на H_+ , теорему о предельном переходе под знаком интеграла, и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим утверждение теоремы.

4. Рассмотрим следующий пример. Пусть $f(x)$ есть плотность меры ρ относительно гауссовой меры μ_0 с характеристическим функционалом

$$\varphi_0(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Az, z) \right\}.$$

Предположим, что $f(x) \in L^2(\mu_0)$, где $L^2(\mu_0)$ — пространство функционалов на H интегрируемых с квадратом по мере μ_0 , причем линейная оболочка функций $e^{i(z, u)}$ плотна в $L^2(\mu_0)$. Следовательно, существуют последовательности систем векторов $\{u_k^{(n)}\}$ и чисел $\{C_k^{(n)}\}$

такие, что $f(x) = \lim_n \sum_k C_k^m e^{i(u_k^m) \cdot x}$, предел берется в среднем квадратическом. Допустим, что найдется комплекснозначная (вообще) мера ν на H такая, что $f(x) = \int e^{i(x, u)} \nu(du)$. Предположим, что $\int |\nu|(du) < \infty$. Преобразование Фурье меры μ будет

$$\varphi(z) = \int e^{i(z, x)} f(x) \mu_0(dx) = \iint e^{i(z+u, x)} \mu_0(dx) \nu(du) = \int e^{-\frac{1}{2}(A(z+u), z+u)} \nu(du).$$

Далее

$$\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} = \int e^{-\frac{1}{2}(A(z+u), z+u) + \frac{1}{2}(Az, z)} \nu(dn) = \int e^{-\frac{1}{2}(Au, u) - (Az, u)} \nu(du).$$

Отсюда продолжимость $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ на H_{--} зависит от продолжимости на H_{--} скалярного произведения $(A(z, u))$ при всех $u \in H$. Но $(Az, u) = (S^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} z, S^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u)$. Последнее выражение имеет смысл, если $S^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} z \in H$ и $S^{-\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in H$ или, соответственно, $S^{-\frac{1}{2}} H_{--} \subset H$ и $S^{-\frac{1}{2}} H_{+} \subset H$. Отсюда следует, что если, в частности, в качестве оператора S брать $S = A$, то скалярное произведение (Az, u) определено при всех $z \in H_{--}$ и значит $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ определено на всем H_{--} .

Далее известно, что $\int e^{-(z, x)} \mu_0^*(dz) = \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}x, x)\right\}$,

поэтому $\int e^{-(z, Au)} \mu_0^*(dz) = \exp\left\{\frac{1}{2}(Au, u)\right\}$.

Тогда

$$\left| \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)} \right| \mu_0^*(dz) \leq \int e^{-\frac{1}{2}(Au, u)} \int e^{-(z, Au)} \mu_0^*(dz) |\nu|(du) = \int |\nu|(du) < +\infty.$$

Следовательно, для плотности $f(x)$ имеет место формула обращения:

$$g(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(A^{-1}x, x)\right\} \int_{H_{--}} \exp\{-i(z, x)\} \int_H \exp\left\{-\frac{1}{2}(Au, u) - (z, Au)\right\} \nu(du) \mu_0^*(dz).$$

Из представления $f(x)$ видно, что $f(P_n x) \rightarrow f(x)$ для всех $x \in H$ и $f(x)$ непрерывна. Далее

$$\frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} = \int_H \exp\left\{-\frac{1}{2}(An, u) - (P_n z, Au)\right\} \nu(du).$$

Отсюда

$$\frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \rightarrow \frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}, \quad \left| \frac{\varphi(P_n z)}{\varphi_0(P_n z)} \right| \leq h(z),$$

где

$$h(z) = \int_H \exp\left\{-\frac{1}{2}(Au, u) - (z, Au)\right\} |\nu|(du) \text{ и } \int_{H_{--}} h(z) \mu_0^*(dz) \leq \int_H |\nu|(du) < \infty.$$

Значит $f(x)$ и $\frac{\varphi(z)}{\varphi_0(z)}$ удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно, на H_{+} $f(x) = g(x)$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь, советы и внимание, без чего появление данной статьи было бы невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В. "Теория вероятностей и ее применения", 1969, вып. 1.
2. Гихман И. М., Скороход А. В. УМН, 21, № 6, (1966).

Поступило 1. X 1968

В. Н. Начыев

Гилберт фэзасында ишарэсини дэжишэн өлчүүлэр үчүн сыхлыгын чеврилмэ дүстуру

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ Гилберт фэзасында ишарэсини дэжишэн вэ Гаусс өлчүсүнэ нэзэрэн мүтлэг кэсилмэжэн өлчүлэрэ бахылмышдыр.

Ишарэсини дэжишэн өлчүлэр үчүн сыхлыгын чеврилмэ дүстуру чыхарылмышдыр. Мэгалэдэ хэмин дүстурун тэтбиг едилэ билэчэи мүмкүн олан сыхлыглар синфи көстөрилмишдыр.

УДК 539.4:621.81

М. А. ГАРИБОВ, И. Ю. СТЕПАНОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КРЫШКИ УНИВЕРСАЛЬНОГО ПРЕВЕНТЕРА

Одной из основных несущих деталей универсального превентера является его крышка, представляющая собой круглую кольцевую пластину переменной толщины с небольшой консольной частью и с двумя кольцевыми ребрами, которая нагружается по схемам 1а и 1б, соответственно, в рабочем и испытательном состояниях. Как видно из рис. 1а и б, ввиду сложности конфигурации самой пластины расчетная схема крышки становится весьма сложной, чем и объясняется отсутствие достаточно обоснованной методики расчета крышки превентера (этот вопрос в технической литературе не освещен).

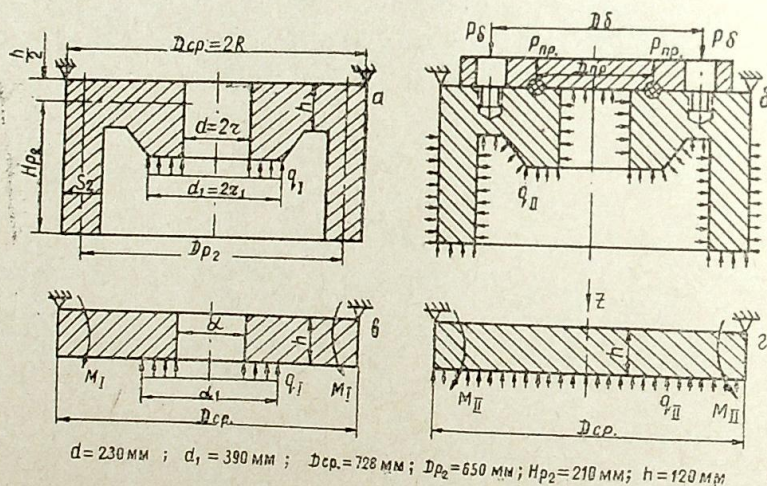


Рис. 1.

В данной статье приводится прочностной расчет крышки, учитывающий условия нагружения превентера и позволяющий оценить наиболее опасные напряжения, возникающие в ней под действием внутреннего давления. Как показали теоретические и экспериментальные исследования, наиболее опасными являются осевые напряжения, возникающие в месте стыка пластины с кольцевым ребром, расположенным у опорной окружности (в дальнейшем для простоты изложе-

ния будем называть это ребро наружным, а ребро, расположенное у проходного отверстия крышки, — внутренним). Характерный вид разрушения крышки в указанном сечении показан на рис. 2.

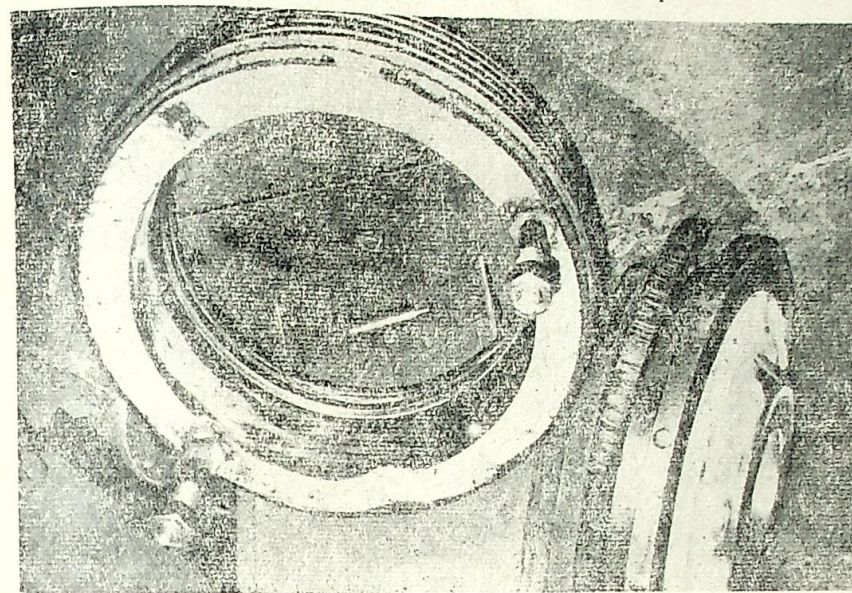


Рис. 2

Для упрощения расчетных схем сделаем следующие допущения:

1. В схеме 1а пренебрегаем влиянием внутреннего ребра на напряженное состояние крышки в опасном сечении.
2. В схеме 1б крышку с заглушкой заменяем плоской крышкой, считая, что напряженное состояние крышки в опасном сечении не изменится.

Правомочность сделанных допущений будет показана ниже. На рис. 1в, и 1, г показана расчетная схема крышки с учетом этих допущений. Расчетная схема 1, в реализуется в рабочем состоянии превентера, когда на крышку действует равномерно распределенная нагрузка q_1 , величина которой определяется из рис. 3:

$$q_1 = \frac{P_r (D_r^2 - d_r^2) + P_{p.ст.} (D_{p.ст.}^2 - d_r^2)}{d_1^2 - d^2}, \quad (1)$$

где

P_r — давление от системы гидроуправления, $кг/см^2$;

$P_{p.ст.}$ — давление рабочей среды, $кг/см^2$;

d_r — наружный диаметр уплотняемой трубы, $см$.

Величина опасного напряжения определяется из известной формулы:

$$\sigma_z = \frac{6M}{S^2}, \quad (2)$$

где M — момент, действующий в месте стыка пластины и наружного ребра и заменяющий собой влияние ребра [1].

Запишем условие равенства угла поворота сечения крышки в месте стыка с ребром и ребра

$$\varphi_1 = \varphi_{M_1} + \varphi_{q_1}. \quad (3)$$

Угол поворота наружного ребра равен

$$\varphi_1 = \frac{3\sqrt{D_{p2} S_2}}{ES_2^3} M_1, \quad (4)$$

Данная формула применима к длинным круговым цилиндрическим оболочкам, к которым относятся наружное ребро крышек всех типов существующих универсальных превентеров.

Угол поворота сечения пластины под действием только момента M_1 равен

$$\varphi_{M_1} = -\frac{2,1 D_{p_2} (2 + 3,72 \beta^2)}{E h^3 (1 - \beta^2)} M_1, \quad (5)$$

где $\beta = \frac{d}{D_{cp}}$ — параметр кольцевой пластины.

Угол поворота сечения пластины φ_{q_1} под действием давления q_1 определяется из решения основного уравнения пластины [2]:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW}{dx} \right) \right] = \frac{N}{d}, \quad (6)$$

где W — прогиб пластины в направлении оси z в точке, находящейся на расстоянии $x = \rho r$ от оси пластины.

D — цилиндрическая жесткость пластины,

N — перерезывающая сила на расстоянии x от центра:

на участке $r \leq x \leq r_1$

$$N = \frac{q_1 \pi (x^2 - r^2)}{2\pi x};$$

на участке $r_1 \leq x \leq R$

$$N = \frac{q_1 \pi (r_1^2 - r^2)}{2\pi x};$$

$$\varphi_{q_1} = -\frac{dW}{dx} = -\frac{\beta^3 D_{cp}^3}{8D} \left[a_{3p} + \frac{\kappa_{0\beta_0}}{0,7\rho_2} + \frac{\rho_2 \kappa_{2\beta_0}}{1,3} \right], \quad (7)$$

$$\text{где } \rho_2 = \frac{D_{p_2}}{d}; \quad \beta_0 = \frac{1}{\beta},$$

$$a_{3p} = 0,4725 \rho_2 \ln \rho_2 - 0,3634 \rho_2,$$

$$\kappa_{0\beta_0} = \frac{\beta_0^2}{\beta_0^2 - 1} (0,3473 - 0,6143 \ln \beta_0),$$

$$\kappa_{2\beta_0} = \frac{\kappa_{0\beta_0}}{\beta_0^2} - 0,6143 \ln \beta_0.$$

Подставив выражения (4), (5) и (7) в уравнение (3), получим

$$M_1 = -\frac{1,365 \beta^3 D_{cp}^3 \left(a_{3p} + \frac{\kappa_{0\beta_0}}{0,7\rho_2} + \frac{\rho_2 \kappa_{2\beta_0}}{1,3} \right)}{3 \sqrt{D_{p_2} S_2} + \frac{2,1 D_{p_2} (2 + 3,72 \beta^2)}{1 - \beta^2}} q_1. \quad (8)$$

Примем $D_{p_2} = D_{cp}$, т. е. предположим, что момент M_1 приложен в опоре. Тогда, подставив (8) в уравнение (2), будем иметь

$$\frac{\sigma_1}{q_1} = -\frac{3,9 \beta^3 (1 - \beta^2) \left(a_{3p} + \frac{\kappa_{0\beta_0}}{0,7\rho_2} + \frac{\rho_2 \kappa_{2\beta_0}}{1,3} \right) \gamma^2}{(2 + 3,72 \beta^2) \left[1 + \frac{1,43 (1 - \beta^2)}{(2 + 3,72 \beta^2)} \sqrt{\frac{1}{\lambda^3}} \right]}, \quad (9)$$

где

$$\lambda = \frac{h}{S_2} = 1 \div 2,$$

$$\gamma = \frac{D_{cp}}{S_2} = 7 \div 15.$$

В качестве примера определим величину напряжения в опасном сечении крышки превентера типа ПУГ 230×320 при уплотнении трубы диаметром $d_m = 141$ мм. Основные размеры крышки примем из рис. 1, а значение вспомогательных расчетных параметров вычислим по приведенным выше формулам:

$$\rho_0 = \rho_2 = 3,16;$$

$$a_{3p} = 0,570;$$

$$\gamma = 9,3;$$

$$\kappa_{0\beta_0} = -0,398;$$

$$\lambda = 1,5;$$

$$\kappa_{2\beta_0} = -0,744.$$

Подставив данные и вычисленные параметры в уравнение (9), получим

$$\sigma_1 = 3,6 q_1. \quad (10)$$

При значениях $P_{p, cp} = 300$ кг/см² и $P_r = 100$ кг/см² из уравнения (1) будем иметь

$$q_1 = 870 \text{ кг/см}^2, \text{ тогда}$$

$$\sigma_1 = 3200 \text{ кг/см}^2.$$

Расчетная схема 1 г реализуется при опрессовке превентера. Подробно эта схема описана в работе [3]. Величина момента M_{II} , действующего в месте стыка плоской части крышки и наружного ребра, определяется по следующей формуле:

$$M_{II} = \frac{\kappa_p D_{cp}^3}{3 \sqrt{D_{p_2} S_2} + \kappa_m D_{cp}} q_{II}, \quad (11)$$

где $\kappa_m = 2,1 \rho (1,3 + 0,7 \alpha^2),$

$$\kappa_p = 0,0435 \rho (5 - 2 \rho^2),$$

$$\alpha = \rho = \frac{D_{p_2}}{D_{cp}}.$$

Принимая $D_{p_2} = D_{cp}$ и подставляя (11) в уравнение (2), получим

$$\frac{\sigma_{II}}{q_{II}} = \frac{0,22 \gamma^2}{1 + 0,81 l^3 \sqrt{\frac{1}{\gamma}}}, \quad (12)$$

здесь q_{II} — рабочее давление при опрессовке.

На рис. 4, а представлен график зависимости $\frac{\sigma_{II}}{q_{II}} = f(\gamma)$ для различных l . Зная значения параметров l и γ для определенного типа крышки, конструктор может определить уровень напряжения в опасном месте. Например, для крышки универсального превентера типа

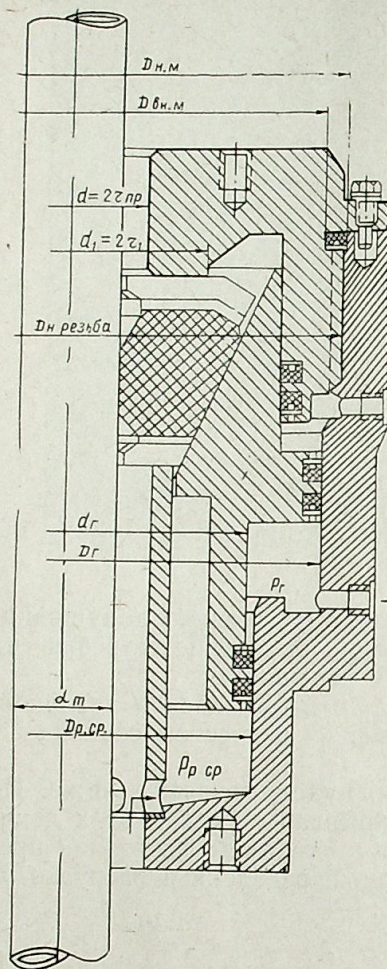


Рис. 3

ПУГ 230×320 с параметрами $\gamma = 9,3$ и $l = 1,5$ отношение $\frac{\sigma_{II}}{q_{II}} = 10$,

следовательно уже при давлении $q_{II} = 570 \text{ кг/см}^2$ напряжение в опасном сечении достигает предела текучести материала крышки (для стали 25ХГСЛ $\sigma_T = 5700 \text{ кг/см}^2$), в то время как опрессовка ведется при давлении $2q_{II} = 640 \text{ кг/см}^2$. Этим и объясняется имеющее место на практике разрушение крышки превентера в опасном сечении. Следует отметить, что предел текучести материала существенно снижается при некачественной термообработке.

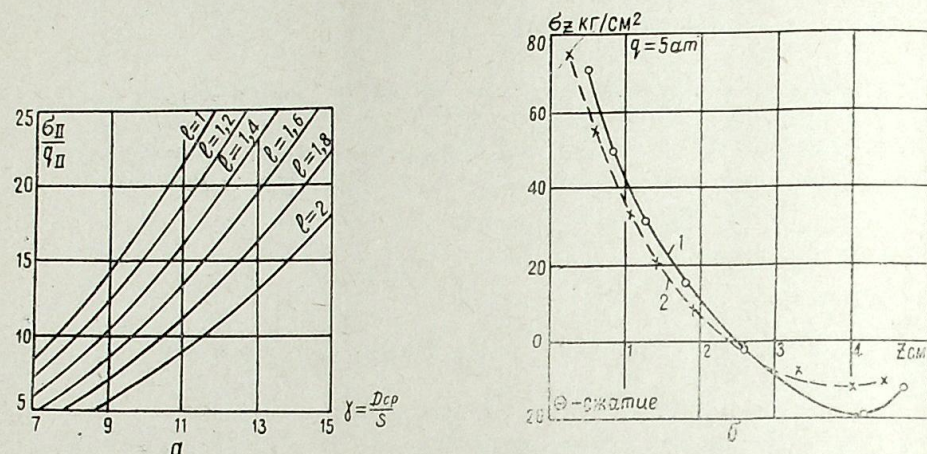


Рис. 4.

Для проверки правильности приведенных теоретических решений по обоим вариантам расчетных схем были проведены экспериментальные исследования на натурном превентере типа ПУГ 230×320 и на его модели, выполненной из органического стекла. Экспериментальные исследования проводились электротензометрическим методом с помощью датчиков активного сопротивления на измерителе статических напряжений, дающем отсчет показаний непосредственно в кг/см^2 . Влагоизоляция датчиков осуществлялась с помощью покрытия на основе эпоксидной смолы. Необходимое давление в системе создавалось с помощью масляного винтового пресса.

При исследовании на натуре датчики наклеивались на внутренней поверхности наружного ребра вдоль образующей в десяти точках. Нагружение велось по схеме 1 б при давлении $q_{II} = 200 \text{ кг/см}^2$, при этом осевое напряжение в опасном сечении получилось равным $(\sigma_{II})_{\text{эксп}} \approx 2000 \text{ кг/см}^2$, что хорошо согласуется с теоретическим решением, полученным по формуле (12).

При исследовании на модели ставилась задача по сравнению напряженного состояния наружного ребра крышки по схемам 1 б и 2 (модели крышки были изготовлены соответственно этим схемам). Датчики наклеивались на внутренней поверхности наружного ребра вдоль образующей в семи (схема 1, 2) и в девяти точках (схема 1 б). Измерения в обоих случаях велись при давлении 4 кг/см^2 . На рис. 4, б представлены эпюры распределения осевых напряжений по внутренней поверхности наружного ребра, пересчитанные на давление 5 кг/см^2 , причем кривая 1 получена для плоской крышки, кривая 2 — для крышки с заглушкой. Как видно, экспериментальные кривые 1 и 2 с погрешностью $10 \div 12\%$ в зоне, близкой к опасному сечению, с достаточной для практических расчетов точностью согласуются друг с

другом. Это доказывает правомочность замены расчетной схемы крышки с заглушкой схемой с плоской крышкой при определении напряжений в опасном сечении.

Выводы

1. Дана методика определения величины напряжения в опасном сечении.

2. Приведен график зависимости напряжения в опасном сечении от основных геометрических параметров крышки. Пользуясь данным графиком, конструктор может определить необходимые геометрические размеры крышки, задаваясь требуемым уровнем напряжений в опасном сечении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуткин П. А. Расчет плоских деталей. Машиностроение, 1966.
2. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. Машгиз, 1960.
3. Гарибов М. А., Алиев Ш. М., Майдельман В. Н., Степанова И. Ю. „За технический прогресс.“ 1967, № 4.

Поступило 30. VIII 1968

М. А. Гарибов, И. Ю. Степанова

Универсал превентерин гапагынын кәркин
вэзијјэтинин тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә универсал превентерин гапагынын тәһлүкәли ен кәсијиндәки кәркинлијин тәјинедилмә үсулундан бәһс едилмишдир. Эсәрдә горхулу ен кәсијиндәки кәркинлијин гапағын әсас һәндәси өлчүләриндән асылылығы график шәклиндә верилмишдир. Бундан истифадә едәрәк, тәһлүкәли ен кәсијиндәки кәркинлијә тәләб олуан гијмәти вермәклә, гапағын лазым олан һәндәси өлчүләрини тәјин етмәк мүмкүндүр.

УДК 621.3.011.1

Ф. Г. ГУСЕЙНОВ, А. Г. ТАМАЕВ

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ НА БАЗЕ ДИСКРЕТНОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Ранее [1] была показана возможность применения принципиально нового метода расчета электрических цепей на основе дискретного принципа максимума Понтрягина. Развивая эту идею, произведем вывод конкретного алгоритма по решению задачи расчета электрической цепи произвольной конфигурации с произвольным числом источников напряжения e_v и источников тока i_c . При этом все последующие выкладки проиллюстрируем на некотором совершенно произвольном примере электрической цепи, схема которой представлена на рис. 1.

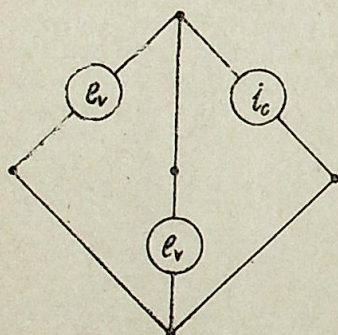


Рис. 1

Любую электрическую цепь произвольной конфигурации можно адекватно отобразить „сложным“ многоступенчатым процессом, топология которого полностью совпадает с топологией исходной цепи [1, 2]. В этом случае можно считать, что графы [3, 4] совпадают и, следовательно, применительно к рассматриваемому примеру изображаются как на рис. 1. Произведем преобразования исходной электрической цепи, направленные на то, чтобы расчленив адекватный ей „сложный“ многоступенчатый процесс на ряд „простых“ процессов, для которых уже имеется соответствующий алгоритм расчета на основе принципа максимума Понтрягина [1]. Отмеченные преобразования описаны ниже.

Для принятого сложного многоступенчатого процесса, представленного на графах (в нашем случае сложный многоступенчатый процесс и соответствующий граф имеют совершенно одинаковый вид), построим Эйлеров цикл (или Эйлерову цепь). Эйлеровым циклом (цепью) называется цикл (цепь), содержащий все ребра графа и притом только по одному разу [3, 4]. Но не в всяком графе можно построить Эйлеров цикл (цепь). Например, если граф содержит произвольное число нечетных вершин, то на соответствующем графе нельзя будет построить Эйлеров цикл (цепь) [3, 4]. Это затруднение применительно к рассматриваемой задаче можно обойти следующим

образом. Дополним исходный граф (т. е. адекватную электрическую цепь и соответствующий сложный многоступенчатый процесс) фиктивными линиями, соединяющими попарно между собой нечетные вершины, т. е. приведем исходный граф к виду, удовлетворяющему условиям построения Эйлерова цикла (вновь полученный граф назовем дополненным). В частности, в рассматриваемом примере (рис. 1) имеется две нечетные вершины. Соединим их фиктивной линией и тогда получим дополненный граф (рис. 2). Фиктивная линия показана пунктиром.

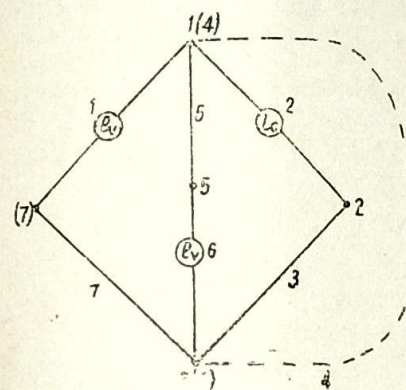


Рис. 2

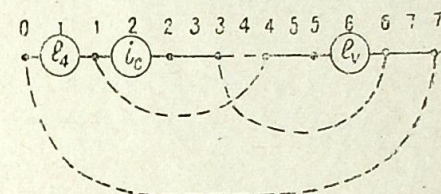


Рис. 3

Выбираем произвольно нулевую (начальную) вершину исходного графа и строим Эйлеров цикл на дополненном графе (имеется очень простой алгоритм для построения Эйлерова цикла [3, 4]). При построении Эйлерова цикла на дополненном графе произведем нумерацию ребер и вершин в порядке их обхода, с помощью натурального ряда чисел (1, 2, 3...), причем так, чтобы каждому ребру соответствовала конечная для нее вершина. Отметим, что при построении Эйлерова цикла следует проходить через фиктивные линии в последнюю очередь. Так как Эйлеров цикл может проходить через некоторые вершины дополненного графа несколько раз, то этим вершинам присваивается, соответственно, несколько номеров по соответствующим им ребрам. Назовем подобные вершины многообходными, в противовес вершинам однообходными, т. е. вершинам, через которые Эйлеров цикл проходит лишь один раз. Отмеченные номера вершин записываются при вершинах графа (в последовательности прохождения ребер через вершины) см. рис. 2.

Построим вспомогательный граф, изоморфный дополненному графу. Два графа G_1 и G_2 называются изоморфными, если они имеют одно и то же число вершин и для любых двух вершин графа G_1 , соединенных ребром, соответствующие им вершины графа G_2 тоже соединены ребром, и наоборот [4]. В принципе для любого графа можно построить множество ему изоморфных. Для рассматриваемой задачи в качестве изоморфного графа построим такой, который был бы представлен в виде последовательных ребер, в порядке их обхода Эйлерова цикла для дополненного графа, а те вершины этой последовательности, которые соответствуют одним и тем же вершинам дополненного графа, соединяем между собой условными линиями (эти условные линии, естественно, не являются ребрами изоморфного графа). Для определенности последующих выкладок отмеченные условные линии будем проводить пунктиром под изоморфным графом, и назовем их каналом связи для переменной управления. Кроме того, на изоморфном графе фиктивные линии будем проводить также пунк-

тиром. Для графа, изображенного на рис. 2, изоморфный граф, построенный по вышеотмеченным правилам, показан на рис. 3.

На построенном изоморфном графе для Эйлера цикла дополненного графа проставляем стрелки на ребрах и на канале связи для переменной управления следующим образом (рис. 4): а) условно положительным направлением будем считать направление слева направо; б) на каналах связи для переменной управления стрелки проставляем в положительном направлении; в) на ребрах, входящих (попадаем в положительному направлению) в однообходную вершину, условно положительному направлению; г) на ребрах, входящих в многообходную вершину, в случае, если в нее не входит канал связи, стрелки проставляем слева направо; д) на ребрах, входящих в многообходную вершину, в случае если в нее входит канал связи, стрелки проставляем справа налево; е) ребра, имеющие направление слева направо, назовем левыми ребрами, а ребра, с направлением справа налево — правыми ребрами.

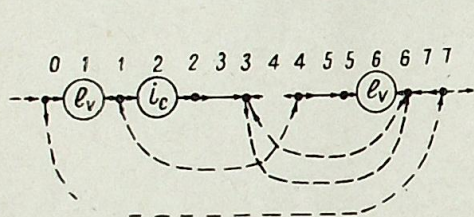


Рис. 4

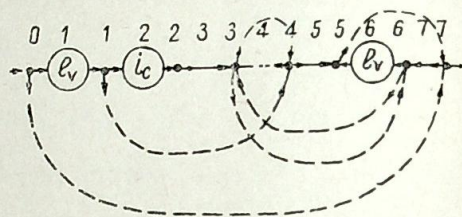


Рис. 5

Еще раз обойдем все вершины полученного изоморфного графа по условно положительному направлению. При этом у тех многообходных вершин, в которые входит канал связи для переменных управления и правое ребро, проводим еще одну условную линию параллельно каналу связи для переменных управления. Новую условную линию будем проводить (для однозначности обозначений) над каналом связи для переменных управления и называть каналом связи для переменной состояния x_1 (рис. 4). Кроме того, те из встретившихся при обходе вершин, в которых одновременно имеются левые и правые ребра, соединяем условной линией с последующей аналогичной вершиной. Для определенности указанные условные линии будем проводить пунктиром над изоморфным графом и назовем их каналом связи для переменной состояния x_2 . На этом канале связи проставляем стрелки по направлению слева направо (рис. 5). Отметим, что из тех вершин, в которые заходит канал связи для переменной состояния x_2 , новый одноименный канал связи уже не выводится. Таким образом исходный сложный произвольный многоступенчатый процесс расчленен на ряд простых процессов.

Примем в качестве векторов управления θ^n и векторов состояния x_1 и x_2 те же величины, что и в [1]. Причем управляющая переменная θ^n , как и ранее, варьируется в последовательных вершинах изоморфного графа. Информация о переменной управления может выдаваться как в ребра, так и в канал связи для переменной управления изоморфного графа; информация о переменной состояния x_1 и x_2 может выдаваться при надобности как в ребра, так и в соответствующие каналы связи для переменной состояния x_1 и x_2 . На всех каналах связи никаких преобразований переменных состояния не производим, так как выделенные каналы связи служат лишь для передачи информации по ним о переменных состояния.

На фиктивных линиях принимаем, что уравнения преобразования имеют следующий вид:

$$x_1^{nf} = 0; \quad x_2^{nf} = x_2^{(n-1)f}.$$

Теперь алгоритм, выведенный в [1], может быть почти без изменения использован и в настоящей работе. По-прежнему начинаем путь обхода последовательных ступеней, представленных полученным изоморфным графом, в направлении слева направо. Но так как в построенном последовательном изоморфном графе (многоступенчатом процессе) будут встречаться правые ребра, то в тех вершинах, где сходятся левое и правое ребро, имеем уже два входа и один выход. Следовательно, имеем случай смесительной ступени, для которой уравнения преобразования записываются согласно выражениям, приведенным в [2]. Применительно к рассматриваемой задаче они таковы: x_1^n примет (в зависимости от типа ступени) вид одного из выражений [1], а выражение для x_2^n в общем виде следующее:

$$x_2^n = x_2^{(n-1)лев} + f^{лев}(\theta^n - x_1^{n-1}) + \Sigma f^{прав}(\theta - x_1^{n-1}), \quad (1)$$

где $f^{лев}$ и $f^{прав}$ определяются в зависимости от типа ступени, также согласно одному из выражений [1].

В выражении для x_2^n отсутствует величина $x_2^{(n-1)прав}$ ввиду того, что обход ступеней производится слева направо, значит для правого ребра значения всех $x_2^{(n-1)}$, расположенных правее его, равны нулю. Тогда применительно к расчету электрических цепей, представленных изоморфным графом для Эйлера цикла дополненного графа (топологически отображающего исходную электрическую цепь), может быть использован следующий алгоритм, базирующийся на положениях дискретного принципа максимума Понтрягина.

I. Для каждой однообходной вершины записываем в качестве уравнений для H^n и Z^n , в зависимости от специфики ступени, одну из функций, входящих в следующие выражения:

$$H^n = z_1^n \begin{cases} \theta^n \\ \text{или} \\ \theta^n \\ \text{или} \\ x_1^{n-1} + \theta^n \end{cases} + \begin{cases} x_2^{n-1} - \frac{1}{2} (\theta^n - x_1^{n-1}) g^{n-1} \\ \text{или} \\ x_2^{n-1} - (\theta^n - x_1^{n-1}) i_c^{n-1} \\ \text{или} \\ x_2^{n-1} \end{cases}, \quad (2)$$

$$z_1^{n-1} = z_1^n \begin{cases} 0 \\ \text{или} \\ 0 \\ \text{или} \\ 1 \end{cases} + \begin{cases} g^{n-1} (\theta^n - x_1^{n-1}) \\ \text{или} \\ i_c^{n-1} \\ \text{или} \\ 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$, за исключением многообходных вершин; верхние строчки в (2) и (3) соответствуют ветви с проводимостью, средние — ветви с источниками тока, нижние — ветви с источником напряжения; θ^n для верхней и средней строчки — потенциал узла n (пока неизвестная величина); θ^n для нижней строчки — напряжение ветви n ; x_1^{n-1} — потенциал узла $n-1$; g^{n-1} — проводимость ветви $n-1$; $x_2^0 = 0$.

II. Для каждой многообходной вершины, в которую входят левое и правое ребро, записываем согласно вышеотмеченному и [1] следующие выражения:

$$H^n = z_1^n \begin{Bmatrix} \theta^n \\ \text{или} \\ \theta^n \\ \text{или} \\ x_1^{n-1} + \theta^n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} x_2^{n-1} - \frac{1}{2} (\theta^n - x_1^{(n-1) \text{ лев}}) g^{(n-1) \text{ лев}} - \Sigma f^n \text{ прав} (\theta^n - x_1^{n-1}) \\ \text{или} \\ x_2^{n-1} - (\theta^n - x_1^{(n-1) \text{ лев}}) i_c^{(n-1) \text{ лев}} - \Sigma f^n \text{ прав} (\theta^n - x_1^{n-1}) \\ x_2^{n-1} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$z_1^{(n-1)j} = z_1^n \begin{Bmatrix} 0 \\ \text{или} \\ 0 \\ \text{или} \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g^{(n-1)j} (\theta^n - x_1^{(n-1)j}) \\ \text{или} \\ i_c^j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

III. Для многообходных вершин, из которых выходят левое и правое ребро, функции не записываются, так как эти вершины являются лишь входом для последующих ступеней.

IV. Произведем оптимизацию уравнений из (2), (4) с учетом (3), (5) на каждой из последовательных ступеней на основе выражения

$$H^n(\bar{\theta}^n) = \max H^n(\theta^n)$$

$$\frac{\partial H^n}{\partial \theta^n} = 0.$$

Процедура оптимизации может быть такой же, как и приведенная в [2]. Переменная состояния x_2^N , полученная после оптимизации всех предыдущих ступеней, и представляет решение задачи.

Это очевидно, так как в приведенном алгоритме:

а) учитывается полностью информация о топологии и исходных данных (g , e_v , i_c) электрической цепи произвольной конфигурации; б) величина x_2^N представляет левую часть выражения (1) из [1]; в) величина x_2^N на всех ступенях преобразовывалась так, чтобы на выходе был получен оптимум x_2^N , т. е. соблюдено выражение (1) из [1]; г) на всех ступенях многоступенчатого процесса и, следовательно, в соответствующей исходной цепи соблюдены все уравнения, входящие в выражения (2) из [1]; д) тем самым выполнены все исходные условия и, следовательно, полученное решение является решением рассматриваемой задачи по расчету электрической цепи произвольной конфигурации.

В заключение отметим следующие особенности предложенного алгоритма:

а) значение величины x_2^N представляет по существу потери мощности во всей электрической цепи, и значит мы заодно разрешили и задачу расчета потерь мощности в электрической цепи;

б) многомерное одношаговое решение задачи расчета электрических цепей в данной работе представлено как многошаговое (многоступенчатое) решение с одномерной переменной управления на каждой ступени, т. е. на каждом шаге мы сталкиваемся с одномерным процессом, что является наиболее рациональным обстоятельством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Ф. Г., Тамаев А. Г. ДАН Азерб. ССР* 1966, № 5.
2. Фан Лянь-Цэнь, Ван Чу-Сен. Дискретный принцип максимума. Изд-во Мир* 1967.
3. Берж К. Теория графов и ее применение. ИЛ, 1962.
4. Оре О. Графы и их применение. Изд-во "Мир", 1965.

Поступило 4. IV 1968

Ф. Г. Гусейнов, А. Г. Тамаев

Понтрjакин максимум принципинин електрик дөврэлэринин һесабы үчүн истифадәдилмә имканлары һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә електрик дөврэлэринин шәрһи чохпилләли просес кими верилдикдә онларын һесабы мәсәләлэринин һәлли үчүн јени олан үсулун имканлары кәстәрилмишдир.

Һамильтон функцијасы гурулмуш, сонра Понтрjакин нәзәријјәси принциплэринин дискрет шәрһи әсасында оптималлашдырылмыш вә бунунла башлангыч мәсәлә һәлл едилмишдир.

УДК 621 316. 92

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ ОТ ПЕРЕМЕЖАЮЩИХСЯ ЗАЗЕМЛЯЮЩИХ ДУГ

Условия гашения и зажигания дуги. Как известно, условие гашения реальной дуги определяется состоянием дугового промежутка, характеризующегося степенью его деионизации. Наиболее благоприятное условие для гашения дуги наступает при условии [1]

$$i = 0, \quad v_i = \frac{di}{dt} \approx 0. \quad (1)$$

Аналогичным (1) является условие [2]

$$i = 0, \quad L \frac{di}{dt} = U_{пр} \leq 1800 = U_{кр}, \quad (2)$$

где L — индуктивность рассеяния источника,

$U_{пр}$ — пик колебания гашения,

$U_{кр}$ — электрическая прочность разрядного промежутка через пол-периода колебания гашения.

Если условие (1) не наступает, то дуга гаснет при прохождении через нуль тока промышленной частоты ($i_{пр} = 0$). Возможно гашение дуги и вблизи нуля тока колебания, когда скорость изменения тока достигает максимума, т. е.

$$i = 0, \quad v_i \approx v_{im}. \quad (3)$$

При этом возникают значительные колебания гашения и потому некоторые авторы [3] объясняют возникающие иногда в сети с изолированной нейтралью значительные перенапряжения протеканием процесса по теории Петерсена [4], поэтому представляет интерес обстоятельное исследование возможности гашения дуги при условии (3) и возникающих при этом перенапряжениях.

Условие гашения дуги в соответствии с (3), при отсутствии внешних деионизирующих факторов, можно получить при малом токе замыкания на землю и малой мощности источника питания. В этих условиях, после некоторого растягивания дуги, разрядный промежуток при прохождении тока через нуль интенсивно деионизируется ввиду малой величины тока и относительно большого значения полупериода колебания гашения, и поэтому возобновление дуги на высокочастотном пике восстанавливающегося напряжения не имеет места,

т. е. гашение дуги происходит вблизи нуля тока колебания, благодаря чему напряжения смещения $U_{см}$ и зажигания U_z достигают величин значительно больше тех, которые получаются при гашении дуги по условиям (1) или (2).

При гашении дуги вблизи нуля тока колебания величина первого пика напряжения колебания повторного зажигания $U_{кд}$, определяющего максимальное перенапряжение, зависит от продолжительности предшествующей бестоковой паузы t_n . При этом за полпериода промышленной частоты ($t_n = 0,5 T$) разрядный промежуток деионизируется в такой мере, что благодаря сильно возросшему затуханию амплитуда напряжения колебания зажигания, являющаяся функцией двух переменных: напряжения зажигания U_z и коэффициента, характеризующего затухание колебания гашения, κ_d оказывается меньше, чем при паузе тока $t_n < 0,5 T$. В результате наибольшее перенапряжение на здоровой фазе возникает при повторных зажиганиях, соответствующих бестоковым паузам меньше $0,5 T$, т. е. не при максимальном значении напряжения U_z , что является основным фактором, ограничивающим перенапряжение при гашении дуги вблизи нуля тока колебания [1]. Это положение подтверждается полученными нами многочисленными осциллограммами. Опыты проводились на однофазной схеме при питании от трансформатора 50 кв, 6/0,22 кв, ток замыкания на землю составлял $I_z = 1,5 a$, дуга создавалась на разъединителе.

В этих опытах пик колебания гашения $U_{пр}$ доходил до 6000 в и при этом повторное зажигание дуги не имело места, дуга гасла при первом же прохождении тока через нуль, вблизи нуля тока колебания. В случае двух повторных зажиганий, при $U_z = 2,2$; $U_m = 2,7$ (U_m — половина амплитудного значения напряжения источника), соответствующих бестоковым паузам $t_n = 0,5 T$ и $t_n = 0,5 T$, максимальное перенапряжение на здоровой фазе с кратностью $K_{здм} = 3,3$ возникало при $U_{з1}$.

Если исходить из утверждения [2], что состояние дугового промежутка за полпериода промышленной частоты сколько-нибудь существенно не изменяется и коэффициент $\kappa_d = 0,9$, то при $U_{з2} = 2,7$ на здоровой фазе следовало бы ожидать перенапряжения с кратностью 4,5, тогда как кратность перенапряжения при этом достигает значения 3,1, соответствующего $\kappa_d = 0,5$.

С целью исследования поведения перемежающейся заземляющей дуги при наличии сильного реального деионизирующего фактора — порыва ветра были проведены опыты на модели (батареи конденсаторов), которая питалась непосредственно от шин мощной подстанции. Дуга создавалась на разъединителе, условия ветра имитировались продуванием разрядного промежутка от компрессора при давлении 7 атм.

При токе $I_z = 12 a$ и отсутствии дутья гашение дуги происходило при $i_{пр} = 0$ или в соответствии с (1), на что указывало также и отсутствие сколько-нибудь значительных напряжений колебания гашения. Максимальное перенапряжение на „здоровой“ фазе $U_{здм} = 3U_m$ соответствовало максимальному напряжению зажигания $U_{зм} = U_{ом} = 2U_m$.

При наличии дутья гашение дуги происходило при первом же прохождении тока дуги через нуль (3), причем процесс гашения сопровождался значительными колебаниями пика гашения $U_{пр} = 1,2U_m$. Максимальное перенапряжение на „здоровой“ фазе $U_{здм} \approx 3U_m$ возникло при $U_{зм} = U_{ом} = 2,6U_m$. Таким образом при мощном источнике и значительном токе замыкания на землю гашение дуги под действием внешнего деионизирующего фактора также происходит при первом прохождении тока через нуль. При этом ограничение перенапряжений имеет место в той же мере, что и для схемы с маломощным источни-

ком питания при малом токе замыкания на землю и максимальные перенапряжения не превышают перенапряжений, имеющих место при условии (1), кратности этих перенапряжений для трехфазной системы находятся в пределах 3 [1].

Интересно отметить, что теоретически, при управлении гашения дуги в соответствии с условием (3) и равенстве частот свободного колебания контуров зажигания и гашения дуги, могут возникнуть сколь угодно большие перенапряжения, максимальные кратности которых для „здоровой“ и „больной“ фаз определяются выражением

$$K_{здм} = K_{бм} = \frac{1}{1 - \kappa_6}. \quad (4)$$

Однако практически возникающие и в этом особом случае перенапряжения из-за значительного затухания колебания при условии (3) будут заметно меньше, чем при нормальной схеме.

Влияние номинального напряжения сети. Опыты проводились на модели и в сети при напряжениях 6, 20, 35 кв. По мере повышения номинального напряжения сети общая картина развития процесса несколько приближается к картине при устойчивой дуге. Однако при этом, если только возникают соответствующие деионизирующие условия, дуга становится перемежающейся и перенапряжения ограничиваются теми же факторами, как и при напряжении 6 кв. При наличии сильно деионизирующих факторов пики колебания гашения $U_{пг}$ при всех напряжениях, в отличие от утверждения в [2], достигают значений, во много раз превышающих 1800 в, причем по мере повышения номинального напряжения сети увеличивается абсолютное значение $U_{пг}$. С изменением номинального напряжения сети кратности возникающих максимальных перенапряжений находятся в одних и тех же пределах (порядка 3), отличаясь примерно на 10%.

Эти результаты лишней раз подтверждают ошибочность мнения о том, что реальный дуговой промежуток вообще не может противостоять быстрому нарастанию напряжения и в силу этого пики колебаний гашения, определяющие максимальное напряжение смещения, ограничены величиной критического напряжения 1800 в, и с увеличением номинального напряжения сети уменьшается относительная величина пика колебания гашения $\frac{U_{пг}}{U_{фм}}$, а вместе с ней и напряжение смещения [2].

Влияние резкой несимметрии емкостей отдельных фаз. Такое условие имеет место при обрыве одной фазы вблизи источника, а также при обрыве двух фаз и замыкании на землю одной из этих фаз. При этом максимальные перенапряжения на „здоровой“ фазе $U_{здм}$ и на „больной“ $U_{бм}$, определяются следующим образом [6]:

$$U_{здм} = \sqrt{3} U_{фм} \cdot \cos(\psi_{зкр} - 30^\circ) + U_{кл}; \quad (5)$$

$$U_{бм} = U_{смм} + \frac{3n}{2n+1} \cdot U_{фм}, \quad (6)$$

где

$U_{смм}$ — максимальное значение напряжения смещения,
 $\psi_{зкр}$ — критическое значение начальной фазы напряжения зажигания,

$$U_{кл} = \left(U_{смм} + \frac{3n}{2n+1} \cdot U_{фм} \cos \psi_{зкр} \right) \cdot \kappa_{д},$$

$$n = \frac{C_{зд}}{C_6};$$

$$\psi_{зкр} = \arcsin \sqrt{\frac{3}{\left(3 + \frac{6n}{2n+1} - \kappa_{д}\right)^2 + 3}}.$$

При гашении дуги в соответствии с (1)

$$U_{см} = \frac{3n}{2n+1} \cdot U_{фм}, \quad (7)$$

Несимметрия выше 5-кратной на величину перенапряжений практически не влияет. При $n=5$ на „здоровой“ и „больной“ емкостях могут возникнуть перенапряжения с кратностью, соответственно, 4 и 4,7. В этом случае при первом зажигании дуги (или при замыкании через устойчивую дугу) возможны перенапряжения с кратностью порядка 2,8, т. е. практически такие же, как и максимальные перенапряжения при перемежающейся дуге при симметричной схеме. Важно отметить, что уже при незначительной несимметрии, которая всегда может иметь место в реальных условиях, вероятность возникновения перенапряжений с кратностью 3 резко увеличивается. Так, при $n=1,1$ из ста замыканий 3-кратные перенапряжения возникают в семидесяти—восемидесяти случаях, тогда как при $n=1$ в двух—трех случаях.

Перенапряжения на линии при двухстороннем питании. Примем, что за время достижения напряжением колебания на „здоровой“ фазе максимума напряжение источника не изменяется и затухание волн на линии отсутствует. При этом максимальное перенапряжение определяется выражением

$$U_{здм} = \sqrt{3} U_{фм} \cdot \cos(30^\circ - \psi_{зкр}) - a U_3 (1 - \gamma_m), \quad (8)$$

где

$$\psi_{зкр} = \arcsin \sqrt{\frac{3}{[3 + 2a(\gamma_m - 1)]^2 + 3}},$$

$a = \frac{C}{C + C_{мф}}$ — коэффициент, учитывающий влияние междофазных емкостей ($C_{мф}$); для воздушных линий $a = 0,85$.

γ характеризует переходный процесс включения цепи зажигания дуги на единичное напряжение в месте замыкания на землю и вычисляется из соответствующих интегро-дифференциальных уравнений, составленных в зависимости от места замыкания на землю и места, для которого определяется $U_{здм}$. Установленные таким образом выражения для γ позволяют исследовать переходный процесс зажигания дуги при различных конфигурациях и режимах работы сети.

Расчет показывает, что для широкого предела соотношений индуктивностей источников перенапряжения достигают величины порядка 4 $U_{фм}$, что значительно превышает соответствующие перенапряжения для линий с разомкнутым концом. В этом случае при первом зажигании дуги могут возникнуть перенапряжения, соответствующие максимальным перенапряжениям на линии с открытым концом. При замыкании в середине линии возникают такие же перенапряжения, что и при замыкании у источника.

Две параллельные линии различной длины. Величины возникающих перенапряжений зависят от соотношения длин линий, при этом в разных точках „здоровой“ фазы возникают перенапряжения, значительно разнящиеся друг от друга. Так, например, если соотношение длин линий равно двум, то максимальная кратность перенапряжения у источника $K_{здм} = 2,8$ меньше, чем при одной линии ($K_{здм} = 3$), тогда

как для конца линии имеет место обратная картина—кратность перенапряжения в конце такой линии 4, 7, что значительно превышает кратность перенапряжения в конце одинарной линии.

Влияние нагрузки. В случае одностороннего питания при наличии нагрузки кратность перенапряжений практически достигает тех же значений, что и на холостой линии. При двухстороннем питании, так как обычно импеданс нагрузки значительно превышает реактанс источника, нагрузка также не оказывает существенного влияния на максимальную величину перенапряжений.

Влияние на первичную сторону. Передача напряжения на первичную сторону осуществляется через магнутую связь. При этом максимальная передача напряжения имеет место, когда генератор или нагрузка присоединены к первичной стороне трансформатора непосредственно, при схеме соединения трансформатора Δ/Δ .

Перенапряжение на первичной стороне трансформатора определяется следующим образом:

$$U_{3д} = U_{01} + \frac{1}{3} \xi; \quad (9)$$

$$U_6 = U_{03} + \frac{2}{3} \xi; \quad (10)$$

$$\xi = \frac{U_{пер}}{\kappa} \left[\frac{L'_2}{L_s + L'_2} e^{-\frac{z+R'}{L_s+L'_2}} + \frac{R'}{z+R'} \left(1 - e^{-\frac{z+R'}{L_s+L'_2}} \right) \right]. \quad (11)$$

Здесь $U_{пер}$ —переходное напряжение на вторичной стороне при зажигании дуги,

L'_2, R' —приведенные значения индуктивности и сопротивления нагрузки,

U_{01}, U_{03} —начальное напряжение на фазах 1 и 3 к моменту зажигания дуги; обозначения $U_{3д}$ и U_6 для вторичной стороны условны.

κ —коэффициент трансформации.

Как показывают расчет и эксперимент на линии 20 кВ, включенной через трансформатор 20/6 кВ к генератору, максимальное перенапряжение возникает на „больной“ фазе и кратность его достигает 3. Эти перенапряжения для главной изоляции высоковольтных машин, подключенных к первичной стороне трансформаторов, опасности не представляют, не опасны они и для витковой изоляции машин, так как имеют пологий фронт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М. „Электричество“, 1953, № 6.
2. Беляков Н. Н. „Электричество“, 1957, № 5.
3. Юриков П. А. Массовая работа трубчатых разрядников 35 кВ сети. ВЭС Мосэнерго технико-информационный материал. ВЭС Мосэнерго, № 21, 1948.
4. Peterse W. Der anssetzende (intemittierende). Erdschluss, ETZ, № 47, 1917.
5. Абдурахманов М. И. „ДАН Азерб. ССР“, 1957, № 2.
6. Evans R. D., Monteith A. C., Witzke R. L. Power System transients by switching and faults, El. Eng., № 8, 1939.

Ч. М. Чуварлы

Арасыкәсилән гөвсләрдән јаранан ифрат кәркинликләре мүхтәлиф факторларын тәсири

ХҮЛАСӘ

Гөвсләрин јанмасы вә сөнмәси шәраитинә шәбәкәнин номинал кәркинлијинин, мүхтәлиф фаз тутумларынын кәскин гејри-симметриклијинин, икитәрәfli дојдурманын мүхтәлиф узунлуглу ики паралел хәттин вә јүкүн арасыкәсилән торпаглајычы гөвсләрин јаратдығы ифрат кәркинлијин дәфәлилијинә тәсири нәзәрден кечирилмишдир. Нәм дә трансформаторун биринчи тәрәфинә тәсирина бахылмышдыр.

Тәјин едилмишдир ки, арасыкәсилән гөвсләрин сөнмәси сәрбәст рәгсләрин тезлији илә идарә олуна биләр. Белә сөнмә күчлү демони-засија факторунун тәсири илә јарана биләр вә сөнмә кәркинлији рәгсләринин биринчи пики фаз кәркинлијиндән чох артыг ола биләр.

Сөнмәси сәрбәст рәгсли чәрәјанла идарә едилән гөвсдән јаранан ифрат кәркинлик Петерсенин нәзәри схеминә ујгун әләвә олан ифрат кәркинликдән кәскин фәргләнир вә үмуми һалда гөвсүн сөнмәсиндән алынән ифрат кәркинликдән артыг олмур.

Дәфәлилији 3, һәтта 4-дән чох олан ифрат кәркинликли арасыкәсилән гөвсләр шәбәкәнин мүәјјән иш режиминдә вә конфигурасија-сында јараныр.

УДК 621.34

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, С. М. БАГИРОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПУСКА АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИ ЧАСТОТНОМ УПРАВЛЕНИИ

При частотном управлении электроприводом переменного тока важное значение имеет исследование переходных процессов с целью оптимизации пуска, торможения и реверса в системе автоматизированного электропривода.

В настоящей статье рассматривается оптимизация процесса пуска асинхронного двигателя при питании от источника переменной частоты, без учета высших гармонических напряжений. Здесь под оптимизацией подразумевается обеспечение возможно большего момента в процессе пуска при минимальном значении потребляемого тока.

В общем виде уравнение асинхронного двигателя в осях, вращающихся с угловой скоростью частоты, может быть представлено следующим образом [3]:

$$[\dot{i}_k] = [A_{kn}] \cdot [i_k] \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, 4 \\ n = 1, 2, \dots, 5 \end{array} \right), \quad (1)$$

где $\dot{i}_k = \frac{di_k}{d\tau}$; $\tau = \omega_0 t$;

A_{kn} — коэффициенты правой части уравнений (1) в общем виде являются функциями параметров асинхронного двигателя, напряжения и частоты, питающего тока.

Для решения задачи пуска электропривода необходимо систему уравнений (1) дополнить уравнением движения электропривода. Таким образом поведение асинхронного двигателя в переходном режиме при частотном пуске может быть описано следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{d\tau} &= A_{11}i_1 + A_{12}i_2 + A_{13}i_3 + A_{14}i_4 + A_{15}; \\ \frac{di_2}{d\tau} &= A_{21}i_1 + A_{22}i_2 + A_{23}i_3 + A_{24}i_4 + A_{25}; \\ \frac{di_3}{d\tau} &= A_{31}i_1 + A_{32}i_2 + A_{33}i_3 + A_{34}i_4 + A_{35}; \\ \frac{di_4}{d\tau} &= A_{41}i_1 + A_{42}i_2 + A_{43}i_3 + A_{44}i_4 + A_{45}; \\ \frac{ds}{d\tau} &= A_{55} + A_{56}z. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{1\alpha}; \quad i_2 = i_{2\alpha}; \quad i_3 = i_{1\beta}; \quad i_4 = i_{2\beta}; \\ z &= (i_2i_3 - i_1i_4); \\ A_{11} &= -\frac{r_1x_2}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{21} = \frac{r_1x_m}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{31} = \frac{(x_m^2s - x_1x_2)v}{x_1x_2 - x_m^2}; \\ A_{12} &= \frac{r_2x_m}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{22} = -\frac{r_2x_1}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{32} = -\frac{x_2x_m(1-s)v}{x_1x_2 - x_m^2}; \\ A_{13} &= \frac{(x_1x_2 - sx_m^2)v}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{23} = -\frac{x_1x_mv(1-s)}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{35} = A_{11}; \quad A_{34} = A_{12}; \\ A_{14} &= \frac{(1-s)v r_2x_m}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{24} = \frac{(x_1x_2s - x_m^2)v}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{35} = A_{45} = 0; \\ A_{15} &= \frac{vx_2v}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad A_{25} = -\frac{vx_mv}{x_1x_2 - x_m^2}; \quad -A_{41} = A_{23}; \quad A_{42} = -A_{24}; \\ A_{43} &= A_{21}; \quad A_{56} = -\frac{x_m}{2\omega_0vH}; \quad A_{55} = \frac{M_c}{2\omega_01H}; \\ A_{44} &= A_{22}; \quad A_{53} = A_{54} = 0. \end{aligned}$$

Решая уравнения (1) для разных частот питающего напряжения, получим зависимость $v = f(t)$ в виде

$$v = 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3)$$

Воспользовавшись этим выражением, можно представить систему уравнений (1) в следующем виде;

$$[\dot{i}'_k] = [B_{kn}] [i_k] \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, 4 \\ n = 1, 2, \dots, 5 \end{array} \right).$$

Уравнение движения имеет вид

$$\frac{ds}{dv} = \omega_0 \frac{ds}{d\sigma} = B_{51}m_1 + B_{52}m_2 + m_3, \quad (4)$$

где

$$i'_k = \frac{di_k}{d\sigma}; \quad m_3 = \frac{1-s}{v}.$$

Здесь коэффициенты уравнений могут быть выражены через соответствующие коэффициенты уравнений (2) в виде

$$B_{kn} = \frac{T}{1-v} A_{kn}.$$

Задача частотного пуска асинхронного двигателя была решена на цифровой вычислительной машине „Наири“.

Пример. Пуск асинхронного двигателя мощностью 2,8 квт. Данные:

$v = 1$; $x_1 = x_2 = 1,017$; $r_1 = 0,0412$; $x_m = 0,935$; $r_2 = 0,00686$ (в относительных единицах) и $\omega_0 = 157 \text{ сек}^{-1}$, $H = 0,084 \text{ сек}$.

При решении уравнений (4) был использован метод Рунге—Кутты. Задача была выполнена при автоматическом поиске шага интегрирования, что существенно уменьшает погрешность вычислений. Заданная точность принята равной 0,01.

Решения уравнений были получены для случая $M_c = 1$ при изменении частоты $v = 1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4$. При определении относительных величин за базисные были приняты номинальные пара-

метры двигателя. За единицу сопротивления принята величина $r_{\text{баз}} = \frac{v_{\text{баз}}}{I_{\text{баз}}}$, а за единицу времени

$$t_{\text{баз}} = \frac{1}{2\pi f} = 3,19 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

Для решения системы уравнений (2) на ЦВМ были введены обозначения применительно к вычислительной машине:

$$c = i_{a1}; \quad b = i_{1\beta}; \quad y = i_{2a}; \quad g = i_{2\beta}; \quad \lambda = s$$

и производные этих величин

$$c' = \frac{di_{a1}}{d\omega_0 t}, \quad b' = \frac{di_{1\beta}}{d\omega_0 t}, \quad y' = \frac{di_{2a}}{d\omega_0 t}, \quad g' = \frac{di_{2\beta}}{d\omega_0 t}, \quad \lambda' = \frac{ds}{d\omega_0 t}.$$

Уравнения (2) для рассматриваемого конкретного примера могут быть записаны в виде:

$$\begin{pmatrix} c' \\ b' \\ y' \\ g' \\ \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ y \\ g \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \quad (5)$$

В общем случае для заданного двигателя коэффициенты $A_{\text{кп}}$ являются функциями s , ν или постоянными; $z = by - cg$.

Для рассматриваемого случая имеем:

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{33} &= -0,2618; & A_{21} = A_{43} &= 0,2407; \\ A_{12} = A_{34} &= 0,4007; & A_{22} = A_{44} &= -0,4358; \\ A_{13} = -A_{31} &= (6,102 - 5,143 \lambda) \nu; & A_{23} = -A_{41} &= -5,594 (1 - \lambda) \nu; \\ A_{14} = -A_{32} &= 5,61 \nu (1 - \lambda); & A_{24} = -A_{42} &= (6,102 \lambda - 5,143) \nu; \\ A_{15} &= 6 \nu; & A_{25} &= -5,5 \nu; \\ A_{35} = A_{45} &= 0; & A_{55} &= 0,038; & A_{56} &= -0,3553. \end{aligned}$$

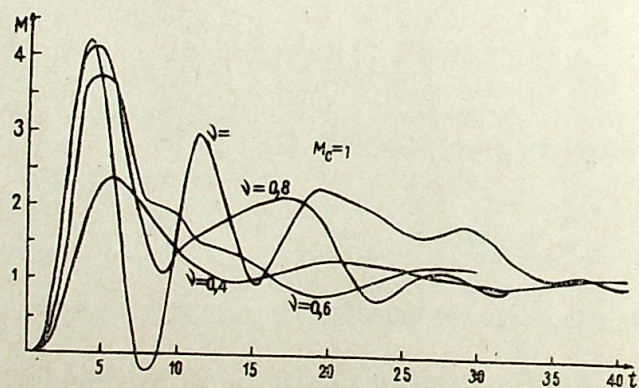


Рис. 1

На рис. 1 представлены кривые изменения момента $M = F(t)$, а на рис. 2 — кривые тока статора в функции времени: $i = f(t)$. По построенным кривым $M = F(t)$ и $i = f(t)$ выбираем максимальные значения момента при минимальных величинах тока для режима пуска, что позволяет определить оптимальные условия частотного пуска асинхронного двигателя. По этим данным строим кривую зависимости

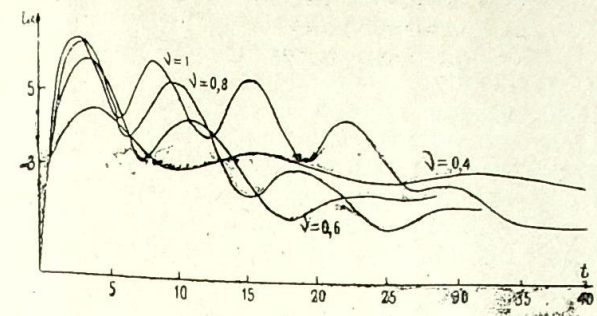


Рис. 2

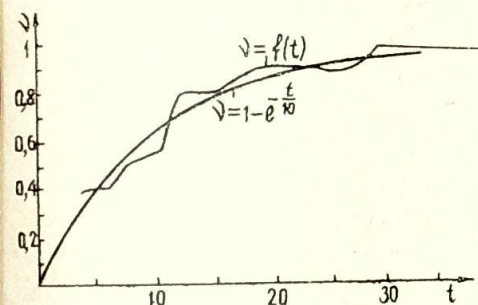


Рис. 3

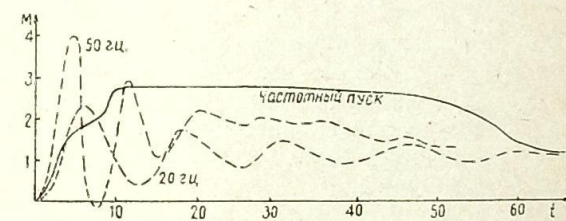


Рис. 4

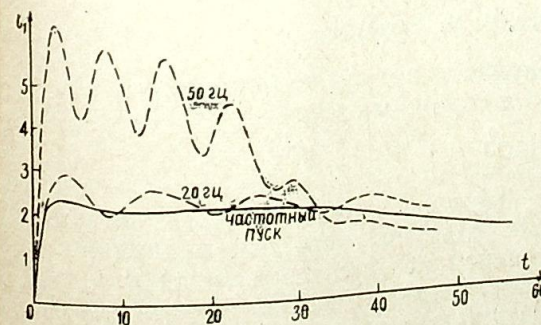


Рис. 5

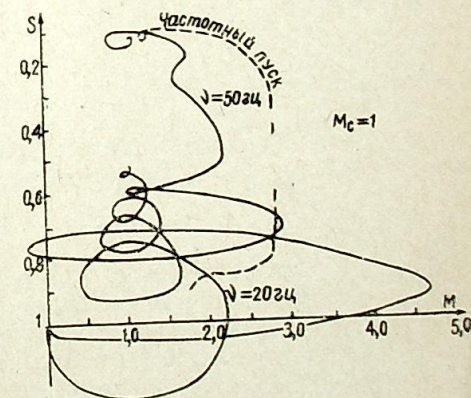


Рис. 6

$\nu = \psi(t)$, изображенную на рис. 3. Эта кривая при заданном соотношении $u = \varphi(f)$ определяется маховыми массами электропривода. При данных вращающихся маховых массах более медленный подъем частоты приведет к значительному увеличению продолжительности пуска, а при более быстром росте частоты электропривод вообще может не разогнаться [2].

Аналогичные расчеты, исходя из системы уравнений (4), для того же двигателя мощностью 2,8 кВт были выполнены на ЦВМ. По полученным расчетным данным построены зависимости момента от времени при пуске с фиксированными значениями частоты и при частотном пуске электродвигателя в соответствии с выражением (3). Построены кривые зависимости момента от времени: $M = f(t)$ для частоты $\nu = 1,0$; 0,9; 0,8; 0,7; 0,6; 0,5; 0,4.

На рис. 4 показаны кривые зависимости момента от времени в случае пуска асинхронного двигателя при частотах 50 и 20 гц и дано сравнение при частотном пуске. На рис. 5 и 6 изображены кривые зависимости тока от времени и скольжения от момента при тех же условиях, т. е. при фиксированных частотах 50 и 20 гц и при пуске с подъемом частоты и пропорциональном изменении напряжения, приложенного к двигателю.

Сравнительный анализ приведенных кривых показывает, что в течение всего процесса разгона двигателя при частотном пуске пульсаций тока и момента нет. При фиксированных частотах установлены следующие относительные продолжительности пуска: при $f = 50$ гц продолжительность пуска $t_{\text{пуска}} = 45$ о. е., при $f = 20$ гц соответственно $t_{\text{пуска}} = 52$ о. е., а между тем при частотном пуске $t_{\text{пуска}} = 59$ о. е.

Как видно из рис. 4 и 6, пусковой момент в течение всего процесса разгона имеет повышенное значение. В среднем $M_{\text{пуск}} = 2,6 M_{\text{ном}}$. В начальный период пуска ударные токи отсутствуют, что существенно благоприятствует режиму пуска электропривода. Максимальное значение тока при частотном пуске не превышает 2,4 номинальной величины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казовский Е. Я. Переходные процессы в электрических машинах переменного тока. Изд. АН СССР, М., 1962.
2. Эфендизаде А. А. Теория регулируемого асинхронного электропривода. Изд. АН. Азерб. ССР, Баку, 1955.
3. Lawrenson P. J., Stephenson J. M. Note on Induction—Machine Performance with a Variable—Frequency Supply. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, Power Record. N. 4, 1966.

Поступило 11. XI 1968

А. Э. Эфендизаде, С. М. Бағыров

Тезлик һесабына тәизим олунан асинхрон мұһәрријин
ишәбурахма һалынын оптималлашмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кәркинлијин јүксәк һармоник мұрәккәбәләрини нәзәрә алмадан дәјишән тезликли мәнбәдән гидаланан асинхрон мұһәрријин ишәбурахылма һалынын оптималлашмасы мәсәләси верилмишдир.

Оптималлашмада елә ишәбурахма тезлији нәзәрдә тутулур ки, һәммин тезлик дәјишдији заман интервалында статор дөврәсинин чәрәјаны минимал, мұһәрријин моменти исә максимал олсун.

Електромеханик кечид һалынын электрон һесаблајычы машында мұәјјәнләшдирилмәси заманы илкин диференсиал тәнликләрдә бир нечә чевирмәләр ичра едилмишдир.

Мұһәрријин кечид һалыны ајдынлашдыран тәнликләрдә чәрәјан вә сүрүшмә замана көрә дејил, тезлијә көрә диференсијаланмышдыр. Белә чевирмә тәнликләрә садә форма вермиш вә мәсәләнин һәллини хејли асанлашдырмышдыр.

Мәгаләдә конкрет асинхрон мұһәррик үчүн ишә бурахма заманы баш верән електромеханики кечид һалынын һесабы верилмишдир.

МҮНДӘРИЧАТ

Ш. М. Муталлимов. Эластик мембрананың әжилмәси мәсәләсинин тәг-риби һалли	3
Г. П. Черепанов, В. М. Мирсәлимов. Сәртлик тилләринин ја-рығын инкишафына тәсири һаггында	7
И. М. Мирзәев. Сәс сүр'әтиндән жүксәк сүр'әтли газ селинә ахан вә верилән чисми әһатә едән жүксәк сүр'әтли мустәви шырнағын һесаблинамасы	12
И. И. Ибраһимов. Бир функцијалар системинин орта тамлығы һаггында	17
Ј. М. Сејидов, М. Н. Абдуллаев. Магнит-низамлы кристал-ларда ики магнонлу удулманын нәзәријјәсинә даир	25
Н. Ә. Әлиев, Р. А. Ақопјан, Б. А. Әһмәдов, М. М. Мусаза-дә. 36Г2С маркалы поладдан һазырланмыш боруларын жүксәк температурлу табәксилтмәдән сонра ренткенографик тәдгиги	37
Ф. Н. Газыев, М. К. Шейнкман, И. Б. Ермолович, Г. Ә. Ахундов. Ln Se монокристалларында рекомбинасија просесләри вә реком-бинасија мәркәзләринин параметрләри	41
Ф. К. Исаев, Р. М. Заманова, Ә. Х. Хәлилов. Активләшдиричи ашгар анкионларынын бәзи КСІ фосфорларынын рәнкләнмә мәркәзләри вә реком-бинасијалы лүминесценсијасына тәсиринин тәдгиги	49
А. И. Мухтаров, И. М. Нәчәфов, С. Г. Абдуллаев. Гаршы-лығы тәсирин гејри-мәһәллилијинин нәзәрә алынмасы илә $I^- + I^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ просесинин тәдгиги	57
К. Е. Зүлфугарзадә, һ. А. һачыев, Л. М. Иманов. Хлорбен-зол-јодбензол системиндә диелектрик полјаризасијасы релаксасијасынын темпе-ратур асылылығынын тәһлили	63
М. Б. Керимбәјов, Ч. А. Әфәндијев. Күнәш гранулјасијасыны мушаһидә етмәк үчүн телевизија системинин тәтбиғинә даир	72
И. Л. Шайн, Р. һ. һачыев. Дәјишән чәрәјанын рәғәмли компенсаторлары үчүн мурәккәб гургулары һәссаслығынын сечилмәси мәсәләсинә даир	77
М. А. Гулијев. Локал-кечиричи таваны олан лајда тәсирләнмә чәһәсинин максимал узунлуғу һаггында	82
Р. һ. Фәрәчов. Сонлу автоматлар (ардычылык машиналары) нәзәријјә-синдә импульс идарәетмә системләринин үсуллары	88
М. Р. Сәмәндәр. ЕРҺМ васитәсилә мурәккәб нефт кәмәрләринин опти-мал вариантынын сечилмәси	94
Р. А. Бајрамов. Чохғимәтли мәнтигин алт чәбрләринин предикатик сәңијәләндирилмәси һаггында	100
В. һ. һачыев. Гилберт фәзасында ишарәсини дәјишән өлчүләр үчүн сыхлығын чеврилмә дустуру	105
М. А. Гәрибов, И. Ј. Степанова. Универсал превентерин гапағы-нын кәркин вәзијјәтинин тәдгиги	112
Ф. һ. һусейнов, һ. Тамаев. Понтрјакин максимум принципинин електрик дөврәләринин һесабы үчүн истифадәдилмә имканлары һаггында	118
Ч. М. Чуварлы. Арасыкәсилән гөвсләрдән јаранан ифрат кәркинликләрә мүхтәлиф факторларын тәсири	124
А. Ә. Әфәндизадә, С. М. Бағыров. Тезлик һесабына тәнзим олу-нан асинхрон мүһәрријин ишәбурахма һалынын оптималлашмасы	130

СОДЕРЖАНИЕ

Ш. М. Муталлимов. Приближенные решения задачи прогиба гибкой мембраны	3
Г. П. Черепанов, В. М. Мирсалимов. О воздействии ребер жесткости на развитие трещины	7
И. М. Мирзоев. Расчет плоской сверхзвуковой струи, истекающей в спут-ный сверхзвуковой поток и обтекающей заданное тело	12
И. И. Ибрагимов. О полноте в среднем одной системы функций	17
Ю. М. Сеидов и М. Н. Абдуллаев. К теории двухмагнного поглощения в магнето-упорядоченных кристаллах	25
Н. А. Алиев, Р. А. Ақопјан, Б. А. Ахмедов, М. М. Мусаза-дә. Рентгенографическое исследование закаленных труб из стали 36Г2С, под-вергнутых высокому отпуску	37
Ф. Н. Казиев, М. К. Шейнкман, И. Б. Ермолович, Г. А. Ахундов. Рекомбинационные процессы и параметры рекомбинационных центров в монокристаллах Ln Se	41
Ф. К. Исаев, Р. М. Заманова, А. Х. Халилов. Исследование влияния анионов активирующих примесей на центры окраски и рекомбинационную люминесценцию некоторых КСІ-фосфоров	49
А. И. Мухтаров, И. М. Наджафов, С. К. Абдуллаев. Иссле-дование $I^- + I^+ \rightarrow p + \bar{p} + \gamma$ процесса с учетом нелокальности взаимодействия	57
К. Э. Зүлфугарзаде, Г. А. Гаджиев, Л. М. Иманов. Ана-лиз температурной зависимости релаксации диэлектрической поляризации в систе-ме хлорбензол—йодбензол.	63
М. Б. Керимбеков, Ч. А. Эфендиев. О применении телевизионных систем для наблюдения солнечной грануляции	72
И. Л. Шайн, Р. Г. Гаджиев. К вопросу выбора чувствительности пороговых устройств цифровых следящих компенсаторов переменного тока	77
М. А. Гулиев. О максимальной длине фронта возмущения в пласте с локальнопроницаемой кровлей	82
Р. Г. Фараджев. Методы импульсных систем управления в теории конечных автоматов (последовательностных машин)	88
М. Р. Самандар. Выбор оптимального варианта сложного магистраль-ного нефтепровода при помощи ЭЦВМ	94
Р. А. Байрамов. О предикатной характеризованности подалгебр мно-гозначной логики	100
В. Г. Гаджиев. Формула обращения для плотностей знакопеременных мер в гильбертовом пространстве	105
М. А. Гәрибов, И. Ю. Степанова. Исследование напряженного состояния кышки универсального превентера	112
Ф. Г. Гусейнов, А. Г. Тамаев. Об одном алгоритме расчета электрических цепей произвольной конфигурации на базе дискретного принципа максимума	118
Ч. М. Джуварлы. Влияние различных факторов на перенапряжения от перемежающихся заземляющих дуг	124
А. А. Эфендизаде, С. М. Бағыров. Оптимизация процесса пуска асинхронного двигателя при частотном управлении	130

Сдано в набор 7/VII 1969 г. Подписано к печати 15/VII 1969 г. Формат бумаги 70×108.
Бум. лист. 4,13. Печ. лист. 11,30. Уч.-изд. лист. 11,49. ФГ 17329. Заказ 71.
Тираж 760. Цена 80 коп.

Государственный Комитет Совета Министров Азербайджанской ССР по печати.
Типография „Красный Восток“. Баку, ул. Ази Асланова 80.