

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

6

1968

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ – БАКУ

УДК 517.512.2

Г. Н. ОРУДЖОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ
ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $L(0, \infty)$

§ 1. Пусть измеримая и неотрицательная функция $K_\lambda(t)$, зависящая от параметра λ , суммируема на интервале $(0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty K_\lambda(t) dt = 1.$$

Рассмотрим интегральный оператор

$$I_\lambda(f, x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(\lambda) \int_0^{\frac{x}{a_j(\lambda)}} f[x - a_j(\lambda)t] K_\lambda(t) dt, \quad (1)$$

где $a_j(\lambda) \geq \delta > 0$ ($j = -\infty, \infty$), $\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(\lambda) \int_0^{\frac{x}{a_j(\lambda)}} K_\lambda(t) dt \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow \infty$)

и $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \leq M$ при всех значениях λ .

В дальнейшем нас будет интересовать, вообще говоря, сходимость и скорость сходимости линейных интегральных операторов (1) к функции $f(x)$, при стремящемся к некоторому предельному значению λ_0 параметра λ . Не уменьшая общности, предположим, что $\lambda_0 = \infty$.

Очевидно, что для каждой функции $e^{-cx} f(x) \in L(0, \infty)$ линейный интегральный оператор (1) конечен и $e^{-cx} I_\lambda(f, x) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$. В самом деле

$$\|e^{-cx} I_\lambda(f, x)\|_L \leq \int_0^\infty e^{-cx} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^{\frac{x}{a_j(\lambda)}} |f[x - a_j(\lambda)t]| K_\lambda(t) dt \right\} dx.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-cx} I_\lambda(f, x)\|_{L(0, \infty)} &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\infty du \int_u^\infty e^{-cx} |f(x - \\ &- 4) K_\lambda\left(\frac{u}{a_j}\right) \frac{du}{a_j} \leq \|e^{-cx} f\|_{L(0, \infty)} M. \end{aligned}$$

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. А. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Р. А. Аббасов (отв. секретарь), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“.

Сдано в набор 23/XII 1968 г. Подписано к печати 29/IV 1969 г. Формат бумаги 70×108.
Бум. лист. 3,75. Печ. лист. 10,28. Уч. изд. лист. 9,28. ФГ 15401. Заказ 436.
Тираж 690. Цена 80 коп.

Государственный Комитет Совета Министров Азербайджанской ССР по печати.
Типография „Красный Восток“. Баку, ул. Ази Асланова, 80.

п51435
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

Кроме того, если для каждого $\delta > 0$

$$\int_0^\infty K_\lambda(t) dt \rightarrow 0 \quad (2)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, то $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|e^{-cx} \{f(x) - I_\lambda(f, x)\}\|_{L(0, \infty)} = 0$.

Действительно, пусть $\|e^{-cx} \{f(x) - I_\lambda(f, x)\}\|_{L(0, \infty)} \leq \|e^{-cx} \{I_\lambda(f, x) - K_\lambda^*(x) f(x)\}\|_L + \|e^{-cx} \{K_\lambda^*(x) f(x) - f(x)\}\|_{L(0, \infty)} = I_1 + I_2$,

где

$$K_\lambda^*(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(\lambda) \int_0^{\frac{x}{a_j(\lambda)}} K_\lambda(t) dt.$$

Покажем, что $I_1 \rightarrow 0$ и $I_2 \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty e^{-cx} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(\lambda) \int_0^{\frac{x}{a_j(\lambda)}} \{f[x - a_j(\lambda)t] - f(x)\} K_\lambda(t) dt \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\delta e^{-cx} dx \int_0^x |f(x-u) - f(x)| K_\lambda\left(\frac{u}{a_j}\right) \frac{du}{a_j} + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (b_j(\lambda)) \int_0^\infty e^{-cx} dx \int_0^x |f(x-u) - f(x)| K_\lambda\left(\frac{u}{a_j}\right) \frac{du}{a_j} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Из $e^{-cx} f(x) \in L(0, \infty)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\int_u^\delta |f(x-u) - f(x)| e^{-cx} dx < \varepsilon$ для всех $\delta \leq \delta_0$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\delta K_\lambda\left(\frac{u}{a_j}\right) \frac{du}{a_j} \int_u^\delta |f(x-u) - f(x)| e^{-cx} dx < \\ &< \varepsilon \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^{\frac{\delta}{a_j}} K_\lambda(u) du < \varepsilon M. \end{aligned}$$

Аналогично

$$I_1^{(2)} \leq 2M \|e^{-cu} f\|_{L(0, \infty)} \int_{\frac{\delta}{a_j}}^\infty K_\lambda(u) du \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом $I_1 \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Кроме того,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty e^{-cx} |f(x)| |1 - K_\lambda^*(x)| dx \leq \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\delta e^{-cx} |f(x)| dx \int_{\frac{x}{a_j(\lambda)}}^\infty K_\lambda(t) dt + \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\infty e^{-cx} |f(x)| dx \int_{\frac{x}{a_j(\lambda)}}^\infty K_\lambda(t) dt = I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \end{aligned}$$

для любого $\delta > 0$.

Так как $\int_0^\delta e^{-cx} |f(x)| dx < \varepsilon$ при $\delta \leq \delta_0$, то имеем

$$I_2^{(1)} \leq M \int_0^\delta e^{-cx} |f(x)| dx < M\varepsilon.$$

Для второго интеграла $I_2^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2^{(2)} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |b_j(\lambda)| \int_0^\infty e^{-cx} |f(x)| dx \int_x^\infty K_\lambda\left(\frac{u}{a_j}\right) \frac{du}{a_j} \leq \\ &\leq M \|e^{-cx} f(x)\|_L \int_{\frac{\delta}{a_j}}^\infty K_\lambda(u) du \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$. Следовательно и $I_2 \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом полностью доказывается требуемое утверждение.

§ 2. В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты из теории преобразований Лапласа. Пусть функция $f(t)$ такая, что $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$. Преобразование Лапласа функции $f(t)$ определяется следующим образом:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (s = c + i\tau, \text{Res} > 0).$$

Пусть теперь $g(t)$ есть функция с ограниченным изменением на отрезке $[0, R]$ для каждого $R > 0$, т. е. $g(t) \in BV(0, R)$ ($R > 0$) и пусть $\int_0^\infty e^{-st} |dg(t)| < \infty$ для каждого $c > 0$. Тогда преобразование Лапласа — Стильтеса функции $g(t)$ определяется в следующем виде:

$$\hat{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dg(t) \quad (s = c + i\tau, \text{Res} > 0).$$

Введем обозначения:

$$q_\lambda(s) \equiv \hat{K}_\lambda(s) = \int_0^\infty e^{-st} K_\lambda(t) dt,$$

$$B_\lambda(s) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(\lambda) q_\lambda[a_j(\lambda)s]$$

и

$$\Delta_\lambda(f, x) = f(x) - I_\lambda(f, x).$$

Пусть $\mathcal{Q}_{LC}$ — совокупность всех функций $F(s)$, для которых $F(s) = \hat{f}(s)$, для некоторой $f(t) \in BV(0, R)$ ($R > 0$). В дальнейшем будем говорить, что удовлетворяется условие $N(\psi)$, если существует положительная, невозрастающая и стремящаяся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ функция $\psi(\lambda)$ такая, что существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1 - B_\lambda(s)}{\psi(\lambda)} = Q(s),$$

где для каждой фиксированной s , $Q(s) \neq 0$ почти везде в полуплоскости $\text{Res} > 0$.

Лемма 1. Если интеграл $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ сходится абсолютно в точке $s = s_0 = c_0 + i\tau_0$, то он сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\text{Res} > c_0$ (см. [3], гл. II).

Лемма 2. Пусть функция $F(s)$ голоморфна в $\text{Res} > 0$. Для того чтобы $F(s) \in \mathcal{Q}_{LC}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|e^{-ct} F_T(t)\|_{L(0, \infty)} = O(1)$$

при всех $T > 0$, где $F_T(t)$ есть комплексный обратный оператор

$$F_T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{st} f(s) ds \quad (s = c + i\tau, c > 0)$$

Лемма 2 принадлежит Беренцу и Бутцеру [2]. Нам понадобится еще свертка двух функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ с ограниченными изменениями на отрезке $[0, R]$ для каждого $R > 0$. Эта свертка определяется следующим образом:

$$\gamma(t) = \int_0^t \alpha(t-u) d\beta(u) = \int_0^t \beta(t-u) d\alpha(u) \quad (t \geq 0).$$

Лемма 3. Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — нормированные функции с ограниченными изменениями на $0 \leq t \leq R$ для каждого $R > 0$ и пусть интегралы

$$\overset{v}{\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t),$$

$$\overset{v}{\beta}(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\beta(t)$$

сходятся абсолютно, тогда свертка функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ является нормированной функцией с ограниченным изменением $[0, R]$ и справедливо соотношение

$$\overset{v}{\gamma}(s) = \overset{v}{\alpha}(s) \overset{v}{\beta}(s)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-ct} |d\gamma(t)| \leq \int_0^\infty e^{-ct} |d\alpha(t)| \int_0^\infty e^{-ct} |d\beta(t)|.$$

Лемма 3 дана в монографии Уиддера [3].

§ 3. Докажем прямые и обратные теоремы о приближении функций $f(t) \in L(0, \infty)$ линейными интегральными операторами (1) в метрике пространства $L(0, \infty)$. Эти теоремы дают возможность определить класс насыщения семейства интегральных операторов (1) в пространстве $L(0, \infty)$.

Теорема 1. Пусть $e^{-ct} f(t)$, $e^{-ct} l(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$ и выполняется условие $N(\psi)$. Тогда, если

$$\left\| e^{-ct} \left\{ \frac{1}{\psi(\lambda)} [f(t) - l_\lambda(f, t)] - l(t) \right\} \right\|_L = O(1) \quad (3)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, то справедливо

$$Q(s) \varphi_0(s) = \overset{\Delta}{l}(s) \quad (4)$$

для $\text{Res} > 0$, где $\varphi_0(s) = \overset{\Delta}{f}(s)$.

Доказательство. Так как

$$\overset{\Delta}{l}_\lambda(s) = \varphi_0(s) B(s)$$

и

$$\overset{\Delta}{\Delta}_\lambda(s) = \varphi_0(s) [1 - B_\lambda(s)],$$

то имеем

$$\frac{1 - B_\lambda(s)}{\tau(\lambda)} \varphi_0(s) - \overset{\Delta}{l}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \frac{1}{\psi(\lambda)} [f(t) - l_\lambda(f, t)] - l(t) \right\} dt$$

для $\text{Res} > 0$.

Следовательно,

$$\left\| \frac{1 - B_\lambda(s)}{\psi(\lambda)} \varphi_0(s) - \overset{\Delta}{l}(s) \right\| \leq \left\| e^{-ct} \left\{ \frac{1}{\psi(\lambda)} [f(t) - l_\lambda(f, t)] - l(t) \right\} \right\|_{L(0, \infty)} = O(1)$$

при всех $\text{Res} > 0$.

Пользуясь условием $N(\psi)$, из последнего неравенства находим

$$|Q(s) \varphi_0(s) - \overset{\Delta}{l}(s)| = 0,$$

т. е. справедливо (4).

Следствие. Пусть $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$ и выполняется условие $N(\psi)$. Тогда из соотношения

$$\|e^{-ct} [f(t) - l_\lambda(f, t)]\|_{L(0, \infty)} = O[\psi(\lambda)]$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ следует, что $f(t) = 0$ почти везде на $(0, \infty)$. Это следует из теоремы, если полагать, что $l(t) = 0$.

Теорема 2. Пусть $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$ и существует нормированная функция $l_\lambda(t) \in BV(0, R)$ такая, что

$$\frac{1 - B_\lambda(s)}{\psi(\lambda) Q(s)} = \overset{\Delta}{l}_\lambda(s) = \int_0^\infty e^{-st} dl_\lambda(t) \quad (s = c + i\tau, c > 0), \quad (5)$$

где $\int_0^\infty |dl_\lambda(t)| \leq M < +\infty$ при всех λ . Тогда если

$$Q(s) \varphi_0(s) \in \mathcal{Q}_{LC}, \quad (6)$$

то выполняется соотношение

$$\|e^{-ct} \{f(t) - l_\lambda(f, t)\}\|_{L(0, \infty)} = O[\psi(\lambda)] \quad (7)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где $\varphi_0(s) = \overset{\Delta}{f}(s)$.

Доказательство. Пусть

$$Q(s) \varphi_0(s) = \overset{v}{g}(s), \quad (8)$$

где $g(t) \in BV(0, R)$ и $\int_0^\infty e^{-ct} |dg(t)| < \infty$ ($R > 0, c > 0$).

Тогда в силу (5) и (8) получим

$$\frac{1 - B_\lambda(s)}{\psi(\lambda)} \varphi_0(s) = \overset{v}{l}_\lambda(s) \overset{v}{g}(s). \quad (9)$$

Теперь составим свертку функций $g(t)$ и $l_\lambda(t)$:

$$h_\lambda(x) = \int_0^x g(x-s) dl_\lambda(t).$$

По лемме 3

$$h_\lambda(x) \in BV(0, R) \quad (R > 0),$$

$$\overset{v}{h}_\lambda(s) = \overset{v}{l}_\lambda(s) \overset{v}{g}(s) \quad (10)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-ct} |dh_\lambda(t)| \leq \int_0^\infty |dl_\lambda(t)| \int_0^\infty e^{-ct} |dg(t)| \leq A < +\infty. \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$\Delta_{\lambda}^{\wedge}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [f(t) - I_{\lambda}(f, t)] dt = [1 - B_{\lambda}(s)] \varphi_0(s). \quad (12)$$

На основании (9), (10) и (12) находим

$$h_{\lambda}(s) = \frac{1}{\psi(\lambda)} \Delta_{\lambda}^{\wedge}(s).$$

Отсюда по теореме единственности преобразования Лапласа ([3], гл. II) имеем

$$h_{\lambda}(t) = \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^t [f(u) - I_{\lambda}(f, u)] du$$

Следовательно, учитывая (11), найдем

$$\int_0^{\infty} e^{-ct} |dh_{\lambda}(t)| = \frac{1}{\psi(\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-ct} |f(t) - I_{\lambda}(f, t)| dt = O(1)$$

для каждого $c > 0$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$ и выполняется условие $N(\psi)$. Если имеет место соотношение (7) при $\lambda \rightarrow \infty$, то справедливо (6) для $\text{Res} > 0$.

Доказательство. Известно ([3], гл. II), что формула обращения для интеграла (12) имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi_0(s) [1 - B_{\lambda}(s)] e^{sx} ds.$$

Рассмотрим частные интегралы

$$S_R(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iR}^{c+iR} \varphi_0(s) [1 - B_{\lambda}(s)] e^{sx} ds.$$

Учитывая, что среднее Фейера от $S_R(x)$ равно

$$\sigma_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T S_R(x) dR = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{sx} \varphi_0(s) [1 - B_{\lambda}(s)] ds, \quad (13)$$

в силу леммы 1 будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_T(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{(c+i\tau)x} d\tau \int_0^{\infty} e^{-(c+i\tau)t} [f(t) - I_{\lambda}(f, t)] dt = \\ &= \frac{1}{\pi T} \int_0^{\infty} e^{c(x-t)} [f(t) - I_{\lambda}(f, t)] \frac{\sin^2\{T(x-t)/2\}}{(x-t)^2} dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\|e^{-cx} \sigma_T(x)\|_{L(-\infty, \infty)} \leq \|e^{-ct} [f(t) - I_{\lambda}(f, t)]\|_L,$$

то в силу (7) и (13) найдем

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{i\tau x} \varphi_0(c + i\psi) [1 - B_{\lambda}(c + i\tau)] d\tau \right\|_{L(-\infty, \infty)} = O[\psi(\lambda)]$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $T > 0$. Отсюда, учитывая условие $N(\psi)$, лемму Фату и теорему Лебега о предельном переходе, под знаком интеграла будем иметь

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) e^{i\tau x} Q(c + i\tau) \varphi_0(c + i\tau) d\tau \right\|_{L(-\infty, \infty)} = O(1)$$

при всех $0 < T < \infty$.

Для завершения доказательства теоремы остается применить лемму 2.

Теорема 4. Пусть $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ для каждого $c > 0$ и удовлетворяется условие (5), причем $\int_0^{\infty} |dl_{\lambda}(t)| \leq M$ при всех λ .

Тогда линейный интегральный оператор (1) насыщен в пространстве $L(0, \infty)$ с порядком $O[\psi(\lambda)]$ и класс насыщения состоит из тех функций $f(t)$, для которых удовлетворяется условие (6). Аналогичные результаты получены нами и в пространстве $L_p(0, \infty)$ ($p > 1$).

Подобные результаты для приближения функций другими линейными операторами методом преобразования Фурье в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p \leq 2$) были получены Р. Г. Мамедовым [4, 5]. Приведенные здесь утверждения являются обобщениями соответствующих результатов Беренца и Бутцера [1].

Пользуясь случаем, выражаю благодарность проф. Р. Г. Мамедову за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berens H. and Butzer P. L. On the best approximation for singular integrals by Laplace-transform methods, Proceedings of the conference on approximation, Oberwolfach, August 1962. Birkhauser, Basel.
2. Berens H. und Butzer P. L. Über die Darstellung holomorpher Funktionen durch Laplace- und Laplace-Stieltjes Integrale, Math. Z., 81 (1963), 124—134.
3. Widder D. V. The Laplace transform, Princeton, 1946.
4. Мамедов Р. Г. „Изв. АН СССР, серия матем.“. 29 (1965), 957—564.
5. Мамедов Р. Г. Функцияларын хэти операторларла жахынлашмасы, Баку, Азэрнэшр, 1967.

Н. Н. Оручов

$L(0, \infty)$ фэзасында функцияларын хэти интеграл операторларла жахынлашмасы наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) хэти интеграл операторунун $L(0, \infty)$ фэзасында дојма синфи вә дојма тәртиби тәдгиг едилир.

Исбат едилир ки, һәр бир $c > 0$ үчүн $e^{-ct} f(t) \in L(0, \infty)$ вә ис-тәнилән λ үчүн $\int_0^{\infty} |dl_{\lambda}(t)| \leq M < +\infty$ шәртини өдәјән $l_{\lambda}(t)$ функци-

јасы (5) мүнәсибәтини өдәјирсә, онда (1) интеграл операторун $L(0, \infty)$ фэзасында дојма тәртиби $O[\psi(\lambda)]$ -дыр вә дојма синфи (6) мүнәсибәтини өдәјән функцијалар чохлағудур.

УДК 513.88+517.432:517.43

АХМЕД М. БАБАЕВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОДНОГО КЛАССА ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

В данной статье, по известному методу М. В. Келдыша [1], получившему дальнейшее развитие в работах Дж. Э. Аллахвердиева [6—8], устанавливаются некоторые признаки N -краткой полноты системы собственных и присоединенных (с.п.) элементов некоторого класса вполне непрерывных операторов в пространстве Банаха B , зависящих от параметра λ рационально.

В статье приняты обозначения:

$\lambda_j(A)$ — последовательность собственных значений оператора A , расположенных в порядке убывания модулей с учетом кратностей;

$\epsilon_j(A)$ — наилучшее приближение оператора A j -мерными операторами;

$n(t, A)$, $\nu(t, A)$ — соответственно, функции, определяющие число членов последовательностей $\lambda_j(A)$ и $\epsilon_j(A)$, больших t^{-1} .

Порядком p оператора A будем называть точную нижнюю границу чисел p , для которых имеет место неравенство

$$\sum_j \epsilon_j^p(A) < \infty \quad (p > 0).$$

Рассмотрим оператор

$$L(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n_j} (\lambda - a_j)^{-k} H_j^k B_{jk} + \sum_{k=0}^{n_0} \lambda^k H_0^k B_{0k}, \quad (1)$$

где $B_{jn_j} = I$ при $j = \overline{0, n}$; B_{jk} — произвольные вполне непрерывные операторы при $k < n_j$; H_j — ограниченные операторы, такие что $\overline{R(H_j)} = B$.

Следуя В. И. Мацаеву, рассмотрим аналог неванлиновской характеристики роста скалярных мероморфных функций:

$$T(r, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \| (I - re^{i\theta} A)^{-1} \| d\theta + \int_0^r \frac{n(t, A)}{t} dt.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Если $M(\lambda)$ — линейный оператор, зависящий от λ аналитически и удовлетворяющий условию $\|M(\lambda)\| \leq M$ при всех $|\lambda| \geq R$, а оператор A имеет порядок p , то резольвента оператора $\lambda AM(\lambda) = \lambda K(\lambda)$ есть операторная функция, порядок роста которой в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит p .
Доказательство. В силу теоремы В. И. Мацаева [4] при каждом μ имеет место оценка

$$T(r, K(\mu)) \leq C(\epsilon) (1 + \nu(r(1+\epsilon), K(\mu))) \ln r(1+\epsilon) \epsilon_0(K(\mu)),$$

где $C(\epsilon)$ — константа, зависящая только от $\epsilon > 0$.

Так как $\epsilon_j(K(\mu)) \leq \|M(\mu)\| \epsilon_j(A) \leq M \epsilon_j(A)$,

то при $\epsilon_j(A) \geq \frac{1}{r(1+\epsilon)}$ имеем $M \epsilon_j(A) \geq \frac{1}{r(1+\epsilon)}$,

откуда следует

$$\nu(r(1+\epsilon), K(\mu)) \leq \nu(r(1+\epsilon), MA). \quad (2)$$

Из (2) вытекает

$$T(r, K(\mu)) \leq C(\epsilon) (1 + \nu(r(1+\epsilon), MA)) \ln r(1+\epsilon) M \epsilon_0(A)$$

для всех $|\mu| \geq R$. Отсюда и на основании свойств функции $\nu(t, A)$ (см. [11], стр. 20) вытекает справедливость леммы.

Замечание 1. Легко заметить, что оператор (1) в окрестности каждой точки a_j можно представить в виде

$$L(\mu) = \sum_{k=1}^{n_j} \mu^k H_j^k B_{jk} + A_0 + L(\mu), \quad (3)$$

где $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \|L_1(\mu)\| = 0$, $\mu = (\lambda - a_j)^{-1}$, A_0 — вполне непрерывный оператор.

Поэтому все рассуждения относительно оператора (1) в окрестности бесконечно удаленной точки верны и для каждой конечной точки a_j .

Отметим также, что в (3), не нарушая общности дальнейших рассуждений, можно предположить существование и ограниченность оператора $(I - A_0)^{-1}$.

Лемма 2. Если H_0 — оператор конечного порядка p , то порядок роста резольвенты оператора (1) не превосходит p в окрестности бесконечно удаленной точки.

Доказательство. Легко заметить, что

$$(I - L(\lambda))^{-1} = (I - L_2(\lambda) B(\lambda))^{-1} B(\lambda),$$

где $L_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_0} \lambda^k H_0^k B_{0k}$; $B(\lambda) = (I - B_{0,0})^{-1} (I - L_1(\lambda) (I - B_{0,0})^{-1})^{-1}$

и $L_1(\lambda) = L(\lambda) - L_2(\lambda) - B_{0,0}$. В силу того, что $\|B(\lambda)\| \leq C$ при достаточно больших $|\lambda|$, на рост резольвенты будет влиять только оператор $(I - L_2(\lambda) B(\lambda))^{-1}$.

Рассмотрим уравнение

$$y = L_2(\lambda) B(\lambda) y + f.$$

Введя пространство $B^{(n)} = B \times B \times \dots \times B$ с нормой

$$\|\tilde{x}\|_{B^{(n)}} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_B \quad (\tilde{x} \in B^{(n)}, x_i \in B),$$

последнее уравнение можно свести к эквивалентному уравнению

$$\tilde{y} = \lambda \tilde{A} \tilde{M}(\lambda) \tilde{y} + \tilde{f},$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} H_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{01} B(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ B(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ B_{0n-1} B(\lambda) & I & \dots & 0 \\ B_{02} B(\lambda) & 0 & \dots & I \end{pmatrix}.$$

Несложными вычислениями можно показать, что $\|\bar{M}(\lambda)\| \leq M$ при достаточно больших $|\lambda|$. Применяя лемму 1 к оператору $\bar{A}\bar{M}(\lambda)$, где $\bar{A}$ — оператор порядка p , получим утверждение леммы 2.

Лемма 3. Пусть на каком-либо неограниченном множестве G в комплексной плоскости выполняются условия

$$\|\lambda^l (I - \lambda^{n_0} H_0^{n_0})^{-1} H_0^l\| \leq C_l \quad (l = \overline{0, n-1}; \lambda \in G; |\lambda| \geq R),$$

тогда для оператора (1) справедливо

$$\|(I - L(\lambda))^{-1}\| \leq C \quad (\lambda \in G) \quad (4)$$

при достаточно больших $|\lambda|$.

Доказательство. Представим оператор $(I - L(\lambda))^{-1}$ в виде

$$(I - L(\lambda))^{-1} = [I - (I - \lambda^{n_0} H_0^{n_0})^{-1} (L_2(\lambda) - \lambda^{n_0} H_0^{n_0} + B_{0,0} + L_1(\lambda))]^{-1} (I - \lambda^{n_0} H_0^{n_0})^{-1}.$$

Как известно, (см. [9, 10]), по условиям леммы

$$\|\lambda^l (I - \lambda^{n_0} H_0^{n_0})^{-1} H_0^l B_{0,l}\| \rightarrow 0 \quad (l = \overline{0, n_0-1})$$

при $|\lambda| \rightarrow \infty, \lambda \in G$. Отсюда вытекает справедливость леммы.

Следуя Дж. Э. Аллахвердиеву, систему

$$y_{ih}^{jr} = \sum_{k=0}^h \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} (\psi_j^r(\lambda)) \right]_{\lambda=c_i} y_{i,h-k} \quad (r = \overline{1, n_j}; j = \overline{0, n}),$$

где $y_{i,h-k} (h = \overline{0, m_i})$ — цепочка собственных и присоединенных элементов оператора $L(\lambda)$, соответствующая собственному значению c_i , а $\psi_j^r(\lambda) = (\lambda - a_j)^{-r}$ при $j = \overline{1, n}$ и $\psi_0^r = \lambda^r$, будем называть производной цепочкой с. п. элементов оператора (1).

Говорят, что система с. п. элементов оператора (1) N -кратно полна в B , где $N = \sum_{j=0}^n n_j$, если система $y_{i,k} = \{y_{ik}^{jr}\}$ полна в пространстве

$B^{(N)} = B \times B \times \dots \times B$ ($\kappa = \overline{0, m_i}; i = 1, 2, \dots; m_i$ — длина цепочки собственного элемента y_i). При наложенных на оператор (1) условиях имеет место следующая

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

1) H_j — операторы конечного порядка p_j такие, что $\overline{R(H_j)} = B$;
2) для каждого $0 \leq j \leq n$ существует система лучей G_j , исходящих из начала координат таких, что угол между соседними лучами системы G_j меньше $\frac{\pi}{p_j}$ и на каждом из них для доста-

точно больших $|\lambda|$ выполняется условие

$$\|\lambda^l (I - \lambda^{n_j} H_j^{n_j})^{-1} H_j^l\| \leq C_l \quad (l = \overline{0, n_j-1}; j = \overline{0, n}).$$

Тогда с. п. элементы оператора (1) N -кратно полны в B , где

$N = \sum_{j=0}^n n_j$. Предельными точками собственных значений будут точки a_j и $a_0 = \infty$.

Доказательство. Пусть система $y_{ik} = \{y_{ik}^{jr}\}$ неполна в пространстве $B^{(N)}$. Тогда существует элемент $F \in B^{(N)}$ с координатами $\{f_{jr}\}$ такой, что

$$F(y_{ik}) = \sum_{j=0}^n \sum_{r=1}^{n_j} f_{jr} (y_{ik}^{jr}) = 0 \quad (\kappa = \overline{1, m_i}; i = 1, 2, \dots). \quad (5)$$

образуем элемент

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^{n_j} \psi_j^k(\lambda) f_{jk} \quad (6)$$

и рассмотрим уравнение

$$y(\lambda) = L^*(\lambda) y(\lambda) + f(\lambda), \quad (7)$$

Откуда $y(\lambda) = (I - L^*(\lambda))^{-1} f(\lambda)$. Как показано Дж. Э. Аллахвердиевым, главная часть резольвенты оператора $L^*(\lambda)$ в окрестности полюса c , являющейся регулярной для $L^*(\lambda)$, имеет вид

$$\sum_i \left[\frac{z^i y^i}{(\lambda - c)^{m_i}} + \frac{z^i y^i + z^i y^i}{(\lambda - c)^{m_i-1}} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{z^i y_{m_i-1} + z^i y_{m_i-2} + \dots + z_{m_i-1} y^i}{\lambda - c} \right],$$

где $y^i, y_1^i, \dots, y_{m_i-1}^i$ и $z^i, z_1^i, \dots, z_{m_i-1}^i$ — каноническая система собственных и присоединенных элементов, соответствующая собственному значению c операторов $L(\lambda)$ и $L^*(\lambda)$. Под записью z у понимается одномерный оператор $zf = f(y)z$, где $f, z \in B^*, y \in B$.

Пусть $\varphi(\lambda) \in B^*$ и является голоморфной функцией λ в окрестности полюса $\lambda = c$ резольвенты оператора $L^*(\lambda)$. Тогда главная часть $(I - L^*(\lambda))^{-1} \varphi(\lambda)$ может быть записана в виде

$$\sum_i \left\{ a_{im_i} \frac{z^i}{\lambda - c} + a_{im_i-1} \left(\frac{z^i}{(\lambda - c)^2} + \frac{z_1^i}{\lambda - c} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + a_{i0} \left(\frac{z^i}{(\lambda - c)^{m_i-1}} + \dots + \frac{z_{m_i-1}^i}{\lambda - c} \right) \right\}, \quad (8)$$

где

$$a_{i0} = \varphi(c)(y^i),$$

$$a_{i1} = \varphi(c)(y_1^i) + \frac{1}{1!} \frac{d\varphi(c)}{dc} (y^i), \quad (9)$$

$$\dots$$

$$a_{im_i} = \varphi(c)(y_{m_i}^i) + \frac{1}{1!} \frac{d\varphi(c)}{dc} (y_{m_i-1}^i) + \dots + \frac{1}{m_i!} \frac{d^{m_i} \varphi(c)}{dc^{m_i}} (y^i).$$

Легко заметить, что (8) обращается в нуль только тогда, когда все $a_{ij} = 0$.

Заметим, что (6) голоморфна в окрестности любого полюса $(I - L^*(\lambda))^{-1}$, так как ни один из a_j не является собственным значением оператора $L^*(\lambda)$ [8], следовательно и полюсом резольвенты.

Учитывая вышесказанное и (5), легко показать, что при $\varphi(\lambda) \equiv f(\lambda)$ все $a_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots; l = \overline{1, m}$). Это означает, что полюсы оператора $(I - L^*(\lambda))^{-1}$, являющиеся регулярными для $(I - L^*(\lambda))$, не являются особыми для $u(\lambda) = (I - L^*(\lambda))^{-1} f(\lambda)$. В силу условия $R(H_j) = B$ точки $\bar{a}_j$ будут либо предельными точками полюсов, либо существенно особыми для $(I - L^*(\lambda))^{-1}$ [8]. Но так как резольвента оператора $L^*(\lambda)$ — мероморфная функция, то $\bar{a}_j$ не является существенно особой точкой. Итак, $\bar{a}_j$ являются предельными точками собственных значений оператора $L(\lambda)$.

Рассмотрим элемент $\lambda^{-n_0} u(\lambda) \equiv \varphi(\lambda)$. По леммам 2 и 3 последняя функция имеет порядок роста ρ_0 и ограничена на лучах из G_0 в окрестности бесконечно удаленной точки. Тогда по теореме Фрагмена—Линделефа $\varphi(\lambda)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки. Отсюда следует, что $u(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки растет не быстрее полинома степени n_0 . Учитывая замечание 1 и используя теорему типа Фрагмена—Линделефа (см. [6]), точно так же можно показать, что $u(\lambda)$ в окрестности каждой точки a_j растет не быстрее $|\lambda - a_j|^{-n_j}$. Таким образом

$$u(\lambda) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{m_j} \psi_{jk}^k(\lambda) y_{jk} \quad (m_j \leq n_j).$$

Подставив последнее в (7) и приравняв нулю коэффициенты при $\mu_j^{n_j+k}$ ($k = \overline{1, m_j}$) и μ_j^0 ($\mu_j = (\lambda - a_j)^{-1}$ при $j = \overline{1, n}$ и $\mu_0 = \lambda$), получим

$$H_j^* y_{jk} = 0 \text{ и } y_{0,0} = B_{0,0}^* y_{0,0}.$$

Учитывая $R(H_j) = B$, а также существование и ограниченность $(I - B_{0,0}^*)^{-1}$ (см. замечание 1), получим

$$y_{jk} = 0 \quad (j = \overline{0, n}; \quad k = \overline{0, m_j}),$$

то есть $u(\lambda) \equiv 0$. Отсюда $f(\lambda) \equiv 0$, что влечет за собой $F = 0$. Последнее доказывает теорему.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность научному руководителю Дж. Э. Аллахвердиеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. ДАН СССР, 77, № 1, 1951.
2. Аллахвердиев Дж. Э. ДАН СССР, 115, № 2, 1957.
3. Гохберг И. У., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд-во "Наука", 1965.
4. Мацаев В. И. ДАН СССР, 154, № 5, 1964.
5. Аллахвердиев Дж. Э. "Уч. зап. АГУ", 2, 1957.
6. Аллахвердиев Дж. Э. ДАН СССР, 159, № 5, 1964.
7. Аллахвердиев Дж. Э. ДАН СССР, 160, № 3, 1965.
8. Аллахвердиев Дж. Э. ДАН СССР, 160, № 6, 1965.
9. Маркус А. С. Матем. сб., 70, 112, № 4, 1966.
10. Маркус А. С. "Сиб. матем. ж." 8:6, 1967.
11. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.
12. Хейман У. Мероморфные функции. Изд-во "Мир", 1966.
13. Неванлина Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л., 1941.
14. Аллахвердиев Дж. Э. Докт. дисс.

Э. М. Бабаев

Банах фэзасында бир синиф тамам кэсилмэз операторларын
мэхсуси вэ гошма элементлэринин тамлыгы наггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ мүэјјэн шэртлэр дахилиндэ

$$L(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{n_j} (\lambda - a_j)^{-k} H_j^k B_{jk} + \sum_{k=0}^{n_0} \lambda^k H_0^k B_{0k}$$

операторунун мэхсуси вэ гошма элементлэри системинин N —гаты тамлыгы мэхсэлэси өјрөнилмишдир.

Ф. Г. МАКСУДОВ, Д. Г. САЛМАНОВА

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

В настоящей статье рассматривается следующая смешанная задача. Найти в области $\Omega = \{0 \leq x < \infty; 0 \leq t \leq T\}$ решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u + C(t, x)u + b(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = f(x) \quad (2)$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u}{\partial x} - hu \Big|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

Пусть L —оператор, действующий в $L_2(0, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'(x) + q(x)y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (4)$$

и краевым условием

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (5)$$

где $q(x)$ —ограниченная снизу вещественная функция, суммируемая на $(0, \infty)$; $h > 0$ —фиксированное вещественное число.

Обозначим через $D(L)$ область определения оператора L , состоящую из всех функций $y(x) \in L_2(0, \infty)$ таких, что:

1) $y'(x)$ существует и абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a < \infty$;

2) $l(y) \in L_2(0, \infty)$;

3) для любого $y(x)$ выполняется условие (5).

Известно, что в этом случае L является симметрическим полуограниченным снизу оператором. Не ограничивая общности, будем считать, что L положительно определен и самосопряжен.

Решением задачи (1)–(3) будем называть функцию $u(x, t)$ такую, что $u(x, t) \in D(L)$, $\frac{du}{dt} \in L_2(0, \infty)$ при всех t и $u(x, t)$ удовлетворяет

уравнению и условию (2) в смысле $L_2(0, \infty)$.

Указанная задача решается обобщенным методом Фурье. Этот метод в случае, когда L —регулярный самосопряженный оператор, разработали З. И. Халилов [1], Ю. Ф. Коробейник [2] и др.

Рассмотрение сингулярного оператора L существенно отличается от регулярного, так как в этом случае ввиду наличия непрерывного спектра собственные функции, соответствующие собственным значениям из точечного спектра, не образуют базиса пространства $L_2(0, \infty)$.

Через $\rho(\lambda)$ обозначим спектральную функцию оператора L , а через $\varphi(x, \lambda)$ —решение следующей вспомогательной задачи Коши:

$$\begin{aligned} -\varphi''(x) + q(x)\varphi(x) &= \lambda\varphi(x), \\ \varphi(0) &= 1, \\ \varphi'(0) &= h. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \quad (7)$$

где $A(t, \lambda)$ —пока неизвестная функция. Основным результатом работы выражает следующая

Теорема. Пусть удовлетворены условия:

а) $f(x) \in D(L)$, $b(t, x) \in D(L)$ при всех $t \in [0, T]$ и $b(t, x)$, $Lb(x, t)$ ограничены по t почти при всех $x \in [0, \infty)$;

б) $C(t, x)$, $C_x'(t, x)$, $C_{xx}''(t, x)$ ограничены по t почти при всех $x \in [0, \infty)$;

в) $C(t, x)$ обращается в нуль при $x > x_0$, где x_0 —достаточно велико;

г) $C(t, x) \varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет граничному условию (3) при всех t и λ .

Тогда существует единственное, непрерывно зависящее от начальных данных решение задачи (1)–(3). При этом оно представимо в виде (7).

Доказательство. Подставляя (7) в уравнение (1) и начальное условие (2), получим

$$\frac{dA(t, \lambda)}{dt} + \lambda A(t, \lambda) = \int_0^\infty B(t, \lambda, \mu) A(t, \mu) d\rho(\mu) + B_1(t, \lambda), \quad (8)$$

$$A(0, \lambda) = \int_0^\infty f(x) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda). \quad (9)$$

Здесь введены обозначения:

$$B(t, \lambda, \mu) = \int_0^\infty C(t, x) \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu) dx,$$

$$B_1(t, \lambda) = \int_0^\infty b(x, t) \varphi(x, \lambda) dx.$$

Положим

$$\frac{dA(t, \lambda)}{dt} + \lambda A(t, \lambda) = \frac{g(t, \lambda)}{\lambda}. \quad (10)$$

Тогда легко видеть, что

$$A(t, \lambda) = \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + a(\lambda) e^{-\lambda t}. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$g(t, \lambda) = \lambda \int_0^\infty B(t, \lambda, \mu) A(t, \mu) d\rho(\mu) + \lambda B_1(t, \lambda). \quad (12)$$

Подставляя выражение $A(t, \lambda)$ из (11) в (12), получим интегральное уравнение относительно $g(t, \lambda)$:

$$g(t, \lambda) = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\mu} B(t, \lambda, \mu) \int_0^t g(\tau, \mu) e^{-\mu(t-\tau)} d\tau d\rho(\mu) + \int_0^\infty \lambda B(t, \lambda, \mu) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) + \lambda B_1(t, \lambda). \quad (13)$$

Таким образом определение функции $g(t, \lambda)$ (следовательно и $A(t, \lambda)$) с помощью выражения (11) мы свели к решению интегрального уравнения (13).

Для исследования последнего уравнения введем нижеследующие пространство функций. Пусть G —множество функций $v(t, \lambda)$ таких, что функция

$$\|v(t)\| = \sqrt{\int_0^\infty |v(t, \lambda)|^2 d\rho(\lambda)} \quad (14)$$

суммируема на $[0, T]$. В G введем норму

$$|v| = \int_0^T \|v(t)\| dt. \quad (15)$$

Пространство G , снабженное нормой (15), является банаховым пространством. Обозначим через G_1 подмножество G , состоящее из функций $v(t, \lambda)$, для которых функции $\|v(t)\|$ ограничены на $[0, T]$. Положим

$$Tv = \int_0^\infty \frac{\lambda}{\mu} B(t, \lambda, \mu) v(t, \mu) d\rho(\mu), \quad v(t, \mu) \in G. \quad (16)$$

Лемма 1. Оператор T ограниченно действует из G в G .

Доказательство. Учитывая обозначения, получим

$$\frac{\lambda B(t, \mu, \lambda)}{\mu} = \frac{\lambda (C(t, x) \varphi(x, \lambda) \varphi(x, \mu))}{\mu} = \frac{(LC(t, x) \varphi(x, \mu), \varphi(x, \lambda))}{\mu}.$$

Так как

$$L(C(t, x) \varphi(x, \mu)) = (C''(t, x) - q(x) C(t, x)) \varphi(x, \lambda) + 2C'(t, x) \varphi(x, \mu) + C(t, x) \varphi''(x, \mu). \quad (17)$$

Пусть теперь $K(x, \xi) = K(x, \xi, 0)$ —ядро резольвенты оператора L при $\lambda = 0$. Тогда

$$\varphi^{(i)}(x, \mu) = \mu \int_0^\infty \frac{d^i K(x, \xi)}{dx^i} \varphi(\xi, \mu) d\xi, \quad i = 0, n = 1. \quad (18)$$

Подставив последнее в (17), будем иметь

$$L(C(t, s) \varphi(x, \mu)) = \mu \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \quad (19)$$

где

$$E(x, \xi, t) = C''(t, x) K(x, \xi) + 2C'(t, x) \frac{dK(x, \xi)}{dx}.$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$Tv = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \lambda) \right) v(t, \mu) d\rho(\mu) = \left(\int_0^\infty v(t, \mu) d\rho(\mu) \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \lambda) \right).$$

Рассмотрим

$$\|Tv\| = \left(\int_0^\infty |Tv|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty \left| \int_0^\infty v(t, \mu) d\rho(\mu) \times \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя равенство Парсеваля, найдем

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \left(\int_0^\infty \left| \int_0^\infty v(t, \mu) d\rho(\mu) \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left| v(t, \mu) \right|^2 d\rho(\mu) \int_0^\infty \left| \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty |v(t, \mu)|^2 d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi \right|^2 dx d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|v\| \left(\int_0^\infty \int_0^\infty |E(x, \xi, t)|^2 dx d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, исходя из условий теоремы, что выражение $Q(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty |E(x, \xi, t)|^2 dx d\rho(\mu)$ является ограниченной функцией по t . Из последнего соотношения имеем

$$\|Tv\| \leq C \|v\|, \quad (20)$$

что доказывает лемму.

Пусть

$$v(t, \lambda) = \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} g(\tau, \mu) d\tau, \quad \text{где } g(\tau, \mu) \in G,$$

тогда из (20) получим

$$\begin{aligned} \|Tv\| &\leq Q(t) \left(\int_0^\infty \left| \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} g(\tau, \mu) d\tau \right|^2 d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq Q(t) \left(\int_0^\infty \int_0^t |g(\tau, \mu)|^2 d\tau d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} \leq Q(t) \int_0^t \|g(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

Значит

$$\|Tv\| \leq Q(t) \int_0^t \|g(\tau)\| d\tau,$$

откуда следует, что оператор, определенный равенством

$$N_1 g = \int_0^t \int_0^\infty B(t, \lambda, \mu) \frac{\lambda}{\mu} g(\tau, \mu) e^{-\mu(t-\tau)} d\rho(\mu) d\tau, \quad (21)$$

преобразует G в его подмножество G_1 , причем

$$\|N_1 g\| \leq Q(t) \int_0^t \|g(\tau)\| d\tau. \quad (22)$$

Займемся теперь свободными членами уравнения (13).

Лемма 2. *Имеют место включения*

$$\int_0^\infty \lambda B(t, \lambda, \mu) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) \in G_1, \quad (23)$$

$$\lambda B_1(t, \lambda) \in G_1. \quad (24)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \lambda (C(t, x) \varphi(x, \mu), \varphi(x, \lambda)) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) = \\ & = \int_0^\infty (C(t, x) \varphi(x, \mu), \lambda \varphi(x, \lambda) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) = \\ & = \int_0^\infty (L(C(t, x) \varphi(x, \mu)), \varphi(x, \lambda)) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu). \end{aligned}$$

Учитывая (19), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left(\mu \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \lambda) a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) = \right. \\ & \left. = \left(\int_0^\infty a(\mu) e^{-\mu t} d\rho(\mu) \mu \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \lambda) \right), \right. \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left| \left(\int_0^\infty \mu a(\mu) d\rho(\mu) \int_0^\infty E(x, \xi, t) \varphi(\xi, \mu) d\xi, \varphi(x, \mu) \right) \right|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq \left(\int_0^\infty |\mu a(\mu)|^2 d\rho(\mu) \int_0^\infty \int_0^\infty |E(x, \xi, t)|^2 d\xi dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq Q(t) \left(\int_0^\infty |\mu a(\mu)|^2 d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} = Q(t) \left(\int_0^\infty |\mu(f, \varphi(x, \mu))|^2 d\rho(\mu) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \leq Q(t) \left(\int_0^\infty |Lf|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение (23).

Далее

$$\begin{aligned} \lambda B_1(t, \lambda) &= \lambda \int_0^\infty b(x, t) \varphi(x, \lambda) dx = \int_0^\infty b(x, t) \lambda \varphi(x, \lambda) dx = \\ &= (Lb(x, t), \varphi(x, \lambda)). \end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля

$$\left(\int_0^\infty |(Lb(x, t), \varphi(x, \lambda))|^2 d\rho(\lambda) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^\infty |Lb|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|Lb\|, \quad (25)$$

откуда следует включение (24).

На основании лемм 1 и 2 заключаем, что справедлива

Лемма 3. *Интегральное уравнение (13) имеет единственное решение $g(t, \lambda) \in G_1$, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений.*

Образуем теперь функцию $A(t, \lambda)$ по формуле (11).

Покажем, что

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

является решением задачи (3)–(4). Для этого сначала докажем, что $u(x, t) \in L_2(0, \infty)$ при любом фиксированном t ;

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |u(x, t)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right|^2 dx = \\ &= \int_0^\infty |A(t, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \int_0^\infty \left| \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + a(\lambda) e^{-\lambda t} \right|^2 d\rho(\lambda) \leq \\ &\leq 2 \left(\int_0^\infty \left| \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \right|^2 d\rho(\lambda) + \int_0^\infty |a(\lambda) e^{-\lambda t}|^2 d\rho(\lambda) \right) \leq \\ &\leq I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Оценим I_1 . Так как L — положительно определенный самосопряженный оператор, то $\rho(\lambda)$ является монотонной положительной функцией, имеющей при $\lambda \rightarrow \infty$ следующую асимптотику:

$$\rho(\lambda) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}).$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} < \infty.$$

Это замечание позволяет применить теорему Лебега—Стилтьеса о среднем значении [5]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \left| \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} d\tau \right|^2 d\rho(\lambda) = \int_0^\infty \left| \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} d\tau \right|^2 d\rho(\lambda) \leq \\ &\leq T^2 \int_0^\infty \int_0^t \left| \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} \right|^2 d\tau d\rho(\lambda) \leq \frac{T^2}{C^2} \int_0^\infty \int_0^t |g(\tau, \lambda)|^2 d\tau d\rho(\lambda) < \infty. \end{aligned} \quad (37)$$

Оценим

$$I_2 = \int_0^\infty |a(\lambda) e^{-\lambda t}|^2 d\rho(\lambda) \leq \int_0^\infty |(f, \varphi(x, \lambda))|^2 d\rho(\lambda) = \|f\|^2. \quad (28)$$

Таким образом имеем

$$\int_0^\infty |u(x, t)|^2 dx < \infty.$$

Теперь покажем, что $\int_0^\infty |Lu(x, t)|^2 dx < \infty$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |Lu(x, t)|^2 dx &= \int_0^\infty \left| L \left(\int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right) \right|^2 dx \leq \\ &= \int_0^\infty |\lambda A(t, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \int_0^\infty \left| \lambda \int_0^t \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \lambda a(\lambda) e^{-\lambda t} \right|^2 d\rho(\lambda) \leq \\ &\leq 2 \left(\int_0^\infty \int_0^t |g(\tau, \lambda)|^2 d\tau d\rho(\lambda) + \int_0^\infty |\lambda a(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \right) = \|g\|^2 + \|f\|^2 < \infty. \quad (29) \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx &< \infty: \\ \int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right|^2 dx = \\ &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty A'_t(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda) \right|^2 dx = \int_0^\infty |A'_t(t, \lambda)|^2 d\rho(\lambda) = \\ &= \int_0^\infty \left| \lambda a(\lambda) e^{-\lambda t} + \int_0^t g(\tau, \lambda) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau + \frac{g(\tau, \lambda)}{\lambda} \right|^2 d\rho(\lambda) \leq I'_1 + I'_2 + I'_3. \quad (30) \end{aligned}$$

Легко видеть, что аналогично можно оценить I'_1, I'_2, I'_3 . Тогда

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx < \infty.$$

Теперь покажем, что $u(x, t)$ действительно является решением задачи (3)–(4). Рассмотрим функцию

$$\Phi(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} + Lu + C(t, x)u + b(x, t)$$

из $L_2(0, \infty)$. Очевидно, что

$$\int_0^T \int_0^\infty |\Phi(x, t)|^2 dx dt = \int_0^T \int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial t} + Lu + C(t, x)u + b(x, t) \right|^2 dx dt.$$

Учитывая предыдущие рассуждения и используя равенство Парсеваля, получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^\infty |\Phi(x, t)|^2 dx dt &= \int_0^T \int_0^\infty \left| A'(t, \lambda) + \lambda A(t, \lambda) + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty B(t, \lambda, \mu) A(t, \mu) d\rho(\mu) + B_1(t, \lambda) \right|^2 d\rho(\lambda) dt = 0, \end{aligned}$$

т. е. $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(3).

Единственность и непрерывная зависимость от начальных данных вытекает, например, из общих теорем теории полугрупп операторов в гильбертовом пространстве (6). Мы на этом подробно не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халилов З. И. „ДАН Азерб. ССР“, т. IX, № 8, 1953.
2. Коробейник Ю. Ф. „Уч. зап. РГУ“, т. 66, вып. 7, 1962.
3. Коробейник Ю. Ф. Тр. семинара по функциональному анализу, вып. 5, 1957.
4. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. „Изв. АН СССР, серия матем.“, т. 15, № 4, 1951.
5. Камке Е. Интеграл Лебега–Стилтьеса. Физматгиз, 1959.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве М., 1967.

Ф. Г. Магсудов, Д. Н. Салманова

Үмүмиләшмиш Фурје үсулу илә гејри-мәһдуд
областда икинчи тәртіб параболик тәнлик
үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $\Omega = \{0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ областында (1)–(3) гарышыг мәсә-

ләсинә бахылыр.

Исбат олунур ки, а) $f(x) \in D(L)$ областына дахил олан һәр бир t үчүн $b(x, t) \in D(L)$ вә һәмчинин $b(x, t)$, $Lb(x, t)$ t -јә көрә санки һәр бир x үчүн мәһдуддурса, б) $C(t, x)$, $C_x(t, x)$, $C_{xx}(t, x)$ t -јә көрә санки һәр бир $x \in (0, \infty)$ үчүн мәһдуддурса, в) $C(t, x)$, $x > x_0$ үчүн сыфыр олур, бурадакы x_0 кифајәт гәдәр бөјүкдурса, г) $C(t, x) \varphi(x, \lambda)$ (3) сәһнәд шәртини һәр бир t вә λ -лара көрә өдәјирсә, онда (1)–(3) гарышыг мәсәләсинин башланғыч шәртдән кәсилмәз асылы, јеканә һәлли вар вә бу һәлл

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(t, \lambda) \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda)$$

шәклиндә кәстәрилир.

Бурада L (2) дифференциал ифадәси вә (5) сәһнәд шәрти васитәсилә доғрулмуш оператор, $D(L)$ исә онун тәјин областыдыр.

УДК 624. 073. 32

Н. П. ПИРИЕВ

ДЕЙСТВИЕ ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ НА СТЕРЖЕНЬ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ ИЗ ПОЛИМЕРНОГО МАТЕРИАЛА

В статье рассматривается деформация стержня из полимерного материала круглого сечения, радиуса R под действием гармонически изменяющейся нагрузки с частотой ω . Вследствие наличия диссипативных сил происходит выделение тепла, причем для определения температуры в стационарном случае получено функционально-дифференциальное уравнение, для составления которого необходимо знать составляющие комплексного модуля $E'(T)$ и $E''(T)$. После определения температуры становится возможным нахождение напряжений и деформаций.

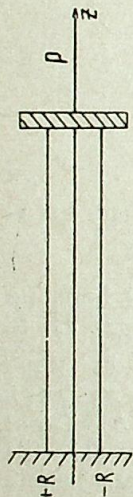


Рис. 1

В работе [1] решена задача для полосы. Для достаточно тонкой полосы при определении составляющих комплексного модуля можно воспользоваться линейной аппроксимацией. Но при большой толщине целесообразна другая аппроксимация, посредством некоторой экспоненциальной функции.

В данной работе рассматривалась задача для двух вариантов граничных температурных условий: в одном случае температура на поверхности считалась постоянной, а в другом — предполагалась теплоотдача в окружающую среду. Установление температуры в этом случае приводило, так же как и в работе [1], к нахождению корней некоторого трансцендентного уравнения.

1. Рассмотрим деформацию стержня радиуса R под действием силы P , которая меняется по гармоническому закону с частотой ω (рис. 1). Для напряжений и деформаций примем следующее выражение:

$$\sigma_z = \sigma_z^0 [T(r, \omega) \cos \omega t - \varphi(T(r, \omega))];$$

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (1, 1)$$

$$\epsilon_z = \epsilon_z^0 \cos \omega t, \quad \epsilon_z(r) \neq 0, \quad \gamma_{r\theta} = 0.$$

Суммарная сила, приложенная к торцу будет

$$P = 2\pi \int_0^R \sigma_z r dr. \quad (1, 2)$$

Амплитуда напряжений связана с амплитудой деформаций следующим образом:

$$\sigma_z^0 = \epsilon_z^0 \sqrt{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}. \quad (1, 3)$$

Амплитуда силы P^0 связана с амплитудой деформаций:

$$P^0 = \epsilon_z^0 \left[\left(2\pi \int_0^R E'(T, \omega) r dr \right)^2 + \left(2\pi \int_0^R E''(T, \omega) r dr \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1, 4)$$

Анализ экспериментальных данных, содержащихся в работе [2], позволяет сделать заключение, что в небольшом температурном интервале функции $\lg E'(T)$ и $\lg E''(T)$ меняется по линейному закону:

$$\lg E'(T) = C^* - D^*T, \quad \lg E''(T) = A^* + B^*T,$$

а следовательно сами функции меняются по экспоненциальному закону:

$$E'(T) = C \exp(-DT), \quad (1, 5)$$

$$E''(T) = A \exp(BT).$$

В стационарном случае температура удовлетворяет следующему уравнению [1]:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\mu}{M} E''(T) = 0,$$

$$\mu = \frac{\lambda^* \omega K (P^0)^2}{2ca^*}. \quad (1, 6)$$

В уравнении (1, 6) M определяется так:

$$M = \left[2\pi \int_0^R E'(T) r dr \right]^2 + \left[2\pi \int_0^R E''(T) r dr \right]^2. \quad (1, 7)$$

Анализ экспериментальных результатов позволяет сделать заключение, что $E''(T) \ll E'(T)$, поэтому в (1, 7) мы не будем принимать во внимание второе слагаемое.

2. Для решения задачи примем следующие граничные условия:

$$T = T_0 \quad \text{при } r = R; \quad (2, 1)$$

$$T \text{ ограничено при } r = 0.$$

Подставляя $E''(T)$ из (1, 5) в (1, 6), получим

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\mu A}{M} \exp(BT) = 0. \quad (2, 2)$$

Похожее уравнение встречалось в некоторых задачах химической кинетики [3]. Решением (2, 2) будет

$$\exp(BT) = \frac{2c_1^2 c_2 r^{c_1-2}}{\delta (r^{c_1} + c_2)^2}, \quad (2, 3)$$

где

$$\delta = \frac{\mu AB}{M}. \quad (2, 4)$$

Принимая во внимание второе условие (2, 1), получим $c_1 = \pm 2$. Тогда из (2, 3) следует, что температура определяется формулой

$$\exp(BT) = \frac{8c_2}{\delta (r^2 + c_2)^2}. \quad (2, 5)$$

Принимая во внимание первое условие (2, 1), из (2, 5) получим

$$\delta = \frac{8c_2}{\exp(BT_0)(R^2 + c_2)^2}. \quad (2, 6)$$

Подставляя (2, 6) в (2, 5), найдем

$$\exp(BT) = \frac{\exp(BT_0)(R^2 + c_2)^2}{(r^2 + c_2)^2}. \quad (2, 7)$$

Подставляя (2, 5) в (1, 7) и пренебрегая $E''(T)$, получим

$$M^{\frac{1}{2}} = 2\pi \int_0^R E'(T) r dr = 2\pi C \int_0^R \left\{ \frac{8c_2}{\delta(r^2 + c_2)^2} \right\}^{-\alpha} r dr,$$

где

$$\alpha = \frac{D}{B}.$$

Интегрируя последнее выражение и принимая во внимание (2, 4), будем иметь

$$M^{\alpha + \frac{1}{2}} = \frac{\pi C (\mu AB)^\alpha}{(8c_2)^\alpha (2\alpha + 1)} [(R^2 + c_2)^{2\alpha+1} - c_2^{2\alpha+1}]. \quad (2, 8)$$

С другой стороны из (2, 6) следует, что

$$M^{\alpha + \frac{1}{2}} = \frac{(\mu AB)^{\alpha + \frac{1}{2}} \exp \left[BT_0 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] (R^2 + c_2)^{2\alpha+1}}{(8c_2)^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

Приравняв два последних выражения, получаем общее решение задачи:

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi C \sqrt{c_2} [(R^2 + c_2)^{2\alpha+1} - c_2^{2\alpha+1}]}{(2\alpha + 1) \sqrt{AB} \exp \left[BT_0 \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] (R^2 + c_2)^{2\alpha+1}}. \quad (2, 9)$$

В частности, если $\alpha = 0$, получим

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi C R^2 \sqrt{c_2}}{\sqrt{AB} \exp(BT_0/2)(R^2 + c_2)}, \quad (2, 10)$$

а если $\alpha = 0,5$, то

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi C \sqrt{c_2} (R^4 + 2R^2 c_2)}{\sqrt{AB} \exp(BT_0)(R^2 + c_2)^2}. \quad (2, 11)$$

При $\alpha = 1$ получим

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi C \sqrt{c_2} (R^6 + 3R^4 c_2 + 3R^2 c_2^2)}{3\sqrt{AB} \exp(3BT_0/2)(R^2 + c_2)^3}. \quad (2, 12)$$

3. Теперь рассмотрим задачу в случае теплоотдачи с внешней поверхности цилиндрического стержня. При этом будем иметь следующие граничные условия:

$$-\lambda \frac{dT}{dr} = \alpha(T - T_0) \text{ при } r = R; \quad (3, 1)$$

T ограничено при $r = 0$.

Используя первое условие (3, 1), из (2, 5) получим

$$\delta = \frac{8c_2}{\exp[BT_0 + 4R/\beta(R^2 + c_2)](R^2 + c_2)^2}. \quad (3, 2)$$

Здесь $\beta = \frac{\alpha}{\lambda}$, α — коэффициент теплоотдачи, λ — коэффициент теплопроводности.

Подставив (3, 2) в (2, 5), найдем

$$\exp(BT) = \frac{\exp[BT_0 + 4R/\beta(R^2 + c_2)](R^2 + c_2)^2}{(r^2 + c_2)^2}. \quad (3, 3)$$

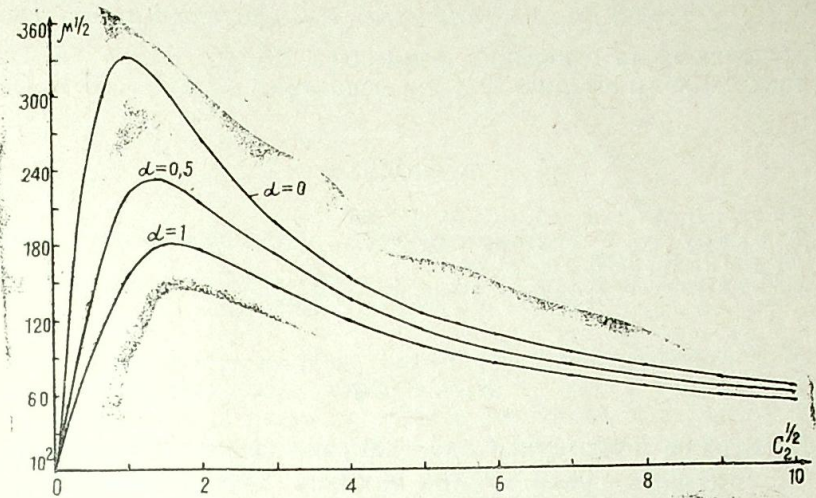


Рис. 2

Определяя μ из (3, 2) и сравнивая с (2, 8), получим

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi C \sqrt{c_2} [(R^2 + c_2)^{2\alpha+1} - c_2^{2\alpha+1}]}{(2\alpha + 1) \sqrt{AB} \exp \left[[BT_0 + 4R/\beta(R^2 + c_2)] \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right] (R^2 + c_2)^{2\alpha+1}}. \quad (3, 4)$$

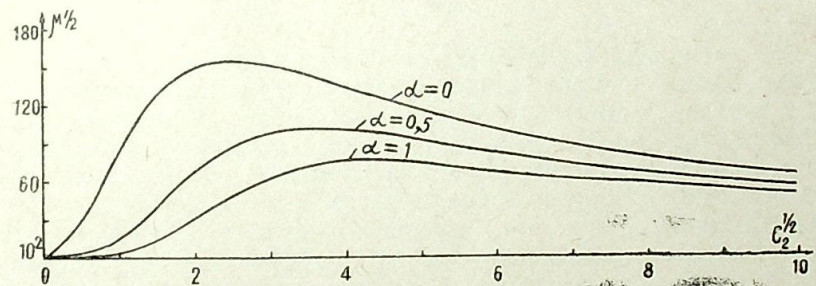


Рис. 3

В частности при $\alpha = 0$

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\pi C R^2 \sqrt{c_2}}{\sqrt{AB} \exp[BT_0/2 + 2R/\beta(R^2 + c_2)](R^2 + c_2)}, \quad (3, 5)$$

при $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 1$, соответственно:

$$\mu^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi C \sqrt{c_2} (R^4 + 2c_2 R^2)}{\sqrt{AB} \exp[BT_0 + 4R/\beta(R^2 + c_2)](R^2 + c_2)^2}, \quad (3, 6)$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{2\sqrt{2} \pi C \sqrt{c_2} (R^6 + 3R^4 c_2 + 3R^2 c_2^2)}{3\sqrt{AB} \exp[3BT_0/2 + 6R/\beta(R^2 + c_2)](R^2 + c_2)^3}. \quad (3, 7)$$

Величины c_2 определялись графическим путем. При этом были использованы следующие данные:

$$\begin{aligned} R &= 1 \text{ см}, & T_0 &= 20^\circ, & B &= 0,01 \text{ град}^{-1}, \\ A &= 6,12 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2, & C &= 2,04 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \\ \alpha &= 20 \text{ ккал/м}^2 \cdot \text{час} \cdot \text{град}, & \lambda &= 0,28 \text{ ккал/м} \cdot \text{час} \cdot \text{град}. \end{aligned}$$

Построенные на основании формул (2, 10), (2, 11) и (2, 12) графики представлены на рис. 2, а на основании (3, 5), (3, 6) и (3, 7) на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Изв. АН СССР*, 6 1965.
2. Takahayagi M. Viscoelastic properties of crystalline polymers. Mem. Fac. Engng. Kyushu Univ., 1963, vol. 23. № 1.
3. Барзыкин В. В., Мержанов А. Г. ДАН СССР*, т. 120, № 6, 1968.

Н. П. Пиријев

Материалы полимердэн олан даирэви ен кэсикли чубугун титрэјэн гүввэ тэ'сири алтында деформасијасы

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ материалы полимердэн олан даирэви ен кэсикли чубугун гармоник гүввэ тэ'сири алтында деформасијасына бахылар. Мэсэлэ чубугун сэтхиндэ температурун сабит олдуғу вэ харици мүһитлэ истилик элагэси олан һаллар үчүн һәлл едилмишдир.

Чубугун ен кэсијиндэ температурун пајланма гануну тапыландан сонра кәркинлик вэ деформасијаны һесабламаг мүмкүн олур.

УДК 624.131

Ф. А. ИСКЕНДЕРЗАДЕ

ЗАБИВКА СВАИ В ГРУНТ

Данная статья посвящена изучению распределения плотности грунта и углубления свай в зависимости от числа ударов. Исследовалась забивка свай с плоским торцом без учета и с учетом трения. Введены формулы, определяющие углубление свай и распределение плотности грунта в зависимости от числа ударов. Показано, за какое число ударов уплотняется грунт и доказано, что глубина пластической деформации не зависит от числа ударов.

В работе приняты некоторые допущения:

- 1) боковыми уплотнениями пренебрегают;
- 2) свая мгновенно получает максимальную скорость, которая последовательно убывает до нуля;
- 3) начальная плотность не зависит от глубины и равна $\rho = \text{const.}$

§ 1. ЗАБИВКА СВАИ В ГРУНТ С ПЛОСКИМ ТОРЦОМ БЕЗ УЧЕТА ТРЕНИЯ

При указанных допущениях поставленную задачу можно свести к исследованию распространения плоских волн в полупространстве пористой сплошной среды, состоящей из зерен и скелета (рис. 1). При малых нагрузках (до предела прочности скелета) одновременно зерна и скелет грунта деформируются упруго, с одинаковым модулем Юнга. Когда нагрузка переходит предел прочности скелета, последний разрушается и происходит переукладка грунта, этот процесс необратимый. При переукладке грунта деформации линейно зависят от напряжения, но с другим модулем, меньшим в несколько раз по сравнению с предыдущим. В этом периоде зерна продолжает деформироваться упруго, с прежним модулем Юнга. Процесс переукладки грунта напоминает пластическую деформацию, которая в литературе именуется необратимой пластической деформацией. В процессе неоднократного удара, после завершения переукладки, грунт ведет себя как упругий материал, так как в данном случае напряжение не превосходит предела упругости зерен грунта. График $\sigma - \epsilon$ представлен на рис. 2.

Из графика видно, что после определенного числа ударов последующие параллельные линии, бесконечно сближаясь, совпадают, т. е. в конечном счете грунт ведет себя упруго.

Используя закон сохранения количества движения, получим:

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0bt}, \quad (1)$$

где U_0 —смещение частицы грунта,
 F_0 —площадь поперечного сечения сваи,
 b —скорость распространения ударной волны в грунте,
 M —масса молота,
 v_0 —скорость молота при соприкосновении со свайей.
 t —время;

$$\frac{d^2U_0}{dt^2} = -\frac{F_0\rho_0bMv_0}{(M + F_0\rho_0bt)^2}. \quad (2)$$

Эти формулы верны только в том случае, если за ударной волной грунт несжимаемый. Учитывая малость упругой деформации в сравнении с пластической, его можно пренебречь.

Используя известные формулы на ударной волне:

$$\rho_0 = \rho_1 (1 + U_x) \quad (3)$$

и

$$\rho_0 = \rho_1 \left(1 - \frac{1}{b} \frac{dU_0}{dt}\right), \quad (4)$$

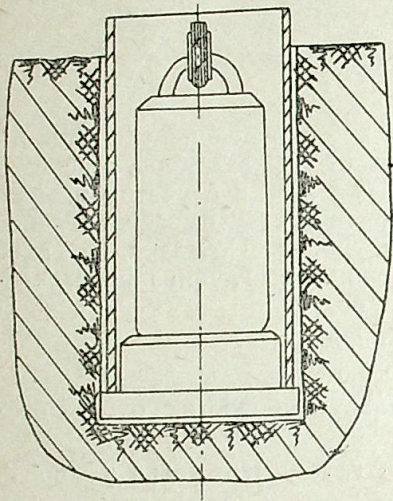


Рис. 1

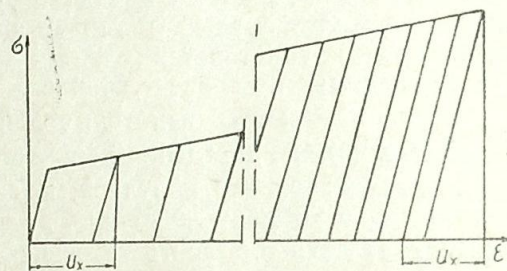


Рис. 2

получим

$$U_x = -\frac{1}{b} \frac{dU_0}{dt}, \quad (5)$$

Обозначим через e_s предел прочности скелета, тогда с помощью формулы (5) определим глубину пластической деформации ($e_{s,n}$ —предел упругости грунта при n -ом ударе):

$$e_x = -\frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0bt} = -\frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0x}, \quad (6)$$

где

$$x = \frac{Mv_0 - Mbe_s}{e_s \cdot F_0\rho_0b}; \quad t = \frac{x}{b};$$

$$U_0 = \int_0^x \left(\frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0x} \right) dx = \frac{Mv_0}{F_0b\rho_0} \ln \left(1 + \frac{v_0 - be_s}{be_s} \right). \quad (7)$$

Последняя формула выражает углубление сваи при первом ударе. Из (1) нетрудно догадаться, что каждая физическая точка имеет одну и ту же скорость, когда через нее проходит ударная волна, независимо от числа ударов.

Для концевое сечения, учитывая несжимаемость грунта за ударной волной, уравнение (5) запишется в виде:

$$v_0 = -b [e_m - e_{(0)}] \quad (e_m \text{—максимальная деформация});$$

$$v_0 = -b [e_{m,n} - e_{n-1}] \quad (e \text{—остаточная деформация}).$$

Последнее преобразуется к иному виду, если учесть что

$$e_{m,n-1} = e'_{s,n-1} + \tilde{e}_{n-1},$$

$$e_{n-1} - e_{m,n-1} = e'_{s,n-1},$$

$$v_0 = -b [e_{m,n} - e_{m,n-1} + e'_{s,n-1}].$$

Для нахождения такого числа ударов (n , после которого грунт будет вести себя упруго, запишем $e_{m,n} - e_{m,n-1} = e'_{s,n} - e'_{s,n-1}$, тогда получим:

$$v_0 = -e'_{s,n}; \quad e'_{s,n} = -\frac{v_0}{b} = \frac{P_{(0)n}^*}{E} = \frac{\rho_{(0)n} \cdot b \cdot v_0}{E} = \frac{\rho_0 b v_0}{\left(1 - \frac{v_0}{b}\right)^n E}.$$

Здесь E —модуль упругости зерна,
 E_1 —модуль упругости скелета.

$$\left(1 - \frac{v_0}{b}\right)^n = \frac{\rho_0 b^2}{E} = \frac{E_1}{E},$$

$$n = \log \frac{\frac{\rho_0 b^2}{E}}{\left(1 - \frac{v_0}{b}\right)} = \frac{\frac{\rho_0 b^2}{E}}{\ln \left(1 - \frac{v_0}{b}\right)}.$$

Для любой точки полученный результат имеет вид

$$e'_{s,n} = -\frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0x}.$$

Распределение плотности будет

$$\rho_{(x)n} = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0x}\right)^n}. \quad (9)$$

Углубление сваи после n -го удара определяется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \rho_{(x)n} (1 + \tilde{e}_n), \\ \rho_0 &= \rho_{(x)n} \left(1 - \frac{1}{b} \frac{dU_0}{dt}\right)^n, \end{aligned} \right\} \quad \tilde{e}_n = \left(1 - \frac{1}{b} \frac{dU_0}{dt}\right)^n - 1,$$

$$U = \int_x^0 \tilde{e}_n dx,$$

отсюда

$$U = \int_x^0 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{b} \frac{Mv_0}{M + F_0\rho_0x}\right)^n \right] dx = x - \frac{(Mb + F_0\rho_0bx - Mv_0)^n}{(Mb + F_0\rho_0bx)^{n-2} F_0\rho_0x} - \frac{n[Mb^2 F_0\rho_0 - M(b - v_0) F_0\rho_0x]}{F_0\rho_0b} \int_0^x \frac{(Mb + F_0\rho_0bx - Mv_0)^{n-1}}{(Mb - F_0\rho_0bx)^n} dx = \dots \quad [1].$$

Таким образом первая часть задачи решена полностью.

§ 2. ЗАБИВКА СВАИ В ГРУНТ С ПЛОСКИМ ТОРЦОМ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Пренебрегая боковым смещением грунта, движение его можно рассматривать как движение цилиндра внутри сплошной среды. Если учесть трение в боковых стенках, то из закона сохранения количества движения получим

$$\frac{dU_0}{dt} = \frac{Mv_0 - \int_0^t f_{\tau} dt}{M + F_0 \rho_0 bt}. \quad (11)$$

Введя обозначения $f_{\tau(t)}$ — сила трения; $P_{\tau(t)}$ — давление на торце, получим:

$$f_{\tau(t)} = \sqrt{\pi F_0} \xi \kappa b t \left[P_{\tau(t)} + b \rho_0 \frac{dU_0}{dt} \right] + 2q \sqrt{\pi F_0} b t;$$

$$F_0 P_{\tau(t)} = F_0 \rho_0 b \frac{dU_0}{dt} + F_0 \rho_0 b t \frac{d^2 U_0}{dt^2} + f_{\tau(t)};$$

$$M \frac{d^2 U_0}{dt^2} = -F_0 P_{\tau(t)};$$

Решая эти уравнения совместно, получим

$$\begin{aligned} \frac{dU_0}{dt} = v_0 \left(\frac{M}{M + \alpha b t} \right)^{\frac{F_0 \alpha - AM}{\rho_0 \alpha^2}} e^{-\frac{A \rho_0 b t}{\alpha}} - c b e^{-\frac{A \rho_0 b t}{\alpha}} \times \\ \times (M + \alpha b t)^{-\frac{\rho_0 (F_0 \alpha - AM)}{\alpha^2}} \cdot \int_0^t \tau (M + \alpha b \tau)^{\gamma} e^{\frac{A \rho_0 b \tau}{\alpha}} d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$A = \sqrt{\pi F_0} \xi \kappa,$$

$$c = 2q \sqrt{\pi F_0},$$

$$\alpha = F_0 \rho_0 - A \frac{M}{E},$$

$$\sigma = \frac{\rho_0 (F_0 \alpha - AM)}{\pi^2} - 1.$$

Если учесть, что сила трения не зависит от плотности грунта, то можно прийти к следующему выводу: при неоднократном ударе, когда ударная волна проходит через одну и ту же физическую точку, скорость точки при последующих ударах будет меньше, чем в предыдущих. Однако разница настолько мала, что ею можно пренебречь. При этом простота расчета полностью компенсирует неточность. Принимая во внимание вышеизложенное, данную задачу можно решить аналогично предыдущей.

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность акад. Х.А. Рахматулину за внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Ф. А. Искандерзаде

Дајағын торцаға вурулмасы

ХҮЛАСӘ

Мәсәлә ики параграфдан ибарәтдир.

Биринчи параграфда зәрбәләрин сајындан асылы олараг, дајағын торпаға дахилолма дәринлијини вә сыхлығын дајағын оху истигамәтиндә јајылмасыны көстәрән дүстурлар алынмышдыр.

Исбат олунмушдур ки, пластик деформасијаја уғрајан торпағын дәринлији зәрбәләрин сајындан асылы дејилдир.

Сонлу сајда зәрбәләрин көмәји илә сыхлашдырмағын мүмкүн олмасы көстәрилмишдир.

Икинчи параграфда, биринчи параграфдан фәргли олараг, сүртүнмә нәзәрә алыныр вә исбат едилир ки, мәсәләләрдә биринчи параграфда алынған нәтичәләри икинчи параграфда да тәтбиг етмәк олар.

УКД. 539. 4

Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПО ГИБКОЙ МЕМБРАНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

В данной статье анализируется задача о поперечном ударе по гибкой мембране параболоидом. Особенностью настоящей работы являлся учет влияния силы трения. Предполагалось [2], что скорость волны сильного разрыва b превосходит скорость звука в материале, т. е. сначала возникает только меридиональное движение, а затем радиальное.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАЛОГО ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ

Пусть на тело вращения, симметричное относительно оси OY , налетает бесконечно гибкая мембрана с постоянной скоростью v_0 (рис. 1). Требуется определить деформацию около места удара. Обозначим через u расстояние элемента от точки O , измеряемое вдоль образующей тела вращения; γ — угол между осью OX и касательной к образующей ударяющего тела. Меридиональная и кольцевая деформации в области прилегания соответственно будут:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} - 1, \quad \epsilon_\theta = \frac{x(u)}{r} - 1,$$

где r — Лагранжева координата частицы.

Меридиональное и кольцевое напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r),$$

где ν , E — коэффициенты Пуассона и Юнга, соответственно. Уравнения движения в области прилегания будут [1]:

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x(u)}{r^2} \cos \gamma - \frac{(1+\nu)(1-\cos \gamma)}{r}, \quad (1)$$

где $a_0^2 = E/\rho_0(1-\nu^2)$, ρ_0 — начальная плотность мембраны.

Запишем условия на волне сильного разрыва [3]:

$$\begin{aligned} b(1+\epsilon_r) &= \frac{b}{\cos \gamma} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \rho_0 b \left(v_0 \sin \gamma - \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \sigma_r + F_{\text{тр}}, \\ \rho_0 b v_0 \cos \gamma &= Q; \end{aligned} \quad (2)$$

Q — сосредоточенная сила в точке перехода (сила реакции), $F_{\text{тр}}$ — сила трения в области прилегания.

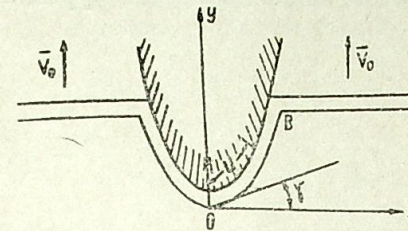


Рис. 1

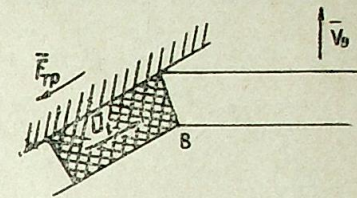


Рис. 2

В окрестности точки B (рис. 1) имеем геометрическое соотношение

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_0}{b}. \quad (3)$$

Если силу трения не учитывать, то скорость частиц в области прилегания будет

$$u_t = \frac{v_0}{(b^2 - a_0^2) \sin \gamma} \cdot [(b^2 \sin^2 \gamma - a_0^2)(1 - \cos \gamma)].$$

В случае параболоида, образованного вращением параболы $Y = qx^2$, скорость частиц принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{2v_0^2 \sqrt{v_0 q t}}{(v_0 - 4qa_0^2) \sqrt{1 + 4v_0 q t}} - \frac{\sqrt{1 + 4v_0 q t}}{v_0 - 4qa_0^2} \cdot 2a_0^2 \sqrt{v_0 q t} + \\ &+ \frac{2a_0^2 \sqrt{v_0 q t}}{v_0 - 4qa_0^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сила трения препятствует движению, поэтому ее направление будет таким, как показано на рис. 2.

Величину силы трения находим из второго уравнения системы (2):

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}} &= \rho_0 \left[v_0^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4v_0 q t}} - a_0^2 (\sqrt{1 + 4v_0 q t} - 1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2u_t}{\sqrt{\frac{v_0}{4qt} - a_0^2}} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где u_t определяется по формулам (4). Найдем из выражения (5) значение $\tilde{F}_{\text{тр}}$, при котором не будет движения, т. е. $u_t = 0$:

$$\tilde{F}_{\text{тр}} = \rho_0 \left[\frac{v_0^2}{\sqrt{1 + 4v_0 q t}} - a_0^2 (\sqrt{1 + 4v_0 q t} - 1) \right].$$

Как видно из последнего выражения, $\tilde{F}_{\text{тр}} > F_{\text{тр}}$. Согласно определению $F_{\text{тр max}} = \mu Q$, где Q — нормальная реакция.

Для нашего случая

$$F_{\text{тр max}} = \mu \rho_0 \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{v_0}{qt}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+4v_0 tq}}.$$

Возьмем силу $F_{\text{тр max}}$ больше $\bar{F}_p$ [3]:

$$\mu \rho_0 \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{v_0}{qt}} \sqrt{\frac{1}{1+4v_0 tq}} > \rho_0 \left[\frac{v_0^2}{\sqrt{1+4v_0 tq}} - a_0^2 (\sqrt{1+4v_0 tq} - 1) \right]. \quad (6)$$

Выполнение условия (6) влечет за собой $u_t = 0$, то есть движение в точке B области прилегания будет отсутствовать. Из первого уравнения системы (2) определяем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\cos \gamma}. \quad (7)$$

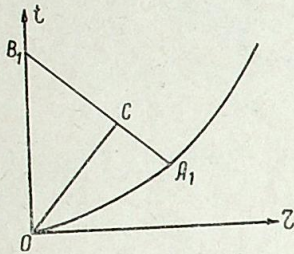


Рис. 3

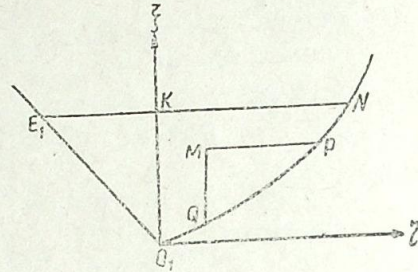


Рис. 4

Картина движения в плоскости (r, t) показана на рис. 3. OA_1 изображает волну сильного разрыва. Займемся решением задачи Коши для уравнения (1), с условиями на OA_1 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{OA_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{OA_1} = \frac{1}{\cos \gamma},$$

$$u = \int_0^r \frac{dr}{\cos \gamma}. \quad (8)$$

Решим задачу Коши в области OA_1C для уравнения (1) с условиями (8). Для малого времени соударения и $q \ll 1$, приняв $x(u) \approx u$, $\cos \gamma \approx 1$, приводим уравнение (1) к линейному уравнению

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}. \quad (9)$$

Удобно ввести новые переменные

$$r + a_0 t = \xi, \quad r - a_0 t = \eta.$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{u}{(\xi + \eta)^2} = 0. \quad (10)$$

Картина движения в плоскости (ξ, η) дана на рис. 4. Области OA_1C в плоскости (r, t) соответствует область O_1NK в плоскости (ξ, η) . Условия (8) в новых переменных на линии

$$\eta = \xi - \frac{2a_0 q}{v_0} \xi^2 \quad (11)$$

имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} + q^2 \xi^2 - \frac{2a_0 q^3}{v_0} \xi^3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} + q^2 \xi^2 - \frac{2a_0 q^3}{v_0} \xi^3, \quad (12)$$

$$u = \xi - \frac{a_0 q}{v_0} \xi^2.$$

Формулы (11), (12) получены разложением в ряд по степеням ξ . Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой Римана:

$$(u)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_P^Q \left[uv \xi - u \xi v - \frac{uv}{\xi + \eta} \right] d\xi -$$

$$- \left[uv \eta - v u \eta - \frac{uv}{\xi + \eta} \right] d\eta, \quad (13)$$

где функция $v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ называется функцией Римана. Для уравнения (7) она имеет вид

$$v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = (\xi + \eta)^{\frac{1}{2}} (\xi_0 + \eta_0)^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \phi\right), \quad (14)$$

где F — гипергеометрический ряд;

$$\phi = - \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\xi_0 + \eta_0)(\xi + \eta)}.$$

Подставляя (12), (14) в формулу (13), учитывая (11) и полагая, что точка $M(\xi_0, \eta_0)$ попадает на O_1K (рис. 4) получим

$$u = m_1 \xi + m_2 \frac{a_0 q}{v_0} \xi^2, \quad (15)$$

где

$$m_1 = 0,508238,$$

$$m_2 = 0,058106.$$

Определение движения в области O_1KE_1 сводится к решению смешанной задачи.

Решим уравнение (10) при условиях:

на линии O_1F_1 $u = 0$;

на линии O_1K u определяется формулой (15).

Решением смешанной задачи будет

$$u = m_1 (\xi + \eta) + m_2 \frac{a_0 q}{v_0} (\xi^2 - \eta^2).$$

Как и в [2], можно взять $m_1 = 0,5$, тогда

$$u = 0,5 (\xi + \eta) + m_2 \frac{a_0 q}{v_0} (\xi^2 - \eta^2).$$

Если перейти к первоначально взятым переменным, то получим

$$u = r + m_2 \frac{a_0^2 q}{v_0} t \cdot r.$$

Зная функцию u , легко определим деформацию:

$$\epsilon(0, t) = 4m_2 \frac{a_0^2 q}{v_0} t.$$

В заключение приношу искреннюю благодарность Ю. А. Созоненко за постоянное внимание к работе.

1. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, М., 1961.
2. Бектурсупов У. О поперечном ударе по гибкой поверхности. „Сб. докладов II Всесоюзного симпозиума по распространению упругопластических волн в сплошных средах“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.
3. Рябис Е. А. „Вестник МГУ матем., мех.“, № 6, 71—79, 1966.

Ш. М. Мүтәллимөв

Сүртүнмә мөвчуд оlanda эластик мембрана енинә зәрбә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә эластик мембрана параболоидлә зәрбә мәсәләсинә бахылмышдыр. Белә ки, парабалондин мембрана јапышма сәһәсиндә сүртүнмә гүввәси нәзәрә алынмышдыр. Кафи гәдәр кичик заман үчүн мәсәлә һәлл олунмушдыр. Нәтичәдә зәрбә јери јахынлығында деформасија тәјин едилмишдыр.

УДК—531

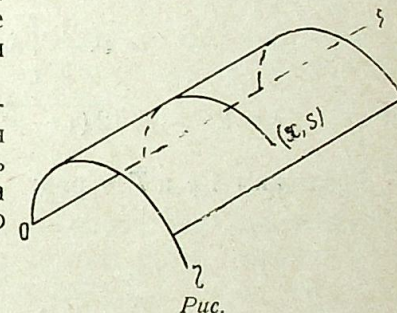
Х. И. МУСАЕВ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОГО ОЧЕРТАНИЯ

Настоящая статья посвящена решению уравнений равновесия непологой цилиндрической оболочки произвольно заданного очертания в комплексном преобразовании В. В. Новожилова. Рассматривается основное уравнение непологих цилиндрических оболочек. Применяя метод разложения по степеням малого параметра, указанное уравнение равновесия сводится к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами. Предполагается, что оболочка шарнирно закреплена вдоль краев параллельных образующих, а на поперечных краях ее можно задавать произвольные условия закрепления.

Положение точек на цилиндрической поверхности (рис. 1) определяется координатами x и s (x —расстояние вдоль образующей, s —дуговая координата вдоль направляющей). Введем вместо них безразмерные координаты:

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{s}{h}.$$



Здесь h —некоторый характерный линейный размер оболочки.

Как известно (1), основная функция $\bar{T}$, определяющая все комплексные усилия и перемещения, находится из решения дифференциального уравнения вида

$$\Delta \left[\rho \Delta(\bar{T}) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right) + i 2b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \xi^2} = i 2b^2 h \left[\Delta(\rho \bar{q}_n) + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right], \quad (1)$$

где

$$\rho = \frac{r}{h}, \quad 4b^4 = 12(1 - \mu^2) \frac{h^2}{\delta^2},$$

$$\Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \eta^2},$$

Для построения решения (15) сперва найдем решение соответствующего однородного уравнения:

$$\tilde{T}_{km}(\xi) = \tilde{c}_{1m} e^{\gamma_1 \xi} + \tilde{c}_{2m} e^{\gamma_2 \xi} + \tilde{c}_{3m} e^{\gamma_3 \xi} + \tilde{c}_{4m} e^{\gamma_4 \xi} \quad (15 \text{ в})$$

$$(i = 1, 2, 3, 4), \quad (\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ — корни характеристического уравнения,

$$(\gamma^2 - \lambda_m^2)^2 + \gamma^2 - i2b^2 \lambda_m = 0,$$

$\tilde{c}_{1m}, \tilde{c}_{2m}, \tilde{c}_{3m}, \tilde{c}_{4m}$ — произвольные постоянные.

Частное решение уравнения (15) найдем методом вариации произвольных постоянных и таким образом получим систему из четырех неоднородных линейных уравнений с четырьмя неизвестными. Определитель этой линейной системы есть детерминант Вронского для фундаментальной системы, но не обращается в нуль и, следовательно, разрешая систему, мы получим $\frac{d\tilde{c}_{im}}{d\xi}$ как известные непрерывные

функции от ξ : $\frac{d\tilde{c}_{im}}{d\xi} = F_{km}(\xi)$, откуда квадратурами находим

$$\tilde{c}_{im} = \int \tilde{F}_{km}(\xi) d\xi + \kappa_i.$$

Подставив найденные значения $\tilde{c}_{im}$ в выражение (15 в), найдем общее решение уравнения (15):

$$\tilde{T}_{km}(\xi) = \sum_{i=1}^4 \left\{ \tilde{c}_{im} e^{\gamma_i \xi} + \frac{E_{im}}{E_m} \int \tilde{F}_{km}(\xi) e^{-\gamma_i \xi} d\xi \right\}. \quad (15 \text{ г})$$

Здесь

$$E_m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \\ \gamma_1^3 & \gamma_2^3 & \gamma_3^3 & \gamma_4^3 \end{vmatrix},$$

$$E_{1m} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_2^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \end{vmatrix}, \quad E_{2m} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_3^2 & \gamma_4^2 \end{vmatrix},$$

$$E_{3m} = (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_4 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_4^2 \end{vmatrix}, \quad E_{4m} = (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix}.$$

Коэффициент Фурье $\varphi_{km}(\xi)$ определяется по известной функции $\tilde{F}_k$. Решением уравнения (15) определяется функция $\tilde{T}_{km}$, при помощи которой можно найти все комплексные усилия, а затем и комплексные перемещения. Они определяются на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{km} &= \tilde{T}_{1m} + \tilde{T}_{2m}, \\ \tilde{T}_{1m} &= \tilde{T}_{km} - \tilde{T}_{2m}, \\ \tilde{T}_{2m} &= \frac{i}{\lambda} \Delta_n \tilde{T}_{km} + \tilde{q}_{nm} \cdot h. \end{aligned} \quad (16)$$

В свою очередь,

$\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}, \tilde{T}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}, \tilde{q}_n, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ разлагаются в тригонометрические ряды, причем

$\tilde{V}, \tilde{S}, \tilde{q}_2$ по $\cos \lambda$, а остальные по $\sin \lambda$.

Далее из шести дифференциальных соотношений по В. В. Новожилову (комплексный закон Гука) получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{km} &= K(\tilde{T}_{1m} - \mu \tilde{T}_{2m}), \\ -\lambda_m \tilde{w}_{km} + \tilde{w}_{km} &= K(\tilde{T}_{2m} - \mu \tilde{T}_{1m}), \\ \lambda_m \tilde{U}_{km} + \tilde{v}_{km} &= C \tilde{S}_{km}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\tilde{w}_{km} &= i\lambda K \tilde{T}_{2m}, \\ \lambda_m^2 \tilde{w}_{km} - \lambda_m \tilde{v}_{km} &= i\lambda K \tilde{T}_{1m}, \\ -\lambda_m \tilde{w}_{km} + \tilde{v}_{km} &= -i\lambda K \tilde{S}_{km}. \end{aligned}$$

Из второго, третьего и пятого уравнений легко можно получить:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{km} &= \frac{K}{\lambda_m^2 - 1} [(i\lambda + \mu) \tilde{T}_{1m} - \tilde{T}_{2m}], \\ \tilde{v}_{km} &= \frac{K}{\lambda_m (\lambda_m^2 - 1)} [(i\lambda_m + \mu \lambda_m^2) \tilde{T}_{1m} - \tilde{T}_{2m} \lambda_m^2], \\ \frac{\lambda_m^2}{c} \tilde{u}_{km} &= \left[\left(1 + \frac{i}{\lambda} \Delta_m \right) \tilde{T}'_{km} - h(\tilde{q}'_{nm} - q_{1m}) \right] - \end{aligned} \quad (18)$$

$$- \frac{K}{\lambda_m^2 - 1} [(i\lambda + \mu \lambda_m^2) \tilde{T}'_{1m} - \lambda_m^2 \tilde{T}'_{2m}],$$

где $\Delta_m = \frac{d^2}{d\xi^2} - \lambda_m^2, \quad K = \frac{h}{E\delta}, \quad c = 2K(1 + \mu).$

Остальные три уравнения приближенно тождественно удовлетворяются.

Поперечную силу S можно найти из известного соотношения В. В. Новожилов;

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} + \frac{i}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \tilde{T} + h \left(\frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} - q_1 \right),$$

откуда с учетом разложений в ряды Фурье получаем

$$S_{km} = \frac{1}{\lambda_m} \left[\left(1 + \frac{i}{\lambda_m} \Delta_m \right) \tilde{T}'_{km} - h(\tilde{q}'_{nm} - q_{1m}) \right], \quad (19)$$

(штрихами обозначены производные по ξ).

Восемь произвольных постоянных (четыре комплексных), полученных при интегрировании дифференциального уравнения (15), определяются из заданных условий закрепления на двух криволинейных краях оболочки (по 4 на каждом краю). Эти условия будут выражены через функции перемещения (u, v, w), нормальных сил (T_1, T_2) и изгибающих моментов (M_1, M_2), которые в свою очередь выражены через основную функцию В. В. Новожилова $\tilde{T}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951
- Ахунд-Заде М. Ю. и Тагиев И. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1963, № 4.

3. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. Госстройиздат, 1949-1958.
 4. Савин Г. И., Фолейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Изд. "Наукова думка", Киев, 1964.
 5. Соколовский В. В. Уравнения равновесия безмоментных оболочек. ПММ, т. 7, вып. 1, 1943.
 6. Санчес-Аркас М. Оболочки. Стройиздат, М., 1964.

Х. И. Мусаев

Ихтијари шәкилли цилиндрик өртүкләр үчүн таразлыг тәнликләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә академик В. В. Новожиловун чохмејлли олмајан, ихтијари шәкилли цилиндрик өртүкләр үчүн комплекс формада верилмиш (1) таразлыг тәнлијиндән истифадә олунур.

(1) тәнлијиндә иштирак едән $\bar{T}$ функцијасы әсас функција кими ахтарылып.

Хүсуси әһәмийјәт кәсб едән $\bar{T}$ функцијасы η -дан асылы оларак һәлл едилір. Һәмин функцијанын көмәји илә өртүјүн истәнилән нөг-тәсиндәки моментләр, гүввәләр, јердәјишмәләр вә с. асанлыгла тапылып.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1968, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 6.

А. Х. САЛИМОВ, К. Ф. ШИРИНОВ, М. А. ТАИРОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В статье описывается метод численного решения одной нелинейной задачи нестационарного движения газа в магистральном газопроводе. Как известно, одним из важных вопросов проектирования магистральных газопроводов является определение их аккумулирующей способности. Последняя приводит к некоторым задачам, поставленным для следующей системы уравнений движения газа по газопроводу [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho \omega^2}{2d} = 0, \quad (1)$$

$$D: \{t > 0; 0 \leq x < l\},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial (\rho \omega)}{\partial x} = 0,$$

где ω , ρ , p —соответственно, средние в сечении скорость, плотность и давление; x —пространственная координата, направленная по оси трубы; λ —коэффициент гидравлического сопротивления; t —время; d —диаметр трубы; l —длина газопровода; c —скорость звука в газе. Процесс считается изотермическим.

Используя уравнение состояния в нормальных условиях $p = \rho g \frac{p_{ат}}{\gamma_{ат}}$ и формулу нормального расхода $Q_n = \rho g \frac{\omega f}{\gamma_{ат}}$, где $p_{ат}$, $\gamma_{ат}$ —соответственно, давление и объемный вес газа в нормальных условиях; f —площадь поперечного сечения, запишем систему (1) в следующем виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda p_{ат} \gamma_{ат}}{f^2 g d} Q_n^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{c^2 \gamma_{ат}}{f g} \frac{\partial Q_n}{\partial x}.$$

Будем предполагать, что имеет место квадратичный закон трения, т. е. $\lambda = \text{const}$ [2]. Если принять режим установившимся в начале, то из (2) получим

$$p^2|_{t=0} = p_0^2 - \frac{\lambda p_{ат} \gamma_{ат}}{f^2 g d} Q_{н0}^2 x, \quad (2')$$

где p_0 —давление при $x=0$, $Q_{н0}$ —расход, соответствующий стационарному состоянию.

Краевые условия для системы (2) суть:

$$\begin{aligned} Q_{II}|_{x=0} &= Q_{II0} = \text{const}, \\ Q_{II}|_{x=l} &= Q_{II0} + Q_{II1} \sin \frac{2\pi}{T} t, \end{aligned} \quad (2'')$$

где Q_{II1} — амплитуда отбираемого расхода при $x=l$. Введем безразмерные величины:

$$p^* = p/p_0, \quad q^* = Q_{II}/Q_{II0}, \quad q_1^* = \frac{Q_{II1}}{Q_{II0}}, \quad x^* = x/l, \quad t^* = t/T,$$

Тогда задача {(2), (2'), (2'')} запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^{*2}}{\partial x^*} &= \beta q^*, \\ \frac{\partial p^*}{\partial t^*} &= a \frac{\partial q^*}{\partial x^*}, \quad D^*: \begin{cases} t^* > 0 \\ 0 \leq x^* \leq 1 \end{cases}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$p^{*2}|_{t^*=0} = 1 - \beta x^*, \quad q^*|_{x^*=0} = 1, \quad q^*|_{x^*=1} = 1 + q_1^* \sin 2\pi t^*,$$

где

$$\beta = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\lambda \cdot l \cdot p_{ат} \cdot \gamma_{ат}}{g \cdot d^5 p_0^2} Q_{II0}^2, \quad a = \frac{4c^2 \cdot \gamma_{ат} \cdot T \cdot Q_{II0}}{\pi l d^2 g \cdot p_0}.$$

Если теперь решить первое уравнение системы (3) относительно q^* , с учетом изменения направления движения, исключить последнее из второго уравнения и опустить звездочки, то получим

$$\begin{aligned} q &= -\left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \frac{\partial p^2}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{a}{\sqrt{\beta}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right\}, \quad D: \begin{cases} t > 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4)$$

Причем

$$p^2|_{t=0} = 1 - \beta x, \quad q|_{x=0} = 1, \quad q|_{x=1} = 1 + q_1 \sin 2\pi t \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq 1). \quad (4')$$

Следует заметить, что аккумулирующая способность магистрального газопровода характеризуется начальным расходом Q_{II0} и безразмерной амплитудой q_1 расхода на отбираемом конце, при заданных значениях параметров трубы и допустимых значениях давления. Поэтому расчеты производились для фиксированных значений β , при изменении q_1 , так, чтобы давление оставалось в допустимом интервале.

Рассмотренная задача {(4), (4')}, при сделанных допущениях из-за нелинейности, вообще говоря, не может быть решена в аналитически замкнутой форме. Практическая важность вопроса привела к приближенным методам, в частности к методу конечных разностей. В данной работе указанная задача решалась методом интегральных соотношений, хорошо зарекомендовавшим себя в аналогичных задачах [3] и приводящий эффективным и выгодным расчетным схемам.

Разделим отрезок $[0,1]$ на N равных частей и проинтегрируем второе уравнение (4) на отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial t} dx = \frac{a}{\sqrt{\beta}} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right\} dx, \quad \kappa = 1, 2, \dots, N-1.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} p dx = \frac{a}{\sqrt{\beta}} \left\{ \left[\left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right]_{x_{k+1}} - \left[\left| \frac{\partial p^2}{\partial x} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \frac{\partial p^2}{\partial x} \right]_{x_{k-1}} \right\}, \quad (5)$$

Если h — шаг разбиения $\left(h = \frac{1}{N}\right)$, то можно предположить, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} p dx = 2h p_k. \quad (6)$$

Тогда, пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, представим $p^2(x, t)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} p^2(x, t) &= \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})} p_{k-1}^2 + \\ &+ \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} p_k^2 + \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} p_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_{x=x_{k-1}} &= -\frac{1}{2h} [3p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + p_{k+1}^2]; \quad \frac{\partial p^2}{\partial x} \Big|_{x=x_{k+1}} = \\ &= \frac{1}{2h} [p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + 3p_{k+1}^2]. \end{aligned} \quad (7)$$

Из соотношений (5), (6) и (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= \frac{a}{2h\sqrt{2\beta h}} [p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + 3p_{k+1}^2]^{1/2} \operatorname{sgn} (p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + 3p_{k+1}^2) + \\ &+ [3p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + p_{k+1}^2]^{1/2} \operatorname{sgn} (3p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + p_{k+1}^2). \end{aligned} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N-1)$$

Крайние слева и справа значения p определяются из (4) и (4') с учетом (7):

$$p_0 = \sqrt{\frac{4p_1^2 - p_2^2 + 2\beta h}{3}}; \quad p_N = \sqrt{\frac{4p_{N-1}^2 - p_{N-2}^2 - 2\beta h(1 + q_1 \sin 2\pi t)}{3}}.$$

Таким образом получается следующая система:

$$\begin{aligned} p_0 &= \sqrt{\frac{4p_1^2 - p_2^2 + 2\beta h}{3}}, \\ \frac{dp_1}{dt} &= \frac{a}{2h\sqrt{2\beta h}} [|a_1|^{1/2} \operatorname{sgn} a_1 + \sqrt{2\beta h}], \\ \frac{dp_k}{dt} &= \frac{a}{2h\sqrt{2\beta h}} [|a_k^{(1)}|^{1/2} \operatorname{sgn} a_k^{(1)} + |c_k^{(2)}|^{1/2} \operatorname{sgn} a_k^{(2)}], \quad (\kappa = 2, 3, \dots, N-2) \\ \frac{dp_{N-1}}{dt} &= \frac{a}{2h\sqrt{2\beta h}} [-\sqrt{2\beta h}(1 + q_1 \sin 2\pi t) + |a_{N-1}|^{1/2} \operatorname{sgn} a_{N-1}], \\ p_N &= \sqrt{\frac{4p_{N-1}^2 - p_{N-2}^2 - 2\beta h(1 + q_1 \sin 2\pi t)^2}{3}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{1.5} [\beta h + 4(p_2^2 - p_1^2)]; \quad a_k^{(1)} = p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + 3p_{k+1}^2;$$

$$\alpha_k^{(2)} = 3p_{k-1}^2 - 4p_k^2 + p_{k+1}^2; \alpha_{N-1} = \frac{1}{1,5} [-\beta h (1 + q_1 \sin 2\pi h)^2 + 4(p_{N-2}^2 - p_{N-1}^2)],$$

состоящая из $N-1$ обыкновенных дифференциальных и двух алгебраических уравнений, предназначенных для определения давления $p(x_k, t) = p_k(t)$ в $N+1$ точках. Начальное условие для системы (8) суть

$$p_k(0) = \sqrt{1 - \beta x_k}. \quad (8')$$

Задача (8)–(8') решалась методом Рунге–Кутты на машине БЭСМ-

2М. При этом в качестве характерных значений параметров были приняты:

$$p_0 = 56 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2; p_{\text{ат}} = 10^4 \text{ кг/м}^2; \gamma_{\text{ат}} = 1 \text{ кг/м}^3; g = 9,81 \text{ м/сек}^2; \\ c = 400 \text{ м/сек}; d = 0,5 \text{ м}; l = 10^5 \text{ м}; T = 86400 \text{ сек}; \lambda = 0,015.$$

Практическая сходимость предложенной методики была проверена расчетами для различных приближений по пространственной переменной x . Результаты расчетов отражены на рис. 1–5. На рис. 1 приведены графики решений ($\beta = 0,5421$, $q_1 = 0,1$) для 3-го ($N=4$), 7-го ($N=8$) и 15-го ($N=16$) приближений при фиксированном t . Как видно, отличие значений различных приближений для соответствующих точек незначительно и разность (на рис. 1 эта разность увеличена в 10 раз) значений двух последовательных приближений заметно уменьшается с ростом порядкового номера приближений.

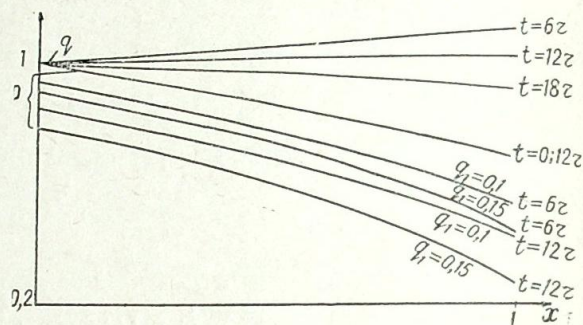


Рис. 2

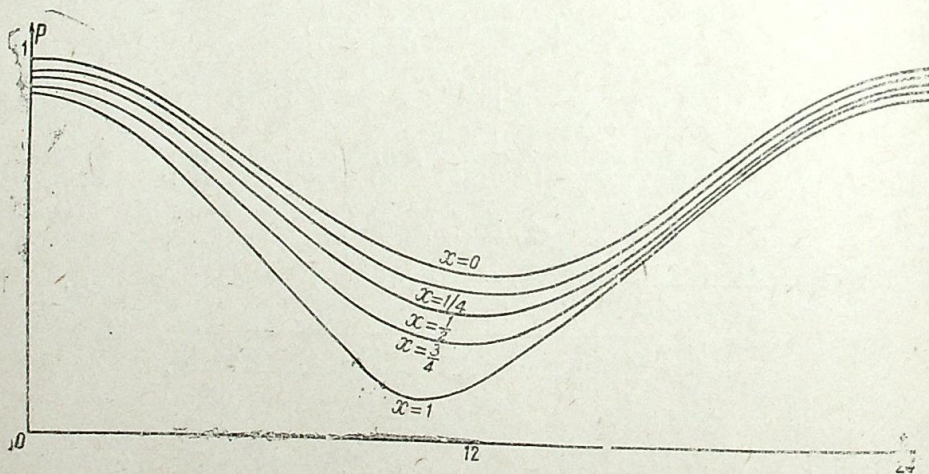


Рис. 3

Рис. 2 отражает изменение давления и расхода газа и зависимости от пространственной переменной при фиксированных значениях времени, что согласуется с физической сущностью задачи ($\beta = 0,5421$, $q_1 = 0,1$). Как видно из приведенных графиков, значения p и q после полного периода ($t = 24 \text{ час}$) совпадают, а с другой стороны рост амплитуды расхода приводит к уменьшению давления для соответствующего фиксированного значения времени.

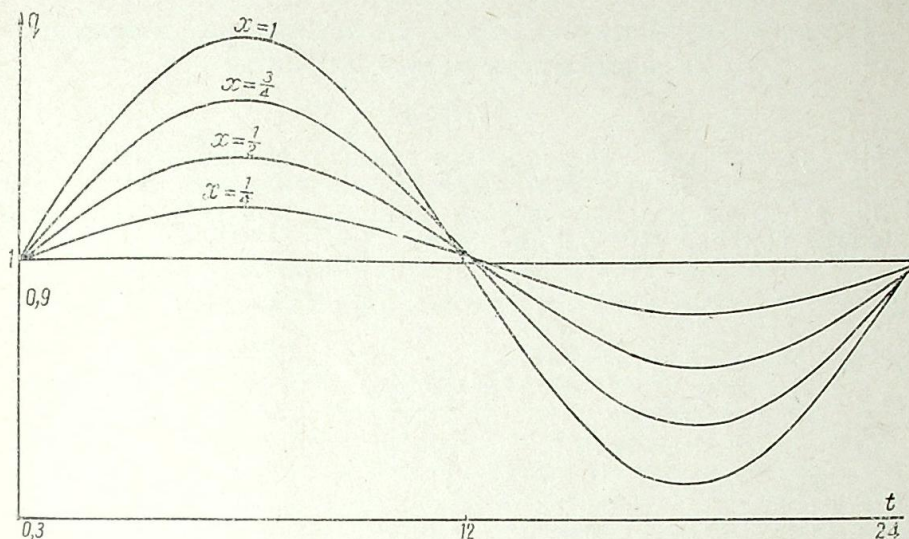


Рис. 4

На рис. 3 и 4 представлены графики изменения давления и расхода газа по времени в разных точках ($\beta = 0,17$; $q_1 = 0,6$), отражающие характер задаваемой граничной функции. С целью выяснения характера влияния начального расхода на давление были произведены расчеты для различных значений β , зависящих от начального расхода.

На рис. 5 эти результаты представлены для $x = 0$;

$$0,5; 1; q_1 = 0,2; t = 12 \text{ час}.$$

Как видно из графика, с увеличением β (начального расхода) давление стремится к нулю, причем это стремление наиболее явно при $x = 1$, т. е. на границе отбора. Следует отметить, что область допустимых значений амплитуды отбора q_1 определяется областью значений β .

Полученные расчетные данные показывают эффективность применяемой методики.

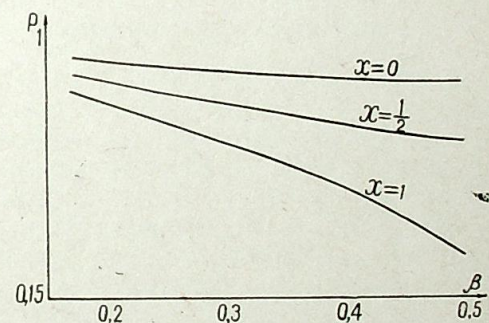


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Основы газовой динамики. Гостоптехиздат, 1961.
2. Ходанович И. Е. Аналитические основы проектирования и эксплуатации магистральных газопроводов. Гостоптехиздат, 1961.
3. Таиров М. А. „Вычислительная математика и матем. физика“, т. I, 1962, № 5

Ә. Х. Сәлимов, К. Ф. Ширинов, М. Ы. Таиров

Газ динамикасынын бир гејри-хәтти мәсәләсинин интеграл мүнәсибәтләри методу илә һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгалә макистрал газ кәмәриндә газын гәрарлашмамыш һәрәкәтнин тәсвир едән гејри-хәтти дифференциал тәнликләр системи үчүн гојулмуш бир сәрһәд мәсәләсинин интеграл мүнәсибәтләри методу илә әдәди һәллине һәср олуңмушдур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри сәријасы, 1968, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 6.

УДК 681. 142 (438)

А. С. ГАСАНОВ

О МЕТОДИКЕ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО ПО ВРЕМЕНИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ В СИСТЕМЕ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

В системах СПУ—время в расчет принимается лишь фактор времени. В таких системах ресурсы предполагаются практически неограниченными. Однако в большинстве случаев имеющиеся ресурсы (рабочая сила, машины, механизмы и т. п.) ограничены. В связи с этим возникает известная задача минимизации времени выполнения проекта при ограниченных ресурсах, которая решается методом использования линейных диаграмм и графиков потребности ресурсов. В данной статье рассматривается аналогичная задача, решаемая по методике, в которой используются квадраты. При этом расчет заключается в том, что для каждой операции $p_i p_j$ строится квадрат, в центре которого записывается ее продолжительность t_{ij} . А каждое событие отображается как совокупность подобных квадратов по числу входящих в данное событие операций. Подробно методика расчета временных параметров сети $T_i^{(p)}$; $\bar{T}_{ij}^{(p,0)}$; $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; R_{ij} описана в статье „Анализ сетевого графика.“*

Постановка задачи при постоянных интенсивностях

Предположим, что имеется проект, по которому ежедневное наличие ресурсов постоянно и равно A (для простоты рассматривается один вид ресурсов). Каждая операция $p_i p_j$ выполняется с постоянной интенсивностью β_{ij} , продолжительность которой t_{ij} . Пронумеруем события сетевого графика так, чтобы для любой операции выполнялось условие $i < j$. Определим временные параметры $T_i^{(p)}$; $\bar{T}_{ij}^{(p,0)}$; $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; R_{ij} . Интенсивность β_{ij} данной операции $p_i p_j$ запишем левее квадрата. Возможны два варианта решения такой задачи. Первый состоит в последовательной оптимизации распределения ресурсов каждый раз в пределах только одной единицы времени—как бы с позиции „сегодняшнего дня“. Второй—в рассмотрении всего графика до конца.

Разберем теперь задачу оптимизации по времени распределения ограниченных ресурсов согласно первому варианту.

Первый шаг.

1. Рассмотрим совокупность всех операций, которые могут начаться одновременно в момент $t = 0$, т. е. фронт $\Phi(0)$. Очевидно,

* „За технический прогресс“, 1965, № 2.

Таковыми операциями будут p_0p_j . Присваиваем им номера 1, 2, 3, ..., в порядке возрастания полных резервов R_{ij} . Критические операции, полный резерв которых равен нулю, получают номера 1, 2, 3, ..., f . Затем номер $f+1$ получит не критическая операция, полный резерв которой меньше полного резерва любой другой не критической операции (если таких работ больше, чем одна, то они получают номера $f+1$; $f+2$; $f+3$; ..., в порядке убывания их интенсивностей).

2. В порядке возрастания номеров операций последовательно суммируем их интенсивности. Процесс суммирования продолжается до тех пор, пока полученная сумма интенсивностей не превысит заданного наличия A , т. е. $\sum_{s=1}^k \beta_{oj}^s \leq A$. Эти операции оставляем в их первоначальном положении, т. е. они начинаются в момент $t=0$.

Операцию, начиная с которой сумма интенсивностей превышает заданное наличие A , и все последующие сдвигает на величину, равную минимальной из продолжительностей всех операций, занумерованных от 1 по k , т. е. на $\min \{t_{oj}\} = m_1$ (m_1 — величина сдвига). Из

$$\sum_{s=1}^k \beta_{oj}^s \leq A$$

начатых операций минимум одна должна закончиться и в расчет последующего шага не входит.

Продолжительность незаконченных операций уменьшаем, а раннее начало увеличиваем на $\min \{t_{oj}\} = m_1$. Справа отмечаем эти опе-

$$\sum_{s=1}^k \beta_{oj}^s \leq A$$

рации знаком $*$, который указывает, что операция начата, но еще незакончена. К индексам операций, следующих из завершенных событий, приписываем 0 в целях определения начала всех операций (т. е. фронт $\Phi(t)$ последующего шага).

3. Устанавливаем все оставшиеся операции проекта после первого сдвига на наиболее ранние сроки начала и окончания и определяем все параметры, т. е. $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; R_{ij} . На этом заканчивается выполнение первого шага m_1 .

Общий шаг.

Пусть уже проделано m_i шагов так, что суммарный ресурс, потребляемый на операциях каждого шага от m_1 по m_i , не превышает наличия A . Приступим к m_{i+1} шагу.

1. Рассмотрим совокупность всех операций, начало которых совпадает с окончанием m_i шага, т. е. фронт $\Phi(t_{m_i+1})$. Всем этим работам присваиваем номера, причем в зависимости от условия задачи существует два способа нумерации:

а. Операции проекта не допускают перерыва в их выполнении.

В этом случае в первую очередь присваиваем номера операциям, которые справа отмечены знаком $*$, т. е. начаты, но незакончены на предшествующем шаге m_i . Остальным операциям присваиваем номера как и в действии 2 первого шага.

б. Операции допускают перерыв в своем выполнении.

В этом случае присваиваем номера, как и в действии 2 первого шага. При этом не обращаем внимания на знак $*$, а рассматриваем операцию как самостоятельную.

2. Начало операций совпадает с действием 3 первого шага. По данной методике можно решать задачу, когда учитывается несколько видов ресурсов. Проиллюстрируем применение указанного метода на примере сетевого графика (рис. 1). Предположим, что для выполне-

ния проекта, изображенного на рисунке, имеется 12 рабочих, т. е. $A=12$. Продолжительность t_{ij} (в днях) и интенсивность β_{ij} (число занятых рабочих) указаны на графике. Имея эти данные, определим временные параметры $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; R_{ij} (рис. 2). Левее квадрата записываем интенсивность β_{ij} .

Первый шаг

1. Рассмотрим операции p_0p_1 ; p_0p_2 ; p_0p_3 , начало которых совпадает со временем $t=0$, т. е. фронт $\Phi(0)$. Этим операциям присваиваем номера. Операция p_0p_1 — критическая, полный резерв которой равен 0, получает номер 1. Операции p_0p_2 и p_0p_3 , полный резерв которых 3 и 1 получает номера $p_0p_3=2$; $p_0p_2=3$.

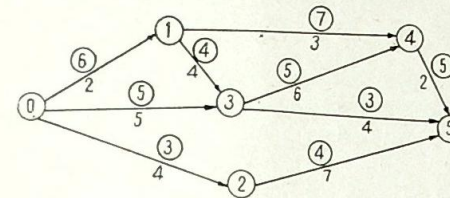


Рис. 1

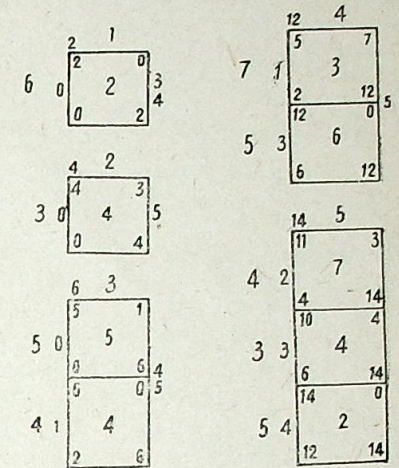


Рис. 2

2. В порядке номеров складываем интенсивности $\beta_{01}=6 < 12$; $\beta_{01} + \beta_{03}=6+5 < 12$. Если прибавить $\beta_{02}=3$, то полученная сумма станет больше 12. Поэтому начало операции p_0p_2 сдвигаем на величину $\min \{t_{01}; t_{03}\} = \min \{2; 5\} = 2$. Из начатых операций p_0p_1 ; p_0p_3 операция p_0p_1 закончится и в расчет следующего шага не войдет.

Продолжительность операции p_0p_3 уменьшится, а начало увеличится на $m_1=2$. Справа эту операцию p_0p_3 отмечаем знаком $*$, который указывает, что работа начата, но незакончена. К индексам i операций p_1p_3 и p_1p_4 , следующих из заверщенного события p_1 , приписываем нуль, т. е. $p_{10}p_3$; $p_{10}p_4$.

3. Просчитываем временные параметры после сдвига, равного 2.

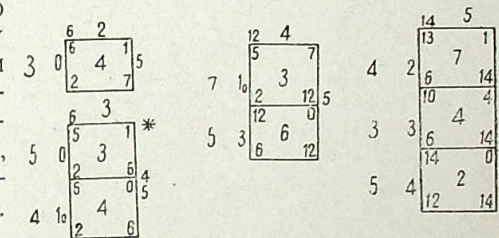


Рис. 3

Результат первого шага $m_1=2$ показан на рис. 3.

Второй шаг

1. Рассмотрим операции фронта $\Phi(2)$ — p_0p_2 ; p_0p_3 ; $p_{10}p_3$; $p_{10}p_4$. Так как операции в своем выполнении не допускают перерыва, то операции p_0p_3 присваиваем номер 1, $p_{10}p_3=2$; $p_0p_2=3$; $p_{10}p_4=4$.

2. Суммируем продолжительности $5 < 12$; $5+4 < 12$; $5+4+3=12$. Операцию $p_{10}p_4$ сдвигаем на $\min \{t_{03}; t_{13}; t_{02}\} = \min \{3; 4; 4\} = 3$. Операция p_0p_3 выполнена. Продолжительность операций t_{02} ; t_{13} уменьшаем, а начало увеличиваем на 3. Отмечаем p_0p_2 и $p_{10}p_3$ справа знаком $*$.

3. Просчитываем временные параметры после сдвига, равного 3.

Окончательный результат второго шага $m_2=3$ изображен на рис. 4.

Результат третьего шага $m_3 = 1$ (рис. 5). Результат четвертого шага $m_4 = 4$ (рис. 6).

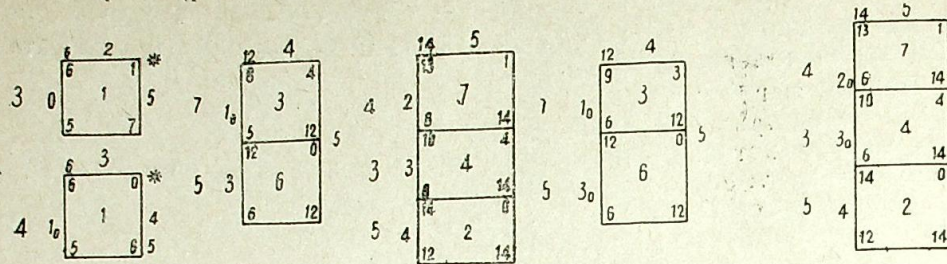


Рис. 4

Рис. 5

Результат пятого шага $m_5 = 2$ (рис. 7). Результат шестого шага $m_6 = 1$ (рис. 8).

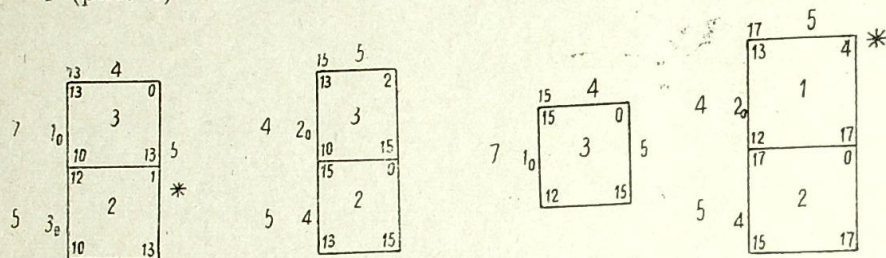


Рис. 6

Рис. 7

Результат седьмого шага $m_7 = 2$ (рис. 9).

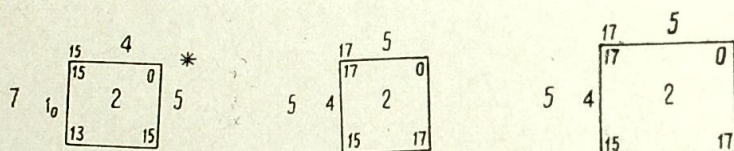


Рис. 8

Рис. 9

После восьмого шага ($m_8 = 2$) операции проекта закончены и проект выполнен в минимальное время $T_n = \sum_{i=1}^8 m_i = 2 + 3 + 1 + 4 + 2 + 1 + 2 + 2 = 17$ дней. Если же в данном примере допускать перерывы в выполнении операции, то проект закончится через 15 дней. Пользуясь данной методикой, можно решать и другие задачи минимизации времени при ограниченных ресурсах. Например, уплотнение ресурсов, постановка при переменных интенсивностях и др.

Данная методика расчета оптимального по времени распределения ограниченных ресурсов имеет ряд преимуществ:

1. Можно не строить сеть, если имеется перечень последовательности операций;
2. Не нужно составлять линейную диаграмму проекта и строить графики потребности ресурсов;
3. Нужные параметры $T_i^{(p)}$; $\bar{T}_{ij}^{(p,0)}$; $T_j^{(p)}$; $T_j^{(n)}$; R_{ij} ; β_{ij} удобно записываются в квадратах, не нарушая технологической последовательности.

4. Для расчета по данной методике требуются меньшие затраты времени, чем для расчета по линейной диаграмме и графикам потребности ресурсов, учитывая отдельный расчет временных параметров.

5. Чтобы на каждом шаге не чертить для расчета новые квадраты, так как на шаге могут встретиться незначительные изменения, можно старые временные параметры стереть и на их место записать новые, или же временные параметры сделать в виде цифровых фишек, а старые заменить новыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. Изд-во "Наука", М., 1965.
2. Теймуров В. М., Шатров А. И. "За технический прогресс", № 2, 1965

Э. С. Басанов

Шэбэкэ планлашдырылмасы вэ идарэетмэ системиндэ мэхдудлашдырылмыш еhtiжатларын заман үзрэ оптималь бөлүшдүрүлмэсинин һесаблама методикасы

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә шэбэкэ планлашдырылмасы вэ идарэетмэ системиндэ мэхдудлашдырылмыш еhtiжатларын заман үзрэ оптималь бөлүшдүрүлмэсинин квадратлар васытәсилә һесапланмасы методу верилир.

Методла һәр әмәлијат (иш) үчүн квадратлар гурулур вэ һәр бир һадисә исә она дахил олан әмәлијатларын квадратлары мәчмусу кими әкс олунур. Тәклиф едилән методун мә'лум олан хәтти диаграмлардан истифадә вэ еhtiжатлара тәләбат графикләри методларындан бир нечә үстүнлүјү вардыр.

Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН, С. М. БАГИРОВ, А. М. НАСИРЗАДЕ

К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В АСИНХРОННОМ ДВИГАТЕЛЕ НА ЦИФРОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЕ

В последние годы в связи с развитием полупроводниковой техники широкое развитие получили работы по частотному регулированию асинхронных двигателей [1]. Исследование переходных процессов асинхронного двигателя при его частотном регулировании представляет большой практический интерес.

Для расчета переходных процессов двигателя с учетом изменения скорости вращения особо важное значение должны приобрести методы расчета на аналоговых и цифровых вычислительных машинах.

Уравнения, описывающие переходный процесс, в системе координатных осей α и β , вращающихся с переменной угловой скоростью $p\varphi_1$, и образующих с неподвижными осями угол φ_1 в относительных единицах принимают следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} u_{1\alpha} &= r_1 i_{1\alpha} + p\psi_{1\alpha} - \psi_{1\beta} p\varphi_1; & \psi_{1\alpha} &= (x_1 i_{1\alpha} + x_{\mu} i_{2\alpha}) \\ u_{1\beta} &= r_1 i_{1\beta} + p\psi_{1\beta} + \psi_{1\alpha} p\varphi_1; & \psi_{1\beta} &= (x_1 i_{1\beta} + x_{\mu} i_{2\beta}) \\ 0 &= r_2 i_{2\alpha} + p\psi_{2\alpha} - \psi_{2\beta} p\varphi_2; & \psi_{2\alpha} &= (x_2 i_{2\alpha} + x_{\mu} i_{1\alpha}) \\ 0 &= r_2 i_{2\beta} + p\psi_{2\beta} + \psi_{2\alpha} p\varphi_2; & \psi_{2\beta} &= (x_2 i_{2\beta} + x_{\mu} i_{1\beta}) \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электромагнитного момента и движения представим в следующем виде:

$$M_{\text{эм}} = \psi_{2\beta} i_{2\alpha} - \psi_{2\alpha} i_{2\beta}, \quad (2)$$

$$p^2 \varphi = \frac{1}{2\omega_0 H} (M_{\text{эм}} - M_c), \quad (3)$$

где ω_0 — синхронная скорость эквивалентного двухполюсного двигателя при номинальной частоте (рад/сек);

H — механическая постоянная времени (сек);

$p = \frac{d}{d(\omega_0 t)}$ — оператор дифференцирования;

φ — электрический угол поворота ротора (рад);

$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$; φ_u — электрический угол питающего напряжения (рад);

$$u_{1\alpha} = V \cos(\varphi_u - \varphi_1 + \gamma);$$

$$u_{1\beta} = V \sin(\varphi_u - \varphi_1 + \gamma). \quad (4)$$

При частотном регулировании для поддержания постоянства перегрузочной способности амплитуду напряжения изменяем пропорционально частоте, т. е. используем закон частотного регулирования $V_{\text{отн}} = \gamma$.

Для численного решения полученных уравнений наилучшим способом является применение цифровых вычислительных машин. В этом

случае наиболее удобен метод Рунге—Кутта, для чего необходимо представить нашу систему в виде дифференциальных уравнений первой степени. Для перевода уравнений в необходимую форму воспользуемся следующими соотношениями.

Для угловой скорости ротора можно написать

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_p = \omega_0 \gamma (1 - s). \quad (5)$$

Выбираем оси так, чтобы $\varphi_1 = \varphi_u$, при этом имеем:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_0 \gamma; \quad p^2 \varphi = -\frac{\gamma}{\omega_0} \frac{ds}{dt}; \quad p\varphi_2 = \gamma s. \quad (6)$$

При нулевом начальном угле $\gamma = 0$ имеем $u_{1\alpha} = U$, $u_{1\beta} = 0$.

Решая систему (1) относительно производных для токов, с учетом (5), (6), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{di_{1\alpha}}{d\omega_0 t} &= \frac{1}{(x_1 x_2 - x_{\mu}^2)} (U x_2 \gamma - r_1 x_2 i_{1\alpha} + x_1 x_2 \gamma i_{1\beta} + x_2 x_{\mu} \gamma i_{2\beta} + \\ &\quad + r_2 x_{\mu} i_{2\alpha} - x_2 x_{\mu} \gamma s i_{2\beta} - x_{\mu}^2 \gamma s i_{1\beta}); \\ \frac{di_{2\alpha}}{d\omega_0 t} &= \frac{1}{(x_1 x_2 - x_{\mu}^2)} (-r_2 x_1 i_{2\alpha} + x_1 x_2 \gamma s i_{2\beta} + x_1 x_{\mu} \gamma s i_{1\beta} - \\ &\quad - U x_{\mu} \gamma + r_1 x_{\mu} i_{1\alpha} - x_1 x_{\mu} \gamma i_{1\beta} - x_{\mu}^2 \gamma i_{2\beta}); \\ \frac{di_{1\beta}}{d\omega_0 t} &= \frac{1}{(x_1 x_2 - x_{\mu}^2)} (-r_1 x_2 i_{1\beta} - x_1 x_2 \gamma i_{1\alpha} - x_2 x_{\mu} \gamma i_{2\alpha} + \\ &\quad + r_2 x_{\mu} i_{2\beta} + x_2 x_{\mu} \gamma s i_{2\alpha} + x_{\mu}^2 \gamma s i_{1\alpha}); \\ \frac{di_{2\beta}}{d\omega_0 t} &= \frac{1}{(x_1 x_2 - x_{\mu}^2)} (-r_2 x_1 i_{2\beta} - x_1 x_2 \gamma s i_{2\alpha} - x_1 x_{\mu} \gamma s i_{1\alpha} + \\ &\quad + r_1 x_{\mu} i_{1\beta} + x_1 x_{\mu} \gamma i_{1\beta} + x_{\mu}^2 \gamma i_{2\alpha}); \\ \frac{ds}{d\omega_0 t} &= \frac{1}{2\omega_0 \gamma H} (M_c - M_{\text{эм}}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для программирования введем обозначения:

$$\begin{aligned} c &= i_{1\alpha}; \quad v = i_{1\beta}; \quad y = i_{2\alpha}; \quad d = i_{2\beta}; \quad l = s; \quad r = \omega_0; \\ l &= x_1 = x_2; \quad \mu = x_{\mu}; \quad r = r_1; \quad s = r_2; \quad e = H; \quad z = \gamma; \\ b &= \frac{lz}{t}; \quad p = \frac{lr}{t}; \quad a = \frac{l^2 z}{t}; \quad u = \frac{l\mu z}{t}; \quad m = \frac{\mu s}{t}; \\ H &= \frac{\mu^2 z}{t}; \quad \pi = \frac{\mu r}{t}; \quad 0 = \frac{ls}{t}; \quad \gamma = \frac{\mu z}{t}; \quad x = \gamma; \\ u &= \frac{1}{2rze}; \quad t = (l^2 - \mu^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда уравнения, вводимые в машину, примут следующий вид:

$$\begin{aligned} c' &= b - pc + av + md + tu - mld - nlv, \\ v' &= md + mlu + nls - rv - ac - su, \\ y' &= \pi c - \gamma - sv - nd - ou + ald + slv, \\ d' &= \pi v + mc + nu - od - alu + mls, \\ l' &= u [1 - \mu (uv - cd)]. \end{aligned} \quad (9)$$

При решении системы был применен метод Рунге—Кутта. Задача выполнялась при автоматическом поиске шага интегрирования, что уменьшает погрешность вычисления. Заданная точность составляла 0,01.

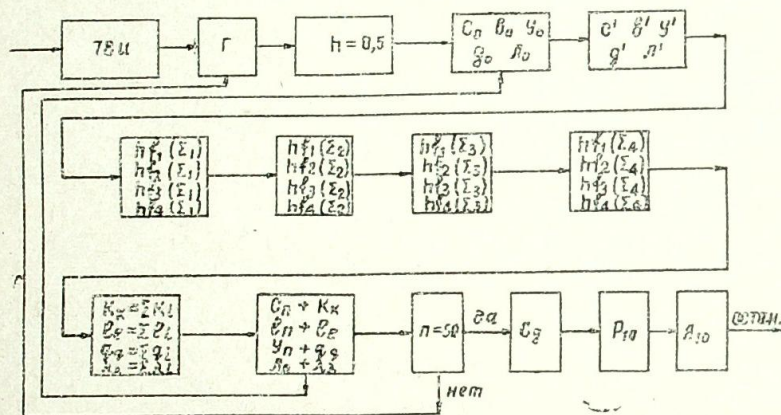
Параметры приводим к относительным единицам. За единицу напряжения принимаем амплитудное значение фазового номинального напряжения $u_{\text{баз}} = \sqrt{2} \cdot 220 = 310$ в. За единицу тока — амплитудное значение тока

За единицу сопротивления —

$$r_{\text{баз}} = \frac{310}{8,55} = 36,4 \text{ ом.}$$

$$\text{Единица времени} = \frac{1}{\text{номин. угловая частота}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50} = 3,19 \cdot 10^{-3} \text{ сек.}$$

$\mu = 1$; $x_1 = x_2 = 1,017$; $r_1 = 0,0412$; $x_p = 0,939$; $r_2 = 0,0686$; $\omega_0 = 157$ 1/сек; $H = 0,084$ сек. Система уравнений (9) решена на ЭЦВМ „Наири“. Программа решения была следующей. Ввод в машину для разных частот определенных возмущающих команд. Логическая схема представлена на рис. 1.



Ввод в машину при $M_c = 1$ и $\gamma = 1$:

$$\begin{aligned} &66\,n; 0,01; u; 78\,n; 0,5; 100; 0; 0; 0; 0; 0; 1; u; \partial u_*; \partial y; n = 5; \\ &c' = 6 - 0,247\,c + 6,102\,v + 5,61\,\partial + 0,377\,y - 5,61\,\lambda\partial - 5,143\,\lambda v; \\ &v' = -0,247\,v - 6,102\,c - 5,61\,y + 3,77\,\partial + 5,61\,\lambda y + 5,143\,\lambda c; \\ &y' = -0,412\,y + 6,102\,\lambda\partial + 5,594\,\lambda v - 5,5 + 0,227\,c - 5,594\,v - 5,143\,\partial; \\ &\partial' = -0,412\,\partial - 6,102\,\lambda y - 5,594\,\lambda c + 0,227\,v + 5,594\,c + 5,143\,y; \\ &\lambda' = 0,038\,[1 - 0,935\,(y v - c\partial)]. \end{aligned}$$

Аналогично вводились данные при других значениях частоты:

$$\begin{aligned} & \Gamma\text{-операция группировки;} \\ & c' = -pc + (a - n\lambda) v + tu (u - u\lambda) \partial + b; \\ & v' = -pv - (a - n\lambda) c - (u - u\lambda) y + t\partial; \\ & y' = -oy + \pi c - (u - u\lambda) v - (n - a\lambda) \partial - b; \\ & \partial' = -o\partial + (u - u\lambda) c + \pi v + (n - a\lambda) y; \\ & \lambda' = u [1 - \mu (yv - c\partial)]. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\kappa_1 &= hf_1(\Gamma_n, c_n, \theta_n, y_n, \partial_n, \lambda_n) = hf_1(\Sigma_1), \\ l_1 &= hf_2(T_n, c_n, \theta_n, y_n, \partial_n, \lambda_n) = hf_2(\Sigma_1), \\ \gamma_1 &= hf_3(T_n, c_n, \theta_n, y_n, \partial_n, \lambda_n) = hf_3(\Sigma_1), \\ q_1 &= hf_4(T_n, c_n, \theta_n, y_n, \partial_n, \lambda_n) = hf_4(\Sigma_1), \\ \lambda_1 &= hf_5(T_n, c_n, \theta_n, y_n, \partial_n, \lambda_n) = hf_5(\Sigma_1).\end{aligned}$$

Соответственно проводятся операции на II, III, VI и V этапа для определения k_k , l_i , γ_r , q_d , λ_λ в соответствии с методом Рунге—Кутты. После выполнения этих операций находим решение для первого шага, затем запись и передача на память машины для решения второго шага:

$$c_{n+1} = c_n + \kappa_K; \quad \theta_{n+1} = \theta_n + l_i; \quad y_{n+1} = y_n + \gamma_\gamma; \quad \partial_{n+1} = \partial_n + q_q; \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \lambda_\lambda.$$

Цикл продолжается до $n = 100$.

 O_9 —восстановление по n ,

С₉—обращение к переводу и печать,

P_{10} —проверка содержимого счетчика и передача управления на оператор 784 продолжается до $n = 100$, при $n = 100$ —на оператор A_{10} ;

$$A_{10} - \text{останов.}$$

По приведенной методике были получены решения уравнений (9) для случая пуска при $M_c = 0$ и пуска при постоянном моменте сопротивления, равном номинальному $M_c = 1$ и при изменении частоты γ от 1 до 0,4.

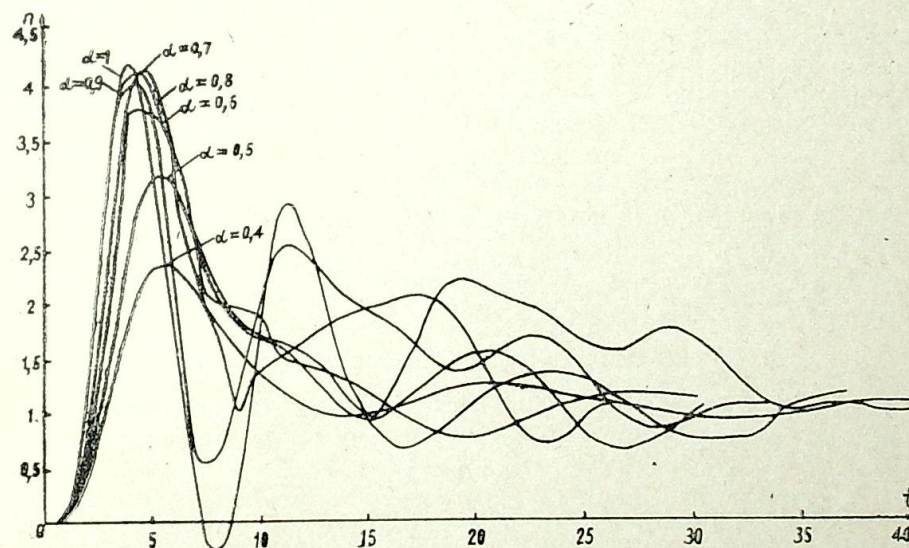


Рис. 2

На рис. 2 показаны кривые изменения электромагнитного момента в функции времени $M_z = f(t)$ при $M_c = 1$ для частот $\nu = 1; 0,8; 0,7$ и $0,4$. Первый пик момента получается через $12,75 \cdot 10^{-3}$ сек, достигая четырехкратного значения номинальной величины. При уменьшении частоты колебания момента сглаживаются и время пуска уменьшается. При частоте $\nu = 1$ процесс пуска можно считать законченным при $t_{\text{отн}} = 37,5$, в то время как при $\nu = 0,4$ $t_{\text{отн}} = 29$.

На рис. 3 представлены кривые зависимости электромагнитного момента от скольжения при разных частотах ($M_c = 1$): $\nu = 1; 0,8; 0,7; 0,4$. На этом же рисунке приведена статистическая характеристика. Механические характеристики двигателя, построенные с учетом

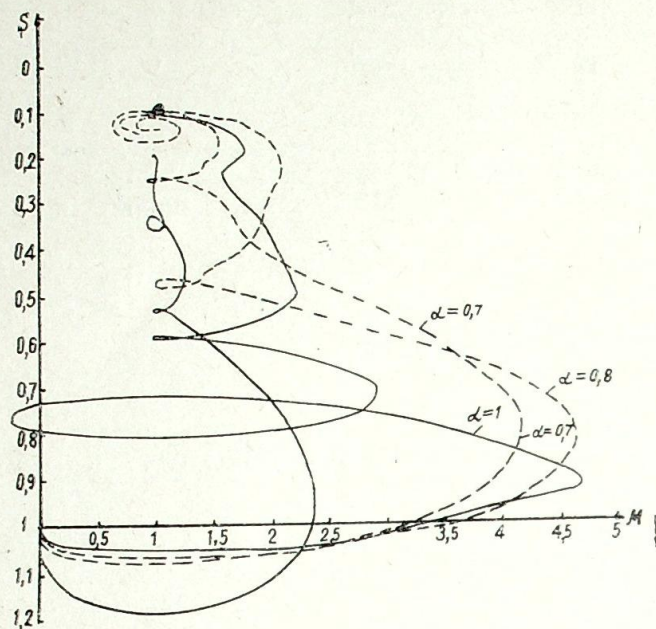


Рис. 3

электромагнитных процессов, отличаются от статистических. В момент пуска в течение времени порядка полупериода двигатель работает в тормозном режиме, в характеристиках имеется петля, которая с убыванием частоты уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков А. А. Частотное управление асинхронными двигателями. Изд-во „Наука“, М., 1966
2. Lawton P. J., Stephenson J. M. „Note on induction-machine performance with a variable-frequency supply“. Proceedings the institution of electrical engineers. Power Record. December 1966.

Б. А. Листенгартен, С. М. Багыров, А. М. Насирзаде

Асинхрон мұһәрриқдеки кечид һалларынын һесаблама машыны васитәсилә һесабы

ХҮЛАСӘ

Жарымкечиричиләрин инкишафы асинхрон мұһәррикләрин тезлик һесабына тәнзим едилмәси проблеминин һәллине бәјүк тәкан олмушдур.

Мәгаләдә асинхрон мұһәрријин тезлик һесабына тәнзиминдә электромеханики кечид һалынын һесапланмасы үсулу верилмәклә, конкрет олараг, мұғавимәт моментинин мұхтәлиф гиймәтләри үчүн мұхтәлиф тезликләрдә ишә бурахма мәсәләси һәлл едилди.

Һесабат заманы мұһәрријин дифференциал тәнликләри синхрон фырланан охларда јазылмыш, кәркинлик векторунун амплитуд гиймәти тезлијин дәјишмәсинә мұтәнасиб дәјишдириләрәк һәммин тәнликләр „Наири“ һесаблама машынында һәлл едилмишдир.

Алынмыш гиймәтләр әсасында электромагнит моментин замандан вә сүрүшмәдән асылылыг әјриләри гурулмушдур.

Б. А. АЗИМОВ, Д. М. КРЕМЕР

О РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НЕФТЯНЫХ ПРОМЫСЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРАФИКОВ НАГРУЗОК

Правильное определение расчетной мощности позволяет значительно снизить расчетные затраты при строительстве и эксплуатации энергетических объектов. Электрические нагрузки нефтяных промыслов имеют ряд специфических особенностей, отличающих их от нагрузок других промышленных предприятий, поэтому всестороннее исследование комплекса вопросов, связанных с анализом и расчетом таких нагрузок, имеет как теоретический, так и практический интерес.

Как известно, для заданного графика определяемая расчетная нагрузка должна быть такой величины, чтобы выбираемое по ней сечение проводника обеспечивало:

- 1) предельный перегрев проводника не более чем на 150% от номинального;
- 2) тепловой износ изоляции в пределах годового нормированного значения.

В практике величина расчетного тока определяется, как правило, по допускаемому перегреву выбираемого проводника. Между тем расчеты по ряду графиков электрических нагрузок нефтяных промыслов показывают, что величина расчетного тока, определяемая по максимуму температуры I_{PI} (и соответствующий ей коэффициент максимума G_{MI}), оказывается меньше, чем величина расчетного тока I_{PII} (G_{MII}) по допускаемому тепловому износу изоляции.

Вопросы теплового износа изоляции достаточно сложны, а число исследований, посвященных им, невелико [1—5]. Возможно, это является одной из причин того, что в настоящее время нет однозначного ответа на вопрос: в каком соотношении находятся величины расчетных токов, определяемых по пику температуры и тепловому износу изоляции. В частности, представляет интерес выяснить это соотношение в зависимости от величины коэффициента формы расчетных графиков G_F . Это важно потому, что графики электрических нагрузок нефтепромыслов имеют как низкие (компрессорные, насосные и глубиннонасосные установки), так и высокие (бурение) значения G_F .

Согласно методу вероятностного моделирования графиков электрических нагрузок, обоснованному впервые в [2], расчетное значение тока может быть найдено решением дифференциального уравнения нагрева проводника:

$$T_0 \frac{dz}{dt} + z = I^2(t), \quad (1)$$

где T_0 — постоянная нагрева проводника;
 $z = v \frac{I_n^2}{v_n}$ — текущая ордината расчетного графика перегрева проводника;
 I_N, v_N — номинальная величина тока и температуры перегрева проводника.

Особенность дифференциального уравнения (1) заключается в том, что его правая часть $I^2(t)$ является случайной функцией. Экспериментальные замеры подтвердили нормальный закон распределения и стационарность электрических нагрузок основных потребителей электроэнергии нефтяных промыслов [6, 7]. Помимо этого, можно принять [2], что процесс $I(t)$ является марковским, корреляционная функция которого имеет вид

$$K(\tau) = D e^{-\alpha|1-t,1|} = D e^{-\alpha|\tau|}, \quad (2)$$

где D — дисперсия процесса $I(t)$;
 τ — интервал времени;

$\alpha = \frac{1}{T_K}$ — величина, обратная времени затухания корреляционных связей.

Величина коэффициента максимума и расчетное значение тока по пику температуры могут быть получены по формуле

$$G_{MI} = \frac{I_{PI}}{I_c} = \frac{1}{I} \sqrt{\frac{\bar{z} + 3\sqrt{D}}{\beta}}, \quad (3)$$

где $\bar{z}, \bar{I}$ — математические ожидания (средние значения) процессов $z(t)$ и $I(t)$;

β — допустимая кратность перегрева проводника ($\beta = 1,5$).

В настоящей статье в отличие от [2], показан, в частности, метод сравнительно простого определения I_{PI} (G_{MI}) и корреляционной функции процесса нагрева проводника по характеристикам исходного процесса $I(t)$. Для этой цели дифференциальное уравнение (1) рассматривается в виде динамической системы, входом и выходом которой являются случайные стационарные процессы $I^2(t)$ и $z(t)$. При этом используется известная [8] связь между спектральными плотностями дисперсий указанных процессов.

Запишем уравнение (1) в операторной форме:

$$(a_1 p + a_0) z(t) = b_0 I^2(t), \quad (4)$$

где $a_1 = T_0$ — постоянная нагрева проводника;

$p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования;

a_0, b_0 — постоянные коэффициенты.

Математическое ожидание процесса $z(t)$ можно определить из формулы

$$\bar{z} = \frac{b_0}{a_0} M[I^2(t)] = \bar{I}^2 \cdot G_{\Phi}^2, \quad (5)$$

где M — знак математического ожидания.

Подлежащая определению корреляционная функция нагрева проводника связана со своей спектральной плотностью $S_{z(\omega)}$ соотношением

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} S_{z(\omega)} d\omega, \quad (6)$$

где ω — частота спектра дисперсий [8].

В свою очередь, спектральная плотность процесса $z(t)$ связана со спектральной плотностью и с корреляционной функцией процесса $I^2(t)$ соотношением

$$S_{z(\omega)} = |\Phi_{(i\omega)}|^2 S_{I^2(\omega)} = \Phi_{(i\omega)}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} K_{I^2}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где $|\Phi_{(i\omega)}|$ — частотная характеристика системы [8], определяемая для нашего случая в виде

$$|\Phi_{(i\omega)}|^2 = \frac{b_0^2}{|a_1 i\omega + a_0|^2} = \frac{K^2}{\omega^2 + K^2}. \quad (8)$$

Здесь $K = \frac{1}{T_0}$ — величина, обратная постоянной времени нагрева проводника.

Необходимое для подстановки в формулу (7) значение $K_{I^2}(t)$ может быть получено, исходя из общего выражения для корреляционной функции квадратичного процесса $I^2(t)$, имеющего вид

$$K_{I^2}(t_1, t_2 \dots t_j) = M \left\{ \prod_{i=1}^j [I^2(t_i) - \bar{I}^2(t_i)] \right\}. \quad (9)$$

Выполнив преобразования, получим

$$K_{I^2}(\tau) = M \{ I_1^2 I_2^2 \} - D^2 - 2D\bar{I}^2 - \bar{I}^4. \quad (10)$$

Для определения начальных моментов $M \{ I_1^2 I_2^2 \}$ воспользуемся их связью [9] с характеристической функцией многомерного нормального процесса:

$$M = [I_1^2, I_2^2 \dots I_n^2] = \frac{1}{i \sum_{r=1}^n r_k} \left[\frac{\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n} E_{I_1, I_2 \dots I_n}(t_1, t_2 \dots t_n)}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2} \dots \partial t_n^{r_n}} \right]_{t_1=t_2=\dots=t_j=0}, \quad (11)$$

где

$$E_{(t_1, t_2 \dots t_n)} = e^{\sum_{r=1}^n t_r I_r - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n K_{rs} t_r t_s}$$

— характеристическая функция; $\|K_{rs}\|$ — матрица, составленная из корреляционных моментов [9].

С учетом (11) выражение (10) приводится к виду

$$K_{I^2}(\tau) = 2D^2 e^{-2\alpha|\tau|} + 4\bar{I}^2 D e^{-\alpha|\tau|}. \quad (12)$$

Подстановка (12) и (8) в (7) дает

$$S_{z(\omega)} = \frac{\kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} (2D^2 e^{-2\alpha|\tau|} + 4\bar{I}^2 D e^{-\alpha|\tau|}) d\tau = 4 \frac{\kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2} - \frac{D\alpha}{\pi} \left(\frac{D}{4\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\bar{I}^2}{\omega^2 + \alpha^2} \right). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (6) и вычислив интеграл с помощью вычетов, получим выражение для корреляционной функции нагрева проводника в виде

$$K_z(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \cdot 4 \frac{\kappa^2}{\omega^2 + \kappa^2} \cdot \frac{D\alpha}{\pi} \left(\frac{D}{4\alpha^2 + \omega^2} + \frac{\bar{I}^2}{\omega^2 + \alpha^2} \right) d\omega = 2D\kappa \left(\frac{2\alpha e^{-\kappa|\tau|} - \kappa e^{-2\alpha|\tau|}}{4\alpha^2 - \kappa^2} - 2\bar{I}^2 \frac{\alpha e^{-\kappa|\tau|} - \kappa e^{-\alpha|\tau|}}{\alpha^2 - \kappa^2} \right). \quad (14)$$

дисперсия процесса $z(t)$ с учетом (13) будет

$$D_z = 2 \int_0^\infty S_{\Gamma(\omega)} d\omega = 2\kappa D \left(\frac{D}{2\alpha + \kappa} + \frac{2\bar{I}^2}{\alpha + \kappa} \right). \quad (15)$$

Используя полученные значения математического ожидания (5) и дисперсии (15) процесса нагрева $z(t)$, можно с помощью формулы (3) найти величину коэффициента максимума по пику температуры.

Определение расчетного тока по тепловому износу изоляции встречает ряд принципиальных и практических трудностей. Они связаны с тем, что для нахождения $I_{\text{рп}}(G_{\text{мп}})$ уже недостаточно только знания практически вероятного значения пика температуры, а необходимо учитывать также интегральный эффект теплового воздействия на изоляцию проводника. В отличие от [2, 3, 4] определение $I_{\text{рп}}(G_{\text{мп}})$ производилось с использованием закона распределения решения дифференциального уравнения нагрева проводника (1). Принятый в настоящей работе метод расчета, по нашему мнению, более отвечает физической трактовке понятий $I_{\text{рп}}(G_{\text{мп}})$, чем метод, принятый в [2].

Расчетная и фактическая температуры изоляции проводника, с учетом известного „восьмиградусного правила“, при любом переменном графике нагрузок связаны [5] соотношением

$$e^{0,08\varepsilon v_N} \geq \int_{-\infty}^{\infty} e^{0,08\varepsilon v} \pi(v) dv, \quad (16)$$

где v_N — длительно допустимый перегрев;

$\pi(v)$ — дифференциальный закон распределения перегрева.

Тогда условие нормального относительного износа изоляции будет иметь вид

$$v_N \geq v_p. \quad (17)$$

Как известно [10], закон распределения решения дифференциального уравнения вида (1) меньше отличается от нормального, чем его правая часть, представляющая квадрат нормального распределения. А это значит, что приближенное выражение такого распределения можно получить с помощью ряда Грама—Шарлье, используя лишь первые четыре центральных момента интеграла $z(t)$.

Первый момент (математическое ожидание) нами была получена ранее (5), а остальные μ_s ($s = 2, 3, 4$), представляющие средние значения второй, третьей и четвертой степени ординат перегрева, могут быть получены из общего выражения для центральных моментов $z(t)$, имеющего вид

$$\mu_s(t) = M \{ [z_1(t) - \bar{z}_1(t)]^s \}. \quad (18)$$

С учетом (9) выражение (18) приводится к виду

$$\mu_s = \int_0^t \dots \int_0^t p(t, t_1) \dots p(t, t_s) K_{12}(t_1 \dots t_s) dt_1 \dots dt_s, \quad (19)$$

где $p(t, t_s)$ — весовая функция, определяемая согласно [10] видом дифференциального уравнения, в данном случае (1):

$$p(t, t_1) = \kappa e^{-\kappa(t_1 - t)}, \quad (20)$$

$K_{12}(t_1 \dots t_s)$ — корреляционная функция квадратичного процесса; $I^2(t)$ определяется согласно (9) и (11);

t — предел интегрирования ($t \gg T_0$).

Опуская обширные математические выкладки, ниже приводим конечную формулу (21), определяющую $G_{\text{мп}}(I_{\text{рп}})$. Она получена на основании условия (17), интегрированием формулы, отражающей закон

распределения нагрева проводника, согласно общему выражению (16). В свою очередь, закон распределения нагрева проводника $\pi(v)$ был описан с помощью первых четырех центральных моментов, полученных решением (19) в функции от $G_{\text{ф}}$ и $\varepsilon = \frac{T_{\text{к}}}{T_0}$ [11] исходного процесса $I(t)$:

$$v_N = \frac{G_{\text{ф}}^2 v_N}{G_{\text{мп}}^2} + \frac{0,0438 \mu_2 v_N^2}{G_{\text{мп}}^4} + \\ + \frac{2,3 \lg \left[1 + a \left(0,266 - \frac{0,01 \sqrt{\mu_2 v_N}}{G_{\text{мп}}} \right) \right]}{\gamma} + \\ + \frac{0,023 E \sqrt{\mu_2 v_N}}{G_{\text{мп}}^2} \left(1 + \frac{\sqrt{\mu_2 v_N}}{G_{\text{мп}}^2} \right) \quad (21)$$

где $a = \frac{\mu_3}{\frac{\mu_2}{2}}$ и $E = \frac{\mu_4}{\frac{\mu_2}{2}} - 3$ — соответственно, асимметрия и эксцесс рас-

пределения нагрева проводника; γ — расчетный коэффициент, зависящий от вида изоляции проводника. Для кабелей с бумажной изоляцией $\gamma = 0,0865$.

Формулы (3) и (21) дают возможность построить графики для подсчетов $G_{\text{мп}}$ и $G_{\text{мп}}$ в функции от $G_{\text{ф}}$ и ε расчетных графиков.

Эти зависимости (сплошная линия соответствует $G_{\text{мп}} = f(G_{\text{ф}}, \varepsilon)$, пунктирная $G_{\text{мп}} = f(G_{\text{ф}}, \varepsilon_0)$), представлены на рисунке. Их анализ приводит, в частности, к следующим выводам:

1. Величина коэффициента максимума по допустимому тепловому износу изоляции проводника для одних и тех же условий больше, чем соответствующая величина коэффициента максимума, подсчитанная по допускаемому пику температуры при принятом согласно [12] коэффициенте допускаемого перегрева $\beta = 1,5$.

2. С ростом коэффициента формы графика нагрузок эксплуатационная надежность изолированных проводов и кабелей по тепловому износу изоляции не возрастает.

Следует отметить, что расчетные графики, представленные на рисунке, могут быть использованы не для всех видов нефтепромысловых электрических нагрузок. В самом деле, при решении поставленной задачи нами было принято положение о нормальном распределении электрических нагрузок. Такой характер распределения экспериментально был подтвержден [6, 7] только по электрическим нагрузкам нефтепромысловых компрессорных и глубиннонасосных установок. Что касается бурения, то в связи со специфическими условиями работы этих установок (малое число одновременно работающих электродвигателей и технологическая их взаимосвязь, нестабильность производства и др.) можно в общем случае ожидать, что их электрические нагрузки будут иметь закон распределения, отличный от

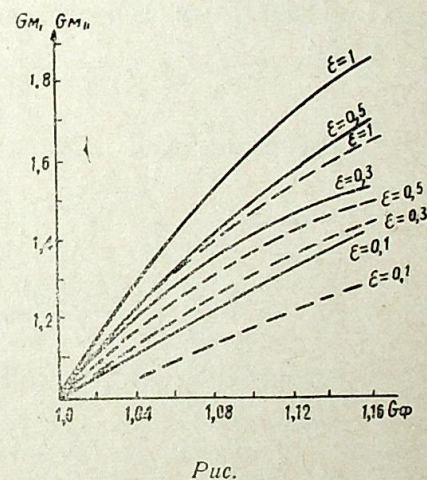


Рис.

нормального. Но в таком случае к расчету электрических нагрузок этих установок неприменимы и методы расчетов, изложенные выше. С другой стороны, сам факт неподчинения электрической нагрузки одной буровой установки нормальному закону распределения не определяет характера распределения электрической нагрузки группы таких установок. Согласно известным положениям теории вероятностей, по мере увеличения числа питающихся буровых установок закон распределения их электрических нагрузок должен все больше "нормализоваться". Поэтому практический интерес представляет установление того минимального количества совместно питающихся буровых установок, при котором имеет место нормальный закон распределения их электрических нагрузок.

Ввиду этого было предпринято исследование закона распределения электрической нагрузки одной и группы буровых установок. Для этой цели были обработаны экспериментальные данные замеров электрических нагрузок в действующих электрических сетях по 10 буровым установкам*. Общее количество осредненных получасовых замеров мощности составило 28692.

Вычисления проводились с помощью ЭЦВМ "Урал-2". Данные по каждой буровой установке представлялись в виде сгруппированного статистического ряда, в котором каждому значению получасовой мощности p_i соответствовала ее частота появления n_i . В первой части задачи была предпринята попытка—подобрать наиболее подходящий закон распределения электрической нагрузки буровой установки. С этой целью частоты каждого статистического распределения сравнивались с соответствующими теоретическими частотами некоторых наиболее подходящих для данного случая распределений:

1. Нормальным распределением

$$f(p) = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p-p_{cp})^2}{2\sigma^2}}; \quad (22)$$

2. Распределением Шарлье

$$f(p) = \frac{n}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(p-p_{cp})^2}{2\sigma^2}} \left\{ 1 + \frac{a}{6} \left[\frac{(p-p_{cp})^3}{\sigma^3} - \frac{3(p-p_{cp})}{\sigma} \right] + \frac{E}{24} \left[\frac{(p-p_{cp})^4}{\sigma^4} - \frac{6(p-p_{cp})^2}{\sigma^2} + 3 \right] \right\}; \quad (23)$$

3. Распределением Пуассона

$$f(p) = \frac{n p_{cp}^p}{p!} e^{-p_{cp}}; \quad (24)$$

4. Экспоненциальным распределением

$$f(p) = n \lambda e^{-\lambda p}, \quad \lambda = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{p_{cp}}; \quad (25)$$

5. Распределением Релея:

$$f(p) = \frac{p}{\sigma^2} e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}}. \quad (26)$$

* Независимо от изложенного определение закона распределения электрических нагрузок бурения представляет и самостоятельный интерес для решения ряда вопросов электроснабжения этих установок.

В формулах (22)–(26):

n —сумма статистических частот по одной буровой;
 p , p_{cp} и σ —текущее, среднее и среднеквадратичное значение нагрузки;
 a , E —асимметрия и эксцесс статистического распределения.

Оценка возможности воспроизведения статистического распределения электрических нагрузок буровых установок теоретически производилась по критерию согласия А. Н. Колмогорова. В соответствии с этим по сравниваемым распределениям подсчитывалась величина

$$d = \frac{|M - M'|_{\max}}{\sqrt{n}}, \quad (27)$$

где $|M - M'|_{\max}$ —модуль максимальной разности накопленных теоретических и статистических частот.

Далее по величине d определялась вероятность $p(d)$, равная пределу

$$p(d) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 d^2}. \quad (28)$$

В соответствии с [13] принималось, что хорошее совпадение статистического и теоретического распределений достигается при $p(d) \geq 0,01$. Ниже приводятся результаты подсчетов по подбору кривых распределений. При этом полученные результаты по 10 буровым установкам усреднялись. Как видно из табл. 1, ни одно из рассматриваемых теоретических распределений не может быть принято для описания статистического распределения электрической нагрузки буровой установки

Таблица 1

Сравниваемый закон распределения	d	$p(d)$	Согласованность с теоретическим законом распределения
Нормальное распределение	12,7	$p(d) \approx 0$	Не согласуется
Распределение Шарлье	8,9	≈ 0	—
— Пуассона	13,3	≈ 0	—
— экспоненциальное	11,6	≈ 0	—
— Релея	16,1	≈ 0	—

Во второй части задачи исследовались показатели графиков нагрузок группы совместно питающихся буровых установок. При этом устанавливались, в частности, возможность представления статистического распределения электрических нагрузок различного количества буровых установок нормальным законом распределения. Программа расчетов с помощью ЭЦВМ "Урал-2" была составлена таким образом, что величина электрических нагрузок m совместно питающихся буровых установок ($m = 2, 3, \dots, 10$) получалась по принципу случайного m -суммирования из всего задаваемого объема информации (28692 опытных замеров получасовой мощности). Всего по каждому случаю рассматриваемого совместного питания буровых установок производилось 1000 суммирований. Это позволило исключить из последующего анализа те величины нагрузок, которые могли бы иметь место при вероятности их появления меньше, чем 0,001. По полученным таким образом значениям суммируемых нагрузок строились сгруппированные статистические ряды. По каждой группе m буровых установок ($m = 2, 3, \dots, 9$) было получено по десять статистических распределений, последующие вычисления которых усреднялись. Результаты подсчетов по установлению того количества буровых установок, при котором их электрическая нагрузка имеет нормальный закон распределения, представлены в табл. 2.

Как видно из этой таблицы, электрическая нагрузка группы буровых при количестве совместно питающихся установок, равным 4 и выше, имеет нормальный закон распределения. Следовательно, в этих

Таблица 2

Число совместно питающихся буровых установок	d	$p(d)$	Согласованность с теоретическим законом распределения
2	3,59	$p(d) \approx 0$	Не согласуется
3	2,12	0,0003	Согласуется
4	1,35	0,055	.
5	1,35	0,055	.
6	1,107	0,166	.
7	1,04	0,24	.
8	0,93	0,362	.
9	0,85	0,465	.
10	0,81	0,52	.

случаях величина соотношения коэффициентов максимума по допускаемому пику температуры и тепловому износу изоляции может быть ориентировочно получена по расчетным графикам, представленным на рисунке.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Волобровский С. Д. и др. Электрические нагрузки промышленных предприятий. Изд-во "Энергия", 1964.
- 2 Каялов К. М. "Электромеханика", № 11, 1961.
- 3 Каялов Г. М. "Электромеханика", № 4, 1961.
- 4 Мешель Б. Е. "Электричество", № 4, 1962.
- 5 Шишкин О. П. Расчет электрических нагрузок на нефтяных промыслах. Грозный, 1954.
- 6 Азимов Б. А., Кремер Д. М. "За технический прогресс", № 8, 1965.
- 7 Азимов Б. А., Кремер Д. М. "За технический прогресс", № 11, 1965.
- 8 Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.
- 9 Володин Б. Г. и др. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. Судпромгиз, 1962.
- 10 Свешников А. А. Прикладная теория случайных функций. Судпромгиз, 1961.
- 11 Азимов Б. А., Кремер Д. М. "За технический прогресс", № 4, 1967.
- 12 Временные руководящие указания по определению электрических нагрузок промышленных предприятий. Госэнергоиздат, 1961.
- 13 Леонов Ю. П. Помощник автоматики. М., 1961.

УДК 519. 95

Р. Г. ФАРАДЖЕВ, М. И. ГАРАЕВ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУРЬЕ НАД ПОЛЯМИ ГАЛУА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ОБОБЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫХ МАШИН

Ранее [1] уже отмечалось, что для распространения спектрального представления в области теории последовательностных машин необходимо прежде всего получить разложение периодической решетчатой булевой функции. Однако полученные при этом результаты не могут быть непосредственно применены к задачам произвольных последовательностных машин, модуль которых $\neq 2$, так как само понятие периодической решетчатой булевой функции и ее разложение справедливы лишь для полей Галуа $GF(2^k)$, рассматриваемых как алгебра многочленов над полями $GF(2)$, относительно непереводимого модуля. Поэтому возникает естественная необходимость обобщения этих результатов на случай любых конечных полей и применения их к конкретным задачам теории последовательностных машин. Решению такой задачи и посвящена данная статья. В основном будем придерживаться обозначений и терминологии из работ [1, 2].

1°. Условимся называть модулярными функциями (МФ) обычные решетчатые функции с областью значений поля Галуа. Такие функции аналитически записываются в виде

$$y = x[n], \quad GF(p^k), \quad (1)$$

где $x[n] \in GF(p^k)$ при всех $n = 0 \pm 1, \pm 2 \pm 3, \dots$

При $p = 2$ такие функции были рассмотрены в работе [2].

Функция $x[n]$ из (1) имеет период, равный M , если

$$x[n + M] = x[n], \quad GF(p^k). \quad (2)$$

Примером периодических МФ является экспоненциальная МФ, которая определяется следующим образом. Пусть ε — примитивный элемент поля $GF(p^k)$. Тогда функция

$$l[n] = \varepsilon^{\alpha n}, \quad GF(p^k), \quad (3)$$

где α — целое число, для которого $0 < |\alpha| \leq p^k - 2$ называется экспоненциальной МФ. Нетрудно убедиться, что для любых целых чисел n_1, n_2

$$l[n_1 + n_2] = l[n_1] \odot l[n_2], \quad GF(p^k). \quad (4)$$

Здесь через символ $\odot$ обозначена мультипликативная операция поля. Справедливо и обратное утверждение. Всякая МФ $x[n] \neq 0$, удов-

лествующая условию (4), имеет вид (3). Доказывается это аналогично доказательству подобного утверждения для комплекснозначной функции от целочисленного аргумента $\neq 0$, зависящей от класса вычетов [3]. С другой стороны, для каждого ненулевого элемента $\varepsilon^a \in GF(p^k)$ существует наименьшее целое число r , которое называется периодом элемента с учетом (4), показывает периодичность $l[n]$ с периодом r . Но поскольку r является делителем числа $p^k - 1$, то всегда $1 \leq r \leq p^k - 1$.

По аналогии с обычными комплекснозначными функциями, заданными в целых числах и зависящими от класса вычетов, введем понятие о сопряженной экспоненциальной МФ. Будем говорить, что функция ε^{-an} — сопряженная к функции ε^{an} и обозначается через $\bar{l}[n]$, т. е.

$$\bar{l}[n] = \varepsilon^{-an}, \quad GF(p^k). \quad (4')$$

Довольно простой вид экспоненциальной функции и соотношение $r/p^k - 1$ ($r/p^k - 1$ означает, что число $p^k - 1$ делится на r) наводят на мысль о том, что любую периодическую МФ $x[n]$ с периодом $M/p^k - 1$ следует искать в виде линейной комбинации таких функций. Чтобы доказать эту возможность, нам понадобится ввести понятие о частоте МФ и вывести одно важное соотношение.

Пусть период M функции $x[n]$ из (2) удовлетворяет условию $M/p^k - 1$. Определим для такой функции понятие частоты

$$\bar{\omega} = \frac{p^k - 1}{M} \quad (5)$$

и рассмотрим функции вида

$$l_\alpha[n] = \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k). \quad (6)$$

Обозначим совокупность всех таких функций через

$$J = \{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}\}.$$

Введем в J скалярное произведение, положив

$$(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}) = \frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} l_{\alpha_1}[n] \odot \bar{l}_{\alpha_2}[n] \quad (l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2} \in J), \quad GF(p^k).$$

Здесь $\sum$ означает, что суммирование ведется по $+$, т. е. по аддитивной операции поля $GF(p^k)$. Докажем, что относительно введенного скалярного умножения функция (6) образует ортонормированный базис в J . В самом деле для функций из множества J справедлива следующая

Лемма

$$(l_{\alpha_1}, l_{\alpha_2}) = \frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} l_{\alpha_1}[n] \odot \bar{l}_{\alpha_2}[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 \\ 0 & \text{при } \alpha_1 \neq \alpha_2, \end{cases} \quad GF(p^k). \quad (7)$$

Доказательство: Обозначим $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Возможны два случая:

1. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$, тогда $\varepsilon^\alpha \in GF(p^k)$ есть элемент, отличный от единицы. Следовательно, таковым является и $\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}$, т. е. $\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} \neq 1[n]$, так как $\bar{\omega} \neq 0$. Для каждого такого элемента поля справедлива своеобразная формула о сумме геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^M \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} = \frac{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} M} - 1}{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega}} - 1}, \quad GF(p^k), \quad (8)$$

где $\ominus$ — обратное к операции, которая элементарно получается при помощи деления многочлена $\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} \ominus 1$ на $\varepsilon^{\alpha \bar{\omega}} \ominus 1$. Тогда, учитывая (5) и тот факт, что $\varepsilon^{p^k - 1} = 1$, получаем

$$\frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} = 0, \quad GF(p^k),$$

так как всегда можно умножить обе стороны (8) на $\frac{1}{M} \neq 0 \in GF(p^k)$.

2°. Пусть $\alpha_1 = -\alpha_2$, тогда $\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}|_{\alpha=0} = 1[n]$,

$$\sum_{n=0}^{M-1} \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}|_{\alpha=0} = \sum_{n=0}^{M-1} 1[n] = M, \quad GF(p^k).$$

Здесь $1[n]$ — скачкообразная функция [2]. Таким образом

$$\frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}|_{\alpha=0} = 1, \quad GF(p^k),$$

что и требовалось доказать.

Соотношение (7) является условием ортонормировки для системы функций $l_\alpha[n]$, которые по аналогии с обычными можно называть нормированными экспоненциальными функциями. В соотношении (6) при различных α получаем различные нормированные экспоненциальные МФ, частоты кратные $\bar{\omega}$.

Следствие 1. Эти функции, в свою очередь, являются линейно независимыми. Такое утверждение следует из применения соотношений (7) к равенству

$$\sum_{\alpha=0}^{M-1} \lambda_\alpha \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} = 0, \quad GF(p^k), \quad (9)$$

где $\lambda_\alpha \in GF(p^k)$ — произвольные постоянные. Действительно, умножим (9) на $\varepsilon^{-\alpha \bar{\omega} n}$, просуммируем результаты по n от 0 до $M-1$, затем, переставив порядок суммирования и применив (7), получим $\lambda_\alpha = 0$ ($\alpha = 0, 1, \dots, M-1$), что и указывает на линейную независимость $\{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}\}$.

Из вышеизложенных рассуждений вытекает следующая основная теорема (аналог разложения Фурье над полями Галуа):

Теорема: Пусть $x[n]$ есть периодическая МФ с периодом $M/p^k - 1$, тогда она представится следующим образом:

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_\alpha \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k),$$

где

$$c_\alpha = \frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \odot \varepsilon^{-\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k)$$

при $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

Доказательство. Поскольку линейно независимые функции $\{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}\}$ периодичны с периодом $M/p^k - 1$, то $x[n]$ принадлежит линейному многообразию, образованному координатными функциями

$\{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}\}$, $\alpha = 0, 1, \dots, M-1$. Следовательно (как в случае обычных решетчатых функций [4], а также МФ при $p = 2$ [1]) имеем

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_{\alpha} \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k), \quad (10)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

Из (10) всегда могут быть однозначно определены M постоянных $c_0, c_1, \dots, c_{M-1}$, так как определитель $d = \det \left\| \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} \right\|_{\alpha=0, M-1}^{n=0, M-1}$ линейной системы, получаемой относительно этих постоянных, отличен от нуля как своеобразный определитель Вандермонда. Для того, чтобы найти эти постоянные, поступаем следующим образом. Сначала в выражении (10) примем $\alpha = \alpha_1$, далее умножим обе части (10) на $\varepsilon^{-\alpha_2 \bar{\omega} n}$ и просуммируем их по n от 0 до $M-1$. Тогда после перестановки в операции суммирования получим

$$\sum_{n=0}^{M-1} x[n] \odot \varepsilon^{-\alpha_2 \bar{\omega} n} = \sum_{\alpha_1=0}^{M-1} c_{\alpha_1} \odot \sum_{n=0}^{M-1} \varepsilon^{(\alpha_1 - \alpha_2) \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k).$$

На основании леммы внутренняя сумма всегда равна нулю, за исключением случая $\alpha_1 = \alpha_2$, когда она равна числу M . Следовательно, правая часть равна значению $c_{\alpha} \odot M$, $GF(p^k)$.

Таким образом получаем

$$c_{\alpha} = \frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \odot \varepsilon^{-\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k). \quad (11)$$

Следствие 2. Пусть $p = 2$, тогда M как делитель нечетного числа $2^k - 1$ есть число нечетное, которое над полем Галуа с характеристикой 2, каковым является поле $GF(2^k)$, равно единице, т. е.

$$M = 1, \quad GF(2^k). \quad (12)$$

В этом случае формулы (10) и (11) принимают такой вид:

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_{\alpha} \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(2^k); \quad (13)$$

$$c_{\alpha} = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \odot \varepsilon^{-\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(2^k). \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) можно привести к такому виду, чтобы они полностью совпадали с формулами (8) и (9) из работы [1]. Действительно,

поскольку M — нечетное, то принимая $N = \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor$, получаем $M = 2N + 1$ (значение N равно целому числу, содержащемуся в $\frac{M}{2}$). Учитывая это, запишем соотношение (13) следующим образом:

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^N c_{\alpha} \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n} \oplus c_{N+1} \odot \varepsilon^{(N+1) \bar{\omega} n} \oplus c_{N+2} \odot \varepsilon^{(N+2) \bar{\omega} n} \oplus \dots \oplus c_{2N} \odot \varepsilon^{2N \bar{\omega} n}, \quad GF(p^k). \quad (15)$$

Из равенства

$$\varepsilon^{(2N+1) \bar{\omega} n} = 1$$

вытекает, что

$$\varepsilon^{(N+1+i) \bar{\omega} n} = \varepsilon^{-(N-i) \bar{\omega} n}, \quad GF(2^k) \quad (16)$$

при $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

С другой стороны, свободно можем переобозначить постоянные c_{α} ($\alpha \geq N+1$):

$$c_{N+1+i} = c_{-(N-i)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (17)$$

Таким образом, на основании (16) и (17) будем иметь

$$x[n] = \sum_{\alpha=-N}^N c_{\alpha} \odot \varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(2^k). \quad (18)$$

Теперь для нахождения из этой формулы постоянных c_{α} поступаем как описано выше. При этом после некоторых элементарных операций, учитывая (7) и (12), получим

$$c_{\alpha} = \sum_{n=0}^{2N} x[n] \odot \varepsilon^{-\alpha \bar{\omega} n}, \quad GF(2^k), \quad (19)$$

что и требовалось доказать.

Значит функции $\{\varepsilon^{\alpha \bar{\omega} n}\}_{\alpha=0, M-1}$ играют роль полных систем по отношению к периодической РМФ $x[n]$ с периодом $M/p^k - 1$.

2°. Следствие 3. Все полученные до сих пор результаты были сформулированы для полей $GF(p^k)$, рассматриваемых как поле многочленов относительно неприводимого модуля. На числовые конечные поля, состоящие из p^k (p — простое) элементов $\{0, 1, 2, \dots, p^k - 2, p^k - 1\}$, эти утверждения легко распространяются благодаря свойствам изоморфизма, существующим между полями Галуа и подобными им конечными полями (обозначим такие поля для простоты через $\overline{GF(p^k)}$). Этот изоморфизм допускает следующие взаимно однозначные соответствия:

$$GF(p^k) \ni \varepsilon \longleftrightarrow p \in \overline{GF(p^k)};$$

аддитивная операция $GF(p^k) \leftarrow \rightarrow$ аддитивная операция $\overline{GF(p^k)}$; мультипликативная операция $GF(p^k) \leftarrow \rightarrow$ мультипликативная операция

$$GF(p^k) \ni \{0, 1, \dots, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p^k-2}\} \longleftrightarrow \{0, 1, 2, \dots, p^k - 1\} \in \overline{GF(p^k)}.$$

С таким же успехом функцию $x[n]$ из (1) можно поставить в соответствие некоторой решетчатой функции $x[n]$ с областью значений $\overline{GF(p^k)}$, т. е.

$$x[n] \in \overline{GF(p^k)} \longleftrightarrow x[n].$$

Так же

$$c_{\alpha} \in GF(p^k) \longleftrightarrow c'_{\alpha} \in \overline{GF(p^k)}.$$

Следовательно, если учесть формулы (10) и (11), то будем иметь:

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c'_{\alpha} \odot p^{\alpha \bar{\omega} n}, \quad \overline{GF(p^k)}; \quad (20)$$

$$c'_{\alpha} = \frac{1}{M} \odot \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \odot p^{-\alpha \bar{\omega} n}, \quad \overline{GF(p^k)}. \quad (21)$$

Предполагается, что все операции выполняются относительно $GF(p^k)$.

3°. Чтобы оценить утилитарное значение полученных выше результатов, рассмотрим класс обобщенных линейных последовательностных машин [5] (ОЛПМ), все логические операции которых приводят к задержке на постоянное время (принимаемое обычно за единицу), суммирование и умножение на постоянный множитель относительно операций поля Галуа $GF(p^k)$, притом κ_1/κ (при $\kappa_1 = 1$, ОЛПМ = ЛПМ). Процессы в таких последовательностных машинах могут быть описаны аналитическими, табличными способами, а также графами. Воспользу-

емся аналитическим способом записи для создания аналогии между методами последовательностных машин и методами дискретных систем управления. Такой способ наиболее удобен. Тогда специальное разностное уравнение, связывающее выходную величину $y[n]$ с входной $x[n]$ такой ОЛПМ может представить в виде

$$y[n] = \sum_{v=1}^m b_{m-v} \odot x[n-v] \ominus \sum_{v=0}^m a_{m-v} \odot y[n-v], \quad \overline{GF}(p^k). \quad (22)$$

Здесь $a_i, b_i \in GF(p^k)$; $x[n] = y[n] = 0$ при $n < 0$. (23)

При практическом использовании таких машин чаще всего возникает задача определения периодического изменения величины $y[n]$ и ее периода при периодическом изменении входной величины, т. е. при $x[n] = x[n+M]$. Покажем, что такую задачу можно решить на основе вышеизложенных фактов при $M/p^k - 1$, с применением математического аппарата преобразования Лапласа—Галуа, основные теоремы которого даны в работе [2] для случая полей $GF(2^k)$.

Применим преобразование Лапласа—Галуа к обеим сторонам уравнения (22), с учетом теоремы линейности и сдвига, а также (23). Для нашей ОЛПМ, перейдя к изоморфному полю $\overline{GF}(p^{k_1})$, будем иметь следующую передаточную функцию ОЛПМ:

$$K_{(q)}^* = \frac{\sum_{v=0}^m b_v \odot p^{vq}}{\sum_{v=0}^m a_v \odot p^{vq}}, \quad \overline{GF}(p^{k_1}). \quad (24)$$

Определим передаточную функцию данной ОЛПМ:

$$\frac{Y^*(q)}{X^*(q)} = K^*(q) = \frac{p^*(q)}{Q^*(q)} = \frac{\sum_{v=0}^m b_v \odot \varepsilon^{vq}}{\sum_{v=0}^m a_v \odot \varepsilon^{vq}}, \quad \overline{GF}(p^k), \quad (24')$$

где принято $1 = a_m$, $a \neq 0$.

Предположим теперь, что $K^*(q)$ имеет простые полюсы в расширении поля $GF(p^{k_1})$, т. е.

$$p^{q_1}, p^{q_2}, \dots, p^{q_m} \in GF(p^k) \supset GF(p^{k_1}).$$

Тогда реакция ОЛПМ на нормированную экспоненциальную РМФ вида $x_\alpha[n] = p^{\alpha \bar{\omega} n}$ после выполнения тех же выкладок, как и в случае $p=2$, определится следующим образом:

$$y_\alpha[n] = K^*(\alpha \bar{\omega}) \odot p^{\alpha \bar{\omega} n} \ominus \sum_{v=1}^m \frac{p^*(q_v)}{(p^{\alpha \bar{\omega}} \ominus p^{q_v}) \odot a^*(q_v)} \odot p^{q_v n}, \quad \overline{GF}(p^k); \quad (25)$$

при $\alpha = 1$ в этой формуле $K^*(\omega)$ представляет собой частотную характеристику ОЛПМ.

Если $\alpha = 0$, то

$$y_0[n] = K^*(0) - \sum_{v=1}^m \frac{p^*(q_v)}{(1 \ominus p^{q_v})} \odot p^{q_v n}, \quad \overline{GF}(p^k) \quad (26)$$

определяют переходную характеристику ОЛПМ. Беря первую разность $\Delta y_0[n]$ из выражения (26), получим

$$K[n] = \Delta y_0[n] = \sum_{v=1}^m \frac{p^*(q_v)}{p^{q_v} \odot a^*(q_v)} \odot p^{q_v n}, \quad \overline{GF}(p^k), \quad (27)$$

что и определяет импульсную характеристику ОЛПМ. Из формул (26) и (27), вытекает, что последовательности на выходе исходной ОЛПМ являются периодичными при импульсном и скачкообразном входных воздействиях, а их периодом является число $N|_{p-1}^k$. Если характеристический многочлен $a^*(q)$ есть примитивный многочлен, то этот период равен максимальному числу $N = p^k - 1$. Пусть входное воздействие $x[n]$ имеет вид (10), тогда

$$x[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_\alpha \odot x_\alpha[n], \quad \overline{GF}(p^k).$$

Следовательно, на основании принципа суперпозиции, учитывая (25), получим

$$y[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_\alpha \odot y_\alpha[n] = \sum_{\alpha=0}^{M-1} c_\alpha \odot K^*(\alpha \bar{\omega}) \odot p^{\alpha \bar{\omega} n} \ominus \sum_{\alpha=0}^{M-1} \sum_{v=1}^m c_\alpha \odot \frac{p^*(q_v)}{(p^{\alpha \bar{\omega}} \ominus p^{q_v}) \odot a^*(q_v)} \odot p^{q_v n}, \quad \overline{GF}(p^k). \quad (28)$$

Пусть функции $p^{q_v n}$ имеют период $M_1/p^k - 1$, тогда на основании (28) $y[n]$ периодична с периодом

$$N_1 = H \cdot O \cdot K(M, M_1).$$

Если M и M_1 простые, то $N_1 = MM_1$.

В формуле (28) первое слагаемое соответствует вынужденному колебанию, а второе—собственному колебанию ОЛПМ. Таким образом, пользуясь формулами, приведенными выше, можно довольно просто вычислить процессы в ОЛПМ при определенных классах периодических воздействий.

Замечание: Развитые здесь понятия и представления позволяют также построить многие задачи анализа и синтеза ОЛПМ наподобие задач линейных импульсных систем [4] линейных последовательностных машин [2, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фараджев Р. Г. „Автоматика и телемеханика“, т. 27 № 5, 1966.
2. Ципкин Я. З. и Фараджев Р. Г. „ДАН СССР“, т. 166, № 3, 1966.
3. Виноградов И. М. Введение в теорию чисел. Изд-во „Наука“, 1966.
4. Ципкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., 1963.
5. Stern T. E., Friedland. Linear Modular Sequential circuits Generalized, IRE Trans. on Circuit Theory, vol. 13, № 1, 1961.
6. Фараджев Р. Г. „Изв. АН СССР, техн. кибернетика“, № 5, 1965.

УДК. 621. 315. 592. 2: 546. 23

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Н. И. ИБРАГИМОВ, Ш. В. МАМЕДОВ,
З. М. АБУТАЛЫБОВА

О ПРОИСХОЖДЕНИИ ЛИНИИ ЭПР И ВЛИЯНИИ ПРИМЕСЕЙ TI И Mn НА ОБРАЗОВАНИЕ СОСТОЯНИЙ С ПЕРЕНОСОМ ЗАРЯДА В СЕЛЕНЕ

Целью настоящей работы являлось получение дальнейшей информации о донорно-акцепторном взаимодействии в селене [1, 2] и выявление роли донорной примеси в этом процессе. Исходным материалом служил аморфный порошкообразный селен 99,9999% чистоты, который расплавляли при 250°C (30 мин) в вакуированных ($p < 10^{-4}$ мм Hg) кварцевых ампулах, кристаллизовали при 215°C (30 час) и крошили в яшмовой ступке (размер зерна ~50 мк). Эта процедура, называемая циклом обработки, существенно изменяет свойства материала [2]. Изготавливалось три серии образцов: А—из исходного аморфного порошка; В—материала, прошедшего один цикл обработки; С—прошедшего два цикла и поэтапную термообработку в течение двух часов при $T_{обр} = 200 \div 450^\circ\text{C}$. Каждая серия состояла из контрольных образцов и образцов, содержащих различные атомные проценты марганца и таллия до 0,8%. Все образцы подвергались термообработке в течение двух часов в интервале $T_{обр} = 200 \div 800^\circ\text{C}$; спектр ЭПР изучался при комнатной температуре после каждого этапа термообработки.

Вне зависимости от предыстории исходного селена, количества и сорта примесей, характера термообработки вначале наблюдается ЭПР-сигнал с $g = 2,0035 \pm 0,0005$ и $\Delta H_m = 5,5 \pm 0,5$ э (различаются они только по интенсивности). Типичные кривые зависимости интенсивности $I/I_{ст}$ от $T_{обр}$ и содержания примеси показаны на рис. 1 и 2. Нетрудно заметить, что характер изменения $I/I_{ст}$ от $T_{обр}$ для всех образцов одинаков — интенсивность сигнала проходит через максимум при определенной T_m и падает до нуля при $T_{обр} \geq 600^\circ\text{C}$.

Парамагнетизм селена обусловлен образованием комплексов с переносом заряда (КПЗ) в результате взаимодействия акцепторной молекулы O_2 с концом цепи селена. При затягивании электронного облака конца цепи селена на молекулярную орбиту акцептора возникает диполь, положительный полюс которого находится на конце цепи, а отрицательный — на молекуле акцептора. В сущности можно было бы ожидать возникновения двух линий поглощения: от положительной и отрицательной компоненты комплекса, так как трудно предположить полную идентичность линий ЭПР центров разного знака.

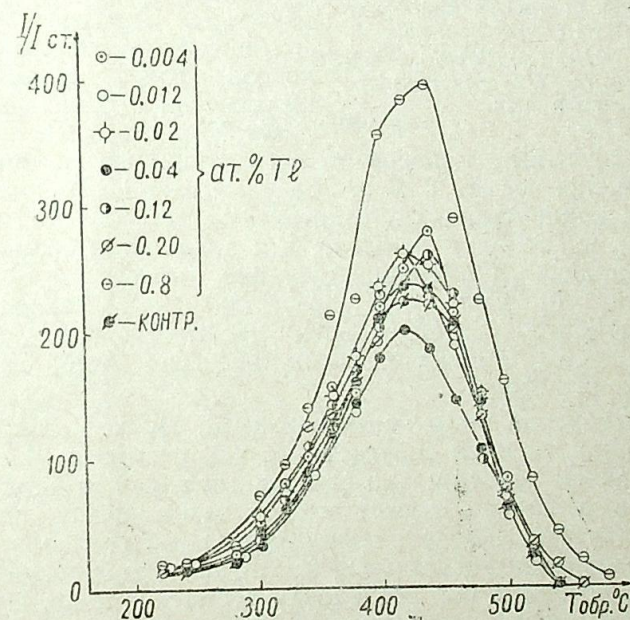
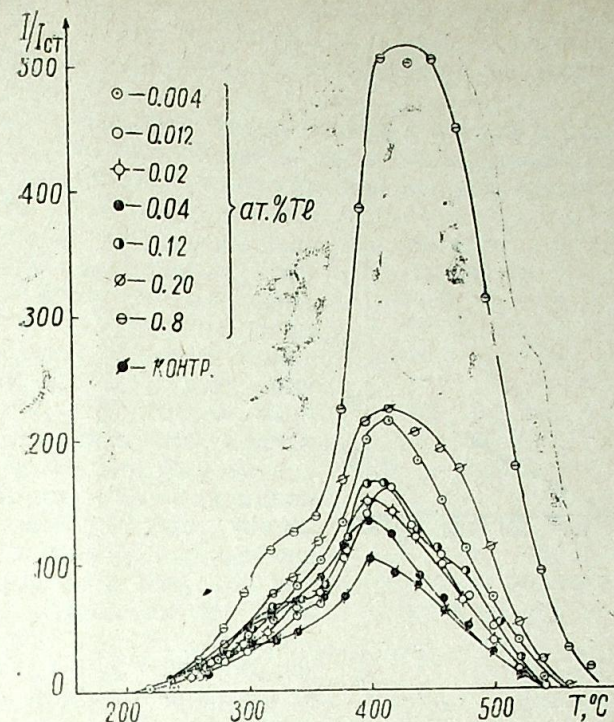


Рис. 1 и 2. Зависимость интенсивности ЭПР сигнала в образцах серии А (рис. 1) и В (рис. 2) с различным ат. % TI от температуры термообработки ($t = 2$ час)

Однако даже при замене O_2 на J_2 в селене наблюдается одна и та же линия. Из этого можно заключить, что ЭПР в селене обусловлен положительной компонентой КПЗ. Вероятно, из-за сильной спин-орбитальной связи (например, для йода $\lambda \approx -5060 \text{ см}^{-1}$ [3]) сигнал от отрицательной компоненты КПЗ уширяется и наблюдать его невозможно.

Из близости g селена к g_e свободного электрона можно предположить, что положительная дырка делокализована по всей цепи селена (под положительной дыркой подразумевается величина $+\delta$ [2]).

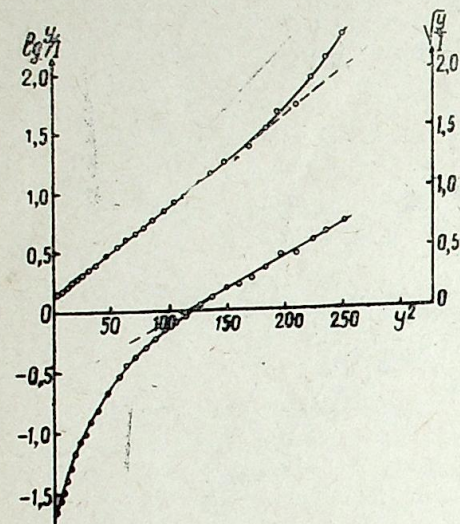


Рис. 3 Анализ линии поглощения в селене методом линейных анаморфоз. Верхняя кривая построена в координатах $\lg y/I = f(y^2)$ (Лоренцова форма), а нижняя в $\sqrt{y/I} = f(y^2)$ (Гауссова форма); $y = H - H_m$, где H_m — резонансное значение поля.

рация парамагнитных центров и мала ($\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$), ширина линии ЭПР оказывается все же $5 \div 6$ э. Это указывает на то, что даже при столь малых концентрациях парамагнитных центров их образование, по-видимому, происходит локально, что приводит к большой локальной концентрации (обменное сужение может иметь место при концентрации $\geq 10^{20} \text{ см}^{-3}$ [5]). Возрастание интенсивности с дальнейшей термообработкой обусловлено увеличением в общем объеме образца размеров и количества парамагнитных областей с повышенной локальной концентрацией.

Путем измерений было установлено [6, 7], что аморфный селен вплоть до точки кипения обладает высокой вязкостью, которая обусловлена наличием относительно стабильных цепей в жидком селене. Для аморфного селена существование таких цепей подтверждено рентгенографически [8]. По мнению Кребса [9], только в начале процесса кристаллизации развиваются маленькие упорядоченные области (мицеллы), в то время как исследование Рихтера и др. [10] показало, что в аморфном селене имеется статистическое распределение участков с параллельным и беспорядочным расположением цепей. Структура аморфного селена близка к структуре кристаллического; процесс кристаллизации заключается в переходе от статистического и разрыхленного параллельного расположения цепочек в аморфном состоянии к строго периодическому распределению в кристалле. Таким образом

многие авторы предполагают существование цепей в аморфном селене, но об их конфигурации сведений мало. Структура аморфного селена весьма сложна, многообразна и до конца не изучена.

Результаты исследований ЭПР показывают, что в процессе охлаждения жидкого селена, по-видимому, в нем спонтанно возникают совокупность которых образует определенную надмолекулярную структуру. Минимальный размер таких образований определяется самой природой селена как полимерного материала. При благоприятных условиях эти спонтанные образования могут объединяться в более крупные. Их размер зависит от многих факторов: предыстории, чистоты, режима термообработки и т. д. и может быть изменен в достаточно широких пределах. Примеси, связываясь с концами цепей, ограничивают эти области. Только при таком рассмотрении возможны большие локальные концентрации парамагнитных центров и их неравномерное распределение в селене.

Допустим, размер надмолекулярных образований равен d , а площадь, занимаемая концом цепи селена, порядка a^2 (a — постоянная решетки). Тогда на поверхности $S = 2d^2$, перпендикулярной цепям в надмолекулярных образованиях будет $2d^2/a^2$ концов, способных участвовать в донорно-акцепторном взаимодействии, носящем активационный характер (поскольку каждая цепь имеет два конца, то появляется множитель 2). Число надмолекулярных образований в 1 см^3 будет $n = 1/d^3$. При заданной $T_{обp}$ в каждом из них может возникать $2 \frac{d^2}{a^2} \exp(-\Delta E/kT_{обp})$ парамагнитных центров. (Необходимо отметить, что энергия активации образования КПЗ ΔE характеризует скорость изменения концентрации парамагнитных центров в зависимости от температуры термообработки). Умножив эту величину на $1/d^3$, получим искомую среднюю концентрацию в образце:

$$N_{cp} = \frac{2}{a^2 d} \cdot \exp(-\Delta E/kT_{обp}); \quad (1)$$

$a^2 d = v$ — объем одной молекулярной цепи.

Для большей наглядности заметим, что

$$N_{cp} = \frac{S}{V} \cdot N_{лок} \cdot \exp(-\Delta E/kT_{обp}), \quad (2)$$

где $N_{лок} = 1/a^2 l$ — локальная концентрация парамагнитных частиц, l — расстояние между акцепторной молекулой и концом цепи, S/V — отношение поверхности к объему надмолекулярного образования. Это соотношение достаточно удовлетворительно отражает процесс образования парамагнитных центров в селене — активационный характер процесса и роль длины цепи.

В ряде случаев образуются КПЗ двух типов с различными ΔE [2]. Это можно представить двумя членами:

$$N_{cp} = \frac{2}{v_1} \exp(-\Delta E_1/kT_{обp}) + \frac{2}{v^2} \exp(-\Delta E_{II}/kT_{обp}); \quad (3)$$

$$\Delta E_I < \Delta E_{II}.$$

На практике обычно имеют дело с интенсивностью сигнала, которая пропорциональна концентрации [11]:

$$N_{cp} = N_0 \frac{(\Delta H_m)^2 I}{(\Delta H_0)^2 \cdot I_0} = 10^{14} \cdot I \text{ см}^{-3}.$$

Поскольку форма и ΔH_m спектра ЭПР селена и ДФПГ близки, мы вправе использовать в качестве стандарта ДФПГ.

Из зависимости $\lg I/I_{ст} = f\left(\frac{10^3}{T_{обр}}\right)$ мы определили энергию активации КПЗ, а затем по формуле (3) оценили τ_1 и τ_2 . Оказалось, что для селена с 0,03 мол % J_2 средняя длина цепи, образующей КПЗ I типа $\sim 10^{-3}$ см, а КПЗ II типа $\sim 10^{-4}$ см. Начиная с $T_{обр} \approx 300^\circ\text{C}$, длинные цепи интенсивно укорачиваются почти на порядок. Несмотря на это, энергия активации образования КПЗ изменяется мало (всего на 0,1 эв), что свидетельствует о незначительном изменении длины цепи ионизации цепей селена (цепь остается достаточно длинной).

Таким образом зависимость концентрации парамагнитных центров от $T_{обр}$ для селена с 0,03 мол % J_2 описывается уравнением $N_{cp} = 10^{18} \cdot \exp\left(-\frac{0,21 \text{ эв}}{k T_{обр}}\right) + 10^{19} \cdot \exp\left(-\frac{0,31 \text{ эв}}{k T_{обр}}\right)$.

При 300°C вклад от обоих членов уравнения одинаков, при дальнейшем повышении $T_{обр}$ доминирует второй член. Такие же соотношения можно получить для селена с другим содержанием примесей. Так, для селена с 0,04 ат % TI (образцы серии А), где наблюдается минимум энергии активации образования КПЗ, такое соотношение имеет вид $N_{cp} = 10^{19} \cdot \exp\left(-\frac{0,39 \text{ эв}}{k T_{обр}}\right)$.

В селене с примесью марганца наблюдается два сигнала (рис. 4): узкий, характерный для селена ($g=2,0035$; $\Delta H_m=5,5$ эв) и широкий от MnSe ($g=2,00$; $\Delta H_m=180$ эв). Широкий сигнал растет по интенсивности до $T_{обр} \approx 600^\circ\text{C}$, а затем претерпевает изменения по ширине и интенсивности. Поведение широкого сигнала с изменением $T_{обр}$ достаточно подробно рассматривалось ранее [12]. Возникновение линии MnSe в начале термообработки свидетельствует о взаимодействии определенной доли введенной примеси с селеном, но до $T_{обр} < 500^\circ\text{C}$ нет признаков уширения линии MnSe за счет образования MnO. Следова-

Рис. 4. Спектр ЭПР в селене с примесью марганца. Широкий сигнал принадлежит MnSe, узкий — Se.

тельно, заметное взаимодействие донорной и акцепторной примеси может иметь место при $T_{обр} > 500^\circ\text{C}$.

При введении примеси таллия и марганца в образцах серии А наблюдается КПЗ только II типа, в то время как в образцах серий В и С образуются КПЗ I и II типов с $\Delta E_I \approx 0,1$ эв и $\Delta E_{II} \approx 0,4 \div 0,5$ эв, вне зависимости от концентрации примеси. Это означает, что примесь действует по-разному на материал с различной предисторией. Так, в исходном материале (серия А) таллий, по-видимому, инициирует интенсивный разрыв колец и длинных цепей на более короткие и способствует формированию таких надмолекулярных образований, которые приводят к КПЗ только II типа, иными словами, селен с примесью таллия состоит из совокупности мелкодисперсных образований. Исходя из такого представления, можно понять, почему таллий ускоряет процесс кристаллизации селена. Что касается образцов серий В и С, то информация о длинах цепей, вносимая предварительным циклом обработки, заметно ослабляет действие примеси.

Как уже сообщалось [2], такая информация сохраняется при последующей кристаллизации и термообработке при $T_{обр} < T_m$. Под заданием определенного размера надмолекулярных образований (длин цепей). Повторением циклов обработки удается значительно увеличить интенсивность сигнала. Так, в образцах серии А интенсивность $I/I_{ст}$ равна 100, в серии В 230, а в серии С 850; для таких же образцов с 0,02 ат % TI величины $I_m/I_{ст}$ достигают 150, 260, 2400, соответственно. Максимальная концентрация активного кислорода, вносимого в селен повторением циклов обработки (при $T_{обр} < T_m$), достигает 10^{17} см $^{-3}$. Попытка дальнейшего увеличения содержания активного кислорода не приводит к успеху. Характерно, что максимальная концентрация носителей в селене $< 10^{17}$ см $^{-3}$. Возрастание интенсивности сигнала с циклом обработки является непосредственным доказательством увеличения отношения поверхности к объему (S/V), т. е. уменьшения размеров надмолекулярных образований.

В самом деле, в процессе крошения увеличивается активная поверхность вещества и на вновь образованных концах цепей адсорбируется примесь. При термообработке ($T_{обр} < 500^\circ\text{C}$) происходит донорно-акцепторное взаимодействие между концами цепи и примесью — поверхность фиксируется. Вследствие этого формирование надмолекулярных образований происходит так, что более или менее сохраняется заданная «структура». При $T_{обр} > 500^\circ\text{C}$ с одной стороны разрушается цепочечная структура селена (в первую очередь надмолекулярная), а с другой из-за химического взаимодействия активность донорных и акцепторных примесей сводится на нет, в результате разрушается накопленная в материале информация. Думается, обескислороживание селена в этом и заключается, причем последующее удаление окислов необязательно, так как они электронейтральны. К сожалению, в большинстве работ не указывается температура, при которой вводилась примесь, в то время как это очень важно. Значительные расхождения экспериментальных данных по селену, вероятно, обусловлены именно различием в режиме термообработки.

Сохранение параметров ЭПР-сигнала при переходе от аморфной к кристаллической модификации указывает на то, что в процессе кристаллизации надмолекулярная структура не претерпевает существенных изменений. По-видимому, в начале происходит полное упорядочение цепей в надмолекулярных образованиях, которые постепенно превращаются в зерна. Как известно, при сферолитической кристаллизации основную роль играет ориентация, а не рост зерен. Оценка размера зерна по микрофотографиям сферолитического роста [13] дает величину $\sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ см, что достаточно близко к полученному нами размеру надмолекулярных образований в аморфном селене.

На рис. 5 представлена зависимость ΔE_{II} от концентрации таллия. Как видно, при 0,04 ат % TI наблюдается минимум энергии активации образования КПЗ. Если принять во внимание наличие такого же минимума в образцах с 0,03 мол % J_2 [2], а также указание многих авторов на экстремальное изменение свойств селена при концентрации примеси $\sim 0,02 \div 0,05$ ат %, то можно предположить, что возникновение экстремальности обусловлено существованием в селене надмолекулярных образований размером $\sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ см. Если считать, что молекулярных образований достаточно до покрытия поверхности такого образования мономолекулярным слоем [14], то экстремальность будет обнаруживаться именно в интервале концентраций $\sim 0,02 \div 0,05$ ат %, причем в зависимости от природы примеси свойства всего материала будут изменяться.

С введением таллия интенсивность вначале несколько уменьшает-

ся, проходит через минимум при 0,04 ат% Тl, а затем монотонно растет с увеличением концентрации примеси (рис. 5). Казалось бы, способствуя формированию надмолекулярных образований меньших размеров, таллий даже в незначительных количествах должен был привести к увеличению интенсивности ЭПР-поглощения, однако из-за его взаимодействия с концами цепей и частично с акцептором затрудняется образование КПЗ—интенсивность падает. Это продолжается до концентрации 0,04 ат% Тl, при которой формируются надмолекулярные образования минимальных размеров. С дальнейшим увеличением концентрации вероятность отрыва таллием атомов селена из цепи возрастает (по-видимому, образуется TlSe). Оставшиеся свободными концы цепей могут, в свою очередь, образовывать новые КПЗ. Возможно, этим и обуславливается последующее увеличение интенсивности ЭПР-сигнала при концентрациях >0,04 ат% Тl.

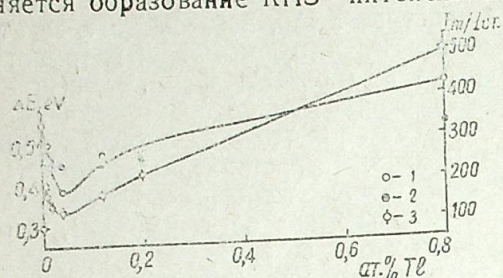


Рис. 5. Зависимость энергии активации образования состояний с переносом заряда и интенсивности сигнала от содержания примесей Тl:

1—ΔE в образцах серии А; 2—ΔE в образцах серии В; 3—интенсивность в образцах серии А.

Рассмотрим перенос носителя с точки зрения образования КПЗ в селене. Увеличение проводимости селена с примесями галогенов и кислорода, по нашему мнению, происходит из-за образования состояний с переносом заряда. При этом увеличивается как подвижность, так и концентрация носителей, причем доминирующее значение имеет повышение подвижности. Проводимость может осуществляться из-за перекрытия электронных облаков двух соседних состояний с переносом заряда, в результате чего произойдет переход носителя с одной цепи на другую. Цепи селена с КПЗ на концах совершают тепловые колебания, в общем-то не приводящие к перекрытию. Однако энергия системы может сконцентрироваться на концевых молекулах, что приведет к перекрытию. Вероятность этого события пропорциональна $\exp\left(-\frac{\Delta E_a}{kT}\right)$. Возникновение барьера между цепями, вероятно, связано с существованием определенной энергии активации акта перекрытия ΔE.

Такое представление является развитием предложенного Гобрехтом и Таусендом [14] механизма туннелирования носителя с одной цепи на другую. Элементарный акт туннелирования и его эффективность для данного сорта материала зависят в основном от температуры образца; приложение электрического поля приводит к направленности туннелирования. Как правильно отмечают авторы, введение галогенов может уменьшить высоту потенциального барьера между цепями. Нам кажется, любая акцепторная по отношению к селеновой цепи молекула, образуя состояния с переносом заряда, увеличивает вероятность рождения носителя и его перехода от одной цепи к другой. В самом деле, введение в селен 99,9999% чистоты кислорода и йода увеличивает проводимость материала, причем это увеличение коррелирует с возрастанием интенсивности ЭПР-сигнала. Выше уже отмечалось, что в селене с примесью таллия интенсивность ЭПР-сигнала вначале уменьшается с повышением концентрации примеси, проходит через минимум при 0,04 ат% Тl, а затем монотонно растет. Изменение проводимости селена с примесью таллия носит такой же характер.

Изучение диффузии в электрическом поле показало, что таллий легко отдает три внешних электрона на связь с ближайшим окружением, диффундируя в селене в трехкратно ионизованном состоянии [15]. Вероятно, таллий возмущает область, включающую несколько цепей, что затрудняет образование КПЗ и, следовательно, рождение таллий селене имеется барьер только на конце цепи, то в образцах с примесью из-за разрыва цепи в месте нахождения таллия возникает барьер, высота которого значительно больше. Некоторым подтверждением этого может служить измерение температурной зависимости подвижности носителей в селене, содержащем таллий [14]. Оказывается, примеси таллия значительно уменьшают подвижность, а энергия активации подвижности возрастает, достигая максимального значения 1,8 эВ при 0,07 ат% Тl, а затем падает с дальнейшим увеличением концентрации примеси.

Как уже отмечалось, концентрация парамагнитных центров в аморфном и кристаллическом селене одинакова. Если состояния с переносом заряда не только облегчают переход носителя от одной цепи на другую, но и являются поставщиками носителей, то толкуется, что для данного сорта материала концентрация носителей в обеих модификациях селена одинаковая и находится в пределах $10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Остается единственная возможность для объяснения значительного отличия проводимостей аморфного и кристаллического материала—подвижность в аморфном селене меньше в $10^5 \div 10^7$ раз. Причина такой малой подвижности не совсем понятна. Возможно, это результат определенной неупорядоченности цепей в отдельных надмолекулярных образованиях. В поликристаллическом же селене имеет место не только упорядоченность цепей в отдельных микрокристалликах, но, по-видимому, тенденция к упорядоченности микрокристалликов и относительно друг друга [14].

В заключение отметим, что многие свойства селена могут быть объяснены, если принять во внимание существование надмолекулярных образований и состояний с переносом заряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdullaev G. B., Ibragimov N. I., Mamedov Sh. V. and Zhuvartiy T. Ch. Phys. Stat. sol., 16 K113 (1966).
2. Abdullaev G. B., Ibragimov N. I., Mamedov Sh. V. Proc. of the first Int. Symp. Phys. of Selenium and Tellurium, Perg. press, 1968.
3. McClure D. S. J. Chem. phys., 17, 905 (1949).
4. Тихомирова Н. Н., Воеводский В. В. „Оптика и спектроскопия“, 7, 829 (1959).
5. Блюменфельд Л. А., Бендерский В. А., Любченко Л. С. и Стунжас П. А. ЖСХ, 8, 5, 829 (1967).
6. Dobinski S., Weselowski J. Bull. int. acad. Polon. Sci. Letters SeA., (1935); Bull. Int. Acad. Polon. Sci., class Sci., Math., Nat., 1937 (A).
7. Халилов Х. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 6, 67, 1959.
8. Prins J. A., Dekeyser W., Physika, 4, 900 (1937).
9. Кребс Г. Сб. „Полупроводниковые материалы“, М., ИЛ, 323 (1954).
10. Von Richter H., Kulcke W. and Sprecht H. Zs. Naturf., 7a, 511—532 (1952).
11. Блюменфельд Л. А., Воеводский В. В., Семенов А. П. Применение ЭПР в химии. И. ИСО АН СССР (1962).
12. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Джуварты Т. Ч. „АН Азерб. ССР“, 21, 4, 13 (1965).
13. Theis W. Naturwissenschaften, 44, 10 (1957).
14. Gobrecht H. and Tausend A. Recent Adv. Selenium Phys., Perg. Press (1965).
15. Ибрагимов Н. И. и Кулиев А. А. ФТТ, 3, 11, 3330 (1961).

Н. Б. Абдуллаев, Н. И. Ибраһимов, Ш. В. Мәммәдов,
З. М. Абуталыбова

Селендә электрон парамагнит удулма хәттинин мәншәји
вә жүккөчүрмә нәтичәсиндә әмәлә кәлән һалын јаранмасына
Т1 вә Мп ашгарларынын тә'сири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Т1 вә Мп ашгарларынын селендә донор-аксептор гар-
шылыгы тә'сир просесинә тә'сири өјрәнилмишдир. Хәтти анаморфоз-
лар үсулу илә электрон парамагнит резонанс удулма хәттинин тәһ-
лили верилмиш вә онун мәншәји музакирә едилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, парамагнит мәркәзләрин јаранмасы локал
характерли олдуғундан, онлар селендә гејри-бәрабәр пәјланмышдыр.
Көстәрилмишдир ки, аморф селендә молекуллар чохлағундан ибарәт
олан гурулушлар вардыр ки, бунларын ән кичик өлчүләри селенин
полимер тәбиәти илә мүәјјән едилди. Јүккөчүрмә нәтичәсиндә әмәлә
кәлән һалын јаранмасы просесини кифәјәт гәдәр јакшы әкс етдирән

$$N_{\text{орта}} = \frac{S}{V} \cdot N_{\text{лнк}} \cdot \exp(-\Delta E/kT_{\text{II}})$$

јарымемпирик дүстуру верилмишдир. Ашгарларын консентрасијасынын
0,02—0,05 ат. %-дә селенин хассәләринин екстремал дәјишмәси сәбә-
би музакирә едилди.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1968, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 6.

Ч. О. КАДЖАР, А. А. АББАСОВ, Л. М. ИМАНОВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР И СТРУКТУРА МОЛЕКУЛЫ АЛЛИЛОВОГО СПИРТА

В процессе исследования спиртов и меркаптанов на радиоспектро-
метре с электрической молекулярной модуляцией в диапазоне 16,0—
32,0 кМгц при температуре около -30°C и давлении 10^{-2} мм рт. ст.
изучался вращательный спектр молекулы аллилового спирта (табл. 1).
Структура этой молекулы до сих пор не изучена, хотя и представляет
интерес как с точки зрения
наличия связей типа SP^2 —
 $—SP^2—SP^3$, так и возмож-
ности существования несе-
кольких поворотных изомер-
ов.

На рисунке показана
одна из вероятных конфор-
маций молекулы, у которой
все тяжелые атомы и атом
водорода гидроксильной
группы находятся в плос-
кости симметрии. Если эту
конформацию обозначить
через цис-транс (180° —

$—CH_2OH$ и $O^{\circ}-OH$), то при вращении групп CH_2OH и OH относи-
тельно осей $C—C$ и $C—O$, приблизительно через каждые 120° , можно
ожидать появления конформаций цис-гош (180° , 120°), гош-транс (60° ,
 0°), гош-гош I (60° , 120°) и гош-гош II (60° , 240°).

Для ориентировочного расчета спектра всех конформаций струк-
турные параметры групп $CH_2—CH$ были взяты такими, как у 3-фтор-
пропена [1], а группы CH_2OH , как у этилового спирта [2]. При расчете
составляющих дипольного момента по главным осям считалось, что
величина полного дипольного момента молекулы такая же, как у
этилового спирта: 1,58 D [3], а сам он образуется только группой $CONH$
и составляет с осью $C—O$ угол $50^{\circ}20'$ (табл. 2).

В исследуемый диапазон частот попадают переходы с низким I
 R -, P - и Q - ветвей всех конформаций, за исключением цис-транс.
Идентификацию переходов одной конформации молекулы удалось
провести за счет присутствия в диапазоне 21 кМгц серии линий с
характерным для Q -ветвей эффектом Штарка и смещением штарков-
ских компонент в сторону меньших частот, что согласно предвари-
тельному расчету соответствует переходам гош-формы молекулы.

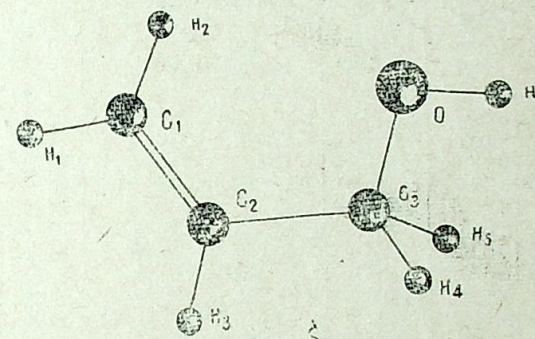


Рис.

Таблица 1

Частоты (Мгц) и относительные интенсивности линий молекулы
аллилового спирта

Частота	Интенс.	Частота	Интенс.	Частота	Интенс.	Частота	Интенс.
1	2	3	4	5	6	7	8
16 000	слаб.	17 008,0	"	18 673	средн.	19 880	слаб.
16 027	сильн.	17 055,7	"	18 681	слаб.	19 888	средн.
16 039	слаб.	17 091	"	18 688	"	19 910	слаб.
16 052	"	17 101	"	18 757	"	19 921	"
11 057	"	17 103,2	"	18 763	"	19 924	"
16 071	"	17 112,5	средн.	18 821,8	средн.	19 949	"
16 080	"	17 148,2	слаб.	18 851	сильн.	20 016,7	"
16 088	"	17 173,1	средн.	18 860	слаб.	20 039	средн.
16 093	средн.	17 186	слаб.	18 867	средн.	20 041	"
16 139	слаб.	17 198,7	"	18 892,2	"	20 060,8	сильн.
16 144	"	17 241,6	"	18 898	слаб.	20 156	средн.
16 154	"	17 261,1	средн.	18 904	средн.	20 163	"
16 165,9	сильн.	17 270,3	слаб.	18 932	слаб.	20 179	"
16 187,2	средн.	17 289	"	18 953	"	20 188	"
16 194	слаб.	17 299	"	18 965	"	20 201	"
16 200	"	17 308	"	18 980	"	20 215,1	слаб.
16 203	средн.	17 319,6	средн.	19 004	средн.	20 219	"
16 278,8	"	17 334,4	"	19 042	слаб.	20 226	средн.
16 434	сильн.	17 356	слаб.	19 046	"	20 228	сильн.
16 506,0	средн.	17 375	"	19 049	"	20 246,4	слаб.
16 509,2	сильн.	17 385	"	19 184	средн.	20 250,0	"
16 527,5	средн.	17 405,5	средн.	19 242	"	20 261	сильн.
16 531	слаб.	17 412,8	"	19 249	"	20 310	слаб.
16 540	"	17 421	"	19 252	"	20 335,7	средн.
16 542	"	17 438	слаб.	19 257,5	сильн.	20 338	средн.
16 558,9	сильн.	17 451	"	19 284	слаб.	20 351	сильн.
16 580	слаб.	17 470	"	19 318,4	"	20 359	слаб.
16 587	"	17 476	"	19 326	"	20 368,9	"
16 590	средн.	17 484	"	19 349	слаб.	20 373,3	"
16 591	слаб.	17 588	"	19 352	"	20 376	"
16 600	"	17 606	"	19 363	"	20 384	"
16 608	"	17 656	"	19 471	"	20 409	"
16 621,5	"	17 680	сильн.	19 482	"	20 428	"
16 649	средн.	17 703	слаб.	19 486	"	20 435	сильн.
16 650	слаб.	17 752	"	19 492	"	20 440	средн.
16 674,7	"	17 817	"	19 495	"	20 453	слаб.
16 685	"	17 820	"	19 502	"	20 462	сильн.
16 687,2	средн.	18 825	"	19 512	"	20 483	слаб.
16 689	"	17 850,8	средн.	19 524	"	20 485	слаб.
16 717	слаб.	17 940,5	"	19 538	сильн.	20 487	средн.
16 725	слаб.	17 981	слаб.	19 570	слаб.	20 510	"
16 730	"	17 988	"	19 581	"	20 513	"
16 746	"	18 019	"	19 585	"	20 516	"
16 749	"	18 123	"	19 598	"	20 540	слаб.
16 753,0	сильн.	18 183	"	19 607	слаб.	20 556	средн.
16 830	средн.	18 192	"	19 615	"	20 562	слаб.
16 846	слаб.	18 196	"	19 634	"	20 564,6	"
16 848	"	18 213	"	19 643	средн.	20 568 1	средн.
16 857,3	средн.	18 220	средн.	19 656,6	"	20 576,6	"
16 870	"	18 141	"	19 683	"	20 592	"
16 890	"	18 295	слаб.	19 703,2	"	20 603	"
16 895	слаб.	18 352,3	сильн.	19 708,9	слаб.	20 608,1	слаб.
16 898	"	18 404	средн.	19 730	"	20 612,4	средн.
16 900	"	18 432,2	"	19 736	"	22 642,4	"
16 902	сильн.	18 440	слаб.	19 741	"	20 647	слаб.
16 903	слаб.	18 446	"	19 747	"	20 658,4	сильн.
16 920	"	18 503	"	19 788	сильн.	20 664,0	средн.
16 935	средн.	18 547	"	19 803	"	20 671	слаб.
16 950	"	18 586	"	19 817	"	20 674	"
16 955	"	18 588	средн.	19 834	"	20 681	"
16 938	слаб.	18 620	"	19 862	средн.	20 719	"
16 940	"	18 644	"	19 870	"	"	"

Продолжения

1	2	3	4	5	6	7	8
20 722	слаб.	21 776 2	средн.	23 895	средн.	25 029	слаб.
20 743	"	21 823,4	слаб.	23 904	слаб.	25 034	"
20 778,4	средн.	21 906,7	сильн.	23 915	"	25 045	"
20 782,1	слаб.	21 958,2	"	23 994,6	средн.	25 063	"
20 801	"	21 976	"	24 004,3	"	25 065	"
20 805	средн.	21 022	слаб.	24 023	слаб.	25 075	"
20 821	слаб.	22 067,7	средн.	24 031	сильн.	25 167	сильн.
20 834,4	"	22 086	слаб.	24 039	средн.	25 181	слаб.
20 837,9	"	22 100	"	24 059	"	25 183	"
20 841,8	средн.	22 109	"	24 064	слаб.	25 257	"
20 844,8	"	22 141	"	24 080	средн.	25 267	"
20 854	слаб.	22 221,4	средн.	24 124	слаб.	25 332	средн.
20 869,6	средн.	22 245	слаб.	24 129	средн.	25 338	слаб.
20 897	слаб.	22 268	"	24 156	слаб.	25 372	слаб.
20 903,9	сильн.	22 283	"	24 171	"	25 381	средн.
20 937,3	слаб.	22 285	"	24 207	"	25 400	слаб.
20 948	"	22 320	"	24 212	"	25 488	"
20 959	"	22 333,8	"	24 216	"	25 511,7	средн.
20 014	"	22 339,0	"	24 236	"	25 520	слаб.
21 021	средн.	22 362,3	"	24 242	"	25 583,5	"
21 032,6	"	22 385	"	24 257	средн.	25 618	"
21 052,4	"	22 406	сильн.	24 263	слаб.	25 620	"
21 054,2	"	22 481	слаб.	24 268	средн.	25 624	"
21 060,2	"	22 511	"	24 275	слаб.	25 643,1	"
21 064	"	22 517	"	24 282	"	25 652,9	средн.
21 065	"	22 518	"	24 301	"	25 655,8	"
21 074	"	22 525	слаб.	24 323	сильн.	25 657,9	"
21 102	"	22 555,0	средн.	24 325	средн.	25 720,3	"
21 109	"	22 603	слаб.	24 369	слаб.	25 723,3	слаб.
21 113	"	22 629,1	средн.	24 381	сильн.	25 724,4	"
21 162	"	22 677	слаб.	24 392	"	25 733	"
21 173,9	слаб.	22 758,5	средн.	24 403	слаб.	25 735	"
21 177,8	"	22 770	слаб.	24 420	"	25 748	"
21 181	"	22 803	"	24 439	"	25 759	средн.
21 189,9	средн.	22 805	"	24 446	"	25 779,5	слаб.
21 205	слаб.	22 824	"	24 450	"	25 782,8	средн.
21 207	"	22 868,0	средн.	24 483	"	25 783,7	слаб.
21 215,1	"	22 898	слаб.	24 486	"	25 797,7	средн.
21 219,1	"	22 931	"	24 503	слаб.	25 840	слаб.
21 229,9	средн.	22 954 1	средн.	24 508	"	25 861,5	"
21 233,1	слаб.	22 958,6	"	24 513	"	25 918,5	"
21 268,4	"	23 000	слаб.	24 524	"	25 947	средн.
21 289,3	"	23 018	"	24 606	"	25 962	"
21 326,2	"	23 036	"	24 629 8	"	25 980	слаб.
21 335,5	слаб.	23 051	"	24 645	"	25 020	средн.
21 346,6	"	23 056	"	24 680	"	26 022	"
21 373 0	"	23 058	"	24 683	"	26 036	"
21 388,8	средн.	23 110	"	24 708	средн.	26 052	сильн.
21 392	"	23 125	средн.	24 770	"	26 068	средн.
21 413,6	"	23 127	"	24 775	"	26 080	слаб.
21 425	"	23 133	"	24 795	"	26 117	средн.
21 479,5	средн.	23 195	"	24 799	слаб.	26 143	"
21 483	слаб.	23 218	"	24 867	"	26 250	"
21 495	"	23 304	"	24 873	"	26 256	слаб.
21 510	"	23 336	"	24 881	"	26 261 3	сильн.
21 562	"	23 360	сильн.	24 885	"	26 273,2	средн.
21 595,7	средн.	23 413	слаб.	24 890	"	26 303,0	"
21 607,7	слаб.	23 421	сильн.	24 931	средн.	26 321	"
21 629,6	"	23 438,3	слаб.	24 950	сильн.	26 403,3	сильн.
21 717,0	"	23 518	"	24 952	слаб.	26 420	слаб.
21 738	4	23 700	"	24 957	"	25 423	"
21 761,1	"	23 737	"	25 007	"	26 443	"

1	2	3	4	5	6	7	8
26 501	"	27 657	слаб.	28 945	сильн.	30 387	"
26 506	"	27 701	средн.	28 963	слаб.	30 410	"
26 509	средн.	27 720	"	28 971	"	30 471	"
26 531,1	"	27 741	"	29 002	"	30 492	"
26 560	"	27 778	слаб.	29 008	"	30 498	"
26 581	слаб.	27 880	"	29 017	"	30 511	"
26 594	"	27 903	"	29 024	"	30 529	"
26 663	"	27 911	средн.	29 026	"	30 556	"
26 684	"	27 924	слаб.	29 032,9	средн.	30 580	средн.
26 691,7	средн.	27 942	"	29 053,3	"	30 610	сильн.
26 724	слаб.	27 944	"	29 062	слаб.	30 686	слаб.
26 736	"	27 991,3	"	29 071	"	30 693	средн.
26 742	"	28 013,8	средн.	29 086	слаб.	30 696	слаб.
26 748	"	28 017	слаб.	29 095	"	30 745	сильн.
26 757,7	средн.	28 018,9	средн.	29 111	средн.	30 820	слаб.
26 761	"	28 110	слаб.	29 120	слаб.	30 841	средн.
26 769	"	28 113	сильн.	29 129	средн.	30 853	сильн.
26 783	"	28 115	"	29 152	слаб.	30 863	средн.
26 796	"	28 140	слаб.	29 162	"	30 897	слаб.
26 855	слаб.	28 152	"	29 163	"	30 906	сильн.
26 860	"	28 194,3	сильн.	29 181,9	средн.	30 927	слаб.
26 890	"	28 239	слаб.	29 197	слаб.	30 933	"
26 895,8	средн.	28 241	"	29 261	"	30 967	"
26 903	слаб.	28 246	"	29 263	"	31 006	"
26 910	"	28 280	"	29 282	"	31 027	"
26 930	средн.	28 283,0	сильн.	29 300	"	31 092	"
26 938	"	28 337	слаб.	29 338	"	31 102	"
26 997	слаб.	28 339	"	29 347	"	31 109	"
27 038	"	28 341	"	29 360	средн.	31 120	средн.
27 060	"	28 385	"	29 367	"	31 132	сильн.
27 089,6	сильн.	28 387	"	29 376	слаб.	31 195	"
27 093	средн.	28 404,2	средн.	29 409	"	31 207	"
27 101	"	28 411	слаб.	29 457	"	31 247	"
27 104,9	"	28 431	"	29 471	сильн.	31 255	"
27 142	слаб.	28 446	"	29 520	слаб.	31 268	слаб.
27 171	"	28 458	средн.	29 528	сильн.	31 285	"
27 204,2	средн.	28 480	слаб.	29 603	слаб.	31 320	"
27 217,7	"	28 483	средн.	29 620	"	31 372	сильн.
27 248	"	28 486	"	29 625	"	31 383	слаб.
27 260	"	28 494	"	29 700	"	31 410	"
27 296	слаб.	28 525	слаб.	29 741	средн.	31 420	"
27 298	средн.	28 534	средн.	29 749	слаб.	31 429	"
27 307	"	28 594	сильн.	29 753	"	31 448	"
27 320	"	28 600	"	29 778	"	31 471	"
27 341	"	28 603	слаб.	29 781	"	31 179	"
27 355	"	28 620	"	29 808	"	31 500	"
27 360	"	28 626	"	29 812	"	31 507	"
27 440	"	28 654	"	29 820	"	31 550	сильн.
27 445	"	28 660	"	30 033	"	31 584	средн.
27 452	"	28 666	"	30 070	"	31 602	"
27 455	"	28 694,9	средн.	30 101	"	"	"
27 462	слаб.	28 698,7	"	30 108	сильн.	"	"
27 473	"	28 708,2	слаб.	30 138	слаб.	"	"
27 500	средн.	28 752,9	сильн.	30 175	средн.	"	"
27 508	"	28 778	слаб.	30 221,2	слаб.	"	"
27 512	"	28 845,2	средн.	30 228	средн.	"	"
27 517,2	"	28 860	"	30 249	слаб.	"	"
27 538,0	"	28 872	"	30 253	"	"	"
27 563	слаб.	28 886,9	"	30 264,8	средн.	"	"
27 576	"	28 895	"	30 303	слаб.	"	"
27 620	средн.	28 920	слаб.	30 340	"	"	"
27 640	"	28 931	средн.	30 381	"	"	"

Таблица 2
Вращательные постоянные, параметр асимметрии и составляющие
дипольного момента для возможных изомерных форм

	Цис-транс	Цис-гош	Гош-транс	Гош-гош I	Гош-гош II
A (Мгц)	16 802,5	23 206,5	26 947,3	25 329,7	25 434,2
B — "	5 960,7	5 584,0	4 184,8	4 283,3	4 326,3
C — "	4 525,8	4 689,1	4 079,2	4 156,3	4 230,5
μ_a (D)	—0,7663	—0,9033	—0,9908	—0,9880	—0,9911
μ_b — "	0,85	0,89	0,11	0,82	1,38
μ_c — "	1,33	0,40	1,52	0,50	0,08
μ_s — "	0	1,24	0,41	1,25	0,73

Таблица 3

Частоты (Мгц) идентифицированных переходов молекулы $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{OH}$

Переходы	Основное состояние		Возбужденное состояние	
	Измеренные	Рассчит. по эксп. A, B, C	Измеренные	Рассчит. по эксп. A, B, C
$1_{01}-1_{11}$	21 268,4	21 268,3	21 882,3	21 282,8
$2_{02}-2_{12}$	21 174,9	21 164,2	21 189,9	21 190,4
$3_{03}-3_{13}$	21 032,6	21 032,9	21 052,4	21 052,5
$4_{04}-4_{14}$	20 844,8	20 845,6	20 869,6	20 869,6
$5_{05}-5_{15}$	20 612,4	20 613,1	20 642,4	20 642,8
$6_{06}-6_{16}$	20 335,7	20 337,1	20 373,3	20 373,1
$7_{07}-7_{17}$	20 016,7	20 018,4	20 060,8	20 061,7
$8_{08}-8_{18}$	19 656,6	19 659,1	19 708,9	19 710,5
$9_{09}-9_{19}$	19 257,5	19 260,9	19 318,4	19 321,3
$10_{010}-10_{110}$	18 821,8	18 825,6	18 892,2	18 895,9
$11_{011}-11_{111}$	18 352,3	19 356,8	18 432,2	18 436,9
$12_{012}-12_{112}$	17 850,8	17 856,0	17 940,5	17 947,6
$13_{013}-13_{113}$	17 319,6	17 326,0	17 412,8	17 422,8
$14_{014}-14_{114}$	16 753,0	16 760,8	16 857,3	16 871,2
$15_{015}-15_{115}$	16 165,9	16 175,1	16 278,8	16 298,1
$2_{12}-3_{13}$	25 511,7	25 512,3	25 583,5	25 584,1
$2_{02}-3_{03}$	25 652,9	25 653,6	25 720,3	25 721,2
$2_{21}-3_{22}$	25 655,8	25 654,9	25 723,3	25 722,4
$2_{20}-3_{21}$	25 657,9	25 656,2	25 724,4	25 723,6
$2_{11}-3_{12}$	25 797,7	25 797,1	25 861,5	25 861,1

В табл. 3 приведены частоты идентифицированных переходов молекулы аллилового спирта. Для отнесения этих переходов к одной из возможных гош-форм молекулы необходимо было провести замещение атома водорода гидроксильной группы дейтерием и по методу Крайчмана найти его координаты. Такое замещение было произведено Марти и Карлом [4] и помогло нам связать эти переходы с поворотным изомером гош-гош II формы. Близость значений, найденных экспериментально, составляющих дипольного момента по измерениям смещений штарковских компонент переходов $2_{02}-2_{12}$, $3_{03}-3_{13}$ и $2_{12}-3_{13}$, которые оказались равными $\mu_a = 1,41$ D, $\mu_b = 0$, и $\mu_c = 0,67$ D, к расчетным подтверждает правильность такого предположения. Устойчивость этой формы молекулы указывает на возможность существования внутримолекулярного взаимодействия между гидроксильной группой и π -электронами.

В табл. 4 приведены вращательные постоянные и параметр асимметрии молекул $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{OH}$, $\text{CH}_2\text{CHCH}_2\text{OD}$ и $\text{CH}_2\text{CHCH}_2^{18}\text{OH}$, найденные экспериментально и рассчитанные по структурным параметрам возможной структуры.

Структурные параметры определялись следующим образом. Первоначально они задавались такими же, как в предварительном расчете, и вращением в небольших пределах групп рассчитанных враща- 60 и 240° добивались наилучшего приближения рассчитанных враща- тельных постоянных для этих трех молекул к эффективным. Затем изменяя какой-либо структурный параметр ($d(C_2-C_3)$, $\angle C_1C_2C_3$),

Т а б л и ц а 4

Вращательные постоянные и параметр асимметрии молекул CH_3CHCH_2OH , CH_3CHCH_2O и $CH_3CHCH_2^{18}OH$

	CH_3CHCH_2OH		CH_3CHCH_2OD [4]		$CH_3CHCH_2^{18}OH$ [4]	
	эксп.	рассчит.	эксп.	рассчит.	эксп.	рассчит.
A (Mzц)	25 592,5	25 434,2	23 804,6	23 720,5	25 339,3	25 169,7
B*	4 323,3	4 325,3	4 232,3	4 226,5	4 133,9	4 135,8
C*	4 228,3	4 230,5	4 129,7	4 146,9	4 043,2	4 048,2
τ	-0,9911	-0,9911	-0,9896	-0,9919	-0,9915	-0,9917

$\angle C_2C_3O$ и $\angle CON$), улучшающий это согласие, повторяем процедуру с поворотом групп, и так до максимального приближения. Из табл. 5 видно, что согласие получается вполне удовлетворительное. Полученные таким образом структурные параметры (табл. 4) весьма условны, но могут быть полезны при поисках изомерных форм молекулы и оцен-

Т а б л и ц а 5

Структурные параметры аллилового спирта

Принятые	Рассчитанные
$d(C_1-C_2) = 1,35 \text{ \AA}$	$d(C_2-C_3) = 1,50 \text{ \AA}$
$d(C_3-O) = 1,43 \text{ \AA}$	$\angle(C_1C_2C_3) = 124^\circ$
$d(C_1-H_1) = 1,09 \text{ \AA}$	$\angle CON = 102^\circ 30'$
$d(C_1-H_2) = 1,05 \text{ \AA}$	$\angle C_2C_3O = 110^\circ 10'$
$d(C_2-H_3) = 1,09 \text{ \AA}$	$\angle \varphi(-CH_2OH) = 56^\circ$
$d(C_3-H_{4,5}) = 1,10 \text{ \AA}$	$\angle \psi(-OH) = 246^\circ$
$d(O-H) = 0,97 \text{ \AA}$	
$\angle C_2C_1H_1 = 119^\circ 13'$	
$\angle C_2C_1H_2 = 121^\circ 31'$	
$\angle C_1C_2H_3 = 119^\circ 0'$	
$\angle C_2C_3H_{4,5} = 110^\circ 41'$	

ке межатомных расстояний и валентных углов, связывающих тяжелые атомы, так как погрешность при таком методе определения структуры для этих параметров будет, очевидно, почти на порядок меньше, чем для параметров связанных с атомами водорода.

Отношение интенсивности спектральных линий в основном и первом возбужденном колебательном состоянии измерялось с принятием необходимых мер для увеличения точности таких измерений [5] при $-30^\circ C$ по переходам $3_{03}-3_{13}$ и $2_{12}-2_{12}$. Усредненная по многократным измерениям величина отношения интенсивности в основном первом

возбужденном колебательном состоянии оказалась равной приблизительно двум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nigota E. J. chem. phys., 42, 2071 (1965).
2. Каджар Ч. О., Исаев И. Дж., Иманов Л. М. „Ж. структурной химии“, т. 9. № 3, 445 (1968)
3. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 4, 55 (1965).
4. Marty A. N. and Curl R. F. J. chem. phys., 46, 4176 (1968).
5. Эсбитт А. С. и Уилсон Е. В. „Приборы для научных исследований“, № 8 66 (1963).

Ч. О. Гачар, А. Э. Аббасов, Л. М. Иманов

Алил спирт молекулунун микродалгалы спектри

ХҮЛАСӘ

16,0÷32,0 кМГц тезлик дипазонунда алил спирти молекулунун спектри өйрәнилмишдир. Молекулун бир нечә Q вә R хәтләри уңунлашдырылмышдыр ки, бу да фырланма сабитләринин вә ассиметрија параметринин тәјин едилмәсинә имкан верир. Мүәјјән едилмишдир ки, бу фырланма сабитләри молекулун гош-гош изомер һалына аиддир. Бу изомер формасынын гурулуш параметрләри тәјин едилмишдир. $2_{02}-2_{12}$ вә $3_{03}-3_{13}$ кечидләриндән тапылмышдыр ки, дипол моментинин баш охлар үзрә тәшкиледичиләри $\mu_a = 1,41 D$, $\mu_b = 0$, $\mu_c = 0,67 D$ -дир.

Е. П. СВИРИНА, М. С. АЛИЕВА

ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В НИКЕЛЕВОМ ФЕРРИТЕ NiFe_2O_4

В настоящее время природа знака аномального коэффициента Холла в ферромагнитных материалах пока неясна. По этому вопросу в литературе [1,2] имеются противоречивые данные. Ранее [3] был измерен эффект Холла феррита NiFe_2O_4 и его удельное электросопротивление.

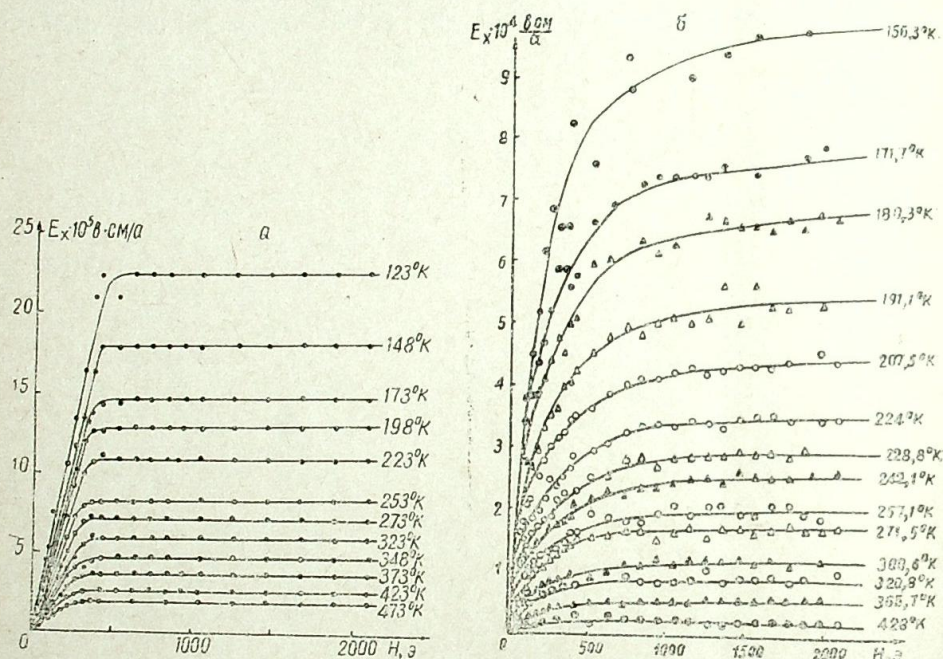


Рис. 1. Зависимость э.д.с. Холла от магнитного поля для различных температур:
а—феррит $\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$; б—феррит NiFe_2O_4 .

Измерения проводились в широком температурном интервале с целью установления связи между спонтанным коэффициентом Холла R_s и величиной полного электросопротивления ρ . Авторам этой работы было показано, что в области 500°К константа R_s меняет знак и с изменением температуры коэффициент сложным образом зависит от величины ρ . В работе [4] установлено, что в никелевом феррите с меньшим содержа-

нием никеля по сравнению со стехиометрическим составом коэффициент R_s знака не меняет и отношение $\frac{R_s}{R_0}$ остается положительным в широком температурном интервале, причем численно оно увеличивается с ростом температуры.

Целью настоящей работы являлось выяснение роли ионов никеля в решетке шпинели при замещении ими ионов железа в температурной зависимости гальваномагнитных эффектов никелевых ферритов. Монокристалл NiFe_2O_4 был выращен в МЭИ методом Вернейля. Электрические контакты на поверхности образца создавались методом вжигания серебряной пасты. Первичный ток Холла через образец не превышал 100 мА. Э. д. с. Холла, электросопротивление, изменение электросопротивления в магнитном поле и термо-э. д. с. измерялись обычным потенциометрическим методом на постоянном токе. Образец имел форму параллелепипеда (20×4×2) мм³. Измерения производились сначала в соленоиде, дающем поле до 2500 э, затем в электромагните ($H = 10000$ э). Намагниченность образца определялась обычным баллистическим способом.

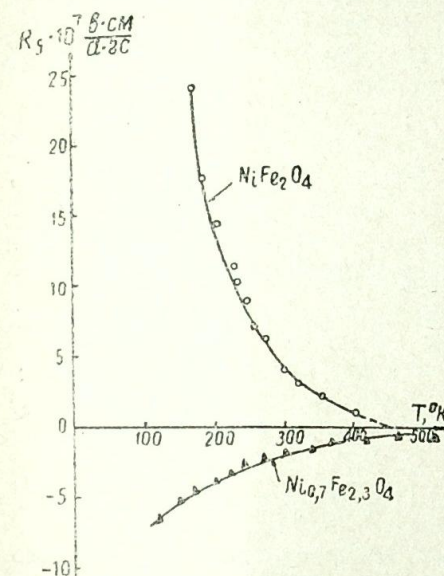


Рис. 2. Температурная зависимость спонтанного коэффициента Холла никелевых ферритов.

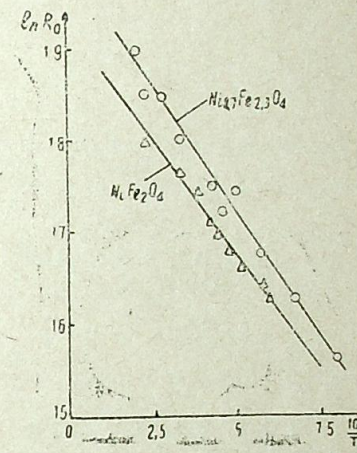


Рис. 3. Зависимость $\ln R_0$ от $\frac{1}{T}$ (T , °К)

На рис. 1 представлены изотермы э. д. с. Холла никелевых ферритов ($\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$ и NiFe_2O_4). Как видно, для феррита $\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$ в полях около 500 э имеет место техническое насыщение. Отметим, что в области парапроцесса э. д. с. Холла феррита с недостатком никеля почти не меняется, в то время как для феррита стехиометрического состава подход к техническому насыщению имеет несколько иной вид. Формы образцов исследуемых ферритов были почти одинаковыми. Изотермы кривых намагниченности этих образцов обычно похожи.

Спонтанный (R_s) и классический (R_0) коэффициенты Холла определялись способом, неоднократно описанным нами [5]. На рис. 2 и 3 показана температурная зависимость спонтанных и классических коэффициентов Холла для исследуемого нами феррита никеля стехиомет-

рического состава и феррита $\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$. Температурные зависимости концентрации носителей тока этих ферритов почти одинаковы, с энергией активации около 0,05 эВ. Спонтанные же коэффициенты Холла отличны не только по величине, но и по знаку (рис. 2).

Следовательно, знак и температурная зависимость носителей тока в данном случае не объясняют различия в знаках и численных значениях коэффициентов R_s рассматриваемых ферритов. Согласно теории [7] при доминирующем влиянии спинового механизма рассеяния на аномальное поле Холла спонтанный коэффициент Холла R_s должен линейно зависеть от магнитной части электросопротивления ρ_m , т. е.

$$R_s \sim \rho_m \text{ или } R_s \sim \frac{1}{en\mu_m} \quad (1)$$

Здесь n — концентрация носителей тока, e — заряд носителя, μ_m — подвижность, обусловленная рассеянием носителей тока на магнитных неоднородностях. Известно также [8], что с изменением температуры магнитная подвижность связана с намагниченностью соотношением

$$\frac{1}{\mu_m} = b' (I_{s0}^2 - I_s^2), \quad (2)$$

где b' — коэффициент, характеризующий скорости изменения магнитного рассеяния с температурой. Если величину $\frac{1}{en}$ для одного типа носителей выразить через классический коэффициент Холла R_0 , то соотношение (1) может быть записано в виде

$$\frac{R_s}{R_0} = b (I_{s0}^2 - I_s^2) \pm \left(\frac{R_s}{R_0} \right)_{T=0} \quad (3)$$

Из рис. 4 видно, что для никелевых ферритов такая зависимость действительно имеет место в интервале 100—500°K. Коэффициент b соотношения (3) положителен по знаку для обоих ферритов и численно имеет большее значение для феррита NiFe_2O_4 . Экстраполяция прямых (рис. 4) на ось $(I_{s0}^2 - I_s^2) = 0$ указывает на различные отрезки, отсекаемые этими прямыми на оси ординат не только по величине, но и по знаку. Для феррита с избытком ионов железа ($\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$) отношение $\left(\frac{R_s}{R_0} \right)_{T=0}$ отрицательно. Знаки коэффициента Холла R_0 и коэффициента термо-э. д. с. отрицательны.

Согласно теории аномального поля Холла, изложенной в работах [8, 9], для возникновения э. д. с. Холла в ферромагнетиках помимо спин-орбитального взаимодействия необходимо наличие асимметричного вида рассеяния носителей. Возможно, что рассеяние носителей тока в двух магнитоупорядоченных системах ионов Fe и Ni дают примес-

* Экспериментальные данные по эффекту Холла феррита никеля $\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$ взяты нами из дипломной работы Ю. Немчинова [6].

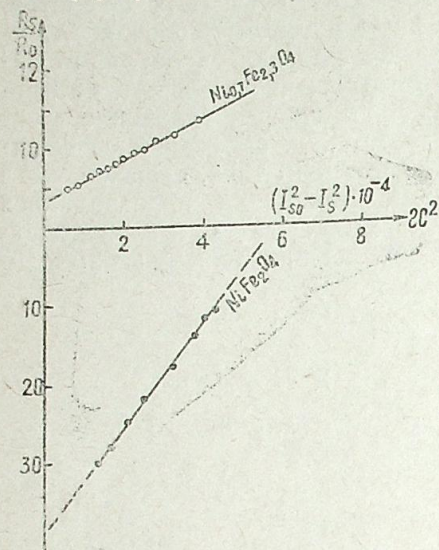


Рис. 4 Зависимость отношения коэффициентов Холла $\frac{R_s}{R_0}$ от разности квадратов $(I_{s0}^2 - I_s^2)$. Здесь I_{s0} и I_s — спонтанные намагниченности при 0 и $T^\circ \text{K}$.

ные вклады в аномальное поле Холла разных знаков. По данным наших измерений отношение $\left(\frac{R_s}{R_0} \right)_{T=0}$ магнетита положительно и численно равно 100. По мере замещения ионов Fe ионами Ni отношение

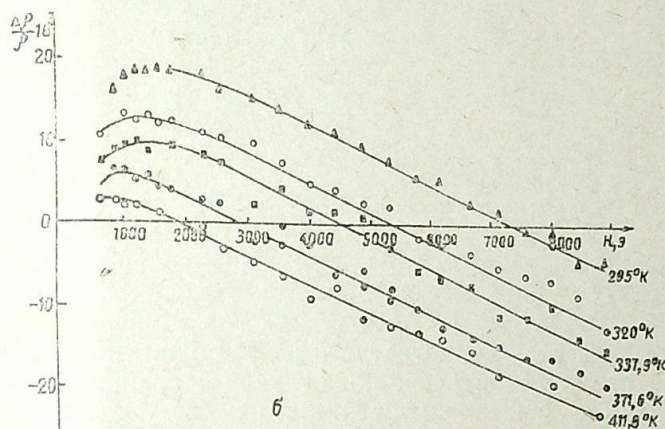
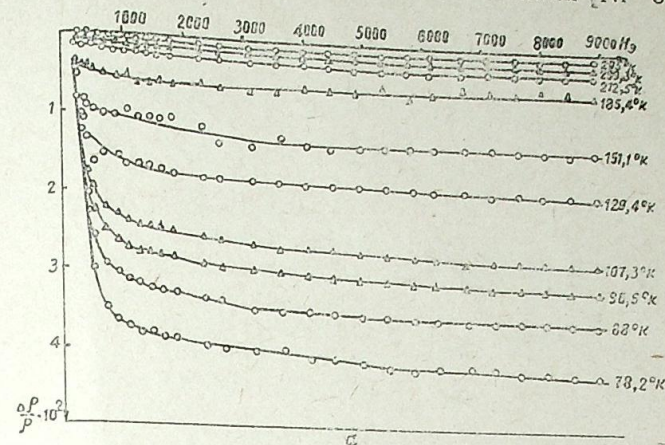


Рис. 5 Зависимость гальваномагнитного эффекта от магнитного поля при различных температурах: а — феррит никеля $\text{Ni}_{0.7}\text{Fe}_{2.3}\text{O}_4$; б — феррит NiFe_2O_4 .

$\left(\frac{R_s}{R_0} \right)_{T=0}$ уменьшается и для феррита никеля стехиометрического состава становится отрицательным и равным -35. С повышением температуры отношение R_s/R_0 изменит знак при той температуре, при которой выполняется условие

$$b (I_{s0}^2 - I_s^2) > \left(\frac{R_s}{R_0} \right)_{T=0} \quad (4)$$

Действительно для феррита NiFe_2O_4 по нашим данным и данным [3] спонтанный коэффициент Холла меняет знак около 500°K. Этот факт в работе [3] оставался необъясненным. Из результатов нашего эксперимента следует вывод о том, что в ферритах, как и в металлических ферромагнетиках [10], необходимо учитывать примесную долю аномального поля Холла. Причем для ферритов эта доля может иметь разные знаки, в зависимости от рода рассеивающей системы (например, разные сорта атомов с магнитным моментом),

Измерения четного гальваномагнитного эффекта в направлении, перпендикулярном напряженности магнитного поля H , необходимы также для выяснения температурной зависимости магнитного вида рассеяния. Гальваномагнитный эффект измерялся нами на тех же никелевых ферритах, при тех же условиях, при которых измерялась э. д. с. Холла. На рис. 5 представлены изотермы кривых $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\perp s}$ в функции

H для никелевых ферритов. Для этих кривых нетрудно выделить спонтанную часть $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\perp s}$ экстраполя-

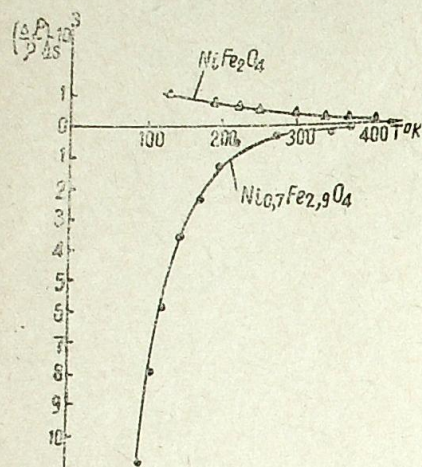


Рис. 6 Температурная зависимость спонтанного гальваномагнитного эффекта для никелевых ферритов

цией кривых из области сильных полей на ось $H=0$. На рис. 6 показана температурная зависимость спонтанной части гальваномагнитного эффекта для двух никелевых ферритов. В исследованном нами температурном интервале для феррита никеля с избытком ионов железа величина $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\perp s}$ имеет отрицатель-

ный знак, а для феррита стехиометрического состава положительный. Интересно, что знаки спонтанного коэффициента Холла R_s и гальваномагнитного эффекта $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{\perp s}$ этих ферритов сов-

падают. Отсюда можно сделать вывод, что знак спонтанной доли гальваномагнитного эффекта определяется не знаком носителей тока, а магнитным видом рассеяния этих носителей. Этот факт, по нашему мнению, представляет теоретический интерес.

Для описания гальваномагнитного эффекта магнитных материалов в магнитных полях H , больших поля технического насыщения H_s , мы предлагаем более общее выражение по сравнению с тем, которым пользовались ранее (см., например, [2, 13]):

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{H>H_s} = \pm \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_s - c(I^2 - I_s^2) + aH^2. \quad (6)$$

Здесь член aH^2 обусловлен наличием влияния поля H на траектории носителей тока в металлах и полупроводниках. Коэффициент a , как правило, имеет положительный знак и на два порядка меньше коэффициента c в соотношении (6). В области парапроцесса гальваномагнитный эффект уменьшается за счет уменьшения рассеяния на спиновых волнах при возрастании истинной намагниченности. Поэтому коэффициент c всегда имеет отрицательный знак. Величина и знак спонтанного гальваномагнитного эффекта, по нашему мнению, зависят от величины и анизотропии магнитного рассеяния. Возможно, что заметное влияние на г. м. э. оказывают магнитоотражательные эффекты в магнитных материалах. Частично эти вопросы уже обсуждались [13, 14].

Авторы признательны проф. К. П. Белову за интерес к работе и А. И. Балбашову за предоставление монокристаллического никелевого феррита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кондорский Е. И. ЖЭТФ, 48, 506, 1965; ФММ, 22, 168, 1966.
2. Ирхин Ю. П. и Абельский Ш. Ш. ФТТ, 6, 1635, 1964.
3. Lavine M. Phys. rev., 123, № 4, 1273, 1961.
4. Свирина Е. П., Маликова М. А., Маликова О. А. ФТТ 8, 1959, 1966.
5. Белов К. П., Свирина Е. П. ЖЭТФ, 37, 1212, 1959; ФТТ, 8, 1217, 1961.
6. Немчинов Ю. В. Дипломная работа. Физ. фак. МГУ, 1966.
7. Ирхин Ю. П. Докт. дисс. Свердловск, 1968.
8. Гуревич Л. Э. и Яснисевич И. Н. ФТТ, 4, 2854, 1962.
9. Гуревич Л. Э. и Яснисевич И. Н. ФТТ, 7, 582, 1965.
10. Свирина Е. П., Немчинов Ю. В. ФТТ, 9, 704, 1967.
11. Королева Л. И. и Белов К. П. ФТТ, 8, 220, 1966.
12. Белов К. П. и Зайцева Г. А. ФММ, 1, 404, 1955.
13. Залесский А. В. Канд. дисс. МГУ.
14. Залесский А. В. „Кристаллография“, 7, 321, 1962.

С. А. ГАДЖИЕВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО МОМЕНТА Σ^0 -ГИПЕРОНА

Как известно, один из современных методов определения магнитных моментов «нестабильных» частиц основан на их распадных свойствах. Впервые Голдхабер [1] указал, что если асимметрия у основной моды распада велика, то в сильном магнитном поле плоскость распада, так же как и спин, будет совершать прецессию. Измерение угла прецессии плоскости распада позволяет определить магнитный момент распадающейся частицы. Этим методом и был определен магнитный момент Λ^0 -гиперона. В случае Σ^0 -гиперона асимметрии у основной моды распада ($\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$) отсутствует, поэтому определение магнитного момента Σ^0 -гиперона в настоящее время представляет собой одну из трудных экспериментальных задач. В данной статье рассматривается возможность экспериментального определения магнитного момента Σ^0 -гиперона путем изучения тормозного излучения; с этой целью рассматриваются реакции:

$$K^- + n \rightarrow \Sigma^0 + \pi^- + \gamma, \quad (1)$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0 + \gamma, \quad (2)$$

с которыми сопоставляются диаграммы рис. 1 и 2.

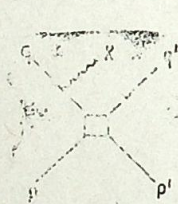


Рис. 1

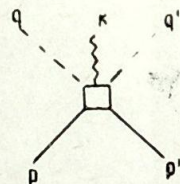


Рис. 2

Определим матричный элемент реакции (1). Для дальнейшего удобства матричный элемент представим в виде суммы двух членов [2, 3]: $M_\mu = M_\mu^{(1)} + M_\mu^{(2)}$, где $M_\mu^{(1)}$ отвечает вкладу всех диаграмм, в которых вершина с излучением реального фотона связана с остальной частью диаграммы одиночной линией (диаграммы типа рис. 1), а $M_\mu^{(2)}$ — изучению из «ящика» (рис. 2).

Лоу [2] показал, что

$$M_\mu^{(1)} = e \frac{q_\mu}{q' \cdot \kappa} F(m_1^2, m_2^2 - 2q' \cdot \kappa, s, t) - e \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} F(m_1^2 + 2q \cdot \kappa, m_2^2, s_1, t). \quad (3)$$

Это выражение является точным и следует из теоремы Уорда [2, 3]. Здесь q, q' 4-импульсы κ - и π -мезонов m_1, m_2 , их масса $s = (p + q)^2$, $s_1 = (p + q - \kappa)^2$; κ, p, p' 4-импульсы фотона, нуклона и Σ^0 -гиперона, а $F(s, t)$ — инвариантная амплитуда соответствующих нерационных реакций.

Член нулевого порядка в разложении (3) по степеням ω имеет вид

$$M_\mu^{(1)} = e \bar{u}_\Sigma \left\{ \left(\frac{q_\mu}{q' \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \right) T(s, t) - 2 \left(q_\mu \frac{\partial T}{\partial m_2^2} + q_\mu \frac{\partial T}{\partial m_1^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \kappa \cdot (p + q) \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{i}{2} \left(\frac{q_\mu}{q' \cdot \kappa} \hat{\kappa} + \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \hat{\kappa} \right) B(s, t) \right\} u_n. \quad (3)$$

Здесь амплитуда $F(s, t)$ записана как

$$F = \bar{u}_\Sigma T u_n = \bar{u}_\Sigma \left\{ A(s, t) + \frac{i}{2} (\hat{q} + \hat{q}') B(s, t) \right\} u_n.$$

Требование калибровочной инвариантности записывается следующим образом:

$$\kappa_\mu M_\mu = \kappa_\mu M_\mu^{(1)} + \kappa_\mu M_\mu^{(2)} = 0.$$

Определяя из этого условия $M_\mu^{(2)}$ и включая члены, обусловленные магнитными моментами [2, 3], будем иметь

$$M_\mu = \bar{u}_\Sigma \left\{ e \left(\frac{q_\mu}{q' \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \right) T + \frac{x_2}{2p \cdot \kappa} T \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i p_\mu}{m_3} \hat{\kappa} + i \gamma_\mu \frac{p \cdot \kappa}{m_3} \right) + 2e \left(\frac{\kappa \cdot p}{\kappa \cdot q} q_\mu - p_\mu \right) \frac{\partial T}{\partial s} + \right. \\ \left. + \frac{ie}{2} \left(\frac{q_\mu}{q' \cdot \kappa} \hat{\kappa} + \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \hat{\kappa} - 2\gamma_\mu \right) B - \right. \\ \left. - \frac{x_2}{2p' \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu + i \frac{p'_\mu}{m_4} \hat{\kappa} - i \gamma_\mu \frac{p' \cdot \kappa}{m_4} \right) T \right\} u_n, \quad (4)$$

а для реакции (2) получается

$$M_\mu = \bar{u}_\Sigma \left\{ e \frac{p_\mu}{p \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \right\} T + \frac{x_1}{2p \cdot \kappa} T \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu - i \frac{p_\mu}{m_3} \hat{\kappa} + i \gamma_\mu \frac{p \cdot \kappa}{m_3} \right) = \\ = 2e \kappa \cdot (p + q) \left(\frac{p_\mu}{q \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \right) \frac{\partial T}{\partial s} - \frac{ie}{2} \left(\frac{p_\mu}{p \cdot \kappa} \hat{\kappa} + \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \hat{\kappa} - 2\gamma_\mu \right) B - \\ - \frac{x_2}{2p' \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu + i \frac{p'_\mu}{m_4} \hat{\kappa} - i \gamma_\mu \frac{p' \cdot \kappa}{m_4} \right) T - \frac{e}{2p \cdot \kappa} (\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu) T \right\} u_p. \quad (5)$$

Для дальнейшего упрощения от амплитуды $T = A + \frac{i}{2} (\hat{q} +$

$\hat{q}')$ B перейдем к парциальным амплитудам (спиновая структура амплитуды); для этого необходимо выразить четырехкомпонентный амплитуды); для этого необходимо выразить четырехкомпонентный дираковский спинор с нормировкой $\bar{u}u = 1$ через двухкомпонентные спиноры. Опуская соответствующие выкладки и ссылаясь на [4, 5], укажем, что для амплитуд $A(s, t)$ в $B(s, t)$ при заданном значении,

полного изотопического спина имеет место разложение по полиномам Лежандра:

$$A_c = \frac{E_c}{m_3} \sum \{(l+1) f_{l+}^I + l f_l^I\} P_l(z), \quad (6)$$

$$B_c = \frac{E_c}{m_4} \sum p^{-2} (f_{l+}^I - f_l^I) \frac{dP_l}{dz}.$$

Здесь $l^+ = j \pm \frac{1}{2}$, I — изотопспин, $z = \cos \theta$, $P_l^{(z)}$ — полином Лежандра; значок c относится к системе центра инерции.

Изучение угловых распределений реакции $\kappa^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$ показывает, что реакция вплоть до кинетических энергий K^- -мезона в лабораторной системе отсчета 100 Мев, которой соответствует $q = 0,33$ Бев, происходит в S -состоянии [6]. Дальнейший анализ мы приведем при низких энергиях, поэтому ограничимся S -состоянием. Выделяя из (6) S -состояние, будем иметь следующие выражения (в этом приближении $B(s, t) = 0$):

$$M_\mu = A_1^I(s) \bar{u}_\Sigma \left\{ e \left(\frac{z'_\mu}{q' \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{q \cdot \kappa} \right) + \frac{x_1}{2p \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu - i \frac{p_\mu \cdot \hat{\kappa}}{m_3} + i \gamma_\mu \frac{p \cdot \kappa}{m_3} \right) - \frac{x_2}{2p \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu + i \frac{p'_\mu \cdot \hat{\kappa}}{m_4} - i \gamma_\mu \frac{p' \cdot \kappa}{m_4} \right) \right\} u_p, \quad (4')$$

$$M_\mu = A_2^I(s) \bar{u}_\Sigma \left\{ e \left(\frac{p_\mu}{p \cdot \kappa} - \frac{q_\mu}{p' \cdot \kappa} \right) + \frac{x_1}{2p \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu - i \frac{p_\mu \cdot \hat{\kappa}}{m_3} + i \gamma_\mu \frac{p \cdot \kappa}{m_3} \right) - \frac{x_2}{2p' \cdot \kappa} \left(\gamma_\mu \hat{\kappa} - \kappa_\mu + i \frac{p'_\mu \cdot \hat{\kappa}}{m_4} - i \gamma_\mu \frac{p' \cdot \kappa}{m_4} \right) \right\} u_p. \quad (5')$$

При получении выражений (4') и (5') мы не принимали во внимание зависимость амплитуд A_1 и A_2 от массы частиц. Этот вопрос подробно рассмотрен в работах [3, 7], где показано, что зависимость амплитуды от массы компенсируется изучением из ящика, т. е. большие величины A_1 и A_2 делают их независимыми от структуры частиц и деталей взаимодействия.

Показано также [7], что при тормозном излучении адронов двухчастное и высокие промежуточные состояния не вносят существенного вклада. Таким образом существенный вклад в течение реакций (1) и (2) в области $q \cdot \kappa \ll s$, которым соответствуют фотоны с энергией порядка от одного до нескольких десятков Мев, вносят только члены, определяемые формулами (4') и (5'). Теперь с помощью последних формул легко найти угловые и энергетические распределения фотонов, выразив их через полное сечение соответствующих нерадационных реакций.

Рассмотрим реакцию (2). Усредняя (5') по начальным и суммируя по конечным спинам и поляризациям фотона, после выполнения ряда интегрирований в лабораторной системе отсчета при $t \rightarrow 0$ получается

$$d\sigma = \sigma_0 \frac{eqq' \sin^3 \theta d\theta d\omega}{2(E_0 - q \cos \theta)} \left\{ \frac{e}{\omega(E_0 - q \cos \theta)} + \frac{x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2}{m_3 m_4} \right\}, \quad (7)$$

Здесь E_0 — энергия K -мезона, $\cos \theta = p q / q$, x_2 — аномальный магнитный момент Σ^0 -гиперона и $x_1 = x_p = 2,79$. Анализ формулы (7) пока-

зывает, что при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow \pi$ $d\sigma \rightarrow 0$, максимальное излучение происходит в области $\theta \sim 90^\circ$. Вклад магнитного момента Σ^0 -гиперона в угловое распределение при $E_0 = 600$ Мев, $\omega = 50$ Мев, $x_2 \sim 1$ составляет 8—10%, при малых ω угловое распределение определяется в основном первым членом (7) и вклад магнитных моментов протона и Σ^0 -гиперона составляет $\sim 1\%$. Спектр фотонов определяется интегрированием выражения (7):

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{eq'}{q} \sigma_0 \left\{ \frac{4e}{\omega} \left(-1 + \frac{E_0}{q} \ln \frac{E_0 + q}{m_1} \right) + \frac{E_0}{m_3 m_4} \left(1 - \frac{m_1^2}{q E_0} \ln \frac{E_0 + q}{m_1} \right) \left(x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2 \right) \right\}. \quad (13)$$

Вклад аномального магнитного момента Σ^0 -гиперона в спектр фотонов при $E_0 = 600$ Мев и $\omega = 50$ Мев составляет 8—10%.

Теперь рассмотрим реакцию (1). Угловое распределение фотонов имеет вид

$$d\sigma = \sigma_0 \frac{eq' d\omega}{2q} \sin \theta d\theta \left\{ \frac{e}{\omega} \left[-2 + \frac{q^2 \sin^2 \theta}{(E_0 - q \cos \theta)^2} + \frac{2E}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right] + \frac{x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2}{m_3 m_4} \times \left[\frac{q^2 \sin^2 \theta + 2E_0 q \cos \theta}{E_0 - q \cos \theta} + E - \frac{m_2^2}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right] \right\}. \quad (9)$$

Здесь $q' = \sqrt{E^2 - m_2^2}$ и $E = E_0 + m_3 - m_4 - \omega$.

Анализ формулы (9) показывает, что число фотонов, вылетающих вперед и назад, существенно отличается и это отличие приводит к существованию угловой асимметрии, определяемой как

$$A(E_0, \omega) = \frac{\frac{2q^2 E}{m_3 m_4} \cdot \frac{1}{m_1^2} \left(x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2 \right)}{\frac{2e}{\omega} \left(-1 + \frac{E}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right) + \frac{x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2}{m_3 m_4} \left(\frac{2q^2 E_0}{m_2^2} + E - \frac{m_2^2}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right)};$$

$A(E_0, \omega)$ — экспериментально [измеряемая величина, которая, как известно, определяется измерением числа фотонов, вылетающих вперед и назад. Измеряя коэффициент угловой асимметрии, можно определить магнитный момент Σ^0 -гиперона:

$$x_2 = \frac{m_4}{m_3} x_1 - \frac{e}{\omega} \frac{m_1^2 m_4^2}{q E_0^2} \frac{1}{A} - \frac{q m_1^2}{E_0 m_2^2} - \frac{m_2^2 E}{2q E_0^2} \left(1 - \frac{m_2^2}{q' E} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right). \quad (10)$$

Из формулы (10) следует, что для определения магнитного момента Σ^0 -гиперона достаточно измерить коэффициент угловой асимметрии фотонов определенной энергии для падающих K^- -мезонов с $E_0 \leq 600$ Мев.

Спектр фотонов определяется следующей формулой:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \sigma_0 \frac{eq'}{q} \left\{ \frac{2e}{\omega} \left(-2 + \frac{E_0}{q} \ln \frac{E_0 + q}{m_1} + \frac{E}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} \right) + \frac{x_1 - \frac{m_3}{m_4} x_2}{m_3 m_4} \times \left(E - E_0 + \frac{m_2^2}{q'} \ln \frac{E + q'}{m_2} + \frac{E_0^2 + q^2}{q} \ln \frac{E_0 + q}{m_1} \right) \right\}. \quad (11)$$

Анализ формул (7), (8), (9), (11) показывает, что вклад магнитного момента Σ° -гиперона при малых энергиях фотонов составляет 1—2% и интересующий нас эффект вплоть до $\omega \geq 40$ Мев оказывается практически ненаблюдаемым. Это связано с тем, что излучение за счет магнитных моментов маскируется массивованным излучением за счет K^- и π^- -мезонов. Однако, начиная с $\omega \leq 40$, влияние магнитного момента оказывается ощутимым и его можно определить по формуле (10).

Если эксперимент обнаружит, что $|x_2| > 1$, то его вклад в формулы (7)—(11) оказывается значительно большим.

В заключение автор считает приятным долгом выразить благодарность Б. Л. Иоффе за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldhaber M. Phys. rev., 101, 1828 (1956).
2. Low F. Phys. rev., 110, 974 (1958).
3. Грибов В., Иоффе Б., Померанчук И. ЯФ, 2, 768 (1965).
4. Галанин А., Грашин А., Иоффе Б., Померанчук И. ЖЭТФ, 37, 1666 (1965).
5. Carps R., Takeda G. Phys. rev., 103, 1877 (1956).
6. Челлен Г. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. М., 1966.
7. Грибов В. ЯП, 5, (1967).

С. Э. Начыјев

Σ° -гиперонун магнит моментинин тэ'јин едилмәси һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә Σ° -гиперонун магнит моментинин тәчрүбәдә тэ'јин етмәк үчүн $K^- + n \rightarrow \Sigma^\circ + \pi^- + \gamma$ вә $K^- + p \rightarrow \Sigma^\circ + \pi^0 + \gamma$ реаксияларын-да јаранан фотонун бучаға вә енергија көрә пајланмасынын өјрәнмәси тәклиф олунур вә ујғун пајланмалар һесабыланыр.

Мүәјјән едилмишдир ки ω -кичик гијмәтләриндә магнит моментинин тә'сири 1—2% тәшкил едир ки, буну да тәчрүбәдә мүәјјән етмәк чоҳ чәтиндир. Лакин $\omega \geq 40$ Мев олдуғдан сонра бу тә'сир 8—10% чоҳ ола билир ки, буну да тәчрүбәдә мүәјјән етмәк олар.

УДК 678: 539. 4. 537

М. А. БАГИРОВ, С. А. АБАСОВ, Т. И. ГУСЕЙНОВ, Т. Ф. АББАСОВ

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ НА МЕХАНИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ И МОЛЕКУЛЯРНЫЙ ВЕС ПОЛИЭТИЛЕНТЕРЕФТАЛАТНОЙ ПЛЕНКИ

Изучение влияния электрических разрядов на механические и диэлектрические свойства полимерных пленок представляет определенный научный и практический интерес. За последнее время исследованию влияния электрических разрядов на полимеры были посвящены работы [1—5]. Полиэтилентерефталатная (ПЭТФ) пленка благодаря своим диэлектрическим свойствам занимает важное место среди полимерных материалов, используемых в электротехнике и радиотехнике. В данной статье излагаются результаты исследования изменения механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки при ее электрическом старении под действием разряда в различных средах (воздух, кислород и азот).

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Воздействие электрических разрядов на ПЭТФ пленку в среде газообразного кислорода и азота осуществлялось в герметизированном эксикаторе, куда помещали испытательную ячейку* с пленкой (рис. 1). При воздействии электрических разрядов на пленку в среде азота вначале из эксикатора (при перекрытом вентиле Б) посредством насоса (3) выкачивали воздух и при достижении вакуума порядка $0,5 \times 10^{-1}$ мм рт. ст. вентиль (А) закрывали, а через открытый вентиль (Г) азот из баллона (4) через осушитель (5) пропускали в эксикатор (1). Моноста́т (6) служил для поддержания постоянства давления в системе, а скорость газа регистрировалась расходомером (7). Продувка азотом осуществлялась в течение 0,5 часа, затем на ячейку подава-

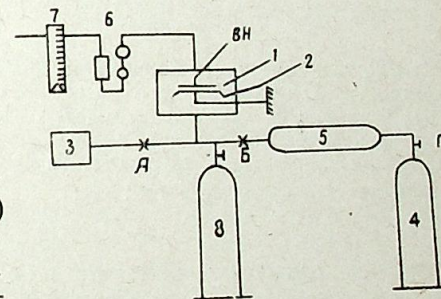


Рис. 1. Испытательная установка: 1—эксикатор; 2—пленка в зоне разряда; 3—вакуум-насос; 4—баллон с газообразным азотом; 5—осушитель; 6—моноста́т; 7—расходомер; 8—баллон с газообразным кислородом.

* Подробное описание испытательной ячейки дано в работе [3].

лось высокое электрическое напряжение и скорость подачи азота уменьшалась, но подача газа не прекращалась во избежание поступления в систему воздуха извне. При электрическом старении пленки в среде кислорода последний из баллона (8) непосредственно подавали в эксикатор.

Испытание на механическую прочность ПЭТФ пленки производилось путем одноосного растяжения с постоянной скоростью деформирования. Прочность пленки во всех случаях эксперимента измерялась при комнатной температуре. Молекулярный вес ПЭТФ пленки определялся вискозиметрическим методом. Вязкость измерялась при 20°C. Вычисление молекулярного веса производилось по формуле, приведенной в работе [6]:

$$[\eta] = 0,92 \cdot 10^{-4} M^{0,85}$$

В качестве растворителя пленки использовалась смесь дихлорэтана и фенола в отношении 60:40.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

На рис. 2 представлены экспериментальные данные по изменению механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки в зависимости от длительности воздействия электрических разрядов, т. е. от длительности электрического старения ($t_{ст}$) в воздухе при напряжении $U_{ст} = 6$ кВ и температуре $\theta_{ст} = 30^\circ\text{C}$. Как видно из этой зависимости, характер изменения механической прочности пленки соот-

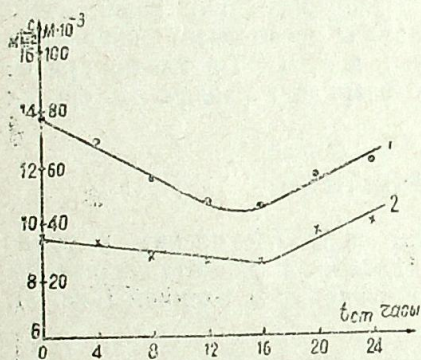


Рис. 2. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки от времени воздействия электрического разряда в воздухе при $U_{ст} = 6$ кВ: 1 — механическая прочность 2 — молекулярный вес.

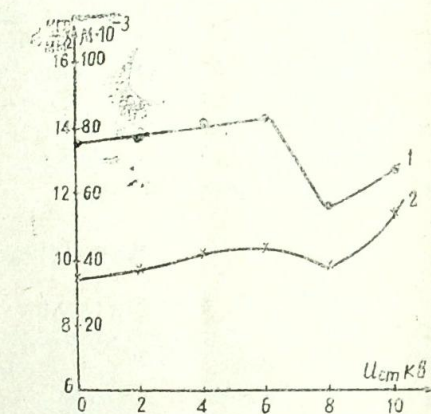


Рис. 3. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки от величины электрического напряжения в воздухе при: $t_{ст} = 5$ час: 1 — механическая прочность; 2 — молекулярный вес.

ветствует характеру изменения ее молекулярного веса. Как механическая прочность, так и молекулярный вес пленки до $t_{ст} = 16$ час старения падают, после чего наблюдается их медленное увеличение.

Необходимо отметить, что в литературе [7] имеются также данные, показывающие аналогичный ход изменения прочности ПЭТФ пленки в зависимости от длительности облучения ультрафиолетовыми (УФ) лучами, с той лишь разницей, что при облучении УФ-лучами прочность ее все время уменьшается и не наблюдается минимума, как в нашем случае.

На рис. 3 показаны изменения механической прочности и молекулярного веса состарившейся в воздухе ПЭТФ пленки в зависимости от величины электрического напряжения $U_{ст}$ на ячейке, при неизменном времени старения $t_{ст} = 5$ час и $\theta_{ст} = 30^\circ\text{C}$. Нетрудно видеть, что механическая прочность и молекулярный вес пленки до напряжения $U_{ст} = 6$ кВ медленно возрастают, затем до 8 кВ снижаются, а в последующем происходит их незначительное увеличение.

Следует отметить, что в литературе [8] имеется подобная закономерность изменения прочности ПЭТФ пленки в зависимости от дозы облучения γ -лучами, с тем лишь отличием от наших данных, что при облучении γ -лучами не наблюдается вторичного роста прочности пленки, как это имеет место в нашем случае. Чтобы рассмотреть, как влияет среда на процесс электрического старения пленки, были проведены опыты по изучению изменений механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки при воздействии на нее электрических разрядов в разных средах (кислород и азот) при условии: $t_{ст} = 5$ час, $U_{ст} = 2 \div 10$ кВ. Результаты указанных изменений представлены на рис. 4 и 5. Из рис. 4 видно, что в кислороде характер изменения механической прочности пленки такой же, как в воздушной среде и соответствует изменению молекулярного веса.

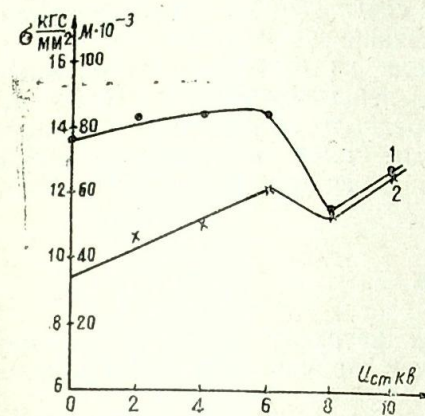


Рис. 4. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки от величины электрического напряжения в кислороде при $t_{ст} = 5$ час: 1 — механическая прочность; 2 — молекулярный вес.

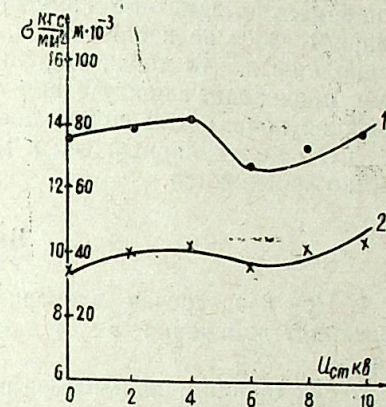


Рис. 5. Зависимость механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки от величины электрического напряжения в азоте при $t_{ст} = 5$ час: 1 — механическая прочность; 2 — молекулярный вес.

При электрическом старении ПЭТФ пленки в среде азота (рис. 5) с возрастанием напряжения $U_{ст}$ происходит как увеличение, так и уменьшение механической прочности и молекулярного веса пленки, причем характеры изменений прочности и молекулярного веса одинаковы.

Рассматривая экспериментальные данные в целом, приведенные на рис. 2—5, можно утверждать, что в процессе старения ПЭТФ пленки под действием электрических разрядов происходит изменение ее прочности и молекулярного веса, причем изменения эти в основном соответствуют друг другу. Поэтому можно предположить, что изменения прочности ПЭТФ пленки под действием электрических разрядов в основном обусловлены изменениями молекулярного веса. Полученные данные свидетельствуют о том, что при электрическом старении ПЭТФ пленки под действием разрядов происходят процессы деструкции и сшивания полимерных цепей. При деструкции полимерных

цепей ПЭТФ пленки под действием электрических разрядов происходит уменьшение молекулярного веса и механической прочности, сшивание же полимерных цепей приводит к их увеличению.

Следует отметить, что в растворах исходной, так и состарившихся ПЭТФ пленок практически не наблюдается образования геля, т. е. нерастворимая фракция почти не образуется. Это свидетельствует о том, что при старении ПЭТФ пленки под действием электрических разрядов в ней в основном происходят процессы деструкции и продольное сшивание полимерных цепей. Если при этом даже происходят и редкие поперечные сшивания цепей, то они не приводят к образованию геля. В связи с этим в работе [9] указывается, что в ПЭТФ пленке под действием электрических разрядов сшивания макромолекул не происходит. В указанной работе [9] имеются в виду такие поперечные сшивания макромолекул, которые могли бы привести к образованию геля.

Сравнение экспериментальных данных по изменению механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки при воздействии электрических разрядов в различных средах (рис. 3—5) показывает, что заметное изменение механической прочности и молекулярного веса наблюдается при старении пленки в воздухе и в среде кислорода. При электрическом старении пленки в среде азота, в условиях наших экспериментов, заметных изменений механической прочности и молекулярного веса не наблюдалось. Исходя из этого сравнения, можно предположить, что когда старение под действием электрических разрядов происходит в присутствии кислорода, то процессы деструкции и сшивания полимерных цепей происходят более интенсивно, в результате чего молекулярный вес и механическая прочность ПЭТФ пленки заметно изменяются.

Выводы

1. При воздействии электрических разрядов на ПЭТФ пленку происходят изменения ее механической прочности и молекулярного веса.
2. Изменения механической прочности и молекулярного веса ПЭТФ пленки при электрическом старении под действием разрядов показывают, что при этом происходит как процесс деструкции, так и процесс сшивания полимерных цепей.
3. При электрическом старении ПЭТФ пленка в присутствии кислорода процессы деструкции и сшивания полимерных цепей происходят более интенсивно, в результате чего молекулярный вес и механическая прочность заметно изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Койков С. Н., Парибок Е. А. „Вопросы радиоэлектроники“, серия III, 97, 1965.
2. Okumoto H., Ikeda Y. Inst., Electrical, Engrs, Japan, 85, № 1, 99, 1965.
3. Абасов С. А., Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, № 3, 137.
4. Abasov S. A., Bagirov M. A., Wolchenkow E. I., Guseinov T. I., Klimova N. W. and Malin W. P. Plaste und Kautschuk, 15, 3, 184, 1968.
5. Гусейнов Т. И., Абасов С. А., Багиров М. А. „Механика полимеров“, 1968, № 1, 59.
6. Рафиков С. Р., Павлова С. А., Твердохлебова И. И. Методы определения молекулярных весов и полидисперсности высокомолекулярных соединений. Изд. АН СССР, 1963.
7. Поляков Л. М. „Механика полимеров“, 1966, № 3, 365.

8. Калинин А. Е. „Механика полимеров“, 1966, № 3, 461.
9. Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 5, 65.

М. Э. Багиров, С. А. Абасов, Т. И. Гусейнов, Т. Ф. Аббасов

Електрик бошалмаларынын полиэтилентерефталат плонкасынын механики мөһкәмлігінә вә молекулјар чәкисинә тәсири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә електрик бошалмаларынын полиэтилентерефталат плонкасынын механики мөһкәмлігінә вә молекулјар чәкисинә тәсириндән бәһс олунур.

Мәгаләдә көстәрилир ки, полимер плонкалары әсасында һазырланмыш диэлектрикләрин вахтындан габаг сырадан чыхмасына (електрик көһнәлмәсинә) сәбәб онларын сәтһиндә вә даһилиндәки һава бошлугларында јаранан електрик бошалмалыдыр. Мәгаләдә бу чүр бошалмаларын тәсири илә ПЭТФ плонкасынын механики мөһкәмліји вә молекулјар чәкисинин дәјишилмәсинин изаһы верилир.

И. А. АСЛАНОВ, С. М. АЗИМОВ, И. Р. САЛМАНОВ,
Н. Б. ИБРАГИМОВ, З. А. ИСМАИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ 2×2 ПРИЗМЕННОГО СПЕКТРОГРАФА ФОКУСА КАССЕГРЕНА ДВУХМЕТРОВОГО ТЕЛЕСКОПА ШАО

1. Спектрограф с двумя призмными системами, входящий в комплект двухметрового телескопа ШАО АН Азербайджанской ССР, изготовлен народным предприятием „Карл Цейсс“ в Иене. Оптическая схема его показана на рис. 1. Отражающие щели спектрографа изготовлены из закаленной хромоникелевой стали с алюминиевой обкладкой. Щели щели достаточно симметричны и могут перемещаться параллельно в пределах 0,003—3 мм. Высоту щели можно устанавливать от 0,1 до 15 мм.

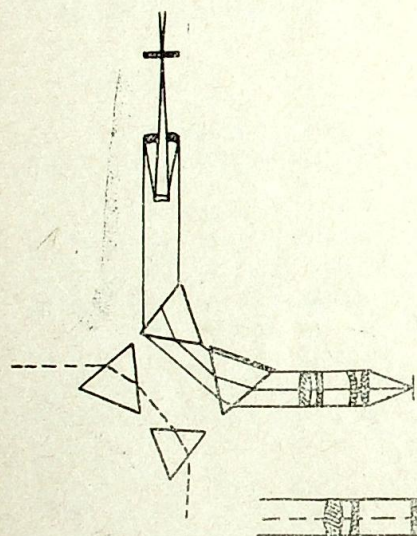


Рис. 1 Оптическая схема спектрографа.

Спектрограф имеет обратный зеркальный коллиматор Кассегрена с диаметром зеркала 45 мм и фокусным расстоянием 660 мм. Две двухпризмные системы прибора являются диспергирующими. Первая из них F 2, причем в минимуме отклонения находится длина волны 4340 Å, другая ИВК-7 с длиной волны 3970 Å в минимуме отклонения. Общий угол отклонения для обеих систем примерно равен 95°. Механика прибора позволяет быстро переходить с одной системы на другую.

Камера спектрографа имеет два четырехлинзовых объектива диаметром 55 мм, изготовленных из УФ-стекла. Фокусное расстояние у первого 82,5 а у второго 137,5 мм. Объективы могут быть взаимозаменяемыми. Камера снабжена кассетами для фотопластинок размером 41×54 мм. На одну фотопластинку можно снимать по несколько спектров. Кассетодержатель снабжен специальным механизмом качания для расширения спектра точечного небесного объекта. Ширину спектра можно получать: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 и 0,5 мм.

На спектрографе имеется две зрительные трубы, одна из которых предназначена для наблюдения небесного объекта на щели. При

помощи этой трубы ведется гидирование телескопа по объекту наблюдения. Если наблюдаемый объект слабый для гидировки по щели, то используется вторая зрительная труба по другой, более яркой звезде, находящейся в пределах поля 2,5'×7'. Эта зрительная труба снабжена специальным механизмом, при помощи которого можно вводить трубы в поле зрения и выводить.

В спектрографе имеется оптическая система для спектра сравнения. Отдельные сменные части для получения спектра железной дуги, спектра неоновой лампы и источника света с двойной искрой монтируются на спектрографе и можно переходить от одного источника к другому. Во всех случаях спектры сравнения получаются по обе стороны спектра небесного объекта.

Весь спектрограф помещен в термостат, представляющий собой ящик, изготовленный из фанеры с внутренним теплоизоляционным слоем. Внутри ящика установлены нагревательные змеевики, для управления которыми служит контактный термометр, оснащенный семью спаянными контактами для температур —10, —5, 0, +5, +10, +15 и 20°C.

Таблица 1

Призмная система	Камера с $f = 137,5$ мм		Камера с $f = 82,5$ мм	
	F2	ИВК-7	F2	ИВК-7
λ 3700—5100 Å	4,42	3,13	1,64	1,58
λ 5100—6700 Å	3,51	5,68	2,31	3,00

2. В связи с наличием неисправленной хроматической абберации фокальная плоскость не может быть перпендикулярной к оптической оси объектива камеры [1]. Как сказано выше, в спектрографе имеется две двухпризмные системы и два четырехлинзовых объектива. Поэтому возможны четыре комбинации, для которых определен наклон кассеты к оптической оси объектива камеры как для красной, так и для фиолетовой части спектра.

3. Инструментальный контур исследован по желтой линии неона λ 5852 Å. В соответствующей установке использовалась неоновая лампа. Конденсерная линза, проектирующая на щель изображение столба светящегося газа, была задиафрагмирована таким образом, чтобы отношение ее отверстия к расстоянию до щели равнялось относительному отверстию телескопа. Фотографирование спектра неоновой лампы производилось на фотопластинку $WP = 1$, при ширине щели 0,05 мм. С целью получения нормальной плотности, как не щели 0,05 мм. С целью получения нормальной плотности, как не щели 0,05 мм. С целью получения нормальной плотности, как не щели 0,05 мм.

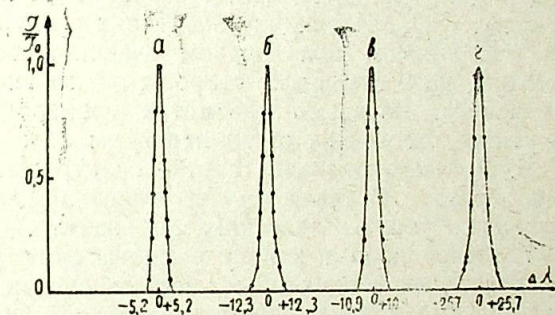


Рис. 2. Инструментальные контуры:
а—камера с $f = 137,5$ мм в комбинации с системой F 2;
б— $f = 137,5$ мм с ИВК-7;
в— $f = 82,5$ мм с F 2;
г— $f = 82,5$ мм с ИВК-7

Весь спектрограф помещен в термостат, представляющий собой ящик, изготовленный из фанеры с внутренним теплоизоляционным слоем. Внутри ящика установлены нагревательные змеевики, для управления которыми служит контактный термометр, оснащенный семью спаянными контактами для температур —10, —5, 0, +5, +10, +15 и 20°C.

Весь спектрограф помещен в термостат, представляющий собой ящик, изготовленный из фанеры с внутренним теплоизоляционным слоем. Внутри ящика установлены нагревательные змеевики, для управления которыми служит контактный термометр, оснащенный семью спаянными контактами для температур —10, —5, 0, +5, +10, +15 и 20°C.

Значения полных полуширин этих контуров равны, соответственно: 4,57; 9,75; 7,36 и 16,44 Å (см. рис. 2). Как можно заметить, наиболее узкие инструментальные контуры получаются для камеры с $f = 137,5$ мм в комбинации с призмной системой F_2 . Для сравнения можно сказать, что полная полуширина контура спектрографа СП-72 с дисперсией 80 Å/мм, установленная на рефлекторе (ЗТШ), равна 4 Å [2]. Фактическая разрешающая сила спектрографа, вычисленная по полученным инструментальным контурам, приведена в табл. 2.

Таблица 2

Камера	Призмная система	
	F_2	ИКВ-7
$f = 137,5$ мм	1300	600
$f = 82,5$ мм	800	360

4. Астигматизм спектрографа определяется методом ножа Фуко. При этом в теневой картине не обнаружено заметных искажений волнового фронта. В качестве источника света использовалась неоновая лампа в схеме для исследования инструментального контура.

5. Как указывалось выше, спектрограф помещен в термостат. Для изучения изменения фокусного расстояния в зависимости от температуры внутри спектрографа температуру повышали до $+25^\circ\text{C}$. С целью выравнивания температуры внутри спектрографа был включен вентилятор, который действовал в течение четырех часов (при данном значении температуры). Затем обогрев спектрографа был отключен и спектр железной дуги фотографировался по мере охлаждения спектрографа при следующих значениях температуры: $+25$, $+20$, $+15$, $+10$, $+5$ и 0°C . При этом при каждом значении температуры снималось 18 спектров, по 9 с каждой стороны от заранее определенного положения фокуса. Во время просмотра спектрограмм никаких изменений фокусного расстояния от температуры обнаружено не было.

6. Дифференциальное гнутие спектрографа определялось следующим образом. Сначала спектр железной дуги фотографировали, при положении трубы телескопа „на зенит“. Далее трубу наклоняли, на 15° по отношению к зениту и снова фотографировали спектр железной дуги. Для того, чтобы сместить спектр по высоте на пластинке, предщелевые призмы перемещают вдоль щели. Эти призмы следует перемещать с таким расчетом, чтобы часть спектров по высоте перекрывалась. Эта процедура повторялась для зенитных расстояний 30 , 45° и т. д. по обе стороны от зенита. Тщательный просмотр на измерительном приборе „Аббе компаратор“, а также записи перекрывающихся частей спектра на саморегистрирующем микрофотометре с увеличением в 160 раз показали, что гнутие спектрографа в пределах ошибок измерения отсутствует.

7. Ослабление света в спектрографе изучалось в лаборатории. Свет лампы накаливания проектировали один раз прямо на фотокамеру фотоумножителя ФЭУ-16 и регистрировали саморегистрирующим потенциометром ЭПП-09. Затем фотокатод фотоумножителя помещали на кассетную часть спектрографа. Результаты исследований — пропускательность спектрографа — приведены в табл. 3.

8. Рассеянный свет в спектрографе в направлении „поперек“ дисперсии [3,4]. С этой целью перед спектром помещали специальный

светофильтр, подобранный с таким расчетом, чтобы получить на пластинке сравнимые нормальные плотности спектра рассеянного света

Таблица 3

Камера	Призмная система	
	F_2	ИКВ-7
$f = 137,5$ мм	40%	42%
$f = 82,5$ мм	43%	47%

Следует отметить, что количество рассеянного света, выраженного в единицах интенсивности спектра, возрастает при увеличении высоты

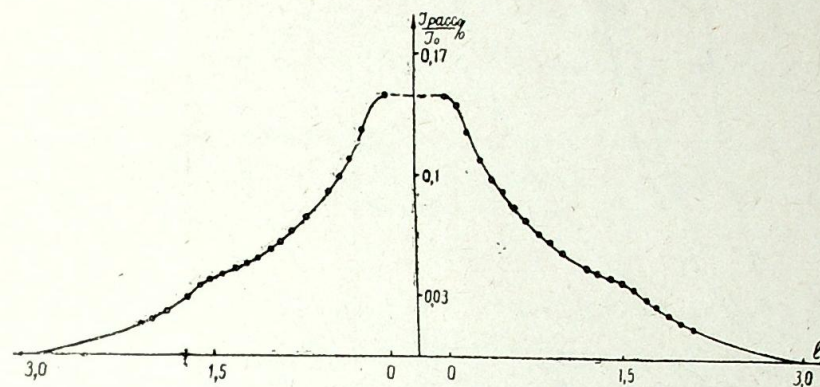


Рис. 3. Распределение рассеянного света „поперек дисперсии“ в долях основного спектра

щели, поэтому экспозиции производились с максимальной высотой щели. Измерение снимков производилось на саморегистрирующем

Таблица 4

λ в (Å)	Камера $f = 137,5$ мм				Камера $f = 82,5$ мм			
	призмная система F2		призмная система ИВК-7		призмная система F2		призмная система ИВК	
	x	$d\lambda/dx$	x	$d\lambda/dx$	x	$d\lambda/dx$	x	$d\lambda/dx$
6562,82	— 14,206	411,0	— 7,703	707,3	— 8,706	649,0	— 4,609	1154,8
4861,47	7,307	148,0	3,836	275,6	4,370	241,9	2,322	457,9
4340,47	2,874	94,3	1,454	183,4	1,727	156,6	0,878	307,9
4101,74	0,000	73,5	0,000	147,4	0,000	123,7	0,000	249,1
3970,08	+ 1,928	63,2	+ 0,941	129,1	+ 1,139	107,2	+ 0,557	219,3
3889,05	3,277	57,2	1,569	118,6	1,936	97,7	0,948	201,8
3835,39	4,237	53,4	2,020	111,9	2,507	91,6	1,197	190,8
3797,90	4,962	50,8	2,352	107,3	2,912	87,4	1,398	183,2
3770,63	5,524	49,0	2,601	103,9	3,225	84,5	1,537	177,8
3750,15	5,930	47,7	2,784	101,6	3,481	82,3	1,649	173,7
3734,37	6,259	46,6	2,931	99,6	3,683	80,7	1,760	170,5
3721,94	6,525	45,8	3,045	98,2	3,839	79,4	1,805	168,2
3711,97	6,739	45,2	3,180	97,1	3,972	78,3	1,858	166,4
3703,86	6,919	44,7	—	—	4,065	77,5	—	—
3697,15	7,049	44,2	—	—	4,113	76,9	—	—
3691,56	7,188	43,9	—	—	—	—	—	—

микрофотометре. Интенсивность рассеянного света сравнивалась с интенсивностью непрерывного спектра, ослабленного фильтром. Результаты изменения интенсивности рассеянного спектра, выраженного в процентах интенсивности непрерывного спектра, приведены на рис. 3 (для камеры с $f=137,5$ мм в комбинации с призмной системой F 2). По оси абсцисс отложены расстояния по высоте от центра спектра. Как видно, за краем спектра интенсивность рассеянного света резко падает. Вообще-то величина его небольшая: максимальное значение равно 0,22% от интенсивности основного спектра.

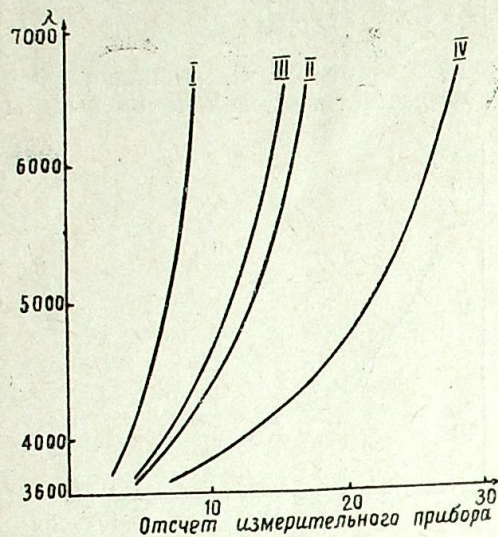


Рис. 4. Дисперсионная кривая:
I—камера с $f=137,5$ мм в комбинации с системой F 2;
II— $f=137,5$ мм с ИВК-7;
III— $f=82,5$ мм с F 2;
IV— $f=82,5$ мм с ИВК-1

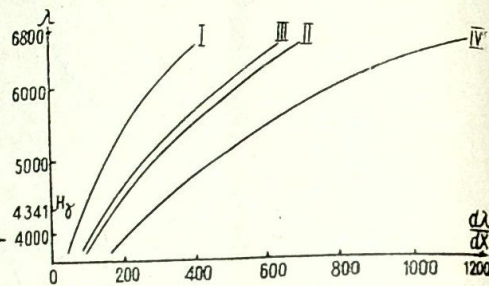


Рис. 5. Зависимость дисперсии от длины волны:
I—камера с $f=137,5$ мм в комбинации с системой F 2;
II— $f=137,5$ мм с ИВК-6;
III— $f=82,5$ мм с F 2;
IV— $f=82,5$ мм с ИВК-7

9. Для построения дисперсионной кривой был сфотографирован как спектр железной дуги, так и спектр звезд ранних спектральных классов. Результаты измерений представлены в табл. 4. В первом столбце даны длины волн спектральных линий, во втором—отсчет

Таблица 5.

Камера	Призмная система	
	F2	ИВК-7
$f=137,5$ мм	10 ^m .8	11 ^m .8
$f=82,5$ мм	11 ^m .5	12 ^m .7

измерительного прибора, в третьем—дисперсия у данной линии. В таблице приведены результаты для четырех комбинаций. Связь между отсчетами измерительного прибора и длиной волны линий показана на рис. 4. На рис. 5 дается графическая зависимость значений дисперсии $\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$ от длины волны линий.

10. Проницающая сила спектрографа определялась по наблюдениям звезд типа В2. Спектры звезд получены на фотопластинках Кодак ОаО при ширине щели 0,10 мм, с расширением спектра 0,2 мм. Звездная величина, для которой получена нормальная плотность спектра при часовой экспозиции, для четырех комбинаций приведена в табл. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курс астрофизики и звездной астрономии, т. I. М.—Л., 1951.
2. Баярчук А. А., Гершберг Р. Е. Изв. КрАО*, 35, 3, 1966.
3. Гаррисон Дж., Лорд Р. и Луфбуров Дж. Практическая спектроскопия. ИЛ, М., 1950.
4. Сойер Р. Экспериментальная спектроскопия. ИЛ, М., 1953.

И. Э. Асланов, С. М. Эзимов, И. Р. Салманов, Н. Ибрагимов,
З. А. Исмаилов

Шамахи Астрофизика Рәсәдханасы икиметрлик телескопунун Кассегрен фокусунда гојулмуш 2×2 призмалы спектрографынын тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Шамахи Астрофизика Рәсәдханасы икиметрлик телескопунун Кассегрен фокусунда гојулмуш 2×2 призмалы спектрографы тәдгиг олунур. Һәмин спектрографы характеризә едән кәмијәтләр—ајырдетмә габиліјәти, спектрограф дахилиндә сәпәләнмә, спектрографын нүфузетмә габиліјәти, дифференциал әјилмәси, камеранын фокус мәсәфәсинин температурдан асылылығы, астигматизм вә дисперсия әјрисин тәјин едилир.

УКАЗАТЕЛЬ

СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В «ИЗВЕСТИЯХ АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР, СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК» В 1968 г.

- Абиев А. К. Электромагнит для измерения Э. Д. С. Холла на двойной частоте, № 1, стр. 8.
- Алиева М. А., Алиев М. И. Об электрических свойствах и теплопроводности антимонида индия, легированного германием, № 1, стр. 28.
- Аббасов Г. И. Применения цифровых вычислительных устройств к обработке фотографических наблюдений, № 1, стр. 43.
- Атакишиева М. К. О корнях одного векового уравнения, № 1, стр. 86.
- Аразов Г. Т. Об одном классе почти периодических орбит спутника сфероидальной планеты, № 1, стр. 91.
- Аббасов А. М., Гасумов Г. М. Об одной линейной теплоконтактно-краевой задаче, № 2, стр. 52.
- Абдуллаев Г. В., Ибрагимов Н. И., Мамедов Ш. В., Абуталыбов З. М. О происхождении линии ЭПР и влиянии примесей Т1 и М на образование состояний с переносом заряда в селене, № 6, стр. 76.
- Агамалиев Ч. Г. О полноте одной системы аналитических функций, № 2, стр. 59.
- Азизов Ф. А. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в составной области с угловыми точками, № 2, стр. 65.
- Агамалиев А. К., Садыхов Ф. С. О возможном нарушении СР-четности в распадах адронов с образованием лептонных пар, № 3, стр. 3.
- Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А., Иманов Л. М. Микроволновый спектр и вращательные постоянные нормального пропилового спирта в транс-форме, № 3, стр. 15.
- Азизов Т. Х. Выращивание монокристаллов GaSe методом газотранспортных реакций, № 3, стр. 26.
- Ализаде З. И., Мамедов М. Б. Влияние концентрации титана на магнитные и гальваномагнитные свойства никеля, № 3, стр. 37.
- Амнуэль П. Р., Гусейнов О. Х. Рентгеновское излучение при аккреции межзвездного вещества нейтронными звездами, № 3, стр. 70.
- Азимов С. М. Определение абсолютных спектрофотометрических градиентов 10 затменных двойных звезд, № 3, стр. 75.
- Азимов Б. А., Кремер Д. М. О расчете электрических нагрузок нефтяных промыслов с помощью метода вероятностного моделирования графиков нагрузок, № 6, стр. 61.
- Аразов Г. Т. О существовании почти-периодических движений спутника сфероидальной планеты, № 3, стр. 79.
- Адигезалов А. Д. Приближение функций рациональными дробями, № 3, стр. 105.
- Алмамедов М. С. О спектре линейного интегро-дифференциального оператора на всей оси, № 3, стр. 110.
- Агаев А. М. Температурная зависимость ширины запрещенной зоны GaAs при низких температурах, № 4, стр. 10.
- Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М., Агаев К. А. Рентгенографическое исследование термически обработанных оправок прошивного стана, № 4, стр. 32.
- Абдуллаева Я. Р., Гурбанов Р. С., Сабурбаев А. В. О нестационарном структурном режиме движения вязко-пластичной среды в зазоре между плунжером и цилиндром глубинного насоса, № 44, стр. 96.

Агаев Г. Н. О разрешимости нелинейных операторных уравнений в локально выпуклых топологических векторных пространствах, № 4, стр. 179.

Асланов М. А. Обратная задача для несамосопряженного оператора, порождающего конечной системой уравнений, № 5, стр. 22.

Асланов И. А., Азимов С. М., Салманов И. Р., Ибрагимов Н. В., Исмаилов З. А. Исследование 2×2 призматического спектрографа фокуса кассегрена двухметрового телескопа ШАО, № 6, стр. 108.

Ахвердиев К. С., Никитин А. К. Неизотермическое движение вязкого газа в длинной круглой трубе, № 5, стр. 29.

Агаев Н. Г. Некоторые вопросы термического воздействия на пласт, № 5, стр. 39.

Алиева З. А. О приближенном решении многомерных нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна в классе H^2 , № 5, стр. 43.

Ахмедов А. М. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, рационально зависящих от спектрального параметра, № 5, стр. 53.

Алиев Н. А., Магеррамова Ф. Г., Ахмедов Б. А., Мусазаде М. М. Исследование теплопроводности стали марки 36Г2С, № 5, стр. 90.

Ализаде З. И., Магаррамов Т. Г. Исследование влияния концентрации переходных элементов ванадия, ниобия и тантала на термомагнитные свойства никеля, № 5, стр. 132.

Бабаев Ахмед М. О полноте системы собственных и присоединенных элементов одного класса вполне непрерывных операторов в пространстве банаха, № 6, стр. 10.

Багиров М. А., Малин В. П. Расчет распределения температуры в зоне электрического разряда, № 1, стр. 67.

Багиров М. А., Абасов С. А., Гусейнов Т. И., Аббасов Т. Ф. Влияние электрических разрядов на механическую прочность и молекулярный вес полиэтилентерефталатной пленки, № 6, стр. 103.

Баясанов Д. В., Керимов З. А. К вопросу статистической оптимизации режимов работы кольцевых газовых коллекторов, № 2, стр. 17.

Бахтияров И. А., Алиев К. А. О напряженном состоянии правильной трехгранной призмы, подтвержденной внутреннему давлению, № 4, стр. 141.

Байрам оглы. Разложение по собственным функциям операторного уравнения Штурма-Лиувилля с особенностями в нуле, № 5, стр. 127.

Гезалов Х. Б., Иванова А. В. Расчет атома натрия по методу Хартри-Фока с полным самосогласованием, стр. 11.

Гезалов Я. И. Инвариант однородных нелинейных дифференциальных уравнений относительно линейного преобразования, № 2, стр. 3.

Гаджиев С. А. О возможности определения магнитного момента Σ^0 — гиперона, № 6, стр. 98.

Гамбаров А. М. Применение метода математической статистики при оценке влияния физико-механических свойств разбуриваемых пород на проходку и механическую скорость проходки, № 2, стр. 6.

Гасанов А. С. О методике расчета оптимального по времени распределения ограниченных ресурсов в системе сетевого планирования и управления, № 6, стр. 51.

Грацкова Н. С. Исследование мгновений динамической разгрузки полимерных материалов, № 2, стр. 71.

Гасанов З. Н. О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций в данной полосе, № 3, стр. 97.

Габибов А. Б., Цатурянц А. Б. Экспериментальное исследование вязкости газонасыщенных нефтей при высоких давлениях и температурах, № 4, стр. 53.

Гейдаров Т. Г. Аппроксимация закона распределения оценки дисперсии и корреляционной функции случайной последовательности на конечной выборке, № 4, стр. 82.

Гасанов Г. П., Агаева С. Б. Об одной автомодельной задаче движения тиксотропной вязко-пластичной среды, № 4, стр. 156.

Гахраманов К. И. Об устойчивости пластического течения в полосе, № 4, стр. 160.

Гюльмамедов И. И., Рогов С. С. Импульсный регулятор напряжения генераторов переменного тока на полупроводниках, № 4, стр. 174.

Гейдаров Т. Г. Асимптотическое разложение закона распределения оценки дисперсии случайной коррелированной последовательности по конечной выборке, № 5, стр. 48.

Гезалов Х. Б., Иванова А. В., Рабинькина Н. В. Расчет возбужденных состояний атома натрия методом Хартри-Фока, 11, № 5, стр. 111.

Джуварлы Ч. М., Вечайзер Г. В., Штейншрайбер В. Я. Кинетика зарядки диэлектрического шара в поле с объемистыми зарядами, № 1, стр. 55.

Джуварлы Ч. М., Миронов Г. А. К расчету квази-установившихся колебаний на четных гармониках в блочных схемах передач, № 1, стр. 62.

Джафаров Ариф С. О множителях равномерной сходимости и равномерной суммируемости рядов Лапласа, № 2, стр. 28.

Джуварлы Ч. М., Мухарская Л. А. Влияние сернистых соединений на свойства изоляционных масел, № 3, стр. 51.

Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Джафаров Э. М. Алгоритм расчета переходных процессов в ЛЭП с тросами, № 3, стр. 57.

Домшак Ю. И., Чарыев А. О некоторых условиях неограниченности решений дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, № 3, стр. 124.

Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. Расчет грозových перенапряжений в обмотках трансформаторов с применением ЭЦВМ, № 4, стр. 167.

Джафаров Ариф С. Сферический модуль непрерывности и наилучшее приближение функций на сфере посредством сферических сумм, № 5, стр. 3.

Джафаров А. С., Джафаров Ариф С. О порядке приближения непрерывных на единичной сфере функций посредством семейства интегральных операторов, № 5, стр. 10.

Джуварлы Ч. М., Мурадов А. М. Применение модифицированного Z-преобразования для исследования восстанавливающихся напряжений на контактах выключателей, № 5, стр. 99.

Заманов Т. А. Об устойчивости решений эволюционных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве, № 3, стр. 129.

Зейналов С. К. Некоторые характеристики звезд сверхгигантов, № 4, стр. 43.

Ибадов Р. И. Определение синуса одного градуса Насирэдином Туси, № 1, стр. 49.

Исмаилов Т. К., Грушман Л. М. Анализ и расчет триодного генератора с общей сеткой, № 3, стр. 41.

Ибрагимов И. И., Гамидов А. А. О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций в данной полосе, № 3, стр. 87.

Ибадов Р. И. К вопросу истории тригонометрических таблиц, (1), № 4, стр. 48.

Иванов Н. Н., Яковлев Ю. М., Алиев А. А. Применение установки динамического нагружения для определения модулей упругости конструктивных слоев нежестких дорожных одежд, № 5, стр. 115.

Искендерзаде Ф. А. Забивка свай в грунт, № 6, стр. 29.

Исмаилов Т. К., Пашаев А. М. Расчет энергетического режима лампового триодного генератора с виброобразным видом статических анодно-сеточных характеристик, № 5, стр. 121.

Коломиец Б. Т., Мехтиев А. Ш. Электронно-дырочная плазма в HgTe , № 3, стр. 33.

Кадиров Н. Б. К вопросу о теплообмене между газом и стенкой цилиндра на основе кинетической теории материи, № 3, стр. 46.

Керимбеков М. Б. О наблюдениях солнечной грануляции в Шемахинской астрофизической обсерватории, II, № 3, стр. 66.

Касимов Б. О. К вопросу определения надежности структур информационных сетей для рассредоточенных объектов, № 3, стр. 82.

Керимов И. Г., Мамедов Т. А., Алиев Н. Г. Магнитная восприимчивость соединений MnSe и MnS в области магнитного превращения, № 4, стр. 3.

Кахраманов К. Ш., Стильбанс Л. С. Стационарный метод изменения температурной зависимости теплопроводности без охранных цилиндров, № 4, стр. 35.

Касимзаде М. С. Переходные процессы электрокинетических преобразователей, № 4, стр. 64.

Кулиева Б. А. Об одной задаче на сопряжение квазилинейного уравнения третьего порядка, № 4, стр. 113.

Каджар Ч. О., Аббасов А. В., Иманов Л. М. Микроволновый спектр и структура молекулы аллилового спирта, № 6, стр. 85.

Каджар Ч. О., Аббасов А. А., Иманов Л. М. Исследование микроволнового спектра молекулы этилмеркаптана, № 5, стр. 71.

Керимов И. Г., Мусаев А. Г., Рустамов А. Г., Мамедов М. Ш., Алиев Ф. Ю. Влияние одностороннего сжатия на электропроводность $\text{d}_{100}\text{MnO}_{0.97}$ при низких температурах, № 5, стр. 81.

Керимов З. Г., Копейкис М. Р. Об упруго-пластических колебаниях стержня, № 5, стр. 105.

Лайнер Д. И., Самедов Г. К. Термоэлектрические свойства некоторых твердых растворов на основе теллуристого свинца, № 4, стр. 41.

Листенгартен В. А., Багиров С. М., Насирзаде А. М. К расчету переходных процессов в асинхронном двигателе на цифровой вычислительной машине, № 6, стр. 56.

Мамедов Ш. Н., Исмаилов М. К. Совершенствование буровзрывных работ и влияние основных параметров на эффективность массовых взрывов на Дашкесанских железорудных карьерах, № 1, стр. 74.

Максудов Ф. Г., Салманова Д. Г. Решение смешанной задачи для параболического уравнения в неограниченной области обобщенным методом Фурье, № 6, стр. 16.

Мелик-Шахназаров А. М., Савин В. В., Нагиева Ф. М. Цифровой гальванометрический компенсатор моментов с переменной структурой, № 1, стр. 83.

Мирзоев Г. А. Об одном нелинейном уравнении в некоторых банаховых пространствах, № 2, стр. 34.

Мусаев К. М. О некоторых граничных свойствах обобщенных аналитических функций, № 2, стр. 40.

Максудов Ф. Г., Халилова Т. А. О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов 2-го порядка с интегральным краевым условием, № 2, стр. 46.

Махмудов З. З., Пашабекова У. С. Когерентное усиление спиновых волн в антиферромагнетиках пучков заряженных частиц произвольной плотности, № 3, стр. 7.

Мамедов А. П., Халилов А. Х. Неизотермические релаксационные процессы в монокристаллах NaCl с некоторыми активирующими примесями, № 3, стр. 19.

Мустафаев Л. Г. Коммутативные связи полугрупп, № 3, стр. 136.

Мусаев Х. И. Решение уравнений равновесия непологих произвольных цилиндрических оболочек методом малого параметра, № 3, стр. 142.

Мусаев Х. И. Основные уравнения непологих цилиндрических оболочек произвольно заданного очертания, № 6, стр. 39.

Мусаев Х. И., Насибов И. К., Ниязов Э. Н. Две фосфоресценции с разными значениями времени жизни α -галогензамещенных нафталинов в парафинах при низкой температуре, № 4, стр. 7.

Махмудов З. З., Эйланбеков Р. Р. Резонансная неустойчивость тока в ферро- и антиферромагнетиках, № 4, стр. 13.

Манюров Д. М. Исследование задачи дробно-линейного программирования при варьировании некоторых параметров, № 4, стр. 89.

Мехтиев И. Г. Определение точной области абсолютной сходимости некоторых интегралов и рядов Тейлора-Дирхле, № 4, стр. 102.

Мурадов Р. И. Смешанная задача для вырождающегося параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами, № 4, стр. 122.

Махмудов А. С. и Ахундов Р. Р. О почти-ортогональных системах, № 4, стр. 129.

Мехтиев А. Г. О полной непрерывности вложения некоторых весовых функциональных пространств в случае неограниченной области, № 4, стр. 137.

Муталлимов Ш. М. Динамические задачи прогиба гибкой мембраны, № 4, стр. 148.

Муталлимов Ш. М. Поперечный удар по гибкой мембране при наличии трения, № 6, стр. 34.

Минасян Р. С., Мустафаева И. И. К вопросу чистого косоугольного изгиба однородного призматического бруса, № 4, стр. 152.

Махмудов З. З. Квазилинейная теория взаимодействия пучка заряженных частиц со спиновыми волнами, № 5, стр. 64.

Мухтаров И. А., Мухтаров Р. И. О внутреннем вращении в молекулах с поворотной изомерией, № 5, стр. 85.

Мамедов Н. А. Об изгибе консольных трапециевидных пластин, № 5, стр. 136.

Насиров Л. Н., Османов Т. Г. Исследование термоэлектрических свойств системы $\text{SnTe}-\text{CuBiTe}_2$, № 1, стр. 37.

Оруджов Г. Н. Приближение функций линейными интегральными операторами в пространстве $L(0,8)$, № 6, стр. 24.

Пириев Н. П. Действие вибрационной нагрузки на стержень кругового сечения из полимерного материала, № 6, стр. 24.

Рустамов А. Г., Керимов И. Г., Валиев Л. М. Электропроводность и термоэдс системы, $\text{Li}_x\text{Mn}_{1-x}\text{Se}$, № 1, стр. 28.

Сендов Ю. М. и Гасанов М. С. К теории нелинейного резонанса в антиферромагнетиках, № 1, стр. 3.

Сакович А. А., Троянская Д. О., Кастрюков В. А. Исследование переходных процессов в тиристорном преобразователе, № 2, стр. 22.

Сендова Н. А., Рустамов П. Г., Алиджанов М. А. Исследование некоторых физических свойств системы $\text{Ga}_2\text{Se}_3-\text{Bi}_2\text{Se}_3$, № 3, стр. 29.

Сафаров К. Х., Шахмаров С. А., Хасплатов Ф. А. К вопросу опреснения минерализованных вод Азербайджана, № 3, стр. 62.

Салимов А. Х., Ширинов К. Ф., Таиров М. А. Решение одной нелинейной задачи газовой динамики методом интегральных соотношений, № 6, стр. 45.

Салманова Д. Г. Решение смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в неограниченной области обобщенным методом Фурье, № 3, стр. 118.

Сакович А. А., Троянский Д. О., Кастрюков В. А. Исследование тиристорного преобразователя частоты при работе на асинхронный двигатель, № 4, стр. 58.

Садыхов М. М. Об одном дифференциально-экстремальном уравнении с запаздывающим аргументом, № 4, стр. 107.

Свирина Е. П., Алиева М. С. Гальваномагнитные эффекты в никелевом феррите NiFe_2O_4 , № 6, стр. 92.

Сендов З. Ф. Политроны с фазовым переходом, I несжимаемая жидкость, № 5, стр. 93.

Таиров С. И., Таиров В. И., Шахтактинский М. Г., Кулиев А. А. Легирование монокристаллов сплавов германия с кремнием, золотом и исследование их электрических свойств, № 1, стр. 19.

Талиби М. А., Мамедов Э. Г. Изучение электрических свойств селеновых Р—N-переходов изменением сдвига фаз, № 1, стр. 33.

Таирова Ж. И. Теорема о переменных нагружениях в рамках течения при равномерном нагреве, № 5, стр. 34.

Талиби М. А., Мамедов Э. Г., Вердиева Т. М. Селеновые элементы с инверсией знака выпрямления, № 5, стр. 78.

Фараджев Р. Г., Караев М. И. Об одном аналоге разложения Фурье над полями галуа и его применения к задачам обобщенных линейных последовательных машин, № 6, стр. 69.

Халилов А. Х., Мамедов А. Г., Дилбазов Т. Г. Исследование рекомбинационной люминесценции некоторых активированных серебром фотовозбужденных фосфоров, № 4, стр. 19.

Шахтактинский М. Г., Томтиев Д. С., Кулиев А. А. Об изменении гермо-э. д. с. монокристаллов твердых растворов висмут-сурьма, № 4, стр. 27.

Ширинов К. Ф., Салимов А. Х. О вычислении некоторых интегралов, встречающихся в задачах термического воздействия на продуктивные пласты, № 4, стр. 74.

Шахвердиев В. М. Об условиях монотонности одного вида обобщенных полиномов типа С. Н. Бернштейна и их производных, № 5, стр. 16.

Шахтактинский М. Г., Кулиев А. А., Давжанов Х., Таиров В. И. К вопросу высокотемпературной инверсии знака коэффициента Холла в теллуре, № 5, стр. 60.

Эфендиев Ч. А. Исследование некоторых свойств видикона при переменной скорости считывания применительно к телевизионно-вычислительным устройствам, № 2, стр. 12.

Эфендиев Б. Р. Задача о напряженном состоянии в эксцентрическом кольце, сопряженном посредством натяга с полый круглой шайбой из другого материала, № 2, стр. 77.

МҮНДӘРИЧАТ

Н. Н. Оручов. $L(0, \infty)$ фәзасында функцијаларын хәтти интеграл операторларла јакынлашмасы һагында	3
Э. М. Бабајев. Банах фәзасында бир синиф тамам кәсилмәз операторларын мұхсуси вә гошма элементләринин тамлығы һагында	10
Ф. Г. Магсудов, Д. Н. Салманова. Үмүмиләшмиш Фурје үсулу илә гејри-мәһдуд областда икинчи тәртиб параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәлли	16
Н. П. Пиријев. Материалы полимердән олан даирәви енкәскили чубуғун титрәјән гүввә тәсири алтында деформасијасы	24
Ф. А. Искәндәрзаде. Дајағын торпаға вурулмасы	29
Ш. М. Мүтәллимов. Сүртүмә мөвчуд оlanda еластик мембрана енинә зәрбә	34
Х. И. Мүсәјев. Ихтијари шәкилли цилиндрик өртүкләр үчүн таразлыг тәнликләри	39
Э. Х. Сәлимов, К. Ф. Ширинов, М. Н. Таһиров. Газ динамикасынын бир гејри-хәтти мәсәләсинин интеграл мұнасибәтләри методу илә һәлли	45
Э. С. Нәсәнов. Шәбәкә планлашдырылмасы вә идарәетмә системиндә мәһдудлашдырылмыш еһтијатларын заман үзрә оптимал бөлүшдүрүлмәсинин һесаблама методикасы	51
Б. А. Листенгартен, С. М. Бағыров, А. М. Нәсирзаде. Асинхрон мұһәррикдәки кечид һалларынын һесаблама машыны васитәсилә һесабы	56
Б. А. Әзимов, Д. М. Кремер. Јүк графикләринин еһтимал моделләшдирилмәси методу васитәсилә нефт мәдәнләринин електрик јүкүнүн һесабына даир	61
Р. Г. Фәрәчов, М. И. Гарајев. Фурје сырасы аналогунун Галуа саһәләри үзрә дағылмасы вә онун үмүми хәтти ардычыл машынар мәсәләсинә тәتبиги	69
Н. Б. Абдуллајев, Н. И. Ибраһимов, Ш. В. Мәммәдов, З. М. Абуталыбова. Селендә электрон парамагнит удулма хәттинин мәншәји вә јүккөчүрмә нәтичәсиндә әмәлә кәлән һалын јаранмасына T_1 вә M_1 ашгарларынын тәсири	76
Ч. О. Гачар, А. Ә. Аббасов, Л. М. Иманов. Алил спирт молекулунун микродалгалы спектри	85
Ј. П. Свирина вә М. С. Әлијева. Никелли фертитдә галваномангнит эффектләри	92
С. Ә. Начыјев. Σ^0 -һипеторун магнит моментинин тәјин едилмәси һагында	98
М. Ә. Бағыров, С. А. Аббасов, Т. И. Нүсәјнов, Т. Ф. Аббасов. Електрик бошамаларынын полиетилентерефталат плјонкасынын механики мөһкәмлијинә вә молекулјар чәкәсинә тәсири	103
И. Ә. Асланов, С. М. Әзимов, И. Р. Салманов, Н. Ибраһимов, З. А. Исмајылов. Шамаһы Астрофизика Рәсәдханасы икиметрлик телескопунун Кассегрен фокусунда гојулмуш 2×2 призмалы спектографынын тәдгиги	108

СОДЕРЖАНИЕ

Г. Н. Оруджов. Приближение функций линейными интегральными операторами в пространстве $L(0, \infty)$	3
Ахмед М. Бабаев. О полноте системы собственных и присоединенных элементов одного класса вполне непрерывных операторов в пространстве Банаха	10
Ф. Г. Максудов, Д. Г. Салманова. Решение смешанной задачи для параболического уравнения в неограниченной области обобщения методом Фурье	16
Н. П. Пириев. Действие вибрационной нагрузки на стержень кругового сечения из полимерного материала	29
Ф. А. Искендерзаде. Забивка свай в грунт	29
Ш. М. Муталлимов. Поперечный удар по гибкой мембране при наличии трения	34
Ф. А. Искендерзаде. Свободное движение цилиндрических оболочек произвольно заданного очертания	39
А. Х. Салимов, К. Ф. Широков, М. А. Таиров. Решение одной нелинейной задачи газовой динамики методом интегральных соотношений	45
А. С. Гасанов. О методике расчета оптимального по времени распределения ограниченных ресурсов в системе сетевого планирования и управления	51
Б. А. Листенгартен, С. М. Багиров, А. М. Насирзаде. К расчету переходных процессов в асинхронном двигателе на цифровой вычислительной машине	56
Б. А. Азимов, Д. М. Кремер. О расчете электрических нагрузок нефтяных промыслов с помощью метода вероятностного моделирования графиков нагрузок	61
Р. Г. Фараджев, М. И. Гараев. Об одном аналоге разложения Фурье над полями Галуа и его применения к задачам обобщенных линейных последовательных машин	69
Г. Б. Абдуллаев, Н. И. Ибрагимов, Ш. В. Мамедов, З. М. Абдуллыбова. О происхождении линии ЭПР и влиянии примесей Ti и Mn на образование состояний с переносом заряда в селене	76
Ч. О. Каджар, А. Б. Аббасов, Л. М. Иманов. Микроволновый спектр и структура молекулы аллилового спирта	85
Е. П. Свирина, М. С. Алиева. Гальваномагнитные эффекты в никелевом феррите $NiFeO_4$	92
С. А. Гаджиев. О возможности определения магнитного момента Σ -гиперона	98
М. А. Багиров, С. А. Абасов, Т. И. Гусейнов, Т. Ф. Аббасов. Влияние электрических разрядов на механическую прочность и молекулярный вес полиэтилентерефталатной пленки	103
И. А. Асланов, С. М. Азимов, И. Р. Салманов, Н. Б. Ибрагимов, З. А. Исмаилов. Исследование 2×2 призмного спектрографа фокуса Кассегрена двухметрового телескопа ШАО	108