

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1968

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

УДК 517.512.2

Ариф С. ДЖАФАРОВ

СФЕРИЧЕСКИЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ И НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ ПОСРЕДСТВОМ СФЕРИЧЕСКИХ СУММ

Как известно, в теории наилучших приближений непрерывных периодических функций посредством тригонометрических полиномов в качестве структурной характеристики функции берется величина $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а в качестве конструктивной величина $\epsilon_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq n$. Связи между структурно-дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и быстротой убывания величины $\epsilon_n(f)$, установленные в теоремах Дж. Джексона и С. Н. Бернштейна, хорошо известны.

Одним из важных свойств величины $\omega(f; \delta)$, позволяющих получить оценку для $\epsilon_n(f)$ непосредственно через $\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)$, для любого неотрицательного λ является

$$\omega(f; \lambda \delta) \leq (1 + \lambda) \omega(f; \delta). \quad (1)$$

В случае приближения непрерывных функций, заданных на единичной сфере сферическими суммами, в качестве структурной характеристики функции берется [1] „сферический“ модуль непрерывности

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\gamma \leq \delta} \|\Delta_\gamma(f)\|, \quad (2)$$

где*

$$\Delta_\gamma(f) = f(\theta, \varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar{\varphi}) d\bar{\varphi};$$

здесь величина

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}$$

является средним значением функции $f(\theta, \varphi)$ вдоль окружности сферического радиуса γ с центром в точке (θ, φ) , где γ и $\bar{\varphi}$ — новые сфе-

* Подобные разности рассматривались ранее (см., например, [4]) в связи со сходимостью и суммируемостью рядов Лапласа.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. А. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Р. А. Аббасов (отв. секретарь), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“

Сдано в набор 3/IX 1968 г. Подписано к печати 26/XI 1968 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,63. Печ. лист 12,50. Уч.-изд. лист. 11,54. ФГ 09444. Заказ 296. Тираж 690. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров Азербайджанской ССР. Баку, Ази Асланова, 80.

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА

Академии наук Азербайджанской ССР

п.51435

рические координаты любой точки (θ', φ') , если точка (θ, φ) принята за полюс сферы, а

$$F(\gamma, \bar{\varphi}) = f(\theta', \varphi').$$

Отсутствие для величины $\omega_f(\delta)$ неравенства типа (1) не позволяет в случае приближения функции на сфере получить полный аналог теоремы Дж. Джексона для непрерывных 2π -периодических функций. В работе [1] был получен аналог теоремы Дж. Джексона в случае, когда функция удовлетворяет на сфере условию Липшица, т. е.

$$\omega_f(\delta) = O(\delta^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2;$$

в случае $\alpha > 2$ функции этого класса тождественно константы. В работе [2], в частности, было установлено, что аналогичная теорема имеет место и для более общих, чем класс Липшица, функций. Этим классом является класс функций $f(\theta, \varphi)$, для которых $\omega_f(\delta) = O[\varphi(\delta)]$, где функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет некоторым более общим условиям.

В настоящей статье вводится величина $\mathcal{Q}_f(\delta)$, определяемая при помощи $\omega_f(\delta)$, для которой уже справедливо неравенство, подобное (1), и тем самым устанавливается ряд неравенств между величиной $\mathcal{Q}_f(\delta)$ и наилучшим приближением функции $f(\theta, \varphi)$ посредством сферических сумм, аналогичных соответствующим неравенствам для 2π -периодических функций.

Пусть функция $f(\theta, \varphi)$ задана и непрерывна на единичной сфере. Величину

$$\mathcal{Q}_f(\delta) = \mathcal{Q}(f; \delta) = \sup_{C \geq 0} \frac{\omega_f(C\delta)}{(1+C)^2},$$

где $\omega_f(\delta)$ определяется формулой (2), будем называть модулем непрерывности функции $f(\theta, \varphi)$. Через $E_n(f)$ обозначим наилучшее приближение функции $f(\theta, \varphi)$ посредством сферических сумм порядка $\leq n-1$, т. е.

$$E_n(f) = \inf_{a_k, a_{km}, b_{km}} \max_{\theta, \varphi} \left| f(\theta, \varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} Y_k(\theta, \varphi) \right|,$$

где

$$Y_k(\theta, \varphi) = a_k P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_{km} \cos m\varphi + b_{km} \sin m\varphi) P_k^m(\cos \theta);$$

здесь $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, $P_k^m(x)$ — присоединенные полиномы Лежандра, а a_k, a_{km}, b_{km} — произвольные постоянные.

Заметим, что сферические функции $Y_k(\theta, \varphi)$ являются собственными функциями оператора Лапласа на сфере

$$D = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отметим следующие свойства модуля непрерывности $\mathcal{Q}_f(\delta)$:

- 1) $\mathcal{Q}_f(\delta)$ не убывает;
- 2) $\mathcal{Q}_f(\delta) \leq 2 \|f\|$;
- 3) $\mathcal{Q}_{f_1+f_2}(\delta) \leq \mathcal{Q}_{f_1}(\delta) + \mathcal{Q}_{f_2}(\delta)$;
- 4) $\mathcal{Q}_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$;
- 5) если λ — некоторое неотрицательное число, то

$$\mathcal{Q}_f(\lambda\delta) \leq (1+\lambda)^2 \mathcal{Q}_f(\delta);$$

- 6) если $0 < \delta < \eta$, то

$$\frac{\mathcal{Q}_f(\eta)}{\eta^2} \leq 16 \frac{\mathcal{Q}_f(\delta)}{\delta^2};$$

7) если к функции $f(\theta, \varphi)$ применим оператор Лапласа D и функция $Df(\theta, \varphi)$ ограничена, то

$$\mathcal{Q}_f(\delta) \leq C_1 \delta^2 \|Df\|,$$

где постоянная C_1 не зависит от δ и f .

Теорема 1. Пусть $f(\theta, \varphi)$ — непрерывная на единичной сфере функция и пусть

$$T_n^{[m]}(f; \theta, \varphi) = \frac{1}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t_n^{[m]}(\cos \gamma) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

$$[\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')],$$

где

$$J_n^{[m]} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = 2\pi \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma,$$

а

$$t_n^{[m]}(\cos \gamma) = \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{2m};$$

n и m — натуральные числа.

Тогда

$$\|f - T_n^{[m]}(f)\| \leq \mathcal{Q}_f \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \begin{cases} C_2 \ln n, & \text{если } m = 2, \\ C_3, & \text{если } m \geq 3, \end{cases} \quad (3)$$

где постоянные C_2, C_3 не зависят от n и f .

Заметим, что $T_n^{[m]}(f; \theta, \varphi)$ есть сферическая сумма порядка $(n-1)m$.

Доказательство. Очевидно, что если $f(\theta, \varphi) \equiv 1$, то $T_n^{[m]}(\theta, \varphi) \equiv 1$, поэтому разность между функцией $f(\theta, \varphi)$ и суммой $T_n^{[m]}(\theta, \varphi)$ можно записать следующим образом:

$$f(\theta, \varphi) - T_n^{[m]}(\theta, \varphi) = \frac{1}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{f(\theta, \varphi) - f(\theta', \varphi')\} t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

Поместим полюс сферы в точке (θ, φ) , тогда

$$\begin{aligned} |f(\theta, \varphi) - T_n^{[m]}(\theta, \varphi)| &\leq \frac{2\pi}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi |f(\theta, \varphi) - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\gamma, \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}| t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \leq \frac{2\pi}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi \omega_f(\gamma) t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \leq \\ &\leq \frac{4 \cdot 2\pi}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi \mathcal{Q}_f(\gamma) t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \\ &= \frac{8\pi}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi \mathcal{Q}_f \left(n\gamma \cdot \frac{1}{n} \right) t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma. \end{aligned}$$

На основании свойства 5 модуля непрерывности из последнего выражения получим

$$|f(\theta, \varphi) - T_n^{[m]}(\theta, \varphi)| \leq \mathcal{Q}_f \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \frac{8\pi}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) (1+n\gamma)^2 \sin \gamma d\gamma. \quad (4)$$

Оценим интеграл $\int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) (1+n\gamma)^2 \sin \gamma d\gamma$ сверху, а интеграл $J_n^{[m]}$ снизу. Пусть $0 \leq \beta \leq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) \gamma^\beta \sin \gamma d\gamma \leq \\ & \leq \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{2m} \gamma^{\beta+1} d\gamma = \frac{2^{2+\beta}}{n^{2m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin n\gamma}{\sin \gamma} \right)^{2m} \gamma^{\beta+1} d\gamma \leq \\ & \text{(на основании неравенства } \sin \gamma \geq \frac{2}{\pi} \gamma \text{ при } 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}) \\ & \leq \frac{C_4(\beta)}{n^{2m}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n\gamma)^{2m}}{\gamma^{2m-1-\beta}} d\gamma = \frac{C_4(\beta)}{n^{2m}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{(\sin n\gamma)^{2m}}{\gamma^{2m-1-\beta}} d\gamma + \\ & + \frac{C_4(\beta)}{n^{2m}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n\gamma)^{2m}}{\gamma^{2m-1-\beta}} d\gamma \leq \frac{C_4(\beta)}{n^{2+\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m} \gamma}{\gamma^{2m-1-\beta}} d\gamma + \frac{C_4(\beta)}{n^{2m}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\gamma^{2m-1-\beta}} \leq \\ & \leq \frac{C_5(\beta)}{n^{2+\beta}} + \frac{C_4(\beta)}{n^{2+\beta}} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\gamma^{2m-1-\beta}} \leq \\ & \leq \begin{cases} C_6(\beta) n^{-2-\beta} \ln n, & \text{если } m=2; \\ C_7(\beta, m) n^{-2-\beta}, & \text{если } m \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Оценим теперь интеграл $J_n^{[m]}$ снизу:

$$\begin{aligned} J_n^{[m]} &= 2\pi \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \\ &= 2\pi \int_0^\pi \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{2m} \sin \gamma d\gamma = 4\pi \int_0^\pi \frac{\left(\sin \frac{n\gamma}{2} \right)^{2m}}{n^{2m} \left(\sin \frac{\gamma}{2} \right)^{2m-1}} \cos \frac{\gamma}{2} d\gamma = \\ &= \frac{8\pi}{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin n\gamma)^{2m}}{(n \sin \gamma)^{2m-1}} \cos \gamma d\gamma \geq \frac{C_8}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} \frac{(\sin n\gamma)^{2m}}{(n\gamma)^{2m-1}} \cos \gamma d\gamma = \\ &= \frac{C_8}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2m} \gamma}{\gamma^{2m-1}} \cos \frac{\gamma}{n} d\gamma \geq \frac{C_9}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^{2m} \gamma}{\gamma^{2m-1}} d\gamma = \frac{C_{10}(m)}{n^2} \\ & \left(\text{так как } \cos \frac{\gamma}{n} \text{ при } 0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4} \text{ принимает наименьшее значение} \right. \\ & \left. \cos \frac{\pi}{4n} > \frac{1}{2} \text{ при } n \geq 1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J_n^{[m]}} \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) (1+n\gamma)^2 \sin \gamma d\gamma \leq \\ & \leq \begin{cases} C_{11} \ln n, & \text{если } m=2, \\ C_{12}, & \text{если } m \geq 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

где постоянные C_{11}, C_{12} не зависят от n и f . Из (5) и (4) следует неравенство (3). Теорема доказана.

Теорема 2. Если к функции $f(\theta, \varphi)$ применим p раз оператор Лапласа D и если функция $D^p f(\theta, \varphi)$ непрерывна, то

$$E_n(f) \leq \frac{C_{13}}{n^{2p}} E_n(D^p f), \quad (6)$$

где постоянная C_{13} зависит только от p .

Доказательство этой теоремы опускаем, поскольку она доказывается так же, как и соответствующая теорема в случае 2π -периодических функций. Из теоремы 2 и 1 следует.

Теорема 3. Если к функции $f(\theta, \varphi)$ применим $p \geq 0$ раз оператор Лапласа D и если функция $D^p f(\theta, \varphi)$ непрерывна, то

$$E_n(f) \leq \frac{C_{14}}{n^{2p}} \mathcal{O} \left(D^p f; \frac{1}{n} \right) \quad (7)$$

для любого натурального n , где постоянная C_{14} зависит только от p .

Действительно, пусть $f(\theta, \varphi)$ — непрерывная на единичной сфере функция. Если в теореме 1 взять $m=3$, то получим

$$\|f(\theta, \varphi) - T_n^{[3]}(f; \theta, \varphi)\| \leq C_{15} \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Так как $T_n^{[3]}(\theta, \varphi)$ является сферической суммой порядка $3n-3$, то отсюда следует, что

$$E_{3n-2}(f) \leq C_{15} \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Теперь пусть l — любое натуральное число; выберем натуральное число n из условий:

$$3n-2 \leq l < 3n+1,$$

тогда

$$E_l(f) \leq E_{3n-2}(f) \leq C_{15} \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \leq C_{15} \mathcal{O} \left(\frac{4}{3n+1} \right),$$

так как $\frac{1}{n} \leq \frac{4}{3n+1}$, $\mathcal{O}_f(\delta)$ не убывает.

Но в силу свойства 5 модуля непрерывности

$$\mathcal{O}_f \left(\frac{4}{3n+1} \right) \leq (1+4)^2 \mathcal{O}_f \left(\frac{1}{3n+1} \right) \leq 25 \mathcal{O}_f \left(\frac{1}{l} \right).$$

Окончательно

$$E_l(f) \leq C_{16} \mathcal{O}_f \left(\frac{1}{l} \right) \quad (8)$$

для любого натурального l .

Из (8) и (6) следует неравенство (7).

В теореме 3 содержится результат Г. Г. Кушнirenко [1].

Теорема 4. Для любой непрерывной на единичной сфере функции $f(\theta, \varphi)$ справедливо неравенство

$$\Omega_f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{C_{17}}{n^2} \sum_{k=1}^n k E_k(f),$$

где постоянная C_{17} не зависит от n и f .

Теорема 5. Пусть p — натуральное число и для функции $f(\theta, \varphi)$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2p-1} E_n(f).$$

Тогда к функции $f(\theta, \varphi)$ применим p раз оператор Лапласа D , в результате чего функция $D^p f(\theta, \varphi)$ непрерывна всюду на единичной сфере и справедливо неравенство

$$\Omega\left(D^p f; \frac{1}{n}\right) \leq C_{18} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^{2p+1} E_k(f) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2p-1} E_k(f) \right\},$$

где постоянная C_{18} зависит только от p .

Теорема 6. Пусть функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет (N^a) — условию* С. Б. Стечкина, где $0 < a < 2$. Тогда соотношения

$$\Omega_f(\delta) \sim \varphi(\delta) \quad (9)$$

и

$$E_n^{\mathbb{R}}(f) \sim \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \quad (10)$$

равносильны**.

Используя свойства функции $\Omega_f(\delta)$, теоремы 4 и 5 и то, что из соотношения (9) следует (10), доказывается аналогично соответствующим теоремам (см. [2]) для функции $\omega_f(\delta)$. Вторая часть теоремы 6 с использованием теоремы 3 и свойства функции $\Omega_f(\delta)$ доказывается при помощи рассуждений С. Б. Стечкина [3].

Используя введенный выше модуль непрерывности и оператор Лапласа на сфере, вместо обычных модулей непрерывности, и частное дифференцирование, были построены классы типа классов О. В. Бесова. На основании вышеприведенных результатов в терминах нормы этих классов были изучены некоторые прямые и обратные связи между свойствами гармонической функции в шаре и ее граничным значением, которые доложены на Всесоюзном симпозиуме по „теоремам вложения“, проведенном в Баку в мае 1966 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушниренко Г. Г. „Научн. докл. высшей школы, серия физ.-матем. наук“ 1958, № 4.
2. Джафаров Ариф С. Канд. дисс., Тбилиси, 1965.
3. Стечкин С. Б. „Изв. АН СССР, серия матем.“, т. 15, 1951, № 3.
4. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М. 1952.

* См. например, [2].

** Символ $\varphi(t) \sim \psi(t)$ понимается так: существуют константы $A > 0$ и $B > 0$ такие, что для всех t , для которых определены φ и ψ ,

$$A\psi(t) \leq \varphi(t) \leq B\psi(t).$$

А. С. Чәфәров

Сферик кәсилмәзлик модулу вә сфера үзәриндә
тә'јин олунмуш функцијанын сферик чәмләр
васитәсилә ән јахшы јахынлашмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ваһид радиуслу сфера үзәриндә тә'јин олунмуш вә кәсилмәјән $f(\theta, \varphi)$ функцијасы үчүн кәсилмәзлик модулу адландырдығымыз $\Omega_f(\delta)$ кәмијјәти тә'јин едилір. Бу кәмијјәт вә функцијанын тәртиби $(n-1)$ -и ашмајан сферик чәмләр вәситәсилә ән јахшы јахынлашмасы олан $E_n(f)$ арасында бә'зи әлағәләрә бахылыр.

УДК 517. 512. 6

А. С. ДЖАФАРОВ, Ариф С. ДЖАФАРОВ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть S —сфера с радиусом, равным единице, с центром в начале координат трехмерного евклидова пространства, $f(P)$ —непрерывная функция на S . Рассмотрим семейство линейных интегральных операторов вида

$$A_{\lambda}(f; P) = \iint_S f(Q) K_{\lambda}(\cos PQ) dQ, \quad (1)$$

где λ —некоторый параметр, ядро $K_{\lambda}(\cos \gamma)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$2\pi \int_0^{\pi} K_{\lambda}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = 1; \quad \int_0^{\pi} |K_{\lambda}(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma < K; \quad (2)$$

$$\delta_{\lambda}^2 = \int_0^{\pi} \gamma^2 |K_{\lambda}(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \lambda_0 \quad (3)$$

Наша цель—установить порядок сходимости $A_{\lambda}(f; P)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ к порождающей функции $f(P)$.

Теорема. Для любой непрерывной функции $f(P)$ на единичной сфере S имеет место неравенство

$$\|f(P) - A_{\lambda}(f; P)\| \leq 16\pi(K+1)\Omega_f(\delta_{\lambda}); \quad (4)$$

здесь $\Omega_f(\delta)$ —сферический модуль непрерывности функции $f(P)$, т. е.

$$\Omega_f(\delta) = \sup_{C>0} \frac{\omega_f(C\delta)}{(1+C)^2},$$

где

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\gamma < \delta} \left| f(P) - \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{C(P; \gamma)} f(Q) dS_Q \right|,$$

$$\|f\| = \max_{P \in S} |f(P)|,$$

$C(P; \gamma)$ —окружность со сферическим радиусом γ и с центром в точке P на сфере S .

Заметим, что для любой непрерывной функции f $\Omega_f(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. Величина

$$\iint_S K_{\lambda}(\cos PQ) dQ$$

не зависит от точки P . Следовательно, вычисляя последнее, получим

$$\iint_S K_{\lambda}(\cos PQ) dQ = 2\pi \int_0^{\pi} K_{\lambda}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = 1$$

в силу условия (2). Поэтому разность между функцией $f(P)$ и интегралом $A_{\lambda}(f; P)$ можно записать так:

$$f(P) - A_{\lambda}(f; P) = \iint_S \{f(P) - f(Q)\} K_{\lambda}(\cos PQ) dQ.$$

Поместим полюс сферы в точку P , тогда

$$f(P) - A_{\lambda}(f; P) = 2\pi \int_0^{\pi} \left\{ f(P) - \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{C(P; \gamma)} f(Q) dS_Q \right\} \times \\ \times K_{\lambda}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma. \quad (5)$$

Но

$$\left| f(P) - \frac{1}{2\pi \sin \gamma} \int_{C(P; \gamma)} f(Q) dS_Q \right| \leq 4\Omega_f(\gamma).$$

С другой стороны,

$$\Omega_f(l\delta) \leq (1+l)^2 \Omega_f(\delta), \quad (6)$$

поэтому

$$\Omega_f(\gamma) \leq \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_{\lambda}}\right)^2 \Omega_f(\delta_{\lambda}).$$

Отсюда и из (5) вытекает, что

$$|f(P) - A_{\lambda}(f; P)| \leq 8\pi \Omega_f(\delta_{\lambda}) \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{\gamma}{\delta_{\lambda}}\right)^2 |K_{\lambda}(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \leq$$

(в силу очевидного неравенства $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$)

$$\leq 16\pi \Omega_f(\delta_{\lambda}) \left\{ K + \delta_{\lambda}^{-2} \int_0^{\pi} \gamma^2 |K_{\lambda}(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \right\} = \\ = 16\pi(K+1)\Omega_f(\delta_{\lambda}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим интеграл

$$V_n(f; P) = \frac{n+1}{2} \iint_S \left(\frac{1 + \cos PQ}{2} \right)^n f(Q) dQ.$$

Заметим, что $V_n(f; P)$ является сферической суммой порядка n , т. е. суммой вида

$$V_n(f; P) = Y_0(P) + Y_1(P) + \dots + Y_n(P),$$

где $Y_k(P)$ —обычное обозначение сферической гармоник порядка k , так что

$$DY_k(P) = -k(k+1)Y_k(P);$$

здесь

$$D \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

есть оператор Лапласа на сфере.

В книге С. Л. Соболева [1] интеграл $V_n(f; P)$ был использован для доказательства полноты системы фундаментальных сферических функций

$$P_n(\cos \theta), P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi, \\ (m = 1, 2, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots):$$

доказано, что

$$V_n(f; P) \rightarrow f(P)$$

равномерно на S для любой непрерывной функции $f(P)$.

Следующий результат, вытекающий из вышесказанной теоремы показывает, с какой скоростью стремится $V_n(f; P)$ к $f(P)$.

Следствие 1. Для любой непрерывной функции на единичной сфере S справедливо неравенство

$$\|f(P) - V_n(f; P)\| \leq C_1 \varrho_\epsilon \left(\frac{1}{n^{2-\epsilon}} \right), \quad (7)$$

где $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число, C_1 — постоянная, зависящая только от ϵ . Это является усилением указанного результата из книги С. Л. Соболева [1].

Положим

$$K_n(\cos \gamma) = \frac{n+1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n = \frac{n+1}{4\pi} \cdot \cos^{2n} \frac{\gamma}{2}$$

и покажем выполнение условий (2) и (3).

Для проверки условия (2) заметим, что

$$\int_0^\pi K_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \frac{n+1}{4\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n \sin \gamma d\gamma = \\ = -\frac{n+1}{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n d\left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right) = \\ = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^{n+1} \Big|_0^\pi = \frac{1}{2\pi}.$$

Теперь покажем выполнение условия (3), более того, установим, что

$$\delta_n = \left\{ \int_0^\pi \gamma^2 |K_n(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = \left\{ \frac{n+1}{4\pi} \int_0^\pi \gamma^2 \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n \sin \gamma d\gamma \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_2}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}}, \quad (8)$$

где $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число, постоянная C_2 зависит только от ϵ .

Пусть $\alpha < \frac{1}{2}$ — сколь угодно близкое к $\frac{1}{2}$ зафиксированное число.

Имеем

$$\int_0^\pi \gamma^2 \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n \sin \gamma d\gamma \leq \int_0^\pi \gamma^3 \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \gamma^3 \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma + \int_{\frac{1}{n^\alpha}}^\pi \gamma^3 \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma.$$

Оценим каждый интеграл:

$$\int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \gamma^3 \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma \leq \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \gamma^3 d\gamma = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4\alpha}};$$

$$\int_{\frac{1}{n^\alpha}}^\pi \gamma^3 \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma \leq \pi^3 \int_{\frac{1}{n^\alpha}}^\pi \cos^{2n} \frac{\gamma}{2} d\gamma = \pi^3 \int_{\frac{1}{n^\alpha}}^\pi \left(1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right)^n d\gamma \leq$$

(так как $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\leq \pi^3 \int_{\frac{1}{n^\alpha}}^\pi \left(1 - \frac{\gamma^2}{\pi^2} \right)^n d\gamma \leq \pi^4 [1 - (\pi n^\alpha)^{-2}]^n.$$

Положим $(\pi n^\alpha)^2 = m$, откуда $n = \pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^{\frac{1}{2\alpha}}$.
таком случае

$$[1 - (\pi n^\alpha)^{-2}]^n = \left[\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \right]^{\pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}}} = \left[\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \right]^{\pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^\beta}, \\ \left(\beta = \frac{1-2\alpha}{2\alpha} \right).$$

Но

$$\left[\left(1 - \frac{1}{m} \right)^m \right]^{\pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^\beta} = \left(\frac{m-1}{m} \right)^{\pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^{\beta+1}} = \left(\frac{m}{m-1} \right)^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} m^{\beta+1}} \leq \\ \leq \left(\frac{m}{m-1} \right)^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} (m-1)^{\beta+1}} = \left(1 + \frac{1}{m-1} \right)^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} (m-1)^{\beta+1}} = \\ = \left[\left(1 + \frac{1}{m-1} \right)^{m-1} \right]^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} (m-1)^\beta} \leq 2^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} (m-1)^\beta}.$$

Итак,

$$\int_0^\pi \gamma^2 \left(\frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^n \sin \gamma d\gamma \leq (4n^{4\alpha})^{-1} + \pi^4 [1 - (\pi n^\alpha)^{-2}]^n \leq \\ \leq (4n^{4\alpha})^{-1} + \pi^4 \cdot 2^{-\pi^{-\frac{1}{\alpha}} [(\pi n^\alpha)^2 - 1]^{\frac{1-2\alpha}{2\alpha}}} \leq \frac{C_3}{n^{4\alpha}}.$$

Если положить в последнем неравенстве $\alpha = \frac{1}{2} - \epsilon'$, где $\epsilon' > 0$ — сколь угодно малое число, то получим неравенство (8), где $\epsilon = 2\epsilon'$. Таким

образом, выполняются условия вышедшей теоремы, откуда на основании неравенства (6) и следует (7).

Рассмотрим интеграл типа интеграла Джексона:

$$T_n^{[m]}(f; P) = \frac{1}{J_n^{[m]}} \iint_S f(Q) t_n^{[m]}(\cos PQ) dQ,$$

где

$$J_n^{[m]} = 2\pi \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma,$$

$$t_n^{[m]}(\cos \gamma) = \left(\frac{\sin \frac{n\gamma}{2}}{n \sin \frac{\gamma}{2}} \right)^{2m}.$$

Заметим, что $T_n^{[m]}(f; P)$ есть сферическая сумма порядка $(n-1)m$.

Следствие 2. Пусть $f(P)$ — непрерывная функция на единичной сфере S . Тогда для $m \geq 3$ имеет место неравенство

$$\|f(P) - T_n^{[m]}(f; P)\| \leq C_4 \Omega_f \left(\frac{1}{n} \right), \quad (9)$$

где постоянная C_4 не зависит от n и f .

Положим

$$K_n(\cos \gamma) = \frac{1}{J_n^{[m]}} t_n^{[m]}(\cos \gamma). \quad (10)$$

Выполнение условия (2) очевидно. В работе [2] установлены следующие оценки:

$$\int_0^\pi \gamma^2 t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \leq \frac{C_5}{n^4};$$

$$J_n^{[m]} = 2\pi \int_0^\pi t_n^{[m]}(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma \geq \frac{C_6}{n^2};$$

где постоянные C_5, C_6 зависят только от m . Из этих оценок следует, что для ядра (10)

$$\delta_n = \left\{ \int_0^\pi \gamma^2 |K_n(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \right\}^{\frac{1}{2}} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поэтому (9) следует, на основании неравенства (6), из вышедшей теоремы. Неравенство (9) было доказано в [2], где рассмотрен также случай $m=2$.

Рассмотрим интеграл Пуассона для единичной сферы:

$$U(\rho, \theta, \varphi; f) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') K_\rho(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

$$[\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')],$$

где

$$K_\rho(\cos \gamma) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho \cos \gamma + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Следствие 3. Для любой непрерывной функции $f(\theta, \varphi)$ на единичной сфере S справедливо неравенство

$$|f(\theta, \varphi) - U(\rho, \theta, \varphi; f)| \leq C_7 \Omega_f(\sqrt{1-\rho}), \quad 0 < \rho_0 \leq \rho < 1, \quad (11)$$

где постоянная C_7 зависит только от ρ_0 .

Выполнение условия (2) для ядра $K_\rho(\cos \gamma)$ известно. Остается показать, что

$$\delta_\rho = \left\{ \int_0^\pi \gamma^2 |K_\rho(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_8(\rho_0) \sqrt{1-\rho}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta_\rho^2 &\leq \int_0^\pi \gamma^3 |K_\rho(\cos \gamma)| d\gamma = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \gamma^3 \frac{1 - \rho^2}{\left[(1 - \rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right]^{\frac{3}{2}}} d\gamma. \end{aligned}$$

Так как $\rho_0 \leq \rho < 1$ и $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$\delta_\rho^2 \leq \frac{1 - \rho}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma^3 d\gamma}{[(1 - \rho)^2 + C_9(\rho_0) \gamma^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

При подстановке $\gamma = (1 - \rho)t$ правая часть последнего неравенства примет вид

$$\frac{(1 - \rho)^2}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{1-\rho}} \frac{t^3 dt}{[1 + C_9(\rho_0) t^2]^{\frac{3}{2}}} \leq C_{10}(\rho_0) \cdot (1 - \rho).$$

В заключение следует отметить, что ранее [3] другим методом была установлена иная оценка отклонения функции на сфере от ее интеграла Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1966.
2. Джафаров Ариф С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1968, № 1.
3. Джафаров Ариф С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук, 1964, № 9.

Э. С. Чэфаров, А. С. Чэфаров

Ваһид сфера үзәриндә кәсилмәјән функцијаларын хәтти интеграл операторлар аиләси васитәсилә јахынлашдырылмасынын тәртиби һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ваһид радиуслу сфера үзәриндә тәјин олунмуш вә кәсилмәјән функцијалар синфиндә нүвәси (2), (3) шәртләрини өдәјән вә үмуми шәкли (1) олан хәтти интеграл операторлар аиләсинин ујғун функцијадан мејли өјрәнилир. Бу мејл функцијанын сферик кәсилмәзлик модулу васитәсилә гијмәтләндирилир. Әсас нәтичә мәгаләнин әввәлиндә верилмиш үмуми теоремдә ифадә олунмушдур. Бу теоремин көмәји илә ујғун гијмәтләндирмә Валле-Пуссен Чексон вә Пуассон нөвлү интеграллар үчүн тапылыр.

УДК 517.512.6

В. М. ШАХВЕРДИЕВ

ОБ УСЛОВИЯХ МОНОТОННОСТИ ОДНОГО ВИДА ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ТИПА С. Н. БЕРНШТЕЙНА И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что классический полином С. Н. Бернштейна $B_n(f; x)$ степени n непрерывной функции $f(x) \in C[0, 1]$ имеет вид

$$B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad (1)$$

где

$$P_{k,n}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

В работе [1] изучен вопрос монотонности полиномов вида (1) и их производных. Среди многочисленных обобщений и видоизменений многочленов $B_n(f; x)$ рассматривалась [4] сходимость следующего многочлена типа С. Н. Бернштейна:

$$B_n(x, \alpha; f) = \sum_{k=0}^n P_{k,n,\alpha}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha}\right), \quad (2)$$

где

$$P_{k,n,\alpha}(x) = C_{n+\alpha}^{n-k} x^{k+\alpha} (1-x)^{n-k}.$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ эти полиномы превращаются в полиномы (1).

В данной работе, прежде всего, исследовался вопрос о монотонности многочленов $B_n(x, \alpha; f)$ при любом вещественном α . Оказывается, имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. Разность между полиномами $B_{n+1}(x, \alpha; f)$ и $B_n(x, \alpha; f)$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x, \alpha; f) - B_n(x, \alpha; f) = \\ = - \frac{x(1-x)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} P_{k,n-1,\alpha}(x) \times \\ \times \left[\frac{k+\alpha}{n+\alpha}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha}, f \right] - C_{n+\alpha}^n \Delta_{\alpha,n}(f) x^\alpha (1-x)^{n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $\left[\frac{k+\alpha}{n+\alpha}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha}, f \right]$ — разложенная разность второго порядка функции $f(x)$,

$$\Delta_{n,\alpha}(f) = \frac{\alpha}{n+1} \left\{ \frac{1}{n+\alpha} \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha}{n+\alpha+1}; f \right] - \left[\frac{\alpha}{n+\alpha} \right] \right\}.$$

Доказательство. В силу (2) имеем

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x, \alpha; f) = f(1) x^{n+\alpha+1} + C_{n+\alpha+1}^{n+1} f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\right) x^\alpha (1-x)^{n+1} + \\ + \sum_{k=1}^n P_{k,n+1,\alpha}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha+1}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того, заменив 1 через $[(1-x) + x]$, в правой части (2) получим

$$\begin{aligned} B_n(x, \alpha; f) = \sum_{k=1}^n C_{n+\alpha}^{n-k+1} f\left(\frac{k+\alpha-1}{n+\alpha}\right) x^{k+\alpha} (1-x)^{n-k+1} + \\ + f(1) x^{n+\alpha+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+\alpha}^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha}\right) x^{k+\alpha} (1-x)^{n-k+1} + \\ + C_{n+\alpha}^n f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) x^\alpha (1-x)^{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что разность $B_{n+1}(x, \alpha; f) - B_n(x, \alpha; f)$ может быть, представлена в виде

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x, \alpha; f) - B_n(x, \alpha; f) = \\ = \sum_{k=1}^n C_{n+\alpha}^{n-k} \left\{ \frac{k+\alpha}{n-k+1} f\left(\frac{k+\alpha-1}{n+\alpha}\right) - \frac{n+\alpha-1}{n-k+1} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha+1}\right) - \right. \\ \left. - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha}\right) \right\} x^{k+\alpha} (1-x)^{n-k+1} - C_{n+\alpha}^n \left\{ \frac{n+\alpha+1}{n+1} \left[f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\right) \right] - \frac{\alpha}{n+1} f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \right\} x^\alpha (1-x)^{n+1}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Delta_{n,\alpha}(f) = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \left[f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) - f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\right) \right] - \frac{\alpha}{n+\alpha} f\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right).$$

Проследив выражение разложенной разности, легко заметить, что

$$\Delta_{n,\alpha}(f) = \frac{\alpha}{n+1} \left\{ -\frac{1}{n+\alpha} \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha}{n+\alpha+1}; f \right] - \left[\frac{\alpha}{n+\alpha} \right] \right\}.$$

Тогда равенство (6) представится в виде

$$\begin{aligned} B_{n+1}(x, \alpha; f) - B_n(x, \alpha; f) = \\ = - \frac{x(1-x)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} P_{k,n-1,\alpha}(x) \times \\ \times \left[\frac{k+\alpha}{n+\alpha}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{k+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] - C_{n+\alpha}^n \Delta_{\alpha,n}(f) x^\alpha (1-x)^{n+1} \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для дальнейшего нам понадобится следующее определение, заимствованное из работы [3]: вещественная функция $f(x)$ называется выпуклой, невогнутой, полиномиальной, невыпуклой, соответственно вогнутой, κ -го порядка на $[a, b]$, если для разделенной разности порядка $(\kappa + 1)$ функции $f(x)$ соответственно имеем:

$$[x_1, x_2, \dots, x_{\kappa+2}; f] > 0, \geq 0, = 0, \leq 0, < 0.$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает:

Следствие 1. Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0, 1]$ и в нем она выпукла, невогнута; полиномиальная, невыпукла, соответственно вогнута, первого порядка и, кроме того, число $\Delta_{n, \alpha}(f)$ соответственно $> 0, \geq 0, = 0, \leq 0, < 0$, то последовательность интерполяционных многочленов типа С. Н. Бернштейна

$$B_1(x, \alpha; f), B_2(x, \alpha; f), \dots, B_n(x, \alpha; f), \dots$$

является соответственно убывающей, невозрастающей, стационарной, неубывающей, возрастающей. Отметим, что случай $\alpha = 0$ рассмотрен в работах [1 и 2].

Займемся теперь исследованием монотонности производных полиномов $B_n(x, \alpha; f)$.

Теорема 2. Разность между производными $B'_{n+1}(x, \alpha; f)$ и $B'_n(x, \alpha; f)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} & B'_{n+1}(x, \alpha; f) - B'_n(x, \alpha; f) = \\ &= \frac{2x-1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] \times \\ & \times P_{n-1, \kappa, \alpha}(x) - \frac{(x-x^2)(n+\alpha-1)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{\kappa=0}^{n-2} \left\{ \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha}; f \right] \frac{2}{n+\alpha} + \frac{1}{n+\alpha+1} \left[\frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}; f \right] \right\} P_{\kappa, n-2, \alpha}(x) - \left\{ C_{n+\alpha}^{n+1} \Delta_{n, \alpha}(f) [\sigma(1-x) + (n+1)x + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] C_{n+\alpha-1}^{n-1} \frac{\alpha x}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \right\} x^\alpha (1-x)^n, \end{aligned} \quad (7)$$

причем квадратные скобки означают разделенные разности соответствующих порядков, функции $f(x) \in C[0, 1]$.

Доказательство. Дифференцируя равенство (3), находим

$$\begin{aligned} & B'_{n+1}(x, \alpha; f) - B'_n(x, \alpha; f) = \\ &= \frac{2x-1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] P_{\kappa, n-1, \alpha}(x) - \\ & - \frac{x-x^2}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] P'_{\kappa, n-1, \alpha}(x) - \\ & - C_{n+\alpha}^{n+1} \Delta_{n, \alpha}(f) [\sigma x^{2-1} (1-x)^{n+1} + (n+1)x^2(1-x)^n]. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко видеть, что

$$P'_{\kappa, n-1, \alpha}(x) = C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-1} (\kappa+\alpha) x^{\kappa+\alpha-1} (1-x)^{n-\kappa-1} - C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-1} (n-\kappa-1) x^{\kappa+\alpha} (1-x)^{n-\kappa-2}.$$

Благодаря этому вторая сумма в правой части (8) преобразуется так

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=0}^{n-1} \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] P'_{\kappa, n-1, \alpha}(x) = \\ &= \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] C_{n+\alpha-1}^{n-1} \sigma x^{\alpha-1} (1-x)^{n-1} + \\ & + \sum_{\kappa=1}^{n-1} C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-1} (\kappa+\alpha) \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] \times \\ & \times x^{\kappa+\alpha-1} (1-x)^{n-\kappa-1} - \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-1} (n-\kappa-1) \times \\ & \times \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] x^{\kappa+\alpha} (1-x)^{n-\kappa-2} = \\ &= \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] C_{n+\alpha-1}^{n-1} \sigma x^{\alpha-1} (1-x)^{n-1} + \\ & + \sum_{\kappa=0}^{n-2} C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-2} (\kappa+\alpha+1) \left[\frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \right. \\ & \left. \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha}; f \right] x^{\kappa+\alpha} (1-x)^{n-\kappa-2} - \sum_{\kappa=0}^{n-2} \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}, \right. \\ & \left. \frac{\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] C_{n+\alpha}^{n-1} \sigma x^{\alpha-1} (1-x)^{n-1} + (n+\alpha-1) \sum_{\kappa=0}^{n-2} P_{\kappa, n-2, \alpha} \left\{ \left[\frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha}; f \right] - \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

причем мы использовали тот факт, что

$$C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-2} = \frac{n+\alpha-1}{\kappa+\alpha+1} C_{n+\alpha-2}^{n-\kappa-2}; \quad C_{n+\alpha-1}^{n-\kappa-1} = \frac{n+\alpha-1}{n-\kappa-1} C_{n+\alpha-2}^{n-\kappa-2}.$$

Пользуясь рекуррентными формулами для разделенных разностей, можно записать:

$$\begin{aligned} & \frac{n+\alpha}{2} \left\{ \left[\frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha} \right] - \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha} \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1} \right] \right\} = \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha} \right]; \\ & (n+\alpha+1) \left\{ \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1} \right] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha} \right] \right\} = \end{aligned} \quad (10)$$

С. Н. Бернштейннн үмүмиләшмиш полиномларындан
бир нөвүнүн вә онларын төрәмәләринин монотонлуғу барәдә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кәсилмәјән $f(x)$ функцијасынын ујғун кәлдији

$$B_n(x, \alpha, f) = \sum_{k=0}^n C_{n+\alpha}^{n-k} x^{k+\alpha} (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\alpha}\right)$$

шәкилли полиномларын вә онларын төрәмәләринин монотонлуғу тәд-
иг олунур.

$$= \left[\frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha + 1}, \frac{\kappa + \alpha}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha + 1} \right].$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha + 1}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha} \right] - \\ & - \left[\frac{\kappa + \alpha}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha + 1}, \frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha} \right] = \\ & = \frac{2}{n + \alpha} \left[\frac{\kappa + \alpha}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha + 1}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha} \right] + \\ & + \frac{1}{n + \alpha + 1} \left[\frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha + 1}, \frac{\kappa + \alpha}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 1}{n + \alpha}, \frac{\kappa + \alpha + 2}{n + \alpha + 1} \right]. \end{aligned}$$

В силу (10) и (9) равенство (8) примет вид

$$\begin{aligned} & B'_{n+1}(x, \alpha; f) - B'_{n+1}(x, \alpha; f) \frac{2x-1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\kappa+2}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \right. \\ & \left. \frac{\kappa+\alpha+1}{n+1}; f \right] P_{\kappa, n-1, \alpha}(x) - \frac{(x-x^2)(n+\alpha-1)}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \times \\ & \times \sum_{k=0}^{n-2} P_{\kappa, n-2, \alpha}(x) \left\{ \frac{2}{n+\alpha} \left[\frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+2} \right] + \right. \\ & + \frac{1}{n+\alpha+1} \left[\frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\kappa+\alpha}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+1}{n+\alpha}, \frac{\kappa+\alpha+2}{n+\alpha+1} \right] \Big\} - \\ & - x^{\alpha-1} (1-x)^n \left\{ C_{n+2}^{n+1} \Delta_{n, \alpha}(f) [\alpha(1-x) + (n+1)x] + \right. \\ & + \left[\frac{\alpha}{n+\alpha}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha+1}, \frac{\alpha+1}{n+\alpha}; f \right] C_{n+\alpha-1}^{n-1} \frac{\alpha x}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)} \Big\}. \end{aligned}$$

Заметим, что $x(1-x) > 0$ и $P_{\kappa, n, \alpha}(x) > 0$ для всех $x \in (0, 1)$, а потому второе слагаемое в формуле (7) будет отрицательным на $(0, 1)$ и обращается в нуль при $x=0$, $x=1$. Кроме того, $(2x-1)$ будет отрицательным в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и положительным в $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Учитывая все это, приходим к следующему заключению:

Следствие 2. а) если функция $f(x)$ выпукла, первого и второго порядка в интервале $(0, 1)$ и $\Delta_{n, \alpha}(f) > 0$, то последовательность производных полиномов $B_n(x, \alpha; f)$ убывает в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; б) если функция $f(x)$ вогнута, первого и второго порядка в интервале $(0, 1)$ и $\Delta_{n, \alpha}(f) < 0$, то последовательность производных полиномов $B_n(x, \alpha; f)$ возрастает в $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Замечание. Случай $\alpha=0$ рассмотрен D. D. Stancu [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Aramă O. Studii și cercetări de matematică (cluj), № 3—4, 1957, 195—210.
2. Stancu D. D. Mathematische zeitschrift, Bd. 98, Heft 1, 1967, 46—52.
3. Zupar A. Mathematica, 9(32), 1, 1967, 77—83.
4. Jakimovski A. and Levitan. Mathematische zeitschrift, Bd. 93, Heft. 5, 1966, 416—426.

УДК 517. 948

М. А. АСЛАНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСАМОСOPЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО КОНЕЧНОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

I. Рассмотрим граничную задачу, порожденную системой дифференциальных уравнений

$$-y_j'' + \sum_{k=1}^n q_{jk}(x) y_k = \lambda^2 y_j, \quad 0 < x < \infty \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1)$$

и граничным условием

$$y_j(0) = 0 \quad (2)$$

в пространстве вектор-функций $L_2^{(n)}(0, \infty)$ с элементами из $L_2(0, \infty)$. Предположим, что все $q_{jk}(x)$ — комплекснозначные функции, а потенциальная матрица $Q(x) = \|q_{jk}(x)\|$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty e^{\epsilon x} \|Q(x)\| dx < \infty \quad (3)$$

при некотором $\epsilon > 0$.

В настоящей работе методом З. С. Аграновича и В. А. Марченко [1] решена обратная задача для несамосопряженной граничной задачи (1)–(2). При $n = 1$ она решена В. Э. Лянце [2]. Положим,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда задача (1)–(2) в векторной форме переписывается в следующем виде:

$$LY = -Y'' + Q(x) Y = \lambda^2 Y, \quad (4)$$

$$Y(0) = 0. \quad (5)$$

При условии (3) уравнение (4) имеет решение $E(x, \lambda)$, представленное в виде

$$E(x, \lambda) = e^{i\lambda x} I + \int_x^\infty K(x, t) e^{i\lambda t} dt. \quad (6)$$

причем матрица $K(x, t)$ и потенциал $Q(x)$ связаны равенством

$$Q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (7)$$

и неравенством

$$|K(x, t)| < c \exp\left(-\frac{x+t}{2} \epsilon\right). \quad (8)$$

Матрица-функция $E(\lambda) = E(0, \lambda)$ регулярная в полуплоскости $\text{Im} \lambda > -\frac{\epsilon}{2}$, $\det E(\lambda)$ имеет только конечное число корней в области $\text{Im} \lambda \geq 0$, которые назовем сингулярными числами граничной задачи (1)–(2). Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ — невещественные сингулярные числа, а $\lambda_{\alpha+1}, \dots, \lambda_\beta$ — вещественные. Кратность M_k корня λ_k уравнения $\det E(\lambda) = 0$ назовем кратностью сингулярного λ_k , $k = 1, \dots, \beta$.

Обозначим через $G(x, \lambda)$ решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям

$$G(0, \lambda) = 0, \quad G'(0, \lambda) = I.$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(x, \lambda) &= \frac{1}{2i\lambda} [-E(x, -\lambda) + E(x, \lambda) \tilde{E}(-\lambda) \tilde{E}^{-1}(\lambda)] \tilde{E}(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2i\lambda} [-E(x, -\lambda) + E(x, \lambda) E^{-1}(\lambda) E(-\lambda)] \tilde{E}(\lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

где $E(x, -\lambda)$ — решение уравнения (4), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{ix\lambda} E(x, -\lambda) = I,$$

а знак $\sim$ означает переход к транспонированной матрице.

Обозначим

$$S(\lambda) = \tilde{E}(-\lambda) \tilde{E}^{-1}(\lambda) = E^{-1}(\lambda) E(-\lambda).$$

Матрица $S(\lambda)$ называется матрицей рассеяния граничной задачи (1)–(2). Положим

$$F^+(x) = \int_+ [S(\lambda) - I] e^{ix\lambda} d\lambda, \quad (10)$$

$$\text{где } \int_+ [S(\lambda) - I] e^{ix\lambda} d\lambda = \text{l. i. m. } \int_{a+i\eta}^{a+i\eta} [S(\lambda) - I] e^{ix\lambda} d\lambda;$$

η — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \eta < \epsilon_0$. Пусть $E_1(x, \lambda)$ — решение уравнения (4), которое при $\text{Im} \lambda > 0$ удовлетворяет условию $E_1(x, \lambda) e^{ix\lambda} \rightarrow I$ при $x \rightarrow \infty$. Положим

$$F_k(x) = i \text{Res}_{\lambda=\lambda_k} E^{-1}(\lambda) E_1(0, \lambda) e^{ix\lambda}, \quad P_k(x) = e^{-ix\lambda_k} F_k(x), \quad (11)$$

где $P_k(x)$ — матричные многочлены степени $M_k - 1$. Матрицу рассеяния $S(\lambda)$, невещественные сингулярные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ и нормировочные многочлены $P_1(x), \dots, P_\alpha(x)$ назовем данными рассеяния граничной задачи (1)–(2).

Теорема 1. Для всех x, t ($0 \leq x < t < \infty$)

$$K(x, t) - \int_x^\infty K(x, u) F(u+t) du = F(x+t), \quad (12)$$

где

$$F(x) = F^+(x) - \sum_{k=1}^\alpha F_k(x). \quad (13)$$

Теорема доказывается подобно рассуждениям М. С. Аграновича, В. А. Марченко и В. Э. Лянце [2]. Следуя В. Э. Лянце сформулируем некоторые определения.

Определение 1. Матрицу $\bar{F}(x)$ будем называть матрицей типа $(\bar{F}, \epsilon)$, если:

1) при $x \geq 0$ существует непрерывная производная $F'(x)$ и

$$\int_0^\infty |F'(\bar{x})| e^{\frac{\epsilon x}{2}} dx < \infty; \quad (14)$$

2) из того, что матрица $Y_x(t) e^{-\frac{\epsilon}{2}x}$ суммируема на полуоси $t > x$ и при $t > x$

$$Y_x(t) = \int_0^\infty Y_x(u) \bar{F}(u+t) dt, \quad (15)$$

следует $Y_x = 0$.

Весьма существенное значение имеет

Теорема 2. Матрица $F(x)$ построенная с помощью формулы (13), является матрицей типа $(\bar{F}, \epsilon)$.

Доказательство. Пусть $\sigma(x) = \int_x^\infty |Q(t)| dt$. В силу (3)

$$\sigma(x) \leq c_1 e^{-\epsilon x}, \quad x \geq 0. \quad (16)$$

Тот факт, что $F'(x)$ существует и непрерывна, а также оценка

$$\left| F'(2x) - \frac{1}{4} Q(x) \right| < c [\sigma(x)]^* \quad (17)$$

выводится так, как в книге [1], из (16) и (17) вытекает (14) и отсюда

$$|F(x)| < c e^{-\frac{\epsilon x}{2}}. \quad (18)$$

Пусть

$$\int_x^\infty |Y_x(t)| e^{-\frac{\epsilon t}{2}} dt < \infty, \quad Y_x(t) = \int_x^\infty Y_x(u) F(u+t) du. \quad (19)$$

В силу (18) получим

$$|Y_x(t)| \leq \int_x^\infty |Y_x(u)| c e^{-\frac{u+t}{2}} du \leq c_1 e^{-\frac{t}{2}}, \quad t \geq x. \quad (20)$$

Обозначим через $z_x(t)$ решение интегрального уравнения

$$Y_x(t) = z_x(t) - \int_x^t z_x(\xi) K(\xi, t) d\xi, \quad t \geq x. \quad (21)$$

Очевидно, что

$$\int_x^\infty |K(x, u)| F(t+u) du < c \exp\left(-\epsilon \frac{3x+t}{2}\right),$$

где $c > 0$. Подставляя (21) в (19), получим

$$z_x(t) + \int_x^t z_x(\xi) K(\xi, t) d\xi = \int_x^\infty z_x(\xi) F(\xi+t) d\xi + \left(\int_x^t + \int_t^\infty \right) z_x(\xi) d\xi \int_x^\infty K(\xi, u) F(t+u) du, \quad t \geq \xi.$$

В силу основного уравнения (12)

$$\int_\xi^\infty K(\xi, u) F(t+u) du = K(\xi, t) - F(\xi+t), \quad t \geq \xi,$$

а поэтому

$$z_x(t) = \int_t^\infty z_x(\xi) \left[F(t+\xi) + \int_\xi^\infty K(\xi, u) F(t+u) du \right] d\xi.$$

Таким образом, $z_x(t)$, $t \geq x$, является решением однородного интегрального уравнения Вольтерра с ядром, которое быстро убывает. Поэтому $z_x(t) = 0$ и отсюда $Y_x(t) = 0$ при $t \geq x$. Теорема доказана.

В силу теоремы 2 основное уравнение (12) при любом $x \geq 0$ имеет единственное решение. Отсюда вытекает следующее предложение.

Теорема 3. Данные рассеяния однозначно определяют задачу (1)–(2).

II. Восстановление задачи (1)–(2) по данным рассеяния.

Пусть $\bar{F}(x)$ — произвольная матрица типа $(\bar{F}, \epsilon)$. Тогда уравнение

$$\bar{K}(x, t) - \int_x^\infty \bar{K}(x, u) \bar{F}(u+t) du = \bar{F}(x+t) \quad (22)$$

имеет единственное решение $\bar{K}(x, t)$. Основные свойства решения уравнения (22) собраны в книге [1]: доказана следующая.

Теорема 4. Для решения уравнения (22) справедлива оценка

$$|\bar{K}(x, t)| \leq c e^{-\frac{x+t}{2}}, \quad 0 \leq x, \leq t < \infty, \quad (23)$$

где $c > 0$. Функция $\bar{K}(x, t)$ при $0 \leq x \leq t < \infty$ имеет непрерывные частные производные по x и t . Кроме того,

$$\left| \frac{d}{dx} \bar{K}(x, x) - 2\bar{F}'(2x) \right| < c e^{-2\epsilon x}. \quad (24)$$

Положим

$$\bar{E}(x, \lambda) = e^{ix\lambda} I + \int_x^\infty \bar{K}(x, t) e^{it\lambda} dt. \quad (25)$$

Тогда при $0 < x < \infty$, $\text{Im } \lambda > -\frac{\epsilon}{2}$ функция $\bar{E}(x, \lambda)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y, \quad (26)$$

где

$$Q(x) = -2 \frac{d}{dx} \bar{K}(x, x). \quad (27)$$

Определение 2. Матрицу $\bar{E}(\lambda)$ будем называть матрицей типа $(\bar{E})$ в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\epsilon_0$ (ϵ_0 — некоторое положительное число), если:

1) $\bar{E}(\lambda)$ голоморфна при $\text{Im } \lambda > -\epsilon_0$ и для каждого $\eta < \epsilon_0$

$$\bar{E}(\lambda) = I + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

равномерно в полуплоскости $\text{Im } \lambda > -\eta$;

2) $\det \bar{E}(\lambda) = 0$ при $0 < \text{Im } \lambda < \epsilon_0$.

Очевидно, $\bar{E}(\lambda)$ является матрицей типа $(\bar{E})$.

Определение 3. Будем говорить, что $\bar{S}(\lambda)$ — матрица типа (S) в полосе $|\text{Im } \lambda| < \epsilon_0$, если:

1) $\bar{S}(\lambda)$ мероморфна в полосе $|\text{Im } \lambda| < \epsilon_0$ и для каждого $\eta < \epsilon_0$

$$\bar{S}(\lambda) = I + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

равномерно в полосе $|\text{Im } \lambda| \leq \eta$;

2) $\det \bar{S}(\lambda)$ не имеет незначительных полюсов в полосе $|\text{Im } \lambda| < \epsilon_0$. Очевидно, что $S(\lambda) = E^{-1}(\lambda) E(-\lambda)$ является матрицей типа $(\bar{S})$ в полосе $|\text{Im } \lambda| < \epsilon_0$.

Рассмотрим теперь задачу симметрической факторизации функции $\bar{S}(\lambda)$ типа $(\bar{S})$ в полосе $\{\lambda; |\text{Im } \lambda| \leq \epsilon_0\}$. Эта задача состоит в

определении матрицы $\bar{E}(\lambda)$ типа $(\bar{E})$ в полуплоскости $Im \lambda > -\varepsilon_0$, удовлетворяющей уравнению

$$\bar{E}^{-1}(\lambda) \bar{E}(-\lambda) = \bar{S}(\lambda) \quad (28)$$

и имеющей числа R_k корнем $\det \bar{E}(\lambda) = 0$ кратности M_k ($k = 1, \dots, \gamma$). Кроме того, считаем $\det \bar{E}(0) \neq 0$. Пусть L — кривая, содержащая в полосе $|Im \lambda| < \varepsilon_0$, ведущая из $-\infty$ до $+\infty$, такая, что все корни $\det \bar{S}(\lambda)$ находятся на L , а все полюсы $\det \bar{S}(\lambda)$ — под L . Приращение непрерывной ветви $\arg \det \bar{S}(\lambda)$, когда L пробегает от $-\infty$ до $+\infty$, деленное на 2π , называется индексом задачи симметрической факторизации и обозначается через $\text{ind } \bar{S}$.

Лемма. Для разрешимости задачи симметрической факторизации необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{ind } \bar{S} + 2(M_1 + \dots + M_\gamma) = 0. \quad (29)$$

Доказательство такое же, как работе [2].

Пусть даны: а) некоторая матрица $\bar{S}(\lambda)$ типа $(\bar{S})$;

б) некоторые числа $p_1, \dots, p_\gamma$, удовлетворяющие условию

$$Im p_k \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, \dots, \gamma;$$

в) некоторые многочлены $\bar{P}_1(x), \dots, \bar{P}_\gamma(x)$.

Предположим, что эти данные согласованы в следующем смысле:

$$A) \text{ind } \bar{S} + 2(M_1 + \dots + M_\gamma) = 0; \quad (30)$$

$$B) \bar{F}(x) = \bar{F}^+(x) - \sum_{k=1}^{\gamma} P_k(x) e^{ixp_k}, \quad (31)$$

где

$$\bar{F}^+ = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [\bar{S}(\lambda) - I] e^{ix\lambda} d\lambda \quad (32)$$

является матрицей типа $(\bar{F}^+, \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 2\varepsilon_0$. Мы доказали, что условия А) и Б) необходимы для того, чтобы $\bar{S}(\lambda)$, $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_\gamma$, $\bar{P}_1(x), \dots, \bar{P}_\gamma(x)$ были данными рассеяния некоторой граничной задачи.

Теперь докажем достаточность этих условий. Обозначим через $K(x, t)$ решение уравнения (22). Очевидно, что это решение единственное. Определим $Q(x)$ формулой (30) и рассмотрим следующую задачу:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y; \quad (1^\circ)$$

$$Y(0) = 0. \quad (2^\circ)$$

Обозначим через $S(\lambda)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$, $P(x), \dots, P_\alpha(x)$ данные рассеяния задачи $(1^\circ) - (2^\circ)$.

Теорема 5. В указанных выше предположениях

$$S(\lambda) = \bar{S}(\lambda), \quad (33)$$

$$\alpha = \gamma, \quad \lambda_k = \bar{p}_k, \quad P_k(x) = \bar{P}_k(x) \quad (k = 1, \dots, \alpha). \quad (34)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, t) - \int_x^\infty \bar{K}(x, u) \bar{F}^+(u+t) du - \bar{F}^+(x+t) + \sum_{k=1}^{\gamma} \bar{P}_k(x + t) e^{i(x+t)\bar{p}_k} + \int_x^\infty \bar{K}(x, u) e^{i(u+t)\bar{p}_k} du = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

В силу теоремы (4) ядро удовлетворяет также основному уравнению

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, t) - \int_x^\infty \bar{K}(x, u) F^+(u+t) du - F^+(x+t) + \\ + \sum_{k=1}^{\alpha} P_k(x+t) e^{i(x+t)p_k} + \int_x^\infty \bar{K}(x, u) e^{i(u+t)p_k} du = 0, \end{aligned} \quad (35')$$

при этом

$$F^+(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [S(\lambda) - I] e^{ix\lambda} d\lambda.$$

Положим $\bar{K}(x, t) = 0$ при $t < x$. Из соотношения (25), на основании формулы обращения Фурье, получим

$$\bar{K}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [\bar{E}(x, -\lambda) - e^{-ix\lambda} I] e^{it\lambda} d\lambda, \quad -\infty < t < \infty. \quad (36)$$

Поэтому в силу (32) найдем, что

$$\int_x^\infty \bar{K}(x, u) \bar{F}^+(u+t) du = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [\bar{E}(x, \lambda) - e^{ix\lambda} I] \bar{S}(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda$$

при $t \geq x$. Отсюда и из (36) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} [\bar{E}(0, -\lambda) - \bar{S}(\lambda) \bar{E}(0, \lambda)] e^{it\lambda} d\lambda + \\ + \sum_{k=1}^{\gamma} [\bar{P}_k(0) \bar{E}(0) e^{it\lambda}]_{\lambda=p_k} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая, что $\int_{\gamma} e^{it\bar{p}_k} \cdot e^{-it\lambda} d\lambda = [i(\lambda - \bar{p}_k)]^{-1}$, равенство (37) перепишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left\{ [\bar{E}(0, -\lambda) - \bar{S}(\lambda) \bar{E}(0, \lambda)] + \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{M_k} \frac{A_{kj}}{(\lambda - \bar{p}_k)^j} \right\} e^{it\lambda} d\lambda = 0, \quad (38)$$

где A_{ik} — некоторые матрицы.

Положим

$$\bar{H}(\lambda) = \bar{E}(0, -\lambda) - \bar{S}(\lambda) \bar{E}(0, \lambda) + \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{j=1}^{M_k} \frac{A_{kj}}{(\lambda - \bar{p}_k)^j}.$$

Учитывая свойства $\bar{E}(0, \lambda)$ и $\bar{S}(\lambda)$, из последнего равенства получим

$$\bar{H}(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \text{ при } |\lambda| \rightarrow \infty \quad (39)$$

равномерно в каждой полосе $|Im \lambda| < \eta$, $\eta > \varepsilon_0$.

Пусть

$$H(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \bar{H}(\lambda) e^{it\lambda} d\lambda,$$

тогда при $t \geq 0$ $H(t) = 0$ поэтому

$$\bar{H}(\lambda) = \int_{-\infty}^0 H(t) e^{-it\lambda} dt. \quad (40)$$

Положим $0 < \eta < \epsilon_0$ и $\tau = Im \lambda$, тогда из (40) получим

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{it\lambda} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{H}(\sigma + i\eta)|^2 d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\tau - \eta)}}.$$

Отсюда, на основании (39), заключаем, что правая часть (40) голоморфна по λ при $Im \lambda > 0$, и при $Im \lambda > \eta$ ее модуль не превосходит

$C_{\eta} (Im \lambda - \eta)^{-\frac{1}{2}}$, где C_{η} — некоторая матрица с положительными элементами. Следовательно, $\tilde{H}(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение, голоморфное в полуплоскости $Im \lambda > 0$ и ограниченное в любой полуплоскости $Im \lambda \geq \eta$, $\eta > 0$.

Пусть $\bar{E}(\lambda)$ — решение задачи симметрической факторизации, соответствующее данным $\bar{S}(\lambda)$, $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r$, $M_1, \dots, M_r$. Так как $\bar{E}^{-1}(\lambda) \bar{E}(-\lambda) = \bar{S}(\lambda)$, то из (38) вытекает, что

$$\bar{E}(\lambda) \bar{E}(0, -\lambda) - \bar{E}(-\lambda) \bar{E}(0, \lambda) = \bar{E}(\lambda) \tilde{H}(\lambda) - \bar{E}(\lambda) \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{M_k} \frac{A_{jk}}{(\lambda - \bar{P}_k)^j}. \quad (41)$$

Левая часть в соотношении (41) голоморфна при $|Im \lambda| < \epsilon_0$ и равна $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ равномерно в каждой полосе $|Im \lambda| < \eta$, $\eta \leq \epsilon_0$. Правая часть в (41) голоморфна при $Im \lambda > 0$ и ограничена при $Im \lambda \geq \eta$, $0 \leq \eta < \epsilon_0$. Кроме того, левая часть (41) является нечетной функцией, поэтому допускает продолжение до целой функции, которая в силу теоремы Лиувилля равна нулю.

Таким образом,

$$\bar{E}(\lambda) \bar{E}(0, -\lambda) - \bar{E}(-\lambda) \bar{E}(0, \lambda) = 0,$$

откуда заключаем, что

$$S(\lambda) = \bar{S}(\lambda) \text{ и } F^+(x) = \bar{F}^+(x).$$

Тот факт, что $\alpha = \gamma$, $\lambda_k = \bar{P}_k$, $P_k(x) = \bar{P}_k(x)$, доказывается так же, как в работе [2]. Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность М. Г. Гасимову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович З. С., Марченко В. А. Обратная задача теории рассеяния Харьков, 1960.
2. Лянц В. Э. Матем. сборник 72, вып. 4, 1967.

М. А. Асланов

Сонлу дифференциал тэнликлэр системинин доғурдуғу
өз-өзүнә гошма олмајан оператор үчүн тәрс мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә әмсаллары комплекс олан вә сонсузлугда экспоненциал азалан дифференциал тэнликләр үчүн сәпилмә нәзәријјәсинин тәрс мәсәләси һәлл олунмушдур.

УДК 6Б 119

К. С. АХВЕРДИЕВ, А. К. НИКИТИН

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ГАЗА В ДЛИННОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В статье рассматривается осесимметричное установившееся течение вязкого газа в длинной круглой трубе постоянного сечения.

Процесс предполагается неизотермическим. Решение нелинейной системы уравнений ищется в виде рядов по целым положительным степеням малых параметров $\epsilon = r_0/l$, где r_0 — радиус трубы, l — длина трубы, и $\epsilon_1 = (\gamma - 1) M^2$, где $\gamma = C_p/C_v$, M — число Маха. Так как начиная с членов первого и второго порядка относительно ϵ и ϵ_1 решение приобретает громоздкий характер, авторы ограничиваются членами нулевого порядка включительно относительно этих параметров. Определяется поле скоростей и давлений. Устанавливается условие существования неизотермического движения, для случая, когда на границе температура является произвольной функцией z . При ϵ и $\epsilon_1 \leq 10^{-5}$ решение справедливо для чисел Рейнольдса $Re < 200$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившееся течение вязкого газа в круглой прямолинейной трубе постоянного сечения. Направим ось цилиндрической системы координат (r, φ, z) по оси трубы и будем считать трубу достаточно длинной, а трехмерный поток неизотермическим. В такой постановке, как известно [1], задача сводится к совместному решению уравнений Навье—Стокса

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - \text{grad} \left(P + \frac{2}{3} \mu \text{div} \bar{v} \right) + 2 \text{div} (\mu \cdot \dot{S}), \quad (1, 1)$$

уравнения неразрывности

$$+ \text{div} (\rho \bar{v}) = 0, \quad (1, 2)$$

баланса тепла

$$IC_p \rho \frac{dT}{dt} = \frac{dP}{dt} + 2\mu S^2 - \frac{2}{3} \mu (\text{div} \bar{v})^2 + IC_p \text{div} (\lambda \text{grad } T) \quad (1, 3)$$

и уравнения состояния

$$P = \rho RT \quad (1, 4)$$

при граничных условиях

$$\bar{v} = 0 \text{ и } r = r_0, \quad (1, 5)$$

$$T(r, \varphi, z) = T^*(z, \varphi) \text{ при } r = r_0,$$

при $r = 0$ $\bar{v}$ и $T(r, \varphi, z)$ — ограниченные функции.

Предполагается, что в начальном и конечном сечении трубы давление известно:

$$P = P_* \text{ при } z = 0;$$

$$P = P_{**} \text{ при } z = l.$$

К приведенным выше уравнениям надо добавить зависимость коэффициента вязкости от температуры. Эта зависимость, как известно, с достаточной степенью точности может быть представлена степенной формулой

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^n, \quad (1, 7)$$

где $0,5 \leq n \leq 1$. Для невысоких температур $n = 1$. Здесь $\bar{v}$ — вектор скорости частиц газа, μ — динамический коэффициент вязкости, $\lambda = \mu C_p / \sigma$ — коэффициент теплопроводности, T — абсолютная температура, ρ — плотность газа, $\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций, R — газовая постоянная, C_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, l — механический эквивалент тепла, σ — число Прандтля, а μ_* и T_* — соответственно, характерная вязкость и абсолютная температура.

Будем считать движение осесимметричным, т. е. положим $v_r = v_r(r, z)$, $v_z = v_z(r, z)$, $v_\varphi = 0$, $\rho = \rho(r, z)$, $P = P(r, z)$, так как поток неизотермический, тогда $\mu = \mu(r, z)$, $T = T(r, z)$. В этом случае система уравнений (1, 1) — (1, 3) и граничные условия (1, 5) примут вид:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\} - \frac{2\mu \cdot v_r}{r^2} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad (1, 8)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \quad (1, 9)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho \cdot r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0; \quad (1, 10)$$

$$IC_p \rho \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = v_r \frac{\partial P}{\partial r} + v_z \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \right.$$

$$+ 2 \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \left. \right\} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 +$$

$$+ \frac{IC_p}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right\}; \quad (1, 11)$$

$$v_r(r, z) = 0, \quad v_z(r, z) = 0 \text{ при } r = r_0;$$

$$v_z(r, z) = 0, \text{ а } v_r(r, z) \text{ при } r = 0 \text{ — ограниченная функция}; \quad (1, 12)$$

$$T(r, z) = T^{**}(z) \text{ при } r = r_0;$$

$$T(r, z) \text{ при } r = 0 \text{ — ограниченная функция.}$$

Перейдем к безразмерным переменным, положив

$$r = r_0 \cdot r', \quad z = l \cdot z', \quad v_r = r_0 l^{-1} U v_r', \quad v_z = U v_z', \quad \rho = \rho^* \rho', \quad P = P^* P', \quad (1, 13)$$

$$\mu = \mu_* \mu', \quad T = T_* T' \text{ где } r_0 \text{ — радиус трубы, } l \text{ — длина трубы,}$$

U — средняя скорость газового потока, ρ^* , P^* — плотность и давление, соответствующие характерной температуре T_* и вязкости μ_* .

Введем безразмерную функцию Ψ' по формулам

$$r' \rho' v_r' = \frac{\partial \Psi'}{\partial z'}, \quad r' \rho' v_z' = - \frac{\partial \Psi'}{\partial r'}. \quad (1, 14)$$

Используя (1, 13) и (1, 14) и отбрасывая штрихи у безразмерных величин, можем переписать уравнения (1, 8), (1, 9), (1, 11), (1, 4) и (1, 7) в безразмерном виде;

$$Re \left\{ \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \varepsilon^2 \left(- \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} =$$

$$= A \frac{\partial P}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \mu}{\partial r} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{r^2 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} +$$

$$+ \varepsilon \mu \left\{ \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{4}{3} \frac{1}{r^3 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{4}{3r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \left. \right\} + \varepsilon^3 \mu \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ \varepsilon \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} + \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\}; \quad (1, 15)$$

$$Re \left\{ \varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \varepsilon \left(- \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} =$$

$$= - A_1 \frac{\partial P}{\partial z} - \varepsilon^2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{2}{3r^2 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} +$$

$$+ \varepsilon^2 \mu \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{3r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \right.$$

$$- \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \left. \right\};$$

$$Re \left(\varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{Re(\gamma - 1)}{\gamma} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial r} +$$

$$+ \frac{Re(\gamma - 1)}{\gamma} \cdot \varepsilon \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \varepsilon^2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \mu \left[\frac{4}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\}^2 + \right.$$

$$+ \frac{4}{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\}^2 + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) -$$

$$- \frac{4}{3} \frac{1}{r^2 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) +$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{1}{r^2 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \left. \right] + \varepsilon_1 \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\}^2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon^3 \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right);$$

$$P = T \rho, \quad \mu = T,$$

Здесь

$$A = \frac{Re}{\gamma M^2}, \quad A_1 = \frac{Re}{\gamma M^2} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{r_0}{l}, \quad \varepsilon_1 = (\gamma - 1) M^2, \\ Re = \frac{\rho^* U r_0}{\mu^*}, \quad M^2 = \frac{U^2 \rho^*}{\gamma P^*}, \quad (\gamma - 1) M^2 = \frac{U^2}{I C_p T^*}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}.$$

Уравнение неразрывности при этом удовлетворится тождественно. Граничные условия (1, 12) запишутся теперь в такой форме:

$$v_r(r, z) = 0, \quad v_z(r, z) = 0 \quad \text{при } r = 1; \\ v_r(r, z) = 0, \quad v_z(r, z) \text{ при } r = 0 \text{ — ограниченные функции;} \quad (1, 16) \\ T(r, z) = T^{**}(z) \quad \text{при } r = 1;$$

$T(r, z)$ при $r = 0$ — ограниченная функция,

Будем предполагать, что

$$T^{**}(z) = \sum_{i,j=0}^n \Phi_{ij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j. \quad (1, 16^1)$$

Поскольку в уравнения движения и притока энергии (1, 15) входят малые параметры ε и ε_1 , будем искать решение нашей задачи в виде двойных рядов по степеням этих параметров:

$$\Psi = \sum_{i,j=0}^n \Psi_{ij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j; \quad \rho = \sum_{i,j=0}^n \rho_{ij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j; \quad P = \sum_{i,j=0}^n P_{ij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j; \quad (1, 17)$$

$$T = \sum_{i,j=0}^n T_{ij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j; \quad v_r = \sum_{i,j=0}^n v_{rij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j; \quad v_z = \sum_{i,j=0}^n v_{zij} \varepsilon^i \varepsilon_1^j.$$

Подставляя (1, 17) в систему (1, 15) и в граничные условия (1, 16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε и ε_1 , для нулевого приближения получим следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial P_{00}}{\partial r} = 0; \quad A_1 \frac{\partial P_{00}}{\partial z} = -\rho_{00} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r \rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} \right) - \frac{\rho_{00}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} \right); \quad \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \frac{\partial T_{00}}{\partial r} + \frac{\rho_{00}}{r} \frac{\partial T_{00}}{\partial r} + \rho_{00} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial r^2} = 0; \quad (1, 18)$$

$$v_{r00} \cdot \rho_{00} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial z}; \quad v_{z00} \cdot \rho_{00} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r}; \quad P_{00} = T_{00} \cdot \rho_{00}; \quad \mu_{00} = T_{00},$$

$$\frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial z} = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad (1, 19)$$

$$\frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial z} \quad \text{при } r = 0;$$

$$T_{00}(r, z) = \Phi_{00}(z) \quad \text{при } r = 1.$$

2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Найдем решение краевой задачи (1, 18)–(1, 19). Из первого уравнения системы (1, 18) видно, что P_{00} есть функция только z , т. е. $P_{00} = \varphi(z)$. Подставляя P_{00} во второе уравнение системы (1, 18) и преобразуя его, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\rho_{00} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} \right) \right] = -A_1 \varphi'(z) \cdot r.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\rho_{00} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho_{00}} \frac{\partial \Psi_{00}}{\partial r} \right) = -A_1 \varphi'(z) \frac{r^2}{2} + F^*(z). \quad (2, 1)$$

Третье уравнение системы (1, 18) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r T_{00} \frac{\partial T_{00}}{\partial r} \right) = 0.$$

Интегрируя его два раза по r , получим

$$T_{00} = \varphi_1(z). \quad (2, 2)$$

Уравнение (2, 1) с учетом (2, 2) после двукратного интегрирования примет вид

$$\Psi_{00} = -\frac{A_1 \varphi(z) \varphi'(z)}{\varphi_1^2(z)} \cdot \frac{r^4}{16} + \frac{\varphi(z) \cdot F_1(z)}{\varphi_1(z)} \cdot \frac{r^2}{2} + F^2(z), \quad (2, 3)$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ и суть произвольные функции z , а функция $F^*(z)$ в уравнении (2, 1) в силу ограниченности функции T_{00} при $r = 0$ обратится в нуль. Функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ определяются из граничных условий (1, 19). После необходимых вычислений окончательно получим

$$\Psi_{00} = -\frac{A_1 C_1}{8} \left(-\frac{r^4}{2} + r^2 \right) + \text{const}; \quad \rho_{00} = \frac{\varphi(z)}{T_{00}}; \quad (2, 4)$$

$$T_{00} = \mu_{00} = \frac{V C_1}{C_1} \cdot \sqrt{\varphi(z) \cdot \varphi'(z)}; \quad v_{z00} = -\frac{A_1 V C_1}{4} \cdot \frac{\sqrt{\varphi(z) \varphi'(z)}}{\varphi(z)} (1 - r^2);$$

$$v_{r00} = 0; \quad P_{00} = \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ определяется из уравнения

$$\varphi(z) \cdot \varphi'(z) = \Phi_{00}^2(z) \cdot C_1.$$

При решении задачи мы ограничились членами нулевого порядка относительно ε и ε_1 . Решение уравнений последующих приближений не представляет трудности, но поскольку оно громоздко и не дает существенной поправки, в статье не приводится.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, ГИТТЛ, М., 1957.

К. С. Хагвердијев, А. К. Никитин

Өзлү газын даирэви узун боруда гејри-изотермик һәрәкәти

ХҮЛАСӘ

Ен кәсији сабит олан узун даирэви боруда өзлү газын оха көрә симметрик гәрарлашмыш һәрәкәтинә бахылып. Просесин гејри-изотермик олдуғу фәрз едилип. Гејри-хәтти тәнликләр системинин һәлли $\varepsilon = r_0/l$ кичик параметринин дәрәчәләринә көрә сыра шәклиндә ахтарылып. r_0 борунун радиусу, l —борунун узунлуғу вә $\varepsilon_1 = (\gamma - 1) M^2$; бурада $\gamma = C_p/C_v$, M —Мах әдәдидир.

Белә ки, ε вә ε_1 -ин биринчи дәрәчәләриндән башлајараг һәлли чох мурәккәб шәкил алдығындан муәллифләр бу параметрин биринчи дәрәчәси илә кифәјәтләнирләр. Сүр'әтләр вә тәзјигләр мејданы тәјјин едилип. Сәрһәддә температурун t ихтијари функцијасы олдуғу һалда, гејри-изотермик һәрәкәтин варлығы муәјјән олунур.

ε вә $\varepsilon_1 \leq 10^{-5}$ олан һалда һәлл Рејнолдс әдәдинин $Re < 200$ гиј-мәгиндә доғрудур.

УДК 539.374

Ж. И. ТАИРОВА

ТЕОРЕМА О ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ В РАМКАХ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ

Пусть данное тело в условиях неравномерного температурного нагрева T' , в зависимости от которого меняются модуль сдвига $G(T')$ и предел текучести при чистом сдвиге $\tau_s(T')$, подвергается механическому воздействию объемных сил R_i , поверхностных сил P_i , заданных на некоторой части S_1 граничной поверхности S , при перемещениях u_{i0} , заданных на $S_2 = S/S_1$ ($i = 1, 2, 3$). И пусть для данного тела в рамках теории течения (используется условие пластичности Треска—Сен-Венана) задача первого упруго-пластического нагружения при условии, что [4, 5]

$|\varphi_{kl}| = |\varphi_{kl}(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, H'(T'))| = |\sigma'_k - \sigma'_l - H'(T')(\epsilon_k^{(p')} - \epsilon_l^{(p')})|$ — максимальная из разностей ($k, l = 1, 2, 3; k \neq l; i, j = 1, 2, 3$), решена.

Пусть программа второго нагружения силами R_i, P_i (на S_1) с перемещениями u_{i0} (на S_2) ($i = 1, 2, 3$) такова, что в пластических областях максимальная из разностей

$|\varphi_{kl}| = |\varphi_{kl}(\sigma''_{ij}, \epsilon''_{ij}, H''(T''))| = |\sigma''_k - \sigma''_l - H''(T'')(\epsilon_k^{(p'')} - \epsilon_l^{(p'')})|$ ($k, l = 1, 2, 3; k \neq l; i, j = 1, 2, 3$) останется разность с прежними индексами k, l , то есть

Пусть $\max |\varphi'_{kl}| \sim \max |\varphi''_{kl}|$, (1)

$\text{sgn } \varphi'_{kl} = -\text{sgn } \varphi''_{kl}$. (2)

Условия (1) и (2) означают выход в пространстве главных напряжений на параллельную по отношению к первому нагружению плоскость. Тогда условие

$|\varphi_{kl}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, H''(T''))| = \varphi_{kl}(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, H'(T')) - \varphi_{kl}(\sigma''_{ij}, \epsilon''_{ij}, H''(T''))$ (3)

($k, l = 1, 2, 3; k \neq l; i, j = 1, 2, 3$) является необходимым и достаточным, чтобы текущие напряжения, деформации, перемещения определялись, соответственно, разностями:

$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} - \bar{\sigma}_{ij}, \epsilon'_{ij} = \epsilon'_{ij} - \bar{\epsilon}_{ij}, u'_i = u'_i - \bar{u}_i$. (4)

Здесь $\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, u'_i$ — компоненты тензоров истинных напряжений, приведенных деформаций и перемещений перед началом второго нагружения, $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, \bar{u}_i$ — компоненты тензоров напряжений, деформаций и перемещений, являющихся решением упруго-пластической задачи для чисто тепловой деформации $\bar{\epsilon}_T$, нагрузок $\bar{R}_i = R'_i - R_i, \bar{P}_i = P'_i - P_i$ (на S_1) и перемещений $\bar{u}_{i0} = u_{i0} - u'_{i0}$ (на S_2) фиктивного тела с характеристикой упрочнения $H''(H'(T'), T'')$, предел текучести которого равен $\bar{\tau}_s(\tau_s(T'), T'')$. Как только аппроксимация кривой $\sigma \sim \epsilon$ нами принята, предел текучести $\bar{\tau}_s$ и константа H'' становятся определенными. Упруго-пластическая граница фиктивного тела $\bar{\rho}$ является границей ρ областей упругих и пластических деформаций истинного тела при втором нагружении.

В (4) имеем:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ij} &= \frac{G(T')}{G(T'')} (\epsilon_{ij}^{(e)'} + \epsilon'_{Tij}) + \epsilon_{ij}^{(p)'}; \\ \bar{\epsilon}_T &= \frac{G(T')}{G(T'')} \epsilon'_T - \epsilon''_T; \\ \epsilon'_T &= \alpha_T T', \quad \epsilon''_T = \alpha_T T''; \\ \epsilon'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

где α_T — коэффициент линейного расширения материала.

Доказательство. Используя гипотезу Франца Неймана и учитывая возможность разложения механической слагаемой $\epsilon_{ij}^{(e)'}$ компонентов тензора деформаций ϵ_{ij} на упругие ($\epsilon_{ij}^{(e)'}$) и пластические ($\epsilon_{ij}^{(p)'}$) слагаемые, имеем

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ij} &= \epsilon_{ij}^{(e)'} + \epsilon_{ij}^{(p)'} + \epsilon'_{Tij}, \\ \epsilon'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагаем, что влияние температуры учитывается только в обобщенном законе Гука. Тогда в упругих и пластических областях для упругих слагаемых $\epsilon_{ij}^{(e)'}$ деформаций ϵ_{ij} будут иметь место уравнения

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{(e)'} &= \frac{1}{2G(T')} \left(\epsilon'_{ij} - \frac{\nu \sigma'_{ij}}{1 + \nu} \right), \\ \sigma' &= 3K(T') \epsilon^{(e)'}, \end{aligned} \quad (6)$$

а в пластических областях для пластических слагаемых $\epsilon_{ij}^{(p)'}$ деформаций ϵ_{ij} будут выполняться закон течения

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(p)'} = \dot{\Lambda}_{kl} \frac{\partial F'_{kl}}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (7)$$

и условие текучести

$$F'_{kl} = |\sigma'_k - \sigma'_l - H'(T')(\epsilon_k^{(p')} - \epsilon_l^{(p')})| - 2\tau'_s(T') = 0. \quad (8)$$

Нетрудно показать, что учет температурного фактора в (8) влияет лишь на значения $H'(T')$ и $\tau'_s(T')$, но никак не влияет на вид функции F'_{kl} и, следовательно, доказательства теоремы при существовании температурного поля и при его отсутствии совпадают. Итак, определение напряженного и деформированного состояния тела при первом нагружении сводится к решению следующей замкнутой системы уравнений:

$$\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + R'_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$(I) \quad \frac{\partial^2 \epsilon'_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \epsilon'_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon'_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon'_{kj}}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{j=1,2,3} \sigma'_{ij} l_j = P'_i \quad (\text{на } S_1), \quad u'_i|_{s_2} = u'_{i0} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и уравнений (5) — (8).

Пусть задача первого нагружения решена. Введем разности

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon'_{ij} - \epsilon''_{ij}, \quad \bar{u}_i = u'_i - u''_i. \quad (9)$$

При приложении сил R'_i , P'_i упругое деформированное состояние и соответствующее ему напряженное будут определяться по теореме об упругой разгрузке А. А. Ильюшина [1], обобщенной Ю. Н. Шевченко [3] на случай существования температурного фактора и зависимости модуля сдвига G от T . В случае возникновения новых пластических областей [2] для функций, отмеченных двумя штрихами, имеем ниже следующую систему уравнений (II), решение которой описывает напряженное и деформированное состояние тела при втором нагружении:

$$\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial x_j} + R''_i = 0, \quad \epsilon''_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u''_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u''_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon''_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \epsilon''_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \epsilon''_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon''_{kj}}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3);$$

$$(II) \quad \sum \sigma''_{ij} l_j = P''_i \quad (\text{на } S_1), \quad u''_i|_{s_2} = u''_{i0} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\epsilon^{(e)''}_{ij} = \frac{1}{2G(T'')} \left(\sigma''_{ij} - \frac{\nu \sigma'' \delta_{ij}}{1 + \nu} \right); \quad \sigma'' = 3K(T'') \epsilon^{(e)''} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\epsilon^{(p)''}_{ij} = \Lambda''_{kl} \frac{\partial F''_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \Lambda''_{kl} \geq 0;$$

$$F''_{kl} = |\varphi''_{kl}| - 2\tau''_s = |\sigma''_k - \sigma''_l - H''(T'')(\epsilon^{(p)''}_k - \epsilon^{(p)''}_l)| - 2\tau''_s = 0.$$

Нетрудно доказать, что при выполнении (1), (2) условие (3) является необходимым и достаточным для того, чтобы ниже следующая система (III) уравнений относительно функций $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$, $\bar{u}_i$:

$$\sum_{j=1,2,3} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{R}_i = 0, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{\epsilon}_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{\epsilon}_{kj}}{\partial x_i} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3);$$

$$(III) \quad \sum \bar{\sigma}_{ij} l_j = \bar{P}_i \quad (\text{на } S_1), \quad \bar{u}_i|_{s_2} = \bar{u}_{i0} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\bar{\epsilon}^{(e)}_{ij} = \frac{1}{2G(T'')} \left(\bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu \bar{\sigma} \delta_{ij}}{1 + \nu} \right), \quad \bar{\sigma} = 3K \bar{\epsilon}^{(e)} \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\bar{\epsilon}^{(p)}_{ij} = \bar{\Lambda}_{kl} \frac{\partial \bar{F}_{kl}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}, \quad \bar{\Lambda}_{kl} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad k, l = 1, 2, 3; \quad k \neq l);$$

$$\bar{F}_{kl} = |\bar{\varphi}_{kl}| - 2\bar{\tau}_s = |\bar{\sigma}_k - \bar{\sigma}_l - \bar{H}(T'')(\bar{\epsilon}^{(p)}_k - \bar{\epsilon}^{(p)}_l)| - 2\bar{\tau}_s = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3; \quad k \neq l)$$

и система уравнений (II) были равносильными. $H'' = \bar{H}$, так как физическая константа H инвариантна относительно преобразования системы координат σ'_{ij} , ϵ'_{ij} . Однако решать систему (III) не приходится.

Действительно, сравнивая систему уравнений (III) для величин $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$, $\bar{u}_i$ с соответствующей системой уравнений (I) первого нагружения, заключаем, что при выполнении (1), (2) и (3) задача определения $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\epsilon}_{ij}$, $\bar{u}_i$ сводится к задаче исследования первого нагружения для материала с характеристикой упрочнения $H''(H')$ и имеющего предел текучести $\tau_s(\tau'_s)$. При этом внешние силы R'_i , P'_i заменяются разностями $\bar{R}_i = R'_i - R''_i$, $\bar{P}_i = P'_i - P''_i$ (на S_1), перемещения $\bar{u}_{i0}$, заданные на части S_2 граничной поверхности тела S , — разностями $\bar{u}_{i0} = u'_{i0} - u''_{i0}$. Искомые величины определяются с помощью соотношений (4). Из непрерывности σ''_{ij} на границе $\bar{\rho}$ областей упругого и пластического деформирования при втором нагружении и непрерывности σ_{ij} на фиктивной упруго-пластической границе $\bar{\rho}$ с учетом (4) получаем, что $\bar{\rho}$ совпадает с $\bar{\rho}$.

Следствие. Для случая простого нагружения [1] теорема имеет место всегда. Действительно, фиксируя индексы k, l , то есть фиксируя в пространстве главных напряжений выход на конкретную из граней шестиугольной призмы, из определения простого нагружения имеем, что условия (1) и (2) выполнимы всегда. Проверим, имеют ли место условия (3). Согласно определению простого нагружения

$$\sigma''_{ij} = \beta(t) \sigma'_{ij}, \quad \epsilon''_{ij} = \gamma(t) \epsilon'_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (10)$$

где параметр $\beta(t)$ определенный, а параметр $\gamma(t)$ зависит от упруго-пластических свойств материала. Тогда разности (9) принимают вид

$$\bar{\sigma}_{ij} = (1 - \beta) \sigma'_{ij}, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = (1 - \gamma) \epsilon'_{ij}. \quad (11)$$

Очевидно, что

$$\sigma''_k = \beta(t) \sigma'_k, \quad \bar{\sigma}_k = (1 - \beta) \sigma'_k \quad (k = 1, 2, 3); \quad (12)$$

$$\epsilon''_k = \gamma(t) \epsilon'_k, \quad \bar{\epsilon}_k = (1 - \gamma) \epsilon'_k \quad (k = 1, 2, 3); \quad (13)$$

$$\epsilon^{(e)''}_k = \beta(t) \epsilon^{(e)'}_k, \quad \bar{\epsilon}^{(e)}_k = (1 - \beta) \epsilon^{(e)'}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Образует функции $\varphi_{kl}(\sigma''_{ij}, \epsilon''_{ij}, H''(T''))$ и $|\varphi_{kl}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, H''(T''))|$. Подставив в их выражения, соответственно, равенства (12), (13) и (14), учитывая, что

$$\epsilon^{(p)''}_k = \epsilon''_k - \epsilon^{(e)''}_k, \quad \bar{\epsilon}^{(p)}_k = \bar{\epsilon}_k - \bar{\epsilon}^{(e)}_k \quad (k = 1, 2, 3),$$

получим

$$\varphi_{kl}(\sigma''_{ij}, \epsilon''_{ij}, H'') = \beta \left\{ \sigma'_k - \sigma'_l - H'' \left[\frac{\gamma}{\beta} (\epsilon'_k - \epsilon'_l) - (\epsilon^{(e)'}_k - \epsilon^{(e)'}_l) \right] \right\},$$

$$|\varphi_{kl}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, H'')| =$$

$$= \left| (1 - \beta) \left\{ \sigma'_k - \sigma'_l - H'' \left[\frac{1 - \gamma}{1 - \beta} (\epsilon'_k - \epsilon'_l) - (\epsilon^{(e)'}_k - \epsilon^{(e)'}_l) \right] \right\} \right|,$$

$\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$. Так как материал тела линейно упрочняющийся, то $H'' \gamma = H' \beta$. Тогда

$$\varphi_{kl}(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, H') = \beta \varphi(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, H'),$$

$$|\varphi_{kl}(\bar{\sigma}_{ij}, \bar{\epsilon}_{ij}, H'')| = (1 - \beta) \varphi(\sigma'_{ij}, \epsilon'_{ij}, H')$$

и очевидно, что (3) выполняется тождественно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. I. ГИТТЛ, И., 1948.
2. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагрузениях. Изд. МГУ, 1965.
3. Шевченко Ю. Н. Теоремы о разгрузке в теории малых упруго-пластических деформаций при неравномерном нагреве. Прикладная механика, т. 2, вып. 7, 1966.
4. Ишлинский А. Ю. Укр. матем. ж., 1954, № 3.
5. Prager W. A new method of analyzing stress and strains in workhargening plastic solids, Journ. Appl. Mech, t. 23, 1956.

Ж. И. Таhiroва

Ахма нэзэријјэси эсасында гејри-мүнтэзэм гыздырма
халында дэјишэн јүклэнмэ теореме

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә температур саһәси олан вә олмајан һалда чари кәркин-лик вә деформасија халыны тәјин етмәјә имкан верән дэјишән јүкләнмэ теореме исбат едилір. Көстәрилир ки, садә јүкләнмэ халында исбат олунан теорем һәмишә доғрудур.

УДК 0205

Н. Т. АГАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕРМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПЛАСТ

Одним из методов, используемых для повышения нефтеотдачи при эксплуатации нефтяных месторождений, является закачка в пласт горячей воды. В данной статье рассматривается вопрос об определении поля температуры как при закачке воды в пласт, так и при подогреве призабойной зоны.

§ 1. ЗАКАЧКА ГОРЯЧЕЙ ВОДЫ В ПЛАСТ

Поле температуры в пласте с учетом конвективного переноса тепла определяется дифференциальным уравнением

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

при тех или иных граничных и начальных условиях. Рассмотрим полуограниченный пласт, на границе $x=0$ которого температура изменяется по закону

$$T = S_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Начальную температуру пласта принимаем равной нулю (т. е. отсчет температуры ведется от ее начального значения). Кроме того, исходя из физических соображений, полагаем, что температура остается ограниченной при $x \rightarrow \infty$. Заметим, что уравнение (1) и наши условия не учитывают перетока тепла в выше- или нижележащие пласты. Решение задачи с учетом распространения тепла в соседние пласты будет опубликовано нами позднее.

Для решения задачи применим оператор Лапласа к уравнению (1) и граничному условию (2). С учетом начального условия из (1) получим

$$\bar{T}'' - \frac{\beta}{\kappa} \bar{T}' - \frac{s}{\kappa} \bar{T} = 0 \quad (3)$$

при

$$\bar{T} \Big|_{x=0} = T_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}; \quad \bar{T} \Big|_{x \rightarrow \infty} \text{ ограничено.}$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\bar{T} = A e^{\left[\frac{\beta}{2\kappa} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} \right] x} \quad (4)$$

где A определяется из граничного условия:

$$A = T_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Тогда

$$\bar{T} = T_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2} e^{\left[\frac{\beta}{4\kappa^2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} \right] x},$$

или

$$\bar{T} = T_0 e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \frac{e^{-\left[\sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} \right] x}}{s} - T_0 e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \frac{e^{-\left[\sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} \right] x}}{s}. \quad (5)$$

Обратное преобразование Лапласа с применением теоремы свертки дает

$$T = T_0 \frac{e^{\frac{\beta}{2\kappa} x}}{2} \left\{ e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta t}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta t}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \right. \\ \left. - \omega \int_0^t \left[e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta \tau}{\sqrt{\kappa \tau}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta \tau}{\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right] \sin \omega(t - \tau) d\tau \right\}. \quad (6)$$

Формула (6) определяет поле температуры пласта в любой момент времени.

Примечания

1. Если рассмотреть начальный период процесса, т. е. при малых значениях времени t (при больших значениях s), то из (5) будем иметь

$$\bar{T} = T_0 e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} x}}{s} - T_0 e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \omega^2 \frac{1}{s^2} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4\kappa^2} + \frac{s}{\kappa}} x}}{s},$$

тогда

$$T = T_0 \frac{e^{\frac{\beta}{2\kappa} x}}{2} \left\{ e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta t}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta t}{2\sqrt{\kappa t}} \right) - \right. \\ \left. - \omega^2 \int_0^t \left[e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta \tau}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta \tau}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right] d\tau \right\}. \quad (7)$$

Сравнение формул (6) и (7) показывает, что колебательный характер процесса начинает чувствоваться только через определенный промежуток времени.

2. Решая ту же задачу при условии

$$T|_{x=0} = T_0 [1 - \cos \omega t],$$

получим

$$T = T_0 \omega \frac{e^{\frac{\beta}{2\kappa} x}}{2} \int_0^t \left[e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta \tau}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta \tau}{2\sqrt{\kappa \tau}} \right) \right] \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

И в этом случае при малых значениях времени t (при больших s) имеем

$$T = T_0 \omega^2 \int_0^t \int_0^{\tau} \left[e^{\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x + \beta z}{2\sqrt{\kappa z}} \right) + e^{-\frac{\beta}{2\kappa} x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x - \beta z}{2\sqrt{\kappa z}} \right) \right] dz d\tau,$$

т. е. и в этом случае периодичности изменения граничной температуры в начальный период процесса не чувствуется.

§ 2. ПОДОГРЕВ ПЛАСТА

Если рассмотреть задачу о подогреве пласта с учетом периодического изменения температуры на границе $x=0$, то для ее решения необходимо решить уравнение

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

при условиях:

$$T|_{x=0} = T_0 \cos \omega t; \quad (2)$$

$$T|_{x \rightarrow \infty} \text{ ограничено.}$$

Начальную температуру пласта принимаем постоянной и равной T_1 , потерей тепла в кровлю и подошву пласта пренебрегаем.

Решая эту задачу методом функций Грина, получим

$$T = T_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) + \frac{T_0 x}{2\sqrt{\pi \kappa}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} \cos \omega \tau d\tau. \quad (3)$$

Эта формула определяет поле температуры для любого момента времени.

Примечания.

1. При достаточно больших значениях времени t первое слагаемое из (3) быстро стремится к нулю и тогда

$$T = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} x} \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} x \right). \quad (4)$$

Эта формула показывает, что при периодическом изменении граничной температуры довольно быстро исчезает влияние начальной температуры на температурное поле.

2. Из формулы (4) видно, что амплитуда колебаний не зависит от времени. Она зависит от положения точки и убывает по мере удаления от границы $x=0$. Последнее сильно зависит от значения частоты ω . Длина температурной волны выражается формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}}.$$

Причем, чем больше частота ω колебания, тем быстрее падает его амплитуда.

3. Фаза температурной волны запаздывает на величину $\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} x$.

4. Решая ту же задачу § 2, при условиях

$$\begin{aligned} T|_{x=0} &= T_0 [1 - \cos \omega t] & \text{и} \\ T|_{t=0} &= 0 & \text{получим} \end{aligned}$$

$$T = T_0 \omega \int_0^t \left[1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa\tau}} \right] \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (5)$$

Заметим, что при малых значениях времени t имеем

$$T = T_0 \omega^2 \int_0^t \int_0^{\bar{z}} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\kappa z}} \right) dz d\tau, \quad \text{т. е.}$$

и в этом случае периодичности изменения граничной температуры в начальный период процесса не чувствуется.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю проф. М. А. Гусейн-Заде за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., "Наука", 1964.
2. Паркус Г. Неустойчивые температурные напряжения. Физматиз, М., 1963.
3. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. "Недра", М., 1965.

Н. Н. Агајев

Лаја олан истилик тә'сиринин бә'зи мәсәләләри

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә лајын сәрһәддиндә јерләшән вә температуру периодик олараг дәјишән истилик мәнбәјинин јаратдығы истилик мејданына бахылып.

О чүмләдән лајын әтраф зонасыны гыздырдыгда вә ја она исти су вурулдугда әмәлә кәлән истилик мејданыны тә'јин едән һесаблама дүстурлары кәстәрилир.

З. А. АЛИЕВА

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА В КЛАССЕ H_s^a

Статья посвящена применению теоретико-числовых сеток к приближенному решению нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна в классе H_s^a [1]. Под классом H_s^a будем понимать следующее: пусть $a \geq 1$ — целое; будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит классу H_s^a , если в единичном s -мерном кубе она имеет непрерывные производные вида

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_s^{n_s}} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq n \leq a s \\ 0 \leq n_v \leq a \end{array} \right).$$

В тех случаях, когда необходимо указать величину константы C , ограничивающей в единичном кубе модули производных $\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \dots \partial x_s^{n_s}}$,

вместо H_s^a будем писать $H_s^a(C)$.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = g(x_1, \dots, x_s) + \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \times \\ \times f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) dy_1 \dots dy_s. \quad (1)$$

Пусть $g(x_1, \dots, x_s) \in H_s^a(C/2)$, $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \in H_{2s}^a(C_1)$.

Пусть далее функция $f(y_1, \dots, y_s, u)$, определенная в

$$D \{ 0 \leq y_v \leq 1; -\infty < u < \infty \}, \quad v = \overline{1, s},$$

имеет непрерывные производные

$$\frac{\partial^n f}{\partial y_1^{n_1} \dots \partial y_s^{n_s} \partial u^{n+1}} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq n = \sum_{v=1}^{s+1} n_v \leq a(s+1) \\ 0 \leq n_v \leq a \quad v = \overline{1, s+1} \end{array} \right),$$

ограниченные числом M_1 .

Рассмотрим для $u = \varphi(y_1, \dots, y_s) \in H_s^a$ сложную функцию

$$F(y_1, \dots, y_s) = f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)).$$

Легко видеть, что $F(y_1, \dots, y_s)$ имеет производную

$$\frac{\partial^n F}{\partial y_1^{n_1} \dots \partial y_s^{n_s}} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq n \leq a s \\ 0 \leq n_v \leq a \quad v = \overline{1, s} \end{array} \right),$$

причем существует константа M , зависящая только от C_1 и M_1 , такая, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial^n F}{\partial y_1^{n_1} \dots \partial y_s^{n_s}} \right| \leq M, \text{ т. е. } F(y_1, \dots, y_s) \in H_s^n(M).$$

Предположим, что $f(y_1, \dots, y_s, u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L по u , т. е.

$$|f_1(y_1, \dots, y_s, u_1) - f_2(y_1, \dots, y_s, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|.$$

Можно доказать, что в метрике равномерной сходимости уравнение [1] при малых λ имеет единственное решение в классе $H_s^a(C)$.

Действительно, обозначим

$$\psi(x_1, \dots, x_s) = A\varphi = \lambda \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \times \\ \times f[y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)] dy_1 \dots dy_s.$$

Легко видеть, что $\frac{\partial^{a_1+\dots+a_s} \psi}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_s^{a_s}}$ существует и непрерывно в G_s ,

$$\left| \frac{\partial^{a_1+\dots+a_s} \psi}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_s^{a_s}} \right| \leq |\lambda| B(C_1, M).$$

Тогда при $|\lambda| B \leq \frac{C}{2}$ для $\psi \in H_s^a(C/2)$ выполняется

$$A\psi \in H_s^a(C/2),$$

а при $|\lambda| C_1 L < 1$ оператор A есть оператор сжатия и выполняется условие принципа сжатых отображений. Поэтому уравнение (1) при

$$|\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{1}{C_1 L}, \frac{C}{2B} \right\}$$

имеет единственное решение в классе $H_s^a(C)$. Запишем его в виде

$$\varphi(P) = g(P) + \lambda \int_{G_s} K(P, Q) f[Q, \varphi(Q)] dQ. \quad (2)$$

В уравнении (2) вместо P возьмем

$$M_j = M_j \left(\tau_a \left(\left\{ \frac{ja_1}{N} \right\} \right), \tau_a \left(\left\{ \frac{ja_2}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{ja_s}{N} \right\} \right) \right),$$

тогда, согласно теореме 1 в [2], получим

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) f[y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)] \times \\ \times dy_1 \dots dy_s = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N K \left[x_1, \dots, x_s, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \right] \times \\ \times f \left[\tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right), \varphi \times \right. \\ \times \left. \left(\tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \right) \right] \times \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \times \\ \times \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) + O \left(\frac{\ln^a N}{N^a} \right),$$

где τ_a удовлетворяет условиям:

$$1) 0 = \tau_a(0) < \tau_a(z') < \tau_a(z'') < \tau_a(1) = 1, 0 < z' < z'' < 1;$$

$$2) |\tau_a^{(\kappa)}(z)| < A_1, 0 \leq \kappa \leq a+1;$$

$$3) \tau_a^{(\kappa)}(0) = \tau_a^{(\kappa)}(1) = 0, 0 \leq \kappa \leq a;$$

$\{z\}$ — дробная часть z ;

$$\varphi \left[\tau_a \left(\left\{ \frac{ja_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{ja_s}{N} \right\} \right) \right] = g \left[\tau_a \left(\left\{ \frac{ja_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{ja_s}{N} \right\} \right) \right] + \\ + \frac{\lambda}{N} \sum_{\kappa=1}^N K \left[\tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right), \tau_s \times \right. \\ \times \left. \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \right] \times f \left[\tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right), \right. \\ \times \left. \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right), \varphi \left(\tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right), \dots, \tau_a \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \right) \right] \times \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) + O \left(\frac{\ln^a N}{N^a} \right) \text{ или}$$

$$\varphi(M_j) = g(M_j) = \frac{\lambda}{N} \sum_{\kappa=1}^N K(M_j, M_\kappa) f[M_\kappa, \varphi(M_\kappa)] \times \\ \times \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) + O \left(\frac{\ln^a N}{N^a} \right).$$

Отбросив остаточный член, получим

$$z_j = b_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{\kappa=1}^N K(M_j, M_\kappa) f[M_\kappa, z_\kappa] \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right). \quad (3)$$

Пусть $f(M_\kappa, z_\kappa)$ удовлетворяет условию Липшица по z_κ с константой L . Обозначим через R множество

$$\{ \{ \varphi(M_j) \}, |\varphi(M_j)| \leq C \}.$$

Далее пусть множество R_1 состоит $z_1, \dots, z_\kappa, \dots, z_N$, удовлетворяющих неравенству

$$|z_\kappa| \leq C \quad (\kappa = 1, 2, \dots, N).$$

Так как $|\tau_a(z)| < A_1, |K(M_j, M_\kappa)| \leq C_1$,

$$|f(M_\kappa, z_\kappa)| \leq M \quad (\kappa, j = \overline{1, N}),$$

то легко проверить, что при

$$|\lambda| \leq \lambda^* = \min \left\{ \frac{C}{2A_1^s C_1 M}, \frac{1}{A_1^s C_1 L} \right\}$$

система (3) имеет единственное решение в R_1 , причем ограниченное числом C .

Отметим, что в случае, если алгебраическая система (3) не решается точными методами, то ее приходится решать приближенно. В последнем случае можно применять метод последовательных приближений.

Пусть z_j^* суть точное решение системы (3):

$$z_j^* = b_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{\kappa=1}^N K(M_j, M_\kappa) f(M_\kappa, z_\kappa^*) \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right);$$

$$z_j^{(n)} = b_j + \frac{\lambda}{N} \sum_{\kappa=1}^N K(M_j, M_\kappa) f(M_\kappa, z_\kappa^{(n-1)}) \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \dots \tau_a' \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \times \\ \times \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right).$$

Обозначим $v_n = \max |z_j^* - z_j^{(n)}|$, тогда

$$v_n \leq \frac{|\lambda|}{N} \sum_{k=1}^N |K(M_j, M_k)| |f(M_k, z_k^*) - f(M_k, z_k^{(n-1)})| \times \\ \times \left| \tau_{\alpha} \left(\left\{ \frac{\kappa a_1}{N} \right\} \right) \right| \dots \left| \tau_{\alpha} \left(\left\{ \frac{\kappa a_s}{N} \right\} \right) \right|, \\ v_n \leq \frac{|\lambda|}{N} C_1 A_1^s L v_{n-1} \cdot N = |\lambda| C_1 A_1^s L v_{n-1}$$

или, полагая $n = 1, 2, \dots$,

$v_n \leq (|\lambda| C_1 A_1^s L)^n \cdot v_0$, учитывая, что

$$|z_j^* - z_j^{(n)}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |z_j^{(k)} - z_j^{(k-1)}| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\lambda| C_1 A_1^s L)^k v_0 = \\ = (|\lambda| C_1 A_1^s L)^n \cdot v_0 \sum_{k=1}^{\infty} (|\lambda| C_1 A_1^s L)^k = (|\lambda| C_1 A_1^s L)^n \cdot v_0 \frac{|\lambda| C_1 A_1^s L}{1 - |\lambda| C_1 A_1^s L}$$

Если обозначить $|\lambda| C_1 A_1^s L = q$, то

$$|z_j^* - z_j^{(n)}| \leq \frac{q v_0}{1 - q} \cdot q^n \leq C_1^* q^n \text{ и}$$

справедлива оценка

$$|\varphi(M_j) - z_j^*| \leq \frac{|\lambda|}{N} \cdot C_1 A_1^s L \sum_{k=1}^N |\varphi(M_k) - z_k^*| + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right). \quad (4)$$

Допуская $j = 1, 2, \dots, N$, произведем суммирование:

$$\sum_{k=1}^N |\varphi(M_k) - z_k^*| \leq |\lambda| C_1 A_1^s \sum_{k=1}^N |\varphi(M_k) - z_k^*| + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right),$$

$$\sum_{n=1}^N |\varphi(M_k) - z_k^*| \leq \frac{|\lambda| C_1 A_1^s L}{1 - |\lambda| C_1 A_1^s L} O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right), \text{ тогда}$$

$$|\varphi(M_j) - z_j^*| \leq \frac{|\lambda| C_1 A_1^s L}{1 - |\lambda| C_1 A_1^s L} O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right) = \\ = \frac{1}{1 - |\lambda| C_1 A_1^s L} O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right).$$

Отсюда

$$|\varphi(M_j) - z_j^{(n)}| \leq |\varphi(M_j) - z_j^*| + |z_j^* - z_j^{(n)}| \leq \\ \leq \frac{1}{1 - q} O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right) + \frac{q v_0}{1 - q} \cdot q^n.$$

Если подобрать

$$n = \left\lceil \frac{\alpha s \ln \ln N - \alpha \ln N}{\ln q} \right\rceil, \text{ то}$$

$$|\varphi(M_j) - z_j^{(n)}| \leq \frac{1 + q v_0}{1 - q} O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right) \text{ или}$$

$$\varphi(M_j) - z_j^{(N)} = O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right). \text{ Отсюда}$$

$$\varphi(M_j) = z_j^{(N)} + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^{\alpha}}\right).$$

Замечание. Пусть $K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$, есть продолжение функции $K_1(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$, определяемой следующим образом:

$$K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) = K_1(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \text{ при} \\ 0 \leq y_i \leq x_i, i = 1, s,$$

а в остальных точках единичного куба

$$K(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) = 0.$$

Тогда уравнение (1) превращается в уравнение Вольтерра с ядром $K_1(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s)$, которое можно решить приближенно, применяя вышеприведенные рассуждения.

Таким же образом, при определенных условиях, налагаемых на ядро K , можно рассмотреть приближенное решение интегрального уравнения вида

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = g(x_1, \dots, x_s) + \lambda \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_s} \int_0^1 \dots \int_0^1 K(x_1, \dots, x_s, \\ y_1, \dots, y_s) \times f(y_1, \dots, y_s, \varphi(y_1, \dots, y_s)) dy_1 \dots dy_s. \quad (5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. 1963.
2. Шарыгин И. Ф. „ДАН СССР“, 132, 1960, № 1.

З. Э. Элијева

**Чохөлчүлү гејри-хәтти һаммерштејн типли интеграл
тәнлијин H_s^2 синфиндә тәғриби һәлли һаггында**

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә H_s^2 синфиндә чохөлчүлү гејри-хәтти һаммерштејн вә гарышыг типли интеграл тәнликләрин тәғриби һәллинә әдәди нәзәри үсулла алынмыш квадратур дүстурларын тәтбиги верилир вә тәнлијин дәғиг һәлли илә тәғриби һәлли арасындакы хәта гијмәтләндирилир.

УДК 519. 21

Т. Г. ГЕЙДАРОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОЙ КОРРЕЛИРОВАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО КОНЕЧНОЙ ВЫБОРКЕ

В данной статье рассматривается разложение функции плотности случайной величины $s^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2/n$ в ряд по ортогональным полиномам Чебышева—Эрмита и Лагерра. Допустим, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ нормально распределены, имеют математические ожидания, равные нулю, дисперсию, равную единице, и корреляционную матрицу

$$||R|| = \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{vmatrix}.$$

В этом случае характеристическая функция для случайной величины s^2 может быть записана в виде

$$\varphi(t) = \left| I - \frac{2itR}{n} \right|^{-\frac{1}{2}} = \prod_{j=1}^n \left| 1 - \frac{2it\lambda_j}{n} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

где I —единичная матрица,
 λ_j —характеристические числа корреляционной матрицы $||R||$.
Для (1) имеется разложение

$$\varphi(t) = \left| I - \frac{2it}{n} R \right|^{-\frac{1}{2}} = \exp \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \left(\frac{it}{n} \right)^m \text{Sp } R^m \right]. \quad (2)$$

Это равенство удовлетворяется для всех (t) , меньших обратной величины наибольшего характеристического значения матрицы $||R||$.

В (2) $\text{Sp } R$ —след матрицы $||R||$ и для него верны следующие равенства:

$$\text{Sp } R^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad k \geq 0. \quad (3)$$

Так как выражения для функции плотности $f(x)$ и характеристической функции $\varphi(t)$ составляют пару трансформации Фурье, то из (2) для

функции плотности можно записать следующую асимптотическую формулу:

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -itx + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \left(\frac{it}{n} \right)^m \text{Sp } R^m \right\} dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -it \left[x - \frac{\text{Sp } R}{n} \right] - \right. \\ \left. - \frac{t^2}{n^2} \text{Sp } R^2 \right\} \exp \left[\sum_{m=3}^{\infty} \frac{2}{m} \left(\frac{it}{n} \right)^m \text{Sp } R^m \right] dt. \quad (4)$$

Если в показателе степени пренебречь членами выше второго порядка относительно t , то получится нормальная функция плотности:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} e^{-\frac{[x-A]^2}{2B}}, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{\text{Sp } R}{n} = \sum_{j=1}^n \lambda_j/n, \\ B = \frac{2 \text{Sp } R^2}{n^2} = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j^2/n. \quad (6)$$

—соответственно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины s^2 .

Выражение (5) можно получить из (1), если представить $\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{2it\lambda_j}{n} \right)^{-\frac{1}{2}}$ в виде степенного ряда и сохранить в показателе степени только члены $O(t, t^2)$. Члены более высокого порядка [$m \geq 3$ в (4)] дают поправки, образующие ряд Эджворта. Выполняя некоторые вычисления, получаем

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{B}} \left[p^{(0)}(z) - \frac{\kappa_3}{3!} p^{(3)}(z) + \frac{1}{4!} \kappa_4 p^{(4)}(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{72} \kappa_3^2 p^{(6)}(z) + \dots \right], \quad (7)$$

где

$$z = \frac{x-A}{\sqrt{B}}; \quad p^{(l)}(z) = \frac{d^l}{dz^l} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \right]; \\ \kappa_l = \frac{2^{l-1} (l-1)!}{B^{l/2}} \cdot \frac{\text{Sp } R^l}{n^l}, \quad l \geq 3$$

или, используя полиномы Чебышева—Эрмита, для $f(x)$ получим следующее выражение:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} e^{-z^2/2} \left[1 + \frac{1}{3!} \kappa_3 H_3(z) + \frac{1}{4!} \kappa_4 H_4(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{72} \kappa_3^2 H_6(z) + \dots \right], \quad (8)$$

здесь $H_l(z)$ —ортогональные полиномы Чебышева—Эрмита.

Когда случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы, тогда

$$\text{Sp } R^l = n \lambda_0^l \text{ и } \kappa_l = 2^{\frac{l}{2}-1} (l-1)! n^{1-\frac{l}{2}}, \quad l \geq 3,$$

и ряды (7) и (8) переходят в обычный ряд Эджворта, расположенный по степеням $(n^{-\frac{\nu}{2}})$, $\nu = 1, 2, \dots$:

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{n}}{\lambda_0 \sqrt{2}} \left[p^{(0)}(z) - \frac{1}{3!} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right) p^{(3)}(z) + \frac{1}{4!} \left(\frac{12}{n} \right) p^{(4)}(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{72} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right)^2 p^{(6)}(z) + \dots \right]; \quad (7')$$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{n}}{2\lambda_0 \sqrt{\pi}} \left[1 + \frac{1}{3!} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} H_3(z) + \frac{1}{4!} \frac{12}{n} H_4(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{72} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \right)^2 H_6(z) + \dots \right], \quad (8')$$

т. е. являются разложением χ^2 -распределения.

При зависимости случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ κ_l будет иметь порядок $O(n^{-\epsilon l})$, $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$. При значении ϵ , близких к нулю, поправочными членами в выражениях (7) и (8) уже нельзя пренебречь

и приведенные выше асимптотические представления перестают быть пригодными. В показателе степени выражения (4) нужно сохранить члены высших порядков или, что эквивалентно, нужно применять при любых t точные выражения (1) подинтегральных величин. Для функции плотности случайной величины s^2 можно получить другое разложение — разложение в ряд по полиномам Лагерра.

Искомое разложение получим, если функцию плотности случайной величины s^2 представим в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{x^a} L_k^{(a)}(x),$$

где $L_k^{(a)}(x) = e^x \frac{x^{-a}}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^{k+1})$, $a > -1$, — полиномы Лагерра. После некоторых простых вычислений находим

$$f(x) = \frac{\alpha_1 e^{\frac{\alpha_1 x}{\sigma^2}}}{\sigma^2 \Gamma\left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma^2}\right)} \left(\frac{\alpha_1 x}{\sigma^2} \right)^{\frac{\alpha_1^2}{\sigma^2}-1} \left\{ 1 + \left[1 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 (2\sigma^2 - \alpha_1^2)} \right] L_3^{\left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma^2}-1\right)} \left(\frac{\alpha_1 x}{\sigma^2} \right) + \right. \\ \left. + \left[3 - \frac{4\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 (2\sigma^2 - \alpha_1^2)} + \frac{\alpha_1^2 \alpha_4}{\alpha_2 (2\alpha_2 - \alpha_1^2) (3\alpha_2 - 2\alpha_1^2)} \right] L_4^{\left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma^2}-1\right)} \left(\frac{\alpha_1 x}{\sigma^2} \right) + \dots \right\}, \quad (9)$$

здесь α_ν — моменты случайной величины s^2 .

Из (2) можно найти все моменты α_ν и семинварианты κ_ν случайной величины s^2 :

$$\kappa_\nu = (\nu-1)! 2^{\nu-1} \text{Sp } R^\nu / n^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots;$$

$$\sigma_1 = \text{Sp } R / n;$$

$$\alpha_2 = [2 \text{Sp } R^2 + (\text{Sp } R)^2] / n^2;$$

(10)

$$\sigma_3 = [2^3 \text{Sp } R^3 + 6 \text{Sp } R \cdot \text{Sp } R^2 + (\text{Sp } R)^3] / n^3;$$

$$\alpha_4 = [48 \text{Sp } R^4 + 32 \text{Sp } R^3 \cdot \text{Sp } R + 12 (\text{Sp } R^2)^2 + 12 \text{Sp } R^2 (\text{Sp } R)^2 + (\text{Sp } R)^4] / n^4,$$

$$\text{а дисперсия } \sigma^2 = \frac{2 \text{Sp } R^2}{n^2} = \kappa_2.$$

Сравнивая найденные разложения (7) или (8) и (9), приходим к выводу:

I случай. Все $\rho_{ij} = 0$, $(i \neq j) = \overline{1, n}$, это означает, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ не коррелированы. В этом случае в (9) все поправочные члены равняются нулю и получается χ^2 -распределение.

II случай.

$$\rho_{ij} = 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Это показывает, что $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n$.

В этом случае ряд по полиномам Лагерра (9) поправочных членов иметь не будет и выигрыш применения (9) очевиден.

III случай.

$$0 < \rho_{ij} < 1 \quad (i \neq j = \overline{1, n}).$$

Как было показано, в этом случае первый поправочный член в (7)

$$\kappa_3 = \frac{1}{3!} \frac{\alpha_3}{\sigma_3}$$

будет иметь порядок $O(n^{-2\epsilon_1})$, $0 < \epsilon_1 \leq \frac{1}{2}$. В разложении (9) первый поправочный член

$$C_3 = \left[1 - \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\sigma_2 (2\alpha_2 - \alpha_1^2)} \right]$$

имеет порядок $O[(n+2)^{-3\epsilon_2}]$,

где $0 < \epsilon^2 < 1$.

Таким образом, применение разложения по полиномам Лагерра и в этом случае целесообразно.

Для наглядности возьмем такой пример. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 нормально распределены, зависимы. Матрицы коэффициентов корреляции имеют вид

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}.$$

Характеристические числа определяются из уравнения

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + \frac{43}{18}\lambda - \frac{2}{9} = 0;$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{3}, \quad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{19}}{6}, \quad \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{19}}{6}.$$

Найдем моменты случайной величины $s^2 = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{3}$.

По формулам (10) находим

$$\alpha_1 = 1, \quad \sigma_3 = \frac{457}{81}, \quad \sigma^2 = \frac{76}{81},$$

$$\alpha_2 = \frac{157}{81}, \quad \alpha_9 = \frac{5303}{243}, \quad \sigma_3 = \frac{148}{81}.$$

Из (7) для разложения по полиномам Чебышева—Эрмита определяем

$$\kappa_3^1 \approx \frac{111}{334,4} \approx \frac{1}{3}.$$

Для разложения по полиномам Лагерра получим

$$c_3 = -\frac{436}{36581} \approx -\frac{1}{84},$$

$$c_3 \ll \kappa_3^1,$$

что и указывает на целесообразность применения разложений по полиномам Лагерра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деч. Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. „Советское радио“, 1965.
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарносвязанные величины. „Наука“, 1965.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. „Советское радио“, 1966.
3. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. 2. „Советское радио“, 1962.

Т. Г. Һејдәров

Сонлу сечмәјә көрә тәсадүфи хәтти асылы олан ардычыллыг дисперсијасы гијмәтинин пәјланмасы ганунунун асимптотик ајрылышы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә тәсадүфи хәтти асылы олан ардычыллыг дисперсијасы гијмәтинин мәгсәдәујғун асимптотик пәјланмасы гануну тәклиф едилир. Дисперсија гијмәтинин пәјланмасы ганунунун Ечварт типли сыраја вә Лагерр чохһәдлиләринә көрә асимптотик ајрылышы верилир. Нәтичәдә пәјланма ганунунун Лагерр чохһәдлиләринә көрә ајрылышынын мәгсәдәујғундугу көстәрилир.

УДК 517.948 + 513.88

А. М. АХМЕДОВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРОВ, РАЦИОНАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

В статье устанавливаются некоторые достаточные условия кратной полноты системы собственных и присоединенных (с. п.) элементов для широких классов операторов в банаховом пространстве B , рационально зависящих от спектрального параметра.

Рассмотрим оператор, действующий в банаховом пространстве B :

$$L(\lambda) = L_1(\lambda) + L_2(\lambda),$$

где

$$L_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{n-1} \lambda^n H^n A_1 + \lambda^n H^n, \quad L_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^i} T^i B_1 + \frac{1}{\lambda^m} T^m,$$

H и T — полные ($\overline{HB} = \overline{TB} = B$), ограниченные, A_i, B_j ($i = 0, 1, \dots, n-1; j = 1, 2, \dots, m-1$) — вполне непрерывные операторы, λ — комплексный параметр. Как видно, оператор $L(\lambda)$ имеет два полюса произвольных порядков (в точках 0 и ∞). Частный случай, когда операторы действуют в сепарабельном банаховом пространстве и имеют полюсы первого порядка, изучен в работе [2]. Метод, применяемый в доказательстве теоремы о полноте, предложен М. В. Келдышем [1] для операторов, полиномиально зависящих от спектрального параметра. Впоследствии этот метод был развит Дж. Э. Аллахвердиевым [2] для операторов, рационально зависящих от спектрального параметра.

Для ограниченного оператора A , следуя Дж. Э. Аллахвердиеву [3], положим

$$\varepsilon_{n+1}(A) = \inf_K \|A - K\|,$$

где K — линейный конечномерный оператор такой, что $\dim K \leq n$. Через σ_p ($p > 0$) будем обозначать множество всех вполне непрерывных операторов A , для которых $\sum_i \varepsilon_i^p(A) < \infty$. Вполне непрерывный оператор B называют ядерным, если он имеет представление (см. [4]):

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(\cdot) y_i, \quad (1)$$

где

$$\sum_i \|f_i\| \cdot \|y_i\| < \infty, \quad y_i \in B, \quad f_i \in B^*.$$

Пусть $B^* \overset{\Delta}{\times} B$ полное тензорное произведение (см. [5]). А. Гротендик в своей работе [5] показал, что каждому элементу $1+u$ ($u \in B^* \overset{\Delta}{\times} B$) можно сопоставить некоторое число $\det(1+u)$, которое играет существенную роль при установлении оценок резольвенты.

Лемма 1. Если $u_\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j \times x_j$ ($\alpha_j \geq 0$, $x_j = M(\lambda) y_j$,

$\sum_j \alpha_j \|f_j\| \cdot \|y_j\| < \infty$, $j=1, 2, \dots$) и $M(\lambda)$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию $\|M(\lambda)\| \leq M$ при всех $|\lambda| \geq R$, то $\det(1+\lambda u_\lambda)$ есть целая функция минимального типа и порядок ее роста в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит 2.*

Доказательство. По лемме А. Гротендика (см. [6] лемма 2.1) $\det(1+\lambda u_\lambda)$ — целая функция от λ минимального типа и порядок ее роста не превосходит 2. В силу свойства $\det(1+\lambda u_\lambda)$ [6] (см. свойство 4) можно писать

$$\det(1+\lambda u_\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\mu) \lambda^n \quad (|\mu| \geq R),$$

где

$$a_n(\mu) = \sum_{j_1 < \dots < j_n} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_n} \det \|f_{j_k}(x_{j_l})\|_{k,l=1}^n \quad (n=1, 2, \dots).$$

При всех

$$|\mu| \geq R \quad \|x_{j_l}\| = \|M(\mu) y_{j_l}\| \leq M \quad \text{и} \quad \|f_{j_k}(x_{j_l})\| \leq M, \\ |a_n(\mu)| \leq M^n \cdot n^{n/2} \sum_{j_1 < \dots < j_n} \alpha_{j_1} \dots \alpha_{j_n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

Легко видеть, что полученная оценка равномерна относительно μ при $|\mu| \geq R$. Поэтому, полагая $\mu = \lambda$ при $|\lambda| \geq R$, получаем, что $\det(1+\lambda u_\lambda)$ есть целая функция минимального типа и порядок ее роста в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит 2. Лемма доказана.

Теорема 1. Если A является ядерным оператором и $M(\lambda)$ — линейный оператор, удовлетворяющий условию $\|M(\lambda)\| \leq M$ при всех $|\lambda| \geq R$, то в окрестности бесконечно удаленной точки для резольвенты оператора $M(\lambda)A$ верно следующее равенство:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \{\rho^{-2} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I - \lambda M(\lambda)A)^{-1}\|\} = 0.$$

Теорема доказывается аналогично теореме 2.1 из [6] с помощью леммы 1.

*В случае $\alpha_j = o\left(j^{-\frac{1}{p}}\right)$ $\det(1+\lambda u_\lambda)$ ($0 < p < \infty$) есть целая функция минимального типа и порядок ее роста в окрестности бесконечно удаленной точки не превосходит $r = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ [6] (см. лемма 2.1).

Лемма 2. Если H — ядерный оператор, то в окрестности бесконечно удаленной точки для резольвенты оператора $L(\lambda)$ верно равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \{\rho^{-2} \ln \max_{|\lambda|=\rho} \|(I - L(\lambda))^{-1}\|\} = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Имеем неравенство

$$\|(I - L(\lambda))^{-1}\| \leq \|(I - L_2(\lambda))^{-1}\| \cdot \|(I - L_1(\lambda)(I - L_2(\lambda))^{-1})^{-1}\|.$$

При достаточно больших $|\lambda|$ оператор $(I - L_2(\lambda))^{-1}$ является ограниченным. Поэтому достаточно исследовать оператор $(I - L_1(\lambda)M(\lambda))^{-1}$, где $M(\lambda) = (I - L_2(\lambda))^{-1}$. Применяя схему, которая указана в работе [7] (лемма 2), и теорему 1, получим утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть H — полный линейный ограниченный оператор и для неограниченного множества E в комплексной плоскости выполняется соотношение

$$\|\lambda^i H^i (I - \lambda^n H^n)^{-1}\| \leq C \quad (i=0, 1, \dots, n-1; \lambda \in E, |\lambda| \geq r). \quad (3)$$

Если A_i ($i=0, 1, \dots, n-1$) — вполне непрерывные операторы, то в окрестности бесконечно удаленной точки на множестве E резольвенту оператора $L(\lambda)$ можно представить в виде

$$(I - L(\lambda))^{-1} = (I + B(\lambda))(I - \lambda^n H^n)^{-1},$$

причем $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|B(\lambda)\| = 0$ равномерно относительно аргумента λ .

Доказательство. Известно [8] (§ 2, теорема 2), что на множестве E для достаточно больших $|\lambda|$

$$\max_{|\lambda|} \|\lambda^i (I - \lambda^n H^n)^{-1} H^i A_i\| \leq \varepsilon \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (4)$$

при любом $\varepsilon > 0$. Кроме того, для тех же λ

$$(I - L(\lambda))^{-1} = (I - S(\lambda))^{-1} (I - \lambda^n H^n)^{-1},$$

где

$$S(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i (I - \lambda^n H^n)^{-1} H^i A_i - (I - \lambda^n H^n)^{-1} L_2(\lambda).$$

В силу (3) и ввиду $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|L_2(\lambda)\| = 0$ непосредственно вытекает, что для достаточно больших $|\lambda|$ на множестве E

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \max_{|\lambda|=\rho} \|(I - \lambda^n H^n)^{-1} L_2(\lambda)\| = 0. \quad (5)$$

Оценка (4) и равенство (5) дает $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|S(\lambda)\| = 0$ ($\lambda \in E$). Поэтому

$$(I - S(\lambda))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(\lambda) = I + B(\lambda), \quad \text{причем} \quad \|B(\lambda)\| \leq \frac{\|S(\lambda)\|}{1 - \|S(\lambda)\|}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. До сих пор мы занимались изучением поведения резольвенты оператора $L(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Но с помощью дробнолинейного преобразования можно перейти к изучению ее в окрестности нуля. Поэтому аналоги лемм 1, 2, 3 и теоремы 1, где бесконечно удаленная точка заменяется нулем, справедливы при соответствующих условиях.

Прежде чем установить основную теорему, дадим некоторые понятия из [2]. В целях удобства применим их для оператора $L(\lambda)$. Следуя Дж. Э. Аллахвердиеву, рассмотрим систему

$$y_{i,h}^{j,i} = \sum_{k=0}^h \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} (\Psi_{r,j}(\lambda)) \right]_{\lambda=c_1} y_{h-k}^{(i)} \quad (6)$$

где $0 \leq h \leq m_i$; $i = 1, 2, \dots$; $\Psi_{r,0}(\lambda) = \lambda^r$; $\Psi_{r,1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}$;

$r = \begin{cases} 0, 1, \dots, n-1, & \text{если } j=0 \\ 1, 2, \dots, m, & \text{если } j=1 \end{cases}$ и $y_{h-k}^{(i)}$ — каноническая система с. п. элементов оператора $L(\lambda)$, соответствующих собственному значению c_i . Систему (6) называют производной цепочкой с. п. элементов оператора $L(\lambda)$.

Определение. Будем говорить, что система с. п. элементов оператора $L(\lambda)$ $(n+m)$ -кратно полна в V , если система

$Y_{1,k} = \{Y_{1,k}^{j,r}\}_{r=0}^{n-1, \dots, n-1, \text{ если } j=0}$ полна в пространстве X_{n+m} ,
 $k = 0, 1, \dots, m_i$; $i = 1, 2, \dots$

Теорема 2. Пусть удовлетворяются условия:

1) $H \in \sigma_p$ ($p > 0$) и существует система лучей G_1 , выходящих из начала координат, таких, что угол между соседними лучами системы G_1 меньше $\frac{\pi}{p}$ и на каждом луче из G_1 для достаточно больших $|\lambda|$

$$\| \lambda^i H^i (I - \lambda^n H^n)^{-1} \| \leq C_1 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1);$$

2) $T \in \sigma_q$ ($q > 0$) и существует система лучей G_2 , выходящих из начала координат, таких, что угол между соседними лучами системы G_2 меньше $\frac{\pi}{q}$ и на каждом луче из G_2 для достаточно малых $|\lambda|$

$$\lambda^{-i} T^i (I - \lambda^{-m} T^m)^{-1} \leq C_2 \quad (i = 0, 1, \dots, m-1).$$

Если операторы H , T , полные и A_i, B_j ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m-1$) вполне непрерывны, то система с. п. элементов оператора

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i H^i A_i + \lambda^n H^n + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^i} T^i B_i + \frac{1}{\lambda^m} T_m$$

$(n+m)$ -кратно полна в пространстве V .

Доказательство. Предположим, что система с. п. элементов оператора $L(\lambda)$ не является $(n+m)$ -кратно полной. Тогда, по определению, существует ненулевой функционал $F \in X_{n+m}^*$ с координатами $f_1, f_2, \dots, f_n, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, аннулирующий в точке $Y_{1,k} \in X_{n+m}$, $F(Y_{1,k}) = 0$

при всех i, k .

Составим элемент $f(\lambda)$ следующим образом:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f_{k+1} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda^k} \varphi_k. \quad (8)$$

Рассмотрим уравнение

$$g = L^*(\lambda)g + f(\lambda). \quad (9)$$

Его решение будет в следующем виде:

$$g(\lambda) = (I - L^*(\lambda))^{-1} f(\lambda).$$

Согласно результатам Дж. Э. Аллахвердиева [9], коэффициенты главной части разложения $g(\lambda)$ в окрестности полюса c_j имеют вид:

$$a_{j,0} = [f(\bar{c}_j)](y^{(j)});$$

$$a_{j,1} = [\bar{f}c_j](y^{(j)}) + \frac{1}{1!} \left[\frac{df(\bar{c}_j)}{d\bar{c}_j} \right] (y^{(j)});$$

$$a_{j,2} = [f(\bar{c}_j)](y^{(j)}) + \frac{1}{1!} \left[\frac{df(\bar{c}_j)}{d\bar{c}_j} \right] (y^{(j)}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 f(\bar{c}_j)}{d\bar{c}_j^2} \right] (y^{(j)});$$

$$a_{j,m} = [f(\bar{c}_j)](y^{(j)}) + \frac{1}{1!} \left[\frac{df(\bar{c}_j)}{d\bar{c}_j} \right] (y^{(j)}) + \dots + \frac{1}{m_j!} \left[\frac{d^{m_j} f(\bar{c}_j)}{d\bar{c}_j^{m_j}} \right] (y^{(j)}).$$

Подставив выражение (8), получим:

$$a_{i,0} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k [\Psi_{k,0}(c_i) y^{(i)}] + \sum_{k=1}^m \varphi_k [\Psi_{k,1}(c_i) y^{(i)}];$$

$$a_{i,1} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k [\Psi_{k,0}(c_i) y^{(i)}] + \sum_{k=1}^m \varphi_k [\Psi_{k,1}(c_i) y^{(i)}] +$$

$$+ \frac{1}{1!} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \left[\left(\frac{d}{d\lambda} \Psi_{k,0}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y^{(i)} + \frac{1}{1!} \sum_{k=1}^m \varphi_k \left[\left(\frac{d}{d\lambda} \Psi_{k,1}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y^{(i)} \right] = y^{(i)} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \left[\sum_{s=0}^1 \frac{1}{s!} \left(\frac{d^s}{d\lambda^s} \Psi_{k,0}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y_{1-s}^{(i)} \right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^m \varphi_k \left[\sum_{s=0}^1 \frac{1}{s!} \left(\frac{d^s}{d\lambda^s} \Psi_{k,1}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y_{1-s}^{(i)} \right]$$

$$a_{i,m_i} = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \left[\sum_{s=0}^{m_i} \frac{1}{s!} \left(\frac{d^s}{d\lambda^s} \Psi_{k,0}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y_{m_i-s}^{(i)} \right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \varphi_k \left[\sum_{s=0}^{m_i} \frac{1}{s!} \left(\frac{d^s}{d\lambda^s} \Psi_{k,1}(\lambda) \right)_{\lambda=c_i} y_{m_i-s}^{(i)} \right].$$

Итак,

$$a_{i,h} = \sum_{r=0}^{n-1} f_r (y_{h,r}^{(i)}) + \sum_{r=1}^m \varphi_r (y_{h,r}^{(i)}),$$

где $h = 0, 1, \dots, m_i$; $i = 1, 2, \dots$. Но в силу (7) $a_{i,h} = 0$. Следовательно, $g(\lambda)$ не имеет в конечной части плоскости особенностей, кроме, может быть, в нуле.

Используя лемму 2 и замечание 1, находим, что при $r > \max(p, q)$ (см. [6], теорема 2.3) в окрестности бесконечно удаленной точки и в нуле для резольвенты оператора $L(\lambda)$ верно равенство (2). Применяя лемму 3, получим, что при $|\lambda| \rightarrow \infty$ резольвента оператора $L(\lambda)$ остается ограниченной на лучах из G_1 , а при $|\lambda| \rightarrow 0$ на лучах из G_2 . Тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$ на лучах из G_1 $g(\lambda)$ растет не быстрее, чем $|\lambda|^{n-1}$, а при $|\lambda| \rightarrow 0$ на лучах из G_2 не быстрее, чем $|\lambda|^{1-m}$.

По теореме 1 из работы [7] точка нуль может быть полюсом функции $g(\lambda)$ порядка не выше $m-1$, а бесконечно удаленная точка — полюсом порядка не выше $n-1$. Следовательно, ряд Лорана для $g(\lambda)$ имеет вид

$$g(\lambda) = \sum_{i=-m}^{n-1} \lambda^i y_i. \quad (10)$$

Учитывая (10), из (9) получаем, что $g(\lambda) = 0$. Поэтому $f_i = \varphi_j = 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m$). Теорема доказана.

Замечание 2. Условия (1) и (2) теоремы 2 выполняются для широких классов операторов. Например*, если спектры операторов $H \in \sigma_p$ и $T \in \sigma_g$ соответственно лежат на лучах

$$t_\kappa = \left\{ z : \arg z = \frac{\kappa \pi}{n} \right\} \quad (\kappa = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

$$l_\nu = \left\{ z : \arg z = \frac{\nu \pi}{m} \right\} \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2m-1),$$

причем вне углов

$$\frac{\pi \kappa}{n} + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi(\kappa+1)}{n} - \varepsilon \quad (\kappa = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

и

$$\frac{\pi \nu}{m} + \varepsilon \leq \arg \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\pi(\nu+1)}{m} - \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, \dots, 2m-1),$$

выполняются соответственно неравенства

$$\| (H - \lambda I)^{-1} \| \leq \frac{C_1}{\rho(\lambda, t_\kappa)} \quad \text{и} \quad \left\| \left(T - \frac{1}{\lambda} I \right)^{-1} \right\| \leq \frac{C_2}{\rho\left(\frac{1}{\lambda}, l_\nu\right)},$$

где $\rho(\lambda, a)$ — расстояние точки λ до луча a .

Замечание 3. Из доказательства теоремы 2 видно, что она остается справедливой и в случае, когда $L_2(\lambda)$ имеет вид

$$L_2(\lambda) = \sum_{i=1}^{m-1} (\lambda - \lambda_0)^{-i} T^i B_i + (\lambda - \lambda_0)^{-m} T^m,$$

где λ_0 — любое комплексное число, а условия на операторы B_i ($i = 1, 2, \dots, m-1$) и T такие же, как и в теореме 2.

В заключение, пользуясь случаем, приношу благодарность Дж. Э. Аллаhverдиеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. „ДАН СССР“, 77, 1951, № 1.
2. Аллаhverдиев Дж. Э. „ДАН СССР“, 160, 1965, № 6.
3. Аллаhverдиев Дж. Э. „ДАН СССР“, 115, 1957, № 2.
4. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства.
5. Гротендик А. Математика. Сб. переводов 2:5, 1958.
6. Маркус А. С. Матем. сб., 70, 112, 1966, № 4.
7. Аллаhverдиев Дж. Э. „ДАН СССР“, 159, 1964, № 5.
8. Маркус А. С. „Сибирский матем. ж.“, 8:6, 1967.
9. Аллаhverдиев Дж. Э. Докт. дисс., 1968.

Э. М. Эһмәдов

Спектрал параметрдэн рационал асылы олан операторларын
мәхсуси вә гошма элементлэри системинин тамлығы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Банах фәзасында бир синиф операторларын мәхсуси вә
гошма элементлэри системинин чохгат тамлығы мәсәләси өйрәнилик.

*См. также [2] (замечание 1) и [6] (§ 2, теорема).

Исбат едилик ки, мүүжән шәртләр дахилиндә

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda^i H^i A_i + \lambda^n H^n + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda^i} T^i B_i + \frac{1}{\lambda^m} T^m$$

операторунун мәхсуси вә гошма элементлэри системи $(n+m)$ —гәт
тамдыр. Әсас шәртләр H вә T операторларынын үзәринә гојулур.

УДК 539. 293:537

М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ, А. А. КУЛИЕВ, Х. ДАВЖАНОВ, В. И. ТАГИРОВ

К ВОПРОСУ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ИНВЕРСИИ ЗНАКА КОЭФФИЦИЕНТА ХОЛЛА В ТЕЛЛУРЕ

Как показано было ранее [1], характерной особенностью гальваномагнитных свойств теллура является двойная инверсия знака коэффициента Холла при относительно высоких температурах. Позднее [2] указывалось, что высокотемпературная точка знака инверсии коэффициента Холла не зависит от содержания примеси в теллуре. Только в нашей работе [3] наблюдается, что высокотемпературная точка инверсии знака коэффициента Холла зависит от степени легирования (чистоты). Отметим, что из теоретических моделей [1, 5] такой зависимости не следует.

Согласно теоретическим моделям, предполагающим двойную зону проводимости [4] или двойную валентную зону [5], считается, что низкотемпературная инверсия происходит при температурах, соответствующих участию в проводимости носителей лишь двух зон. Вторая точка инверсии имеет место в чисто собственной области, где и начинает вносить вклад третья зона (зона тяжелых электронов или легких дырок).

Если действительная картина соответствовала бы таким условиям, то высокотемпературная точка инверсии знака коэффициента Холла не зависела бы от степени легирования, так как в собственной области примесь не влияет на характер явлений переноса. Высокотемпературная точка инверсии знака коэффициента Холла в этом случае будет определяться характером зонной структуры, т. е. зазором между двумя валентными зонами или зонами проводимости и эффективными массами в трех зонах. Примем, как в работе [5], что валентная зона имеет сложную структуру. Такая модель позволяет опираться на некоторые данные о структуре зоны легких дырок, полученные из оптических измерений.

В данной работе поставлена задача количественного расчета высокотемпературной точки инверсии знака коэффициента Холла на основе трехзонной модели. Для корректности мы не будем вводить условия наступления собственной проводимости и воспользуемся общим выражением, которое должно удовлетворяться в обеих точках инверсии знака коэффициента Холла:

$$p_1 \mu_1^2 + p_2 \mu_2^2 = n \mu_3^2 \quad (1)$$

где p_1 и p_2 — концентрации в двух дырочных зонах, а μ_1 и μ_2 — соответственно, подвижности в этих зонах, n и μ_3 — концентрация и подвижность электронов.

Для вывода соотношения, которое позволяет рассчитывать обе температуры инверсии знака коэффициента Холла при различной степени легирования теллура, будем исходить также из общего выражения электропроводности (σ) в случае трехзонной модели

$$\sigma = e(p_1 \mu_{g1} + p_2 \mu_{g2} + n \mu_3) \quad (2)$$

и условия нейтральности

$$p_1 + p_2 = n + N^-, \quad (3)$$

где N^- — число ионизированных акцепторов. Поскольку при обеих точках инверсии температура достаточно высока, чтобы рассеяние носителей тока в теллуре происходило только на акустической ветви спектра колебания решетки [6], можно записать выражения, характеризующие подвижности носителей тока во всех зонах [7]:

$$\mu_1 = B_1 m_1^{-3/2} T^{-3/2}; \quad \mu_2 = B_2 m_2^{-3/2} T^{-3/2}; \quad \mu_3 = B_3 m_3^{-3/2} T^{-3/2} \quad (4)$$

где m_1 , m_2 и m_3 — эффективные массы дырок и электрона. Полагая, что время релаксации одно для всех типов носителей, имеем

$$B_1 = B_2 = B_3 = B.$$

Концентрация носителей тока в зонах определяется общим выражением [7]:

$$n_i = 2 \left(\frac{2 \pi m_i k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{E_{Fi}}{k T} \right), \quad (5)$$

где i — индекс соответствующей зоны, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, а E_{Fi} — энергия Ферми, отсчитываемая от соответствующей зоны. Подставляя (4) и (5) в (1), (2) и (3), после преобразований получим

$$N^- = \frac{\sigma m_1^{3/2} T^{3/2}}{A e} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{\Delta E}{k T} \right) - \left(\frac{m_3}{m_1} \right)^{5/2} \left[1 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{\Delta E}{k T} \right) \right]}{1 + \frac{m_1}{m_2} \exp \left(- \frac{\Delta E}{k T} \right) + \left(\frac{m_3}{m_1} \right)^{5/2} \left[1 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{\Delta E}{k T} \right) \right]} \right\} \quad (6)$$

где σ — электропроводность в точке инверсии, ΔE — энергетический зазор между двумя валентными зонами, A — параметр, определяемый рассеянием носителей тока. Очевидно можно полагать, что при обеих температурах инверсии акцепторы в теллуре находятся в полностью ионизированном состоянии, тогда уравнение (6) должно давать одинаковое N^- для двух точек инверсии. При определенном отношении электропроводностей в двух точках инверсии это равенство будет выполняться при некоторых отношениях эффективных масс носителей в зонах и ΔE . При этом предполагается, что A остается постоянным в обеих точках инверсии. При известном отношении эффективных масс и ΔE по одной температуре инверсии всегда можно определить вторую.

Величина ΔE известна из оптических данных [8], а отношение эффективных масс можно подобрать для чистого теллура из условия

равенства числа ионизированных акцепторов в двух точках инверсии знака коэффициента Холла. Однако необходимо подобрать два отношения эффективных масс, а равенство (6) в двух точках инверсии дает лишь одно соотношение. Второе соотношение для подбора эффективных масс получено из (1) и (3):

$$N^- = \left(\frac{2\pi m_1 k T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_{F1}}{kT} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\Delta E}{kT} \right) - \left(\frac{m_3}{m_1} \right)^{3/2} \times \left[\left(\frac{m_3}{m_1} \right)^{7/2} + \left(\frac{m_3}{m_2} \right)^{7/2} \exp \left(-\frac{\Delta E}{kT} \right) \right] \right\}, \quad (7)$$

где E_{F1} — энергия Ферми, отсчитываемая от вершины первой валентной зоны и определяемая соотношением

$$\exp \left(\frac{E_{F1}}{kT} \right) = \left(\frac{m_1}{m_3} \right)^{-7/2} \left[1 + \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^{7/2} \exp \left(-\frac{\Delta E}{kT} \right) \right]^{1/2} \exp \left(\frac{E_g}{2kT} \right), \quad (8)$$

справедливым также в обеих точках инверсии. Ширина запрещенной зоны E_g определялась по наклону зависимости $\lg \sigma$ от $\frac{1}{T}$ в собственной области проводимости (0,34 эВ). Выражения (6) и (7) оказались весьма чувствительными к изменению отношения эффективных масс и удовлетворяются лишь при $\frac{m_1}{m_2} = 3,7$ и $\frac{m_3}{m_1} = 0,64$, что хорошо согласуется с литературными данными, полученными из оптических измерений [8].

Расчет высокотемпературных точек инверсии знака коэффициента Холла для теллура, легированного таллием, дает хорошее согласие с экспериментом. Построение зависимостей обеих точек инверсии знака

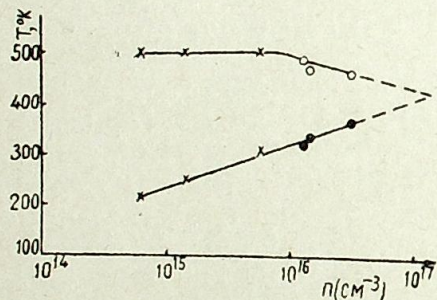


Рис. 1. Концентрационная зависимость температур инверсии знака коэффициента Холла в теллуре, легированном таллием; × — инверсии знака коэффициента Холла в теллуре различной степени чистоты.

коэффициента Холла не должно быть. Последние согласуются с экспериментом. Этим и объясняется то, что изменение высокотемпературной точки инверсии не было до сих пор наблюждено.

Физическая картина влияния примеси на высокотемпературную точку инверсии становится ясной по вычисленным в работе изменениям уровня Ферми согласно выражению (8), справедливому в обеих точках инверсии. Вычисления показали, что низкотемпературная инверсия при всех концентрациях происходит в промежуточной между собственной и примесной области проводимости, чем и объясняется ее монотонная зависимость от концентрации носителей тока. Высокотемпературная инверсия в чистом и слаболегированном теллуре проис-

ходит в собственной области и поэтому температура ее практически не зависит от содержания примесей. Однако при концентрации носителей тока более 10^{16} см^{-3} высокотемпературная точка инверсии смещается в область смешанной проводимости и начинает изменяться от уровня легирования, подобно первой точки инверсии.

Таким образом, произведенные расчеты показывают, что изменение обеих точек инверсии знака коэффициента Холла в теллуре количественно объясняется трехзонной моделью и согласуется с наблюдаемым в [3]. Изменение высокотемпературной точки инверсии знака коэффициента Холла зависит от степени легирования.

В заключение авторы выражают благодарность старшему научному сотруднику Ф. М. Гашим-Заде за помощь при теоретической интерпретации результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fritzsche H. Science, 115, 571, 1952.
2. Kronmüller H., Jauman J., Seiler K. Zs. Naturf., 11, 243, 1956.
3. Давжанов Х., Шахтахтинский М. Г., Тагиров В. И., Алиев Б. С., Шилкин А. И., Кулиев А. А. ДАН СССР, 170, 4, 1966.
4. Nussbaum A. Phys. rev., 94, 337, 1954.
5. Fan H. V. Report Progr. Phys., 19, 107, 1956.
6. Парфеньев Р. В., Погарский А. М., Фарбштейн Н. И., Шалыт С. С. ФТТ, 4, 12, 1962.
7. Ансельм А. И. Введение в теорию полупроводников. М.—Л., 1962.
8. Caldwell R. and Fan H. V. Phys. rev., 114, 3, 1959.

М. Н. Шахтахтински, Э. А. Гулиев, Х. Давжанов, В. И. Тагиров

Теллурда Һолл эмсалынын јүксәк температур областына тәвафүг едән ишарә дәјишмәси һагында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә теллурун Һолл эмсалынын јүксәк температур областына тәвафүг едән ишарә инверсиясынын үчзоналы модел әсасында мигдари һесабамаларынын нәтижәләри верилмишдир. Теллурда Һолл эмсалы ишарәсиниң һәр ики нөгтәдәки инверсиясы үчзоналы моделлә кәмијјәтчә изаһ едилір.

УДК 538. 221

3. 3. МАХМУДОВ

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ СО СПИНОВЫМИ ВОЛНАМИ

В работе [1] рассматривалось нелинейное взаимодействие вне пучков заряженных частиц малой плотности со спиновыми волнами, спектральная плотность которых была δ -образна. Считалось, что тепловой разброс по скоростям очень мал и поэтому пучок рассматривался в гидродинамическом приближении.

Настоящая статья посвящена изучению усиления спиновых волн в одноосном ферромагнетике пучком заряженных частиц малой плотности, когда начальная спектральная плотность спиновых волн отлична от нуля в большом интервале волновых векторов $\vec{k}$. При этом считается, что начальная тепловая скорость пучка v_T^0 удовлетворяет условию $\kappa v_T^0 \ll \gamma_k$, где γ_k — инкремент нарастания спиновых волн. Но при этом она не настолько мала, чтобы выполнялось неравенство

$$v_T^2 \ll \frac{e^2}{\gamma_k^2 m^2} \int |e_k^0|^2 dk, \quad (1)$$

где e_k^0 — Фурье-компонента начального электрического поля $e^0(\vec{r})$:

$$e_k = \int e^0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r},$$

а m и e — соответственно масса и заряд электрона.

В этом случае становится существенным повышение температуры пучка при усилении спиновых волн. Поэтому пучок будем описывать кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \vec{e} + \frac{1}{c} [\vec{v}, \vec{B}_0 + \vec{b}] \right\} \frac{\partial f(\vec{v}, \vec{r}, t)}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2)$$

где $\vec{B}_0$ — постоянная магнитная индукция, направленная вдоль оси легчайшего намагничивания ферромагнетика (ось z), $\vec{e}$ — переменное электрическое поле, а $\vec{b}$ — переменная магнитная индукция.

Следуя В. Д. Шапиро и В. И. Шевченко [2], запишем функцию распределения пучка в виде $f(\vec{v}, \vec{r}, t) = f_0(\vec{v}, t) + f_1(\vec{v}, \vec{r}, t)$, где f_1 — быстроосциллирующая функция времени и координат, а f_0 медленно меняется со временем.

Усреднив (2) по расстояниям, большим по сравнению с длиной волны, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{e}{mc} [\vec{v}, \vec{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} + \frac{e}{m} \langle \vec{e} \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \rangle + \frac{e}{mc} \langle [\vec{v}, \vec{b}] \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} \rangle = 0. \quad (3)$$

Если положить, что

$$\vec{e} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k \vec{e}_k(t) \exp [i(\vec{k}\vec{r} - \omega_s t)] + \text{к.с.} \right\}, \quad (4)$$

то в линейном приближении из (2) получим

$$f_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k f_k \exp [i(\vec{k}\vec{r} - \omega_s t)] + \text{к.с.} \right\}, \quad (4')$$

где

$$f_k = -i \frac{e}{m} \left\{ e_k^z \left(\frac{1}{\omega_k} + \frac{\kappa_z v_z}{\omega_k} \sum_n \frac{J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right)}{\omega_k - \kappa_z v_z - n \omega_B} \exp \left\{ i \left[n(\psi - \varphi) - \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \sin(\psi - \varphi) \right] \right\} \right) + \frac{e'_k}{\omega_k} \sum_n \frac{n \omega_B J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right) - \frac{\Omega_e}{\omega_k} \kappa_\perp v_\perp J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right)}{\omega_k - \kappa_z v_z - n \omega_B} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ i \left[n(\psi - \varphi) - \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \sin(\psi - \varphi) \right] \right\} \right\} \frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \\ + \sum_n \left[\frac{e'_k}{\kappa_z} \left(1 - \frac{\kappa_z v_z}{\omega_k} \left(n \omega_B J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right) - \frac{\Omega_e}{\omega_k} \kappa_\perp v_\perp J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e_z v_z}{\omega_k} n \omega_B J_n \left(\frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \right) \right) \right] \frac{\exp \left\{ i \left[n(\psi - \varphi) - \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} \sin(\psi - \varphi) \right] \right\}}{\omega_k - \kappa_z v_z - n \omega_B} \frac{1}{v_\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp} \right\}.$$

При выводе формулы для f_k предполагалось, что электромагнитное поле поляризовано как в спиновой волне. Приняты обозначения:

$$e'_k = \frac{\cos^2 \theta a}{\sin \theta \left[1 + \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}; \quad e_k^z = \frac{-\sin \theta a}{\left[1 + \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2}}, \quad a^2 = |e_k|^2; \\ \omega_B = \frac{|e| B_0}{mc}; \quad \omega_k = \omega_s(\kappa) + i \gamma_k,$$

где θ — угол вектора $\vec{k}$ с направлением магнитного поля, ψ и φ — азимутальные углы векторов $\vec{k}$ и $\vec{v}$, соответственно. Частота спиновых волн равна [3]

$$\omega_s = \Omega_e^{1/2} (\Omega_e + 4 \pi g M_0 \sin^2 \theta)^{1/2}, \\ \Omega_e = g M_0 \left(\alpha \kappa^2 + \beta + \frac{H_0}{M_0} \right).$$

Инкремент нарастания спиновых волн γ_k и поправка к частоте $\omega_s(\kappa)$, связанная с наличием пучка, определяется из дисперсионного уравнения линейной теории [4]:

$$\left(1 - \mu_1 \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \varepsilon \right) \left[\cos^2 \theta - \mu_1 \left(\frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} - \sin^2 \theta \right) \right] + \mu_2^2 \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} \varepsilon \sin^2 \theta +$$

$$+ \frac{\omega^2}{c^2 \kappa^2} [-\mu_1 \epsilon'_{22} + 2i\mu_2 (\cos^2 \theta \epsilon'_{12} + \cos \theta \sin \theta \epsilon'_{23}) + \mu_2^2 \sin^2 \theta (\epsilon'_{11} \cos^2 \theta + \epsilon'_{33} \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \epsilon'_{13})] = 0. \quad (5)$$

Здесь μ — тензор магнитной проницаемости ферромагнетика, ϵ — его диэлектрическая проницаемость, ϵ' — вклад в диэлектрическую проницаемость, связанный с пучком.

Подставив (4) и (4') в (2) и произведя усреднение по $\vec{r}$, получим

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\alpha_{1\kappa} \frac{\partial f}{\partial v_\kappa} \right), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} = \alpha_{yy} = & \frac{b^2}{2\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \times \\ & \times \sum_n A_\perp^2(n) \frac{\gamma_\kappa}{(\omega_s - \kappa_z v_z - n\omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2}, \\ \alpha_{zz} = & \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \times \\ & \times \sum_n A_z^2(n) \frac{\gamma_\kappa}{(\omega_s - \kappa_z v_z - n\omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2}, \\ \alpha_{xz} = \alpha_{zx} = & \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \times \\ & \times \sum_n A_\perp(n) A_z(n) \frac{\gamma_\kappa v_x/v_\perp}{(\omega_s - \kappa_z v_z - n\omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2}, \\ \alpha_{yz} = \alpha_{zy} = & \frac{v_y}{v_x} \alpha_{xz}, \\ A_\perp(n) = & \frac{\omega_B}{v_\perp} \left[v_z n J_n - \frac{\kappa_z}{\kappa_\perp^2} (\omega_s - \kappa_z v_z) \left(n J_n - \frac{\Omega_e}{\omega_s} \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} J'_n \right) \right], \\ A_z(n) = & \kappa_z v_z J_n - \frac{\kappa_z^2}{\kappa_\perp^2} \omega_B \left(n J_n - \frac{\Omega_e}{\omega_s} \frac{\kappa_\perp v_\perp}{\omega_B} J'_n \right). \end{aligned}$$

При выводе формулы (6) предполагалось, что начальная функция распределения и спектральная плотность спиновых волн изотропны в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. В (6) оставлены только члены, содержащие резонансные знаменатели $(\omega_s - \kappa_z v_z - n\omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2$. Величина $|e_\kappa|^2$ изменяется по закону

$$\frac{d|e_\kappa|^2}{dt} = 2\gamma_\kappa |e_\kappa|^2.$$

Если поперечная скорость пучка невелика: $(\kappa_\perp v_\perp)^2 \ll \omega_B^2$, то уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \alpha_{xx} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_y^2} \right) - \alpha_{zz} \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2} =$$

$$= \frac{\partial \alpha_{zz}}{\partial v_0} \left[(v_z - v_0) \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_z^2} + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right] + \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial v_0} (v_z - v_0) \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_y^2} \right) + \frac{\partial \alpha_{xz}}{\partial v_x} \left(2v_x \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_x \partial v_z} + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right) + \frac{\partial \alpha_{yz}}{\partial v_y} \left(2v_y \frac{\partial^2 f_0}{\partial v_y \partial v_z} + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \right). \quad (7)$$

Здесь v_0 — начальная продольная скорость пучка, а

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} = & \frac{e^2}{8\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \times \\ & \times \frac{\gamma_\kappa \left[\kappa_\perp v_0 + \frac{\kappa_z}{\kappa_\perp} \omega_B \left(1 + \frac{\Omega_e}{\omega_s} \right) \right]^2}{(\omega_s - \kappa_z v_0 + \omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2}, \\ \alpha_{zz} = & \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \frac{\gamma_\kappa (\kappa_z v_0)^2}{(\omega_s - \kappa_z v_0)^2 + \gamma_\kappa^2}, \\ \alpha_{zx} = & -\frac{e^2}{8\pi^2 m^2} \int \kappa_\perp d\kappa_\perp d\kappa_z \frac{|e_\kappa|^2}{\omega_s^2} \frac{\kappa_\perp^2}{\kappa^2 + \kappa_z^2 \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \times \\ & \times \frac{\kappa_z v_x}{\omega_B} \frac{\gamma_\kappa \left[\kappa_\perp v_0 + \frac{\kappa_z}{\kappa_\perp} \omega_B \left(1 + \frac{\Omega_e}{\omega_s} \right) \right]^2}{(\omega_s - \kappa_z v_0 + \omega_B)^2 + \gamma_\kappa^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим изменение со временем функции f_0 для почти моноэнергетического пучка $\kappa v_\perp \ll \gamma_\kappa$. Если при $t=0$ функция распределения имеет вид

$$f_0(0) = n \left(\frac{m}{2T_1 \pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2T_1} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z - v_0)^2] \right\}, \quad (8)$$

где n — плотность пучка, а T_1 — его начальная температура, то из уравнения (7) можно получить

$$\begin{aligned} f_0(t) = & n \frac{m^{3/2}}{2^{3/2} \pi^{3/2} T_\parallel^{1/2} T_\perp} \exp \left\{ -\frac{m}{2T_\parallel} (v_z - v_0)^2 - \right. \\ & - \frac{m}{2T_\perp} (v_x^2 + v_y^2) \left. \right\} \left\{ 1 + \frac{m}{T_\parallel} (v_z - v_0) \int_0^t \left(\frac{\partial \alpha_{zz}}{\partial v_0} + \frac{\partial \alpha_{xz}}{\partial v_x} + \frac{\partial \alpha_{yz}}{\partial v_y} \right) dt' - \right. \\ & - \frac{2m}{T_\parallel^2} (v_z - v_0) \int_0^t T_\parallel(t') \frac{\partial \alpha_{zz}}{\partial v_0} dt' \left[\frac{3}{2} - \frac{m}{2T_\parallel} (v_z - v_0)^2 \right] - \\ & - \frac{2m}{T_\parallel T_\perp} (v_z - v_0) \int_0^t \left[T_\parallel(t') \frac{\partial \alpha_{xx}}{\partial v_0} + T_\perp(t') \left(\frac{\partial \alpha_{xz}}{\partial v_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \alpha_{yz}}{\partial v_y} \right) \right] dt' \left[1 - \frac{m}{2T_\perp} (v_x^2 + v_y^2) \right] \left. \right\}, \end{aligned}$$

где

$$T_\parallel = T_1 \left(1 + \frac{2m}{T_1} \int_0^t \alpha_{zz} dt' \right),$$

$$T_{\perp} = T_1 \left(1 + \frac{2m}{T_1} \int_0^t \sigma_{xx} dt' \right), \quad (9')$$

Как видно, взаимодействие со спиновыми волнами приводит к тому, что температура пучка растет. При этом возникает анизотропия температур $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$. Средняя скорость пучка также меняется со временем:

$$v = v_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial a_{zz}}{\partial v_0} + \frac{\partial a_{xz}}{\partial v_x} + \frac{\partial a_{yz}}{\partial v_y} \right) dt'. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь область применимости сделанного приближения. Уравнение (2) правильно описывает изменение f_0 , если оно относительно невелико, т. е. не выполняется неравенство

$$\frac{1}{\gamma f_0} \frac{\partial f_0}{\partial t} \gg 1.$$

Используя (9), это условие можно записать в виде

$$U_T \ll \frac{e^2}{m^2 \gamma^2} \int |e_k|^2 d\mathbf{k}. \quad (11)$$

Если имеет место (11), можно пользоваться гидродинамическим приближением для описания пучка [1]. Если неравенство (11) не выполняется, то, как было показано Шапиро и Шевченко [2], условиями применимости (9)–(10) являются неравенства

$$kv_T \ll \gamma_k \text{ и } k \partial v_z \ll \gamma_k. \quad (12)$$

Перейдем к вычислению интегралов в (9') и (10). Плотность энергии $|e_k|^2$ зависит от начальной плотности следующим образом:

$$|e_k|^2 = \frac{|e_k^0|^2}{\left| \frac{\Omega_e^2 - \omega^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} D(\kappa, \omega) \right|_{\omega = \omega_k}^2}, \quad (13)$$

где $D(\kappa, \omega)$ — левая часть дисперсионного уравнения (5). В дальнейшем будем считать, что начальная плотность $|e_k^0|^2$ равна равновесной плотности флуктуаций $|e_k^{012}|^2 = 8\pi T$, где T — температура ферромагнетика.

Рассмотрим сначала усиление, обусловленное эффектом Черенкова:

$$\omega_s \approx \kappa_z v_0.$$

Инкремент нарастания в этом случае равен

$$\gamma_k = \gamma_k^0 - \frac{1}{12} \frac{(\omega_s - \kappa_z v_0)^2}{\gamma_k^0}, \quad (14)$$

где

$$\gamma_k^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_s \left(\frac{\Omega_p^2}{c^2 \kappa^2} \frac{2\pi g M_0}{\Omega_e} \sin^2 \theta \right)^{1/2},$$

$$\Omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}.$$

Подставив (13) и (14) в выражения для a_{zz} , будем иметь

$$a_{zz} = \frac{T e^2}{12 \pi m^2} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\infty} \kappa^2 d\kappa \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2} \frac{1}{\gamma_k} \times$$

$$\times \exp \left\{ 2 \left[\gamma_k^0 - \frac{(\omega_s - \kappa_z v_0)^2}{12 \gamma_k} \right] t \right\}. \quad (15)$$

Проинтегрировав по κ методом перевала, получим

$$a_{zz} = \frac{T e^2}{2 \sqrt{6\pi} m^2 v_0^{1/2}} \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\sin^3 \theta \kappa^2(\theta) \exp \{ 2 \gamma_k^0 t \}}{\cos \theta \left[1 + \cos^2 \theta \left(\frac{\Omega_e}{\omega_s} \right)^2 \right] (\gamma_k^0)^{1/2}}. \quad (16)$$

Если направленная скорость пучка значительно превосходит критическую: $v_0 \gg 2g M_0 \sqrt{\alpha (\beta + H_0/M_0)}$, то, проинтегрировав по θ , получим

$$a_{zz} = \frac{1}{8} \frac{T e^2}{m^2 v_0} \text{tg}^3 \theta_m \times$$

$$\times \left(\frac{\omega_s(\theta_m)}{v_0} \right)^2 \frac{\omega_s^3(\theta_m) \frac{1}{\tau} \exp \{ 2\tau \}}{\Omega_e^{1/2} (\Omega_e + 10 \pi g M_0 \sin^2 \theta_m - 3 \pi g M_0)^{1/2} (\omega_s^2 + \Omega_e^2 \cos^2 \theta_m)}, \quad (17)$$

$$\theta_m = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} \left[3 - \frac{\Omega_e}{\pi g M_0} + \sqrt{\left(3 - \frac{\Omega_e}{\pi g M_0} \right)^2 + 10 \frac{\Omega_e}{\pi g M_0}} \right]^{1/2},$$

$$\tau = \gamma_k(\theta_m) t.$$

Величины, зависящие от κ берутся в случае

$$\kappa(\theta_m) = \frac{g M_0 \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0}{M_0} \right) \left(\beta + \frac{H_0}{M_0} + 4 \pi \sin^2 \theta \right)}}{v_0 \cos \theta_m}.$$

С помощью (17) легко получить

$$\delta T_{\perp} = \frac{1}{8} \frac{T e^2}{m v_0 \gamma_k^0(\theta_m)} + g^3 \theta_m \left(\frac{\omega_s(\theta_m)}{v_0} \right)^2 \frac{1}{\tau} \exp \{ 2\tau \} \times$$

$$\times \frac{\omega_s^3(\theta_m)}{\Omega_e^{1/2} (\Omega_e + 10 \pi g H_0 \sin^2 \theta_m - 3 \pi g M_0) (\omega_s^2(\theta_m) + \Omega_e^2 \cos^2 \theta_m)}. \quad (18)$$

Изменение поперечной температуры можно найти подобно $\delta T_{\perp}$. Оно относительно мало:

$$\theta T_{\perp} \sim \frac{\gamma_k^2}{\omega_B^2} \delta T_{\perp} \ll \delta T_{\parallel}.$$

Для изменения направленного движения пучка получим

$$- m v_0 \partial v = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\omega_s}{\gamma_k} \delta T_{\parallel} \gg \delta T_{\perp}. \quad (19)$$

Таким образом, энергия направленного движения идет в основном на увеличение энергии спиновых волн.

Усиление спиновых волн в случае значительного собственного затухания прекратится при

$$k \partial v_T \sim k \partial v \sim \gamma_k.$$

Отсюда для энергии электрического поля получим

$$\frac{e^2}{m^2} \frac{\omega^2}{v_0^2} \int |e_k^{\max}|^2 d\mathbf{k} \sim \gamma_k^4. \quad (20)$$

При этом становится также существенным взаимодействие различных гармоник спиновых волн. Так же как и в [1], максимальная энергия электромагнитного поля пропорциональна $n^{1/2}$.

Перейдем к рассмотрению усиления спиновых волн на аномальном эффекте Доплера:

$$\omega_s = \kappa v_0 - \omega_B.$$

Инкремент нарастания в этом случае равен

$$\gamma_k = \gamma_k^0 - \frac{1}{8} \frac{(\omega_s + \omega_B - \kappa_z v_0)^2}{\gamma_k^0}, \quad (21)$$

$$\gamma_k^0 = \sqrt{\pi} \frac{Q_p}{c\kappa} \left(\frac{Q_e g M_0 \omega_B}{\omega_s} \right)^{1/2} \left| \left(1 + \frac{\omega_s}{Q_e} \right) \cos \theta + \frac{\kappa v_0}{\omega_B} \frac{\omega_s}{Q_e} \sin^2 \theta \right|.$$

Произведя интегрирование во втором выражении (9'), получим

$$\delta T_{\perp} = \frac{T e^2}{8 m v_0 [\gamma_k(\theta_m) \gamma_k^*(\theta_m)]^{1/2}} \frac{\sin \theta_m \left(\frac{\omega_s + \omega_B}{v_0} \right)^{1/2}}{\cos^5 \theta_m} \times \\ \times \frac{\omega_B^2}{\omega_s^2 + Q_e^2 \cos^2 \theta_m} \left[1 + \frac{\omega_s}{\omega_B} \sin^2 \theta_m + \frac{Q_e}{\omega_s} \cos^2 \theta_m \right] \frac{\exp \{2\tau\}}{\tau}, \quad (22)$$

где θ_m определяется из условия максимальности $\gamma_k(\theta)$ в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Изменение продольной температуры

$$\delta T_{\parallel} \sim \frac{\gamma_k^2}{\omega_B} \delta T_{\perp} \ll \delta T_{\perp}$$

Энергия направленного движения меняется на величину

$$m v_0 \delta v = - \left(1 + \frac{\omega_s}{\omega_B} \right) \delta T_{\perp}, \quad (23)$$

т. е. энергия, идущая на увеличение поперечной температуры пучка, относится к энергии спиновых волн как $\frac{\omega_B}{\omega_s}$.

Если собственное затухание спиновых волн не мало, то при

$$\kappa \delta v \sim \gamma_k$$

усиление прекратится. Максимальная плотность энергии спиновых волн так же, как и в [1], будет пропорциональна $n^{3/2}$.

Автор благодарен В. Г. Барьяхтару, В. Д. Шапиро и В. И. Шевченко за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудов З. З. ЖЭТФ, 51, 1934, 1966.
2. Шапиро В. Д., Шевченко В. И. ЖЭТФ, 42, 1513, 1952.
3. Ахмезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И. УФН, 71, 533, 1960.
4. Барьяхтар В. Г., Махмудов З. З. ЖЭТФ, 47, 593, 1964.

З. З. Махмудов

Јүклү зэррәчикләр дәстәсинин спин далғалары илә гаршылыгы тәсириинин квазиҳәтти нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә јүклү зэррәчикләр дәстәсинин спин далғаларыны күчләндрмәси мәсәләсинә бахылыр. Һәмчинин тәрсинә күчләндрилмиш спин далғаларынын јүклү зэррәчикләр дәстәсинә тәсири тәдгиг едилир. Спин далғаларынын амплитудунун артмасы илә дәстәсинин истигамәтләнмиш сүрәтинин вә температурунун дәјишмәси һесапланмышдыр.

УДК 535—34—14

Ч. О. КАДЖАР, А. А. АББАСОВ, Л. М. ИМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОВОЛНОВОГО СПЕКТРА МОЛЕКУЛЫ ЭТИЛМЕРКАПТАНА

Радиоспектроскопическое изучение молекулы этилмеркаптана входит в программу наших исследований ряда спиртов и меркаптанов. Изучение микроволнового спектра молекулы этилмеркаптана представляет интерес для определения изменений в структуре этанола при замещении атома кислорода на атом серы, изменений параметров внутреннего заторможенного вращения, а также для интерпретации ряда спутников недостаточно строго идентифицированных для молекулы этанола.

Спектр молекулы этилмеркаптана снимался на радиоспектрометре с электрической молекулярной модуляцией (частота модуляции 75 кГц), с применением синхронного детектирования получаемых сигналов [1]. Исследование образца производилось в волноводной поглощающей ячейке при температуре в среднем -50°C , в диапазоне частот 18,0—33,0 кГц. Частоты спектральных линий измерялись по частотным меткам вторичного эталона частоты, который контролировался по известным линиям молекул аммиака или метилового спирта. Точность измерения за счет отсутствия обычно применяемого непрерывного контроля частоты по сигналам времени была $\pm 0,3$ МГц.

В табл. 1 приводятся частоты спектральных линий молекулы. Частоты, измеренные только волномером с точностью ± 5 МГц, показаны без десятичных знаков.

В богатом спектре был идентифицирован ряд переходов молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$ и обнаружено пять линий $^{\circ}\text{Q}$ -ветви молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$, содержание которой в естественной смеси составляет около 4%. Как видно из табл. 2, жесткая модель молекулы дает хорошее согласие для наблюдаемых низких l .

В табл. 3 приводятся найденные вращательные постоянные, главные моменты инерции и параметр асимметрии молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$ и $\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$. Получаемое экспериментальное значение $I_a + I_b - I_c = 6,3897$ ат. ед. массы $\text{\AA}^2$ молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2^{32}\text{SH}$ близко к значению, получаемому для этанзамещенных, и указывает на наличие плоскости симметрии в молекуле. Вращательные постоянные молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2^{34}\text{SH}$ определялись из предположения неизменности величины $I_a + I_b - I_c$ при замещении ^{32}S на ^{34}S .

Таблица 1

Частоты (МГц) спектральных линий молекулы этилмеркаптана

Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность
18 268	слабая	20 810	слабая	24 106,1	средняя
18 274	"	20 900	"	24 150,5	"
18 410	"	21 062,6	"	24 194	"
18 465	сильная	21 135	"	24 198	слабая
18 510	слабая	21 200	"	24 413,8	"
18 806	средняя	21 255,0	средняя	24 503	"
18 869	слабая	21 280	слабая	24 520	"
18 905	"	21 326	средняя	24 535	средняя
18 935	средняя	21 332,2	слабая	24 562,6	слабая
18 038	слабая	21 338,7	"	24 603	"
18 110	сильная	21 356	"	24 611	"
18 190	слабая	21 360	средняя	24 614	"
19 234	средняя	21 396,9	сильная	24 628	"
19 240	слабая	21 455,5	слабая	24 643	"
19 263	"	21 465	"	24 688	"
19 285	"	21 499	"	24 764,4	сильная
19 374	"	21 583	"	24 790	слабая
19 456	"	21 700	средняя	24 797	"
19 485	"	21 801	"	24 820	сильная
19 498	"	22 953	слабая	25 010	слабая
19 503	"	22 059	средняя	25 038	сильная
19 540	сильная	22 082	"	25 047,5	слабая
19 626	слабая	22 174	слабая	25 095,8	сильная
19 785	"	22 210	средняя	25 160	слабая
19 950	сильная	22 214	"	25 208	"
19 985	слабая	22 384	"	25 216	"
19 997	"	22 425	слабая	25 220	"
20 054	"	22 505	"	25 232	"
20 060	"	22 512	"	25 238,7	"
20 198	"	22 527	"	25 295	"
20 117,4	средняя	22 580	средняя	25 304	"
20 130,7	слабая	22 587	слабая	25 312	"
20 150	"	22 637,7	средняя	25 326	"
20 158	"	22 686	сильная	25 332	"
20 160	"	22 820	слабая	25 405	средняя
20 164	"	23 059	средняя	25 453	слабая
20 171	"	23 073	слабая	25 492	"
20 196	"	23 124,7	"	25 603	"
20 217	"	23 221	"	25 605	"
20 225,5	средняя	23 260	"	25 630	сильная
20 147	слабая	23 265	сильная	25 672	слабая
20 260	средняя	23 321	слабая	25 696	сильная
20 275	сильная	23 329	"	25 702	слабая
20 293	слабая	23 404	"	25 722	средняя
20 338	средняя	23 420	"	25 757,7	"
20 360	слабая	23 534,8	"	25 865,7	слабая
20 423	"	23 607	средняя	25 867,1	"
20 450	"	23 652	слабая	25 875	"
20 497	"	23 660	"	25 880	"
20 538	"	23 663	"	25 959	"
20 550	сильная	23 681,5	средняя	25 975	"
20 564	слабая	23 692,2	слабая	25 988	"
20 574	"	23 789	средняя	25 998	"
20 593	"	23 805	слабая	25 002	"
20 602	сильная	23 809	"	26 007	"
20 644	слабая	23 880	"	26 035	"
20 665	"	23 914	"	26 040	средняя
20 674	"	23 918	средняя	26 100	слабая
20 716	"	23 943	слабая	26 141	"
20 722,6	"	23 961	средняя	26 160	"
20 727	"	23 987	сильная	26 180	сильная

Продолжение таблицы 1

Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность
26 235	сильная	28 523	слабая	29 818	слабая
26 297,3	"	28 620	"	29 827,5	"
26 324	"	28 680	"	29 876	"
26 397,0	"	28 688	"	29 915	"
26 420	"	28 704	сильная	29 940	сильная
26 520	"	28 714	слабая	29 952,8	слабая
26 525	средняя	28 735	"	29 987	"
26 557	слабая	28 742	"	30 003	"
26 602	средняя	28 812	"	30 009	средняя
26 618	сильная	28 850	"	30 050	слабая
26 742	"	28 913	"	30 058	средняя
26 768	"	28 923	средняя	30 065,2	слабая
26 826	"	28 940	"	30 102	средняя
26 831	средняя	28 947	слабая	30 106	слабая
26 880	слабая	28 951	"	30 122,9	"
26 907	"	28 960	сильная	30 188,6	средняя
26 910	"	28 980	слабая	30 208,1	сильная
26 914	"	28 988	"	30 234	слабая
26 920	"	29 012	"	30 240	"
26 938	"	29 035	"	30 260	"
26 960	"	29 057	"	30 272	"
26 983	"	29 103	"	30 263	"
27 050	"	29 108	"	30 317,6	сильная
27 055	"	29 123	сильная	30 351,6	средняя
27 058	"	29 175	"	30 365	слабая
27 081	средняя	29 180	слабая	30 373,8	средняя
27 146	слабая	29 203	"	30 393	сильная
27 156	"	29 209	"	30 417	"
27 184	средняя	29 243	"	30 427	"
27 238	"	29 245,3	средняя	30 442	"
27 240	"	29 265	слабая	30 448	слабая
27 285	"	29 271	"	30 460	"
27 324,1	"	29 326	"	30 470	средняя
27 463	сильная	29 370	"	30 478	слабая
27 528	слабая	29 393	"	30 506	слабая
27 538,7	"	29 400	"	30 526	"
27 540,8	"	29 403	"	30 556	"
27 570	средняя	29 406	"	30 564	"
27 576	"	29 412	"	30 572	"
27 629	слабая	29 414	"	30 575	"
27 717	"	29 477	"	30 580	"
27 739	"	29 486	"	30 590	"
27 770	"	29 492	"	30 598	"
27 777	"	29 517	"	30 626,8	"
27 786	"	29 542	"	30 645	"
27 842	"	29 600	сильная	30 660	"
27 865	"	29 618	слабая	30 700	"
27 891,8	"	29 621	"	30 705	"
27 908	"	29 645	средняя	30 726	"
27 919,5	"	29 660	"	30 728	"
28 087,9	сильная	29 677	слабая	30 769	"
28 130	слабая	29 681	"	30 780	средняя
28 138	"	29 700	сильная	30 840	"
28 165	средняя	29 703	"	30 845	сильная
28 183	слабая	29 734,9	"	30 870	слабая
28 216	"	29 740	"	30 881	"
28 247	"	29 747	слабая	30 926,8	"
28 345	средняя	29 760	"	31 004,4	средняя
28 357	"	29 760	"	31 106,4	"
28 465	слабая	29 798	средняя	31 029	слабая
28 469	"	29 802	"	31 034	"

Продолжение таблицы 1

Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность	Частоты	Интенсивность
31 041,3	средняя	31 333	слабая	31 906	слабая
31 054,8	"	31 357	"	31 934	"
31 065,7	сильная	31 370	"	31 946,6	"
31 091,6	"	31 379	"	31 999,7	"
31 100,8	"	31 400	"	31 030	"
31 127	слабая	31 420	"	32 033	"
31 148,8	средняя	31 485	"	32 050	"
31 158	слабая	31 520	"	32 153	средняя
31 164	"	31 530	"	32 288,3	слабая
31 178	"	31 572	"	32 322,9	"
31 180	"	31 610,8	средняя	32 436,0	"
31 203,6	средняя	31 688	слабая	32 470	"
31 241,9	"	31 677	"	32 482	средняя
31 248	"	31 723	"	32 491	слабая
31 252	слабая	31 728	"	32 507	"
31 258	слабая	31 742	"	32 570	сильная
31 266	слабая	31 745	"	32 638	слабая
31 307,1	средняя	31 793	"	32 653	"
31 325	слабая	31 816	"	82 709	средняя
31 330	"	31 838,5	"	32 800	сильная
31 329,5	"	31 853	"	32 933	"

Таблица 2

Частоты (МГц) идентифицированных переходов

Переход	CH ₃ CH ₂ ³² SH		CH ₃ CH ₂ ³⁴ SH	
	измеренные	рассчитанные	измеренные	рассчитанные
1 ₀₁ — 1 ₁₀	23 534,8	23 534,8	—	23 545,0
2 ₀₂ — 2 ₁₁	24 150,5	24 150,5	—	24 137,8
3 ₀₃ — 3 ₁₂	25 095,8	25 095,8	—	25 047,3
4 ₀₄ — 4 ₁₃	26 397,0	26 397,1	25 047,3	25 047,3
5 ₀₅ — 5 ₁₄	28 087,9	28 087,9	26 297,8	26 297,8
6 ₀₆ — 6 ₁₅	30 208,2	30 208,6	27 920,0	27 920,5
7 ₀₇ — 7 ₁₆	32 802,0	32 803,6	29 952,4	29 953,1
1 ₁₁ — 2 ₁₂	20 130,7	20 130,7	32 436,3	32 437,3
1 ₀₁ — 2 ₀₂	20 722,6	20 722,6	—	—
1 ₁₀ — 2 ₁₁	21 338,7	21 338,5	—	—
2 ₁₂ — 3 ₁₃	30 188,6	30 188,6	—	—
2 ₀₂ — 3 ₀₃	31 054,8	31 054,7	—	—
2 ₁₁ — 3 ₁₂	31 100,8	31 101,7	—	—
2 ₁₀ — 3 ₁₁	31 148,8	31 148,8	—	—
2 ₁₁ — 3 ₁₂	31 999,7	32 000,1	—	—
4 ₁₄ — 5 ₀₅	31 241,9	31 243,1	—	—
4 ₁₃ — 3 ₁₂	25 238,7	25 241,4	—	—
5 ₁₅ — 4 ₁₄	22 637,7	22 638,0	—	—

Структура молекулы оценивалась по простой методике. Среднее расстояние с атомов водорода, находящихся вне плоскости симметрии, до этой плоскости находилось из выражения

$$8m_H \cdot c^2 = Ia + Ib - Ic.$$

Координаты атомов серы в системе главных осей определялись из уравнения Крайчмана [2]. Координаты a и b атомов водорода метильной и метиленовой групп задавались в той же системе координат по ранее найденной предварительной структуре [3]. Остальные координаты определялись решением уравнений

$$P_{aa} = \sum m_i a_i^2, P_{bb} = \sum m_i b_i^2$$

при условии одновременной минимизации уравнений $\sum m_i a_i$, $\sum m_i b_i$ и $\sum m_i a_i b_i$. Структурные параметры молекулы этилмеркаптана, определенные по найденным таким образом координатам атомов в системе главных осей, приведены в табл. 4. Рассчитанные по этим параметрам главные моменты инерции и вращательные постоянные близки к экспериментальным (табл. 2).

Таблица 3

Главные моменты инерции (ат. ед. массы A^2) и вращательные постоянные (Мгц) молекул CH₃CH₂³²SH и CH₃CH₂³⁴SH

	CH ₃ CH ₂ ³² SH		CH ₃ CH ₂ ³⁴ SH	
	эксперимент	рассчитанные	эксперимент	рассчитанные
A	28 416,5	28 483,6	28 329,6	28 396,1
B	5 485,6	5 485,5	5 366,5	5 366,2
C	4 881,7	4 883,6	4 784,6	4 785,3
I_a	17,7900	17,7481	17,8447	17,8028
I_b	92,1560	92,1576	94,2030	94,2055
I_c	103,5563	103,5161	105,6581	105,6188
h	— 0,948682	— 0,948992	— 0,950575	— 0,950876

Вращательные переходы, попадающие в микроволновую область, обычно наблюдаются не только в основном, но и в возбужденных колебательных состояниях. Интенсивность спектральных линий в возбужденных состояниях падает пропорционально множителю Больц-

мана $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ и достаточна для наблюдения только когда колебательные частоты достаточно низки. В молекуле этилмеркаптана к таким низкочастотным колебаниям относятся кручение метильной группы относительно связи C—C и деформационное колебание группы атомов C—C—S.

Обнаруженные в окрестностях линий nQ -ветви спутники (табл. 5) при -50°C оказались приблизительно в четыре раза слабее их по интенсивности при такой же ширине. Аналогичные по форме и интенсивности спутники были обнаружены у молекул CH₃CH₂OH, CH₃CD₂OH, CD₂CH₂OH и CH₃CHDOH [4]. Мы отнесли эту серию к первому возбужденному деформационному колебательному состоянию, так как при ожидаемых высотах потенциального барьера в возбужденном крутильном состоянии спектральные линии должны наблюдаться расщепленными или заметно уширенными [5]. По отношению интенсивностей вращательных линий nQ -ветви в основном и первом возбужденном состояниях при одной и той же температуре частота деформационных колебаний была равна 215 см^{-1} , что, как и следовало ожи-

дать [6], приблизительно на 100 см^{-1} ниже частоты 310 см^{-1} , найденной нами для молекулы этилового спирта. Отсюда следует правильность идентификации этих спутников в спектре молекулы этилового спирта.

Таблица 4

Структура молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{SH}$

Параметры	Структура
$r(\text{C}-\text{H})_\alpha$	$1,093 \text{ \AA}$
$r(\text{C}-\text{H})_\beta$	$1,090 \text{ \AA}$
$r(\text{C}-\text{C})$	$1,530 \text{ \AA}$
$r(\text{C}-\text{S})$	$1,829 \text{ \AA}$
$r(\text{S}-\text{H})$	$1,350 \text{ \AA}$
$\angle \text{CCH}_\alpha$	$109^\circ 42'$
$\angle \text{CCH}_\beta$	$109^\circ 34'$
$\angle \text{CCS}$	$108^\circ 18'$
$\angle \text{CSH}$	$96^\circ 26'$

Таблица 5

Частота вращательных переходов в первом возбужденном деформационном колебательном состоянии

Переход	Частота (Мгц)	
	измеренная	рассчитанная
$1_{01} - 1_{10}$	23 124,7	23 124,7
$2_{02} - 2_{11}$	23 692,2	23 692,2
$3_{03} - 3_{12}$	24 562,6	24 562,6
$4_{04} - 4_{13}$	25 757,7	25 758,3
$5_{05} - 5_{14}$	27 307,3	27 308,6
$6_{06} - 6_{15}$	29 245,8	29 294,0
$7_{07} - 7_{16}$	31 610,8	31 617,5

$$A-C = 23\,124,7 \text{ Мгц} \quad x = -0,951797$$

Дипольный момент молекулы определялся по смещению частот штарковских компонент переходов $2_{02} - 2_{11}$ ($M=2$) и $3_{03} - 3_{12}$ ($M=2,3$) как наиболее интенсивных. Поглощающая ячейка градуировалась по переходу $3_{13} - 3_{12}$ молекулы формальдегида, считая $\mu = 2,340 \text{ D}$ [7].

Составляющие дополнительного момента по главным осям a и b оказались равными $\mu_a = 0,93 \pm 0,03 \text{ D}$ и $\mu_b = 1,20 \pm 0,03 \text{ D}$. По оси c составляющая дополнительного момента равна нулю, так как молекула имеет плоскость симметрии.

Общий дипольный момент молекулы этилмеркаптана оказывается равным $\mu = 1,52 \pm 0,04 \text{ D}$ и составляет угол $8^\circ 40'$ с направлением связи $\text{C}-\text{S}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. ГН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 2, 51, 1961.
2. Kraitchman I. Am. j. Phys., 21; 17 (1953).
3. Imanov L. M. Qajar Ch. O., Abbasov A. A. Lhys. lettert, 24, № 9, 485 (1967).
4. Исаев И. Дж. Дисс., 1968.
5. Herschbach D. R. l. chem. phys., 31, 91 (1959).
6. Кольрауш К. Спектры комбинированного рассеивания, 201, ИЛ, М., 1952.
8. Shoolery I. W., Sharbaugh A. H. Phys. rev., 82, 95 (1951)

Ч. О. Гачар, А. Э. Аббасов, Л. М. Иманов

Этилмеркаптан молекулунун микродалгадакы спектринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Этилмеркаптан молекулунун радиоспектрометрде $18-33,0 \text{ кмкс}$ тезлик диапозонуна дүшөн там спектри чыхарылмышдыр. Молекулун эсас фырланма халына аид олан 23 вэ биринчи һәјәчанланмыш халына аид олан 7 удма хәтти ујғунлашдырылмышдыр. Бу удма хәтләриндән $\text{CH}_3 \text{CH}_2^{32}\text{SH}$ вэ $\text{CH}_3 \text{CH}_2^{34}\text{SH}$ үчүн фырланма сабитләри, асимметрия

параметри вө дипол моменти тапылмышдыр. Фырланма сабитләриндән јени һесаблама гәјдасы илә молекулун гурулуш параметрләри тәјин едилмишдыр.

Эсас вэ биринчи һәјәчанланмыш рәгси хала аид олан в "Q-будағы-нын фырланма хәтләринин интенсивликләринин һисбәтиндән молекулун CCS алагәсинин деформасија рәгсләринин тезлији тапылмышдыр.

М. А. ТАЛИБИ, Э. Г. МАМЕДОВ, Т. М. ВЕРДИЕВА

СЕЛЕНОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ С ИНВЕРСИЕЙ ЗНАКА ВЫПРЯМЛЕНИЯ

В [1] было показано, что на $p-n$ -переходах $\text{Se}-\text{CdSe}$ с примесью Mn в селене вследствие двукратной ионизации примесных атомов в области объемного заряда создаются дополнительные глубокие ловушки, обусловленные незаполненной $3d$ оболочкой Mn . В результате создания дополнительных глубоких ловушек расширяется область температур и напряжений, при которых наблюдается насыщение обратного тока. Было также показано, что при $150-170^\circ\text{C}$ знак выпрямления

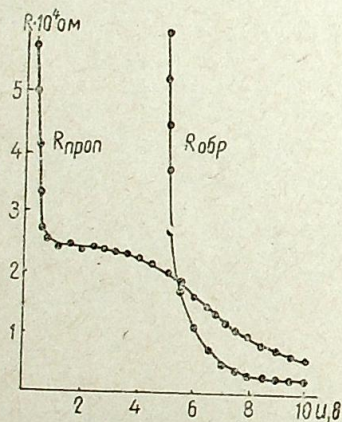


Рис. 1.

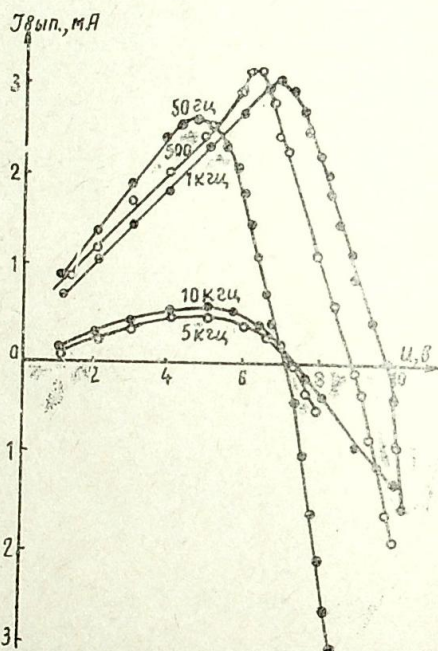


Рис. 2.

зависит от величины постоянного напряжения U , приложенного к элементу. Аномальный знак выпрямления наблюдается при повышении напряжения до $3-4$ в, после чего восстанавливается нормальный знак. Отметим, что это явление обратимое, т. е. при падении температуры ниже 150°C во всех интервалах напряжений наблюдается нормальный знак выпрямления. Однако в [1] природа инверсии знака выпрямления не была выяснена.

При настоящем исследовании были изготовлены селеновые элементы, в которых инверсия знака выпрямления наблюдалась при комнатной температуре. В отличие от результатов опытов в [1] здесь характеристики одного из образцов, полученные на постоянном токе, от элементов [1] с ростом приложенного к элементу напряжения знак выпрямления меняется с нормального на аномальный. Исследование повышении переменного напряжения от 0 до $3-4$ в (при $f = 50$ Гц) сила выпрямленного тока $I_{\text{выпр}}$ растет до $2,5$ мА, затем вследствие появления встречного $I_{\text{выпр}}$ следует спад тока. При $I_{\text{выпр}} = I_{\text{выпр}}$ $I_{\text{выпр}}$ = 0 . При последующем повышении U_- весь выпрямленный ток определяется величиной $I_{\text{выпр}}$. Следует отметить, что рис. 2 характеризует элемент с площадью $S = 11,56$ см². Для элементов с $S = 0,07$ см² переключение знака выпрямления наблюдается до $f = 1$ МГц и рост и спад кривых переключения носят более резкий характер.

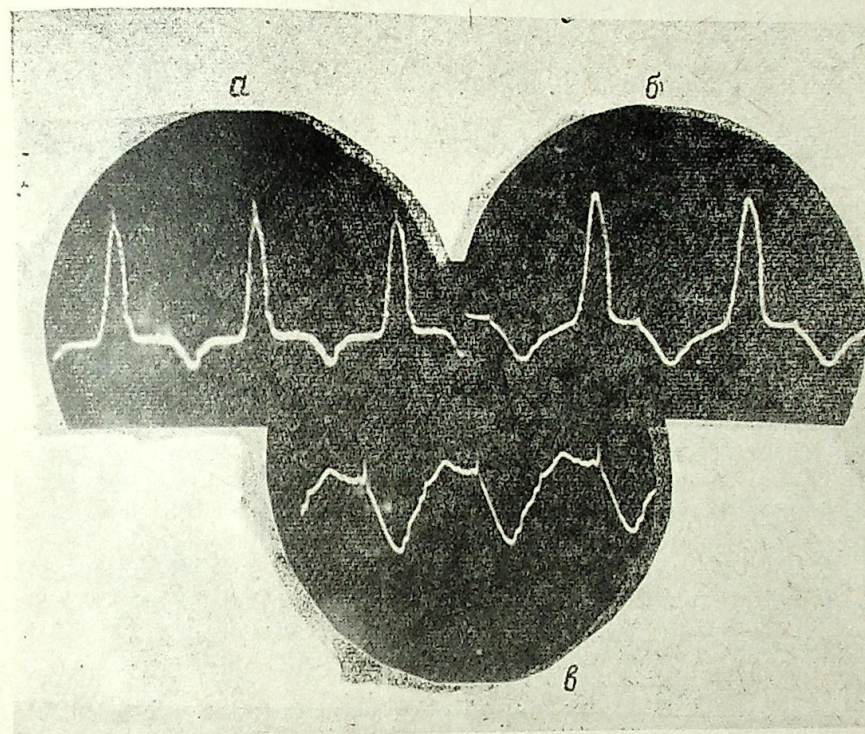


Рис. 3.

Осциллографическое исследование селеновых элементов с инверсией знака выпрямления подтверждает результаты изменения его с нормального на аномальный при повышении приложенного к элементу переменного напряжения (рис. 3). При повышении U_- ($f = 50$ Гц) до 4 в знак выпрямленного тока (в увеличенном масштабе) нормальный (рис. 3, в). При дальнейшем повышении U_- вследствие увеличения темпа роста $I_{\text{выпр}}$ по сравнению с ростом $I_{\text{выпр}}$ знак выпрямления меняется с нормального на аномальный (рис. 3, а). Аналогичная картина наблюдается и при осциллографировании динамической вольтамперной характеристики.

С целью выяснения механизма инверсии знака выпрямления были рассмотрены зависимости токовых характеристик переходов вида $p-n-p$

и $n-p-n$. При определенном соотношении площадей переходов, входящих в данную структуру, наблюдается инверсия знака выпрямления. Элементы с инверсией знака выпрямления представляют собой систему $\text{Bi}_2\text{Se}_3(n)-\text{Se}(p)-\text{CdSe}(n)$. Причем часть слоя селена со стороны Bi_2Se_3 содержит примесь, задерживающую кристаллизацию Se.

Таким образом, для описываемых выше элементов инверсия знака выпрямления моделируется структурой $n-p-n$ (рис. 3, б).

Исследованные в [1] системы имели вид $\text{Al}-\text{CdSe}$ (0,01% Mn) — Se (+ 0,01% Mn) — Bi_2Se_3 (0,001% Mn). Основной $p-n$ -переход в этой системе создается между Se и Cd Se. Обнаруженная при 150—170°C инверсия знака выпрямления указывает на то, что при этом образуется еще один встречно включенный выпрямляющий переход, который, как и в описанных выше элементах, может образоваться между Se и Bi_2Se_3 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Талиби М. А., Мамедов Э. Г. Статьи в сб. „Селен теллур и их применения“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.

М. Э. Талиби, Е. Ы. Маммедов, Т. М. Вердијева

Дүзләнмә ишарәси дәјишкән олан селен элементләри

ХҮЛАСӘ

Отаг температурунда дүзләнмәнин ишарәси дәјишкән олан селен элементләри һазырланмышдыр. Тәтбиг олунан U_c кәркинлијин ($f = 50 \text{ кс}$) гијмәти О-дан 3—4 в-а гәдәр дәјишдикдә дүзләнмәнин ишарәси нормалдыр, кәркинлијин сонрақы артымында дүзләнмәнин ишарәси дәјишир. Һадисәнин механизмини ајдынлашдырмаг үчүн $p-n-p$ вә $n-p-n$ кечидләринин характеристикалары арашдырылмышдыр. Бу кечидләрин саһәләринин мүәјјән нисбәтләриндә дүзләнмәнин ишарәсинин дәјишмәси мүшаһидә олунур. Алынган селен элементләри $p-n-p$ структуру илә моделләшир вә $\text{Bi}_2\text{Se}_3(n)-\text{Se}(p)-\text{CdSe}(n)$ шәклиндәдир. Кәркинлијин мүәјјән гијмәтинә гәдәр дүзләнмәнин ишарәсини биринчи, кәркинлијин сонрақы артымында исә дүзләнмәнин ишарәсини кинчи кечид мүәјјән едир. Селен элементләринин саһәләрини дәјишмәклә дүзләнмә ишарәси дәјишмәсинин тезлик интервалыны идарә етмәк олар. Бу элементләрин характеристикалары [1]-дә гејд олунмуш элементләрин характеристикалары илә мүгајисә едилир.

И. Г. КЕРИМОВ, А. Г. МУСАЕВ, А. Г. РУСТАМОВ, М. Ш. МАМЕДОВ,
Ф. Ю. АЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ ОДНОСТОРОННЕГО СЖАТИЯ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ $\text{Li}_{0,03}\text{Mn}_{0,97}\text{Se}$ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Разработана установка для исследования одностороннего влияния давления на электропроводность поликристаллического антиферромагнитного полупроводника $\text{Li}_{0,03}\text{Mn}_{0,97}\text{Se}$ от 4,2 до 300°K. Определено смещение температуры перехода от антиферромагнитного в ферромагнитное состояние и выяснена особенность ее в области фазового превращения. Этот полупроводник относится к числу тех, особенно интересных соединений, у которых в области насыщения, где концентрация носителей тока не меняется, подвижность весьма существенно зависит от температуры и давления. Этими свойствами обладают очень редкие полупроводниковые соединения, которые, по-видимому, могут применяться как тензодатчики. Ранее в этом образце изучались влияния различной концентрации примесей лития на электропроводность в интервале 78—700°K [1]. Оказалось, что с увеличением количества примесей лития электропроводность резко растет из-за возрастания числа носителей заряда.

Представляет интерес изучение влияния давления на электропроводность полупроводников, особенно в области фазового превращения от антиферромагнитного в ферромагнитное состояние. Определение смещения температуры перехода T_n под давлением позволит судить об изменении обменной энергии при этих переходах [2].

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Проблема создания установки для получения высоких давлений довольно сложна и сопровождается рядом трудностей, особенно при низких температурах. Существующие установки сложны и во время измерений в области гелиевой температуры, когда давление меняется непрерывно от нуля до максимально возможной величины, возникают трудности [3]. Кроме механических и методических трудностей, при конструировании установки основным фактором является количество расходуемой жидкости (например, жидкого гелия).

В настоящей статье приводится описание сконструированной установки, позволяющей вести исследования электропроводности при одностороннем сжатии от температуры 1,5—300°K, с созданием непрерывного давления непосредственно при низких температурах.

Принципиальная схема установки представлена на рис. 1. Основными частями прибора являются: азотный и гелиевый дьюары (5, 6),

подъемник (2), подвижной шток (12), захват (15). Нижний захват закрепляют снизу с корпусом держателя (13), верхний (15) — также со штоком (12), который, в свою очередь, соединяется с динамометром (10), а динамометр связан с винтом подъемника (9). Корпус держателя с помощью толстостенной трубки жестко соединяется с фланцем криостата, который прочно крепится к неподвижным угольным (последние на рисунке не указаны). Поворотом маховика (1) в ту или иную сторону винт подъемника (9) перемещается вверх и вниз: при этом поднимают или опускают верхний захват. Все детали подвижной части изготовлены из нержавеющей стали. Таким образом, на образец действует сжимающая сила. С помощью этой установки давление достигало величины 2000 кг/см^2 .

Было установлено, что на резиновое уплотнение, находящееся при комнатной температуре, потеря сил незначительна и ими можно пренебречь. Сопротивление образцов до и после нагрузки измерялось на потенциометрической схеме. Для этого к образцу приваривали потенциальные провода. Токковые провода припаивали на платиновые пластинки, которые помещались между зажимами и образцом. Для улучшения контакта между торцами образца и платиновыми пластинками использовалось индиево-галлиевое соединение, обладающее хорошей проводимостью. Между зажимами и платиновыми пластинками помещен тонкий слой электроизолятора. Температура образца в области $100\text{--}300^\circ\text{K}$ измерялась с помощью медь-константановой термопары, а в области $4,2\text{--}100^\circ\text{K}$ — угольным термометром сопротивления фирмы Аллен—Бредли. Погрешность измерений сопротивления образца не превышала $0,05\%$, а температура — $0,01^\circ$.

Нагреватель для изменения температуры (7) прикреплен к нижней части держателя. Образец, термометры и нагреватель помещены в герметический вакуумный кожух, изготовленный из меди, а фланец кожуха припаивается к трубе держателя.

Один цикл измерения проводится следующим образом. Измеряется электросопротивление при комнатной температуре, воздух из кожуха откачивается и заполняется теплообменным газообразным гелием. В криостат заливается жидкий гелий. После установления температуры, что контролируется угольным термометром, измеряется сопротивление образца. Газообразный гелий откачивается из кожуха, с помощью нагревателя получается температура от $4,2$ до 300°K и измеряется электросопротивление. Таким образом измерения производились в интервале от $4,2$ до 300°K . После установления определенной нагрузки весь цикл измерения повторяется.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Измерено электрическое сопротивление $\text{Li}_{0,03}\text{Mn}_{0,97}\text{Se}$ в температурной области $4,2\text{--}300^\circ\text{K}$ без давления ($P=0$) и под давлением ($P=100 \text{ кг/см}^2$).

Полученные данные удельной электропроводности в зависимости от температуры представлены на рис. 2. Кривая 1 характеризует зави-

симость σ от температуры без давления, а кривая 2 — под давлением. Из рисунка видно, что под давлением электропроводность уменьшается. Ниже $\sim 90^\circ\text{K}$ вещество является антиферромагнитным, поэтому кривые 1 и 2 по характеру друг от друга не отличаются. Вплоть до $4,2^\circ\text{K}$ наблюдается очень слабая зависимость σ от T . Аналогичная зависимость присуща многим антиферромагнитным полупроводникам [3]. Область превращения охватывает широкий интервал температуры ($90\div 250^\circ\text{K}$). В интервале $100\div 200^\circ\text{K}$ электропроводность без давления зависит от температуры линейно.

Точка перехода (T_n), определенная по этой кривой экстраполяцией линейной части до пересечения с осью температур, равна $T_n = 108^\circ\text{K}$. Температура перехода T'_n под давлением определялась экстраполяцией кривой 2, равной $T'_n = 122^\circ\text{K}$. В соответствии с полученными данными определено относительное смещение температуры перехода под давлением (при $P=100 \text{ кг}$), равное

$$\frac{\Delta T_n}{\Delta P} = +0,14 \frac{\text{град}}{\text{кг/см}^2}.$$

Эта большая величина в сравнении с существующими значениями ($\sim 10^{-3}$) известными в литературе для других антиферромагнитных полупроводников [3, 4, 5].

Смещение температуры перехода, как было найдено, велико и положительно, поэтому $\frac{\Delta T_n}{\Delta P} > 0$, что означает увеличение обменной

энергии под давлением. Это обстоятельство способствует сохранению упорядоченности антиферромагнитного состояния под действием давления при сравнительно высокой температуре, т. е. температура устойчивого состояния антиферромагнитного упорядочения $T_n = 108^\circ\text{K}$ смещена в сторону высокой температуры на величину 14°K .

Как известно [6], появление антиферромагнитного упорядочения препятствует переносу заряда, т. е. процесс переноса требует дополнительной энергии активации, пропорциональной обменной энергии двух электронов в соседних узлах решетки. Благодаря этому, длина свободного пробега уменьшается, что приводит к уменьшению электропроводности.

Область перехода сильно размыта из-за постепенного перехода от антиферромагнитного упорядочения к ферромагнитному. Выше 260°K полупроводник переходит в ферромагнитное состояние и электропроводность почти не меняется с температурой.

Уменьшение электропроводности под давлением, по-видимому, в основном связано с сохранением антиферромагнитного упорядочения, которое препятствует движению носителей тока в данном соединении. Результаты эксперимента хорошо согласуются с теоретической работой [8].

Авторы благодарят Ю. М. Сеидову за данные советы и Л. М. Валиева, В. Е. Змитровича за помощь, оказанную при выполнении данной работы.

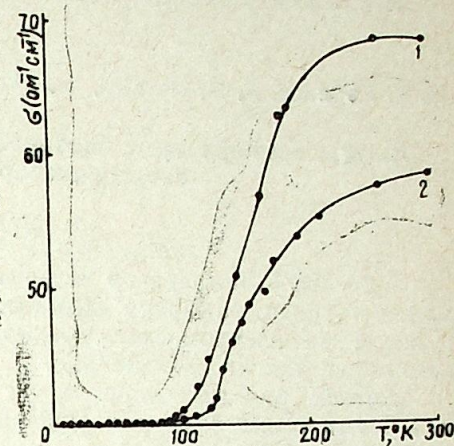


Рис. 2. Зависимость удельной электропроводности антиферромагнитного полукристаллического полупроводника $\text{Li}_{0,03}\text{Mn}_{0,97}\text{Se}$ как функции температуры: 1 — без давления; 2 — под давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рустамов А. Г., Керимов И. Г., Валиев Л. М. Неорганические материалы. Изв. АН СССР (в печати).
2. Kittel C. Phys. rev. 120, 335, (1960).
3. Свенсон К. Физика высоких давлений ИЛ, 1963.
4. Гражданкина Н. П. ЖЭТФ 33, 1524, (1957); 35, 907, (1958).
5. Higoysu Fulmori. J. Phys. soc. Japan. 21, № 10, 1960, (1966).
6. Бердышев А. А. ФТТ, т. 8, 5, 1382, (1966).
7. Иоффе А. Ф. Полупроводники в современной физике. Изд. АН СССР, 1954.
8. Булаевский Л. Н. Хомский Д. И. ФТТ, т. 2, № 11, 3070, (1967)

И. К. Кәримов, А. М. Мусајев, М. Ш. Мәммәдов, А. Г. Рүстәмов, Ф. Ј. Әлијев

Ашағы температурда биртәрәfli тәзјигин $Li_{0.03} Mn_{0.97} Se$ -нин электриккечирмәсинә тә'сири

ХҮЛАСӘ

4,2—300°K температур интервалында электрик кечирмәјә биртәрәfli тәзјигин тә'сирини өјрәнмәк үчүн гурғу јығылмышдыр. Нәмин гурғуда антиферромагнит поликристал $Li_{0.03} Mn_{0.97} Se$ -нин электрик кечирмәси тәдгиг едилмишдир.

Антиферромагнит-ферромагнит фаза кечидиндә тәзјигин тә'сири илә кечид температурунун јердәјишмәси вә онун бә'зи хусусијјәтләри мјәјјәнләшдирилмишдир.

АЗӘРБАЈҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1968, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 5

УДК 539 194

И. А. МУХТАРОВ, Р. И. МУХТАРОВ

О ВНУТРЕННЕМ ВРАЩЕНИИ В МОЛЕКУЛАХ С ПОВОРОТНОЙ ИЗОМЕРИЕЙ

Многочисленные исследования показали, что микроволновая спектроскопия является в настоящее время эффективным методом наиболее точного определения потенциалов внутреннего вращения молекул с присоединенными симметричными волчками [1]. Микроволновая спектроскопия представляет широкие возможности и для исследования молекул с асимметрично присоединенными волчками, а также с поворотной изомерией. Малочисленность таких исследований обусловлена, помимо трудностей экспериментального характера, отсутствием достаточно разработанной теории. В связи с этим в работе [2] была рассмотрена модель двух жестких асимметричных волчков с заторможенным внутренним вращением и предложено преобразование квантово-механического гамильтониана модели, устраняющее операторы вращательно-крутильного кориолисова взаимодействия, а также намечена общая схема расчета спектра. Такая модель может служить нулевым (по взаимодействию внутреннего вращения с остальными колебаниями) приближением для исследования микроволновых спектров молекул с поворотной изомерией.

В настоящей работе исследовался спектр крутильного движения с использованием гамильтониана и граничных условий, полученных в [2]:

$$\left\{ P \frac{1}{2j(\alpha)} P + V(\alpha) \right\} \varphi(\alpha) = E \varphi(\alpha); \quad (1)$$

$$\varphi(\alpha + 2\pi \cdot m) = \exp(-i \cdot \zeta 2\pi \cdot m) \varphi(\alpha). \quad (2)$$

Здесь $j(\alpha)$ —эффективный момент инерции для внутреннего вращения, при фиксированном α он эквивалентен диагональному элементу G^{-1} -матрицы [3] для крутильного колебания; $P = -i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d}{d\alpha}$; $V(\alpha)$ —

потенциал внутреннего вращения. Величины $\exp(-i \zeta K \cdot 2\pi \cdot m)$, фигурирующие в граничных условиях (2) для крутильных волновых функций $\varphi(\alpha)$, отражают вращательно-крутильное взаимодействие, которое после преобразования полного гамильтониана модели проявляется в граничных условиях вследствие периодичности внутренней координаты α [2].

Периодичность краевой задачи (1), (2) по (ζK) позволяет представить $\varphi(\alpha)$ и E рядами Фурье*:

$$\varphi_v(\zeta K, \alpha) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varphi_v(\sigma, l) \exp(i\zeta Kl); \quad (3)$$

$$E_v(\zeta K) = \sum_{l=0}^{\infty} E_v(l) \cos(\zeta K l); \quad (4)$$

γ — номер состояния крутильного движения. О быстрой сходимости этих рядов в общем случае трудно судить. В случае же достаточно высоких потенциальных барьеров и низких значений E_v ряды (3), (4) сходятся быстро, поскольку амплитуды гармоник, как будет показано ниже, примерно пропорциональны соответствующим степеням проницаемости всех барьеров, встречающихся при полном повороте от нуля до 2π .

Далее будем считать, что малопроницаемы также и потенциальные барьеры между соседними изомерными минимумами. В этом случае нулевым приближением могут служить движения в изолированных ямах, поэтому разделим отрезок $(0, 2\pi)$ на участки, каждый из которых содержит одну изомерную яму и прилегающие к ней части потенциальных барьеров. В качестве точек деления выберем, например, точки максимумов потенциальной кривой. Если обозначить через $W_{n, n+1}$ матрицу, связывающую значения φ и $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ в n -ой и

($n + 1$)-ой точках деления, то уравнение для определения уровней энергии примет вид

$$\text{Det} \{ W_{2\pi, N-1} \cdot W_{N-1, N-2} \cdot \dots \cdot W_{1,0} - 1 \times \exp(i\zeta, K) \} = 0,$$

ЧТО ЭКВИВАЛЕНТНО

$$S_p \{ W_{2\pi, N-1} \cdot W_{N-1, N-2} \cdot \dots \cdot W_{1,0} \} = 2 \cos (\zeta K) \quad (5)$$

Строгое вычисление матриц W требует знания фундаментальной системы решений уравнения (1), относящегося к типу уравнений Хилла. Хотя общая теория таких уравнений разработана давно, практически реализуемые аппроксимации решений известны лишь для простейшего уравнения такого типа — уравнения Матье [4]; в (1) это соответствует случаю симметрично присоединенного волчка, когда j не зависит от α , а $V(\alpha) = V_0(1 + \cos N\alpha)$.

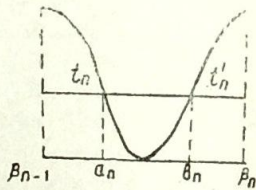


Рис. 1.

Используем для исследования спектра квазиклассическое приближение [5]. Учитывая, что барьеры между отдельными ямами велики, целесообразно разложить каждую матрицу $W_{n,n-1}$ в (5) в ряд по малым проницаемостям барьеров. На рисунке изображен примерный вид отдельной области (β_n — точки деления). Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{2\pi}{h} \int_{a_n}^{b_n} \{2j(\alpha) [E - V(\alpha)]\}^{1/2} d\alpha \approx \int_{a_n}^{b_n} K_n(\alpha) d\alpha; \\ t_n &= \frac{2\pi}{h} \int_{\beta_{n-1}}^{a_n} \{2j(\alpha) [V(\alpha) - E]\}^{1/2} d\alpha \approx \int_{\beta_{n-1}}^{a_n} x_n(\alpha) d\alpha; \end{aligned} \quad (6)$$

$$t'_n = \frac{2\pi}{h} \int_{b_n}^{\beta_n} \{2j(\alpha) [V(\alpha) - E]\}^{1/2} d\alpha \approx \int_{b_n}^{\beta_n} \chi'_n(\alpha) d\alpha;$$

Теперь для $W_{n,n-1}$ в квазиклассическом приближении нетрудно получить следующее выражение:

$$W_{n, n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\chi_n & \chi_n \end{pmatrix} \omega_n \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2\chi_{n-1} \\ 1/2 & 1/2\chi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (7a)$$

$$\omega_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \nu_n \exp(-t_n - t'_n) & \sin \nu_n \exp(t_n - t'_n) \\ -\sin \nu_n \exp(t'_n - t_n) & 2 \cos \nu_n \exp(t_n + t'_n) \end{pmatrix} \quad (76)$$

Для разложения (5) в ряд по малым проницаемостям барьеров разложим каждый ω_n :

$$\begin{aligned} \omega_n = & 2 \exp(t_n + t'_n) \left\{ \cos \nu_n \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sin \nu_n \begin{pmatrix} 0 & \exp(-2t'_n) \\ -\exp(-2t_n) & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & + \frac{1}{4} \cos \nu_n \exp(-2t_n - 2t'_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left. \right\} \equiv 2 \exp(t_n - t'_n) \times \\ & + \left(\cos \nu_n \cdot \hat{\alpha} + \frac{1}{2} \sin \nu_n \hat{\beta}_n + \frac{1}{4} \cos \nu_n \exp(-2t_n - 2t'_n) \hat{\gamma} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Отличный от нуля вклад в (5) дают матрицы вида $\binom{\alpha}{\gamma}^k, \binom{\alpha}{\gamma}^k, \hat{\beta}_{n_1} \cdot \hat{\beta}_{n_2} \cdot \dots \cdot \hat{\beta}_{n_{2k}}$ (четное число сомножителей) и произведения таких матриц. Учитывая это, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\prod_{n=1}^N \cos \gamma_n + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N \left(\prod_{j \neq n, n+1}^N \cos \gamma_j \right) \exp(-2t'_n - 2t_{n+1}) \cdot \sin \gamma_n \sin \gamma_{n+1} +$$

$$+ \dots + 2^{-2N} \exp \left[-2 \sum_{n=1}^N (t_n + t'_n) \right] \prod_{n=1}^N \cos \gamma_n =$$

$$= 2^{-(N+1)} \exp \left[- \sum_{n=1}^N (t_n + t'_n) \right] \cdot \cos(\zeta K).$$

Величины $\exp(-2t'_n + 2t_{n+1})$ представляют собой коэффициенты прохождения барьеров между n -ой и $(n+1)$ -ой ямами в квазиклассическом приближении. Аналогично $\exp\left[-2\sum_{n=1}^N(t_n + t'_n)\right]$ — коэффициент прохождения всех барьеров, встречающихся при полном обороте от 0 до 2π . Если в (9) пренебречь всеми слагаемыми, содержащими экспоненциально малые множители (проницаемости и коэффициенты прохождения барьеров), то получим

$$\prod_{n=1}^N \cos \gamma_n = 0. \quad (10)$$

Таким образом в нулевом приближении уровни энергии крутильного движения определяются из $v_n(E_v) = \pi \left(v + \frac{1}{2} \right)$, то есть из условий квантования для отдельных изомерных ям, изолированных бес-

* Пользуясь случаем, укажем опечатки, допущенные в работе [2]: в формуле (9) этой работы в левой части должно быть $\exp(i \zeta K a) \psi_n(\zeta K, a)$.

конечно высокими барьерами. Исключая из рассмотрения случаи кратных корней в (10), будем считать крутильные спектры разных изомеров различными. Для определения поправок к какому-либо крутильному уровню нулевого приближения запишем энергию рассматриваемого уровня в виде $E = E_v^{(0)} + \delta E$ и, учитывая малость δE , $\nu_n(E) = \pi \left(\nu + \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial \nu_n}{\partial E^{(0)}} \cdot \delta E$. Подставив последнее в (9) и производя несложные преобразования, в первом приближении получим

$$\delta E = \left(\frac{\partial \nu_n}{\partial E^{(0)}} \right)^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \operatorname{tg} \nu_{n+1} \exp(-2t'_n - 2t_{n+1}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \nu_{n-1} \exp(-2t'_{n-1} - 2t_n) + \dots + 2^{-N+1} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[- \sum_{l=1}^N (t_l + t'_l) \right] \left(\prod_{j \neq n}^N \cos \nu_j \right)^{-1} \cos(\zeta K) \right\}. \quad (11)$$

Интерпретация (11) очевидна: первое и второе слагаемые в фигурных скобках описывают небольшое (в рассматриваемом случае) смещение энергии ($E_v^{(0)}$) состояния, локализованного практически в n -ой яме, вследствие туннельного эффекта через примыкающие барьеры. Опушенные в (9) и (11) члены вносят поправки, обусловленные туннелированием двух, трех и т. д. барьеров, то есть влиянием более удаленных, чем соседние ($n-1$)-ая и ($n+1$)-ая, изомерных ям. Последний член в (11), поскольку он пропорционален проницаемости, а не коэффициенту прохождения, отражает изменение крутильного уровня вследствие кориолисова вращательно-крутильного взаимодействия.

Таким образом, амплитуда первой гармоники в выражении (4) для $E_v(\zeta K)$ пропорциональна проницаемости всех барьеров. Вычисления, которые не приводятся здесь ввиду их громоздкости, показывают, что наибольшие слагаемые в выражениях для амплитуд высших гармоник пропорциональны этой проницаемости в степени, равной номеру гармоники; аналогичные результаты можно получить для $\varphi_v(\zeta K, \alpha)$. Эти выводы справедливы, естественно, лишь при малых проницаемостях барьеров ($|\delta E| \ll E^{(0)}$), так как только в этих случаях целесообразно представление матрицы сдвига W в виде произведения и разложение каждого сомножителя в виде (8) с последующим разложением характеристического уравнения (9). Нетрудно показать, что вследствие граничных условий (2) функции $\varphi_v(\alpha, l)$ в (3) удовлетворяют соотношениям $\varphi_v(\alpha, l) = \varphi_v(\alpha - 2\pi \cdot l)$.

Исследование аналитических свойств решений уравнения Шредингера с периодическим потенциалом, проведенное в работе [6] в связи с рассмотрением поведения электрона в периодическом поле, показывает, что для непересекающихся уровней $\varphi_v(\alpha)$ имеют асимптотики вида $\exp(-h_v |\alpha|)$. Полученные выше результаты, очевидно, согласуются с этим выводом.

В данной статье не рассматриваются весьма интересные для микроволновой спектроскопии эффекты, возникающие при совпадении или близости (случайной или в силу симметрии молекулы) уровней энергии различных изомерных ям в нулевом приближении. Эти вопросы будут освещены в последующих работах.

В заключение отметим, что приведенное выше рассмотрение справедливо, как отмечалось, при малых проницаемостях барьеров. Такая ситуация наиболее вероятна для низших крутильных уровней энергии и типична для микроволновых исследований в условиях тер-

модинамического равновесия, так как заселенность верхних колебательных уровней как правило, слишком мала для исследования их вращательных спектров. С другой стороны, для низких квантовых чисел используемое нами квазиклассическое приближение дает большие погрешности при определении уровней энергии. Поэтому целесообразно вычислять энергетические уровни изолированных изомеров ($E_v^{(0)}$) в приближении ангармонического осциллятора [3, 5], а для туннельных эффектов использовать приведенные выше формулы, подставляя в них значения $E_v^{(0)}$ либо экспериментально определяемые, либо вычисленные в приближении ангармонического осциллятора. Отметим также, что выводы относительно характера и величины вращательно-крутильного взаимодействия не связаны с применением квазиклассического приближения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sheridan J. VIII—th European Congress on Molecular Spectroscopy, Copenhagen, 1965.
2. Мухтаров Р. И. Тр. комиссии по спектроскопии АН СССР, 3. 250, 1964.
3. Вильсон Е., Дешиус Д., Кросс П. Теория колебательных спектров молекул. ИЛ, М., 1960.
4. Мак-Лаклан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИИЛ, М., 1953.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1963.
6. Kohn W. Phys. rev., 115, 809, 1959.

Н. А. Мухтаров, Р. Н. Мухтаров

Дөнмэ изомерли молекуллардакы дахили фырланма һаггында

ХУЛАСӘ

Тормозланмыш дахили фырланмаја имканлы ики асимметрик фыр-фырадан ибарәт олан молекулларда бурулма һәрәкәтинин спектри анализ едилир. Дөнмэ изомерләри арасында јуксәк чәпәр олан вә ашағы гијмәтли бурулма енержиси һалларына бахылыр.

Квази-классики тәхмин чәрчивәсиндә бурулма енержисинин бурулма-фырланма гаршылыгы тәсир параметрләриндән асылылығыны һесабламаг үчүн ифадә алынмышдыр.

Фырланма-бурулма гаршылыгы тәсирин мигдары вә хассәси һаггындакы мулаһизәләр үмуми характер дашыјыр вә тәтбиг олуна тәхминләрдән асылы дејилдир.

Н. А. АЛИЕВ, Ф. Г. МАГЕРРАМОВА, Б. А. АХМЕДОВ,
М. М. МУСАЗАДЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТАЛИ МАРКИ 36Г2С

Как известно, введение в сталь ряда легирующих примесей приводит к понижению ее теплопроводности, которая тем ниже, чем сложнее состав стали. Однако количественное сопоставление отдельных примесей по их влиянию на теплопроводность весьма затруднительно.

В работе [1] исследовались теплопроводность чистого железа, шести ферритных и пяти аустенитных сталей от температуры жидкого воздуха до комнатной. При использовании результатов измерений авторы установили, что теплопроводность исследованных сталей может быть оценена по удельной электропроводности. Для ферритных сталей теплопроводность можно оценить также по степени легирования.

В работе [2] была исследована теплопроводность 47 различных легированных и нелегированных сталей и сплавов в интервале 20—700°C, используемых в качестве конструкционных, теплоустойчивых, нержавеющих и жаропрочных материалов. Исходя из сравнительно большой теплопроводности чистого железа при 20°C, авторы констатируют уменьшение теплопроводности сталей с возрастанием степени легирования. Средний температурный коэффициент теплопроводности в интервале 20÷700°C для чистого железа и низколегированных сталей отрицателен, а для высоколегированных положителен.

Несмотря на многообразие исследованных составов различных сталей не учтено влияние на них горячей механической и термической обработки, расхождение отдельных экспериментальных данных и несравнимость применяющихся методов. Все же в качественном отношении можно указать на наличие некоторых намечающихся тенденций. Минимальное влияние на теплопроводность оказывает кобальт, более сильно понижает ее хром и никель, затем следуют алюминий, кремний и марганец.

Одним из широко применяемых в трубном производстве легирующих элементов является марганец. В нефтяной промышленности в большинстве случаев употребляются трубы, прокатанные из марганцовистой стали для составления колонн. Исследование теплопроводности образцов из труб представляет определенный интерес для изучения способности теплоотдачи труб при бурении, а также для определения температуры закалки.

Данная статья посвящена исследованию теплопроводности труб, прокатанных из различных плавок стали марки 36Г2С с химическим составом: 0,36% С; 1,6% Мп; 0,04% Сг; 0,08% Ni; 0,45% Si; 0,026% S;

0,34% Р. Из всех труб вырезали полосы шириной 30 мм, а затем изготавливали образцы для исследования, поверхность которых перед измерением тщательно шлифовали и полировали. Измерение коэффициента теплопроводности этих образцов производилось в стационарном тепловом поле в вакууме. Его среднее значение из пяти измерений для каждого образца приведено в таблице. Как видно из таблицы, среднее значение коэффициента теплопроводности для исследуемых плавок стали равно 0,115 кал/см·сек·град. Максимальное отклонение отдельных измерений его от среднего арифметического значения не превышает 7%.

Номер плавки	1203	1354	1606	2306	3263	4237	4283	4360	4369
кал/см. сек. град	0,119	0,109	0,117	0,120	0,120	0,116	0,123	1,110	0,108

В литературе указано [3], что чистое железо при 20°C имеет коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,153$ кал/см·сек·град, а у железа содержащего 0,1% С, 0,2% Si и 0,1% Мп, при 18°C он равен 0,144 кал/см·сек·град.

Сопоставление средних значений коэффициента теплопроводности исследованных плавок стали с литературными данными показывает, что у исследуемых образцов он примерно на 25% меньше, чем у чистого железа, и на 20% меньше, чем у вышеуказанной марки стали. Учитывая сравнительно большое значение теплопроводности чистого железа (при комнатной температуре), можно констатировать уменьшение коэффициента теплопроводности исследуемых сталей с возрастанием степени легирования.

Известно [4, 5], что марганец способствует росту зерна и сильно уменьшает теплопроводность стали. Пониженная теплопроводность марганцовистой стали при неосторожном нагреве и охлаждении является причиной образования внутренних напряжений. Определение этого напряжения по методу Закса [6, 7] показало, что значение его меняется в пределах от 18,2 до 23,5 кг/мм². Исходя из этого, можно прийти к выводу, что прокатанные из стали марки 36Г2С трубы следует подвергать соответствующей термической обработке: нормализации или закалке с последующим отпуском, в результате чего можно ожидать увеличения коэффициента теплопроводности и снятия внутреннего напряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohlhaas Rudolf, Kierspe Werner. „Arch. „Eisenhüttenwesen“, 1965, 36, № 4, 301—309.
2. Bungardt Karl, Spuga Wolfgang. „Arch. Eisenhüttenwesen“, 1965, 36, № 4, 257—267.
3. Лившиц Г. Б. Сб. „Физические свойства металлов и сплавов“. Машгиз, 1956.
4. Болховитинов Н. Ф. Металловедение и термическая обработка. Машгиз, 1954.
5. Аронович М. С. и Лахтин Ю. М. Основы металловедения и термической обработки. Металлургиздат, 1952.
6. Закс Г. Zs. für Metallkunde, 1927, н. 9, 352—357.
7. Гликман Л. А., Бабаев А. Н. „Заводская лаборатория“, 1956, № 4.

ХҮЛАСӘ

Нефт вә газ сәнајесинин инкишафы илә әлағәдар оларат һәмин сәнаједә истифадә едилән боруларын кејфијјәтинә олан тәләбат даим артыр. Буна көрә дә боруларын һазырланмасында мүхтәлиф лекир-ләнмиш поладлардан даһа чоһ истифадә олунур. Белә поладлардан бири дә тәркибиндә марганс олан 36Г2С маркалы поладдыр.

Мәгаләдә һәмин поладын мүхтәлиф әринтиләриндән һазырланмыш бору нүмунәлеринин истиликкечирмәси тәдгиг олунмуш вә маргансын истиликкечирмәни хејли азалтдығы мүәјјәнләшдирилмишдир.

З. Ф. СЕИДОВ

ПОЛИТРОПЫ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ, I
НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

Звезды с фазовым переходом являются интересным классом небесных тел. Особенностью их является то, что в уравнении состояния вещества имеется область плотностей $\rho_1 < \rho < \rho_2$, в которой давление постоянно: $P = P_0 = \text{const}$. В силу этого плотность внутри звезды не является непрерывной переменной, какой остается давление. В [1] был рассмотрен вопрос об устойчивости таких звезд. Было показано, что потеря устойчивости наступает в момент фазового перехода в центре звезды, независимо от вида уравнения состояния, если значение скачка плотности при фазовом переходе $q = \rho_2/\rho_1$ больше критического значения 1,5. При $q < 1,5$ потеря устойчивости наступает лишь после фазового перехода, при конечном размере ядра и тем скорее, чем больше q и чем больше эффективный показатель политропии $\bar{n}$.

Остановимся более подробно на случае $\bar{n} = 0$. Такая конфигурация является математической моделью звезды из несжимаемой жидкости, испытывающей фазовый переход при определенном значении давления $P = P_0$. При этом не учитывается зависимость указанного критического давления от температуры, или же температура принимается равной нулю.

1. Уравнения равновесия. Вывод всех необходимых уравнений для произвольного n см. в [2]. Пусть ρ_1 и ρ_2 — плотность вещества в оболочке и ядре, M_0 , R_0 , P_0 и ϵ_0 — масса, радиус, центральное давление и полная энергия критической конфигурации, у которой в центре только начинается фазовый переход [1]. Тогда из уравнения гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \quad (1)$$

получим [3]:

$$P_{\text{я}}(r) = P_c - \frac{2\pi G}{3} \rho_2^2 r^2, \quad (2)$$

$$P_{\text{об}}(r) = 4\pi G \rho_1^2 \left(C + \frac{D}{r} - \frac{1}{6} r^2 \right), \quad (3)$$

$$P_c = P_0 + \alpha, \quad \frac{r_1}{R_0} = \frac{1}{q_0} \left(\frac{\alpha}{P_0} \right)^{1/2}, \quad q = \frac{\rho_2}{\rho_1} > 1. \quad (4)$$

Здесь $P_{\text{я}}(r)$ — давление в ядре, $P_{\text{об}}(r)$ — то же в оболочке, C и D — постоянные, подлежащие определению, P_c — центральное давление,

r_1 — радиус ядра. Учитывая, что на границе между ядром и оболочкой непрерывны $P(r)$ и $\frac{1}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr}$ [1, 2], получим

$$C = \frac{P_0}{4\pi G \rho_2^2} - \frac{1}{6} (2q-3) r_1^2, \quad D = \frac{1}{3} (q-1) r_1^3. \quad (5)$$

Так как $D > 0$ (из физических соображений $q > 1$), ясно, что $P_{00}(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, то есть распределение давления в оболочке описывается F -решением по классификации Чандрасекара [3].

Из (3) — (5), используя условие $P_{00}(r=R)=0$, получим для радиуса конфигурации уравнение

$$\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 - \left(1 - \frac{2q-3}{q^2} \frac{\alpha}{P_0}\right) \frac{R}{R_0} - 2 \frac{q-1}{q^3} \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{3/2} = 0. \quad (6a)$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 - \left(1 - (2q-3) \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2\right) \frac{R}{R_0} - 2(q-1) \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^3 = 0. \quad (6b)$$

Легко также получить выражения для массы и полной энергии:

$$\frac{M}{M_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 + (q-1) \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^3, \quad (7)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^5 + \frac{5}{2} (q-1) \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^3 + \frac{(q-1)(2q-3)}{2} \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^5 - \frac{5}{6} (q-1) \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^3. \quad (8)$$

При выводе (8) учтена энергия фазового перехода, равная [2] $\Delta\epsilon = (q-1) \cdot P_0 \cdot \frac{4\pi}{3} r_1^3$.

2. Энергоподход. Пусть имеем конфигурацию (необязательно равновесную) с радиусом ядра и оболочки $x = \frac{r_1}{R_0}$ и $y = \frac{R}{R_0}$

плотностью ядра и оболочки $\rho_2 = q\rho_1$ и ρ_1 . На границе между ядром и оболочкой при давлении P_0 происходит фазовый переход. Полная энергия и масса такой конфигурации определяются выражениями (7)

(8) причем $\frac{r_1}{R_1}$ и $\frac{R}{R_0}$ обязательно связаны соотношением (6б).

Равновесное состояние определяется условием экстремума (отрицательной) полной энергии при постоянной массе, $\left. \frac{d\epsilon}{dx} \right|_{M=\text{const}} = 0$. Из условия

$M = \text{const}$ найдем $\frac{dy}{dx} = -\frac{q-1}{y^2} x^2$. Окончательно связь между

x и y равновесной конфигурации получается в виде $y^3 - y + (2q-3)yx^2 - 2(q-1)x^3 = 0$, совпадающем с соотношением (6б), выведенным из рассмотрения гидростатического равновесия.

3. Преобразование уравнений. Для численных расчетов уравнения (6) неудобны, так как приходится решать кубическое уравнение относительно $R(\alpha)$. Поэтому преобразуем их следующим образом. Введем новую переменную x :

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{x} \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{1/2} \quad (9)$$

и подставим (9) в (6):

$$\frac{\alpha}{P_0} = \frac{x^2}{1 + \frac{2q-3}{q^2} x^2 - 2 \frac{q-1}{q^2} x^3}. \quad (10)$$

Теперь задавая x , из (10) легко вычислить α/P_0 , затем из (9) R/R_0 и из (7) и (8) M/M_0 и ϵ/ϵ_0 . Очевидно, что пользоваться формулой (10) было бы неудобно, если бы зависимость $\alpha(x)$ была немонотонной.

Однако легко показать, что $\frac{d\alpha}{dx} > 0$ при $q > 1$ и $x > 0$. Далее $\alpha = 0$ при $x = 0$ и $\alpha = \infty$ при x , удовлетворяющем уравнению $1 + \frac{2q-3}{q^2} x^2 - 2 \frac{q-1}{q^3} x^3 = 0$. Решением этого уравнения является

$x = q$, следовательно, x изменяется в интервале от 0 до q и при росте x монотонно растет α . Рассмотрим теперь более подробно параметры конфигурации.

4. Масса и радиус ядра. Из (4) для массы и радиуса ядра получим: $\frac{M_1}{M_0} = q \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^3$, $\frac{r_1}{R_0} = \frac{1}{q} \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{1/2}$. Масса и радиус ядра монотонно растут с ростом $\frac{\alpha}{P_0}$ и x [2].

5. Радиус конфигурации. Из (6a) и (10) находим значения x и α , при которых радиус конфигурации принимает минимальное значение, $dR/dx = 0$:

$$\frac{\alpha}{P_0} = \frac{3(2q-3)^2}{8q-9}, \quad x = x_3 = \frac{q(2q-3)}{3(q-1)}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{q-1}{q} \left(\frac{27}{8q-9}\right)^{1/2}, \quad q > 1.5. \quad (11)$$

Далее из (6a) находим, что при $\frac{R}{R_0} = 1$

$$\frac{\alpha}{P_0} = \left[\frac{q(2q-3)}{2(q-1)}\right]^2, \quad x = x_6 = \frac{q(2q-3)}{2(q-1)} = \frac{3}{2} x_3. \quad (12)$$

Итак, при $q \geq 1.5$ радиус конфигурации имеет минимум при определенном центральном давлении, зависящем от q согласно (11). В точке фазового перехода ($\alpha = 0$, $x = 0$) производная $dR/d\alpha$ терпит скачок с изменением знака [1]. При $q < 1.5$ радиус как функция центрального давления всюду монотонно растет.

6. Масса конфигурации. Найдем $x = x_1$, при котором масса конфигурации имеет минимум. Это имеет место лишь при $q \geq 1.5$ [1]. При $q < 1.5$ масса как функция центрального давления всюду монотонно растет. Из (7), (9), (10) получаем;

$$\frac{d(M/M_0)}{dx} = 0 = 3 \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{d(R/R_0)}{dx} + 3(q-1) \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 \frac{d(r_1/R_0)}{dx}$$

$$\frac{d(R/R_0)}{dx} = \frac{1}{2x(\alpha/P_0)^{1/2}} \frac{d(\alpha/P_0)}{dx} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\alpha}{P_0}\right)^{1/2};$$

$$\frac{d(\alpha/P_0)}{dx} = \frac{2x + 2(q-1)x^4/q^3}{\left[1 + \frac{2q-3}{q^2} x^2 - \frac{2(q-1)}{q^3} x^3\right]} \quad (13)$$

откуда для x_1 имеем следующее уравнение:

$$\left(\frac{q-1}{q^3}\right)^2 \cdot x_1^2 + 4 \frac{q-1}{q^3} \cdot x_1 - \frac{2q-3}{q^2} = 0. \quad (14)$$

Для $x = x_5$, при котором $M/M_0 = 1$, уравнение довольно громоздкое и мы не будем выписывать его здесь.

7. Полная энергия. Экстремум равновесной энергии должен совпадать с экстремумом массы [4]. Это утверждение следует распространить и на случай максимума с разрывом в значениях производной справа и слева от критической точки [1].

Покажем на конкретном примере совпадение условия минимума массы (14) и условия максимума равновесной (отрицательной) полной энергии. Из (8) получаем условие равенства нулю производной $d\epsilon/dx$; далее, используя dR/dx и dc/dx из (13), получим уравнение, полностью совпадающее с (14). Не будем снова выписывать уравнение, для x_4 , при котором $\epsilon/\epsilon_0 = 1$, ввиду его громоздкости.

8. Предельные конфигурации по Абрикосову. Из рис. 3, видно, что в некоторой точке (зависящей от q) кривая $\epsilon(M)$ пересекается. Это соответствует тому, что энергия у двух устойчивых равновесных конфигураций с одинаковой массой M_* , но различными радиусами одинакова. Согласно (5) пределом массы устойчивых конфигураций является не M_0 , а M_* . Мы вычислили параметры этих конфигураций для различных значений q . Для этого решалось уравнение относительно $x = x_2$, имеющее вид $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}(x_2) = \left[\frac{M}{M_0}(x_2)\right]^{5/3}$, причем $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}(x_2)$ и $\frac{M}{M_0}(x_2)$ определяют

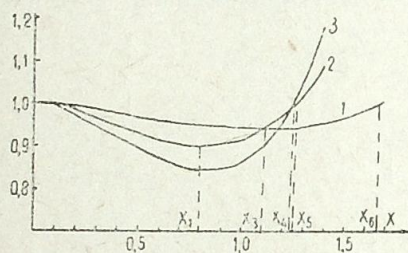


Рис. 1. Зависимости радиуса (1), массы (2) и полной энергии (3) от центрального давления при $q = 2,5$.

дидлись на ЭВМ „Наири“ Института кибернетики АН Азербайджанской ССР.

10. Обсуждение результатов. Из вычислений следует, что для всех значений $q \geq 1,5$ справедливы неравенства $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < q$. Следовательно, кривые имеют вид, показанный на рис. 1–3.

На рис. 1 по оси абсцисс отложены значения x , которые можно перевести в значения a по формуле (10). Кривые в точке $x = 0$ имеют горизонтальную касательную, что легко показать с помощью формул (6) – (10). Кривые имеют минимум в точках $x_1 \left(\frac{M}{M_0} \text{ и } \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)$ и $x_3 \left(\frac{R}{R_0}\right)$ и стремятся к бесконечности при $x \rightarrow q = 2,5$. Параметры конфигураций с фазовым переходом R, M, ϵ как функции от x промежуточные между параметрами однородных конфигураций с тем же значением центрального давления и состоящих из вещества ядра и оболочки.

Кривая $R(M)$ (показанная на рис. 2 для $q = 2,5$) в точке $R/R_0 = M/M_0 = 1$ имеет точку возврата, согласно [1]. Она не имеет второй точки возврата, так как $x_1 \neq x_3$. Все три кривые рис. 2

при больших значениях R, r_1, M и M_1 имеют асимптотику $R/R_0 = (M/qM_0)^{1/3}$.

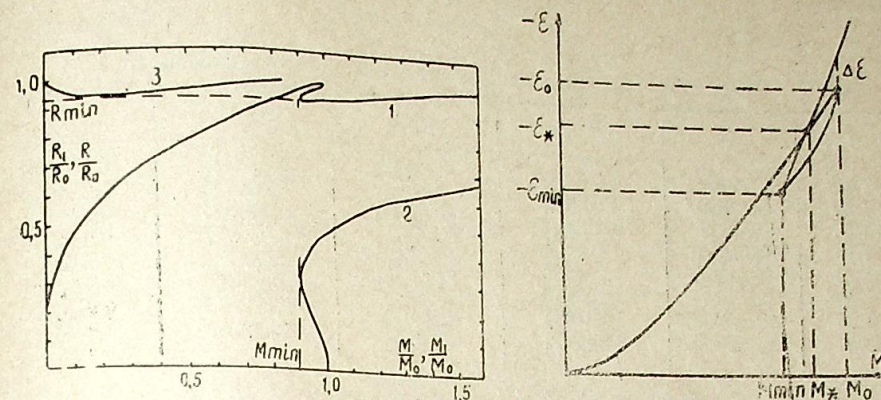


Рис. 2. Зависимости при $q = 2,5$: 1— $R(M)$; 2— $r_1(M)$; 3— $M_1(R)$.

На рис. 3 имеющая качественный вид кривая зависимости полной энергии ϵ от массы M имеет две точки возврата в силу непрерывности производной $d\epsilon/dM$, доказанной в [1]. Точную зависимость $\epsilon(M)$ для конкретного значения q трудно показать из-за необходимости слишком большого масштаба.

Таблица 1

$q = 1,75$			
P_c/P_0	R/R_0	M/M_0	ϵ/ϵ_0
1,009986	0,999324	0,998114	0,996858
1,022439	0,998638	0,996391	0,993992
1,039829	0,997861	0,994709	0,991197
1,062138	0,997097	0,993485	0,989162
1,089362	0,996450	0,993128	0,988570
1,121528	0,996024	0,994048	0,990099
1,158697	0,995920	0,996657	0,994446
1,200981	0,996243	1,001380	1,002340
1,248551	0,997097	1,008658	1,014572
1,301649	0,998592	1,018966	1,032028
1,360606	1,000841	1,022328	1,055736

Таблица 2

$q = 3,0$			
P_c/P_0	R/R_0	M/M_0	ϵ/ϵ_0
1,009968	0,998411	0,995315	0,992204
1,039520	0,993981	0,982633	0,971220
1,087719	0,987248	0,964155	0,940960
1,153278	0,978770	0,942097	0,905317
1,234783	0,969087	0,918526	0,867794
1,330882	0,958706	0,895262	0,831318
1,440442	0,948083	0,873847	0,798207
1,562647	0,937622	0,855559	0,770257
1,697074	0,927677	0,841456	0,748878
1,843750	0,918559	0,832444	0,735266
2,003194	0,910541	0,829346	0,730581
2,176471	0,903877	0,832985	0,736145
2,365268	0,898805	0,844267	0,753649

Рассмотренные конфигурации с $n = 0$ и фазовым переходом по своим свойствам ближе в планетам, чем к звездам. Поэтому произ-

веденные расчёты можно применить, например, к оценке энергии ($\Delta \epsilon$ на рис. 3), выделяемой при фазовом переходе в центре планеты во время ее эволюционного сжатия. Такой фазовый переход может

Таблица 3

Параметры предельных конфигураций по Абрикосову

q	x_2	P_c/P_0	R/R_0	M/M_0	ϵ/ϵ_0
1,65	0,224609	1,050335	0,998862	0,998224	0,997042
1,70	0,289962	1,083685	0,997663	0,996455	0,994099
1,75	0,349327	1,121062	0,996028	0,994025	0,990061
1,80	0,404542	1,161691	0,993983	0,990977	0,985006
1,85	0,456604	1,204986	0,991567	0,987372	0,979043
1,90	0,506104	1,250450	0,988819	0,983276	0,972282
1,95	0,553467	1,297675	0,985779	0,978750	0,964835
2,00	0,599060	1,346412	0,982485	0,973857	0,956809

быть ответственен за геологические катастрофы Земли и других планет [6]. Для этого необходимы более точные расчеты конфигураций при $x = x_5$ и вблизи этой точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеидов З. Ф. „Астрофизика“ 3, 189, 1967.
2. Сеидов З. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР“ (в печати).
3. Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. М., 1950.
4. Зельдович Я. Б. ЖЭТФ, 42, 1667, 1962.
5. Абрикосов А. А. „Вопросы космогонии“, 3, 11, 1954.
6. Ramsey W. H. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 133, 427, 1951.
7. Ramsey W. H. Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 110, 325, 1950.

З. Ф. Сеидов

Фазакечидли сыхылмаз маддэдэн ибарэт көј чисимләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә фаза кечидә малик олан сыхылмаз маддэдэн ибарэт олан көј чисимләрин хассәләри тәдгиг олунур.

Тәбәгәдә тәзјиг Чандрасекар тәснифатына көрә F -типли һәлли илә тәсвир едилир. Улдузларын параметрләрини тәсвир едән тәнликләр ики үсулла: гидростатик таразлыг вә енеркетик мұлаһизәләрин көмәји илә һәлл олунур. ЕҺМ-дә апарылан һесабламаларын нәтичәләри чәдвәлләрдә көстәрилмишдир.

УДК 621. 316. 571

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, А. М. МУРАДОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА КОНТАКТАХ ВЫКЛЮЧАТЕЛЕЙ

Как известно, характер процесса восстановления напряжения на контактах выключателей определяется схемой сети и параметрами ее элементов. Схема участка сети для расчета скорости восстанавливающихся напряжений (СВН) и соответствующая ей эквивалентная схема замещения представлены на рис. 1. Предполагается, что сеть питается от источника бесконечной мощности, короткое замыкание возникает в какой-либо точке, удаленной на расстояние l от источника питания

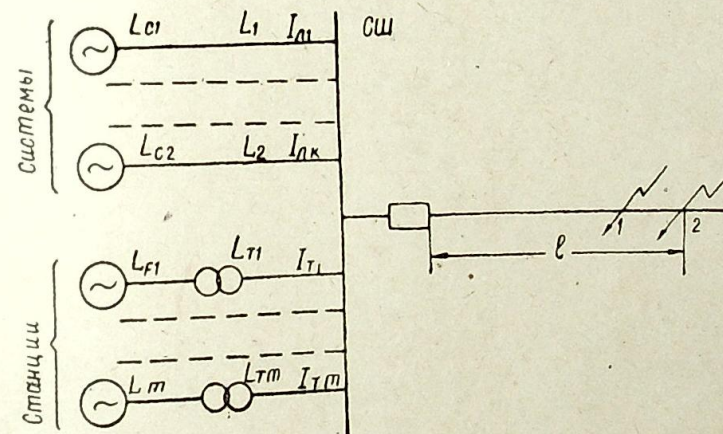


Рис. 1. Схема замещения для расчета СВН.

Учет всех параметров элементов сети весьма затруднителен и поэтому при расчете СВН ограничиваемся параметрами, приведенными в [1, 2]. Эквивалентная индуктивность равна

$$L_0 = \left(\frac{1}{L_{c1} + L_1} + \dots + \frac{1}{L_{ck} + L_k} + \frac{L}{L_{r1} + L_{r1}} + \dots + \frac{1}{L_{rm} + L_{tm}} \right)^{-1},$$

где L_c, L — индуктивность системы и линий,
 L_r, L_t — индуктивность генератора и трансформатора или

$$L_0 = \frac{U_\lambda}{\sqrt{3} \omega (I_{\lambda 1} + \dots + I_{\lambda k} + I_{r1} + \dots + I_{rm})} = \frac{U_\lambda^2}{S_{кз}}, \quad (1)$$

где I_n, I_r — токи при коротком замыкании на шинах;
 U_n — линейное напряжение, кВ;
 $S_{к.з.}$ — мощность короткого замыкания, мВА.

Эквивалентная емкость C_0 определяется суммой емкостей, присоединенных к системе шин:

$$C_0 = C_{л1} + \dots + C_{лk} + C_{т1} + \dots + C_{тm} + C_{ш},$$

где $C_{л} = Cl$ — емкость линий,
 $C_{т}$ — емкость трансформатора,
 $C_{ш}$ — емкость системы шин.

В схеме замещения учтена также емкость разомкнутого выключателя $C_{в.}$.

На эквивалентной схеме принято параллельное включение шунтирующего сопротивления $r_{ш.}$.

Для расчета восстанавливающегося напряжения на контактах выключателя должно быть известно устанавливающееся значение тока короткого замыкания, определяемое выражением

$$i_{уст.}(x, t) = E_{макс} \frac{\cos \omega \sqrt{LC} (l - x) \cos (\omega t - 90)^\circ}{\omega L_0 \cos \omega \sqrt{LC} l + r_c \sin \omega \sqrt{LC} l}. \quad (2)$$

Напряжение на контактах выключателя с момента отключения тока короткого замыкания можно определить по теореме Тевенена:

$$U_{в.}(p) = Z_{вх.}(p) \cdot I_{в.}(p), \quad (3)$$

где $Z_{вх.}(p)$ — входное операторное сопротивление со стороны разомкнутого выключателя при закороченных источниках напряжений,

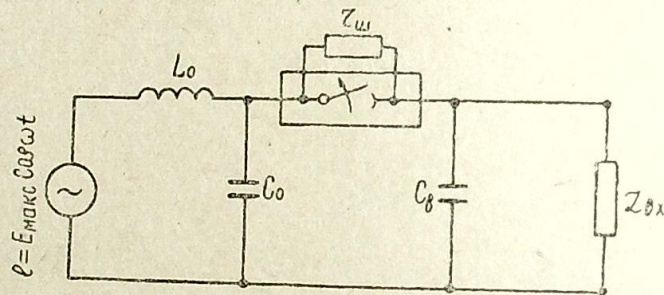


Рис. 2. Расчетная схема.

$I_{в.}(p)$ — лапласово изображение установившегося значения тока короткого замыкания через выключатель, который принимается синусоидальным. Согласно рис. 2

$$Z_{вх.}(p) = \frac{r_{ш.} \cdot r_{вык.}(p)}{r_{ш.} + Z_{вык.}(p)} = \frac{Z_{вык.}(p)}{1 + \frac{1}{r_{ш.}} Z_{вык.}(p)},$$

где

$$Z_{вык.}(p) = \frac{r_0 \omega_0 p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{Z_{вх.л.}(p)}{1 + p C Z_{вх.л.}(p)}.$$

Здесь входное сопротивление короткозамкнутой линии

$$Z_{вх.л.}(p) = \rho_c \operatorname{th} p \sqrt{LC} l, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_c}} \quad \text{и} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Структурная схема соответствующая $Z_{вх.}(p)$, показана на рис. 3, где $I_{в.}(p)$ — входной ток и $U_{в.}(p)$ — выходное напряжение;

$K(p) = Z_{вх.л.}(p)$ и $H(p) = \frac{1}{r_{ш.}}$ — передаточные функции прямой и обратной цепи.

Выражение (3) в соответствии с рис. 3 принимает вид

$$U_{в.}(p) = \frac{K(p)}{1 + H(p) \cdot K(p)} I_{в.}(p). \quad (4)$$

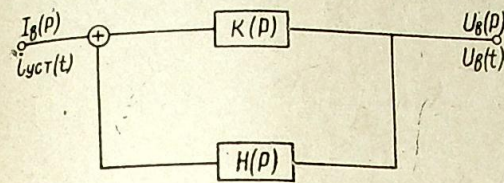


Рис. 3

Функция $K(p)$ является трансцендентной и поэтому обратное преобразование уравнения (4) при использовании обычного операторного метода затруднительно. Эти затруднения облегчаются при использовании z -преобразования, которому соответствует структурная схема рис. 4. Наличие

ключа (K) переводит схему непрерывных в схему дискретных систем. Зависимость между входной и выходной величинами на основе теории импульсных систем примет следующий вид [3]:

$$U_{в.}(p) = \frac{G_h \cdot K(p)}{1 + C_h K(p)} I_{в.}(z),$$

где $G_h(p)$ — передаточная функция экстраполятора нулевого порядка, определяемая выражением

$$G_h(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}; \quad (6)$$

$I_{в.}(z)$ — z -преобразование входной величины $I_{в.}(p)$.

Для применения z -преобразования целесообразно аппроксимировать (5) следующими функциями [3]:

$$p \frac{T_1}{2} = \frac{e^{p \frac{T_1}{2}} - e^{p \frac{T_1}{2}}}{e^{p \frac{T_1}{2}} - e^{p \frac{T_1}{2}}} = \operatorname{th} \frac{p T_1}{2}; \quad (7)$$

$$Z_{вх.л.}(p) = \rho_c \operatorname{th} p \sqrt{LC} l = \rho_c \operatorname{th} \frac{p T_0}{2}, \quad (8)$$

где $T_1 = 2 \rho_c C_v$ и $T_0 = 2 \sqrt{LC} l$,

тогда выражение для $Z_{вык.}(p)$ преобразуется к виду

$$Z_{вык.}(p) = \frac{\rho_0 \omega_0 p}{p^2 + \omega_0^2} + \rho_c \frac{\operatorname{th} \frac{p T_1}{2}}{1 + \operatorname{th} \frac{p T_1}{2} \cdot \operatorname{th} \frac{p T_2}{2}}$$

или

$$Z_{вык.}(p) = \rho_0 \frac{\omega_0 p}{p^2 + \omega_0^2} + \rho_c \frac{e^{2p(T_1+T_2)} e^{pT_0} - e^{pT_1} - 1}{e^{2p(T_0+T_1)} + 1}. \quad (9)$$

Подвергая (5) модифицированному z -преобразованию по правилам

$$[3], \quad \text{получим} \quad U_{в.}(z, m) = \frac{G_h K(z, m)}{1 + G_h H K(z)} I_{в.}(z), \quad (10)$$

где

$$G_{HK}(z) = \frac{\rho_0}{r_{ш}} \frac{(z-1) \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1} + \frac{\rho_c}{r_{ш}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \quad (11)$$

$$G_{HK}(z, m) = \rho_0 \frac{[z \sin \omega_0 T m + \sin \omega_0 T (1-m)] (1 + e^{-T})}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1} + \frac{\rho_c}{r_{ш}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}. \quad (12)$$

Подстановка (11) и (12) в (10) дает

$$U_B(z, m) = I_B(z) \frac{\rho_0 [z \sin \omega_0 T m + \sin \omega_0 T (1-m)] (z-1) (z^2 + 1) + \frac{\rho_0}{\rho_c} (z^2 - z) (z^2 + 1) \sin \omega_0 T + \rho_c (z^2 - 1) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1)}{z (z^2 + 1) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1) + \frac{\rho_0}{\rho_c} (z^2 - z) (z^2 + 1) \sin \omega_0 T + \rho_c (z^2 - 1) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1)} + \frac{\rho_c}{r_{ш}} \frac{(z^3 - z) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1)}{z (z^2 + 1) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1) + \frac{\rho_0}{\rho_c} (z^2 - z) (z^2 + 1) \sin \omega_0 T + \rho_c (z^2 - 1) (z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1)}. \quad (13)$$

Величина $I_B(p)$ или $I_B(z)$ является входным током короткого замыкания через выключатель и при его синусоидальной форме изображение представляется выражением

$$I_B(z) = I_{\max} \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}. \quad (14)$$

Для расчета СВН достаточно ограничиться первым членом разложения

$$i_{уст}(t) = I_{\max} \sin \omega t \approx I_{\max} \omega t.$$

Соответствующее z -преобразование имеет вид

$$I_B(z) = I_{\max} \omega T \frac{z}{(z-1)^2}. \quad (15)$$

Если ток короткого замыкания имеет косинусоидальную форму, то первый член разложения дает значение

$$i_{уст}(t) = I_{\max} \cos \omega t \approx I_{\max},$$

которому соответствует z -преобразование

$$I_B(z) = I_{\max} \frac{z}{z-1}. \quad (16)$$

Подставив в (13) выражения (15) и (16), соответственно получим:

$$U_B(z) = I_{\max} \omega T \frac{A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_5 z^5 + B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}; \quad (17)$$

$$U'_B(z) = I_{\max} \frac{A_3 z^3 + A_2 z^2 + A_1 z + A_0}{B_4 z^4 + B_3 z^3 + B_2 z^2 + B_1 z + B_0}. \quad (18)$$

Значения коэффициентов последних уравнений даны в таблице. Разделив в (17) и (18) числитель на знаменатель, найдем значения напряжения в каждом интервале времени:

$$U_B(z) = I_{\max} \omega T [C_2(m) z^{-2} + C_3(m) z^{-3} + \dots + C_K(m) z^{-K}];$$

$$U'_B(z, m) = I_{\max} [C'_1(m) z^{-1} + C'_2(m) z^{-2} + \dots + C'_K(m) z^{-K}]. \quad (19)$$

Переходя к оригиналам, получим

$$U_B(t) = I_{\max} \omega T [C_2(m) \delta(n-2) + C_3(m) \delta(n-3) + \dots + C_K(m) \delta(n-K)], \quad (20)$$

	A_k	B_k	B'_k
0	$\rho_c + \frac{\rho_0 \sin \omega_0 T}{(1-m)}$	$\frac{\rho_c}{r_{ш}} + \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - 1$	$1 - \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - \frac{\rho_c}{r_{ш}}$
1	$\rho_c - 2 \rho_c \cos \omega_0 T + \rho_0 \sin \omega_0 T m$	$\left(1 - \frac{\rho_c}{r_{ш}}\right) (1 + 2 \cos \omega_0 T) - 2 \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T$	$\frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - 2 \cos \omega_0 T + 2 \frac{\rho_c}{r_{ш}} \cos \omega_0 T$
2	$\rho_c - 2 \rho_c \cos \omega_0 T + \rho_0 \sin \omega_0 T (1-m)$	$2 \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - 2(1 + \cos \omega_0 T) + 2 \frac{\rho_c}{r_{ш}} \cos \omega_0 T$	$2 - \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T$
3	$\rho_c + \rho_0 \sin \omega_0 T m$	$2(1 + \cos \omega_0 T) - 2 \frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T + 2 \frac{\rho_c}{r_{ш}} \cos \omega_0 T$	$\frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - 2 \cos \omega_0 T - 2 \frac{\rho_c}{r_{ш}} \cos \omega_0 T$
4	—	$\frac{\rho_0}{r_{ш}} \sin \omega_0 T - 2 \cos \omega_0 T - \frac{\rho_c}{r_{ш}} (1 + 2 \cos \omega_0 T) - 1$	$1 + \frac{\rho_c}{r_{ш}}$
5	—	$1 + \frac{\rho_c}{r_{ш}}$	—

$$U'_B(t) = I_{\max} [C'_1(m) \delta(n-1) + C'_2(m) \delta(n-2) + \dots + C'_K(m) \delta(n-K)],$$

где $\delta(n-k) = 1$ при $n > k$;

$n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретные моменты;

$m = 0 \div 1$ — малый параметр из интервалов $n = 0, 1, 2, \dots$

Коэффициенты $C_K(m)$ и $C'_K(m)$ определяются через коэффициенты (17) и (18).

Задаваясь значениями n и m , с помощью (19) и (20) можно построить кривую изменения восстанавливающегося напряжения на контактах выключателя. Первое и второе значения коэффициентов $C_2(m)$ и $C_3(m)$ имеют вид:

$$C_2(m) = U_B(2, m) = I_{\max} \omega T \frac{A_3(m)}{B_5};$$

$$C_3(m) = U_B(3, m) = I_{\max} \omega T \frac{B_5 A_2(m) - B_4 A_3(m)}{B_5^2}. \quad (21)$$

По (19) и (20) может быть построена кривая восстанавливающегося напряжения $u_B(n, m)$ на контактах выключателя. В дискретной системе скорость нарастания напряжения на каждом интервале времени равна

$$v(n, m) = \frac{1}{T} \frac{\partial u_B(n, m)}{\partial m};$$

$$\text{при } n = 2 \quad U_B(2, m) = I_{\max} \omega T C_2(m),$$

$$\text{при } n = 3 \quad U_B(3, m) = I_{\max} \omega T C_3(m).$$

Наибольшая скорость нарастания напряжения в начальной части кривой восстанавливающегося напряжения зависит от схемы сети и для рассматриваемой схемы соответствует условию

$$v_{\text{нач. макс.}} = v_b(3,0) = \frac{U_b(3,0)}{T}.$$

Пользуясь данными таблицы, получим:

$$v_{\text{нач. макс.}} = I_{\text{макс.}} \frac{2\rho_c + \rho_0 \sin \omega_0 T + 2 \frac{\rho_c^2}{r_{\text{ш}}}}{\left(1 + \frac{\rho_c}{r_{\text{ш}}}\right)^2}; \quad (22)$$

$$U_{b. \text{ макс.}} = I_{\text{макс.}} \omega T \frac{2\rho_c + \rho_0 \sin \omega_0 T + \frac{\rho_c^2}{r_{\text{ш}}}}{\left(1 + \frac{\rho_c}{r_{\text{ш}}}\right)^2}; \quad (23)$$

$$I_{\text{макс.}} = \frac{\sqrt{2} E}{\omega (L_0 + L)} = \frac{\sqrt{2} E \omega_0}{\omega (\rho_c \omega_0 T + \rho_0)}. \quad (24)$$

Эти выражения позволяют весьма просто определить СВН.

Таким образом, применение модифицированного z -преобразования для исследования восстанавливающегося напряжения на контактах выключателя в отличие от существующих методов значительно упрощает расчет СВН. Приведенная методика расчет СВН с успехом может быть использована для реальных сетей современных мощных энергосистем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаммарлунд. Восстанавливающееся напряжение на контактах выключателя. Госэнергоиздат, 1956.
2. Акодис М. М., Корзун П. А. Доклады IV научно-технического совещания по высоковольтному аппаратостроению. Свердловск, 1963.
3. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1953.
4. Джуварлы Ч. М., Мурадов А. М. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1967, № 1.

Ч. М. Чуварлы, Э. М. Мурадов

Ачарларда бәрпа олуан кәркинлијин һесаблинамасына
 z -модерләшдирилиш чеврилмәсинин тәтбиғи

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә z -чеврилмәсинин електрик дөврәләриндә ғыса гапанма олдуғдан сонра ачарларын сыһачларында бәрпа едилән кәркинлији һесабламағ үчүн тәтбиғи верилмишдир.

Ғејд етмәк лазымдыр ки, диқәр методлар васитәсилә бәрпа олуан кәркинлији һесабладыгда хејли чәтинлијә раст кәлмәк олур.

z -чеврилмәсини тәтбиғ етдикдә исә һәммин мәсәләнин һәлли хејли асанлашыр.

УДК 534.16

З. Г. КЕРИМОВ, М. Г. КОПЕЙКИС

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ НАГРУЖЕННОГО СТЕРЖНЯ

Динамика упруго-пластических колебаний одномерного стержня рассматривались рядом авторов. Результаты подобных исследований изложены в книге Х. А. Рахматулина и Ю. А. Демьянова [1], там же представлена обширная литература по данному вопросу.

Исследование динамики упруго-пластических колебаний нагруженного стержня вызвано необходимостью решения ряда задач в случае расчета на прочность буровых и обсадных колонн при глубоком и сверхглубоком бурении [2]. Если рассматривать динамику спуска буровой колонны в скважину, то систему спуска схематично можно представить как показано на рис. 1. Здесь 1—приведенная масса m вращающихся элементов системы спуска, к которой приложено приведенное тормозное усилие $N(t)$, описываемое кусочно-линейной функцией; 2—буровая колонна с равномерно распределенной массой по длине, к нижнему концу которой приложена сила P .

В начальный момент система находится в статически деформированном состоянии под действием собственного веса и силы P ; напряжение в верхней части превосходит предел пропорциональности. Динамика процесса рассматривается с момента, когда система освобождается от верхней связи ($N(t) = 0$) и через некоторое время после свободного спуска на нее действует усилие $N(t)$.

Буровую колонну можно рассматривать как нагруженный стержень с конечной длиной l . Дифференциальное уравнение упруго-пластического колебания квазиодномерного нагруженного стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + g, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ —перемещение сечения,
 $\sigma(x, t)$ —напряжение в соответствующем сечении,
 x —координата рассматриваемого сечения,
 t —время,

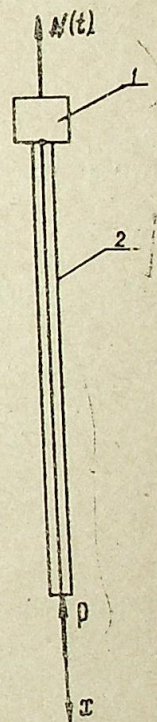


Рис. 1.

шестствующие значения) связь между напряжением σ и деформацией имеет вид

$$\sigma(x, t) = \begin{cases} E_1 & \text{при } \varepsilon \leq \varepsilon_1, \\ (\tilde{\varepsilon}_1 - \tilde{\varepsilon}) E_1 + (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_1) E_2 & \text{при } \varepsilon > \tilde{\varepsilon}_1, \end{cases} \quad (5)$$

$$E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1, \quad E_2 = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

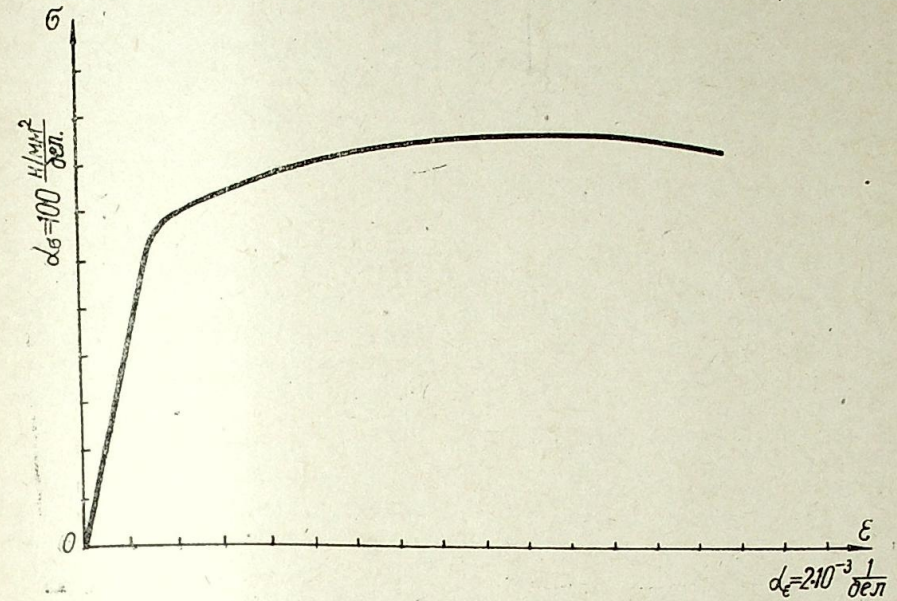


Рис. 2.

а при пассивной (если напряжение будет меньше хотя бы одного из предшествующих значений)

$$\sigma(x, t) = (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) E_1. \quad (6)$$

Здесь $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ — относительная деформация в рассматриваемом сечении;

ε_2 — наибольшее значение относительной деформации в текущем цикле, величина которого меняется от цикла к циклу;
 ε_1 — относительная деформация, соответствующая пределу пропорциональности;
 $\tilde{\varepsilon}$ — относительная деформация при полном разгрузении в текущем цикле, при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\tilde{\varepsilon} = 0$.

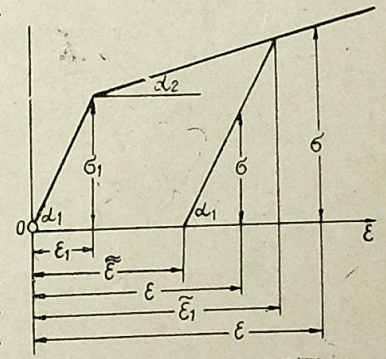


Рис. 3.

Введем функции

$$e(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tilde{\varepsilon} \leq \varepsilon_1, \\ 1 & \text{при } \tilde{\varepsilon} > \varepsilon_1, \end{cases} \quad (7)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \tilde{\varepsilon}_1 & \text{при } \varepsilon < \tilde{\varepsilon}_1, \\ \varepsilon & \text{при } \varepsilon > \tilde{\varepsilon}_1. \end{cases} \quad (8)$$

g — ускорение земного притяжения,
 $\rho = \frac{\gamma_1}{g} = \frac{q}{Fg}$ — плотность,
 γ_1 — удельный вес,
 q — вес погонного метра,
 F — поперечное сечение стержня.

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 u(0, t)}{dt^2} &= F\sigma(0, t) - N(t), \quad 0 \leq t < \infty; \\ N(t) &= \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < t_1, \\ \frac{N_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) & \text{при } t_1 \leq t < t_2, \\ N & \text{при } t_2 \leq t < t_3; \end{cases} \\ \sigma(l, t) &= -\sigma < \sigma_1, \quad 0 \leq t < \infty; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

σ_1 — предел пропорциональности материала стержня;
 N_1 — максимальное значение приведенного тормозного усилия;
 t_1 — время свободного спуска;
 $t_2 - t_1$ — время притормаживания;
 t_3 — время спуска.

Начальные условия:
 в случае упругой деформации.

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{q(2lx - x^2)}{2E_1 F} - \frac{\gamma_2 l}{E_1} x, \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0, \quad 0 \leq x \leq l; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

в случае упруго-пластической деформации

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{q(2lx - x^2)}{2E_2 F} - \left[\frac{\gamma_2 l}{E_2} + \varepsilon_1 \left(\frac{E_1}{E_2} - 1 \right) \right] \text{ при } 0 \leq x < x^*, \\ u(x, 0) &= \frac{q(2lx - x^2)}{2E_1 F} - \frac{\gamma_2 lx}{E_1} + \frac{q(2lx^* - x^{*2})}{2E_2 F} \left(1 - \frac{E_2}{E_1} \right) - \\ &- \gamma_2 lx^* \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) - \frac{\varepsilon_1 (E_1 - E_2)}{E_2} x^* \text{ при } x^* \leq x \leq l, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0 \text{ при } 0 \leq x \leq l, \\ x^* &= l - \frac{\gamma_2 l + \sigma_1}{\gamma_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

x^* — начальная точка перехода из пластической зоны в упругую.

На рис. 2 представлена диаграмма растяжения образца стали марки А, применяемой для изготовления высокосортных буровых труб. После условного предела текучести $\sigma_1 = 65,25 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2$ зависимость $\sigma = f(\varepsilon)$ отклоняется от закона Гука.

При решении поставленной задачи принята линейно упрочненная диаграмма растяжения, представленная на рис. 3, где пассивная деформация предполагается параллельной начальному участку активной деформации, подчиняющемуся закону Гука [3].

При активной деформации (если напряжение для этой точки в данный момент нагружения имеет значение, превышающее все пред-

Тогда (5) и (6) можно объединить как в случае активной, так и в случае пассивной деформации в одно выражение:

$$\sigma(x, t) = E_1 \left[\varepsilon - \left(\frac{E_2}{E_1} \right) (\bar{\varepsilon} - \varepsilon_1) e(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_1) \right]. \quad (9)$$

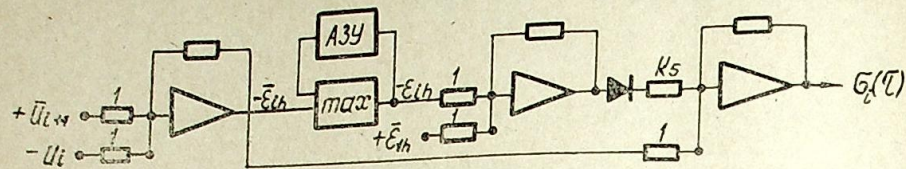


Рис. 4. АЗУ—аналоговое запоминающее устройство; max—схема выделения максимального сигнала.

Поставленная задача решалась на аналоговой вычислительной машине (АВМ) методом конечных разностей [4]. $\sigma(x, t)$, определяемое формулой (9), реализуется на АВМ по схеме, представленной на рис. 4, что обеспечивает непрерывное решение задачи как при активной, так и пассивной деформации.

Для оценки точности решения подобных задач на АВМ, предварительно решалась „упругая“ задача, для которой было получено аналитическое решение [5]:

$$\sigma(x, t) = \frac{Eg(l-x)}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(1 - \cos \frac{\nu_n at}{l} \right) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n l a}{a \nu_n (t_2 - t_1)} \left\{ \left[\frac{\nu_n a}{l} (t - t_1) - \sin \frac{\nu_n a}{l} (t - t_1) \right] e(t - t_1) + \right.$$

$$+ \left[\frac{\nu_n a}{l} (t - t_2) - \sin \frac{\nu_n a}{l} (t - t_2) \right] e(t - t_2) +$$

$$\left. + \frac{a \nu_n}{l} (t_2 - t_1) \left[1 - \cos \frac{\nu_n a}{l} (t - t_3) \right] e(t - t_3) \right\}, \quad (10)$$

$$B_n = \frac{2 \beta^2 g E l \sin \nu_n \left(1 - \frac{x}{l} \right)}{a^2 \nu_n (\nu_n^2 + \beta^2 + \beta) \cos \nu_n},$$

$$e(t - t_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_i, \\ 1 & \text{при } t > t_i, \end{cases} \quad i = 1; 2; 3.$$

$$\alpha = \frac{N_1}{\beta g m}, \quad \beta = \frac{m_0}{m},$$

ν_n определяется из уравнения частот:

$$\operatorname{tg} \nu = - \frac{\nu}{\beta},$$

m_0 —масса стержня.

На рис. 5 представлены кривые изменения $\sigma(0, t)$, полученные на АВМ (сплошная линия) и по формуле (10) (пунктирная линия) при одинаковых исходных данных ($l = 5000$ м). Ниже приведено сравнение соответствующих значений статического, минимального и максимального напряжений $\sigma(0, t)$:

$\sigma(0, t) \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$	Статическое	Минимальное	Максимальное
Получено на АВМ	$36,4 \cdot 10^7$	$28,8 \cdot 10^7$	$44,0 \cdot 10^7$
Получено по (10)	$36,5 \cdot 10^7$	$27,1 \cdot 10^7$	$44,0 \cdot 10^7$

Исходя из рис. 5 и данных таблицы, можно утверждать, что АВМ с достаточной для практических целей точностью дает решение поставленной задачи. На АВМ было получено решение „упругой“ и „упруго-пластической“ задач ($l = 10000$ м) при следующих исходных данных:

$$E_1 = 19,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad E_2 = 25,1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad \sigma_1 = 65,25 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2;$$

$$\gamma_2 = 14,7 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3; \quad q = 258 \text{ Н/м}; \quad F = 30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$m = 13 \cdot 10^5 \text{ кг}; \quad t_1 = 2,2 \text{ сек}; \quad t_2 = 5,2 \text{ сек};$$

$$N_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

По этим данным, положив в методе конечных разностей $h = \frac{l}{8}$, получены кривые напряжения, удлинения и скорости, изменяющиеся во времени.

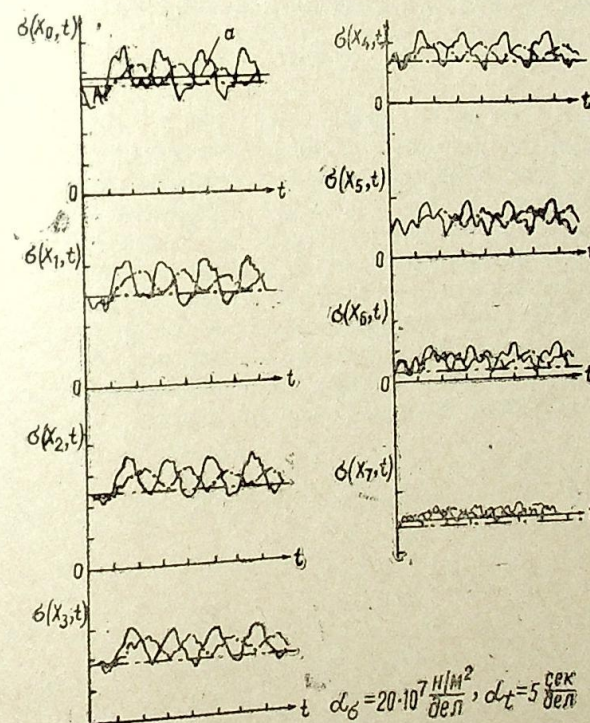


Рис. 6.

На рис. 6 представлены кривые для „упругого“ (сплошная) и „упруго-пластического“ (пунктирная) вариантов задач в соответствующих сечениях стержня. Как видно из этого рисунка, в период свободного спуска происходит уменьшение напряжения. Далее по мере увеличения тормозного момента наблюдается нарастание напряжения. После остановки верхнего конца стержня происходит колебание напряжения около прямой a с постоянной амплитудой и частотой. Несовпадение прямой a со статической линией напряжения вызвано с погрешностью решения на АВМ, которая составляет 6% от статического напряжения.

По кривым видно, что амплитуда колебания напряжения при упруго-пластическом варианте решения ниже соответствующего значения напряжения при упругом варианте в среднем на 20% относительно статического положения равновесия. Это позволит уточнить коэффициент запаса при прочностных расчетах бурильных и обсадных труб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демьянов Н. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., 1961.
2. Балакишев Н. А., Копейкис М. Г., Керимов З. Г. „За технический прогресс“. 1967, № 4.
3. Ильющин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
4. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. ИИЛ, М., 1962.
5. Керимов З. Г. „Уч. зап. АЗИНЕФТЕХИМ“, № 2, 1964.

З. Г. Керимов, М. Г. Копейкис

Јүкләнмиш чубуғун еластик-пластик рәгси һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә сонсуз сәјда сәрбәстлик дәрәчәси олан бирелчүлү јүкләнмиш чубуғун еластик-пластик рәгси тәдгиг олунур. Мәсәлә һиперболик типли гејри-хәтти дифференциал тәнлијин үчүнчү нөв сәрһәд мәсәләсинин һәллине кәтирилир. Сонлу фәргләр методу илә тәртиб олунмуш дифференциал тәнлијин һәлли электрон-аналог машынында апарылмышдыр. Алынған нәтичәләрин тәдгиги кәстәрир ки, чубуғун еластик-пластик рәгсләрини нәзәрдә тутмагла бурада јаранан максимум динамик кәркинлик јалныз еластик рәгсләри нәзәрдә тутмагла јаранан кәркинликдән 20% аз олур. Бу да чох дәрин нефт вә газ гујуларына ендирилән газыма кәмәринин мөһкәмлијә һесабатында нәзәрдә тутуларса, чохлу материала гәнаәт олунар.

УДК. 539. 184

Х. Б. ГЕЗАЛОВ, А. В. ИВАНОВА, Н. В. РАБИНЬКИНА

РАСЧЕТ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА НАТРИЯ МЕТОДОМ ХАРТРИ—ФОКА, II

Настоящая работа является продолжением ряда исследований, предпринятых авторами по расчету некоторых атомных характеристик методом Хартри—Фока. В предыдущих работах был произведен последовательный расчет атомов Li, NV, OVI, NaI и KI как с учетом обратного влияния валентного электрона на остов (LiI, [1], NaI [2], так и без учета последнего (LiI, NV, OVI, KI [3]).

Опубликованные до сих пор [4, 5, 6] одноэлектронные волновые функции атома натрия относятся к основному и первым трем возбужденным состояниям. Тем не менее для получения ряда атомных характеристик, необходимых, например, при определении концентрации заряженных частиц в плазме через постоянные Штарка, при оценке излучательной способности сильно нагретых газов требуется знание волновых функций более высоко возбужденных состояний. Целью настоящей работы являлся расчет десяти возбужденных состояний атома NaI методом Хартри—Фока.

Как установлено в [2], вклад от учета обратного влияния валентного электрона на остов в атоме натрия для возбужденных состояний пренебрежимо мал. В то время как значение радиальной волновой функции валентного электрона для основного состояния изменяется не более, чем на четыре единицы в четвертом десятичном знаке, то же изменение в первом возбужденном состоянии не превышает двух единиц четвертого десятичного знака. Это позволяет в расчете высоко возбужденных состояний атома отказаться от учета обратного влияния валентного электрона на остов и вместо систем интегро-дифференциальных уравнений Хартри—Фока приходится решать лишь одно интегро-дифференциальное уравнение, если, конечно, заранее известны волновые функции атомного остова.

Уравнение Хартри—Фока для валентного электрона в атоме натрия (конфигурации $1s^2 2s^2 2p^6 nl$) без учета обратного влияния на остов имеет вид

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{11}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2} + 2F_0^{10,10}(r) + 2F_0^{20,20}(r) + 6F_0^{21,21}(r) - \right. \\ \left. - \lambda_{nl,nl} \right\} f_{nl}(r) - \frac{1}{2l+1} \left\{ E_l^{nl,10}(r) \cdot f_{10}(r) + F_l^{nl,20}(r) \cdot f_{20}(r) \right\} - \\ - \frac{3}{2l+1} \left\{ \frac{l}{2l-1} \cdot F_{l-1}^{nl,21}(r) + \frac{l+1}{2l+1} \cdot F_{l+1}^{nl,21}(r) \right\} \cdot f_{21}(r) = 0,$$

Таблица 1

Нормированные радиальные волновые функции оптического электрона
для $4s^2S$, $3d^2D$, $4p^2P^o$, $5s^2S$, $4d^2D$, $4f^2F^o$, $5p^2P^o$, $6s^2S$, $5d^2D$ и $5f^2F^o$
возбужденных состояний атома натрия

r	$4s$	$3d$	$4p$	$5s$	$4d$	$4f$	$5p$	$6s$	$5d$	$5f$
695	379	0	77	235	0	0	51	166	0	0
855	372	0	107	231	0	0	71	163	0	0
1015	346	0	139	215	0	0	92	151	0	0
1175	304	0	173	189	0	0	115	133	0	0
1495	190	1	239	118	1	0	159	83	0	0
1815	55	2	304	34	2	0	202	24	1	0
2135	— 85	3	362	— 53	3	0	241	— 37	2	0
2455	— 221	5	414	— 137	4	0	275	— 96	3	0
3135	— 468	8	499	— 291	6	0	332	— 205	5	0
3775	— 633	12	549	— 394	10	0	364	— 277	7	0
4415	— 732	17	572	— 455	14	0	379	— 320	10	0
5055	— 771	23	571	— 479	18	0	378	— 337	14	0
6335	— 712	37	519	— 442	29	0	343	— 311	23	0
7615	— 532	54	422	— 329	42	0	278	— 231	33	0
8895	— 288	74	297	— 176	57	1	141	— 124	44	1
10175	— 14	97	157	— 5	75	2	100	— 4	58	2
12735	538	154	— 143	339	119	4	— 101	237	92	4
15295	1034	227	— 447	646	175	8	— 305	453	135	8
17855	1441	316	— 740	895	243	14	— 500	625	187	13
20415	1747	421	— 1012	1076	322	23	— 679	750	247	21
22975	1951	539	— 1256	1191	411	35	— 838	825	314	32
25535	2059	671	— 1466	1241	508	50	— 972	857	387	46
28095	2078	813	— 1640	1233	611	68	— 1079	845	464	63
30655	2019	963	— 1775	1173	718	90	— 1158	797	544	83
33215	1891	1118	— 1871	1068	828	117	— 1208	716	625	107
35775	1706	1278	— 1927	926	938	147	— 1229	608	705	135
38815	1425	1470	— 1944	719	1066	189	— 1218	455	796	172
43935	849	1790	— 1861	310	1268	273	— 1118	156	937	247
49055	201	2095	— 1656	— 103	1444	374	— 933	— 159	1052	335
54175	— 462	2373	— 1354	— 561	1583	489	— 682	— 472	1135	435
64415	— 1680	2827	— 559	— 1272	1732	757	— 71	— 934	1188	653
74655	— 2609	3122	— 333	— 1677	1695	1057	558	— 1154	1086	895
84895	— 3196	3258	1184	— 1747	1487	1369	1090	— 1111	850	1119
95135	— 3460	3255	1986	— 1534	1140	1671	1454	— 848	514	1311
108575	— 3445	3087	2590	— 916	544	2026	1635	— 295	— 5	1482
110495	— 3417	3052	2663	— 810	451	2071	1633	— 206	— 81	1497
120735	— 3186	2827	2944	— 201	— 58	2286	1522	276	— 478	1540
130975	— 2868	2564	3067	427	— 565	2451	1261	724	— 833	1514
141215	— 2513	2282	3003	1023	— 1045	2564	889	1093	— 1121	1420
151455	— 2153	2001	2953	1547	— 1462	2626	449	1354	— 1326	1265
161695	— 1810	1718	2776	1978	— 1818	2641	— 22	1492	— 1439	1057
171935	— 1498	1476	2553	2307	— 2102	2614	— 493	1510	— 1463	807
182175	— 1223	1247	2306	2535	— 2323	2550	— 937	1417	— 1400	527
192415	— 987	1044	2050	2667	— 2454	2457	— 1337	1228	— 1263	228
202625	— 788	866	1791	2716	— 2529	2341	— 1681	966	— 1062	— 77
223135	— 490	584	1339	2618	— 2519	2061	— 2176	299	— 528	— 674
243615	— 296	383	960	2349	— 2351	1755	— 2422	— 425	89	— 1901
264095	— 174	246	688	1998	— 2089	1453	— 2457	— 1089	697	— 1619
284575	— 101	156	454	1631	— 1787	1174	— 2336	— 1619	1229	— 1914
305055	— 57	97	302	1288	— 1481	929	— 2117	— 1987	1647	— 2086
325535	— 32	59	197	990	— 1197	722	— 1848	— 2190	1934	— 2198
346015	— 17	36	127	744	— 946	552	— 1565	— 2251	2096	— 2119
366495	— 9	21	81	548	— 734	416	— 1291	— 2198	2148	— 2021
386975	— 5	12	51	397	— 560	310	— 1043	— 2064	2110	— 1875
407455	— 3	7	31	284	— 421	228	— 827	— 1879	2006	— 1701
427935	— 1	4	19	201	— 313	167	— 645	— 1667	1857	— 1514
448415	— 0	2	12	139	— 230	120	— 497	— 1447	1682	— 1325
468895	— 0	1	7	96	— 167	86	— 378	— 1235	1496	— 1144
489375	— 0	0	4	66	— 120	61	— 284	— 1039	1312	— 976
509855	— 0	0	3	44	— 85	43	— 212	— 863	1137	— 825
530335	— 0	0	1	30	— 61	30	— 157	— 712	978	— 693
550175	— 0	0	0	16	— 46	15	— 94	— 583	825	— 579
$-\lambda_{nl, nl}$	701	556	503	371	313	312	289	229	201	200

где $f_{10}(r)$, $f_{20}(r)$ и $f_{21}(r)$ — одноэлектронные радиальные волновые функции электронов остова, а $f_{nl}(r)$ — радиальная волновая функция валентного электрона;

$$F_{\kappa}^{n'l', n'l''}(r) = \int_0^r \frac{t^{\kappa}}{r^{\kappa+1}} \cdot f_{n'l'}(t) \cdot f_{n'l''}(t) dt + \int_r^{\infty} \frac{r^{\kappa}}{t^{\kappa+1}} f_{n'l'}(t) \cdot f_{n'l''}(t) dt \quad (2)$$

и $\lambda_{nl, nl}$ — диагональные множители Лагранжа [5].

Таблица 2

Полная энергия и потенциалы ионизации атома натрия

Возбужденные состояния атома	Полная энергия	Потенциал ионизации	
		теоретически вычисленные	эксперимент (8)
$4s^2S$	— 161,7433	0,07011	0,07162
$3d^2D$	— 161,7289	0,05566	0,05596
$4p^2P^o$	— 161,7235	0,05029	0,05095
$5s^2S$	— 161,7102	0,03704	0,03760
$4d^2D$	— 161,7045	0,03131	0,03149
$4f^2F^o$	— 151,7044	0,03125	0,03127
$5p^2P^o$	— 161,7021	0,02894	0,02922
$6s^2S$	— 161,6961	0,02289	0,02314
$5d^2D$	— 161,6933	0,02010	0,02011
$5f^2F^o$	— 161,6932	0,02001	0,02002

Таблица 3

Силы осцилляторов для переходов
 $np \rightarrow ns$, $nd \rightarrow np$ и $nf \rightarrow nd$

Переход	Метод Хартри—Фока	Полуэмпирический метод
$3p \rightarrow 4s$	0,5187	0,502
$3p \rightarrow 5s$	0,0438	0,0412
$3p \rightarrow 6s$	0,0141	0,0131
$4p \rightarrow 3s$	0,0139	0,0153
$4p \rightarrow 4s$	1,5159	1,4400
$4p \rightarrow 5s$	0,9497	0,9370
$4p \rightarrow 6s$	0,0527	0,0696
$5p \rightarrow 3s$	0,0021	0,0425
$5p \rightarrow 4s$	0,0365	0,0385
$5p \rightarrow 5s$	1,9502	1,8800
$5p \rightarrow 6s$	1,3624	1,3600
$3d \rightarrow 3p$	0,9069	0,8550
$3d \rightarrow 4p$	0,0195	0,0196
$3d \rightarrow 5p$	0,0302	0,0311
$4d \rightarrow 3p$	0,0995	0,0996
$4d \rightarrow 4p$	1,0056	0,9480
$4d \rightarrow 5p$	0,4085	0,3820
$5d \rightarrow 3p$	0,0302	0,0302
$5d \rightarrow 4p$	0,1462	0,1420
$5d \rightarrow 5p$	1,1148	1,0500
$4f \rightarrow 3d$	1,0238	0,9999
$4f \rightarrow 4d$	0,1921	0,1840
$4f \rightarrow 4d$	0,0128	0,0146
$5f \rightarrow 3d$	0,1596	0,1590
$5f \rightarrow 4d$	0,8876	0,8600
$8f \rightarrow 5d$	0,0316	0,0343

Уравнение (1) численно интегрировалось по программе, изложенной в работе [7]. В результате были получены волновые функции и собственные значения энергии, соответствующие $4s^2S$, $3d^2D$, $4p^2P^o$, $5s^2S$, $4d^2D$, $4f^2F^o$, $5p^2P^o$, $6s^2S$, $5d^2D$ и $5f^3F^o$ возбужденным состояниям атома натрия. Численные результаты приведены в табл. 1—3. В табл. 1 даны волновые функции в единицах 10^{-4} . В тех же единицах представлены значения аргумента и собственные значения уравнения (1). Полученные волновые функции были применены для расчета полной энергии и потенциалов ионизации в различных возбужденных состояниях, значения которых приводятся в таблице 2 в сравнении с экспериментальными данными [8]. Как видно из этой таблицы, вычисленные значения потенциалов ионизации для возбужденных состояний отличаются от экспериментальных всего на 1,8%, что еще раз подтверждает целесообразность сделанных нами упрощений.

С помощью рассчитанных волновых функций были вычислены силы осцилляторов, соответствующие переходам $np \rightarrow ns$, $nd \rightarrow np$, $nf \rightarrow nd$. Результаты вычислений представлены в табл. 3 в сравнении с расчетными данными, полученными полумпирическим методом Андерсона и Зилитисом [9]. Максимальное расхождение величин, не превышает 1,5%.

В заключение авторы выражают благодарность проф. А. С. Компанейцу за обсуждение результатов работы, а также А. Н. Ивановой за постоянную помощь при вычислении на ЭВМ М-20.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова А. В., Иванова А. Н. „Оптика и спектроскопия“, 16, 917, 1964.
2. Гезалов Х. Б., Иванова А. В. „АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 1, 1968 г.
3. Гезалов Х. Б., Иванова А. В. Одноэлектронные волновые функции атомов LiI, NV, OVI, и KI, вычисленные методом Хартри—Фока. Работа депонирована во ВИНТИ АН СССР). М., 1967.
4. Fock V., Petrashen M. Phys. Zs. d. Cowjetunion, 6, 367, 1934.
5. Haree D., Haree W. Proh. Roy. soc., A 193, 299, 1948.
6. Merits A. L., Torrey M. D. J. chem. phus. 39, № 3, 694, 1963.
7. Иванова А. В., Иванова А. Н., Прихоженко А. И., Пятецкий-Шапиро И. И., Тарнопольский Б. Л. Лит. физ. сб., 3, 129, 1963.
8. Moore Ch. E. Atomic Energy Levels, Nat. Bur. Stand., Washington 1, 1949.
9. Андерсон Э. М., Зилитис В. А. „Оптика и спектроскопия“, 16, 177, 1964.

Х. Б. Көзәлов, А. В. Иванова, Н. В. Рабинкина

Хартри—Фок үсүлү илэ натриум атомунун һәјәчанланмыш сәвијјәләринин һесаблинамасы, II

ХҮЛАСӘ

Хартри—Фок үсүлү илэ натриум атомунун 10 һәјәчанланмыш сәвијјәси үчүн далға функцијалары һесаблинамашдыр. [Һәмин функцијалар атомун там енерјисини, ионлашма потенциалыны вә оптик кечид-ләрин рәгс гүввәләринин һесаблинамасында истифадә олунур. Алынмыш нәзәри һесабламалар ајры-ајры мұәллифләрин тәчрүби вә нәзәри нәти-чәләри илэ ујғунлашыр.

УДК—625. 855. 3. 06 (07)

Н. Н. ИВАНОВ, Ю. М. ЯКОВЛЕВ, А. А. АЛИЕВ

ПРИМЕНЕНИЕ УСТАНОВКИ ДИНАМИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ СЛОЕВ НЕЖЕСТКИХ ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД

В большинстве разработанных за последние годы методов расчета нежестких дорожных одежд, представляющих собой многослойные конструкции [2, 3, 4, 5], одним из основных расчетных параметров является модуль упругости, определяемый под воздействием статической нагрузки. Поскольку дорожная одежда работает главным образом под действием кратковременных (динамических) нагрузок, то и расчет ее следует вести, используя динамические модули упругости, вычисленные в результате испытания усилием, близким по длительности приложения к действию нагрузки от движущихся автомобилей.

На кафедре „Строительства и эксплуатации дорог“ Московского автомобильно-дорожного института совместно с ЦНИЛ Гушосдора РСФСР разработана конструкция установки динамического нагружения [1,2], позволяющая определять динамические модули упругости нежестких одежд в условиях. Принципиальная схема этой установки представлена рис. 1. При сбрасывании груза 3 с этой или иной высоты на пружину 2 возникает динамическое усилие, которое через жесткий штамп 1 цилиндрической формы передается дорожной одежде.

Для направления падающего груза служит штанга 4. Вертикальную деформацию дорожной одежды под действием динамического усилия одежд под действием динамического усилия одежд под действием динамического усилия одежд измеряют вибрографом 6, который закрепляют на специальном штативе 5. Динамический модуль упругости вычисляют по известной формуле:

$$E_1 = \frac{pD}{l}, \quad (1)$$

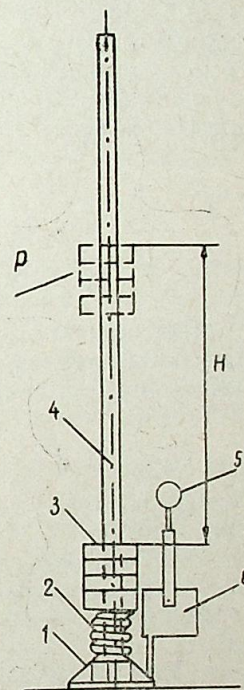


Рис. 1. Принципиальная схема установки динамического нагружения.

где p —среднее удельное давление под штампом;

D —диаметр штампа;

l —упругая вертикальная деформация, измеряемая вибрографом;

$$P = \frac{4Q}{\pi D^2}; \quad (2)$$

Q —динамическое усилие.

Величину динамического усилия Q , возникающего при падении груза P с высоты H , и длительность действия этого усилия можно определить по приближенным формулам:

$$Q = P \sqrt{\frac{2H}{\delta}}; \quad (3)$$

$$T = \pi \sqrt{\frac{\delta}{g}}; \quad (4)$$

где δ —величина, характеризующая жесткость пружины, равная ее осадке под воздействием силы;

g —ускорение свободного падения.

Формулы (3) и (4) выведены, исходя из законов механики, в предположении, что вертикальная деформация испытуемого слоя достаточно мала по сравнению с общим сжатием пружины при сбрасывании груза, а сжатие пружины невелико по сравнению с высотой падения груза.

При условии $l \leq 0,085 \sqrt{\delta H}$ и $\frac{Q}{P} \geq 30$ ошибка в вычислениях по формулам (3) и (4) не превышает 3%, что в данном случае допустимо. Указанные условия обычно бывают соблюдены при испытании дорожных одежд [1,2]. Если эти условия не обеспечены, то нужно применять более точные зависимости:

$$Q = \frac{P \cdot \sqrt{l^2 + 4\delta^2 + 4\delta l + 8\delta H} - l - 2\delta}{2\delta}, \quad (5)$$

$$T = \frac{0,5\pi (\sqrt{l^2 + 4\delta^2 + 4\delta l + 8\delta H} + l + 2\delta)}{\sqrt{2g [H + 0,5 (\sqrt{l^2 + 4\delta^2 + 4\delta l + 8\delta H} + l + 2\delta)]}}. \quad (6)$$

Для облегчения пользования формулами (5) и (6) могут быть построены графики. Влияние потерь энергии при ударе можно учитывать, пользуясь следующей зависимостью:

$$Q_n = \frac{Q}{2} \left(1 + \frac{l'}{l} \right), \quad (7)$$

где Q_n —значение динамического усилия, исправленное с учетом потерь энергии;

l и l' —вертикальные деформации испытуемого материала от первого и второго (после подскоки груза) ударов.

Основные параметры установки динамического нагружения (диаметр штампа, длительность действия динамического усилия и величина этого усилия) приняты исходя из того, что установка предназначена воспроизводить, по возможности ближе к реальным условиям, действие движущегося расчетного автомобиля.

Диаметр штампа (D) для испытания на поверхности дорожной одежды должен быть близок к диаметру круга, равновеликого по площади отпечатку колеса автомобиля наиболее тяжелого для данной местности на дорогах общего пользования, величина D лежит в пределах 0,32—0,35 м.

Испытания дорожных одежд, их конструктивных слоев и подстилающего грунта было признано целесообразным производить одним и тем же штампом диаметром 0,34 м.

Длительность действия нагрузки на поверхность дороги при наиболее часто встречающихся скоростях от распространенных типов автомобилей, как показывают исследования, обычно находится в пределах 0,015—0,04 сек. С учетом распределяющих свойств дорожной одежды продолжительность воздействия усилия на грунт земляного полотна может изменяться в пределах 0,04—0,20 сек. Установлено [2], что длительность действия нагрузки в общем случае оказывает существенное влияние на величину деформации дорожных одежд и грунтов. Наряду с этим экспериментальные и теоретические исследования, проведенные на кафедре "Строительства и эксплуатации дорог" МАДИ, показали, что в интервале 0,02—0,20 сек продолжительность нагружения почти не влияет на величину вертикальных деформаций как грунтов, так и дорожных одежд.

Это дает возможность производить испытания всех конструктивных слоев при одной и той же длительности действия нагрузки примерно равной 0,02 сек. Указанное время является оптимальным, так как при его увеличении для достижения расчетных усилий необходимо значительно увеличивать вес падающего груза, что делает установку очень громоздкой. Снижение продолжительности нагружения не обеспечивает получения достаточно надежных и устойчивых результатов испытаний.

(Установка динамического нагружения (рис. 2) развивает усилие до 6000 кг. Ее собственный вес составляет 225 кг. Снижая высоту падения груза, можно уменьшать величину усилия в необходимых пределах.

Послойные испытания дорожных одежд установкой динамического нагружения позволяют вычислить методом обратного пересчета численные значения динамических модулей упругости различных конструктивных слоев. Для обратного пересчета удобно пользоваться номограммой, служащей для определения модуля упругости верхнего слоя двухслойной конструкции, которая построена Ленфилиалом СоюздорНИИ [5] по данным Б. И. Когана.

Во время испытаний по мере перехода от верхнего к нижним слоям нужно с учетом распределяющего давления под штампом конструкции постепенно снижать удельные усилия. Проведенные исследования развития меньших динамических усилий. Проведенные исследования позволяют дать ориентировочные рекомендации (табл. 1) по величинам соотношений удельных давлений на каждом из конструктивных слоев и на поверхности одежды.

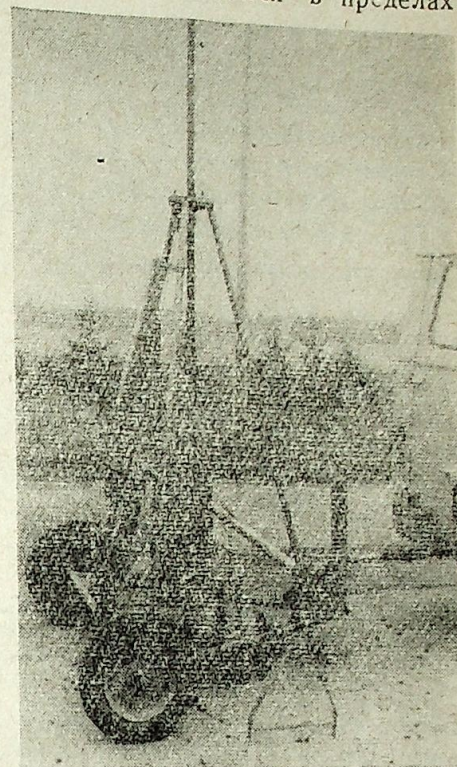


Рис. 2. Общий вид прицепной установки динамического нагружения

Таблица 1

Расположение штампа при испытаниях	Соотношение		
	дорожные одежды с покрытиями капитального типа	дорожные одежды с покрытиями облегченного типа	дорожные одежды с покрытиями переходного типа
На поверхности дорожной одежды	1,0	1,0	1,0
На поверхности верхнего слоя покрытия	0,95—0,97	0,93—0,95	—
На поверхности верхнего слоя основания	0,83—0,88	0,75—0,85	—
На поверхности нижнего слоя основания	0,15—0,25	0,20—0,30	0,40—0,5
На грунте земляного полотна	0,10—0,20	0,15—0,25	0,20—0,30

В 1966 и 1967 гг. на дорогах Московской области и Краснодарского края были проведены послойные испытания различных дорожных конструкций. Результаты этих испытаний позволяют дать предварительные рекомендации по численным значениям динамических модулей упругости некоторых дорожно-строительных материалов (табл. 2).

Таблица 2

Материалы	Численное значение динамич. модуля упругости, кг/см ²	Примечание
Асфальтобетон	25000—35000	Большие значения при +10—12°C Меньшие при +18—20°C
Гравий, обработанный жидким битумом	9000—15000	То же
Ракушечник, обработанный жидким битумом	5000—7000	То же
Щебеночный материал из камня 2—3 класса	4000—6000	Большие значения для 2 класса
Гравийный материал	3000—4000	—
Ракушечник	2500—3000	—
Песок	1500—2000	Большие значения для крупнозернистых материалов

Следует отметить, что динамические модули упругости материалов, так же как и эквивалентные динамические модули дорожных одежд в целом, всегда бывают выше соответствующих статических модулей упругости, полученных при относительно длительном действии нагрузки. Причина этого состоит в том, что все дорожно-строительные материалы в той или иной степени обладают способностью деформироваться во времени. Вследствие этого упругие деформации от кратковременной (динамической) нагрузки всегда бывают меньше, чем деформации от длительной (статической) нагрузки той же величины.

Указанная разница особенно существенна в материалах, содержащих органические вяжущие как, например, асфальтобетон, а также в пластичных грунтах. Необходимо иметь в виду, что приведенные в табл. 2 динамические модули соответствуют длительности действия нагрузки, близкой к фактической, имеющей место на дороге. При значительной разнице во времени нагружения модули будут иными.

Накопление данных по расчетным динамическим показателям дорожно-строительных материалов и грунтов создает возможность перехода к расчету дорожных конструкций с учетом их работы под воздействием кратковременной нагрузки, что в большей степени соответствует реальным условиям. Кроме того, в дальнейшем представляется возможность применять установку динамического нагружения для послойной приемки в эксплуатацию вновь построенных одежд, что позволит вносить соответствующие коррективы в процесс строительства.

Для такой послойной приемки необходимы следующие данные:

1. Требуемый эквивалентный (общий) динамический модуль упругости дорожной одежды; предварительные значения этих модулей в настоящее время установлены [1,2], но требуют некоторого уточнения для различных конкретных дорожно-климатических условий.

2. Расчетные динамические модули упругости материалов конструктивных слоев.

3. Расчетный динамический модуль упругости подстилающего грунта.

Для получения достаточно надежных данных в процессе таких приемочных испытаний нужно вводить поправочные коэффициенты, учитывающие отличия модуля грунта и других материалов во время приемки от их расчетного значения для периода наибольшего ослабления дорожной конструкции.

Выводы

1. При проектировании дорожных одежд следует учитывать особенности их работы под воздействием кратковременных нагрузок от движущегося транспорта.

2. Установка динамического нагружения позволяет с определенным приближением воспроизводить действие движущегося автомобиля. Она позволяет определять динамические модули упругости конструктивных слоев дорожной одежды.

3. Проведенные в 1966 и 1967 гг. испытания дали возможность получить предварительные значения динамических модулей упругости некоторых дорожно-строительных материалов. Это показывает целесообразность дальнейших исследований в направлении определения динамических модулей других материалов, уточнения уже определенных модулей и установления более точной их зависимости от различных факторов (температуры воздуха, зернового состава, влажности и др.). Особое внимание нужно уделить исследованиям в области динамических модулей упругости грунтов.

4. Накопление данных по динамическим модулям упругости различных дорожных дорожно-строительных материалов и грунтов должно способствовать дальнейшему приближению методов расчета нежестких одежд к реальным условиям их работы.

5. Существует возможность применения установки динамического нагружения для послойного испытания вновь построенных нежестких дорожных одежд в процессе их приемки в эксплуатацию.

1. Барздо В. И., Яковлев Ю. М. „Автомобильные дороги“, 1966, № 11.
2. Барздо В. И., Фирстов В. Г., Яковлев Ю. М. Методы расчета и оценки прочности нежестких дорожных одежд. Изд-во „Высшая школа“, 1964.
3. Бируля А. К. Конструирование и расчет нежестких одежд автомобильных дорог. Изд-во „Транспорт“, 1964.
4. Иванов Н. Н. „Автомобильные дороги“, 1964, № 6.
5. Кривисский А. М. Конструирование и расчет нежестких дорожных одежд по местному предельному равновесию. Автотрансиздат, 1963.

Н. Н. Иванов, Л. М. Яковлев, А. Э. Алиев

Динамик жүклэндирмә гурғусунун јол кејимләри конструктив
лајларынын еластиклик модулларынын тәјин едилмәсиндә тәтбиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә јол кејимләрини динамик жүклэндирмә гурғусу илә сынамаг үсүлунун гыса мәзмуну вә һәмин үсулла јол кејимләри конструктив лајларынын сынанмасы нәтичәсиндә һесаблинмыш бә’зи јол-иншаат материалларынын еластиклик модулары верилир.

Бу үсул һазырда јол кејимләрини сынамаг үчүн тәтбиг едилән статик үсуллардан фәрғли олараг, јол кејимләрини гыса мүддәтдә давам едән (динамик) гүввә илә жүклэндирмәјә имкан верир. Белә һалда јол өртүкләринин һәрәкәтдә олан автомобил тәкәрләринин тә’сиринә мә’руз галдыгы шәраитә јахын шәраит јараныр.

Бу үсулла илк дәфә олараг 1966—1967-чи илләрдә Москва вә Краснодар вилајәтләринин јолларында јол кејимләри конструктив лајларынын сынаглары апарылмыш вә лајлары тәшкил едән материалларын динамик еластиклик модулу һесаблинмышдыр.

Апарылан сынаглардан әлдә олуна мә’луматларын кенишләндирилмәси вә дәгигләшдирилмәси кәләчәкдә јол кејимләринин һесаблинмасында онларын гыса мүддәтли гүввәнин тә’сиринә мә’руз галдыгы шәраити даһа дүзкүн нәзәрә алмаға имкан верир.

УДК 621.385.493.001.24

Т. К. ИСМАИЛОВ, А. М. ПАШАЕВ

РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РЕЖИМА ЛАМПОВОГО ТРИОДНОГО ГЕНЕРАТОРА С ВЕЕРООБРАЗНЫМ ВИДОМ СТАТИЧЕСКИХ АНОДНО-СЕТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

В отличие от триодов старого типа, где полезная мощность ограничивалась током насыщения или же величиной допустимой мощности потерь на аноде, в современных триодах веерообразным видом статических анодно-сеточных характеристик (для абсолютного большинства режимов) полезная мощность ограничивается величиной допустимой мощности потерь на управляющей сетке. В этой связи правильнее вести расчет параметров анодной цепи генератора через данные, полученные из расчета цепи его сетки. При этом, очевидно, в первую очередь необходимо повысить точность расчета энергетического баланса в цепи сетки, так как в конечном счете он определяет эксплуатационные возможности триода.

§ 1. ВОЗМОЖНЫЕ ПУТИ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА ЭНЕРГЕТИКИ СЕТОЧНОЙ ЦЕПИ ГЕНЕРАТОРА

Энергетический баланс в сеточной цепи триода (рис. 1) представляется уравнением

$$P_c = P_{c_1} + P_{c_0}, \quad (1)$$

где $P_{c_1} = 0,5 U_c I_{c_1}$ — мощность возбуждения, вводимая в сеточную цепь;
 $P_{c_0} = E_c I_{c_0}$ — мощность, потребляемая из сеточной цепи (или поставляемая в нее) источником напряжения смещения;

I_{c_0} , I_{c_1} — соответственно, постоянная составляющая и первая гармоника сеточного тока.

Точность расчета по уравнению (1), при известных значениях напряжения возбуждения U_c и напряжения смещение E_c , в основном зависит от правильного определения составляющих импульса сеточного тока I_{c_0} и I_{c_1} .

На рис. 2а представлена типичная динамическая характеристика сеточного тока современного триода. Реальный импульс сеточного тока (рис. 2б) по форме отличен от косинусоиды, в результате чего при определении составляющих сеточного тока возникает необходимость в поправочных коэффициентах, учитывающих это отличие.

Многочисленные расчеты всевозможных режимов новых триодных генераторов, произведенные графическим путем, показывают, что

вплоть до сильно перенапряженного режима форма реального импульса сеточного тока остается одной и той же, т. е. соотношение площадей импульсов—идеализированного усеченной косинусоидой и реального для широкого диапазона режимов остается одним и тем же. Тогда составляющие реального импульса сеточного тока могут быть определены по формулам:

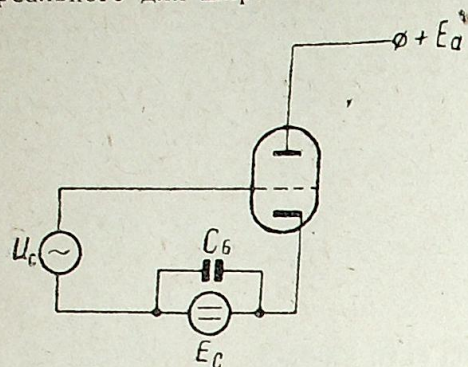


Рис. 1.

$$I_{c_0} = \kappa_{c_0} \sigma_{c_0}(\theta_c) i_{c \max};$$

$$I_{c_1} = \kappa_{c_1} c_{c_1}(\theta_c) i_{c \max}, \quad (2)$$

где κ_{c_0} , κ_{c_1} — поправочные коэффициенты, учитывающие отличие формы реального импульса сеточного тока от косинусоидальной;

α_{c_0} , α_{c_1} — коэффициенты разложения для посто-

янной составляющей и первой гармоники сеточного тока;
 $i_{c \max}$ — максимальное значение импульса сеточного тока.

Принимая во внимание данные [2, 4] и произведенных нами расчетов (при допустимой погрешности порядка 10%), можно принять следующие значения поправочных коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{c_0} &= 0,66, \\ \kappa_{c_1} &= 0,72. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

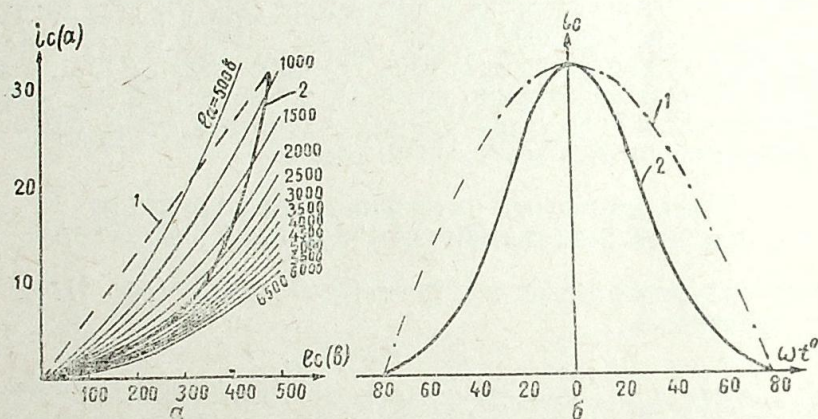


Рис. 2. Динамические характеристики (а) и формы импульсов (б) сеточного тока генераторного триода типа: ГУ-10А: 1—идеализированные; 2—реальные.

§ 2. ПРЕДПОЛАГАЕМАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Как известно, получение необходимых соотношений в сеточной цепи триода возможно только при определенном режиме его анодной цепи и наоборот. В этой связи возникает необходимость в выводе аналитических выражений, связывающих режимы цепей анода и сетки при определенных начальных (заданных) условиях.

Преобразуем уравнение энергетического баланса в сеточной цепи триода (1), с учетом выражений (2) и (3):

$$P_c = 0,5 U_c I_{c_1} \left(1 - a \frac{\cos \theta_c}{g_{c_1}} \right), \quad (4)$$

где $\cos \theta_c = -\frac{E_c}{U_c}$ — угол отсечки сеточного тока;

$g_{c_1} = \frac{\alpha_{c_1}}{\kappa_{c_0}}$ — коэффициент формы идеализированного (косинусоидального) импульса;

$a = 2 \frac{\kappa_{c_0}}{\kappa_{c_1}}$ — коэффициент, учитывающий отличие формы им-

пульса сеточного тока от косинусоиды. Из уравнения (4) следует, что при известных значениях допустимой мощности потерь на сетке, напряжения возбуждения и угла отсечки сеточного тока составляющие сеточного тока, с учетом погрешности, вносимой за счет отличия формы импульса тока от косинусоидальной, можно определить по простым зависимостям:

$$I_{c_1} = \frac{1}{A} \frac{P_c}{U_c}; \quad (5)$$

$$I_{c_0} = \frac{1}{B} \frac{P_c}{U_c}, \quad (6)$$

где

$$A = 1 - a \frac{\cos \theta_c}{g_{c_1}}, \quad (7)$$

$$B = 1,09 A g_{c_1}. \quad (8)$$

Одной из основных величин, характеризующих режим генератора, является величина угла отсечки анодного тока, которая равна

$$\cos \theta_a = -\frac{E_c - E'_c}{U_c - D U_a}, \quad (9)$$

где E'_c — напряжение геометрического смещения, зависящее от величины анодного напряжения. При пренебрежении проницаемостью сетки триода ($D = 0$) получается

$$\cos \theta_a = \cos \theta_c + \frac{E'_c}{U_c}. \quad (10)$$

Результаты многочисленных расчетов показывают, что для абсолютного большинства современных триодов в широком диапазоне режимов отношение $\frac{E'_c}{U_c}$ лежит в пределах $(-0,1) \div (-0,5)$. Назовем его параметром режима. Очевидно, при известном значении параметра режима и нижнего угла отсечки импульса анодного тока, выбранного в начале расчета энергетического режима генератора, однозначно можно определить величину как косинуса, так и самого угла отсечки сеточного тока по выражениям

$$\cos \theta_c = \cos \theta_a - \frac{E'_c}{U_c}, \quad (11)$$

$$\theta_c = \arccos \left[\cos \theta_a - \frac{E'_c}{U_c} \right]. \quad (12)$$

На рис. 3 представлены обобщенные графики для A и B , построенные для значений $\theta_a = (60 \div 180)^\circ$ по уравнениям (7), (8) и (11). При помощи этих графиков по заданному θ_a и справочной величине $P_{с доп}$ можно рассчитать тот оптимальный режим, при котором триод-

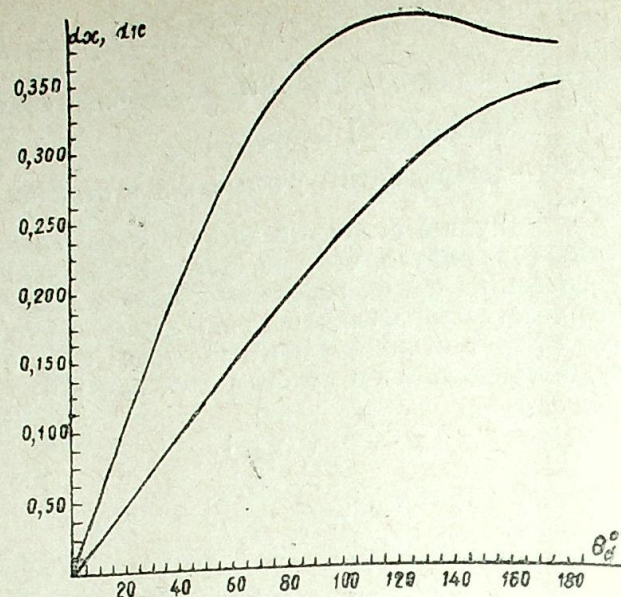


Рис. 3

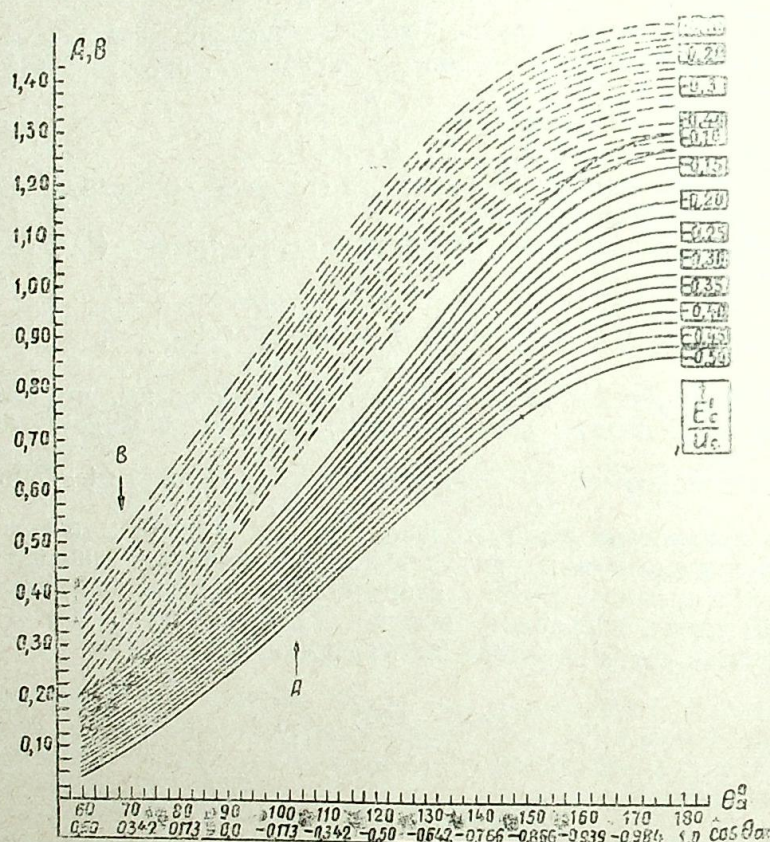


Рис. 4

Данные режима	θ_a		
	70°	90°	120°
$\frac{E_c}{U_c}$	— 0,127	— 0,2	— 0,325
U_c (в)	960	600	370
E_c (в)	— 450	— 120	64,5
$e_{c \max}$ (в)	510	480	435
θ_c	62	78,3°	100°
A	0,260	0,390	0,610
B	0,505	0,710	0,985
I_{c1} (а)	0,962	0,025	1,060
I_{c0} (а)	0,495	0,563	0,660
$i_{c \max}$ (а)	3,35	3,05	2,84
P_{c1} (вт)	463	308	1,96
P_{c0} (вт)	223	68	44
P_c (вт)	240	240	240
$e_a \min$ (в)	1000	900	800
U_a (в)	7000	7100	7200
$i_{a \max}$ (а)	9,8	8,8	7,8
I_{a1} (а)	4,28	4,4	4,17
I_{a0} (а)	2,48	2,82	3,16
P_1 (квт)	15,0	15,6	15,0
P_0 (квт)	19,8	22,6	25,0
P_a (квт)	4,8	7,0	10,0
η	0,756	0,690	0,6
ζ	0,875	0,888	0,90
κ_M	33	50,6	76,5

ный генератор будет отдавать максимально возможную мощность, а потери на сетке не превысят допустимых. Выбор широкого диапазона изменения угла отсечки анодного тока объясняется желанием сделать обобщенные графики $A, B = f(\theta_a)$ универсальными и в дальнейшем использовать их для расчета режимов триодных генераторов на современных лампах с амплитудной модуляцией.

При расчете по предлагаемой методике необходимо, во-первых, определить величину параметра режима $\frac{E_c}{U_c}$ исходя из статических характеристик триода и формулы

$$U_c = \frac{e_{c \max} - E_c}{1 - \cos \theta_a} \quad (13)$$

В формуле (13) величина $e_{c \max}$ выбирается из анодных характеристик лампы, исходя из соображений наилучшего использования ее по току и напряжению.

Для известных значений параметра $\frac{E_c}{U_c}$ и угла отсечки θ_a по обоб-

шенным графикам (рис. 4) определяем величины A и B . Дальнейший расчет сеточной цепи не представляет трудностей. Отметим, что при определении составляющих импульса сеточного тока по формулам (5) и (6) рекомендуется задаваться значением $P_c < P_{c \text{ доп}}$ на $20 \div 30\%$, так как на коротких волнах необходимо считаться с дополнительным нагревом сетки за счет части контурного тока, попадающего на сетку в основном через межэлектродную емкость лампы анод—сетка.

Прежде чем начать расчет анодной цепи, необходимо по известным значениям $e_{c \text{ max}}$ и $i_{c \text{ max}}$ (из расчета цепи сетки) на поле характеристик $i_c = f(e_a)$ определить величину минимального напряжения на аноде лампы $e_{a \text{ min}}$. Для известных значений напряжений $e_{a \text{ min}}$ и $e_{c \text{ max}}$ из анодных характеристик лампы определяется максимальный импульс анодного тока $i_{a \text{ max}}$ и по его величине ведется дальнейший расчет энергетики анодной цепи триода.

В таблице приведены результаты расчета энергетического режима триодного генератора на лампе, произведенного по изложенной выше методике. Из рассмотрения данных таблицы следует, что расчет анодной цепи триодного генератора через данные цепи его сетки дает хорошие результаты—с лампы снимается колебательная мощность, близкая к номинальной при достаточно высоком к. п. д., а мощность потерь на сетке не превышает заданной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов Б. С. Расчет эксплуатационных режимов генераторных ламп. Госэнергоиздат, 1962.
2. Радиопередающие устройства. Под общей редакцией Б. П. Терентьева. Связьиздат, 1962.
3. Марголин М. Г. Ламповый усилитель мощности. Госэнергоиздат, 1957.
4. Хацкелевич В. А. Расчет режимов новых генераторных триодов. Связьиздат, 1961.
5. Электровакуумные приборы (справочник). Госэнергоиздат, 1956.

Т. К. Исмаилов, А. М. Пашаев

Желпинчвары анод-тор характеристикалы триод
кенераторларында енеркетик налын несабланмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә желпинчвары анод-тор характеристикалы триодлар эсасында гурулмуш кенераторлардакы енеркетик налын даһа дәгиг несабланмасындан бәһс олунур. Несабламада эсас һәлледици параметр, торда- сәпилән күч гәбул олунур.

УДК 513.88:513.83

БАЙРАМ ОГЛЫ

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В НУЛЕ

Обозначим через $L_2^\infty(0, \infty)$ гильбертово пространство, состоящее из всех вектор-функций $f(r) = \{f_j(r)\}_{j=1}^\infty$, $r \in [0, \infty)$, с измеримыми координатами $f_j(r)$ ($j = 1, 2, \dots$) такими, что

$$\|f(r)\|^2 = \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty |f_j(r)|^2 dr < \infty.$$

Пусть T —диагональная матрица с диагональными элементами $l_j(l_j + 1)$ ($j = 1, 2, \dots$), где $l_j \geq 1/2$ стремится к $+\infty$ при $j \rightarrow \infty$. Пусть далее $\mathcal{Q}(r)$ —самосопряженный оператор в l_2 при почти всех r из $[0, \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_0^\infty r \|\mathcal{Q}(r)\| dr < \infty;$$

$$\|\mathcal{Q}(r)\| \leq C,$$

$$\|\mathcal{Q}(r)\| = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

где C —некоторое постоянное число и

при больших r .

В этой работе изучался спектр и при условии $\mathcal{Q}(r) = O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$ разложение по собственным функциям оператора

$$Lu = -u'' + \frac{T}{r^2} u + \mathcal{Q}(r) u = \lambda^2 u \quad (1)$$

в пространстве $L_2^\infty(0, \infty)$.

Очевидно, что оператор L при $\mathcal{Q}(r) \equiv 0$ является самосопряженным в $L_2^\infty(0, \infty)$. Тогда, поскольку оператор $\mathcal{Q}(r)$ ограничен и самосопряженным в $L_2^\infty(0, \infty)$. Из [1] следует, что оператор L будет самосопряженным в $L_2^\infty(0, \infty)$. Действительно, пусть $L_2(\Sigma)$ —гильбертово пространство функций ψ , определенных на единичной сфере Σ пространства E_m ($m \geq 2$), таких, что

$$\int_\Sigma |\psi|^2 d\sigma < \infty,$$

где $d\sigma$ — обычная мера на единичной сфере Σ . Рассмотрим в этом пространстве уравнение

$$-v''(r) + \frac{T_1}{r^2} v(r) + [P(r) - \lambda^2] v(r) = 0, \quad (2)$$

где T_1 — неограниченный, независимый от r симметрический неотрицательный оператор в $L_2(\Sigma)$, $P(r)$ — оператор умножения, равномерно ограниченный (по норме $L_2(\Sigma)$) почти при всех r и $P(r) = O\left(\frac{1}{r}\right)$,

когда $r \rightarrow \infty$.

Возьмем в качестве T_1 самосопряженный оператор с чисто дискретным спектром $l_j(l_j + 1)$ ($j = 1, 2, \dots$), тогда собственные функции φ_j ($j = 1, 2, \dots$) этого оператора образуют полную систему в $L_2(\Sigma)$, т. е. если $f \in L_2(\Sigma)$, то

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(r) \varphi_j.$$

Разлагая решение $v(r)$ уравнения (2) по системе φ_j ($j = 1, 2, \dots$), подставляя это разложение в (2) и умножая скалярно (в смысле $L_2(\Sigma)$) на φ_i обе стороны уравнения (2), получим (1). Если $\{u_j(r)\}_{j=1}^{\infty}$ — коэффициенты $v(r)$ в разложении по φ_j ($j = 1, 2, \dots$), то очевидно, что

$$\|v\|^2 = \int_0^{\infty} \|v\|_{L_2(\Sigma)}^2 dr = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |u_j(r)|^2 dr. \quad (3)$$

Известно [1], что нетривиальное решение $v(r)$ уравнения (2) не является квадратично суммируемым, т. е.

$$\|v\|^2 = \int_0^{\infty} \|v\|_{L_2(\Sigma)}^2 dr = \infty.$$

Отсюда следует, что оператор L не имеет положительного собственного значения. Пусть $q(r) = \|\Omega(r)\|$, тогда $\Omega(r) \geq -Eq(r)$, где E — единичная матрица. Рассмотрим уравнение с потенциалом $-q(r)$:

$$-u'' + \frac{T}{r^2} u - q(r) u = \lambda^2 u, \quad \int_0^{\infty} r q(r) dr < \infty,$$

которое распадается на систему уравнений

$$-u_j'' + \frac{l_j(l_j + 1)}{r^2} u_j - q(r) u_j = \lambda^2 u_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

При каждом конечном j отрицательный спектр уравнения (4) состоит только из конечного числа простых собственных значений (см. напр. [2]), а при больших j уравнение (4) не имеет отрицательного спектра [3]. Следовательно, отрицательный спектр оператора L с потенциалом $-q(r)$ состоит из конечного числа собственных значений. Из $\Omega(r) \geq -Eq(r)$ в силу известных принципов качественного спектрального анализа следует, что отрицательный спектр уравнения (1) также дискретен и конечен.

В дальнейшем будем предполагать, что $\|\Omega(r)\| = O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$. Решением задачи (1) теории рассеяния (з. т. р.) будем называть решение следующего интегрального уравнения ($Im \lambda = 0$):

$$u(r, \lambda) = u_0(r, \lambda) - \int_0^{\infty} A(r, t, \lambda) \Omega(t) u(t, \lambda) dt, \quad (5)$$

где $u_0(r, \lambda)$ — диагональная матрица в диагональных элементах $\sqrt{r} I_{l_j+1/2}(\lambda r)$ ($j = 1, 2, \dots$), $A(r, t, \lambda)$ — также диагональная матрица с диагональными элементами $A_j(r, t, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots$);

$$A_j(r, t, \lambda) = \frac{\pi}{2i} \begin{cases} \sqrt{rt} I_{l_j+1/2}(\lambda r) H_{l_j+1/2}^{(1)}(\lambda t), & \text{если } r \leq t, \\ \sqrt{rt} I_{l_j+1/2}(\lambda t) H_{l_j+1/2}^{(1)}(\lambda r), & \text{если } r \geq t. \end{cases}$$

Введем гильбертово пространство $L_2^{\infty}(0, \infty; \varepsilon)$ функций $f = \{f_j(r)\}_{j=1}^{\infty}$ таких, что

$$\|f\|_{\varepsilon}^2 = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f_j(r)|^2}{1+r^{2+\varepsilon}} dr < \infty.$$

Из асимптотики функций Бесселя следует, что $u_0(r, \lambda)$ (точнее столбцы этой матрицы) принадлежит пространству $L_2^{\infty}(0, \infty; \varepsilon)$, поэтому уравнение (5) можно рассматривать в пространстве $L_2^{\infty}(0, \infty; \varepsilon)$.

Лемма 1. Оператор B , порожденный ядром $B(r, t, \lambda) = A(r, t, \lambda) \Omega(t)$, является вполне непрерывным в пространстве $L_2^{\infty}(0, \infty; \varepsilon)$.
Доказательство. Покажем сперва, что оператор B ограничен. Имеет место следующая оценка [3]:

$$|A_j(r, t, \lambda)| \leq C \sqrt{rt} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}},$$

справедливая при достаточно больших j равномерно по всем действительным и чисто мнимым λ . Тогда для евклидовой нормы $\|A(r, t, \lambda)\|$ имеем

$$\|A(r, t, \lambda)\| \leq \sup_j |A_j(r, t, \lambda)| \leq C_1 \sqrt{rt}. \quad (6)$$

С помощью этого неравенства легко можно установить ограниченность оператора B . Действительно,

$$\begin{aligned} \|B\|_{\varepsilon}^2 &\leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\|A(r, t, \lambda)\|^2 \|\Omega(t)\|^2}{1+r^{2+\varepsilon}} (1+t^{2+\varepsilon}) dr dt \leq \\ &\leq C \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{rt(1+t^{2+\varepsilon}) \|\Omega(t)\|^2}{1+r^{2+\varepsilon}} dr dt \leq \\ &\leq C \int_0^{\infty} t(1+t^{2+\varepsilon}) \|\Omega(t)\|^2 dt = C \left(\int_0^M t(1+t^{2+\varepsilon}) \|\Omega(t)\|^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_M^{\infty} (1+t^{2+\varepsilon}) t^{-3-2\varepsilon} dt \right) < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $M > 0$ — достаточно большое число, а через C обозначены различные постоянные.

Для доказательства полной непрерывности оператора B достаточно показать, что он является пределом (по операторной норме) конечномерных операторов. Итак, пусть $\Omega_N = E_N \Omega$, где E_N — матрица, все элементы которой равны нулю, за исключением первых N диагональных элементов, каждый из которых равен 1. Тогда, очевидно, оператор B_N с ядром $A \Omega_N$ будет конечномерным в пространстве $L_2^{\infty}(0, \infty; \varepsilon)$ ($A \Omega_N$ при каждом N переводит l_2 в N -мерное подпространство). Оценим $\|B - B_N\|_{\varepsilon}$. Учитывая (6) и (7), имеем

$$\|B - B_N\|_{\varepsilon}^2 \leq \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \|A - A E_N\|^2 \|\Omega(t)\|^2 \frac{1+t^{2+\varepsilon}}{1+r^{2+\varepsilon}} dr dt \leq C \sup_N \frac{1}{l_N}. \quad (18)$$

Из (8) следует, что $\|B - B_N\| \rightarrow 0$, когда $N \rightarrow \infty$, так как при этом по наложенному выше условию l_N также стремится к ∞ . Лемма доказана.

Замечание. Из оценки (7) следует, что наложенное нами условие на асимптотическое поведение функции $\mathcal{Q}(r)$ можно ослабить, заменив его сходимостью последнего интеграла в этой оценке.

Положим $\mathcal{Q}_N = \mathcal{Q}_N F_N$ и обозначим через B_N оператор с ядром $A\mathcal{Q}_N$. Тогда из известного свойства проекционного оператора следует, что $\|B - B_N\| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Можно показать, что при вещественных значениях λ и $\lambda \neq 0$ каждое нетривиальное решение уравнения

$$u(r, \lambda) = - \int_0^\infty A(r, t, \lambda) \mathcal{Q}(t) u(t, \lambda) dt$$

принадлежит $L_2^\infty(0, \infty)$ и тем более $L_2^\infty(0, \infty; \varepsilon)$. Как отмечено выше, такие решения тождественно равны нулю. Поэтому из леммы 1 следует, что з.т.р. разрешима при всех действительных λ (предполагая, что $\lambda = 0$ не является собственным значением. В противном случае в части (9) добавляется еще одно слагаемое).

Обозначим через $R(r, t, \lambda)$ ядро резольвенты оператора L . Тогда имеет место

Теорема. Если $f(r) \in L_2^\infty(0, \infty)$ то

$$\int_0^\infty R(r, t, \lambda) f(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{a_k \varphi_k(r)}{\lambda^2 - \lambda_k^2} + \int_0^\infty \frac{u(r, -s) F(s)}{s^2 - \lambda^2} s^2 ds, \quad (9)$$

где $\varphi_k(r)$ — собственные функции, которые отвечают отрицательным дискретным собственным значениям λ_k^2 ($k = 1, 2, \dots, n$) оператора L и

$$F(s) = \int_0^\infty u(r, s) f(s) ds,$$

$$a_k = \int_0^\infty (f(r), \varphi_k(r))_{L_2} dr.$$

Наметим доказательства теоремы. Ядро $R(r, t, \lambda)$ резольвенты уравнения

$$-u'' + \frac{T}{r^2} u + \mathcal{Q}(r) u = \lambda^2 u \quad (10)$$

удовлетворяет соотношению

$$R_N(r, t, \lambda) = R_0(r, t, \lambda) - \int_0^\infty A(r, \xi, \lambda) \mathcal{Q}(\xi) R(\xi, t, \lambda) d\xi. \quad (11)$$

Здесь $R_0(r, t, \lambda)$ — ядро резольвенты уравнения (10) при $\mathcal{Q}(r) \equiv 0$.

Положим

$$R_N(r, t, \lambda) = R_0(r, t, \lambda) - \int_0^\infty A(r, s, \lambda) \mathcal{Q}_N(s) R_N(s, t, \lambda) ds. \quad (12)$$

Тогда из леммы 1 следует, что $R_N(r, t, \lambda)$ стремится к $R(r, t, \lambda)$ по метрике $L_2^\infty(0, \infty; \varepsilon)$ равномерно по r в каждой ограниченной области изменения, если только λ^2 ($\text{Im} \lambda > 0$) отрицательно и не является собственным значением оператора L . По той же лемме решение уравнения

$$u_N(r, \lambda) = u_0(r, \lambda) - \int_0^\infty A(r, t, \lambda) \mathcal{Q}_N(t) u_N(t, \lambda) dt \quad (13)$$

стремится по норме $L_2^\infty(0, \infty; \varepsilon)$ к решению (5) при $N \rightarrow \infty$, равномерно по λ на вещественной оси.

Используя методы работы [4], можно установить, что, если $f(r)$ финитна и принадлежит области определения оператора L с потенциалом $\mathcal{Q}_N(r)$, то она разлагается по решениям уравнения

$$-u_N'' + \frac{T}{r^2} u_N + \mathcal{Q}_N(r) u_N = \lambda^2 u_N,$$

т. е.

$$\int_0^\infty R_N(r, t, \lambda) f(t) dt = R_{0, N} + \int_0^\infty \frac{u_N(r, -s) F_N(s)}{s^2 - \lambda^2} s^2 ds, \quad (14)$$

где через $R_{0, N}$ обозначено разложение по дискретной части спектра и

$$F_N(s) = \int_0^\infty u_N(r, s) f(s) ds.$$

Легко видеть, что разложение по решениям уравнения (12) фактически является разложением по решениям конечной системы уравнений. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ из (11) — (14) следует справедливость теоремы. Поскольку оператор L является самосопряженным и финитные вектор-функции плотны в $L_2^\infty(0, \infty)$, то формула (9) распространяется на все функции из $L_2^\infty(0, \infty)$.

Заметим, что условие $l_j \geq 1/2$ можно заменить более слабым условием $l_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots$). При этом следует взять самосопряженное расширение минимального оператора L . В этом случае добавляются еще граничные условия в нуле для координат $u_j(r)$ ($0 \leq l_1 < 1/2$) вектора $u(r)$.

С помощью формулы (9) можно получить разложение по собственным функциям оператора

$$-\Delta u + q(x) u + \int_E K(x, y) u(y) dy,$$

где E — все пространство или угловая область, $K(x, y)$ — симметрическое ядро, удовлетворяющее некоторым условиям убывания. При $K(x, y) \equiv 0$, $E = E_3$ и $q(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right)$ эта задача впервые решена А. Я. Певзнером [5] при $\varepsilon > 3/2$, затем при $\varepsilon > 0$ она рассмотрена Т. Икебе, а для угловых областей А. Г. Раммом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Сб. переводов „Математика“, 5:1, 1961.
2. Виленкин Н. Я. и др. Справочник по функциональному анализу, М., 1964.
3. Альфаро В. и Редже Т. Потенциальное рассеяние. Изд-во „Мир“, М., 1966.
4. Гасымов М. Г. Докт. дисс., МГУ, 1967.
5. Певзнер А. Я. „ДАН СССР“, т. 104, 1955, № 3.

М. Б. Маммәдов

Сыфырда мәхсусијјәти олан оператор әмсаллы Штурм-Лиувилл мәсәләсинин һәллине көрә ајрылыш

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сыфырда мәхсусијјәти олан оператор әмсаллы Штурм-Лиувилл мәсәләсинин спектри вә бу мәсәләнин мәхсуси функцијаларына көрә ихтијари функцијанын ајрылышы кәстәрилир.

УДК 669.017.538

З. И. АЛИ-ЗАДЕ, Т. Г. МАГАРРАМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВАНАДИЯ, НИОБИЯ И ТАНТАЛА НА ТЕРМОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА НИКЕЛЯ

Исследование магнитных свойств ферромагнитных металлов и их сплавов представляет особый теоретический и практический интерес. Однако для развития теории физики металлов интересны исследования двойных сплавов ферромагнитных элементов железа, кобальта и никеля с редкими неферромагнитными элементами—ванадием, ниобием танталом и др.

Изучение физических свойств таких сплавов позволяет легче всего установить экспериментально необходимые и достаточные критерии ферромагнитного состояния. С этой точки зрения исследование термомагнитного эффекта в широком температурном интервале, включая точки Кюри того или другого ферромагнитного металла или сплава, важно для глубокого понимания внутренних процессов, происходящих в структурах металлов и сплавов, так как он является результатом воздействия магнитного поля на непосредственные носители электрического тока—электроны проводимости.

Из анализа литературных данных по двойным сплавам этих элементов следует, что присутствие определенного количества примесей неферромагнитных редких элементов в решетке ферромагнетиков значительно изменяет их физические свойства. Однако необходимо заметить, что влияние ванадия, ниобия и тантала на физические свойства никеля еще недостаточно изучено.

В настоящей работе изучалось влияние неферромагнитных элементов ванадия, ниобия и тантала на ферромагнитные свойства никеля. Исследованию изменения термо-э.д.с. некоторых металлов и сплавов в продольном и поперечном магнитном поле посвящено ряд теоретических и экспериментальных работ [1, 2, 3], которые решили некоторые общие задачи ферромагнетизма. Более точные сведения дают такие структурные чувствительные параметры, как четные гальваномагнитные и термомагнитные эффекты. Поэтому нами был измерен продольный термомагнитный эффект сплавов вышеуказанных составов. Измерение производилось методом неуравновешенного потенциометра [4], при постоянной разности температур $\Delta T = 10 - 11^\circ\text{C}$.

Для исследования термомагнитного эффекта нами было изготовлено 10 образцов, состав которых дается в таблице. Методика изго-

товления и термическая обработка этих сплавов описана в работе [5]. Результаты измерения продольного четного термомагнитного эффекта и концентрационная зависимость его в сплавах системы никель—ванадий, никель—ниобий и никель—тантал представлены на рис-
1—4.

На рис. 1 видно, что в слабых полях, соответствующих процессу смещения, термомагнитный эффект быстро растет с ростом поля и вращения. Рост термомагнитного эффекта перехода смещения к процессу ностью прекращается в пределах приблизительно $H = 300 - 350$ э. Такое поле соответствует техническому насыщению. Общий ход зависимости продольного термомагнитного эффекта от напряженности внешнего магнитного поля при различных средних температурах остальных исследованных сплавов аналогичен ходу кривых, полученных для сплавов 98 вес % Ni + 2 вес % V. Экспериментальные результаты хорошо согласуются с данными, полученными другими авторами по исследованию термомагнитного эффекта на никеле [6, 7].

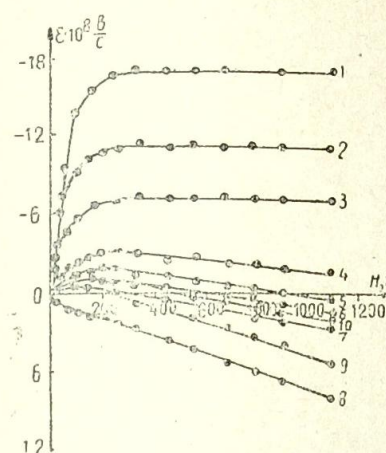


Рис. 1. Зависимость продольного термомагнитного эффекта сплава 98 вес % Ni + 2 вес % V от внешнего магнитного поля при различных средних температурах: 1—37,9%; 2—98,33; 3—157,2; 4—226,2; 5—237,5; 6—252,45; 7—259,75; 8—272,08; 9—283,34; 10—245°C.

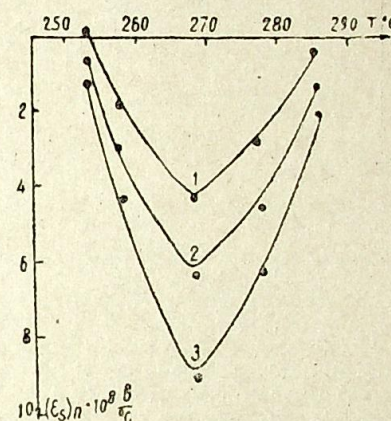


Рис. 2. Температурная зависимость термомагнитного эффекта, обусловленного парапроцессом в области точки Кюри, для сплава 96 вес % Ni + 4 вес % Nb: 1—570; 2—791; 3—1130 э

Как видно из приведенных рисунков, продольный термомагнитный эффект постепенно падает с ростом значения средней температуры образца. Вблизи температуры Кюри соответствующего состава термомагнитный эффект, обусловленный парапроцессом, меняет свой знак на противоположный. В работе Н. Миуата и Э. Фунагагавас [8] было показано, что знак термомагнитного эффекта в монокристаллических проволоках никеля вблизи точки Кюри становится отрицательным. Авторы объясняют это парапроцессом, обусловленным обменным взаимодействием s- и d-электронов. Такое же изменение знака термомагнитного эффекта в области точки Кюри нами наблюдалось и для остальных поликристаллических образцов никель—ванадия, никель—ниобия и никель—тантала.

Уменьшение абсолютной величины продольного термомагнитного эффекта и перемена знака его в относительно сильных магнитных полях качественно подтверждают вывод, вытекающий из кванто-механи-

ческой теории Л. Э. Гуревича, Г. Н. Недлина [9] и Л. Э. Гуревича и И. Н. Яснеевича [10–11], о том, что в сильных магнитных полях ($\omega\tau \gg 1$) продольная термо-э. д. с. существенно зависит от величины внешнего магнитного поля.

Наше исследование показало, что влияние парапроцесса усиливается с повышением содержания в сплавах неферромагнитных компонентов ванадия, ниобия и тантала. Для определения точки Кюри исследованных сплавов нами построена температурная зависимость термомагнитного эффекта, обусловленного парапроцессом в области точки Кюри. На рис. 2 представлен график, по минимуму которого определяется точка Кюри для сплава никель-ниобий. Этим же методом ее определяли и для других исследованных сплавов.

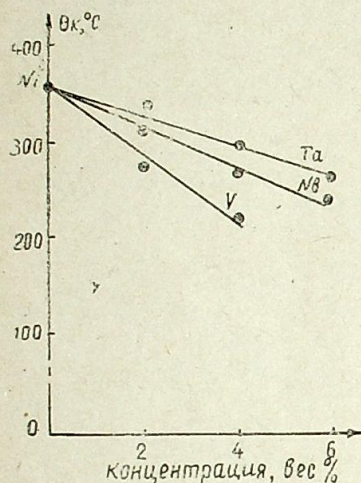


Рис. 3. Концентрационная зависимость точки Кюри для сплавов системы никель-ниобия и никель-тантала.

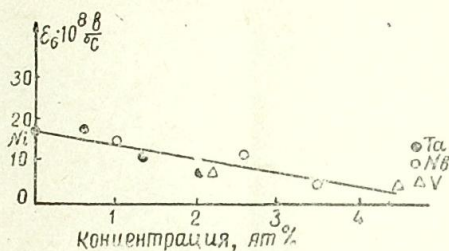


Рис. 4. Концентрационная зависимость термомагнитного эффекта, отнесенная к температурам T/θ для сплавов системы никель-ванадия и никель-тантала.

На рис. 3 показана зависимость точки Кюри от весового содержания легирующего неферромагнитного компонента ванадия, ниобия и тантала, определенная по измерению продольного термомагнитного эффекта. Отсюда следует, что для этих сплавов в зависимости от концентрации точка Кюри уменьшается линейно.

Для выяснения характера действия элементов V группы периодической системы Д. И. Менделеева ванадия, ниобия и тантала на продольные термомагнитные свойства никеля на рис. 4 представлена зависимость продольного термомагнитного эффекта, отнесенная к температурам $\frac{T}{\theta}$ при полях магнитного насыщения от ат% легирующего элемента. Из рисунка видно, что изменение температурного эффекта в зависимости от концентрации указанных элементов подчиняется линейному закону. Отсюда можно заключить, что элементы-аналоги ванадий, ниобий и тантал одинаково изменяют термомагнитный эффект никеля. Это подтверждают также работы [12, 13] при измерениях удельного электрического сопротивления.

Выводы

Исследована зависимость продольного термомагнитного эффекта Томсона—Бахметьева в сплавах никель-ванадий, никель-ниобий и ни-

кель-тантал (с содержанием 2, 4, 6 вес % V, Nb и Ta в Ni) в широком интервале температур, включая точки Кюри.

В результате установлено:

1. Вблизи точки Кюри продольный термомагнитный эффект Томсона—Бахметьева под влиянием парапроцесса меняет свой знак.
2. Влияние парапроцесса усиливается с увеличением неферромагнитного компонента ванадия, ниобия и тантала.
3. По минимуму термомагнитного эффекта, обусловленного парапроцессом, приблизительно определены точки Кюри для всех исследованных ферромагнитных сплавов.
4. Согласно полученным экспериментальным данным сделан вывод, что влияние элементов V группы периодической системы ванадия, ниобия и тантала на термомагнитные свойства никеля сходно.
5. Уменьшение абсолютной величины и перемена знака термомагнитного эффекта сплавов Ni—V, Ni—Nb и Ni—Ta в относительно сильных магнитных полях ($\omega\tau \gg 1$) качественно подтверждает вывод, вытекающий из кванто-механической теории Л. Э. Гуревича и сотрудников [9–11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дарфман Я. Г., Кикоин И. К. Физика металлов. ГТТИ, 1934.
2. Акулов Н. С. Ферромагнетизм. ОНТИ, 1939.
3. Аннаев Ф. Г. Магнитоэлектрические явления в ферромагнитных металлах, Ашхабад, 1952.
4. Аннаев Ф. Г. Тр. I межвузовской конференции по современной технике диэлектриков и полупроводников. Л., 1957.
5. Broili H. Ann. d. Phys. 14, 259, 1932.
6. Белов К. П. Упругие тепловые и электрические явления в ферромагнитных металлах. ГИИЛ, 1957.
7. Али-заде З. И., Магеррамов Т. Г. Уч. зап. АГУ им. Кирова, серия физ.-матем. наук, 1967, № 5.
8. Miyata N. and Funatogawa z. Phys. soc. jap. vol. 9, 967, 1954.
9. Гуревич М. Э. Недлин Г. М. ЖЭТФ, т. 45, вып. 3, 576. 1963; т. 46, вып. 2, 1056, 1964.
10. Гуревич Л. Э. и Яснеевич И. Н. ЖЭТФ, т. 47, вып. 4, 1364, 1964.
11. Гуревич Л. Э., Яснеевич И. Н. ФТТ, 4, 2854, 1962.
12. Aaraj S., Chessin H., Colvin R. V. Phys. Status solidi. 1974, 7, № 3, 1009–1014.
13. Chessin H., Aaraj S. and Colvin J. appl. phys. 1964, 35, № 8, 2419–2423.
14. Aaraj S., Chessin H., Colvin R. R. V. Phys. status solidi. 1934, 3, № 2 2337–2346.

З. И. Элизадэ, Т. Г. Магеррамов

Никелин термомагнит хассэсина кечид элементлариндэн
ванадинин, ниобинин вэ танталын тэ'сири

ХҮЛАСЭ

Мэ'лүмдүр ки, ферромагнит метал вэ хэлитэлэрин термомагнит хассэсинин өйрэни лмэси хүсүси эһэмийжэтэ маликдир.

Биз Ni—V, Ni—Nb вэ Ni—Ta хэлитэлэринин термомагнит эффектүни мүхтэлиф температурларда, Күри нөгтэси дэ дахил олмагла өйрэнмишик. Алынан нэгичэ асасында һэмин нүмүнэлэрин Күри нөгтэси тэ'жин едилиб мүэјјәнлэширилмишдир ки, никелэ ванадинин, ниобинин вэ танталын тэ'сири ејнидир.

Н. А. МАМЕДОВ

ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ ПЛАСТИН

Равнобоочная трапециевидная пластинка, зашцеиленная по основанию и свободная по трем другим сторонам, загружена равномерно распределенной по поверхности поперечной нагрузкой интенсивностью q . Вылет консоли пластинки обозначим через l . Углы при вершинах для удобства в преобразованиях обозначим через $(90^\circ + \varphi)$. β и α — углы между направлениями внешних нормалей между собой и осью x (в случае трапециевидной пластинки, зашцеиленной по основанию, $\beta = \alpha$). s — координата, отсчитанная от начальной точки контура вдоль самого контура, в направлении, обратном движению часовой стрелки, если смотреть с конца оси z , определяющая положение точки на контуре (рис. 1).

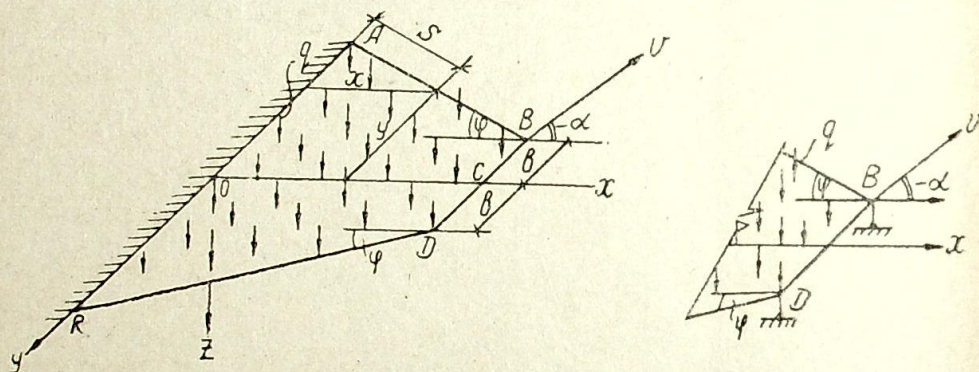


Рис. 1.

Координаты точек (x, y) :

$$\begin{aligned} A(0, -l \operatorname{tg} \varphi - z); & \quad B(l, -b); \\ C(l, 0); & \quad D(l, b); \\ R(0, l \operatorname{tg} \varphi + b); & \quad O(0, 0). \end{aligned}$$

уравнения прямых AB, BD, RD , соответственно:

$$y = (x - l) \operatorname{tg} \varphi - b; \quad x = l; \quad y = (l - x) \operatorname{tg} \varphi + b.$$

Вариация потенциальной энергии пластинки

$$\delta V = D \iint \nabla^2 \nabla^2 w \delta w dx dy - \int M_v \frac{\partial \delta w}{\partial v} ds + \int V_v \delta w ds,$$

$w(x, y)$ — прогиб пластинки,

$V_v = Q_v - \frac{\partial M_{vt}}{\partial s}$ — приведенное поперечное усилие на контуре пластинки;

M_v — изгибающий момент на контуре пластинки,

M_{vt} — крутящий момент на контуре пластинки,

$$\delta V = D \iint \nabla^2 \nabla^2 w \delta w dx dy - \int M_v \frac{\partial \delta w}{\partial v} ds + \int V_v \delta w ds + \sum_j \delta w_j [M_{vt}(s_j - 0) - M_{vt}(s_j + 0)]$$

вариация потенциальной энергии пластинки, дополненная М. Я. Кушелем, внеинтегральными членами [1].

Из уравнения Лагранжа

$$\delta V = \iint q \delta w dx dy - \int G_v \frac{\partial \delta w}{\partial v} ds + \int \left(N_v - \frac{\partial G_{vt}}{\partial s} \right) \delta w ds + \sum_j P_j \delta w_j,$$

где G_v — изгибающий момент; G_{vt} — крутящий момент, N_v — поперечное усилие, распределенное вдоль свободной части контура пластинки; P_j — сосредоточенные силы в угловых точках; после подстановки выражения потенциальной энергии пластинки, дополненного внеинтегральными членами и после уточнения имеющихся нагрузок (отсутствии G_v, G_{vt}, N_v и P_j) получим необходимое вариационное уравнение для функций $w(x, y)$ в виде

$$\iint (D \nabla^2 \nabla^2 w - q) \delta w dx dy - \int M_v \frac{\partial \delta w}{\partial v} ds + \int V_v \delta w ds + \sum_j [M_{vt}(s_j - 0) - M_{vt}(s_j + 0)] \delta w_j = 0.$$

Из этого уравнения имеем $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$; вдоль зашцеиленной стороны

$$\text{при } x = 0 \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Частное решение уравнения, удовлетворяющее геометрическим условиям, обозначим через w_0 и определим w в виде $w = w_0 + w_1$, где

$$w_0 = \frac{q}{24D} (x^4 - 4x^3 l + 6x^2 l^2).$$

Вариационное уравнение для функций $w_1(x, y)$ преобразуется в

$$\iint D \nabla^2 \nabla^2 w_1 \delta w_1 dx dy - \int (M'_v + M_v^0) \frac{\partial \delta w_1}{\partial v} ds + \int (V'_v + V_v^0) \delta w_1 ds + \sum_j [M'_{vt}(s_j - 0) + M_{vt}^0(s_j - 0) - M'_{vt}(s_j + 0) - M_{vt}^0(s_j + 0)] \delta w_{1j} = 0, \quad (1)$$

где δw_{1j} — значение вариации $w_1(x, y)$ в угловых точках B и D . $M'_v, M_{vt}, V'_v, M_v^0, M_{vt}^0, V_v^0$ выражаются аналогично M_v, M_{vt} и V_v только через функции $w_1(x, y)$ и $w_0(x, y)$:

$$\begin{aligned} M_v &= -D \mu \nabla^2 w - D(1 - \mu) \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\ V_v &= -D \left\{ \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \sin \alpha \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{1} \sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$M_{vt}(s_j - 0) - M_{vt}(s_j + 0) = D(1 - \mu) \sin \beta_j \left[2 \sin(2\alpha_j + \beta_j) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \cos(2\alpha_j + \beta_j) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right],$$

здесь μ — коэффициент Пуассона,

D — жесткость пластинки при изгибе,

Из уравнения (1) следует, что функция $w_1(x, y)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^2 \nabla^2 w_1(x, y) = 0$. С учетом последнего уравнения (1) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \int \left(-M_v' + V_v' \delta w_1 \right) ds + \sum_j [M_{vt}'(s_j - 0) - M_{vt}'(s_j + 0)] \delta w_{1j} + \\ & + \int \left(-M_v^0 + V_v^0 \delta w_1 \right) ds + \\ & + \sum_j [M_{vt}^0(s_j - 0) - M_{vt}^0(s_j + 0)] \delta w_{1j} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая задачу методом Ритца, приближенное выражение для функции прогибов берем в виде $w = \sum_{i=1}^{i=n} (a_i L_i + b_i T_i)$,

где L_i и T_i — полиномы, выведенные М. Я. Кушулем. Как показано М. Я. Кушулем, в случае пластин, очерченных контуром, симметричным относительно оси x (коэффициенты $x_1 = 0$), $w_1 = \sum_{i=1}^{i=1} a_i L_i$. Достаточную точность решения обеспечивает $n = 6$:

$$\begin{aligned} L_1 &= x^2; \quad L_3 = x^2 y^2 - \frac{1}{3} x^2; \quad L_5 = x^2 y^4 - 2x^4 y^2 + \frac{1}{5} x^6; \\ L_2 &= x^3; \quad L_4 = x^3 y^2 - \frac{1}{5} x^5; \quad L_6 = x^3 y^4 - \frac{6}{5} x^5 y^2 + \frac{3}{35} x^7. \end{aligned}$$

Произведя некоторые преобразования в уравнении (2), получим систему уравнений для трапецевидной пластинки:

$$\begin{aligned} & \sum_1^6 a_i \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^l \left(-M_{vi}' \frac{\partial L_k}{\partial v} + V_{vi}' \right) dx + \int_{-b}^0 \left(-M_{vi}' \frac{\partial L_k}{\partial v} + V_{vi}' L_k \right) dy + \right. \\ & + [M_{vti}'(s_B - 0) - M_{vti}'(s_B + 0)] L_{k(x-1)} \Big\} + \\ & + \frac{1}{\cos \varphi} \int_0^l \left(-M_v^0 \frac{\partial L_k}{\partial v} + V_v^0 L_k \right) dx + \int_{-b}^0 \left(-M_v^{01} \frac{\partial L_k}{\partial v} + V_v^{01} L_k \right) dy + \\ & + [M_{vt}^0(s_B - 0) - M_{vt}^0(s_B + 0)] L_{k(x-1)} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} M_{vt}' &= -D \left[\mu \Delta^2 C_1 + (1 - \mu) \left(\sin^2 \varphi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \sin 2\varphi \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right) \right] \gamma \\ V_{vi}' &= -D \left\{ \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_1 - \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w_1 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (1 - \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin \varphi \right) \left[-\cos 2\varphi \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \right] \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [M_{vti}'(s_B - 0) - M_{vti}'(s_B + 0)] = - \\ & - D(1 - \mu) \cos 2\varphi \left[2 \cos \varphi \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + \sin \varphi \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$M_v^0 = -q(\mu \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \left(\frac{1}{2} x^2 - xl + \frac{1}{2} l^2 \right);$$

$$V_v^0 = -q \sin \varphi (x - l) (\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi - \mu \cos^2 \varphi);$$

$$M_{vt}^0(s_B - 0) - M_{vt}^0(s_B + 0) = \frac{q}{4} (1 - \mu) \sin 2\varphi (x^2 - 2xl + l^2);$$

$$M_{vi}'' = -D \left(\mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right); \quad V_{vi}'' = -D \left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} - \mu \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} \right);$$

$$M_v^{01} = -\frac{q}{2} (x^2 - 2xl + l^2); \quad V_v^{01} = -q(x - l);$$

$M_{vi}', M_{vti}', V_{vi}'$ — изгибающие, крутящие моменты и приведенные поперечные усилия вдоль стороны контура AB ;

$M_{vi}'', M_{vti}'', V_{vi}''$ — изгибающие, крутящие моменты и приведенные поперечные усилия вдоль стороны контура BC , соответствующие полиномам L_i .

Подставляя в систему уравнений (3) значения $M_{vi}', V_{vi}', [M_{vti}'(s_B - 0) - M_{vti}'(s_B + 0)]$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и произведя соответствующие операции, получим систему из шести неоднородных линейных уравнений относительно неизвестных $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ (вследствие полиграфических трудностей система не приводится). Система имеет общий вид для задач данного типа. Придавая параметрам μ, φ, l, b, D необходимые значения, можно найти в каждом конкретном случае $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и составить функцию прогибов w_1 . Так как $w = w_0 + w_1$, получим

$$\begin{aligned} w(x, y) &= a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 \left(x^2 y^2 - \frac{1}{3} x^4 \right) + a_4 \left(x^3 y^2 - \frac{1}{5} x^5 \right) + \\ & + a_5 \left(x^2 y^4 - 2x^4 y^2 + \frac{1}{5} x^6 \right) + a_6 \left(x^3 y^4 - \frac{6}{5} x^5 y^2 + \frac{3}{35} x^7 \right) + \\ & + \frac{q}{24D} (x^4 - 4x^3 l + 6x^2 l^2). \end{aligned}$$

Определив $w(x, y)$, можно вычислить изгибающие моменты M_x, M_y , крутящие моменты M_{xy} и поперечные силы Q_x, Q_y в произвольном сечении пластинки. Для пластинки данного вида, когда вместо равномерно распределенной нагрузки приложены сосредоточенные силы P в вершинах свободных углов, в системе уравнений для определения $a_{1,2,3,4,5,6}$ свободные члены соответственно будут заменены:

$$-Pl^2; \quad -Pl^3; \quad -\frac{1}{3} P(3l^2 b^2 - l^4); \quad -\frac{1}{5} P(5l^3 b^2 - l^5);$$

$$-\frac{1}{5} P(5l^2 b^4 - 10l^4 b^2 + l^6); \quad -\frac{1}{35} P(35l^3 b^4 - 42l^5 b^2 + 3l^7).$$

В качестве примера рассмотрим изгиб пластинки, имеющей форму квадрата, защемленного по одной из сторон и шарнирно опертого в вершинах свободных углов. Пластика нагружена равномерно нагрузкой q . Вылет консоли пластинки $-l$; $\mu = 0,3$; $b = \frac{1}{2}l$.

Составим решение задачи из следующих частей.

1. Определим перемещение вершин углов пластинки, если бы пластинка была консольной, при той же нагрузке. Обозначим прогиб такой пластинки через $w^q = w_0 + w_1$, где $w_1 = \sum_{i=1}^6 a_i L_i$, $w_0 = \frac{q}{24D} (x^4 - 4x^3l + 6x^2l^2)$. Подставляя значения $\mu = 0,3$, $\varphi = 0^\circ$ в систему линейных неоднородных уравнений, выведенную выше, и решив ее относительно $a_{1,2,3,4,5,6}$, получим

$$a_1 = 0,00498 \frac{ql^2}{D}; \quad a_2 = -0,01215 \frac{ql}{D}; \quad a_3 = -0,04416 \frac{q}{D};$$

$$a_4 = -0,00883 \frac{q}{Dl}; \quad a_5 = -0,06874 \frac{q}{Dl^2}; \quad a_6 = -0,07845 \frac{q}{Dl^3};$$

при $x = l$, $y = \pm b$

$$L_1 = l^2; \quad L_2 = l^3; \quad L_3 = -\frac{1}{12}l^4; \quad L_4 = \frac{1}{20}l^5; \quad L_5 = -\frac{19}{80}l^6;$$

$$L_6 = -\frac{17}{112}l^7;$$

$$w_1 = 0,0004866 \frac{ql^4}{D}; \quad w_0 = 0,125 \frac{ql^4}{D};$$

$$w^2(l, \pm b) = 0,1254866 \frac{ql^4}{D}.$$

2. Определим перемещение вершины свободного угла пластинки, если к вершинам углов были бы приложены сосредоточенные силы $-P$ (пластинка консольна, q отсутствует, $\mu = 0,3$, $\varphi = 0^\circ$, $b = \frac{1}{2}l$, вылет консоли l). Как было указано выше, при условии замены равномерно распределенной нагрузки сосредоточенными силами на вершинах свободных углов достаточно в системе уравнений произвести замену свободных членов. Решив систему относительно неизвестных, получим:

$$a'_1 = -0,9941 \frac{P}{D}; \quad a'_2 = 0,32357 \frac{P}{Dl}; \quad a'_3 = -0,23724 \frac{P}{Dl^2};$$

$$a'_4 = 0,84742 \frac{P}{Dl^3}; \quad a'_5 = 0,87339 \frac{P}{Dl^4}; \quad a'_6 = -0,74354 \frac{P}{Dl^5};$$

$$\text{при } x = l, y = \pm b \quad w^{-P} = -0,7029604 \frac{Pl^2}{D}.$$

3. Вернемся к исходному условию задачи, при котором перемещение вершин свободных углов пластинки равно нулю. Используя идею известного в строительной механике метода сил, можно записать (в угловых точках):

$$w^q + X_1 w^{-P} = 0,$$

$$X_1 = -\frac{w^q}{w^{-P}} = 0,17851 ql^2.$$

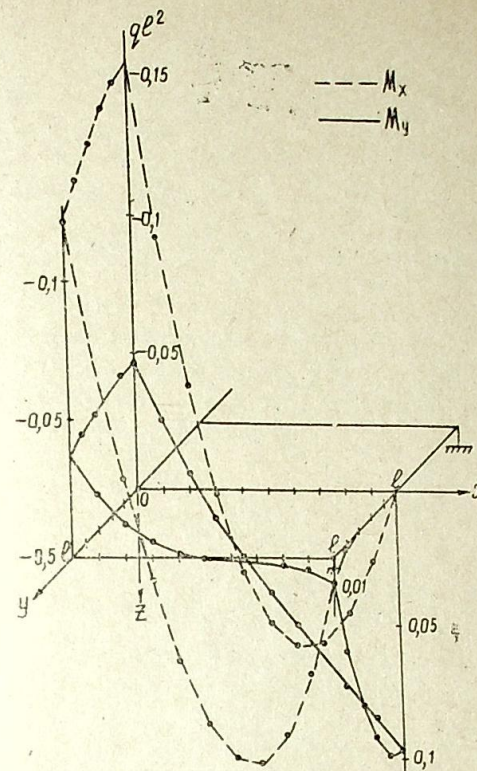


Рис. 2.

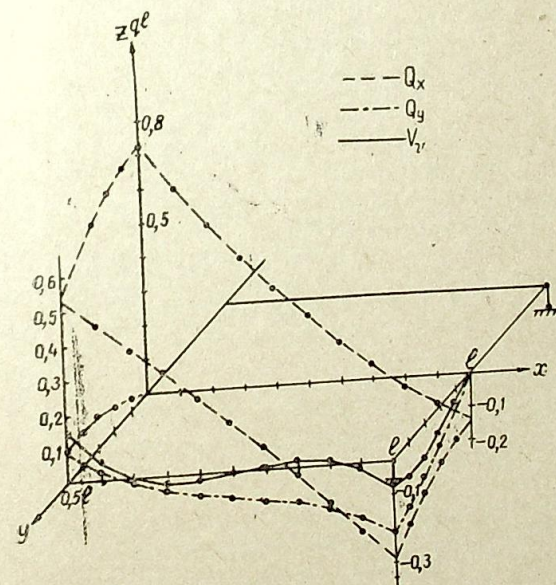


Рис. 3.

Отсюда следует, что

или

где

$$\begin{aligned} \omega &= X_1 \omega^{-p} + \omega^q \\ \omega &= \sum_{i=1}^6 A_i L_i + \omega_0, \\ A_1 &= X_1 a_1' + a_1; \\ A_1 &= -0,17248 \frac{ql^2}{D}; \quad A_2 = 0,04561 \frac{ql}{D}; \quad A_3 = -0,08651 \frac{q}{D}; \\ A_4 &= 0,14244 \frac{q}{Dl}; \quad A_5 = 0,08717 \frac{q}{Dl^2}; \quad A_6 = 0,05428 \frac{q}{Dl^3}. \end{aligned}$$

Определим M_x, M_y, Q_x, Q_y для сечений $x=0$ и $y=0$ и $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, V_y$ по контуру. Построим соответствующие эпюры (рис. 2, 3). M_x и V_y по условию на контуре должны быть равными нулю. Полученное отклонение (вследствие приближенности решения) составляет 2—2,5% от соответствующих расчетных величин, что приемлемо для задач подобного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кушкуль М. Я. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 10.
2. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. ГИЗ, 1943.
3. Тимошенко С. Л. и Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки М., 1963.

МҮНДЭРИЧАТ

- А. С. Чэфэров. Сферик кэсилмээлик модулу вэ сфера үзэриндэ тэјин олунмуш функцијанын сферик чэмлэр васитэсилэ эн јахшы јахынлашмасы 3
- Э. С. Чэфэров, А. С. Чэфэров. Ваһид сфера үзэриндэ кэсилмэјэн функцијаларын хэтти интеграл операторлар аилэси васитэсилэ јахынлашдырылмасынын тэртиби һаггында 10
- В. М. Шаһвердијев, С. Н. Бернштејнин үмүмиләшмиш полиномларын-дан бир нөвүнүн вэ онларын төрәмэлэринин монотонлуғу барэдэ 16
- М. А. Асланов. Сонлу дифференциал тәһликләр системинин доғурдуғу өз-өзүнә гошма олмајан оператор үчүн тәрс мәсәлә 22
- К. С. Һагвердијев, А. К. Никитин. Өзлү газын даирәви узун бору-да гејри-изометрик һәрәкәти 29
- Ж. И. Таһирова. Ахма нәзәријәси әсасында гејри-мүнтәзәм гыздырма һалында дәјишән јүкләнмә теорем 34
- Н. Һ. Ағајев. Лаја олан истилик тәсиринин бәзи мәсәләлэри 39
- З. Ә. Әлијева. Чохөлчүлү гејри-хәтти һаммерштејн типли интеграл тәһлијин H_2^3 синфиндэ тәгриби һәлли һаггында 43
- Т. Г. Һејдәров. Сонлу сечмәјә көрә тәсәдүфи хәтти асылы олан арды-чыллыг дисперсијасы гижмәтинин пајланмасы гауунунун асимптотик әјрылышы 48
- Ә. М. Әһмәдов. Спектрал параметрдән расионал-асылы олан операторларын мәхсуси вэ гошма элементлэри системинин тамлыгы һаггында 53
- М. Һ. Шаһтахтински, Ә. А. Гулијев, Х. Давжанов, В. И. Таһиров. Теллурда һолл әмсалынын јүксәк температур областына тә-вафуг едән ишарә дәјишмәси һаггында 60
- З. З. Маһмудов. Јүклү зәррәчикләр дәстәсинин спин далғалары илә гар-нылыгылы тәсиринин квазихәтти нәзәријәсинә даир 64
- Ч. О. Гачар, А. Ә. Аббасов, Л. М. Иманов. Етилмеркаптан моле-кулунун микродалғадакы спектринин тәдгиги 71
- М. Ә. Талиби, Е. Һ. Мәммәдов, Т. М. Вердијева. Дүзләнмә иша-рәси дәјишкән олан селен элементлэри 78
- И. К. Кәримов, А. М. Мусајев, М. Ш. Мәммәдов, Ф. Ј. Әли-јев. Ашағы температурда биртәрәfli тәзигин $Li_{0.03} Mn_{0.97} Se$ -нин електрик-кечирмәсинә тәсир 81
- Һ. А. Мухтаров, Р. Һ. Мухтаров. Дөнмә изомерли молекуллардакы дахили фырланма һаггында 85
- Н. Ә. Әлијев, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. А. Әһмәдов, М. М. Мусазадә. 36Г2С маркалы поладын истиликкечирмәсинин тәдгиги 90
- З. Ф. Сејидов. Фазакечидли сыхылмаз маддәдән ибарәт көј чисимләри 93
- Ч. М. Чуварлы, Ә. М. Мурадов. Ачарларда бәрпа олунан кәркин-лијин һесаблинамасына Z -модерләшдирилмиш чеврилмәсинин тәтбиги 99
- З. Һ. Кәримов, М. Г. Копејкис. Јүкләнмиш чубугун еластик-пластик рәгси һаггында 105
- Х. Б. Көзәлов, А. В. Иванова, Н. В. Рабинкина. Хартри-Фок үсулу илә натриум атомунун һәјәчанланмиш сәвијәлэринин һесаблинамасы, II 111
- Н. Һ. Иванов, Ј. М. Јаковлев, А. Ә. Әлијев. Динамик јүкләндир-мә гурғусунун јол кејимләри конструктив лајларынын еластиклик модуларынын тәјин едилмәсиндә тәтбиги 115
- Т. К. Исмајылов, А. М. Пашајев. Јелпичвары анод-тор характери-стикалы триод кенераторларында енеркетик һалын һесаблинамасы 121
- М. Б. Мәммәдов. Сыфырда мәхсусијәти олан оператор әмсалы Штурм-Ливуилл мәсәләсинин һәллине көрә әјрылыш 127
- З. И. Әлизадә, Т. Һ. Мәһәррәмов. Никелин термомагнит хәссәсинә ксчид элементләриндән ванадинин, ниобинин вэ танталын тәсир 132
- Н. А. Мәммәдов. Консоллу трапесијајабәнзәр пластинлэрин әјилмәсинә даир 136

СОДЕРЖАНИЕ

Ариф С. Джафаров. Сферический модуль непрерывности и наилучшее приближение функций на сфере посредством сферических сумм	3
А. С. Джафаров, Ариф С. Джафаров. О порядке приближения непрерывных на единичной сфере функций посредством семейства линейных интегральных операторов	10
В. М. Шахвердиев. Об условиях монотонности одного вида обобщенных полиномов типа С. Н. Бернштейна и их производных	16
М. А. Асланов. Обратная задача для несамосопряженного оператора, порожденного конечной системой уравнений	22
К. С. Ахвердиев, А. К. Никитин. Неизотермическое движение вязкого газа в длинной круглой трубе	29
Ж. И. Таирова. Теорема о переменных нагружениях в рамках теории течения при неравномерном нагреве	34
Н. Г. Агаев. Некоторые вопросы термического воздействия на пласт	39
З. А. Адиева. О приближенном решении многомерных нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна в классе H^2_s	43
Т. Г. Гейдаров. Асимптотические разложения закона распределения оценки дисперсии случайной коррелированной последовательности по конечной выборке	48
А. М. Ахмедов. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, рационально зависящих от спектрального параметра	53
М. Г. Шахтактинский, А. А. Кулиев, Х. Давжанов, В. И. Тагиров. К вопросу высокотемпературной инверсии знака коэффициента Холла в теллуре	60
З. З. Махмудов. Квазилинейная теория взаимодействия пучка заряженных частиц со спиновыми волнами	64
Ч. О. Каджар, А. А. Аббасов, Л. М. Иманов. Исследование микроволнового спектра молекулы этилмеркаптана	71
М. А. Талиби, Э. Г. Мамедов, Т. М. Вердиева. Селеновые элементы с инверсией знака выпрямления	78
И. Г. Керимов, А. Г. Мусаев, А. Г. Рустамов, М. Ш. Мамедов, Ф. Ю. Алиев. Влияние одностороннего сжатия на электропроводность $Li_{0.03}Mn_{0.97}Se$ при низких температурах	81
И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров. О внутреннем вращении в молекулах с поворотной изомерией	85
Н. А. Алиев, Ф. Г. Магеррамова, Б. А. Ахмедов, М. М. Мустазаде. Исследование теплопроводности стали марки 36Г2С	90
З. Ф. Сеидов. Политропы с фазовым переходом, I несжимаемая жидкость	93
Ч. М. Джуварлы, А. М. Мурадов. Применение модифицированного Z-преобразования для исследования восстанавливающихся напряжений на контактах выключателей	99
З. Г. Керимов, М. Г. Копейкис. Об упруго-пластических колебаниях стержня	105
Х. Б. Гезалов, А. В. Иванова, Н. В. Рабинькина. Расчет возбужденных состояний атома натрия методом Хартри — Фока, II	111
Н. Н. Иванов, Ю. М. Яковлев, А. А. Алиев. Применение установки динамического нагружения для определения модулей упругости конструктивных слоев нежестких дорожных одежд	115
Т. К. Исмаилов, А. М. Пашаев. Расчет энергетического режима лампового триодного генератора с веерообразным видом статических анодно-сеточных характеристик	121
М. Б. Мамедов. Разложение по собственным функциям операторного уравнения Штурма — Лиувилля с особенностями в нуле	127
З. И. Али-Заде, Т. Г. Магаррамов. Исследование влияния концентрации переходных элементов ванадия, ниобия и тантала на термоманнитные свойства никеля	132
Н. А. Мамедов. Об изгибе консольных трапецевидных пластин	136