

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

4

1968

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

УДК 538. 22

И. Г. КЕРИМОВ, Т. А. МАМЕДОВ, Н. Г. АЛИЕВ

МАГНИТНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ СОЕДИНЕНИЙ MnSe И MnS В ОБЛАСТИ МАГНИТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Как известно магнитная восприимчивость типичных антиферро-магнитных полупроводников уменьшается с понижением температуры ниже точки Нееля. Кроме того, для большинства этих веществ температурная зависимость восприимчивости является обратимой. Однако при исследовании некоторых полупроводников наблюдается температурный гистерезис восприимчивости около температуры магнитного превращения. Поэтому представляет интерес исследование магнитной восприимчивости полупроводников MnSe и MnS в области фазового перехода при разных значениях магнитного поля, проверка существования теплового гистерезиса и зависимости χ от магнитного поля на собранной нами специальной установке. Помимо этого, определяются также значение температуры Нееля T_N и асимптотическая точка Кюри θ для указанных соединений. На основе этих данных в исследуемом интервале 78—300°K можно оценить постоянную Кюри C_M и эффективное число магнетонов Бора $P_{эф}$.

Экспериментальная часть

Для измерения магнитной восприимчивости был применен метод Фарадея, основанный на измерении силы, действующей на малый образец, помещенный в неоднородное поле. Для этого была собрана установка, позволявшая вести измерения в интервале 4,2—300°K (рис. 1). Образец 1 подвешивали на тонкой кварцевой палочке 3 к одному концу коромысла 4 весов, служивших для измерения силы, действующей на образец. Коромысло имело длину плеча 3 см, крепилось на растяжках из бронзовой ленты 5 толщиной 30 м и шириной 0,6 мм. Гайки 6 и 7 служили для регулирования центра тяжести и уравнивания весов в отсутствие поля. Весы вместе с подвешенным образцом были заключены в герметическую систему, состоящую из колпака 8 и мельхиоровых трубок 9 и 10. Нижняя часть трубок 9 и 10 была съемной (на шлифе), а трубка 9 имела на конце медный стакан 11, на который была намотана нагревательная обмотка и медный провод диаметром 0,03 мм, служащие термометром сопротивления. Действующая на образец сила уравнивалась с помощью фотокомпенсационного метода. Вся эта система погружалась в сосуд Дьюара. Используя нагреватель, можно было получить промежуточные температуры. В рубашке во время измерения поддерживалось давле-

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Г. А. Абдуллаев (редактор), З. И. Халилов (зам. редактора), Р. А. Аббасов (отв. секретарь), Г. Н. Агаев, Б. А. Азимов, А. И. Гусейнов, Н. А. Гулиев, М. А. Джавадов, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Ю. М. Сеидов, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде.

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“

Сдано в набор 15/IV 1968 г. Подписано к печати 26/IX 1968 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист 6,00. Печ. лист 16,44. Уч.-изд. лист 15,0. ФГ 09382. Заказ 163. Тираж 690. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров Азербайджанской ССР. Баку, Ази Асланова, 80.

1751435

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Иранийской ССР

ние 10^{-3} мм рт. ст. Градуировка весов производилась с помощью эталонного вещества MnF_2 , любезно представленного нам Н. М. Крейнс. Термометр градуировался при помощи эталонного платинового термометра сопротивления.

Для получения магнитного поля был собран электромагнит, позволяющий получить 50 000 э при зазоре между наконечниками ~ 10 мм. Несмотря на то, что он имеет только воздушное охлаждение, при длительной работе нагревается незначительно. Электромагнит может двигаться вокруг вертикальной оси и снабжен нониусом для установления направления магнитного поля под нужным углом.

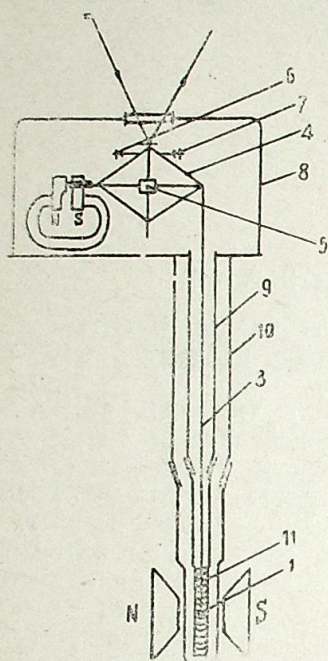


Рис. 1. Установка для измерения магнитной восприимчивости

Для получения образцов $MnSe$ и MnS использовался электролитический марганец, который подвергался дегазации при $900^\circ C$ под постоянной откачкой до давления 10^{-3} мм рт. ст. в течение 15 часов. После удаления окисной пленки Mn превращали в порошок и смешивали с порошками Se и S чистоты 99,9999, в очередности согласно стехиометрии. Полученными смесями $Mn-Se$ и $Mn-S$ заполнялись кварцевые ампулы длиной 12 см и диаметром 10 мм на $1/4$ их длины. Ампулы откачивали до 10^{-5} мм рт. ст. и запаивали, а затем в горизонтальном положении помещали в печь, где постепенно достигалась температура до $1000^\circ C$, ампулы оставались здесь в течение 20 часов. Происходящая при этом экзотермическая реакция дала возможность получить образцы в виде плотных слитков. Полученный порошок из слитка MnS имел темно-зеленый, а из слитка $MnSe$ — темно-коричневый цвет, свойственный соединениям MnS и $MnSe$. По рентгенографическим данным эти соединения имеют кристаллическую структуру типа $NaCl$ с параметрами решетки $a=5,46 \text{ \AA}$ ($MnSe$) и $a=5,22 \text{ \AA}$ (MnS), которые соответствуют литературным данным [1].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 и 3 представлены полученные нами кривые для температурной зависимости χ при разных значениях магнитного поля: от 5000 до 25 000 э для $MnSe$ и от 10 000 до 25 000 э для MnS . Как видно из рис. 2, для $MnSe$ наблюдается значительная зависимость восприимчивости от внешнего магнитного поля. С увеличением H магнитная восприимчивость уменьшается, причем в полях выше 15000 э такая зависимость становится менее заметной. Максимум восприимчивости при всех значениях внешнего поля достигается около $147^\circ K$, которую можно принять за температуру превращения антиферромагнетизм-парамагнетизм.

Из работы [2] следует, что кривые магнитной восприимчивости полученные в разных полях, смещаются друг от друга почти на одну и ту же величину по всему температурному интервалу. Однако из рис. 2 видно, что такая зависимость становится заметной только около $90^\circ K$ и с приближением к области превращения антиферромагнетизм-парамагнетизм начинает значительно увеличиваться и достигает максимума

около точки Нееля. Затем с возрастанием температуры выше T_N зависимость χ от H начинает убывать. В отличие от $MnSe$, для соединения MnS мы не обнаружили зависимости восприимчивости от магнитного поля, и температурный ход в интервале $78-310^\circ K$ имеет

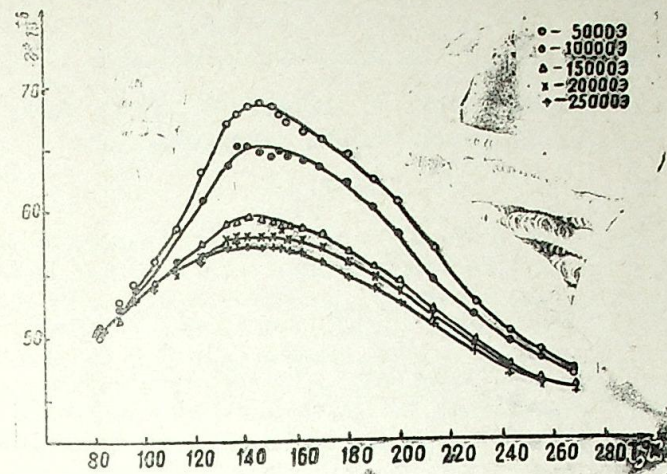


Рис. 2. Магнитная восприимчивость $MnSe$

обычный вид, характерный для типичных антиферромагнетиков (рис. 3). Максимум восприимчивости для MnS наблюдается при $T_N=158^\circ K$. Из экстраполяции обратной восприимчивости выше температуры пере-

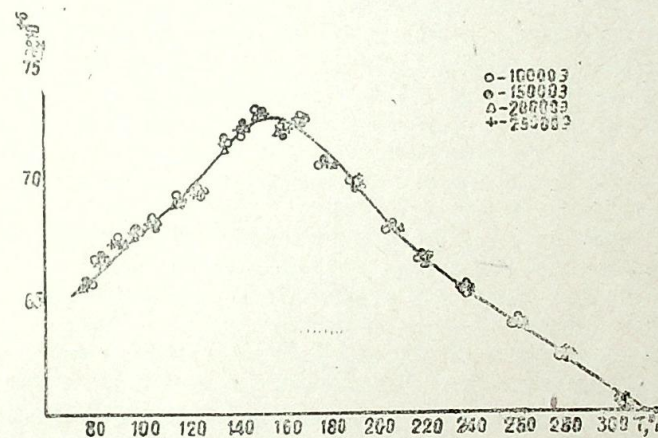


Рис. 3. Магнитная восприимчивость MnS

да для асимптотической точки Кюри найдено значение $\theta=516^\circ K$. На основе этих данных для постоянной Кюри и эффективного числа магнетонов Бора получены, соответственно: $S_m=4,31$ и $R\theta\beta=5,44$.

Ввиду вышеуказанных аномалий для $MnSe$ не удалось определить этих параметров, кроме температуры превращения T_N . Интересно отметить, что значения точек Нееля для соединений $MnSe$ и MnS близки по величине к данным, определенным из электрических измерений, произведенных в нашей лаборатории [3]. С целью наиболее полного понимания причин аномалий, наблюдаемых для восприимчивости $MnSe$, в настоящее время ведутся дополнительные исследования некоторых других параметров этого соединения.

1. Hansen. Metallurgy and metal. Eng. Ser. 1960.
2. Lindsay R. Phys. rev. 84, 569, 1961.
3. Керимов И. Г., Рустамов А. Г., Валиев Л. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1967, №1.

И. К. Керимов, Т. А. Маммедов, Н. Н. Алиев

Магнит чеврилмэлэри этрафында $MnSe$ вэ MnS бирлэшмэлэринин магнит гаврајычылыгы

ХУЛАСӘ

Фарадеј методу илә $MnSe$ вэ MnS бирлэшмэлэринин $78-300^{\circ}K$ температур интервалында вэ магнит саһәсинин 5000-дән 25000 ерстедә гәдәр гижмәтләриндә магнит гаврајычылыгы өјрәнилмишдир. $MnSe$ бирлэшмәси үчүн магнит гаврајычылыгынын харичи саһәдән нәзәрә чарпачаг дәрәчәдә асылы олдуғу мүәјјән едилдији һалда, MnS бирлэшмәсиндән өтрү белә асылылыг мүшаһидә олунмамышдыр. Мүәјјән едилмишдир ки, $MnSe$ вэ MnS үчүн Неел нөгтәсинин гижмәти ујғун олараг 147 вэ $158^{\circ}K$ -дыр. Алынмыш нәтичәләрә әсасән Күри сабитинин, ассимптотик Күри температурунун гижмәтләри вэ Бор магнитонларынын ефектив сајы һесбланмышдыр.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 4

Х. И. МАМЕДОВ, И. К. НАСИБОВ, Э. Н. НИЯЗОВА

ДВЕ ФОСФОРЕСЦЕНЦИИ С РАЗНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ α -ГАЛОГЕНЗАМЕЩЕННЫХ НАФТАЛИНОВ В ПАРАФИНАХ ПРИ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

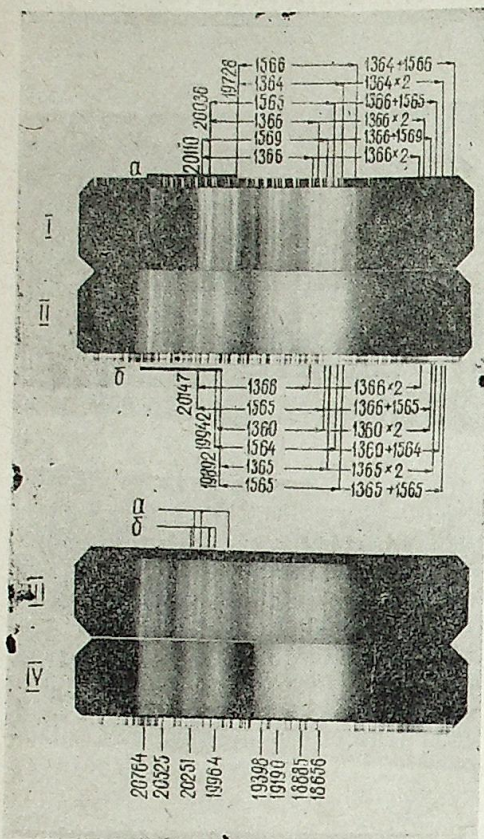
Эффект сокращения длительности возбужденного состояния с увеличением атомного номера галоида в моногалогензамещенных нафталинах исследовался в работе [1] и связывается с усилением спинорбитального взаимодействия. Кроме того, исследование влияния тяжелого атома на поляризацию спектра фосфоресценции галогензамещенных нафталинов [2] показало, что в спектрах проявляются две последовательности с различными поляризациями.

Нами исследовалось влияние увеличения атомного номера галоида на спектры фосфоресценции α -галогензамещенных нафталинов в парафинах при $55^{\circ}K$. В настоящем сообщении рассматриваются спектральные последовательности α -галогензамещенных нафталинов и связанные с ними длительности фосфоресценции.

Способ получения спектров фосфоресценции несколько отличается от наших прежних работ [3]. Здесь применена простая установка, позволяющая получить спектры фосфоресценции с длительностями от $\sim 0,01$ до 30 сек. Это приспособление вмонтировано непосредственно в металлический криостат. Согласованная с медленными движениями мотора одна шгора, подобно двум затворам, поочередно открывает сперва окно криостата для возбуждения, а затем, спустя не более $\sim 0,05$ сек, второе окно — для наблюдения послесвечения. При необходимости легко регулируется время для возбуждения, а также время между процессами возбуждения и наблюдения. Исследование спектров фосфоресценции с более коротким временем жизни проводилось без фосфороскопа, с возбуждением через фильтр, или же располагая перед окнами криостата однодисковый фосфороскоп (с максимальной скоростью 3000 об/мин.), при необходимости его обороты меняли.

Форма спектра фосфоресценции α -фторнафталина сходна с нафталином в матрице нормальных парафинов при низкой температуре. С увеличением атомного веса заместителя эта нафталиновая форма спектра сильно изменяется и колебательная структура осложняется, особенно сильно для α -бромнафталина. При регулировке времени между окончанием возбуждения и началом наблюдения свечения для некоторых α -галогензамещенных нафталинов наблюдались изменения в колебательной структуре фосфоресценции. Это явление особенно ярко наблюдается в случае α -хлорнафталина и α -бромнафталина в парафинах при $55^{\circ}K$.

На рисунке представлены спектры α -бромнафталина в гексане при различных режимах работы фосфороскопа. Отмеченные полосы (рис. а) и связанные с ними другие полосы, с расстояниями полносимметричных колебаний (1368 и 1568 см^{-1}), в спектре фосфоресценции проявляются наиболее интенсивно и обладают одинаковым временем жизни (τ_1). В силу кратковременности свечения эти полосы проявляются при возбуждении через фильтр и при очень больших оборотах фосфороскопа. При средних оборотах фосфороскопа в спектре фосфоресценции хорошо проявляются другие интенсивные полосы (рис. б) с τ_2 ($\tau_2 > \tau_1$) и связанные с ними полосы с частотами полносимметричных колебаний. Однако, как видно из рисунка (I и II), кроме проявленных двух последовательностей полос в различных режимах фосфороскопа, в начале обоих спектров проявляются также другие полосы, обладающие несколько различным соотношением интенсивностей. Время жизни их, по-видимому, отличается от τ_1 и τ_2 .



Спектры фосфоресценции α -бромнафталина в гексане при 55°K :
I—при возбуждении без фосфороскопа через фильтр 313 nm ;
II—при среднем обороте фосфороскопа;
III—при быстром обороте фосфороскопа;
IV—в изопентан + бутиловом спирте (1:4).

указанного соединения (рис. 1, IV). Это сходство и совпадение центров тяжести полос спектров III и IV (см. рис.) показывает, что и в наших условиях, так же как и в работе [2], маловероятно присутствие примеси.

Вышеприведенные экспериментальные результаты можно объяснить следующим образом. Так как действие силы поля кристалла-хозяина может принуждать молекулу галогензамещенного нафталина быть непланарной [4] и тем самым порождать своеобразный спектр с двумя последовательностями полос, с разными механизмами образования [2], то возможно, что и в наших экспериментальных условиях кристаллическое поле различных пространственных окружений—нормальных парафинов по-разному может искажать плоскостную конфигурацию активной молекулы. По-видимому, такое конфигурационное изменение в молекуле происходит вследствие перераспределения заряда в молекуле и действия массы галогенного атома, который

приводит к усилению внеплоскостных колебаний α -бромнафталина. Следовательно, в различных кристаллических окружениях матрицы неидентично искаженные по конфигурации активные молекулы обуславливают проявление последовательностей полос фосфоресценции с разными длительностями свечения.

Нами также установлено, что в согласии с работой [1], при переходе от нафталина к его α -галогензамещениям значения времени жизни, отличаясь примерно на порядок, расположены следующим образом: $\tau_{\text{нафт.}} > \tau_{\text{F-нафт.}} > \tau_{\text{Cl-нафт.}} > \tau_{\text{Br-нафт.}} > \tau_{\text{J-нафт.}}$ и относительные значения времени жизни (τ_1 и τ_2) последовательностей полос α -бромнафталина отличаются друг от друга в несколько раз и расположены также между $\tau_{\text{Cl-нафт.}}$ и $\tau_{\text{J-нафт.}}$, что является подтверждением тяжелоатомного действия. Однако механизм образования этих последовательностей в настоящее время не решен до конца. Возможно, что тщательный колебательный анализ спектров галогензамещенных нафталинов и другие измерения позволят выяснить механизм этого явления. Исследования в этом направлении продолжаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. McClure D. S. J. chem. phys., 17, 905, 1949.
2. Pavlopoulos J. and El-Sayed M. A. J. chem. phys., 41, 1082, 1964.
3. Мамедов Х. И. Изв. АН СССР, серия физич., 29, 1404, 1965.
4. El-Sayed M. A. The Materials of International Conference on Luminescence, Budapest, 1966.

Х. И. Мамедов, И. Г. Насибов, Е. Н. Ниязова

Ашагы температурда α -галлокенли нафталинлэрин H-парафинлэрдэ мұхтәлиф јашама мүддәтли ики фосфорессенсија спектри

ХҮЛАСӘ

Моногаллокенли нафталинлэрин парафиндә квазихәтти фосфорессенсија спектринә галлокенин тәсири 55°K -дә тәдгиг едилмишдир.

Мүәјјән олуңмушдур ки, α -бромнафталинин гександакы фосфорессенсијасы азы ики јашама мүддәтинә маликдир. Фосфорессенсија спектринин мұшаһидә шәраитини дәјишмәклә рәгси гурулушдакы дәјишкликләр вә ики спектрал ардычыллыг ајдын мұшаһидә едилир.

Мәгаләдә мұшаһидә олуңан мұхтәлиф јашама мүддәтли (τ_1 вә τ_2) ики спектрал ардычыллыгын изаһаты верилмишдир.

А. М. АГАЕВ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ШИРИНЫ ЗАПРЕЩЕННОЙ ЗОНЫ GaAs ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Известно, что температурная зависимость ширины запрещенной зоны E_g определяется двумя факторами. Во-первых, возрастание амплитуды тепловых колебаний с повышением температуры приводит к падению E_g . Это изменение может быть линейно по температуре, но вовсе необязательно. Во-вторых, необходимо учесть изменение межатомных расстояний благодаря тепловому расширению [1]. В зависимости от конкретного вида потенциала $V(r)$ в данном веществе это расширение может вызвать увеличение или уменьшение E_g , линейное или более высокой степени по температуре.

В настоящее время имеется достаточно работ по определению температурного коэффициента ширины запрещенной зоны в арсениде галлия $\frac{dE_g}{dT}$ (табл.). Однако все эти данные относятся к интервалу от 100°K и выше.

T°, K	эв/°K	Метод определения
100—500	5×10^{-4}	Оптическое поглощение [2]
80—300	$4,3 \times 10^{-4}$	" [3]
80—300	4×10^{-4}	Рекомбинационное излучение [4]
80—300	5×10^{-4}	Фотоэлектрический эффект [5]

В то же время в работах [4, 6] отмечалось уменьшение E_g/dT при переходе к более низким температурам. Нами значение E_g/dT определялось в интервале 4,2—300°K путем исследования температурной зависимости избыточного тока в туннельных диодах из арсенида галлия.

Известно [5, 8], что при возрастании температуры избыточный ток увеличивается. Для объяснения наблюдаемого поведения избыточного тока при изменении температуры может быть использовано соотношение

$$I_{ex} = A D(E) \exp \left\{ - \frac{d \omega l^{1/2}}{2} [E_g - eU + (\mu_p + \mu_n)] \right\} \quad (1).$$

* Обозначения те же, что в работе [8].

Зависимость избыточного тока от температуры должна быть связана главным образом с изменением от температуры ширины запрещенной зоны. С повышением температуры E_g уменьшается, что вызывает увеличение вероятности туннельного просачивания, т. е. приводит к возрастанию туннельного тока.

Если в выражении для избыточного тока (1) пренебречь температурной зависимостью эффективной массы [9], которая входит в коэффициент α , и считать, что в ограниченном интервале температур $E_g(T)$ может быть записана в виде

$$E_g(T) = E_g(0) - \frac{dE_g}{dT} T, \quad (2)$$

то выражение (1) можно представить следующим образом:

$$I_{ex} = A D(E) \exp \left\{ - \frac{\alpha \omega l^{1/2}}{2} [E_g(0) - \beta_g T - eU + \mu_n + \mu_p] \right\}, \quad (3).$$

где (3) будет выражать простую температурную зависимость I_{ex} пропорциональную $\exp(\alpha \beta_g T)$, где $\beta_g = \frac{dE_g}{dT}$.

Теперь нетрудно убедиться, что при фиксированной величине напряжения на $p-n$ -переходе зависимость (3) в координатах $\lg I_{ex} - T$ будет представлять прямую линию, из наклона которой можно определить $\frac{dE_g}{dT}$. Исходные кристаллы арсенида галлия были легированы

цинком до концентраций $(4 \div 5) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. $p-n$ -переход создавался выплавлением чистого олова.

На рисунке представлена зависимость $\lg I_{ex}$ от T для нескольких исследованных нами диодов из арсенида галлия при напряжении на диоде 0,7 в. Участок кривой $\lg I_{ex} = f(T)$ в области температур ниже 80°K не прямолинеен. Это совпадает с результатами, полученными в работе [7] с помощью оптических исследований. Однако кривизна этого участка настолько мала, что его можно аппроксимировать прямой линией, так же как и в области высоких температур. Из участков прямых, расположенных выше 80°K, нами была найдена величина $\frac{dE_g}{dT}$, равная $(3 +$

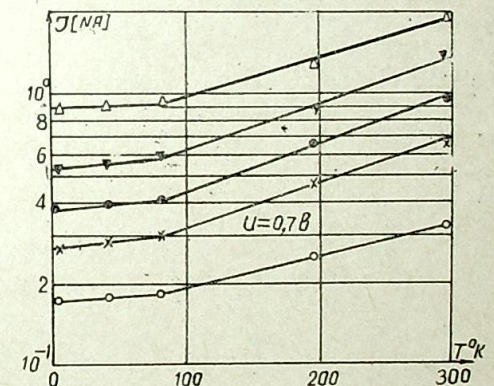


Рис.

$+ 3,7) \cdot 10^{-4} \text{ эв/°K}$, что находится в хорошем согласии с данными таблицы. Для интервала температур ниже 80°K экспериментальные данные показывают более слабую зависимость ширины запрещенной зоны от температуры, а найденные нами значения $\frac{dE_g}{dT}$ при этом составляют $(0,9 - 1,1) \cdot 10^{-4} \text{ эв/°K}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fan A. Y. Phys. rev., 78, 808, 1950.
2. Oswald F. Zs. Naturf., 10a, 927, 1955.
3. Хилсум К., Роуз-Инс А. Полупроводники A^{III} B^V. ИЛ, 1963.

4. Багаев В. С., Берозашвили Ю. И., Вул Б. М. и др. ФТТ, 6, 1399, 1964.
5. Гуткин А. А., Наследов Д. И. и др. ФТТ, 4, 2338, 1962.
6. Sturge M. D. Phys. rev., 127, 768, 1962.
7. Shibata A. Jap. J. appl. phys., 3, 711, 1964.
8. Фистуль В. И., и Агаев А. М. ФТТ, 7, 3042, 1965.
9. Cardona M. Phys. rev., 121, 752, 1961.

А. М. Агаев

Ашағы температурларда GaAs-ин гадаған олунмуш золағынын енинин температурдан асылылығы

ХҮЛАСӘ

4,2—300°K температур интервалында GaAs-ин гадаған олунмуш золағынын енинин температурдан асылылығы өрәнилмишдир.

GaAs-дән хазырланмыш тунел диодларында артыг чәрәжанын температур асылылығына әсасән мүәјјән едилмишдир ки, 80°K-дән жүксәк температурда $\frac{dE_g}{dT}$ әмсалы $(3 + 3,7) \cdot 10^{-4}$ ев/°K гәдәр, ашағы

температурларда нсә $(0,9 - 1,1) \cdot 10^{-4}$ ев/°K-јә бәрәбәрдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә рижәзијјат елмләри серијасы, 1968, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 4

УДК 538. 221

З. З. МАХМУДОВ, Р. Г. ЭЙЛАНБЕКОВ

РЕЗОНАНСНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТОКА В ФЕРРО-И АНТИФЕРРОМАГНЕТИКАХ

1. Неустойчивость тока в ферромагнитных полупроводниках, связанная с усилением спиновых волн, рассматривалась в работе [1]. При этом считалось, что проводимость полупроводника удовлетворяет неравенству $\sigma_0 \gg \omega_s/4\pi$, где ω_s — частота спиновых волн. Было показано, что, если затухание спиновых волн в основном определяется взаимодействием с носителями тока, то при скоростях дрейфа носителей v_0 , превосходящих фазовую скорость спиновой волны ω_s/k , затухание сменяется усилением (декремент затухания менял знак). В настоящей работе исследовались ферромагнетики с проводимостью $\sigma_0 \ll \omega_s/4\pi$. В этом случае оказывается возможным резонансное усиление спиновых волн, для которого не обязательно, чтобы собственное затухание спиновых волн было меньше, чем затухание, вызванное носителями тока. Инкремент нарастания спиновых волн в резонансе по порядку величины равен

$$\frac{v_0}{c} \omega_s \left(\frac{\sigma_0}{\omega_s} \right)^{1/2}.$$

Дисперсионное уравнение электромагнитных колебаний в среде с тензором магнитной проницаемости, имеющим структуру

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ \mu_{21} & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

в системе координат, в которой волновой вектор $\vec{k}$ лежит в плоскости xOz , имеет вид

$$D(\vec{k}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} G(\vec{k}, \omega) + \frac{\omega^4}{c^4 k^4} F(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (1)$$

здесь

$$D = [\epsilon_{11} \sin^2 \theta + (\epsilon_{13} + \epsilon_{31}) \sin \theta \cos \theta + \epsilon_{33} \cos^2 \theta] [\mu_{22}^{-1} \mu_3^{-1} \sin^2 \theta + (\mu_{11}^{-1} \mu_{22}^{-1} - \mu_{12}^{-1} \mu_{21}^{-1}) \cos^2 \theta],$$

$$G = \cos^2 \theta \{ \mu_{22}^{-1} (\epsilon_{32} \epsilon_{23} - \epsilon_{22} \epsilon_{33}) + \mu_{11}^{-1} (\epsilon_{13} \epsilon_{31} - \epsilon_{11} \epsilon_{33}) + \mu_{21}^{-1} (\epsilon_{23} \epsilon_{31} - \epsilon_{33} \epsilon_{21}) + \mu_{12}^{-1} (\epsilon_{13} \epsilon_{32} - \epsilon_{33} \epsilon_{12}) \} + \\ + \sin^2 \theta \{ \mu_{22}^{-1} (\epsilon_{12} \epsilon_{21} - \epsilon_{11} \epsilon_{22}) + \mu_3^{-1} (\epsilon_{13} \epsilon_{31} - \epsilon_{11} \epsilon_{33}) \} +$$

$$+ \sin \theta \cos \theta \left\{ \mu_{12}^{-1} (\epsilon_{11} \epsilon_{32} - \epsilon_{12} \epsilon_{31}) + \mu_{22}^{-1} (\epsilon_{12} \epsilon_{23} + \epsilon_{21} \epsilon_{32} - \epsilon_{22} \epsilon_{13} - \epsilon_{22} \epsilon_{31}) + \right. \\ \left. + \mu_{21}^{-1} (\epsilon_{11} \epsilon_{23} - \epsilon_{21} \epsilon_{13}) \right\},$$

$$F = \epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} + \epsilon_{12} \epsilon_{21} \epsilon_{33} + \epsilon_{13} \epsilon_{32} \epsilon_{21} - \epsilon_{11} \epsilon_{23} \epsilon_{32} - \epsilon_{22} \epsilon_{13} \epsilon_{31} - \epsilon_{33} \epsilon_{12} \epsilon_{21},$$

где θ — угол $\vec{k}$ с осью z .

Тензор диэлектрической проницаемости ϵ_{ik} равен

$$\epsilon_{ik}(\omega, \vec{k}) = \epsilon_0 \delta_{ik} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ik}(\omega, \vec{k}); \quad (2)$$

ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость ферромагнетика (антиферромагнетика), а σ_{ik} — его высокочастотная проводимость.

Будем решать уравнение (1) полагая, что проводимость мала: $\frac{4\pi\sigma}{\omega} \ll \epsilon_0$. Так как нас будут интересовать колебания, частота которых

удовлетворяет неравенству $\omega^2/c^2 k^2 \ll 1$, то, пренебрегая последним членом, уравнение (1) можно привести к виду

$$d(\vec{k}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2 k^2} g(\vec{k}, \omega) = 0, \quad (3)$$

где

$$d(\vec{k}, \omega) = \left(1 - \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \mu_{22} \right) \left[\cos^2 \theta - \frac{\mu_{11}}{\mu_3} \left(\frac{\omega^2}{c^2 k^2} \epsilon_0 - \sin^2 \theta \right) \right] + \\ + \mu_{12} \mu_{21} \epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2 k^2} \sin^2 \theta,$$

$$g(\vec{k}, \omega) = \cos^2 \theta (\mu_{12} \epsilon'_{12} + \mu_{21} \epsilon'_{21}) - \sin \theta \cos \theta (\mu_{12} \epsilon'_{32} + \mu_{21} \epsilon'_{23}) + \\ + \frac{\mu_{12} \mu_{21}}{\mu_3} \sin^2 \theta \left[\epsilon'_{11} \cos^2 \theta + \epsilon'_{33} \sin^2 \theta - (\epsilon'_{13} + \epsilon'_{31}) \sin \theta \cos \theta \right] - \mu_{11} \epsilon'_{22},$$

$$\epsilon'_{ik} = \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ik}.$$

Уравнение $d(\vec{k}, \omega) = 0$ является дисперсионным уравнением спиновых волн в отсутствие носителей тока.

2. Рассмотрим сначала усиление спиновых волн в одноосных ферромагнетиках. Тензор магнитной проницаемости в этом случае имеет вид

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & i\mu_2 & 0 \\ -i\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\mu_1 = \frac{\Omega_e (\Omega_e + 4\pi g M_0) \left(1 + \frac{\lambda^2}{g^2 M_0^2} \right) - \omega^2 - 2i \frac{\lambda}{g M_0} \omega (\Omega_e + 2\pi g M_0)}{\Omega_e^2 - \left(\omega + i \frac{\lambda}{g M_0} \Omega_e \right)^2},$$

$$\mu_2 = \frac{4\pi \omega g M_0}{\Omega_e^2 - \left(\omega + i \frac{\lambda}{g M_0} \Omega_e \right)^2},$$

$$\Omega_e = g M_0 \left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0}{M_0} \right),$$

где M_0 — магнитный момент единицы объема ферромагнетика; g — гиромагнитное отношение; α и β — константы, характеризующие обмен и анизотропию; λ — константа, связанная с собственным затуханием [2].

Внешнее магнитное поле H_0 направлено вдоль оси легчайшего намагничивания (ось z).

Тензор высокочастотной проводимости был вычислен в работе [1] в предположении, что частота удовлетворяет неравенству $\omega\tau \ll 1$, где τ — время релаксации носителей тока.

Если циклотронная частота электрона $\omega_b = \frac{e B_0}{m c}$ (B_0 — постоянная

магнитная индукция) такова, что $\omega_b \tau \ll 1$, то проводимость σ_{ik} не зависит от магнитного поля. Когда электрическое поле E_0 направлено вдоль оси z , а вектор $\vec{k}$ лежит в плоскости xoz , тензор проводимости имеет вид:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0 \left(1 - \frac{k_z v_0}{\omega} \right); \quad \sigma_{zz} = \sigma_0 \left(1 - \frac{k_z v_0}{\omega} \right)^{-1} \left(1 + \frac{k_x^2 v_0^2}{\omega^2} \right); \quad (5)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_0 \frac{k_x v_0}{\omega}; \quad \sigma_{iy} = \sigma_{yi} = 0 \quad (i \neq y),$$

где $v_0 = \frac{e E_0 \tau}{m}$ — скорость дрейфа носителей тока.

Тензор σ_{ik} в виде (5) получен при условии, что $\left(\frac{v_0}{v_T} \right)^2 \gg \omega\tau$, где v_T — тепловая скорость носителей тока.

Частота спиновых волн в ферромагнетике, без учета взаимодействия с носителями тока, легко может быть найдена из уравнения $d(\vec{k}, \omega) = 0$. Она равна

$$\omega_s^2 = \Omega_e (\Omega_e + 4\pi g M_0 \sin^2 \theta). \quad (6)$$

Собственное затухание таких волн равно

$$\gamma = \frac{\lambda}{g M_0} (\Omega_e + 2\pi g M_0 \sin^2 \theta). \quad (7)$$

Полагая скорость носителей тока таковой, что удовлетворяется условие резонанса

$$\omega_s(\vec{k}) = k_z v_0, \quad (8)$$

и считая, что

$$\omega = \omega_s + \xi,$$

получим уравнение для добавки к частоте ξ :

$$(\xi + i\gamma)\xi = -i \frac{8\pi^2 g M_0 \sigma_0}{c^2 k^2} \sin^2 \theta (\omega_s^2 + k_x^2 v_0^2) \frac{\omega_s}{\Omega_e}. \quad (9)$$

Отсюда легко найти инкремент нарастания спиновой волны:

$$\eta = \text{Im} \xi = -\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\gamma^4}{16} + 4\eta_0^4 \right)^{1/2} + \frac{\lambda^4}{4} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь η_0 — инкремент нарастания спиновой волны при собственном затухании равном нулю:

$$\eta_0 = 2\pi \frac{v_0}{c} \left(\frac{g M_0 \omega_s \sigma_0}{\Omega_e} \right)^{1/2} \cdot |\sin \theta|. \quad (11)$$

Если $\frac{\sigma_0}{\omega_s} \sim 10^{-3}$, а $\frac{v_0}{c} \sim 10^{-2}$, то $\frac{\eta_0}{\omega_s} \sim 10^{-3}$.

Пусть $\omega_b \tau \sim 1$ тогда при $\left(\frac{v_0}{v_T} \right)^2 \gg \omega\tau$ для тензора проводимости вместо (5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \left[1 + \frac{k_x + \omega_B \tau k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right] + \sigma'; \\
\sigma_{yy} &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \left[1 - \frac{k_x + \omega_B \tau k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right] + \omega_B^2 \tau^2 \sigma'; \\
\sigma_{zz} &= \sigma_0 \left[1 - \frac{k_x - \omega_B \tau k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right]; \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{zx} = \sigma_0 \frac{k_z v_0}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)}; \\
\sigma_{xy} &= \frac{\sigma_0}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \left[\omega_B \tau - \frac{k_x \omega_B \tau - k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right] - \omega_B \tau \sigma'; \\
\sigma_{yx} &= - \frac{\sigma_0}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \left[\omega_B \tau + \frac{k_x \omega_B \tau - k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right] - \omega_B \tau \sigma',
\end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\sigma' = \frac{\sigma_0}{(1 + \omega_B^2 \tau^2)^2} \frac{v_0^2}{\omega^2} \left(k_z^2 + \frac{k_x^2 + k_y^2}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \right) \left[1 - \frac{k_x - \omega_B \tau k_y}{\omega (1 + \omega_B^2 \tau^2)} v_0 \right]^{-1}.$$

Тензор (12) приведен в системе координат, в которой B_0 направлено вдоль оси z , а E_0 — вдоль x .

Условие резонанса при $\omega_B \tau \sim 1$ имеет вид

$$\omega_s = v_0 \frac{(k_x - \omega_B \tau k_y)}{1 + \omega_B^2 \tau^2}, \quad (13)$$

а инкремент нарастания спиновой волны, удовлетворяющей этому условию, определяется формулой (10) с η_0 :

$$\begin{aligned}
\eta_0 &= 2\pi \frac{v_0}{c} \frac{|\cos \theta|}{(1 + \omega_B^2 \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{g M_0 \sigma_0}{\Omega_e \omega_s} \right)^{1/2} (1 + \omega_B^2 \tau^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \times \\
&\times \{ \Omega_e^2 (\omega_B \tau \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + \omega_s^2 (\cos \varphi - \omega_B \tau \sin \varphi)^2 \}^{1/2},
\end{aligned} \quad (14)$$

где φ — угол $\vec{k}_\perp$ с осью x . ($\vec{k}_\perp$ — проекция $\vec{k}$ на плоскость XOY).

3. Рассмотрим усиление спиновых волн в одноосных антиферромагнетиках с двумя независимыми подрешетками. Подобно тому, как это было сделано для ферромагнетика, можно показать, что, если одна из частот спиновых волн антиферромагнетика ω_1 удовлетворяет условию резонанса (8) или (13), то спиновая волна с такой частотой будет усиливаться с инкрементом, определяемым формулой (10). При этом, когда $\omega_B \tau \ll 1$,

$$\eta_0^{(1)} = \sqrt{2} \frac{v_0}{c} (\pi \sigma_0 P_1 Q_1)^{1/2} |\sin \theta|, \quad (15)$$

а когда $\omega_B \tau \sim 1$, то

$$\begin{aligned}
\eta_0^{(1)} &= \sqrt{2} \frac{v_0}{c} |\cos \theta| (\pi \sigma_0 P_1)^{1/2} \frac{(1 + \omega_B^2 \tau^2 \cos^2 \theta)^{1/2}}{(1 + \omega_B^2 \tau^2)^{3/2}} \{ (\omega_B \tau \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + \\
&+ Q_1 (\cos \varphi - \omega_B \tau \sin \varphi)^2 + 2 R_1 (\omega_B \tau \cos \varphi + \sin \varphi) (\cos \varphi - \omega_B \tau \sin \varphi) \}^{1/2}.
\end{aligned} \quad (16)$$

Если внешнее магнитное поле H_0 таково, что выполняется неравенство $H_0 < \sqrt{(2\delta - \beta)\beta} M_0$, то основным состоянием антиферромагнетика будет состояние с антипараллельными подрешетками, направленными вдоль оси легчайшего намагничивания, по которой направлено поле H_0 [2] (δ характеризует обмен между подрешетками, а β — ани-

Когда постоянное магнитное поле H_0 равно нулю, то усиливается только одна ветвь спиновых волн с частотой

$$\omega^2 = \Omega_1^2 \approx (g M_0)^2 2\delta [\beta + (\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2], \quad (17)$$

где σ_1 и σ_{12} характеризуют неоднородное обменное взаимодействие. Инкремент нарастания такой волны, удовлетворяющей условию резонанса (8), определяется величиной

$$\eta_0 = 2\pi \frac{v_0}{c} |\sin \theta| A \left(\frac{\sigma_0}{\Omega_1} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

где

$$A^2 = 2(g M_0)^2 [\beta + (\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2].$$

Если имеет место неравенство $g H_0 \gg \frac{A^2}{\Omega_1}$, то частоты спиновых волн равны

$$\omega_{1,2}^2 = \left[\Omega_1 \pm g H + 2\pi \frac{A^2}{\Omega_1} \sin^2 \theta \right] (\Omega_1 \pm g H). \quad (19)$$

Инкременты $\eta_{1,2}^0$ определяются с помощью (15) и (16) при

$$P_{1,2} = \frac{\pi A^2}{\Omega_1}, \quad Q_{1,2} = 1, \quad R_{1,2} = 0.$$

Если постоянное магнитное поле лежит в интервале $\sqrt{(2\delta - \beta)\beta} M_0 < H_0 < (2\delta - \beta) M_0$, то магнитные подрешетки образуют угол

$$\psi = \arccos \frac{H_0}{(2\delta - \beta) M_0} \quad (20)$$

с осью z , а частоты спиновых волн равны:

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= [\Omega_3^2 + 4\pi B^2 \sin^2 \theta]^{1/2}; \\
\omega_4 &= [\Omega_3^2 + 4\pi C^2 \cos^2 \theta]^{1/2},
\end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
\Omega_3^2 &= (g M_0)^2 [2\delta + (\sigma_1 + \sigma_{12}) k^2] [2\delta \cos^2 \psi + (\sigma_1 + \sigma_{12} \cos 2\psi) k^2 - \beta \sin^2 \psi], \\
\Omega_3^2 &= (g M_0)^2 (\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2 [2\delta \sin^2 \psi + (\sigma_1 - \sigma_{12} \cos 2\psi) k^2 - \beta \sin^2 \psi], \\
B^2 &= 2(g M_0)^2 \{ [2\delta + (\sigma_1 + \sigma_{12}) k^2] \cos^2 \psi + [(\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2 - \beta] \sin^2 \psi' \sin^2 \psi \}, \\
C^2 &= 2(g M_0)^2 (\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2 \sin^2 \psi.
\end{aligned}$$

В формулах (15) и (16)

$$P_3 = \frac{2\pi B^2}{\omega_3}, \quad Q_3 = \frac{D^4 + 4g^2 M_0^2 \omega_3^2 \cos^2 \psi}{B^4}, \quad R_3 = \frac{D}{B^2}, \quad (22)$$

$$P_4 = \frac{2\pi C^2}{\omega_4} \operatorname{tg}^2 \theta, \quad Q_4 = 0, \quad R_4 = 0,$$

где

$$D = (g M_0)^2 [(\sigma_1 - \sigma_{12}) k^2 - \beta] \sin^2 \psi \cdot \sin 2\varphi'.$$

Здесь φ' — угол между $\vec{k}_\perp$ и плоскостью проходящей через подрешетки,

ЛИТЕРАТУРА

1. Махмудов З. З., Барьяхтар В. Г. ФТТ, 7, 2082, 1965.
2. Ахизер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И. УФН, 71, 533, 1960

Ферро- вә антиферромагнетикләрдә чәрәянын резонанс дајаныгсызлыгы

ХУЛАСӘ

Бирохлу ферро- вә антиферромагнит јарымкечиричиләрдә спин далғасынын чәрәјан васитәсилә резонанс күчләнмәси тәдгиг едилмиш-дир. Резонанс шәртләри вә спин далғасынын күчләнмә инкременти алынмыш вә тәдгиг едилмишдир.

А. Х. ХАЛИЛОВ, А. П. МАМЕДОВ, Т. Г. ДИЛБАЗОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКОМБИНАЦИОННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ
НЕКОТОРЫХ АКТИВИРОВАННЫХ СЕРЕБРОМ ФОТО-
ВОЗБУЖДЕННЫХ NaCl-ФОСФОРОВ

Рекомбинационной люминесценции активированных щелочно-галогидных фосфоров посвящено немало работ [1—33]. Однако до сего времени детальный механизм влияния ближайшего окружения центров окраски и центров свечения на рекомбинационное свечение указанных фосфоров остается невыясненным. В настоящей статье приводятся результаты изучения спектров и кривых термостимулированной люминесценции (ТСЛ) монокристаллов NaCl—AgCl и NaCl—AgBr, содержащих примеси Br⁻ и J⁻, выращенных методом Кирополуса из препарата NaCl марки „спектрально чистый“. Различные концентрации примесей были введены в шихту перед расплавлением в виде AgCl, AgBr и AgJ.

Кристаллы возбуждались неразложенным светом конденсированной Al-искры. При измерении спектров ТСЛ (скорость нагрева 0,17 град/сек) в качестве спектрального прибора использовался монохроматор СФ-4, призма которого вращалась с постоянной скоростью. Спектры и кривые ТСЛ регистрировались с помощью фотоэлектронного умножителя, усилителя постоянного тока и ЭПП-09 с временем пробега каретки 2,5 сек. Скорость прохождения спектра и скорость нагрева выбирались таким образом, чтобы можно было регистрировать спектры ТСЛ при формировании одного элементарного пика 2—3 раза, в зависимости от природы фосфора. Поправки в спектры на дисперсию монохроматора и чувствительность ФЭУ не вводились.

На рис. 1, 2, 3 представлены кривые и спектры ТСЛ фотовозбужденных фосфоров NaCl—AgCl, NaCl—AgBr и NaCl—AgJ, а на рис. 1а, б, в и 2а, б, в кривые и спектры ТСЛ NaCl-фосфоров, активированных примесями AgCl, AgBr и AgJ (с концентрацией 0,005 и 0,05 мол. %).

Как видно из рис. 1а и 2а кривые 1 и кривые ТСЛ кристаллов NaCl, содержащих 0,005 и 0,05 мол. % AgCl, имеют пики 35, 70, 90, 150, 190°С. Однако соотношения интенсивностей пиков при указанных концентрациях AgCl резко различаются. При увеличении концентрации AgCl растет первый пик и ослабевают пики при 70, 150 и 190°С. Пик при 90°С остается почти неизменным. На кривых ТСЛ фосфоров NaCl—AgBr (при концентрациях AgBr 0,005; 0,05; 0,5 и 3 мол. %) обнаруживаются пики, соответственно, при 35, 70, 90, 150, 190; 35, 60, 80, 120, 175; 35, 55, 110; 50—55, 110, 135, 170°С. С увеличением концентрации AgBr изменяется положение пиков. При этом интенсивность

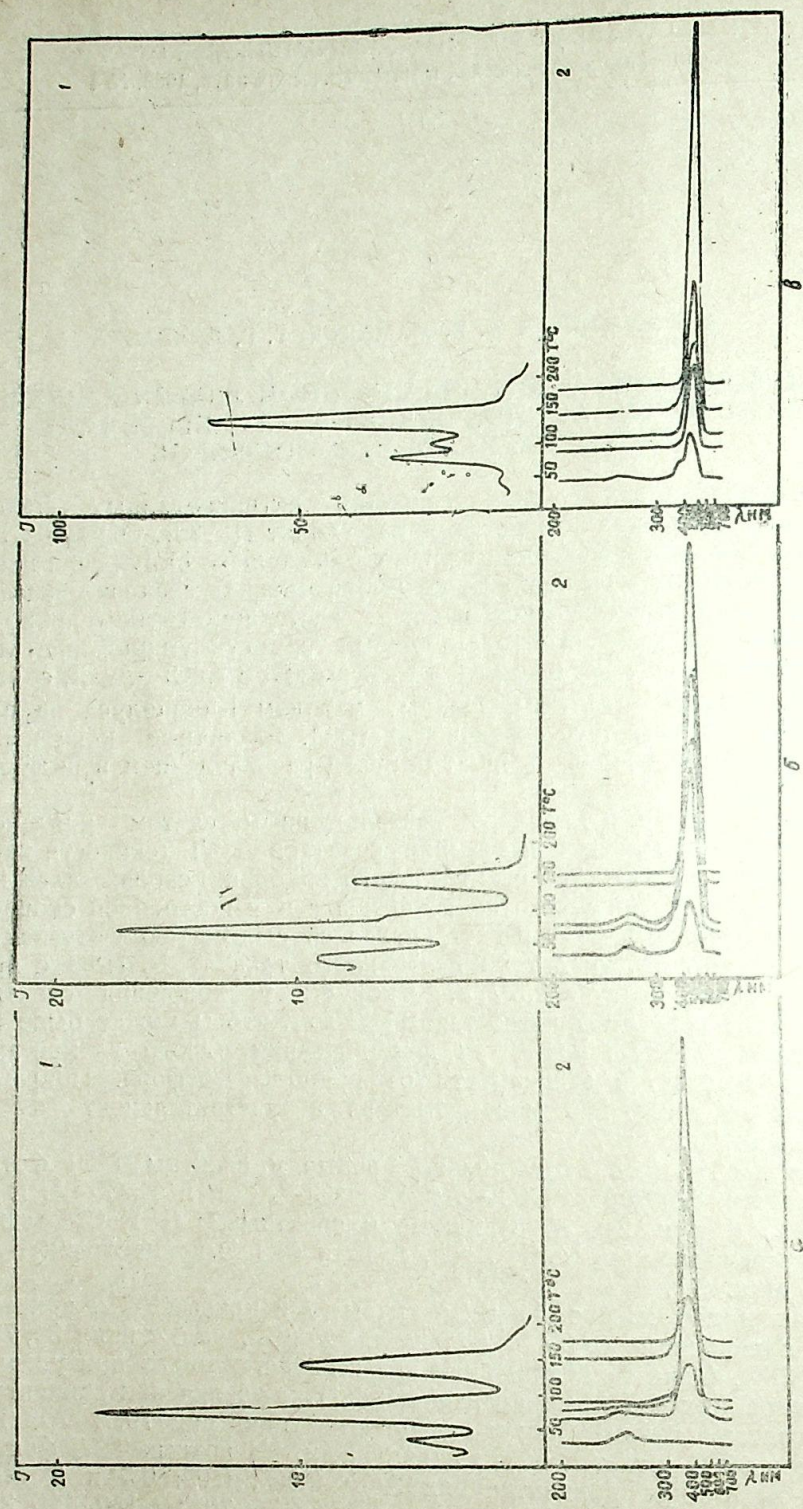


Рис. 1. Кривые (1) и спектры (2) ТСЛ при концентрации 0,005 мол %: а) NaCl—AgBr; б) NaCl—AgCl; в) NaCl—AgI.

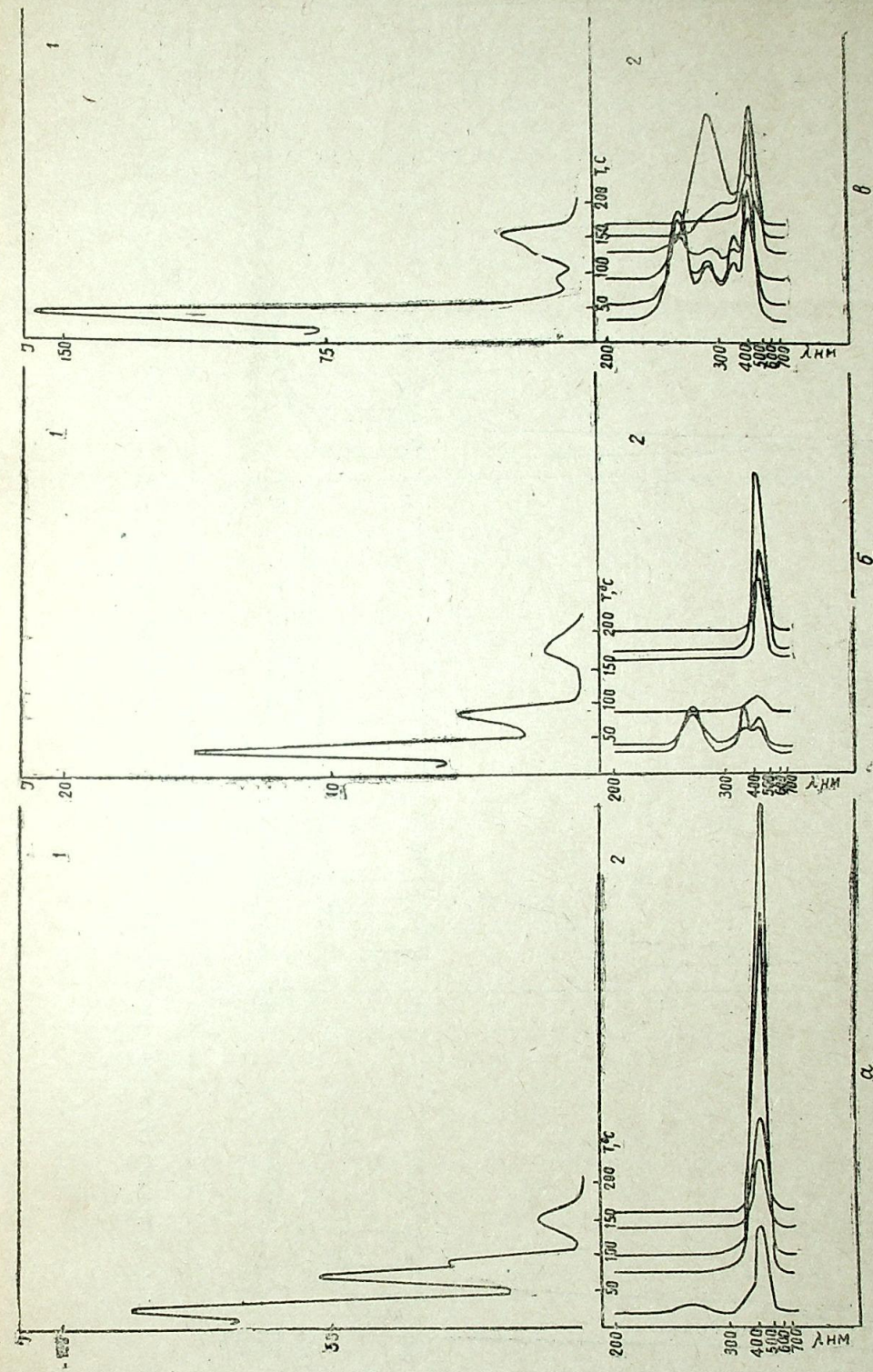


Рис. 2. Кривые (1) и спектры (2) ТСЛ при концентрации 0,05 мол %: а) NaCl—AgBr; б) NaCl—AgCl; в) NaCl—AgI.

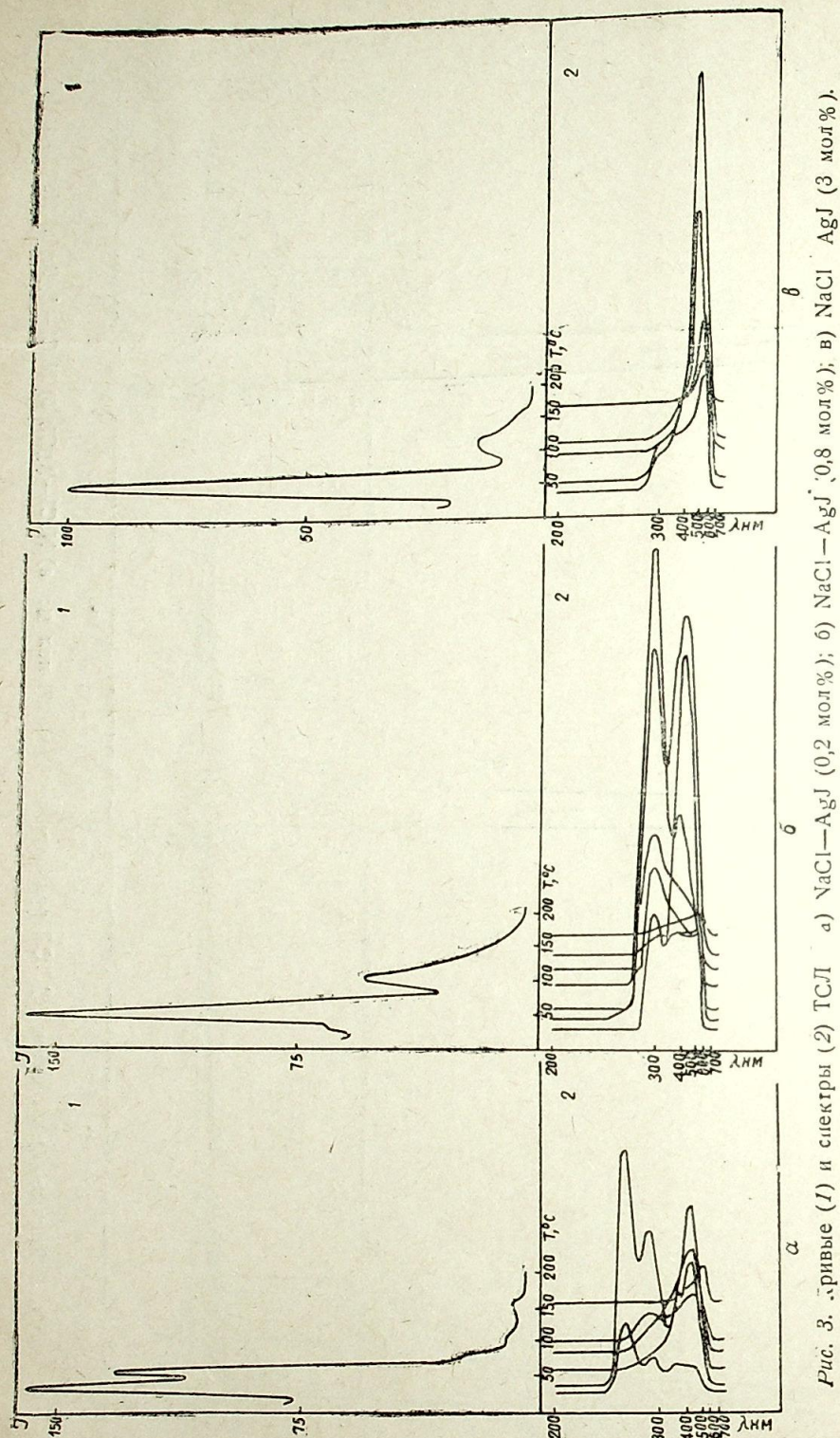


Рис. 3. Кривые (1) и спектры (2) ТСЛ а) NaCl—AgI (0,2 мол %); б) NaCl—AgJ (0,8 мол %); в) NaCl—AgBr (3 мол %).

возникающего нового пика при 55°C резко увеличивается и он становится доминирующим при концентрации 3 мол. %.

На рис. 1в, 2в и 3 (кривые 1) представлены кривые ТСЛ фосфора NaCl—AgJ с различными концентрациями AgJ. При концентрациях 0,005; 0,05; 0,5; 3 мол. % наблюдаются пики, соответственно, при 35, 70, 100, 150, 190; 35, 55, 130, 160; 35, 55, 80, 110, 160; 50—55, 125, 170°C. Как у фосфора NaCl—AgBr, с увеличением концентрации добавок изменяется положение некоторых пиков, образуются новые пики и очень резко меняется их соотношение. В случае концентрации AgJ 0,005 мол. % пик при 35°C является относительно слабым, в то время как при концентрациях 0,05 и 0,5 мол. % он становится доминирующим. Пик при 55°C, отсутствующий при концентрации 0,005 мол. % AgJ, становится заметным при 0,05 мол. % и доминирует при 3 мол. % AgJ.

Общим для кривых ТСЛ исследованных фосфоров является монотонное изменение светосуммы, освобождаемой термическим путем, с увеличением концентрации добавок и изменение соотношения интенсивностей пиков. Светосумма с повышением концентрации AgCl, AgBr и AgJ вначале растет, а затем уменьшается.

Влияние анионов Br⁻ и J⁻ на кривые ТСЛ кристаллов NaCl, содержащих ионы Ag⁺, сводится к тому, что при наличии этих анионов возникают новые пики на кривых ТСЛ, изменяется соотношение пиков и увеличивается светосумма, накопленная в фосфорах, причем увеличение светосуммы растет в ряду AgCl, AgBr, AgJ (кривые 1, рис. 1, 2, 3).

На рис. 1а и 2а (кривые 2) представлены спектры термостимулированной люминесценции фосфоров NaCl—AgCl. При концентрациях AgCl 0,05 и 0,005 мол. % в спектре ТСЛ наблюдаются полосы с максимумами при 250, 360, 390, 440—460 и 520 нм. По кривым 2 рис. 1а видно, что в температурном интервале первого пика фосфора NaCl—AgCl (0,005 мол. %) основной полосой свечения является полоса с максимумом при 250 нм. В области всех остальных пиков наблюдается также одна полоса, однако ее максимум с повышением температуры кристалла непрерывно смещается в длинноволновую сторону от 440 до 460 нм.

Спектр фосфоресценции фосфора NaCl—AgCl (0,05 мол. %) состоит из полос с максимумом при 250, 360 и 440 нм. В температурном интервале первого пика в спектрах ТСЛ фосфора NaCl—AgCl (0,05) наблюдается полоса при 440 нм и следы полос при 250 нм. Все остальные пики, так же как у фосфора NaCl—Ag (0,005 мол. %), содержат одну полосу, максимум которой смещается от 440 до 460 нм. В общем такой же результат получается для фосфора NaCl—AgBr (рис. 1б и 2б), хотя в деталях он несколько отличается. Спектр ТСЛ этого фосфора содержит полосы с максимумами при 250—260, 360, 400, 440—460 и 520 нм. В области первого пика кривой ТСЛ фосфоров NaCl—AgBr (0,005 и 0,05 мол. %) наблюдаются полосы свечения с максимумами при 250, 360 и 440 нм. Остальные пики состоят из одной полосы свечения, максимум которой смещается в длинноволновую сторону от 440 до 460 нм с повышением температуры кристалла.

Спектр излучения в области первого пика фосфора NaCl—AgBr (0,5 мол. %) состоит из полос с максимумами при 255, 360, 400, 440, в области второго пика наблюдаются полосы 255, 360, 400 и следы полосы при 520 нм, третий пик состоит из полосы 520 нм. Первый пик спектра ТСЛ фосфора NaCl—AgBr (3 мол. %) содержит полосы с максимумами при 260, 360, 400, 440, второй и третий—520 нм. Как видно, положение первой полосы спектра ТСЛ смещается в длинноволновую сторону с увеличением концентрации AgBr. Смещение остальных

Күмүшлө ашгарланмыш вә фотонларла һәјәчанландырылмыш бә'зи NaCl фосфорларын рекомбинасиялы лүминесценсиясынын тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә күмүшлө ашгарланмыш вә фотонларла һәјәчанландырылмыш NaCl кристаллофосфорларында ашгар анионларынын шүаланма мәркәзләринә тә'сиринин тәдгиги нәтиҗәләри шәрһ едилмишдир.

Мүәјјән олунмушдур ки, NaCl гәфәсинә Br^- вә J^- ашгар анионлары дахил едилдикдә јени тип удма вә шүаланма мәркәзләри әмәлә кәлир. Бу тәҗрүби фактлар активләшдиричи ионлары әһатә едән анионлар дөврәсиндә әмәлә кәлән дәјишикликләрлә изаһ едилир.

УДК 539. 293:537. 324

М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ, Д. С. ТОМТИЕВ, А. А. КУЛИЕВ

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ТЕРМО-Э.Д.С. МОНОКРИСТАЛЛОВ
ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ВИСМУТ—СУРЬМА

Особый интерес исследователей к твердым растворам полуметаллов висмут—сурьма связан со специфическим характером их свойств, позволяющих наблюдать плавный переход от металлов к полупроводникам. Практическое значение этих исследований очевидно, так как твердые растворы Bi—Sb обладают рекордной термоэлектрической эффективностью при низких температурах [1].

В данной работе была поставлена задача—объяснить некоторые термоэлектрические свойства сплавов Bi—Sb. В частности, на основе результатов об изменении зонной структуры сплавов Bi—Sb с составом [2], можно провести интерпретацию наблюдаемого экспериментально изменения анизотропии термо-э. д. с. сплавов Bi—Sb от состава и получить некоторые сведения о механизмах рассеяния носителей тока.

Термо-э. д. с. монокристаллов твердых растворов Bi—Sb, выращенных по методике, описанной в [3], измерялась в двух кристаллографических направлениях, соответствующих направлению тригональной оси кристалла и перпендикулярному к нему. Характерной особенностью термоэлектрических свойств твердых растворов Bi—Sb, так же как и чистого висмута, является значительная анизотропия термо-э. д. с. Результаты измерений показали, что анизотропия термо-э. д. с. уменьшается с повышением концентрации сурьмы в твердом растворе. Для объяснения этого явления воспользуемся данными об изменении парциальных подвижностей электронов и дырок в сплавах Bi—Sb, полученных на основе гальваномагнитных измерений [2].

Термо-э. д. с. в собственной области материалов с двумя типами носителей тока в предположении изотропности времени релаксации определяется соотношением [4]

$$\alpha_i = \frac{\alpha_3 b_i - \alpha_d}{b_i + 1}, \quad (1)$$

где α_i — термо-э. д. с. в i -том направлении; α_3 и α_d — парциальные изотропные доли термо-э. д. с. за счет электронов и дырок, соответственно, b_i — отношение парциальных подвижностей электронов и дырок в том же направлении. Учитывая, что α_3 в большинстве случаев близка к α_d , из (1) можно получить выражение для оценки анизотропии термо-э. д. с.:

$$\frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}} = \frac{(b_{\parallel} - 1)(b_{\perp} + 1)}{(b_{\parallel} + 1)(b_{\perp} - 1)}, \quad (2)$$

где $\alpha_{\parallel}$ и $\alpha_{\perp}$ — суммарные термо-э. д. с. в направлении тригональной оси и перпендикулярном к нему, соответственно, а $b_{\parallel}$ и $b_{\perp}$ — отношения подвижностей электронов и дырок в тех же направлениях. Согласно этому выражению (2), вычислялась анизотропия термо-э. д. с. монокристаллов твердых растворов Bi—Sb, содержащих различные количества сурьмы. Отношения подвижностей вычислены из данных, приведенных в [2], полученных по гальваномагнитным измерениям в слабых магнитных полях, в предположении трехэллипсоидальной поверхности Ферми для электронов и эллипсоида вращения для дырок. Результаты вычислений при $T = 100^\circ\text{K}$ вместе с экспериментальными величинами приведены в табл. 1.

Таблица 1

ат. % Sb	0	3	12
$b_{\parallel}$	10,0	8,3	3,0
$b_{\perp}$	2,3	2,3	2,3
$\frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}}$ выч по (2)	2,1	2,0	1,2
$\frac{\alpha_{\parallel}}{\alpha_{\perp}}$ (эксп.)	2,0	1,8	1,2

Согласие $\alpha_{\parallel}/\alpha_{\perp}$, определенных экспериментально, с вычисленным по соотношению (2) свидетельствует о том, что уменьшение анизотропии термо-э. д. с. с повышением концентрации сурьмы является результатом изменения отношения подвижностей носителей тока.

Характерным для твердых растворов Bi—Sb является сильное изменение термо-э. д. с. в магнитном поле. На рис. 1 показана зависимость термо-э. д. с. от напряженности магнитного поля (H) для сплава, содержащего 12 ат. % Sb, при различных температурах (ΔT параллельно бинарной оси и H параллельно биссектрисной оси). При направлении H параллельно биссектрисной оси кристалла изменение термо-э. д. с. в зависимости от напряженности магнитного поля значительно больше, чем при H , параллельном тригональной оси.

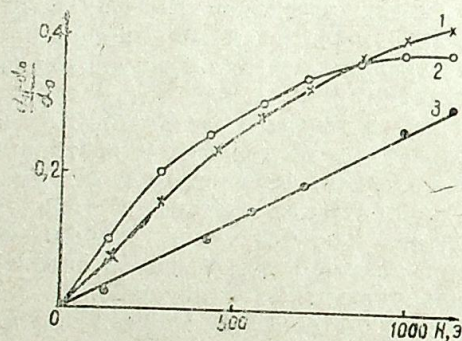


Рис. 1. Зависимость термо-э. д. с. от напряженности магнитного поля для сплава Bi₈₈Sb₁₂ (ΔT параллельно бинарной оси, а H биссектрисной). 1—132°K; 2—100°K; 3—171°K.

Это объясняется различием парциальных подвижностей носителей тока в различных направлениях. Величину термо-э. д. с. в различных кристаллографических направлениях можно количественно определить по вышеприведенному выражению (1) и парциальным термо-э. д. с. α_e и α_h , определяемым в предположении изотропности времени релаксации следующими выражениями, справедливыми при произвольном выражении [4]:

$$\alpha_e = -\frac{k}{e} \left[\frac{\left(\frac{5}{2} + r\right) F_{\frac{3}{2}} + r(\mu_e^*)}{\left(\frac{3}{2} + r\right) F_{\frac{1}{2}} + r(\mu_h^*)} - \mu_e^* \right] \quad (3)$$

$$\alpha_h = \frac{k}{e} \left[\frac{\left(\frac{5}{2} + r\right) F_{\frac{3}{2}} + r(\mu_h^*)}{\left(\frac{3}{2} + r\right) F_{\frac{1}{2}} + r(\mu_e^*)} - \mu_h^* \right] \quad (4)$$

где k — постоянная Больцмана, e — заряд электрона, μ^* — приведенный химический потенциал, $F_r(\mu^*)$ — интеграл Ферми, r — параметр рассеяния.

Таблица 2

ат. % Sb	α мкВ/град	Эксперим.	Теория		
			$r = -\frac{1}{2}$	$r = 0$	$r = \frac{1}{2}$
3	$\alpha_{\parallel}$ $\alpha_{\perp}$	110 60	116 58	80 40	227 122
12	$\alpha_{\parallel}$ $\alpha_{\perp}$	160 145	129 105	130 104	178 145

Вычисления производились для трех значений параметров рассеяния: $r = \frac{1}{2}$, $r = 0$ и $r = -\frac{1}{2}$. В табл. 2 приведены расчетные и экспериментальные значения термо-э. д. с. в двух кристаллографических направлениях при различном содержании сурьмы в сплавах Bi—Sb при 100°K.

Расчетные и экспериментальные значения в обоих направлениях для сплавов, содержащих 3 ат. % Sb, так же как для чистого висмута, [4] совпадают при $r = -\frac{1}{2}$, а для сплавов, содержащих 12 ат. % Sb,

совпадение наблюдается только при $r = \frac{1}{2}$. Для чистого висмута и для сплавов, содержащих малое количество сурьмы, совпадение экспериментальных данных с вычисленными при $r = -\frac{1}{2}$ должно свидетельствовать об основной роли в рассеянии носителей тока акустической ветви спектра колебания решетки. В то же время совпадение экспериментальных данных с вычисленными при $r = \frac{1}{2}$ для твердых растворов, содержащих 12 ат. % Sb, может быть объяснено изменением механизма рассеяния носителей тока при увеличении содержания сурьмы. Как известно, $r = \frac{1}{2}$ свидетельствует о рассеянии на опти-

ческой ветви спектра колебания решетки и совпадение экспериментальных данных с вычисленными должно объясняться возрастающей ролью механизма рассеяния.

Остановимся на температурных зависимостях термо-э. д. с. сплавов Bi—Sb. На рис. 2 для примера показаны температурные зависимости термо-э. д. с. сплавов Bi—Sb, содержащих 3 и 12 ат. % Sb, соответствующим составам, при которых и проявляются полупроводниковые (12 ат. % Sb) и металлические свойства (3 ат. % Sb). Парциальные доли термо-э. д. с. этих сплавов определяются выражениями (3) и (4), играющими основную роль в температурной зависимости суммарной термо-э. д. с., так как отношение подвижностей слабо изменяется с температурой.

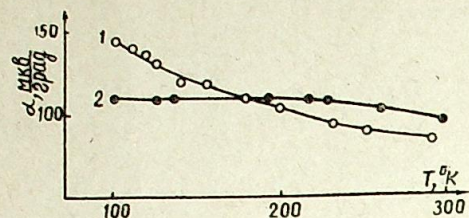


Рис. 2. Температурная зависимость термо-э. д. с. сплавов Bi—Sb, содержащих 3 (1) и 12 ат. % Sb (2).

Как в чистом висмуте, так и в твердых растворах Bi—Sb кинетический член в выражениях (3) и (4):

$$\frac{\left(\frac{5}{2} + r\right) F_{\frac{3}{2}} + r(\mu^*)}{\left(\frac{3}{2} + r\right) F_{\frac{1}{2}} + r(\mu^*)} \quad (5)$$

зависит от механизма рассеяния, но слабо изменяется с температурой. Это означает, что температурная зависимость термо-э. д. с. в основном определяется изменением приведенного химического потенциала. Уровень Ферми для чистого висмута [4] и, по-видимому, также для сплавов, содержащих до 5% Sb (где имеет место перекрытие зон), понижается с уменьшением температуры, приближаясь к постоянному значению. Приведенный химический потенциал соответственно этому слабо изменяется, вплоть до температур, при которых уровень Ферми достигает постоянного значения. Именно поэтому для висмута [4] и сплавов Bi—Sb с малым содержанием сурьмы термо-э. д. с. в интервале 300—100°K слабо изменяется с температурой. С другой стороны, при переходе к составам, в которых проявляются полупроводниковые свойства, уровень Ферми, расположенный вблизи середины энергетического зазора, мало изменяется с температурой, а приведенный химический потенциал возрастает с ее понижением. Соответственно этому термо-э. д. с. также возрастает с понижением температуры.

Таким образом, основными выводами будут следующие.

Изменение анизотропии термо-э. д. с. твердых растворов Bi—Sb в зависимости от состава связано с изменением отношения парциальных подвижностей электронов и дырок, что, в свою очередь, является следствием изменения дырочной поверхности Ферми [2].

Количественный расчет термо-э. д. с. твердых растворов Bi—Sb свидетельствует об изменении механизма рассеяния носителей тока в этих сплавах при увеличении содержания сурьмы.

Характер зависимости термо-э. д. с. сплавов Bi—Sb от температуры определяется изменением приведенного уровня Ферми.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Smith E., Wolfe R. J. appl. phys., 33, 3, 1962.
- 2 Кулиев А. А., Шахтактинский М. Г., Томтиев Д. С. Сб., посвященный 50-летию Октябрьской революции (в печати).
- 3 Абрикосов Н. Х., Томтиев Д. С., Шахтактинский М. Г. Кулиев А. А. Изв. АН СССР, серия „неорганические материалы“, 3, 6, 1967.
- 4 Gallo C. F., Chandraschkar B. S., Sutter P. H. I. appl. phys., 144, 1963.

М. Н. Шахтактински, Ч. С. Томтиев, Э. А. Гулиев

Бисмут-сурма бэрк мэллуллариныда термо ЕнГ-нин дэжишмэси һаггында

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә бисмут-сурма бэрк мэллулларины термо ЕнГ-нин 100—300°K температур интервалында өлчүлэринин нәтичәләри верилмишдир.

Хәлитәләрдә золаг гурлушунун тәркибдән асылы олараг дэжишмәсинә әсасланараг, хәлитәләрин термо ЕнГ-нин анизотропијасынын тәркибдән асылы дэжишмәси вә јүкдашыјычыларын сәпилмә механизми ајдынлашдырылмышдыр.

Мә’лум олмушдур ки, термо ЕнГ-нин анизотропијасынын Bi—Se бэрк мэллуллариныда тәркибдән асылылығы электрон вә дешикләрин парсиал јүрүклүклэринин дэжишмәсилә әлагәдардыр. Термо ЕнГ-ни һесабламагла, бу хәлитәләрдә јүкдашыјычыларын сәпилмә механизминин тәркибдән асылы олараг дэжишмәси мүәјјән едилмишдир.

РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИ
ОБРАБОТАННЫХ ОПРАВОК ПРОШИВНОГО СТАНА

Для исследования выбирались оправки, изготовленные из стали марки 18ХНВА и подвергнутые отпуску при температуре 650°C в течение десяти часов с последующим медленным охлаждением до 350°C в печи, а затем на воздухе. Рентгенографирование оправок производилось с шести равно отстоящих точек вдоль их осей в

Полосы	B_1 $10^{-3} рад$	B_2 $10^{-3} рад$	b_1 $10^{-3} рад$	b_2 $10^{-3} рад$	β_1 $10^{-3} рад$	β_2 $10^{-3} рад$	$\frac{\beta_1}{\beta_2}$	D $10^{-6} см$	$\frac{\partial_a}{a}$ 10^{-3}
I	11,1	39,9	3,8	10,5	8,9	30,9	3,5	2,7	1,1
II	11,0	39,7	3,8	10,5	8,8	30,7	3,5	2,7	1,1
III	10,8	37,3	3,8	10,5	8,5	27,9	3,3	2,7	0,7
IV	10,7	37,0	3,8	10,5	8,5	27,3	3,2	2,7	0,6
V	10,4	36,7	3,8	10,5	8,1	26,8	3,3	2,9	0,6
VI	10,3	36,0	3,8	10,5	7,9	25,6	3,2	2,9	0,5

Результаты вычислений показывают, что отношение физической ширины линий (220) и (110) для всех рентгенограмм, полученных от одной и той же оправки после термообработки имеет почти одинаковое значение, несколько отличающееся от 3. Это указывает с одной

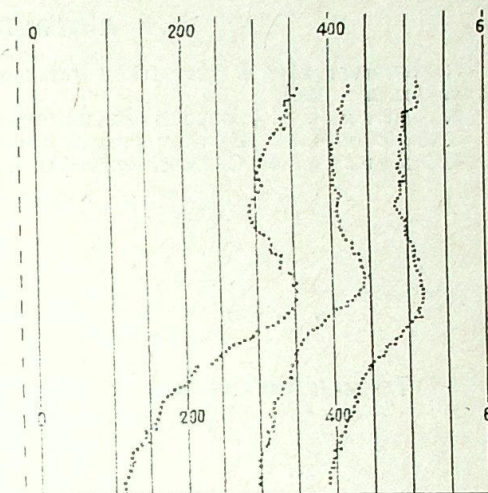


Рис. 2. Микрофотометрические кривые рентгенограмм, полученных от начальной, средней и конечной части одной из исследуемых оправок

стороны на то, что наблюдаемая размытость на рентгенограммах исследуемых оправок вызвана в основном измельчением блоков, среднее значение линейных размеров которых меняется в пределах от 2,7 до $2,9 \cdot 10^{-6}$ см, а с другой — на равномерное распределение вольфрама в составе стали.

В заключение считаем приятным долгом выразить благодарность акад. Г. В. Курдюмову и коллективу сотрудников его лаборатории за ценные советы при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рентгенография в физическом металловедении, под ред. Ю. А. Багаряцкого. Металлургиздат, 1961.
2. Лысак Л. И. "Вопросы физики металлов и металловедения", 1952, № 3.
3. Лысак Л. И. "Вопросы физики металлов и металловедения", 1955.
4. Уманский Я. С. Рентгенография металлов. Металлургиздат, 1960.

Н. Э. Әлијев, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. Ә. Әһмәдов,
М. М. Мусазадә, К. Ә. Агајев

Термик ишләнмиш дәликачан стан башлыгларынын рентгенографик тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Бору истеһсалында истифадә олуан аләтләрин ишләмә мүддәтини вә истијә давамлылығыны артырмаг мәгсәди илә мүхтәлиф лекирләнмиш поладлар тәтбиг олунар. Азәрбајчан бору прокаты заводунда бәзи аләтләри волфрамла лекирләнмиш 18ХНВА маркалы поладдан һазырлајыр вә онлары термик јолла ишләјирләр. Термик ишләмәнин истифадә олуан поладын структура тәсири мүнәввәтләндирмәкдән өтрү һәмин поладдан һазырланмыш дәликачан стан башлыглары рентгенографик тәдгиг едилмишдир.

УДК 536.2.08

К. Ш. КАХРАМАНОВ, Л. С. СТИЛЬБАНС

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ БЕЗ ОХРАННЫХ ЦИЛИНДРОВ

Относительно высокую точность измерения теплопроводности обеспечивает абсолютный (стационарный) метод, где тепловой поток, проходящий через образец, определяется непосредственно по мощности нагревателя, а для исключения потерь тепла исследуемый образец и нагреватель окружаются охранными цилиндрами [1—3]. Однако такие охранные цилиндры, требующие дополнительных приспособлений и приборов, значительно усложняют измерительную установку, а при неточной регулировке температур приводят к очень большим погрешностям.

При относительном методе измерения теплопроводности исследуемый образец обычно помещается между двумя эталонными образцами и тепловой поток через образец определяется как среднее арифметическое потоков через эталоны; при этом, как правило, для уменьшения боковых потерь все три образца также помещаются в охранный цилиндр. При таком методе измерения тоже есть свои трудности:

1. Теплопроводность эталонных образцов должна быть точно известна в широком интервале температур и сравнима с теплопроводностью исследуемого образца.

2. В этом случае чрезвычайно трудно создать вдоль охранных цилиндра перепад температур, повторяющий ход температур в установке, так как последний зависит от теплопроводности образца и эталонов, от качества тепловых контактов и может поэтому меняться от одного измерения до другого или даже в ходе измерений.

В литературе описан ряд установок, в которых теплопроводность измеряется без охранных цилиндров, однако они предназначены для измерений либо в вакууме при низких температурах, т. е. при таких условиях, при которых теплообменом за счет излучения и конвекции можно пренебречь, либо при настолько высоких, что теплообмен через излучение можно положить в основу работы прибора [1, 2].

В радиальном методе измерения теплопроводности не используются охранные цилиндры, однако и он имеет недостатки, которые подробно описаны в работе [4]. В работах [5, 6] предложена методика измерения теплопроводности в области 300—700° К без охранных цилиндров, однако уравнение теплопроводности здесь решено при-

лиженно и, кроме того, необходимость сверления отверстий в образце вызывает дополнительные трудности.

Учитывая все вышесказанное, мы пришли к следующим выводам:
а) отказаться от относительного метода измерения теплопроводности;

б) отказаться от охранных цилиндров и попытаться учесть или исключить потери тепла с образца другими методами.

Можно предложить несколько методов:

- 1) потери нагревателя и с боковых поверхностей образца могут быть измерены путем замены образца вспомогательной печкой;
- 2) потери с боковых поверхностей могут быть также определены путем измерения температуры в трех точках образца;
- 3) сравнение с эталоном.

Описанная выше методика обладает рядом преимуществ: надежность результатов, относительно большая скорость и простота измерений. В то же время измерения показали, что точность результатов, полученных таким образом, не уступает компенсационному методу, т. е. методу охранных цилиндров.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Измерительная установка представлена схематически на рис. 1 и 2. Исследуемый образец (3) помещается между двумя плоскими

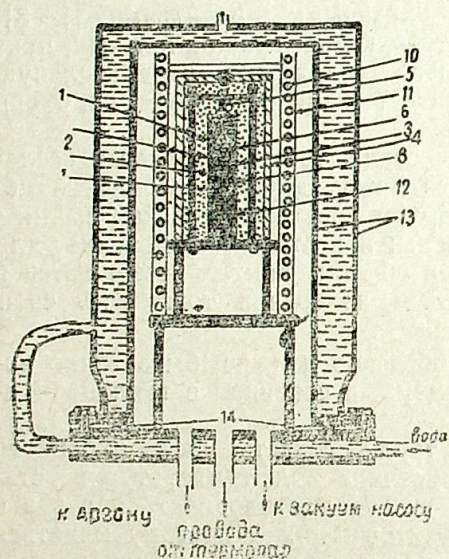


Рис. 1. Общий вид установки для измерения теплопроводности стационарным методом без охранных цилиндров:
1—нагреватель; 2—платиновые пластинки; 3—образец; 4—цилиндр; 5—стальная иглолка.

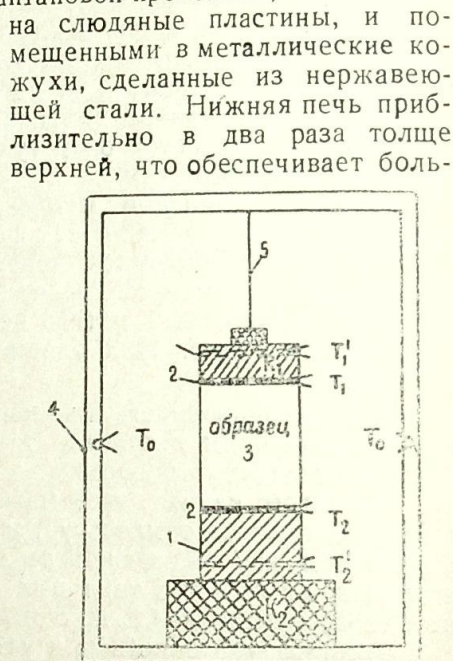


Рис. 2. Схема действия установки:
1—нагреватель; 2—платиновая пластинка; 3—образец; 4—цилиндр; 5—стальная иглолка.

шой интегральный коэффициент теплоотдачи. Верхняя печь прижимается к образцу при помощи тонкой стальной иглолки (5), нижняя опирается на стеатитовую пластинку (рис. 2).

Высота и толщина цилиндра (4) подобраны так, чтобы температура в пространстве, где помещен образец, была с достаточной точ-

ностью постоянной. В кожухе каждой из печек (1—1) просверливаются два параллельных сквозных канала диаметром 0,5 мм, в которые вставляются платиновые штифты. К штифтам привариваются медные токоподводящие провода (~0,2 мм) и хромель-алюмелевые термопары (~0,2 мм), которые измеряют температуры печек. Измерения перепада температур на образце осуществлялись хромель-алюмелевыми термопарами, которые привариваются к тонким (~0,1 мм) платиновым пластинкам (2—2), плотно зажатым между печками и образцом (рис. 2).

Теплоотдача системы уменьшается использованием засыпки из „ультралегковеса“, которым заполняется цилиндр. Чтобы избежать нагрева вакуумной плиты, подставка поднята на некоторое расстояние (10 см) от плиты при помощи тонких стальных стоек. Прибор помещается под стальным колпаком, который откачивается до вакуума $1 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. и заполняется аргоном.

Вывод рабочей формулы для теплопроводности

Принцип действия методики схематически показан на рис. 2. Пусть $T_1 > T_2$. Если пренебречь градиентом температуры в поперечном сечении образца, и также считать коэффициент теплоотдачи (α_0) по его поверхности одинаковым, то распределение температуры вдоль образца в стационарном состоянии будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{x_0^2} T = 0, \quad (1)$$

где температура T измеряется относительно температуры засыпки (внешнего экрана T_0); $\frac{1}{x_0} = \sqrt{\frac{\Pi_0 \alpha_0}{\kappa S_0}}$. Здесь Π_0 —периметр образца, κ —его удельная теплопроводность, S_0 —площадь поперечного сечения образца. Решение уравнения (1) имеет вид [7]

$$T = A_1 \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{x_0} + A_2 \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{x_0}. \quad (2)$$

Если температуру торцов образца обозначить T_1 и T_2 , а длину L , то при граничных условиях $T\left(-\frac{L}{2}\right) = T_1$, $T\left(\frac{L}{2}\right) = T_2$, решение (2) принимает вид

$$T(x) = \frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{ch} \frac{L}{2x_0}} + \frac{T_2 - T_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{sh} \frac{L}{2x_0}}. \quad (3)$$

Соответственно тепловой поток в определенном сечении образца (x)

$$Q(x) = \kappa S_0 \frac{dT}{dx} = -\frac{\kappa L}{x_0} \left[\frac{T_1 + T_2}{2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{ch} \frac{L}{2x_0}} + \frac{T_2 - T_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{x_0}}{\operatorname{sh} \frac{L}{2x_0}} \right],$$

где $\kappa = \frac{S_0}{L}$.

Отсюда находим значение теплового потока, входящего в образец:

$$Q_1 = Q\left(-\frac{L}{2}\right) = \frac{\kappa L}{x_0} \left[-\frac{T_1 + T_2}{2} \operatorname{th} \frac{L}{2x_0} + \frac{T_2 - T_1}{2} \operatorname{cth} \frac{L}{2x_0} \right],$$

и соответственно теплового потока, выходящего из образца:

$$Q_2 = Q\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{\kappa L}{x_0} \left[\frac{T_1 + T_2}{2} \operatorname{th} \frac{L}{2x_0} + \frac{T_2 - T_1}{2} \operatorname{cth} \frac{L}{2x_0} \right],$$

Далее находим сумму и разность тепловых потоков входящего в образец и выходящего из него:

$$Q_1 + Q_2 = -\frac{\kappa L}{x_0} (T_2 - T_1) \operatorname{cth} \frac{L}{2x_0}; \quad (4)$$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{\kappa L}{x_0} (T_2 + T_1) \operatorname{th} \frac{L}{2x_0} \quad (5)$$

(уравнение (5) выражает потери тепла с поверхности образца). Из (4) и (5) можно определить значение удельной теплопроводности. Это можно сделать несколькими путями.

I. Приведем уравнение (4) к виду

$$-\frac{Q_1 + Q_2}{T_2 - T_1} = \frac{\Pi_0 \alpha_0}{2y} \operatorname{cth} y, \quad (4a)$$

где

$$y = \frac{L}{2x_0} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\Pi_0 \alpha_0}{\kappa S_0}},$$

тогда

$$2 \frac{Q_c}{\Delta T} \cdot \frac{1}{\Pi_0 \sigma_0} \cdot y + \operatorname{cth} y = 0;$$

$$Q_{cp} = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \text{ и } \Delta T = T_2 - T_1.$$

Обозначим

$$2 \frac{Q_{cp}}{\Delta T} \cdot \frac{1}{\Pi_0 \sigma_0} = A,$$

тогда (4a) примет вид

$$A \cdot y + \operatorname{cth} y = 0. \quad (6)$$

Значение A можно найти из экспериментальных данных, определив Q_1 , Q_2 , ΔT и коэффициент теплоотдачи с поверхности образца α_0 путем замены образца вспомогательной печкой (см. ниже). Решая уравнение (6) графическим методом, находим значение y и далее удельную теплопроводность:

$$\kappa = 0,25 \cdot \frac{L}{S_0} \cdot \frac{L \Pi_0 \sigma_0}{y^2} = 0,25 \frac{L}{S_0} \cdot \frac{\kappa_3}{y^2}, \quad (7)$$

где κ_3 — интегральный коэффициент теплоотдачи образца.

II. Зная коэффициент теплоотдачи с поверхности образца, можно определить удельную теплопроводность. Умножая уравнение (4) на (5), получаем простую формулу:

$$\kappa = \frac{L}{S} \frac{Q_1^2 - Q_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \cdot \frac{1}{\kappa_3}. \quad (8)$$

Точность определения теплопроводности из уравнений (7) и (8) определяется погрешностью измерения коэффициента теплоотдачи с поверхности образца (вспомогательной печки).

III. Решая уравнение (4) и (5), можно исключить значение α_0 . Для этого приведем уравнения (4) и (5) к следующим видам:

$$\frac{Q_1^2 - Q_2^2}{T_1^2 - T_2^2} = S_0 \cdot \Pi_0 \alpha_0; \quad (4')$$

$$\operatorname{th} \frac{L}{2x_0} = B, \quad (5')$$

где

$$B = \sqrt{\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}}.$$

Из уравнения (5') находим

$$\Pi_0 \alpha_0 = 4 \cdot \frac{S_0}{L^2} (\operatorname{arth} B)^2. \quad (9)$$

Из уравнения (4')

$$\kappa = 0,5 \cdot \frac{L}{S} \cdot \frac{1}{\operatorname{arth} B} \cdot \sqrt{\frac{Q_1^2 - Q_2^2}{T_1^2 - T_2^2}}. \quad (10)$$

Для удобства расчета заменим $\operatorname{arth} B = 0,5 \ln \frac{1+B}{1-B}$. Тогда получим выражение для вычисления теплопроводности:

$$\kappa = \frac{L}{S_0} \sqrt{\frac{Q_1^2 - Q_2^2}{T_1^2 - T_2^2}} \cdot \frac{1}{\ln \frac{1+B}{1-B}}. \quad (11)$$

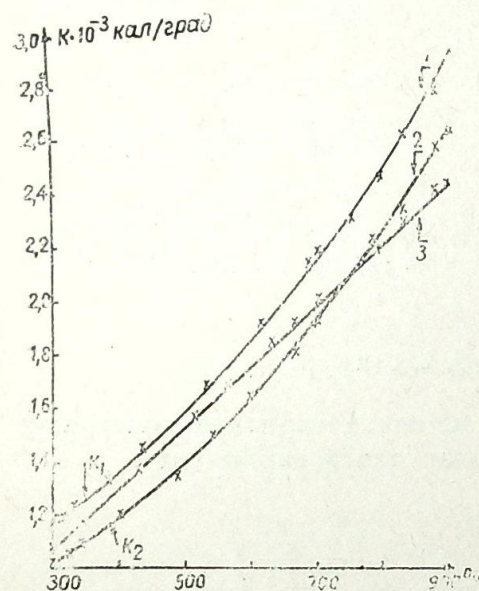


Рис. 3. Температурные зависимости интегральных коэффициентов теплоотдачи: 1— K_1 — первой печки, верхней; 2— K_2 — второй печки, нижней; 3— K_3 —потери с боковой поверхности образца.

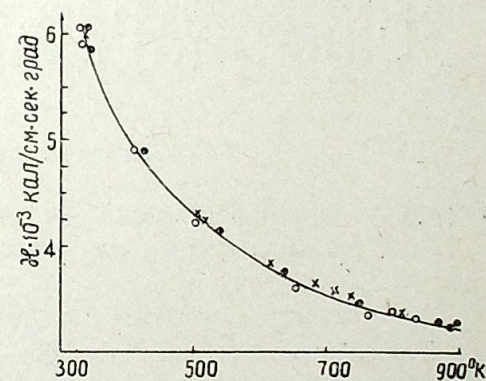


Рис. 4. Сравнительные результаты измерения теплопроводности сульфида свинца: $\circ$ —по данным [3]; $\times$ —по данным [6]; $\bullet$ —наши данные.

Для определения потоков тепла Q_1 и Q_2 и коэффициента теплоотдачи α_0 необходимо узнать интегральные коэффициенты теплоотдачи κ_1 , κ_2 (обоих нагревателей) и κ_3 (рис. 3). Для этой цели образец заменяется вспомогательным третьим нагревателем той же формы,

что и образец, и мощность всех трех нагревателей подбирается таким образом, чтобы их температуры (T) были одинаковы, тогда:

$$\kappa_1 = \frac{W_1}{T - T_0}; \quad \kappa_2 = \frac{W_2}{T - T_0} \quad \text{и} \quad \kappa_3 = \frac{W_3}{T - T_0}.$$

На рис. 3 представлена

кривая (3) зависимости (потерь с боковой поверхности образца) от температуры. Пользуясь этой кривой, можно найти значение A во всем температурном интервале от комнатной до 900°K . После этого всем температурным интервалом от комнатной до 900°K . После этого находим поток тепла, входящего в образец; в рабочих условиях $Q_1 = W - \kappa_1 \cdot \Delta T_1$ и соответственно поток тепла, выходящего из образца, $Q_2 = \kappa_2 \cdot \Delta T_2$. Здесь W_1 и W_2 — мощности, подаваемые из печи; ΔT_1 и ΔT_2 — перепад температур между печками и внешним экраном уже в рабочих условиях.

Предложенная методика имеет общие черты с методом, описанным в [5 и 6], однако обладает рядом преимуществ:

1. Уравнение теплопроводности здесь решается не приближенно (в параболическом приближении), а точно.

2. Коэффициент теплопроводности и эффективный тепловой поток определяются несколькими независимыми способами.

3. Отсутствие необходимости сверления отверстий в образце.

4. Данная методика позволяет измерять удельную теплопроводность и по способу, предложенному в работе [6].

Контрольные измерения образцов PbS, произведенные на описанном выше приборе и рассчитанные по формуле (11), дали хорошее согласие с данными, полученными другими известными методами [3, 4, 5] (рис. 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Девяткова Е. Д., Петров А. В., Смирнов И. А., Мойжес Б. Я. ФТТ, 2, 738 (1960).
2. Алиев М. И. Теплопроводность полупроводников. Изд. АН Азерб. ССР, 1963.
3. Петров А. В. В кн. "Термоэлектрические свойства полупроводников". Изд. АН СССР, 1963.
4. Slack G. Phys. rev., 120, 782 (1960).
5. Кулиев Х. М. Изв. АН Туркм. ССР, серия физ.-техн., № 6, 9, (1962).
6. Стилбанс Л. С., Кулиев Х. М. Отчет ИПАН и ВНИИТ АН СССР, 1963.
7. Карслоу Г. и Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд. "Наука", 1964.

К. Ш. Гәһрәманов, Л. С. Стилбанс

Горујучу цилиндр олмајан һалда истиликкечирмәнин температур асылылығынын өлчүлмәсинин стансионар методу

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатлар нәтижәсиндә $300-900^\circ \text{K}$ температур областында хүсуси истиликкечирмәнин һесабыланмасы үчүн садә дүстур алынмышдыр. Бу һалда, енинә температур градијенти нәзәрә алынмаса, истиликкечирмә тәнлијини дәгиг һәлл етмәк олар.

Истиликкечирмә әмсалы вә эффектив истилик сели бир нечә асылы олмајан үсулларла тәјин едилир.

Д. И. ЛАЙНЕР, Г. К. САМЕДОВ

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ НА ОСНОВЕ ТЕЛЛУРИСТОГО СВИНЦА

Исследование термоэлектрических свойств теллуристого свинца на его основе твердых растворов представляет важное значение с точки зрения генерирования различных видов энергии. Из фундаментальных работ акад. А. Ф. Иоффе известно, что в многокомпонентных твердых растворах появляются нейтральные примесные центры, на которых фононы сильнее рассеиваются, чем электроны. Это приводит к повышению эффективности полупроводниковых материалов, применяемых в тепловых преобразователях [1].

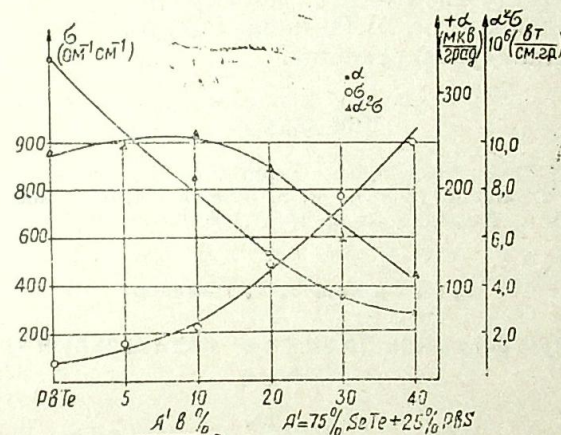


Рис. 1. Зависимость коэффициента термо-э.д.с., электропроводности и термоэлектрической мощности от состава сплавов системы PbTe—SnTe—PbS; $A' = 75\% \text{ SnTe} + 25\% \text{ PbS}$

Настоящая статья посвящена изучению термоэлектрических свойств твердых растворов тройной системы PbTe—SnTe—PbS. Образцы, полученные обычным металлокерамическим способом, отжигались при 600°C в течение трех суток. Результаты рентгеноструктурных и микроструктурных исследований показывают, что в тройной системе PbTe—SnTe—PbS существуют ограниченные твердые растворы.

В процессе работы производились измерения электропроводности, коэффициента термо-э. д. с., э. д. с. Холла при комнатной температуре, вычислены концентрация и подвижность носителей тока в пред-

положении, что рассеяние носителей тока происходит в основном на акустических колебаниях кристаллической решетки.

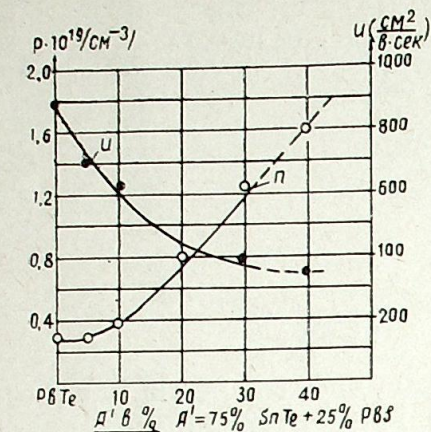


Рис. 2. Зависимость концентрации и подвижности носителей тока от состава сплавов системы PbTe—SnTe—PbS

тока ρ возрастает, а подвижность уменьшается за счет появления дополнительных центров рассеяния носителей тока. Причиной роста концентрации носителей тока ρ является то, что с повышением содержания растворимого компонента A^1 увеличивается количество вакансий из-под Sn за счет нестехиометричности SnTe [2—3]. Поскольку повышение концентрации носителей тока преобладает над уменьшением подвижности, электропроводность сплавов сечений PbTe— A^1 по составу увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Ф. Полупроводниковые термоэлементы. М.—Л., 1960.
2. Hauston B. B. and Allgaier R. S. Bule. Amer. phys. soc., 1964, v, 9, № 3
3. Ефимова Б. А., Кайданов В. И., Мойжес Б. Я., Черник И. А. ФТТ 1965, 7, № 8.

Д. И. Лайнер, Н. Г. Самедов

Теллурлу гургушуи эсасында бәзи бәрк мәһлулларын термоэлектрик хассәләри

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда PbTe—SnTe—PbS үчгәт системи хәлитәләринин (бәрк мәһлулларын) электриккечирмә, термо ЕНГ әмсалларынын, һәм дә электрик жүкдашычыларынын концентрасијасы вә жүрүклүјүнүн тәркибдән асылылыгы өјрәнилмишдир.

Мәгаләдә көстәрилән шәкилләрдән ајдын олур ки, PbTe-да һәллә олән $A^1 = 75\%$ SnT + 25%PbS компонентинин мигдары артдыгча электриккечирмә әмсалы артыр, термо ЕНГ әмсалы вә термоэлектрик күчү азалыр. Буна сәбәб одур ки, A^1 компонентинин мигдары артдыгча, SnTe-ун бәзи өзүнәмәхсус кристаллик гурулушу илә әләгәдар оларат, электрик жүкдашычыларынын концентрасијасы артыр. Јүкдашычыларынын жүрүклүјүнүн азалмасы исә A^1 компонентинин мигдары артдыгча бәрк мәһлулларын тәркибинин кетдикчә мүрәккәбләшмәсилә, башга сөзлә, бәрк мәһлулларда жүкдашычылар үчүн јени-јени сәпәләнмә мәркәзләринин јаранмасы илә изаһ олунур.

С. К. ЗЕЙНАЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗВЕЗД-СВЕРХГИГАНТОВ

1в: η Leo (AO), γ Cyg (F8), ϵ Peg (k2)

Спектрограммы изучаемых звезд были получены на 2,6-м рефлекторе Крымской астрофизической обсерватории при помощи эшелюного спектрографа, установленного в фокусе кудә, в течение 1964 года с дисперсией 1,3 Å/мм, в интервале длин волн $\lambda\lambda$ 3660—6845 Å. Методика обработки материала и определения параметров (температуры возбуждения T_v и ионизации T_{ii} , турбулентные скорости $|v_t|$, электронное давление $\lg p_e$ и др.), которые характеризуют атмосферы звезд, были подробно изложены в [1—3].

В настоящей статье дается общий анализ физических условий в атмосферах изучаемых звезд.

1. На основе данных, опубликованных в [2, 3], был построен график (рис. 1), показывающий изменение $\bar{T}_v$, $\bar{T}_{ii}$, $T_{эфф.}$ со спектральным классом. $T_{эфф.}$ были взяты из [4, 5]. Сплошная и пунктирная кривые показывают зависимость эффективной температуры от спектрального класса [4 и 5]. Из рис. 1 видно, что, как было сказано ранее [3, 6], в среднем для каждой исследуемой звезды соблюдается неравенство $\bar{T}_v < \bar{T}_{ii} < T_{эфф.}$. Это объясняется тем, что слои звезды, где эффективно образуется непрерывный спектр, расположены в среднем глубже и, следовательно, имеют более высокую температуру, чем слои, где образуются линии поглощения, на основе которых определяются T_v и T_{ii} [6].

2. Полученные нами значения $\lg \bar{p}_e$ по линиям водорода и других элементов, находящихся в двух соседних стадиях ионизации, для η Leo, γ Cyg и ϵ Peg представлены на рис. 2 в зависимости от спектрального класса. Значения $\lg \bar{p}_e$ для других звезд-сверхгигантов различного спектрального класса были взяты из разных работ [6—11]. Мы сохранили те же обозначения, которые были приняты в [6]. Величины $\lg \bar{p}_e$, найденные нами для изучаемых звезд, указаны малыми точками, кружками и крестиками. Здесь надо отметить, что в значениях $\lg \bar{p}_e$, определенные другими авторами методом Унзоляда на основе водородных линий, были введены поправки за электронное расширение и за переналожение крыльев линий [12]. Из графика видно, что $\lg \bar{p}_e$, найденные одним методом, по линиям водорода (на рис. 2 однородные значки кружки или крестики) не показывают сильного изменения со спектральным классом до спектрального класса F3. Определяемые по линиям металлов с помощью формулы Саха $\lg \bar{p}_e$

(на рис. 2, точки) с понижением температуры (в сторону холодных звезд) уменьшаются.

Изменение температуры гораздо сильнее влияет на степень ионизации, чем изменение давления [13]. Таким образом, при понижении

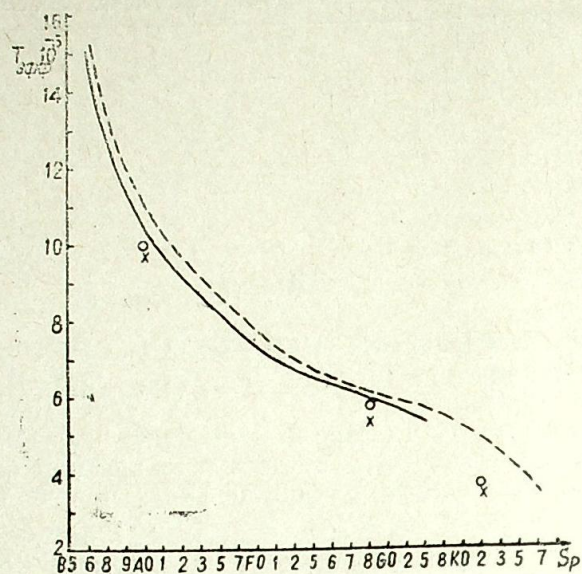


Рис. 1. Изменение температуры возбуждения, ионизации и эффективной температуры (T_v , T_i , $T_{\text{эфф}}$) со спектральным классом:

— — эффективные температуры по [4];
— — по [5];
○ — температура ионизации;
× — температура возбуждения

температуры содержание ионизованных атомов уменьшается и в то же время увеличивается содержание нейтральных атомов и, следовательно, уменьшается значение $\lg p_e$.

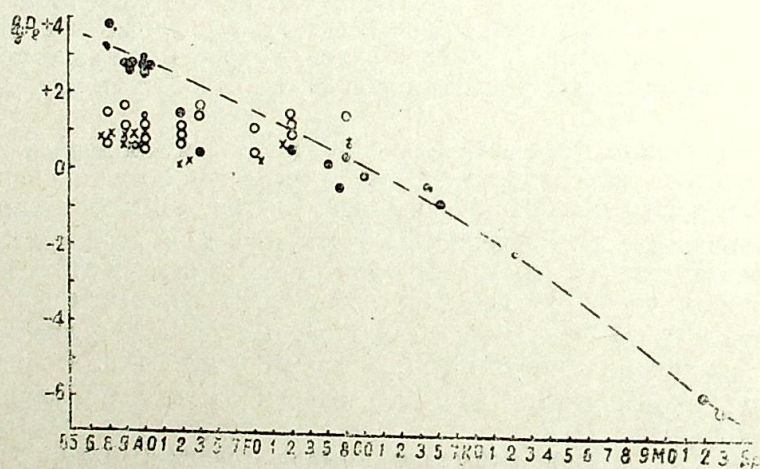


Рис. 2. Изменение электронного давления ($\lg p_e$) со спектральным классом:

● — по формуле Саха;
○ — по методу Унзольда;
× — по формуле Инглиса-Теллера.

3. Чтобы проследить характер изменения температуры (T_v и T_i) и турбулентной скорости (v_t) с глубиной в атмосферах изучаемых звезд, нам необходимо знать эффективные глубины образования ($\tau_{\text{эфф}}$) отдельных групп линий. Однако вычисление $\tau_{\text{эфф}}$ является сложной задачей. Особенно в нашем случае, где было использовано большое число линий поглощения [1—3], поэтому мы решили определять $\tau_{\text{эфф}}$ наиболее простым методом.

В 1957 году [14] были вычислены спектральные характеристики для 50 моделей фотосфер, имеющих поверхностные температуры 4000—25000° К, с $g = 10^1 - 10^5$ см/сек². Зависимость между температурой и оптической глубиной для каждой фотосферы вычислялась по следующей формуле:

$$T^4(\tau_R) = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau_R \right), \quad (1)$$

где τ_R — Росселандово среднее, T_0 — поверхностная температура. Спектральные характеристики были вычислены как функции параметров T_0 и g .

Детальные исследования звездных спектров [15] показывают, что для некоторых звезд истинная зависимость $T(\tau_R)$ сильно отличается от той, которая дается формулой (1). Это различие в основном относится к внешним слоям фотосферы для $\tau_R \leq 0,6$, где образуется большая часть спектральных линий. Оно может быть еще больше для сверхгигантов, обладающих протяженными атмосферами.

Учитывая, что при $\tau_R \leq 0,6$ температура изменяется быстрее, чем показывает формула (1), в 1967 году де Ягер и Невен [15] вычислили новые модели 60 фотосфер. Они предполагали, что спектральные характеристики атмосфер звезд являются функциями трех параметров: $T_{\text{эфф}}$, g и $\frac{dT}{d\tau}$ в области $\tau_R \leq 0,6$. В работе [15] температура была вычислена по формуле

$$T^4 = \frac{1}{2} T_{\text{эфф}}^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau_R \right). \quad (2)$$

Кроме того, в ней дается простой метод (стандартная модель) для теоретического вычисления $T(\tau_R)$ с глубиной в атмосфере (фотосфере) для любой звезды с известной $T_{\text{эфф}}$. Таким методом вычислялась $T(\tau)$ для каждой изучаемой звезды. После этого мы определяли $\tau_{\text{эфф}}$ методом, который был изложен в [2]. Таким образом, теоретически определенные значения T_v и T_i и наблюдаемые T_v и T_i нанесены на рис. 3 (а, б, с), из которого виден характер увеличения T_v и T_i с глубиной в атмосфере звезд.

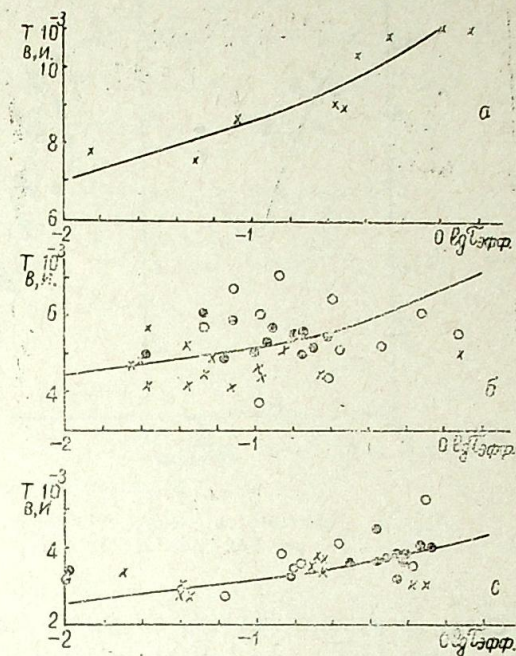


Рис. 3. Зависимость температуры возбуждения и ионизации от $\lg \tau_{\text{эфф}}$: а) для η Leo; б) для η Cyg и с) для ϵ Peg.

Сплошная кривая — теоретическая зависимость T ;
○ — температура ионизации;
● — температура возбуждения для нейтральных атомов;
× — температура возбуждения для ионов.

4. Изменение микротурбулентной скорости v_t с $\tau_{эфф.}$ для изучаемых звезд показано на рис. 4 (а, б, в). Из графика видно, что для η Leo и γ Cyg (рис. 4а, б) v_t сначала уменьшается до определенного минимума, а затем снова увеличивается. Микротурбулентная скорость

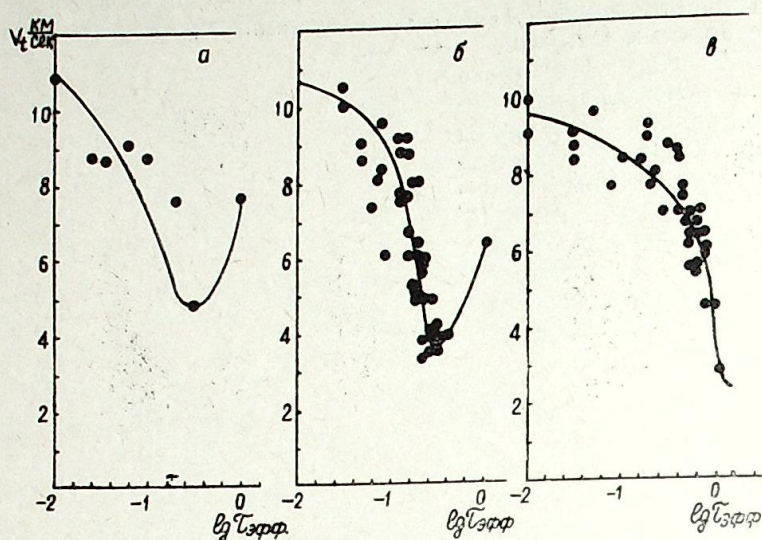


Рис. 4. Зависимость микротурбулентной скорости v_t от $lg \tau_{эфф.}$: а — для η Leo; б — для γ Cyg; в — для ϵ Peg.

в среднем в атмосфере η Leo уменьшается от 11,0 до 4,7 км/сек при изменении $lg \tau_{эфф.}$ от $-2,00$ до $-0,5$, после чего увеличивается от 4,7 до 7,6 км/сек при изменении $lg \tau_{эфф.}$ от $-0,5$ до $0,04$. В случае γ Cyg v_t в среднем уменьшается от 9,5 до 3,6 км/сек при таких же изменениях $lg \tau_{эфф.}$, как и у η Leo. При изменении $lg \tau_{эфф.}$ от $-0,5$ до $0,4$ v_t увеличивается от 3,6 до 6,3 км/сек. В спектре ϵ Peg микротурбулентная скорость уменьшается в среднем от 9,5 до 2,8 км/сек при изменении $lg \tau_{эфф.}$ от $-2,00$ до $0,03$.

Кроме того, из рис. 4 видно, что зависимость микротурбулентной скорости от $lg \tau_{эфф.}$ (ϵ_i) в атмосферах более холодных звезд имеет более глубокий минимум, чем в атмосферах горячих звезд, и этот минимум сдвинут в сторону больших $lg \tau_{эфф.}$ (больших ϵ_i). Это обстоятельство можно легко объяснить, если считать одним из возможных источников турбулентных движений наличие в атмосферах звезд неустойчивой конвективной зоны [10]. Так, верхняя граница конвективной зоны у горячих сверхгигантов в спектральном интервале B8—F8 находится в более верхних слоях атмосферы ($\tau_k < 0,6$), а в атмосферах холодных звезд (F—G5) она уходит в ее глубокие слои. У еще более холодных сверхгигантов (K0—K5) конвективная зона уходит на глубины до $\tau_k \approx 1,6$ [6].

Выход верхней границы конвективной зоны в верхних слоях атмосферы звезд соответствует увеличению минимальных значений турбулентных скоростей, а уход в глубокие слои сопровождается уменьшением минимальных значений турбулентных скоростей. Увеличение v_t после минимума обусловлено ростом скоростей с продвижением в более глубокие слои конвективной зоны. Аналогичную картину мы наблюдаем в случае Солнца [16]. В заключение, пользуясь случаем, приношу благодарность И. М. Копылову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зейналов С. К., Копылов И. М. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1967, 36, 155.
2. Зейналов С. К. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1967, 37, 191.
3. Зейналов С. К. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, (в печати).
4. Копылов И. М. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1963, 30, 69.
5. Strand K. A. „Basic astronomical data“, 1963.
6. Копылов И. М., Витриченко Э. А., Галкина Т. С., Голландский О. П. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1963, 30, 42.
7. Витриченко Э. А., Копылов И. М. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1962, 27, 241.
8. Галкина Т. С., Копылов И. М. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“ 1962, 28, 35.
9. Боярчук М. Е. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1962, 28.
10. Мустель Э. Р. Звездные атмосферы. Гостехиздат. 1860.
11. Abt H. A. Astrophys. J., 1960, 131, 199.
12. Копылов И. М. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 1969, 35, 11.
13. Унзольд А. Физика звездных атмосфер. ИЛ, 1949.
14. Jager C., de and Neven L. Ann. obs. Royal Belg., 1957.
15. Jager C., de and Neven L. Bull. Astron. Ins. Netherl. Supp. Ser., 1967, 2, 4.
16. Schwarzschild M. Astrophys. J., 1961, 134, 1. 1.

С. Г. Зейналов

1а: η Leo (A0), γ Cyg (F8), ϵ Peg (K2) улдузларынын бэ'зи характеристикасы

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатда η Leo (A0), γ Cyg (F8) и ϵ Peg (K2) ифрат нэхэнк улдузларынын хэжэчанлашма, ионлашма вэ еффе́ктив те́мперату́рларынын ($\bar{T}_в$, $\bar{T}_и$, $T_{эфф.}$) спектрал синфэ көрэ дэжи́шмэ́си анализ едилмиши́др.

Мүэ́жэ́н олунмушду́р ки, Саха формулу илэ тэ'јин едилэн електрон тэ́зјиги ($lg Pe$) металлар үчүн B5—M2 интервалында спектрал синфэ көрэ дэжи́шир. Ејни заманда, ајдынлашдырылмышдыр ки, микротурбулент сүр'эт (v_t) $\tau_{эфф.}$ дэринлијинин артмасы илэ азалыр.

Р. И. ИБАДОВ

К ВОПРОСУ ИСТОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ (I)

В развитии математики средневекового Востока особое место занимает составление таблиц тригонометрических функций. Несмотря на то, что развитию тригонометрии посвящен целый ряд работ, однако история тригонометрических таблиц средневекового Востока изучена пока недостаточно. Ученые Востока нашли методы решения плоских, сферических треугольников и на основе многочисленных способов вычисления значений тригонометрических функций составили таблицы тригонометрических функций. Эти таблицы необходимы были для решения многих задач сферической астрономии, вследствие чего их включили в астрономические каталоги „Зидж-и“.

Величайшим достижением в составлении таблиц в средних веках являлись таблицы тригонометрических функций, созданные Улугбеком. В целях изучения точности тригонометрических таблиц древних и средневековых ученых Востока автором расшифрованы таблицы Птолемея, индусских ученых, Ахмед Ибн Абдулла Хабашул Хасиба Мервази, Мухаммед Ибн Муса Хорезми, Кия Кушиар Ибн Лаббан ал-Джили, Абу-Рейхан Мухаммед Ибн Ахмед Бируни и Улугбека, а затем переведены с шестидесятиричной системы в десятичную (вычисления производились на электронно-вычислительных машинах) и результаты сличены с соответствующими современными таблицами.

Таблица 1

Начало таблицы синусов индусских ученых

Град/мин	Синус	Разность	В десятичной системе		Значения синусов современной таблицы	Отклонения от современных таблиц
			синус	разность		
30°45'	225	224	0,065445	65154	0,065403	-42 · 10 ⁻⁶
70°30'	449	222	0,130599	64573	0,130536	-63 · 10 ⁻⁶

В качестве примера приведем небольшие части из исследованных таблиц тригонометрических функций. Впервые таблицы тригонометрических функций—таблицы „Дуги—хорды“ были составлены Клавдием Птолемеом (II в.), которые включены в его капитальный труд „Алмагест“ ([1], стр. 38—44). В этих таблицах значение хорд определено от 30' до 180° включительно, для которых шаг аргумента равен 30'.

Таблица синусов впервые была составлена индусскими учеными в V—VI веках н. э. Ниже даем отрывок из нее (табл. 1). Эта таблица

была составлена только для первой четверти окружности, для которой шаг аргумента равен двадцать четвертой доле прямого угла.

Первыми тригонометрическими таблицами в странах ислама были таблицы сред евекового туркменского математика и астронома Хабашул Хасиба Мервази (764—864), уроженца Мерва (ныне Мары), и таблицы тригонометрических функций узбекского ученого Мухаммед Ибн Муса Хорезми (780 около 850 гг.). Хабашул Хасибом составлены таблицы синусов от 15' до 180°, для которых шаг аргумента равен 15' и таблицы тангенсов от 30' до 45°, где шаг аргумента равен 30' (табл. 2). Точность значения синусов и также тангенсов Хабашул Хасиба определена до третьего шестидесятиричного знака, соответствующего до шестого десятичного знака.

Таблица 2

Начало таблицы синусов Хабашул Хасиба

Град/мин	Град/мин	sin x по Хабашул Хасибу		Значения синусов в современной таблице	Отклонения от современной таблицы
		в шестидесятиричной системе	в десятичной системе		
0°15'	179°45'	0°15'42"30"	0,004368	0,004373	-5 · 10 ⁻⁶
0°30'	170°30'	0°31'25"00"	0,008727	0,008726	-1 · 10 ⁻⁶

Известный ученый математик и астроном Хорезми, уроженец Хорезма, в период его деятельности в Багдадской обсерватории, составил тригонометрические таблицы синусов и котангенсов, которые по своей структуре в корне отличаются от всех остальных тригонометрических таблиц. Таблица синусов состоит из двух главных частей: столбцов чисел и синусов. Под столбцами чисел даются графы—знаки Зодиака (двенадцатые доли эклиптики, в частности двенадцатые доли окружности) и градусы, которые повторяются по четыре раза, притом каждый из них дополняет друг друга до 30°, а под синусом даны значения синусов в шестидесятиричной системе. Таблица котангенсов состоит также из двух частей: число (высота) и тень (перевод арабского слова ал-зилул тамом, означающий котангенс), а под тенью даны дюймы (перевод арабского слова исба—единицы измерения пальцевых теней, равны 1/12 длины измерительного шеста, в частности котангенс 45° равен 12 дюймам) и минуты.

Автором дана формула перехода от дюймов через шестидесятиричную в десятичную систему, которая здесь не приводится. Тригонометрические таблицы Хорезми составлены в интервале от 0 до 90°, в которых шаг аргумента равен одному градусу. Здесь приводится пример из тригонометрических таблиц Хорезми (табл. 3). Из сравнения видно, что точность значения таблицы синусов Хорезми определена до третьего шестидесятиричного или до шестого десятичного знака, а точность таблицы котангенсов определена до второго шестидесятиричного, что соответствует четвертому десятичному знаку.

Египетский ученый Ибн Юнис (умер в 1009 г.) дал формулу для определений синуса одного градуса:

$$\sin 1^\circ = 1^p 2^i 49^{ii} 43^{iii} 28^{iv} = 0,01745 24280.$$

Здесь верными являются только первые три шестидесятиричных знака или ошибка появляется в восьмом десятичном знаке и она равна 0,0 000 000 216.

Весьма простой способ для вычисления $\sin 1^\circ$ предложил Кия Кушияр Ибн Лаббан ал-Джили (974—1024). Согласно Бирджанди ([5], л. 48 б), Кия Кушияр вычислил приближенное значение $\sin 1^\circ$, заменяя

$$\sin 1^\circ = \sin \left(\frac{15^\circ}{16} + \frac{15^\circ}{16^2} + \frac{15^\circ}{16^3} + \dots + \frac{15^\circ}{16^n} + \dots \right)$$

$$\text{на } \sin 1^\circ = \sin \left(\frac{15^\circ}{16} + \frac{15^\circ}{16^2} + \frac{15^\circ}{16^3} \right).$$

Им получено для синуса одного градуса следующее значение:

$$\sin 1^\circ = 1^p 2^i 49^{ii} 43^{iii} 10^{iv} 24^v 8^vi = 0,017\,452\,404\,835.$$

Если сравнить с результатами, полученными ал-Каши (XV в.), то можно сказать, что Кия Кушияр получил неверные величины начиная с четвертого шестидесятиричного знака или погрешность в десятичной системе равна $+0,000\,000\,001\,602$.

Таблица 3

Начало таблицы котангенсов Хорезми ([4], стр. 93)

Долгота, т. е. вы- сота	Тень $\operatorname{ctg} x$ по Хорезми				Значения котангенсов в современ- ной таблице	Отклонения от современ- ной таблицы
	дюймы	минуты	в шестиде- сятиричной системе	в десятич- ной системе		
1	687	29	57 ^m 17 ^p 25'	57,2902	57,2900	$-2 \cdot 10^{-4}$
2	343	38	28 ^m 38 ^p 10'	28,6361	28,6459	$+2 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4

Часть таблицы синусов Кия Кушияра ([6], л. 29а)

Минуты	sin x по Кия Кушияру				Значение синусов в современной таблице	Отклонения от современной таблице
	0°			0°		
	0 ^p	0'	0''	0,000000		
18'	0 ^p	18'	50''	0,005232	0,005236	+4·10 ⁻⁶
21'	0 ^p	21'	59''	0,006106	0,006104	-2·10 ⁻⁶

В „Зидж-и“ Кия Кушияра Ибн Лаббана ал-Джили—„Китоб аз Зидж“ имеется таблица синусов, которая в начале для каждого градуса от 0' до 15' дана через одну минуту, а от 15' до 60' через 3' ([6], лл. 29 а—37 б). Принцип составления таблиц Кия Кушияра (971—1024) при каждом градусе от 0' до 15' совпадает с принципом составления таблиц Насирэددина Туси, а затем она меняет свой шаг аргумента. Таблицы Кия Кушияра составлены так, что значения функции синуса при целых градусах и изменения их в долях от 0, до 60' даны раздельно. Таблицы синусов Кия Кушияра составлены от 0 до 90°. В них значения синусов даны до четвертого шестидесятиричного или до седьмого десятичного знака (табл. 4). Сравнение показывает, что точность таблицы Кия Кушияра определена до третьего шестидесятиричного, соответствующего шестому десятичному знаку. Таб-

Примечание. В табл. 3 буква м над числом, взята из арабского слова марфу, означающего возведение: $1^m = 60^p$, $1^p = 60^i$, $1^i = 60^{ii}$, $1^{ii} = 60^{iii}$, $1^{iii} = 60^{iv}$ и т. д.

лицы Кия Кушияра дальнейшее свое развитие получили у Насирэددина Туси.

В заключение отметим, что учеными древнего и средневекового Востока включительно до X века были составлены шестизначные тригонометрические таблицы, точность которых не превышала 3—5 десятичных знаков, и эти таблицы оказали существенное влияние на дальнейшее развитие таблиц тригонометрических функций.

Рассмотрим создание таблиц тригонометрических функций Бируни, Насирэددина Туси и Улугбеком. В основе вычислений Абу-Райхон Бируни (973—около 1050), как и у других ученых, лежал синус одного градуса. Вычисление $\sin 1^\circ$ у Бируни было основано на определении стороны правильного вписанного девятиугольника, для которого он получил кубическое уравнение:

$$x^3 + 1 = 3x \quad ([1], \text{стр. } 298-299).$$

Решая данное уравнение, он определил $x = 0^m 20^p 50^i 16^{ii} 1^{iii}$, который является значением $\sin 20^\circ$, на основе чего вычислил

$$\sin 1^\circ = 0^m 01^p 02^i 49^{ii} 43^{iii} 11^{iv} = 0,0174524061.$$

Это значение верно только до кварты или ошибка появляется до десятого десятичного знака и она равна $\pm 0,000\,000\,000\,000\,3$.

На основе найденного значения синусов одного градуса были составлены тригонометрические таблицы Бируни, которые состоят из таблиц синусов и тангенсов. Таблицы синусов имеют шаг аргумента в 30', значения которых даны в интервале от 15' до 90°, а у таблиц тангенсов шаг аргумента равен 1° и она определена от 0 до 90°.

Таблица 5

Сравнение синусов Улугбека ([8], лл. 20 б—32 б)

	По Улугбеку						По Барку	Разность	
	в шестидесятиричной системе			в десятичной системе					
7°30'		7P	49'	53''	39'''	27 ^{IV}	0,1305261922	0,1305261922	0
17°30'		18P	2'	32''	27'''	10 ^{IV}	0,3007057999	0,3007057955	-4·10 ⁻¹⁰
27°30'		27P	42'	17''	42'''	2 ^{IV}	0,4617486137	0,4617486132	-5·10 ⁻¹⁰
37°30'		36P	31'	32''	28'''	6 ^{IV}	0,6087614288	0,6087614290	+2·10 ⁻¹⁰
47°30'		44P	14'	11''	54'''	17 ^{IV}	0,7372773367	0,7372773368	+10 ⁻¹⁰
57°30'		50P	36'	12''	33'''	8 ^{IV}	0,8433914455	0,8433914458	+3·10 ⁻¹⁰
67°30'		55P	25'	57''	58'''	44 ^{IV}	0,9238795320	0,9238795325	+5·10 ⁻¹⁰
77°30'		58P	34'	39''	56'''	15 ^{IV}	0,9762960069	0,9762960071	+2·10 ⁻¹⁰
87°30'	59P	56'	34''	24'''	57 ^{IV}	6 ^V	0,999048221579	0,999048221581	+2·10 ⁻¹²
88°30'	59P	58'	45''	58'''	55 ^{IV}	54 ^V	0,999657324979	0,999657324975	+10 ⁻¹²
89°30'	59P	59'	51''	46'''	31 ^{IV}	22 ^V	0,999961923064	0,999961923064	0

Вычислением синуса одного градуса занимался выдающийся азербайджанский ученый Мухаммед Насирэددин Туси (1201—1274). Его метод нами будет изложен особо. Насирэددин Туси для синуса одного градуса получил следующее значение:

$$\sin 1^\circ = 1\,2^i\,49^{ii}\,42^{iii}\,57^{iv}\,15^v\,33^{vi} = 0,017452388117.$$

Это значение верно только до третьего шестидесятиричного знака или ошибка появляется с седьмого десятичного знака и равна $+0,0000001832$.

Насирэددин Туси (1201—1274) составил весьма распространенные тригонометрические таблицы, которые включил в астрономический каталог Марагинской обсерватории „Зидж-и Эльхани“. Принцип составления таблиц Насирэددина Туси тот же, что и у Кия Кушияра

Ибн Лаббана ал-Джили. Отличие состоит в том, что у Насирэддина Туси таблицы синусов при каждом градусе от 1' до 60' даны через 1', а у Кия Кушияра при каждом градусе от 0' до 15'—через 1' и от 15' до 60'—через 3'. Кроме того, у Насирэддина Туси имеются таблицы тангенсов, которые отсутствуют у Кия Кушияра. Таблицы Насирэддина Туси были переведены с шестидесятиричной в десятичную систему азербайджанским ученым Г. Д. Мамедбейли.

Улугбеком (1394—1449) были составлены тригонометрические таблицы с большой точностью. Значения синусов в них первоначально даются до пятого, к концу таблицы до шестого, а для тангенсов до пятого шестидесятиричного знака, соответствующего 10—12 десятичным знакам. Сравнение таблицы Улугбека с таблицей Барка показало их правильность и точность. В качестве примера ниже приводим некоторые части из этих таблиц. Сравнение показывает, что точность тригонометрических таблиц Улугбека определена до 4—5 знака в шестидесятиричной системе, что соответствует 0,000 000 01—0,000 000 000 1 в десятичной системе (табл. 5).

В заключение отметим, что из всех вышеприведенных таблиц тригонометрических функций многозначными являются 10—12-значные таблицы Улугбека. До Улугбека были составлены шестизначные таблицы тригонометрических функций, после него ученые Запада Региомонтан, Николай Коперник и Симон Стевин ограничивались лишь 5—8 знаками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алмагест (греч. текст с фр. переводом), 7—18. Париж, 1913.
2. Braunmühle B. V. Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter. Leipzig, 1874.
3. Салих Зеки Асор бакиййа (на турецком яз.) Стамбул, 1338 х. (1919), Библ. АН Азерб. ССР.
4. Мухаммед Хорезми. Математические трактаты, перевод Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда. Комментарии Розенфельда, Ташкент, 1961.
5. Абд Ал-Али Бирджанди Шарх и Зидж-и Улугбека (на таджик. и перс. яз.), Рукопись № 704, ИВ-АН Узб. ССР.
6. Китоб аз-Зидж (на араб. яз.), рукопись Парижской национальной библиотеки 5968.
7. Мамедбейли Г. Д. Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насирэддин Туси. АН Азерб. СССР, 1961.

Р. И. Ибадов

Тригонометрик чэдвэллэрин тарихинэ даир

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә тригонометрик функцијаларын чэдвәли тарихиндән бәһс едилмишдир. Илк тригонометрик чэдвәлләр јалныз синус вә тангенсләри әһәтә едирди. Нәмин чэдвәллэрин инкишаф тарихи Нәбәшүл Нәсибдән тутмуш Улугбәјә гәдәр изләнилмишдир.

Бу тәдигатдан мүјјәл олунмушдур ки, Нәсирәддин вә Улугбәј тәрәфиндән һазырланмыш тригонометрик функцијалар чэдвәллэринин хусуси үстүнлүкләри вардыр.

УДК 539.55

А. Б. ГАБИБОВ, А. Б. ЦАТУРЯНЦ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКОСТИ ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ НЕФТЕЙ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

Известно, что в природных условиях нефть насыщена смесью углеводородных газов, в основном метана и небольшого количества его гомологов. Изучение вязкости нефтей в условиях полного насыщения их газами, а также выше давления насыщения представляет большой практический интерес. Как видно из литературных данных, вязкость нефтей в условиях насыщения их газом изучалась для сравнительно небольшой области давлений и температур—не выше 300 атм и 100°C [1,2].

Настоящая статья посвящена результатам изучения вязкости газонасыщенных нефтей. В газонасыщенном состоянии исследовано пять с плотностью 0,8219; 0,8350; 0,8558; 0,8875; 0,8875; 0,8939 г/см³ и с начальными вязкостями (при 20°C и 1 атм) 3,49; 4,56; 6,58; 8,90; 17,63 спз. Выбранные для исследования нефти являются наиболее распространенными в практике нефтедобычи с точки зрения пределов изменения их вязкости. Использованный в опытах газ был отобран из месторождения Карабагы. Опыты проводились на экспериментальной установке, сконструированной и изготовленной в Институте проблем глубинных нефтегазовых месторождений АН Азербайджанской ССР для измерения вязкости нефтей при высоких давлениях и температурах [1].

Экспериментальные данные в виде изотерм изменения вязкости (изменения вязкости от давления при постоянной температуре) представлены на рис. 1, 2. Для иллюстрации изменения вязкости газонасыщенной нефти от температуры при постоянном давлении показаны на рис. 3 (изобарическое изменение вязкости газонасыщенной нефти с начальной вязкостью 3, 4 9 спз).

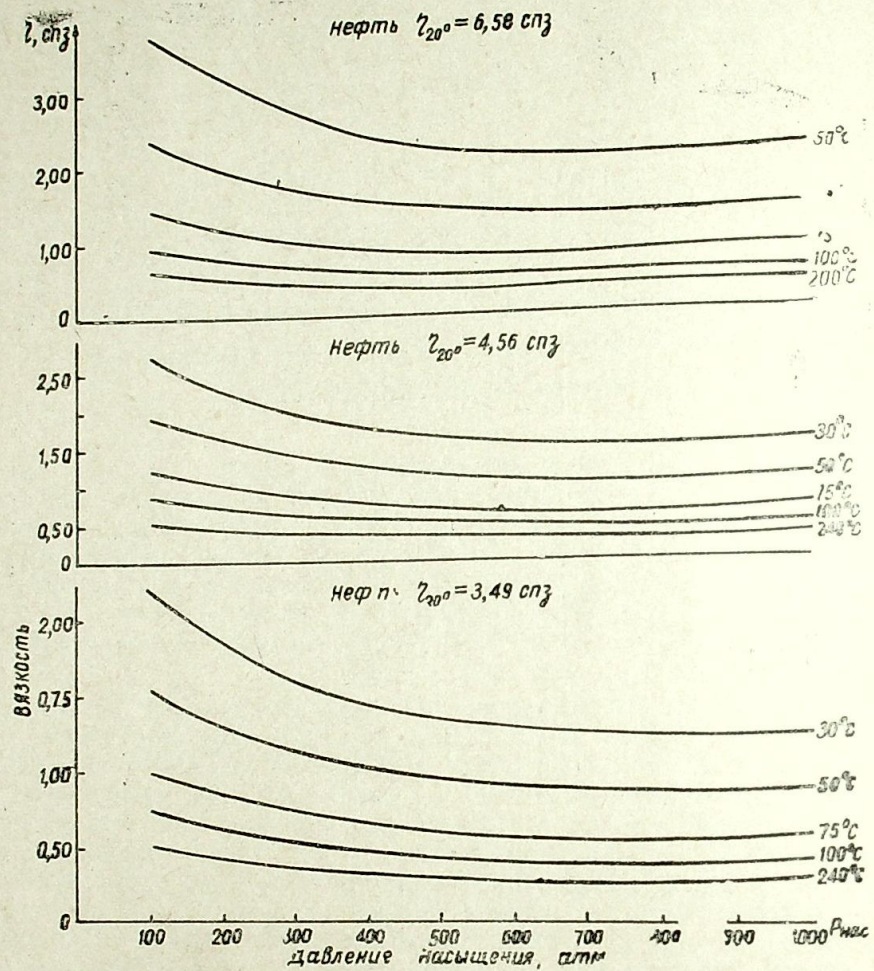


Рис. 1

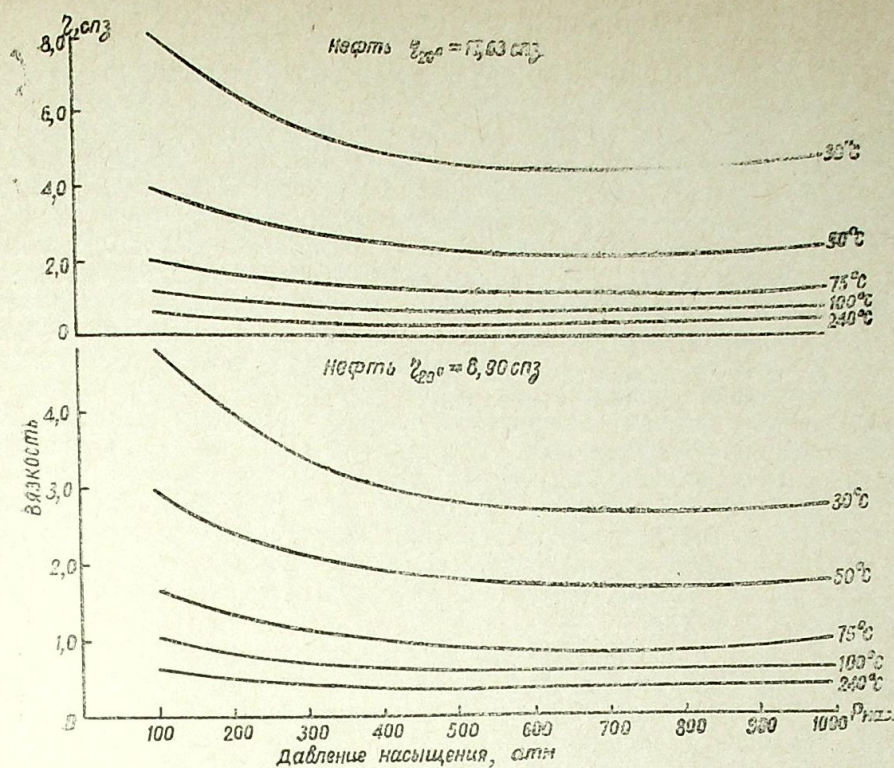


Рис. 2

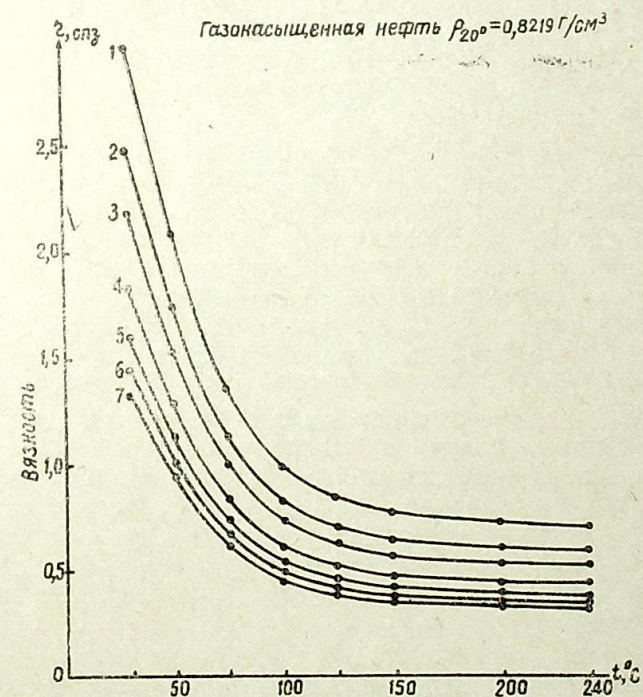


Рис. 3

1— $P_{\text{нас}} = 0$ ат; 2— $P_{\text{нас}} = 50$; 3— $P_{\text{нас}} = 100$ ат;
4— $P_{\text{нас}} = 200$ ат; 5— $P_{\text{нас}} = 300$; 6— $P_{\text{нас}} = 400$ ат;
7— $P_{\text{нас}} = 500$ ат.

АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Этот анализ показывает, что температурная зависимость вязкости газонасыщенных нефтей для данного давления в качественном отношении не отличается от аналогичной зависимости для дегазированных нефтей [2]: изобары в координатах $\eta-t$ примерно до $150-180^\circ\text{C}$ показывают резкое уменьшение вязкости с ростом температуры, далее вязкость практически не зависит от температуры.

Однако это касается лишь характера отдельных изобар. Для каждой же нефти в целом, как показывают экспериментальные данные, из-за того, что влияние растворенного газа на вязкость нефти значительно превышает влияние давления, изобары в координатах $\eta-t$, что можно усмотреть из рис. 3, располагаются в порядке, обратном порядку расположения их для дегазированных нефтей, т. е. в случае газонасыщенных нефтей изобары, отвечающие меньшему давлению, располагаются выше. Кроме того, экспериментальные данные показывают, что чем выше начальная вязкость нефти, тем резче изменение вязкости от давления насыщения. Например, при 30°C вязкость нефти с плотностью $\rho = 0,8558\text{ г/см}^3$, равная $5,28\text{ сПз}$, уменьшилась до $2,3\text{ сПз}$ при давлении насыщения 700 атм , а при 240°C , когда начальная вязкость равна $0,85\text{ сПз}$, изменение вязкости в том же интервале составило всего $0,522\text{ сПз}$.

Давление и растворенный газ действуют на вязкость в противоположных направлениях—первое приводит к увеличению, а второе к уменьшению вязкости. Так как растворение газа в нефти связано с ростом давления (давления насыщения), то ясно, что характер зависимости вязкости от давления насыщения будет зависеть от преобладающего влияния одного из двух указанных факторов—давления или растворенного газа. Известные в литературе зависимости вязкости газонасыщенной нефти от давления насыщения показывают непрерывное уменьшение вязкости на всем интервале изменения давления насыщения. Эти данные, однако, как указано выше, охватывают область давлений всего до 300 атм .

Из полученных нами результатов видно, что для исследованных нефтей указанное непрерывное уменьшение вязкости в функции давления насыщения продолжается до $700-800\text{ атм}$. В этой точке зависимость $\eta=f(p_{\text{нас}})$ имеет минимум, после которого вязкость газонасыщенной нефти с ростом давления насыщения начинает возрастать. Экспериментальные данные (рис. 1) показывают, что положение минимума на зависимости $\eta=f(p_{\text{нас}})$ практически одинаково для всех исследованных нефтей, при всех температурах опыта и находится в пределах $700-800\text{ атм}$.

Описанная картина изменения вязкости от давления насыщения полученная впервые, объясняется следующим образом: уменьшение вязкости газонасыщенной нефти является, как указано выше, результатом одновременного влияния давления, увеличивающего, и растворенного газа, уменьшающего вязкость нефти. До давления минимума на кривой $\eta=f(p_{\text{нас}})$ преобладающим является влияние растворенного газа, после влияния давления оказывается больше, чем влияние растворенного газа.

Таким образом, общим итогом влияния указанных двух причин изменения вязкости (давления и растворенного газа) является уменьшение вязкости вначале с ростом давления насыщения, а затем после определенного минимального значения вязкости (рост вязкости газонасыщенной нефти при дальнейшем повышении давления насыщения). Точка минимума вязкости отвечает моменту, когда влияние двух указанных факторов на вязкость нефти становится одинаковым.

Экспериментальные данные показывают, что уменьшение вязкости газонасыщенной нефти тем больше, чем выше начальная вязкость—вязкость дегазированной нефти. Так, например, вязкость нефти с начальной вязкостью $3,49\text{ сПз}$ при 100°C и давлении насыщения 300 атм становится равной $0,537\text{ сПз}$, т. е. уменьшается на $2,95\text{ сПз}$, для нефти с начальной вязкостью $17,63\text{ сПз}$ при тех же условиях давления насыщения и температуры вязкость уменьшается на $16,78\text{ сПз}$.

Рост вязкости после минимума зависимости $\eta=f(p_{\text{нас}})$ для разных нефтей имеет различный характер, причем, как видно из таблицы, это увеличение почти постоянно для одной и той же нефти при различных температурах и тем больше, чем больше начальная вязкость (при 20°C и 1 атм) нефти.

Вязкость нефти при 20°C , сПз	Рост вязкости после минимума зависимости $\eta=f(p_{\text{нас}})$ для разных нефтей при различных температурах				
	30°C	50°C	100°C	150°C	240°C
3,49	1,012	1,014	1,022	1,014	1,011
4,56	1,026	1,022	1,021	1,030	1,022
6,58	1,028	1,027	1,028	1,027	1,027
8,90	1,032	1,032	1,036	1,035	1,036
17,63	1,041	1,040	1,041	1,42	1,046

Описанные данные по вязкости газонасыщенных нефтей в сочетании с полученными нами ранее [2], аналогичными для дегазированных нефтей позволили установить влияние на вязкость отдельно растворенного газа, уменьшающего вязкость нефти в линейной зависимости от давления насыщения. Это позволило предложить удовлетворительный для практических целей метод перехода от сравнительно легкодоступных данных по вязкости дегазированной нефти к вязкости той же нефти в условиях насыщения ее газом при высоких давлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габиров А. Б., Цатурянц А. Б. Экспериментальная установка для измерения вязкости сырых и газонасыщенных нефтей при высоких давлениях и температурах. АЗИНТИ, 1968, № 2.
2. Габиров А. Б., Цатурянц А. Б. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1968, № 2.

А. Б. Габиров, А. Б. Сатурянц

Јуксак тэзјиг вэ температур шэраитиндэ
газла дојдурулмуш нефтлэрин экспериментал тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ 1000 ат дојма тэзјиги вэ 240°C температура гэдэр газла дојдурулмуш нефтлэрин өзлүлүклэри үчүн алынмыш эксперимент нэтичэлэри верилмишдир. Тэдгиг олунмуш нефтлэрин хүсуси чэкиси $0,8219-0,8939\text{ г/см}^3$ вэ нормал шэраитдэки (20°C вэ 1 ат) өзлүлүклэри $3,49-17,63$ сантипуаздыр.

Тэдгигатлар кестэрир ки, $700-800\text{ ат}$ тэзјигэ гэдэр газла дојдурулмуш нефтин өзлүлүјү дојма тэзјигинин артмасы илэ азалыр; бу нөгтэдэ $\eta=f(p_{\text{дој}})$ эјриси өзүнүн минимум гијмэтинэ чатыр вэ бундан сонра дојма тэзјигинин артмасы илэ газла дојдурулмуш нефтин өзлүлүјү јуксэлдир.

Мэгалэдэ, һэмчинин газла дојдурулмуш нефтин өзлүлүјүнүн газсыз нефтин өзлүлүјү илэ бэ'зи мүгајисэлэри лэ верилмишдир.

А. А. САКОВИЧ, Д. О. ТРОЯНСКАЯ, В. КОСТРЮКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТИРИСТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЧАСТОТЫ ПРИ РАБОТЕ НА АСИНХРОННЫЙ ДВИГАТЕЛЬ

Появление и развитие тиристор-кремниевых управляемых вентилях дало большой толчок в развитии регулируемого электропривода постоянного и переменного тока. Они позволили создать статические преобразователи постоянного или переменного тока промышленной частоты и переменный ток регулируемой частоты.

В данной статье рассматривается статический преобразователь с промежуточным звеном однофазного переменного тока повышенной частоты, схема которого представлена на рис. 1. Последовательно-

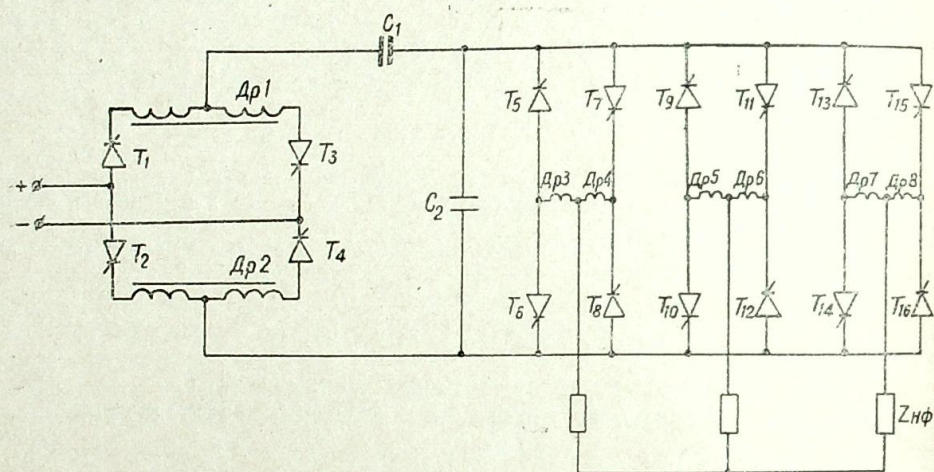


Рис. 1

параллельный инвертор собран на тиристорах T_1-T_4 по мостовой схеме. Этот тип инвертора выбран исходя из следующих требований:

- а) жесткой естественной характеристики;
- б) обеспечения перегрузочной способности (что необходимо при пуске двигателя и резких набросах нагрузки);
- в) устойчивости преобразователя к коротким замыканиям, что позволяет питать от преобразователя несколько электродвигателей, у каждого из которых своя максимальная токовая защита. Инвертор преобразует напряжение постоянного тока в однофазное переменное напряжение повышенной частоты f_1 .

Фазорасщепитель, схема которого выполнена на тиристорах T_5-T_{16} , преобразует это напряжение в трехфазное напряжение регулируемой ступенями частоты f_2 . Каждая фаза преобразователя состоит из двух встречно включенных двухполупериодных схем выпрямления со средней точкой. Коммутация тиристоров фазорасщепителя осуществляется напряжением повышенной частоты. Преобразование частоты заключается в управлении чередующейся работы „положительной“ и „отрицательной“ группы выпрямителей, осуществляемой схемой управления. Поскольку выпрямители являются управляемыми, в них же производится и регулирование напряжения, что позволяет работать электродвигателю по любому закону, например, $\frac{U}{f} = \text{const.}$

Форма выходного фазного напряжения показана на рис. 2.

Выбор промежуточной частоты. Фазорасщепитель не позволяет плавно регулировать выходную частоту при малой кратности и естественной коммутации вентилей (гашение вентилей происходит в моменты смены полярности на них). Выходное напряжение составляется из целого числа полупериодов напряжения промежуточной частоты.

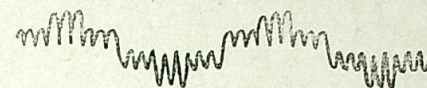


Рис. 2

Каждый полупериод можно набирать из любого числа полупериодов промежуточной частоты, кратных трем, например, 3, 6, 9 и т. д. Следовательно, и частота в промежуточном звене должна быть в 3, 6, 9 и т. д. раз выше выходной. С увеличением промежуточной частоты улучшаются гармонический состав выходного напряжения и плавность регулирования частоты, уменьшаются веса и размеры реактивных элементов.

Рассмотрим выбор промежуточной частоты с точки зрения содержания высших гармонических составляющих в выходном напряжении. Для упрощения форму промежуточного напряжения примем прямоугольной (рис. 3 а, б, в). Такое допущение не облегчает усло-

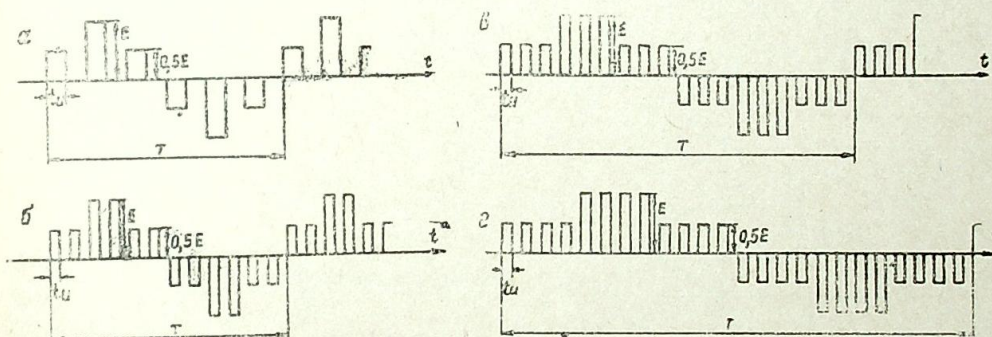


Рис. 3

вий анализа, так как прямоугольное напряжение содержит большое количество гармонических составляющих. Разложим кривую выходного напряжения в ряд Фурье:

$$U(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t).$$

Выбираем за начало отсчета времени момент перехода кривой фазного напряжения через 0. В этом случае $U(t)$ — нечетная периодическая

ческая функция. Все коэффициенты при косинусах обратятся в нуль, т. е. $a_k = 0$;

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U(t) \sin k \omega t dt,$$

где k — номер гармонической составляющей.

Так как функция $U(t)$ отлична от нуля лишь в определенные промежутки времени, то, определив пределы интегрирования и проведя ряд тригонометрических преобразований, получим:

$$b_k = \frac{2 E \sin \frac{k \omega t_u}{2} \left[1 - (-1)^k + 2 \sin \frac{k \omega \pi}{2} \sin \frac{k \omega \pi}{6} \right]}{\pi k \omega \sin \frac{k \omega \tau}{2}}$$

или

$$b_{2m} = 0;$$

$$b_{4m-3} = \frac{4 E \sin (4m-3) \frac{\omega t_u}{2}}{(4m-3) \omega \pi} \cdot \frac{\cos^2 \frac{2m-3}{6} \pi \omega}{\sin \frac{4m-3}{2} \tau \omega}; (1, 5, 13, \dots)$$

$$b_{4m-1} = \frac{4 E \sin (4m-1) \frac{\omega t_u}{2}}{(4m-1) \omega \pi} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m-1}{3} \pi \omega}{\sin \frac{4m-1}{2} \tau \omega}, (7, 11, \dots)$$

где E — амплитуда импульсов,
 t_u — длительность импульсов,
 τ — максимально возможная ширина импульсов.

Строим графики $\frac{U_k}{E} = f(t_u)$ (рис. 4).

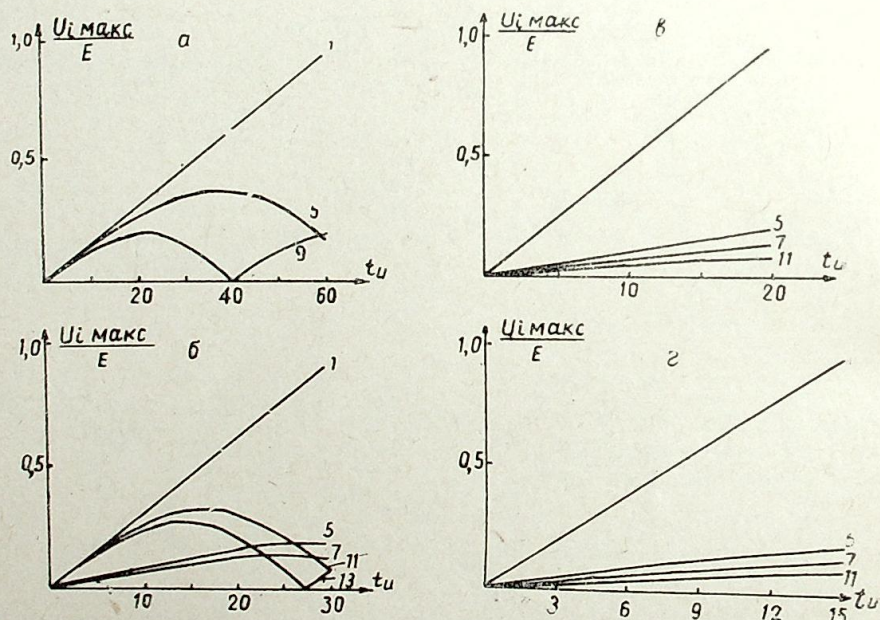


Рис. 4

Анализ кривых показал, что число полупериодов промежуточной частоты в полупериоде выходной частоты свыше девяти не улучшает гармонического состава напряжения. Исходя из этого, а также учитывая, что с увеличением частоты снижается индукция у электротехнических сталей и допустимое напряжение у конденсаторов, выбираем $f_1 = 450$ гц. Это соответствует $f_2 = 50$ гц для случая 9-импульсного формирования.

АНАЛИЗ РАБОТЫ ДВИГАТЕЛЯ ПРИ ПИТАНИИ ОТ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Для выявления эффективности работы АД от тиристорного преобразователя с промежуточным звеном повышенной частоты необходимо сравнить рабочие характеристики двигателя при питании его напряжением и синусоидальной, и несинусоидальной форм, содержащих все нечетные гармоники, кроме кратных трем.

Исходя из схемы замещения двигателя, для высших гармоник порядка k тока статора

$$I_{1k} = U_k \frac{d_1 + \kappa^2 r_2' S_k + a_2 \kappa^2 C_2 S_k^2 - j(\kappa^3 a_3 C_2 S_k^2 + \kappa a_4)}{a_1 r_1 + \kappa^2 a_5^2 + \kappa^2 a_6 S_k + \kappa^4 a_3^2 S_k^2 + \kappa^2 a_2^2 S_k^2}. \quad (1)$$

Действующее значение результирующего несинусоидального тока

$$I_{1k} = \sqrt{I_{11}^2 + I_{15}^2 + I_{17}^2 + I_{111}^2 + I_{113}^2 + \dots} \quad (2)$$

Гармоника порядка k тока ротора, приведенного к статорной обмотке

$$I_{2k} = U_k \frac{\kappa^2 a_2 S_k^2 + \kappa^2 a_5 S_k - j(\kappa^2 a_3 S_k^2 - \kappa a_2 S_k)}{a_1 r_1 + \kappa^2 a_5^2 + \kappa^2 a_6 S_k + a_3^2 S_k^2 \kappa^4 + a_2^2 S_k^2 \kappa^2}. \quad (3)$$

Результирующий ток

$$I_{2k} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_{2k}^2}. \quad (4)$$

Коэффициент мощности асинхронной машины находится как отношение модуля эквивалентного активного сопротивления схемы замещения к модулю его полного сопротивления:

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa^3 a_3 C_2 S_k^2 + \kappa a_4}{a_1 + \kappa^2 r_2' S_k + \kappa^2 a_2 C_2 S_k^2} \right)^2}} \quad (5)$$

Результирующий $\cos \varphi$ двигателя:

$$\cos \varphi = \frac{\cos^2 \varphi_1 + \left(\frac{U_5}{U_1} \right)^2 \cos^2 \varphi_5 + \dots}{1 + \left(\frac{U_5}{U_1} \right)^2 + \dots} \quad (6)$$

Вращающий момент двигателя от k гармоники тока

$$M_k = \frac{m_1 U_k^2 \frac{r_2'}{S_k}}{\omega_1 \left[\left(r_1 + C_1 \frac{r_2'}{S_k} \right)^2 + \kappa^2 (x_1 + C_1 x_2')^2 \right]}. \quad (7)$$

Результирующий момент двигателя равен сумме вращающих моментов от всех гармоник, причем прямые гармоники, поля которых вращаются в сторону вращения ротора, развивают двигательный, а обратные тормозящий момент:

$$M = M_1 - M_5 + M_7 - M_{11} + \dots \quad (8)$$

Найдем примерную оценку к. п. д. с учетом потерь от высших гармоник:

$$\eta = \frac{P_v}{P_1}; \quad \eta_k = \frac{P_v}{P_1 + \Delta P_k},$$

где η_k —к. п. д. с учетом высших гармоник;
 ΔP_k —увеличение потерь от высших гармоник,
 P_1 —требуемая мощность по первой гармонике;

$$\eta_k = \frac{1}{1 + \frac{\Delta P_k}{P_1}},$$

$$\Delta P_k = 3 I_{15} U_5 + 3 I_{17} U_7 + 3 I_{111} U_{11} + \dots,$$

$$P_1 = 3 I_{11} U_1.$$

По формулам (1)—(8) рассчитаны рабочие характеристики асинхронного двигателя (рис. 5) серии А0-82-4 с параметрами:

$$r_1 = 0,07 \text{ ом}, \quad x_1 = 0,36 \text{ ом}, \quad x_m = 12 \text{ ом},$$

$$r_2' = 0,07 \text{ ом}, \quad x_2' = 0,07 \text{ ом}, \quad S_n = 0,02,$$

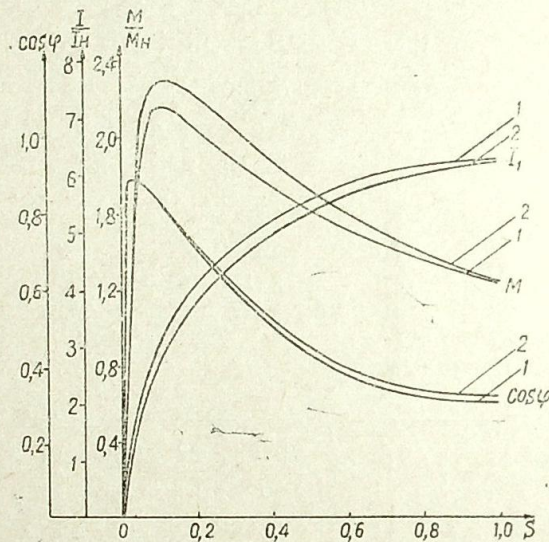


Рис. 5

Анализируя влияние формы кривой фазного напряжения на рабочие характеристики двигателя, можно сделать следующие выводы:

1. Высшие гармоники, имеющиеся в кривой фазного напряжения, мало влияют на величину момента двигателя.

2. Ток двигателя при наличии высших гармоник значительно увеличивается при холостом ходе, с увеличением нагрузки разница токов уменьшается:

$$\Delta I_1 = 25\%, \quad S_1 = 0;$$

$$\Delta I_1 = 6,5\%, \quad S_1 = 0,02;$$

$$\Delta I_1 = 1,1\%, \quad S_1 = 1.$$

3. Коэффициент мощности уменьшается на 3,3% при $S_1 = 0,02$.

4. Коэффициент полезного действия снижается на 5% ($S_1 = 0,02$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Харкевич. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
2. Юдицкий С. Б., Сакович А. А. и др. Авт. свидетельство № 163265. "Статический преобразователь частоты". Бюллетень № 12, 1964.
3. Антонов В. М., Данько Г. Ф., Троянская Д. О. Тр. ВЭИ, 1966.
4. Хасаев О. И. "Электричество", 1961, № 9.
5. Костенко М. Т., Пиотровский Л. М. Электрические машины. Госэнергоиздат, 1958.

А. А. Сакович, Д. О. Троянская, В. Кострюков

Асинхрон мұһәррикиндә ишләжән тезлик тиристор чевирчисинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә жүксәк тезликли, дәјишән чәрәжанлы аралыг мангалы тезлик статик чевирчидән бәһс едилир.

Ардычыл-паралел инвертор тиристор илә жығылмыш көрпү схеминдән ибарәтдир. Фаз дәјишдиричиси бирфазлы дәјишән кәркинлији тезлији пиллә илә тәнзим едилән 3 фазлы кәркинлијә чевирир.

Чыхыш кәркинлијиндә жүксәк гормоникләрин олмасына әсасән аралыг тезлик сечилир. Бунун үчүн $\frac{U_k}{E} = f(t_u)$ әјриләри анализ едилир.

Тиристор чевирчиси илә гидаланан асинхрон мұһәррикин ишләмә еффе́ктини ајдынлашдырмаг үчүн мұһәррикин ишчи характеристикасы онун синусоидал вә гејри-синусоидал кәркинлик форма әјриләрилә мугајисә едилмишдир.

УДК 621.35.082.75

М. С. КАСИМЗАДЕ

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯХ

Для разработки и практического использования электрокинетических преобразователей информации (ЭКП) несомненный интерес представляет поведение их в динамике, в частности в нестационарных режимах. Нами ранее рассматривались стационарные процессы [1, 2] и нестационарные явления в ЭКП в области только низких частот [3].

В настоящей статье рассматриваются некоторые вопросы динамики генераторных ЭКП в широком диапазоне частот с целью установления характера свободных колебаний, определения таких параметров переходного режима, как затухание (степень успокоения), время переходного процесса и др. Электрокинетическим преобразователям, так же как измерительным преобразователям других типов, свойственна определенная инерционность, обусловленная наличием реактивных элементов—подвижных масс и гибкостей, электрической емкости, в которых возможны накопление и переход энергии из одного вида в другой [4]. Именно от характера этого перехода и будет зависеть характер свободного процесса в переходном режиме.

Достаточно удобным и простым методом исследования переходных процессов в ЭКП может являться использование электрических схем аналогии таких преобразователей, получение которых было обосновано нами ранее. В пределах определенных давлений и частот, пренебрегая нелинейностями и распределенностью параметров, можно представить ЭКП линейной аналоговой электрической системой с сосредоточенными параметрами (рис. 1 а, б). На этих схемах $z_{экр}$ —электрический аналог полного механического сопротивления;

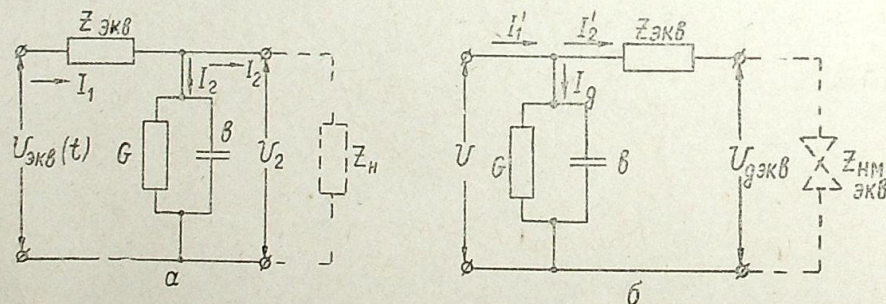


Рис. 1.

здесь

$$z_{экр} = R_{экр} + j \left(\omega L_{экр} - \frac{1}{\omega C_{экр}} \right),$$

$R_{экр}$ —активное электрическое сопротивление, эквивалентное механическому сопротивлению трения;

$L_{экр} = \frac{M_{мех}}{K_{с1}^2} \left(\frac{\omega q_n}{q_m} \right)^2$ —индуктивность, эквивалентная подвижной массе;

$C_{экр} = K_{с1}^2 \frac{r_{с1}^2}{C_{мех}} \left(\frac{\omega q_n}{q_n} \right)^2$ —емкость, эквивалентная гибкости упругих элементов;

$K_{с1} = \frac{2\xi\epsilon}{\pi R_{ср}^2} (\omega q_n)$ —коэффициент электромеханической связи;

$U_{экр} = \frac{p(t)}{K_{с1}} (\omega q_n)$ —напряжение, эквивалентное приложенному

давлению; ω —пористость; $R_{ср}$ —средний радиус пор; q_n —площадь пористой перегородки; q_m —площадь мембраны; G, b, y —активная, реактивная и полная проводимости электрической стороны ЭКП.

Для схем рис. 1 справедливы уравнения:

а) генераторный режим (рис. 1, а)

$$\left. \begin{aligned} U_{экр} &= U_2 + i_1 R_{экр} + L_{экр} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_{экр}} \int i_1 dt, \\ i_1 &= i_2 + i_{чел} = i_2 + U_2 y; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

б) двигательный режим (рис. 1, б),

$$\left. \begin{aligned} U &= U_{экр} + i_2' z_{экр} = U_{экр} + L_{экр} \frac{di_2'}{dt} + i_2' R_{экр} + \frac{1}{C_{экр}} \int i_2' dt, \\ i_1' &= i_2 + i_2'. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При холостой работе генераторного ЭКП ($i_2 = 0$) уравнение его (1) приводится к виду

$$\frac{d^2 U_2}{dt^2} + \frac{1 + R_{экр} y}{L_{экр} y} \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{C_{экр} L_{экр}} U_2 = \frac{1}{L_{экр}} \frac{dU_{экр}}{dt} \quad (3)$$

Интересующий нас свободный процесс будет описываться однородным уравнением

$$\frac{d^2 U_{2св}}{dt^2} + 2\delta \frac{dU_{2св}}{dt} + \omega_0^2 U_{2св} = 0, \quad (4)$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{экр} C_{экр}}}$ —частота собственных незатухающих колебаний

$$\delta = \frac{1 + R_{экр} y}{2 L_{экр} y} \text{—показатель затухания.} \quad (6)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (4) запишутся в виде $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

При $\omega_0 < \delta$ или $\beta > 1$ ($\beta = \frac{\delta}{\omega_0}$ —степень успокоения), т. е. когда

$$\frac{1}{L_{экр} C_{экр}} < \frac{(1 + R_{экр} y)^2}{4 L_{экр}^2 y^2}, \text{ корни характеристического уравнения вещест-}$$

венны, свободный процесс носит аperiodический характер. В противном случае свободный процесс является колебательным.

Нетрудно заметить, что в выражении $\delta = \frac{1 + R_{\text{экв}} u}{2 L_{\text{экв}} u}$ наличие в числителе 1 связано с учетом влияния электрической стороны ЭКП на его поведение в переходном режиме. Действительно, при $R_{\text{экв}} u \gg 1$ $\delta = \delta' = \frac{R_{\text{экв}}}{2 L_{\text{экв}}}$, следовательно, влияние электрической стороны полно-

стью исключается, затухание в системе определяется лишь параметрами механической части преобразователя. Таким образом, выражение $R_{\text{экв}} u \gg 1$ является условием, при котором можно пренебречь влиянием электрических параметров на динамические процессы в ЭКП. Пренебрежение собственным электрическим сопротивлением равносильно исключению внутренней обратной связи в преобразователе и превращению его в разомкнутую систему.

Расчеты, произведенные для ЭКП конкретного исполнения, подтверждают возможность, в ряде случаев, упрощения его эквивалентной схемы за счет пренебрежения влиянием электрической стороны на динамику преобразователя в переходном режиме. Действительно, из всех параметров электрической части ЭКП (r, r_1, C, C_1, r_2) наиболее существенны r и C (рис. 1).

Пренебрегая влиянием r, r_2, C_1 , будем иметь $y \approx G + jb = \frac{1 + jr \omega C}{r}$. Если, например, принять $r = 100 \text{ ком}$, $C = 200 \text{ пф}$, то при частоте 1 кгц получим $|y| = 10^{-5} \text{ сим}$. Для одного из образцов ЭКП (см. пример на стр. 10) получается $R_{\text{мех}} = 147 \frac{\text{нсек}}{\text{м}}$, $R_{\text{экв}} \approx 1,36 \cdot 10^{13} \text{ ом}$, т. е. $R_{\text{экв}} u \approx 1,36 \cdot 10^8 \gg 1$. С повышением частоты значение y возрастает, но весьма незначительно. При изменениях частоты от 1 до 50 кгц в нашем примере y возрастает от 10^{-5} только до $1,44 \cdot 10^{-5} \text{ сим}$, что не может существенно повлиять на неравенство $R_{\text{экв}} u \gg 1$.

Сравнивая значения δ и δ' , нетрудно заметить, что в подавляющем большинстве случаев практического применения для ЭКП $\delta \gg \omega_0$, следовательно, свободный процесс будет носить аperiodический характер. Как известно, условие $\delta \gg \omega_0$ приводит к неравенству

$$R_{\text{экв}} \gg 2 \sqrt{\frac{L_{\text{экв}}}{C_{\text{экв}}}}. \quad (5)$$

В электрокинетических преобразователях обычно применяются мелкопористые и ультрамикропористые преобразующие перегородки, обеспечивающие весьма высокое значение $R_{\text{мех}}$, в то время как влияние массовых сил ($L_{\text{экв}}$) и гибкостей ($C_{\text{экв}}$) относительно мало. Для ЭКП степень успокоения (β) достигает весьма высоких значений, а добротность (Q), соответственно, исключительно мала. В приведенном выше примере, при использовании мембран из нержавеющей стали толщиной 0,1 мм, частота ω_0 , вычисленная согласно (6), равна

$$\omega_0 \approx 2000 \frac{1}{\text{сек}}, \quad a \delta' = 1,2 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{сек}}, \quad \text{т. е. } \delta = \delta' \gg \omega_0; \quad \beta \approx 60; \quad Q = \frac{1}{2\beta} = 0,008.$$

* r, r_1, r_2 — соответственно, сопротивление жидкости в порах перегородки, переходное сопротивление жидкость—электрод, сопротивления слоя жидкости между электродом и поверхностью перегородки.

C_1, C — соответственно, емкость перехода жидкость—электрод и междуэлектродная емкость.

Однако в некоторых частных случаях, например, в акселерометрическом ЭКП инерционного типа, благодаря наличию значительной подвижной массы и применению крупнопористых перегородок возможен колебательный характер свободного процесса, но с очень большим затуханием. Следует обратить внимание на возможные колебательные процессы в электрической части преобразователя при определенной величине и характере нагрузки, учитывая, что внутреннее сопротивление самого ЭКП имеет емкостной характер и при соответствующей индуктивности нагрузки возможны колебательные явления, вплоть до резонанса. Однако, благодаря малому значению коэффициента электромеханической связи, влияние электрической части на механическую будет незначительным. С другой стороны, электрические переходные процессы протекают значительно быстрее, чем механические, и определяющими характер процесса будут механические явления. Приведенные выше результаты относились к случаю работы преобразователя вхолостую.

Рассмотрим режим генераторного ЭКП с нагрузкой. Обычно ЭКП, как маломощный информационный измерительный преобразователь с относительно большим выходным сопротивлением (десятки, сотни ком), подключаются к регистрирующе-указывающим приборам через усилитель напряжения (тока), согласующий элемент (катодный или эмиттерный повторитель, трансформатор, или непосредственно к прибору с большим выходным сопротивлением (ламповый вольтметр, электронный осциллограф и др.).

Для исследования переходного процесса ЭКП под нагрузкой может быть использована схема рис. 1, а, с учетом сопротивления электрической нагрузки z_n . При дистанционных измерениях следует учитывать также емкость длинных соединительных кабелей. Схема рис. 1, а представляет собой пассивный четырехполюсник с однородными (электрическими) сторонами, на вход которого подается эквивалентное напряжение $U_{\text{экв}}(t)$, а с выхода снимается ток i_2 или напряжение $U_2(t) = i_{\text{ген}} z = i_2 z_n$. Поскольку ЭКП рассматривается в качестве источника тока, величина полного тока преобразователя $i = i_2 + i_{\text{ген}}$ от нагрузки практически не зависит. При изменении нагрузки на выходе ЭКП происходит лишь перераспределение тока между z и z_n .

Для определения интересующих нас параметров переходного режима можно воспользоваться передаточной функцией системы. Для схемы рис. 1, а коэффициент передачи

$$K_{\text{п}} = \frac{\dot{v}_2}{\dot{v}_1} = \frac{z_n \cdot z}{z_n \cdot z + z_{\text{экв}} (z_n + z)}, \quad (6)$$

а выражение для оператора передаточной функции получит вид

$$K_{\text{п}}(p) = \frac{ap^2 + bp + d}{Ap^4 + Bp^3 + Dp^2 + Ep + F}, \quad (7)$$

где постоянные коэффициенты a, b, d, A, B, D, E, F зависят от электрических и механических параметров ЭКП и нагрузки:

$$\begin{aligned} a &= C_{\text{экв}} L_{\text{н}} C_{\text{н}}; \quad b = r r_{\text{н}} C C_{\text{н}}; \quad d = r C; \quad A = a L_{\text{экв}} C; \\ B &= a R_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + b L_{\text{экв}} C; \quad D = a + C_{\text{н}} r L_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + r_{\text{н}} C_{\text{н}} L_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + \\ &+ d L_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + b R_{\text{экв}} C + L_{\text{н}} C_{\text{н}} R_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + r L_{\text{н}} C C_{\text{н}}; \quad E = 2b + \\ &+ C_{\text{н}} r R_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + r_{\text{н}} C_{\text{н}} R_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + r C R_{\text{экв}} C_{\text{экв}} + L_{\text{н}} C_{\text{н}}; \\ F &= r (C_{\text{экв}} + C) + C_{\text{н}} (r + r_{\text{н}}). \end{aligned}$$

В этих выражениях величины без индекса относятся к параметрам электрической стороны самого преобразователя, с индексом „н“ — к электрической нагрузке.

Как и следовало ожидать, при учете внутреннего электрического сопротивления ЭКП и сопротивления нагрузки операторная функция передачи по напряжению выражается громоздкой правильной дробью. В случае воздействия на вход преобразователя синусоидального давления $p(t) = p_{\text{ж}} \sin(\omega t + \psi)$

$$U_2(p) = U_{\text{ЭКВ.М}} \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{ap^2 + bp + d}{Ap^4 + Bp^3 + Dp^2 + Ep + F}; \quad (8)$$

$$U_2(t) \doteq U_2(t); U_{\text{ЭКВ.М}} = \frac{p_{\text{ж}}}{K_c}$$

При работе ЭКП без нагрузки, т. е. для собственного свободного процесса, при воздействии гармонического колебания получим

$$U_2(t) \doteq U_{\text{ЭКВ.М}} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{p}{A_1 p^3 + B_1 p^2 + D_1 p + 1}, \quad (9)$$

$$\text{где } A_1 = L_{\text{ЭКВ}} \cdot C; B_1 = R_{\text{ЭКВ}} C + \frac{L_{\text{ЭКВ}}}{r}; D_1 = \frac{r C_{\text{ЭКВ}} + R_{\text{ЭКВ}} C_{\text{ЭКВ}} + r C}{r C}$$

Поскольку выражение (9) для $U_2(t)$ даже в этом, относительно простом случае—холостой работы ЭКП имеет неудобный для использования вид, перейдем от общего случая к частным, отличающимся частотным диапазоном, т. е. рассмотрим области низких и инфраниз-частотных, средних и повышенных частот. Соответствующие схемы аналогии представлены на рис. 2(а, б, в.). Передаточные функции для этих схем (холостая работа) запишутся в виде [6]:

$$\text{низкие частоты } \kappa_{\text{ни}}(p) = \frac{r p C_{\text{ЭКВ}}}{p C_{\text{ЭКВ}}(r + R_{\text{ЭКВ}}) + 1}; \quad (10)$$

$$\text{средние частоты } \kappa_{\text{рс}}(p) = \frac{r}{r + R_{\text{ЭКВ}}}; \quad (11)$$

$$\text{верхние частоты } \kappa_{\text{пв}}(p) = \frac{1}{C L_{\text{ЭКВ}}(p^2 + M p + N)}, \quad (12)$$

$$\text{где } M = \frac{1}{\tau_{\text{в}}} + \frac{1}{\tau_{\text{эл}}}; N = \frac{r}{\tau_{\text{эл}} L_{\text{ЭКВ}}} + \frac{1}{\tau_{\text{эл}} \tau_{\text{в}}}; \tau_{\text{эл}} = r C \text{—электрическая}$$

постоянная времени, $\tau_{\text{в}} = \frac{L_{\text{ЭКВ}}}{K_{\text{ЭКВ}}}$ —механическая постоянная времени на верхних частотах.

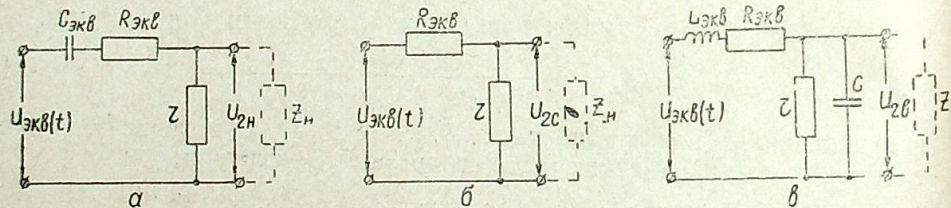


Рис. 2.

Рассматривая (10)–(12), заметим прежде всего, что в области средних частот (между $f_{\text{в}}$ и $f_{\text{н}}$), т. е. в плоской части частотной характеристики, ЭКП ведет себя как система с чисто активным сопротивлением и потому в этой области переходный процесс практически отсутствует, принужденный режим наступает мгновенно, преобразователь воспроизводит входной сигнал без временных (фазовых)

искажений. Для области нижних частот, вернее за областью $f < f_{\text{н}}$ для синусоидальной формы входного сигнала получим:

$$U_{2\text{н}}(p) = \kappa_{\text{ни}}(p) U_{\text{ЭКВ}}(p) = U_{\text{ЭКВ.М}} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{a_1 p}{a_2 + p};$$

$$U_{2\text{н}}(t) = U_{\text{ЭКВ.М}} \left[\frac{a_1 \omega}{\sqrt{a_2^2 + \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi_{\text{н}}) - \frac{a_1 a_2 \omega}{a_2^2 + \omega^2} e^{-a_2 t} \right]; \quad (13)$$

$$a_1 = \frac{r}{r + R_{\text{ЭКВ}}}; a_2 = \frac{1}{C_{\text{ЭКВ}}(r + R_{\text{ЭКВ}})}; \text{tg } \varphi_{\text{н}} = \frac{\omega}{a_2}$$

Свободная составляющая напряжения на выходе, определяемая из (13), выражается зависимостью

$$U_{2\text{н св}}(t) = - \frac{A_2}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_{\text{н}}^2}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{н}}}}, \quad (14)$$

а выходное напряжение установившегося режима зависимостью

$$U_{2\text{н уст}}(t) = A \cos(\omega t - \varphi_{\text{н}}). \quad (15)$$

$$\text{В (14) и (15) } A_2 = \frac{p_{\text{ж}}}{K_c} \cdot \frac{r C_{\text{ЭКВ}} \cdot \omega}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_{\text{н}}^2}},$$

$\tau_{\text{н}} = C_{\text{ЭКВ}}(r + R_{\text{ЭКВ}})$ представляет собой постоянное времени преобразователя в области нижних частот. Как видно из (14), свободная составляющая выходного напряжения ЭКП в переходном режиме в области нижних частот спадает по экспоненциальному закону, с постоянной времени $\tau_{\text{н}}$, определяемой гибкостью системы ($C_{\text{ЭКВ}}$), механическим (гидравлическим) сопротивлением пористой перегородки ($R_{\text{ЭКВ}}$) и внутренним электрическим сопротивлением ЭКП (r).

На рис. 3 представлены графики изменения $p(t)$, $U_{2\text{н св}}(t)$,

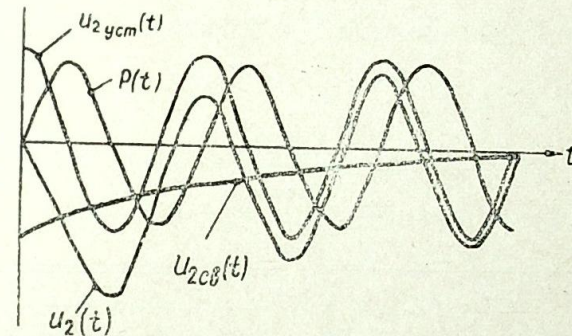


Рис. 3.

$$U_{2\text{н уст}}(t) \text{ и } U_{2\text{н}}(t) = U_{2\text{н св}}(t) + U_{2\text{н уст}}(t).$$

Время затухания свободного процесса ($t_{3\text{н}}$), определяющее время успокоения преобразователя [5], может быть вычислено из (14), если задаться степенью уменьшения $U_{2\text{н св}}(t)$ по отношению к амплитуде установившегося напряжения $U_{2\text{н уст.М}}$ или к наибольшему значению

свободного напряжения $U_{2\text{н св.М}}$ (при $t = 0$). Приняв $\frac{U_{2\text{н св}}(t)}{U_{2\text{н св.М}}} = \lambda$ при

гармоническом характере входной величины для $t_{3\text{н}}$ найдем

$$\tau_{3\text{н}} = -\tau_{\text{н}} \ln \lambda. \quad (16)$$

Уравнение (16) дает возможность связать время переходного процесса ЭКП в области нижних частот с его электрическими и механическими параметрами. Для области частот, при воздействии синусоидального

давления, используя (13), для оператора выходного напряжения полу-

чим $U_{2в}^{(p)} = U_{ЭКВ.М} \frac{1}{p^2 + \omega^2 p^2 + Mp + U}$. Перейдя к оригиналу, будем иметь

$$U_{2в}(t) = \frac{U_{ЭКВ.М}}{L_{ЭКВ} C \sqrt{M^2 \omega^2 + (\omega^2 - N)^2}} \cos(\omega t - \varphi_v) + \frac{U_{ЭКВ.М} \cdot \omega}{CL_{ЭКВ}} \left[A_2 e^{(-\frac{M}{2} + m)t} + A_3 e^{(-\frac{M}{2} - m)t} \right] \quad (17)$$

$$\text{где } m = \sqrt{\frac{M^2}{4} - N}; \quad A_2 = \frac{M^3}{4} - m^2(3M - 4m) + 2m(N + \omega^2) - MN;$$

$$A_3 = \frac{M^3}{4} - m^2(3M + 4m) - 2m(N + \omega^2) - MN;$$

M и N имеют прежние значения.

Согласно (17) свободная составляющая выходного напряжения ЭКП в области верхних частот будет описываться выражением

$$U_{2в.св} = \frac{U_{ЭКВ.М} \cdot \omega}{CL_{ЭКВ}} \left[A_2 e^{(-\frac{M}{2} + m)t} + A_3 e^{(-\frac{M}{2} - m)t} \right], \quad (18)$$

из которого видно, что $U_{2в.св}$ имеет также аperiodический характер и описывается двумя экспонентами, затухающими с разными скоростями. Поскольку $-\frac{M}{2} + m < -\frac{M}{2} - m$, то время затухания

$$U_{2в.св} \text{ будет определяться затуханием слагаемой } \frac{U_{ЭКВ.М} \cdot \omega}{CL_{ЭКВ}} A_2 e^{(-\frac{M}{2} + m)t}.$$

$$\text{Время затухания можно вычислить из формулы } t_{3в} = \frac{1}{-\frac{M}{2} + m} \ln \lambda',$$

в которой

$$\lambda' = \frac{U_{2в.св}(t)}{U_{2в.св.М}}$$

После подстановки значений M , N , m получим

$$t_{3в} = \frac{2 \ln \lambda'}{-\left(\frac{1}{\tau_v} + \frac{1}{\tau_{эл}}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{\tau_v} - \frac{1}{\tau_{эл}}\right)^2 - \frac{4r}{\tau_{эл} \cdot L_{ЭКВ}}}} \quad (19)$$

Учитывая, что для ЭКП очевидно $\left(\frac{1}{\tau_v} - \frac{1}{\tau_{эл}}\right)^2 \gg \frac{4r}{\tau_{эл} \cdot L_{ЭКВ}}$, выражение (19) можно упростить и привести к виду $t_{3в} \cong -\tau_{эл} \cdot \ln \lambda'$ (20). Как видно из (20), в области верхних частот время затухания свободного процесса для ЭКП определяется в основном электрической постоянной времени $\tau_{эл} = rC$, зависящей от величины емкости и активного сопротивления его электрической стороны.

Пример. Ниже дается пример расчета некоторых параметров переходного режима электрокинетического преобразователя малых давлений (рис. 4), имеющего следующие основные данные.

Корпус. Наружный диаметр $D_n = 50$ мм высота $h = 25$ мм. Внутренний диаметр $D_v = 30$ мм. Высота камер $h_k = 4$ мм.

Пористая перегородка из шомотно-бентонитовой массы, рабочий диаметр $d_n = D_v = 30$ мм, толщина $h_n = 2$ мм, пористость $\omega = 0,4$, средний гидравлический радиус пор $a_{пор} = 8$ мк.

Рабочая жидкость — очищенный ацетон. При $+20^\circ\text{C}$ вязкость $\mu = 33 \cdot 10^{-5} \frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2}$, удельная электропроводность $\lambda_0 = 5,8 \cdot 10^{-6} \text{ сим/м}$, диэлектрическая постоянная $\epsilon = 21,5$ ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = 21,5 \cdot 8,86 \cdot 10^{-12} = 1,9 \times 10^{-10} \frac{\text{ф}}{\text{м}}$), плотность $\gamma_{ац} = 0,792 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Мембрана из нержавеющей стали марки 1Х18Н9Т, рабочий диаметр $D_m = D_v = 30$ мм, толщина 0,1 мм, модуль упругости $E = 1,96 \cdot 10^{11} \frac{\text{н}}{\text{м}^2}$, плотность $\gamma_{ст} = 8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

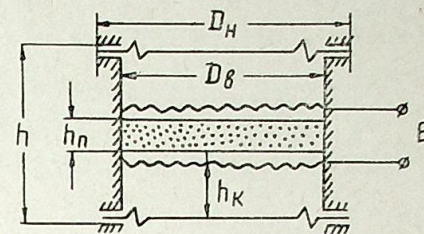


Рис. 4.

Значение потенциала, определенного из опыта на постоянном

течении $\left(E = 0,15 \text{ в при } \Delta p = 981 \frac{\text{н}}{\text{м}^2}\right)$ при комнатной температуре

$$\xi = \frac{E \cdot 4 \pi \mu \lambda_0}{\Delta p \cdot \epsilon} = \frac{0,15 \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 33 \cdot 10^{-5} \cdot 5,8 \cdot 10^{-6}}{981 \cdot 1,9 \cdot 10^{-10}} = 19,4 \text{ мв.}$$

Коэффициент электромеханической связи

$$K_{cl} = \frac{2 \xi \epsilon}{q_{пор}} \omega q_{перг} = \frac{2 \cdot 19,4 \cdot 10^{-3} \cdot 1,9 \cdot 10^{-10}}{3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-6})^2} \cdot 0,4 \cdot 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4} = 1,04 \cdot 10^{-5} \frac{\text{вф}}{\text{м}}$$

Сопротивление трения (активное механическое сопротивление) преобразователя

$$R_n = \frac{8 \mu \cdot l q_{перг}}{\omega a_{ср}^2} = \frac{8 \cdot 33 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3,14 \cdot 2,25 \cdot 10^{-4}}{0,4 (8 \cdot 10^{-6})^2} = 147 \frac{\text{нсек}}{\text{м}}$$

Эквивалентное активное механическое сопротивление

$$R_{эв} = \frac{R_n}{K_{cl}^2} = \frac{147}{(1,04 \cdot 10^{-5})^2} = 1,36 \cdot 10^{12} \text{ ом.}$$

Сосредоточенная подвижная масса преобразователя ($M_{мех}$) состоит из суммы сосредоточенных масс мембран (M_m), жидкости в камерах ($M_{жк}$) и жидкости в порах перегородки ($M_{жп}$): $M_{мех} = 2 M_m +$

$$+ 2 M_{жк} + M_{жп} = \frac{2}{5} \frac{\pi d_m^2}{4} \gamma_{ст} h_m + 2 \pi \frac{D_v^2}{4} \gamma_{ац} h_k + \frac{1}{4} \pi d_n^2 h_n \omega \gamma_{ац} =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot \frac{3,14 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2}{4} \times$$

$$\times 0,792 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} + \frac{3,14}{4} (3 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \cdot 0,792 \cdot 10^3 \cong 5,2 \text{ г.}$$

Эквивалентная сосредоточенная индуктивность преобразователя при $S_m = S_{перг}$

$$L_{эв} = \frac{M_{мех}}{K_{cl}^2} \omega^2 = \frac{5,2 \cdot 10^{-3}}{(1,04 \cdot 10^{-5})^2} \cdot (0,4)^2 \cong 7,7 \cdot 10^6 \text{ гн.}$$

Сосредоточенная гибкость мембраны

$$C_m = \frac{9 D_m^2}{16 \pi h_m^3} \cdot \frac{1 - \sigma^2}{E} = \frac{9 \cdot (15 \cdot 10^{-3})^2}{16 \cdot 3,14 \cdot (10^{-4})^3} \cdot \frac{1 - 0,09}{1,96 \cdot 10^{11}} = 1,86 \cdot 10^{-4} \frac{м}{н}.$$

Сосредоточенная гибкость двух мембран

$$C'_m = \frac{C_m}{2} = \frac{1,86 \cdot 10^{-4}}{2} = 0,93 \cdot 10^{-4} \frac{м}{н}.$$

Эквивалентная гибкость при $S_m = S_n$

$$C_{экр} = C'_m \kappa_{с1}^2 \left(\frac{1}{\omega} \right)^2 = 0,93 \cdot 10^{-4} (1 \cdot 04 \cdot 10^{-5})^2 \cdot \frac{1}{(0,4)^2} = 6,3 \cdot 10^{-4} \phi.$$

Постоянная времени гибкости (на нижней частоте)

$$\tau_n = R_{экр} C_{экр} = 1,36 \cdot 10^{12} \cdot 6,3 \cdot 10^{-14} \approx 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ сек.}$$

Нижняя граничная частота

$$f_n \approx \frac{0,16}{\tau_n} \approx \frac{0,16}{8,6 \cdot 10^{-2}} = 1,9 \text{ гц.}$$

Инерционная постоянная времени (на верхней частоте)

$$\tau_v = \frac{L_{экр}}{R_{экр}} = \frac{7,7 \cdot 10}{1,36 \cdot 10^{12}} \approx 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

Верхняя граничная частота

$$f_v \approx \frac{0,16}{\tau_v} = \frac{0,16}{5,6 \cdot 10^{-6}} \approx 2,8 \cdot 10^4 \text{ гц.}$$

Частота собственных незатухающих колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{экр} C_{экр}}} = \frac{1}{\sqrt{7,7 \cdot 10^6 \cdot 6,3 \cdot 10^{-14}}} = 1440 \text{ гц.}$$

Показатель затухания

$$\delta = \frac{R_{экр}}{2 L_{экр}} = \frac{1,36 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 7,7 \cdot 10^6} = 8,8 \cdot 10^4.$$

$$\frac{f_v}{f_n} = \frac{\tau_v}{\tau_n} = \frac{2,8 \cdot 10^4}{1,9} = 14700.$$

Время затухания в области низких частот при гармонической входной величине и $\lambda' = 0,1$

$$t_{3н} = -\tau_n \ln \lambda = 8,6 \cdot 10^{-2} \ln 0,1 \approx 0,2 \text{ сек.}$$

Электрическая постоянная времени

$$\tau_{эл} = rC = 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Время затухания в области верхних частот при гармонической входной величине и $\lambda' = 0,1$

$$\tau_{3в} = -\tau_{эл} \ln \lambda' = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \ln 0,1 = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Выводы

1. Пользуясь электрической схемой аналогии, рассмотрен переходный процесс в генераторном электрокинетическом преобразователе и получены соответствующие формулы для определения основных параметров свободного процесса.

2. Показано, что в общем случае свободный процесс в ЭКП носит аperiodический характер. На средних частотах (в области $f_n - f_v$) переходный процесс отсутствует, принужденный режим наступает практически мгновенно. Экспоненциальное затухание свободного процесса, следовательно, и время переходного процесса на низких частотах,

определяется постоянной времени гибкости $\tau_n = (r + R_{экр}) C_{экр}$, на высоких частотах — инерционной постоянной времени $\tau_{эл} = rC$.

3. Дан пример расчета параметров свободного процесса электрокинетического преобразователя конкретного типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимзаде М. С. Тр. Ин-та энергетики АН Азерб. ССР, т. XV, 1962.
2. Касимзаде М. С. Автоматический контроль и методы электрических измерений. Т. III конференции. Новосибирск, 1964.
3. Гусейнов Х. Ф., Касимзаде М. С. Автометрия, СО АН СССР, 1966, № 4.
4. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М., 1964.
5. Островский Л. А. Основы общей теории электроизмерительных устройств. М.—Л., 1965.
6. Теумин И. И. Справочник по переходным электрическим цепям. М., 1952.

М. С. Гасымзаде

Электрокинетик чевиричиләрдә кечид просесләри

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә аналогически электрик схемләриндән истифадә едиләрәк электрокинетик чевиричиләрдә кечид просесләринә бахылмышдыр.

Мүәјјән едилмишдир ки, ади конструксиялы электрокинетик чевиричиләрдә мәхсуси просессләр аperiодик хусусијјәтлидир.

Мәхсуси режимин әсас параметрләрини тәјин етмәк үчүн дүстурлар алынмышдыр. Мәгаләдә бу параметрләрин һесапланмасына аид мисаллар верилмишдир.

К. Ф. ШИРИНОВ, А. Х. САЛИМОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ЗАДАЧАХ ТЕРМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПРОДУКТИВНЫЕ ПЛАСТЫ

Многочисленные задачи науки и технической практики приводят к специальным интегралам, табулирование которых даже при наличии ЭЦВМ представляет большие трудности. Обычно эти интегралы встречаются в задачах математической физики, поставленных для круговых или цилиндрических областей. В частности задачи расчета температурных полей при термическом воздействии на нефтяные пласты как при наличии в пласте движущегося источника, осуществляющего вытеснение остаточной нефти, так и при локальном прогреве призабойной зоны скважины с одновременной добычей и без нее (более подробно см. в [1, 2]), также приводит к вышеуказанным интегралам.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I = \frac{e^{\beta} R^{-\nu}}{8\pi} \int_0^x \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1 + R^2) + \beta x}{u} \right] \cdot I_0 \left(\frac{2R\rho_0^2}{u} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\rho_0^2} (x - u)} \right) \times \\ \times \left(\operatorname{erf} \frac{1 + \xi}{\sqrt{u}} + \operatorname{erf} \frac{1 - \xi}{\sqrt{u}} \right) \frac{du}{u}. \quad (1)$$

Обозначим через D область значений параметров $x, \rho_0, \xi, \beta, \sigma, \nu$, которые они получают в конкретных случаях. R определяется выражением

$$R = \sqrt{1 + \frac{\beta x}{\rho_0^2} (1 + \alpha)},$$

однако в случае $\alpha = 0, \beta = 0$ может принимать как самостоятельный параметр и целые значения, отличные от 1. Например, $1 \leq R(\sigma, \beta) \leq 18$. Упомянутые выше вычислительные трудности связаны также с этими конкретными значениями параметров. Ниже приводятся способ реализации на ЭЦВМ наиболее важных трех случаев.

1. $\beta = 0, \nu = 0, \alpha = 0$. В этом случае интеграл (1) соответствует задаче о тепловом расчете процесса предварительного разогрева призабойной зоны скважины.

Для проведения расчетов подынтегральная функция могла бы быть представлена в следующем виде [3]:

$$f(u, \rho_0, \xi, R) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1 + R^2)}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\rho_0^2 R}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u), & 0 \leq \frac{2\rho_0^2 R}{u} < 3,75; \\ \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1 - R^2)}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\rho_0^2 R} \right)^i}{8\pi\rho_0 \sqrt{2Ru}} \right] \cdot B(\xi, u), & 3,75 \leq \frac{2\rho_0^2 R}{u} \leq 43,7; \\ \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1 - R^2)}{u} - \ln 16\pi\rho_0 \sqrt{\pi Ru} \right] \cdot B(\xi, u), & \frac{2\rho_0^2 R}{u} > 43,7, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$B(\xi, u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\frac{1+\xi}{\sqrt{u}}} e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{1-\xi}{\sqrt{u}}} e^{-t^2} dt \right).$$

Как видно из (2), подынтегральная функция имеет особенность в области интегрирования ($u = 0$) при $R = 1$, для рассмотренных значений параметров из D : $0 \leq \xi \leq 1,5$; $0,01 \leq \rho_0 \leq 0,2$; $0 \leq \alpha \leq 2$. Тогда случай $R = 1$ следует рассматривать отдельно. В этом случае из (2)

$$f(u, \rho_0, \xi, 1) = \begin{cases} \exp \left[-\frac{2\rho_0^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\rho_0^2}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] B(\xi, u), & u > \frac{2\rho_0^2}{3,75}, \\ \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\rho_0^2} \right)^i}{8\pi\rho_0 \sqrt{2u}} \cdot B(\xi, u), & \frac{2\rho_0^2}{43,7} \leq u \leq \frac{2\rho_0^2}{3,75}, \\ \frac{1}{16\pi\rho_0 \sqrt{\pi u}} \cdot B(\xi, u), & u < \frac{2\rho_0^2}{43,7}. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим интервал $\left(0, \frac{2\rho_0^2}{3,75}\right)$. Можно убедиться, что для $0,01 \leq \rho_0 \leq 0,2$ с достаточной для практики точностью

$$B(\xi, u) = \kappa = \begin{cases} 1, & \xi = 1, \\ 0, & \xi > 1, \\ 2, & 0 \leq \xi < 1, \end{cases} \quad (4)$$

Особенность $f(u, \rho_0, \xi, 1)$ встречается в интервале $(0, \frac{2\rho_0^2}{43,7})$. Поэтому поступаем следующим образом: так как $B(\xi, u)$ при фиксированных значениях ξ определяется равенством (4), то для $0 < x < \frac{2\rho_0^2}{3,75}$ выполняем непосредственное интегрирование:

$$\int_0^x \frac{1}{16\pi\rho_0\sqrt{\pi}u} \cdot B(\xi, u) du = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{8\pi\rho_0\sqrt{\pi}} & (\xi = 1); \\ \frac{\sqrt{x}}{4\pi\rho_0\sqrt{\pi}} & (\xi < 1). \end{cases} \quad (5)$$

Тогда с учетом (3), (4) и (5) будем иметь:

$$I(x, \rho_0, \xi, 1) = \begin{cases} \frac{\kappa\sqrt{x}}{8\pi\rho_0\sqrt{\pi}}, & x < \frac{2\rho_0^2}{43,7}; \\ \frac{\kappa}{8\pi} \left[\sqrt{\frac{2}{43,7\pi}} + \frac{\sqrt{2x}}{\rho_0} \cdot \sum_{i=0}^8 \frac{C_i}{2i+1} \left(\frac{3,75x}{2\rho_0^2} \right)^i - \frac{2}{\sqrt{43,7}} \sum_{i=0}^8 \frac{C_i}{2i+1} \left(\frac{3,75}{43,7} \right)^i \right], & \frac{2\rho_0^2}{43,7} \leq x \leq \frac{2\rho_0^2}{3,75}; \\ \frac{\kappa}{8\pi} \left\{ \sqrt{\frac{2}{43,7\pi}} + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{3,75}} \sum_{i=0}^8 \frac{C_i}{2i+1} - \frac{1}{\sqrt{43,7}} \sum_{i=0}^8 \frac{C_i}{2i+1} \left(\frac{3,75}{43,7} \right)^i \right] \right\} + \\ + \int_{\frac{2\rho_0^2}{3,75}}^x \exp \left[-\frac{2\rho_0^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\rho_0^2}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u) du, & x > \frac{2\rho_0^2}{3,75}. \end{cases} \quad (6)$$

Интеграл, содержащийся в (6), вычисляется численно без особого труда. Случай $R \neq 1$ также проводится численно по формуле (2).

II. $\nu = 0$. В этом случае интеграл соответствует задаче расчета распределения температуры, создаваемого движущимся фронтом горения цилиндрической формы. Предполагается при этом, что поток воздуха, закачиваемого в пласт, является стационарным и поэтому скорость продвижения фронта горения берется обратно пропорционально его расстоянию от скважины.

Так как $\beta \neq 0$, то в этом случае подынтегральная функция зависит также от верхнего предела и обладает особенностями при $u = 0$. Подынтегральная функция может быть представлена следующим образом:

$$f(u, \rho_0, \beta, x, \xi, R, \alpha) =$$

$$= \begin{cases} \exp \left[-\frac{w + \theta^2(1+\alpha)^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u), & \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}}{u} < 3,75; \\ \exp \left\{ -\frac{[V\bar{w} - (1+\alpha)\theta]^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}} \right)^i}{8\pi\sqrt{u}\sqrt{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}}} \right\} \cdot B(\xi, u), & 3,75 \leq \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}}{u} \leq 43,7; \\ \exp \left\{ -\frac{[V\bar{w} - (1+\alpha)\theta]^2}{u} - \ln 16\pi\sqrt{\pi u \theta(1+\alpha)\sqrt{w}} \right\} \cdot B(\xi, u), & \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{w}}{u} > 43,7, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\theta = \sqrt{\rho_0^2 + \beta x}, \quad w = \theta^2 - \beta u.$$

Легко убедиться, что особенность при $u \rightarrow 0$ порядка

$$\frac{e^{-\frac{c}{u}}}{\sqrt{u}} \leq \frac{e^{-\frac{\theta^2 \alpha^2}{u}}}{\sqrt{u}} \quad (\theta^2 \neq 0)$$

и, следовательно, сходимость интеграла ухудшается при $\alpha \rightarrow 0$. Тогда вычисление I при $\alpha = 0$ требует особого рассмотрения. Поэтому случаи $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$ вычисляются отдельными схемами.

Для изоляции особенностей в соответствии с представлениями (7) интервал интегрирования разбивается на три участка:

$$(0, x) = (0, a_1) + (a_1, a_2) + (a_2, x), \text{ где}$$

$$a_1 = 2 \left(\frac{\theta}{43,7} \right)^2 (\sqrt{43,7^2 + \beta^2} - \beta), \quad a_2 = 2 \left(\frac{\theta}{43,7} \right)^2 (\sqrt{3,75^2 + \beta^2} - \beta).$$

Если соответствующие интегралы обозначить через I_1, I_2 и I_3 , то $I = I_1 + I_2 + I_3$. После некоторых преобразований получим

$$I_1 = \int_0^{a_1} \frac{u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{(\theta + \sqrt{w})^2}}}{8\pi^2 \sqrt{\theta} \cdot \sqrt[4]{w}} \cdot B(\xi, u) du.$$

Отсюда, если $a_1 \geq 0,01^*$, то

$$I_1 = \int_0^{0,01} + \int_{0,01}^{a_1} = I_1' + I_1''.$$

Легко проверить, что для первого слагаемого $B(\xi, u)$ удовлетворяет равенствам (4). В том случае, когда $a_1 \leq 0,01$, $B(\xi, u)$ также будет определяться равенствами (4), но для отрезка $(0, a_1)$. Тогда, интегрируя I_1 по частям, можно избавиться от особенностей.

Резюмируя вышеприведенное, получим:

$$1^\circ \alpha \neq 0. \quad f(u, \rho_0, \beta, x, \xi, R, \alpha) =$$

$$\begin{aligned}
& \exp \left[-\frac{\omega + \theta^2 (1 + \alpha)^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{\omega}}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u), \\
& \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{\omega}}{u} < 3,75; \\
& \exp \left\{ -\frac{[\sqrt{\omega} - (1+\alpha)\theta]^2}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\theta(1+\alpha)\sqrt{\omega}} \right)^i}{8\pi} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \ln 2\theta(1+\alpha)u - \frac{1}{4} \ln \omega \right\} \cdot B(\xi, u), \quad 3,75 \leq \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{\omega}}{u} \leq 43,7; \\
& \exp \left\{ -\frac{[\sqrt{\omega} - (1+\alpha)\theta]^2}{u} - \ln 16\pi^{3/2} - \frac{1}{2} \ln(1+\alpha)u - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \ln \theta \sqrt{\omega} \right\} \cdot B(\xi, u), \quad \frac{2\theta(1+\alpha)\sqrt{\omega}}{u} > 43,7.
\end{aligned} \quad (8)$$

2°. $\alpha = 0$. Тогда из (1), с учетом $\nu = 0$, для вычисления I получим следующее:

1) $a_1 \geq 0,01$;

$$I = \frac{\kappa\beta}{8\pi\sqrt{\pi\theta}} \int_0^{0,01} F_1 du + \int_{0,01}^x F_2 du + \begin{cases} \exp \left(-\frac{\beta^2 x}{\theta + \rho_0^2} + \ln \frac{\kappa\sqrt{x}}{8\pi\sqrt{\pi\rho_0\theta}} \right) & x \leq 0,01; \\ \exp \left\{ -\left[\frac{\beta}{10\theta + \sqrt{(10\theta)^2 - \beta}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \ln \frac{\kappa}{8\pi\sqrt{\pi\theta}} \right\} & x \geq 0,01, \end{cases}$$

где

$$F_1 = \frac{\sqrt{u} \left[\theta\beta \left(\theta - \frac{\beta u}{\theta + \sqrt{\omega}} \right) - \frac{1}{4} (\theta + \sqrt{\omega})^2 \right]}{\omega^{3/4} (\theta + \sqrt{\omega})^2 \exp \left[\frac{\beta^2 u}{(\theta + \sqrt{\omega})^2} \right]};$$

$$F_2 = \begin{cases} \exp \left[-\frac{\beta^2 u}{(\theta + \sqrt{\omega})^2} - \ln 16\pi\sqrt{\pi\theta u\sqrt{\omega}} \right] \cdot B(\xi, u), & 0,01 \leq u \leq a_1; \\ \exp \left[-\frac{\beta^2 u}{(\theta + \sqrt{\omega})^2} + \ln \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\theta\sqrt{\omega}} \right)^i}{8\pi\sqrt{2\theta u\sqrt{\omega}}} \right] \cdot B(\xi, u), & a_1 \leq u \leq a_2; \\ \exp \left[-\frac{\theta^2 + \omega}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\theta\sqrt{\omega}}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u), & a_2 \leq u \leq x. \end{cases}$$

2) $a_1 \leq 0,01$;

$$I = \exp \left(-\frac{\beta\sqrt{a_1}}{\theta + \sqrt{\theta^2 - \beta a_1}} + \ln A \cdot \sqrt{\frac{a_1}{\theta^2 - \beta a_1}} \right) + \int_0^x F_3 du,$$

где

$$F_3 = \begin{cases} A\beta F_1, & 0 \leq u \leq a_1; \\ \exp \left[-\frac{\beta^2 u}{(\theta + \sqrt{\omega})^2} + \ln \frac{\sum_{i=0}^8 C_i \left(\frac{3,75u}{2\theta\sqrt{\omega}} \right)^i}{8\pi\sqrt{2\theta u\sqrt{\omega}}} \right] \cdot B(\xi, u), & a_1 \leq u \leq a_2; \\ \exp \left[-\frac{\theta^2 + \omega}{u} + \ln \frac{\sum_{i=0}^6 A_i \left(\frac{2\theta\sqrt{\omega}}{3,75u} \right)^{2i}}{8\pi u} \right] \cdot B(\xi, u), & a_2 \leq u \leq x; \end{cases}$$

$$A = \frac{\kappa}{8\pi\sqrt{\pi\theta}}.$$

III. $\beta = 0, \alpha = 0$. В этом случае интеграл соответствует задаче о прогреве призабойной зоны скважины с помощью цилиндрического нагревателя с одновременной откачкой жидкости из пласта. Интеграл вычисляется для тех же значений параметров, что и выше. Вариант $\nu = 1$ может быть вычислен аналогично варианту $\nu = 0$ в первом случае. Представляют интерес значения $\nu = \frac{1}{2}$ и $\nu = 10$. Как легко заметить, и в этом случае особенности при вычислении интеграла связаны со значениями $R = 1$ (заметим, что R может принимать также значения, отличные от 1). Тогда для $\nu = \frac{1}{2}$ получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \left\{ \exp \left[\frac{(1-R)^2 \rho_0^2}{u} - \sigma(u) \right] - \exp \left[\frac{(1+R)^2 \rho_0^2}{u} - \sigma(u) \right] \right\} B(\xi, u) du \\
& (R \neq 1) \\
& I = \begin{cases} \kappa \left\{ \frac{2\sqrt{x}}{a} - \int_0^x \exp \left[-\frac{4\rho_0^2}{u} - \sigma(u) \right] du \right\}, & x \leq 0,01, \\ \kappa \left\{ \frac{0,2}{a} - \int_0^{0,01} \exp \left[-\frac{4\rho_0^2}{u} - \sigma(u) \right] du \right\} + \int_{0,01}^x \left\{ \frac{1}{a\sqrt{u}} - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{4\rho_0^2}{u} - \sigma(u) \right] \right\} B(\xi, u) du & (R = 1) \\ & x \geq 0,01, \end{cases}
\end{aligned}$$

где $\sigma(u) = \ln a\sqrt{u}$, $a = 16^{3/2}\pi R\rho_0$.

При $\nu = 10$ согласно [4] имеем

* 0,01 определяется значениями соответствующих параметров из D, также при водящих к выполнению (4).

$$I_0 = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{10+2n} \cdot \frac{1}{n! (10+n)!}, & z = \frac{2\rho_0^2 R}{u} < 10, \\ \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \cdot e^z \cdot \sum_{n=0}^m (-1)^n B_n(z) + \epsilon_m, & z \geq 10, \end{cases}$$

где

$$B_0(z) = 1, B_n(z) = \prod_{s=1}^n \frac{4 \cdot 10^2 - (2s-1)^2}{8sz}, |\epsilon_m| \leq \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \cdot e^z |B_n(z)|.$$

Отсюда для $R \neq 1$ имеем схему:

$$I = \begin{cases} \int_0^x \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1+R^2)}{u} + \ln \sum_{n=0}^{\infty} u_n + 10 \ln \frac{\rho_0^2}{u} - \ln 8\pi u \right] \cdot B(\xi, u) du, & u > \frac{\rho_0^2 R}{5}; \\ \int_0^x \exp \left[-\frac{\rho_0^2 (1-R)^2}{u} + \ln \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{B_n}{R^4} - \ln \rho_0 R^6 - \right. \\ \left. - \ln 16\pi \sqrt{\pi R u} \right] \cdot B(\xi, u) du, & 0 \leq u \leq \frac{\rho_0^2 R}{5}, \end{cases}$$

$$\text{где } u_0 = \frac{1}{10!}, u_n = u_{n-1} \cdot \frac{\rho_0^4 R^2}{n(n+10)u^2}.$$

Для $R = 1$ алгоритм вычисления имеет вид:

$$I = \begin{cases} 2A \sqrt{u} \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{1}{2n+1} B_n, & x \leq \frac{\rho_0^2}{5}; \\ 2A \sqrt{u} \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{B_n}{2n+1} \Big|_0^{\frac{\rho_0^2}{5}} + \int_{\frac{\rho_0^2}{5}}^x \exp \left[-\frac{2\rho_0^2}{u} + \ln \sum_{i=1}^{\infty} u_i - \right. \\ \left. - 10 \ln \frac{\rho_0^2}{u} - \ln 10! \cdot 8\pi u \right] \cdot B(\xi, u) du, & x > \frac{\rho_0^2}{5}, \end{cases}$$

$$\text{где } B_0 = 1, B_n = -B_{n-1} \frac{400 - (2n-1)^2}{16n\rho_0^2} u,$$

$$u_0 = 1, u_i = u_{i-1} \cdot \frac{\rho_0^4}{i(i+10) \cdot u^2}, A = \frac{\kappa}{16\pi\rho_0 \sqrt{\pi}}.$$

Отметим, что верхний предел x в данном случае сильно зависит от ν . Например, для $\nu = 10$ (при $R \neq 1$) x достаточно брать до 1, а при $R = 1$ — до 0,04.

Приведенные выше интегралы при рассмотренных случаях были табулированы на машине БЭСМ-2М для конкретных значений параметров, соответствующих поставленным задачам [1, 2]. Всего было

вычислено более 20 тысяч интегралов за 120 часов, при этом наибольшее машинное время на вычисление одного интеграла составляло 25—30 минут [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Багиров М. А. НХ, 1964, № 12.
2. Багиров М. А. Изв. Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 6.
3. Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ, 1962.
4. Справочник программиста, т. 1. Л., 1963.
5. Исследования по электротермическому воздействию на истощенные нефтеносные пласты. Отчет. лаб. № 2 ВЦ АН Азерб. ССР, 1964.

К. Ф. Ширинов, Э. Х. Салимов

Мәһсулдар ләйләре термик тәсир мәсәләләриндә раст кәлән бәзи интегралларын һесаблинамасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Риәзи физика тәнликләри үчүн гојулмуш бир чох мәсәләләрин һәлли елә хусуси интеграллара кәтирир ки, онларын һесаблинамасы һәтта электрон һесаблајычы машинларын тәтбигилә дә бөјүк чәтинликләр төрәдир.

Мәгаләдә мәһсулдар ләйләре термик тәсирин үч мәсәләсиндә раст кәлән һәмин хусуси интегралларын тәгриби һесаблинма гајдасы верилмишдир.

Т. Г. ГЕЙДАРОВ

АППРОКСИМАЦИЯ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИИ И КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО КОНЕЧНОЙ ВЫБОРКЕ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — нормальные, коррелированные случайные величины со средними нуль, дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ и матрицей коэффициентов корреляции

$$\|R\| = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix},$$

где $r_{ij} = r_{ji}$.

Как известно, Роббинсом [1] найдено распределение квадратичных форм

$$Q(x) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2,$$

когда каждая из $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет нормальное и независимое распределение со средними нуль и с дисперсией 1.

Нахождение распределения квадратичных форм в более общем виде было предпринято М. К. Камаловым [2]. В данной работе найдена аппроксимация закона распределения оценки дисперсии s^2 и корреляционной функции $R(\kappa)$ случайной последовательности в зависимости от корреляционной матрицы и от n , что и позволяет решать вопрос о подборе числа членов для хорошего приближения.

1. Характеристическая функция для оценки дисперсии нормально распределенной последовательности

$$s^2 = \frac{1}{n} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)$$

записывается в виде

$$\varphi(t) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2 R)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{h, \kappa=1}^n \left(\frac{R_{h\kappa}}{R_{\sigma_h \sigma_\kappa}} - \frac{2it}{n} \delta_{h\kappa} \right) x_h x_\kappa \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

где R — определитель матрицы $\|R\|$,

$R_{h\kappa}$ — миноры элемента $r_{h\kappa}$ в определителе R ,

$$\delta_{h\kappa} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = \kappa, \\ 0 & \text{при } n \neq \kappa, \end{cases}$$

Подобные интегралы можно взять по формулам [3]:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -C(u, u) \} du_1 du_2 \dots du_p = \pi^{p/2} |C|^{-1/2},$$

где

$$C(u, u) = \sum_{\mu, \nu=1}^p c_{\mu\nu} u_\mu u_\nu \quad (c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu})$$

есть положительная определенная квадратичная форма, а $|C|$ обозначает определитель $|c_{\mu\nu}|$;

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -C(u, u) \pm 2i \sum_{\nu=1}^p (t_\nu u_\nu) \right\} du_1 \dots du_p = \\ = \pi^{p/2} |C|^{-1/2} \exp \{ -C^{-1}(t, t) \},$$

где

$$C^{-1}(t, t) = \sum_{\mu, \nu=1}^p c^{\mu\nu} t_\mu t_\nu$$

и $c^{\mu\nu} = \frac{|C_{\mu\nu}|}{|C|} - C_{\mu\nu}$ есть минор $c_{\mu\nu}$ в определителе $|C|$. Взяв интеграл по формуле а), после упрощения получим

$$\varphi(t) = R^{\frac{n-1}{2}} \Delta_n^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} R_{11} - \frac{2iRt\sigma_1^2}{n} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} - \frac{2iRt\sigma_2^2}{n} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} - \frac{2iRt\sigma_n^2}{n} \end{vmatrix}.$$

В данном случае

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 R'_{ii},$$

$$p_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 R'_{ij}; \quad j > i,$$

$$p_3 = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{\kappa=3}^n \sigma_i^2 \sigma_j^2 \sigma_\kappa^2 R'_{i \cdot j \cdot \kappa \cdot \kappa \cdot \kappa} \cdot \quad \kappa > j > i,$$

$$p_n = \prod_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Здесь $R'_{ii \cdot j \cdot j \cdot \dots}$ получается после вычеркивания i -й строки и столбца, а также j -й строки и столбца в определителе $\{R_{ij}\}$ и т. д. Обозначая кумулянтную функцию через $K(t)$, можно найти все кумулянты (семиинварианты) x_ν случайной величины s^2 (выборочных распределений):

$$K(t) = \lg [\varphi(t)] = \frac{1}{2} [(n-1) \lg R - \lg \Delta_n];$$

$$x_\nu = (+i)^\nu \left[\frac{d^\nu \lg \varphi(t)}{dt^\nu} \right]_{t=0};$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= p_1/nR^{+(n-2)}; \\
x_2 &= 2R^{-2(n-2)}(p_1^2 - 2p_1p_2R^{n-1})/n^2; \\
x_3 &= 8R^{-3(n-2)}[p_1^3 - 3p_1p_2R^{n-1} + 3p_3R^{2(n-1)}]/n^3; \\
x_4 &= 48R^{-4(n-2)}[p_1^4 + 4p_1^2p_2R^{n-1} + 2p_2^2R^{2(n-1)} + \\
&\quad + 4p_1p_3R^{2(n-1)} - 4p_4R^{3(n-1)}]/n^4; \\
&\dots\dots\dots \\
x_v &= \frac{v! 2^v R^v}{n^v} \sum \frac{2^{-p} (-1)^{p+v} [2(p-1)]!!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} \frac{p_1^\alpha p_2^\beta \dots p_l^\gamma}{R^{p(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Суммирование распространяется на все целые положительные значения $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, которые удовлетворяют условию $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + l\gamma = v$;

p —определяется из условия

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \gamma = p.$$

Так же можно вычислить все моменты α_v случайной величины s^2 (выборочных распределений);

$$\begin{aligned}
\alpha_v &= (i)^{-v} \frac{d^v \varphi(t)}{dt^v} \Big|_{t=0}, \\
\alpha_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= p_1 R^{-(n-2)}/n, \\
\alpha_2 &= R^{-2(n-2)} [3p_1^2 - 4p_1p_2R^{n-1}]/n^2, \\
\alpha_3 &= 3R^{-3(n-2)} [5p_1^3 - 12R^{n-1}p_1p_2 + 8p_3R^{2(n-1)}]/n^3, \\
&\dots\dots\dots \\
\alpha_v &= \frac{v! R^v}{n^v} \sum \frac{(-1)^{v+p} 2^{-p} (2p-1)!! p_1^\alpha p_2^\beta \dots p_l^\gamma}{\alpha! \beta! \dots \gamma! R^{p(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Характеристическую функцию $\varphi(t)$ можно выразить как через α_v , так и через семинварианты x_v случайной величины s^2 . Удобно выбрать последнее выражение, поскольку в отличие от моментов они обладают свойствами, более полезными с теоретической точки зрения, так как все семинварианты, исключая первый, инвариантны относительно изменения начала отсчета. В этом они существенно отличаются от моментов относительно произвольной точки.

Зная моменты случайной величины s^2 , разложим функцию плотности s^2 по полиномам Чебышева—Эрмита:

$$f(x) = c_0 \varphi(x) + \frac{c_1}{1!} \varphi'(x) + \frac{c_2}{2!} \varphi''(x) + \frac{c_3}{3!} \varphi'''(x) + \dots,$$

где $\varphi(x)$ —нормальная функция плотности, равная

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Коэффициенты C_v определяются следующим образом:

$$c_v = (-1)^v \int_{-\infty}^{\infty} H_v(x) f(x) dx.$$

При этом получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi(x) \left\{ 1 + \alpha_1 H_1(x) + \frac{\alpha_2 - 1}{2!} H_2(x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha_3 - 3\alpha_1}{3!} H_3(x) + \frac{\alpha_4 - 6\alpha_2 + 3}{4!} H_4(x) + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

В математической статистике этот ряд называется также рядом Грама-Шарлье типа (А).

Учитывая моменты случайной величины s^2 , после группировки по степеням n^{-v} получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi(x) \left\{ 1 - \frac{H_2(x)}{2!} + \frac{3H_4(x)}{4!} + \frac{p_1 R^{-(n-2)}}{n} \left[H_1(x) - \frac{H_3(x)}{2} \right] + \right. \\
&\quad + \frac{R^{-2(n-2)} (3p_1^2 - 4p_1p_2R^{n-1})}{2! n^2} \left[H_2(x) - \frac{1}{2} H_4(x) \right] + \\
&\quad + \frac{3R^{-3(n-2)} (5p_1^3 - 12p_1p_2R^{n-1} + 8p_3R^{2(n-1)})}{3! n^3} \times \\
&\quad \times \left[H_3(x) - \frac{1}{2} H_5(x) \right] + \dots \left. \right\}. \quad (A)
\end{aligned}$$

Используя семинварианты случайной величины s^2 , можно найти разложение функции плотности в ряд типа Эджворта. Для упрощения алгебраических выкладок рассмотрим нормированную случайную величину

$$\frac{s^2 - x_1}{\sqrt{x_2}}.$$

Тогда для семинвариантов случайной величины $(s^2 - x_1)/\sqrt{x_2}$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
x'_1 &= 0, \\
x'_2 &= 1, \\
x'_3 &= x_3/x_2^{3/2}, \\
&\dots\dots\dots \\
x'_v &= x_v/x_2^{v/2}.
\end{aligned} \quad (*)$$

Как известно [4, 5 и др.], для функции плотности случайной величины $(s^2 - x_1)/\sqrt{x_2}$ можно получить:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi(x) \left[1 - \frac{x'_3}{3!} H_3(x) + \frac{x'_4}{4!} H_4(x) - \frac{x'_5}{5!} H_5(x) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x'_6 + 10x'^2_3}{6!} H_6(x) - \dots \right].
\end{aligned}$$

Учитывая (*), можно написать

$$f(x) = \varphi(x) \left[1 - \frac{\gamma_1}{3!} H_3(x) + \frac{\gamma_2}{4!} H_4(x) + \frac{10\gamma_1^2}{6!} H_6(x) + \dots \right], \quad (B)$$

где γ_1 и γ_2 —коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= x_3/x_2^{3/2} = 2! \cdot 2 [p_1^3 - 3p_1p_2R^{n-1} + 3p_3R^{2(n-1)}] / [p_1^2 - 2p_1p_2R^{n-1}]^{3/2}; \\
\gamma_2 &= x_4/x_2^2 = 12 [p_1^4 + 4p_1^2p_2R^{n-1} + 2p_2^2R^{2(n-1)} + 4p_1p_3R^{2(n-1)} - \\
&\quad - 4p_4R^{3(n-1)}] / [p_1^2 - 2p_1p_2R^{n-1}]^2.
\end{aligned}$$

2. Найдем аппроксимацию закона распределения оценки корреляционной функции $R(\kappa)$ случайной последовательности. Характеристическая функция для оценки корреляционной функции нормально распределенной последовательности

$$R(K) = \frac{1}{n - \kappa} \sum_{q=1}^{n-\kappa} \xi_q \xi_{q+\kappa}$$

записывается в виде

$$\varphi(t) = (2\pi)^{-n/2} (\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_n^2 R)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{h,q=1}^n R_{hq} x_h x_q - \frac{2it}{n-\kappa} \delta_{hq} x_h x_q \right\} dx_1 \dots dx_n,$$

где

$$\delta_{hq} = \begin{cases} 1 & \text{при } q-h=\kappa, \\ 0 & \text{при } q-h \neq \kappa, \end{cases}$$

R —определитель матрицы $\|R\|$,
 R_{hq} —миноры элемента r_{hq} в определителе R .
 Используя снова в формулу а), получим

$$\varphi(t) = R^{\frac{n-1}{2}} \Delta_n^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\Delta_n' = R^{n-1} - \frac{2R}{n-\kappa} p_1'(it) + \left(\frac{2R}{n-\kappa} \right)^2 p_2'(it)^2 - \dots + (-1)^{n-\kappa} \left(\frac{2R}{n-\kappa} \right)^{n-\kappa} p_{n-\kappa}'(it)^{n-\kappa}.$$

Здесь

$$p_1' = \sum_{h=1}^{n-\kappa} \begin{vmatrix} R_{11} \dots \delta_{1,h+\kappa} & \sigma_1 & \dots & R_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n-\kappa,1} \dots \delta_{n-\kappa,h+\kappa} & \sigma_{n-\kappa} & \dots & R_{n-\kappa,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} \dots & R_{n,h+\kappa} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \sigma_{n+\kappa},$$

$$p_2' = \sum_{h_1+h_2=1}^{n-\kappa} \begin{vmatrix} R_{11} \dots \delta_{1,h_1+\kappa} & \sigma_1 \dots \delta_{1,h_2+\kappa} & \sigma_1 \dots R_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n-\kappa,1} \dots \delta_{n-\kappa,h_1+\kappa} & \sigma_{n-\kappa} \dots \delta_{n-\kappa,h_2+\kappa} & \sigma_{n-\kappa} \dots R_{n-\kappa,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} \dots & R_{n,h_1+\kappa} & \dots & R_{n,h_2+\kappa} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \sigma_{h_1+\kappa} \sigma_{h_2+\kappa},$$

$$p_{n-\kappa}' = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_{n-\kappa}^2 \begin{vmatrix} R_{n-\kappa,1} & R_{n-\kappa,2} & \dots & R_{n-\kappa,n-\kappa} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{n,n-\kappa} \end{vmatrix}.$$

Находя все моменты α_v' и семиинварианты χ_v' случайной функции $R(\kappa)$ по формулам

$$\alpha_v' = \frac{v! \cdot R^v}{(n-\kappa)^v} \sum \frac{(-1)^{v+p} 2^{v-p} (2p-1)!!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} \cdot \frac{p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_l^{\gamma}}{R^{p(n-1)}},$$

$$\chi_v' = \frac{v! \cdot 2^v R^v}{(n-\kappa)^v} \sum \frac{2^{-p} (-1)^{p+v} [2(p-1)]!!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!} \cdot \frac{p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \dots p_l^{\gamma}}{R^{p(n-1)}},$$

где суммирование распространяется на все целые положительные значения $\alpha, \beta, \dots, \gamma$, которые удовлетворяют условию

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + l\gamma = v,$$

p определяется из условия

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \gamma = p,$$

можно разложить функцию плотности случайной функции $R(\kappa)$ в ряд Грама—Шарлье типа А или в ряд типа Эджворта:

$$f(x) = \varphi(x) \left\{ 1 - \frac{H_2(x)}{2!} + \frac{3H_4(x)}{4!} + \frac{p_1 R^{-(n-2)}}{n-\kappa} \left[H_1(x) - \frac{H_3(x)}{2} \right] + \right.$$

$$+ \frac{R^{-2(n-2)} (3p_1^2 - 4p_2 R^{n-1})}{2! (n-\kappa)^2} \left[H_2(x) - \frac{1}{2} H_4(x) \right] +$$

$$+ \frac{3R^{-3(n-2)} (5p_2 - 12p_1 p_2 R^{n-1} + 8p_3 R^{2(n-1)})}{3! (n-\kappa)^3} \times$$

$$\times \left[H_3(x) - \frac{1}{2} H_5(x) \right] + \dots \left. \right\}, \quad (A')$$

$$f(x) = \varphi(x) \left[1 - \frac{\gamma_1'}{3!} H_3(x) + \frac{\gamma_2'}{4!} H_4(x) + \frac{10\gamma_2'^2}{6!} H_6(x) + \dots \right], \quad (B')$$

где γ_1' и γ_2' —коэффициенты асимметрии и эксцесса;

$$\gamma_1' = \chi_3'/\chi_2'^{3/2}; \quad \gamma_2' = \chi_4'/\chi_2'^2.$$

3. Анализируя полученные результаты для функции плотности случайной величины s^2 и случайной функции $R(\kappa)$, можно сделать вывод:

а) разложения (А) и (А') зависят от n и поэтому представляется возможность подбирать нужное число членов для хорошего приближения;

б) сумма первых членов фигурной скобки разложения (А) и (А') не зависит от n .

Обозначим ее через $M(x)$. Очевидно, что при $x \geq 0$

$$M(x) = 1 + NO(x),$$

где N —число членов.

Если существует такое число δ , не зависящее от x , что

$$|M(x) - 1| \leq \delta x < \frac{\varepsilon}{N},$$

то в этом случае можно пренебречь величиной $M(x) - 1$;

в) практически в представлении плотности в виде ряда типа Эджворта в расчет приходится принимать только несколько первых членов. Слагаемые в $H_v(x)$ имеют коэффициенты, зависящие от χ , и надо иметь в виду, что в силу выборочных флуктуаций при $v > 4$ они определяются довольно плохо. Если выборочными эффектами можно пренебречь, то в рассматриваемых рядах следует брать больше членов. Но обычно нет надобности привлекать члены старше H_6 .

Как видно из (А), (А'), (В) и (В'), разложение функции плотности $f(x)$ для случайной величины s^2 и случайной функции $R(\kappa)$ зависит от n и коэффициентов корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robbins H. Ann. Math. st XIX, 2, 266 (1948).
2. Камалов М. К. Тр. АН Узбек. ССР. 15, 1955.
3. Wishart J. and Bortlett M. Proc. Cambridge Phil. Soc XXIX, 2 (1933).
4. Крамер Г. Математические методы статистики. ГИТЛ, 1948.
5. Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. Изд-во «Наука», 1966.

Сонлу сечмә илә тәсадүфи ардычыллыгын дисперсия вә
коррелјасија функцијасынын пәјлама ганунунун
гәјмәтләндирилмәсинин апроксимасијасы

ХҮЛАСӘ

Фәрс едәк ки, асылы тәсадүфи кәмијјәтләр— ϵ_i , $i = 1, \bar{n}$ нормал
пәјлама гануна табедир. $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$ -нын вә ϵ_i , $i = 1, \bar{n}$ кәмијјәтләри
коррелјасија матрисинин пәјлама ганунунун апроксимасијаларына.
Грама-Шарле вә Ечворт типли сыраларын кәмәји илә бахылмыш дыр

Д. М. МАНЮРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО
ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ
НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ

АНАЛИЗ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО
ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ПДЛП)

Рассматривается следующая задача: для каждого значения $\lambda \in [0; \alpha]$, где $\alpha > 0$ —действительное число, требуется определить

$$\max \left\{ \frac{L_1(x_\lambda)}{L_2(x_\lambda)} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b'_i + \lambda b''_i, x_j \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (1)$$

где $L_1(x_\lambda) = \sum_{j=1}^n c'_j x_j$, $L_2(x_\lambda) = \sum_{j=1}^n c''_j x_j$; c'_j , c''_j ; b'_i , b''_i и элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ —заданные постоянные; λ —параметр. Пусть множество

$$G_\lambda = \{x_\lambda \mid Ax = b' + \lambda b'', x \geq 0\} \quad (2)$$

является выпуклым многогранником и $G_\lambda \neq \emptyset$ для каждого $\lambda \in [0; \alpha]$, а $L_2(x_\lambda) > 0$ для всех $x_\lambda \in G_\lambda$ и рассматриваемые задачи не вырождены. Используя алгоритм ДЛП [1, 2], решим задачу (1) при $\lambda = 0$. Относительно найденного оптимального базиса B_1 вычислим следующие величины при $j = 1, \dots, n$:

$$\nabla_j(\lambda) = \frac{L_1(x_\lambda^{(1)}) \Delta_{j1}}{L_2(x_\lambda^{(1)}) \Delta_{j2}} = \frac{L_1(x_1^{(1)}) \nabla_{j1}}{L_2(x_1^{(1)}) \nabla_{j2}} + \lambda \frac{L_1(x_2^{(1)}) \nabla_{j1}}{L_2(x_2^{(1)}) \nabla_{j2}} = \nabla_{j1} + \lambda \nabla_{j2},$$

где Δ_{j1} , Δ_{j2} —оценки вектора A_j относительно B_1 , соответственно, для $L_1(x_\lambda^{(1)})$, $L_2(x_\lambda^{(1)})$, $x_\lambda^{(1)} = x_1^{(1)} + \lambda x_2^{(1)}$, а векторы $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ соответственно равны $B_1^{-1} b'$, $B_1^{-1} b''$.

Определение. Выражения $\nabla_j(\lambda)$ относительно любого базиса назовем оценками векторов A_j для задачи ДЛП. Так как базис B_1 оптимален для $\lambda = 0$, то $\nabla_j(0) = \nabla_{j1} \leq 0$, $x_1^{(1)}(0) = x_{i1}^{(1)} \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, m$, поэтому система первенств

$$\nabla_j(\lambda) = \nabla_{j1} + \lambda \nabla_{j2} \leq 0, \quad x_i^{(1)}(\lambda) = x_{i1}^{(1)} + \lambda x_{i2}^{(1)} \geq 0$$

совместна. Пусть $\lambda_1 = \min(\lambda', \lambda'')$, где

$$\lambda' = \begin{cases} \min & -\frac{\nabla_{j1}}{\nabla_{j2}} \\ \nabla_{j2} > 0 & \\ \infty, & \text{если все } \nabla_{j2} \leq 0, \end{cases} \quad \lambda'' = \begin{cases} \min & -\frac{x_{i1}^{(1)}}{x_{i2}^{(1)}} \\ x_{i2}^{(1)} < 0 & \\ \infty, & \text{если все } x_{i2}^{(1)} \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом план $x_{\lambda}^{(1)}$ остается оптимальным для всех λ , удовлетворяющих условию $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Следовательно, совокупность $\lambda \in [0; \lambda_1]$ определяет множество оптимальности базиса B_1 . Имеет место.

Теорема 1. Значения λ , параметра λ полностью определяют множество оптимальности данного базиса: при $\lambda_1 = 0$ — точка; при $\lambda_1 < \infty$ — отрезок; при $\lambda_1 = \infty$ — луч.

Теперь будем исследовать задачу (1) для $\lambda > \lambda_1$. Если $\lambda_1 = \infty$, процесс анализа закончен. Вообще говоря, могут встретиться следующие случаи.

Случай 1. Пусть $\lambda_1 = \lambda' < \lambda''$, тогда

$$\lambda_1 = \min_{x_{j2} > 0} \left(-\frac{\nabla_{j1}}{\nabla_{j2}} = -\frac{\nabla_{k1}}{\nabla_{k2}} \right), \quad \nabla_{k2} > 0.$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_k(\lambda_1) = 0. \quad (3)$$

Ввиду того, что G_{λ} является выпуклым многогранником, найдется по крайней мере одна положительная компонента x_{ik} разложения вектора условий A_k по векторам базиса B_1 . Поэтому в базис вводится вектор A_k и исключается некоторый вектор A_r , для которого

$$\theta = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_i^{(1)}(\lambda_1)}{x_{ik}} = \frac{x_r^{(1)}(\lambda_1)}{x_{rk}}, \quad x_{rk} > 0, \quad (4)$$

где все $x_i^{(1)}(\lambda_1) > 0$, так как $\lambda' < \lambda''$.

Теорема 2. Новый базис является оптимальным по крайней мере для $\lambda = \lambda_1$. Если множеству оптимальности нового базиса соответствует отрезок, то левый конец его равен λ_1 .

Доказательство. Для нового базиса параметры двух последовательных итераций метода дробно линейного программирования связаны соотношениями:

$$\bar{\Delta}_{j1} = \Delta_{j1} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \Delta_{k1}, \quad \bar{\Delta}_{j2} = \Delta_{j2} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \Delta_{k2}; \quad (5)$$

$$L_1(x_{\lambda}^{(2)}) = L_1(x_{\lambda}^{(1)}) - \theta \Delta_{k1}, \quad L_2(x_{\lambda}^{(2)}) = L_2(x_{\lambda}^{(1)}) - \theta \Delta_{k2},$$

где $x_{\lambda}^{(2)} = x_{\lambda}^{(1)} + \lambda x_2^{(2)}$ — опорный план для нового базиса, θ определяется из (4). Для $\bar{\nabla}_j(\lambda)$ с учетом (5) имеем

$$\bar{\nabla}_j(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(2)}) & \bar{\Delta}_{j1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(2)}) & \bar{\Delta}_{j2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{j1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{j2} \end{vmatrix} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{k1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{k2} \end{vmatrix} \quad (6)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_j(\lambda) &= \begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{j1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{j2} \end{vmatrix} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{k1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(1)}) & \Delta_{k2} \end{vmatrix} - \\ &- \theta \begin{vmatrix} \Delta_k & \Delta_{j1} \\ \Delta_k & \Delta_{j2} \end{vmatrix} = \nabla_j(\lambda) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \nabla_k(\lambda) - \theta \begin{vmatrix} \Delta_{k1} & \Delta_{j1} \\ \Delta_{k2} & \Delta_{j2} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

В работе [2] показано, что

$$\frac{L_1(x_{\lambda}^{(2)})}{L_2(x_{\lambda}^{(2)})} - \frac{L_1(x_{\lambda}^{(1)})}{L_2(x_{\lambda}^{(1)})} = \frac{\theta}{L_2(x_{\lambda}^{(1)}) L_2(x_{\lambda}^{(2)})} \cdot \nabla_k(\lambda_1).$$

Тогда, учитывая (3), приходим к следующему выводу:

$$\frac{L_1(x_{\lambda}^{(1)})}{L_2(x_{\lambda}^{(1)})} = \frac{L_1(x_{\lambda}^{(2)})}{L_2(x_{\lambda}^{(2)})}. \quad (8)$$

Система неравенств

$$\begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}) & \Delta_{j1} \\ L_2(x_{\lambda}) & \Delta_{j2} \end{vmatrix} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

совместна для оптимального плана $x_{\lambda}^{(1)}$. Легко показать, что система (9) совместна и для опорного плана $x_{\lambda}^{(2)}$.

Действительно, система (9) для $x_{\lambda} = x_{\lambda}^{(1)}$, с учетом $L_2(x_{\lambda}) > 0$, эквивалентна

$$\frac{L_1(x_{\lambda})}{L_2(x_{\lambda})} \Delta_{j2} - \Delta_{j1} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

но система неравенств (10) совместна и для $x_{\lambda} = x_{\lambda}^{(2)}$, что следует из (8). При $j = k$, учитывая (8) имеем

$$\frac{L_1(x_{\lambda}^{(2)})}{L_2(x_{\lambda}^{(2)})} \Delta_{k2} - \Delta_{k1} = \frac{L_1(x_{\lambda}^{(1)})}{L_2(x_{\lambda}^{(1)})} \Delta_{k2} - \Delta_{k1} = 0. \quad (11)$$

Следовательно, учитывая $L_2(x_{\lambda}^{(2)}) > 0$, можно записать так условие (11)

$$\begin{vmatrix} L_1(x_{\lambda}^{(2)}) & \Delta_{k1} \\ L_2(x_{\lambda}^{(2)}) & \Delta_{k2} \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Поэтому $\bar{\nabla}_j(\lambda_1) \leq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, что следует из (6) с учетом (12) (9) для $x_{\lambda} = x_{\lambda}^{(2)}$. Однако система неравенств

$$\bar{\nabla}_j(\lambda) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

может быть совместна и при $\lambda > \lambda_1$, но любое $\lambda < \lambda_1$ системе (13) не удовлетворяет. В самом деле, так как A_r принадлежит базису B_1 , то $\Delta_{r1} = 0$, $\Delta_{r2} = 0$ и $x_{rr} = 1$, поэтому при $j = r$ из (7) получим

$$\bar{\nabla}_r(\lambda) = -\frac{1}{x_{rk}} \nabla_k(\lambda). \quad (14)$$

Определим интервал значений параметра λ , при котором система неравенств (13) совместна. В частности, в указанном интервале для $j = r$ имеем

$$\bar{\nabla}_r(\lambda) \leq 0. \quad (15)$$

Учитывая (15) и то, что $x_{rk} > 0$, из (14) следует

$$\nabla_k(\lambda) = \nabla_{k1} + \lambda \nabla_{k2} \geq 0. \quad (16)$$

Поскольку $\nabla_{k2} < 0$ по построению, то из (16) вытекает, что

$$\lambda \geq -\frac{\Delta_{k1}}{\nabla_{k2}} = \lambda_1. \quad (17)$$

Компоненты разложения вектора ограничений по векторам нового базиса связаны следующими рекуррентными соотношениями:

$$x_i^{(2)}(\lambda) = (x_{i1}^{(2)} + \lambda x_{i2}^{(2)}) = (x_{i1}^{(1)} + \lambda x_{i2}^{(1)}) - \frac{x_{rk}}{x_{rk}} (x_{r1}^{(1)} + \lambda x_{r2}^{(1)}), \quad i \neq r$$

$$x_2^{(2)}(\lambda) = (x_{r1}^{(2)} + \lambda x_{r2}^{(2)}) = \frac{1}{x_{rk}} (x_{r1}^{(1)} + \lambda x_{r2}^{(1)}). \quad (18)$$

Так как $x_i^{(1)}(\lambda_1) > 0$, то существуют значения $\lambda \geq \lambda_1$, для которых $x_{\lambda}^{(2)} \geq 0$. Следовательно, учитывая (17), приходим к выводу, что план $x_{\lambda}^{(2)}$ оптимален на некотором интервале, левый конец которого равен λ_1 .

Случай 2. Пусть $\lambda_1 = \lambda'' < \lambda'$. Если $x_s^{(1)}(\lambda)$ — первая из компонент, которая достигает нуля, то

$$\lambda_1 = \min_{x_{ij}^{(1)}} \left(-\frac{x_{i1}^{(1)}}{x_{ij}^{(1)}} \right) = -\frac{x_{s1}^{(1)}}{x_{s2}^{(1)}}, \quad x_{s2}^{(1)} < 0. \quad (19)$$

Тогда $x_s^{(1)}(\lambda_1) = 0$. Исключим из базиса B_1 вектор A_s . На основе следующего утверждения определяется вектор, который следует ввести в базис.

Теорема 3. Новый базис является оптимальным, по крайней мере для $\lambda = \lambda_1$, если из базиса исключается вектор A_s и вводится вектор A_e , для которого

$$\frac{\nabla_e(\lambda_1)}{x_{se}} = \min_{x_{sj} < 0} \frac{\Delta_j(\lambda_1)}{x_{sj}}.$$

Если множеству оптимальности нового базиса соответствует отрезок, то левый конец его равен λ_1 .

Доказательство. Аналогично (18) имеем

$$x_i^{(3)}(\lambda) = (x_{i1}^{(1)} + \lambda x_{i2}^{(1)}) - \frac{x_{ie}}{x_{se}} (x_{s1}^{(1)} + \lambda x_{s2}^{(1)}), \quad i \neq s, \quad (20)$$

$$x_s^{(3)}(\lambda) = \frac{1}{x_{se}} (x_{s1}^{(1)} + \lambda x_{s2}^{(1)}),$$

если вектор A_e замещает A_s . Покажем, что $x_\lambda^{(3)}$ может быть планом задачи (1) только при

$$\lambda \geq -\frac{x_{s1}^{(1)}}{x_{s2}^{(1)}} = \lambda_1. \quad (21)$$

Так как компоненты вектора $x_\lambda^{(3)}$ должны быть неотрицательными, то из (20) следует, что

$$\frac{x_{s1}^{(1)} + \lambda x_{s2}^{(1)}}{x_{se}} \geq 0. \quad (22)$$

Теперь нетрудно заметить, что справедливость неравенства (21) вытекает из (22), если учесть и то, что $x_{se} < 0$ и $x_{s2}^{(1)} < 0$.

Оценки $\bar{\nabla}_j(\lambda_1)$ векторов условий пересчитываются по следующим формулам:

$$\bar{\nabla}_j(\lambda_1) = \nabla_j(\lambda_1) - \frac{x_{sj}}{x_{se}} \nabla_e(\lambda_1),$$

что следует из (7) с учетом (19). Поскольку $\nabla_j(\lambda_0) \leq 0$ и $x_{se} < 0$, то все $\bar{\nabla}_j(\lambda_1)$ при $x_{sj} \geq 0$ также будут неположительными. Если некоторые $x_{sj} < 0$, то для них должны удовлетворяться следующие неравенства:

$$\nabla_j(\lambda_1) - \frac{x_{sj}}{x_{se}} \nabla_e(\lambda_1) \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\nabla_j(\lambda_1)}{x_{sj}} \geq \frac{\nabla_e(\lambda_1)}{x_{se}},$$

поэтому вектор, вводимый в базис, соответствует $\min_{x_{sj} < 0} \frac{\nabla_j(\lambda_1)}{x_{sj}}$. Таким образом, если ввести в базис вектор A_e , то все $\nabla_j(\lambda_1) \leq 0$. Следовательно, план $x_\lambda^{(3)}$, является оптимальным. Система неравенств

$$\bar{\nabla}_j(\lambda) = \nabla_j(\lambda) - \frac{x_{sj}}{x_{se}} \nabla_e(\lambda) - \theta(\lambda) \begin{vmatrix} \Delta_{e1} & \Delta_{j1} \\ \Delta_{e2} & \Delta_{j2} \end{vmatrix} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

может быть совместна и при $\lambda \geq \lambda_1$, так как для небазисных векторов все оценки $\nabla_j(\lambda_1) < 0$.

Случай 3. Пусть, наконец, $\lambda_1 = \lambda' = \lambda''$. Тогда

$$\nabla_\lambda(\lambda_1) = 0, \quad x_r(\lambda_1) = 0.$$

В этом случае анализ задачи (1) при $\lambda > \lambda_1$ зависит от знака x_{rk} . Если $x_{rk} \geq 0$, то необходимо вектор A_r исключить из базиса. Метод выбора вектора, вводимого в базис, основывается на теореме 3. Если же $x_{rk} < 0$, исследование проводится аналогично случаю 1. Анализ задачи (1) приводит к исследованию одного из рассмотренных случаев. В результате мы определяем интервал изменения параметра λ , которому соответствует некоторый оптимальный план. Аналогично можно переходить от одного интервала изменения λ к другому, пока не определим интервал, включающий точку $\lambda = a$.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛП К ВАРИАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ ЧИСЛИТЕЛЯ

Теорема 4. Пусть ∇_j — оценки для оптимального плана x_1 , а x — любое решение задачи H ,

$$\max \left\{ \frac{L_1(x)}{L_2(x)} \mid x \in G_0 \right\},$$

тогда: если $x_j > 0$, то $\nabla_j = 0$; если $\nabla_j < 0$, то $x_j = 0$.

Доказательство. Если $B_1 = (A_1, \dots, A_m)$ — базис оптимального плана x_1 , то оценки векторов A_j относительно базиса B_1

$$\nabla_j = \begin{vmatrix} L_1(x_1) & \Delta_{j1} \\ L_2(x_1) & \Delta_{j2} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Обе части равенств (23) умножим на соответствующие компоненты вектора x и просуммируем от 1 до n . После ряда преобразований получим

$$L_2(x_1) \cdot \sum_{j=1}^n \nabla_j x_j = \sum_{i=1}^m \left(\frac{L_1(x_1)}{L_2(x_1)} c_i'' - c_i' \right) x_i' - \sum_{j=1}^n \left(\frac{L_1(x_1)}{L_2(x_1)} c_j'' - c_j' \right) x_j, \quad (24)$$

$$\text{но } \sum_{j=1}^n c_j'' x_j = L_2(x), \quad \sum_{j=1}^n c_j' x_j = L_1(x), \quad \sum_{i=1}^m c_i'' x_i' = L_2(x_1) > 0,$$

$\sum_{i=1}^m c_i' x_i' = L_1(x_1)$ и поскольку x_1, x — оптимальные планы задачи H , то

$$\sum_{j=1}^n \nabla_j x_j = 0. \quad (25)$$

Если учесть, что для $j = 1, 2, \dots, n$ $x_j \geq 0$ и $\Delta_j \leq 0$, то равенство (25) справедливо только при $\nabla_j x_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. Отсюда вытекает справедливость теоремы 4.

Максимальное значение $\frac{L_1(x)}{L_2(x)}$ при $x \in G_0$ обозначим через $f(a_{ij}, c_j', c_j'', b_i')$ и производную $f_\Delta(a_{ij}, c_j', c_j'', b_i')$ вдоль направления $\Delta = \{\delta_j\}$ определим аналогично [1]. $L_1(x) = \sum_{j=1}^n (c_j' + t\delta_j) x_j$ порождает задачу H_t ПДЛП.

Теорема 5. Если $G_0 \neq \emptyset$ — выпуклый многогранник, то производная f_Δ по любому направлению Δ существует и равна оптимальному значению функции цели следующей задачи дробно-линейного программирования:

$$\max \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \delta_j x_j}{\sum_{j=1}^n c_j x_j} \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i', L_1(x) - Q^0 L_2(x) = 0, x_j \geq 0 \right\}.$$

Доказательство. К параметрической задаче H_t при $t \geq 0$ применим алгоритм параметрического дробно-линейного программирования, данный в работе [3]. Пусть базис $B_1 = (A_1, \dots, A_m)$ оптимален при $t \in [0; t_0]$, где $t_0 > 0$. Тогда опорный план x_1 задачи H_t остается оптимальным для всех $t \in [0; t_0]$ и в этом интервале

$$\varphi(t) = f(a_{ij}, c_j' + t \delta_j, c_j'', b_i') = \frac{\sum_{i=1}^m (c_i' + t \delta_i) x_i}{\sum_{i=1}^m c_i'' x_i},$$

поэтому

$$f'_\Delta = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\sum_{i=1}^m \delta_i x_i}{\sum_{i=1}^m c_i'' x_i}.$$

Так как $G_0 \neq 0$ — выпуклый многогранник, то для базиса B_1 задачи H имеем

$$x_i \geq 0, \nabla_{j1} \leq 0; \text{ если } \nabla_{j1} = 0, \text{ то } \nabla_{j2} \leq 0, \quad (26)$$

где ∇_{j1}, ∇_{j2} — оценки векторов A_j относительно базиса B_1 , соответ-

ственно, для функций $\frac{L_1(x)}{L_2(x)}, \frac{L_3(x)}{L_2(x)} = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_j x_j}{L_2(x)}$,

$$\nabla_{j1} = \begin{vmatrix} L_1(x_1) & \Delta_{j1} \\ L_2(x_1) & \Delta_{j2} \end{vmatrix}, \quad \nabla_{j2} = \begin{vmatrix} L_3(x_1) & \Delta_{j3} \\ L_2(x_1) & \Delta_{j2} \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если x произвольное решение задачи H , то

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \nabla_{j2} x_j &= \sum_{j=1}^n L_3(x_1) \Delta_{j2} x_j - \sum_{j=1}^n L_2(x_1) \Delta_{j3} x_j = \\ &= L_2(x_1) L_3(x) - L_3(x_1) L_2(x). \end{aligned} \quad (27)$$

По теореме 4, если $\nabla_{j1} < 0$, то $x_j = 0$. Поэтому, если учесть и (26), то

$$\sum_{j=1}^n \nabla_{j2} x_j = \sum_{\Delta_{j1}=0} \nabla_{j2} x_j \leq 0.$$

Тогда из (27) вытекает справедливость следующего неравенства:

$$\frac{L_3(x_1)}{L_2(x_1)} \geq \frac{L_3(x)}{L_2(x)}.$$

Следовательно, имеет место последовательность равенств

$$f'_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^m \delta_i x_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^m c_i' x_i^{(1)}} = \frac{\sum_{j=1}^n \delta_j x_j^{(1)}}{\sum_{j=1}^n c_j' x_j^{(1)}} = \max_{x \in G_0'} \frac{\sum_{j=1}^n \delta_j x_j}{\sum_{j=1}^n c_j' x_j},$$

что и доказывает теорему, так как существование производной f'_Δ следует из ограниченности множества

$$G_0' = \left\{ x \mid \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i', L_1(x) - Q^0 L_2(x) = 0, x_j \geq 0 \right\},$$

где $Q^0 = \frac{L_1(x_1)}{L_2(x_1)}$ — оптимальное значение при $t = 0$.

Как следствие из теоремы 5 вытекает справедливость формул для вычисления правых и левых частных производных функции $f(a_{ij}, c_j', c_j'', b_i')$ по аргументам $c_j', j = 1, 2, \dots, n$.

Следствие. В предположении теоремы 5 производная по отношению к отдельному направлению при $j = 1, 2, \dots, n$ равна

$$\frac{\partial f}{\partial c_j^{1+}} = \max_{x \in G_0'} \frac{x_j}{\sum_{j=1}^n c_j'' x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial c_j^{1-}} = \min_{x \in G_0'} \frac{x_j}{\sum_{j=1}^n c_j'' x_j}.$$

Для доказательства достаточно положить все компоненты направления Δ равным нулю, кроме $\delta_j = \pm 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. Изд-во "Сов. радио", 1966.
2. Шварцман А. П. "Экономич. и матем. методы", 1965, № 4.
3. Манжуров Д. М. Тр. II конференции молодых ученых ЦЭМИ АН СССР, 1967.

Д. М. Манжуров

Параметрлэрин вариасијасы илэ хэтти-кэср програмлашдырма мäsäläсинин арашдырылмасы.

ХҮЛАСЭ

Мäгалäнин биринчи һиссәсиндә мähдудлуг векторунун, компонентлэри бир параметрдән хэтти асылы олан һал үчүн, хэтти-кэср програмлашдырма мäsäläси арашдырылмыш вә һәлл методу верилмишдир.

Мäгалäнин икинчи һиссәсиндә сурәтдәки хэтти форманын әмсалларынын вариасијасындан асылы олараг, оптималлашдырылан функци-янын дәјишмә сүр'әтиндән бәһс едилир.

Я. Р. АБДУЛЛАЕВ, Р. С. ГУРБАНОВ, А. В. САБУРБАЕВ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ СТРУКТУРНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ПЛУНЖЕРОМ И ЦИЛИНДРОМ ГЛУБИННОГО НАСОСА

Исследование нестационарного движения вязко-пластичной среды через зазор пары плунжер-цилиндр имеет важное значение для гидравлики глубинных насосов, продуцирующих вязко-пластичными нефтями [1, 2]. Многочисленные исследования показали, что для количественной оценки утечки необходимо проводить специальные эксперименты. Для этого следует гидродинамически обосновать методики проведения экспериментальных исследований по определению утечки через зазор пары плунжер-цилиндр глубинного насоса. Решение указанной задачи представляет также интерес в связи с применением вибрационных насосов.

Определим утечку в щели, ограниченной двумя параллельными пластинками, при нестационарном структурном режиме движения вязко-пластичной среды. Отметим, что для нетиксотропных термодинамически равновесных систем может быть применена бингамова модель. Пусть ширина каждой пластинки равна единице и расстояние между ними δ . В начальный момент времени среда и пластинка находились в покое. В момент $t > 0$ одна из пластинок конечной длины движется со скоростью $u_0(t)$ и в концевых сечениях подвижной пластинки приложен перепад давления $\Delta P(t)$.

Для рассматриваемого случая дифференциальные уравнения движения имеют следующий вид [3]:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \frac{\Delta P(t)}{l} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

где v_i — скорость течения в вязко-пластичной области течения;

ρ — плотность вязко-пластичной среды;

η — структурная вязкость;

l — длина пластинки.

Начальными и граничными условиями будут:

$$v_i(x, 0) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (2)$$

$$v_1(0, t) = 0; \quad v_2(\delta, t) = u(t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(x_1, t) &= v_2(x_2, t); \\ \frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} &= \frac{\Delta P}{\rho l} - \frac{2\tau_0}{\rho(x_2 - x_1)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

x_i — координаты границ ядра течения;

τ_0 — предельное напряжение сдвига.

Решим эту задачу приближенным способом Слезкина—Тарга, точность которого оценена в [1, 2, 3]. Введем вместо

$$\frac{\partial v_1(x, t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_1(x_1, t)}{\partial t}$$

среднее значение по x вязко-пластичной области движения, т. е.

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \frac{\partial v_1(x_1, t)}{\partial t} dx,$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\delta - x_2} \int_{x_2}^{\delta} \frac{\partial v_2(x_2, t)}{\partial t} dx. \quad (6)$$

Решением приближенных уравнений с учетом граничных условий (3) будет

$$v_1 = \frac{\tau_0}{\eta(x_2 - x_1)} (2x_1 - x)x,$$

$$v_2 = \frac{\tau_0}{\eta(x_2 - x_1)} (\delta + x - 2x_2)(\delta - x) + u_0(t), \quad (7)$$

Величина утечки на единицу ширины щели может быть определена из выражения

$$q = \int_0^{x_1} v_1(x, t) dx + (x_2 - x_1) v_1(x_1, t) + \int_{x_2}^{\delta} v_2(x, t) dx. \quad (8)$$

Подставляя (6) в (7), получим

$$q = \frac{2\tau_0 x_1^3}{3\eta(x_2 - x_1)} + \frac{\tau_0 x_1^2}{\eta} - u_0(t) x_2 - \frac{2u_0(t)(\delta - x_2)}{3} + \frac{2\tau_0 x_1^2(\delta - x_2)}{3\eta(x_2 - x_1)} \quad (9)$$

Для определения утечки вязко-пластичной жидкости необходимо иметь закон изменения границ ядра течения во времени. В ряде случаев закон изменения размера ядра течения задается заранее [4, 5].

Используя (4) и (5), определим координаты границ ядра течения. Подставляя значение v_1 из (6) в (5,1) и принимая, что

$$\varphi_1(t) = \frac{\Delta P(t)}{\rho l} - \frac{\tau_0}{\rho(x_2 - x_1)},$$

получим

$$\dot{x}_1 = \left[\frac{f(t)}{\rho} - \frac{2\tau_0}{\rho(x_2 - x_1)} + \dot{x}_2 \frac{2\tau_0 x_1^2}{3\eta(x_2 - x_1)^2} + \ddot{u}_0(t) \right] : \left[\frac{\tau_0 x_1}{\eta(x_2 - x_1)} + \frac{2\tau_0 x_1^2}{3\eta(x_2 - x_1)^2} \right]. \quad (10)$$

Из условия (4, 1) с учетом (5, 2) и (6, 2) имеем

$$\dot{x}_2 = \left\{ \frac{2u_0(t)\eta}{(\delta - x_2)^2 g} - \frac{2\tau_0 x_1^2}{\rho(x_2 - x_1)(\delta - x_2)^2} + \frac{f(t)}{\rho} - \dot{x}_1 \left[\frac{4\tau_0 x_1}{3\eta(x_2 - x_1)} + \frac{2\tau_0 x_1^2}{3\eta(x_2 - x_1)^2} \right] + \frac{2\ddot{u}_0(t)}{3} \right\} :$$

$$\left[\frac{\tau_0 x_1^2}{3\eta(x_2 - x_1)(\delta - x_2)} - \frac{u_0(t)}{3(\delta - x_2)} - \frac{2\tau_0 x_1^2}{3\eta(x_2 - x_1)^2} \right]. \quad (10)$$

Начальными условиями будут $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \delta$.

Таким образом, для определения x_1 и x_2 имеется система дифференциальных уравнений (9) и (10) с начальными условиями. Для решения поставленной задачи необходимо задаться функциями $f(t)$ и $u_0(t)$ (рис. 2).

Отметим, что в рассматриваемом случае функции $f(t)$ и $u_0(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле и поэтому разлагаются в ряд Фурье в интервале $0 < \tau < T$:

$$u_0(t) = \frac{48u_0}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin \frac{2\pi i}{T} t; \quad (11)$$

$$f(t) = \frac{H\gamma}{2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{2\pi i}{T} t \right); \quad (12)$$

$$u_0 = \frac{S_n}{30}; \quad T = \frac{60}{n},$$

где γ —удельный вес вязко-пластичной жидкости;

T —период одного цикла;

n —число качаний станка качалки;

S —длина хода станка качалки;

Введем безразмерные параметры:

$$x = \frac{x_1}{\delta}; \quad y = \frac{x_2}{\delta}; \quad \frac{u_0(t)}{u_0} = \bar{u}_0(\tau); \quad t = \frac{\rho\delta^2}{\eta} \tau;$$

$$i = \bar{P} = \frac{\Delta P}{H\gamma}; \quad \alpha = \frac{H\gamma\delta}{\tau_0 l}; \quad \beta = \frac{\eta u_0(t)}{\tau_0 \delta}; \quad \bar{Q} = \frac{Q}{u_0 \delta}.$$

Уравнения (8)÷(12) в безразмерных величинах запишутся в виде:

$$\dot{x} = \frac{3(y-x)^2 \left(\alpha \bar{P} - \frac{2}{y-x} + \beta \bar{u}_0 \right) + 2x^2 \dot{y}}{x(3y-x)}; \quad (13)$$

$$\dot{y} = \frac{3(y-x)^2 \left[2\beta \bar{u}_0(\tau) - \frac{2x^2}{y-x} + \alpha \bar{P}(1-y)^2 \right] - 2(1-y)^2 \left\{ \dot{x} [2x(y-x) + x^2] + \beta (y-x)^2 \bar{u}_0(\tau) \right\}}{(y-x)(1-y)[x^2 - (y-x)\beta \bar{u}_0(\tau)] - 2x^2(1-y)^2}; \quad (14)$$

$$\bar{Q} = \frac{(y-x)[x^2 - \beta \bar{u}_0(\tau)(y+2)] + 2x^2}{3\beta(y-x)}; \quad (15)$$

$$\bar{u}_0(\tau) = \frac{4E}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin \frac{2\pi i}{T} \tau; \quad (16)$$

$$\bar{P}(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{i} \sin \frac{2\pi i}{T} \tau \right). \quad (17)$$

С изменением скорости движения плунжера при постоянном значении перепада давления в зазоре могут иметь место различные профили распределения скоростей. Предположим, что условия существования этих профилей распределения скоростей при стационарном движении соблюдаются также и при нестационарном движении.

Определим условие существования рассматриваемого профиля распределения скоростей. По принятому предположению, имея $x = 0$ и $y = 0$, из уравнений (13) и (14) получим

$$\left(1 - \frac{2}{\bar{P}\alpha} \right)^2 \geq \frac{2\beta}{\alpha} \cdot \frac{\bar{u}_0(\tau)}{\bar{P}}. \quad (18)$$

Условием существования для профиля распределения скоростей 2 будет

$$\left(1 - \frac{2}{\bar{P}\alpha} \right)^2 \leq \frac{2\beta}{\alpha} \cdot \frac{\bar{u}_0(\tau)}{\bar{P}}. \quad (19)$$

При этом, подставив значение $v_1(x, t)$ из (6) в (7) и интегрируя последнее, получим выражение для утечки в щели:

$$\bar{Q} = \frac{(3-x)x^2}{3(1-x)}. \quad (20)$$

Для количественной оценки влияния нестационарности движения плунжера на величину утечки приведем численный расчет при следующих исходных данных:

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8
2000	1,0	330	30	5	0,4	0,1		
1000	1,0	100	100	10	1,0	0,1		
2000	1,2	100	60	6	20,0	0,1		

Для уравнений (13)÷(17) составлена программа и задача решена на ЭЦВМ типа БЭСМ-2М методом Рунге—Кутты. Решение задачи получено при соблюдении условия (18). Результаты численных расчетов представлены на рис. 1 и 2.

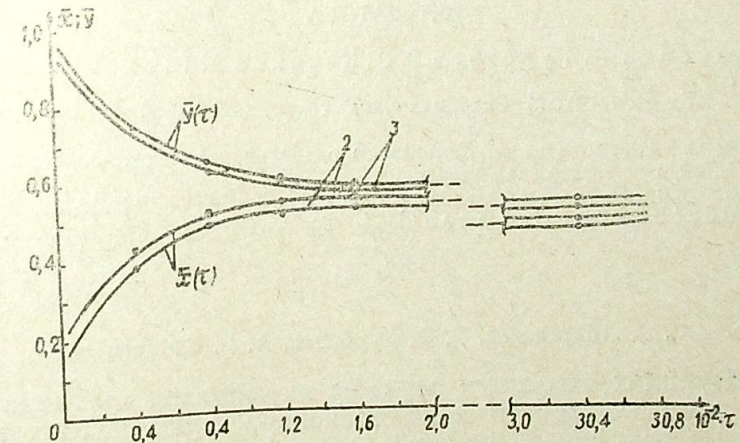


Рис. 1.

На рис. 1 представлены графики изменения границ ядра течения, а на рис. 2—утечки во времени. Размер „ядра“, уменьшаясь, и утечка жидкости с течением времени, увеличиваясь, стремятся к некоторым значениям.

торой предельной величине, соответствующей стационарному движению. Отметим, что стационарность движения наступает почти мгновенно, т. е. при $\tau = 0,003$ сек.

Сопоставление утечки вязко-пластичной среды при стационарном движении с ее осредненным значением при нестационарном движении

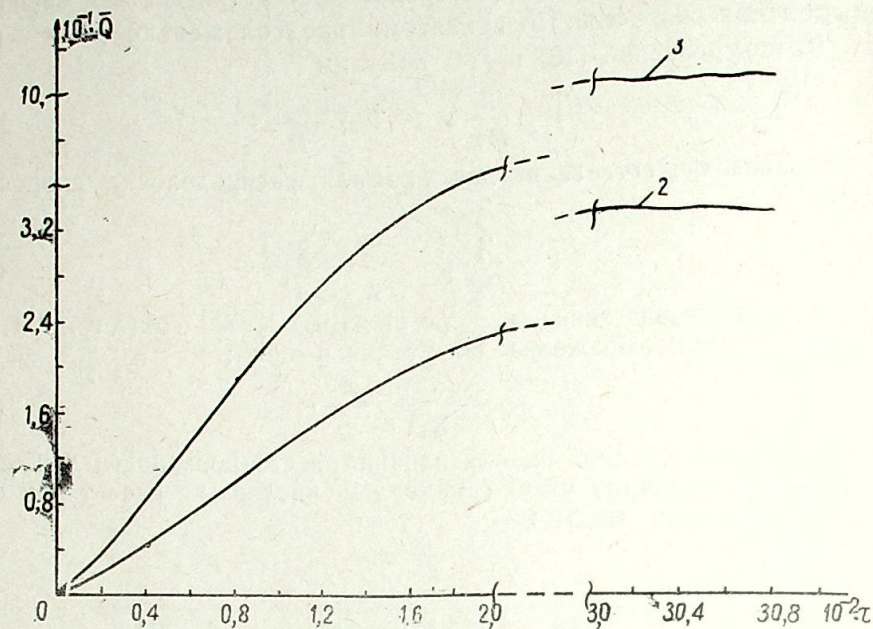


Рис. 2.

нии показало, что, как и следовало ожидать, нестационарность движения не оказывает существенного влияния на величину утечки. Поэтому стендовые испытания глубинных насосов могут быть проведены без учета нестационарности движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев М. Г., Гурбанов Р. С., Касимов А. Р., Керимов Р. Г. АНХ, 1964, № 7
2. Пирвердян А. М. Гидромеханика глубиннонасосной эксплуатации. „Недра“, 1965
3. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Азербайджан, 1959.
4. Гасанов Г. Т., Мирзаджанзаде А. Х. ПМТФ. 1962. № 5.
5. Аббасов А. А., Садыгов Б. О. Тр. АзНИИбурнефть, вып. 7, 1965.

Л. Р. Абдуллаев, Р. С. Гурбанов, А. В. Сабурбаев

Дэринлик насосунун плунжер вэ цилиндри арасында
аномал мэхсулун гејри-стационар структур хэрэкэт
режими наггында

ХҮЛАСЭ

Мэхселэнин гојулушундан мэгсэд дэринлик насосунда мэхлулун хэрэкэти заманы плунжерлэ цилиндр арасындакы кечиддэ аномал мэхлулун сэрфини тэјин едиб, хэмин мэхлулун стационар хэрэкэт

режиминдэ кечиддэ јаранан сэрф илэ мугајисэсиндэ гејри-стационар хэрэкэт режиминин мэхлулун сэрфинэ етдији тэјири мугајланлашдыр-мэкдэн ибарэтдир.

Мэхселэнин БЕСМ-2М машинында халли нэтичэсиндэ мугајлан олунмушдур ки, мэхлулун гејри-стационар режимдэ хэрэкэти заманы чох кичик мүддэтдэн сонра ($t = 0,003$ сан). стационар хэрэкэт режимі јараныр вэ гејри-стационар режим аномал мэхлулун сэрфинэ чох аз тэјир кестэрир.

УДК 517.522.2

И. Г. МЕХТИЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧНОЙ ОБЛАСТИ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ И РЯДОВ ТЕЙЛОРА—ДИРИХЛЕ

В работе [1] для интеграла Лебега—Стилтьеса

$$\int_0^{\infty} z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t) \quad (1)$$

спределена некоторая область, в которой интеграл (1) сходится абсолютно, и область, в которой абсолютная сходимость не имеет места. Предполагается, что $A(t)$ —комплексная функция с ограниченной вариацией на всяком конечном отрезке действительной положительной полуоси; $\tau(t)$ —неотрицательная функция действительного переменного; $z^{\tau(t)}$ —какая-либо ветвь функции; $\exp\{\tau(t)Znz\}$ —однозначная в плоскости с соответствующим разрезом.

Далее в работе [3] определена точная область абсолютной сходимости интеграла (2) при условии, что существует такая последовательность $\{\lambda_n\}$, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1, \quad (2)$$

что

$$|\tau(t'') - \tau(t')| = 0 \quad (\lambda_n) \quad (3)$$

при $\lambda_n \uparrow \infty$ для всех $t', t'' \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$.

В настоящей работе определяется точная область абсолютной сходимости интеграла (1), причем на функцию $\tau(t)$ ограничение вида (3) не накладывается. Выберем последовательность λ_n такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1. \quad (2)$$

Обозначим через $E_p(\varepsilon)$ множество тех точек r , для которых

$$\frac{r}{\tau(r)} \in [\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon],$$

и пусть

$$E_n(\rho, \varepsilon) = [\lambda_n, \lambda_{n+1}) \cap E_p(\varepsilon).$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\tau(t)$ и $A(t)$ таковы, при которых существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_n - \varepsilon}^{\lambda_{n+1} - \varepsilon} z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t) = \int_{\lambda_n - 0}^{\lambda_{n+1} - 0} z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)$$

и, кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E_n(\rho, \varepsilon)} z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)$$

(интеграл берется в смысле Лебега—Стилтьеса).

Определим для любых $\rho > 0$ и $\varepsilon > 0$ число

$$\alpha(\rho, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \int_{E_n(\rho, \varepsilon)} dA(t)}{\lambda_n}$$

и пусть

$$\alpha(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\rho, \varepsilon).$$

Пусть M —множество предельных точек функции $\frac{r}{\tau(r)}$ при $r \rightarrow \infty$.

Определим для каждого конечного $\rho \in M$ число $\alpha(\rho)$. Если ρ не принадлежит M , положим $\alpha(\rho) = -\infty$. Предположив величину $\alpha(\rho, \varepsilon)$, ограниченной сверху, докажем, что, если множество M ограничено, то интеграл (1) сходится абсолютно на множестве G , точки которого при любом $\rho \in M$ удовлетворяют неравенству

$$|z| < e^{\rho |x - \alpha(\rho)|},$$

и не сходится абсолютно в точках, внешний по отношению к этому множеству.

Действительно, предположим, что в какой-либо точке

$$|z| > e^{\rho |x - \alpha(\rho)|}$$

при некотором $\rho \in M$. Тогда в силу ограниченности величины $|x - \alpha(\rho, \varepsilon)|$ и определения $\alpha(\rho)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$|z| > e^{(\rho + \varepsilon) |x - \alpha(\rho, \varepsilon)|}, \quad |z| > e^{(\rho - \varepsilon) |x - \alpha(\rho, \varepsilon)|}.$$

Из работы [3] следует, что ряд с общим членом

$$\int_{E_n(\rho, \varepsilon)} z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)$$

расходится, так как очевидно, что

$$\rho + \varepsilon \geq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\tau(r)}, \quad \rho - \varepsilon \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\tau(r)}.$$

Таким образом, интеграл (1) не сходится абсолютно в области

$$|z| > e^{\rho |x - \alpha(\rho)|}.$$

Если же в некоторой точке

$$|z| < e^{\rho |x - \alpha(\rho)|}$$

при всех $\rho \in M$, а множество M лежит на отрезке $[a, b]$, то, выбрав сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, разобьем отрезок $[a - \delta, b + \delta]$, где δ —какое-либо положительное число, на отрезки длиной ε . На каждом из этих отрезков

$$M_i = \left[\rho_i - \frac{\varepsilon}{2}, \rho_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

найдется (см. [2]), по крайней мере, одна точка $\rho = \rho_i^*$, в которой

$$\alpha(\rho_i^*) = \alpha \left(\rho_i, \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Таким образом, в данной точке имеем

$$|z| < e^{\rho_i \left[x - \alpha \left(\rho_i, \frac{\varepsilon}{z} \right) \right]} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

и, следовательно, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то для всех i ($i = 1, 2, \dots, N$), ввиду ограниченности $|x - \alpha(\rho, \varepsilon)|$, также

$$|z| < \exp \left\{ \left(\rho_i - \frac{\varepsilon}{z} \right) \left[x - \alpha \left(\rho_i, \frac{\varepsilon}{z} \right) \right] \right\}, \quad |z| < \exp \left\{ \left(\rho_i + \frac{\varepsilon}{z} \right) \left[x - \alpha \left(\rho_i, \frac{\varepsilon}{z} \right) \right] \right\}.$$

Пусть $E_{\rho_i}(\varepsilon)$ — множество тех точек r , для которых

$$\frac{r}{\tau(r)} \in M_i.$$

Очевидно, что

$$\rho_i + \frac{\varepsilon}{2} \geq \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_{\rho_i}(\varepsilon)}} \frac{r}{\tau(r)} \quad \text{и} \quad \rho_i - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E_{\rho_i}(\varepsilon)}} \frac{r}{\tau(r)}.$$

Таким образом, из [3] следует сходимость ряда с общим членом

$$\int_{E_n(\rho_i, \varepsilon)} |z^{\tau(t)} e^{-zt} dA(t)|$$

при любом i ($i = 1, 2, \dots, N$), а следовательно, абсолютная сходимость интеграла (1).

В случае, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\tau(r)} = +\infty,$$

возьмем любое $R > 0$ и положим

$$\alpha_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \int_{E_n(R)} |dA(t)|}{\lambda_n},$$

где $E_n(R) = (\lambda_n, \lambda_{n+1}) \cap E(R)$, а $E(R)$ — множество тех точек r , для которых

$$\frac{r}{\tau(r)} \geq R.$$

Тогда, если $\alpha_R \neq +\infty$, очевидно, что интеграл (1) сходится абсолютно на множестве G_R , точки которого удовлетворяют неравенству $|z| < e^{\rho [x - \alpha(\rho)]}$ при $\rho \leq R$ и лежат в полуплоскости $x < \alpha_R$. Очевидно, что с ростом R множество G_R расширяется. Положим $G = \bigcup G_R$. Итак, доказана следующая

Теорема 1. Интеграл (1) сходится абсолютно в области G , точки которой при любом конечном ρ удовлетворяют неравенству

$$|z| < e^{\rho [x - \alpha(\rho)]}$$

и лежат в полуплоскости $x > \alpha_\infty$, где

$$\alpha_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha_R$$

и не сходится абсолютно вне области G .

Теорема 1 точно определяет область абсолютной сходимости интеграла (1) во всех случаях, кроме того, при котором

$$\rho = 0 \in M \quad \text{и} \quad \alpha(0) = +\infty.$$

В частности, если

$$A(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0, \lambda_1), \\ \sum_{k=1}^n a_k & \text{при } t \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}), \end{cases}$$

то интеграл (1) превратится в ряд Тейлора—Дирихле;

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \quad (4)$$

причем $m_n = \tau(\lambda_n)$.

Для любого $\rho \geq 0$ определим число $\alpha^*(\rho, \varepsilon)$ следующим образом. Выберем из последовательности $\{\lambda_n\}$ подпоследовательность $\{\mu_{n_k}\}$ такую, чтобы для нее были выполнены условия (2), и положим

$$\alpha^*(\rho, \varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{n=n_k}^{\mu_{n_k+1}-1} |a_n|}{\mu_{n_k}},$$

причем в сумму входят только те коэффициенты a_n , для которых

$$\frac{\lambda_n}{m_n} \in [\rho - \varepsilon, \rho + \varepsilon].$$

Положим

$$\alpha^*(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha^*(\rho, \varepsilon).$$

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = +\infty,$$

возьмем любое $R > 0$ и положим

$$\alpha_R^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_{n=n_k}^{\mu_{n_k+1}-1} |a_n|}{\mu_{n_k}},$$

причем в сумму также входят только те коэффициенты a_n , для которых

$$\frac{\lambda_n}{m_n} \geq R,$$

и пусть

$$\alpha_\infty^* = \lim_{R \rightarrow \infty} \alpha_R^*.$$

Теорема 1 дает для ряда Тейлора—Дирихле (4) следующую теорему.

Теорема 2. Ряд (4) сходится абсолютно в области G^* , точки которой при любом конечном ρ удовлетворяют неравенству

$$|z| < e^{\rho [x - \alpha^*(\rho)]}$$

и лежат в полуплоскости $x > \alpha_\infty^*$, и не сходятся в полуплоскости вне области G^* .

Замечание. Если для интеграла (1) $\rho = 0 \in M$ и $\alpha(0) = +\infty$ (соответственно для ряда (4) $\alpha^*(0) = +\infty$), то для определения области абсолютной сходимости следует воспользоваться подстановкой вида $z = kw$ ($k > 0$ — постоянная), которая приводит к замене функции $\alpha(\rho)$ некоторой другой функцией (см [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунц Г. Л. „Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук“, XIV, 1961, № 2.
 2. Лунц Г. Л. „Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук“, XV, 1962, № 5.
 3. Мехтиев И. Г. Об абсолютной сходимости некоторых рядов и интегралов.
- Сб. „Некоторые вопросы функционального анализа и его применений“. Баку, 1965.

И. Н. Мехдијев

Бир сыра интегралларын вә Тејлор-Дирихле сырасынын
дәгиг мүтләг жығылма областынын тә'јини

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә хүсуси һалы Тејлор-Дирихле сырасы олан (1) Лебег-
Стилтес типли интегралын дәгиг мүтләг жығылма областындан бәһс
едилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1968, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 4

УДК 518: 517. 91

М. М. САДЫХОВ

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ЭКСТРЕМАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

1. В данной работе исследовалось экстремально-дифференциальное
уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$x'(t) = \max_q \{f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t)))\}, \quad (1)$$

где функция $f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t)))$ определена
по q на множестве S , которому принадлежит значение максимизи-
рующего параметра q в каждый момент времени t ; по t —на отрезке
 $[t_0, T]$, по остальным аргументам—в некотором ограниченном замкну-
том множестве G $(m+1)$ -мерного Евклидова пространства. Предпо-
лагается, что при фиксированных значениях t и x максимум правой
части уравнения (1) достигается для всех $q \in S$, отклонения $\Delta_i(t) \geq 0$
непрерывны на $[t_0, T]$. Обозначим через E_i множество, которое сос-
тоит из точки t_0 и тех значений $t - \Delta_i(t)$, для которых $t - \Delta_i(t) < t_0$,

$t \in [t_0, T]$. Положим $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$. На E задается начальная непре-

рывная функция $\varphi(t)$. На отрезке $[t_0, T]$ ищется абсолютно непрерыв-
ное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$x(t_0) = \varphi(t_0), \quad x(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)), \quad \text{если } t - \Delta_i(t) < t_0. \quad (2)$$

Основная цель—доказать существование и единственность решения,
изучить зависимость решения от начальных данных, от отклонения
 $\Delta_i(t)$ и от правой части уравнения (1). Кроме того, построить моно-
тонное приближение к решению в пространстве поведений. Наконец,
для существования решения уравнения (1) построить последователь-
ность приближения Тонелли.

2. Для существования и единственности решения задачи (1)—(2)
используется следующая лемма.

Лемма. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ —непрерывные функции на $[t_0, T]$,
удовлетворяющие соответственно условиям:

$$x(t_0) = \varphi(t_0); \quad x(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)), \quad \text{если } t - \Delta_i(t) < t_0;$$

$$y(t_0) = \psi(t_0); \quad y(t - \Delta_i(t)) = \psi(t - \Delta_i(t)), \quad \text{если } t - \Delta_i(t) < t_0,$$

где φ и ψ —заданные функции на множестве E . Тогда, если $x(t)$ и
 $y(t)$ на E и на $[t_0, T]$ принадлежат области определения функции
 f и если после подстановки $x(t)$ и $y(t)$ в f полученная функция f инте-
грируется в смысле Лебега на $[t_0, T]$, то справедливо неравенство:

$$|T(x) - T(y)| \leq \max_q \left\{ |\varphi(t_0) - \psi(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(q, \tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, x(\tau - \Delta_m(\tau))) - f(q, \tau, y(\tau), y(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, y(\tau - \Delta_m(\tau)))| d\tau \right\},$$

где

$$T(x) = \varphi(t_0) + \max_q \int_{t_0}^t [f(q, \tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, x(\tau - \Delta_m(\tau)))] d\tau,$$

$$T(y) = \psi(t_0) + \max_q \int_{t_0}^t [f(q, \tau, y(\tau), y(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, y(\tau - \Delta_m(\tau)))] d\tau.$$

Теорема 1. Пусть точка $(\varphi(t_0), \varphi(t - \Delta_1(t_0)), \dots, \varphi(t_0 - \Delta_m(t_0)))$ (*) является внутренней точкой области G , а функция f в этой области удовлетворяет условию $|f| \leq M(t)$ и условию Липшица по $x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))$:

$$|f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))) - f(q, t, y(t), y(t - \Delta_1(t)), \dots, y(t - \Delta_m(t)))| \leq \mu(t) \sum_{i=0}^m |x(t - \Delta_i(t)) - y(t - \Delta_i(t))|,$$

где

$$\Delta_0(t) = 0, \int_{t_0}^t M(\tau) d\tau < +\infty, \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau < +\infty,$$

$$\int_{t_0}^t |f(q, \tau, 0, \dots, 0)| d\tau < +\infty,$$

для всех $q \in S$. Тогда существует единственное абсолютно непрерывное решение задачи (1)–(2) на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + h$, где h достаточно мало.

Доказательство. Задача (1)–(2) эквивалентна следующей задаче:

$$x(t) = \varphi(t_0) + \max_q \int_{t_0}^t [f(q, \tau, x(\tau), x(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \dots, x(\tau - \Delta_m(\tau)))] d\tau; \quad (3)$$

$$x(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)), \text{ если } t - \Delta_i(t) < t_0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4)$$

Для доказательства теоремы используется метод последовательных приближений.

Пусть $x_0(t)$ — произвольная непрерывная на $[t_0, T]$ функция, удовлетворяющая условиям

$x_0(t_0) = \varphi(t_0)$, $x_0(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t))$ при $t - \Delta_i(t) < t_0$, и $x_0(t)$ такая, что точка $(t, x_0(t), x_0(t - \Delta_1(t)), \dots, x_0(t - \Delta_m(t)))$ принадлежит G . Построим последовательные приближения по формулам:

$$x_{n+1}(t) = \varphi(t_0) + \max_q \int_{t_0}^t [f(q, \tau, x_n(\tau), x_n(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, x_n(\tau - \Delta_m(\tau)))] d\tau; \quad (5)$$

$$x_n(\tau - \Delta_i(\tau)) = \varphi(\tau - \Delta_i(\tau)) \text{ при } \tau - \Delta_i(\tau) < t_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Можно подобрать такое $h > 0$, что все функции $x_n(t)$ на $[t_0, t_0 + h]$ будут принадлежать G и будут непрерывны.

Используя лемму и условия теоремы, получаем:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \int_{t_0}^t \mu(\tau) \sum_{i=0}^m |x_n(\tau - \Delta_i(\tau)) - x_{n-1}(\tau - \Delta_i(\tau))| d\tau; \quad (6)$$

$$x_n(\tau - \Delta_i(\tau)) - x_{n-1}(\tau - \Delta_i(\tau)) = 0 \text{ при } \tau - \Delta_i(\tau) < t_0.$$

$$\text{Пусть } \max_t |x_1(t) - x_0(t)| \leq L \text{ при } t \in [t_0; t_0 + h].$$

Тогда из (6) будем иметь

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq (m+1)^n L \frac{\left(\int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau \right)^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда ясно, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $x(t)$. Очевидно, что предельная функция $x(t)$ является решением задачи (3)–(4). Тогда функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду уравнению (1) и условию (2).

Докажем единственность. Пусть $y(t)$ также является непрерывным решением задачи (3)–(4). Тогда, используя лемму, получим

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_{t_0}^t \mu(\tau) \sum_{i=0}^m |x(\tau - \Delta_i(\tau)) - y(\tau - \Delta_i(\tau))| d\tau,$$

$$x(\tau - \Delta_i(\tau)) = y(\tau - \Delta_i(\tau)) = 0 \text{ при } \tau - \Delta_i(\tau) < t_0.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла получаем $x(t) = y(t)$. Отметим, что при дополнительных условиях на основе данных задачи можно доказать существование решения задачи (1)–(2) в классе $C_1[t_0, T]$, т. е. непрерывно дифференцируемого решения. Следующая теорема о непрерывном решении задачи (1)–(2).

Теорема 2. При условиях теоремы 1, если f равномерна по q , непрерывна по $t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))$, то на некотором интервале $[t_0, t_0 + h]$ существует единственное непрерывно дифференцируемое решение задачи (1)–(2), где h достаточно мало.

Следствие. Если применить метод шагов ко всем аргументам, содержащим запаздывание, и сохранить остальные условия теорем 1 и 2, можно доказать эти теоремы, если функция f удовлетворяет условию Липшица толчок по третьему аргументу. Теперь применим метод Тонелли о существовании решения задачи (1)–(2).

Теорема 3. Пусть функция $f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t)))$ определена и непрерывна в области $G = S \times [t_0, T] \times [-b \leq x(t) - \varphi(t_0) \leq b, \dots, b \leq x(t - \Delta_m(t)) - \varphi(t_0) \leq b]$ и в этой области удовлетворяет неравенству $|f| \leq M$. Кроме того, пусть начальная непрерывная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству $-b \leq \varphi(t) - \varphi(t_0) \leq b$. Тогда задача (1)–(2) имеет хотя бы

одно непрерывное решение на $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$, где $\delta = \frac{T}{M}$.

Доказательство. Построим последовательное приближение $\{x_n(t)\}$ по методу Тонелли следующим образом:

$$x_n(t) = \varphi(t_0) \text{ при } t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{\delta}{n};$$

$$x_n(t) = \varphi(t_0) + \max_q \int_{t_0}^{t-\delta/n} f(q, \tau, x_n(\tau), x_n(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, x_n(\tau - \Delta_m(\tau))) d\tau \text{ при } t_0 + \frac{\delta}{n} \leq t \leq t_0 + \delta,$$

3. Изучим зависимость решения от данных задачи. Пусть $x(t)$ является решением задачи (1)–(2) на $[t_0, T]$, а $\tilde{x}(t)$ — решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'(t) &= \max_q \{ \tilde{f}[q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))] \}, \\ \tilde{x}(t_0) &= \psi(t_0); \quad \tilde{x}(t - \tilde{\Delta}_i(t)) = \psi(t - \tilde{\Delta}_i(t)) \quad \text{при } t - \tilde{\Delta}_i(t) < \\ &\quad < t_0 \quad (i = 1, m), \end{aligned} \quad (8)$$

Вводим обозначение $\Delta = \max \left\{ \max_{t, i} \Delta_i(t), \max_{t, i} \bar{\Delta}_i(t) \right\}$, и пусть на

Теорема 4. Пусть для задач (1)–(2) и (7)–(8) имеют место условия теоремы 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\delta_i < 0$ ($i = \overline{1, 3}$), что при выполнении неравенств

$$\begin{aligned} & |\varphi(t) - \psi(t)| < \delta_1 \text{ нпу } t_0 - \Delta \leq t \leq T, \\ & |\Delta_1(t) - \tilde{\Delta}(t)| < \delta_2 \text{ нпу } t_0 - \Delta \leq t \leq T \text{ и} \\ & |f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))) - \\ & - \tilde{f}(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t)))| < \delta_3 \\ & \text{нпу } t_0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

для любого $q \in S$, при $x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))$ из области определения f , решения $x(t)$ и $x(t)$ будут удовлетворять неравенству

Следствие. Если для задач (1)–(2) и (7)–(8) выполняются условия теоремы 2, то $|x'(t) - \bar{x}'(t)| < \epsilon$ при $t \leq t \leq T$.

4. Наконец, используя метод динамического программирования докажем монотонную сходимость приближенных решений к точному решению. Построим последовательные приближения следующим образом: примем за исходное поведение функцию $q_0 = q_0(t)$ и определим $x_0(t)$ из следующей задачи:

$$\frac{dx_0}{dt} = f(q_0, t, x_0(t), x_0(t - \Delta_1(t)), \dots, x_0(t - \Delta_m(t))); \quad (4, 1)$$

$$x_0(t_0) = \varphi(t_0); x_0(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)) \text{ при } t - \Delta_i(t) < t_0.$$

Пусть функция $q_1(t)$ дает максимум выражению $f(q, t, x_0(t), x_0(t - \Delta_1(t_0)), \dots, x_0(t - \Delta_m(t)))$ и $x_1(t)$ — решение задачи:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(q_1, t, x_1(t), x_1(t - \Delta_1(t)), \dots, x_1(t - \Delta_m(t))); \quad (4, 2)$$

$$x_1(t_0) = \varphi(t_0); \quad x_1(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)) \quad \text{при } t - \Delta_i(t) \leq t_0.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательность функций $\{x_n(t)\}$ и последовательность поведений $\{q_n(t)\}$.

Теорема 5. Пусть выполняются условия следствий теорем 1 и 2;

$$\text{нечто } \inf_{i < i < m} \{\Delta_i(t)\} = d > 0 \text{ и } f(q, t, x(t), x(t - \Delta_i(t)), \dots, \\ \dots x(t - \Delta_m(t)))$$

Доказательство. Применим метод шагов к задачам (4, i) и (4, 2). Тогда применение первого шага к

dx_0 — значение первого шага на интервале $[t_0, t_0 + d]$ даст

$$\frac{dx_0}{dt} = f(q_0, t, x_0(t), \varphi(t - \Delta_1(t)), \dots, \varphi(t - \Delta_m(t))), \quad (4, 1')$$

$$\frac{dx_1}{dt} = f(q_1, t, x_1(t), \varphi(t - \Delta_1(t)), \dots, \varphi(t - \Delta_m(t))), \quad (4, 2')$$

$$x_0(t_0) = x_1(t_0) = \varphi(t_0).$$

Из определения $q_1(t)$ очевидно, что

$$x_0(t) \leq \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(q_1, \tau, x_0(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_m(\tau))) d\tau, \quad (4, 1'')$$

$$x_1(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(q_1, \tau, x_1(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_m(\tau))) d\tau. \quad (4, 2'')$$

Для сравнения $x_0(t)$ и $x_1(t)$ поступаем следующим образом. Для уравнения (4, 2'') строим последовательность приближений:

$$x_1^{(0)}(t) - x_0(t);$$

$$x_1^{(1)}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(q_1, \tau, x_1^{(0)}(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_m(\tau))) d\tau;$$

$$\dots$$

$$x_1^{(\kappa+1)}(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(q_1, \tau, x_1^{(\kappa)}(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_m(\tau))) d\tau \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots)$$

Из выражений $x_1^{(1)}(t)$ и $x_0(t)$ видно, что $x_1^{(1)}(t) \geq x_0(t)$ на $[t_0, t_0 + d]$. Теперь сравним $x_1^{(2)}(t)$ и $x_0(t)$ на $[t_0, t_0 + d]$;

$$x_1^{(2)}(t) - x_0(t) \geq \int_{t_0}^t [f(q_1, \tau, x_1^{(1)}(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_l(\tau))) - f(q_1, \tau, x_0(\tau), \varphi(\tau - \Delta_1(\tau)), \dots, \varphi(\tau - \Delta_m(\tau)))] d\tau.$$

Так как по условию теоремы f монотонно возрастает по третьему аргументу, то из последнего неравенства следует, что

$$x_1^{(2)}(t) - x_0(t) \geq 0 \text{ или } x_1^{(2)}(t) \geq x_0(t) \text{ на } [t_0, t_0 + d].$$

Таким же способом, методом индукции легко можно показать, что

$$x_1^{(k+1)}(t) \geq x_0(t) \text{ на } [t_0, t_0 + d] \text{ при } k = 1, 2, \dots$$

По шагам можно получить, что $x_1^{(k+1)}(t) \geq x_0(t)$ (***) на $[t_0, T]$. По условию теоремы последовательность $\{x_1^{(k)}(t)\}$ сходится к решению $x_1(t)$. Тогда из неравенства (***) следует, что $x_1(t) \geq x_0(t)$ на $[t_0, T]$. Далее, применяя индукцию, можно доказать, что $x_{n+1}(t) \geq x_n(t)$ на $[t_0, T]$ для всех n . Поэтому последовательность $\{x_n(t)\}$ монотонно сходится к некоторой функции $x(t)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению (3) при условии (4). Следовательно, $x(t)$ почти всюду удовлетворяет дифференциальному уравнению (4, 1).

Теорема 6. Пусть выполняется условие теоремы 1:

$$\inf_{\substack{1 \leq i \leq m \\ t_0 < t < T}} \{\Delta_i(t)\} = 0 \text{ и } f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t)))$$

монотонно возрастает по всем аргументам, начиная с третьего. Тогда $x_0(t) \leq x_1(t) \leq \dots$ и последовательность $\{x_n(t)\}$ на $[t_0, T]$ сходится к решению задачи (1)–(2).

Эта теорема доказывается аналогично теореме 5. Другой вид последовательности монотонных приближений можно получить методом выбора начального приближения. Пусть $q_0 = q_0(t)$ — начальное приближение и пусть $x_0(t)$ определена при помощи этого поведения, т. е. является решением уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = f(q_0, t, x_0(t), x_0(t - \Delta_1(t)), \dots, x_0(t - \Delta_m(t)))$$

при условии $x_0(t_0) = \varphi(t_0)$, $x_0(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t))$, если $t - \Delta_i(t) < t_0$. Пусть последовательность $\{x_n(t)\}$ определена следующими рекуррентными соотношениями:

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = f(q_{n+1}(t), t, x_n(t), x_n(t - \Delta_1(t)), \dots, x_n(t - \Delta_m(t))); \quad (4, 4)$$

$$x_{n+1}(t) = \varphi(t_0); \quad x_{n+1}(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t)) \text{ при } t - \Delta_i(t) < t_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $q_{n+1}(t)$ максимизирует выражение $f(q, t, x_n(t), x_n(t - \Delta_1(t)), \dots, x_n(t - \Delta_m(t)))$. Тогда можно доказать, по индукции, $x_{n+1}(t) \geq x_n(t)$ для $n = 1, 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р. Динамическое программирование. ИЛ, 1960.
2. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. Изд-во „Наука“, 1964.
3. Норкин С. Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М., Изд-во „Наука“, 1965.
4. Эльсгольц Л. Э. Качественные методы в математическом анализе. М., Гостехиздат, 1955.
5. Абдуллаев Т. Г. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук, 1963, № 1.
6. Садыгов М. М., Ахмедов К. Т., Гасанов К. К. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. наук, 1967, № 4.

М. М. Садыгов

Кечикэн аргументли бир экстремал-дифференциал тэнлик наггында

ХҮЛАСӘ

Бу тәдгигатда

$$x'(t) = \max_q f(q, t, x(t), x(t - \Delta_1(t)), \dots, x(t - \Delta_m(t))) \quad (1)$$

тәнлијинин

$x(t_0) = \varphi(t_0)$; $x(t - \Delta_i(t)) = \varphi(t - \Delta_i(t))$ әкәр $t - \Delta_i(t) < t_0$ шәртини өдәјән һәлли арашдырылмышдыр. Бурада q идәрәедичи параметр олуб, мұәјјән бир S чохлағунда дәјишир.

(1) тәнлијинин мұхтәлиф синифләрдә һәллинин варлығы вә јекәнәлији, һәмчинин һәллин варлығы үчүн Тонелли јахынлашмалары гурулмушдур. Бундан башга, һәллин мәсәләнин мәлүмларындан кәсилмәз асыллығы өјрәнилмиш вә сонра (1) тәнлијинин һәллинә монотон јығылан мұхтәлиф ардычыллығлар гурулмушдур. Бу вахт кечикән аргументин ики мұхтәлиф һалына бахылмышдыр. Монотон јығылма гуруларкән динамик програмлашдырма үсулундан истифадә едилмишдир.

Б. А. КУЛИЕВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОПРЯЖЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА И КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В данной работе исследуется следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 U_1}{\partial t \partial x^2} = F_1[x, t, u_1] & (x \leq 0, 0 \leq t \leq T), \\ U_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad U_{1t}(x, 0) = \psi_1(x) & (x \leq 0), \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = F_2[x, t, U_2] & (x \geq 0, 0 \leq t \leq T), \\ U_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad U_{2t}(x, 0) = \psi_2(x) & (x \geq 0), \\ U_1(-0, t) = U_2(+0, t), \quad \alpha(t) U_{1x}(-0, t) = U_2(+0, t) & (0 \leq t \leq T), \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5)$$

где $0 < T < \infty$, а $F_1, F_2, \varphi_1, \psi_1, \psi_2, \alpha$ — заданные функции.

С помощью методов продолжения и последовательных приближений доказываются локальные (т. е. справедливая при достаточно малых значениях T) теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи A , изучается скорость сходимости последовательных приближений к точному обобщенному решению задачи A и, кроме того, доказывается теорема существования классического решения задачи A .

Для исследования задачи A нам понадобится одно банахово пространство. Введем его. Обозначим через B совокупность всех вектор-функций $U(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t))$, где $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ непрерывны и ограничены соответственно в областях $\Omega_1 = \{x \leq 0, 0 \leq t \leq T\}$ и $\Omega_2 = \{x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$. Если в этом множестве норму определить так: $\|U(x, t)\|_B = \sup_{\Omega_1} |U_1(x, t)| + \sup_{\Omega_2} |U_2(x, t)|$, то она станет банаховым пространством.

Теперь перейдем к решению поставленной задачи. Примем (формально) следующее обозначение:

$$\mu(t) = U_1(-0, t) = U_2(+0, t).$$

С помощью метода продолжения решения задач (1), (2), (6), где

$$U_1(-0, t) = \mu(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

и (3), (4), (7), где

$$U_2(+0, t) = \mu(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (7)$$

приводятся к решению соответственно в областях Ω_1 и Ω_2 следующие нелинейные интегральные уравнения:

$$U_1(x, t) = \varphi_1(x) - \varphi_1(0) + \mu(t) - \int_0^t \mu'(\tau) d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) \psi_1(\xi) d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi \int_0^{\tau} F_1[\xi, s, U_1(\xi, s)] ds, \quad (8)$$

где

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)} \right] \right\}; \\ U_2(x, t) = \frac{\varphi_2(x + t) + \varphi_2(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi_2(\eta) d\eta + \mu(t - x) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F_2[\xi, \tau, U_2(\xi, \tau)] d\xi, \quad (9)$$

причем всюду в дальнейшем предполагаем, что

$$\varphi_2(x) = -\varphi_2(-x), \quad \psi_2(x) = -\psi_2(-x), \quad U_2(x, t) = U_2(x, t), \\ F_2[x, t, U] = -F_2[-x, t, U]$$

при $x < 0, 0 \leq t \leq T, -\infty < U < \infty$ и $\mu(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Далее, учитывая (8) и (9), из второго условия сопряжения (5) для определения $\mu(t)$ на $[0, T]$ получаем задачу Коши:

$$\left\{ \begin{aligned} \mu'(t) &= -\alpha(t) \varphi_2'(0) + \frac{\alpha(t)}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau - \\ &- \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \xi \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(t - \tau)} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \\ &- \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \xi \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(t - \tau)} \right] d\xi \int_0^{\tau} F_2[\xi, s, U_1(\xi, s)] ds + \\ &+ \varphi_2'(t) + \psi_2(t) + \int_0^t F_2[t - \tau, \tau, U_2(t - \tau, \tau)] d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (10) \\ \mu(0) &= \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad (11) \end{aligned} \right.$$

или же линейное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\mu(t) = \varphi_1(0) - \varphi_1'(0) \int_0^t \alpha(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{\mu'(s)}{\sqrt{\tau - s}} ds - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{ds}{(\tau - s)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \xi \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(\tau - s)} \right] \psi_1(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \int_0^{\tau} \frac{ds}{(\tau - s)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \xi \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(\tau - s)} \right] d\xi \times$$

$$\times \int_0^s F_1[\xi, q, U_1(\xi, q)] dq + \int_0^t \psi_2(\tau) d\tau + \varphi_2(t) - \varphi_2(0) + \\ + \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} F_2[\tau - s, s, U_2(\tau - s, s)] ds. \quad (12)$$

Теперь введем определение обобщенного и классического решения задачи А.

Определение 1. Обобщенным решением задачи А назовем вектор-функцию $U(x, t) \equiv (U_1(x, t), U_2(x, t))$, обладающую свойствами:

1. $U_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\mathcal{Q}_1$;
2. $U_2(x, t)$ непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\mathcal{Q}_2$;
3. $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ удовлетворяют, соответственно, в областях $\mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{Q}_2$ уравнениям (8) и (9) для функции $\mu(t)$, являющейся единственным решением в $C^1[0, T]$ уравнения (10), в котором под $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ имеются в виду именно вышеуказанные функции $U_1(x, t)$, $U_2(x, t)$.

Определение 2. Классическим решением задачи А назовем вектор-функцию $U(x, t) \equiv (U_1(x, t), U_2(x, t))$, обладающую свойствами:

1. $U_1(x, t)$ непрерывна в замкнутой области $\mathcal{Q}_1$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяет всем условиям (1) и (2) в обычном смысле.
2. $U_2(x, t)$ непрерывна в замкнутой области $\mathcal{Q}_2$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (3), и удовлетворяет всем условиям (3) и (4) в обычном смысле.
3. $U(x, t)$ удовлетворяет обоим условиям сопряжения (5) в обычном смысле.

Приведем основные из полученных результатов.

Теорема 1. Пусть:

1. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены и непрерывно дифференцируемы соответственно в $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$ $\varphi_2(0) = 0$;
2. Функция $\psi_1(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, 0]$;

3. Функция $\psi_2(x)$ непрерывна на $[0, \infty)$, $\int_0^t |\psi_2(\eta)| d\eta < \infty$ и

$$\psi_2(0) = 0;$$

4. Выполняются условия согласования:

$$\varphi_L(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \psi_2(0) = \psi_2(0) = 0.$$

5. Функция $F_1[x, t, U]$ непрерывна по совокупности своих переменных в области $\mathcal{Q}_1$ $(-\infty < x < \infty)$, $i = 1, 2$
6. В области $\mathcal{Q}_1 \times (-\infty < U < \infty)$

$$|F_1[x, t, U] - F_1[x, t, \tilde{U}]| \leq a |U - \tilde{U}|,$$

где $a > 0$ постоянное, а $F_1[x, t, 0]$ ограничена в $\mathcal{Q}_1$.

7. В области $\mathcal{Q}_2 \times (-\infty < U < \infty)$

$$|F_2[x, t, U] - F_2[x, t, \tilde{U}]| \leq b(t) |U - \tilde{U}|,$$

$$|F_2[x, t, U] - F_2[x, t, \tilde{U}]| \leq c(x, t) |U - \tilde{U}|,$$

где $b(t) \in L(0, T)$, $c(x, t) \in L(\mathcal{Q}_2)$, $|F_2[x, t, 0]| \leq g(t) \in L(0, T)$ и $F_2[x, t, 0] \in L(\mathcal{Q}_2)$.

$$8. \frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} [\|\alpha(t)\|_{C[0, T]} + \|\alpha(t)\|_{L(0, T)}] \equiv C_T < 1. \quad (13)$$

9. Функция $\alpha(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Тогда задача А имеет обобщенное решение $U(x, t)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений,

причем сходимость последовательных приближений $U_n(x, t)$ к точному обобщенному решению $U(x, t)$ характеризуется так:

$$\|U_n(x, t) - U(x, t)\|_B \leq A_T \frac{B_T^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (14)$$

где A_T, B_T — постоянные, зависящие лишь от T .

Доказательство. Берем любую вектор-функцию $U(x, t) \equiv (U_1(x, t), U_2(x, t))$ из B , подставляем ее везде в правую часть (12), находим ее решение (очевидно, что она имеет единственное решение в $C^1[0, T]$); найденную функцию $\mu(t)$ и выбранные функции $U_1(x, t), U_2(x, t)$ подставим в правые части (8) и (9), полученные правые части (8) и (9) обозначим соответственно через $P_1(U)$ и $P_2(U)$, т. е.

$$\begin{aligned} P_1(U) = & \varphi_1(x) + \mu(t) - \varphi_1(0) - \int_0^t \mu'(\tau) d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) \psi_1(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi \int_0^{\tau} F_1[\xi, s, U_1(\xi, s)] ds; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} P_2(U) = & \frac{\varphi_2(x+t) + \varphi_2(x-t)}{2} + \int_{x-t}^{x+t} \psi_2(\eta) d\eta + \mu(t-x) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F_2[\xi, \tau, U_2(\xi, \tau)] d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

и, наконец, этим самым в B определим оператор

$$P(U(x, t)) \equiv (P_1(U(x, t)), P_2(U(x, t))).$$

Берем любой элемент $U(x, t) \equiv (U_1(x, t), U_2(x, t))$, подставляя функции $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ в правую часть (12) и устанавливаем априорную оценку в $C^1[0, T]$ для решения интегро-дифференциального уравнения (12).

Из (10) и (12) имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mu(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\mu'(t)| \leq M_{T,U} + C_T (\max_{0 \leq t \leq T} |\mu(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\mu'(t)|), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} M_{T,U} = & \left\{ \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|a(t)\|_{L(0,T)}) (3|\varphi_1(0)| + \right. \\ & + 3T^{1/2} \|\Psi_1(x)\| + C_{(x<0)} 2dT^{1/2} + 2a \sup_{\Omega_1} |U(x, t)|) + (T+1) \times \\ & \times (\|\psi_L(t)\|_{C[0,T]} + \|g(t)\|_{L(0,T)} + \|b(t)\|_{L(0,T)} \sup_{\Omega_2} |U_2(x, t)|) + \\ & \left. + \|\varphi_2(t)\| + \|\varphi_2(t)\|_{C[0,T]} + \|\varphi_2(t)\|_{C[0,T]}, \right. \\ & \left. d = \sup_{\Omega_1} |F[x, t, 0]| \text{ и } C_T \right\} \end{aligned}$$

определено соотношением (13).

Так как $C_T < 1$, то из (17) имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mu(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\mu'(t)| \leq \frac{M_{T,U}}{1 - C_T} \equiv E_{T,U}. \quad (18)$$

Из (15) и (16) с учетом (18) легко получить, что

$$\|P(U)\|_B \leq \|\varphi_1(x)\|_{C(x<0)} + \|\varphi_2(x)\|_{C(x<0)} + T \|\psi_1(x)\|_{C(x<0)} +$$

$$\begin{aligned} & + \|\psi_2(x)\|_{L(0,\infty)} + (T+2) E_{T,U} + \frac{1}{2} dT^2 + \|F_2[x, t, 0]\|_{L(2)} + \\ & + \max \left\{ \frac{1}{2} dT^2, \|C(x, t)\|_{L(2)} \right\} \|U(x, t)\|_B. \end{aligned} \quad (19)$$

Берем любые две вектор-функции $U(x, t) \equiv (U_1(x, t), U_2(x, t))$ и $\tilde{U}(x, t) \equiv (\tilde{U}_1(x, t), \tilde{U}_2(x, t))$, из B подставляем их в правую часть (12) и находим соответствующие решения $\mu(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ уравнения (12). Далее для $\mu(t)$ и $\tilde{\mu}(t)$ из (10) и (12) имеем

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\mu(t) - \tilde{\mu}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\mu'(t) - \tilde{\mu}'(t)| \leq Q_T \|U(x, t) - \tilde{U}(x, t)\|_B, \quad (20)$$

$$\text{где } Q_T = \frac{1}{1 - C_T} \max \{ (T+2) \|b(t)\|_{L(0,T)} + \frac{4}{3} dT^{3/2} (\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|a(t)\|_{L(0,T)}) \}.$$

Из (15) и (16) с учетом (20) получаем

$$\|P(U(x, t)) - P(\tilde{U}(x, t))\| \leq N_T \|U(x, t) - \tilde{U}(x, t)\|, \quad (21)$$

$$\text{где } N_T = \max \left\{ (T+2) Q_T, \frac{1}{2} dT^2, \|C(x, t)\|_{L(2)} \right\}. \quad (22)$$

Из неравенств (19) и (21) видно, что оператор P действует в пространстве B и удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим следующую функциональную последовательность:

$$\begin{aligned} U_n(x, t) & \equiv (U_{1,n}(x, t), U_{2,n}(x, t)) = \\ & = (P_1(U_{n-1}(x, t)), P_2(U_{n-1}(x, t))) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

где $U_0(x, t)$ — любой фиксированный элемент из B . Так как P действует в пространстве B , то каждая из функций $U_n(x, t)$ принадлежит B . По определению P оператора имеем:

$$\begin{aligned} U_{1,n}(x, t) = & \varphi_1(x) + \mu_{n-1}(t) - \int_0^t \mu_{n-1}'(\tau) d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) \psi_1(\xi) d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 G(x, \xi, t - \tau) d\xi \int_0^{\tau} F_1[\xi, s, U_{1,n-1}(\xi, s)] ds; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} U_{2,n}(x, t) = & \frac{\varphi_2(x+t) + \varphi_2(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi_2(\eta) d\eta + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F_2[\xi, \tau, U_{2,n-1}(\xi, \tau)] d\xi + \mu_{n-1}(t-x), \end{aligned} \quad (24)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ и $\mu_{n-1}(t)$ — единственное решение уравнения (12), в правой части которого вместо $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$ везде подставлены соответственно $U_{1,n-1}(x, t)$ и $U_{2,n-1}(x, t)$.

Для функций $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ из (10) и (12) легко получить, что

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} |\mu_0(t) - \mu_1(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |\mu_0'(t) - \mu_1'(t)| \leq \\ & \leq \int_0^t R_\tau(\tau) \left(\sup_{\Omega_1} |U_{1,0}(x, \tau) - U_{1,1}(x, \tau)| + \right. \\ & \left. + \sup_{\Omega_2} |U_{2,0}(x, \tau) - U_{2,1}(x, \tau)| \right) d\tau, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{где } R_T(\tau) = \frac{1}{1-C_T} \left\{ \frac{2}{V\pi} dT^{1/2} \| \alpha(t) \|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} dT^{3/2} \alpha(\tau) + (T+1)h(\tau) \right\}.$$

Из (23) и (24), пользуясь (25), имеем

$$\sup_{x \leq 0} |U_{1,2}(x,t) - U_{1,1}(x,t)| + \sup_{x \geq 0} |U_{2,2}(x,t) - U_{2,1}(x,t)| \leq$$

$$\leq \int_0^t K_T(\tau) \left(\sup_{\Omega_1} |U_{1,1}(x,\tau) - U_{1,0}(x,\tau)| + \right. \\ \left. + \sup_{\Omega_2} |U_{2,1}(x,\tau) - U_{2,0}(x,\tau)| \right) d\tau.$$

где $K_T(\tau) = [(T+2)R_T(\tau) + T + q(\tau)]$ и $q(\tau) = \int_0^\infty C(\xi, \tau) d\xi$.

Далее по этой же идее, методом математической индукции легко получить, что для любого $n=0, 1, 2, \dots$ и $t \in [0, T]$

$$\sup_{x \leq 0} |U_{1,n+1}(x,t) - U_{1,n}(x,t)| + \sup_{x \geq 0} |U_{2,n+1}(x,t) - U_{2,n}(x,t)| \leq$$

$$\leq \sup_{\Omega_1} |U_{1,1}(x,t) - U_{1,0}(x,t)| + \\ + \sup_{\Omega_2} |U_{2,1}(x,t) - U_{2,0}(x,t)| \frac{\left(\int_0^t K_T(\tau) d\tau \right)^n}{n!}.$$

Следовательно,

$$\| U_{n+1}(x,t) - U_n(x,t) \|_B \leq \\ \| U_1(x,t) - U_0(x,t) \|_B \cdot \frac{\| K_T(t) \|_{L(0,T)}^n}{n!}. \quad (26)$$

Очевидно, что

$$\| U_{n+k}(x,t) - U_n(x,t) \|_B \leq \\ \leq \sum_{s=n}^{n+k-1} \| U_{s+1}(x,t) - U_s(x,t) \|_B \cdot \frac{\| K_T(t) \|_{L(0,T)}^n}{n!}. \quad (27)$$

Отсюда видно, что последовательность $\{U_n(x,t)\}$ фундаментальна в пространстве B . Так как пространство B полное, то $U_n(x,t) \xrightarrow{B} U(x,t)$. В силу непрерывности оператора P в пространстве B функция $U(x,t)$ является неподвижной точкой оператора P , т. е.

$$U(x,t) = (U_1(x,t), U_2(x,t)) = P(U(x,t)) = (P_1(U(x,t)), P_2(U(x,t)))$$

Очевидно, что функции $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ удовлетворяют соответственно в областях Ω_1 и Ω_2 уравнениям (8) и (9) для функции $u(t)$, являющейся единственным решением в $C^1[0, T]$ уравнения (10). Далее легко проверить, что найденная функция $U(x,t)$ удовлетворяет и всем остальным требованиям обобщенного решения задачи A .

Теперь изучим скорость сходимости последовательных приближений $U(x,t)$ к точному решению $U(x,t)$. Пользуясь интегральными уравнениями (8), (9) и соотношениями (23), (24), аналогично неравенству (26) получаем

$$\| U_n(x,t) - U(x,t) \|_B \leq \\ \leq \| U(x,t) - U_0(x,t) \|_B \cdot \frac{\| K_T(t) \|_{L(0,T)}^n}{n!}. \quad (28)$$

В силу (26) для любого $n=0, 1, 2, \dots$

$$\| U_n(x,t) - U_0(x,t) \|_B \leq \sum_{i=0}^{n-1} \| U_{i+1}(x,t) - U_i(x,t) \|_B \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \| U_{i+1}(x,t) - U_i(x,t) \|_B \leq$$

$$\leq \| U_1(x,t) - U_0(x,t) \|_B \cdot \exp[\| K_T(t) \|_{L(0,T)}] \leq \left\{ \| \varphi_1(x) \|_{C(x \leq 0)} + \right. \\ \left. + \| \varphi_2(x) \|_{C(x \geq 0)} + T \| \psi_1(x) \|_{C(x \leq 0)} + \| \psi_2(x) \|_{L(0,\infty)} + (T+2)E_{T,U_0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} dT^2 + \| F_2[x,t,0] \|_{L(\Omega_2)} + \left(1 + \max \left\{ \frac{1}{2} dT^2, \| C(x,t) \|_{L(\Omega_2)} \right\} \right) \right\} \times \\ \times \| U_0(x,t) \|_B \cdot \exp[\| K_T(t) \|_{L(0,T)}] = A_T.$$

Отсюда при предельном переходе получаем

$$\| U(x,t) - U_0(x,t) \|_B \leq A_T. \quad (29)$$

Если принять обозначение $B_T = \int_0^T K_T(\tau) d\tau$, то из неравенств (28) и (29) получится (14).

Теорема 2. Пусть:

1. Выполнены все условия теоремы 1;

2. $N_T < 1$, где N_T определено соотношением (22). Тогда задача A имеет в пространстве B единственное обобщенное решение.

Доказательство. Допустим, что задача A имеет два различных решения:

$$U(x,t) = (U_1(x,t), U_2(x,t)), \text{ и } V(x,t) = (V_1(x,t), V_2(x,t)),$$

тогда в силу соотношений $U(x,t) = P(U(x,t))$ и $V(x,t) = P(V(x,t))$ неравенство (21) примет вид

$$\| U(x,t) - V(x,t) \|_B \leq N_T \| U(x,t) - V(x,t) \|_B.$$

Отсюда в силу $N_T < 1$ имеем

$$\| U(x,t) - V(x,t) \|_B = 0, \text{ т. е. } U(x,t) = V(x,t) \text{ в области } (-\infty < x < \infty), \\ 0 \leq t \leq T.$$

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены и дважды непрерывно дифференцируемы соответственно в $(-\infty, 0]$, $[0, \infty)$, $\varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$;

2. Функция $\psi_1(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, 0]$ вместе с производными $\psi_1(x)$, $\psi_1'(x)$;

3. Функция $\psi_2(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$.

$$\int_0^\infty |\psi_2(\eta)| d\eta < \infty \text{ и } \psi_2(0) = 0;$$

4. $\alpha(t)$ постоянная;

5. Выполняются 4—8 условия теоремы 1;

6. Выполняется второе условие теоремы 2;

7. Выполняются условия согласования:

$$\alpha \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0), F_1[0, 0, \varphi_1(0)] + \psi_1'(0) = F_2[0, 0, \varphi_2(0)] + \psi_2'(0);$$

8. $\varphi_2'(0) - \alpha \varphi_1'(0) = 0$;

9. Функция $F_{1x}[x, t, U]$ непрерывна, а функция $F_{1t}[x, t, U]$, $F_{1U}[x, t, U]$ непрерывны и ограничены по совокупности своих переменных в области $\Omega_1 \times (-R_0 \leq U \leq R_0)$;

10. Функции $F_{2x}[x, t, U]$, $F_{2U}[x, t, U]$ непрерывны по совокупности своих переменных в области $\Omega_2 \times (-R_0 \leq U \leq R_0)$, где

$$R_0 = \{ \| \varphi_2(x) \|_{C(x<0)} + \| \varphi_2(x) \|_{C(x>0)} + T \| \psi_1(x) \|_{C(x>0)} + \\ + \| \psi_2(x) \|_{L(0,\infty)} + (T+2) E_{T,0} + \frac{1}{2} dT^2 + \| F_2[x,t,0] \|_{L(\mathbb{R}_2)} \} \times \\ \times \exp [\| K_T(t) \|_{L(0,T)}], \quad (30)$$

$$E_{T,0} = \frac{1}{1-C_T} \left\{ (T+1) \alpha \varphi_1'(0) + (3+2T) \frac{2\alpha}{3\sqrt{\pi}} T^{1/2} \| \psi_1(x) \|_{C(x<0)} + \right. \\ \left. + (T+1) \| g(t) \|_{L(0,T)} + (3+2T) \frac{2\alpha}{3\sqrt{\pi}} dT^{1/2} + (T+1) \| \psi_2(t) \|_{C[0,T]} + \right. \\ \left. + \| \varphi_2(t) \|_{C[0,T]} + \| \varphi_2'(t) \|_{C[0,T]} \right\}.$$

Тогда задача А имеет классическое решение.

Доказательство. Так как выполнены все условия теорем 1 и 2, то задача А имеет единственное обобщенное решение $U(x,t)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений, исходя из любого элемента $U(x,t) \in B$. Если предполагать, что $U_0(x,t) \equiv 0$, тогда в силу (29) имеем

$$\| U(x,t) \|_B \leq R_0,$$

где R_0 определено соотношением (30).

Осталось доказать, что найденная функция $U(x,t)$ является классическим решением задачи А.

Выполняя преобразования в уравнении (10), с учетом условия $\varphi_1(0) = 0$, уравнение примет вид

$$\mu'(t) = \lambda \int_0^t \frac{\mu'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau + F_{U_1, U_2}(t), \quad (31)$$

где

$$\lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}, \quad F_{U_1, U_2}(t) = -\lambda \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(t-\xi)} \right] \psi_1'(\xi) d\xi - \\ - \frac{\lambda}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_{-\infty}^0 \xi \exp \left[-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)} \right] d\xi \int_0^\tau F_1[\xi, s, U_1(\xi, s) ds] + \varphi_2'(t) + \\ + \psi_2(t) - \alpha \varphi_1'(0) + \int_0^t F_2[t-\tau, \tau, U_2(t-\tau, \tau)] d\tau, \\ U(x,t) = (U_1(x,t), U_2(x,t)).$$

Если принять во внимание, что $U(x,t)$ — конкретная функция, удовлетворяющая условию $\| U(x,t) \|_B$, то уравнение (31) окажется линейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода. Пользуясь условиями данной теоремы, легко показать, что свободный член уравнения (31) является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, T]$. Тогда, как известно, уравнение (31) в классе непрерывных функций имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

В работе [1] с помощью элементарных вычислений повторные ядра находятся в виде

$$H_n(t-\tau) = \pi^{n/2} (t-\tau)^{n-2/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Решение уравнения (31) определяется следующей формулой:

$$\mu'(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n-2/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] F_{U_1, U_2}(\tau) d\tau + F_{U_1, U_2}(t), \quad (32)$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\lambda^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n-2/2} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right]$ — резольвента интегрального уравнения (31)ⁿ⁼¹.

Если проинтегрировать по частям подынтегральное выражение в правой части (32) по τ , пользуясь непрерывной дифференцируемостью $F_{U_1, U_2}(t)$ и условием $\varphi_1(0) = \alpha \varphi_2'(0)$, то (32) примет вид

$$\mu'(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[2\lambda^n \pi^{n/2} (t-\tau)^{n/2} / n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \right] F'_{U_1, U_2}(\tau) d\tau + F_{U_1, U_2}(t). \quad (33)$$

Правая часть (33) допускает однократное дифференцирование при $(0 \leq t \leq T)$.

Таким образом установлено, что $\mu(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, T]$.

Далее, пользуясь всеми условиями теоремы 3, непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $U(x,t)$ является классическим решением задачи А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стручнина Г. М. ИФЖ, 11 (89—104), 1961.
2. Гайдук С. И., Иванов А. В. „ДАН БССР“, т. VIII, № 9 (560—563), 1964.
3. Лозановская И. Т., Уфлянд Я. С. „ДАН СССР“, 1963, № 5 (1005—1007), 1965.
4. Ладыженская О. А., Ступялис Л. Л. Вестн. ЛГУ, № 19, вып. 4 (33—41), 1914.
5. Абдурахманов М. А., Сб. „Уравнения матем. физ. и функц. анализ“, Алма-Ата, 73—76, 1956.
6. Тихинов Д. Н. и Самарский А. А. Уравнения математической физики, ГИИТЛ, М., 1958.
7. Ступялис Л. Л. Вестн. ЛВУ № 13, вып. 3 (86—102), 1967.

Б. Э. Гулијева

Квазихэтти икинчи тэртиб гиперболик типли вэ квазихэтти үчүнчү тэртиб тэнликлэр үчүн гојулмуш бир гошма мәсәлә һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә давам вэ ардычыл јахынлашма үсулларынын көмәжилә А мәсәләсинин үмумиләшмиш һәлли һаггында локал Т-нин кафи гәдәр кичик гијмәтләриндә доғру олан варлыг, јеканәлик теоремләри вэ классик һәлли һаггында локал варлыг теореми исбат олунмушдур. Бундаш башга, ардычыл јахынлашмаларын дәгиг үмумиләшмиш һәллә факториал сүр'әтлә јығылмасы да көстәрилмишдир.

УДК 518:517.944 1947

Р. И. МУРАДОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Задачам для вырождающихся параболических уравнений посвящены работы А. М. Ильина, О. А. Олейник, Г. Фикера, Г. И. Макаренко и др. В настоящей статье рассматривается смешанная задача для вырождающихся уравнений с разрывными коэффициентами при условии сопряжения, содержащем производную по времени. Применяя методику работы О. А. Олейник [1], доказываются существование и единственность поставленной задачи.

В прямоугольнике $D = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим уравнение

$$\varphi(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u + f(x, t), \quad \varphi(0) = 0, \quad (1)$$

коэффициенты которого непрерывны всюду в D , кроме точек линии $x = \xi$ ($0 < \xi < l$), где эти коэффициенты терпят разрыв первого рода, и $a(x, t) \geq a_0 > 0$, $c(x, t) \leq 0$. Функция $\varphi(t)$ непрерывна при всех t и имеет непрерывные производные при $t > 0$; при достаточно малых t имеют место соотношения:

$$C_1 t^\alpha \leq \varphi(t) \leq C_2 t^\alpha; \quad C_1^{(1)} t^{\alpha-1} \leq \varphi'(t) \leq C_2^{(1)} t^{\alpha-1}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (*)$$

где $C_1, C_2, C_1^{(1)}, C_2^{(1)}$ — некоторые положительные постоянные.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $D_1 = \{0 < x < \xi, 0 < t \leq T\}$ и $D_2 = \{\xi < x < l, 0 < t \leq T\}$,

начальному условию

$$u(x, t)|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

граничным условиям

$$u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения вида

$$u(x, t)|_{x=\xi-0} = u(x, t)|_{x=\xi+0}, \quad \kappa_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - \kappa_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=\xi} + \sigma u \Big|_{x=\xi} = \kappa(t). \quad (4)$$

Здесь $\kappa_i(t) \geq \kappa_0 > 0$ ($i = 1, 2$); δ, σ — заданные числа.

Теорема 1. Если: 1) функции $\frac{\partial a(x, t)}{\partial x}, b(x, t), c(x, t), f(x, t) \in C^{1+\lambda} b D_1$ и $D_2, \kappa(t) \in C^{1+\lambda} [0, T]$ где λ ($\lambda > 0$) — показатель Гельдера;

2) $\varphi(t), \varphi'(t)$ удовлетворяют условию (*);

3) $f(x, t) = O(t^{\frac{1+\alpha}{2}}), \kappa(t) = O(t^{\frac{1}{2}})$ для каждого $x \in D$, δ, σ — неположительные числа, то задача (1)–(4) имеет решение.

Доказательство. Введем некоторые обозначения. Через φ^h обозначим усреднение функции φ с радиусом усреднения h . Пусть $a^h = (\kappa a)^h$,

$$b^h = \left(\kappa b - a \frac{\partial \kappa}{\partial x} \right)^h, \quad c^h = (\kappa c)^h, \quad f^h = (\kappa f)^h, \quad \sigma^h = (\bar{\sigma})^h, \quad \sigma^h = (\bar{\sigma})^h,$$

$$\kappa(x, t) = \begin{cases} \frac{\kappa_1(t)}{a(\xi-0, t)} & \text{при } 0 < x < \xi, 0 < t \leq T, \\ \frac{\kappa_2(t)}{a(\xi+0, t)} & \text{при } \xi < x < l, 0 < t \leq T, \end{cases}$$

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \delta_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \delta_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases} \quad \bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \sigma_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\bar{\kappa}(t, x) = \begin{cases} \kappa_1(t) & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \kappa_2(t) & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta, \quad \sigma_2 - \sigma_1 = \sigma, \quad \kappa_1(t) - \kappa_2(t) = \kappa(t).$$

Рассмотрим последовательность уравнений

$$(\kappa^h(x, t) \varphi(t) + h) \frac{\partial u^h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + c^h u^h - \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} - \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h - \frac{\partial \kappa^h}{\partial x} = f^h. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи получим как предел решения уравнений (5) при условиях (2)–(4). Установим некоторые равномерные по h интегральные оценки для u^h и ее производных при достаточно малом $T = T_1$, выше уровня которого уравнение перестает быть вырожденным и интегральные оценки получаются как в работе [7].

Умножим уравнение (5) на $u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}}$ (p — пока неопределенная положительная постоянная) и проинтегрируем по области $D_{T_1} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_1\}$, при этом получим

$$\begin{aligned} & \iint_{D_{T_1}} \kappa^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} dx dt + h \iint_{D_{T_1}} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt - \\ & - \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt + \iint_{D_{T_1}} b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt + \\ & + \iint_{D_{T_1}} c^h (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt - \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt - \\ & - \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt - \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \kappa^h}{\partial x} u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = \end{aligned}$$

$$= \iint_{D_{T_1}} f^h u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt. \quad (6)$$

Интегрированием по частям преобразуем следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{T_1}} \kappa^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} dx dt = \frac{1}{2} \iint_{D_{T_1}} \kappa^h \frac{\partial}{\partial t} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \kappa^h (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} \Big|_{t=T_1} dx - \frac{1}{2} \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \kappa^h}{\partial t} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} dx dt + \\ &+ \frac{p}{2} \iint_{D_{T_1}} \kappa^h (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{2-\alpha}} dx dt + \frac{1-\alpha}{2} \iint_{D_{T_1}} \kappa^h (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{2-\alpha}} dx dt; \\ I_2 &= \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = - \iint_{D_{T_1}} a^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt; \\ I_3 &= h \iint_{D_{T_1}} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = \frac{1}{2} h \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial}{\partial t} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = \\ &= \frac{h}{2} \int_0^l (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} \Big|_{t=T_1} dx + \frac{ph}{2} \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt + \\ &+ \frac{1-\alpha}{2} h \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{2-\alpha}} dx dt + \frac{h}{2} \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 \frac{e^{-pt} \varphi'(t)}{\varphi^2(t) t^{1-\alpha}} dx dt; \\ I_4 &= \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \delta^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} \Big|_{t=T_1} dx + \frac{p}{2} \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt + \\ &+ \frac{1-\alpha}{2} \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{2-\alpha}} dx dt + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{e^{-pt} \varphi'(t)}{\varphi^2(t) t^{1-\alpha}} dx dt; \\ I_5 &= \iint_{D_{T_1}} \frac{\partial x^h}{\partial x} u^h \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt = - \iint_{D_{T_1}} x^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{e^{-pt}}{\varphi(t) t^{1-\alpha}} dx dt. \end{aligned}$$

Подставляя значения интегралов $I_1, \dots, I_5$ в (6), затем, пользуясь неравенством

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

оцениваем слагаемые в правой части полученного равенства. Далее, отбрасывая некоторые положительные члены в левой части учитывая, что $\delta^h \leq 0$, $\sigma^h \leq 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} &M_1 \int_0^l (u^h(x, T_1))^2 dx + \\ &+ \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{1-\alpha}} \left[\frac{p\kappa_0}{2} - \frac{M_2}{2} - \frac{\gamma_1}{2} \right] dx dt + \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 \frac{e^{-pt}}{t^{2-\alpha}} \left[\frac{\kappa_0(1-\alpha)}{2} - \frac{M_3 t}{\varphi(t)} - \frac{\gamma_2 t}{\varphi(t)} \right] dx dt + \\ &+ \iint_{D_{T_1}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \left[a_0 - \frac{M_4}{2\gamma_2} - \frac{\gamma_3}{2} \right] dx dt \leq M_5 \quad (8) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем через M_i обозначены постоянные, не зависящие от h .

Взяв достаточно большое $p > 0$ и достаточно малое $T_1 > 0$, подбираем $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ так, чтобы выражения в квадратных скобках были положительны. Тогда из (8) получим:

$$\begin{aligned} &\int_0^l (u^h(x, T_1))^2 dx \leq M_6, \quad \iint_{D_{T_1}} (u^h)^2 dx dt \leq \\ &\leq M_6, \quad \iint_{D_{T_1}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq M_6. \quad (9) \end{aligned}$$

В силу предположения 1) теоремы 1 после применения результатов работы [10] следует, что последовательность u^h компактна вместе со всеми производными, входящими в уравнение (5), внутри каждой замкнутой области, лежащей в D и не содержащей точек прямой $x = \xi$. Таким образом, из последовательности u^h можно выделить подпоследовательность u^{h_k} , предел которой удовлетворяет уравнению (1) во всех внутренних точках D_1 и D_2 . Пусть $\lim_{h_k \rightarrow 0} u^{h_k}(x, t) = u(x, t)$ (для простоты в дальнейшем индекс k опускаем).

Теперь получим интегральные оценки для производных $\frac{\partial u^h}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2}$ в окрестности точек прямой $x = \xi$. Пусть $Q_\kappa = \left\{ |t| \leq \frac{\rho}{\kappa}, |x| \leq \frac{\rho}{\kappa} \right\}$ ($\kappa = \overline{1, 4}$) есть прямоугольник с центром в точке p_0 , где $\rho > 0$ — достаточно малое число. Мы предполагаем, что точка p_0 лежит на прямой $x = \xi$ и является началом координат. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi_\kappa(x, t) = \left(t^2 - \left(\frac{\rho}{\kappa} \right)^2 \right)^2 \left(x^2 - \left(\frac{\rho}{\kappa} \right)^2 \right)^2 \quad (\kappa = 1, 2, 3, 4).$$

Умножим уравнение (5) на $\Phi_1 \frac{\partial u^h}{\partial t}$ и проинтегрируем его по области Q_1 :

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_1} \Phi_1 \kappa^h \varphi(t) \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + h \iint_{Q_1} \Phi_1 \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt - \\ &- \iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) \Phi_1 \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \iint_{Q_1} \Phi_1 b^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{Q_1} \Phi_1 c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \iint_{Q_1} \Phi_1 \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} \Phi_1 \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \iint_{Q_1} \Phi_1 \frac{\partial x^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt = \\
& = \iint_{Q_1} \Phi_1 f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt.
\end{aligned} \quad (10)$$

Интегрируя по частям третий, седьмой и восьмой члены в левой части (10), будем иметь

$$\begin{aligned}
& \iint_{Q_1} \Phi_1 \kappa^h \varphi(t) \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + h \iint_{Q_1} \Phi_1 \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} \Phi_1 \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (a^h \Phi_1) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} a^h \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \iint_{Q_1} \Phi_1 b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} \Phi_1 c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \iint_{Q_1} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_1 \sigma) u^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt + \\
& + \iint_{Q_1} \sigma^h \Phi_1 \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \iint_{Q_1} \sigma^h \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} \sigma^h \Phi_1 \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \iint_{Q_1} \frac{\partial (x^h \Phi_1)}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} dx dt - \\
& - \iint_{Q_1} x^h \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \iint_{Q_1} \Phi_1 f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt.
\end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда, применяя формулу (8) и пользуясь тем, что $\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 \Phi_1$ ограничено $\frac{\partial \delta^h}{\partial x} \leq 0$, получим

$$\iint_{Q_1} \Phi_1 \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M_6.$$

Следовательно,

$$\iint_{Q_2} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M_7. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнения (5) по t , умножая на $\Phi_2 \frac{\partial u^h}{\partial t}$ и производя аналогичные выкладки, как это делалось при получении оценки (12), получим равномерно по h оценку для $\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t}$, т.е.

$$\iint_{Q_2} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt \leq M_8. \quad (13)$$

Затем, умножая уравнение (5) после дифференцирования по t на $\Phi_2 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2}$ и рассуждая аналогично, получим следующую оценку:

$$\iint_{Q_1} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 dx dt \leq M_9. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальным, граничным условиям и первому условию сопряжения. Теперь докажем, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет второму условию сопряжения на линии $x = \xi$ ($t \neq 0$) [8].

Из уравнения (5) имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma^h u^h) - \frac{\partial x^h}{\partial x} = f^h - \\
& - \kappa^h \varphi(t) \frac{\partial u^h}{\partial t} - h \frac{\partial u^h}{\partial t} - \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} - \sigma^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - c^h u^h.
\end{aligned} \quad (15)$$

Интегрируя (15) по x от $\xi - \varepsilon$ до $\xi + \varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned}
& - a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} - \delta^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} - \sigma^h u^h \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} - x^h \Big|_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} A^h dx,
\end{aligned} \quad (16)$$

где

$$A^h = f^h - \kappa^h \varphi(t) \frac{\partial u^h}{\partial t} - h \frac{\partial u^h}{\partial t} - \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} - \sigma^h \frac{\partial u^h}{\partial x} - c^h u^h.$$

Из полученных интегральных оценок следует, что

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} A^h dx \rightarrow 0 \text{ при } h, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, устремляя h к нулю и затем ε к нулю, из (16) получим второе условие сопряжения (4).

Теорема 2. Пусть $u(x, t)$ непрерывно, имеет непрерывные производные по t в D и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0$$

в D_1 и D_2 однородным начальным и граничным условиям

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad u(x, t) \Big|_{x=0} = u(x, t) \Big|_{x=l} = 0,$$

условию сопряжения вида

$$l(u) = \kappa_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - \kappa_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=\xi} + \sigma u \Big|_{x=\xi} = 0,$$

где

$$\kappa_2(t), \kappa_1(t) \geq \kappa_0 > 0, \quad \sigma \leq 0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) единственное.

Доказательство. Нам нужно доказать, что однородная задача (1)–(4) ($f \equiv 0, \kappa \equiv 0$) имеет только тривиальное решение. Из принципа максимума следует, что $u(x, t)$ (решение однородной задачи) не принимает своего положительного максимума и отрицательного минимума внутри D_1, D_2 и при $t = T$ ($x \neq \xi$). Покажем, что $u(x, t)$ не принимает своего положительного максимума при $x = \xi$. Действительно, если бы функция $u(x, t)$ принимала свое наибольшее положительное значение при $x = \xi$, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и из теоремы 1 работы [5] следует,

что

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} < 0.$$

Следовательно, $l(u) < 0$. Это противоречие показывает, что $u(x, t)$ не достигает своего наибольшего положительного значения при $x = \xi$.

Аналогично можно показать, что $u(x, t)$ не достигает своего наименьшего отрицательного значения при $x = \xi$. Следовательно, $|u(x, t)|$ достигает своего максимума при $t = 0$ или на боковых сторонах D ; $x = 0$, $x = e$. Отсюда вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$ в D .
Пользуясь случаем, выражаю благодарность Г. К. Намазову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. „Изв. АН СССР, серия матем.“ т. 25, 1961, № 1.
2. Олейник О. А. Матем. сб., т. 69, 1966 № 1.
3. Ильин А. М. Матем. сб., т. 50 (92), 1960, № 4.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Сибирского отд. АН СССР, 1962.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частичными производными. Гостехиздат, 1953.
6. Выборны Р., „ДАН СССР“, т. 117, 1957, № 4.
7. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Изд. „Наука“, 1967.
8. Намазов Г. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1961, № 3.
9. Намазов Г. К., Бабаева А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 6.
10. Fridman B. Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 7, 1958, № 5.

Р. И. Мурадов

Кәсилән әмсаллы чырлашан икинчи тәртиб параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кәсилән әмсаллы чырлашан параболик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин һәллинин варлығы вә јеканәлији теоремләри исбат едилмишдир.

А. С. МАХМУДОВ и Р. Р. АХУНДОВ

О ПОЧТИ-ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Пусть $\{\varphi_n(x)\} (n=1, 2, 3, \dots)$ — бесконечная система действительных функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и, кроме того, пусть все функции $\varphi_n(x)$ принадлежат $L^2(a, b)$ и

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Обозначим

$$a_{m,n} = \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx \quad \text{при } m \neq n.$$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется почти-ортогональной на отрезке $[a, b]$, если

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 < \infty.$$

Относительно почти-ортогональных систем справедлива теорема, аналогичная неравенству Бесселя, доказанная Р. Беллманом, (см. [1], стр. 445).

Теорема А. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — почти-ортогональная система функций на отрезке $[a, b]$ и действительная функция $f(x) \in L^2(a, b)$ то

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 \leq \left\{ 1 + 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \int_a^b f^2(x) dx,$$

где

$$b_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx.$$

Обозначим через C пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|,$$

а через C_1 — единичную сферу пространства C . Пусть $\{\varphi_n(x)\} (n=1, 2, 3, \dots)$ — почти-ортогональная система функций на отрезке $[a, b]$ и $b_n (n=1, 2, 3, \dots)$ — коэффициенты Фурье функций $f(x) \in C$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Далее пусть последовательность $D = \{d_k\}$ неотрицательна: $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$). Положим

$$M_n[D] = \sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k |b_k|.$$

Определение 1. Будем говорить, что почти-ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) обладает свойством R , если для любой последовательности $D \equiv \{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$),

$$M_n[D] \sim \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

т. е. если существуют положительные константы A и B такие, что

$$A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M_n[D] \leq B \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СВОЙСТВА R

Лемма 1. Для того, чтобы почти-ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладала свойством R , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию (М): для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $\{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), такая что

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь и в дальнейшем нам нужна будет следующая

Лемма 2. Пусть n — натуральное число, $H_n > 0$, $\{A_k\}$ — последовательность чисел и почти-ортогональная система функций $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right| dx \geq H_n. \quad (1)$$

Тогда существует функция $f(x) \in C_1$ такая, что

$$\sum_{k=1}^n |A_k| |b_k| > \frac{H_n}{2} \quad [2].$$

Доказательство леммы 1. Необходимость. Пусть почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством R , т. е. для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $\{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$),

$$A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{f \in C_1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k b_k \right| \leq B \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда получаем, что для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $\{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существует функция $f(x) \in C_1$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^n d_k |b_k| \geq A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Полагая $\varepsilon_k = \text{sign } b_k$, если $b_k \neq 0$ и $\varepsilon_k = 1$, при $b_k = 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) получаем

$$A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^n d_k |b_k| = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k b_k =$$

$$= \left| \int_a^b f(x) \cdot \left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right] dx \right| \leq \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right| dx,$$

т. е.

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Это неравенство показывает, что почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (М).

Достаточность. Пусть почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (М). Полагая в лемме 2 $A_k = \varepsilon_k d_k$ и $H_n = A \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, получаем, что существует функция $f(x) \in C_1$, для которой

$$\sum_{k=1}^n d_k |b_k| > \frac{A}{2} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

отсюда

$$\sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k |b_k| \geq \frac{A}{2} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Так как с другой стороны в силу теоремы А для любой функции $f(x) \in C_1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n d_k |b_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left[1 + 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = B \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

то отсюда вытекает, что

$$\sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k |b_k| \leq B \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) имеем

$$M_n[D] \sim \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е. почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством R и лемма 1 доказана.

Определение 2. Пусть $0 < p \leq 2$. Будем говорить, что почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством R_p , если для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $D = \{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), такая, что

$$M_n^p[D] \sim \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

где

$$M_n^p[D] = \sup_{f \in C_1} \left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right|.$$

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ СВОЙСТВА R_p

Лемма 3. Для того, чтобы почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладала свойством R_p , $0 < p \leq 2$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию (M_p) : для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $\{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), такая, что

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \geq A \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 4. Пусть $0 < p \leq 2$, $n \geq 1$ — любое натуральное число, $H_n^p > 0$, $\{A_k\}$ — последовательность чисел и почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx \geq H_n^p, \quad (4)$$

тогда существует функция $f(x) \in C_1$ такая, что

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > \frac{H_n^p}{2},$$

Доказательство. Рассмотрим линейный функционал в пространстве C :

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx.$$

Так как

$$\|\Phi\| = \sup_{f \in C_1} |\Phi(f)| = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx,$$

то существует функция $f(x) \in C_1$, для которой

$$|\Phi(f)| > \frac{1}{2} \|\Phi\|,$$

т. е.

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > \frac{1}{2} \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx,$$

откуда в силу условия (4)

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > \frac{H_n^p}{2}.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 3. Необходимость. Пусть почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством R_p , $0 < p \leq 2$, т. е. для любого натурального числа n и любой последовательности $\{d_k\}$,

$d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), такая, что

$$A \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq \sup_{f \in C_1} \left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| \leq B \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Отсюда получаем, что для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности $\{d_k\}$, $d_k \geq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$), и функция $f(x) \in C_1$, удов-

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > A \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

При этом имеем

$$A \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} < \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx,$$

т. е. почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (M_p) .

Доста точность. Пусть почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (M_p) . Полагая в лемме 4 $A_k = \varepsilon_k d_k$ и $H_n^p = A \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}$, получаем, что существует функция $f(x) \in C_1$ для которой

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > \frac{A}{2} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

отсюда

$$\sup_{f \in C_1} \left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| > \frac{A}{2} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

т. е.

$$M_n^p[D] > \frac{A}{2} \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (5)$$

Легко можно показать, что почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ для любой последовательности действительных чисел $\{a_k\}$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \leq \alpha \cdot \sum_{k=1}^n a_k^2,$$

где

$$\alpha = 1 + 2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{m,n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для любой функции $f(x) \in C_1$ имеем

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| \leq \leq (b-a)^{\frac{2-p}{2}} \cdot \alpha^{\frac{p}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} = B \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Отсюда

$$\sup_{f \in C_1} \left| \int_a^b f(x) \cdot \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right| \leq B \cdot \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

т. е.

$$M_n^p[D] \leq B \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (6)$$

Из неравенств (5) и (6) имеем

$$M_n^p[D] \sim \left(\sum_{k=1}^n d_k^2 \right)^{\frac{p}{2}},$$

т. е. почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладает свойством R_p и лемма 3 доказана.

Лемма 5. Пусть $0 < p \leq 2$, $M_k > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) — заданная числовая последовательность $\{f_k(x)\}$ — заданная последовательность суммируемых функций. Чтобы для любого натурального числа $n \geq 1$ и любой последовательности действительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) существовала последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), такая, что

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k N_k f_k(x) \right|^p dx \geq A \cdot \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 M_k^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}}, \quad (7)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_a^b |f_k(x)|^p dx \geq B M_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (8)$$

Доказательство. Достаточность. Известно, что для ортонормированной системы функций Радемахера $\{r_k(t)\}$ справедливо следующее неравенство Хинчина ([1], стр. 153):

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^\omega dt \leq \left(\frac{\omega}{2} + 1 \right)^{\frac{\omega}{2}} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{\omega}{2}}, \quad (9)$$

где $\omega > 0$ и $\{a_k\}$ — любая последовательность действительных чисел. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 &= \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right]^2 dt = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^{\frac{p}{\alpha}} \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^{2-\frac{p}{\alpha}} dt \leq \\ &\leq \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^{\frac{2\alpha-p}{\alpha-1}} - 1 dt \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

отсюда в силу неравенства (9) получаем

$$\begin{aligned} \left(\omega = \frac{2\alpha-p}{\alpha-1}, \alpha > 1, 0 < p \leq 2 \right) \\ \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \left[\frac{2\alpha-p}{2(\alpha-1)} + 1 \right]^{\frac{2\alpha-p}{2\alpha}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{2\alpha-p}{2\alpha}} \end{aligned}$$

или

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \geq E \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (10)$$

Полагая в (10) $a_k = N_k f_k(x)$, получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n N_k f_k(x) r_k(t) \right|^p dt \geq E \cdot \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}},$$

откуда, интегрируя по x ,

$$\int_a^b \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n N_k f_k(x) r_k(t) \right|^p dt \right] dx \geq E \cdot \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}} dx. \quad (11)$$

Из неравенства (11) заключаем существование последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), удовлетворяющей условию

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k N_k f_k(x) \right|^p dx \geq E \cdot \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}} dx. \quad (12)$$

Наконец, по неравенству Коши имеем

$$\sum_{k=1}^n |N_k|^p |f_k(x)|^p |N_k|^{2-p} \cdot M_k^{\frac{2-p}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}} \cdot \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 M_k^{\frac{2}{p}} \right]^{\frac{2-p}{2}},$$

откуда в силу условия (8) получаем, что

$$B \sum_{k=1}^n N_k^2 M_k^{\frac{2}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 M_k^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}} dx,$$

т. е.

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right]^{\frac{p}{2}} dx \geq B \cdot \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 M_k^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (13)$$

Неравенство (7) следует из неравенств (12) и (13).

Необходимость. Возьмем любое фиксированное натуральное число $n \geq 1$ и положим

$$N_1 = N_2 = N_3 = \dots = N_{n-1} = 0, \quad N_n = 1.$$

Тогда существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$), такая, что

$$\int_a^b |\varepsilon_n f_n(x)|^p dx \geq A \cdot M_n,$$

откуда получаем

$$\int_a^b |f_n(x)|^p dx \geq A \cdot M_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

и лемма 5 доказана. Отметим, что лемма 5 доказана для случая $p=1$ в работе [2]. Теперь сформулируем основные теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы почти-ортогональная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладала свойством R , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b |\varphi_k(x)| dx \geq M \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

Доказательство этой теоремы следует из лемм 1 и 5.

Теорема 2. Пусть $0 < p \leq 2$. Для того, чтобы почти-ортонормальная система $\{\varphi_k(x)\}$ обладала свойством R_p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^b |\varphi_k(x)|^p dx \geq B \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

Доказательство этой теоремы следует из лемм 3 и 5.

Следствие 1 (из теоремы 1). Пусть $d_k \geq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и почти-ортонормальная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (14). Тогда $\sup_n M_n[D] = \infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty$, $\sup_n M_n[D] < \infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty$.

Следствие 2 (из теоремы 2). Пусть $0 < p \leq 2$, $d_k \geq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) и почти-ортонормальная система $\{\varphi_k(x)\}$ удовлетворяет условию (15). Тогда существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$, ($k = 1, 2, 3, \dots$) такая, что $\sup_n M_n^p[D] = \infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \infty$, $\sup_n M_n^p[D] < \infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty$.

Определение 3. Будем говорить, что почти-ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством R^* , если для любой последовательности $\{d_n\}$, $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, существует функция $f(x) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n |b_n| = \infty.$$

Рассуждая аналогично, как в работе [2], из следствия 1 получим следующую теорему:

Теорема 3. Почти-ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ обладает свойством R^* в том и только в том случае, если она удовлетворяет условию (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
2. Махмудов А. С. О коэффициентах Фурье непрерывных функций. Некоторые вопросы функционального анализа и его применений. Изд. АН Азерб. ССР, 1965.

А. С. Махмудов, Р. Р. Ахундов

Санки ортогонал системләр һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә санки ортогонал функцијалар системләринин бә'зи хас-сәләриндән бәһс едилмишдир.

Мә'лум олмушдур ки, мүү]ән синифдән олан ортонормал системләрин бир сыра хассәләри санки ортогонал функцијалар системләри үчүн дә доғрудур.

А. Г. МЕХТИЕВ

О ПОЛНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ В СЛУЧАЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В работе [1] (см. теорему 8.1, стр. 48) указано условие полной непрерывности оператора вложения пространства $H_p^{\mu}(\Omega)$ в пространство $H_p^{\nu}(\Omega)$, где Ω —ограниченная область для случая $p=2$. В настоящей статье нами обобщается этот результат на случай любого $p>1$ и доказывается теорема о полной непрерывности оператора вложения пространства $H_{m,p}^{\mu}(\Omega)$ в пространство $H_{n,p}^{\nu}(\Omega)$, где (Ω) совпадает со всем пространством R^n .

Будем пользоваться общепринятыми обозначениями. Переменные x и ξ будем рассматривать как двойственные относительно билинейной формы

$$\langle x, \xi \rangle = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n.$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ —набор целых чисел (мультииндекс), то $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Аналогично определяются ξ^{α} , D^{α} , ∂^{α} . φ —пространство Шварца, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций убывающих на бесконечности со своими производными быстрее любой отрицательной степени

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

φ' —совокупность „медленно“ растущих распределений.

Для функции $u \in \varphi$ через $Fu = \hat{u}(\xi)$ будем обозначать ее преобразование Фурье.

Полагаем, что функция $b(x)$ принадлежит к классу S_{σ}^p , если $0 < \sigma \leq 1$, и найдется такое p , что

$$|D^{\alpha} b(x)| < C_{\alpha} (1 + |x|)^{p - \sigma |\alpha|} \quad \text{для всех } \alpha.$$

Каждой функции $a(\xi) \in S_{\sigma}^p$ сопоставим псевдодифференциальный оператор (см. [5])

$$a(D)u = F^{-1} a(\xi) F u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{ix\xi} a(\xi) \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Из [1, 5] следует, что если $a(\xi) \in S_{\sigma}^p$ и $b(x) \in S_{\sigma}^p$, то оператор

$$R_N u = a(D) [b(x)u(x)] - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} b(x) a^{(\alpha)}(D) u, \quad (1)$$

где $a^{(a)}(\xi) = \partial^a a(\xi)$, при больших N будет не только сглаживать функцию u , но и увеличивать скорость убывания этой функции при $x \rightarrow \infty$, точнее, имеет место лемма (подробное доказательство см. в [2])

Лемма 1. Пусть $a(\xi) \in S_{a,1}^a$, $b(x) \in S_{a,1}^b$. Тогда для любого целого $k > 0$ найдется такое $N = N(k)$, что операторы

$$D^3 x^1 R_N x^0 D^e,$$

$$|\beta| = \kappa_1, |\gamma| = \kappa_2, |\delta| = \kappa_3, |\varepsilon| = \kappa_4, \kappa = \max \kappa_i,$$

имеют ограниченную L_2 -норму.

Прежде чем определить пространства $H_{m,p}^\mu$ и сформулировать теоремы, введем класс весовых функций.

Класс $W_{a,\beta}$. Обозначим через $W_{a,\beta}$ класс функций $\mu(\xi)$, обладающих следующими свойствами.

1. $\mu(\xi) \in W_{a,\beta}$, т. е. найдутся такие числа a_1, a_2, c_1, c_2 , что:

$$a) \quad c_1(1 + |\xi|)^{a_1} \leq \mu(\xi) \leq c_2(1 + |\xi|)^{a_2};$$

б) для всех мультииндексов α справедливы оценки

$$|\partial^\alpha \mu(\xi)| < c_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|} \mu(\xi).$$

II. $|\xi^\alpha \partial^\alpha \mu(\xi)| < c'_\alpha \mu(\xi)$ при $\beta \leq \alpha$.

Как нетрудно проверить, функции из $W_{a,\beta}$ образуют группу по умножению, т. е. если $m(x) \in W_{a,\beta}$, то $m^{-1}(x) \in W_{a,\beta}$, а если $n(x) \in W_{a,\beta}$, то $m(x)n(x) \in W_{a,\beta}$. Приведем некоторые примеры весовых функций:

$$a) \quad \mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^l;$$

$$б) \quad \mu(\xi) = \left(1 + \sum_{k=1}^n |\xi_k|^{2b_k}\right)^l, \text{ где } b_k \text{ — целые положительные числа.}$$

Пусть Γ — конечное множество мультииндексов. Рассмотрим полином от переменных ξ :

$$P(\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \xi^\gamma, \quad a_\gamma \neq 0.$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ выпуклую оболочку множества Γ .

Будем говорить, что полином $P(\xi)$ мультиквазиэллиптический, если:

$$1) \quad |P(\xi)| > \text{const} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\xi|^\gamma,$$

2) $\alpha \in \tilde{\Gamma}$, тогда проекция α лежит строго внутри $\tilde{\Gamma}$.

Пример в)

$$\mu(\xi) = 1 + P^2(\xi), \text{ где } P(\xi) \text{ — мультиквазиэллиптический полином.}$$

Определение. $u \in H_{m,p}^\mu$, если $u \in \varphi'$ и $m(x)\mu(D)u \in L_p$, где $m(x), \mu(\xi) \in W_{a,\beta}$. Норма в пространстве $H_{m,p}^\mu$ определяется следующим образом:

$$\|u\|_{m,\mu,p} = \|m(x)\mu(D)u\|_p.$$

Теорема 2. Пусть $\nu(\xi), \mu(\xi) \in W_{a,\beta}$, и пусть Ω — ограниченная область в R^n . Для того, чтобы пространство $\dot{H}_p^\mu(\Omega)$ было вложено в пространство $\dot{H}_p^\nu$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) < \text{const.}$$

Теорема 3. Пусть $\nu(\xi), \mu(\xi) \in W_{a,\beta}$.

Для того, чтобы оператор вложения пространства $\dot{H}_p^\mu(\Omega)$ в пространство $\dot{H}_p^\nu(\Omega)$ был вполне непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы при $\xi \rightarrow \infty$

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Доказательство. Достаточность. Условие (1) следует из теоремы 1 работы [9].

Необходимость. Пусть пространство $\dot{H}_p^\mu(\Omega)$ вложено в $\dot{H}_p^\nu(\Omega)$ вполне непрерывно, т. е. оператор вложения обязан переводить каждую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся (см. [1] стр. 49), тем не менее не выполняется условие (1), т. е.

$$a_\kappa = \nu(\xi_\kappa)\mu^{-1}(\xi_\kappa) > c > 0 \text{ при } \xi_\kappa \rightarrow \infty.$$

Положим $u_\kappa = \psi(x)\mu^{-1}(\xi_\kappa)e^{ix\xi_\kappa}$, где $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ — любая функция, у которой

$$\|\psi\|_p \neq 0.$$

Пусть сначала $\varphi(x)$ — функция из φ . Тогда

$$(u_\kappa, \mu(D)\varphi) = c(\tilde{u}_\kappa, \mu(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)) = cb_\kappa = c \int \tilde{u}_\kappa(\xi)\mu(\xi)\tilde{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Поскольку $\lim b_\kappa = 0$ (см. [1], стр. 49), т. е. $u_\kappa \rightarrow 0$ на элементах множества φ , плотного в $H_p^\nu(\Omega)$, и так как

$$\|u_\kappa\|_{\mu,p} \leq \text{const} \text{ (см. теорему 2), то } (u_\kappa, \mu(D)\varphi) \rightarrow 0$$

для произвольного $\varphi \in L_{p'}$, итак u_κ слабо сходится в $H_p^{\nu,\mu}$.

Далее, используя соотношение $\nu(\xi)\nu^{-1}(\xi_\kappa) > \rho^{-1}(\xi - \xi_\kappa)$ и применяя неравенство Хоусдорфа—Юнга (см. [8]), находим

$$\|u_\kappa\|_{\mu,p}^p = \int \left| F^{-1} \frac{\nu(\xi)}{\mu(\xi)} \psi(\xi - \xi_\kappa) \right|^p dx \geq$$

$$\geq \int \left| \frac{\nu(\xi)}{\mu(\xi_\kappa)} \psi(\xi - \xi_\kappa) \right|^p d\xi > a_\kappa^{p'} \int |\rho^{-1}(\xi - \xi_\kappa) \psi(\xi - \xi_\kappa)|^p d\xi > 0.$$

Необходимость условия (1) доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены неравенства

$$n(x)m^{-1}(x) < c_1 \text{ и } \nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) < c_2. \quad (2)$$

Для того, чтобы оператор вложения $H_{m,p}^\mu(R^n)$ в $H_{a,p}^\nu(R^n)$ был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы $n(x)m^{-1}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. (3)

Доказательство. Необходимость. Если $H_{m,p}^\mu(R^n)$ вкладывается в $H_{a,p}^\nu(R^n)$ вполне непрерывно, то отсюда следует полная непрерывность оператора вложения $\dot{H}_p^\mu(\Omega)$ в $\dot{H}_p^\nu(\Omega)$, тогда (см. теорему 3) выполнено второе из неравенств (3).

Пусть теперь $n(x)m^{-1}(x) > c > 0$. В силу условий (2) $c_1 < n(x)m^{-1}(x) < c_2$, тогда пространство $H_p^\mu(R^n)$ вложено в пространство $H_p^\nu(R^n)$ вполне непрерывно, что приводит к противоречию. Итак, условия (3) являются необходимыми.

Достаточность. Рассуждая аналогичным образом, так же как и в случае $p=2$, в работе [2] докажем достаточность условий (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Волевич Л. Р., Панейх Б. П. УМН, т. XX, № 1, 1965.
2. Волевич Л. Р., Мехтиев А. Г. Изв. вузов, Казань, 1967, № 10(65).
3. Волевич Л. Р. Тр. Московского матем. об-ва, т. 16, 1967.
4. Бабенко К. И. ДАН СССР, т. 62, 1948, № 2.
5. Kohn, Nirenberg L. An algebra of pseudodifferential operators. Commun. Pure and Appl. Math., V. XVIII, № 1—2, 1965, p. 269—305.

6. Hirshman J.J. Jr. Multiplier transformations, II, Duke Math. J, V. 28 № 1, 1961, p. 45—56.
 7. Хёрмандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига М., ИИЛ, 1962.
 8. Харди Г. Г. и др. Неравенства. М., ИЛ, 1948.
 9. Волевич Л. Р., Панеях В. П. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. матем. наук*, 1966, № 1.

А. Г. Мейдијев

Бә'зи функционал фәзаларда дахилетмә операторунун там кәсилмәзлији һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $H_{m,p}^k$ фәзаларында компакт дахилолма мәсәләләри арашдырылмышдыр. Ејни заманда, һәмин фәзалар үчүн гејри-мәһдуд областда ујғун мәсәләнин һәлл олунмасындан өтрү зәрури вә кафи шәртләр тапылмышдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1968, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-технических и математических наук, 1968, № 4

УДК 539.384/385

И. А. БАХТИЯРОВ, К. А. АЛИЕВ

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПРАВИЛЬНОЙ ТРЕХГРАННОЙ ПРИЗМЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВНУТРЕННЕМУ ДАВЛЕНИЮ

В настоящей работе исследовалось напряженное состояние в правильной трехгранной призме, подверженной внутреннему равномерно распределенному давлению P , поперечное сечение которой представляет собой двусвязную область, ограниченную снаружи правильным криволинейным треугольником L_2 с достаточной степенью точности аппроксимирующим правильный треугольник, а изнутри — окружностью L_1 радиуса R (рис. 1).

Решение рассматриваемой задачи в точной постановке, когда внешний контур является правильным прямолинейным треугольником, сопряжено с большими математическими трудностями. Чтобы обойти их, прямолинейный треугольник был заменен правильным криволинейным треугольником, внешность которого отображена на внешность единичной окружности ζ , расположенной в плоскости ζ , формулой [4]

$$z = A\zeta \left(1 + \frac{m}{\zeta^3} \right). \quad (1)$$

Здесь

$$m = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{5}{9}h,$$

где, h — высота правильного треугольника.

Кривизна в вершине треугольника равна $\frac{18}{h}$ или $\frac{8}{A}$.

Указанная задача рассматривается как плоская задача теории упругости, поэтому напряженное состояние в данной двусвязной области, согласно исследованиям Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили [1], сводится к нахождению функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, регулярных в области S и удовлетворяющим граничным условиям:

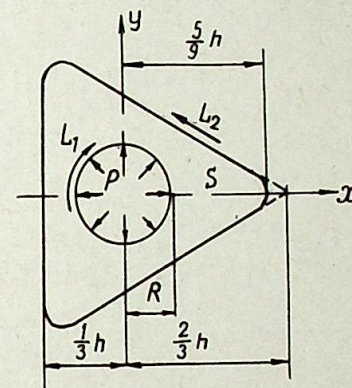


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= 0 \quad \text{на } L_1; \\ \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= -Pt + C \quad \text{на } L_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где C будем считать действительной постоянной, t -аффикс точки L_2 .

Следуя работам [2-4], выражение для регулярной в области функции $\varphi(z)$ будем искать в виде полинома:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^N \left[a_k \left(\frac{R}{z} \right)^k + b_k \left(\frac{z}{R} \right)^k \right]. \quad (4)$$

Коэффициенты a_k и b_k в разложениях принимаются вещественными, верхний предел N ряда выбирается в зависимости от желаемой точности. Выразив из граничного условия (3) функцию $\psi(t)$ через $\varphi(t)$ устанавливаем, что функция $\psi(z)$, определяемая формулой

$$\psi(z) = -\varphi\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z} \varphi'(z) - P \frac{R^2}{z} + C, \quad (5)$$

является регулярной в области S . Подставив функцию $\psi(t)$ из (5) условия (2), получим равенство на L_2 вида

$$\varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \varphi\left(\frac{R^2}{t}\right) - \frac{R^2}{t} \overline{\varphi'(t)} - \frac{PR^2}{t} + C = 0. \quad (6)$$

Подставляя (4) в условия (6) и при помощи (1) перейдя с t на τ с учетом разложений:

$$\begin{aligned} \left[\tau \left(1 + \frac{m}{\tau^3} \right) \right]^{-k} &= \sum_{j=k}^{\infty} m^{\frac{j-k}{3}} C_{\frac{j-k}{3}} \frac{1}{\tau^j}; \quad \left[\tau \left(1 + \frac{m}{\tau^3} \right) \right]^k = \sum_{j=-k}^{2k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}} \frac{1}{\tau^j} \\ \tau \left(1 + \frac{m}{\tau^3} \right) \left[\frac{1}{\tau} (1 + m\tau^3) \right]^{-(k+1)} &= \sum_{j=k+2}^{\infty} m^{\frac{j-k-2}{3}} C_{\frac{j-k-2}{3}} \tau^j + \\ &+ \sum_{j=k-1}^{\infty} m^{\frac{j-k+1}{3}} C_{\frac{j-k+1}{3}} \tau^j; \\ \tau \left(1 + \frac{m}{\tau^3} \right) \left[\frac{1}{\tau} (1 + m\tau^3) \right]^{k-1} &= \sum_{j=-k+2}^{2k-1} m^{\frac{j+k-2}{3}} C_{\frac{j+k-2}{3}} \tau^j + \\ &+ m \sum_{j=-(k+1)}^{2k-4} m^{\frac{j+k+1}{3}} C_{\frac{j+k+1}{3}} \tau^j; \\ \left[\frac{1}{\tau} (1 + m\tau^3) \right]^k &= \sum_{j=-k}^{2k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}} \tau^j; \quad \tau^k (1 + m\tau^3)^{-k} = \sum_{j=k}^{\infty} m^{\frac{j-k}{3}} C_{\frac{j-k}{3}} \tau^j; \\ \tau^{k+2} (1 + m\tau^3)^{-(k+2)} &= \sum_{j=k+2}^{\infty} m^{\frac{j-k-2}{3}} C_{\frac{j-k-2}{3}} \tau^j; \\ \frac{1}{\tau^{k-2}} (1 + m\tau^3)^{k-2} &= \sum_{j=-k+2}^{2k-4} m^{\frac{j+k-2}{3}} C_{\frac{j+k-2}{3}} \tau^j; \\ \tau (1 + m\tau^3)^{-1} &= \sum_{j=1}^{\infty} m^{\frac{j-1}{3}} C_{\frac{j-1}{3}} \tau^j = \sum_{j=1}^{\infty} (-m)^{\frac{j-1}{3}} \tau^j, \end{aligned}$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad C_n^m = (-1)^n C_{n+m-1}^n,$$

получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \lambda^k \sum_{j=k}^{\infty} m^{\frac{j-k}{3}} C_{\frac{j-k}{3}} \frac{1}{\tau^j} + \frac{b_k}{\lambda^k} \sum_{j=-k}^{2k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}} \frac{1}{\tau^j} - \right. \\ &- \kappa a_k \lambda^k \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} m^{\frac{j-k-2}{3}} C_{\frac{j-k-2}{3}} \tau^j + m \sum_{j=k-1}^{\infty} m^{\frac{j-k+1}{3}} C_{\frac{j-k+1}{3}} \tau^j \right) + \\ &+ \frac{\kappa b_k}{\lambda^k} \left(\sum_{j=-(k+1)}^{2k-1} m^{\frac{j+k-2}{3}} C_{\frac{j+k-2}{3}} \tau^j + m \sum_{j=-(k+1)}^{2k-4} m^{\frac{j+k+1}{3}} C_{\frac{j+k+1}{3}} \tau^j \right) - \\ &- \frac{a_k}{\lambda^k} \sum_{j=-k}^{2k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}} \tau^j - b_k \lambda^k \sum_{j=k}^{\infty} m^{\frac{j-k}{3}} C_{\frac{j-k}{3}} \tau^j + \\ &+ \kappa a_k \lambda^{k+2} \sum_{j=k+2}^{\infty} m^{\frac{j-k-2}{3}} C_{\frac{j-k-2}{3}} \tau^j - \frac{\kappa b_k}{\lambda^{k-2}} \sum_{j=-(k+2)}^{2k-4} m^{\frac{j+k-2}{3}} C_{\frac{j+k-2}{3}} \tau^j \Big] = \\ &= PR \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-m)^{\frac{j-1}{3}} \tau^j - C; \quad (7) \\ &\lambda = \frac{R}{A} < 1. \end{aligned}$$

Звездочка над знаком суммы означает, что индекс j принимает смежное значение через три интервала.

Отделим положительные и отрицательные степени τ , разобьем внутреннюю сумму второй двойной суммы на две, соответственно, с положительными и отрицательными степенями τ . После изменения порядка суммирования во всех двойных суммах условия (7) примут вид

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)} \frac{1}{\tau^j} + \sum_{j=1}^N B_j^{(2)} \tau^j + \sum_{j=0}^{2N} B_j^{(3)} \frac{1}{\tau^j} - \sum_{j=3}^{\infty} B_j^{(4)} \tau^j - \\ &- \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(5)} \tau^j + \sum_{j=0}^{2N-1} B_j^{(6)} \tau^j + \sum_{j=1}^{N-2} B_j^{(7)} \frac{1}{\tau^j} + \sum_{j=1}^{N+1} B_j^{(8)} \frac{1}{\tau^j} + \\ &+ \sum_{j=0}^{2N-4} B_j^{(9)} \tau^j - \sum_{j=1}^N B_j^{(10)} \frac{1}{\tau^j} - \sum_{j=0}^{2N} B_j^{(11)} \tau^j - \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(12)} \tau^j + \\ &+ \sum_{j=3}^{\infty} B_j^{(13)} \tau^j - \sum_{j=1}^{N-2} B_j^{(14)} \frac{1}{\tau^j} - \sum_{j=0}^{2N-4} B_j^{(15)} \tau^j - \\ &- b_1 \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-m)^{\frac{j-1}{3}} \tau^j = PR \lambda \sum_{j=1}^{\infty} (-m)^{\frac{j-1}{3}} \tau^j - C, \quad (8) \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_j^{(1)} &= \sum_{k=M_1(j)}^{D_1(j,N)} a_k \lambda^k m^{\frac{j-k}{3}} C_{\frac{j-k}{3}}; \quad B_j^{(2)} = \sum_{k=j}^{D_2(j,N)} \frac{b_k}{\lambda^k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}}; \\ B_j^{(3)} &= \sum_{k=\alpha+\frac{j+\alpha}{2}}^{D_3(j,N)} \frac{b_k}{\lambda^k} m^{\frac{j+k}{3}} C_{\frac{j+k}{3}}; \quad B_j^{(4)} = \sum_{k=M_4(j)}^{D_4(j,N)} \kappa a_k \lambda^k m^{\frac{j-k-2}{3}} C_{\frac{j-k-2}{3}}; \\ B_j^{(5)} &= \sum_{k=M_5(j)}^{D_5(j,N)} \kappa a_k \lambda^k m m^{\frac{j-k+1}{3}} C_{\frac{j-k+1}{3}}; \quad B_j^{(6)} = \sum_{k=M_6(j)}^{D_6(j,N)} \frac{\kappa b_k}{\lambda^k} m^{\frac{j+k-2}{3}} C_{\frac{j+k-2}{3}}; \end{aligned}$$

$$B_v^{(7)} = \sum_{\kappa=v+2}^{D_7(v,N)} \frac{\kappa b_\kappa}{\lambda^\kappa} m^{\frac{\kappa-2-v}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{\kappa-2-v}{3}}; B_v^{(8)} = \sum_{\kappa=v-1+3\varepsilon_1}^{D_8(v,N)} \frac{\kappa b_\kappa}{\lambda^\kappa} m m^{\frac{\kappa-v+1}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{\kappa-v+1}{3}};$$

$$B_v^{(9)} = \sum_{\kappa=M_1(v)}^{D_9(v,N)} \frac{\kappa m b_\kappa}{\lambda^\kappa} m^{\frac{v+\kappa+1}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{v+\kappa+1}{3}}; B_v^{(10)} = \sum_{\kappa=v}^{D_{10}(v,N)} \frac{a_\kappa}{\lambda^\kappa} m^{\frac{\kappa-v}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{\kappa-v}{3}};$$

$$B_v^{(11)} = \sum_{\kappa=\alpha+\frac{v+\alpha}{2}}^{D_{11}(v,N)} \frac{a_\kappa}{\lambda^\kappa} m^{\frac{v+\kappa}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{v+\kappa}{3}}; B_v^{(12)} = \sum_{\kappa=M(v)}^{D_{12}(v,N)} b_\kappa \lambda^\kappa m^{\frac{v-\kappa}{3}} C_{\kappa-1}^{\frac{v-\kappa}{3}};$$

$$B_v^{(13)} = \sum_{\kappa=M_1(v)}^{D_{13}(v,N)} \kappa b_\kappa \lambda^{\kappa+2} m^{\frac{v-\kappa-2}{3}} C_{-(\kappa+2)}^{\frac{v-\kappa-2}{3}}; B_v^{(14)} = \sum_{\kappa=v+2}^{D_{14}(v,N)} \frac{\kappa b_\kappa}{\lambda^{\kappa-2}} m^{\frac{\kappa-v-2}{3}} C_{\kappa-2}^{\frac{\kappa-v-2}{3}};$$

$$B_v^{(15)} = \sum_{\kappa=M_1(v)}^{D_{15}(v,N)} \frac{\kappa b_\kappa}{\lambda^{\kappa-2}} m^{\frac{v+\kappa-2}{3}} C_{\kappa-2}^{\frac{v+\kappa-2}{3}}.$$

Здесь для α принимаются такие значения из 0,1, чтобы $v+\alpha$ без остатка делилось на 2:

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } v=1, \\ 0 & \text{при } v>1; \end{cases}$$

$$D(v, N) = \begin{cases} v & \text{при } v \leq N, \\ v-3E\left(\frac{v+2-N}{3}\right) & \text{при } v > N; \end{cases}$$

$$D_3(v, N) = \begin{cases} v-2 & \text{при } v-2 \leq N, \\ v-2-3E\left(\frac{v-N}{3}\right) & \text{при } v-2 > N; \end{cases}$$

$$D_4(v, N) = \begin{cases} v+1 & \text{при } v+1 \leq N, \\ v+1-3E\left(\frac{v+3-N}{3}\right) & \text{при } v+1 > N; \end{cases}$$

$$M(v) = v-3E\left(\frac{v-1}{3}\right); M_1(v) = v-2-3E\left(\frac{v-3}{3}\right);$$

$$M_2(v) = v+1-3E\left(\frac{v}{3}\right); M_3(v) = \alpha + \frac{v+1+\alpha}{2};$$

$$M_4(v) = \alpha + \frac{v+\alpha}{2} + 2; D_1(v, N) = v+3E\left(\frac{N-v}{3}\right);$$

$$D_2(v, N) = 3E\left(\frac{N+v}{3}\right) - v; D_5(v, N) = 3E\left(\frac{N+v-2}{3}\right) - v+2;$$

$$D_6(v, N) = 3E\left(\frac{N-v-2}{3}\right) + v+2;$$

$$D_7(v, N) = 3E\left(\frac{N-v+1}{3}\right) + v-1;$$

$$D_8(v, N) = 3E\left(\frac{N+v+1}{3}\right) - v-1.$$

Здесь $E(x)$ — наибольшее целое число, содержащееся в x

$$\left(x = \frac{v+2-N}{3}, \frac{v-N}{3}, \dots\right).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ , в (8) получим:

$$B_0^{(3)} - B_0^{(5)} + B_0^{(6)} + B_0^{(9)} - B_0^{(11)} - B_0^{(15)} = -C;$$

$$B_v^{(1)} + \eta_v^{(1)} B_v^{(3)} + \eta_v^{(2)} B_v^{(7)} + \eta_v^{(3)} B_v^{(8)} - \eta_v^{(4)} B_v^{(10)} - \eta_v^{(2)} B_v^{(14)} = 0;$$

$$\eta_v^{(4)} B_v^{(2)} - \eta_v^{(5)} B_v^{(4)} - B_v^{(5)} + \eta_v^{(6)} B_v^{(6)} + \eta_v^{(7)} B_v^{(9)} - \eta_v^{(1)} B_v^{(11)} - B_v^{(12)} +$$

$$+ \eta_v^{(5)} B_v^{(13)} - \eta_v^{(7)} B_v^{(15)} - \eta_v^{(8)} b_{\lambda} (-m)^{\frac{v-1}{3}} = \eta_v^{(8)} (-m)^{\frac{v-1}{3}} PR\lambda, \quad (9)$$

где

$$\eta_v^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq 2N \\ 0 & \text{при } v > 2N \end{cases}, \quad \eta_v^{(5)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \geq 3 \\ 0 & \text{при } v = 1, 2, \end{cases}$$

$$\eta_v^{(2)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq N-2 \\ 0 & \text{при } v > N-2, \end{cases}, \quad \eta_v^{(6)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq 2N-1 \\ 0 & \text{при } v > 2N-1, \end{cases}$$

$$\eta_v^{(3)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq N+1 \\ 0 & \text{при } v > N+1, \end{cases}, \quad \eta_v^{(7)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq 2N-4 \\ 0 & \text{при } v > 2N-4, \end{cases}$$

$$\eta_v^{(4)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v \leq N \\ 0 & \text{при } v > N, \end{cases}, \quad \eta_v^{(8)} = \begin{cases} 1 & \text{при } v = 1, 4, 7, \dots \\ 0 & \text{при } v \neq 1, 4, 7, \dots \end{cases}$$

При разборе системы (9) получаем однородную систему относительно коэффициентов a_κ ($\kappa \neq 2, 5, 8, \dots$) и b_κ ($\kappa \neq 1, 4, 7, \dots$).

Таблица 1

K	6 уравнений		10 уравнений	
	a_κ/PR	b_κ/PR	a_κ/PR	b_κ/PR
1		0,160896		0,165302
2	0,017279		0,012606	
4		$-0,2339 \cdot 10^{-2}$		$-0,2717 \cdot 10^{-2}$
5	$0,1391 \cdot 10^{-3}$		$0,3331 \cdot 10^{-2}$	
7		$0,29008 \cdot 10^{-4}$		$0,9735 \cdot 10^{-4}$
8	$0,1925 \cdot 10^{-4}$		$-0,18083 \cdot 10^{-3}$	
10				$-0,32114 \cdot 10^{-5}$
11			$0,3175 \cdot 10^{-5}$	
13				$0,45043 \cdot 10^{-7}$
14			$0,7709 \cdot 10^{-8}$	

Согласно теории о единственности решения задач теории упругости известно, что такие коэффициенты должны быть равны нулю, поэтому запишем

$$a_\kappa (\kappa \neq 2, 5, 8, \dots) = b_\kappa (\kappa \neq 1, 4, 7, \dots) \doteq C = 0.$$

Окончательно для определения коэффициентов a_κ ($\kappa = 2, 5, 8, \dots$) и b_κ ($\kappa = 1, 4, 7, \dots$) имеем следующую бесконечную систему линейных неоднородных уравнений:

$$B_v^{(1)} + \eta_v^{(1)} B_v^{(3)} + \eta_v^{(2)} B_v^{(7)} + \eta_v^{(3)} B_v^{(8)} - \eta_v^{(4)} B_v^{(10)} - \eta_v^{(2)} B_v^{(14)} = 0,$$

здесь

$$v = 2, 5, 8, \dots;$$

$$\eta_v^{(4)} B_v^{(2)} - \eta_v^{(5)} B_v^{(4)} - B_v^{(5)} + \eta_v^{(6)} B_v^{(6)} + \eta_v^{(7)} B_v^{(9)} - \eta_v^{(11)} B_v^{(12)} - B_v^{(12)} + \\ + \eta_v^{(5)} B_v^{(13)} - \eta_v^{(7)} B_v^{(15)} - \eta_v^{(8)} b, \lambda (-m)^{\frac{\nu-1}{3}} = \eta_v^{(8)} (-m)^{\frac{\nu-1}{3}} R P \lambda, \quad (11)$$

где $\nu = 1, 4, 7, \dots$

Для числового примера из системы (11) при относительных размерах $\frac{3R}{h} = 0,5$ решены первые шесть и десять уравнений и определены неизвестные коэффициенты a_k ($k = 2, 5, 8, \dots$) и b_k ($k = 1, 4, 7, \dots$). Значения коэффициентов a_k и b_k приведены в табл. 1.

Таблица 2

Значения напряжений						
точки	полученные нами				по формулам Ляме	
	6 уравнений		10 уравнений		σ_{θ}/P	σ_r/P
	σ_{θ}/P	σ_r/P	σ_{θ}/P	σ_r/P		
$t = R$	1,46	-1,00	1,45	-1,0	1,67	-1,0
$t = 2 R$	0,30	+0,076	0,27	+0,053	0,67	0
$t = 3 R$	-0,19	+0,027	-1,14	+0,024	—	—
$t = \frac{10}{3} R$	-0,21	+0,029	-0,16	+0,222	—	—
$t = -R$	1,81	-1,0	1,73	-1,00	1,67	-1,0
$t = -1,5R$	1,10	-0,29	1,05	-0,22	0,92	-0,26
$= -2 R$	1,15	-0,14	1,12	+0,05	0,67	0

Таким образом, регулярная функция $\varphi(z)$ принимает вид:

$$\varphi(z) = \sum_{k=2}^N \left[a_k \left(\frac{R}{z} \right)^k + b_{k-1} \left(\frac{z}{R} \right)^{k-1} \right], \quad (12)$$

а вместо (5) окончательно будем иметь

$$\psi(z) = \sum_{k=2}^N \left\{ a_k \left[\kappa \left(\frac{R}{z} \right)^{\kappa+2} - \left(\frac{z}{R} \right)^{\kappa} - \right. \right. \\ \left. \left. - b_{k-1} \left[\left(\frac{R}{z} \right)^{\kappa-1} + (\kappa-1) \left(\frac{z}{R} \right)^{\kappa-3} \right] \right] - \frac{PR^2}{z} \right\}. \quad (13)$$

Величина, показывающая точность, с которой полученное приближенное решение удовлетворяет граничному условию, определяется формулой

$$\Delta = \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}. \quad (4)$$

Эта величина в точке $t_1 = \frac{5}{9}h$ для шести и десяти уравнений имеет, соответственно, значения $\Delta = 0,13$ и $\Delta = 0,08$ в точке $t_2 = -\frac{1}{3}h$ $\Delta = -0,04$.

$\Delta = 0,011$ вместо нулевого значения. Как видно, с увеличением числа уравнений точность решения повышается.

Далее, по известным формулам [1] вычислены значения напряжений в характерных точках сечений и построена эпюра (рис. 2). Значения напряжений приведены в табл. 2. Напряжения, вычисленные по формулам Ляме для сечения, представляющего изнутри окружность с радиусом R , снаружи окружность, вписанную в правильный треугольник, приведены в табл. 2, из которой видно, что для рассматриваемой задачи значения напряжений, вычисленные по формулам Ляме, дают значительную погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
2. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. XXVII, 1940, № 9.
3. Амензаде Ю. А. Изд-во АН СССР, механика и машиностроение, 1963, № 5.
4. Мамедова С. О. Тр. АПИ им. Ленина, т. XVI, 1961.
5. Найман М. И. Расчеты на прочность, вып. 3, 1958.

И. А. Бәхтијаров, К. Ә. Әлијев

Дүзкүн үчбучаглы призманын дахили тәзјигиндән кәркинлик вәзијјәтинә даир

ХҮЛАСӘ

Бу тәдгигатда енинә кәсији дахилдән чеврә вә харичдән күнчләр-дә дәјирмиләшмиш дүзкүн үчбучагла һудудланан призманын дахили мүнтәзәм тәзјигдән кәркинлик вәзијјәти өрәнилмишдир.

Мәсәләнин һәлли бахылан икирабитәли областда регулјар олан, мүәјјән сәрһәд шәртләрини өдәјән $\varphi(z)$ вә $\psi(z)$ комплекс дәјишәнли функцијаларын тапылмасына кәтирилмишдир. $\varphi(z)$ функцијасы, әмсаллары мәчһул олан сыра шәклиндә ахтарылмышдыр.

$\varphi(z)$ функцијасы васитәсилә тапылан $\psi(z)$ функцијасы чеврә үзәриндәки сәрһәд шәртинә әсасән тәјин едилмишдир. Сыра шәклиндә ахтарылан $\varphi(z)$ функцијасынын мәчһул әмсалларыны тапмағ үчүн сонсуз хәтти чәбри тәнликләр системи гурулмушдур. Бу тәнликләр системиндән кәсијин мүәјјән нисби өлчүсү үчүн мәсәләнин һәллиниң дәгиглијини кафи дәрәчәдә тәмин едән биринчи 6 вә 10-чу тәнликләр һәлл едилмиш вә кәсијин характерик нөгтәләриндә кәркинликләр тәјин олуңмушдур.

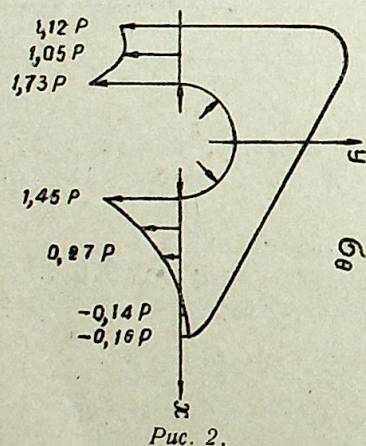


Рис. 2.

УДК 539.3

Ш. М. МУТАЛЛИМОВ

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПРОГИБА ГИБКОЙ МЕМБРАНЫ

Задача об ударе конусом по гибкой мембране рассматривалась в [1], а о поперечном ударе тупым телом по гибкой пластине в работе [2], автором которой получена приближенная аналитическая формула для деформации. При этом условия на волне сильного разрыва выполнялись приближенно.

В данной статье рассматривается задача о поперечном ударе по гибкой мембране телом вращения (в частности параболоидом) и получено более точное решение. Как и в работе [2], предполагалось, что скорость волны сильного разрыва b превосходит скорость звука в материале, т. е. сначала возникает только меридиональное движение, а затем радиальное.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на тело вращения, симметричное относительно оси OY , налетает бесконечно гибкая мембрана с постоянной скоростью V_0 (рис. 1).

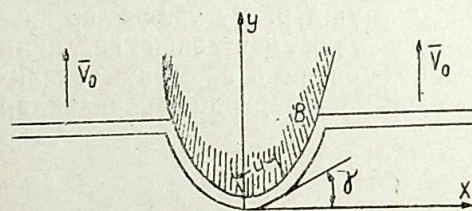


Рис. 1.

$$\epsilon_2 = \frac{\partial u}{\partial r} - 1,$$

$$\epsilon_0 = \frac{x(u)}{r} - 1,$$

где r — Лагранжева координата частицы. Меридиональное и кольцевое напряжения определяются по формулам

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\sigma^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r),$$

здесь ν , E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга, соответственно. Уравнения движения в области прилегания будут [1]

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x(u)}{r^2} \cos \gamma - \frac{(1+\nu)(1-\cos \gamma)}{r}, \quad (1)$$

где $a_0^2 = E/\rho_0(1-\nu^2)$; ρ_0 — начальная плотность мембраны. Запишем условия на волне сильного разрыва:

$$b(1+\epsilon_r) = \frac{b}{\cos \gamma} - \frac{\partial u}{\partial t};$$

$$\rho_0 b \left(\frac{\partial u}{\partial t} - V_0 \sin \gamma \right) = -\sigma_r. \quad (2)$$

В окрестности точки B (рис. 1) имеем геометрическое соотношение

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{V_0}{b}. \quad (3)$$

Решая систему уравнений (2) и учитывая (3), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{V_0}{(b^2 - a_0^2) \sin \gamma} \cdot [b^2 \sin^2 \gamma - a_0^2 (1 - \cos \gamma)];$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{b^2 \cos \gamma - a_0^2}{b^2 - a_0^2};$$

$$u = \int_0^r \frac{dr}{\cos \gamma}.$$

В случае параболоида, образованного вращением параболы $y = qx^2$, эти условия принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{V_0}{V_0 - 4a_0^2 qt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + 4V_0 qt}} - \frac{4qa_0^2 t}{V_0 - 4ga_0^2 t};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2V_0^2 \sqrt{V_0 qt}}{(V_0 - 4ga_0^2 t) \sqrt{1 + 4V_0 qt}} - \frac{\sqrt{1 + 4V_0 qt}}{V_0 - 4qa_0^2 t} \cdot 2a_0^2 \sqrt{V_0 qt} +$$

$$+ \frac{2a_0^2 \sqrt{V_0 qt}}{V_0 - 4qa_0^2 t};$$

$$u = \int_0^r \frac{dr}{\cos \gamma}.$$

Таким образом, определение движения в области прилегания сводится к решению уравнения (1) с условиями (4).

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МАЛОГО ВРЕМЕНИ СОУДАРЕНИЯ

Картина движения в плоскости (r, t) показана на рис. 2. Уравнение линии OB_1 , изображающей волну сильного разрыва, очевидно, имеет вид

$$r = \sqrt{\frac{V_0 t}{q}}. \quad (5)$$

Скорость волны сильного разрыва b будет

$$b(t) = \frac{\sqrt{V_0}}{2\sqrt{qt}}, \quad \text{где } q \ll 1.$$

Из последнего видно, что $b(t)$ со временем убывает. Выражение (5) показывает, что изображение волны сильного разрыва на плоскости (r, t) имеет вид параболы.

Решим задачу Коши в области OB_1 для уравнения (1) с условиями (4) на OB_1 . Для малого времени соударения и $q \ll 1$, приняв $x(u) \approx u$, $\cos \gamma \approx 1$, приводим (1) к линейному уравнению;

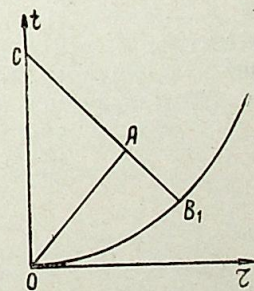


Рис. 2.

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \quad (6)$$

Удобно ввести новые переменные
 $r + a_0 t = \xi, \quad r - a_0 t = \eta,$

тогда уравнение (6) примет вид.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{u}{(\xi + \eta)^2} = 0. \quad (7)$$

Картина движения в плоскости (ξ, η) представлена на рис. 3. Область OB_1A в плоскости (r, t) соответствует области O_1NK в плоскости (ξ, η) .

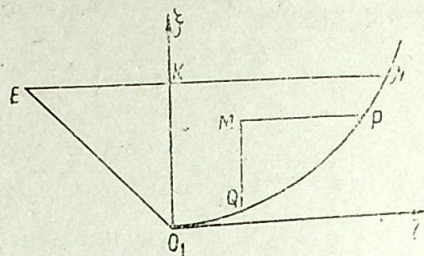


Рис. 3.

Уравнение линии сильного разрыва (5) и условия (4) в новых переменных имеют вид:

$$\eta = \xi - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi^2; \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2q^2 \left(\xi^2 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi^3 \right) - \frac{16q^4 a_0^4}{V_0^4} \left(\xi^2 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi^3 \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2V_0 q}{a_0} \xi \left(1 - \frac{a_0 q}{V_0} \xi \right) + \frac{4q^3}{a_0 V_0} (a_0^2 - V_0^2) \cdot \xi^3 \cdot \left(1 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi \right) \left(1 - \frac{a_0 q}{V_0} \xi \right) \right\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2q^2 \left(\xi^2 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi^3 \right) - \frac{16q^4 a_0^4}{V_0^4} \left(\xi^2 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi^3 \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{2V_0 q}{a_0} \xi \left(1 - \frac{a_0 q}{V_0} \xi \right) - \frac{4q^3}{a_0 V_0} (a_0^2 - V_0^2) \cdot \xi^3 \cdot \left(1 - \frac{2a_0 q}{V_0} \xi \right) \left(1 - \frac{a_0 q}{V_0} \xi \right) \right\}; \quad (9)$$

$$u = \xi - \frac{a_0 q}{V_0} \xi^2.$$

Формулы (8)–(9) получены разложением в ряд по степеням ξ . Займемся решением задачи Коши для уравнения (7) с условиями (9).

Воспользуемся формулой Римана:

$$(u)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} - \frac{1}{2} \int_P^Q \left[uv\xi - u\xi v - \frac{uv}{\xi + \eta} \right] d\xi - \\ - \left[uv\eta - v\eta u - \frac{uv}{\xi + \eta} \right] d\eta, \quad (10)$$

где функция $v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ называется функцией Римана, которая для уравнения (7)

$$v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = (\xi + \eta)^{\frac{1}{2}} \cdot (\xi_0 + \eta_0)^{-\frac{1}{2}} \cdot F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \psi\right). \quad (11)$$

Здесь

$$\psi = -\frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\xi_0 + \eta_0)(\xi + \eta)}, \quad F - \text{гипергеометрический ряд.}$$

Подставляя (9), (11) в формулу (10), учитывая (8) и полагая, что точка $M(\xi_0, \eta_0)$ (рис. 3) попадает на линию O_1K , получим

$$u = 0,508238 \xi + 0,523180 \frac{V_0 q}{a_0} \xi^2 + 0,058102 \frac{a_0 q}{V_0} \xi^2. \quad (12)$$

Как и в работе [2], первый коэффициент в (12) можно взять равным 0,5, тогда получим

$$u = \frac{1}{2} \xi + n_1 \frac{V_0 q}{a_0} \xi^2 + n_2 \frac{a_0 q}{V_0} \xi^2, \quad (13)$$

где $n_1 = 0,523180, n_2 = 0,058102$.

Определение движения в области O_1KE сводится к решению смешанной задачи.

Решим уравнение (7) при условиях: на линии O_1E $u = 0$; на линии O_1K u определяется формулой (13); решением смешанной задачи будет

$$u = \frac{1}{2} \xi + n_1 \frac{V_0 q}{a_0} \xi^2 + n_2 \frac{a_0 q}{V_0} \xi^2 + \frac{1}{2} \eta - n_1 \frac{V_0 q}{a_0} \eta^2 - n_2 \frac{a_0 q}{V_0} \eta^2.$$

Если прийти к старым переменным, то получим

$$u = r + 4n_1 V_0 q t \cdot r + 4n_2 \frac{a_0^2 q}{V_0} t \cdot r.$$

Зная функцию u , легко определяем деформацию около места удара:

$$\varepsilon(0, t) = 4n_1 V_0 t q + 4n_2 \frac{a_0^2 q}{V_0} t. \quad (14)$$

Существенным результатом является то, что нет прямой пропорциональности между деформацией и скоростью удара V_0 .

Как видно из выражения (14), деформация прямо пропорциональна кривизне параболоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А., Демянов Ю. А. Прочность при интенсивных и кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
2. Бектурсунов У. О поперечном ударе по гибкой поверхности. Сб. докладов на Всесоюзном симпозиуме по распространению упруго-пластических волн в сплошных средах. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.

Ш. М. Мүтәллимов

Эластик мембранын эжилмәси һагында динамик мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Эластик мембранын конус илә зәрбә мәсәләләринә бир сыра мәгәләләр һәср олуңмушдур. Тәдгигатда эластик мембрана күт чисимлә зәрбә мәсәләсинә бахылмыш вә деформасија үчүн тәғриби ифадә алынмышдыр.

Мүәјјән едилмишдир ки, деформасија илә вурулан чисмин (параболоидин) сүр'әти арасында дүз мүтәнасиблик јохдур.

УДК 539. 384/385

Р. С. МИНАСЯН, И. И. МУСТАФАЕВА

К ВОПРОСУ ЧИСТОГО КОСОГО ИЗГИБА ОДНОРОДНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА

В статье А. Пожалостина и П. Риза [2], а также в статьях Р. Минасяна [4, 5] дано решение задачи косоугольного изгиба парой сил и силой для однородного и составного призматического бруса при квадратических и физических зависимостях. Однако, как известно, так называемые новые материалы (полимеры), нашедшие широкое применение в практике, в большинстве случаев вплоть до разрушения, сохраняют линейную зависимость между компонентами напряжений и деформаций. С другой стороны, встречаются конструктивные элементы сравнительно небольшого сечения, допускающие большие перемещения при напряжениях, не превосходящих предела пропорциональности.

Задачи, как первого, так и второго вида относятся к нелинейным геометрически и линейным физически. При такой постановке в ряде статей Р. Минасяна, М. Мехтиева и Г. Погосяна были рассмотрены задачи изгиба, кручения и ряд задач взаимовлияния различных деформаций. В настоящей статье рассматривается задача чистого косоугольного изгиба однородного призматического бруса нелинейная геометрически и линейная физически.

1. Положим, имеем однородный изотропный брус, ограниченный цилиндрической (призматической) боковой поверхностью и основаниями, нормальными к боковой поверхности. Как принято, расположим брус горизонтально. Поместим начало координат в центре тяжести левого (закрепленного) основания, оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по главным осям инерции указанного основания, а ось $O\xi$ — слева направо по оси бруса. Предположим, что объемные силы отсутствуют, боковая поверхность свободна от внешних напряжений, а усилия, действующие на правое основание, эквиваленты векторному моменту $\bar{M}$ с составляющими M_ξ и M_η по соответствующим осям.

Полагаем смещения такими, что их компоненты деформаций определяются, включая квадратичные члены; при этом компоненты напряжений не превосходят предела пропорциональности, иначе говоря, рассматриваемая задача геометрически квадратичная, физически линейная. Напряжения относим к деформированному состоянию. λ , μ , E , σ — упругие постоянные материала бруса.

Обозначим координаты точки до и после деформации, соответственно, через ξ , η , ζ и x , y , z . Тогда:

$$x = \xi + u, \quad y = \eta + v, \quad z = \zeta + w, \quad (1)$$

где u , v , w — компоненты смещения по осям ξ , η , ζ . Искомые компоненты напряжений τ_{11} , τ_{22} , ..., τ_{23} должны удовлетворять однородным уравнениям равновесия, отнесенным к деформированному состоянию, граничным условиям на боковой поверхности после деформации и соответствующим условиям совместности. На свободном основании усилия должны приводиться к заданной паре сил.

Следуя Н. Зволинскому, П. Ризу, А. Рухадзе и др., задачу решаем методом введения малого параметра. Примем смещения в следующем виде:

$$u = \frac{1}{2} \beta_1 [\zeta^2 + \sigma (\zeta^2 - \eta^2)] + \beta_2 \sigma \xi \eta + \beta_1^2 u' + \beta_2^2 u'' + \beta_1 \beta_2 u_1; \\ v = \beta_1 \sigma \xi \eta + \frac{1}{2} \beta_2 [\zeta^2 + \sigma (\eta^2 - \xi^2)] + \beta_2^2 v' + \beta_2^2 v'' + \beta_1 \beta_2 v_1; \quad (2)$$

$$w = -(\beta_1 \zeta + \beta_2 \eta) \zeta + \beta_1^2 w' + \beta_2^2 w'' + \beta_1 \beta_2 w_1,$$

где

$$\beta_1 = -\frac{M_\eta}{I_\eta}, \quad \beta_2 = \frac{M_\xi}{I_\xi};$$

u' , v' , w' и u'' , v'' , w'' — компоненты смещений, соответствующие чистому изгибу, соответственно, в плоскостях $\xi O\zeta$ и $\eta O\zeta$; u_1 , v_1 , w_1 — неизвестные смещения; I_ξ , I_η — осевые моменты инерций площади S поперечного сечения бруса.

В соответствии с поставленной задачей во всех последующих вычислениях будем сохранять члены с коэффициентами β_1 , β_2 и $\beta_1 \beta_2$. Воспользовавшись формулами перехода от координат x , y , z к координатам ξ , η , ζ , при вычислении компонентов деформаций [2], соответствующих смещениям (2) с точностью до квадратичных членов, по формулам закона Гука вычисляем компоненты напряжений, которые представляются в виде:

$$\tau_{11} = \beta_1 \beta_2 (\lambda^* \xi \eta + \tau'_{11}); \\ \tau_{22} = \beta_1 \beta_2 (\lambda^* \xi \eta + \tau'_{22}); \\ \tau_{33} = -E (\beta_1 \xi + \beta_2 \eta) + \beta_1 \beta_2 (2\lambda^* \sigma - 3E) \xi \eta + \beta_1 \beta_2 \tau'_{33}; \quad (3) \\ \tau_{13} = \beta_1 \beta_2 (-\mu \eta \zeta + \tau'_{13}); \\ \tau_{23} = \beta_1 \beta_2 (-\mu \xi \zeta + \tau'_{23}),$$

где

$$\lambda^* = -\lambda(3 + 4\sigma),$$

τ'_{11} , τ'_{22} , ... — напряжения, соответствующие смещениям u_1 , v_1 , w_1 .

Уравнения равновесия, отнесенные к деформированному состоянию, но выраженные через ξ , η , ζ , получены в виде:

$$\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial \xi} + (\lambda^* - \mu) \eta = 0; \\ \frac{\partial \tau'_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial \zeta} + (\lambda^* - \mu) \xi = 0; \quad (4) \\ \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau'_{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{33}}{\partial \zeta} = 0.$$

Нетрудно составить условия совместности, соответствующие уравнениям (4). Если выразить направляющие косинусы нормами к деформированной боковой поверхности через направляющие косинусы той

* Определены в работе Р. Минасяна, М. Мехтиева, Г. Погосяна (находится в печати).

же нормали к недеформированной боковой поверхности $-\cos \alpha, \cos \beta$ [2], воспользовавшись формулами (3), граничные условия получим в виде:

$$\begin{aligned} x_n' + \lambda^* \xi \eta \cos \alpha + \mu \zeta^2 \cos \beta &= 0; \\ y_n' + \beta \zeta^2 \cos \alpha + \lambda^* \xi \eta \cos \beta &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

$$z_n' + \mu (1 + 2\sigma) (\xi \cos \frac{\Lambda}{n} \eta + \eta \cos \frac{\Lambda}{n} \xi) \zeta = 0,$$

где

$$x_n = \tau_{11} \cos + \tau_{12} \cos \beta \dots$$

Зададимся выражениями искомых напряжений $\tau_{11}, \tau_{22}, \dots$ в виде:

$$\tau_{11} = (E - \lambda^*) \xi \eta + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \mu c \varphi;$$

$$\tau_{22} = (E - \lambda^*) \xi \eta + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \mu c \varphi;$$

$$\tau_{33} = -2\lambda^* \xi \eta + \mu \sigma \Delta \Phi - 2\mu c \varphi + E(\alpha^* + \beta \xi^* + \beta^{**} \eta);$$

$$\tau_{12} = -\mu \zeta^2 - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \mu c (\xi^2 - \eta^2);$$

$$\tau_{13} = -\mu (1 + 2\sigma) \eta \zeta - \eta c \zeta (\varphi_{\xi} - \eta);$$

$$\tau_{23} = -\mu (1 + 2\sigma) \xi \zeta - \mu c \zeta (\varphi_{\xi} + \eta),$$

где

φ — функция кручения.

Система напряжений (6) удовлетворяет уравнениям равновесия (4). Если принять в области поперечного сечения S бруса $\Delta \Delta \Phi = 0$, то будут удовлетворены также и условия совместности.

Непосредственной подстановкой напряжений (6) в условия (5) убеждаемся, что третье граничное условие удовлетворяется, а из первого и второго получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \int_S \left\{ [2(1 + \sigma) \xi \eta + c \varphi] \cos \beta + \frac{c}{2} (\xi^2 - \eta^2) \cos \alpha \right\} dS,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = - \int_S \left\{ [2(1 + \sigma) \xi \eta + c \varphi] \cos \sigma + \frac{c}{2} (\xi^2 - \eta^2) \cos \beta \right\} dS,$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ однозначны при обходе контура L поперечного сечения

бруса, а сама функция Φ будет однозначна при обходе того же контура, если принять

$$c = 2(1 + \sigma) I_p^{-1} (I_{\eta} - I_{\xi}),$$

где I_p — полярный момент инерции поперечного сечения бруса.

На деформированном свободном основании усилия приводятся к, парам сил M_{ξ} и M_{η} при

$$\alpha^* = - \frac{1}{ES} \iint [\mu \sigma \Delta \Phi - 2\mu c \varphi] d\xi d\eta,$$

$$\beta^* = - \frac{\iint [E(3 + 5\sigma) \xi^2 \eta + \mu(1 + \sigma)(\xi^2 - \eta^2) \eta \sigma - \beta \sigma \xi \Delta \Phi + 2\mu c \varphi \xi] d\xi d\eta}{EI_{\eta}},$$

$$\beta^{**} = \frac{\iint [E(3 + 5\sigma) \xi \eta^2 + \beta(1 + \sigma)(\eta^2 - \xi^2) \xi \sigma - \mu \sigma \eta \Delta \Phi + 2\mu c \varphi \eta] d\xi d\eta}{EI_{\xi}}.$$

2. Пример. Если воспользоваться функцией [1]

$$\zeta = \omega(z) = \frac{n}{2} \left(z + \frac{m^2}{z} \right), \quad \text{где}$$

$$z = x + iy, \quad n = a + b, \quad m^2 = \frac{a - b}{a + b},$$

отображающей внутренность эллипса с полуосями a и b и круговое кольцо с радиусами $\rho = 1, \rho_0 = m^2$, методом плоской задачи акад. Н. И. Мусхелишвили [1] для бруса эллиптического сечения получим

$$\begin{aligned} \Phi = \alpha \left\{ \frac{8}{n^3} (\xi^4 - \eta^4) - 6 \frac{m^2}{n} (\xi^2 + \eta^2) \right\} + \frac{c_1}{n} (\xi^2 - \eta^2) + \\ + c_3 \left[\frac{1}{n^3} (\xi^4 + \eta^4 - 6\xi^2 \eta^2) - \frac{2m^2}{n} (\xi^2 - \eta^2) \right], \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{n^3}{48} \left[(1 + \sigma) \frac{m^{12} - 5m^8 - 5m^4 - 1}{m^{12} - 3m^8 + 3m^4 - 1} + \frac{cm^2}{1 + m^4} \right],$$

$$c_1 = - \frac{n^3}{48} \left[(1 + \sigma)(1 - m^4)(3 + m^4) + m^2 c \frac{m^8 - 4m^4 - 1}{1 + m^4} \right] - (3 + m^8) \alpha_3,$$

$$c_3 = \frac{n^3}{48} \left[(1 + \sigma)(1 - m^4) m^2 + \frac{c}{2} \frac{m^8 - 4m^4 - 1}{1 + m^4} \right] - (3 - m^4) m^2 \alpha_3.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1949.
2. Пожалоостин А. И. и Риз П. М. „Прикл. матем. и мех“, т. VI, 1942.
3. Рухадзе А. К. Докт. дисс.
4. Минасян Р. С. Косой изгиб силой однородного призматического бруса. Сообщ. АН Груз. ССР. № 3, 1962.
5. Минасян Р. С. К теории косоугольного изгиба составного призматического бруса.

Р. С. Минасян, И. И. Мустафаева

Бирчинс призматик брусун халис чәп әжилмә мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бир учу бәркидилмиш, јан сәтһиндә һәчми вә сәтһи гүввәләр тә'сир етмәјән бирчинс призматик брусун кәркинлик вәзијәтинә бахылмышдыр. Брусун сәрбәст отурачағында верилмиш гүввәләр исә тә'сир мүстәвиси онун баш инерсија мүстәвиси илә үст-үстә дүшмәјән чүт гүввәјә кәтирилир.

Јердәјишмәләр елә кәтүрүлмүшдүр ки, онларын деформасија компонентләринин дәгиглији квадратик һәдләрлә тә'јин олуноур, кәркинликләр исә мүтәнасиблик һәддини ашмыр. Башга сөзлә, һәндәси квадратик, физики хәтти мәсәләјә бахылыр.

Мәсәлә кичик параметр дахил етмәк методу илә һәлл едилмиш вә брусун ен кәсик областында биһармоник функцијанын тә'јин едилмәсинә кәтирилмишдир.

УДК 5325. 531. 135

Г. Т. ГАСАНОВ, С. Е. АГАЕВА

ОБ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ТИКСОТРОПНОЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ СРЕДЫ

Некоторые из вязко-пластичных сред обладают значительной тиксотропностью, которую нужно учитывать наряду с реологическими свойствами [1]. Учет этого фактора, хотя усложняет и без того сложные дифференциальные уравнения движения вязко-пластичной среды, но благодаря этому в отдельных частных случаях можно построить точное решение нестационарных задач при движении этой среды.

В [2] показано, что решение нестационарных задач движения вязко-пластичной среды значительно упрощается, если перейти к постановке обратной задачи. Следуя [2], в данной статье рассматривается нестационарное движение вязко-пластичной тиксотропной среды между двумя параллельными пластинками и в круглой цилиндрической трубе. При этом задаются законы изменения размера ядра потока и реологических параметров во времени и определяется соответствующая скорость движения трубы или пластинок.

1. Рассмотрим прямолинейное нестационарное движение вязко-пластичной тиксотропной среды между двумя параллельными пластинками. Причем при $t < 0$ нижняя пластинка неподвижна, а верхняя — движется с постоянной скоростью, равной V , перепада давления нет и имеет место прямолинейное распределение скоростей. При $t < 0$ и $\Delta p \neq 0$ обе пластинки движутся с некоторыми скоростями. При этом имеет место ядро течения, примыкающее к нижней пластинке. Зададимся законами изменения размера ядра и реологических параметров тиксотропной вязко-пластичной среды во времени в виде

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= c_0 \sqrt{t}, \quad \frac{\Delta p}{l}(t) = a_0 \sqrt{t}, \quad \rho(t) = b_0 t, \\ \tau_0(t) &= c_0 t, \quad \eta(t) = d_0 t \end{aligned} \right\} \quad (1, 1)$$

и определим соответствующую скорость движения пластинок, где x_0 — размер ядра; Δp — потери давления по длине l ; ρ — плотность среды; τ_0 — предельное напряжение сдвига; η — структурная вязкость среды; a_0, b_0, c_0, d_0 — постоянные коэффициенты; a_0 — постоянная подлежащая определению.

Дифференциальное уравнение движения вязко-пластичной тиксотропной среды в рассматриваемом случае имеет вид

$$\rho(t) \frac{\partial v}{\partial t} = \eta(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\Delta p(t)}{l}. \quad (1, 2)$$

Начальные и граничные условия задаются в виде

$$v(x, 0) = \frac{V}{h} x, \quad x_0(0) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t) = \frac{\Delta p}{\rho l} - \frac{\tau_0}{\rho x_0}. \quad (1, 3)$$

При этих условиях решение сформулированной задачи автомодельно и имеет вид

$$v(x, t) = A_0 \sqrt{f} t_1(\xi), \quad (1, 4)$$

где

$$A_0 = 2 \left(\frac{a_0}{b_0} - \frac{c_0}{b_0 x_0} \right), \quad \xi = \frac{ax}{\sqrt{t}}, \quad a = \sqrt{\frac{b_0}{2d_0}}.$$

Определение функций $f_1(\xi)$ сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \xi \frac{df_1}{d\xi} - f_1 = - \frac{2a_0}{A_0 b_0} \quad (1, 5)$$

при условиях

$$f_1(\xi_0) = 1, \quad \frac{df_1}{d\xi}(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = c_0 \sqrt{\frac{b_0}{2d_0}}. \quad (1, 6)$$

Решение уравнения (1, 5) при условиях (1, 6) представим в виде

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{2a_0}{A_0 b_0} + \left(1 - \frac{2a_0}{A_0 b_0} \right) e^{\frac{\xi_0^2 - \xi^2}{2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi \left(1 - \frac{2b_0}{A_0 b_0} \right) e^{\frac{\xi_0^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1, 7)$$

Величина a_0 определяется из удовлетворения начального условия:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} a e^{\frac{\xi_0^2}{2}} \left(1 - \frac{2a_0}{A_0 b_0} \right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \right] = \frac{V}{h}. \quad (1, 8)$$

Скорость движения верхней пластинки определяется по формуле

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \frac{2a_0 V \sqrt{t}}{b_0} + A_0 V \sqrt{t} \left(1 - \frac{2a_0}{A_0 b_0} \right) e^{\frac{\xi_0^2 - a^2 h^2 / t}{2}} + \\ &+ A_0 a h \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2a_0}{A_0 b_0} \right) e^{\frac{\xi_0^2}{2}} \left[\Phi\left(\frac{ah}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{\xi_0}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1, 9)$$

Нижняя пластинка движется со скоростью ядра потока, определяемой по формуле

$$V_2(t) = 2 \left(\frac{a_0}{b_0} - \frac{c_0}{b_0 x_0} \right) \sqrt{t}. \quad (1, 10)$$

Следует отметить, что построенное решение (1, 7) справедливо для $0 < t < \frac{h^2}{a_0^2}$. При $t = \frac{h^2}{a_0^2}$ ядро течения охватывает всю область движения и скорость верхней пластинки равняется скорости нижней пластинки, определяемой по формуле (1, 10).

2. Рассмотрим прямолинейное нестационарное движение вязко-пластичной тиксотропной среды в круглой цилиндрической трубе. Примем, что при $t > 0$ $\Delta p \neq 0$ и имеем место прямолинейное распределение скоростей. При $t > 0$ $\Delta p \neq 0$ и движение переходит в нестационарное.

Зададимся законами изменения размера ядра и реологических параметров вязко-пластичной тиксотропной среды во времени в виде

$$\left. \begin{aligned} r_0(t) &= \beta \sqrt{t}, \quad \frac{\Delta p}{l} = a_1 \sqrt{t}, \quad \rho = b_1 t, \\ \tau_0(t) &= s_1 t, \quad \eta(t) = a_1 t \end{aligned} \right\} \quad (2, 1)$$

и определим соответствующую скорость движения трубы. Дифференциальное уравнение движения вязко-пластичной тиксотропной среды в этом случае имеет вид

$$\rho(t) \frac{\partial v}{\partial t} = \eta(t) \left(\frac{\partial^2 b}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial b}{\partial r} \right) - \frac{\tau_0(t)}{r} + \frac{\Delta p(t)}{l}. \quad (2, 2)$$

Начальные и граничные условия задаются в виде

$$\left. \begin{aligned} v(r, 0) &= \frac{\tau_0}{\eta} r, \quad r_0(0) = 0, \\ \frac{\partial b}{\partial r}(r_0, t) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(r_0, t) = \frac{\Delta p}{\rho l} - \frac{2\tau_0}{\rho r_0} \end{aligned} \right\} \quad (2, 3)$$

Решение сформулированной задачи также автомодельно и имеет вид

$$v(r, t) = B_0 \sqrt{t} f_2(\xi), \quad (2, 4)$$

где
$$B_0 = 2 \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{2c_1}{b_1 \beta} \right), \quad \xi = \frac{\sigma r}{\sqrt{t}}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{b_1}{2d_1}}.$$

Функция $f_2(\xi)$ определяется из решения дифференциального уравнения

$$\xi \frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + \left(1 + \frac{\xi^2}{2} \right) \frac{df_2}{d\xi} - \frac{\xi}{2} f_2 = \frac{c_1}{d_1 B_0 b} - \frac{a_1 \xi}{d_1 B_0 \sigma^2} \quad (2, 5)$$

при следующих условиях:

$$f_2(\xi_0) = 1, \quad \frac{df_2}{d\xi}(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = \sigma \beta. \quad (2, 6)$$

Решение уравнения (2, 5) имеет вид

$$\begin{aligned} f_2(\xi) &= \frac{c_1 \xi}{d_1 B_0 \sigma} + \frac{2a_1}{d_1 B_0 \sigma^2} + M e^{-\frac{\xi^2}{4}} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{\xi^2}{4}\right) + \\ &+ N \left[e^{-\frac{\xi^2}{2}} F\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{\xi^2}{4}\right) \ln \frac{\xi^2}{4} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-3/2+k}{k} \frac{2\xi^{2k}}{4^k \cdot k!} \sum_{v=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2v-0} + \frac{1}{1-v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Постоянные M и N определяются из условия (2, 6).

Так как решение (2, 7) громоздко, можно построить асимптотическое решение уравнения (2, 5). При сравнительно больших значениях ξ решение уравнения (2, 7) приближительно можно выразить так:

$$f_2(\xi) = \frac{2a_1}{d_1 \beta \sigma^2} + M \frac{\xi}{\sqrt{2}} + N \left[e^{-\frac{\xi^2}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \Phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \right]. \quad (2, 8)$$

Величина β определяется из решения уравнения

$$\frac{M}{\sqrt{2}} B_0 \sigma + N B_0 \sqrt{\pi} \sigma = \frac{\tau_0}{\eta}. \quad (2, 9)$$

При этом скорость движения трубы определяется по формуле

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{2a_1 \sqrt{t}}{d_1 \sigma^2} + \frac{M \sigma R B_0}{\sqrt{2}} + B_0 \sqrt{t} N \left[e^{-\frac{\sigma^2 R^2}{4t}} + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sigma R}{\sqrt{t}} \Phi\left(\frac{\sigma R}{2\sqrt{t}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2, 10)$$

Следует отметить, что решения (2, 7) и (2, 8), а также формула (2, 10) справедливы для $0 < t < \frac{R^2}{\beta^2}$. При $t = \frac{R^2}{\beta^2}$ решения (2, 7) и

(2, 8) теряют свою силу, а скорость движения трубы определяется по формуле скорости движения ядра: $V_2(t) = B_0 \sqrt{t}$. Таким образом, постановка обратной задачи позволяет построить автомодельное решение некоторых задач нестационарного движения вязко-пластичной тиксотропной среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринг Г., Уэлтмен Р. Тиксотропия. Физико-химия глинистых растворов. М., Гостоптехиздат, 1947.
2. Гасанов Г. Т., Мирзаджанзаде А. Х. Решение обратных задач нестационарного движения вязко-пластичной жидкости. ЖПМТФ, 1962, № 5.

Г. Т. Гасанов, С. J. Агајева

Тиксотроп өзлү-пластик мүнөт хәрәкәтинин бир автомодел мәсәләси һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә тиксотропик өзлү-пластик мүнөтин ики паралел лөвһә арасында вә борада гәрарлашмамыш хәрәкәтинә бахылмышдыр. Верилмиш (1, 1) шәртләри дахилиндә алт вә үст лөвһәләрин хәрәкәт сүр'әтләри вә еләчә дә (2, 1) шәртләри дахилиндә борунун хәрәкәт сүр'әти тапылмышдыр.

УДК. 539. 374

К. И. ГАХРАМАНОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСЕ

В работе исследовалась устойчивость пластического течения в полосе при различных видах нагружения: 1) бесконечная полоса подвергалась простому сдвигу под действием касательных напряжений, приложенных по краям (рис. 1); 2) бесконечная или конечная поло-

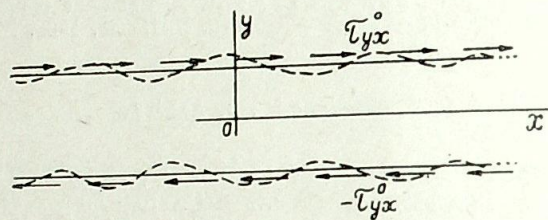


Рис. 1.

са подвергалась поперечному сжатию под действием равномерного давления и продольному растяжению (рис. 2). В обоих случаях предполагалось отсутствие прогибов в направлении, нормальном к плоскости полосы. Материал несжимаем.

Первая постановка задачи об устойчивости вязко-пластического течения полосы при растяжении принадлежит А. А. Ильюшину [1]. Далее эта задача была решена А. Ю. Ишлинским [2], в отличие от А. А. Ильюшина не в лагранжевых координатах, а в эйлеровых, и А. М. Жуковым [3] для упрочняющегося материала.

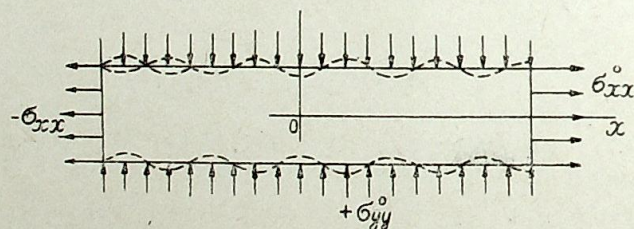


Рис. 2.

ПОЛОСА ПОДВЕРГНУТА ПРОСТОМУ СДВИГУ

В этом случае до момента возмущения $\sigma_{xx}^0 = \sigma^0 = \sigma_{yy}^0 = \sigma_{xx}^0 = e_{yy}^0 = 0$, $\tau_{yx}^0 \neq 0$, $e_{yx}^0 \neq 0$. Здесь с нуликом наверху обозначены величины до момента возмущения. Пусть уравнения „возмущенных“ краев полосы будут

$y = \zeta_1(x) + h$, $y = -h + \zeta_2(x)$,
где $2h$ — ширина полосы, $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$ — непрерывные функции в $-\infty < x < +\infty$, которые превращаются в нуль со своими производными в бесконечности. Связь между компонентами девиатора напряжений и деформаций берется в виде

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_i}{3e_1} e_{ij} \text{ при } i=j, S_{ij} = \frac{\sigma_i}{3e_1} e_{ij} \text{ при } i \neq j, i, j=1, 2, 3.$$

Из эксперимента на частое растяжение имеет соотношение $\sigma_i = \phi(e_i)$, где σ_i и e_i — интенсивности напряжений и деформаций, которые до момента возмущения имели следующие значения:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \tau_{yx}^0; \quad e_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e_{yx}^0. \quad (3)$$

Варируя (2), получаем

$$\delta\sigma_{xx} = \delta\sigma + 2B\delta e_{xx}, \quad \delta\sigma_{yy} = \delta\sigma + 2B\delta e_{yy}, \quad \delta\tau_{yx} = A\delta e_{yx}. \quad (4)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{3} \left[\frac{d\phi(e_1)}{de_1} \right]^0, \quad B = \frac{1}{3} \left[\frac{\phi(e_1)}{e_1} \right]^0.$$

Уравнения равновесия в вариациях следующие:

$$\frac{\partial \delta\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \delta\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \delta\sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Граничными условиями при $y = \pm h$ будет

$$\delta\sigma_{xx} \cos \nu x + (\tau_{yx}^0 + \zeta \tau_{xy}) \cos \nu y = \tau_{yx}^0, \quad (6)$$

$$(\tau_{yx}^0 + \delta\tau_{yx}) \cos \nu x + \delta\sigma_{yy} \cos \nu y = 0.$$

В силу малости возмущения на краях можно принять $\cos \nu x \approx -\frac{d\zeta_1(x)}{dx}$ при $y = +h$, $\cos \nu x \approx -\frac{d\zeta_2(x)}{dx}$ при $y = -h$ и $\cos \nu y \approx 1$. Поэтому, пренебрегая бесконечно малыми величинами второго порядка, из (6) получаем:

$$\begin{aligned} \delta\tau_{yx} &= 0 & \text{при } y = \pm h; \\ -\tau_{yx}^0 \frac{d\zeta_1(x)}{dx} + \delta\sigma_{yy} &= 0 & \text{при } y = +h; \\ -\tau_{yx}^0 \frac{d\zeta_2(x)}{dx} + \delta\sigma_{yy} &= 0 & \text{при } y = -h. \end{aligned} \quad (7)$$

По формулам Коши имеем

$$\delta e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \delta e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \delta e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8)$$

Подставляя (4) и (5) и в (7) с учетом (8) и присоединяя к полученным из (5) уравнениям условие несжимаемости, получаем уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \delta\sigma}{\partial x} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial \delta \sigma}{\partial y} + 2B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

и граничные условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \quad \text{при } y = \pm h; \\ -\tau_{yx}^0 \frac{d\zeta_1(x)}{dx} + \delta \sigma + 2B \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = +h; \\ -\tau_{yx}^0 \frac{d\zeta_2(x)}{dx} + \delta \sigma + 2B \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y = -h. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу условий, налагаемых на функции $\zeta_1(x)$ и $\zeta_2(x)$, и исходя из физических соображений, можно предположить, что $\delta \sigma$, u и v удовлетворяют этим же условиям. Следовательно, имеет право на применение преобразования Фурье:

$$\bar{\zeta}_1(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_1(x) e^{i\lambda x} dx; \quad \bar{\zeta}_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_2(x) e^{i\lambda x} dx; \quad (11)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{i\lambda x} dx; \quad \bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v e^{i\lambda x} dx;$$

$$\bar{\delta \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \sigma e^{i\lambda x} dx.$$

Умножим систему (9) на $\frac{e^{i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}}$ и проинтегрируем по частям от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} -i\lambda \bar{\delta \sigma} - 2B\lambda^2 \bar{u} + \bar{u}'' - i\lambda A \bar{v}' &= 0; \\ \bar{\delta \sigma}' + 2B \bar{v}'' - i\lambda A \bar{u}' - \lambda^2 A \bar{v} &= 0; \\ i\lambda \bar{u} &= \bar{v} \end{aligned} \quad (12)$$

Тем самым получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, так как входящие в эту систему функции зависят только от y . Аналогично из (10) получаем выражения для граничных условий:

$$\begin{aligned} \bar{u}' - i\lambda \bar{v} &= 0 \quad \text{при } y = \pm h; \\ i\lambda \tau_{yx}^0 \bar{\zeta}_1(\lambda) + \bar{\delta \sigma} + 2B \bar{v}' &= 0 \quad \text{при } y = +h; \\ i\lambda \tau_{yx}^0 \bar{\zeta}_2(\lambda) + \bar{\delta \sigma} + 2B \bar{v}' &= 0 \quad \text{при } y = -h. \end{aligned} \quad (13)$$

На границе должны удовлетворяться условия $\bar{\zeta}_1(\lambda) = \bar{v}$ при $y = +h$ и $\bar{\zeta}_2(\lambda) = \bar{v}$ при $y = -h$. Следовательно, (13) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{v}'' + \lambda^2 \bar{v} &= 0; \\ i\lambda \tau_{yx}^0 \bar{v} + \bar{\delta \sigma} + 2B \bar{v}' &= 0 \quad \text{при } y = \pm h. \end{aligned}$$

Подставив выражение $\bar{u}$ из последнего уравнения системы (12) в два первые и исключив $\bar{\delta \sigma}$, получаем одно уравнение четвертого порядка:

$$\bar{v}^{(IV)} - 2\lambda^2 \mu \bar{v}'' + \lambda^4 \bar{v} = 0 \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \bar{v}'' + \lambda^2 \bar{v} &= 0, \\ i\lambda^3 \frac{\tau_{yx}^0}{A} \bar{v} + \lambda^2 (1 + 2\mu) \bar{v}' - \bar{v}''' &= 0 \quad \text{при } y = \pm h, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\gamma = 2 \frac{B}{A} - 1. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (15) имеет корни $\chi_{1,2} = \pm i\gamma\lambda$, $\chi_{3,4} = \pm i\bar{\gamma}\lambda$, где $\gamma = \alpha + i\beta$,

$\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$, а $\alpha = \sqrt{\frac{1-\mu}{2}} = i\sqrt{\frac{B-A}{A}}$, $\beta = \frac{1+\mu}{2} = \sqrt{\frac{B}{A}}$. Поскольку за пределом упругости $B > A$, то $\pm i\gamma\lambda = \pm \lambda a = \pm \lambda \left(\sqrt{\frac{B-A}{A}} + \sqrt{\frac{B}{A}} \right)$, $\pm i\bar{\gamma}\lambda = \pm \lambda b = \pm \lambda \left(\sqrt{\frac{B-A}{A}} - \sqrt{\frac{B}{A}} \right)$. Поэтому общим решением (15) будет

$$\bar{v} = C_1(\lambda) e^{\lambda a y} + C_2(\lambda) e^{-\lambda a y} + C_3(\lambda) e^{\lambda b y} + C_4(\lambda) e^{-\lambda b y}. \quad (18)$$

В случае, когда $\zeta_1(x) = -\zeta_2(x)$, функция $\bar{v}(y)$ должна удовлетворять условию нечетности: $\bar{v}(y) = -\bar{v}(-y)$, откуда получается $C_1(\lambda) = -C_2(\lambda)$, $C_3(\lambda) = -C_4(\lambda)$. С учетом этих зависимостей соотношение (18) выразится следующим образом:

$$2\bar{v} = C_1(\lambda) \operatorname{sh} \lambda a y + C_3(\lambda) \operatorname{sh} \lambda b y. \quad (19)$$

Допустим $C_1(\lambda)$ и $C_3(\lambda)$ имеют вид:

$$C_1(\lambda) = D_{11}(\lambda) + iD_{12}(\lambda), \quad C_3(\lambda) = D_{21}(\lambda) + iD_{22}(\lambda), \quad (20)$$

где D_{pq} ($p, q = 1, 2$) — вещественные функции от λ .

Введем (19) в (16) с учетом (20), тогда будем иметь

$$\begin{aligned} D_{11}(\lambda) &= -D_{21}(\lambda) \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda b h}{\operatorname{sh} \lambda a h} = -n D_{21}(\lambda), \\ D_{12}(\lambda) &= -D_{22}(\lambda) \cdot \frac{1+b^2}{1+a^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda b h}{\operatorname{sh} \lambda a h} = -n D_{22}(\lambda) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\bar{v} = [D_{21}(\lambda) + iD_{22}(\lambda)] \operatorname{sh} \lambda b y - n \operatorname{sh} \lambda a y. \quad (21)$$

Теперь, вводя (21) в (17), получаем

$$\begin{aligned} i \frac{\tau_{yx}^0}{A} (\operatorname{sh} \lambda b h - n \operatorname{sh} \lambda a h) + b(1+2\mu - \\ - b^2) \operatorname{ch} \lambda b h - a(1+2\mu - a^2) \operatorname{ch} \lambda a h &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) удовлетворяется только в случае, когда $\operatorname{sh} \lambda b h \equiv \equiv n \operatorname{sh} \lambda a h$ и $b(1+2\mu - b^2) \operatorname{ch} \lambda b h - a(1+2\mu - a^2) \operatorname{ch} \lambda a h$, т. е. $\bar{v}(h) \equiv 0$, что равносильно $v(h) \equiv 0$. Это свидетельствует о том, что в данном случае нет потери устойчивости по ширине полосы, т. е. не образуется шейка. Аналогично при $\zeta_1(x) = \zeta_2(x)$ получаем тот же результат.

В случае, когда $\zeta_1(x) \neq \zeta_2(x)$, из (17) получаем

$$\begin{aligned} C_1(\lambda) &= 0,5 [C_4(\lambda)(n-m) - C_3(\lambda)(n+m)], \\ C_2(\lambda) &= 0,5 [C_3(\lambda)(n-m) + C_4(\lambda)(n+m)]. \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$n = \frac{1+b^2}{1+a^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda b h}{\operatorname{sh} \lambda a h}, \quad m = \frac{1+b^2}{1+a^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda b h}{\operatorname{ch} \lambda a h}.$$

Обозначим

Принимая во внимание (23) и (24), из (17) получим четыре линейных однородных алгебраических уравнения для определения

$$\begin{aligned} C_3(\lambda) + K_{11}(\lambda) + iK_{21}(\lambda), \quad C_4(\lambda) = K_{21}(\lambda) + iK_{22}(\lambda). \quad (24) \\ a^* K_{11}(\lambda) - b^* K_{12}(\lambda) + c K_{21}(\lambda) + d K_{22}(\lambda) = 0, \\ -b^* K_{11}(\lambda) - a^* K_{21}(\lambda) + d K_{11}(\lambda) - c K_{22}(\lambda) = 0, \\ c K_{11}(\lambda) - d K_{12}(\lambda) + a^* K_{21}(\lambda) + b^* K_{22}(\lambda) = 0, \\ -d K_{11}(\lambda) - c K_{12}(\lambda) + b^* K_{21}(\lambda) - a^* K_{22}(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Условие существования нетривиального решения есть

$$\begin{vmatrix} a^* & -b^* & c & d \\ -b^* & -a^* & d & -c \\ c & -d & a^* & b^* \\ -d & -c & b^* & -a^* \end{vmatrix} = (a^{**} + b^{**} - c^2 - d^2)^2 = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a^* &= \frac{\tau_{yx}^0}{A} (e^{\lambda_{bh}} - q_1 e^{\lambda_{ah}} + q_2 e^{-\lambda_{ah}}) = \frac{\tau_{yx}^0}{A} a_1, \\ b^* &= 2 \sqrt{\frac{B}{A}} (e^{\lambda_{bh}} + q_1 e^{\lambda_{ah}} + q_2 e^{-\lambda_{ah}}), \quad q_1 = \frac{n+m}{2}, \\ c &= \frac{\tau_{yx}^0}{A} (e^{-\lambda_{bh}} + q_2 e^{\lambda_{ah}} - q_1 e^{-\lambda_{ah}}) = \frac{\tau_{yx}^0}{A} c_1, \\ d &= 2 \sqrt{\frac{B}{A}} (e^{-\lambda_{bh}} + q_2 e^{\lambda_{ah}} + q_1 e^{-\lambda_{ah}}), \quad q_2 = \frac{n-m}{2}. \end{aligned}$$

Из (25) получается

$$\tau_{yx}^0 = -A \sqrt{\frac{d^2 - b^{**}}{a_1^2 - c_1^2}} = \pm i \sqrt{\frac{d^2 - b^{**}}{c_1^2 - a_1^2}}, \quad \text{так как } d^2 - b^{**} > 0, \text{ а } a_1^2 - c_1^2 < 0. \quad (26)$$

Поскольку τ_{yx}^0 есть действительная величина, полученный результат снова доказывает отсутствие потери устойчивости при простом сдвиге.

ПОЛОСА ПОДВЕРГНУТА ПОПЕРЕЧНОМУ СЖАТИЮ И ПРОДОЛЬНОМУ РАСТЯЖЕНИЮ

Полоса подвергается поперечному сжатию под действием равномерного давления, приложенного по длинным краям, а также продольному растяжению. В этом случае $\tau_{yx}^0 = \tau_{yx}^0 = 0$, $e_{yx}^0 = 0$ и система (9) отличается только тем, что A и B меняются местами, а граничные условия имеют вид;

$$-\sigma_{xx} \frac{d\zeta(x)}{dx} + B \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \quad \delta\sigma + 2B \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \pm h.$$

Здесь предполагается $\zeta_1(x) = -\zeta_2(x)$, поэтому u и v должны удовлетворять условиям симметричности:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x, -y) = -u(-x, y); \\ v(x, y) &= v(x, y) = -v(x, -y). \end{aligned} \quad (27)$$

Частное решение (9) для этого случая ищем в виде

$$u(x, y) = \sin \omega x \varphi_1(\omega y),$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \cos \omega x \varphi_2(\omega y), \\ \delta\sigma &= \omega \cos \omega x \varphi_3(\omega y). \end{aligned} \quad (28)$$

После подстановки (28) в (9) для этого случая система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} B\varphi_1''(\omega y) - 2A\varphi_2(\omega y) - B\varphi_2''(\omega y) - \varphi_3(\omega y) &= 0; \\ 2A\varphi_2''(\omega y) - B\varphi_2(\omega y) + B\varphi_1'(\omega y) + \varphi_3(\omega y) &= 0; \\ \varphi_1(\omega y) &= -\varphi_2(\omega y). \end{aligned} \quad (29)$$

Путем исключения $\varphi_1(\omega y)$ и $\varphi_3(\omega y)$ из уравнений (29) их можно свести к одному уравнению четвертого порядка, которое было получено А. М. Жуковым [3]:

$$\varphi_2^{(IV)}(\omega y) - 2\mu_1 \varphi_2''(\omega y) + \varphi_2(\omega y) = 0; \quad (30)$$

граничные условия для него запишутся следующим образом:

$$\varphi_2''(\omega y) - \frac{\sigma_{xx}^0 - B}{B} \varphi_2(\omega h) = 0; \quad (31)$$

$$\varphi_2''(\omega h) + (1 + 2\mu) \varphi_2'(\omega h) = 0, \quad (32)$$

где

$$\mu_1 = 2 \frac{A}{B} - 1.$$

Характеристическое уравнение для (30) имеет корни

$$\chi_{1,2} = \pm i\gamma_1, \quad \chi_{3,4} = \pm i\gamma_1,$$

где

$$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \bar{\gamma}_1 = \alpha_1 - i\beta, \quad \sigma_1 = \sqrt{\frac{1-\mu_1}{2}}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{1+\mu_1}{2}}.$$

Так что

$$\gamma_1 \bar{\gamma}_1 = 1, \quad \gamma_1^2 + \bar{\gamma}_1^2 = -2\mu.$$

В силу условий (27) общим решением (30) будет

$$\varphi_2(\omega y) = C \sin \gamma_1 \omega y + \bar{C} \sin \bar{\gamma}_1 \omega y. \quad (33)$$

Из (32) и (31) получаем

$$C = D \cos \bar{\gamma}_1 \omega h, \quad \bar{C} = D \sin \bar{\gamma}_1 \omega y.$$

Следовательно,

$$\varphi_2(\omega y) = D [\cos \bar{\gamma}_1 \omega h \sin \gamma_1 \omega y + \cos \gamma_1 \omega h \sin \bar{\gamma}_1 \omega y]. \quad (34)$$

Введя (34) в (32), имеем

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\sigma_{xx}^0 - B}{B} + \gamma_1^2 \right) \cos \bar{\gamma}_1 \omega h \sin \gamma_1 h = 0$$

или

$$\left(\frac{\sigma_{xx}^0 - B}{B} - \mu_1 \right) \sin 2\alpha_1 \omega h = 2\alpha_1 \beta_1 \operatorname{sh} 2\beta \omega h. \quad (35)$$

Это уравнение удовлетворяется при $\omega = 0$, что соответствует невозмущенному состоянию. Чтобы (35) удовлетворялось при $\omega \neq 0$, должно быть выполнено следующее условие:

$$b \sigma_{xx}^0 > 4A.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным А. М. Жуковым при решении аналогичной задачи, когда полоса подвергнута продольному растяжению, что свидетельствует от отсутствия влияния σ_{yy}^0 на поперечное сжатие, не будет осуществляться потери устойчивости постоянства ширины полосы, т. е. не будет образовываться шейки.

Следовательно, принципиально можно было решать задачу, когда полоса одновременно подвергнута простому сдвигу, поперечному (в плоскости полосы) сжатию и продольному растяжению. В этом случае мы пришли бы к тому же выводу: касательные напряжения и равномерное давление, приложенные по краям полосы, не влияют на критическую силу, вызывающую потерю устойчивости типа шейки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Уч зап МГУ, вып. 39, 1940.
2. Ишлинский А. Ю. ПММ, т. 7, вып. 2, 19.
3. Жуков А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении. Инж. Сб., т. 5, вып. 2, 1949.

К. И. Гәһрәманов

Золалда пластик ахманын дајаныглыгы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сонсуз золалда сүрүшмә, истәнилән золалда исә енинә мүнтәзәм сыхылма заманы пластик ахманын дајаныглыгындан, јә'ни бу көстәрилән һалларда бојунчуғун әмәлә кәлиб-кәлмәмәси мәсәләсиндән бәһс едилмишдир.

УДК 537. 15

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. МУСЛИМОВ

РАСЧЕТ ГРОЗОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ В ОБМОТКАХ ТРАНСФОРМАТОРОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЦВМ

Переходный процесс в обмотках трансформаторов описывается системой разностно-дифференциальных уравнений. Применение ЭЦВМ позволяет использовать эту систему, не прибегая при этом к ее замене дифференциальными уравнениями, как это делается при применении аналитических методов исследования.

В статье приведена методика расчета переходных процессов в трансформаторах на ЭЦВМ и анализируется влияние неучета отдельных элементов ячейки схемы замещения на картину развития перенапряжения в обмотке трансформатора. Показано, что при исследовании процессов на входе трансформатора можно пользоваться элементарной схемой замещения, состоящей из параллельно включенных общей индуктивности и входной емкости его обмотки. Рассматривается случай, когда воздействующая на трансформатор волна напряжения не вызывает срабатывания разрядника, установленного на системе шин тупиковой подстанции.

Запишем уравнение равновесия токов для n -го узла (рис. 1):

$$i_{n-1,n} + i_{kn-1,n} + i_{n,n+1} + i_{kn,n+1} + i_{cn} = 0,$$

где i — токи в индуктивностях,

i_k, i_c — токи в продольных и поперечных емкостях.

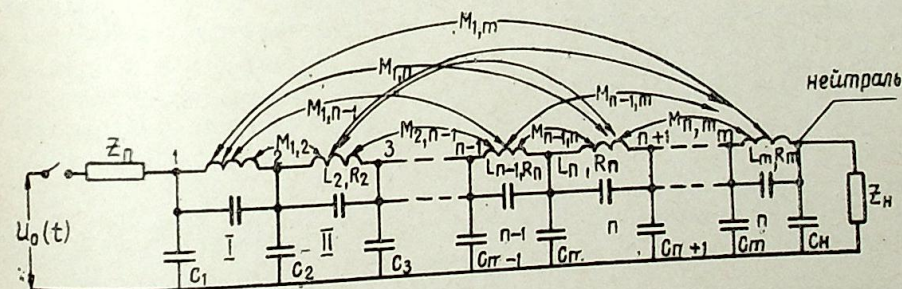


Рис. 1

Учитывая, что

$$i_{kn-1,n} = K_{n-1} p(u_{n-1} - u_n); \quad i_{kn,n-1} = K_n p(u_n - u_{n+1}); \quad i_{cn} = C_n p u_n,$$

получим

$$i_{n-1,n} - i_{n,n+1} = -K_{n-1} p u_{n-1} + (C_n + K_{n-1} + K_n) u_n - K_n p u_{n+1}. \quad (1)$$

Падение напряжения между соседними узловыми точками равно

$$u_n - u_{n-1} = (L_n p + R_n) i_{n,n+1} + \sum_{q=1}^{n-1} M_{n,q} p i_{q,q+1} + \sum_{n+1}^m M_{n,q} i_{q,q+1}. \quad (2)$$

Аналогично, составляя остальные дифференциальные уравнения, описывающие разность токов в индуктивностях соседних ячеек и падения напряжения на ячейках схемы замещения, с учетом граничных условий, соответственно, для начала и конца:

$$i - i_{1,2} = (C_1 + K_1) p u_1 - K_1 p u_2;$$

$$i_{m,n} - i_n = K_n p u_m + (C_n + K_m) p u_n,$$

где

$$i = \frac{1}{z_n} [u_0(t) - u_1], \quad i_n = \frac{u_n}{z_n},$$

получим системы уравнений

$$\begin{vmatrix} C_{11} - K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & C_{22} - K_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & C_{33} - K_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -K_{m-2} & C_{m-2,m-2} & -K_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{m-1} & C_{m-1,m-1} - K_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -K_m \\ & & & & & & & C_{nn} \end{vmatrix} \cdot p \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{m-1} \\ u_m \\ u_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i - i_{1,2} \\ i_{1,2} - i_{2,3} \\ i_{2,3} - i_{3,4} \\ \dots \\ i_{m-3,m-2} - i_{m-2,m-1} \\ i_{m-2,m-1} - i_{m-1,m} \\ i_{m-1,m} - i_n \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} & \dots & M_{1,m} \\ M_{2,1} & L_2 & \dots & M_{2,2} & \dots & M_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \dots & L_n & \dots & M_{n,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{m,1} & M_{m,2} & \dots & M_{m,n} & \dots & L_m \end{vmatrix} \cdot p \begin{vmatrix} i_{1,2} \\ i_{2,3} \\ \dots \\ i_{n,n+1} \\ \dots \\ i_{m,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 - u_2 - i_{1,2} R_1 \\ u_2 - u_3 - i_{2,3} R_2 \\ \dots \\ u_n - u_{n+1} - i_{n,n+1} R_n \\ \dots \\ u_m - u_n - i_{m,n} R_m \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где

$$C_{11} = C_1 + K_1; \quad C_{n,n} = C_n + K_m; \quad C_{q,q} = C_q + K_{q-1} + K_q; \quad q=2, 3, \dots, m.$$

Интегрирование этих систем целесообразно осуществить методом Рунге—Кутта, который легко может быть реализован на ЭЦВМ при высокой точности интегрирования и небольшой загрузке оперативной памяти машины. Для расчета нами была использована ЭЦВМ „Урал 2“, для которой на основе метода Рунге—Кутта составлены различные стандартные программы [1].

Частота колебаний напряжения в различных точках обмотки трансформатора и от величины воздействующей волны, от параметров обмотки трансформатора является использованием заземления нейтрали. Поэтому табулированной на основе метода Рунге—Кутта, с автоматическим выбором исследуемого процесса.

Метод Рунге—Кутта пригоден для систем, разрешенных относительно производных, и подпрограмма, построенная на основе этого метода, при счете одного шага имеет пять обращений к расчету правых частей. Ввиду этого в представленной программе (рис. 2) решение указанных систем относительно производных построено в подпрограмме расчета правых частей. При каждом обращении стандартной подпрограммы к расчету правых частей эти системы разрешаются относительно производных с новыми значениями интегрируемых переменных.

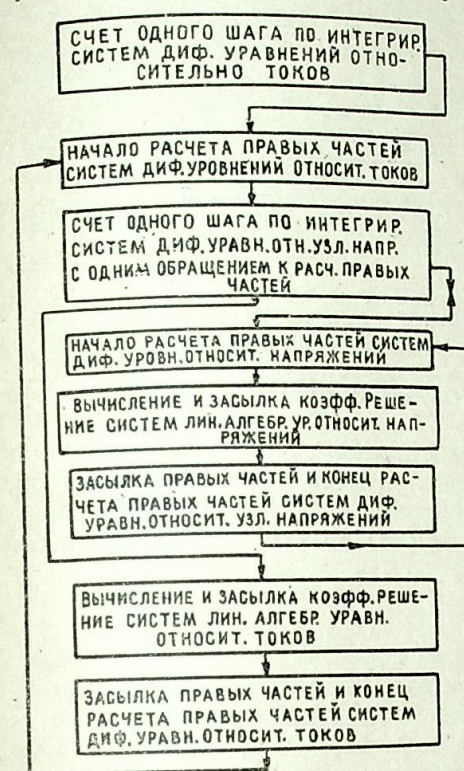


Рис. 2 Блок-схема программы.

В блок-схеме программы интегрирование системы (3) (с одним обращением к расчету правых частей) также построено в начальной части подпрограммы расчета правых частей системы (4), чтобы сократить сдвиг между напряжением и током, вносимый шагом интегрирования. Уменьшение шаговых ошибок в представленной блок-схеме программы происходит из-за того, что раздельное решение систем дифференциальных и алгебраических уравнений более близко приближается к их одновременному решению.

Для решения систем (3) и (4) относительно производных можно использовать стандартные программы решения систем линейных алгебраических уравнений с выбором главного элемента. В начальной стадии отладки программы следует задавать большие значения сопротивления заземления нейтрали z_n . При малых значениях z_n шаг интегрирования резко уменьшается. Так, например, при $z_n < (10 \div 20)$ ом для расчета процессов, длящихся $(5 \div 10)$ мксек требуется несколько часов, тогда как при значениях $z_n > 100$ ом расчетное время определяется минутами. Время расчета переходных процессов в трансформаторе, как известно, зависит от числа ячеек схемы замещения. Хорошие результаты дает схема замещения с десятью ячейками [2].

Был исследован трансформатор ТДНГУ-40500/110, при падении на его ввод стандартной волны:

$$u_0(t) = 2U(e^{-ct} - e^{-ct}). \quad (5)$$

Параметры схемы замещения определялись по [4]. Учитывались три различные взаимные индуктивности: между соседними ячейками— M_1 ; через одну ячейку— M_2 и через две ячейки— M_3 , позволяющие учитывать необходимое количество частот [3].

Картина развития перенапряжений в различных точках обмотки трансформатора с изолированной нейтралью в виде эпюр представлена на рис. 3, что позволяет более наглядно проследить развитие

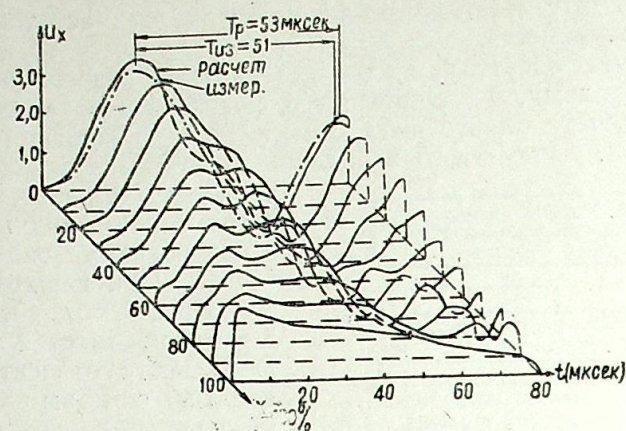


Рис. 3 Эпюры развития перенапряжений в обмотке трансформатора ТДНГУ-40500/110 при $z_n = \infty$, T_p , $T_{из}$ — время от первого максимума напряжений до второго, полученное расчетным путем и измерением на реальном трансформаторе (по данным МТЗ).

перенапряжений вдоль обмотки и относительно земли в различные моменты времени. Периоды собственных колебаний напряжений на нейтрали реального трансформатора ($T = 51$ мксек) и соответствующей точки схемы замещения ($T = 53$ мксек) практически совпадают.

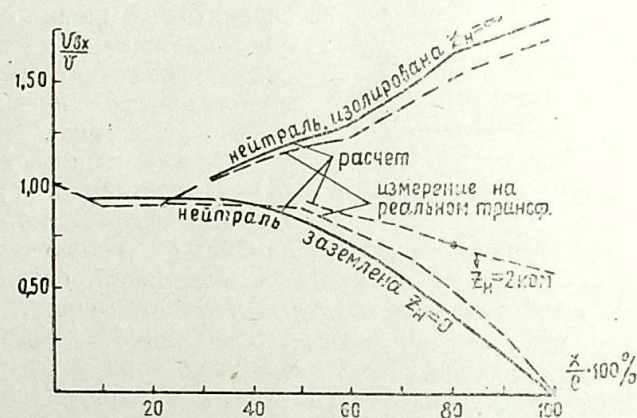


Рис. 4

В удовлетворительном согласии находятся также кривые распределения потенциала вдоль обмотки при различных значениях сопротивления заземления нейтрали (рис. 4), полученные расчетным путем и непосредственным измерением на реальном трансформаторе (по данным МТЗ). Таким образом, результаты показывают, что использование ЭЦВМ позволяет изучать переходные процессы в трансформаторах с достаточной для практики точностью.

Влияние неучета отдельных элементов ячейки схемы замещения на картину развития перенапряжений в обмотке трансформатора с изолированной нейтралью также было изучено с помощью ЭЦВМ (рис. 5). Рассмотрены следующие расчетные варианты;

1. В схеме замещения учитываются все параметры;
2. Не учитываются продольные емкости ячеек ($K=0$);
3. Не учитываются взаимные индуктивности ячеек, а сумма собственных индуктивностей принимается равной общей индуктивности обмотки ВН, т. е.

$$\sum_{n,q=1}^{10} M_{n,q} = 0; \quad \sum_{n=1}^{10} L_{соб.n} = L_{общ.};$$

4. В третьем варианте принимаются $K=0$.

Как видно из рис. 5, существенное влияние на картину развития перенапряжений в обмотке трансформатора оказывают продольные емкости, которые сильно сглаживают кривую напряжений в различных точках обмотки. Во всех рассмотренных случаях напряжение на входе трансформатора имеет одинаковые картины. Отсюда следует, что для рассмотрения процесса на входе трансформатора схема замещения (рис. 1)

Рис. 5. 1—Все параметры учитываются;

$$2—K=0; \quad 3—\sum_{m=1}^{10} M_{n,m}=0;$$

$$\sum_{m=1}^{10} L_{соб.m} = L_{общ.}; \quad 4—\sum_{n,m=1}^{10} M_{n,m}=0;$$

$$\sum_{m=1}^{10} L_{соб.m} = L_{общ.} \text{ и } K=0$$

может быть заменена элементарной схемой (рис. 6).

Исследование аналогичных процессов на физической модели подстанции также показало, что форма напряжения на входе трансформатора не зависит и от числа ячеек схемы замещения обмотки ВН. На модели было установлено также, что наличие на подстанции трансформаторов с глухо заземленной нейтралью приводит к уменьшению длины воздействующей волны за счет отражения от нейтрали волны с переменной полярности. Амплитуда обратного пика напряжения пропорциональна числу включенных на ошиновку подстанции трансформаторов с глухо заземленной нейтралью (рис. 7).

Появление отраженной волны противоположной полярности может быть выявлено расчетным путем, при рассмотрении элементарной эквивалентной схемы замещения трансформатора (рис. 6). При воздействии стандартной волны (1) напряжение в точке а (рис. 6), записанное в операторной форме, будет

$$u_{L,c}(p) = \frac{2U}{z_n C} \cdot \frac{p}{p^2 + \frac{1}{z_n C} p + \frac{1}{LC}} \times \left(\frac{p}{p + C_1} - \frac{p}{p + C_2} \right).$$

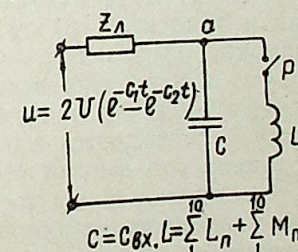


Рис. 6

Переходя от изображения к оригиналу, получим

$$u_{L,C}(p) = \frac{2U}{z_{\Sigma}C} (K_1 e^{-at} + K_2 e^{-bt} + K_3 e^{-c_1 t} + K_4 e^{-c_2 t}),$$

где

$$K_1 = \frac{a(C_1 - C_2)}{(b-a)(a-C_1)(a-C_2)}; \quad K_3 = \frac{b(C_1 - C_2)}{(a-b)(b-C_1)(b-C_2)};$$

$$K_2 = \frac{C_1}{(C_1-b)(a-C_1)}; \quad K_4 = -\frac{C_2}{(C_2-b)(b-C_2)}.$$

Здесь

$$a = -\frac{1}{2z_{\Sigma}C} + \sqrt{\left(\frac{1}{2z_{\Sigma}C}\right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

$$b = -\frac{1}{2z_{\Sigma}C} - \sqrt{\left(\frac{1}{2z_{\Sigma}C}\right)^2 - \frac{1}{LC}};$$

Для рассматриваемого трансформатора ТДНГУ-40500/110 $L = 0,05$ гн, $C = 3570$ пф. При этом

$$u_{L,C}(t) = 1,44(-1,2e^{-0,103t} - 1,5e^{-0,7t} + 2,73e^{-0,018t} - 0,03e^{-35,4t}).$$

Из последнего уравнения видно, что по истечении определенного времени напряжение на входе трансформатора меняет свою поляр-

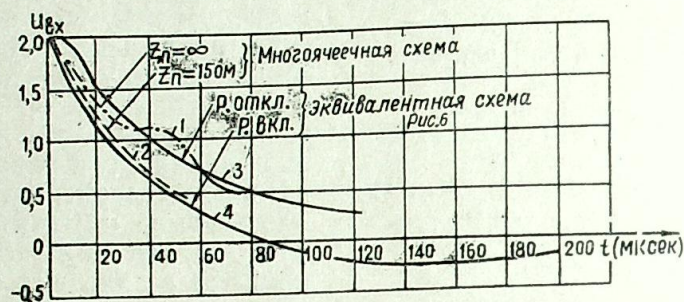


Рис. 7.

ность. Это иллюстрирует кривая 4 рис. 7. На том же рисунке представлена зависимость напряжения на входе трансформатора и при использовании других схем замещения обмотки. Практическое совпадение кривых 2, 4 указывает на возможность замены многоячеечной схемы замещения трансформатора с заземленной нейтралью элементарной схемой (рис. 6). Возможность подобной замены бездоказательно была высказана в [5].

Выводы

1. Изложена методика расчета на ЭЦВМ грозových перенапряжений в обмотках трансформаторов. При этом уменьшены шаговые ошибки, обусловленные разделением решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений, путем приближения их к требуемому одновременному решению. Расчеты на ЭЦВМ „Урал-2“ хорошо согласуются с результатами опытов, проведенных в заводских условиях (по данным МТЗ).

2. Установлено, что число ячеек схемы замещения на напряжение у входа трансформатора не влияет. Неучет продольных емкостей и внесение взаимных индуктивностей в состав собственных индуктивностей ячеек схемы замещения также не влияет на напряжение у входа.

3. При исследовании процессов на входе трансформатора можно пользоваться элементарной схемой замещения, состоящей из параллельно включенных общей индуктивности и входной емкости обмотки (рис. 6).

Замена трансформатора только входной емкостью правомерна при исследовании процессов на его входе до прихода отраженной от нейтрали волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавриленко Е. Т. Автоматизация программирования и стандартные программы для вычислительных машин „Урал-2“, „Урал-3“, „Урал-4“. Изд-во „Машиностроение“, М., 1966.
2. Белецкий З. М. „Изв. вузов, электротехника“, 1965, № 3.
3. Сиротинский Л. Н. ТВН, ч. III. Госэнергоиздат, 1959.
4. Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 1.
5. Бьюлей Л. Е. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. ОНТИ-НКТП СССР, 1938.

Ч. М. Чуварлы, М. М. Муслумов

Трансформаторларын долағарындакы илдырым ифрат кәркинлижинин ЕРһМ-ла һесабы

ХҮЛАСӘ

Електрик верилиш хәтләри илә жарымстансијаја кәлән илдырым ифрат кәркинлији трансформаторларын долағарында далғавары просесләр жарадыр. Мәгаләдә һәммин просесләрин ЕРһМ-ла һесаблама үсундан бәһс едилир.

ТДНГУ-40500/110 трансформаторунун әвәз схеминин Урал-2 ЕРһМ-да апарылан һесабатынын нәтичәләри Москва трансформатор заводунда апарылмыш өлчүләрин нәтичәләринә ујғун кәлир. Әвәз схеминин параметрләринин (сарғыларасы тутумун вә индуктивлијин) нәзәрә алынмасынын, долағын мүхтәлиф нөгтәләриндә ифрат кәркинлијин инкишафы шәклинә тәсири анализ едилмишдир.

Мүәјјән олунмушдур ки, жарымстансијанын илдырымдан мұһафизә анализаторун белә просесләрин тәдгиги заманы трансформатору онун эквивалент тутуму илә әвәз етмәк гејри-мүмкүндүр. Чүнки белә һалда алынған нәтичәләр дүзкүн олмајацагдыр. Белә тәдгигатлар апармағ үчүн трансформаторун садә әвәз схеми тәклиф олунмушдур.

И. И. ГЮЛЬМАМЕДОВ, С. С. РОГОВ

ИМПУЛЬСНЫЙ РЕГУЛЯТОР НАПЯЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА НА ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Современное состояние систем регулирования напряжения синхронных генераторов характеризуется широким внедрением полупроводниковых элементов. Разработка и выпуск новых мощных типов таких элементов позволяют создавать совершенные системы автоматического регулирования, удовлетворяющие требованиям практики. Наиболее перспективным является применение в системах возбуждения генераторов тиристорных и транзисторных, работающих в режиме переключения.

В [1, 2] даются примеры разработанных схем с использованием полупроводниковых приборов для целей возбуждения электрических машин. Однако, если схемы, построенные на транзисторах, получили достаточную известность, то схемы с использованием тиристорных элементов, несмотря на явное их преимущество, все еще находятся в стадии разработок. Сравнение регуляторов на транзисторах и тиристорах показывает, что регуляторы с неявно выраженным модулятором ширины импульсов, при использовании в оконечном каскаде транзисторов с током нагрузки до 6—8 а, обеспечивают точность регулирования напряжения в пределах $\pm 2\%$, тогда как регулятор, построенный на тиристорах [2], уже дает точность регулирования порядка $\pm 1,5\%$.

Существующие типы тиристорных обладают рядом положительных свойств, важнейшими из которых являются высокая надежность и способность пропускать большие токи. Эти обстоятельства особенно ценны для систем возбуждения синхронных генераторов малой и средней мощности, используемых на передвижных электрифицированных объектах. Предлагаемый регулятор, блок-схема которого показана на рис. 1, был разработан и испытан на кафедре Промышленной электроники Азербайджанского политехнического института. Назначение узлов 1 и 2—преобразовывать выходное синусоидальное напряжение синхронного генератора в постоянное напряжение, изменяющееся в пределах от 0 до 2,0 в, при максимально возможных колебаниях напряжения на зажимах генератора. Такой диапазон изменения постоянного напряжения, подаваемого на вход модулятора длительности импульсов (МДИ), обусловлен необходимостью получения высокой линейности преобразования. Назначение МДИ—преобразовывать величину постоянного напряжения на входе в соответствующую длительность t_n выходного импульса.

МДИ (рис. 2) является ждущим мультивибратором, одно плечо которого питается от источника входного напряжения $U_{вх}$. В устойчивом состоянии триод T_1 заперт, а триод T_2 открыт током базы $i_{б2}$. Конденсатор C_2 заряжен до напряжения $U_{с0} = U_{вх} - U_0$. Запускающий

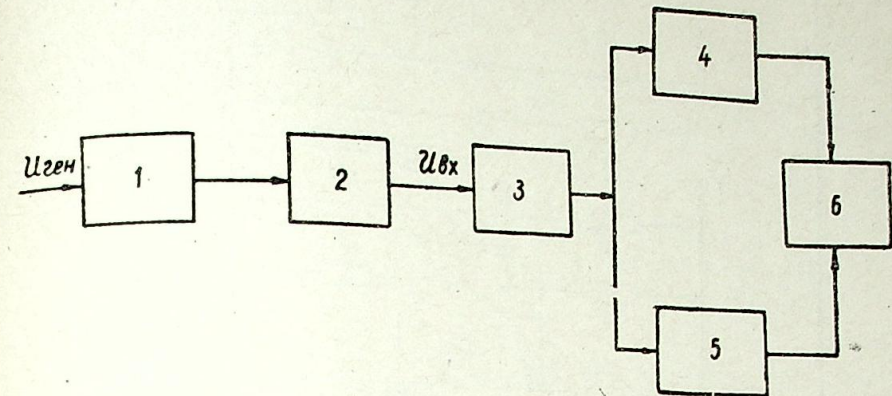


Рис. 1 1—понижающий трансформатор; 2—выпрямитель и сглаживающий фильтр; 3—модулятор длительности импульсов; 4, 5—ждущие мультивибраторы; 6—триггер.

импульс запирает T_2 и переводит схему в состояние квазиравновесия. Промежуток времени t_n , в течение которого схема находится в этом состоянии, определяется временем перезаряда конденсатора C_2 от напряжения $U_{с0}$ до $-U$. Во время t_n на выходе схемы имеется отрицательное напряжение $U_{вх}$. При напряжении $-UT_2$ вновь отпирается и схема возвращается в исходное состояние. Следовательно, меняя величину $U_{вх}$, можно менять $U_{с0}$, а значит и длительность t_n отрицательного импульса на выходе схемы.

Если $U_{вх} = 0$, конденсатор C_2 не перезаряжается после отпираания T_1 и схема возвращается в устойчивое состояние сразу же после окончания запускающего импульса. Следовательно, минимальная длительность выходного импульса $t_{нmin}$ не превышает длительности запускающего. Максимальная длительность выходного импульса $t_{нmax}$ определяется параметрами схемы и может быть достаточно большой. Поэтому можно получить большой диапазон изменения длительности импульса

$$\alpha = \frac{t_{нmax}}{t_{нmin}}.$$

Длительность выходного импульса определяется из уравнения

$$t_n = \tau \ln \left(1 + \frac{U_{вх}}{E_k} \right); \quad (1)$$

$$\tau = C_2 R_3.$$

Если уравнение (1) разложить в степенной ряд, ограничиваясь для случая $U_{вх} \ll E_k$ первым членом разложения, то получим

$$t_n \approx \tau \frac{U_{вх}}{E_k}. \quad (2)$$

Следовательно, при $U_{вх} \ll E_k$ зависимость $t_n - F(U_{вх})$ близка к линейной. После окончания импульса начинается процесс восстановления, конденсатор C_2 перезаряжается от напряжения $-U$ до $U_{с0} = U_{вх} - U_0$.

Принципиальная схема регулятора и временная развертка напряжений на узлах схемы представлены на рис. 2 и 3. В отсутствие запускающих импульсов с мультивибраторов ЖМ₁ и ЖМ₂ тиристоры T_9 и T_{10} заперты. Положительный запускающий импульс включает один из тиристоров, например T_9 , и триггер перейдет в первое устойчивое состояние. Конденсатор C_{13} при этом зарядится до $U_c \approx U_0$. Следующий положительный импульс с ЖМ₂ включает запертый тиристор T_{10} , T_9 при этом за счет напряжения на коммутирующем конденсаторе C_{13} выключится и триггер перейдет во второе устойчивое состояние. Таким образом, смена состояний триггера происходит при подаче запускающих импульсов с мультивибраторов. Ток через обмотку возбуждения генератора (ОВГ) проходит лишь тогда, когда тиристор включен, поэтому ОВГ является нагрузкой тиристора T_{10} , так как чем больше выходное напряжение генератора, тем меньше время включен тиристор T_{10} (рис. 3).

Применение тиристоров позволяет регулировать выходное напряжение генераторов, обмотка которых питается большими токами. Кроме того, преимуществом рассмотренной схемы регулятора является высокая линейность МДИ и построение всей схемы на спусковых устройствах, что обеспечивает высокую точность и надежность работы регулятора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденеев Г. М., Моин В. С. Вестник электропромышленности. 1961, № 7.
2. Бунаков В. Л., Гаспаров Р. Г. Полупроводниковые регуляторы напряжения и частоты электрических машин. "Энергия," 1966.

Г. Н. АГАЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящее время успешно развиваются теория краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и теория нелинейных интегральных уравнений. Первой работой по разрешимости краевых задач для квазилинейных эллиптических дифференциальных уравнений высшего порядка была работа М. И. Вишика (см. [7], а также [9]). В дальнейшем его исследования продолжили и развили Ю. А. Дубинский [9], Ф. Браудер, Лере и Лионс и др. Ф. Браудер, основываясь на работе Г. Минти по монотонным операторам, впервые введенным М. М. Вайнбергом и Р. И. Качуровским, разработал теорию разрешимости нелинейных функциональных уравнений в гильбертовом и банаховом пространствах при слабых условиях непрерывности операторов, входящих в уравнения. К. Дольф и Г. Минти [8] исследовали разрешимость нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, имитирующих свойства нелинейных интегральных уравнений.

В работах [1, 2, 3] исследовалась разрешимость нелинейных операторных уравнений в классе слабых решений в сепарабельных гильбертовом и банаховом пространствах аналогами метода Галеркина. Естественным развитием теории нелинейных операторных уравнений является рассмотрение их в локально выпуклых линейных топологических пространствах, являющихся по своей структуре много более общими, чем нормируемые и метризуемые пространства. В работе Д. Эдмундса [12] некоторые результаты Ф. Браудера из [4] были перенесены на локально выпуклые пространства. Я. Л. Энгельсон [13, 14] ранее вариационным методом исследовал некоторые нелинейные уравнения в локально выпуклых пространствах.

Целью настоящей работы было установление разрешимости в классе слабых нелинейных операторных уравнений вида

$$K_1 K_2(u) + K_3(u) = h \quad (0, 1)$$

в рефлексивных локально выпуклых хаусдорфовых топологических векторных пространствах, что является продолжением работ [1, 2, 3]. Работа состоит из трех пунктов.

В пункте 1 исследуется разрешимость уравнения (0,1) в сепарабельном рефлексивном хаусдорфовом локально выпуклом пространстве аналогом метода Галеркина без предположения монотонности, причем дается вычислительная схема для нахождения решения.

В пункте 2 доказывается разрешимость уравнения $(0, 1)$ в локально выпуклом пространстве, не обязательно сепарабельном, при более слабых условиях непрерывности на операторы, но при условии монотонности. Следует отметить, что результаты этого пункта дают результаты работ [2, 3] и в случае банаховых пространств. Дается условие, при котором имеет место однозначная разрешимость уравнения $(0, 1)$ и непрерывная зависимость решения от правой части уравнения.

Наконец, в пункте 3 приводится пример одного нелинейного дифференциального оператора в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Доказательство существования решения этого уравнения основывается на теореме пункта 2.

1. Под локально выпуклым хаусдорфовым топологическим векторным пространством понимается топологическое векторное пространство, удовлетворяющее свойству отделимости, в качестве базиса окрестностей нуля которого взят базис выпуклых окрестностей нуля. Как известно [6, 11], локально выпуклую топологию в векторном пространстве можно задать также с помощью семейства полунорм $P = \{p_\beta(x), \beta \in \Gamma\}$, где Γ — направленное множество индексов. Очевидно, без ограничения общности можно предполагать, что если Γ_1 есть любое конечное подмножество Γ , в дальнейшем, что если Γ_1 есть любое конечное подмножество Γ , тогда $p \in P$, где $p(x) = \max\{p_\beta(x), \beta \in \Gamma_1\}$. Для простоты будем рассматривать сходимость в локально выпуклых пространствах в терминах обобщенных последовательностей, а не фильтров. Ради простоты будем также рассматривать локально выпуклые пространства над полем действительных чисел.

Пусть теперь V, X, Y — локально выпуклые хаусдорфовы топологические векторные пространства, причем V и Y рефлексивные и имеют место следующие включения (в алгебраическом и топологическом смысле):

$$V \subset X, Y \subset V^* \text{ и } \bar{V} = X. \quad (1, 0)$$

Под V^*, X^*, Y^* понимаем пространства, сопряженные, соответственно, с V, X, Y . Пусть $P = \{p_\beta, \beta \in \Gamma\}$ — семейство полунорм, задающее локально выпуклую топологию в пространстве V .

Рассмотрим операторы K_1, K_2 и K_3 , подчиненные следующим условиям:

1°. K_1 — линейный оператор, действующий из пространства Y^* в пространство V^* , причем его область определения $D(K_1)$ плотна в Y^* . Тогда оператор K_1^* действует из $D(K_1^*) \equiv V \subset X$ в пространство Y . Будем предполагать, что оператор K_1^* деминепрерывен на V , т. е. всякую сильно сходящуюся последовательность из V переводит в слабо сходящуюся последовательность из Y .

2°. $K_2(u)$ — вообще говоря, нелинейный оператор, действует из X в Y^* и слабо непрерывен, т. е. он переводит всякую слабо сходящуюся последовательность из V в слабо сходящуюся последовательность из Y^* .

3°. $K_3(u)$ — вообще говоря, нелинейный оператор, действует из X в X^* и слабо непрерывен из V в X^* .

4°. Имеет место следующее соотношение для любого $u \in V$:

$$\langle K_2(u), K_1^*(u) \rangle + \langle K_3(u), u \rangle \geq C p_\beta^l(u) - \alpha \quad (1, 1)$$

при любом $\beta \in \Gamma$, где $C, \alpha > 0$ и не зависят от β , l — вещественное положительное число. Здесь и в дальнейшем $\langle y, x \rangle$ — значение функционала y в точке x .

Рассмотрим следующее нелинейное операторное уравнение

$$K_1 K_2(u) + K_3(u) = h, \quad h \in X^*. \quad (1, 2)$$

Под слабым решением $(1, 2)$ будем понимать любой элемент $u \in V$, для которого выполняется следующее соотношение:

$$K(u, v) = \langle K_2(u), K_1^*v \rangle + \langle K_3(u), v \rangle = \langle h, v \rangle \quad (1, 3)$$

для любого $v \in V$. Отметим, что V не обязано содержаться в X^* рассмотренных в работах М. И. Вишика и Ф. Браудера. В случае нелинейных дифференциальных уравнений в пространствах Соболева за X можно взять $W_p^{(m)}(\Omega)$, $Y = L_p(\Omega)$, а за V подпространство $W_p^{(m)}(\Omega)$, содержащее $W_p^{(m)}(\Omega)$.

Разрешимость уравнения $(1, 3)$ будем исследовать аналогом метода Галеркина. Ввиду рефлексивности пространств V и Y они квапринадлежащий самому пространству. Пусть система $\{u_n\}$ имеет предел, ной в пространстве V , F_K — подпространство, натянутое на первые k элементов $\{u_k\}$. Приближенное решение u_k уравнения $(1, 3)$ ищем в пространстве F_K :

$$\langle K_2(u_k), K_1^*v_j \rangle + \langle K_3(u_k), v_j \rangle = \langle h, v_j \rangle, \quad (1, 4)$$

где $v_j \in F_j$.

Пусть теперь Λ — направленное множество всех конечномерных подпространств в V , упорядоченное по включению, а Δ_1 — аналогичное множество в Y и для каждого $F \in \Lambda$ пусть J_F — отображение вложения F в V (соответственно для каждого $M \in \Delta_1$ пусть L_M — отображение вложения M в Y).

Положим

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= J_F^* K_1 L_M^{*-1}, & \text{тогда } \tilde{K}_1^* &= L_M^{-1} K_1^* J_F, \\ \tilde{K}_2 &= L_M^* K_2 J_F, & \tilde{K}_3 &= J_F^* K_3 J_F. \end{aligned} \quad (1, 5)$$

Очевидно, операторы $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ и $\tilde{K}_3$ действуют из конечномерных подпространств в конечномерные. Ввиду условий слабой непрерывности операторов K_1, K_2 и K_3 и совпадения слабой и сильной топологий в конечномерном пространстве заключаем, что операторы $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ и $\tilde{K}_3$ непрерывны.

Каждое F в Λ есть конечномерное хаусдорфово выпуклое пространство. Значит существует ограниченная окрестность нуля в F :

$$u_1 = \{x \in F : p_\gamma(x) \leq 1\}, \text{ где } \gamma \in \Gamma.$$

Следовательно, $\left\{\frac{1}{n} u_1\right\} (n = 1, 2, 3, \dots)$ образуют базис окрестностей нуля в F и, так как F хаусдорфово, то p_γ есть норма на F .

Пусть $u \in F$, тогда

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{K}_2(u), \tilde{K}_1^*(u) \rangle + \langle \tilde{K}_3(u), u \rangle = \\ &= \langle L_M^* K_2(J_F u), L_M^{-1} K_1^* J_F u \rangle + \langle J_F^* K_3(J_F u), u \rangle = \\ &= \langle K_2(J_F u), K_1^* J_F u \rangle + \langle K_3(J_F u), J_F u \rangle = \\ &= \langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u), u \rangle \geq C p_\beta^l(u) - \alpha \end{aligned} \quad (1, 6)$$

для всех $\beta \in \Gamma$.

Следовательно, для $u \in F$ можно применить лемму М. И. Вишика [7] аналогично тому, как это сделано в работе [2]. Из нее следует существование решения уравнения

$$K_1 K_2(u) + K_3(u) = h$$

в каждом конечномерном пространстве F . Учитывая определение слабого решения (1, 3), из (1, 6) получим

$$Cp_{\beta}^l(u) - \alpha \leq | \langle h, u \rangle |. \quad (1, 7)$$

Как известно, всякая линейная непрерывная форма $\langle h, u \rangle$, где h — фиксированный элемент X^* , в локально выпуклом пространстве оценивается следующим образом. Существуют $\beta_0 \in \Gamma$ и постоянная $K > 0$ такие, что для всех $u \in V$ имеет место неравенство

$$| \langle h, u \rangle | \leq Kp_{\beta_0}(u). \quad (1, 8)$$

Оценим правую часть (1, 8) с помощью неравенства Юнга:

$$|Kp_{\beta_0}(u)| \leq \frac{\varepsilon^l p_{\beta_0}^l(u)}{l} + \frac{c_1}{\varepsilon^{l'}} \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = 1 \right),$$

откуда с помощью (1, 7) получим

$$C|p_{\beta}(u)|^l - \alpha \leq \frac{\varepsilon^l p_{\beta_0}^l(u)}{l} + \frac{C_1}{\varepsilon^{l'}}. \quad (1, 9)$$

Обозначим

$$p_{\gamma'}(u) = \max(p_{\beta}(u), p_{\beta_0}(u)),$$

тогда из (1, 9) окончательно получим

$$p_{\gamma'}(u) \leq C \quad (1, 10)$$

для всех

$$p_{\gamma'}(u) \in P.$$

Неравенство (1, 10) означает, что существует замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $B_0 \subset V$ с $u_F \in B_0$ для всех $F \in \Lambda$. Так как V рефлексивно, то B_0 — слабо компактно, из чего заключаем, что всякая последовательность $\{u_F\}$, $F \in \Lambda$, имеет, по крайней мере, один слабый предел u_0 .

Систему (1, 4) перепишем в виде

$$\langle K_2(u_F), K_1^* v_{F_1} \rangle + \langle K_3(u_F), v_{F_1} \rangle = \langle h, v_{F_1} \rangle, \quad (1, 11)$$

где $F \supset F_1$.

Ввиду слабой непрерывности операторов $K_2(u)$ и $K_3(u)$ из (1, 11) получаем

$$\langle K_2(u_0), K_1^* v_{F_1} \rangle + \langle K_3(u_0), v_{F_1} \rangle = \langle h, v_{F_1} \rangle. \quad (1, 12)$$

Пользуясь теперь плотностью UF в V и полунепрерывностью K_1^* , из (1, 12) заключаем, что u_0 действительно является слабым решением уравнения (1, 1). Результат подытожим в следующей теореме.

Теорема 1.1. Пусть операторы K_i ($i = 1, 2, 3$) подчинены условиям $I^0 - 4^0$. Тогда операторное уравнение (1, 1) при любой правой части $h \in X^*$ имеет по меньшей мере одно слабое решение в рефлексивном сепарабельном локально выпуклом пространстве V .

2. Теперь будем предполагать выполненными следующие условия:

1¹. Оператор K_1 слабо непрерывен и действует так же, как в пункте 1.

2¹. $K_2(u)$, $K_3(u)$ — вообще говоря, нелинейные операторы, действующие из пространства X в пространства Y^* , X^* , соответственно, и деминепрерывные из V в Y^* и X^* , соответственно.

3¹. Выполняется следующее условие:

$$\langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u), u \rangle \geq C_{\beta}(p_{\beta}(u)) \cdot p_{\beta}(u) \quad (2, 1)$$

для всех $u \in V$, $\beta \in \Gamma$, где $C_{\beta}(r)$ — непрерывная, действительная функция от действительного аргумента r такая, что $C_{\beta}(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow \infty$.

4¹. Выполняется условие монотонности:

$$\langle K_2(u) - K_2(v), K_1^*(u - v) \rangle + \langle K_3(u) - K_3(v), u - v \rangle \geq 0 \quad (2, 2)$$

для любых $u, v \in V$.

Слабое решение будем, по-прежнему, понимать как выполнение равенства (1, 3) для любого $v \in V$. Сведем теперь нахождение слабого решения неоднородного уравнения (1, 2) в виде (1, 3) к нахождению слабого решения однородного уравнения

$$K_1 K_2(u) + K_3(u) = 0.$$

Действительно, пусть

$$K^0(u, v) \equiv \langle K_2(u), K_1^* v \rangle + \langle K_3(u) - h, v \rangle. \quad (2, 3)$$

Проверим выполнение неравенства (2, 1) для $K^0(u, u)$:

$$\begin{aligned} K^0(u, u) &= \langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u) - h, u \rangle = \\ &= \langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u), u \rangle - \langle h, u \rangle \geq \\ &\geq C_{\beta}(p_{\beta}(u)) p_{\beta}(u) - Kp_{\beta_0}(u). \end{aligned}$$

Для любого $\beta \in \Gamma$ положим

$$p_{\alpha}(u) = \max\{p_{\beta}(u), p_{\beta_0}(u)\}.$$

Тогда согласно сказанному в начале пункта 1 $p_{\alpha} \in P$ и для всех $\alpha \in \Gamma$ и $u \in V$ имеем

$$K^0(u, u) \geq d_{\alpha}(p_{\alpha}(u)) p_{\alpha}(u). \quad (2, 4)$$

Очевидно, что каждая функция $d_{\alpha}(r)$ обладает всеми свойствами функции $C_{\beta}(r)$. Неравенство монотонности (2, 1) проверяется легко. Теперь остается лишь заметить, что $K^0(u, v) = 0$, тогда и только тогда, когда u есть решение уравнения $K(u, v) = \langle h, v \rangle$.

Далее, аналогично тому, как это делается в пункте 1, рассмотрим семейства конечномерных подпространств пространств V и Y . Операторы $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ и $\tilde{K}_3$ определены формулами (1, 5) и непрерывны в соответствующих конечномерных пространствах. Неравенства (2, 1) и (2, 2) для них выполняются (они проверяются как в пункте 1). Тогда на основании леммы М. И. Вишика получаем, что уравнение (1, 2) имеет слабое решение в каждом конечномерном пространстве F . Значит для всех $\beta \in \Gamma$ и $v_F \in F \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$0 = K^0(v_F, v_F) \geq C_{\beta}(p_{\beta}(v_F)) p_{\beta}(v_F),$$

из которого следует, что для данного $\beta \in \Gamma$ существует постоянная N_{β} такая, что для всех $F \in \Lambda$ $p_{\beta}(v_F) \leq N_{\beta}$, т. е. существует замкнутое выпуклое ограниченное подмножество $B_0 \subset V$ такое, что $v_F \in B_0$ для всех $F \in \Lambda$. Так как V рефлексивно, то B_0 слабо компактно.

Докажем теперь теорему, необходимую для доказательства основной теоремы пункта 2, представляющую и самостоятельный интерес. В случае банаховых пространств для сильных решений нелинейных уравнений вида $G(x) = 0$ эта теорема была доказана Ф. Браудером [5].

Теорема 2.1. Пусть операторы K_1 , K_2 и K_3 удовлетворяют условиям $I^1 - 4^1$. C — слабо компактное подмножество локально выпуклого хаусдорфова рефлексивного пространства V . Для каждого конечномерного подпространства $F \subset V$ пусть J_F — отображение вложения F в V , J_F^* — отображение V^* на F^* (соответственно для каждого конечномерного подпространства $M \subset Y$, пусть L_M^* — отображение вложения M в Y , L_M^* — отображение Y^* на M^*), $C_F = C \cap F$ и $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ и $\tilde{K}_3$ такие же, как в (1, 5). Предположим, что уравнение

$$\tilde{K}^0(u_F, v_F) \equiv \langle \tilde{K}_2(u_F), \tilde{K}_1^* v_F \rangle + \langle \tilde{K}_3(u_F), v_F \rangle = 0$$

имеет слабое решение u_F в C_F для каждого $F \in \Lambda$. Тогда существует $u_0 \in C$ такое, что $K^0(u_0, v) = 0$ (при $h = 0$).

Доказательство. Пусть $u_F \in C_F$ есть слабое решение уравнения $\bar{K}^0(u_F, v_F) = 0$ и для конечномерного подпространства $F_0 \subset V$ пусть

$$V_{F_0} = \bigcap_{F_0} \{u_F\}. \quad (2, 5)$$

Множества V_{F_0} в силу их определения имеют конечное пересечение и содержатся в слабо компактном множестве C . Следовательно, существует элемент $u_0 \in C$, принадлежащий слабому замыканию каждого V_{F_0} .

В силу условия монотонности (2, 2) имеем

$$0 \geq \langle K_2(u_F) - K_2(v_F), K_1^*(v_F - u_F) \rangle + \langle K_3(u_F) - K_3(v_F), v_F - u_F \rangle, \quad (2, 6)$$

где v_F также из F . С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \langle K_2(u_F), K_1^*u_F - K_1^*v_F \rangle + \langle K_3(u_F), u_F - v_F \rangle = \\ & = \langle \bar{K}_2(u_F), \bar{K}_1^*u_F - \bar{K}_1^*v_F \rangle + \\ & + \langle \bar{K}_3(u_F), u_F - v_F \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Следовательно, из (2, 6) и (2, 7) имеем

$$\langle K_2(v_F), K_1^*(v_F - u_F) \rangle + \langle K_3(v_F), v_F - u_F \rangle \geq 0. \quad (2, 8)$$

В силу слабой компактности множества C форма, стоящая в левой части неравенства (2, 8), непрерывна по u_F , а так как она неотрицательна для всех $u_F \in V_{F_0}$ для любого F_0 , содержащего v_F , то эта форма также неотрицательна на слабом замыкании V_{F_0} . Следовательно, из (2, 8) в силу слабой непрерывности оператора K_1 получаем

$$\langle K_2(v), K_1^*(v - u_0) \rangle + \langle K_3(v), v - u_0 \rangle \geq 0 \quad (2, 8')$$

для любого v из V .

Теперь положим $v_t = u_0 + tw$, где $w \in V$. Так как $v_t \in V$, то, полагая в неравенстве (2, 8') $v = v_t$, будем иметь

$$\langle K_2(v_t), tK_1^*w \rangle + \langle K_3(v_t), tw \rangle \geq 0,$$

Учитывая, что $t \geq 0$, сократим последнее на t :

$$\langle K_2(v_t), K_1^*w \rangle + \langle K_3(v_t), w \rangle \geq 0. \quad (2, 9)$$

В силу деминепрерывности операторов K_2 и K_3 при $t \rightarrow 0$ из (2, 9) получим

$$\langle K_2(u_0), K_1^*w \rangle + \langle K_3(u_0), w \rangle \geq 0. \quad (2, 10)$$

Подставляя в (2, 10) вместо w элемент $-w$ и пользуясь линейностью оператора K_1^* , получим противоположное неравенство, откуда окончательно будем иметь

$$\langle K_2(u_0), K_1^*w \rangle + \langle K_3(u_0), w \rangle = 0.$$

Теорема доказана.

С помощью доказанной теоремы 2, 1 и утверждений, доказанных перед этой теоремой, заключаем, что справедлива следующая

Теорема 2, 2. Пусть X, V и U — локально выпуклые хаусдорфовы топологические векторные пространства со свойствами, указанными в начале пункта 2. Пусть операторы K_1, K_2 и K_3 удовлетворяют условиям 1^1-4^1 . Тогда уравнение (1, 2) имеет по меньшей мере одно слабое решение.

Заметим, что слабое решение будет единственным, если выполняется условие „сильной монотонности“, а именно: пусть для любого данного ограниченного подмножества $B \subset V$ и любого $\beta \in \Gamma$ сущест-

вует строго возрастающая функция $K_{\beta, B}$ такая, что $K_{\beta, B}(0) = 0$ и для всех $u, v \in B$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \langle K_2(u) - K_2(v), K_1^*(u - v) \rangle + \langle K_3(u) - K_3(v), \\ & u - v \rangle \geq K_{\beta, B}(P_{\beta}(u - v)) P_{\beta}(u - v). \end{aligned} \quad (2, 11)$$

Действительно, пусть u_1 и u_2 — два слабых решения уравнения (1, 2). Учитывая это, из неравенства (2, 11) получаем, что

$$0 \geq K_{\beta, B}(P_{\beta}(u_1 - u_2)) P_{\beta}(u_1 - u_2) \quad (2, 12)$$

для всех $\beta \in \Gamma$, где $u_1, u_2 \in B$. Из неравенства (2, 12), пользуясь тем, что $K_{\beta, B}(0) = 0$, находим, что $P_{\beta}(u_1 - u_2) = 0$ для всех $\beta \in \Gamma$, $u_1, u_2 \in B$. Значит $u_1 = u_2$.

Таким образом, при выполнении неравенства (2, 11) нами доказано существование обратного оператора, который будем обозначать через K^{-1} . Справедлива следующая

Теорема 2, 3. При выполнении условий 1^1-3^1 и неравенства (2, 11) последовательность слабых решений уравнения (1, 2) в конечномерных пространствах сходится не только слабо к решению u_0 уравнения (1, 2) в локально выпуклом рефлексивном пространстве V , но и сильно.

Доказательство. Пусть $A_{\beta} = \{u \in X : p_{\beta}(u) \leq 1\}$, $\beta \in \Gamma$ и обозначим через A_{β}^0 поляр A_{β} в пространстве X^* . По теореме Хана — Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов имеем

$$p_{\beta}(u) = \sup_{f \in A_{\beta}^0} |\langle u, f \rangle|, \quad u \in V. \quad (2, 13)$$

Пусть теперь $v \in V$ и F_0 — одномерное подпространство из V , натянутое на v , тогда, если $F \in \Lambda$ и $F_0 \subset F$, будем иметь

$$\begin{aligned} K^0(u_F, v) &= \langle K_2(u_F), K_1^*v \rangle + \langle K_3(u_F), v \rangle = \\ &= \langle \bar{K}_2(u_F), \bar{K}_1^*v \rangle + \langle \bar{K}_3(u_F), v \rangle = 0, \end{aligned}$$

так что последовательность правых частей уравнений вида (1, 2) в конечномерных пространствах сходится к нулю. Выберем любое $F_1 \in \Lambda$ и предположим, что $F \in \Lambda$, $F \supset F_1$, тогда для всех $\beta \in \Gamma$

$$\begin{aligned} & K_{\beta, B_0}(P_{\beta}(u_F - u_{F_1})) P_{\beta}(u_F - u_{F_1}) \leq \\ & \leq |\langle K_2(u_F) - K_2(u_{F_1}), K_1^*(u_F - u_{F_1}) \rangle + \\ & + \langle K_3(u_F) - K_3(u_{F_1}), u_F - u_{F_1} \rangle| = \\ & = |\langle K_2(u_{F_1}), K_1^*u_F \rangle + \langle K_3(u_{F_1}), u_F \rangle|. \end{aligned} \quad (2, 14)$$

Для каждого действительного r положим $r K_{\beta, B_0}(r) = q_{\beta}(r)$. Функция $q_{\beta}(r)$ — строго возрастающая. Следовательно, она имеет обратную. Тогда из неравенства (2, 14) имеем

$$P_{\beta}(u_F - u_{F_1}) \leq q_{\beta}^{-1}(|\langle K_2(u_{F_1}), K_1^*u_F \rangle + \langle K_3(u_{F_1}), u_F \rangle|). \quad (2, 15)$$

Принимая во внимание выражение (2, 13), из неравенства (2, 15) получаем

$$\begin{aligned} & |\langle u_F - u_{F_1}, f \rangle| \leq P_{\beta}(u_F - u_{F_1}) \leq \\ & \leq q_{\beta}^{-1}(|\langle K_2(u_{F_1}), K_1^*u_F \rangle + \langle K_3(u_{F_1}), u_F \rangle|). \end{aligned} \quad (2, 16)$$

Учитывая, что последовательность $\{u_F\}$ имеет слабый предел u_0 , из неравенства (2, 16) имеем

$$\begin{aligned} & |\langle u_0 - u_{F_1}, f \rangle| \leq q_{\beta}^{-1}(|\langle K_2(u_{F_1}), K_1^*u_0 \rangle + \\ & + \langle K_3(u_{F_1}), u_0 \rangle|), \quad f \in A_{\beta}^0 \end{aligned} \quad (2, 17)$$

для всех $\beta \in \Gamma$.

Из неравенства (2, 17) имеем

$$p_{\beta}(u_0 - u_{F_1}) = \sup_{f \in A_{\beta}^0} |\langle u_0 - u_{F_1}, f \rangle| \leq \\ \leq q_{\beta}^{-1} (|\langle K_2(u_{F_1}), K_1^* u_0 \rangle + \langle K_3(u_{F_1}), u_0 \rangle|).$$

Так как по доказанному u_{F_1} слабо сходится к u_0 , то правая часть последнего неравенства сходится к нулю, а значит $p_{\beta}(u_0 - u_{F_1}) \rightarrow 0$ для всех $\beta \in \Gamma$. Таким образом u_{F_1} сходится сильно к u_0 в V . Справедлива также

Теорема 2.4. При выполнении условий теоремы 2, 3, слабое решение всегда единственно и отображение K^{-1} непрерывно.

Доказательство. Единственность решения при выполнении неравенства (2, 11) уже была доказана. Докажем теперь непрерывность отображения K^{-1} . Вначале докажем, что K^{-1} отображает ограниченные подмножества X^* в ограниченные подмножества V . Под ограниченными множествами в X^* будем понимать сильно ограниченные множества (известно [6], что класс всех сильно ограниченных подмножеств X^* полностью совпадает с классом всех слабо ограниченных подмножеств X^* ввиду свойства бочечности пространства X , которое, в свою очередь, следует из рефлексивности пространства X).

Пусть u есть решение уравнения (1, 3), принадлежащее V, B^* — слабо ограниченное подмножество пространства X^* . Как известно [6], поляры в X^* множеств из базы окрестностей нуля в X образуют фундаментальную систему ограниченных множеств в X^* . Следовательно, $B^* \subset M \cdot A_{\beta_0}^0$ для некоторого $\beta_0 \in \Gamma$ и некоторой постоянной $M > 0$ ввиду того, что топология V сильнее топологии X . Теперь, если $h \in B^*$, то, учитывая (2, 13), будем иметь

$$|\langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u), u \rangle| = |\langle h, u \rangle| \leq M p_{\beta_0}(u),$$

откуда

$$C_{\beta}(p_{\beta}(u)) p_{\beta}(u) \leq |\langle K_2(u), K_1^* u \rangle + \langle K_3(u), u \rangle| \leq M p_{\beta_0}(u)$$

для всех $\beta \in \Gamma$ и $h \in B^*$. Значит, в частности,

$$C_{\beta_0}(p_{\beta_0}(u)) \leq M,$$

т. е.

$$p_{\beta_0}(u) \leq M_0,$$

где $M_0 > 0$ для всех u , таких, что $h \in B^*$. Этим доказано, что отображение K^{-1} является ограниченным.

Пусть теперь h_n — последовательность из правых частей уравнения (1, 3), сходящаяся сильно к нулю. Множество точек этой последовательности Коши ограничено и так как K^{-1} — ограниченное отображение, то и множество решений $\{u_n\}$ уравнения (1, 3) ограничено, т. е. множество точек вида $\{u_n - u_m\}$ принадлежит некоторому ограниченному множеству B_1 . Следовательно, для всех $\beta \in \Gamma$ имеем

$$K_{\beta, V}(p_{\beta}(u_n - u_m)) p_{\beta}(u_n - u_m) \leq |\langle K_2(u_n) - K_2(u_m), K_1^*(u_n - u_m) \rangle + \langle K_3(u_n) - K_3(u_m), u_n - u_m \rangle| = \\ = |\langle h_n - h_m, u_n - u_m \rangle| \leq q_{\beta_1}(h_n - h_m),$$

где q_{β_1} — непрерывная полунорма на пространстве X^* , снабженном сильной топологией. Значит ввиду свойств функций $K_{\beta, V}$

$$p_{\beta}(u_n - u_m) \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty$$

для всех $\beta \in \Gamma$. Так как рефлексивное локальное выпуклое пространство квазиполно (см. [6]), то значит последовательность Коши $\{u_n\}$

сходится к некоторому элементу u . Отсюда в силу деминепрерывности операторов K_2 и K_3 и единственности решения получаем непрерывность отображения K^{-1} .

3. В настоящем пункте приведен пример, являющийся реализацией теоремы 2, 2. Другие возможные случаи реализации абстрактной теории будут даны в конце работы.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}^m(x, D^{\gamma} u) = h(x), \quad |\gamma| \leq m. \quad (3, 1)$$

Здесь $h(x)$ принадлежит D_2' -пространству обобщенных функций с компактными носителями, принадлежащими некоторой области Ω эвклидова пространства E^n , ограниченной замкнутой кривой Γ . Как известно, пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, принадлежащими области $\Omega \subset E^n$, является полным рефлексивным локально выпуклым пространством с сопряженным D_2 -пространством обобщенных функций, причем имеет место включение

$$D_2 \subset L_{loc}^2(\Omega) \subset D_2', \quad (3, 2)$$

где L_{loc}^2 — пространство локально квадратично суммируемых функций в области Ω (основные свойства пространств D_2 и D_2' см., например, в [11]). Локально выпуклая топология в пространстве D_2 вводится следующим образом. В качестве полунорм берутся функции

$$p_m(u) = \sup_{t \in K \subset \Omega} |D^m u(t)| \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (3, 3)$$

Наша задача — доказать существование слабого решения уравнения (3, 1), принадлежащего пространству D_2 .

Будем предполагать выполнение следующих условий:

I. Функции $A_{\alpha}(x, \xi_i)$ непрерывны по всем аргументам и

$$|A_{\alpha}(x, \xi_i)| \leq C_1(|\xi_i| + 1). \quad (3, 4)$$

II. Для любой функции $u(x) \in D_2$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \langle A_{\alpha}(x, D^{\gamma} u), D^{\alpha} u \rangle \geq a_1 p_m^l(u) - C_2, \quad (3, 5)$$

где $l > 0, a_1 > 0, C_2 \geq 0$.

III. Для любых $u, v \in D_2$ справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \langle A_{\alpha}(x, D^{\gamma} u) - A_{\alpha}(x, D^{\gamma} v), D^{\alpha}(u - v) \rangle \geq 0. \quad (3, 6)$$

Имеет место

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда уравнение (3, 1) имеет, по крайней мере, одно решение в пространстве D_2 .

Доказательство. Теорема 3.1 будет, очевидно, доказана, если проверить выполнение условий теоремы 2, 2. Оператор $D^{\alpha} (|\alpha| \leq m)$ соответствует оператору K_1^* . Очевидно, он непрерывен в пространстве D_2 , а значит и слабо непрерывен в D_2 . Оператор K_2 определим из равенства

$$\langle K_2(u), K_1^* v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle A_{\alpha}(x, D^{\gamma} u, D^{\alpha} v) \rangle = \\ = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle D^{\alpha} A_{\alpha}(x, D^{\gamma} u), v \rangle \quad (3, 7)$$

для всех $v \in D_2$. Очевидно, условие (2, 1) выполняется в силу условия (3, 5), а условие (2, 2) в силу (3, 6). Остается проверить деминепрерывность оператора K_2 . Она следует из одного результата Я. Л. Эн-

гельсона (лемма 8 работы [13]). Теорема доказана. Очевидно, из теоремы 3,1 следует, что если правая часть $h(x) \in D_2$, то и решение принадлежит пространству D_2 .

Если предполагать выполненным условие (χ) (см. работу Я. Л. Энгельсона [13]), то можно доказать разрешимость операторного уравнения Гаммерштейна в рефлексивном локально выпуклом пространстве, следуя работе К. Дольфа и Г. Минти [8], где доказана его разрешимость в гильбертовом пространстве. Можно также указать пример нелинейной системы уравнений Гаммерштейна в пространстве $D_2 \times D_2$ с симметричной положительно определенной матрицей, используя условия на матрицу, указанные К. Дольфом и Г. Минти, порождающие монотонный оператор, что является обобщением подобной задачи, рассмотренной Я. Л. Энгельсоном [13, 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаев Г. Н. Изв. АН Азерб. ССР, 1966, № 5.
2. Агаев Г. Н. ДАН СССР, т. 174 1967, № 6.
3. Агаев Г. Н. Тр. симпозиума по теоремам вложения. М., 1968 (в печати).
4. Browder F. Remarks on nonlinear functional equations. Proc. Nat. Acad. USA, 51 (1964).
5. Browder F. Mappings theorems for non-compact non-linear operators in Banach spaces Proc. Nat. Acad. USA, 54, № 2 (1965).
6. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.
7. Вишик М. И. Тр. ММО, 12 (1963).
8. Dolph C. L., Minty G. On non-linear integral equations of the Hammers-tein type. Proc. advanced Seminar conducted by Math. University of Wisconsin, Madison, 1964.
9. Дубинский Ю. А. УМН, т. XXIII, вып. 1 (139), 1968.
10. Качуровский Р. И. УМН, т. XXIII, вып. 2 (140), 1968.
11. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1967.
12. Edmunds D. Non-linear functional equations in locally convex spaces. Journ. London Math. Soc. 41, № 164 (1966).
13. Энгельсон Я. Л. Уч. зап. ЛГУ, Рига, т. XXVIII, вып. 4 (1959).
14. Энгельсон Я. Л. К теории нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах. Латв. матем. ежегодник. Рига, 1966.

h. H. Aгаев

Гејрихэтти операторлу тэнликлэрин локал габарыг топологи векторлар фэзаларында һәлл едилә билмэлэри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгалә (0,1) тэнлијин локал габарыг топологи фэзаларда һәллинин варлығы, јеканәлији вә сағ тәрәфдән кәсилмәз асылылығына һәср едилмишдир.

Мәгаләнин биринчи бәндиндә локал габарыг сепарабел һаусдорф фэзасында Галеркин методу васитәсилә һәллин варлығы арашдырылыр. Икинчи бәндиндә исә фэзанын үстүндән сепарабеллик шәрти кәтүрүлүб, операторлар үзәринә монотонлуг шәрти гојулараг (0,1) тэнлијин һәллинин варлығы, јеканәлији вә сағ тәрәфдән кәсилмәз асылылығы тәдгиг едилир. Үчүнчү бәндә финит функцијалар синфиндә (3,1) диференсиал тәнлијин һәллинин варлығы кәстәрилир.

МҮНДӘРИЧАТ

- | | |
|--|-----|
| И. К. Кәримов, Т. А. Мәммәдов, Н. Һ. Әлијев. Магнит чеврилмэлэри әтрафында MnSe вә MnS бирләшмэлэринин магнит гаврајычылығы | 3 |
| Х. И. Мәммәдов, И. Г. Нәсиров, Е. Н. Нијазова. Ашағы температурда d—һаллокенли нафталинлэрин г—парафинлэрдә мұхтәлиф јашама мүддәтли ики фосфорессенсија спектри | 7 |
| А. М. Агајев. Ашағы температурларда GaAs-ин гадаған олунмуш золағынын енинин температурдан асылылығы | 10 |
| З. З. Маһмудов, Р. Г. Ејланбеков. Ферро вә антиферромагнетиклэрдә чәрәјанын резонанс дајаныгсызлығы | 13 |
| Ә. Х. Хәлилов, Ә. П. Мәммәдов, Т. Һ. Дилбазов. Күмүшлә ашгарланмыш вә фотоиларла һәјәчанландырылмыш бәзи NaCl фосфорларын рекомбинасијалы лүминесенсијасынын тәдгиги | 19 |
| М. Һ. Шаһтахтински, Ч. С. Томтијев, Ә. А. Гулијев. Бисмут-сүрмә бәрк мәнлулларында термо ЕһГ-нин дәјишмәси һаггында | 27 |
| Н. Ә. Әлијев, Ф. Г. Мәһәррәмова, Б. Ә. Әһмәдов, М. М. Мусазада, К. Ә. Агајев. Термик ишләнмиш дәликачан стан башлыгларынын ренткенографик тәдгиги | 32 |
| К. Ш. Гәһрәманов, Л. С. Стилбанс. Горујучу цилиндр олмајан балда истилккечирмәнин температур асылылығынын өлчүлмәсинин стационар методу | 35 |
| Д. И. Лајнер, Һ. Г. Сәмәдов. Теллурлу гургушун әсасында бәзи бәрк мәнлулларын термоэлектрик хәссәлэри | 41 |
| С. Г. Зейналов. в: γ ZeO(AO), γ Суд(F8), s Ред(K2) улдузларынын бәзи характеристикасы | 43 |
| Р. И. Ибадов. Тригонометрик чәдвәллэрин тарихинә даир | 48 |
| А. Б. Һәбибов, А. Б. Сатурјанс. Јүксәк тәзјиг вә температур шәраитиндә газла дојдурулмуш нефтлэрин експериментал тәдгиги | 53 |
| А. А. Сакович, Д. О. Тројанскаја, В. Кострјуков. Асинхрон мүнәррикиндә ишләјән тезлик тиристор чевирчисинин тәдгиги | 58 |
| М. С. Гасымзада. Электрокнетик чевирчилэрдә кечид просеслэри | 64 |
| К. Ф. Ширинов, Ә. Х. Сәлимов. Мәһсулдар ләјлара термик тәсир мәсәләлэриндә раст кәлән бәзи интегралларын һесаблинамасы һаггында | 74 |
| Т. Г. Һејдәрова. Сонлу сечмә илә тәсадүфи ардычыллығын дисперсија вә коррелјасија функцијасынын пәјлама ганунунун гүмәтләндирилмәсинин апроксимасијасы | 82 |
| Д. М. Манјуров. Параметрлэрин вариасијасы илә хәтти-кәср програмлашдырма мәсәләсинин арашдырылмасы | 89 |
| Ј. Р. Абдуллајев, Р. С. Гурбанов, А. В. Сабурбајев. Дәринлик насосунун плунжер вә цилиндри арасында аномал мәһсулун гејри-стационар структур һәрәкәт режими һаггында | 96 |
| И. Һ. Мейдијев. Бир сыра интегралларын вә Тејлор-Дирихле сырасынын дәгиг мүтләг јығылма областынын тәјини | 102 |
| М. М. Садыгов. Кечикән аргументли бир екстремалдиференсиал тәнлик һаггында | 107 |
| Б. Ә. Гулијев. Квазихәтти икинчи тәртиб һиперболик типли вә квази-хәтти үчүнчү тәртиб тәнликләр үчүн гојулмуш бир гошма мәсәлә һаггында | 113 |
| Р. И. Мурадov. Кәсилән әмсаллы чырлашан икинчи тәртиб параболлик тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәлә | 122 |
| А. С. Маһмудов, Р. Р. Ахундов. Санки ортогонал системләр һаггында | 189 |

гында	129
А. Г. М е н д и я е в. Бәзи функционал фәзаларда дахилетмә операторунун	137
там кәсилмәзлији һаггында	
И. А. Б ә х т и я р о в, К. Ә. Ә л и я е в. Дүзкүн үчбучаглы призманын	141
дахили тәзјигиндән кәркинлик вәзијјәтинә даир	
Ш. М. М ү т ә л л и м о в. Эластик мембранын әјилмәси һаггында динамик	148
мәсәлә	
Р. С. М и н а с я н, И. И. М у с т а ф а я е в а. Бирчинс призматик бру-	152
сун халис чәп әјилмә мәсәләси	
Г. Т. Һ ә с с а н о в, С. Ј. А ғ а я е в а. Тиксотроп өзлүпластик мүнһит һәрәкә-	156
тнин бир автомодел мәсәләси һаггында	160
К. И. Г ә һ р ә м а н о в. Золагда пластик ахманын дајаныглыгы һаггында	
Ч. М. Ч у в а р л ы, М. М. М ү с л ү м о в. Трансформаторларын долагла-	167
рындакы илдырым ифрат кәркинлијини ЕРҲМ-ла һесабы	
И. И. К ү л м ә м м ә д о в, С. С. Р о г о в. Јарымкечиричиләрдә дәјишән	174
чәрәјан кенераторлары күчүнүн импульсу тәнзимедичиси	
Һ. Н. А ғ а я е в. Гејрихәтти операторлу тәнликләрин локал габарыг тоположи	179
векторлар фәзаларында һәлл едилә билмәләри һаггында	

СОДЕРЖАНИЕ

И. Г. Керимов, Т. А. Мамедов, Н. Г. Алиев. Магнитная восприимчивость соединений MnSe и MnS в области магнитного превращения	3
Х. И. Мамедов, И. К. Насибов, Э. Н. Ниязов. Две фосфоресценции с разными значениями времени жизни α -галогензамещенных нафталинов в парафинах при низкой температуре	7
А. М. Агаев. Температурная зависимость ширины запрещенной зоны GaAs при низких температурах	10
З. З. Махмудов, Р. Г. Әйланбеков. Резонансная неустойчивость тока в ферро- и антиферромагнетитах	13
А. Х. Халилов, А. П. Мамедов, Т. Г. Дилбазов. Исследование рекомбинационной люминесценции некоторых активированных серебром фото-возбужденных фосфоров	19
М. Г. Шахтахтинский, Д. С. Томтиев, А. А. Кулиев. Об изменении гермо-э.д.с. монокристаллов твердых растворов висмут—сурьма	27
Н. А. Алиев, Ф. Г. Магеррамова, Б. А. Ахмедов, М. М. Мусазаде, К. А. Агаев. Рентгенографическое исследование термически обработанных оправок прошивного стана	32
К. Ш. Кахраманов, Л. С. Стельбанс. Стационарный метод изменения температурной зависимости теплопроводности без охранных цилиндров	35
Д. И. Лайнер, Г. К. Самедов. Термоэлектрические свойства некоторых твердых растворов на основе теллуристого свинца	41
С. К. Зейналов. Некоторые характеристики звезд сверхгигантов	43
Р. И. Ибадов. К вопросу истории тригонометрических таблиц (I)	48
А. Б. Габибов, А. Б. Цатурянц. Экспериментальное исследование вязкости газонасыщенных нефтей при высоких давлениях и температурах	53
А. А. Сакович, Д. О. Троянский, В. Кострюков. Исследование тиристорного преобразователя частоты при работе на асинхронный двигатель	58
М. С. Касимзаде. Переходные процессы электрокинетических преобразователей	64
К. Ф. Ширинов, А. Х. Салимов. О вычислении некоторых интегралов, встречающихся в задачах термического воздействия на продуктивные пласты	74
Т. Г. Гейдаров. Аппроксимация закона распределения оценки дисперсии и корреляционной функции случайной последовательности по конечной выборке	82
Д. М. Манюров. Исследование задачи дробно-линейного программирования при варьировании некоторых параметров	89
Я. Р. Абдуллаева, Р. С. Гурбанов, А. В. Сабурбаев. О нестационарном структурном режиме движения вязко-пластичной среды в зазоре между плунжером и цилиндром глубинного насоса	96
И. Г. Мехтиев. Определение точной области абсолютной сходимости некоторых интегралов и рядов Тейлора—Дирихле	102
М. М. Садыхов. Об одном дифференциально-экстремальном уравнении с запаздывающим аргументом	107
Б. А. Кулиева. Об одной задаче на сопряжение квазилинейного гиперболического уравнения второго порядка и квазилинейного уравнения третьего порядка	113
Р. И. Мурадов. Смешанная задача для вырождающегося параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами	122
А. С. Махмудов и Р. Р. Ахундов. О почти-ортогональных системах	129
А. Г. Мехтиев. О полной непрерывности вложения некоторых весовых функциональных пространств в случае неограниченной области	137
	191

И. А. Бахтияров, К. А. Алнев. О напряженном состоянии правильной трехгранной призмы, подтвержденной внутреннему давлению . . .	141
Ш. М. Муталлимов. Динамические задачи прогиба гибкой мембраны . . .	148
Р. С. Минасян, И. И. Мустафаева. К вопросу чистого косого из- гиба однородного призматического бруса . . .	152
Г. Т. Гасанов, С. Б. Агаева. Об одной автомодельной задаче движения тиксотропной вязко-пластичной среды . . .	156
К. И. Гахраманов. Об устойчивости пластического течения в полосе . . .	160
Ч. М. Джуварлы, М. М. Муслимов. Расчет грозовых перенапряже- ний в обмотках трансформаторов с применением ЭЦВМ . . .	167
И. И. Гюльмамедов, С. С. Рогов. Импульсный регулятор напряже- ния генераторов переменного тока на полупроводниках . . .	174
Г. Н. Агаев. О разрешимости нелинейных операторных уравнений в локально выпуклых топологических векторных пространствах . . .	179