

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

2

1968

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Я. И. ГЕОЗАЛОВ

ИНВАРИАНТ ОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО
ЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим систему однородных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2; \\ \frac{dy}{dt} &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2.\end{aligned}\quad (1)$$

Преобразуем систему (1) с помощью линейной замены

$$\begin{aligned}x &= \alpha\xi + \beta\eta, \quad \alpha\gamma - \beta\delta \neq 0, \\ y &= \delta\xi + \gamma\eta,\end{aligned}\quad (2)$$

Очевидно, что после преобразования системы (1) коэффициенты изменяются. Однако можно составить такие функции коэффициентов системы (1), которые не изменят своего значения, если в них коэффициенты a_{ij} и b_{ij} заменить соответствующими коэффициентами преобразованной системы уравнений. Такие функции называются инвариантами системы (1) относительно данного линейного преобразования. Знание инвариантов системы (1) значительно упрощает исследования и дает возможность найти канонический вид данной системы.

Для отыскания инварианта поступим следующим образом. Правые части уравнений суть квадратичные формы, порожденные симметрическими матрицами A и B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (3)$$
$$a_{12} = a_{21} \quad b_{12} = b_{21}.$$

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\det(A + \lambda B) = 0 \quad (4)$$

и вычислим его дискриминант:

$$\Delta = (2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2). \quad (5)$$

Определение. Дискриминантом системы (1) называется дискриминант квадратного уравнения (4), задаваемый формулой (5).

Теорема. Если в системе (1) произвести невырожденное линейное преобразование, то она преобразуется в однородную систему

того же вида, причем дискриминант преобразованной системы равен дискриминанту данной системы уравнений (1), умноженному на квадрат определителя матрицы линейного преобразования. Доказательство. Подставляя (2) в (1), получим:

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{\alpha\gamma - \beta\delta} [a_0\xi^2 + 2a_1\xi\eta + a_2\eta^2]; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{1}{\alpha\gamma - \beta\delta} [b_0\xi^2 + 2b_1\xi\eta + b_2\eta^2],\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}a_0 &= \alpha^2 (\gamma a_{11} - \beta b_{11}) + 2\alpha\delta (\alpha a_{12} - \beta b_{12}) + \delta^2 (\gamma a_{22} - \beta b_{22}), \\ a_1 &= \alpha\beta (\gamma a_{11} - \beta b_{11}) + (\alpha\gamma + \beta\delta) (\gamma a_{12} - \beta b_{12}) + \delta\gamma (\gamma a_{22} - \beta b_{22}), \\ a_2 &= \beta^2 (\gamma a_{11} - \beta b_{11}) + 2\beta\gamma (\gamma a_{12} - \beta b_{12}) + \gamma^2 (\gamma a_{22} - \beta b_{22}), \\ b_0 &= \alpha^2 (-\delta a_{11} + \alpha b_{11}) + 2\alpha\delta (-\delta a_{12} + \alpha b_{12}) + \delta^2 (-\delta a_{22} + \alpha b_{22}), \\ b_1 &= \alpha\beta (-\delta a_{11} + \alpha b_{11}) + (\alpha\gamma + \beta\delta) (-\delta a_{12} + \alpha b_{12}) + \\ &\quad + \delta\gamma (-\delta a_{22} + \alpha b_{22}), \\ b_2 &= \beta^2 (-\delta a_{11} + \alpha b_{11}) + 2\beta\gamma (-\delta a_{12} + \alpha b_{12}) + \\ &\quad + \gamma^2 (-\delta a_{22} + \alpha b_{22}).\end{aligned}$$

Напишем уравнение $\det(\bar{A} + p\bar{B}) = 0$ и вычислим его дискриминант. Матрицы $\bar{A}$ и $\bar{B}$ симметричны:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}; \\ \bar{\Delta} (2a_1b_1 - a_0b_2 - b_0a_2)^2 - 4(b_0b_2 - b_1^2)(a_0a_2 - a_1^2).\end{aligned}\quad (7)$$

После несложного вычисления можно убедиться, что

$$\begin{aligned}(2a_1b_1 - a_0b_2 - b_0a_2) &= 2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\alpha\beta + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\delta\gamma + \\ &\quad + (\alpha\gamma + \beta\delta)(2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}), \\ (b_0b_2 - b_1^2) &= (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\alpha^2 + (2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})\alpha\delta + \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\delta^2, \\ a_0a_2 - a_1^2 &= (b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\beta^2 + (2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})\beta\gamma + \\ &\quad + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\gamma^2.\end{aligned}$$

Подставив эти значения в (7), получим

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} [(2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(a_{11}a_{22} - \\ - a_{12}^2)] (\alpha\gamma - \beta\delta) = \Delta \cdot (\alpha\gamma - \beta\delta)^2, \\ \bar{\Delta} = \Delta \cdot (\alpha\gamma - \beta\delta)^2,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если в качестве линейных преобразований взять унимодулярное линейное преобразование, то получим, что

$$\bar{\Delta} = \Delta.$$

Итак, мы показали, что при любой линейной замене переменных с детерминантом единица дискриминант системы (1) не изменяется. Именно этот дискриминант является инвариантом системы (1) относительно линейного унимодулярного преобразования.

Следствие 2. Рассматривая инвариант относительно линейного преобразования одной системы в другую, мы установили, что дискриминант является инвариантом относительно линейного преобразования по формулам (2) при $\alpha\gamma - \beta\delta = 1$. Однако наши выводы являются более общими, так как при преобразовании системы (1) ее

дискриминант умножался на $(\alpha\gamma - \beta\delta)^2$. Следовательно, полученные результаты верны и в случае

$$\alpha\gamma - \beta\delta = -1.$$

Пользуясь случаем, выражаю искреннюю благодарность А. М. Молчанову за внимание к данной работе.

Л. И. Козелов

Бирчинсли гејри-хэтти дифференсиал тэнликлэрин
хэтти чевирмэлэрэ көрә инварианты

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә унимодулјар чевирмэләр заманы квадрат тәнлијин дискриминантынын дәјишмәмәси исбат олунур.

УДК 519.2, 622. 241. 6

А. М. ГАМБАРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ ПРИ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАЗБУРИВАЕМЫХ ПОРОД НА ПРОХОДКУ И МЕХАНИЧЕСКУЮ СКОРОСТЬ ПРОХОДКИ

Одним из важнейших и нерегулируемых параметров, влияющих на проходку и ее механическую скорость, являются физико-механические свойства разбуриваемых пород. От этого параметра в большой степени зависит выбор оптимального значения режимных параметров процесса глубокого бурения, при котором получают наилучшие экономические показатели. Поэтому определение влияния физико-механических свойств разбуриваемых пород на проходку и механическую скорость проходки имеет не только теоретическое, но и важное практическое значение.

Чтобы установить влияние физико-механических свойств на проходку и ее механическую скорость, нами проанализированы данные работы 100 долот типа Б269С, проработавшие в III, IV, V и VI горизонтах. Продуктивной толщии в скв. 7, 41, 53, 64, 102, 118 и 425, которые охватывают всю площадь Карабаглы месторождения Ширван. При отборе долот для анализа мы исходили из того, что все другие факторы, которые могли бы влиять на проходку h и механическую скорость проходки v_m должны быть примерно одинаковыми, т. е. были взяты данные тех долот, которые отработали при одинаковых значениях режимных параметров процесса бурения. Все отобранные долота работали с применением турбобура ТС4-8" и 9" бурильными трубами.

Такой способ отбора долот дает возможность в первом приближении исключить влияние других факторов, кроме физико-механических свойств разбуриваемых пород и значения режимных параметров, на h и v_m .

Анализом установлено, что долота при разбуривании III, IV, V и VI горизонтов продуктивной толщии имеют совершенно различные значения h и v_m . Это различие часто колеблется в очень широких пределах (табл. 1). Расхождение h и v_m вполне закономерно и во многом объясняется различием физико-механических свойств разбуриваемых горных пород. Все факторы, влияющие на изменение h и v_m не поддаются точному расчету и в той или иной степени носят случайный характер. Поэтому более правильным и практически возможным путем определения влияния физико-механических свойств разбуриваемых пород на h , v_m и их средние величины следует считать обработку большого количества промысловых данных методом математической

Горизонты продуктивной толщии

III		IV		V		VI	
h	v_m	h	v_m	h	v_m	h	v_m
1	2	3	4	5	6	7	8
26	1,95	22	1,37	11	0,95	27	1,86
28	1,53	17	1,36	19	0,85	34	2,23
28	1,95	23	1,80	26	1,24	22	1,52
4	0,67	18	1,14	31	1,79	27	1,31
15	0,89	15	0,75	25	1,79	30	1,64
17	0,86	19	1,19	18	1,07	26	2,02
19	1,29	14	0,86	26	2,00	29	1,76
25	1,96	27	1,60	18	1,33	34	2,34
18	1,44	20	2,35	4	1,00	23	2,33
19	1,68	10	1,67	15	1,50	13	1,15
20	1,82	9	1,28	21	1,68	6	1,20
9	1,38	15	0,94	18	1,28	16	1,48
14	1,08	15	1,15	11	1,00	17	1,15
8	0,84	4	1,00	7	0,66	17	1,06
26	1,63	12	1,20	5	0,83	17	1,62
21	1,31	19	1,12	8	1,00	12	0,42
21	1,31	17	1,04	10	1,82	11	1,47
20	1,82	31	1,88	6	1,71	4	0,89
11	1,54	10	2,22	11	1,29	16	2,29
15	1,28	27	1,59	19	1,38	27	1,72
25	2,08	20	1,38	10	1,18	12	1,60
5	1,00	21	1,56	18	1,72	27	2,01
19	1,65	21	1,83	17	1,55	23	2,41
29	2,42	16	1,36	15	1,53	31	2,00
23	1,75	31	2,41	23	1,77	31	1,83

статистики. Можно показать, что если случайные ошибки распределены по нормальному закону, то наиболее вероятным значением измеряемой величины является среднее арифметическое наблюдаемых величин [1]. Поэтому, чтобы использовать среднее арифметическое значение h и v_m , нам необходимо доказать, что они распределены по нормальному закону.

Вероятности распределения величин среднего значения проходки и механической скорости проходки III горизонта представлены в табл. 2, по которой построены функции распределения $F(x)$ и $F(y)$ в виде полигонов изменения h и v_m от числа экспериментальных данных n_x (рис. 1 и 2). Плотность функции распределения близка к нормальному распределению.

Для эмпирического распределения среднее [арифметическое значение $\bar{x}$, его дисперсия D и среднее квадратичное отклонение σ вычислены с помощью следующих формул [2]:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s x_i n_i \dots (1); D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^s (x_i - \bar{x})^2 n_i \dots (2); \sigma = \sqrt{D}, \quad (3)$$

где s —количество интервалов,

x_i —середина i -го интервала,

n_i —число наблюдений в i -ом интервале.

Численные значения среднего арифметического, стандарта (среднего квадратичного отклонения) и дисперсии проходок и механических

Таблица 2

№ интервала	Интервалы изменения	Середина интервала x_1	Эмпирическая частота в интервале n_x	t	$z(t)$	Теоретическая частота в интервале n'_x	Взвешенные квадраты отклонений $(n_x - n'_x)^2$ n'_x
			для h_m				
1	3,5—7,5	5,5	2	8	1,841	0,0733	7,8262
2	7,5—11,5	9,5	3		1,280	0,1758	
3	11,5—15,5	13,5	3		0,718	0,3084	
4	15,5—19,5	17,5	5	7	0,157	0,3941	5,2600
5	19,5—23,5	21,5	5		0,404	0,3677	
6	23,5—27,5	25,5	4		0,965	0,2504	
7	27,5—31,5	29,5	3	1,527	0,1243	1,7449	$\lambda^2 = 0,634$
			25			23,7804	
		для σ_m					
1	0,65—1,05	0,85	5	5	1,420	0,1455	4,6141
2	1,05—1,45	1,25	7		0,510	0,3504	
3	1,45—1,85	1,65	8		0,401	0,3683	
4	1,85—2,25	2,05	4		1,311	0,1690	
5	2,25—2,65	2,45	1		2,222	0,0338	
			25			24,2863	$\lambda^2 = 1,030$

скоростей для всех четырех горизонтов приведены в третьем, четвертом и пятом столбцах табл. 3.

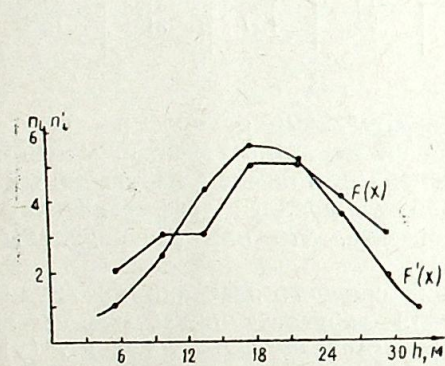


Рис. 1.

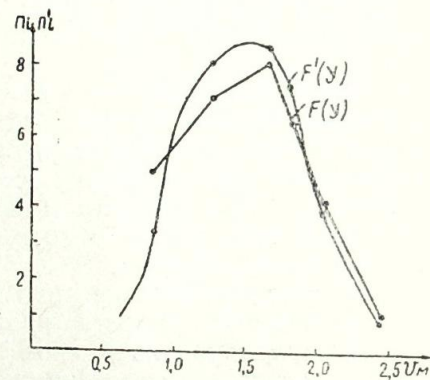


Рис. 2.

По двум первым параметрам эмпирические распределения, приведенные в табл. 2, были выравнены при помощи закона Гаусса (нормального закона распределения), согласно которому теоретические значения частот n'_x для заданных значений x вычисляются по равенству

$$n'_x = \frac{n \cdot \Delta x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (4)$$

где n — количество наблюдаемых данных,

Δx — величина одинаковых групп или интервалов, на которые разбиваются наблюдаемые значения. В нашем случае для проходок (см. табл. 2) $\Delta x = 4$ м, а для механи-

ческой скорости $\Delta x = 0,4$ м/час. Для облегчения вычисления теоретических частот можно пользоваться формулой

$$n'_x = \frac{n \cdot \Delta x}{\sigma} \cdot z(t), \quad (6)$$

где

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t = \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma}. \quad (5)$$

Таблица 3

Горизонт	Механич. скорость проходки	Среднее арифметич. значение x	Среднее квадратич. отклонение σ	Дисперсия D	Число степеней свободы κ	Критерий согласия λ^2	Вероятность p
III	h	18,62	7,1235	50,5856	2	0,634	0,73
	v_m	1,474	0,4393	0,1930	2	1,030	0,61
IV	h	17,82	6,0842	37,0176	1	0,375	0,75
	v_m	1,426	0,4575	0,2093	1	1,030	0,32
V	h	14,94	7,1447	51,0462	2	4,427	0,11
	v_m	1,330	0,3578	0,1280	1	3,185	0,08
VI	h	21,20	7,8665	61,8820	2	0,980	0,62
	v_m	1,780	0,4410	0,1945	1	0,683	0,43

Вычислив t и определив из табл. 1 работы [2] $z(t)$, значения которых для III горизонта приведены в пятом и шестом столбцах табл. 2, мы определяем значения n'_x , которые также приведены в вышеуказанной таблице в седьмом столбце. По вычисленным значениям n'_x построены теоретические кривые $F'(x)$ распределений (см. рис. 1, 2). Для оценки согласованности экспериментального распределения $F(x)$ с теоретическим $F'(x)$ воспользуемся критерием согласия λ^2 (критерием Пирсона). Для этого по формуле

$$x_2 = \frac{(n_x - n'_x)^2}{n_x} \quad (7)$$

вычисляем взвешенные квадраты отклонений, значение которых приведено в восьмом столбце табл. 2, и определяем особое число κ — число степеней свободы. Вычисляя закон Гаусса, мы при помощи наших частот нашли для него $\bar{x}$ и σ и таким образом связали экспериментальные частоты с двумя условиями. Поэтому число степеней свободы определяем по формуле

$$\kappa = l - 2, \quad (8)$$

где l — количество сравниваемых интервалов. Числовые значения κ и критерия согласия λ^2 для всех четырех горизонтов продуктивной толщи приведены в шестом и седьмом столбцах табл. 3.

Из табл. 3 работы [3] для всех значений λ^2 и κ определены вероятности, значения которых приведены в седьмом столбце табл. 3 данной статьи. Как видно из этой таблицы, все значения согласованности экспериментальных кривых с теоретическими не вызывает сомнения, т. е. расхождение между экспериментальными и теоретическими частотами можно считать случайными [4]. Возникает необходимость определения влияния различных горизонтов на изменение h и v_m в отдельности. Это можно установить сравнением средних значений проходок и механических скоростей по отдельным горизонтам. Вообще при сопоставлении двух условий бурения (например, влияние физико-механи-

ческих свойств отдельных разбуриваемых горизонтов) необходимо выяснить, случайно или неслучайно различаются показатели бурения в нашем случае h и v_m . Если различие показателей случайно, то это указывает на недостаточность данных, использованных при определении средних значений h и v_m , или идентичность сравниваемых условий бурения.

Решить вопрос о случайности или неслучайности различия средних показателей, полученных при различных условиях бурения, можно оценкой

$$\kappa_t = n_1 + n_2 - 2 \quad (9)$$

величины отношения [5]:

$$t' = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{\bar{x}}}, \quad (10)$$

где

$$s_{\bar{x}} = s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}}. \quad (11)$$

При

$$s = \sqrt{\frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2}{\kappa_t}} = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum (x_2 - \bar{x}_2)^2}{\kappa_t}} \quad (12)$$

значение t' подчинено распределению Стьюдента, где индекс 1 соответствует одному условию бурения, индекс 2—другому. Отношение t' оцениваем по таблице Стьюдента—Фишера. Если найденному значению t' при данном κ_t соответствует большая вероятность, то различие средних величин существенно и обусловлено различием условий бурения, в противном случае это различие случайно.

Таблица 4

Сумма	Среднее арифметическое	s	$s_{\bar{x}}$	t'	κ_t	p по табл. 5 [3]
465	18,62	7,277	2,0580	1,788	48	0,92
37,13	1,474	0,409	0,1156	1,246	48	0,78
453	17,82	6,773	1,9150	1,504	48	0,85
36,05	1,426	0,419	0,1185	0,810	48	0,58
532	21,20	7,669	2,1700	2,885	48	0,99
43,31	1,780	0,410	0,1160	3,879	48	0,99

Для примера рассмотрим данные, приведенные в табл. 1. Результаты вычисления по формулам (9)—(12) и вероятности приведены в табл. 4. Средние значения проходок и механических скоростей проходки при бурении в различных горизонтах сравнены со средним значением проходки и механической скорости проходки при бурении V горизонта продуктивной толщи. Из табл. 4 видно, что коэффициенты вероятностей для проходок больше чем 0,85, а для механических скоростей проходки больше 0,55. Так как эти вероятности большие, то можно считать различие вычисленных средних значений h и v_m на долото не случайным, а существенным и обусловленным различием в физико-механических свойствах III, IV, V и VI горизонтов.

Выводы

1. Применение методов математической статистики при обработке данных позволяет определить влияние физико-механических свойств разбуриваемых пород на проходку и ее механическую скорость.

2. Максимальное значение проходки и ее механическая скорость на площади Карабагы месторождения Ширван получается при бурении VI горизонта продуктивной толщи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутер Р. С. и Овчинский Б. В. „Элементы численного анализа и математической обработки результатов. М., 1962.
2. Смирнов Н. В., Душин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М., 1965.
3. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. М., 1966.
4. Рамановский В. И. Применение математической статистики в опытном деле. Гостоптехиздат, 1947.
5. Федоров В. С., Беликов В. Г. Методы обобщения передового опыта в бурении. Гостоптехиздат, 1962.

А. М. Гамбаров

Газылан сүхурларын физики-механики хусусијјәтләринин газыманын кедишинә вә онун механики сүр'әтинә олан тә'сирини гижмәтләндирмәдә ријазии статистика методунун тәтбиғи

ХУЛАСӘ

Мәғаләдә ријазии статистика методундан истифадә едәрәк дағ сүхурларынын газымасы заманы онларын физики-механики хусусијјәтләринин газыманын кедишинә вә онун механики сүр'әтинә тә'сириндән бәһс олунур.

УДК. 533:621. 385. 8

Ч. А. ЭФЕНДИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ВИДИКОНА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ СЧИТЫВАНИЯ ПРИМЕНительно К ТЕЛЕВИЗИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ УСТРОЙСТВАМ

Широкое применение телевизионных передающих трубок для специфических целей в телевизионно-вычислительных элементах ставит исследователей перед необходимостью их всестороннего изучения в режимах работы, несвойственных для обычных телевизионных систем. Одной из задач подобного рода является исследование зависимости величины видеосигнала от скорости считывания потенциалов рельефа мишени и инерционных свойств видикона от режима коммутации. В настоящей статье приводится методика этих исследований и схема измерительной установки.

Наиболее часто в датчиках систем телевизионно-вычислительной автоматики применяются передающие трубки типа видикон, отличающиеся малыми габаритами и высокой эксплуатационной надежностью. Выпускаемые промышленностью видиконы предназначены, как правило, для систем телевизионного кино и применение их в телевизионно-вычислительной автоматике (ТВА) требует выбора специального режима развертки. При этом необходимо учесть, что оптимальный период накопления для этих видиконов равен примерно 0,04 сек, т. е. цикличность процесса накопления соответствует частоте 25 гц. Эта особенность учитывается при построении измерительной схемы. Блок-схема измерительной установки представлена на рис. 1 и состоит из блока передающей трубки 1, синусоидального генератора развертки 2, генератора управляющих импульсов 3, видеоусилителя 4, осциллографа 5, блока делителя частоты 6.

На блок передающей трубки 1 проецируется изображение оптической мишени (рис. 2). От генератора 2 на блок 1 поступают синусо-косинусные развертывающие токи. Синусоидальный сигнал от того же блока 2 поступает на блок делителей частоты 6, коэффициент деления которого подбирается так, чтобы при изменении частоты развертки на выходе делителя всегда получался импульс с частотой повторения равной 25 гц. Этот импульс поступает на блок 3 (генератор импульсов) для запуска. От генератора 3 на управляющий электрод передающей трубки 1 поступает отпирающий импульс, длительность которого равна или больше периода колебаний генератора развертки 2. В момент отпирающей передающей трубки возникает видеосигнал, который через усилитель 4 поступает на измерительный

осциллограф 5. Таким образом, считывание потенциального рельефа мишени происходит в течение промежутка времени, равного длительности управляющих импульсов, причем при круговой развертке.

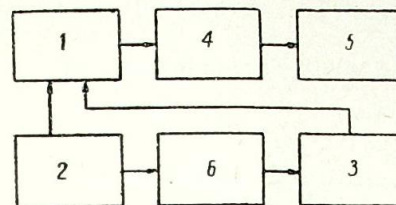


Рис. 1.

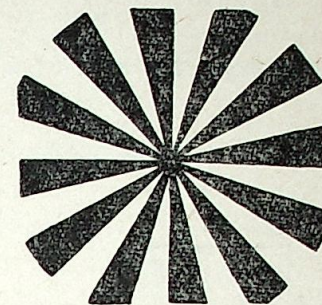


Рис. 2.

Настоящая работа состоит из двух частей: первая—исследование зависимости величины видеосигнала на нагрузке видикона при изменении скорости считывания; вторая—инерционные свойства при переменной скорости считывания.

1. Измерение зависимости $U_c = \varphi(f)$ производится изменением частоты развертывающего тока от 500 до 10 000 гц. Скорость считывания U_s определяется числом коммутируемых элементов мишени в единицу времени:

$$U_s = 2 \pi \delta \frac{R}{T_s}, \quad (1)$$

где R —радиус круга, считываемого электронным пучком на мишени передающей трубки,

T_s —время одного цикла считывания (одного оборота развертывающего луча),

δ —число элементов, приходящееся на единицу длины мишени.

При синусо-косинусных развертывающих токах имеем

$$R = x(u_a, I_x) + jy(u_a, I_y), \quad (2)$$

где x и y —величины отклонения электронного луча, соответственно, по оси абсцисс и ординат. Из [3] следует, что

$$x = \kappa_x I_x L_{nx}, \quad (3)$$

$$y = \kappa_y I_y L_{ny}, \quad (4)$$

где

$$\kappa_i = \frac{0,39 \cdot a n_i}{d_0 \sqrt{u_a}} \quad (i = x, y),$$

a, d_0 —длина и средний диаметр отклоняющей катушки, n_x, n_y, I_x, I_y —числа витков и токи в отклоняющих катушках, u_a —напряжение на аноде трубки,

L_{nx}, L_{ny} —индуктивности отклоняющих катушек. В данном случае $L_{nx} = L_{ny} = L_n$. Для данной конструкции a, d_0 и n_i постоянны, а u_a поддерживается неизменным, тогда:

$$x = \kappa_x L_n I_m \sin \omega t; \quad (5)$$

$$y = \kappa_y L_n I_m \cos \omega t,$$

откуда имеем

$$R = K L_n I_m.$$

Определим значение тока I_m , воспользовавшись эквивалентной схемой рис. 3, где E_r —э. д. с. генератора развертки, r_0 —суммарное активное сопротивление генератора и отклоняющей катушки;

$$I_m = \lambda(f) E_r. \quad (8)$$

Подставив выражение (8) в (7), получим

$$R = \kappa_1 \lambda(f) E_r \quad (9)$$

здесь $\lambda(f)$ —полная проводимость цепи при переменной частоте;

$$U_s = \kappa_2 \lambda(f) E_r, \quad (10)$$

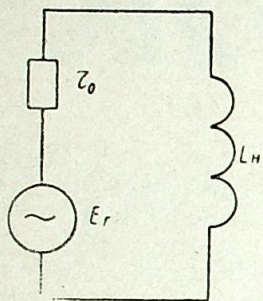


Рис. 3.

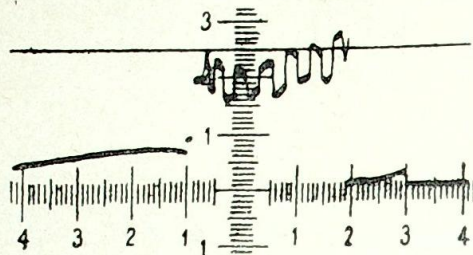


Рис. 4. Осциллограмма видеосигнала. Масштаб напряжений (по вертикальной оси): 0,1 в. на 1 дел.; масштаб времени (горизонтальная ось): 60 мксек на 1 дел.

Из (10) определим

$$E_r = \frac{U_s(f)}{\lambda(f) \kappa_2}. \quad (11)$$

Таким образом, для получения линейной зависимости $u_c = \varphi(t)$ необходимо E_r поддерживать в соответствии с (11). Кроме того, выходное напряжение генератора развертки перед началом измерений калибруется следующим образом: отключается вертикальная отклоняющая катушка и устанавливается так, чтобы считывающий луч касался сигнального кольца мишени передающей трубки. Попадание электронного луча на сигнальное кольцо в начале и в конце рабочего хода развертки наблюдается на осциллограмме в виде всплесков

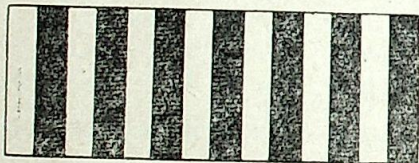


Рис. 5.

видеосигнала (рис. 4). В качестве изображения для проекции на фотомишень используется калибровочная мишень, изображенная на рис. 5. После калибровки измерения производятся уже при круговой развертке с амплитудой развертывающего напряжения на 5%, меньше, чем установленная при калибровке. В качестве оптической меры в этом случае используется изображение, представленное на рис. 2.

Результаты исследований показывают, что с ростом частоты (скорости) развертки от 1000 до 10000 гц видеосигнал неизменно возрастает. Это видно из рис. 6 а, б. Рост величины видеосигнала от частоты развертки, или вернее от скорости считывания потенциального рельефа, объясняется тем, что растет скорость коммутации зарядов элементарных емкостей мишени [2]. При этом следует отметить, что на частотах развертки выше уровня $f = 2 \text{ кГц}$ зависимость $u_c = \varphi(f)$ существенно нелинейна и u_c асимптотически приближается к некоторому $u_{c \text{ max}}$. Это объясняется тем, что с увеличением частоты развертки трудно согласовать внутреннее сопротивление видеокон с нагрузкой и

2. Исследование инерционности видеокон заключается в измерении величины видеосигнала при первом считывании потенциального рельефа и видеосигнала при повторном (на втором круге) считывании потенциального рельефа тех же участков мишени. С этой целью длительность управляющего импульса от блока 3, отпирающего ток луча передающей трубки, выбирается несколько (на 20—25%) большей, чем время одного полного круга развертки.

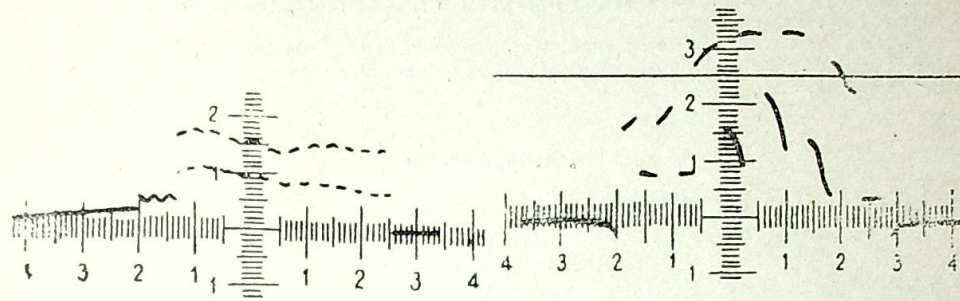


Рис. 6 а. Осциллограмма видеосигнала. Масштаб напряжений (по вертикальной оси): 0,1 в. на 1 дел.; масштаб времени (горизонтальная ось): 25 мксек на 1 дел.

Рис. 6 б. Осциллограмма видеосигнала. Масштаб напряжений (по вертикальной оси): 0,2 в. на 1 дел.; масштаб времени (горизонтальная ось): 1,5 мксек на 1 дел.

Таким образом, на осциллограмме видеосигналов (рис. 6) изображены сигналы первого и второго считывания. Осциллограммы 6а и 6б отличаются по внешнему виду, так как на рис. 6б изображена лишь анализируемая часть периода считывания, а не весь цикл развертки. Кроме того, при увеличении частоты развертки на выходной видеосигнал накладывается напряжение развертки из-за наличия паразитных емкостных связей генератора развертки и входных цепей видеоусилителя, это явление несколько не влияет на результаты исследования, а лишь несколько изменяет форму осциллограммы видеосигнала.

На осциллограммах, приведенных на рис. 6, видно, что при скоростях считывания $V_{10 \text{ кГц}}$ величина остаточного видеосигнала u_n соизмерима с видеосигналом первого считывания u_c , причем с увеличением скорости u_n стремится к значению u_c и на скоростях близких к $V_{10 \text{ кГц}}$, получается $u_c \approx u_n$. При уменьшении скорости считывания отношение $\frac{u_c}{u_n}$ увеличивается и на скорости $V_{1 \text{ кГц}}$, соответствующей

частоте развертки $f = 1000 \text{ гц}$, $u_c/u_n = 7 \div 8$. Таким образом инерционность системы ТВА с датчиком на видеоконе с круговой разверткой на частотах $f = 1000 \text{ гц}$ в 7 ÷ 8 раз меньше, чем в режиме, близком к принятому в широкоэмитальном телевидении ($f = 15 \text{ кГц}$). Кроме того, из приведенных осциллограмм видно, что по мере снижения скорости считывания наблюдается глубокое уменьшение u_n , свидетельствующее о том, что при заданном (в данном случае) уровне освещенности ($2 \div 3 \text{ лс}$) преобладает коммутационная составляющая инерционности, зависящая от „полноты стирания“ потенциального рельефа, а не фотоэлектрическая.

Изложенная методика измерений дает возможность определять оптимальные скорости развертки для передающих трубок использующих принцип накопления (т. е. не только видеокон), во-первых, с точки зрения получения достаточной (для ввода в систему ана-

лиза) величины видеосигнала, а во-вторых—построить телевизионный датчик, обеспечивающий заданное быстродействие всей системы телевизионно-вычислительной автоматики, так как значительно снижен остаточный видеосигнал мишени. Это особенно важно при проектировании системы ТВА с заданной скоростью быстродействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левит А. Б. „Техника кино и телевидения“, 1962, № 1.
2. Гуревич С. Б. Физические процессы в передающих телевизионных трубках. Физматгиз, М., 1958.
3. Халвин А. М. Основы телевизионной техники. „Сов. радио“, 1955.
4. Гершберг А. Е. Передающие трубки, использующие внутренний фотоэф. фект. „Энергия“, М., 1964.

Ч. А. Эфендијев

Телевизија автоматикасында тэтбиг едилэн
видиконун бэ'зи хүсусијјэтлэринин дәјишэн охунма
шэраитиндэ тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Элверишли телевизија-һесаблама системи гурмаг үчүн телевизија веричисинин оптимал ајорма параметрлэрини тэ'јин етмэк лазым кэлир.

Телевизија техникасынын мүасир сәвијјәсиндэ әсас веричи элемент—топлама принципиндэ ишлэјән веричи бору (чох вахт видикон) тэтбиг едилер. Јајым телевизијасындан фэргли олараг, веричи-һесаблама системинин хүсусијјәтини нэзэрә алараг ајорма параметринин сечилмәси хүсуси әһәмијјәт кәсб едир.

Бу шэраитдә, бир тәрәфдән, мүвафиг ачылыш сүр'әти тэ'јин едилер, һәм дә чыхышда алынган тәсвир сигналынын сәвијјәси кифајәт дәрәчәдә бөјүк олур, диқәр тәрәфдән исә һәдәфдәки галыг сигналы нисбәтән эәиф олыныр ки, бу да чәлд ишлэјән веричинин јаранмасыны тә'мин едир. Экспериментал јохлама бу мүлаһизәләрин дүзкүн олдуғуну кәстәрир. Беләликлә, телевизија-һесаблама автоматикасы (ТһА) лајиһәсиндә веричи бору үчүн ачылыш сүр'әтинин оптимал гијмәтини тэ'јин етмэк хүсусилә зәруридир. Бу мәгсәдлә өлчү-контрол гурғусу тәләб олунур. Белә гурғунун тәркибиндә ашағыдакы элементләр олмалыдыр: сынагдан кечирилән бору (1), синусоидал ачылыш кенератору (2), идарәедичи импульс блоку (3), тәсвир күчләндиричиси (4), осцилограф (5) вә тезлик бөлүчүсү блоку (6).

Веричи борунун фотоһәдәфиндә әкс етдирилән оптик миралар сечиләрәк апаратура сынаг үчүн һазырланыр вә сонра һәм илк тәсвир сигналларынын амплитудлары, һәм дә һәдәфдәки галыг сигналлары гејд едилер. Апарылан тәчрүбә кәстәрир ки, растрын номинал өлчүсү вардырса, тезлик исә 1000 һс оларса, тәсвир сигналынын амплитуду јајым телевизија стандартына нисбәтән 4—5 дәфә аз олур. Ејни заманда галыг сигналынын илк охунма сигналына олан нисбәти тәминән 7—8 олур, һалбуки бу нисбәт јајым телевизијасында 1—2 илә мәһдуд олур.

Беләликлә, ачылыш тезлији 1000 һс-ә јахын олдуғда јајым телевизијасына нисбәтән ТһА јүксәк чәлдишләмәсини тә'мин етмэк олур.

Д. Б. БАЯСАНОВ, З. А. КЕРИМОВ

К ВОПРОСУ СТАТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ РАБОТЫ КОЛЬЦЕВЫХ ГАЗОВЫХ КОЛЛЕКТОРОВ

В крупных городах, представляющих собой совокупность объектов газоснабжения, расположенных относительно близко друг от друга, снабжение газом обычно ведется от нескольких источников (самостоятельных—промыслы, газопроводы или совмещенных—один газопровод с несколькими ответвлениями). В этих схемах нередко газоснабжение отдельных узловых потребителей-газопотребителей пунктов (ГРП) ведется от нескольких точек-источников газорегуляторных станций (ГРС). Здесь почти всегда целесообразно сооружение кольцевых газовых коллекторов, являющихся промежуточными звеньями между схемой потребления газа—городской системой газоснабжения среднего и низкого давления и схемой подачи газа—системой промыслов или магистральных газопроводов высокого давления.

При сооружении такой системы стремятся приблизить ее к симметричной схеме, учитывая требования гибкости и надежности ее работы. В общем виде такая схема для случая наличия трех узловых точек потребления и трех точек питания представлена на рис. 1. Такое кольцевание городских газовых коллекторов выгодно не только с точки зрения создания более гибкой и надежной схемы газоснабжения промышленных и бытовых потребителей в черте крупного города. Оно имеет и громадный технико-экономический эффект и технологически обосновано, так как создает надежные условия для бесперебойной подачи газа потребителям с учетом возможности сглаживания пиков в газопотреблении. Наиболее оптимальные с экономической точки зрения режимы газоснабжения обычно достигаются в случаях поддержания постоянного давления на входах ГРП при колебаниях нагрузки потребителей. Однако этот режим при существующих методах газоснабжения поддержать обычно не удается ввиду того, что при существующих схемах регулирования производительности ГРС в лучшем случае на их выходах удается стабилизировать давление газа. Для этой цели схемы регулирования ГРС обычно оборудуют изодромными регуляторами типа 04. При этих схемах регулирования производительности ГРС нельзя достигнуть оптимальных режимов газоснабжения потребителей газа. Как уже было отмечено выше, такой режим возможен только для случая поддержания постоянного давления на входах, питаемых ГРП, причем для любого практического диапазона колебаний газопотребления.

При существующих системах газоснабжения отдельных районов города примерные графики газопотребления по узловым ГРП обычно бывают известны. На их базе можно всегда рассчитать с учетом развития или реконструкции сети примерные перспективные графики газопотребления. В настоящее время важное значение имеет проблема расчета режимов работы систем автоматики производительности ГРС, которая удовлетворяла бы основному требованию эксплуатации — поддержанию постоянства давления питаемых ГРП при наличии кольцевых газовых коллекторов в системе газоснабжения и колебаниях газопотребления. Причем исходным здесь должны являться перспективные графики газопотребления по отдельным ГРП в системе газоснабжения, на базе которых можно быстро получить требуемую программу работы систем производительности ГРС, питающих газовый коллектор. В случае реализации этой идеи можно создать практически оптимальный режим газоснабжения, позволяющий полностью и эффективно удовлетворить требуемые графики газопотребления по отдельным ГРП в системе.

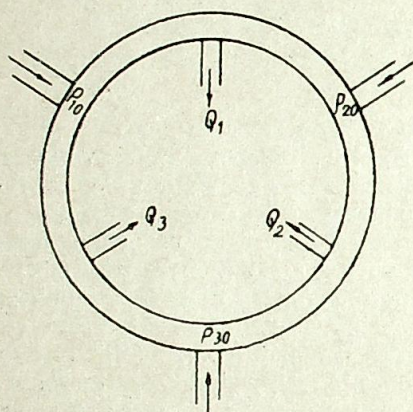


Рис. 1. Схема кольцевого газового коллектора.

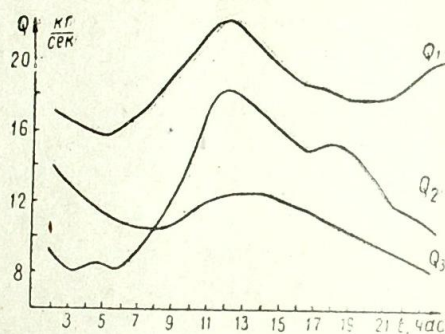


Рис. 2. Графики колебаний расходов газа по часам суток через ГРП.

Покажем путь решения этой задачи. Очевидно, оптимальный режим в системе будет выдержан, если в любой момент времени в рассматриваемой симметричной системе (рис. 1) будет выдержано условие

$$P_{\text{вх ГРП}}(t) = P_{\text{max}} = \text{const.}$$

Решение поставленной задачи легко может быть реализовано на модели системы. Однако для решения конкретных задач каждый раз создавать физический аналог практически невозможно, а методы математического моделирования должны в своем фундаменте иметь математически реализуемую систему, имеющую решение. Ниже излагается один из возможных аналитических путей реализации требуемой задачи для наиболее общего и в то же время простейшего случая — симметричной системы.

В исследуемом случае (рис. 1) газовый коллектор имеет три питающих ГРС и три точки подключения питаемых ГРП. Узлы подвода газа к коллектору обозначены соответствующими индексами давления P_{10} , P_{20} , P_{30} , точки подключения отводящих газопроводов ГРП — соответственно, P_1 , P_2 , P_3 . В данной схеме рассматривается случай, когда

$$P_1 = P_2 = P_3 = \text{const.}$$

Это позволяет вести расчет, не изменяя методики. Последняя сохраняется и для случая неравенства давлений в точках отводов газа от

коллектора. При изложении материала полагаем, что коллектор состоит из газопроводов одинакового сечения и точки подвода и отвода газа расположены по его длине симметрично, на расстоянии друг от друга. Считаем, что перспективные графики газопотребления по отдельным ГРП известны (рис. 2). В поставленной задаче требуется рассчитать программу изменения давлений в точках подвода газа к коллектору так, чтобы были удовлетворены перспективные графики газопотребления по отдельным ГРП системы при сохранении поставленных выше условий.

Исходя из реальных технологических условий полагаем заданными следующие параметры системы газоснабжения: длина участка коллектора между точками подачи и отбора (соседними) газа $L = 20$ км; диаметр трубы коллектора $d = 0,3$ м; газовая постоянная $R = 50 \frac{\text{кгМ}}{\text{кг}^\circ\text{C}}$; коэффициент гидравлического сопротивления труб коллектора $\lambda = 0,013$; абсолютная температура газа $T = 300^\circ\text{K}$; $P_1 = P_2 = P_3 = 3 \times 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$.

Как известно, весовой расход газа по соответствующим ГРП для статистики может быть определен из следующих равенств:

$$Q_1 = b \sqrt{P_{10}^2 - P_1^2} + b \sqrt{P_{20}^2 - P_1^2}; \quad (1)$$

$$Q_2 = b \sqrt{P_{20}^2 - P_2^2} + b \sqrt{P_{30}^2 - P_2^2};$$

$$Q_3 = b \sqrt{P_{30}^2 - P_3^2} + b \sqrt{P_{10}^2 - P_3^2}, \quad (3)$$

где коэффициент

$$b = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g \cdot d^5}{\lambda \cdot RTL}} = \frac{3,14 \cdot (0,3)^2}{4} \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,3}{0,013 \cdot 300 \cdot 50 \cdot 20 \cdot 50^3}} = 0,625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{сек.}$$

Подставляя значение коэффициента b в уравнения (1) — (3) и обозначив $P_{10}^2 = H_{10}$; $P_1^2 = H_1$; $P_{20}^2 = H_{20}$ и т. п., получим следующие соотношения:

$$\frac{Q_1 \cdot 10^4}{0,625} = \sqrt{H_{10} - H_1} + \sqrt{H_{20} - H_1}; \quad (4)$$

$$\frac{Q_2 \cdot 10^4}{0,625} = \sqrt{H_{20} - H_2} + \sqrt{H_{30} - H_2}; \quad (5)$$

$$\frac{Q_3 \cdot 10^4}{0,625} = \sqrt{H_{30} - H_3} + \sqrt{H_{10} - H_3}. \quad (6)$$

Из уравнения (4)

$$H_{20} = \frac{Q_1^2 \cdot 10^8 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_1 \sqrt{H_{10} - H_1} + 0,4 H_1}{0,4}, \quad (7)$$

а из (5)

$$H_{20} = \frac{1}{0,4} (10^8 \cdot Q_2^2 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_2 \sqrt{H_{30} - H_2} + 0,4 H_{30}). \quad (8)$$

Приравняв равенства (7) и (8), получим

$$10^8 \cdot Q_1^2 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_1 \sqrt{H_{10} - H_1} + 0,4 H_{10} = 10^8 \cdot Q_2^2 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_2 \sqrt{H_{30} - H_2} + 0,4 H_{20}. \quad (9)$$

Из уравнения (6) определим

$$H_{30} = \frac{1}{0,4} (10^8 \cdot Q_3^2 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_3 \sqrt{H_{10} - H_3} + 0,4 H_{10}). \quad (10)$$

Подставляя в (9) значение H_{30} из равенства (10), получим соотношение

$$\begin{aligned} 2Q_2 \sqrt{Q_3^2 \cdot 10^8 - 1,25 \cdot 10^4 \cdot Q_3 \sqrt{H_{10} - H_3} + 0,4 H_{10} - 0,4 H_2} = \\ = 10^4 Q_2^2 + 10^4 Q_3^2 - 10^4 Q_1^2 + 1,25 Q_1 \times \\ \times \sqrt{H_{10} - H_1} - 1,25 Q_3 \sqrt{H_{10} - H_3}. \end{aligned} \quad (11)$$

В целях большей наглядности дальнейшее решение задачи проведем для конкретного числового примера. Для момента времени $t = 2$ часа подставим в равенство (11) значения расходов Q_1, Q_2, Q_3 из графиков рис. 2. С учетом этих значений параметров получим квадратное уравнение:

$$H_{10}^2 - 13,1 \cdot 10^{10} \cdot H_{10} + 30,2 \cdot 10^{20} = 0,$$

откуда

$$H_{10} = \frac{13,1 \cdot 10^{10} \pm 7,1 \cdot 10^{10}}{2}.$$

Следовательно, для любого момента времени будем иметь два значения. В данном случае:

$$1. H_{10} = 1010 \cdot 10^8; \quad P_{10} = \sqrt{H_{10}} = 33,2 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2};$$

$$2. H_{10} = 300 \cdot 10^8; \quad P_{10} = \sqrt{H_{10}} = 17,3 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$$

При расчете для всех точек следует брать одно из этих значений, учитывая, что общие выводы и характер процесса при этом для обоих случаев будет идентичным. Для вышеуказанного момента времени искомые величины будут иметь следующие значения параметров:

$$P_{10} = 17,3 \cdot 10^4; \quad P_{20} = 10,82 \cdot 10^4; \quad P_{30} = 5,3 \cdot 10^4.$$

$t, \text{чав}$	Q_1 кг/сек	Q_2 кг/сек	Q_3 кг/сек	P_{10} кг/м	P_{20} кг/м ²	P_{30} кг/м ²
2	17,1	9,12	13,3	$17,3 \cdot 10^4$	$10,8 \cdot 10^4$	$5,3 \cdot 10^4$
4	16,5	7,97	11,7	$16,0 \cdot 10^4$	$11,1 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^4$
5	16,65	8,43	11,3	$16,2 \cdot 10^4$	$11,4 \cdot 10^4$	$4,7 \cdot 10^4$
6	16,9	7,97	10,8	$15,8 \cdot 10^4$	$11,8 \cdot 10^4$	$3,4 \cdot 10^4$
8	18,45	9,9	10,8	$14,7 \cdot 10^4$	$15,4 \cdot 10^4$	$3,9 \cdot 10^4$
10	20,2	14,9	11,6	$11,7 \cdot 10^4$	$20,8 \cdot 10^4$	$7,3 \cdot 10^4$
12	20,7	17,45	12,3	$12,1 \cdot 10^4$	$21,1 \cdot 10^4$	$7,9 \cdot 10^4$
14	18,8	15,6	12,5	$13,0 \cdot 10^4$	$17,6 \cdot 10^4$	$7,9 \cdot 10^4$
16	18,3	13,9	11,9	$13,4 \cdot 10^4$	$16,4 \cdot 10^4$	$6,6 \cdot 10^4$
17	18,35	13,6	11,4	$12,8 \cdot 10^4$	$16,9 \cdot 10^4$	$6,4 \cdot 10^4$
18	17,95	14,0	10,7	$12,0 \cdot 10^4$	$17,3 \cdot 10^4$	$6,2 \cdot 10^4$
19	17,7	14,7	10,1	$10,9 \cdot 10^4$	$18,0 \cdot 10^4$	$6,3 \cdot 10^4$
20	17,5	13,1	9,83	$11,6 \cdot 10^4$	$16,9 \cdot 10^4$	$5,3 \cdot 10^4$
22	17,9	11,6	8,75	$12,2 \cdot 10^4$	$17,1 \cdot 10^4$	$3,5 \cdot 10^4$
24	19,5	10,3	7,95	$16,8 \cdot 10^4$	$15,0 \cdot 10^4$	$5,3 \cdot 10^4$

Аналогичным образом можно рассчитать значения этих величин и для других моментов времени и свести их в таблицу. Такой расчет

для рассматриваемого случая был произведен. Полученные результаты сведены в таблицу, на основе данных которой построены графики, показывающие как должны изменяться давления в точках подачи газа в коллектор, чтобы был выдержан оптимальный режим газоснабжения, т. е. чтобы газопотребители были наиболее удовлетворены (рис. 3).

На основе графиков составляются программы для режимов изменения производительности ГРС в течение суток, которые могут быть реализованы специальными программными устройствами или при помощи средств счетно-решающей техники.

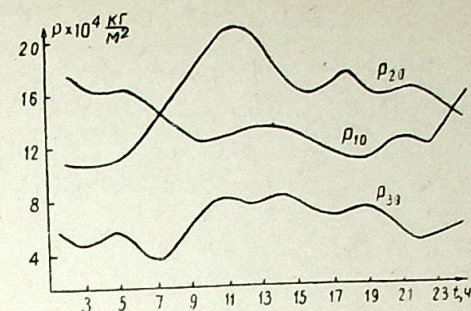


Рис. 3. Графики требуемого изменения давлений газа в точках подачи в коллектор по часам суток.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баясанов Д. Б. Автоматика и телемеханика в газоснабжении. Азеручпедгиз, 1961.
2. Баясанов Д. Б. Автоматическое управление магистральными газопроводами. Изд-во „Недра“, 1964.

Д. Б. Баясанов, З. Э. Кәримов

Һәлгәләнмиш газ кәмәри системинин
оптималь режимдә ишләмәсинә даир һесабат

ХҮЛАСӘ

Һәлгәләндирилмиш газ кәмәри системиндә оптималь режимнә җәлһәзләнгән газ тәҗһизатлар (ГТМ) киришиндә газын тәҗһизатлар сабит сахланымасы җолу илә әлдә етмәк олар.

Мүәсир газ тәҗһизатлар стансијалар (ГТС) 04-типли изодром тәҗһизатлар тәҗһизатлар олундуғу үчүн јухарыда көстәрдијимиз шәртә әмәл олуна билмәз. Бу, газ тәҗһизатында сәрфин даима замана көрә дәјишмәсиндән ирәли кәлир. Бурадан белә нәтичә чыхармағ олар ки, лазым олан оптималь режимнә әлдә етмәк үчүн ГТС-дә програмлы тәҗһизатлардан истифадә етмәк лазымдыр.

Мәғаләдә белә мүрәккәб газ тәҗһизатлар системләриндә ГРС-ин тәҗһизатларынә вериләчәк програмнын статик һесабатындан бәһс едилир.

А. А. САКОВИЧ, Д. О. ТРОЯНСКАЯ, В. А. КОСТРЮКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТИРИСТОРНОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

Развитие и совершенствование силовых полупроводниковых вентилей привело в настоящее время к созданию мощных преобразовательных устройств на большие токи и напряжения. Для надежной работы преобразователя выбор полупроводниковых вентилей необходимо производить по условиям их работы как в стационарном режиме, так и во время переходных процессов. Однако расчет токов и напряжений при переходных процессах в преобразователях связан с большим объемом вычислительной работы и в настоящее время без применения электронноцифровых или аналоговых машин нецелесообразен.

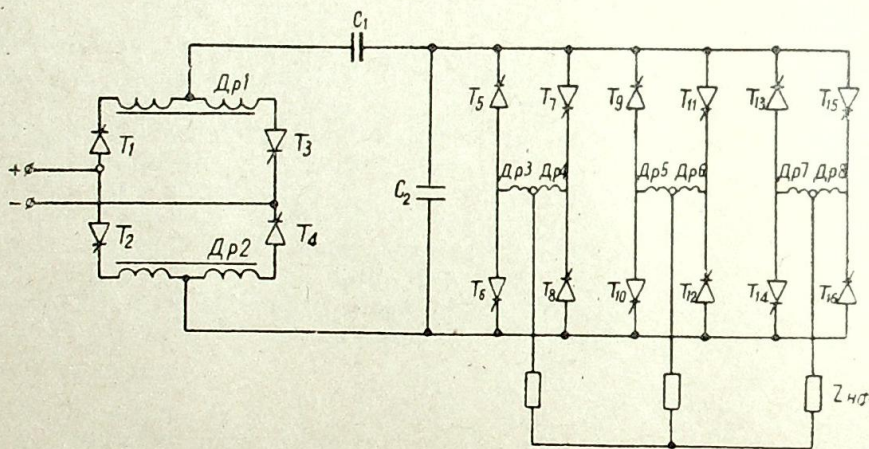


Рис. 1. Схема преобразователя.

Рассматриваемый преобразователь, схема которого представлена нарис.1, включает в себя однофазный инвертор повышенной частоты и трехфазный фазорасщепитель. Для обеспечения надежной коммутации тиристоры инвертора фазорасщепителя должны открываться с некоторым минимально допустимым углом запаздывания α . В нашем случае этот минимальный угол зажигания тиристоров фазорасщепителя равен 25° . Для работы преобразователя на активную нагрузку достаточно было бы подавать на тиристоры фазорасщепителя только импульсы управления, обеспечивающие работу в выпрямитель-

ном режиме (режим α). При индуктивном же характере нагрузки, например, при двигательной, когда ток значительно отстает от напряжения (больше, чем на полпериода промежуточной частоты),

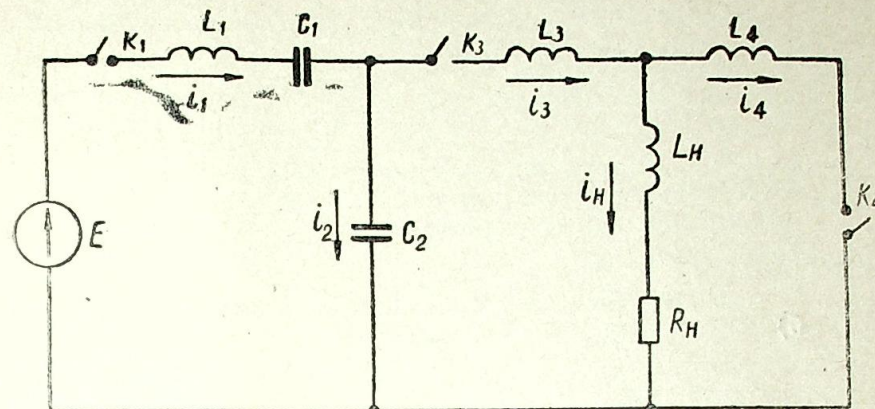


Рис. 2. Однофазная схема замещения преобразователя.

необходимо иметь импульсы управления тиристором фазорасщепителя, обеспечивающие их работу в инверторном режиме, и, позволяющие таким образом пропустить реактивный ток нагрузки (режим β). Эти импульсы подаются на тиристоры в конце полупериода промежуточной частоты.

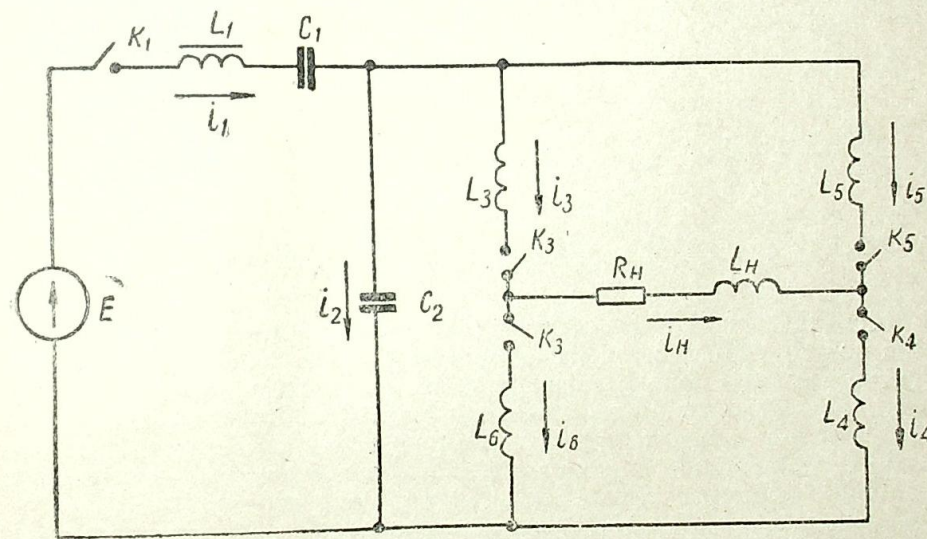


Рис. 3. Двухфазная схема замещения преобразователя.

Для расчета переходных процессов были приняты следующие схемы замещения: однофазная (рис. 2); двухфазная (рис. 3); полная (рис. 4): здесь E — напряжение на входе преобразователя, являющееся результатом попеременного подключения ко входу постоянного напряжения питания;

- L_1 — эквивалентная коммутирующая индуктивность;
- C_1 — последовательная коммутирующая емкость;
- C_2 — параллельная коммутирующая емкость;
- $L_3 - L_6$ — индуктивность реакторов фазорасщепителя;

R_n —сопротивление нагрузки;

L_n —индуктивность нагрузки.

С помощью этих схем замещения производится анализ следующих режимов работы преобразователя:

1) пуск преобразователя на активную и активно-индуктивную нагрузку, на АД и короткое замыкание;

2) частотный пуск двигателя (ступенчатый);

3) динамическое торможение двигателя;

4) изменение нагрузки:

а) наброс активно-индуктивной нагрузки;

б) сброс активно-индуктивной нагрузки;

в) изменение нагрузки двигателя.

5) аварийные режимы:

а) однофазное к.з. на входных шинах преобразователя;

б) пробой вентиля фазорасщепителя.

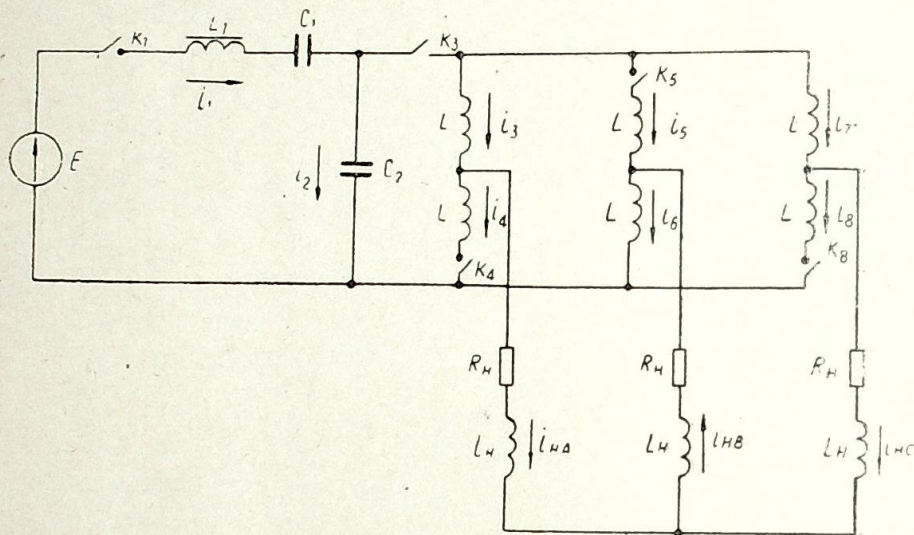


Рис. 4. Полная схема замещения преобразователя.

Рассмотрим включение системы преобразователь—двигатель. В этом случае асинхронный двигатель представляет для инвертора активно-индуктивную статическую нагрузку (рис. 2). В схеме замещения тиристоры преобразователя заменяются ключами k . Включение ключа k_1 имитирует включение тиристоров инвертора; k_2 —тиристоров фазорасщепителя, работающих в выпрямительном режиме (α); k_3 —тиристоров фазорасщепителя, работающих в инверторном режиме (β).

Преобразователь с нагрузкой представляет собой электрическую цепь с равномерно повторяющимися коммутациями. Период повторяемости процесса определяется схемой управления, поэтому система интегрально-дифференциальных уравнений составляется для каждого интервала времени между двумя соседними коммутациями с учетом непрерывности процессов в преобразователе и нагрузке (токи в индуктивностях и напряжения на емкостях не должны претерпевать разрывов непрерывности). В соответствии с этим

$$t_0 \leq t \leq t_a \quad \left| \begin{aligned} E &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt, \\ i_1 &= i_2. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

(2)

Решением системы уравнений (1) и (2) будет

$$i_1 = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t};$$

p_1, p_2 —корни характеристического уравнения;

$$Lp^2 + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = 0.$$

Для нахождения постоянных A_1 и A_2 используем граничные условия:

$$t = 0, i_1 = 0, U_{C_1} = U_{C_2} = 0.$$

При $t = t_a$, где $t_a = \frac{\alpha}{360f}$, находятся напряжения и токи на всех элементах схемы как производные тока i_1 .

Для второго интервала времени:

$$t_a \leq t \leq t_\beta \quad \left| \begin{aligned} E &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + U_{C_1\alpha} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + U_{C_2\alpha}, \\ U_{C_2\alpha} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt &= L_3 \frac{di_3}{dt} + i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt}, \\ i_3 &= i_n, \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

(4)

(5)

(6)

Решая совместно (3)–(6), получим

$$L_1 (L_3 + L_n) C_2 \frac{d^4 i_n}{dt^4} + L_1 C_2 R_n \frac{d^3 i_n}{dt^3} + \left[L_1 + \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) (L_3 + L_n) \right] \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) R_n \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C_1} i_n = 0.$$

откуда

$$i_n = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} + A_4 e^{p_4 t};$$

граничные условия:

$$\text{при } t = t_a \quad i = i_{1\alpha}, i_3 = i_n = 0, U_{C_1} = U_{C_1\alpha}, U_{C_2} = U_{C_2\alpha}.$$

Для третьего интервала времени:

$$a_\beta \leq t \leq t_\pi \quad \left| \begin{aligned} E &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + U_{C_1\beta} + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + U_{C_2\beta}, \\ \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + U_{C_2\beta} &= L_3 \frac{di_3}{dt} + i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt}, \\ L_4 \frac{di_4}{dt} &= i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt}, \\ i_1 &= i_2 + i_3, \\ i_3 &= i_n + i_4. \end{aligned} \right.$$

Решая совместно (7)–(11), получим

$$L_1 C_2 \left(\frac{L_3 L_n}{L_4} + L_3 + L_n \right) \frac{d^5 i_n}{dt^5} + C_2 R_n L_1 \left(\frac{L_3}{L_4} + 1 \right) \frac{d^4 i_n}{dt^4} + \left[L_1 \left(\frac{L_n}{L_4} + 1 \right) + \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) \left(\frac{L_3 L_n}{L_4} + L_3 + L_n \right) \right] \frac{d^3 i_n}{dt^3} + \left[L_1 \frac{R_n}{L_3} + \left(\frac{C_2}{C_1} + 1 \right) \left(\frac{L_3}{L_4} + 1 \right) R_n \right] \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \left(\frac{L_n}{L_4} + 1 \right) \frac{di_n}{dt} + \frac{R_n}{L_4 C_1} i_n = 0,$$

откуда

$$i_n = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t} + A_4 e^{p_4 t} + A_5 e^{p_5 t};$$

граничные условия: $t = t_\beta$;

$$i_4 = 0; i_n = i_{n\beta}; i_3 = i_{3\beta}; U_{C1} = U_{C1\beta}; U_{C2} = U_{C2\beta}.$$

Для расчета n полупериодов промежуточной частоты задается циклическая программа. Все вычислительные работы производятся на электронной цифровой вычислительной машине Минск-22.

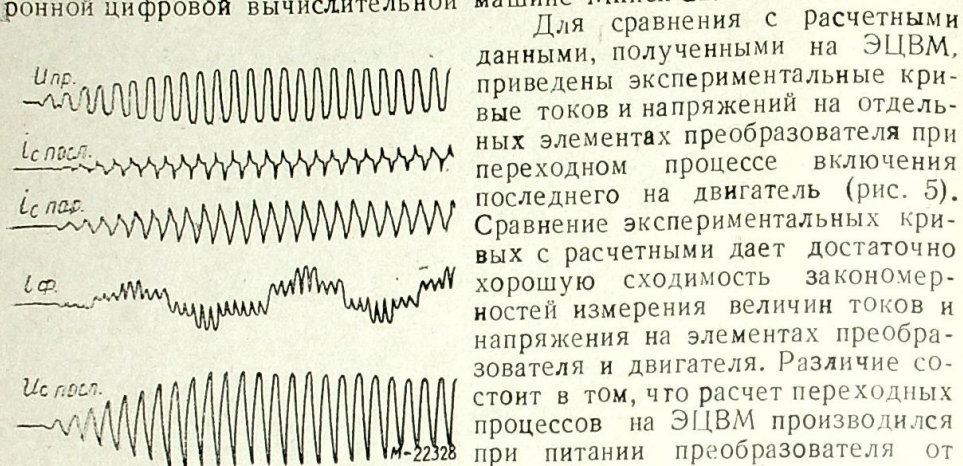


Рис. 5. Осциллограмма включения системы преобразователь—двигатель.

видно из осциллограммы (рис. 6), процесс включения преобразователя несколько затянут, в чем сказывается влияние индуктивности дросселя фильтра.

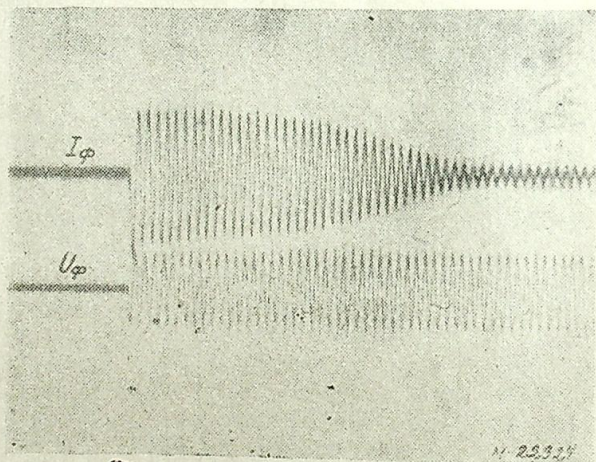


Рис. 6. Осциллограмма напряжения и тока статора асинхронного двигателя при питании от тиристорного преобразователя частоты.

На осциллограмме рис. 6 показаны кривые фазного напряжения и тока статора асинхронного двигателя мощностью 20 кВт при пуске последнего от тиристорного преобразователя. Из осциллограммы видно, что разгон асинхронного электродвигателя происходит при синусоидальных формах тока и напряжения.

Выводы

1. Расчеты различных переходных процессов в системе статический преобразователь—асинхронный двигатель показали хорошее совпадение с экспериментальными данными, что свидетельствует о правильном выборе схемы замещения.

2. Исследование переходных процессов на схемах замещения имеет большое практическое и теоретическое значение. Эти схемы позволяют исследовать одновременно большое число явлений, сопровождающих работу исследуемой установки.

3. Применение ЭЦВМ позволило значительно сократить затраты времени и одновременно увеличить количество рассчитываемых вариантов, необходимых для оптимального проектирования новых типов преобразовательных установок с требуемыми характеристиками.

4. Применение ЭЦВМ для расчета статического преобразователя частоты позволяет выбрать оптимальные соотношения между параметрами преобразователя и асинхронного двигателя, обеспечивающие наиболее благоприятное протекание переходных процессов, а также позволяет правильно выбрать защиту установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хамудханов М. З. Частотное управление асинхронным электроприводом. Ташкент, 1959.
2. Рейнке И. А. Тр. Ин-та энергетики, Ташкент, 1951.
3. Казовский Е. Я. Переходные процессы в электрических машинах переменного тока, М.—Л., 1962.
4. Савинков Программирование для ЭЦВМ „Минск-22“, 1965.

А. А. Сокович, Д. О. Тројанскаја, В. А. Кострјуков

Тиристор чевирчиси кечид просесинин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ жүксэк тезликли бирфазлы инвертор вэ үчфазлы фаздэ-јишдиричиси тэдгиг олунур. Инвертор ардычыл-паралел багланмагла симметрик көрпү схем илэ тэдгиг едилир.

Стационар режим вэ кечид просеси заманы жарымкечиричи вентиллэрин е'тибарлы ишлэмэси үчүн онлары сечэркэн иш шэраити нэ-зэрэ алынмалыдыр. Кечид просесинин несабы эвэзетмэ схем илэ апарылыр.

Гоншу коммутасија үчүн заманын һәр бир интервалында интеграл-дифференциал тэнликлэр гурулу. Бүтүн несаблајычы ишлэр „Минск-22“ машинында апарылыр.

Несабатдан алынган көстэричилэр тэчрүбэви көстэричилэр илэ мү-гајисэ едилир.

АРИФ С. ДЖАФАРОВ

О МНОЖИТЕЛЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ И О РАВНОМЕРНОЙ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ ЛАПЛАСА

1. Пусть $f(\theta, \varphi)$ — заданная и непрерывная функция на единичной сфере $S(0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ с рядом Лапласа:

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_k(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (1)$$

где

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

$P_k(t)$ — полиномы Лежандра порядка k . Пусть далее $l_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ — некоторая последовательность чисел. При помощи этих чисел и ряда (1) построим следующий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} l_k Y_k(\theta, \varphi),$$

где

$$Y_k(\theta, \varphi) = \frac{2k+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_k(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

Возникает вопрос, при каких условиях ряд (2) будет сходиться равномерно, т. е. данные числа l_k будут множителями равномерной сходимости для функции $f(\theta, \varphi)$. Это понятие было введено и исследовано (для тригонометрических рядов Фурье) Томичем [1] и получило дальнейшее развитие в работах Караматы [2], Бояничя [3] и Ф. И. Харшиладзе [4]. Мы пользуемся конструкцией работы [4].

Теорема 1. Пусть ряд (2) является рядом Лапласа некоторой непрерывной на единичной сфере функции и пусть

$$E_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(f) \cdot \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{k=0}^n (2k+1) l_k P_k(t) \right| dt = o(1), \quad (3)$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(\theta, \varphi)$ посредством сферических сумм порядка $\leq n$.

Тогда числа l_k являются множителями равномерной сходимости для функции $f(\theta, \varphi)$.

Доказательство. Рассмотрим суммы Валле—Пуссена для ряда (1):

$$\sigma_{m,n}[f; \theta, \varphi] = \frac{1}{m+1} [S_{n-m}[f; \theta, \varphi] + \dots + S_n[f; \theta, \varphi]],$$

$$(m = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

где

$$S_n[f; \theta, \varphi] = \sum_{k=0}^n Y_k(\theta, \varphi).$$

В работе [7] показано, что для любой непрерывной на единичной сфере функции

$$|f(\theta, \varphi) - \sigma_{n,m}[f; \theta, \varphi]| \leq c \frac{n+1}{m+1} E_{n-m}(f),$$

где c — постоянная, не зависящая от n и m .

Отсюда, в частности, для сумм $\tau_n[f; \theta, \varphi] = \sigma_{2n-1, n-1}[f; \theta, \varphi]$ следует

$$|f(\theta, \varphi) - \tau_n[f; \theta, \varphi]| \leq c E_n(f), \quad (4)$$

где c — другая постоянная, не зависящая от n . Суммы можно переписать в следующем виде:

$$\tau_n[f; \theta, \varphi] = \sum_{k=0}^n Y_k(\theta, \varphi) + \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) Y_{n+k}(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Пусть ряд $\sum_{k=0}^{\infty} l_k Y_k(\theta, \varphi)$ является рядом Лапласа непрерывной на единичной сфере функции $g(\theta, \varphi)$. Докажем, что условие (3) обеспечивает равномерную сходимость последовательности

$$S_n[g; \theta, \varphi] = \sum_{k=0}^n l_k Y_k(\theta, \varphi)$$

к функции $g(\theta, \varphi)$. Имеем, положив $m = \left[\frac{n+1}{2}\right]$,

$$|g(\theta, \varphi) - S_n[g; \theta, \varphi]| \leq |g(\theta, \varphi) - \tau_m[g; \theta, \varphi]| + |\tau_m[g; \theta, \varphi] - S_n[g; \theta, \varphi]|. \quad (6)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (6) не превосходит $c E_m(g)$ и равномерно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Далее, обозначив $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (2k+1) l_k P_k(t)$ через $K_n(t)$, имеем

$$\begin{aligned} S_n[g; \theta, \varphi] &= \sum_{k=0}^n l_k Y_k(\theta, \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_m[f; \theta', \varphi'] K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(\theta', \varphi') - \tau_m[f; \theta', \varphi']\} K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned}$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tau_m [f; \theta', \varphi'] K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= \sum_{k=0}^m l_k Y_k(\theta, \varphi) + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{k}{m}\right) l_{m+k} Y_{m+k}(\theta, \varphi) = \tau_m [g; \theta, \varphi].$$

Пользуемся формулой (5) и следующими соотношениями (см., например, [6], стр. 141–143):

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_k(\theta', \varphi') P_{k'}(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = 0, \quad (k \neq k');$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_k(\theta', \varphi') P_k(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \frac{4\pi}{2k+1} Y_k(\theta, \varphi).$$

Следовательно,

$$S_n [g; \theta, \varphi] - \tau_m [g; \theta, \varphi] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{f(\theta', \varphi') - \tau_m [f; \theta', \varphi']\} \times K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

В силу неравенства (4) и условия (3) получаем, что

$$|S_n [g; \theta, \varphi] - \tau_m [g; \theta, \varphi]| \leq$$

$$cE_m(f) \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |K_n(\cos \gamma)| \sin \theta' d\theta' d\varphi' =$$

$$= cE_m(f) \int_0^\pi |K_n(\cos \gamma)| \sin \gamma d\gamma = cE_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(f) \cdot \int_{-1}^{+1} |K_n(t)| dt = o(1).$$

Таким образом и второе слагаемое в правой части неравенства (6) равномерно стремится к нулю. Теорема доказана.

II. Всякая треугольная матрица чисел

$$l_k^{(n)} (k=0, 1, \dots, n+1; l_0^{(n)}=1, l_{n+1}^{(n)}=0; n=0, 1, 2, \dots)$$

определяет некоторый процесс (Δ) суммирования рядов Лапласа. Именно вместо частной суммы ряда (1) можно образовать сумму

$$U_n [f; \theta, \varphi] = \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} Y_k(\theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} \left\{ A_n P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi) P_{n,m}(\cos \theta) \right\}, \quad (7)$$

где $A_n, A_{n,m}, B_{n,m}$ — коэффициенты Фурье функции $f(\theta, \varphi)$ по системе фундаментальных сферических функций

$$P_n(\cos \theta), P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi, P_{n,m}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (8)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots, n)$$

($P_{n,m}(t)$ — присоединенные полиномы Лежандра), т. е.

$$A_n = \frac{1}{\alpha_n} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_n(\cos \theta') d\sigma,$$

$$A_{n,m} = \frac{1}{\alpha_{n,m}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_{n,m}(\cos \theta') \cos m\varphi' d\sigma,$$

$$B_{n,m} = \frac{1}{\beta_{n,m}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_{n,m}(\cos \theta') \sin m\varphi' d\sigma.$$

$$\alpha_n = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_n(\cos \theta')]^2 d\sigma,$$

$$\alpha_{n,m} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_{n,m}(\cos \theta') \cos m\varphi']^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

$$\beta_{n,m} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [P_{n,m}(\cos \theta') \sin m\varphi']^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Сумму (7) можно представить так:

$$U_n [f; \theta, \varphi] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

где

$$K_n(\cos \gamma) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) l_k^{(n)} P_k(\cos \gamma).$$

Многие методы приближения функций на сфере сводятся к сферическим суммам подобного рода. Поэтому представляет интерес следующий вопрос: каковы должны быть коэффициенты $l_k^{(n)}$, чтобы имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n [f; \theta, \varphi] = f(\theta, \varphi) \quad (9)$$

равномерно для любой функции $f(\theta, \varphi) \in C(S)$ (пространство непрерывных на S функций) или для функций, принадлежащих к некоторому классу непрерывных на S функций.

Заметим, что если фиксировать точку (θ, φ) , то сумма (7) при n представляет собой линейный функционал, заданный в полном линейном пространстве $C(S)$, где фундаментальные сферические функции (8) образуют полную систему (см., например, [8]).

В силу известной теоремы о слабой сходимости линейных функционалов для того, чтобы имело место равенство (9) при фиксированной (θ, φ) для любой $f \in C(S)$, необходимо и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для всех функций системы (8) и чтобы норма функционала (7), равная

$$\sup_{f \in C(S)} \|U_n [f; \theta, \varphi]\| = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^n (2k+1) l_k^{(n)} P_k(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' \right|$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^n (2k+1) l_k^{(n)} P_k(\cos \gamma) \right| \sin \gamma d\gamma =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left| \sum_{k=0}^n (2k+1) l_k^{(n)} P_k(t) \right| dt = \|U_n\|,$$

была ограничена.

Из этих требований, так же как и в работе [5] С. М. Никольского, следует

Теорема 2. Чтобы для любой непрерывной S на функции $f(\theta, \varphi)$ равномерно выполнялось соотношение (9), необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} l_k^{(n)} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (10)$$

б) существует положительная постоянная M , не зависящая от n , для которой имеет место неравенство

$$\int_{-1}^{+1} |K_n(t)| dt \leq M \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Если условие (11) не выполнено, то процесс (Δ) все же может равномерно суммировать ряды Лапласа функций, принадлежащих к некоторому классу непрерывных на единичной сфере функций.

Теорема 3. Пусть числа $l_k^{(n)}$ удовлетворяют условию (10) и пусть

$$\int_{-1}^{+1} \left| \sum_{k=0}^m (2k+1) l_k^{(n)} P_k(t) + \sum_{k=1}^m (2k+1) \left(1 - \frac{\kappa}{m}\right) l_{m+k}^{(n)} P_{m+k}(t) \right| dt \leq M, \quad (12)$$

где $m = \left[\frac{n+1}{2} \right]$. Тогда процесс (Δ) равномерно суммирует ряды Лапласа для всякой функции $f(\theta, \varphi)$, если

$$E_{\left[\frac{n+1}{2} \right]}(f) \cdot \int_{-1}^{+1} |K_n(t)| dt = o(1).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} U_n[f; \theta, \varphi] &= \sum_{k=0}^n l_k^{(n)} Y_k(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tau_m[f; \theta', \varphi'] K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \{f(\theta', \varphi') - \tau_m[f; \theta', \varphi']\} K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \end{aligned} \quad (13)$$

Второй интеграл в правой части (13) не превосходит величины

$$cE_m(f) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |K_n(\cos \gamma)| \sin \theta' d\theta' d\varphi' = cE_{\left[\frac{n+1}{2} \right]}(f) \cdot \int_{-1}^{+1} |K_n(t)| dt = o(1).$$

Таким образом остается показать, что первый интеграл в правой части (13) сходится равномерно к функции $f(\theta, \varphi)$ при $n \rightarrow \infty$.

Ряд Лапласа функции $\tau_m[f; \theta, \varphi]$, согласно (5), имеет вид

$$\sum_{k=0}^m Y_k(\theta, \varphi) + \sum_{k=0}^m \left(1 - \frac{\kappa}{m}\right) Y_{m+k}(\theta, \varphi).$$

Так что

$$\begin{aligned} U_n[\tau_m; \theta, \varphi] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tau_m[f; \theta', \varphi'] K_n(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \sum_{k=0}^m l_k^{(n)} Y_k(\theta, \varphi) + \sum_{k=1}^m \left(1 - \frac{\kappa}{m}\right) l_{m+k}^{(n)} Y_{m+k}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (14)$$

Сумма в правой части (14) получается из ряда (1) приложением к нему процесса (Δ) , определяемого системой чисел

$$l_0^{(n)}, l_1^{(n)}, \dots, l_m^{(n)}, \left(1 - \frac{1}{m}\right) l_{m+1}^{(n)}, \left(1 - \frac{2}{m}\right) l_{m+2}^{(n)}, \dots, \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) l_{2m-1}^{(n)}.$$

Но условие (12) означает, что для этой системы выполнено условие (11) теоремы 2. Выполнение условий (10) для этой системы очевидно. Следовательно, на основании теоремы 2 правая часть (13) равномерно стремится к функции $f(\theta, \varphi)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tomić M. Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci., 8, 1955, 23—32.
2. Karamata J. Suite de fonctionelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier, journal de Math. P. et Appl., 35, 1956, 87—95.
3. Bojanic R. On uniform convergence of Fourier series, Publ. Inst. Math. Acad. serbe Sci., 10, 1956, 153—158.
4. Харшиладзе Ф. И. Тр. Тбилисского матем. ин-та, 26, 1959, 121—130.
5. Никольский С. М. Изв. АН СССР, серия матем., 12 (1948), 259—278.
6. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, М., 1952.
7. Джафаров Ариф С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 3.
8. Тихонов А. Н., и Самарский А. Л. Уравнения математической физики, 1953.

А. С. Чәфәров

Мүнтәзәм жығылма вуруглары вә Лаплас сырларынын
мүнтәзәм чәмләnmәси haгында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ваһид радиуслу сфера үзәриндә өзүнүн (1) Лаплас сырлары илә верилмиш кәсилмәјән $f(\theta, \varphi)$ функцијасы үчүн ашағыдакы ики мәсәләдән бәһс олунур.

1) Нә вахт верилмиш l_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) әдәлләри $f(\theta, \varphi)$ функцијасы үчүн мүнтәзәм жығылма вуруглары олачаг, башга сөzlә, нә вахт (1) сырасындан дүзәлдилмиш (2) сырасы мүнтәзәм жығылачаг;

2) Нә вахт верилмиш $\{l_k^{(n)}\}$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$; $l_0^{(n)} = 1$, $l_{n+1}^{(n)} = 0$; $n = 0, 1, 2, \dots$) просеси истәнилән кәсилмәјән вә ја кәсилмәјән функцијаларын мүәјјән синфиндән олан $f(\theta, \varphi)$ функцијасынын Лаплас сырларынын мүнтәзәм чәмләјәчәк, башга сөzlә, нә вахт (9) мүнәсибәти θ вә φ -ләрә нәзәрән мүнтәзәм өдәниләчәк.

1-чи мәсәләнин чавабы 1, 2-чи мәсәләнин чавабы исә 2 вә 3 теоремләри васитәсилә верилир; бу теоремләрдә $E_n(f)$ кәсилмәјән $f(\theta, \varphi)$ функцијасынын тәртиби n -и ашмајән сферик чәмләрә ән јахшы мүнтәзәм јахынлашмасыдыр.

Г. А. МИРЗОЕВ

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. В работе Ф. Аткинсона [1] рассматривалось уравнение вида

$$Ax = y \quad (1)$$

где A —линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве B ; y —заданный, x —искомый элементы из пространства B . В работе [1] было дано понятие обобщенного оператора Фредгольма и доказан ряд теорем о таком операторе.

Если считать индекс оператора A конечным, обозначив его через α , то, как известно, оператор A будет нормально разрешимым. Для такого оператора имеет место ряд теорем о регуляризаторе (см. Михлин [4]). Пусть A —замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве B . Будем говорить, что оператор A допускает регуляризацию, если существует такой ограниченный оператор K , действующий в B , что

$$KA = I + T, \quad (2)$$

где I —тождественный, а T —вполне непрерывный операторы в B ; оператор K будем в этом случае называть регуляризатором оператора A . Через $\alpha(A)$ будем обозначать число линейно независимых решений уравнения

$$Ax = 0, \quad (3)$$

а через $\beta(A)$ число линейно независимых решений уравнения

$$I(A) = 0, \quad (4)$$

где $I \in B^*$.

Рассмотрим следующее обобщение уравнения (1);

$$Ax + \lambda Cx = y, \quad (5)$$

где C —нелинейный ограниченный оператор, также действующий в B , удовлетворяет определенным условиям (см. дальше); λ —комплексный параметр.

Очевидно, уравнение (5) можно записать в виде

$$Ax = y - \lambda Cx. \quad (5')$$

Будем временно предполагать элемент

$$y_1 = y - \lambda Cx \quad (6)$$

известным. Тогда уравнение (5') принимает вид

$$Ax = y_1. \quad (7)$$

Используя нормальную разрешимость оператора A и теоремы Михлина о наличии эквивалентного регуляризатора, рассмотрим отдельные случаи.

1. Пусть $\alpha \geq 0$. Тогда существует регуляризатор K такой, что уравнение (7) будет эквивалентным уравнению

$$KAx = Ky_1. \quad (8)$$

Используя условие нормальной разрешимости, утверждаем, что существует линейный ограниченный оператор H , при помощи которого выражается общее решение уравнения (7):

$$x = HKy_1 + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \gamma_j x_j, \quad (9)$$

где γ_j ($j = \overline{1, \alpha(A)}$)—произвольные постоянные, а x_j —полная система линейно независимых решений однородного уравнения

$$KAx = 0 \quad (10)$$

или, что все равно,

$$Ax = 0. \quad (3')$$

Вводя обозначение

$$HK = F, \quad (11)$$

из (6) и (9) получим

$$x = Fy_1 + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \gamma_j x_j = F(y - \lambda Cx) + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \gamma_j x_j = Fy - \lambda FCx + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \gamma_j x_j$$

откуда следует, что

$$x + \lambda Qx = p, \quad (12)$$

где

$$Q = FC \text{ и } p = Fy + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \gamma_j x_j.$$

В (12) Q —нелинейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве B ; p —заданный, x —искомый элементы из пространства B .

2. Пусть теперь $\alpha < 0$. Тогда существует оператор M такой, что A будет регуляризатором для M , и уравнение (7) будет эквивалентным уравнению

$$AMz = y_1, \quad (13)$$

где $x = Mz$. Здесь z —новый искомый элемент $\in B$. Очевидное общее решение уравнения (13) дается формулой

$$z = Gy_1 + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i z_i, \quad (14)$$

где G —определенный линейный ограниченный оператор, z_i —полная система линейно независимых решений однородного уравнения

$$AMz = 0; \quad (15)$$

μ_i ($i = \overline{1, \beta(A)}$)—произвольные постоянные.

Из предыдущего ясно, что вся совокупность решений исходного уравнения (7) будет дана формулой

$$x = MGy_1 + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i. \quad (16)$$

Обозначив

$$MG = E \quad (17)$$

с учетом (17), из (6) и (16) получим

$$x = Ey_1 + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i = E(y - \lambda Cx) + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i, \\ = Ey - \lambda ECx + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i,$$

откуда следует, что

$$x + \lambda Lx = q, \quad (18)$$

где (по обозначению)

$$L = EC \text{ и } q = Ey + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i.$$

§ 2. Займемся исследованием уравнения (12). Аналогично исследуется и уравнение (18). Приведем ряд понятий, относящихся к нелинейным операторам (см. М. Красносельский [3]).

Определение. Всякий непрерывный оператор, отображающий замкнутое ограниченное и выпуклое множество в свою компактную часть, называется оператором класса Шаудера.

Пусть C — нелинейный непрерывный и вполне ограниченный оператор, область определения $D(C)$ которого есть подпространство B .

Пусть F — линейный вполне непрерывный оператор, область определения которого $D(F) \supset CD(C)$ и область значений $FD(F) \subset D(C)$.

Очевидно, композиция FC является вполне непрерывным оператором, отображающим $D(C)$ в $D(C)$.

Теорема 1. При малых значениях λ оператор λFC является оператором из класса Шаудера.

Доказательство. Пусть $\bar{S}(\theta, r)$ — замкнутый шар $\bar{S}(\theta, r) \subset D(C)$. Очевидно, $\bar{S}(\theta, r)$ является выпуклым множеством в подпространстве $D(C)$.

Рассмотрим оператор λFC . Если

$$|\lambda| < \frac{r}{\rho \|F\|}, \quad (19)$$

где r — радиус шара, ρ — такое положительное число, что

$$\|Cx\| \leq \rho, \quad x \in \bar{S}(\theta, r), \quad (20)$$

то нетрудно убедиться, что оператор λFC является оператором класса Шаудера. В самом деле, при любом значении λ оператор λFC вполне непрерывный и при значениях параметра (19) оператор λFC отображает замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $\bar{S}(\theta, r)$ в его компактную часть. Компактность $\lambda FC\bar{S}$ вытекает из полной непрерывности оператора λFC при любом λ .

То, что $\lambda FC\bar{S} \subset \bar{S}$, вытекает из неравенства

$$\|\lambda FCx\| \leq |\lambda| \|F\| \|Cx\| \leq |\lambda| \|F\| \rho < r, \quad x \in \bar{S}(\theta, r),$$

так как оператор C вполне ограничен, т. е.

$$\|Cx\| \leq \rho, \quad x \in \bar{S}(\theta, r).$$

Замечание. Утверждение теоремы остается справедливым, если вместо условий теоремы имеют место условия:

1°. C — вполне ограничен на некотором замкнутом шаре $\bar{S}(\theta, r)$;

2°. F — вполне непрерывен на множестве $C\bar{S}(\theta, r)$.

Теорема 2. Если C — вполне ограниченный, F — вполне непрерывный операторы, то уравнение (12) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Пусть $\bar{S}(\theta, r)$ — замкнутый шар из пространства $D(C)$. На основании теоремы 1 для значений λ , удовлетворяющих условию (19), оператор λFC является оператором класса Шаудера. На основании принципа неподвижной точки оператор λFC при условии (19) имеет по крайней мере одну неподвижную точку, входящую в шар $\bar{S}(\theta, r)$.

На основании замечания к теореме 1 можно написать:

Теорема 3. Если C — вполне ограниченный оператор на некотором шаре $\bar{S}(\theta, r)$, F — вполне непрерывный оператор на множестве $C\bar{S}(\theta, r)$ и $|\lambda| < \frac{r}{\rho \|F\|}$, то уравнение (12) имеет по крайней мере одно решение, которое входит в шар $\bar{S}(\theta, r)$.

Пусть теперь оператор C удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Cx_1 - Cx_2\| \leq \delta \|x_1 - x_2\| \quad (21)$$

для произвольных элементов x_1 и x_2 из баханова пространства B . Уравнение (12) запишем в виде

$$x = -\lambda Qx + p. \quad (22)$$

Обозначая правую часть уравнения (22) оператором Ux и учитывая условие (21), легко получим

$$\rho(Ux_1, Ux_2) \leq |\lambda| \|F\| \delta \rho(x_1, x_2). \quad (23)$$

Таким образом, с помощью принципа сжатых отображений нами доказана следующая

Теорема 4. Если оператор C удовлетворяет условию Липшица и $|\lambda| < \frac{1}{\delta \|F\|}$, то уравнение (12) имеет единственное решение.

Мы доказали, что уравнение (12) [соответственно (18)] имеет решение. Это решение может быть вычислено методом последовательных приближений по формуле

$$x_{n'} = Ux_{n'-1} \quad (n' = 1, 2, \dots). \quad (24)$$

Учитывая, что

$$Ux = -\lambda Qx + p$$

[соответственно,

$$Ux = -\lambda Lx + q],$$

получим

$$x_{n'} = -\lambda Q_{n'-1} + p \quad (25)$$

[соответственно,

$$x_{n'} = -\lambda Lx_{n'-1} + q], \quad (25')$$

$$\text{где } Q = FC \text{ и } p = Fy + \sum_{j=1}^{\alpha(A)} \nu_j x_j$$

$$\left[\text{соответственно, } L = EC \text{ и } q = Ey + \sum_{i=1}^{\beta(A)} \mu_i Mz_i \right].$$

Очевидно, что последовательные приближения содержат (когда $\lambda \geq 0$) $n' \cdot \alpha(A)$ произвольных постоянных [соответственно (когда $\lambda < 0$), $n' \cdot \beta(A)$ произвольных постоянных].

Допустим, что x^0 — предел этих последовательных приближений. Подставим этот предел в выражение $y_1 = y - \lambda Cx$ вместо x , тогда y_1 нами будет определен. В силу этого условие нормальной разрешимости уравнения (7) нами будет найдено. Таким образом, мы получим условие разрешимости, а также решение уравнения $Ax = y_1$ или, иначе говоря, уравнения

$$Ax + \lambda Cx = y.$$

§ 3. Используя результаты двух предыдущих параграфов, а также ряд результатов З. И. Халилова [6], рассмотрим общее сингулярное уравнение в нормированном кольце R :

$$P(x) = ax + bSx + Tx + \lambda Cx = y, \quad (26)$$

где a, b и y — заданные, x — искомый элемент нормированного кольца R ; T — некоторый линейный вполне непрерывный оператор; S — линейный сингулярный оператор, который удовлетворяет условиям:

1°. $S^2 = I$, где I — тождественное преобразование.
2°. $(Sx - xS)$ — вполне непрерывный оператор, где x — произвольный элемент из кольца R . C — тот же нелинейный оператор, что в § 1, причем он дополнительно должен удовлетворять тому условию, при котором он переводит все нормированное кольцо в свою собственную часть. Тогда по схеме § 1 и 2 доказывается аналог теоремы 4.

§ 4. Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение с комплекснозначной искомой функцией $\varphi(z)$:

$$a(z)\varphi(z) + \frac{b(z)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\Gamma} T(z, \zeta) d\zeta + \lambda C\varphi = \psi(z), \quad (27)$$

где употребляемые символы имеют следующий смысл: Γ — ориентированная гладкая замкнутая кривая, содержащая начало комплексной плоскости; $a(z)$, $b(z)$ — непрерывно дифференцируемые на Γ комплекснозначные функции; $L^2(\Gamma)$ — гильбертово пространство квадратично суммируемых комплекснозначных функций на Γ ;

$T(z, \zeta)$ — ядро, квадратично суммируемое на $\Gamma \times \Gamma$; λ — комплексный параметр;

C — некоторый нелинейный интегральный оператор, удовлетворяющий условиям § 1.

$\psi(z) \in L^2(\Gamma)$ — заданная, а $\varphi(z) \in L^2(\Gamma)$ — искомая функции. Интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ понимается в смысле главного значения по Коши и существует почти везде на Γ .

При $\lambda = 0$ уравнение (27) было исследовано в работе Х. Шеффера [7]. Для такого уравнения в некоторых предположениях им был доказан ряд теорем, в том числе и теорема о разрешимости уравнения. Очевидно, используя результаты Х. Шеффера, по схеме § 1 и 2 можно доказать теорему, аналогичную теореме 4.

Как было отмечено в начале § 1, условие эквивалентной регуляризации эквивалентно нормальной разрешимости оператора. Последнее же, как доказал И. Гохберг [2], эквивалентно нормальности характеристической части уравнения (27), т. е. отличности от нуля выражения $a^2(z) - b^2(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аткинсон Ф. В. Матем. сб., 28 (70). 1951, № 1.
2. Гохберг И. Ц. УМН, т. VII, вып. 21 (48), 1952.
3. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956.
4. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, 1962.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, 1962.
6. Халилов З. И. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, 1949.
7. Schaefer Helmut. Math. Zeitschrift, 66. Bd, 2. Heft, 5. 147—163 (1956).

Г. Н. Мирзэев

Бэ'зи банах фэзаларында бир гејри-хэтти тэнлијин тэдгиги һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гејри-хэтти

$$Ax + \lambda Cx = y$$

тэнлијинин һәлледилмә шәртләри вә һәллинин варлығы тэдгиг олу- нур. Ишдә сингулјар оператор тәнлик регулјарлашдырычы оператор васитәсилә регулјар тәнлијә кәтирилир вә алынған гејри-хэтти опера- тор тәнлијин һәллинин варлығына даир бир нечә теорем исбат еди- лир. Сонра алынған нәтичәнин қәмәји илә нормаллашмыш һалгада бир сингулјар оператор тәнлик вә квадраты илә чәмләнән функцијаларын һилберт фэзасында бир сингулјар интеграл тәнлик тэдгиг олу- нур.

УДК 517.53:512. 9

К. М. МУСАЕВ

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Настоящая статья посвящена исследованию граничного поведения обобщенных аналитических функций (в смысле И. Н. Векуа [1]). Обычное исследование такого поведения делается со значительными предположениями относительно гладкости рассматриваемых решений. Однако для ряда вопросов эти предположения излишне обременительны. Например, желая применить к обобщенным аналитическим функциям теории двойственности экстремальных задач (см. например, [2]), мы сталкиваемся с необходимостью провести исследование граничных свойств в наиболее общих предположениях, как это делается в теории граничных свойств аналитических функций [3].

В данной работе мы занимались перенесением некоторых важных теорем для обобщенного случая теории граничных значений аналитических функций. В статье мы придерживаемся основных определений и обозначений книги [1]. За формулируемыми теоремами нами сохранены те названия, которые носят аналоги этих теорем для обычных аналитических функций.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_z w(z) + A(z)w(z) + B(z)w(z) = 0, \quad (1)$$

где $A(z), B(z) \in L_{p,2}(E)$, $p > 2$, E — вся конечная плоскость (см. [1], стр. 149) и

$$\partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Уравнение (1) с такими коэффициентами имеет регулярные решения (см. [1], стр. 146). Класс таких решений будем обозначать символом $U_{p,2}(A, B, G)$. Пусть G — конечная область со спрямляемой границей Γ ; $\mathcal{Q}_1(z, t)$ и $\mathcal{Q}_2(z, t)$ — так называемые основные ядра для класса $U_{p,2}(A, B, G)$ (см. [1], стр. 194). Напомним, что ядра $\mathcal{Q}_1(z, t)$ и $\mathcal{Q}_2(z, t)$ имеют оценки, даваемые формулами (см. [1], стр. 189):

$$\mathcal{Q}_2(z, t) = \frac{1}{z-t} + O \left(|z-t|^{-\frac{2}{p}} \right) = \frac{1}{z-t} + M_1(z, t); \quad (2)$$

$$\mathcal{Q}_2(z, t) = O \left(|z-t|^{-\frac{2}{p}} \right) = M_2(z, t).$$

Зададим на Γ комплекснозначную функцию $F(t)$ с ограниченным изменением ($F(t)$ можно рассматривать как функцию длины дуги s контуре Γ , заданную на интервале $[0, l]$, где l — длина Γ). В дальнейшем будем называть интегралом типа Коши — Стильеса выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(z, t) d\bar{F}(\bar{t}). \quad (3)$$

Этот интеграл дает регулярное решение уравнения (1) вне Γ (см. [1] стр. 198).

Пусть t_0 — какая-нибудь точка линии Γ , соответствующая точке s_0 из отрезка $[0, l]$. Обозначим через Γ_ε часть линии Γ , оставшуюся после удаления из Γ той дуги, концами которой служат точки $t(s_0 - \varepsilon)$, $t(s_0 + \varepsilon)$ и которая содержит t_0 . Особым интегралом назовем конечный предел (если он существует) выражения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) d\bar{F}(\bar{t}),$$

записывая в этом случае

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) d\bar{F}(\bar{t}) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) d\bar{F}(\bar{t}). \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим следующую разность:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(z, t) d\bar{F}(\bar{t}) - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) d\bar{F}(\bar{t}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Проведем нормаль к Γ в точке t_0 и будем z брать на прямой $\overline{zt_0}$, идущей под углом $0 \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2}$ к нормали. Тогда z может находиться как внутри области G , так и вне ее. Расстояние zt_0 будем брать равным ε .

Наконец, точку $t_0(s_0)$ назовем точкой Лебега для функции $F(t)$, если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} |dF(t)| \leq M.$$

Нетрудно убедиться, если в точке t_0 $F(t)$ имеет конечную производную, то эта точка является точкой Лебега для $F(t)$.

Лемма. Если $t_0(s_0)$ — точка Лебега для функции $F(t)$, то для любого $\alpha < 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} \frac{|dF(t)|}{|t-z|^\alpha} = 0.$$

В самом деле, если $t \in [t(s_0 - \varepsilon), t(s_0 + \varepsilon)]$, тогда можно найти такое положительное число κ , чтобы выполнялось неравенство $|z - t| \geq \kappa \varepsilon$, где $\varepsilon = |t - t_0|$.

Тогда

$$\int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} \frac{|dF(t)|}{|z-t|^\alpha} \leq K^{-\alpha} \cdot \varepsilon^{1-\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} |dF(t)| \leq \\ \leq K^{-\alpha} \cdot M \cdot \varepsilon^{1-\alpha} \rightarrow 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Теорема 1. (Основная лемма Привалова). Если в точке t_0 существует конечная производная $F'(t_0)$, то выражение (5) стремится к пределу $\pm \frac{1}{2} F'(t_0)$: $\left(+\frac{1}{2} F'(t_0), \right)$, если $z \rightarrow t_0$ изнутри, и $-\frac{1}{2} F'(t_0)$, если $z \rightarrow t_0$ извне G . Стремление к пределу равномерно относительно ψ_0 , $|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$.

Поскольку $F'(t_0)$ существует почти везде на Γ (см. Г. Е. Шиллов [4], стр. 259), то наличие у (5) предела $\pm F'(t_0)$ имеет место почти везде на Γ .

Доказательство. Учитывая (2) в (5), находим

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(z, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(z, t) d\overline{F(t)} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) d\overline{F(t)} \right] - \\ = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \left[\int_{\Gamma} \frac{1}{t-z} dF(t) + \int_{\Gamma} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma} M_2(z, t) d\overline{F(t)} \right] - \right. \\ \left. - \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{t_0-t} dF(t) + \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_2(t_0, t) d\overline{F(t)} \right] \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{1}{t-z} dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{t_0-t} dF(t) \right] + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} M_1(z, t) dF(t) - \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t) \right] - \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} M_2(z, t) d\overline{F(t)} - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_2(t_0, t) d\overline{F(t)} \right].$$

Каждую квадратную скобку справа будем исследовать отдельно. Рассмотрим первую скобку:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{dF(t)}{t-z} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{dF(t)}{t_0-t} \right].$$

Эта разность при $z \rightarrow t_0$ (т. е. при $\varepsilon \rightarrow 0$) по основной лемме Привалова для обычного случая (см. [3], стр. 184) дает $\pm \frac{1}{2} F'(t_0)$. При этом стремление к пределу является равномерным относительно ψ_0 , $|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$. Следовательно, для окончательного установления теоремы достаточно убедиться в том, что вторая и третья скобки стремятся к нулю при $z \rightarrow t_0$. Поскольку идея, примененная для них, одна

и та же, мы можем довольствоваться рассмотрением только второй скобки:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t) \right]. \quad (6)$$

Очевидно, имеем

$$\int_{\Gamma} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t) = \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(z, t) dF(t) + \\ + \int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t).$$

Так как в точке t_0 имеется конечная производная, то в силу леммы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t(s_0-\varepsilon)}^{t(s_0+\varepsilon)} M_1(z, t) dF(t) = 0.$$

Рассмотрим теперь разность

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma_\varepsilon} M_1(t_0, t) dF(t) = \int_{\Gamma_\varepsilon} [M_1(z, t) - M_1(t_0, t)] dF(t).$$

Пусть h — положительное число и такое, что

$$(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset (s_0 - h, s_0 + h).$$

Обозначим через Γ_h часть линии Γ , оставшуюся после удаления из Γ той дуги, концами которой служат точки $t(s_0 - h)$, $t(s_0 + h)$ и которая содержит t_0 . Пусть $t \in \Gamma_h$. Как известно ([1], стр. 178), $\mathcal{Q}_1(z, t)$ и $\mathcal{Q}_2(z, t)$ — непрерывные по Гольдеру функции от z во всей плоскости, где $z \neq t$. Значит, если $t \in \Gamma_h$, тогда при $z \rightarrow t_0$ $M_1(z, t)$ равномерно непрерывна, т. е. $|M_1(z, t) - M_1(t_0, t)| \leq \delta$ при $z \rightarrow t_0$ и $\delta \rightarrow 0$. Тогда

$$\left| \int_{\Gamma_h} [M_1(z, t) - M_1(t_0, t)] dF(t) \right| \leq \\ \leq \int_{\Gamma_h} |M_1(z, t) - M_1(t_0, t)| |dF(t)| \leq \delta \cdot \int_{\Gamma_h} |dF(t)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \quad (7)$$

Далее, следуя методике И. И. Привалова (см. [1], стр. 186), можно доказать стремление к нулю выражения (6) при $t \in [t(s_0 - h), t(t_0 - \varepsilon)]$ и $t \in [t(s_0 + \varepsilon), t(s_0 + h)]$. Таким образом, теорема полностью доказана. Из этой теоремы получаем некоторые следствия.

Следствие 1. Если особый интеграл (4) существует почти везде на Γ , то интеграл типа Коши Стильеса (3) имеет конечные угловые, граничные значения почти везде на Γ , когда $z \rightarrow t_0$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mathcal{Q}_1(t_0, t) dF(t) - \mathcal{Q}_2(t_0, t) dF(t) \pm \frac{1}{2} F'(t_0). \quad (8)$$

Обратно, если (3) имеет почти везде на Γ угловые граничные значения (изнутри Γ или извне), то существует особый интеграл (4) почти везде на Γ .

Пусть z и z' — две точки, лежащие на расстоянии ε от t_0 , на одной и той же прямой, проходящей через t_0 под углом ψ_0 ,

$|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$, к нормали и по разные стороны от Γ .

Следствие 2. Разность значений интеграла типа Коши — Стильеса внутри и вне Γ

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \varrho_1(z, t) dF(t) - \varrho_2(z, t) dF(t) - \int_{\Gamma} \varrho_1(z^*, t) dF(t) - \varrho_2(z^*, t) d\overline{F(t)} \right]$$

стремится к пределу $F'(t_0)$, когда z^* , $z \rightarrow t_0$ для всех точек t_0 линии Γ , кроме, быть может, точек множества меры нуль, не зависящего от ψ_0 , равномерно относительно ψ_0 , $|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$.

Частным случаем теоремы (1) является случай интеграла типа Коши—Лебега, когда вместо $dF(t)$ в (3) стоит $\varphi(t)dt$, где $\varphi(t)$ —суммируемая на Γ функция. Приведем здесь лишь формулировку следствия 2 для этого случая.

Следствие 2'. Разность значений интеграла типа Коши—Лебега внутри и вне Γ

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \varrho_1(z, t) \varphi(t) dt - \varrho_2(z, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t} - \int_{\Gamma} \varrho_1(z^*, t) \varphi(t) dt - \varrho_2(z^*, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t} \right] \quad (9)$$

стремится к пределу $\varphi(t_0)$, когда z^* , $z \rightarrow t_0$ для всякой точки линии t_0 , кроме, быть может, точек множества меры нуль, не зависящего от ψ_0 , равномерно относительно ψ_0 , $|\psi_0| \leq \frac{\pi}{2} \theta$, $\theta < 1$.

Если интеграл типа Коши—Стилтьеса (3) имеет почти везде на Γ угловые граничные значения $F'(t)$ при z , стремящемся к точкам Γ изнутри G , то мы будем называть такой интеграл интегралом Коши—Стилтьеса. Аналогичным образом определяется интеграл Коши—Лебега.

Теорема 2. Пусть $\varphi(t)$ —суммируемая на Γ . Условия

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varrho_1(z^*, t) \varphi(t) dt - \varrho_2(z^*, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t} = 0, \quad z^* \in \bar{G} \quad (10)$$

необходимо и достаточны для того, чтобы существовала функция из класса $U_{p,2}(A, B, G)$, представляемая интегралом Коши, угловые граничные значения которой почти везде совпадают с $\varphi(t)$.

Доказательство. Если условия (10) выполнены, то интеграл типа Коши

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varrho_1(z, t) \varphi(t) dt - \varrho_2(z, t) \overline{\varphi(t)} d\bar{t}$$

обращается в интеграл Коши и дает искомую обобщенную аналитическую функцию. В самом деле, в силу следствия 2

$$W(z) - W(z^*) = \varphi(t), \quad z^*, z \rightarrow t$$

Так как $W(z^*) \rightarrow \varphi(t)$ по условию, то

$$W(z) \rightarrow \varphi(t) \text{ почти везде на } \Gamma.$$

Обратно, угловые граничные значения каждого обобщенного интеграла Коши удовлетворяют условиям (10). Как следствие теорем 1 и 2 получаем.

Следствие 3. Если функция из класса $U_{p,2}(A, B, G)$ представляема интегралом Коши—Стилтьеса:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varrho_1(z, t) dF(t) - \varrho_2(z, t) d\overline{F(t)},$$

то она представима интегралом Коши—Лебега от функции $F'(t)$, т. е.

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varrho_1(z, t) F'(t) dt - \varrho_2(z, t) \overline{F'(t)} d\bar{t},$$

$\lim_{z \rightarrow t} W(z) = F'(t)$ почти везде на Γ (предел в смысле углового граничного значения).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. С. Я. Хавинсону за постановку задачи и консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1959.
2. Хавинсон С. Я. „Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечно-связных областях“. Матем. сб., т. 36, вып. 3, 1955.
3. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М., 1950.
4. Шилов Г. Е. Математический анализ (спец. курс), М.

К. М. Мусаев

Үмүмиләшмиш аналитик функцијаларын сәрһәд
хассәләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә үмүмиләшмиш аналитик функцијаларын сәрһәддә өзләрини нечә апармасы һаггында бир нечә теорем исбат олунур.

Ади аналитик функцијалар үчүн олан бә'зи фактлар јухарыдакы һал үчүн үмүмиләшдирилir.

Ф. Г. МАКСУДОВ, Т. А. ХАЛИЛОВА

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ $2n$ -ГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В настоящей статье излагаются некоторые результаты о характере спектра дифференциального оператора любого четного порядка, порожденного на полуоси одномерным дифференциальным выражением и интегральным краевым условием, зависящим от параметра. Отметим, что регулярные несамосопряженные дифференциальные операторы с интегральным краевым условием подробно рассмотрены в книге П. Д. Тамаркина [6]. Сингулярные самосопряженные операторы в работе А. В. Штрауса [3]. Одним из авторов настоящей статьи ранее [5] был рассмотрен вопрос о разложении по собственным функциям оператора второго порядка, когда краевые условия зависят от параметра. Несамосопряженные операторы второго порядка с интегральным краевым условием рассмотрены в [7].

1. Оператор $L_{a(\lambda)}$. Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$l(y) = (-1)^n (p_0(x) y^{(n)}(x))^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1(x) y^{(n-1)}(x))^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y(x) \quad (1)$$

На интервале $I = [0, \infty)$, где $p_0(x) \neq 0$ при $x \in I$, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ — суммируемые комплекснозначные функции на интервале I . Обозначим через D множество функций $y \in L_2$ таких, что:

1) квазипроизводные $y^{(i)}(x)$ ($i = \overline{1, 2n-1}$) существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$;

2) $l(y) \in L_2(0, \infty)$.

Пусть заданы линейно независимые формы

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{2n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0), \quad (2)$$

где $\alpha_{ij}(\lambda)$ — мероморфные функции комплексного переменного λ , регулярные на вещественной оси, и такие, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\alpha_{ij}(\lambda) = a_{ij} \lambda^p \left[1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right];$$

p — натуральное число или нуль.

Пусть λ_0 — фиксированное значение параметра λ , являющееся регулярной точкой всех функций α_{ij} одновременно.

Через $D_{a(\lambda)}$ обозначим совокупность функций $y(x) \in D$ таких, что $y(x)$ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_0$ краевым условиям

$$U_i(y) - \int_0^\infty K_i(x) y(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $K_1(x), K_2(x), \dots, K_n(x)$ — произвольные комплекснозначные функции, принадлежащие L_2 .

Введем оператор $L_{a(\lambda)}$, область определения которого есть $D_{a(\lambda)}$ и $L_{a(\lambda)} y = l(y)$ при $y \in D_{a(\lambda)}$. Обозначим через R все регулярные точки всех функций $\alpha_{ij}(\lambda)$. Пусть λ пробегает все множество R , тогда получим семейство операторов с областью определения $D_{a(\lambda)}$, причем при $y \in D_{a(\lambda)}$

$L_{a(\lambda)} y = l(y)$. Обозначим через H n -мерное подпространство L_2 , натянутое на векторы $K_1(x), K_2(x), \dots, K_n(x)$, а через S — его ортогональное дополнение.

Теорема 1. Если ранг формы (2) равен n , то область определения $D_{a(\lambda)}$ оператора $L_{a(\lambda)}$ плотна в L_2 .

Пусть U — множество финитных функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty K_i(x) y(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad y \in U.$$

Легко можно показать, что U плотно в S , а так как $U \subset D_{a(\lambda)}$, то и $D_{a(\lambda)}$ плотно в S .

Предположим, что $D_{a(\lambda)}$ неплотно в L_2 , тогда в L_2 существует вектор $f \neq 0$, ортогональный к $D_{a(\lambda)}$ и, следовательно, к S . Тогда этот вектор имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^n \mu_i K_i(x),$$

где μ_i — некоторые постоянные.

Так как для всех векторов $f \in U$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_i K_i(x) f(x) dx = 0,$$

то для них

$$\sum_{i=1}^n \mu_i U_i(f) = 0,$$

что противоречит условиям теоремы.

2. Решение уравнения $l(y) = \lambda q(x) y$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $l(y) = \lambda q(x) y$ (4), где $q(x)$ — определенная на интервале I комплекснозначная функция. Положим $\lambda = \rho^{2n}$. Разобьем комплексную ρ -плоскость на $4n$ равных секторов S_k , определяемых неравенством

$$\frac{\kappa\pi}{2n} \leq \arg \rho \leq \frac{(\kappa+1)\pi}{2n}.$$

Теорема 2. Пусть $\left(\frac{1}{\rho_0}\right)', q'(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ — суммируемые

на интервале I комплекснозначные функции $p_0(x) \neq 0$ при $x \in I$ и пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p_0(x)} \neq 0.$$

Ф. Г. МАКСУДОВ, Т. А. ХАЛИЛОВА

О СПЕКТРЕ СИНГУЛЯРНЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ $2n$ -ГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

В настоящей статье излагаются некоторые результаты о характере спектра дифференциального оператора любого четного порядка, порожденного на полуоси одномерным дифференциальным выражением и интегральным краевым условием, зависящим от параметра. Отметим, что регулярные несамосопряженные дифференциальные операторы с интегральным краевым условием подробно рассмотрены в книге П. Д. Тамаркина [6]. Сингулярные самосопряженные операторы в работе А. В. Штрауса [3]. Одним из авторов настоящей статьи ранее [5] был рассмотрен вопрос о разложении по собственным функциям оператора второго порядка, когда краевые условия зависят от параметра. Несамосопряженные операторы второго порядка с интегральным краевым условием рассмотрены в [7].

1. Оператор $L_{a(\lambda)}$. Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$l(y) = (-1)^n (P_0(x) y^{(n)}(x))^{(n)} + (-1)^{n-1} (P_1(x) y^{(n-1)}(x))^{(n-1)} + \dots + P_n(x) y(x) \quad (1)$$

На интервале $I = [0, \infty)$, где $p_0(x) \neq 0$ при $x \in I$, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ — суммируемые комплекснозначные функции на интервале I . Обозначим через D множество функций $y \in L_2$ таких, что:

- 1) квазипроизводные $y^{(i)}(x)$ ($i = \overline{1, 2n-1}$) существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$;
- 2) $l(y) \in L_2(0, \infty)$.

Пусть заданы линейно независимые формы

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{2n-1} a_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0), \quad (2)$$

где $a_{ij}(\lambda)$ — мероморфные функции комплексного переменного λ , регулярные на вещественной оси, и такие, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$a_{ij}(\lambda) = a_{ij}^{(p)} \lambda^p \left[1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right];$$

p — натуральное число или нуль.

Пусть λ_0 — фиксированное значение параметра λ , являющееся регулярной точкой всех функций a_{ij} одновременно.

Через $D_{a(\lambda)}$ обозначим совокупность функций $y(x) \in D$ таких, что $y(x)$ удовлетворяет при $\lambda = \lambda_0$ краевым условиям

$$U_i(y) - \int_0^\infty K_i(x) y(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где $K_1(x), K_2(x), \dots, K_n(x)$ — произвольные комплекснозначные функции, принадлежащие L_2 .

Введем оператор $L_{a(\lambda)}$, область определения которого есть $D_{a(\lambda)}$ и $L_{a(\lambda)} y = l(y)$ при $y \in D_{a(\lambda)}$. Обозначим через R все регулярные точки всех функций $a_{ij}(\lambda)$. Пусть λ пробегает все множество R , тогда получим семейство операторов с областью определения $D_{a(\lambda)}$, причем при $y \in D_{a(\lambda)}$

$L_{a(\lambda)} y = l(y)$. Обозначим через H n -мерное подпространство L_2 , натянутое на векторы $K_1(x), K_2(x), \dots, K_n(x)$, а через S — его ортогональное дополнение.

Теорема 1. Если ранг формы (2) равен n , то область определения $D_{a(\lambda)}$ оператора $L_{a(\lambda)}$ плотна в L_2 .

Пусть U — множество финитных функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\infty K_i(x) y(x) dx = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad y \in U.$$

Легко можно показать, что U плотно в S , а так как $U \subset D_{a(\lambda)}$, то и $D_{a(\lambda)}$ плотно в S .

Предположим, что $D_{a(\lambda)}$ неплотно в L_2 , тогда в L_2 существует вектор $f \neq 0$, ортогональный к $D_{a(\lambda)}$ и, следовательно, к S . Тогда этот вектор имеет вид

$$f = \sum_{i=1}^n \mu_i K_i(x),$$

где μ_i — некоторые постоянные.

Так как для всех векторов $f \in U$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^\infty \mu_i K_i(x) f(x) dx = 0,$$

то для них

$$\sum_{i=1}^n \mu_i U_i(f) = 0,$$

что противоречит условиям теоремы.

2. Решение уравнения $l(y) = \lambda q(x) y$. Рассмотрим дифференциальное уравнение $l(y) = \lambda q(x) y$ (4), где $q(x)$ — определенная на интервале I комплекснозначная функция. Положим $\lambda = \rho^{2n}$. Разобьем комплексную ρ -плоскость на $4n$ равных сектора S_k , определяемых неравенством

$$\frac{k\pi}{2n} \leq \arg \rho \leq \frac{(k+1)\pi}{2n}.$$

Теорема 2. Пусть $\left(\frac{1}{\rho_0}\right)'$, $q'(x)$, $p_1(x), \dots, p_n(x)$ — суммируемые на интервале I комплекснозначные функции $p_0(x) \neq 0$ при $x \in I$ и пусть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p_0(x)} \neq 0.$$

Тогда уравнение (4) имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{2n}(x)$, для которых при $x \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы:

$$y_j^{(i)}(x) = C_i(x) \rho \omega_j^i \left(\exp(\rho \omega_j \xi(x)) (1 + o(1)) \right). \quad (5)$$

Здесь $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ — все различные корни $2n$ -ой степени из $(-1)^n \lambda$, действительные части которых предполагаются различными, а

$$C_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } i < n, \\ (-1)^{i-n} p_0(x) & \text{при } i \geq n. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как в теореме 8 ([2], § 24) и поэтому мы его опускаем.

Оператор L_λ . Обозначим через $D_{q(\lambda)}$ множество функций $y(x) \in L_2$, для которых $q(x)y(x) \in L_2$ и удовлетворяет краевым условиям (3). Введем оператор Q_λ , область определения которого есть $D_{q(\lambda)}$ и при $y \in D_{q(\lambda)}$ $Q_\lambda y = q(x)y(x)$. Рассмотрим семейство операторов L_λ с областью определения $D_\lambda = D_{q(\lambda)} \cap D_{q'}$ и при $y \in D_\lambda$ $L_\lambda y = l(y) - \lambda q(x)y$. Обозначим через N совокупность всех регулярных точек всех функций $\sigma_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$, где $\beta_{ij}(\lambda)$ — коэффициенты сопряженного краевого условия.

Теорема 3. Пусть комплекснозначные функции $\left(\frac{1}{p_0(x)} \right)', q'(x), p_1(x), \dots, p_n(x)$ суммируемы в интервале I :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q(x)}{p_0(x)} \neq 0, \quad 0 < \arg \frac{q(x)}{p_0(x)} < \pi \text{ и пусть } k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x) \in L_1 \cap L_2,$$

Тогда спектор оператора L_λ либо заполняет всю комплексную плоскость, либо состоит из положительной полуоси и из ограниченного множества, состоящего из конечного или счетного числа собственных значений, предельные точки которых могут находиться только на положительной полуоси. Для всех остальных значений $\lambda \in N$, не принадлежащих спектру, резольвента есть ограниченный интегральный оператор с ядром $k(x, \xi, \lambda)$, удовлетворяющим условиям

$$\int_0^\infty |k(x, \xi, \lambda)|^2 dx < \infty, \quad \int_0^\infty |k(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < \infty.$$

Доказательство. Пусть n нечетно (случай четного n рассматривается аналогично). В каждом секторе S_k можно выбрать такое расположение чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n}$, что при $\rho \in S_k, \rho \notin T_k$ (T_k — граница сектора S_k)

$$\operatorname{Re}(\rho \omega_1) \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_2) \leq \dots \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_{2n}).$$

Тогда первые n среди чисел $\operatorname{Re}(\rho \omega_i)$ будут отрицательными, а последние n положительными. Можно показать, что среди функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{2n}(x)$ первые n принадлежат, а последние не принадлежат L_2 . Так как соответствующая собственная функция должна принадлежать D_λ , то она имеет вид

$$y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x).$$

Тогда уравнение для нахождения собственных значений семейства L_λ имеет вид

$$A(\rho) = \det \|U_{ij}\|_{i,j=1}^n.$$

где

$$U_{ij} = U_i(y_j) = \int_0^\infty K_i(x) y_j(x) dx.$$

Ясно, что интегралы $\int_0^\infty K_i(x) y_j(x) dx$ вместе с $y_j(x)$ являются целыми

аналитическими функциями параметра λ в секторе S_k и потому нули $A(\rho) = 0$ образуют не более чем счетное множество, предельные точки которого могут находиться на границе T_k сектора S_k , при этом из асимптотических формул (5) следует, что это множество ограничено, ибо ρ — достаточно большое не может быть корнем уравнения $A(\rho) = 0$.

Резольвента R_λ имеет вид (см. [4])

$$R_\lambda f = \int_0^\infty k(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

где $k(x, \xi, \lambda) = k_1(x, \xi, \lambda) + k_2(x, \xi, \lambda)$,

$$k_1(x, \xi, \lambda) = \sum_{i=1}^n y_i(x) h_i(\xi), \quad k_2(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum_{j=n+1}^{2n} y_j(x) v_j(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ \sum_{j=1}^n y_j(x) v_j(\xi) & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

Функции $v_j(x)$ суть решение сопряженного уравнения и потому при $j = n+1, 2n$ принадлежат L_2 ; функции $h_i(x)$ являются линейной комбинацией функций $v_{n+1}(x), v_{n+2}(x), \dots, v_{2n}(x)$ и потому также принадлежат L_2 . Поэтому $k_1(x, \xi, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта. Аналогично тому [4] можно доказать, что $k_2(x, \xi, \lambda)$ также является ограниченным оператором. Далее пусть $\lambda = \rho^{2n}$, $\lambda \in R$ не есть собственное значение и $\rho \in S_k$ такое, что $-\sigma \leq \operatorname{Re}(\rho \omega_k) < 0$. Тогда легко можно показать, что имеет место неравенство

$$\|R_\lambda f\| \geq \left[\frac{C_1}{\sqrt{-\operatorname{Re}(\rho \omega_n)}} + C_2 \right] \|f\|,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Отсюда видно, что при приближении к точке $\lambda \geq 0$ норма резольвенты неограниченно возрастает. Следовательно, такая точка принадлежит спектру оператора L_λ .

Сопряженный оператор L_λ^* . Следующие леммы дают возможность находить оператор сопряженный к оператору L_λ .

Лемма 1. Для любой функции $f \in D_\lambda$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(v)}(x) = 0, \quad v = 0, 2n-1.$$

Доказательство аналогично лемме 3.4 [1].

Лемма 2. Если $g(x)$ принадлежит области определения оператора L_λ^* , то $\bar{g}(x) \in D_\lambda$ и $g(x) = \int_0^\infty k(x, \xi, \lambda) (L_\lambda^* - \bar{\lambda}) \bar{g} d\xi$.

Доказательство. Пусть λ не принадлежит спектру оператора $L_{\lambda(\lambda)}$, тогда для любого $f \in D_\lambda$ имеем

$$\int_0^\infty (L_\lambda - \lambda) f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi = \int_0^\infty (L_\lambda - \lambda) f(\xi) \left[\int_0^\infty \overline{k(x, \xi, \lambda)} (L_\lambda^* - \bar{\lambda}) \bar{g} d\xi \right] dx.$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как $(L_\lambda - \lambda)f$ произвольна в L_2 . Отсюда следует также, что $g(0), g'(0), g^{[2n-1]}(0)$ существуют и конечны, а $(L_\lambda - \lambda)\bar{g} \in L_2$ и $g \in \bar{D}_\lambda$.

Лемма 3. Если $f \in D_\lambda$, а $g(x)$ принадлежит области определения оператора L_λ^* , то

$$(f, L_\lambda^* g) = (f, \bar{l}(g)) - [f, g]_0,$$

где

$$[f, g] = \sum_{k=1}^n (f^{[k-1]} \bar{g}^{[2n-k]} - f^{[2n-k]} \bar{g}^{[k-1]}).$$

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$(f, L_\lambda^* g) = (L_\lambda f, g) = (f, \bar{l}(g)) + [f, g]_0^\infty. \quad (6)$$

Применяя леммы 1 и 2, получим требуемое. Заметим, что формулу (6) можно преобразовать, вводя сопряженные краевые условия. Действительно, пусть $U_1, U_2, \dots, U_n$ — линейно независимые формы переменных $f(0), f'(0), \dots, f^{[2n-1]}(0)$. Дополним их какими-либо формами $U_{n+1}, \dots, U_{2n}$ до линейной независимой системы из $2n$ форм. Тогда переменные $f(0), \dots, f^{[2n-1]}(0)$ можно выразить в виде линейных комбинаций форм $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$. Подставим эти выражения в билинейную форму $[f, g]$ в формуле (6), тогда $[f, g]$ станет линейной однородной формой от переменных $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$. Коэффициенты при переменных $U_1, U_2, \dots, U_{2n}$ являются также линейными однородными формами от переменных $g(0), g'(0), \dots, g^{[2n-1]}(0)$. Обозначим эти формы через $V_{2n}, V_{2n-1}, \dots, V_1$, соответственно. Тогда формула (6) может быть записана в виде

$$(f, L_\lambda^* g) = (f, \bar{l}(g)) + \sum_{i=1}^{2n} U_i V_{2n-i}.$$

Лемма 4. Если g ортогональна области значения оператора $L_\lambda^* - \bar{\lambda}$, то

$$(l - \lambda)\bar{g} = \sum_{i=1}^n \mu_i k_i(x),$$

где $\mu_i = V_{2n-i}$ и $V_i = 0, i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть $f \in U$, тогда по лемме 3 имеем

$$((L_\lambda^* - \lambda)f, g) = (f, (\bar{l} - \bar{\lambda})g) = 0.$$

Так как U плотно в S , то

$$(\bar{l} - \bar{\lambda})g = \sum_{i=1}^n \mu_i \bar{K}_i(x).$$

С другой стороны, пусть $f \in D_\lambda$. Тогда

$$((L_\lambda - \lambda)f, g) = (f, (\bar{l} - \bar{\lambda})g) - \sum_{i=1}^n U_i V_{2n-i}.$$

Отсюда на основании леммы 3 имеем

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^\infty K_i(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n U_i V_{2n-i}$$

или, учитывая краевое условие (3), получим

$$\sum_{i=1}^n (\mu_i - V_{2n-i}) U_i + \sum_{i=1}^n V_i U_{2n-i} = 0.$$

Ввиду линейной независимости $U_1, \dots, U_{2n}$ получим требуемое. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4. Если g принадлежит области определения оператора L_λ^* , то

$$L_\lambda^* g = \bar{l}(g) - \sum_{i=1}^n \mu_i \bar{K}_i(x),$$

где

$$\mu_i = V_{2n-i}, i = \overline{1, n} \text{ постоянные.}$$

Рассмотрим множество E функций, удовлетворяющих условиям:

$$1) f \in D,$$

$$2) V_i(f) = 0, i = \overline{1, n}.$$

Определим оператор M , область определения которого есть $\bar{E}$ и при

$$f \in \bar{E} \quad Mf = \bar{l}(f) - \sum_{i=1}^n \mu_i \bar{K}_i(x).$$

Теорема 5. $L_\lambda^* = M$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $L_\lambda^* \subset M$. Докажем обратное включение.

Пусть $f \in D$ и $g \in \bar{E}$, тогда

$$(f, Mg) = [f, g]_0^\infty + \int_0^\infty l(f) \bar{g} - \sum_{i=1}^n \mu_i \int_0^\infty K_i(x) f(x) dx.$$

Согласно лемме 3 $[f, g]_0^\infty = 0$, следовательно, $(f, Mg) = (L_\lambda^* f, g)$, а это означает $M \subset L_\lambda^*$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А., Тр. Московского матем. об-ва, 3, 181, 1954.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.
3. Штраус В. А. УМН, 12, 1957, № 1.
4. Максудов Ф. Г. Функциональный анализ. Баку, 1967.
5. Максудов Ф. Г. ДАН СССР, т. 153, 1963, № 5.
6. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. П., 1917.
7. Allan M. K. Trans. of the Amer. Math. Soc. V. 117, 1965.

Ф. Г. Максудов, Т. А. Халилова

Интеграл сэрһэд шэртли 2n-тэртибли
өз-өзүнэ гошма олмајан сингулјар дифференсиал
операторун спектри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) дифференсиал ифадәси вә (2) сэрһэд шэртләри вәсирә тәсилә гурулмуш параметрдән асылы $L_\lambda(\lambda)$ дифференсиал операторлар аиләсинин спектри тәдгиг олунар. Көстәрилир ки, $L_\lambda(\lambda)$ операторун гошмасы дифференсиал операторла $L_2(0, \infty)$ фәзасында n векторун хәтти комбинасиясындан ибарәтдир.

Бурада һәмчинин көстәрилир ки, $L_\lambda(\lambda)$ операторунун спектри ән чоху һесаби сәјда комплекс мәхсуси әдәлләрдән вә мүсбәт јарым охдан ибарәтдир.

А. М. АБАСОВ, Г. М. ГАСУМОВ

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОКОНТАКТНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Пусть $\tilde{D}_0$ —связанная область на плоскости $z = x + iy$, ограниченная замкнутыми, не имеющими общих точек кривыми Ляпунова $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}$ так, что контура $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ не лежат друг в друге, а находятся внутри Γ_{n+1} . Положительным направлением на совокупности $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \Gamma_{n+1}$ считается, как обычно, то, которое составляет область $\tilde{D}_0$ слева, а положительным направлением нормали относительно области $\tilde{D}_0$ будем считать направление, идущее изнутри области $\tilde{D}_0$ во вне и будем предполагать, что система координат (x, y) взята так, чтобы их начало находилось в области $\tilde{D}_0$. Обозначим область, ограниченную внутри контуров $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$, через D_i . Тогда область внешняя к контурам $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ и внутренняя к Γ_{n+1} которую мы обозначим через D_{n+1} , образует область $\tilde{D}_0$.

Рассмотрим связно-составную область $G^+ = \bigcup_{i=k+1}^n (D_i + \Gamma_i) \cup D_{n+1}$, относительно которой внешняя область будет $G^- = \bigcap_{i=0}^k D_i$, где D_0 —бесконечная область, лежащая вне Γ_{n+1} . Контур $\Gamma_i (i = k+1, \dots, n)$ будем называть теплоконтактными или просто контактными границами, в отличие от контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ и Γ_{n+1} , которые образуют границу области G^+ . Требуется найти функцию $u(x, y) = u(z)$, гармоническую в области $D = \bigcup_{i=k+1}^{n+1} D_i$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$A_i^0(s_0) \frac{du_{n+1}}{d\nu} + B_i^0(s_0) \frac{du_{n+1}}{ds} + C_i^0(s_0) u_{n+1} = f_i^0(s_0) \quad (1)$$

на $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ и Γ_{n+1} ;

$$u_{n+1} - u_i = f_i^0(s_0) \quad \text{на } \Gamma_{k+1}, \Gamma_{k+2}, \dots, \Gamma_n; \quad (2)$$

$$a_i(s_0) \frac{du_{n+1}}{d\nu} - b_i(s_0) \frac{du_i}{d\nu} = g_i^0(s_0) \quad \text{на } \Gamma_{k+1}, \Gamma_{k+2}, \dots, \Gamma_n, \quad (3)$$

где через $u_i(z) (i = k+1, k+2, \dots, n, n+1)$ обозначены значения функции $u(z)$ при $z \in D_i (i = k+1, \dots, n, n+1)$; $A_i^0(s_0), B_i^0(s_0)$,

$C_i^0(s_0)$ —заданные на $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ и Γ_{n+1} действительные функции точки s_0 контура Γ_i , удовлетворяющие условию Гельдера; $a_i(s_0), b_i(s_0)$ ($i = k+1, \dots, n$) — заданные на Γ_i ($i = k+1, \dots, n$) действительные функции из класса Гельдера; $f_1^0(s_0), f_2^0(s_0), \dots, f_k^0(s_0)$ —заданные на $\Gamma_i (i = 1, \dots, k)$ из класса Гельдера; $f_{k+1}^0(s_0), \dots, f_n^0(s_0)$ —заданные на $\Gamma_i (i = k+1, \dots, n)$ функции имеющие производные, удовлетворяющие условию Гельдера; $f_{n+1}^0(s_0)$ —заданная на Γ_{n+1} , из класса Гельдера; $g_i^0(s_0) (i = k+1, \dots, n)$ также из класса Гельдера. Условия (1) будем называть краевыми, а условия (2) — (3) теплоконтактными или просто контактными.

Будем решать задачу (1) — (3) при предположении, что $k = 1, n = 2$, ибо с точки зрения разрешимости все основные моменты этим случаем исчерпываются. Подобная задача впервые рассмотрена Н. И. Мухелишвили [1], затем Г. М. Голузиным [3], А. И. Гусейновым [3] и др. Решение будем искать в виде:

$$u_3(z) = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} p_j(t) \ln \frac{1}{r(t, z)} ds \quad \text{при } z \in D_3; \quad (4)$$

$$u_2(z) = \int_{\Gamma_2} p_4(f) \ln \frac{1}{r(t, z)} \quad \text{при } z \in D_2 \quad (5)$$

где $r = r(t, z) = |t - z|$, s —дуговая координата точки интегрирования $t \in \Gamma_i (i = 1, 2, 3)$, а $p_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ —неизвестные плотности.

Известно [4], что интегралы, стоящие в правых частях формул (4) — (5), как логарифмические потенциалы простых слоев непрерывны всюду, включая и контуры интегрирования; касательная производная существует в смысле главного значения [5], а нормальные производные терпят разрыв первого рода при переходе точки z через точку t_0 контура интегрирования.

Представляя предельные значения функций (4) — (5) и значения их нормальных и касательных производных в условия (1) — (3), переходя от дуговых координат s_0, s к соответствующим аффиксам t_0, t и принимая во внимание, что $ds = e^{-\theta_1} dt$, $r(t, t_0) = (t - t_0) e^{-\theta_1}$, где θ_1 — угол между касательной в точке t и положительным направлением оси Ox , а θ — угол между вектором $\vec{tt}_0$ и положительным направлением оси Ox (углы отсчитываются от оси Ox), будем иметь следующую систему интегральных уравнений для определения неизвестных плотностей $p_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$:

$$(-1)^k \pi A_{2k-1}(t_0) p_{2k-1}(t_0) + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{K_{2k-1}^j(t_0, t)}{t - t_0} p_j(t) dt = f_{2k-1}(t_0) \quad (k = 1, 2); \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} p_j(t) \ln \frac{1}{r(t, t_0)} ds - \int_{\Gamma_2} p_4(t) \ln \frac{1}{r(t, t_0)} ds = f_2^0(s) \quad (7)$$

$$\pi a_2(s_0) p_2(s_0) + \pi b_2(s_0) p_4(s_0) - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} p_j(t) \frac{a_2(s_0) \sin \psi_2^j}{r(t, t_0)} ds + \int_{\Gamma_2} p_4(t) \frac{b_2(s_0) \sin \psi_2^2}{r(t, t_0)} ds = g(s_0), \quad (8)$$

где $K_{2k-1}^j(t_0, t) = \pi i [A_{2k-1}(t_0) \sin \psi_{2k-1}^j + B_{2k-1}(t_0) \cos \psi_{2k-1}^j] e^{i(\theta - \theta_0)} +$
 $+ \pi i C_{2k-1}(t_0) e^{-i\theta_0} (t - t_0) \ln |t - t_0|, (j = 1, 2, 3; k = 1, 2);$
 $g(s_0) = -g^0(s_0), A_{2k-1}(t_0) = A_{2k-1}[s_0(t_0)], B_{2k-1}(t_0) =$
 $= B_{2k-1}[s_0(t_0)], C_{2k-1}(t_0) = C_{2k-1}[s_0(t_0)], f_{2k-1}(t_0) = f_{2k-1}[s_0(t_0)]$
 $(k = 1, 2),$ причем сингулярными являются только ядра, у которых
 верхние и нижние индексы равны.

Освободим системы (6)–(8) от фредгольмова уравнения первого
 рода. Для этого, продифференцировав уравнение (7) по s_0 , что воз-
 можно при наших условиях на плотности интегралов, и свободный
 член уравнения [6], получим сингулярное интегральное уравнение
 первого рода, нормального типа, с индексом, равным нулю. Регуля-
 ризируя его будем иметь фредгольмово уравнение:

$$\pi^2 \mu_2(t_0) - \pi^2 \mu_4(t_0) + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_2} N_2^{2j}(t_0, t) \mu_{2j}(t) dt = \omega_2(t_0), \quad (9)$$

где $N_2^{2j}(t_0, t)$ —фредгольмово ядро, $\omega_2(t_0)$ —функция из класса Гель-
 дера, которая получается из известных при регуляризации. Присое-
 единив уравнение (9) к уравнению (8), предварительно переписав его
 в удобной форме, и временно считая правую часть известной, прихо-
 дим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода вида:

$$\sum_{j=1}^n A_{kj}(t_0) \mu_j(t_0) + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_2} R_{kj}(t_0, t) \mu_j(t) dt = \Omega_k(t_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Вводя, как обычно это делают [5], соответствующие вектор-функ-
 ции и матрицы-функции, систему (10) переписем в виде

$$A(t_0) \mu(t_0) + \int_{\Gamma_2} R(t_0, t) \mu(t) dt = \Omega(t_0), \quad (10')$$

где $A(t_0), R(t_0, t)$ —известные матрицы; $\mu(t)$ —искомый, а $\Omega(t_0)$ —из-
 известный вектор. Предположим, что $A(t_0)$ —неособенная матрица. Если
 однородное уравнение, соответствующее уравнению (10'), не имеет
 отличных от нуля решений, то неоднородное уравнение однозначно
 разрешимо при всякой правой части $\Omega(t_0)$ и его единственное решение
 выражается формулой

$$\mu(t_0) = A^{-1}(t_0) \Omega(t_0) + \int_{\Gamma_2} \gamma(t_0, t) \Omega(t) dt, \quad (11)$$

где $\gamma(t_0, t)$ —вполне определенная матрица, т. е. разрешающая ядро-
 матрица уравнения (10'). В этом случае можно продолжить рассуж-
 дения о разрешимости задачи (1)–(3). Если же однородное урав-
 нение

$$A(t_0) \mu(t_0) + \int_{\Gamma_2} R(t_0, t) \mu(t) dt = 0, \quad (10'')$$

соответствующее уравнению (10'), имеет нетривиальное решение, то
 (10''), вообще говоря, неразрешимо для произвольного $\Omega(t_0)$ и в этом
 случае задача (1)–(3), вообще говоря, не разрешима. Для разреши-
 мости уравнения (10') необходимо и достаточно выполнение следую-
 щих условий:

$$\int_{\Gamma_2} \Omega(t) \nu^{\alpha}(t) dt = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m), \quad (12)$$

где $\nu^{\alpha}(t)$ —полная система линейно независимых решений однородного
 уравнения, сопряженного с (10'').

При выполнении условий (12) уравнение (10') разрешимо и его
 общее решение получается по формуле (11) с прибавлением к ней
 суммы $\sum_{\alpha=1}^m C^{\alpha} \nu^{\alpha}(t)$, где C^{α} —произвольные постоянные, а $\nu^{\alpha}(t)$ —полная
 система линейно независимых решений уравнения (10'').

А. Возвращаясь к системе, образованной уравнениями (8) и (9),
 отметим, что матрица $A(t_0)$ для этой системы, как легко видеть, не-
 особенная. Реализуя ее решение по формуле (11), в случае, когда
 соответствующая однородная система имеет только тривиальное ре-
 шение, будем иметь

$$\mu_{2i}(t_0) = \Phi_{2i}(t_0) + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{2j-1}} P_{2j-1}^i(t_0, t) \mu_{2j-1}(t) dt \quad (i = 1, 2), \quad (13)$$

где $\Phi_{2i}(t_0)$ и $P_{2j-1}^i(t_0, t)$ ($i, j = 1, 2$) выражаются через известные вели-
 чины $a_2(s_0), b_2(s_0), f_2^{01}(s_0), g(s_0), \gamma_{2i,2k}(t_0, t), (i, k = 1, 2),$

$$\cos \psi_2^{2j-1}, \sin \psi_2^{2j-1}, e^{-i\theta} \text{ и } e^{-i\theta_0}.$$

Подставляя значение $\mu_2(t_0)$, найденное по формуле (13), в уравнение
 (6), придем к следующей системе сингулярных интегральных урав-
 нений:

$$(-1)^k A_{2k-1}^{(t_0)} \mu_{2k-1}(t_0) + \frac{B_{2k-1}(t_0)}{\pi i} \int_{\Gamma_{2k-1}} \frac{\mu_{2k-1}(t)}{t - t_0} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{2j-1}} L_{2j-1}^k(t_0, t) \mu_{2j-1}(t) dt = E_{2k-1}(t_0) \quad (k = 1, 2), \quad (14)$$

где $B_{2j-1}(t_0) = K_{2j-1}(t_0, t_0); L_{2j-1}^k(t_0, t)$ ($k, j = 1, 2$) выражаются через
 функции $\Phi_{2j}(t_0), P_{2j-1}^i(t_0, t)$ и ядра $K_{2j-1}^i(t_0, t)$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) и
 являются ядрами со слабой полярностью, а функции

$$E_{2j-1}(t_0) = f_{2j-1}(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{2j-1}^2(t_0, t)}{t - t_0} \Phi_2(t) dt \quad (j = 1, 2).$$

Обозначая совокупность контуров $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ через L и принимая
 определенные обозначения, систему (14) можем записать в виде од-
 ного уравнения (фактически система (14) одно уравнение, записанное
 на двух различных контурах):

$$A(t_0) \mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\mu(t)}{t - t_0} dt + \frac{1}{\pi i} \int_L L(t_0, t) \mu(t) dt = E(t_0). \quad (15)$$

Уравнение (15)—сингулярное интегральное уравнение с коэффициен-
 тами из класса Гельдера на L [5, 7, 8]. Предполагая, что $A(t_0) \pm B(t_0)$
 на L нигде не обращается в нуль, определим индекс κ уравнения (15)
 по формуле (45, 4) из [5]. Применяя метод регуляризации Карлемана
 Векуа [9], будем иметь:

1. При $\kappa \geq 0$ сингулярное интегральное уравнение (15) эквива-
 лентно (в смысле разрешимости) уравнению Фредгольма:

$$\mu(t_0) + \int_L n(t_0, t) \mu(t) dt = E^*(t_0), \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} n(t_0, t) &= A(t_0) L(t_0, t) - \frac{B(t_0) Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{L(t_1, t) dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t_0)}, \\ E^*(t_0) &= A(t_0) E(t_0) - \frac{B(t_0) L(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{E(t) dt}{Z(t)(t - t_0)} + \\ &+ B(t_0) L(t_0) P_{x-1}(t_0). \end{aligned} \right\} (*)$$

$Z(t_0) = [A(t_0) + B(t_0)] X^+(t_0) = [A(t_0) - B(t_0)] X^-(t_0)$; $X(z)$ — каноническая функция соответствующей однородной задачи линейного сопряжения; $P_{x-1}(z)$ — произвольный полином степени $x-1$ ($P_{x-1} \equiv 0$ при $x=0$);

2. При $x < 0$ к уравнению (16) следует присоединить уравнения

$$\left. \begin{aligned} \int_L \left[\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{t_1^k L(t_1, t)}{Z(t_1)} dt_1 \right] \mu(t) dt = \\ = \int_L t^k \frac{E(t)}{Z(t)} dt \quad (k=0, 1, \dots, -x) \end{aligned} \right\} (17)$$

и тогда исходное уравнение (15) будет эквивалентным уравнению (16) совокупности уравнений (17). Легко убедиться, что функция $E^*(t_0)$ принадлежит классу Гельдера, ядро $n(t_0, t)$ имеет слабую особенность и, следовательно, решение уравнения (16) будет принадлежать классу Гельдера.

Если однородное уравнение

$$\mu(t_0) + \int_L n(t_0, t) \mu(t) dt = 0, \quad (16_0)$$

соответствующее уравнению (16), имеет только тривиальное решение, то (16) однозначно разрешимо при всякой правой части $E^*(t_0)$. Подставляя его единственное решение в формулу (13), найдем $\mu_{2i}(t_0)$ ($i=1, 2$) в окончательной форме. Затем, подставляя все найденные функции в (4) — (5), получим единственное решение задачи (1) — (3).

Если однородное уравнение (16₀) имеет нетривиальные решения, то неоднородное уравнение (16), вообще говоря, неразрешимо для произвольной правой части $E^*(t_0)$. Следовательно, неразрешима и задача (1) — (3). Для разрешимости же неоднородного уравнения (16) необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\int_L E^*(t) v^a(t) dt = 0 \quad (a=1, 2, \dots, n), \quad (12^*)$$

где $v^a(t)$ — полная система линейно независимых решений соответствующего сопряженного однородного уравнения. При выполнении условий (12^{*}) неоднородное уравнение (16) и вместе с ним задача (1) — (3) разрешимы и имеют n линейно независимых решений. Повторяя рассуждения, проведенные в [9], убедимся, что условие $x < 0$ является достаточным условием неразрешимости задачи (1) — (3) и поэтому в дальнейшем будем опускать рассмотрение этого случая.

Б. Если однородная система, соответствующая системе уравнений (8) и (10), имеет нетривиальные решения, то для разрешимости системы уравнений (8) и (10) необходимо и достаточно выполнение ус-

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{2j-1}} \left[\int_{\Gamma_2} N_1^{2j-1}(t_1, t) v_j^a(t_1) dt_1 \right] \mu_{2j-1}(t) dt = \int_{\Gamma_2} g_i(t) v_i^a(t) dt \quad (i=1, 2; a=1, 2, \dots, m), \quad (18)$$

где

$N_1^{2j-1}(t_0, t)$ и $N_2^{2j-1}(t_0, t)$ ($j=1, 2$) выражаются через известные величины; $v_j^a(t)$ ($j=1, 2; a=1, 2, \dots, m$) — полная система линейно независимых решений соответствующей однородной системы. Из (18) следует, что в особом случае, когда однородная система, соответствующая системе уравнений (8) и (10), имеет нетривиальные решения, искомые функции $\mu_{2j-1}(t)$ ($j=1, 2$) не могут быть произвольными, ибо они, кроме системы (6) должны еще удовлетворять системе (18). При выполнении условий (18) решение системы уравнений (8) и (10) запишется в виде

$$\mu_{2i}(t_0) = \Phi_{2i}(t_0) + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{2j-1}} P_{2j-1}^i(t_0, t) \mu_{2j-1}(t) dt + \sum_{a=1}^m C_a \mu^a(t), \quad (19)$$

где C_a — произвольные постоянные.

Подставляя $\mu_2(t)$, определяемую по формуле (19), в (6), мы снова приходим к системе (14) с теми же коэффициентами и теми же ядрами $L_{2j-1}^i(t_0, t)$ ($i, j=1, 2$), а правые части будут определяться по формуле

$$\begin{aligned} E_{2j-1}(t_0) &= f_{2j-1}(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{K_{2j-1}^2(t_0, t)}{t - t_0} \Phi_2(t) dt - \\ &- \sum_{a=1}^m C_a \int_{\Gamma_2} K_{2j-1}^2(t_0, t) \mu_j^a(t) dt \quad (j=1, 2) \end{aligned} \quad (20)$$

и содержат m произвольных постоянных. Принимая те же обозначения, что и выше, мы снова приходим к сингулярному интегральному уравнению вида (15), правая часть которого содержит m произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_m$, которые вносятся с помощью функций (20).

Определяя индекс x полученного уравнения как и выше, регуляризуя по методу Карлемана — Векуа, в случае $x \geq 0$ приходим к уравнению вида (16) с правой частью, содержащей $m+x$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+x}$. Ядро и правая часть полученного регулярного уравнения будут определяться формулами (*). Если однородное уравнение, соответствующее полученному регулярному, имеет только тривиальное решение, то неоднородное уравнение разрешимо при всякой правой части и его решение содержит $m+x$ произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_{m+x}$. В этом случае задача (1) — (3) имеет $m+x$ линейно независимых решений. Если же однородное уравнение, соответствующее полученному регулярному, имеет нетривиальные решения, то неоднородное уравнение неразрешимо и, следовательно, неразрешима задача (1) — (3). Для разрешимости уравнения необходимо и достаточно выполнение условий (12^{*}), при котором неоднородное уравнение, следовательно и задача (1) — (3), разрешимы и решение содержит $m+n+x$ произвольных постоянных.

Итак, можно сделать вывод:

1. Если однородная система, соответствующая системе уравнений (8) и (10), имеет только тривиальное решение, то соответствующая неоднородная система имеет единственное решение, определяемое по

формуле (13), и разрешимость задачи (1)–(3) сводится к разрешимости уравнения (15).

2. Условие $x < 0$ является достаточным условием неразрешимости задачи (1)–(3).

3. Если $x \geq 0$, уравнение (15) эквивалентно уравнению (16), которое однозначно разрешимо, следовательно, однозначно разрешима и задача (1)–(3), если соответствующее однородное уравнение (16₀) имеет только тривиальное решение; в противном случае уравнение (16), с ним и задача (1)–(3), вообще говоря, неразрешимы; для разрешимости необходимо и достаточно выполнение условий (12*).

При выполнении условий (12*) неоднородное уравнение (16) и вместе с ним задача (1)–(3) разрешимы, причем имеют n линейно независимых решений.

4. Если же однородная система, соответствующая системе уравнений (8) и (10), имеет нетривиальные решения, то неоднородная система уравнений (8) и (10), вообще говоря, неразрешима тогда и задача (1)–(3). Для разрешимости неоднородной системы уравнений (8) и (10) необходимо и достаточно выполнение условий (18), при этом решение системы уравнений (8) и (10) находится с помощью формулы (19) и разрешимость задачи сводится к системе (15) с правой частью (20), содержащей m произвольных постоянных. Если $x \geq 0$, это уравнение, а с ним вместе и задача (1)–(3) разрешимы и имеют $n + x$ линейно независимых решений, если соответствующее однородное уравнение Фредгольма имеет только тривиальное решение, и $n + x + m + x$ линейно независимых решений в противном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Голузин Г. М. Математич. сб., т. 41. 1934, стр. 246–276, 277–283; т. 42, 1935, стр. 127–135.
3. Гусейнов А. И. ПММ, т. 11, 1948.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, М., 1951.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
6. Магнарадзе Л. Сообщ. АН Груз. ССР, т. 8, 1947, № 9–10.
7. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
8. Хведелидзе Б. В. Тр. Тбилисского матем. ин-та им. А. М. Размадзе, т. XXIII, Тбилиси, 1956.
9. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

А. М. Аббасов, Г. М. Гасымов

Истилик-контактлы бир хәтти сәһәд мәсәләси
һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәһәләдә чоһрабитәли тәркибли мүстәви областда Лаплас тәһлији үчүн (1)–(3) сәһәд мәсәләси тәдгиг олунур. Мәсәләнин һәлли (4)–(5) садә лајын логарифмик потенциалы шәклиндә ахтарыларак (6)–(8) сингуляр интеграл тәһликләр системинә кәтирилир. (6)–(8) системинин һәлл едилә билмәси тәдгиг олунур вә алынған нәтичәләрә әсасланараг (1)–(3) мәсәләсинин һәлл едилә билмәси һаггында алтернатив верилир.

УДК 517.5

Ч. Г. АГАМАЛИЕВ

О ПОЛНОТЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Сравнение областей сходимости различных последовательностей линейных агрегатов

Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — целые аналитические функции и $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Рассмотрим последовательности линейных агрегатов вида

$$P_n(z) = \sum_{j=1}^{P_n} a_{nj} f(\lambda_j z), \quad (1)$$

$$Q_n(z) = \sum_{j=1}^{P_n} a_{nj} \varphi(\lambda_j z), \quad (2)$$

где a_{nj} — некоторые постоянные. А. Ф. Леонтьев в работе [1] изучал зависимость между областями сходимости последовательностей (1) и (2), а также областей полноты систем $\{f(\lambda_n z)\}$ и $\{\varphi(\lambda_n z)\}$ при тех или иных предположениях относительно функций $f(z)$ и $\varphi(z)$.

В статье рассматривается вопрос о сравнении областей сходимости последовательностей линейных агрегатов вида

$$P_n(z) = \sum_{i=1}^{P_n} a_{ni} z^i f^{(i)}(\lambda_1 z), \quad (3)$$

$$Q_n(z) = \sum_{i=1}^{P_n} a_{ni} z^i \varphi^{(i)}(\lambda_1 z). \quad (4)$$

Затем сравниваются области полноты систем $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ и $\{z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z)\}$ при определенных условиях, налагаемых на функции $f(z)$, $\varphi(z)$ и последовательность $\{\lambda_n\}$. Пусть целые функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют вид:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^{n_k}, \quad a_{nk} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (5)$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} z^{n_k} \quad (6)$$

и удовлетворяют условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\left| \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \right|} \leq 1. \quad (7)$$

Покажем, что при условии (7) имеет место представление

$$z^i \varphi^{(i)}(z\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \gamma\left(\frac{t}{z}\right) t^i f^{(i)}(\eta t) \cdot \frac{dt}{z}, \quad (8)$$

где η — произвольный параметр и

$$\gamma(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \cdot \frac{1}{u^{n_k+1}}. \quad (9)$$

Заметим, что в силу условия (7) при фиксированном z , $|z| < r$, ряд, определяющий функцию $\gamma\left(\frac{t}{z}\right)$, на окружности $|t|=r$ сходится равномерно. Следовательно, учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f^{(i)}(\eta t)}{t^{n_k-i+1}} \cdot dt = n_k(n_k-1) \cdots (n_k-i) a_{n_k} \eta^{n_k-i},$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \gamma\left(\frac{t}{z}\right) t^i f^{(i)}(\eta t) \frac{dt}{z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \cdot z^{n_k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{f^{(i)}(\eta t)}{t^{n_k-i+1}} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \cdot z^{n_k} \cdot n_k(n_k-1) \cdots (n_k-i) a_{n_k} \eta^{n_k-i} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} z^{n_k} \eta^{n_k-i} \cdot n_k(n_k-1) \cdots (n_k-i) = \\ &= z^i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} n_k(n_k-1) \cdots (n_k-i) (z\eta)^{n_k-1} = z^i \varphi^{(i)}(z\eta) \quad (i=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Справедливы следующие теоремы, которые доказываются с помощью представления (8).

Теорема 1. Пусть последовательность (3) сходится равномерно внутри круга $|z| < R$. Если функция $f(z)$ и $\varphi(z)$ удовлетворяют условию (7), то внутри того же круга будет сходиться и последовательность (4).

Следствие. Если функции (5) и (6) удовлетворяют условиям

$$b_{n_k} \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n_k]{\left| \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \right|} = 1, \quad (10)$$

то радиусы максимальных кругов с центром в начале, внутри которых последовательности (3) и (4) сходятся равномерно, равны.

Приведем следующее применение этого следствия. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция первого порядка конечного типа, $\sigma > 0$, причем все ее тейлоровские коэффициенты $a_n \neq 0$ и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma e. \quad (11)$$

Составим следующий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n f^{(n)}(\lambda_n z), \quad (12)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — положительные числа такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$$

и

$$\kappa = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\sigma^n d_n|}{\sigma \lambda_n} \neq \infty.$$

Для того, чтобы определить радиус круга сходимости ряда (12) рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z), \quad \varphi(z) = e^{-\sigma z}. \quad (13)$$

Принимая во внимание условие (11), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{a_n}{b_n} \right|} = 1,$$

где b_n ($n=0, 1, 2, \dots$) — тейлоровские коэффициенты функции $\varphi(z) = e^{-\sigma z}$. Отсюда можно заключить, согласно следствию, что радиусы кругов, внутри которых ряды (12) и (13) равномерно сходятся, равны.

Ряд (13), как известно [2], сходится равномерно в круге $|z| < 1$ и расходится вне этого круга. Следовательно, радиус максимального круга, внутри которого сходится ряд (12), равен единице. Если последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n} = 0$, то

доказано [2], что ряд (13) сходится в круге $|z| < e^{-x}$.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |\sigma^n d_n|}{n}.$$

При вышеуказанном ограничении на функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ приходим к выводу, что ряд (12) сходится в круге $|z| < e^{-x}$.

Теорема 2. Пусть у функции (9), регулярной в бесконечности, все особые точки находятся на отрезке $[0, 1]$ действительной оси. Если последовательность (3) равномерно сходится внутри области G , звездообразной относительно начала координат, то внутри G будет равномерно сходиться и последовательность (4).

Теорема 3. Если у функции (9) все особые точки лежат на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси и последовательность (3) равномерно сходится внутри области G , симметричной и звездообразной относительно начала координат, то внутри G будет равномерно сходиться и последовательность (4).

Теорема 4. Пусть функция (9) имеет единственную особую точку $u=1$. Если последовательность (3) равномерно сходится внутри некоторой области G , то внутри той же области будет равномерно сходиться и последовательность (4).

§ 2. Сравнение областей полноты различных систем аналитических функций

Определение. Пусть дана целая функция вида

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{n_k} z^{n_k}, \quad C_{n_k} \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Будем говорить, что система $\{z^n \psi^{(n)}(\lambda_n z)\}$, где $\{\lambda_n\}$ — некоторая последовательность чисел, полна в круге $|z| < R$, если любую функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} z^{nk},$$

аналитическую в этом круге, можно в каждом круге $|z| \leq r < R$ сколь угодно хорошо аппроксимировать в обычном смысле линейными агрегатами, образованными из функции системы $\{z^n \psi^{(n)}(\lambda_n z)\}$. Радиус максимального круга с центром в начале, в котором полна система $\{z^n \psi^{(n)}(\lambda_n z)\}$, будем называть радиусом полноты. Для дальнейшего полезно заметить, что для доказательства полноты системы $\{z^n \psi^{(n)}(\lambda_n z)\}$ в том или ином круге, достаточно убедиться, что в любом меньшем круге можно сколь угодно хорошо аппроксимировать линейными агрегатами, образованными из функции рассматриваемой системы, степени z^{nk} ($k = 1, 2, \dots$).

Теорема 5. Пусть целые функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют вид (5) и (6) и пусть выполняется условие (7). Если система

$$zf'(\lambda_1 z), z^2 f''(\lambda_2 z), \dots, z^n f^{(n)}(\lambda_n z), \dots \quad (14)$$

полна в круге $|z| < R$, то в этом круге будет полна и система

$$z\varphi'(\lambda_1 z), z^2 \varphi''(\lambda_2 z), \dots, z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z), \dots \quad (15)$$

Из теоремы 5 непосредственно вытекает следующее утверждение

Теорема 6. Если функции (5) и (6) удовлетворяют условию (10), то радиусы полноты систем (14) и (15) равны.

Рассмотрим примеры на применение этих теорем.

1) Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — последовательность чисел такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = 0$. При этом условии в работе [3] доказано, что радиус полноты систем $\{z^n e^{\lambda_n z}\}$ равен бесконечности. Пусть $f(z)$ — целая функция первого порядка и типа $\sigma > 0$ и коэффициенты $a_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma e.$$

Если в качестве функции $\varphi(z)$ возьмем e^{z^2} , тогда система $\{z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z)\}$ будет иметь вид $\{z^n e^{\lambda_n^2 z^2}\}$. Применяя теорему 6, заключаем, что радиус полноты системы $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ равен бесконечности.

2) Пусть последовательность комплексных чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что $|\lambda_n| < 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Допустим, что $f(z)$ — целая функция первого порядка и типа $\sigma = 1$ и тейлоровские коэффициенты удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = e.$$

Если взять $\varphi(z) = e^z$, то легко показать выполнимость условия (10). Так как при $|\lambda_n| < 1$ ($n = 1, 2, \dots$) система $\{z^n e^{\lambda_n z}\}$ полна [3, 4, 5] в круге $|z| < \ln 2$, то из теоремы 6 следует, что и система $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ полна в круге $|z| < \ln 2$.

3) Пусть $\lambda_n = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) и $\varphi(z) = e^z$. Известно, что система $\{z^n e^z\}$ полна в любом конечном круге. В случае, когда $f(z)$ — целая функция первого порядка типа $\sigma = 1$ с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами, удовлетворяющими условию $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = e$, система $\{z^n f^{(n)}(z)\}$ в силу теоремы 6 полна в любом конечном круге, что совпадает с результатом И. И. Ибрагимова [3].

4) Пусть последовательность комплексных чисел такова, что $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Обозначим через $n(r)$ число точек последовательности

$$S_n = \sum_{k=0}^n |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

находящихся внутри отрезка $[0, r]$. Допустим, что $f(z)$ — целая функция первого порядка типа σ и тейлоровские коэффициенты удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|a_n|} = \sigma e.$$

Если взять $\varphi(z) = e^{z^2}$, то легко показать выполнимость условия (10). Так как в работе [5] доказано, что если μ — нижняя плотность последовательности $\{S_n\}$, т. е.

$$\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r},$$

ω — положительный корень уравнения $\omega \cdot e^{\omega+1} = 1$, то система $\{z^n e^{\lambda_n^2 z^2}\}$ полна в каждом конечном круге при условии $\mu > \frac{1}{\omega}$. Тогда из теоремы 6 следует, что и система $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ полна в каждом конечном круге.

§ 3. Случай целых функций конечного порядка

Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — целые функции конечного порядка ρ и конечного типа $\sigma > 0$. Предположим, что функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (17)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}, \quad (19)$$

тогда имеет место

Теорема 7. Среди систем $\{z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z)\}$, где $\{\lambda_n\}$ — фиксированная последовательность, а $\varphi(z)$ — произвольная целая функция данного порядка ρ и данного типа $\sigma > 0$, система $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$, где $f(z)$ удовлетворяют условию (19), имеет наименьший радиус полноты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев А. Ф. О полноте системы аналитических функций*. Матем. сб. т. 31 (73), 1952, № 2.
2. Лунц Г. Л. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук*, т. 14, 1961, № 2.
3. Ибрагимов И. И. Изв. АН СССР, серия матем.*, 1939, № 5, 6.
4. Маркушевич А. И. О базисе в пространстве аналитических функций*. Матем. сб. 17 (59), 1945, 211—252.
5. Ибрагимов И. И., Агамалиев Ч. Г. ДАН СССР*, 1966, № 3.

Бир систем аналитик функцијаларын тамлығы наггында ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $\{z^n f^{(n)}(\lambda_n z)\}$ вә $\{z^n \varphi^{(n)}(\lambda_n z)\}$ аналитик функцијалар системини тамлыг областлары вә бу системләрден дүзәлдилмиш хәтти агрегатлар ардычыллығынын ығылма областлары мугәјисә олунур. Исбат олунан теоремләрден бә'зи мә'лум нәтичәләр алыныр.

Ф. А. АЗИЗОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Задачи Дирихле и Неймана для контуров с угловыми точками решены Карлеманом [4] и Радоном [3]. Решение основных граничных задач статической теории упругости для контуров с угловыми точками дано в работе Л. Г. Магнарадзе [2]. В настоящей работе исследовалась задача Дирихле в составной области с угловыми точками на контуре.

Пусть задана односвязная ограниченная область g с границами Γ и внутри нее замкнутая кривая γ (имеющая непрерывную кривизну), разбивающая область g на подобласти g_1 (лежащую внутри γ) и g_2 . Требуется определить функцию $u(x, y)$, непрерывную в $g + \Gamma$, гармоническую в областях g_1 и g_2 и удовлетворяющую условиям:

$$u|_{\Gamma} = f(p); \quad (1)$$

$$K_1 \left(\frac{du}{dn_p} \right)_{\gamma-1} - K_2 \left(\frac{du}{dn_p} \right)_{\gamma+1} + h(p) u = \varphi(p), \quad (2)$$

где n_p — внутренняя нормаль области g_1 (условие (2) справедливо для всех точек контура γ , кроме угловых); $K_1 > 0$ — некоторые постоянные; γ^+ и γ^- означают, что берутся предельные значения, соответственно, с внутренней и с внешней по отношению к g_1 сторон контура γ ; $f(p)$, $h(p)$ и $\varphi(p)$ — заданные непрерывные функции на Γ и на γ , причем $h(p) \geq 0$ при всех $p \in \gamma$. Относительно контура Γ , ограничивающего область g , и контура γ , ограничивающего область g_1 , предполагаем, что они состоят из конечного числа дуг непрерывной кривизны, пересекающихся в точках $p_1, p_2, \dots, p_n$ и $q_1, q_2, \dots, q_n$, соответственно. В случае гладкого контура γ задача рассмотрена Ш. Векиловым [1].

Начало отсчета берем на контурах Γ и γ (в любой точке, кроме угловых). В дальнейшем, выбирая определенные направления, будем обозначать через s и t как сами точки контура Γ и γ , так и криволинейные их абсциссы. Касательные в угловых точках образуют углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, соответственно, каждый из которых отсчитывается от 0 до 2π в определенном направлении. Криволинейные абсциссы вершин $p_1, p_2, \dots, p_n$ и $q_1, q_2, \dots, q_n$ обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_n$ и $t_1, t_2, \dots, t_n$, соответственно. Расстояние от некоторой точки p до точки t контура $\Gamma + \gamma$ обозначим через r_{pt} . Докажем, что при выполнении вышеуказанных условий справедлива теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Два из ядер приведенных систем интегральных уравнений в окрестности угловых точек неограничены и поэтому теория Фредгольма к этой системе неприменима. Но, пользуясь результатами Карлемана [4], можно построить новую систему интегральных уравнений, для которых в некотором круге радиуса больше единицы теория Фредгольма применима. Докажем, что при выполнении всех указанных условий может существовать только одно решение задачи. В самом деле предположим обратное и обозначим через φ разность двух решений задачи. Применяя формулы Грина к областям G_1 и G_2 и учитывая условие (2), легко доказать, что однородная задача имеет только тривиальное решение, т.е. неоднородная задача не имеет более одного решения.

Решение задачи будем искать в виде суммы потенциала простого слоя с плотностью на γ и потенциала двойного слоя с плотностью Γ :

$$u(p) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(t) \frac{\cos \varphi}{r} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \delta(t) \ln \frac{R_0}{r} dt, \quad (3)$$

где r — расстояние от переменной точки контура интегрирования до произвольной точки p , лежащей внутри или вне контура $\Gamma + \gamma$, φ — угол между внутренней нормалью в точке t и вектором r , соединяющим точки t и p ; R_0 больше, чем диаметр γ .

Пользуясь формулами предельных значений, известных из общей теории потенциала, поставленная задача сводится к решению систем интегральных уравнений:

$$\mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} \frac{\cos \varphi}{\pi r} \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} \delta(t) \frac{1}{\pi} \ln \frac{R_0}{r} dt = \frac{f(s)}{\pi}; \quad (4)$$

$$\delta(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) A \frac{d}{dn_s} \left[\frac{\cos \varphi}{\pi r} \right] dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} \left[A \frac{\cos \varphi}{r} + h_1(t) \ln \frac{R_0}{r} \right] \delta(t) dt = \frac{\varphi(s)}{\pi(K_1 + K_2)}.$$

Причем справедливость уравнений требуется всюду, кроме $s = s_1$ и $s' = s_1$. Ядро

$$K_1(s, t) = \frac{\cos(r_{ts} \cdot n_t)}{r_{st}} \text{ при } s \in \Gamma \text{ и } t \in \Gamma$$

в окрестности угловых точек (s_1, s_1) неограниченно возрастает. Ядра

$$K_2(s, t) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{R_0}{r_{st}} \quad (s \in \Gamma \text{ и } t \in \gamma)$$

и

$$K_3(s, t) = A \frac{d}{dn_s} \left[\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{\pi r_{ts}} \right] \quad (s \in \gamma \text{ и } t \in \Gamma),$$

где $A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}$, являются непрерывными функциями относительно своих аргументов.

Ядро

$$K_4(s, t) = \frac{1}{\pi} \left(A \frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{ts}} + h_1(t) \ln \frac{R_0}{r_{st}} \right) \text{ при } s \in \gamma, t \in \gamma$$

(где $h_1(t) = \frac{h(t)}{K_1 + K_2}$) нерегулярно потому, что в окрестности угло-

вых точек (s_1, s_1) первое слагаемое $A \frac{\cos \varphi}{r_{st}}$ неограниченно возрастает, второе слагаемое при $t = s$ (на диагонали) обладает логарифмической особенностью, но первая итерация последнего ограничена. Поэтому теория Фредгольма к системе (4) неприменима.

Применяя метод Карлемана, построим новую систему интегральных уравнений, эквивалентных данному, к которому можно применить теорию Фредгольма. Первое уравнение системы (4) приведем к виду

$$\mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) \delta(t) dt = p(s), \quad (5)$$

где $L_1(s, t, \lambda)$, $L_2(s, t, \lambda)$, $p(s)$ определены следующими интегральными уравнениями:

$$L_1(s, t, \lambda) = H(s, t) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) L_1(s, \tau, \lambda) d\tau;$$

$$L_2(s, t, \lambda) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{R_0}{r} + \lambda \int_{\gamma} L_2(\tau, t, \lambda) G(s, \tau) d\tau;$$

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\gamma} G(s, \tau) p(\tau) d\tau.$$

Здесь $H(s, t)$ — ограниченная функция, определяемая из равенства

$$K_1(s, t) = G(s, t) + H(s, t); \quad (6)$$

$\frac{1}{\pi} \ln \frac{R_0}{r}$ — непрерывная функция, где точки $s \in \Gamma$, $t \in \gamma$. Возьмем второе уравнение системы (4). Ядро $K_4(s, t)$ можно записать в следующем виде:

$$K_4(s, t) = \frac{1}{\pi} \left[AG(s, t) + AH(s, t) + h_1(t) \ln \frac{R_0}{r_{st}} \right],$$

здесь $H(s, t)$ — ограниченная функция.

Обозначим $AH(s, t) + h_1(t) \ln \frac{R_0}{r_{st}}$ через $p(s, t)$. Легко можно

доказать, что

$$|p(s, t)| = \left| AH(s, t) + h_1(t) \ln \frac{R_0}{r_{st}} \right| \leq l_1 \ln \frac{R_0}{r_{st}}, \quad (7)$$

здесь l_1 — некоторое постоянное. Тогда второе уравнение (4) примет вид:

$$\delta(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) A \frac{d}{dn} \left[\frac{\cos \varphi}{\pi r} \right] dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} [AG(t, s) + p(t, s)] \delta(t) dt = \frac{\varphi(s)}{K_1 + K_2} \quad (8)$$

Рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$\theta(s, t) - \lambda \int_{\gamma} G(s, \tau) \theta(\tau, t) d\tau = p(s, t). \quad (9)$$

Можно показать, что единственное решение интегрального уравнения (9) с помощью резольвенты $G(s, t, \lambda)$ представляется в виде

$$\theta(s, t) = p(s, t) + \lambda \int_{\gamma} G(s, \tau, \lambda) p(\tau, t) d\tau.$$

Для резольвенты $G(s, t, \lambda)$ имеет место неравенство

$$|G(s, t, \lambda)| < M |s - s_1|^{-x} |t - t_1|^{x-1} \quad (10)$$

Пусть

$$R(s, t) = \int_0^l G(s, \tau, \lambda) p(\tau, t) d\tau.$$

С помощью (10) можно легко доказать, что

$$|R(s, t)| \leq \int_0^l |G(s, \tau, \lambda)| |p(\tau, t)| d\tau \leq L_2 |s - s_1|^{-x}, \quad (11)$$

где L_2 — некоторая постоянная. Если подставить (9) в (8), то получим

$$Q(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) A \frac{d}{dn} \left[\frac{\cos \varphi}{\pi r} \right] dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} \theta(t, s) Q(t) dt = \frac{\varphi(s)}{K_1 + K_2},$$

где

$$Q(s) = \delta(s) - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} G(t, s) \delta(t) dt.$$

Следовательно, систему (4) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) \delta(t) dt = p(s); \\ Q(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) \frac{d}{dn} \left[\frac{\cos \varphi}{\pi r} \right] dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{A}{\pi} \theta(t, s) Q(t) dt = \frac{\varphi(s)}{K_1 + K_2}; \\ \delta(s) - \lambda \int_{\gamma} G(t, s) \delta(t) dt = Q(s). \end{cases} \quad (12)$$

Если $Q(s)$ известна, то к третьему уравнению этой системы применим метод последовательных приближений.

Можно построить резольвенту $G(s, t, \lambda)$ для ядра $G(s, t)$ и доказать, что она как функция своего первого и второго аргументов удовлетворяет двум интегральным уравнениям резольвенты (см. [4]), посредством которых решение интегрального уравнения

$$\delta(s) - \lambda \int_{\gamma} G(t, s) \delta(t) dt = Q(s) \text{ при } |\lambda| < R$$

выразится в следующем виде:

$$\delta(s) = Q(s) + \lambda \int_{\gamma} G(t, s, \lambda) Q(t) dt. \quad (13)$$

Если в первое уравнение системы (12) поставим значение $\delta(s)$, то получим систему интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L'_2(s, t, \lambda) Q(t) dt = p(s); \\ Q(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_4(s, t, \lambda) Q(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_3(s, t, \lambda) \mu(t) dt = \varphi'(s), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$L'_2(s, t, \lambda) = L_2(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) G(t, t_1, \lambda) dt,$$

$$L_3(s, t, \lambda) = \frac{A}{\pi} \frac{d}{dn} \left(\frac{\cos \varphi}{r} \right),$$

$$L_4(s, t, \lambda) = \frac{A}{\pi} \theta'(t, s), \quad \varphi'(s) = \frac{\varphi(s)}{K_1 + K_2};$$

$\theta'(t, s)$ — итерационное ядро $\theta(t, s)$.

К полученной системе уравнений (14) метод Фредгольма уже применим в круге $|\lambda| < R$, где $R < \frac{\pi}{\theta}$, $\theta = \max_{1 \leq i \leq k} |\pi - \gamma_i|$,

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } s \in \Gamma, t \in \Gamma, \\ \beta_i & \text{при } s \in \gamma, t \in \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Запишем эту систему в виде одного уравнения:

$$\Phi(s) - \lambda \int_{\Gamma + \gamma} L(s, t, \lambda) \Phi(t) dt = F(s). \quad (16)$$

Согласно общей теории, если λ не является корнем уравнения $D_L(\lambda) = 0$, то (16) имеет единственное решение $\Phi(s)$, которое определяется формулой

$$\Phi(s) = F(s) + \lambda \int_{\Gamma + \gamma} \frac{D_L(s, t, \lambda)}{D_L(\lambda)} F(t) dt. \quad (17)$$

Пусть

$$\Gamma(s, t, \lambda) = \frac{D_L(s, t, \lambda)}{D_L(\lambda)},$$

тогда (17) запишется либо в виде

$$\Phi(s) = F(s) + \lambda \int_{\Gamma + \gamma} \Gamma(s, t, \lambda) F(t) dt, \quad (18)$$

либо в виде системы:

$$\begin{cases} \mu(s) = p(s) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t, \lambda) p(t) dt + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_2(s, t, \lambda) \varphi'(t) dt; \\ Q(s) = \varphi'(s) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t, \lambda) p(t) dt + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_4(s, t, \lambda) \varphi'(t) dt. \end{cases} \quad (19)$$

Как известно, $p(s)$ определяется как решение уравнения

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) p(\tau) d\tau,$$

т. е.

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, t, \lambda) f(t) dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} \left\{ G(s, t, \lambda) + \Gamma_1(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 \right\} \times \\ \times f(t) dt + \lambda \int_{\gamma} (s, t, \lambda) \varphi(t) dt, \\ Q(s) = \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} \left[\Gamma_3(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 \right] f(t) dt + \\ + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_4(s, t, \lambda) \varphi(t) dt, \\ \delta(s) = \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} \left\{ \Gamma_3(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 + \right. \\ \left. + \lambda \int_{\gamma} G(t_2, s_1, \lambda) \left[\Gamma_2(t_2, t_1, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(t_2, t_1, \lambda) G(t_1, t_2, \lambda) dt_1 \right] dt_2 \right\} f(t) dt + \\ + \lambda \int_{\gamma} \left[G(t, s, \lambda) + \Gamma_4(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\gamma} G(t_2, s, \lambda) \Gamma_4(t_2, t, \lambda) dt_2 \right] \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

Пусть

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} G(s, t, \lambda) + \Gamma_1(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt & \text{при } s, t \in \Gamma, \\ \Gamma_2(s, t, \lambda) & \text{при } s \in \Gamma, t \in \gamma, \\ \Gamma_3(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 + \lambda \int_{\gamma} G(t_2, s, \lambda) [\Gamma_3(t_2, t, \lambda) + \\ + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(t_2, t_1, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1] dt_2 & \text{при } s \in \gamma, t \in \Gamma, \\ G(t, s, \lambda) + \Gamma_4(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\gamma} G(t_2, s, \lambda) \Gamma_4(t_2, t, \lambda) dt_2 & \text{при } s, t \in \gamma. \end{cases}$$

Тогда решение $\mu(s)$ и $\delta(s)$ с помощью резольвенты $K(s, t, \lambda)$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mu(s) &= f(s) + \lambda \int_{\Gamma} K(s, t, \lambda) f(t) dt + \lambda \int_{\gamma} K(s, t, \lambda) \varphi(t) dt, \quad s \in \Gamma; \\ \delta(s) &= \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} K(s, t, \lambda) f(t) dt + \lambda \int_{\gamma} K(s, t, \lambda) \varphi(t) dt, \quad s \in \gamma. \end{aligned}$$

Используя результаты работы [1], легко можно показать, что $\lambda = -1$ не является собственным значением системы (12), поэтому система (12) и, следовательно, (4) имеют единственное решение. Подставляя найденные решения $\{\mu(t), \delta(t)\}$ системы (4) в выражение (3), получим функцию $u(x, y)$, являющуюся решением поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векилов Ш. И. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1962, № 2.
2. Магнарадзе Л. Г. Тр. Матем. ин-та АН Груз. ССР, т. 4, 1938.
3. Радон И. О. УМН, т. I, вып. 3—4 (13—14), 1946.
4. Carleman T. Über das Neumann-Poincaré Problem für ein Gebiet mit Ecken. Uppsala, 1916.

Ф. Э. Эзизов

Бучаг нөгтэлэри олан 'ниссэлэрдэн тэшкил едилмиш
областа Лаплас тэнлији үчүн Дирихле мәсэлəsi

ХҮЛАСЭ

Мөгаләдә ашағыдакы мәсәләдән бәһс олунур.

Тутаг ки, гапалы сонлу сајда бучаг нөгтэлэри олан γ әјриси сонлу сајда бучаг нөгтэлэри олан гапалы Γ әјриси илә әһатә олунмуш мәнһуд g областыны харичи g_2 вә дахили g_1 областларына ајырмыш дыр. Белә ки, $g = g_1 + g_2 + \gamma$, g_1 вә g_2 областларында гармоник $g + \Gamma$ -да кәсилмәз, Γ әјриси үзәриндә

$$u(s) = f(s)$$

вә γ әјриси үзәриндә

$$K_1 \left(\frac{du}{dn} \right) - K_2 \left(\frac{du}{dn} \right)_+ + h(s) u = \varphi(s)$$

шәртини өдәјән u функцијасынын тапылмасы тәләб олунур. Мәсәләнин һәлли садә вә икитәтлә потенциалларынын чәми шәклиндә ахтарылмагла, сингулар интеграл тәнликләр системинин һәллине кәтирилир. Бу системә эквивалент олан Фредһолм интеграл тәнликләр системи гурулуру вә онун јеканә һәллинин варлығы исбат едилир.

УДК 620.17

Н. С. ГРАЦКОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ МГНОВЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ РАЗГРУЗКИ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Статья посвящена экспериментальному и теоретическому исследованию мгновенной разгрузки полимерных материалов при поперечном ударе. Мгновенная разгрузка осуществляется путем отсечения предварительно динамически нагруженного образца. Постановка эксперимента обеспечивает одномерность движения без влияния закрепленной границы. Такая постановка эксперимента является новой и существенно отличается от ранее известных экспериментов [1, 2], в которых образец неполностью находился в одномерном движении.

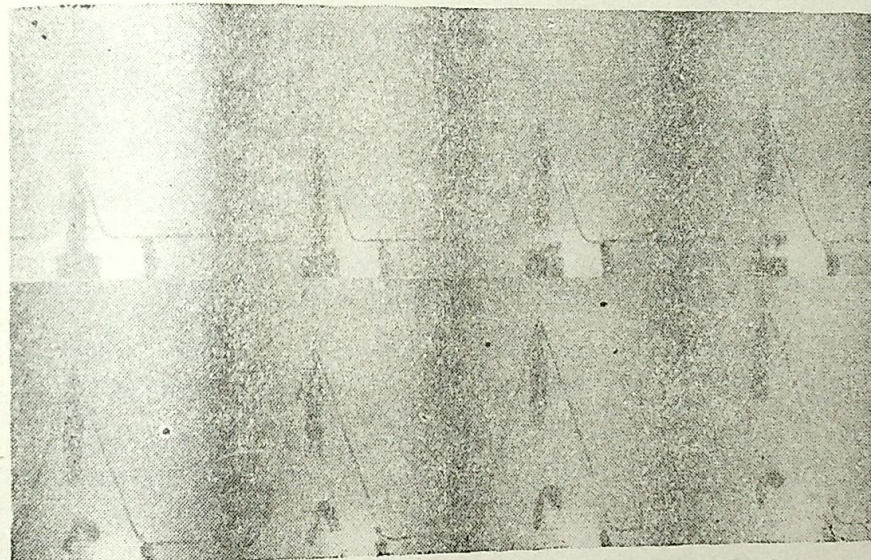


Рис. 1.

1. Эксперименты проводились над резиновым шнуром „шифр 65“, диаметром 5 мм. Мгновенная динамическая разгрузка достигалась отсечением одного или двух концов образца во время поперечного удара. Ножи для отсечения шнура устанавливались вблизи места удара под определенным углом к образцу. Часть шнура, приведенного в поперечное движение, отсекали. Отсеченный конец перемещали вместе со снарядом. Движение отсеченного конца шнура регистрировали.

стрировали с помощью скоростного кино съемочного аппарата СКС-1 (или скоростным фоторегистратором СФР-1). Как видно из снимков, характерный параметр—угол излома после отсечения шнура не меняется. Так как в данном случае очень трудно измерить непосредственно угол излома, т. е. угол в месте перехода продольного движения в поперечную область (шнур разрезан), то измеряется угол в месте удара α , а угол излома γ определяется соответственно по формуле

$$\gamma = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

Характерная картина движения показана на рис. 1. По движению шнура определяется скорость перемещения отрезанного конца относительно снаряда, причем сначала определяется проекция скорости движения отсеченного конца на направление скорости удара, а именно:

$$u_n = \frac{(S_n - S_c)_n - (S_n - S_c)_m}{m - n} \kappa, \quad (1)$$

где u_n —проекция скорости движения отсеченного конца, S_n —путь, пройденный свободным концом нити, S_c —путь, пройденный снарядом, κ —скорость съемки (кадр/сек), m, n —порядковые номера кадров на снимке. Затем определяется истинная скорость перемещения отрезанного конца:

$$u = \frac{u_n}{\sin \gamma}, \quad (2)$$

где γ —угол излома.

Результаты испытаний сведены в таблицу.

γ (град)	66,5	65	60	70	68	58,5	53	55	72
u (м/сек)	61	50,6	57,1	74,5	50,5	28,6	18	17,6	74,9
ϵ	0,603	0,53	0,588	0,815	0,685	0,335	0,230	0,254	0,966

Зависимость $\epsilon(\gamma)$ получена из эксперимента путем непосредственного измерения расстояния между предварительно нанесенными метками на образце.

2. Для анализа экспериментальных результатов, полученных при мгновенной динамической разгрузке образца, рассмотрим некоторые теоретически возможные случаи диаграммы $T \sim \epsilon$ разгрузки, полученные по одномерной теории упруго-пластического деформирования.

а) В случае, когда зависимость $T \sim \epsilon$ обращена выпуклостью к оси T , скорость частицы определяется по формуле

$$u = \int_0^\epsilon a(\epsilon) d\epsilon = \frac{v_0(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma}, \quad (3)$$

где u —продольная скорость частицы, v_0 —скорость удара при нагружении,

$a(\epsilon)$ —скорость распространения пластической волны. В этом случае процесс деформирования происходит непрерывно, т. е. основные параметры не терпят разрыва (рис. 2).

б) Рассмотрим схему зависимости $T \sim \epsilon$ и предположим, что нагрузка и разгрузка происходят по одной и той же кривой. В этом

случае деформация разгрузки после поперечного удара определяется следующим образом: используются основные законы механики—закон сохранения массы и закон изменения количества движения, которые для данного случая, соответственно, имеют вид:

$$\rho_{00}(b - u) = b \rho_0; \quad (4)$$

$$\rho_0 u \cdot b = T_0, \quad (5)$$

где ρ_{00} —первоначальная массовая плотность единицы длины, ρ_0 —массовая плотность единицы длины в деформированном состоянии, b —скорость распространения продольной ударной волны, u —скорость частицы, T —натяжение.

Согласно определению деформации имеем

$$\epsilon_0 = \frac{u}{b - u}. \quad (6)$$

Из (4), (5), (6) необходимо определить расчетную скорость частицы u , для чего из (4) находим

$$\rho_{00} = \rho_0 \frac{b}{b - u}.$$

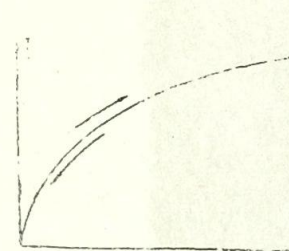


Рис. 2.

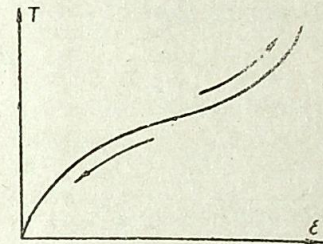


Рис. 3.

Подставляя в последнюю формулу значение u , полученное из (4), имеем

$$\rho_{00} = \rho_0(1 + \epsilon_0).$$

С другой стороны, из (5) с учетом значения b получим

$$\rho_0 u^2 \frac{1 + \epsilon_0}{\epsilon_0} = T_0,$$

откуда

$$u = \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\rho_0(1 + \epsilon_0)}}.$$

Учитывая, что

$$\rho_0 = \frac{\rho_{00}}{1 + \epsilon_0},$$

окончательно будем иметь

$$u = \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\rho_{00}}}. \quad (7)$$

Таким образом, если разгрузка происходит по кривой нагружения $T \sim \epsilon$, обращенной выпуклостью вверх, скорость частицы определяется по формуле (7).

в) Рассмотрим схему зависимости $T \sim \epsilon$, имеющую точку перегиба, и предположим, что разгрузка совпадает с кривой нагружения (рис. 3).

Для определения скорости частицы при разгрузке за точкой перегиба диаграммы нагружения $T \sim \epsilon$ используем следующее соотношение:

$$u^* = \int_{\epsilon^*}^{\epsilon_0} a(\epsilon) d\epsilon \quad (8)$$

для деформации,

где u^* — скорость частицы за точкой перегиба, ϵ^* — координата диаграммы $T \sim \epsilon$, имеющая общую точку с касательной, проходящей через начало координат.

Условием сохранения массы для этой области будет

$$(c - u^*) \rho_0 = (c - u) \rho_{00}, \quad (9)$$

уравнение количества движения

$$\rho_0 (c - u^*) (u - u^*) = T_0, \quad (10)$$

уравнение деформации

$$\epsilon_0 = \frac{u - u^*}{c - u}. \quad (11)$$

Как видно, в области за точкой перегиба диаграммы $T \sim \epsilon$ передним фронтом волны является непрерывная продольная волна (а), за ней следует продольная волна сильного разрыва (с).

Из (10) определим

$$c - u^* = \frac{T_0}{\rho_0 (u - u^*)}.$$

Из (11) имеем

$$c - u = \frac{u - u^*}{\epsilon_0}.$$

Подставив значения $(c - u)$ и $(c - u^*)$ в (9), получим $T_0 \epsilon_0 = \rho_{00} (u - u^*)^2$, откуда

$$u - u^* = \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\rho_{00}}},$$

а

$$u = u^* + \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\rho_{00}}}.$$

Используя (8), окончательно получим

$$u = \sqrt{\frac{T_0 \epsilon_0}{\rho_{00}}} + \int_{\epsilon^*}^{\epsilon_0} a(\epsilon) d\epsilon. \quad (12)$$

г) Рассмотрим случай, когда нагрузка осуществляется по кривой $T \sim \epsilon$ нагружения, имеющей точку перегиба, разгрузка — по непрерывной кривой, полученной методом разгружающего поперечного удара (рис. 4). В этом случае скорость частицы определяется по формуле

$$u = \int_{\epsilon_{\text{ост}}}^{\epsilon_0} a_{\text{разгр}}(\epsilon) d\epsilon, \quad (13)$$

где $a_{\text{разгр}}(\epsilon)$ — скорость распространения продольной волны при разгрузке, $\epsilon_{\text{ост}}$ — остаточная деформация при разгрузке.

3. Для рассмотренных случаев произведен расчет, где используется динамическая диаграмма нагружения и разгрузки резинового шнура „шифр 65“ диаметром 5 мм, с массовой плотностью единицы длины $\rho_{00} = 221 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^2}$.

Для случая, когда разгрузка идет по кривой нагружения $T \sim \epsilon$ до точ и перегиба, расчет ведется по формуле (7). Для каждого заданного значения угла излома нити при нагружении γ из таблицы динамической зависимости $T \sim \epsilon$ берем соответствующие значения T_0 и ϵ_0 . Подставляя эти значения в формулу (7), находим скорость перемещения частицы для заданного угла γ :

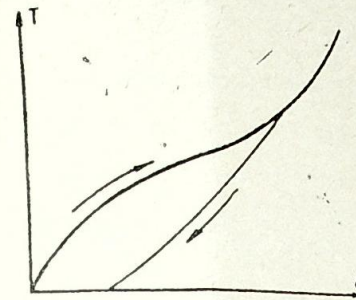


Рис. 4.

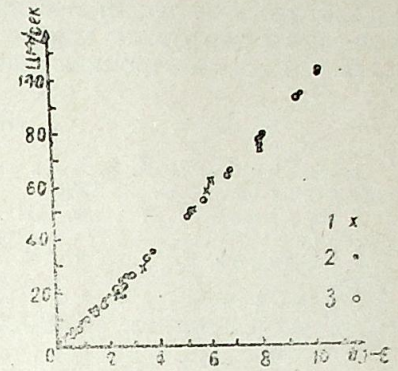


Рис. 5. 1 — экспериментальные данные, 2 — расчетные при разгрузке, 3 — расчетные при нагружении.

Для случая, когда деформация после поперечного удара находится за точкой перегиба диаграммы растяжения $T \sim \epsilon$, расчет скорости перемещения частицы производим по формуле (12). Для заданного значения угла излома γ , как и в предыдущем случае, из таблицы динамической зависимости $T \sim \epsilon$ берутся соответствующие значения T_0 и ϵ_0 . Графически определяем касательную к диаграмме нагружения $T \sim \epsilon$, лежащую на прямой, проходящей через начало координат ($\gamma = 52^\circ$). Этой точке соответствует деформация $\epsilon^* = 0,205$. Ин-

теграл $\int_{\epsilon^*}^{\epsilon_0} a(\epsilon) d\epsilon$ вычисляется численным методом трапеции, а $a(\epsilon)$ для каждого заданного γ вычисляется по формуле

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_{00}} \frac{dT}{d\epsilon}}.$$

В случае, когда разгрузка идет по непрерывной кривой, полученной методом разгружающего поперечного удара, имеем формулу (13). Из диаграммы $T \sim \epsilon$ разгрузки находим остаточную деформацию (рис. 4) $\epsilon_{00} = 0,125$. $a_{\text{разгр}}(\epsilon)$ определяем по формуле

$$a_{\text{разгр}}(\epsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho_{00}} \frac{dT}{d\epsilon}}.$$

Затем численным методом — методом трапеции вычисляем интеграл

$$u = \int_{\epsilon_{\text{ост}}}^{\epsilon_0} a_{\text{разгр}}(\epsilon) d\epsilon.$$

При теоретических расчетах вводим в качестве параметра угол излома γ .

На графике (рис. 5) показана зависимость скорости перемещения частиц при разгрузке от деформационных значений u с теоретическим сравнением полученных экспериментальных значений.

скими кривыми ϵ (зависимость скорости частицы от деформации) показывает, что значения, полученные из эксперимента, близки к теоретическим данным. Это показывает удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных и свидетельствует о том, что на величину скорости частицы при динамической разгрузке вязкостные явления не оказывают существенного влияния. Такое совпадение приводит к следующим выводам: скорости разгрузки можно рассчитывать по теоретическим формулам, исходя из динамической диаграммы разгрузки; измерение скорости сокращения нельзя положить в основу построения динамической диаграммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., 1961.
2. Керимов К. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1960, № 3.
3. Керимов К. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1961, № 3.
4. Рахматулин Х. А., Керимов К. А., Грацкова Н. С. Тезисы докл. III Всесоюзного симпозиума по распространению упругих и упруго-пластических волн. Ташкент, 1966.

Н. С. Гратскова

Полимер материалларда ани динамик бошалманын тэдгиги һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгалә полимер структурлу материалларын ани динамик бошалманын экспериментал вә нәзәри тэдгигинә һәср олунмушдур.

Бошалма динамики јүкләнмиш нүмунәни ани олараг кәсмә васитәсилә ичра едилир.

Тәчрүбәнин белә гојулушу һәрәкәтин бирәлчүлү олмасыны там тәмин едир. Кәсилмиш тәрәфин һәрәкәти СФР-1 фоторегистратор васитәсилә тәјин олунур.

Мәгаләдә бир сыра нәзәри мәсәләләрдән бәһс олунур. Ниссәчикләрин нәзәри вә һәм дә экспериментал сүр'әти јүкләмә вә бошалма заманы ејни галыр. Бу кәстәрир ки, ани бошалма деформасија сүр'әтинин дәји шмәси һадисәсинин кедишинә мүнһүм тә'сир етмир.

Б. Р. ЭФЕНДИЕВ

ЗАДАЧА О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ЭКСЦЕНТРИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ, СОПРЯЖЕННОМ ПОСРЕДСТВОМ НАТЯГА С ПОЛОЙ КРУГЛОЙ ШАЙБОЙ ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

(продолжение)

В нашей статье [1] рассматривался вопрос о напряженном состоянии в кусочно-однородной среде, составленной из эксцентрической круглой пластинки с упругими константами μ_0, κ , в отверстие которой посредством натяга вставлена полая круглая шайба с константами μ_1, κ (толщина пластинки и шайбы одинакова). В данной статье дается решение числового примера при следующих относительных размерах: $a = 0,3R$; $r = 0,4R$; $r_0 = 0,2R$ и когда $P_0 = 0$. При этом из системы уравнений (2, 2), (3, 4) и (4, 2) решены сначала первые восемь уравнений (см. [1], а затем первые четырнадцать уравнений с целью установления эффективности примененного нами метода.

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{a_1}{\mu_0 \delta r}; & b_{-1}^* &= \frac{b_{-1}}{\mu_0 \delta r}; & c_{-1}^* &= \frac{c_{-1}}{\delta r}; & a_{-1}^* &= \frac{a_{-1}}{\mu_0 \delta r}; \\ b_1^* &= \frac{b_1}{\mu_0 \delta r}; & c_{-1}^* &= \frac{c_{-1}}{\delta r}; & b_0^* &= \frac{b_0}{\mu_0 \delta r}; & c_0^* &= \frac{c_0}{\delta r}; \\ a_2^* &= \frac{a_2}{\mu_0 \delta r}; & b_2^* &= \frac{b_2}{\mu_0 \delta r}; & a_{-2}^* &= \frac{a_{-2}}{\delta r}; & b_{-2}^* &= \frac{b_{-2}}{\mu_0 \delta r}; \\ a_{-2}^* &= \frac{a_{-2}}{\delta r}; & a_2^* &= \frac{a_2}{\delta r}, \end{aligned}$$

укороченной системе из четырнадцати уравнений придадим следующий вид:

$$\begin{aligned} 2a_1^* + b_{-1}^* + 2c \left(\frac{r}{R} \right) c_1^* &= c_1 \left(\frac{r}{R} \right); \\ a_{-1}^* + b_1^* - c \left(\frac{r}{R} \right) a_{-1}^* &= 0; \\ a_2^* + b_{-2}^* + 2c \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right) a_1^* + c \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_2^* - c \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right) a_{-1}^* &= c_1 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right); \\ a_{-2}^* + b_2^* - c \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right) c_{-1}^* - c \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_{-2}^* &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[x \left(\frac{a}{R} \right) - \left(\frac{a}{R} \right) \right] a_1^* + \left[x \left(\frac{a}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] a_2^* - 2b_0^* - \\
& - \left(\frac{a}{R} \right)^2 b_2^* - \left(\frac{a}{R} \right) b_1^* - \frac{\mu_0}{\nu_1} \left\{ \left[x \left(\frac{a}{R} \right) - \left(\frac{a}{R} \right) \right] a_1^* + \right. \\
& + \left[x \left(\frac{a}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] a_2^* + (x+1) c a_0^* + \\
& + \left(\frac{a}{r} \right) \frac{c_1}{2} - 2b_0^* - \left(\frac{a}{R} \right) b_1^* - \left(\frac{a}{R} \right)^2 b_2^* - \frac{A_1}{1+x} \left(\frac{a}{R} \right) \left. \right\} = 0; \\
& (x-1) a_1^* + \left[2x \left(\frac{a}{R} \right) - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \right] a_2^* - \left(\frac{R}{r} \right)^2 b_1^* + \left(\frac{R}{r} \right) c_1 - 2c \left(\frac{R}{r} \right) a_1^* - \\
& - \frac{\nu_0}{\nu_1} \left\{ (x-1) a_1^* + \left[2x \left(\frac{a}{R} \right) - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \right] a_2^* - \frac{1}{2} x c_1 \left(\frac{R}{r} \right) + c x \left(\frac{R}{r} \right) a_1^* + \right. \\
& + \frac{1}{2} c_1 \left(\frac{R}{r} \right) - b_1^* \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left. \right\} = 2 \left(\frac{R}{r} \right) \mu_0; \\
& x a_{-1}^* - x c \left(\frac{r}{R} \right) a_{-1}^* - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_2^* - \left(\frac{r}{R} \right)^2 b_1^* - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 b_2^* - \\
& - \frac{\nu_0}{\nu_1} \left[x a_{-1}^* - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_2^* - \left(\frac{r}{R} \right)^2 b_1^* - \right. \\
& - 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2 b_2^* + c \left(\frac{r}{R} \right) c_{-1}^* \left. \right] = 0; \\
& a_2^* + \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^4 a_{-1}^* - \left(\frac{R}{r} \right)^4 b_{-2}^* - c \left(\frac{R}{r} \right)^2 a_2^* - \frac{\nu_0}{\nu_1} \left[x a_2^* + c x \left(\frac{R}{r} \right)^2 c_2^* + \right. \\
& + \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{R}{r} \right)^4 a_{-1}^* - b_{-2}^* \left(\frac{R}{r} \right)^4 \left. \right] = 0; \\
& x a_{-2}^* - x c \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_{-2}^* - \left(\frac{r}{R} \right)^4 b_2^* - \frac{\nu_0}{\nu_1} \left[x a_{-2}^* + c \left(\frac{r}{R} \right)^2 a_{-2}^* - \left(\frac{r}{R} \right)^4 b_2^* \right] = 0; \\
& 2 \left(\frac{a}{R} \right) a_1^* + \left[3 \left(\frac{a}{R} \right)^2 + 2 \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \right] a_2^* - \left(\frac{a}{r} \right) \frac{c_1}{2} + 2c \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 c_2^* + 2b_0^* + \\
& + \left(\frac{a}{R} \right) b_1^* + \left(\frac{a}{R} \right)^2 b_2^* + \frac{A_1}{1+x} \left(\frac{a}{r} \right) - 2c a_2^* = 0; \\
& a_1^* + 2 \left(\frac{a}{R} \right) a_2^* - c_1 \left(\frac{R}{r} \right) + 2c \left(\frac{R}{r} \right) c_1^* + \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 b_{-1}^* = 0; \\
& a_{-1}^* + 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 a_2^* + \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 b_1^* + 2 \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 b_2^* - \\
& - c \left(\frac{r_0}{r} \right) \left(\frac{r_0}{R} \right) a_{-1}^* = 0; \\
& a_2^* + c \left(\frac{R}{r} \right)^2 a_2^* - \left(\frac{a}{R} \right) \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 a_{-1}^* + \left(\frac{R}{r_0} \right)^4 b_{-2}^* = 0; \\
& a_{-2}^* + \left(\frac{r_0}{R} \right)^4 b_2^* - c \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 a_{-2}^* \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Таблица 1

Корни решения восьми уравнений						
n	$a_n/\mu_0 \delta r$	$a_{-n}/\mu_0 \delta r$	$b_n/\mu_0 \delta r$	$b_{-n}/\mu_0 \delta r$	$c_n/\delta r$	$c_{-n}/\delta r$
0	0	0	-0,286825	0	0,221272	0
1	0,322552	0,14 · 10 ⁻⁴	0,4 · 10 ⁻⁵	0,197832	-0,521832	0,2 · 10 ⁻⁴

Таблица 2

Корни решения четырнадцати уравнений						
n	$a_n/\mu_0 \delta r$	$a_{-n}/\mu_0 \delta r$	$b_n/\mu_0 \delta r$	$b_{-n}/\mu_0 \delta r$	$c_n/\delta r$	$c_{-n}/\delta r$
0	0	0	-141350	0,148912	-0,217845	-0,021932
1	0,252971	-0,006324	-0,00464	0,148912	-0,217845	-0,021932
2	0,195114	0,000833	-0,00154	-0,000636	-0,000607	0,107409

Таблица 3

При решении восьми уравнений						
R	$-R$	$a+r$	$a-r$	$-\frac{R}{2}$	$\frac{1}{2}(R+r+a)$	$\frac{3}{4}(R+a-r)$
-0,274 0,722	-0,105 0,379	-1,365 1,841	-1,391 1,751	-0,145 0,785	-0,398 0,189	0,28

Таблица 4

При решении четырнадцати уравнений						
R	$-R$	$a+r$	$a-r$	$-\frac{R}{2}$	$\frac{1}{2}(R+a+r)$	$\frac{3}{4}(R+a-r)$
-0,039 0,875	-0,062 0,692	-1,355 1,871	-1,376 1,780	-0,143 0,777	-0,383 1,286	0,524

Принимая $x = 2,00752$ и $\mu_1/\mu_0 = 2,2$, методом Гаусса для коэффициентов найдены значения. Для восьми уравнений они приведены в табл. 1, для четырнадцати в табл. 2.

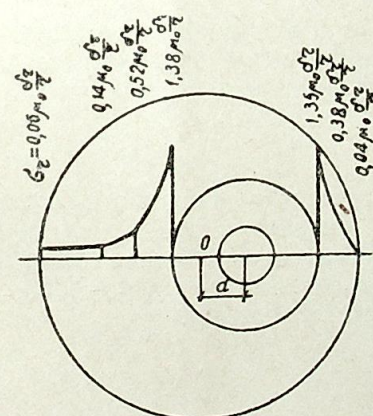


Рис. 1.

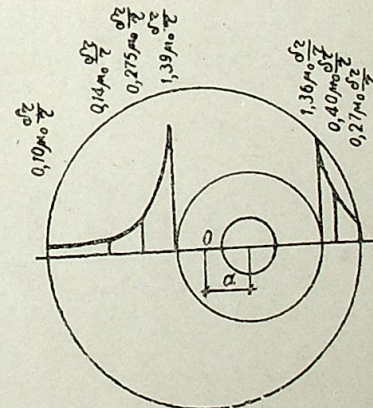


Рис. 2.

По известным формулам вычислены значения компонентов напряжений σ_x и σ_y в точках пластинки, расположенных на действительной оси. По этим данным построены эпюры напряжений (рис. 1, 2, 3, 4).

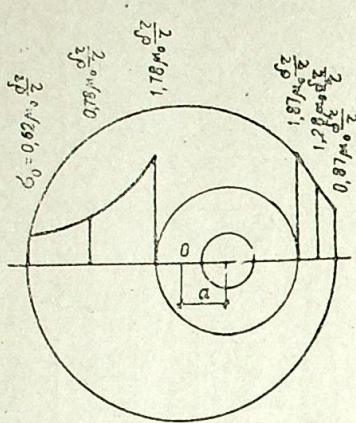


Рис. 3.

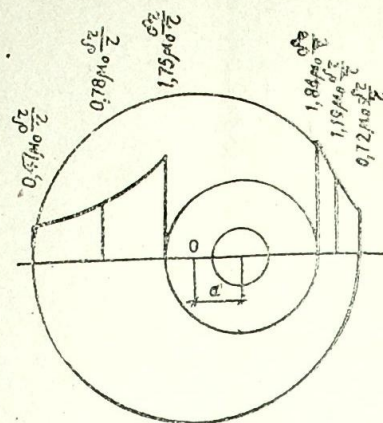


Рис. 4.

В точках $R, -R$ при решении восьми уравнений вместо нулевого значения радиального напряжения σ_r получено значение $-0,274 \rho_0 \frac{\partial r}{r}$, а при решении четырнадцати уравнений в тех же точках получено $-0,039 \rho_0 \frac{\partial r}{r}$ и $-0,062 \rho_0 \frac{\partial r}{r}$. Как видно, от увеличения числа уравнений в усеченной системе значение σ_r в указанных точках заметно уменьшается, приближаясь к нулю. Это свидетельствует об эффективности выбранного метода решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфендиев Б. Р. „Уч. зап. АГУ, серия физ. матем. наук“, 1964, № 3-
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
3. Амензаде Ю. А. „Изв. АН СССР, механика и машиностроение“, 1963, № 5

Б. Р. Эфендијев

Преслэмэ васитәсилә даирәви ичибош шејбанын башга
материалдан гајырылмыш эксентрик һәлгәјә кејдирилмәсиндән
јаранан кәркинлијин тәјини

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә мүүллифин пресләмә васитәсилә даирәви ичибош ша-
банын башга материалдан гајрылымыш эксентрик һәлгәжә кејдирилми-
синдән јаранан кәркинлијин тә'јини мәсләсинин һәллинә даир верил-
миш үсулун $a = 0,3R$, $r = 0,4R$; $r_0 = 0,2R$ вә $\rho_0/\mu = 2,2$; $P_0 = 0$
гijмәтләри үчүн еффеktiv олдуғу кәстәрилмишдир.

МҮНДЭРИЧАТ

Л. И. Көзәлов. Бирчинсли гејри-хәтти дифференсиал тәнликләрин хәтти чевирмәләрә көрә инварианты	3
А. М. Гәмбәров. Газылан сүхурларын физики-механики хусусијјәтләринин газыманын кеднишнә вә онун механики сүр'әтинә олан тә'сирини гијмәтләндирмәдә ријазн статистика методунун тәтбиғи	6
Г. А. Әфәндијев. Телевизија автоматикасында тәтбиғ едилән видиконун бә'зи хусусијјәтләринин дәјишән охунма шәраитиндә тәдғиги	12
Д. Б. Бајсанов, З. Ә. Қәримов. Һәлгәләнмиш газ кәмәри системинин оптимал режимдә ишләnmәсинә даир һесабат	17
А. А. Сокович, Д. О. Тројанскаја, В. А. Кострјуков. Тиристор чевирчиси кечид просесинин тәдғиги	22
А. С. Чәфәров. Мүнтәзәм јығылма вуруглары вә Лаплас сыраларынын мүнтәзәм чәмләnmәси һағғында	28
Г. Һ. Мирзәјев. Бә'зи банах фәзаларында бир гејри-хәтти тәнлијин тәдғиги һағғында	34
К. М. Мусәјев. Умумиләшмиш аналитик функцијаларын сәрһәд хәссәләри һағғында	40
Ф. Г. Магсудов, Т. А. Хәлилова. Интеграл сәрһәд шәртли 2-тәртибли өз-өзүнә гошма олмајан сингулар дифференсиал операторун спектри һағғында	46
А. М. Аббасов, Г. М. Гасымов. Истилик-контактлы бир хәтти сәрһәд мәсәләси һағғында	52
Ч. Г. Ағамәлијев. Бир систем аналитик функцијаларын тамлығы һағғында	59
Ф. Ә. Әзизов. Буцағ нөггәләри олан һиссәләрдән тәшкил едилмиш областда Лаплас тәнлији үчүн Дирихле мәсәләси	65
Н. С. Гратскова. Полимер материалларда ани динамик бошалманын тәдғиги һағғында	71
Б. Р. Әфәндијев. Пресләмә васитәсилә даирәви ичибош шејбанын башға материалдан гајрылмыш эксентрик һәлгәјә кејдирилмәсиндән јаранан кәркинлијин тә'јини	77

СОДЕРЖАНИЕ

Я. И. Геозалов. Инвариант однородных нелинейных дифференциальных уравнений относительно линейного преобразования	3
А. М. Гамбаров. Применение метода математической статистики при оценке влияния физико-механических свойств разбурываемых пород на проходку и механическую скорость проходки	6
Ч. А. Эфендиев. Исследование некоторых свойств видикона при переменной скорости считывания применительно к телевизионно-вычислительным устройствам	12
Д. Б. Баясанов, З. А. Керимов. К вопросу статистической оптимизации режимов работы кольцевых газовых коллекторов	17
А. А. Сакович, Д. О. Троянская, В. А. Кострюков. Исследование переходных процессов в тиристорном преобразователе	22
Ариф С. Джафаров. О множителях равномерной сходимости и равномерной суммируемости рядов Лапласа	28
Г. А. Мирзоев. Об одном нелинейном уравнении в некоторых банаховых пространствах	34
К. М. Мусаев. О некоторых граничных свойствах обобщенных аналитических функций	40
Ф. Г. Максудов, Т. А. Халилова. О спектре сингулярных несамоопределенных дифференциальных операторов 2n-го порядка с интегральным краевым условием	46
А. М. Аббасов, Г. М. Гасумов. Об одной линейной теплоконтактно-краевой задаче	52
Ч. Г. Агамалиев. О полноте одной системы аналитических функций	59
Ф. А. Азизов. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в составной области с угловыми точками	65
Н. С. Грацкова. Исследование мгновенной динамической разгрузки полимерных материалов	71
Б. Р. Эфендиев. Задача о напряженном состоянии в эксцентрическом кольце, сопряженном посредством натяга с полый круглой шайбой из другого материала	77

Подписано к печати 1/VII-1968 г. Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Бум. лист. 2,63. Печ. лист. 7,19. Уч.-изд. лист. 6,4. ФГ 08345. Заказ. 196.
Тираж 680. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров Азербайджанской ССР. Баку. Ази Асланова, 80.