

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1967

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

М. С. АЛМАМЕДОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО
ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

Рассмотрим интегро-дифференциальное (и.-д.) выражение

$$l(y) = y''(x) + \lambda y(x) - p(x)y(x) - \sum_{i=0}^1 \int_0^x K_{1-i}(x, s, \rho) y^{(i)}(s) ds. \quad (0, 1)$$

Пусть $p(x)$ — комплекснозначная функция, суммируемая в интервале $[0, b]$, ядра $K_{1-i}(x, s, \rho)$ ($i = 0, 1$), и.-д. выражение (0,1) имеет вид

$$K_{1-i}(x, s, \rho) = \begin{cases} \rho^{-i} \exp\{-\rho \omega_1(s-x)\} p(s) K_{1-i}^*(x, s, \rho) & \text{при } 0 \leq s < x, \\ \rho^{-i} \exp\{-\rho \omega_2(s-x)\} p(s) K_{1-i}^*(x, s, \rho) & \text{при } 0 \leq x < s, \end{cases} \quad (0, 2)$$

где ω_1, ω_2 — различные корни 2-ой степени из -1 , а $K_{1-i}^*(x, s, \rho)$ ($i = 0, 1$) — ограниченные непрерывные функции по совокупности переменных (x, s, ρ) , $0 \leq xs < \infty$, $\rho \in E$.

Далее обозначим через D совокупность всех функций $y(x) \in L^2(0, \infty)$ таких, что:

- 1) Производные $y'(x)$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, b]$, $b > 0$;
- 2) $l(y) \in L^2(0, \infty)$.

Частный случай уравнения $y''(x) + \lambda y(x) = p(x)y(x) + \int_a^x b(x, s)y(s) ds$

в предположении, что $p(x), b(x, s)$ — вещественные функции, определенные и непрерывные в области $G\{a \leq s \leq x < \infty\}$, рассмотрел Ю.А. Вель [3]. Он нашел асимптотические формулы для решения этого уравнения.

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим систему интегральных уравнений:

$$z_{kj}(x, \rho) = \omega_k^j + \int_a^\infty Q_{kj}(x, \tau, \rho) z_{k0}(\tau, \rho) d\tau + \sum_{i=0}^1 \int_a^\infty \int_a^\tau Q_{kji}(x, s, \tau, \rho) z_{k, i-1}(s, \rho) ds d\tau \quad (1, 1)$$

$j = 0, 1; \kappa = 1, 2.$

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор) Г. А. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Иргизской ССР

Повторяя рассуждения, приведенные в [1], получаем:

Лемма 1. Если выполнены условия:

а) для каждого значения ρ , принадлежащего некоторому открытому множеству E комплексной ρ -плоскости и каждого значения x из интервала $[a, \infty)$ ядра $Q_{kj}(x, \tau, \rho)$, $Q_{kji}(x, s, \tau, \rho)$, $ij=0,1$; $\kappa=1, 2$, — суммируемые функции переменного τ в интервале $[a, \infty)$;

б) существует $0 < q < 1$ такое, что:

$$\int_a^\infty \left[|Q_{kj}(x, \tau, \rho)| + \int_a^\tau |Q_{kji}(x, s, \tau, \rho)| ds \right] d\tau < q < 1, \quad ij=0,1; \kappa=1,2;$$

в) для каждой точки x_0 из интервала $[a, \infty)$ и каждого $\rho_0 \in E$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rho \rightarrow \rho_0}} \int_a^\infty \left[|Q_{kj}(x, \tau, \rho) - Q_{kj}(x_0, \tau, \rho_0)| + \right. \\ \left. + \int_a^\tau |Q_{kji}(x, s, \tau, \rho) - Q_{kji}(x_0, s, \tau, \rho_0)| ds \right] d\tau = 0,$$

$$a \leq x, x_0 < \infty; \rho, \rho_0 \in E; i, j=0,1; \kappa=1,2;$$

г) функции $f_k(x, \rho)$, $\kappa=1, 2$, непрерывны по совокупности переменных (x, ρ) и ограничены на множестве $a \leq x < \infty, \rho \in E$;

д) для каждого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ функции $f(x, \rho)$, $\kappa=1, 2$, суть голоморфные функции переменного ρ в области E ;

е) для каждого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ и для любой функции $f_k(x, \rho)$, удовлетворяющей условиям г) и д), интегралы

$$\int_a^\infty \left[Q_{kj}(x, \tau, \rho) f_k(\tau, \rho) + \int_a^\tau Q_{kji}(x, s, \tau, \rho) f_k(s, \rho) ds \right] d\tau$$

суть голоморфные функции переменного ρ в области E ;

Тогда система (1, 1) имеет решение $z_{kj}(x, \rho)$, $\kappa=1, 2$; $j=0,1$, непрерывное по совокупности переменных (x, ρ) и ограниченное на множестве $a \leq x < \infty, \rho \in E$. Для любого фиксированного значения $x \in [a, \infty)$ решения $z_{kj}(x, \rho)$ системы (1, 1) суть голоморфные функции переменного ρ в области E .

Замечание 1. Условия леммы 1 будут выполнены, если:

$$Q_{kj}(x, \tau, \rho) = \begin{cases} \varphi_{kj1}(x, \tau, \rho) p(\tau) & \text{при } a \leq \tau < x, \\ \varphi_{kj2}(x, \tau, \rho) p(\tau) & \text{при } a \leq x < \tau, \end{cases}$$

$$Q_{kji}(x, \tau, s, \rho) = \begin{cases} \varphi_{kj1}(x, s, \rho) p(s) K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) & \text{при } a \leq \tau < x, \\ \varphi_{kj2}(x, s, \rho) p(s) K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) & \text{при } a \leq x < \tau, \end{cases}$$

где $p(\tau)$ — суммируемые в интервале $[a, \infty)$ функции, а $\varphi_{kj1}(x, \tau, \rho)$, $\varphi_{kj2}(x, \tau, \rho)$ суть ограниченные непрерывные функции по совокупности переменных (x, τ, ρ) , $a \leq x < \infty, \rho \in E$, удовлетворяющие условию

$$C \int_a^\infty \left[|p(\tau)| + \int_0^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 |K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)| ds \right] d\tau < 1 \quad (1, 2)$$

при $C = \max \{ \sup |\varphi_{kj1}(x, \tau, \rho)|, \sup |\varphi_{kj2}(x, \tau, \rho)| \}$ и, кроме того, — голоморфные функции переменного ρ в области E при фиксированных x и τ из интервала $[a, \infty)$.

Пусть $\lambda = \rho^2$, ($\rho = \rho_1 + \omega_1 \rho_2$), тогда и.д. уравнение

$$y''(x) + \lambda y(x) = p(x) y(x) + \sum_{i=0}^1 \int_a^x K_{1-i}(x, s, \rho) y^{(i)}(s) ds \quad (1, 3)$$

имеет два линейно независимых решения: $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$, для которых верны следующие представления:

$$y_k(x, \rho) = \exp \{ \rho \omega_k x \} - \frac{\omega_1}{2\rho} \int_a^x \exp \{ \rho \omega_1 (x - \tau) \} p(\tau) y_k(\tau, \rho) d\tau + \\ + \frac{\omega_2}{2\rho} \int_x^\infty \exp \{ \rho \omega_2 (x - \tau) \} p(\tau) y_k(\tau, \rho) \times \\ \times d\tau - \frac{\omega_1}{2\rho} \int_a^x \int_a^\tau \exp \{ \rho \omega_1 (x - s) \} p(s) \sum_{i=0}^1 \frac{K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)}{\rho^i} y_k^{(i)}(s, \rho) ds d\tau + \\ + \frac{\omega_2}{2\rho} \int_x^\infty \int_a^\tau \exp \{ \rho \omega_2 (x - s) \} p(s) \sum_{i=0}^1 \frac{K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)}{\rho^i} y_k^{(i)}(s, \rho) ds d\tau. \quad (1, 4)$$

Формально дифференцируя по x обе части тождеств (1, 4) один раз, получим вместе с исходным равенством систему:

$$\frac{d^j y_k(x, \rho)}{dx^j} = (\rho \omega_k)^j \exp \{ \rho \omega_k x \} - \frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \int_a^x \rho^j \exp \{ \rho \omega_1 (x - \tau) \} p(\tau) y_k(\tau, \rho) d\tau + \\ + \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \int_x^\infty \rho^j \exp \{ \rho \omega_2 (x - \tau) \} p(\tau) y_k(\tau, \rho) d\tau - \\ - \frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \int_a^x \int_a^\tau \rho^j \exp \{ \rho \omega_1 (x - s) \} p(s) \times \\ \times \sum_{i=0}^1 \frac{K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)}{\rho^i} y_k^{(i)}(s, \rho) ds d\tau +$$

$$+ \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \int_x^\infty \int_a^\tau \rho^j \exp \{ \rho \omega_2 (x - s) \} p(s) \sum_{i=0}^1 \frac{K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)}{\rho^i} y_k^{(i)}(s, \rho) ds d\tau,$$

$$j=0,1; \kappa=1,2.$$

Положим в (1,5)

$$\frac{d^j y_k(x, \rho)}{dx^j} = \rho^j \exp \{ \rho \omega_k x \} z_{kj}(x, \rho), \quad \kappa=1,2; j=0,1.$$

Тогда для функций $z_{kj}(x, \rho)$ получим систем интегральных уравнений:

$$z_{kj}(x, \rho) = \omega_k^j - \frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \int_a^x \exp \{ \rho (\omega_1 - \omega_k) (x - \tau) \} p(\tau) z_{k0}(\tau, \rho) d\tau + \\ + \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \int_x^\infty \exp \{ \rho (\omega_k - \omega_2) (\tau - x) \} p(\tau) z_{k0}(\tau, \rho) d\tau - \\ - \frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \int_a^x \int_a^\tau \exp \{ \rho (\omega_1 - \omega_k) (x - s) \} p(s) \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) z_{ki}(s, \rho) ds d\tau +$$

$$(1, 6)$$

$$+ \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \int_a^\infty \int_a^\tau \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(s-x) \} p(s) \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) z_{ki}(s, \rho) ds d\tau.$$

Обозначим

$$Q_{kj}(x, \tau, \rho) = \begin{cases} -\frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_1 - \omega_k)(x - \tau) \} p(\tau) & \text{при } a \leq \tau < x, \\ \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(x - \tau) \} p(\tau) & \text{при } a \leq x < \tau, \end{cases}$$

$$Q_{kji}(x, \tau, s, \rho) = \begin{cases} -\frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_1 - \omega_k)(x - s) \} p(s) K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) & \text{при } a \leq \tau < x, \\ \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(x - s) \} p(s) K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) & \text{при } a \leq x < \tau. \end{cases}$$

Отсюда получаем систему интегральных уравнений (1, 1), где

$$\varphi_{kj1}(x, \tau, \rho) = -\frac{\omega_1^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_1 - \omega_k)(x - \tau) \};$$

$$\varphi_{kj2}(x, \tau, \rho) = \frac{\omega_2^{j+1}}{2\rho} \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(\tau - x) \}.$$

Пусть E обозначает множество комплексной ρ -плоскости, определенное неравенствами $\text{Im} \rho = \rho_2 \geq 0$, $|\rho| \geq r > 0$. Далее

$$\exp \{ \rho(\omega_1 - \omega_k)(x - \tau) \} = \begin{cases} 1 & \text{при } k=1, \\ \exp \{ 2\rho\omega_1(x - \tau) \} & \text{при } k=2, \end{cases}$$

$$\exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(\tau - x) \} = \begin{cases} \exp \{ -2\rho\omega_2(\tau - x) \} & \text{при } k=1, \\ 1 & \text{при } k=2. \end{cases}$$

Поэтому при $k=1$, $x > \tau$, $\rho \in E$ $|\varphi_{kj1}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r}$; при $k=2$,

$$x > \tau, \rho \in E \quad |\varphi_{2j1}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r} \exp \{ -2\rho_2(x - \tau) \} \leq \frac{1}{2r}.$$

При $k=1$, $\tau > x$, $\rho \in E$ $|\varphi_{1j2}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r} \exp \{ -2\rho_2(\tau - x) \} \leq \frac{1}{2r}$;

$$\text{при } k=2, \tau > x, \rho \in E \quad |\varphi_{2j2}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r}.$$

Следовательно,

$$|\varphi_{kj1}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r}, \quad |\varphi_{kj2}(x, \tau, \rho)| \leq \frac{1}{2r}, \quad k=1, 2.$$

Поэтому условие (1, 2) будет выполнено, если

$$\frac{1}{2r} \int_a^\infty \left[|p(\tau)| + \int_a^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) ds \right] d\tau < 1, \quad (A)$$

то есть при a достаточно большом. Таким образом, все условия леммы 1 и замечания 1 выполнены. Поэтому система интегральных уравнений (1, 6) имеет решение $z_{1j}(x, \rho)$, $z_{2j}(x, \rho)$, непрерывное относительно (x, ρ) и ограниченное на множестве $F \{x \in [a, \infty), \rho \in E\}$ при фик-

сированном $x \in [a, \infty)$ есть голоморфная функция параметра ρ в верхней полуплоскости.

Теорема 1. И.-д. уравнение (1, 3) имеет решения $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$ такие, что при $x \geq a$

$$y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp \{ \rho\omega_k x \} z_{kj}(x, \rho), \quad k=1, 2; j=0, 1. \quad (1, 7)$$

где функции $z_{kj}(x, \rho)$ ограничены в области F .

Функции $y_k^{(j)}(x, \rho)$ непрерывны по совокупности переменных (x, ρ) при $x \in [a, \infty)$, $\rho \in E$, $|\rho| \geq r$; при каждом фиксированном значении x из интеграла $[a, \infty)$ $y_k^{(j)}(x, \rho)$ суть голоморфные функции от ρ в полуплоскости $\text{Im} \rho = \rho_2 > 0$.

Доказательство. Рассмотрим снова систему интегральных уравнений (1, 6). Пусть $|\rho| \geq r > 0$, r фиксированное, тогда можно найти такое $a > 0$, что все условия леммы 1 будут выполнены и, следовательно, система (1, 6) разрешима. Из определения $y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp \{ \rho\omega_k x \} z_{kj}(x, \rho)$ следует существование функции $y_k^{(j)}(x, \rho)$, $k=1, 2; j=0, 1$, которая обладает свойствами, перечисленными в лемме 1. Нетрудно проверить, что решения $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$ удовлетворяют и.-д. уравнению (1, 3). Каждое из полученных решений $y_k(x, \rho)$, $k=1, 2$, продолжаем на интервал $[0, a]$ так: строим в этом интервале и.-д. уравнения (1, 3), удовлетворяющее условиям $y_k^{(j)}(x, \rho) = y_k^{(j)}(a)$, $k=1, 2$. Полученное решение будет голоморфным в области $|\rho| \geq r > 0$, при $0 \leq x < \infty$, непрерывным по совокупности переменных (x, ρ) .

§ 2. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ И.-Д. УРАВНЕНИЯ

Теорема 2. Пусть выполнено условие

$$\frac{M}{2r} \int_a^\infty \left[|p(\tau)| + \int_a^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) ds \right] d\tau < 1. \quad (A)$$

Тогда при $x \rightarrow \infty$

$$y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp \{ \rho\omega_k x \} [\omega_k^j + 1 + o(1)], \quad k=1, 2; j=0, 1 \quad (2, 1)$$

равномерно относительно ρ в каждой области E .

Доказательство. Так как $z_{kj}(x, \rho)$, $k=1, 2$, — решение систем интегральных уравнений (1, 6), ограниченное на множестве F , $|z_{kj}(x, \rho)| \leq M$, $k=1, 2; j=0, 1$ то при $x \geq a$ и $k=1$, $|\rho| \geq r > 0$, $\text{Im} \rho > 0$, $\tau > x$, $\exp \{ -2\rho_2(\tau - x) \} \leq 1$ и при $x \geq a$, $k=2$, $|\rho| \geq r > 0$, $x > \tau$, $\exp \{ -2\rho_2(x - \tau) \} \leq 1$ получаем

$$z_{kj}(x, \rho) - \omega_k^j \leq \frac{M}{2r} \left\{ \int_a^x \left[|p(\tau)| + \int_a^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) ds \right] d\tau \right\} +$$

$$+ \frac{M}{2r} \left\{ \int_a^\infty |p(\tau)| + \int_a^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(\tau, s, \rho) ds \right\} d\tau.$$

В силу условия (A) правая часть полученного неравенства стремится к единице при $x \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что $z_{kj}(x, \rho) \equiv \omega_k^j + 1 + o(1)$, $k=1, 2; j=0, 1$. Подставляя это выражение в (1, 7), получим (2, 1). Из соотношений (2, 1) вытекает, что функции $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$ линейно независимы.

Теорема 3. При $\text{Im } \rho = \rho_2 \geq 0$ и $\rho \rightarrow \infty$

$$y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp \left[\rho \omega_k x \right] \left[\omega_k^j + o\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad (2, 2)$$

равномерно относительно x из интервала $[a, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим снова систему интегральных уравнений (1, 6), при r достаточно большом можно положить $a = 0$. Пусть $|z_{kj}(x, \rho)| \leq M$, $k = 1, 2$, при $0 \leq x < \infty$, $|\rho| \geq r$. Тогда при $k = 1, x > \tau$, $\text{Im } \rho \geq 0$

$$|z_{1j} - \omega_1^j| \leq \frac{M}{2|\rho|} \left\{ \int_0^\infty |p(\tau)| d\tau + \int_a^\tau |p(s)| \sum_{i=0}^1 |K_{1-i}^*(\tau, s, \rho)| ds \right\} d\tau \rightarrow o\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ при } \rho \rightarrow \infty.$$

При $k = 2, \tau > x$, $\text{Im } \rho \geq 0$ $|z_{2j} - \omega_2^j| \rightarrow o\left(\frac{1}{\rho}\right)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Следова-

тельно, при $k = 1, 2$, $\text{Im } \rho \geq 0$, $\rho \rightarrow \infty$ $z_{kj}(x, \rho) \equiv \omega_k^j + o\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Под-

ставляя это выражение в (1, 7), получим (2, 2).

При $\rho = 0$ и.д. уравнение (1, 3) принимает вид

$$y''(x) = p(x) y(x) + \sum_{i=0}^1 \int_a^x K_{1-i}(x, s) y^{(i)}(s) ds, \quad (2, 3)$$

где $K_{1-i}(x, s, 0) = K_{1-i}(x, s)$, $i = 1$.

Пусть ядра $K_{1-i}(x, s)$ и.д. уравнения (2, 3) имеют вид

$$K_{1-i}(x, s) = \begin{cases} (s-x)p(s) K_1^*(x, s) & \text{при } i=0, \\ s(s-x)p(s) K_0^*(x, s) & \text{при } i=1, \end{cases} \quad (2, 4)$$

где $K_{1-i}^*(x, s)$, $i = 0, 1$, —ограниченные непрерывные функции по совокупности переменных (x, s) , $0 \leq xs < \infty$. Кроме того, пусть выполнено условие

$$\exp \{ \varepsilon x \} |p(x)| \leq C, \quad (2, 5)$$

где C —постоянные для всех $x \in [a, \infty)$ при некотором малом $\varepsilon > 0$.

Теорема 4. Пусть выполнены (2, 4) и (2, 5), тогда и.д. уравнение (2, 3) имеет линейно независимые решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ такие, что при $x \rightarrow \infty$ и произвольном положительном $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$y_k(x) = \frac{x^{2-k}}{(2-k)!} [1 + o(e^{-\varepsilon x})], \quad k = 1, 2. \quad (2, 6)$$

Доказательство. Преобразуем и.д. уравнение (2, 3) с помощью замены;

$$y_k(x) = \frac{x^{2-k}}{(2-k)!} + \int_x^\infty (x-\tau) z_k(\tau) d\tau. \quad (2, 7)$$

Тогда, учитывая (2, 4), получим интегральное уравнение для функции z_k :

$$z_k(x) = f_k(x) + \int_x^\infty (\tau-x)p(\tau) z_k(\tau) d\tau + \int_x^\infty \int_s^\infty (x-s)p(s) \left[s \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(x, s) - \tau K_1^*(x, s) \right] z_k(\tau) d\tau ds, \quad k = 1, 2. \quad (2, 8)$$

Явное выражение $f_k(x)$ мы не выписываем ввиду громоздкости. Покажем, что уравнение (2, 8) имеет при $x \leq a$ решение $z_k(x)$ такое, что

$$\exp \{ \varepsilon x \} |z_k(x)| \leq C, \quad k = 1, 2, \quad (2, 9)$$

где C —постоянная, а a будет выбрано в дальнейшем.

Применим к уравнению (2, 8) метод последовательных приближений, положив $z_k^0(x) \equiv 0$:

$$z_k^{n+1}(x) = f_k(x) + \int_x^\infty p(\tau)(\tau-x) z_k^n(\tau) d\tau + \int_x^\infty \int_s^\infty (x-s)p(s) \left[s \sum_{i=0}^1 K_{1-i}^*(x, s) - \tau K_1^*(x, s) \right] Z_k^n(\tau) ds d\tau. \quad (2, 10)$$

Можно показать, по индукции, что $\exp \{ \varepsilon x \} |z_k^n(x)| \leq C$ при $x \geq a$, $n = 0, 1, \dots$. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (2, 10), получим, что $z_k(x)$ есть решение уравнения (2, 8), удовлетворяющее условию $\exp \{ \varepsilon x \} |z_k(x)| \leq C$. Подставляя полученные решения в (2, 7), получим решения и.д. уравнения. При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\left| \int_x^\infty (x-\tau) z_k(\tau) d\tau \right| \leq \exp \{ -\varepsilon x \} \int_x^\infty \tau \exp \{ \varepsilon \tau \} |z_k(\tau)| d\tau = o(e^{-\varepsilon x}). \quad (2, 11)$$

Тогда
$$y_k(x) = \frac{x^{2-k}}{(2-k)!} [1 + o(e^{-\varepsilon x})], \quad k = 1, 2.$$

Очевидно, что $y_1(x)$, $y_2(x)$, линейно независимы и их можно продолжить на интервал $[0, a]$.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (0, 2) и (2, 5). Тогда и.д. уравнение (1, 3) имеет линейно независимые решения $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$, соответственно при $x \in [a, \infty)$, $2\text{Im } \rho > -\varepsilon$, $2\text{Im } \rho < \varepsilon$ голоморфные по ρ в полуплоскостях $2\text{Im } \rho > -\varepsilon$, $2\text{Im } \rho < \varepsilon$. Асимптотические формулы $y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp \{ \rho \omega_k x \} [\omega_k^j + o(1)]$ $k = 1, 2; j = 0, 1$, имеют место равномерно относительно ρ в областях $\text{Im } \rho \geq -\varepsilon_1$, $\text{Im } \rho \leq \varepsilon_1$, $2\varepsilon_1 < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть

$$u_k(x, \rho) = \exp \{ \rho \omega_k x \} \left[- \int_x^\infty (x-\tau) u_k(\tau, \rho) d\tau \right]. \quad (2, 12)$$

Тогда при выполнении условия (0, 2) и.д. уравнение (1, 3) получает следующий вид:

$$u_k(x, \rho) = f_k(x, \rho) + \int_x^\infty [2\rho\omega_k - (x-\tau)p(x)] u_k(\tau, \rho) d\tau - \int_x^\infty \int_s^\infty \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_1)(s-x) \} p(s) \times \\ \times \left[\sum_{i=0}^1 \frac{(\rho\omega_k)^{1-i}}{\rho^i} K_{1-i}^*(x, s, \rho)(s-x) + \frac{1}{\rho} K_1^*(x, s, \rho) \right] u_k(\tau, \rho) ds d\tau - \\ - \int_x^\infty \int_s^\infty \exp \{ \rho(\omega_k - \omega_2)(s-x) \} p(s) \left[\sum_{i=0}^1 \frac{(\rho\omega_k)^{1-i}}{\rho^i} K_{1-i}^*(x, s, \rho)(s-\tau) + \right. \\ \left. + \frac{K_1^*(x, s, \rho)}{\rho} \right] u_k(x, \rho) ds d\tau. \quad (2, 13)$$

Явные выражения для функций $f_k(x, \rho)$, $k=1, 2$, мы не выпишем ввиду их громоздкости. Повторяя доказательство теоремы 4, легко показать, что при $x \geq a$ уравнение (2, 13) имеет решение $z_k(x, \rho)$, $k=1, 2$, такое, что $\exp\{\epsilon x\} |u_k(x, \rho)| \leq C$, C — постоянное; голоморфное по ρ в полуплоскостях $2/m\rho > -\epsilon$. Тогда из $z_k(x) = - \int_x^\infty (x-\tau) u_k(\tau, \rho) d\tau$ очевидно, что при $x \rightarrow \infty$ $z_k(x, \rho) \equiv 0(1)$.

Подставляя в (2, 12), получим

$$y_k^{(j)}(x, \rho) = \rho^j \exp\{\rho \omega_k x\} [\omega_k^j + o(1)], \quad k=1, 2.$$

Очевидно, что $y_1(x, \rho)$, $y_2(x, \rho)$ линейно независимы и их можно продолжить на интеграл $[0, a]$. Справедливы также следующие утверждения.

Теорема 6. При $\rho \rightarrow \infty$ $\frac{\partial^j y_k(x, \rho)}{\partial \rho^j} \rho^j \exp\{\rho \omega_k x\} [\omega_k^j + o(1)]$, $j=1, 2, 3, \dots$, равномерно относительно ρ в каждой области $\text{Im} \rho = \rho_2 \geq \epsilon > 0$.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. М. А. Наймарку за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Тр. Московского матем. об-ва, 1954, 3.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, М., 1954.
3. Ведь Ю. А. Исследования по и.-д.у. в Киргизии (1961).

А. А. БАБАЕВА, Г. К. НАМАЗОВ

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА НАЧАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В работе [1, 2] и др. исследуется смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений. В данной статье, используя методику [3—5], изучается смешанная задача для вырождающихся гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами. Кроме того, условия на линиях разрыва содержат производную по времени. Рассмотрим в цилиндре $Q = D \times [0, T]$ гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u + f(x, t), \quad (1)$$

где D — ограниченная область пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$ с границей Γ . Пусть область D разделена $(n-1)$ -мерной поверхностью на подобласти D_1 и D_2 . Обозначим через Γ_1 границу их раздела. Тогда цилиндрическая поверхность $S = \Gamma_1 \times (0, T]$ разбивает цилиндр Q на два подцилиндра: $Q_1 = D_1 \times [0, T]$ и $Q_2 = D_2 \times [0, T]$. Предположим, что $a_{ij}(x, t)$, $b_i(x, t)$, $c(x, t)$, $f(x, t)$ — достаточно гладкие функции всюду в Q , кроме точек S , где они могут терпеть разрыв первого рода. Пусть далее

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \sum_{ij=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \lambda t^\alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha < 1,$$

где λ, α — положительные постоянные, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — любой действительный вектор.

Ставится смешанная задача для уравнения (1): в цилиндре Q найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $Q - S$, начальному условию

$$u \Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{на } D, \quad (2)$$

граничному условию

$$u|_S = 0, \quad (3)$$

условиям сопряжения

$$\left. \begin{aligned} [u]_s &= 0, \\ \left[\kappa(x, t) \frac{du}{dN} \right]_s + \delta \frac{du}{du} + \sigma u &= \chi(t) \text{ на } S, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $B = \Gamma \times (0, T]$, $\kappa(x, t)$ — кусочно-гладкая функция с разрывом на S первого рода, причем $\kappa(x, t) \geq \kappa^0 > 0$, $\chi(t)$ — гладкая функция на $[0, T]$, δ, σ — неположительные постоянные. Символ $[\theta(x, t)]_s$ означает скачок функции $\theta(x, t)$ в точке $(x, t) \in S$,

$$\frac{d}{dN} = \sum_{ij=0}^n a_{ij}(x, t) \cos(\nu, x_i) \frac{d}{dx_j};$$

ν — направление нормали к S в точке (x, t) .

Теорема. Пусть Γ — непрерывно дифференцируемая поверхность и каждой ее точки можно коснуться некоторым шаром, лежащим вне D ; S — непрерывно дифференцируемая до порядка $l+2$. Пусть $\kappa(x, t)$, a_{ij} имеют в Q_m ($m=1, 2$) непрерывные производные до порядка $l+1$; b_i , c имеют непрерывные производные до порядка l ;

$$\int_0^T \frac{1}{t^{2\alpha+1}} \left(\frac{\partial^j \chi}{\partial t^j} \right)^2 dt < \infty, \quad j=0, 1, \dots, l; \quad \frac{\partial^l f}{\partial t^l} = 0 \quad (t^{\alpha+\varepsilon}), \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Тогда для $l \geq n+3$ существует решение задачи (1)–(4), а для $l \geq n+1+n$ это решение будет иметь в Q_m непрерывные производные до порядка n , $n \geq 2$.

Доказательство. Для доказательства теоремы покроем область D конечным числом достаточно малых областей G_r , $r=1, \dots, N$, таких, что в области G_r , содержащей точки поверхности разрыва, возможен переход к локальным координатам $y_1^r, \dots, y_n^r$. Потребуем при этом, чтобы $y_n^1 = y_n^2$ в пересечении G_1 и G_2 . Рассмотрим гладкие функции $\eta_r(x, t)$, которые равны нулю вне $G_r \times (0, T]$ и в некоторой

окрестности ее границы, причем в Q $0 \leq \eta_r(x, t) \leq 1$ и $\sum_{r=1}^N \eta_r(x, t) = 1$.

Положим $\bar{x} = x_m$, $\bar{\delta} = \delta_m$, $\bar{\sigma} = \sigma_m$ в Q_m ($m=1, 2$), где $x_m(t)$ — гладкие на $[0, T]$ функции и $x = x_1 - x_2$, $\delta = \delta_1 - \delta_2$, $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ на поверхности S . Построим следующие функции:

$$x_r^h = \eta_r(x_r)^h, \quad \delta_r^h = \eta_r(\delta_r)^h, \quad \sigma_r^h = \eta_r(\sigma_r)^h, \quad r=1, \dots, N,$$

$$a_{ij}^h = \sum_{r=1}^N \eta_r(\kappa a_{ij})_r^h, \quad b_i^h = \sum_{r=1}^N \eta_r \left(\kappa b_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} a_{ij} \right)_r^h,$$

$$d^h = - \sum_{r=1}^N \eta_r \left(\frac{\partial(\bar{\delta} \eta_r)}{\partial y_n^r} \right)_r^h, \quad c^h = \sum_{r=1}^N \eta_r(\kappa c)_r^h - \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial(\bar{\sigma} \eta_r)}{\partial y_n^r} \right)_r^h,$$

$$f^h = \sum_{r=1}^N \eta_r(\kappa f)_r^h + \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial(x \eta_r)}{\partial y_n^r} \right)_r^h,$$

где $(\varphi)_r^h$ означает усреднение функции φ в области $G_r \times (0, T]$ с радиусом усреднения h по переменным $t, y_1^r, \dots, y_n^r$. В областях $G_r \times (0, T]$, не содержащих точек S , за $(t, y_1^r, \dots, y_n^r)$ принимаем $(t, x_1, \dots, x_n)$.

Рассмотрим последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} \kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} + c^h u^h + f^h + d^h \frac{\partial u^h}{\partial t} + \\ &+ \sum_{r=1}^N \frac{\partial \delta_r^h}{\partial y_n^r} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial y_n^r} u^h - \sum_{r=1}^N \frac{\partial x_r^h}{\partial y_n^r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуя в (5) члены, содержащие производные $y_n^1, \dots, y_n^N$, получим:

$$\begin{aligned} \kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} &= \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n b_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} + c^h u^h + f^h + d^h \frac{\partial u^h}{\partial t} + \\ &+ \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta_r^h}{\partial x_i} \frac{\partial u^h}{\partial t} \varphi_{ir} + \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial x_i} u^h \varphi_{ir} - \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \varphi_{ir} \frac{\partial x_r^h}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где φ_{ir} — гладкие функции, определенные преобразованием координат.

Решение задачи (1)–(4) получим как предел при $h \rightarrow 0$ решений $u^h(x, t)$ в Q уравнения (6) с условиями:

$$\begin{aligned} u^h \Big|_{t=0} &= \frac{\partial u^h}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ u^h \Big|_s &= 0. \end{aligned}$$

Для этого найдем некоторые интегральные оценки для $u^h(x, t)$ и их производных. Умножим уравнение (6) на $\frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial u^h}{\partial t}$ и проинтегрируем по $Q_{T_1} = D \times (0, T_1]$, где $T_1 < T$ достаточно мало. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_D \kappa^h \frac{1}{t^\alpha} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=T_1} dx + \frac{1}{2} \int_D \frac{1}{t^\alpha} \sum_{ij=1}^n a_{ij} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} \Big|_{t=T_1} dx + \\ &+ \frac{\alpha}{2} \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+1}} \kappa^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} dx dt - \\ &- \sum_{i=1}^N \int_0^{T_1} \int_{G_i} \frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial \delta_r^h}{\partial y_n^r} \left(\frac{\partial u^h}{\partial y} \right)^2 dy dt - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{G_i} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{r=1}^N \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial y_n^r} (u^h)^2 \Big|_{t=T} dy - \\ &- \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^N \int_{G_i} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{r=1}^N \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial y_n^r} (u^h)^2 dy dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^\alpha} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial a_{ij}^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial u^h}{\partial x_j} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial \kappa^h}{\partial t} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\ &+ \int_0^{T_1} \int_D \sum_{i=1}^n b_i^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{1}{t^\alpha} dx dt + \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^\alpha} c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \\ &+ \int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^\alpha} f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt + \int_0^{T_1} \int_D d^h \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \frac{1}{t^\alpha} dx dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_D \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \mu_{ir} x_r^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} \Big|_{t=T_1} dt + \alpha \int_0^{T_1} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \mu_{ir} x_r^h \frac{\partial u^h}{\partial x_i} dx dt -$$

$$- \int_0^{T_1} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \mu_{ir} \frac{\partial x_r^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x_i} dx dt +$$

$$+ \int_0^{T_1} \frac{1}{t^\alpha} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu_{ir}}{\partial x_i} x_r^h \frac{\partial u^h}{\partial t} dx dt.$$

Оценивая правую часть последнего равенства с помощью неравенства

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

получим:

$$\int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(\frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq M,$$

$$\int_0^{T_1} \int_D \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u^h}{\partial x_i} \right)^2 dx dt \leq M.$$

Здесь и в дальнейшем через M обозначены постоянные, не зависящие от h . Дифференцируя уравнение (6) и умножая его на обрезающие функции, можно показать, что в любой подобласти $Q' \subset Q - S$ последовательность $u^h(x, t)$ равномерно ограничена в норме пространства $W_2^l(Q')$. По теоремам вложения С. Л. Соболева [6] следует, что из последовательности $u^h(x, t)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся во всех точках $Q \subset Q - S$ при $h \rightarrow 0$ к функции $u(x, t)$, удовлетворяющей в Q' уравнению (1) и обладающей производными до порядка $\bar{n}$, если $l \geq n + 1 + \bar{n}$, $\bar{n} \geq 2$.

Исследуем теперь дифференциальные свойства $u(x, t)$ в окрестности ω точки $P \in S$. Пусть ω целиком содержится в $G_r \times (0, T]$. Перейдем в окрестности P к локальным координатам $t, y_1, \dots, y_n$, считая P началом координат. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} = \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{ijr}^h \frac{\partial u^h}{\partial y_j} \right) + \sum_{i=1}^n \zeta_{ir}^h \frac{\partial u^h}{\partial y_i} + c^h u^h + f^h + a^h \frac{\partial u^h}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{r=1}^N \frac{\partial \delta_r^h}{\partial y_n} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial y_n} u^h - \sum_{r=1}^N \frac{\partial x_r^h}{\partial y_n}.$$
(8)

Пусть

$$\Phi_\kappa(y, t) = \left(t^2 - \left(\frac{\delta_0}{\kappa} \right)^2 \right) \prod_{i=1}^n \left(y_i - \left(\frac{\delta_0}{\kappa} \right)^2 \right)^2,$$

где $\delta_0 > 0$ достаточно малое число, и пусть R_κ — область $\left\{ |t| \leq \frac{\delta_0}{\kappa}, \right.$

$|y_i| \leq \frac{\delta_0}{\kappa} \}$. Дифференцируя (8) по y_s ($s = 1, 2, \dots, n-1$), умножая на

$\frac{1}{t^\alpha} \Phi_1 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial y_s}$ и интегрируя по R_1 , получим

$$\iint_{R_1} \kappa^h \frac{1}{t^\alpha} \frac{\partial^3 u^h}{\partial t^2 \partial y_s} \Phi_1 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial y_s} dy dt =$$

$$= \iint_{R_1} \frac{1}{t^\alpha} \Phi_1 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial y_s} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{ijr}^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial y_j \partial y_s} \right) dy dt +$$

$$+ \iint_{R_1} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{\partial \beta_{ijr}^h}{\partial y_s} \frac{\partial u^h}{\partial y_j} \right) \Phi_1 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial y_s} \frac{1}{t^\alpha} dy dt +$$

$$+ \iint_{R_1} \frac{1}{t^\alpha} \Phi_1 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial y_s} \frac{\partial}{\partial y_s} \left[\sum_{i=1}^n \zeta_{ir}^h \frac{\partial u^h}{\partial y_i} + c^h u^h + f^h + a^h u^h + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \delta_r^h}{\partial y_n} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \sigma_r^h}{\partial y_n} u^h - \sum_{r=1}^N \frac{\partial x_r^h}{\partial y_n} \right] dy dt.$$

Преобразуя слагаемые (9), применяя неравенство (7) и пользуясь тем, что $\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big| \sqrt{\Phi_1}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \Big| \sqrt{\Phi_1}$ ограничены, получим следующие оценки:

$$\iint_{R_1} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial y_s \partial y_i} \right)^2 dy dt \leq M, \quad \iint_{R_1} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 u^h}{\partial y_i \partial y_n} \right)^2 dy dt \leq M,$$

($s = 1, \dots, n-1$). (10)

Пусть n и целые числа такие, что $p \geq 1, q \geq 0, p + q \leq l-1$ и для $\kappa + j < p + q$ или $\kappa + j = p + q$ с $j \leq q$ справедлива оценка

$$\iint_{R_{2l-2}} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(\frac{\partial^{\kappa+j} u^h}{\partial t^\kappa \partial y_1^{j_1} \dots \partial y_{n-1}^{j_{n-1}}} \right)^2 dy dt \leq M.$$

Пользуясь методом индукции, покажем, что $j_1 + \dots + j_n = j$

$$\left. \begin{aligned} \iint_{R_{2l-1}} \frac{1}{t^{\alpha+1}} \left(\frac{\partial^{p+q+1} u^h}{\partial t^p \partial y_1^{\kappa_1} \dots \partial y_{n-1}^{\kappa_{n-1}}} \right)^2 dy dt &\leq M, \\ \iint_{R_{2l-1}} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^{p+q+1} u^h}{\partial t^p \partial y_1^{\kappa_1} \dots \partial y_{n-1}^{\kappa_{n-1}} \partial y_i} \right)^2 dy dt &\leq M, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1} = q + 1$. Тогда будем иметь, что в цилиндре $G_r \times (0, T]$ производные от u^h по $t, y_1, \dots, y_{n-1}$ до порядка $l-1$ будут ограничены в норме W_2^1 и, следовательно, равномерно по h будут ограничены нормы u^h в пространстве С. М. Никольского $H_2^{l, \dots, l-1}[7]$. Из теорем вложения С. М. Никольского следует компактность $\{u^h\}$ в пространстве $C(G_r \times (0, T])$, если $\kappa = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{l} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{l-n}{2l} > 0$, т. е.

$l \geq n + 1$.

Аналогично, если $l \geq n + 1 + \bar{n}$, то в некоторой окрестности S производные $\frac{\partial^{\bar{n}} u^h}{\partial t^{\bar{n}_0} \partial y_1^{\bar{n}_1} \dots \partial y_{n-1}^{\bar{n}_{n-1}}}$ удовлетворяют условию Гельдера с по-

казателем и константой, не зависящими от h , и, следовательно, предельная функция $u(x, t)$ имеет непрерывные производные по $t, y_1, \dots, y_{n-1}$ до порядка n . Используя уравнение (1), которому функция $u(x, t)$ удовлетворяет в $Q - S$, можно показать, что $u(x, t)$ имеет при $l \geq n + 1 + \bar{n}$ непрерывные производные по всем переменным $t, y_1, \dots, y_n$ при $y_n > 0$ и $y_n < 0$. Для получения оценок (11) к обеим частям уравнения (8) применяется оператор $\frac{\partial^{p+q}}{\partial t^{p-1} \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}}}$, затем умножается на

$$\frac{1}{t^a} \Phi_{2l-1} \frac{\partial^{p+q+1} u^h}{\partial t^p \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}}}$$

и интегрируется по R_{2l-1} . При этом пользуемся полученными оценками и ограниченностью выражений $\frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial t} \sqrt{\Phi_{2l-1}}, \frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial y_i} \sqrt{\Phi_{2l-1}}$.

Поведение функции $u(x, t)$ на боковой поверхности цилиндра исследуется аналогично предыдущему. Выполнение второго условия сопряжения и единственность поставленной задачи проверяются аналогично тому, как это делается в работе [5].

Полученные результаты могут быть распространены на случай, когда число поверхностей разрыва конечно. Отметим также, что однородность начальных и граничных условий не нарушает общности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов М. Л. Математический сборник, т. 49(91), №, 1959.
2. Барановский Ф. Т. „Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та“, т. 183 1958.
3. Олейник О. А. „Изв. АН СССР, серия матем.“, вып. 25, 1961.
4. Олейник О. А. „ДАН СССР“, т. 169, 1966, № 3.
5. Намазов Г. К. „ДАН СССР“, т. 145, 1962, № 6.
6. Егоров Ю. В. „ДАН СССР“, т. 134, 1960, № 3.
7. Соболев С. Л. Некоторое применение функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
8. Никольский С. М. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1954 № 38.

А. А. Бабајева, Г. К. Намазов

Башлангыч мустәвидә чырлашан кәсилән эмсаллы гиперболик тәнлик һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $t = 0$ мустәвисиндә гиперболик шәрти позулан һалда кәсилән эмсаллы гиперболик тәнлијин һәлли тәдгиг олунур. Гејд етмәк лазымдыр ки, эмсалларын кәсилдији сәтһләр үзәриндә верилән гошмалыг шәртләри замандан асылы олараг дәјишир вә онлара замана көрә төрәмә дахилдир.

Гојулмуш гарышыг мәсәләнин (1)–(4) һәллинин варлығы вә јекәнәлији исбат олунмуш вә алынған нәтијәләр теорем шәклиндә верилмишдир. Тәтбиг олунған метод һәллин һамарлығыны тәдгиг етмәјә имкан јарадыр.

К. К. ГАСАНОВ, К. Т. АХМЕДОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

Постановка задачи

Обозначим через G класс функций $\varphi(t)$, определенных на $[0, T]$, измеримых и удовлетворяющих условию

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1.$$

Пусть $x(t)$ является решением задачи

$$\left. \begin{aligned} x^{(n)} &= g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi), \\ x^{(k)}(0) &= c_{(k+1)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

соответствующим $\varphi(t)$. Требуется найти такую функцию $\varphi \in G$, чтобы на соответствующем ей решении $x(t)$ функционал

$$I(\varphi) = \int_0^T f(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt \quad (2)$$

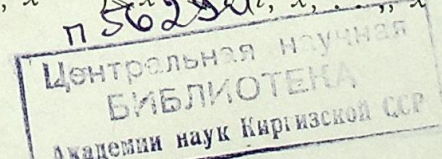
достигал минимального (максимального) значения. Здесь $f(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi)$ — заданная функция. Предполагается, что функция g и f имеют непрерывные производные по t и дважды дифференцируемы по остальным аргументам. Функция g_φ принимает значения только одного знака: либо $g_\varphi > 0$, либо $g_\varphi < 0$.

Из последнего предположения следует, что существует непрерывная обратная функция g относительно φ , т. е. $x^{(n)} \equiv g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \gamma(x, \dots, x^{(n)}, t))$. Кроме того, условие $0 \leq \varphi \leq 1$ эквивалентно условию $u(t, x, \dots, x^{(n-1)}) = g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, 0) \leq x^{(n)} \leq g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, 1) = v(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ при $g_\varphi > 0$, либо $u(t, x, \dots, x^{(n-1)}) = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}, 1) \leq x^{(n)} \leq g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, 0) = v(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ при $g_\varphi < 0$. Положим $k(t, x, \dots, x^{(n)}) \equiv f[t, x, \dots, x^{(n-1)}, \gamma(t, x, \dots, x^{(n)})]$, тогда задача максимизации эквивалентна нахождению максимума функционала:

$$\int_0^T k(t, x, \dots, x^{(n)}) dt \quad (3)$$

при условиях $x^{(k)}(0) = c_{(k+1)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$),

$$u(t, x, \dots, x^{(n-1)}) \leq x^{(n)} \leq v(t, x, \dots, x^{(n-1)}). \quad (4)$$



Существование решения

В дальнейшем предполагается, что выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \leq g(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi) \leq \sum_{i=1}^n q_i x_i + r$$

для некоторых постоянных p_i и q_i . Эти условия гарантируют равномерную ограниченность $x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $k(t, x, \dots, x^{(n)})$ непрерывна по совокупности аргументов и вогнута по $x^{(n)}$ ($k_{x^{(n)}}(t) \leq 0$). Пусть далее последовательности функций $\{x_k(t)\}$ и их производные до $(n-1)$ порядка равномерно сходятся соответственно к $x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ на интервале $(0, T)$ и при почти всех $t \in [0, T]$ удовлетворяют неравенству

$u(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) \leq x_k^{(n)}(t) \leq v(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t))$, где u и v непрерывны. Тогда для предельной функции $x(t)$ при почти всех $t \in [0, T]$ выполняются условия

$$u(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \leq x^{(n)}(t) \leq v(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T k(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n)}(t)) dt \leq \int_0^T k(t, x(t), \dots, x^{(n)}(t)) dt.$$

Доказательство. В силу равномерной сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ равномерно ограничены. Тогда вследствие непрерывности u и v вытекает, что последовательности $u(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t))$ и $v(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t))$ тоже равномерно ограничены. Из условия

$u(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) \leq x_k^{(n)}(t) \leq v(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t))$ следует, что последовательность $\{x_k^{(n)}(t)\}$ равномерно ограничена для почти всех значений $t \in (0, T)$, поэтому для любых $t_1 < t_2$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} u(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} x_k^{(n)}(t) dt \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} v(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} u(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) dt &\leq x_k^{(n-1)}(t_2) - x_k^{(n-1)}(t_1) \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} v(t, x_k(t), \dots, x_k^{(n-1)}(t)) dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} u(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) dt &\leq x^{(n-1)}(t_2) - x^{(n-1)}(t_1) \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} v(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда

$$|x^{(n-1)}(t_2) - x^{(n-1)}(t_1)| \leq L(t_2 - t_1),$$

где L — постоянное число.

Следовательно, $x^{(n-1)}(t)$ — абсолютно непрерывная функция. Пусть в точке $t_0 \in [0, T]$ $x(t)$ имеет производную $x^{(n)}(t_0)$, тогда из (5) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t u(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) dt &\leq \frac{x^{(n-1)}(t) - x^{(n-1)}(t_0)}{t - t_0} \leq \\ &\leq \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t v(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) dt \end{aligned}$$

при $t > t_0$.

Отсюда при $t \rightarrow t_0$ имеем

$$u(t_0, x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) \leq x^{(n)}(t_0) \leq v(t_0, x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)).$$

В силу измеримости и ограниченности почти всюду $x^{(n)}(t)$ на $(0, T)$ следует, что она суммируема в смысле Лебега. Легко показать, что последовательность $\{x_k^{(n)}(t)\}$ слабо сходится к $x^{(n)}(t)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \int_0^{x^{(n)}} k_{x^{(n)}}(t, x, \dots, x^{(n-1)}, u) du &= \\ = \int_0^T k(t, x, \dots, x^{(n)}) dt - \int_0^T k(t, x, \dots, x^{(n-1)}, 0) dt. \end{aligned}$$

Положим

$$F(x, \dots, x^{(n)}) = \int_0^T dt \int_0^{x^{(n)}} k_{x^{(n)}}(t, x, \dots, x^{(n-1)}, u) du.$$

Докажем, что функция F полунепрерывна сверху по $x^{(n)}$.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \Delta_k &= F(x_k, \dots, x_k^{(n)}) - F(x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)}) - \\ &- \int_0^T k_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)}) (x_k^{(n)} - x^{(n)}) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \int_0^T dt \int_{x^{(n)}}^{x_k^{(n)}} k_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, u) du - \\ &- \int_0^T k_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)}) (x_k^{(n)} - x^{(n)}) dt. \end{aligned}$$

Положим

$$u = yx_k^{(n)} + (1 - y)x^{(n)}, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

тогда $du = [x_k^{(n)} - x^{(n)}] dy$ и

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \int_0^T dt \int_0^1 \kappa_{x^{(n)}}[t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, yx_k^{(n)} + (1 - y)x^{(n)}] [x_k^{(n)} - x^{(n)}] dy - \\ &- \int_0^T \kappa_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)}) (x_k^{(n)} - x^{(n)}) dt. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \int_0^1 dy \int_0^T [\kappa_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)} + y(x_k^{(n)} - x^{(n)})) - \\ &- \kappa_{x^{(n)}}(t, x_k, \dots, x_k^{(n-1)}, x^{(n)})] dt. \end{aligned}$$

В силу монотонного убывания функции $\kappa_{x^{(n)}}$ по $x^{(n)}$ следует, что

$$(x_{\kappa}^{(n)} - x^{(n)}) \{ \kappa_{x^{(n)}}(t, x_{\kappa}, \dots, x_{\kappa}^{(n-1)}, x^{(n)} + y(x_{\kappa}^{(n)} - x^{(n)})) - \\ - \kappa_{x^{(n)}}(t, x_{\kappa}, \dots, x_{\kappa}^{(n-1)}, x^{(n)}) \} \leq 0,$$

поэтому $\Delta_{\kappa} \leq 0$ и, следовательно, $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \Delta_{\kappa} \leq 0$. Отсюда в силу равномерной сходимости

$$\{x_{\kappa}^{(i)}(t)\} \text{ к } x^{(i)}(t)$$

при $i = 0, 1, \dots, n-1$ и слабой сходимости $\{x_{\kappa}^{(n)}(t)\}$ к $x^{(n)}(t)$ следует, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} F(x_{\kappa}, \dots, x_{\kappa}^{(n-1)}, x_{\kappa}^{(n)}) - \int_0^T \kappa(t, x, \dots, x^{(n)}) dt + \int_0^T \kappa(t, x, \dots, x^{(n-1)}, 0) dt \leq 0$$

или

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_0^T \kappa(t, x_{\kappa}, \dots, x_{\kappa}^{(n)}) dt \leq \int_0^T \kappa(t, x, \dots, x^{(n)}) dt.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия, наложенные на функции f и g . Если функция κ вогнута по $x^{(n)}$, то решение максимизации существует.

Доказательство. Пусть S — точная верхняя грань функционала (2) с ограничениями (1) и $\varphi \in G$. Далее пусть $\{x_{\kappa}(t)\}$ — последовательность допустимых функций, по которой функционал стремится к S . Тогда в силу условия теоремы последовательность $\{x_{\kappa}^{(n)}(t)\}$ равномерно ограничена, почти всюду $t \in [0, T]$ и, согласно теореме Арцела из последовательности $\{x_{\kappa}(t)\}$ можно выбрать такую последовательность $\{x_{\kappa_m}(t)\}$, которая вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка равномерно сходится к соответствующим функциям $x^*(t)$, $x'_*(t), \dots, x^{(n-1)}_*(t)$. В таком случае по лемме последовательность $\{x_{\kappa_m}^{(n)}(t)\}$ слабо сходится к $x^{(n)}_*(t)$ и $x_*(t)$ будет допустимой для задачи, поэтому

$$\int_0^T \kappa[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt \leq S.$$

В силу леммы

$$S = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_0^T \kappa[t, x_{\kappa}(t), \dots, x_{\kappa}^{(n)}(t)] dt \leq \int_0^T \kappa[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt.$$

Отсюда следует, что

$$S = \int_0^T \kappa[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f_{\varphi\varphi} - \frac{f_{\varphi}}{g_{\varphi}} g_{\varphi\varphi} \leq 0$, то задача имеет решение.

Доказательство. Так как $\gamma(t, x, \dots, x^{(n)})$ непрерывна и $\kappa(t, x, \dots, x^{(n)}) = f[t, x, \dots, x^{(n-1)}, \gamma(t, x, \dots, x^{(n)})]$, непрерывна. Далее

$$\kappa_{x^{(n)} x^{(n)}} = \frac{1}{g_{\varphi}^2} \left[f_{\varphi\varphi} - \frac{f_{\varphi}}{g_{\varphi}} g_{\varphi\varphi} \right] \leq 0.$$

Следовательно, все условия теоремы 1 выполняются.

Лемма 2. Пусть $\kappa(t, x, \dots, x^{(n)})$ непрерывна и выпукла по $x^{(n)}$. Положим

$$\bar{\kappa}(t, x, \dots, x^{(n)}) = \\ = \frac{[x^{(n)} - u(t, x, \dots, x^{(n-1)})] \kappa[t, x, \dots, x^{(n-1)}, v(t, x, \dots, x^{(n-1)})] + \\ + [v(t, x, \dots, x^{(n-1)}) - x^{(n)}] \kappa[t, x, \dots, x^{(n-1)}, u(t, x, \dots, x^{(n-1)})]}{v(t, x, \dots, x^{(n-1)}) - u(t, x, \dots, x^{(n-1)})},$$

тогда

$$\sup \int_0^T \kappa(t, x, \dots, x^{(n)}) dt = \sup \int_0^T \bar{\kappa}(t, x, \dots, x^{(n)}) dt,$$

где точная верхняя грань в левой и правой частях берется на множестве функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$x^{(k)}(0) = c_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1;$$

$$u(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \leq x^{(n)}(t) \leq v(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)).$$

Теорема 2. Если $\sup \int_0^T \bar{\kappa}(t, x, \dots, x^{(n)}) dt$ достигается при

$x(t) = x_*(t)$, причем функция $x_*(t)$ такова, что почти всюду $x^{(n)}_*(t) = u(t, x_*(t), \dots, x^{(n-1)}_*(t))$ или $x^{(n)}_*(t) = v(t, x_*(t), \dots, x^{(n-1)}_*(t))$,

то $\sup \int_0^T \bar{\kappa}(t, x, \dots, x^{(n)}) dt$ достигается при $x(t) = x_*(t)$.

Доказательство. В силу леммы 2 имеем

$$\int_0^T \bar{\kappa}[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt = \sup \int_0^T \bar{\kappa}[t, x(t), \dots, x^{(n)}(t)] dt = \\ = \sup \int_0^T \kappa[t, x(t), \dots, x^{(n)}(t)] dt.$$

Из условий теоремы почти всюду

$$\bar{\kappa}[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] = \kappa[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)].$$

Следовательно,

$$\sup \int_0^T \bar{\kappa}[t, x, \dots, x^{(n)}] dt = \int_0^T \bar{\kappa}[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt = \\ = \int_0^T \kappa[t, x_*(t), \dots, x^{(n)}_*(t)] dt.$$

Необходимые условия максимума

Пусть $x_*(t)$ и $\varphi_*(t)$ являются решением нашей задачи. Обозначим через $f_{\varphi}(t) = f_{\varphi}[t, x_*(t), \dots, x^{(n-1)}_*(t), \varphi_*(t)]$, $f_x(t) = f_x[t, x_*(t), \dots, \dots, x^{(n-1)}_*(t), \varphi_*(t)]$ т. д.

Обозначим через $y_1(t), \dots, y_n(t)$ фундаментальное решение линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} = g_{x^{(n-1)}}(t) y^{(n-1)} + \dots + g_x(t) y.$$

Положим

$$G(t, \tau) = \frac{g(t, \tau)}{W(\tau)},$$

где $W(\tau)$ — определитель Вронского;

$g(t, \tau) = \sum_{k=1}^n y_k(t) W_k(\tau)$; $W_k(\tau)$ — определитель, получаемый из $W(\tau)$ в результате замены k -го столбца на $(0, 0, \dots, 0, 1)$; $H(t) = f_\varphi + g_\varphi \int_0^T [f_x(\tau) G(\tau, t) +$

$$+ f_{x'}(\tau) G_\tau + \dots + f_{x^{(n-1)}}(\tau) G_{\tau^{(n-1)}}] d\tau. \quad (6)$$

Теорема 3. Пусть $\varphi_*(t)$ — решение задачи максимизации (3), а $x_*(t)$ — соответствующее ему решение. Тогда, за исключением множества значений t меры нуль,

$$H(t) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \varphi_*(t) = 1; \\ = 0, & \text{если } 0 < \varphi_*(t) < 1; \\ \leq 0, & \text{если } \varphi_*(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\eta(t)$ — произвольная допустимая вариация, т. е. любая измеренная функция, удовлетворяющая условию $0 \leq \varphi_*(t) + \eta(t) \leq 1$ при $t \in [0, T]$. Обозначим через $x_\varepsilon(t)$ решение задачи

$$\begin{cases} x^{(n)} = g[t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi_*(t) + \varepsilon \eta(t)]; & 0 \leq \varepsilon \leq 1 \\ x^{(k)}(0) = c_{k+1}; & k = 0, 1, \dots, n-1. \\ \xi_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) - x_*(t), \end{cases} \quad (8)$$

Положим

тогда существует такая постоянная M , что на интервале $(0, T)$ выполняется неравенство

$$|\xi_\varepsilon^{(i)}(t)| \leq M\varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее из (8) имеем

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon^{(n)} &= g_{x^{(n-1)}}(t) \xi_\varepsilon^{(n-1)} + \dots + g_{x'}(t) \xi_\varepsilon + g_\varphi(t) \varepsilon \eta + \\ &+ Q(t, \xi_\varepsilon, \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}, \xi_\varepsilon \eta), \end{aligned} \quad (9)$$

где Q представляет собой квадратичную форму по $\xi_\varepsilon, \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon \eta$ с ограниченными коэффициентами.

Пусть $\xi(t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \xi^{(n)} = g_{x^{(n-1)}}(t) \xi^{(n-1)} + \dots + g_{x'}(t) \xi + g_\varphi(t) \eta(t), \\ \xi^{(i)}(0) = 0; \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

тогда

$$\xi_\varepsilon^{(i)}(t) - \varepsilon \xi^{(i)}(t) = \int_0^t G_{ii}(t, \tau) Q[\tau, \xi_\varepsilon(\tau), \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}(\tau), \varepsilon \eta(\tau)] d\tau. \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

Отсюда имеем $|\xi_\varepsilon^{(i)}(t) - \varepsilon \xi^{(i)}(t)| \leq \varepsilon^2 L$, $L = \text{const} > 0$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} &I(\varphi_* + \varepsilon \eta) - I(\varphi_*) = \\ &+ \int_0^T \{f[t, x_\varepsilon(t), \dots, x_\varepsilon^{(n-1)}(t), \varphi_*(t) + \varepsilon \eta(t)] - f[t, x_*(t), \dots, x_*^{(n-1)}(t), \varphi_*]\} dt = \\ &= \int_0^T \{f_x(t) \xi_\varepsilon(t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(t) \xi_\varepsilon^{(n-1)}(t) + f_\varphi(t) \varepsilon \eta(t)\} dt + \\ &+ \int_0^T F[t, \xi_\varepsilon(t), \xi_\varepsilon^{(1)}(t), \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}(t), \varepsilon \eta(t)] dt, \end{aligned}$$

где F является квадратичной формой по $\xi_\varepsilon, \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}, \varepsilon \eta$ с ограниченными коэффициентами. Поэтому имеем порядок малости $o(\varepsilon)$. Тогда из последнего будем иметь

$$\begin{aligned} &I(\varphi_* + \varepsilon \eta) - I(\varphi_*) = \\ &= \varepsilon \int_0^T \{f_{x^{(n-1)}}(t) \xi^{(n-1)}(t) + \dots + f_x(t) \xi(t) + f_\varphi(t) \eta(t)\} dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^T H(t) \eta(t) dt &= \int_0^T f_\varphi(t) \eta(t) dt + \int_0^T g_\varphi(t) \eta(t) \left\{ \int_t^T [f_{x^{(n-1)}}(\tau) G_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t) + \dots \right. \\ &\quad \left. + f_x(\tau) G] d\tau \right\} dt = \int_0^T f_\varphi(t) \eta(t) dt + \\ &+ \int_0^T f_{x^{(n-1)}}(t) \left\{ \int_0^t g_\varphi(\tau) G_{\tau^{(n-1)}}(t, \tau) \eta(\tau) d\tau \right\} dt + \dots + \\ &+ \int_0^T f_x(t) \left\{ \int_0^t g_\varphi(\tau) G(t, \tau) \eta(\tau) d\tau \right\} dt = \\ &= \int_0^T \{f_{x^{(n-1)}}(t) \xi^{(n-1)}(t) + \dots + f_x(t) \xi(t) + f_\varphi(t) \eta(t)\} dt \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной допустимой вариации $\eta(t)$

$$\int_0^T H(t) \eta(t) dt \leq 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Любой интервал (t_1, t_2) , в котором $H(t) \equiv 0$, называется „эйлеровым участком“.

Теорема 4. На эйлеровом участке почти всюду выполняются следующие эквивалентные формы классических уравнений Эйлера:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{f_\varphi}{g_\varphi} \right) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(f_{x^{(n-1)}} - \frac{g_{x^{(n-1)}}}{g_\varphi} f_\varphi \right) + \dots + (-1)^n \left(f_x - \frac{g_x}{g_\varphi} f_\varphi \right) &= 0; \\ \text{б) } \frac{d^n}{dt^{(n)}} \kappa_{x^{(n)}} - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \kappa_{x^{(n-1)}} + \dots + (-1)^n \kappa_x &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Положим

$$h(t) = \frac{H(t) W(t)}{g_\varphi(t)} = \frac{f_\varphi(t) W(t)}{g_\varphi(t)} + F(t), \quad (10)$$

$$\text{где } F(t) = \int_t^T [f_{x^{(n-1)}}(\tau) g_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t) + \dots + f_x(\tau) g(\tau, t)] d\tau.$$

Так как $g_\varphi(t) \neq 0$ и $W(t) \neq 0$, то на эйлеровом участке $h^{(i)}(t) \equiv 0$ при $i = 0, 1, \dots, n-1$. Отсюда

$$F^{(i)}(t) = -\frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{f_\varphi(t) W(t)}{g_\varphi(t)} \right); \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Далее $W'(t) = g_{x^{(n-1)}}(t) W(t)$.

Поэтому, дифференцируя выражения (10) n -го порядка, получаем утверждение теоремы.

Единственность решения

Решение $x_*(t)$ и $\varphi_*(t)$, для которого выполняется необходимое условие, в общем случае необязательно будет единственным. Следующая теорема дает единственность решения.

Теорема 5. Пусть функция $f(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi)$ вогнута по $(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi)$ и функция $g(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi)$ строго вогнута по $(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi)$. Далее пусть выполняется неравенство:

$$\int_0^T \{f_x(\tau)G(\tau, t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(\tau)G_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t)\} d\tau > 0 \text{ при } 0 \leq t < T. \quad (11)$$

Тогда, если функция $\varphi_*(t)$ удовлетворяет необходимым условиям (7), то она будет единственным решением.

Доказательство. Пусть $\eta(t)$ — произвольная ненулевая допустимая вариация. В силу условий теоремы в формуле (9)

$$Q(t) = Q(t, \xi_\varepsilon(t), \dots, \xi_\varepsilon^{(n-1)}(t), \varepsilon\eta(t)) < 0 \text{ при } 0 < \varepsilon \leq 1$$

и

$$f(t, x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) - f(t, x_*, \dots, x_*^{(n-1)}, \varphi_*) \leq f_x(t)(x - x_*) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(t)(x^{(n-1)} - x_*^{(n-1)}) + f_\varphi(t)(\varphi - \varphi_*).$$

На основании (11) имеем

$$\int_0^T Q(t) \left\{ \int_0^T [f_x(\tau)G(\tau, t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(\tau)G_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t)] d\tau \right\} dt < 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I(\varphi_* + \eta) - I(\varphi_*) &= \int_0^T \{f[t, x_1(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t), \varphi_*(t) + \eta(t)] - \\ &\quad - f[t, x_*(t), \dots, x_*^{(n-1)}(t), \varphi_*(t)]\} dt \leq \\ &\leq \int_0^T \{f_x(t)\xi_1(t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(t)\xi_1^{(n-1)}(t) + f_\varphi(t)\eta(t)\} dt. \end{aligned}$$

Так как

$$\xi_1^{(k)}(t) = \xi^{(k)}(t) + \int_0^T Q(t)G_{t^k}(t, \tau) d\tau$$

$$(\kappa = 0, 1, \dots, n-1),$$

то

$$\begin{aligned} I(\varphi_* + \eta) - I(\varphi_*) &\leq \int_0^T H(t)\eta(t) dt + \\ &+ \int_0^T Q(t) \left\{ \int_0^T [f_x(\tau)G(\tau, t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(\tau)G_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t)] d\tau \right\} dt. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$I(\varphi_* + \eta) - I(\varphi_*) < 0 \text{ или } I(\varphi_* + \eta) < I(\varphi_*).$$

Из этого неравенства вытекает единственность решения.

Непрерывность решения

Из предыдущих утверждений не следует непрерывность решения $\varphi_*(t)$ или, что то же самое, непрерывность $x_*^{(n)}(t)$.

Теорема 6. Если $\kappa(t, x, \dots, x^{(n)})$ строго вогнута по $x^{(n)}$, то решение $\varphi_*(t)$ непрерывно.

Доказательство. Предположим, что $g_\varphi > 0$. Положим

$$H_1(t) = \frac{H(t)}{g_\varphi(t)} = \kappa_{x^{(n)}}(t) + I(t),$$

где

$$I(t) = \int_0^T [f_x(\tau)G(\tau, t) + \dots + f_{x^{(n-1)}}(\tau)G_{\tau^{(n-1)}}(\tau, t)] d\tau$$

непрерывна, тогда почти всюду выполняется неравенство

$$H_1(t) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } \varphi_*(t) = 1, \\ = 0, & \text{если } 0 < \varphi_*(t) < 1, \\ \leq 0, & \text{если } \varphi_*(t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Обозначим через N множество точек t , на котором не выполняются условия (12), тогда $\text{mes } N = 0$.

Пусть последовательности $\{t'_k\}$ и $\{t''_k\}$ удовлетворяют условиям:

- 1) $t'_k, t''_k \in (0, T) - N$;
- 2) $t'_k \rightarrow t_0, t''_k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_*^{(n)}(t'_k)$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_*^{(n)}(t''_k)$ существуют;
- 4) выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_*^{(n)}(t'_k) < \lim_{k \rightarrow \infty} x_*^{(n)}(t''_k).$$

Тогда в силу непрерывности $I(t)$ и строгого убывания $\kappa_{x^{(n)}}$ по $x^{(n)}$ следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_1(t'_k) < \lim_{k \rightarrow \infty} H_1(t''_k). \quad (13)$$

Предположим обратное. Пусть $x_*^{(n)}(t)$ терпит разрыв в точке $t_0 \in (0, T)$, тогда

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in N}} x_*^{(n)}(t) < \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in N}} x_*^{(n)}(t). \quad (14)$$

Пусть $\{t'_k\}$ и $\{t''_k\}$ — две последовательности из $(0, T) - N$, стремящиеся к t_0 , где $x_*^{(n)}(t'_k)$ стремится к своему нижнему пределу, а $x_*^{(n)}(t''_k)$ — к верхнему. Тогда имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_1(t'_k) \leq 0 \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} H_1(t''_k) \geq 0.$$

Это соотношение противоречит неравенству (13), поэтому предположение (14) неверно и для любого $t \in (0, T)$; $\Phi(t) = \lim_{\substack{t' \rightarrow t \\ t' \in N}} x_*^{(n)}(t')$ существует.

Тогда $\Phi(t)$ непрерывна. В силу аппроксимативной непрерывности функции $x_*^{(n)}(t)$ почти всюду величину $x_*^{(n)}(t')$ почти для всех t стремится к $x_*^{(n)}(t)$ на множестве значений t' , имеющем плотность 1 в точке t . Поэтому почти всюду $x_*^{(n)}(t) = \Phi(t)$. Далее, так как $x_*^{(n)}(t)$ и $\Phi(t)$ эквивалентны между собой, то разность

$$x_*^{(n-1)}(t) - \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \text{ постоянна, т. е.}$$

$x_*^{(n-1)}(t) = c + \int_0^t \Phi(\tau) d\tau$. Согласно непрерывности $\Phi(t)$ следует, что для всех $t \in (0, T)$ имеем

$$x_*^{(n)}(t) = \Phi(t).$$

Отсюда следует непрерывность $x_*^{(n)}(t)$, поэтому и $\varphi_*(t) = \gamma[t, x_*(t), \dots, x_*^{(n)}(t)]$ будет непрерывна.

Метод динамического программирования

Предположим, что функции f и g не зависят от t .
Положим

$$p(c_1, c_2, \dots, c_n, T) = \max_{\varphi \in G} I(\varphi) = \max_{\varphi} \int_0^T f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt.$$

Предположим, что функция p непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $c_1, c_2, \dots, c_n, T$, тогда $p(c_1, \dots, c_n, T)$ является решением следующего дифференциального уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} \frac{\partial p}{\partial c_i} + \max_{0 \leq V \leq 1} \left[f(c_1, \dots, c_n, V) + g(c_1, \dots, c_n, V) \frac{\partial p}{\partial c_n} \right], \quad (5)$$

где $V = \varphi(0) = V(c_1, \dots, c_n, T)$.

Вдоль экстремали $\varphi(t)$ имеем

$$\begin{aligned} p(c_1, \dots, c_n, s+T) &= \int_0^{s+T} f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt = \\ &= \int_0^s f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt + \int_s^{s+T} f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt. \end{aligned}$$

При $t=s$ значения $x, \dots, x^{(n-1)}$ равны соответственно $x(s) \equiv c_1(s), \dots, x^{(n-1)}(s) \equiv c_n(s)$, определяемым из дифференциального уравнения.

Используя принцип оптимальности и независимости задачи от времени, получаем

$$p(c_1(s), \dots, c_n(s), T) = \int_s^{s+T} f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt.$$

Следовательно,

$$p(c_1, \dots, c_n, s+T) = \int_0^s f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt + p(c_1(s), \dots, c_n(s), T).$$

Поскольку функцию $\varphi(t)$ на отрезке $[0, s]$ нужно выбрать так, чтобы правая часть этого равенства была максимальной, то

$$p(c_1, \dots, c_n, s+T) = \max_{\substack{\varphi(t) \\ t \in [0, s]}} \left[\int_0^s f(x, \dots, x^{(n-1)}, \varphi) dt + p(c_1(s), \dots, c_n(s), T) \right].$$

Для малых значений s имеем

$$\begin{aligned} p(c_1, \dots, c_n, T) + s \frac{\partial p(c_1, \dots, c_n, T)}{\partial T} + o(s) &= \max_{0 \leq V \leq 1} \left[s f(c_1, \dots, c_n, V) + \right. \\ &+ p(c_1, \dots, c_n, T) + s \sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} \frac{\partial p(c_1, \dots, c_n, T)}{\partial c_i} + \\ &\left. + s g(c_1, \dots, c_n, V) \frac{\partial p(c_1, \dots, c_n, T)}{\partial c_n} + o(s) \right]. \end{aligned}$$

При $s \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \max_{0 \leq V \leq 1} \left[\sum_{i=1}^{n-1} c_{i+1} \frac{\partial p}{\partial c_i} + f(c_1, \dots, c_n, V) + g(c_1, \dots, c_n, V) \frac{\partial p}{\partial c_n} \right].$$

Отсюда следует уравнение (15), для решения которого имеем начальное условие

$$p(c_1, \dots, c_n, 0) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Гликсберг И., Гросс О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., 1962.
2. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1956.

К. Г. Насанов, Г. Т. Эмэдов

Ади дифференциал тэнликлэр үчүн мүүжэн мөхдудийжэт
дахилиндэ бир вариасија мөсөлөсү

ХҮЛАСЭ

Мөгалэ (2) функционалынын (1) шэртлэри дахилиндэ өйрөнилмөсинэ нэср олунмушдур. Бурада идараедичи функција өлчүлэн олуб, $0 \leq \varphi(t) \leq 1$ шэртини өдөйир. Мө'лумларын үзэринэ мүүжэн шэртлэр гојмагла (1)–(2) мөсөлөсү (3)–(4) мөсөлөсинэ кэтирилир вэ бу мөсөлэ үчүн эсас лемма исбат олунур. Бундан сонра мөсөлөнин варлығы мөхтөлиф шэртлэр дахилиндэ исбат едилир.

Идараедичи функцијанын оптималлығы үчүн зэрури шэрт көс-тэрилмиш вэ Ејлер интервалларында классик Ејлер тэнлији чыхарылмышдыр. Бундан башга оптимал функцијанын вэ ја мөсөлөнин нэл-линин јеканэлији үчүн бир теорем исбат олунмуш, оптимал функци-јанын кэсилмэзлији үчүн шэрт көс-тэрилмишдир.

Нөһајэт, мөгалөнин сонунда гојулмуш мөсөлөјө динамик програм-лашдырма үсулу тэтбиг олунмушдур.

Х. М. НАДЖАФОВ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ Т ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ТРИКОМИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Рассмотрим уравнение

$$L(z) \equiv y \cdot z_{xx} + z_{yy} + \left[\frac{\alpha_0}{|y|^{1/2}} + a(x, y) \right] \cdot z_x + \left[\frac{\beta_0}{y} + b(x, y) \right] \cdot z_y = 0. \quad (1)$$

в области D , ограниченной гладкой кривой Γ в полуплоскости $y > 0$, опирающейся на линию $y = 0$ в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, и дугами характеристик AC , BC , $\left[C \left(\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{4} \right)^{1/2} \right) \right]$, лежащих в полуплоскости $y < 0$. Часть области D , лежащей в полуплоскости $y > 0$, обозначим через D_1 , в полуплоскости $y < 0$ — через D_2 . α_0 , β_0 — действительные числа, $a(x, y)$ и $b(x, y)$ — непрерывные функции вместе со своими производными первого порядка в замкнутой области $\bar{D}$; $b(x, y) \geq 0$ в области D_1 .

Лемма 1. Пусть непрерывная в замкнутой области $\bar{D}_1$ функция $z(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$L(z) \geq 0 \quad (\leq 0) \quad (2)$$

и достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в некоторой точке $(x_0, 0)$, $0 < x_0 < 1$.

Если значения z на Γ меньше (больше), чем $z(x_0, 0)$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{\beta_0} \cdot z_y(x_0, y) < 0 \quad (> 0)$$

при условии, что указанный предел существует.

Доказательство. Предположим, что функция $z(x, y)$ принимает наибольший положительный максимум в точке $(x_0, 0)$. Тогда очевидно, что не может иметь места неравенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{\beta_0} \cdot z_y(x_0, y) > 0.$$

Пусть $\lim_{y \rightarrow 0} y^{\beta_0} \cdot z_y(x_0, y) = 0$. Следуя В. Ф. Волкодавовой [1], рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(x, y) = \frac{z(x, y)}{e^{d^{1-\beta_0}} - \epsilon \cdot e^{y^{1-\beta_0}}},$$

где d — диаметр области D_1 , $0 < \beta_0 < 1$, $0 < \epsilon < 1$.

Тогда $L(z) = \theta(y) \cdot L_1(W)$,

где $\theta(y) = e^{d^{1-\beta_0}} - \epsilon \cdot e^{y^{1-\beta_0}}$,

$$L_1(W) = y \cdot W_{xx} + W_{yy} + \left[\frac{\alpha_0}{y^{1/2}} + a(x, y) \right] \cdot W_x + \left[\frac{\beta_0}{y} + b(x, y) + \frac{2 \cdot \theta'}{\theta} \right] \cdot W_y + C(x, y) W.$$

Так как $b(x, y) \geq 0$, то $C(x, y) = \frac{1}{\theta} \left[\theta'' + \left(\frac{\beta_0}{y} + b \right) \cdot \theta' \right] < 0$. Нетрудно убедиться, что $W|_{\Gamma} < W(x_0, 0)$.

Итак, функция $W(x, y)$ удовлетворяет всем требованиям леммы.

Но $\lim_{y \rightarrow 0} y^{\beta_0} \cdot W_y = \frac{\epsilon(1-\beta_0)}{e^{2d^{1-\beta_0}}} > 0$, что невозможно. Лемма доказана.

Вышеизложенная лемма в случае $\epsilon_0 = \beta_0 = 1$ рассмотрена в [2].

§ 2. Докажем принцип локального экстремума для уравнения (1). Уравнение (1) в характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}, \quad \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2},$$

принимает вид

$$L_2(z) \equiv z_{\xi\eta} + \frac{q}{\eta - \xi} z_{\xi} - \frac{p}{\eta - \xi} z_{\eta} + D(z) = 0, \quad (3)$$

где

$$q = \frac{1}{6} - \frac{\alpha_0}{3} + \frac{\beta_0}{3}, \quad p = \frac{1}{6} + \frac{\alpha_0}{3} + \frac{\beta_0}{3},$$

$$D[z(\xi, \eta)] = \alpha(\xi, \eta) z_{\xi} + \beta(\xi, \eta) z_{\eta},$$

$$\alpha(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \frac{a(x, y)}{(\eta - \xi)^{1/2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \frac{b(x, y)}{(\eta - \xi)^{1/2}},$$

$$\beta(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \frac{a(x, y)}{(\eta - \xi)^{1/2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/2} \frac{b(x, y)}{(\eta - \xi)^{1/2}}.$$

Будем считать, что

$$\frac{5}{3} < q < 2, \quad -1 < p < -\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} < q + p < 1. \quad (4)$$

Воспользуемся результатом работы [3]: если $z(x, y)$ — регулярное решение уравнения (1) в области D_2 , удовлетворяющее начальным условиям $z|_{AB} = \tau(x)$, $z|_{AC} = 0$, то оно имеет вид

$$z(\xi, \eta) = z_0(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(\xi, \eta), \quad (5)$$

где

$$z_0(\xi, \eta) = \kappa (1 - q - p) (\eta - \xi)^{1-q-p} \cdot \int_0^{\xi} \frac{\tau(t) dt}{(\xi - t)^{1-q} \cdot (\eta - t)^{1-p}},$$

$$z^n(\xi, \eta) = - \int_0^{\xi} \int_{\xi'}^{\eta} v(\xi, \eta; \xi', \eta') D[z_{n-1}(\xi', \eta')] d\xi' d\eta',$$

$$v(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \begin{cases} v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) & \text{при } \eta > \xi_0, \\ v_2(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) & \text{при } \eta < \xi_0, \end{cases}$$

$$v_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \frac{(\eta - \xi)^q \cdot (\eta_0 - \xi)^{p-q}}{(\eta_0 - \xi_0)^p} F(p, 1 - q, 1, s),$$

$$v_2(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \kappa \frac{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)^{1-q-p} \cdot (\eta_0 - \xi)^{p-q}}{(\xi_0 - \xi)^{1-q} \cdot (\eta_0 - \eta)^{1-q}} \times \\ \times F\left(1-q, 1-q, 2-q-p, \frac{1}{s}\right),$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, \kappa = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(q)\Gamma(2-q-p)}, \quad s = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)}.$$

Область D_2 преобразуется в область H , которая является прямоугольным треугольником с вершинами $A_1(0, 0)$, $B_1(11)$, $C_1(0, 1)$.

Пусть $z_n(\xi, \eta) = u_n(\xi, \eta)$ ($n = 1, 2, \dots$) в области H_1 , ограниченной линиями $\eta = \xi_0$, $\xi = 0$, $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$;

$z_1(\xi, \eta) = W_n(\xi, \eta)$ ($n = 1, 2, \dots$) в области H_2 , ограниченной линиями $\eta = \xi_0$, $\xi = 0$, $\eta = \xi$. Соответственно в замкнутых областях $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_2$ имеют место следующие оценки [3]:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\xi, \eta) \right| \leq C \cdot (\eta - \xi)^{1/3}, \quad (6)$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\xi, \eta) \right| \leq m \cdot (\eta - \xi)^{1-p-q} \cdot S(\lambda_0, \xi), \quad (7)$$

$$\text{где } S(\lambda_0, \xi) = \frac{6(1-p-q) \cdot \lambda_0 \cdot B\left(\frac{1}{3}, q\right)}{(q-p)B(q, 1-p)\left(q+p-\frac{2}{3}\right)} +$$

$$+ \frac{6(1-p-q) \cdot \lambda_0 \cdot B\left(\frac{4}{3}-p-q, q\right)}{\left(q+p-\frac{2}{3}\right)(q-p)B(q, 1-p)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} l_1^n \cdot \lambda_0^{n+2} \cdot \prod_{k=0}^n B\left(q+p+\right.$$

$$\left. + \frac{\kappa+1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \xi^{q+p+\frac{n-1}{3}},$$

$$\lambda_0 = \max \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \cdot |a(x, y)|; \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \cdot |b(x, y)| \right\},$$

$$l_0 = \lambda_1 \cdot B\left(\frac{1}{3}, q\right) + \frac{2}{(q-p) \cdot B(q, 1-p)},$$

$$\lambda_1 = \frac{4 \cdot (q-p) - 2}{(q-p)B(q, 1-p)} + \frac{4 \cdot (q-1)}{(q-p-1)B(q-1, 1-p)},$$

$$l_1 = \lambda_1 \cdot B\left(\frac{4}{3}-p-q, q\right) + \frac{2}{(q-p)B(q, 1-p)},$$

$m = \max_{0 \leq t \leq 1} |\tau(t)|$, C — постоянное, не зависящее от ξ, η .

Принцип локального экстремума для уравнения (3) заключается в следующем.

Определение 1. Если $z(\xi, \eta)$ — решение уравнения (3), непрерывное в замкнутой области $\bar{H}$, достигает наибольшего положительного значения на отрезке A_1P переходной линии A_1B_1 в точке P , и при этом $z|_{A_1C_1} = 0$, то $z(Q) < z(P)$,

где Q — точка внутренней нормали к линии A_1B_1 в точке P , достаточно близкая к точке P .

Теорема 1. Если $z(\xi, \eta)$ — регулярное решение уравнения (3) в области H , $z|_{\xi=0} = 0$, коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют условию (4) и $S(\lambda_0, 1) < \kappa$, то принцип локального экстремума имеет место.

Доказательство. Пусть $z|_{\eta=\xi} = \tau(\xi)$. По условию теоремы $z(\xi, \eta)$ представимо в виде (5). Тогда

$$z(Q) - z(P) = \kappa(1-q-p)(2\varepsilon)^{1-p-q} \times \\ \times \int_{-\varepsilon-t}^{\xi^*-\varepsilon} \frac{[\tau(t) - z(P)] dt}{-\varepsilon-t)^{1-q} \cdot (\xi^* + \varepsilon - t)^{1-p}} + z(P) \cdot [I(\varepsilon) - 1] + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(Q), \quad (8)$$

где $Q(\xi^* - \varepsilon, \xi^* + \varepsilon)$ — точка нормали к линии $\eta = \xi$ в точке $P(\xi^*, \xi^*)$, $0 < \xi^* < 1$, $\varepsilon > 0$ мало.

Пользуясь гипергеометрическим интегралом и формулами преобразования для гипергеометрических функций, нетрудно убедиться в следующем представлении:

$$I(\varepsilon) = \kappa(1-p-q)(2\varepsilon)^{1-p-q} \cdot \int_0^{\xi^*-\varepsilon} (\xi^* - \varepsilon - t)^{q-1} \cdot (\xi^* + \varepsilon - t)^{p-1} dt = \\ = 1 - \kappa \cdot \left(\frac{2\varepsilon}{\xi^*}\right)^{1-p-q} + O(\varepsilon). \quad (9)$$

Из формул (8), (9), неравенств (6), (7) и условия теоремы следует $z(Q) < z(P)$. Теорема доказана.

§ 3. Определение 2. Назовем функцию $z(x, y)$ обобщенным решением класса F задачи T для уравнения (1), если:

- 1) z непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$;
- 2) z является дважды непрерывно дифференцируемым решением уравнения (1) в области D_1 ;
- 3) z является регулярным решением уравнения (1) в области D_2 , при этом выполняется условие

$$\lim_{y \rightarrow 0+0} y^{\beta_0} \cdot z_y = \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^{\beta_0} \cdot z_y, \quad 0 < x < 1;$$

- 4) выполняются начальные условия:

$$z|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l,$$

$$z|_{AC} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Теорема 2. Если выполняются условия (4), $S(\lambda_0, 1) < \kappa$ и $b(x, y) \geq 0$ в области D_1 , то решение задачи T в классе F единственно.

Доказательство теоремы очевидно из леммы 1 и теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волкодав В. Ф., Носов В. А. О единственности решения некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа с особенностью первого порядка на переходной линии. Волжский матем. сб., вып. 5, 1966.
2. Бабенко К. И. К теории уравнений смешанного типа. Докт. дисс., М., 1951.
3. Наджафов Х. М. Первая задача Коши—Гурса для одного уравнения типа Трикоми с разрывными коэффициентами на части границы области. „Изв. ВУЗов математика“ (в печати).

Кәсилән әмсаллы трикома типли бир тәнлик үчүн T мәсәләсинин јекәнә һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгалә гарышыг нөв (1) тәнлији үчүн D областында Трикоми мәсәләсинин јекәнәлијинә һәср олунмушдур. D областы $y > 0$ јарым-мүстәвисиндә јерләшән вә $y = 0$ охуна $A \rightarrow (0, 0)$, $B(1, 0)$ нөгтәләриндә сөјкәнән һамар Γ әјриси вә $y < 0$ јарыммүстәвисиндә јерләшән AC , BC характеристикалары илә мәһдудланмышдыр.

Трикоми мәсәләси (1) тәнлијинин D областында $z|_{\Gamma} = \varphi(s)$, $z|_{AC} = \psi(x)$ шәртләрини өдәјән кәсилмәз һәллинин тапылмасындан ибарәтдир.

(1) тәнлијинин D областында эллиптик олдуғу һиссәдә $\lim_{y \rightarrow 0} y^{\beta_0} \cdot z_y$ лимитинин ишарәси һаггында леммадан вә тәнлијин гиперболик олдуғу һиссәдә локал экстремум принципндән истифадә едәрәк, тәнлијин әмсаллары мүәјјән шәртләри өдәдији заман бир үмумиләшмиш функцијалар синфиндә Трикоми мәсәләсинин јекәнәлији исбат олунур.

Т. А. ХАЛИЛОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

В настоящей статье, следуя работам М. А. Наймарка и пользуясь при получении асимптотических формул для решения дифференциальных уравнений методом И. М. Рапопорта, излагаются некоторые результаты о спектре несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов 2-го порядка, порожденных одномерным дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями, зависящими от комплексного параметра с комплексной весовой функцией. Следует отметить, что несамосопряженные операторы, порождаемые обыкновенными дифференциальными выражениями и регулярными краевыми условиями, зависящими от параметра, подробно рассмотрены Я. Д. Тамаркиным [4]. М. А. Наймарк [1] исследовал спектр и разложения по собственным функциям несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора L_0 , порожденного на полуоси $R^+ = [0, \infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + p(x)y, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (1)$$

и краевым условием

$$y'(0) - \theta y(0) = 0, \quad (2)$$

где $p(x)$ комплекснозначная функция, такая, что $x^2 p(x) \in L(R^+)$ а θ — комплексное число.

Ф. Г. Максудов [3] исследовал разложение по собственным функциям оператора $L_{\theta(\lambda)}$ в случае, когда в краевых условиях (2) θ зависит от комплексного параметра λ . Случай, когда дифференциальное выражение $l(y)$ самосопряженно в смысле Лагранжа, был рассмотрен А. В. Штраусом [5].

Рассмотрим следующую краевую задачу в классе $L_2(0, \infty)$:

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n} \right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + \dots + p_n y - \lambda q y = 0, \quad (3)$$

$$U_\nu(y) = \alpha_{\nu 0}(\lambda) y(0) + \alpha_{\nu 1}(\lambda) y'(0) + \dots + \alpha_{\nu, 2n-1} y^{2n-1}(0), \quad (4)$$

$$0 \leq x < \infty.$$

Здесь $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, $q(x)$ — комплекснозначные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$, вещественной полуоси. Предположим, что $|p_0(x)| \neq 0$ в интервале $[0, \infty)$,

$\alpha_{vk}(\lambda)$ — мероморфные функции комплексного переменного λ такие, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\alpha_{vk}(\lambda) = v_k \sigma_p^{vk} \lambda^p \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]; \quad (5)$$

p — натуральное число или нуль.

Обозначим через D совокупность функций $y(x) \in L_2(0, \infty)$ таких, что:

1) квазипроизводные $y^{[v]}(x)$, $v = 1, 2, \dots, 2n-1$, существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$;

$$2) l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n} \right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + \dots + p_n y \in L_2(0, \infty).$$

Пусть λ_0 — фиксированное значение параметра λ , являющееся регулярной точкой всех функций $\alpha_{vk}(\lambda)$ одновременно. Через $D_{\alpha(\lambda_0)}$ обозначим совокупность функций y из D , удовлетворяющих условию (4) при $\lambda = \lambda_0$. Определим оператор $L_{\alpha(\lambda_0)}$ следующим образом: его область определения есть $D_{\alpha(\lambda_0)}$ и при $y \in D_{\alpha(\lambda_0)}$

$$L_{\alpha(\lambda_0)} y = l(y).$$

Пусть теперь λ — комплексный параметр, пробегающий все регулярные точки всех функций $\alpha_{vk}(\lambda)$. Тогда мы получаем семейство операторов $L_{\alpha(\lambda)}$ с областью определения $D_{\alpha(\lambda)}$, причем при $y \in D_{\alpha(\lambda)}$

$$L_{\alpha(\lambda)} y = l(y).$$

Обозначим через $D_{\alpha(\lambda)}$ множество тех функций y из $L_2(0, \infty)$, для которых $q(x)y \in L_2(0, \infty)$ и удовлетворяет условию (4). Определим оператор $Q_{\alpha(\lambda)}$ с областью определения $D_{\alpha(\lambda)}$ и при $y \in D_{\alpha(\lambda)}$, $Q_{\alpha(\lambda)} y = q(x)y$.

Рассмотрим задачу на собственные значения пары операторов $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$ в классе $L_2(0, \infty)$ с областью определения

$$D_{\alpha(\lambda)} \cap D_{Q_{\alpha(\lambda)}}.$$

Число λ называется собственным значением п. о. $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$, если в $D_{\alpha(\lambda)} \cap D_{Q_{\alpha(\lambda)}}$ существует отличный от нуля элемент g такой, что

$$L_{\alpha(\lambda)} g = \lambda Q_{\alpha(\lambda)} g,$$

при этом g называется собственным элементом п. о. $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$, соответствующим собственному значению λ . Число λ называется регулярной точкой п. о. $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$, если оператор $(L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q_{\alpha(\lambda)})^{-1}$ существует, ограничен и определен всюду в $L_2(0, \infty)$. В противном случае λ называется точкой спектра. Оператор $(L_{\alpha(\lambda)} - \lambda Q_{\alpha(\lambda)})^{-1}$ называется резольвентной п. о. $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$.

Пусть $p_n(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и пусть, кроме того, выполнены условия:

$$a) |p_n'| = O(|p_n|^\alpha) \text{ при } x \rightarrow \infty, 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n};$$

$$б) |p_n'| = O(|p_n'|) \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$в) |p_n''| = O(|p_n'|) \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$q = O(p_n^{1/n}) \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$г) |q'| |p_n|^{-1} \text{ суммируема.}$$

Тогда уравнение $l(y) = \lambda qy$ имеет $2n$ линейно независимых решений $y = y_j$ таких, что при $x \rightarrow \infty$

$$y_j = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} e^{i\xi_j} [1 + O(1)],$$

$$y_j^{[1]} = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \epsilon_j \rho e^{i\xi_j} [1 + O(1)],$$

$$y_j^{[n-1]} = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \epsilon_j^{n-1} \rho^{n-1} e^{i\xi_j} [1 + O(1)], \quad (6)$$

$$y_j^{[n]} = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{\frac{1}{2}} \epsilon_j^n \rho^n e^{i\xi_j} [1 + O(1)],$$

$$y_j^{[n+1]} = -\rho^{-\frac{2n-1}{2}} \epsilon_j^{n+1} p_0^{\frac{1}{2}} \rho^{n+1} e^{i\xi_j} [1 + O(1)],$$

$$y_j^{[2n-1]} = (-1)^{n-1} \rho^{-\frac{2n-1}{2}} \epsilon_j^{2n-1} p_0^{\frac{1}{2}} \rho^{2n-1} e^{i\xi_j} [1 + O(1)],$$

где

$$\xi = \int_{x_0}^x \rho dx = \int_{x_0}^x \sqrt{(-1)^n \frac{q - p_n}{p_0}} dx$$

и где $y_j^{[1]}, \dots, y_j^{[2n-1]}$ — квазипроизводные функций y_j .

Пусть при x достаточно большом

$$0 \leq \arg \frac{p_n}{p_0} \leq \gamma, \gamma < \pi, \quad \left| \frac{p_n'}{p_0} \right| = O\left(\left| \frac{p_n}{p_0} \right|^\alpha\right), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n}.$$

Тогда, пользуясь полученной асимптотической формулой, нетрудно показать, что $y_j \in L_2(0, \infty)$ при $j = 1, 2, \dots, n$ и $y_j \notin L_2(0, \infty)$ при $j = n+1, n+2, \dots, 2n$. Кроме того, из условий а) и в) следует, что

$$qy_j \in L_2(0, \infty), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Соответствующая собственная функция $y(x, \lambda)$ должна принадлежать $L_2(0, \infty)$ и потому может быть линейной комбинацией только функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Таким образом, должна быть

$$y(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n C_j y_j(x, \lambda),$$

причем функция $y(x, \lambda)$ должна удовлетворять условиям (4), тогда соответствующие собственные значения λ определяются из уравнений

$$A(\lambda) = 0,$$

где

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & \dots & u_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n(y_1) & \dots & u_n(y_n) \end{vmatrix}$$

В силу аналитичности $y_j, y_j^{[1]}, \dots, y_j^{[2n-1]}$ и условия (5) нули этого уравнения либо заполняют всю λ -плоскость, либо образуют счетное множество, не имеющее конечных предельных точек. Далее, учитывая, что $y_j(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$ при $j = 1, 2, \dots, n$ и $y_j(x, \lambda) \notin L_2(0, \infty)$ при $j = n+1, \dots, 2n$, и используя краевые условия (4), построим резольвенту R_λ п. о. $(L_{\alpha(\lambda)}, Q_{\alpha(\lambda)})$. Ее аналитическое выражение

$$R_\lambda f = \int_0^\infty \kappa(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi,$$

где $f(\xi)$ — финитная функция;

$$\kappa(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n y_j(x, \lambda) h_j(\xi) - \sum_{j=n+1}^{2n} y_j(x) v_j(\xi) & \text{при } x < \xi \\ \sum_{j=1}^n y_j(x, \lambda) [h_j(\xi) + v_j(\xi)] & \text{при } x > \xi; \end{cases}$$

$$h_j(x, \lambda) = - \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\Delta_{ij}}{A(\lambda)} v_j(\xi),$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} u_1(y_1) & \dots & u_1(y_{j-1}) & u_1(y_j) & u_1(y_{j+1}) & \dots & u_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n(y_n) & \dots & u_n(y_{j-1}) & u_n(y_j) & u_n(y_{j+1}) & \dots & u_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Докажем ограниченность резольвенты для всех $f(x) \in L_2(0, \infty)$. Представим ядро $\kappa(x, \xi, \lambda)$ в виде

$$\kappa(x, \xi, \lambda) = \kappa_1(x, \xi, \lambda) + \kappa_2(x, \xi, \lambda),$$

где

$$\kappa_1(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=1}^n y_j(x, \lambda) h_j(\xi),$$

$$\kappa_2(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} - \sum_{j=n+1}^{2n} y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) & \text{при } x < \xi, \\ \sum_{j=1}^n y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

Так как $y_j \in L_2(0, \infty)$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$v_j(\xi, \lambda) = (-1)^j \frac{w(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{2n})}{w(y_1, \dots, y_{2n})}$$

и $v_j(\xi, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, то $\kappa_1(x, \xi, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта, следовательно, оно определяет вполне непрерывный оператор.

Далее, пользуясь неравенствами

$$|y_j(x) v_j(\xi)| \leq C_1 e^{-c_2(x-\xi)} \quad \text{при } \xi < x,$$

$$|y_j(x) v_j(\xi)| \leq C_1 e^{-c_2(\xi-x)} \quad \text{при } \xi > x$$

и формулой (27) (см. [2] стр. 282), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \kappa_2(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right|^2 dx &= \int_0^\infty \left| \int_0^x \kappa_2(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_x^\infty \kappa_2(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right|^2 dx = \int_0^\infty \left| \int_0^x \sum_{j=1}^n y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi - \right. \\ &- \left. \int_x^\infty \sum_{j=n+1}^{2n} y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right|^2 dx \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_0^\infty \left[\int_0^x y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \int_x^\infty y_j(x, \lambda) v_j(\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \right|^2 dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left[\int_0^x |y_j(x) v_j(\xi)| |f(\xi)| d\xi + \int_x^\infty |y_j(x) v_j(\xi)| |f(\xi)| d\xi \right]^2 dx \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left[\int_0^x C_1 e^{-c_2(x-\xi)} |f(\xi)| d\xi + \int_x^\infty C_1 e^{-c_2(\xi-x)} |f(\xi)| d\xi \right]^2 dx \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left[e^{-c_2 x} \int_0^x e^{c_2 \xi} |f(\xi)| d\xi + e^{c_2 x} \int_x^\infty e^{-c_2 \xi} |f(\xi)| d\xi \right]^2 dx \leq \\ &\leq \text{const} \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < +\infty. \end{aligned}$$

Итак, ядро $\kappa_2(x, \xi, \lambda)$ порождает ограниченный интегральный оператор, определенный во всем пространстве $L_2(0, \infty)$. Тем самым нами доказана

Теорема 1. Пусть $p_n(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ и выполнены условия а) б), в), г). Пусть, кроме того, при x достаточно большом

$$0 \leq \arg \frac{p_n}{p_0} \leq \gamma, \quad \gamma < \pi,$$

$$\left| \frac{p_n}{p_0} \right|' = O\left(\left| \frac{p_n}{p_0} \right|^a\right), \quad 0 \leq a < 1 + \frac{1}{2n}.$$

Тогда, если число λ не является собственным значением п. о. $(L_{a(\lambda)}, Q_{a(\lambda)})$, то оно не принадлежит спектру этой пары операторов. Множество собственных значений или заполняет всю λ -плоскость, или же образует счетное множество, не имеющее конечных предельных точек. Для тех λ , которые не принадлежат спектру п. о. $(L_{a(\lambda)}, Q_{a(\lambda)})$, резольвента

$$R_{\lambda Q} = (L_{a(\lambda)} - \lambda Q_{a(\lambda)})^{-1}$$

является интегральным оператором с ядром $\kappa(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяющим условиям:

$$\int_0^\infty |\kappa(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty |\kappa(x, \xi, \lambda)|^2 dx < \infty.$$

В заключение автор выражает глубокую признательность научному руководителю Ф. Г. Максудову за ценные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М. А. Тр. Московского матем. об-ва, 3, 181, (1954).
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1954.
3. Максудов Ф. Г. ДАН СССР, т. 153, 1936, № 5.
4. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Пг., 1917.
5. Штраус А. В. Изв. АН СССР, серия матем., 20, 783, (1956).

Т. А. Хэлилова

Бир синиф өз-өзүнө гошма олмајан, параметрдэн асылы
дифференциал операторларын спектринин тэдиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә $l(y) = \lambda qy$ (1) тәнлијинә бахылып. Һәмин тәнлијин $x \rightarrow \infty$ олдугда (6) шәртләрини өдәјән $y_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$ һәл-ләри тапылып.

(3) дифференциал ифадәсинин вә (4) сәрһәд шәртләринин көмәји илә $(L_{a(\lambda)}, Q_{a(\lambda)})$ операторлар айләси гурулур. а), б), в), г), (7) шәрт-

лери өдәнилдикдә ($L_{\alpha(\lambda)}$, $Q_{\alpha(\lambda)}$) операторлар чүтүнүн спектринин дискретлији исбат олунур. а), б), в), г), (5) шәртлери дахилиндә көстәрилир ки, ($L_{\alpha(\lambda)}$, $Q_{\alpha(\lambda)}$) операторлар чүтүнүн мәхсуси гијмәтлери чохлауғу, ја бүтүн λ комплекс мүстәвисини долдурур, ја да сонлу лимит нөгтәси олмајан һесаби чохлауғу әмәлә кәтирир. Һәмин операторлар аиләсинин $R_{\lambda Q}$ резолвентасы λ -нын спектрә дахил олмајан бүтүн гијмәтлери үчүн $\kappa(x, \xi, \lambda)$ нүвәси

$$\int_0^{\infty} |\kappa(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < \infty, \quad \int_0^{\infty} |\kappa(x, \xi, \lambda)|^2 dx < \infty$$

шәртләрини өдәјән мәһдуд интеграл оператордур.

К. С. АХВЕРДИЕВ, А. К. НИКИТИН

ОБ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА В ДЛИННОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В статье рассматривается осесимметричное установившееся течение вязкого газа в длинной круглой трубе постоянного сечения. Процесс предполагается изотермическим. Решение нелинейной системы уравнений ищется в виде рядов по целым положительным степеням малого параметра: $\varepsilon = r_0/l$, где r_0 — радиус трубы, l — длина трубы. Так как, начиная с членов второго порядка относительно ε , решение приобретает громоздкий вид, ограничимся членами первого порядка включения относительно этого параметра. Определяются поле скоростей и давлений, устанавливается условие существования изотермического давления. При $\varepsilon \leq 10^{-6}$ решение справедливо для чисел Рейнольдса $Re < 200$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившееся течение вязкого газа в прямолинейной трубе постоянного сечения. Направим ось z цилиндрической системы координат по оси трубы и будем считать трубу достаточно длинной, а трехмерный поток изотермическим. В такой постановке, как известно, задача сводится к совместному решению уравнений Навье—Стокса, записанных в цилиндрической системе координат.

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\} - \frac{2\mu}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad (1,1)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\varphi}{r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{2}{3r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \right\} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right); \quad (1,2)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right\}. \quad (1,3)$$

Уравнение неразрывности

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (1,4)$$

и уравнения состояния

$$P = \rho RT \quad (1,5)$$

при граничных условиях:

$$v_r(r, \varphi, z) = 0, v_\varphi(r, \varphi, z) = 0, v_z(r, \varphi, z) = 0 \quad (\text{при } r = r_0); \quad (1,6)$$

v_r, v_φ, v_z (при $r = 0$) — ограниченные функции. Предполагается, что в начальном и конечном сечении трубы давление известно:

$$\begin{aligned} P &= P_* & \text{при } z = 0, \\ P &= P_{**} & \text{при } z = l. \end{aligned} \quad (1,7)$$

Будем считать движение осесимметричным, т. е. положим $v_r = v_r(r, z)$, $v_z = v_z(r, z)$, $v_\varphi = 0$. Так как поток изотермический, то $\mu = \text{const}$, $T = \text{const}$. Тогда система уравнений (1,1) — (1,4) и граничные условия (1,6) примут вид:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} + \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{4}{3} \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right); \quad (1,8)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \frac{\mu}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{4}{3} \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}; \quad (1,9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + v_k \frac{\partial \rho}{\partial r} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0; \quad (1,10)$$

$$v_r(r, z) = 0, v_z(r, z) = 0 \quad \text{при } r = r_0; \quad (1,11)$$

$v_r(r, z), v_z(r, z) = 0$ при $r = 0$ — ограниченные функции. Уравнение (1,5) и граничные условия (1,7) останутся без изменения.

Перейдем к безразмерным переменным, положив

$$r = r_0 r'; \quad z = l \cdot z'; \quad v_r = u \cdot v_r'; \quad v_z = u v_z'; \quad \rho = \rho^* \rho'; \quad P = P^* P',$$

где r_0 — радиус трубы, l — длина трубы, u — средняя скорость газового потока, $P^* = \rho^* RT$. Тогда, отбрасывая штрихи у безразмерных параметров, уравнения (1,8), (1,9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Re \left(\varepsilon^2 \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \varepsilon^2 \rho v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) &= - A \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{3} \varepsilon \frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} + \\ &+ \frac{4}{3} \varepsilon \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (1,12)$$

$$\begin{aligned} Re \left(\varepsilon \rho v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \varepsilon \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= A_1 \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial z} + \\ &+ \frac{1}{3} \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{4}{3} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r}; \end{aligned} \quad (1,13)$$

$P = \rho$.
Здесь

$$Re = \frac{\rho^* u \cdot r_0}{\mu}; \quad M = \frac{u}{RT}; \quad A = \frac{Re}{M^2}; \quad A_1 = \frac{Re}{M^2} \cdot \varepsilon.$$

Граничные условия (1,11) запишутся в такой форме:

$$v_r(r, z) = 0, v_z(r, z) = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad (1,15)$$

$v_r(r, z), v_z(r, z)$ при $r = 0$ — ограниченные функции. Граничные условия (1,7) и уравнение (1,10) останутся без изменения. Уравнение (1,10) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho v_z) = 0. \quad (1,10^*)$$

Вводим функцию тока $\Psi(r, z)$, положив

$$r \rho v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad r \rho v_z = - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (1,16)$$

Подставляя (1,16) в уравнения (1,12), (1,13) и в граничные условия (1,15), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} Re \left\{ \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \varepsilon^2 \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} &= \\ = - A \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{1}{3} \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{4}{3} \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \right. & \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \frac{1}{r^3 \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} + \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\}; \end{aligned} \quad (1,17)$$

$$\begin{aligned} Re \left\{ \varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \varepsilon \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} &= \\ = - A_1 \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} + & \\ + \frac{4}{3} \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + & \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1,18)$$

и к граничным условиям

$$\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1; \quad (1,19)$$

$$\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \frac{1}{r \rho} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \text{при } r = 0 \text{ — ограниченные функции.}$$

Будем искать решение системы уравнений (1,16), (1,17), (1,18) в виде рядов по степеням:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots \\ \rho &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \dots \\ v_r &= v_{r0} + \varepsilon v_{r1} + \varepsilon^2 v_{r2} + \dots \\ v_z &= v_{z0} + \varepsilon v_{z1} + \varepsilon^2 v_{z2} + \dots \end{aligned} \quad (1,20)$$

Подставляя (1,20) в систему уравнений (1,16), (1,17), (1,18) и граничные условия (1,19) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , причем к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial r} = 0; \quad A_1 \cdot \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^3};$$

$$v_{r_0} \cdot \rho_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z}; \quad v_{z_0} \cdot \rho_0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r}; \quad (1,21)$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=1;$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=0; \quad (1,22)$$

$$A \rho_0^3 \frac{\partial \rho_1}{\partial r} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{r^2} \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} \right) -$$

$$- \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r} \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^2} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} +$$

$$+ \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^2 \partial z}; \quad (1,23)$$

$$Re \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \rho_0^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \rho_0 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r \partial z} \right) \Big\} = -A_1 \rho_0^3 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} -$$

$$- 3A_1 \rho_0^3 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \cdot \rho_1 - \frac{1}{r^3} \rho_0^2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - \frac{2}{r^3} \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \cdot \rho_1 - \frac{1}{r^2} \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} +$$

$$+ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \cdot \rho_0 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{2}{r^2} \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \cdot \rho_1 + \frac{1}{r} \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \rho_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} +$$

$$+ \frac{2}{r^2} \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \cdot \rho_1 + \frac{1}{r} \rho_0 \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \rho_0^2 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial r^3} - \frac{2}{r} \rho_0 \frac{\partial^3 \Psi_0}{\partial r^3} \cdot \rho_1;$$

$$\rho_1 \cdot v_{r_0} + \rho_0 v_{r_1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}; \quad \rho_1 u_{z_0} + \rho_0 v_{z_1} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r}.$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=1;$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r=0. \quad (1,24)$$

При решении задачи ограничимся членами первого порядка относительно ε . Указанным разложением по степеням ε можно будет пользоваться, по крайней мере, для значений числа Рейнольдса $Re \leq 200$, если ε не превышает значений $\varepsilon = 10^{-6}$.

§ 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Найдем решение системы уравнений (1,21), удовлетворяющее граничным условиям (1,22). Из первого уравнения системы (1,21) видно, что ρ_0 есть функция только z , т. е. $\rho_0 = \varphi(z)$. Подставляя ρ_0 во второе уравнение системы (1,21) и преобразуя последнее, получим

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right) = -A_1 \varphi(z) \frac{d\varphi(z)}{dz} \cdot r.$$

Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \right) =$$

$$= -A_1 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} \frac{r^2}{2} + \varphi_1(z).$$

Разделив обе части этого уравнения на r и интегрируя, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = A_1 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} \frac{r^2}{4} + \varphi_1(z) \ln r + \varphi^2(z). \quad (2,1)$$

Из граничных условий (1,22) следует, что $\varphi_1(z) = 0$. Умножая (2,1) на r и интегрируя по r_1 получим

$$\Psi_0 = -A_1 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} \frac{r^4}{16} + \varphi_2(z) \frac{r^2}{2} + \varphi_3(z). \quad (2,2)$$

Из граничных условий (1,22) следует, что

$$\varphi_3'(z) = 0, \quad A_1 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} \cdot \frac{1}{4} - \varphi_2'(z) = 0. \quad (2,3)$$

$$A_1 \frac{d^2}{dz^2} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} \frac{1}{16} + \frac{\varphi_2'(z)}{2} = 0.$$

Из первого уравнения системы (2,3) видно, что $\varphi_3(z) = \text{const}$, а из второго и третьего уравнений, исключив функцию $\varphi_2(z)$, получил

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{\varphi^2(z)}{2} \right\} = \frac{a}{2},$$

где a — постоянная интегрирования. Интегрируя, находим $\varphi(z) = \sqrt{az + b}$, где b — постоянная интегрирования. Подставляя значение $\varphi(z)$ во второе уравнение системы (1,3), определим функцию $\varphi_2(z)$:

$$\varphi_2(z) = -\frac{aA_1}{8}.$$

Итак, для нулевого приближения окончательно имеем:

$$\Psi_0 = \frac{aA_1}{16} \left(\frac{r^4}{2} - r^2 \right) + \text{const}; \quad v_{r_0} = 0; \quad (2,4)$$

$$v_{z_0} = \frac{aA_1(r^2 - 1)}{8\sqrt{az + b}}; \quad \rho_0 = \sqrt{az + b}.$$

§ 3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Найдем решение уравнений (1,23), удовлетворяющее граничным условиям (1,24). Первое уравнение системы (1,23) с учетом (2,4) примет вид

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial r} = -\frac{a^2 A_1 \cdot r}{24A(az + b)\sqrt{az + b}}. \quad (4,1)$$

Интегрируя уравнение (3,1) по r , получим

$$\rho_1 = -\frac{a^2 A_1 \cdot r^2}{48A(az + b)\sqrt{az + b}} + \Phi(z). \quad (3,2)$$

Второе уравнение системы (1,23) с учетом (2,4) и (3,2) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial r^2} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right) = \frac{Re a^3 A_1^2 \cdot r^5}{128 (az+b)} - \frac{Re a^3 A_1^2 \cdot r^3}{64 (az+b)} +$$

$$+ \frac{Re a^3 A_1^2 \cdot r}{128 (az+b)} - \frac{A_1}{az+b} \left[\frac{d}{dz} \{ (az+b) \sqrt{az+b} \Phi(z) \} \right] \cdot r +$$

$$+ \frac{a A_1 \sqrt{az+b} \Phi(z) \cdot r}{az+b} + \frac{a^3 A_1^2 \cdot r^3}{96 A (az+b)^2} - \frac{a^3 A_1^2 \cdot r}{96 A (az+b)^2} \quad (3,3)$$

Интегрируя (3,3) три раза по r , найдем

$$\Psi_1 = \frac{Re a^3 A_1^2}{4608 (az+b)} \cdot \frac{r^6}{8} - \frac{Re a^3 A_1^2}{1024 (az+b)} \cdot \frac{r^6}{6} + \frac{Re a^3 A_1^2}{512 (az+b)} \cdot \frac{r^4}{4} -$$

$$- \frac{A_1}{4 (az+b)} \left[\frac{d}{dz} \{ (az+b) \sqrt{az+b} \Phi(z) \} \right] \frac{r^4}{4} +$$

$$+ \frac{a A_1 \sqrt{az+b} \Phi(z) r^4}{4 (az+b)} + \frac{a^3 A_1^2}{1536 \cdot A (az+b)} \cdot \frac{r^6}{6} -$$

$$- \frac{a^3 A_1^2}{384 A (az+b)^2} \cdot \frac{r^4}{4} + \Phi_2(z) + \Phi_3(z). \quad (3,4)$$

Для определения функций $\Phi(z)$, Φ_2 , Φ_3 на основании граничных условий (1,24) получится система уравнений, разрешая которую найдем:

$$\Phi_2(z) = - \frac{Re a^2 A_1^2}{4608 (az+b)} + \frac{a A_1^2}{4608 A (az+b)^2} + C_1. \quad (3,5)$$

$$\Phi(z) = \frac{Re a^2 A_1 \ln(az+b)}{246 A \sqrt{az+b}} + \frac{a^2 A_1}{144 \sqrt{(az+b)^3}} +$$

$$+ \frac{4 C_1 z}{A_1 \sqrt{az+b}} + \frac{C_2}{\sqrt{az+b}}. \quad (3,6)$$

Из формул (3,2) и (3,6) находим

$$\rho_1 = - \frac{a^2 A_1 r^2}{48 A (az+b) \sqrt{az+b}} + \frac{Re a^2 A_1 \ln(az+b)}{256 \sqrt{az+b}} +$$

$$+ \frac{a^2 A_1}{144 A (az+b) \sqrt{az+b}} + \frac{4 C_1 z}{A_1 \sqrt{az+b}} + \frac{C_3}{\sqrt{az+b}}. \quad (3,7)$$

Из (3,7) видно, что ρ_1 в любом сечении трубы имеет параболическую зависимость от r . Отсюда следует, что и в сечениях $z=0$ и $z=l$ эта зависимость должна быть параболической. Только при этих условиях возможно изотермическое движение вязкого газа в круглой трубе.

Зная φ_1 и ρ_1 , из третьего уравнения системы (1, 23) и формул (3,4) и (3,7) легко получаем:

$$v_{r_1} = \frac{1}{\sqrt{az+b}} \left[- \frac{Re a^4 A_1^2}{4608 (az+b)^2} \cdot \frac{r^7}{8} - \left\{ \frac{Re a^4 A_1^2}{1024 (az+b)^2} - \frac{a^4 \cdot A_1^2}{768 (Pz+b)^3} \right\} \cdot \frac{r^5}{6} - \left\{ \frac{Re a^4 A_1^2}{1024 (az+b)^2} - \frac{a^4 A_1^2}{576 A (az+b)^3} + C \right\} \times$$

$$\times \frac{r^3}{4} + \left\{ \frac{Re a^4 A_1^2}{4608 (az+b)^2} - \frac{a^4 A_1^2}{2304 (az+b)^3} + C_1 \right\} \frac{r}{2} \right];$$

$$v_{z_1} = \frac{1}{\sqrt{az+b}} \left[- \frac{Re a^3 A_1^2 r^6}{4608 (az+b)} - \left\{ \frac{a^3 A_1^2}{1536 (az+b)^2} - \right. \right. \quad (3,8)$$

$$- \frac{Re a^3 A_1^2}{1024 (az+b)} \left. \right\} \cdot r^4 + \left\{ \frac{a^3 A_1^2}{1152 A (az+b)^2} - \frac{Re a^3 A_1^2}{1024 (az+b)} + \right.$$

$$+ C_1 \left. \right\} \cdot r^2 - \left\{ \frac{a^3 A_1^2}{4608 A (az+b)^2} - \frac{Re a^3 A_1^2}{4608 (az+b)} + C_1 \right\} +$$

$$+ \frac{a^3 A_1^2 (r^2-1) r^2}{384 (az+b)^2} - \frac{Re a^3 A_1^2 \ln(az+b) (r^2-1)}{2048 (az+b)} -$$

$$- \frac{a^3 A_1^2 (r^2-1)}{1152 (az+b)^2} - \frac{a C_1 z (r^2-1)}{2 (az+b)} - \frac{a A_1 (r^2-1)}{8 (az+b)} \left. \right].$$

Перейдя к размерным величинам для скоростей и давлений, получим следующие выражения:

$$v_r = u \frac{r_0}{l} \left(v_{r_0} + \frac{r_0}{l} v_{r_1} + \dots \right);$$

$$v_z = u \left(v_{z_0} + \frac{r_0}{l} v_{z_1} + \dots \right); \quad (3,9)$$

$$P = p^* RT \left(p_0 + \frac{r_0}{l} p_1 + \dots \right). \quad (3,9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа, ГИТТЛ. М., 1957.

К. С. Нагвердијев, А. К. Никитин

Өзлү газын даирэви узун боруда изотермик һәрәкәти

ХҮЛАСӘ

Ен кәсији сабит олан узун даирэви боруда өзлү газын оха көрә симметрик гәрарлашмыш һәрәкәтинә бахылыр. Просесин изотермик олдуғу фәрз олунур. Гејри-хәтти тәнликләр системинин һәлли $\epsilon = r_0/l$ параметринин дәрәчәләринә көрә сыра шәклиндә ахтарылыр. r_0 —борунун радиусу, l —борунун узунлуғудур. Белә ки, икинчи дәрәчәсиндән башлајараг һәлл мурәккәб характерли олдуғундан бу параметрин биринчи дәрәчәси илә кифајәтләнилир. Сүр'әтләр вә тәзјигләр мејданы тәјјин едиләрәк изотермик һәрәкәтин варлығы мурәјјәнләширилир.

$\epsilon = 10^{-6}$ олан һалда һәлл Рејнолдс әдәдинин $Re \leq 200$ гијмәти үчүн доғрудур.

И. И. ВОРОВИЧ, В. С. САЛМАНОВ

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

В настоящее время ведется интенсивная работа по анализу метода Кирхгофа и его уточнений в основном в двух направлениях. Первое направление—точное решение трехмерных задач. Сюда можно отнести работы [1, 2, 4], в которых уравнения теории упругости с учетом малости одного из параметров (толщины пластин) решаются асимптотическими методами. В работе [2] построены первый и второй итерационные процессы решения уравнений, но эти решения не эффективны, так как не дают численных результатов. В работе [1] разработан эффективный метод решения таких задач.

Во втором направлении ведутся поиски новых гипотез, более точных, чем в теории Кирхгофа, которые позволили бы точнее удовлетворить граничные условия на плоских гранях.

Настоящая работа относится ко второму направлению. Здесь на основании вариационного уравнения Лагранжа и метода неопределенных множителей выводятся основные уравнения и граничные условия для изгиба пластин. Решение полученной системы дифференциальных уравнений удовлетворяет точно граничным условиям на плоских гранях плиты, что выгодно отличает настоящий вариант уравнений от имеющихся.

Рассмотрим цилиндрическую плиту толщиной $2h$, у которой на параллельных гранях заданы условия:

$$\left. \begin{aligned} W_x + U_z &= \frac{1}{\mu} F_1, \\ W_y + V_z &= \frac{1}{\mu} F_2, \\ W_z + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (U_x + V_y) &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} F_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а на боковой поверхности действуют напряжения X_z , Y_z , Z_z . Требуется, используя вариационное уравнение Лагранжа, вывести основные уравнения и граничные условия для изгиба плиты. Перемещения ищут в форме

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^N U_k(x, y) z^{2k+1}, \\ V &= \sum_{k=0}^N V_k(x, y) z^{2k+1}, \\ W &= \sum_{k=0}^N W_k(x, y) z^{2k}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где λ , μ —коэффициенты Ляме.

В дальнейшем ограничимся случаем $N = 2$, тогда (2) получит следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 z + U_1 z^3 + U_2 z^5, \\ V &= V_0 z + V_1 z^3 + V_2 z^5, \\ W &= W_0 + W_1 z^2 + W_2 z^4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Составим вариационное уравнение Лагранжа:

$$\delta A_1 + \delta A_2 + \delta A_3 - \delta U = 0, \quad (4)$$

где δA_1 , δA_2 —вариации работы внешних сил на параллельных плоскостях, а δA_3 —вариация работы внешних сил на боковой поверхности; δU —вариация потенциальной энергии;

$$U = \iiint W^* dx dy dz, \quad (5)$$

$$2W^* = \lambda \Delta_1^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \mu (e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2), \quad (6)$$

где

$$\Delta_1 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz},$$

$e_{xx}, \dots, e_{xy}, \dots$ —компоненты деформации, вычисляемые по формулам Коши:

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} = z U_{0x} + z^3 U_{1x} + z^5 U_{2x}, \\ e_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} = z V_{0y} + z^3 V_{1y} + z^5 V_{2y}, \\ e_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} = 2z W_1 + 4z^3 W_2, \\ e_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = V_{0x} z + V_{1x} z^3 + V_{2x} z^5 + \\ &\quad + U_{0y} z + U_{1y} z^3 + U_{2y} z^5, \\ e_{xz} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = W_{0x} + W_{1x} z^2 + W_{2x} z^4 + \\ &\quad + U_{0x} + 3z^2 U_{1x} + 5z^4 U_{2x}, \\ e_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} = W_{0y} + W_{1y} z^2 + W_{2y} z^4 + \\ &\quad + V_{0y} + 3z^2 V_{1y} + 5z^4 V_{2y}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Теперь вычислим вариации работ внешних сил:

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \delta A_2 = \iint [F_1 (h \delta U_0 + h^3 \delta U_1 + h^5 \delta U_2) + \\ &\quad + F_2 (h \delta V_0 + h^3 \delta V_1 + h^5 \delta V_2) + F_3 (\delta W_0 + \\ &\quad + h^2 \delta W_1 + h^4 \delta W_2)] dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta A_3 = \iint [X_v (z \delta U_0 + z^3 \delta U_1 + z^5 \delta U_2) + \\ + Y (z \delta V_0 + z^3 \delta V_1 + z^5 \delta V_2) + Z_v (\delta W_0 + z^2 \delta W_1 + z^4 \delta W_2)] d\Sigma = \\ = \int (S_1 \delta U_0 + S_2 \delta U_1 + S_3 \delta U_2 + S_4 \delta V_0 + S_5 \delta V_1 + S_6 \delta V_2 + \\ + S_7 \delta W_0 + S_8 \delta W_1 + S_9 \delta W_2) dL, \quad (9)$$

где

$$S_1 = \int_{-h}^h X_v z dz; \quad S_2 = \int_{-h}^h X_v z^3 dz; \quad S_3 = \int_{-h}^h X_v z^5 dz; \\ S_4 = \int_{-h}^h Y_v z dz; \quad S_5 = \int_{-h}^h Y_v z^3 dz; \quad S_6 = \int_{-h}^h Y_v z^5 dz; \quad (10) \\ S_7 = \int_{-h}^h Z_v dz; \quad S_8 = \int_{-h}^h Z_v z^2 dz; \quad S_9 = \int_{-h}^h Z_v z^4 dz.$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, умножим каждое из уравнений (1) на некоторую произвольную функцию $\lambda_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) и, взяв их вариации, проинтегрируем полученные выражения в области Ω . После этого вычтем его из вариационного уравнения (4), используя формулу Грина и приравняв коэффициенты при одинаковых независимых вариациях, получаем систему двенадцати дифференциальных уравнений и граничные условия для определения неизвестных функций U_j, V_j, W_j ($j = 0, 1, 2$) и $\lambda_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$). В полученные уравнения вместо U_0, V_0 подставим

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{\mu} F_1 - W_{0x} - h^2 W_{1x} - h^4 W_{2x} - 3h^2 U_1 - 5h^4 U_2, \\ V_0 &= \frac{1}{\mu} F_2 - W_{0y} - h^2 W_{1y} - h^4 W_{2y} - 3h^2 V_1 - 5h^4 V_2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и исключим λ_1, λ_2 .

Тогда получим восемь уравнений с соответствующими граничными условиями относительно неизвестных функций $W_0, W_1, W_2, \lambda_3, U_1, U_2, V_1, V_2$:

$$2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3} \Delta^2 W_0 + \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3} \Delta^2 - 4\lambda \frac{h^3}{3} \Delta \right] W_1 + \\ + \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{3} \Delta^2 - 8\lambda \frac{h^5}{5} \Delta \right] W_2 + 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} \Delta \theta + \\ + \frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^7 \Delta \theta_1 + \frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu} \Delta \lambda_3 = F_1^*, \quad (12)$$

$$\left\{ 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{3} \Delta^2 - 4\lambda \frac{h^3}{3} \Delta \right\} W_0 + \left\{ 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{3} \Delta^2 - 8 \frac{h^5}{3} \left(\lambda + \frac{2\mu}{5} \right) \Delta + 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3} \right\} W_1 + \\ + \left\{ 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{3} \Delta^2 - \frac{4}{105} h^7 (77\lambda + 32\mu) \Delta + 16(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} \right\} W_2 - \\ - \left\{ 16(\lambda + \mu) \frac{h^5}{5} - 8 \frac{h^5}{5} (\lambda + 2\mu) \Delta \right\} \theta + \\ + \left\{ \frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^9 \Delta - \frac{128}{21} (\lambda + \mu) h^7 \right\} 1 + \left(\frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} - 2h \right) \lambda_3 = F_2^*, \quad (13)$$

$$8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} \Delta \alpha W_0 + \left[8(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{5} \Delta \alpha - 16 \frac{h^5}{5} (\lambda + \mu) \alpha \right] W_1 + \\ + \left[8(\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{5} \Delta \alpha - \frac{128}{35} (\lambda + \mu) h^7 \alpha \right] W_2 + \left[\frac{136}{35} (\lambda + 2\mu) \right] h^7 \alpha^2 + \\ + \frac{136}{35} \mu h^7 \beta^2 - 48 \mu \frac{h^5}{5} U_1 + \left[\frac{464}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 \alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{464}{63} \mu h^9 \beta^2 - 128 \mu \frac{h^7}{7} \right] U_2 + \frac{136}{35} (\lambda + \mu) h^7 \alpha \beta V_1 + \\ + \frac{464}{63} (\lambda + \mu) h^9 \alpha \beta V_2 + 2 \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \alpha \lambda_3 = F_3^*, \quad (14)$$

$$8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} \Delta \beta W_0 + \left[8(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{5} \Delta \beta - 16 \frac{h^5}{5} (\lambda + \mu) \beta \right] W_1 + \\ + \left[8(\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{5} \Delta \beta - \frac{128}{35} (\lambda + \mu) h^7 \beta \right] W_2 + \left[\frac{136}{35} (\lambda + 2\mu) h^7 \beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{136}{35} \mu h^7 \alpha^2 - 48 \mu \frac{h^5}{5} \right] V_1 + \left[\frac{464}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 \beta^2 + \frac{464}{63} \mu h^9 \alpha^2 - \right. \\ \left. - 128 \mu \frac{h^7}{7} \right] V_2 + \frac{136}{35} (\lambda + \mu) h^7 \alpha \beta U_1 + \frac{464}{63} (\lambda + \mu) h^9 \alpha \beta U_2 + \\ + 2 \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \beta \lambda_3 = F_4^*, \quad (15)$$

$$\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^7 \Delta \alpha W_0 + \left[\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^9 \Delta \alpha - \frac{128}{21} (\lambda + \mu) h^7 \alpha \right] W_1 + \\ + \left[\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^{11} \Delta \alpha - \frac{64}{9} (\lambda + \mu) h^9 \alpha \right] W_2 + \left[\frac{464}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 \alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{464}{63} \mu h^9 \beta^2 - 128 \mu \frac{h^7}{7} \right] U_1 + \left[\frac{3232}{231} (\lambda + 2\mu) h^{11} \alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{3232}{231} \mu h^{11} \beta^2 - \frac{320}{9} \mu h^9 \right] U_2 + \frac{464}{63} (\lambda + \mu) h^9 \alpha \beta V_1 + \\ + \frac{3232}{231} (\lambda + \mu) h^{11} \alpha \beta V_2 + 4 \frac{\lambda h^5}{\lambda + 2\mu} \alpha \lambda_3 = F_5^*, \quad (16)$$

$$\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^7 \Delta \beta W_0 + \left[\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^9 \Delta \beta - \frac{128}{21} (\lambda + \mu) h^7 \beta \right] W_1 + \\ + \left[\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^{11} \Delta \beta - \frac{64}{9} (\lambda + \mu) h^9 \beta \right] W_2 + \left[\frac{464}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 \beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{464}{63} \mu h^9 \alpha^2 - 128 \mu \frac{h^7}{7} \right] V_1 + \left[\frac{3232}{231} (\lambda + 2\mu) h^{11} \beta^2 + \right. \\ \left. + \frac{3232}{231} \mu h^{11} \alpha^2 - \frac{320}{9} \mu h^9 \right] V_2 + \frac{464}{63} (\lambda + \mu) h^9 \alpha \beta U_1 + \\ + \frac{3232}{231} (\lambda + \mu) h^{11} \alpha \beta U_2 + 4 \frac{\lambda h^5}{\lambda + 2\mu} \beta \lambda_3 = F_6^*, \quad (17)$$

$$\left[2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{3} \Delta^2 - 8\lambda \frac{h^5}{5} \Delta \right] W_0 + \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{3} \Delta^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& -4(77\lambda + 32\mu) \frac{h^7}{105} \Delta + 16(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} \Big] W_1 + \left[2(\lambda + 2\mu) \frac{h^{11}}{3} \Delta^2 - \right. \\
& \left. - \frac{144}{45} \lambda \Delta h^9 + 32(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{7} \right] W_2 + \left[8 \frac{h^9}{5} (\lambda + 2\mu) \Delta - \right. \\
& \left. - \frac{128}{35} (\lambda + \mu) h^7 \right] \theta + \left[\frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^{11} \Delta - \right. \\
& \left. - \frac{64}{9} (\lambda + \mu) h^9 \right] \theta_1 + \left(\frac{\lambda h^5}{\lambda + 2\mu} \Delta - 4h^3 \right) \lambda_3 = F_7^*, \quad (18) \\
& \frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu} \Delta W_0 + \left(\frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \Delta - 2h \right) W_1 + \left(\frac{\lambda h^5}{\lambda + 2\mu} - 4h^3 \right) W_2 + \\
& + 2 \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \theta + 4 \frac{\lambda h^5}{\lambda + 2\mu} \theta_1 = F_8^* - \frac{1}{\lambda + 2\mu} F_3, \quad (19)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_1^* &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3\mu} (F_{1xxx} + F_{2yyy} + F_{1xyy} + F_{2xxy}) + \\
&+ 2h(F_{1x} + F_{2y}) + 2F_3, \\
F_2^* &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{3\mu} (F_{1xxx} + F_{2yyy} + F_{1xyy} + F_{2xxy}) + \\
&+ 2 \frac{h^3}{3} \left(2 \frac{\lambda}{\mu} + 5 \right) (F_{1x} + F_{2y}) + 2h^2 F_3, \\
F_3^* &= 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5\mu} F_{1xx} + 8\lambda \frac{h^5}{5\mu} F_{2xy} + \\
&+ 8 \frac{h^5}{5} (F_{1yy} + F_{2xy}), \\
F_4^* &= 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5\mu} F_{1yy} + 8\lambda \frac{h^5}{5\mu} F_{2xy} + 8 \frac{h^5}{5} \times \\
&\times (F_{1xx} + F_{2xy}), \\
F_5^* &= \frac{64}{21\mu} (\lambda + 2\mu) h^7 F_{1xx} + \frac{64}{21} \frac{\lambda}{\mu} h^7 F_{2xy} + \\
&+ \frac{64}{21} h^7 (F_{1yy} + F_{2xy}), \\
F_6^* &= \frac{64}{21\mu} (\lambda + 2\mu) h^7 F_{1yy} + \frac{64}{21} \frac{\lambda}{\mu} h^7 F_{2xy} + \\
&+ \frac{64}{21} h^7 (F_{1xx} + F_{2xy}), \\
F_7^* &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{3\mu} (F_{1xxx} + F_{2yyy} + F_{2xxy} + F_{1xyy}) + \\
&+ 2 \frac{h^5}{5} \left(\frac{4\lambda}{\mu} + 9 \right) (F_{1x} + F_{2y}) + 2h^4 F_3, \\
F_8^* &= \frac{\lambda h}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{\mu} F_{1x} + \frac{1}{\mu} F_{2y} \right) - \frac{1}{\lambda + 2\mu} F_3,
\end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}; \quad \theta = \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}; \quad \alpha = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3} (W_{0xx} + h^2 W_{1xx} + h^4 W_{2xx}) l + \\
& + 2\lambda \frac{h^3}{3} (W_{0yy} + h^2 W_{1yy} + h^4 W_{2yy}) l + 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} U_{1x} l + \\
& + \frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^7 U_{2x} l + 8\lambda \frac{h^5}{5} U_{1y} l + \frac{64}{21} \lambda h^7 V_{2y} l - 4\lambda \frac{h^3}{3} W_1 l - \\
& - 8\lambda \frac{h^5}{5} W_2 l + 4\mu \frac{h^3}{3} (W_{0xy} + h^2 W_{1xy} + h^4 W_{2xy}) m + \\
& + 8\mu \frac{h^5}{5} (V_{1x} + U_{1y}) m + \frac{64}{21} \mu h^7 (V_{2x} + U_{2y}) m + \\
& + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 l = \Phi_1 - S_1, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3} (W_{0yy} + h^2 W_{1yy} + h^4 W_{2yy}) m + \\
& + 2\lambda \frac{h^3}{3} (W_{0xx} + h^2 W_{1xx} + h^4 W_{2xx}) m + 8(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} V_{1y} m + \\
& + \frac{64}{21} (\lambda + 2\mu) h^7 V_{2y} m + 8\lambda \frac{h^5}{5} U_{1y} m + \frac{64}{21} \lambda h^7 U_{2y} m - \\
& - 4\lambda \frac{h^3}{3} W_1 m - 8\lambda \frac{h^5}{5} W_2 m + 4\mu \frac{h^3}{3} (W_{0xy} + h^2 W_{1xy} + h^4 W_{2xy}) l + \\
& + 8\mu \frac{h^5}{5} (V_{1x} + U_{1y}) l + \frac{64}{21} \mu h^7 (V_{2x} + U_{2y}) l + \\
& + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 m = \Phi_2 - S_4, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16\mu \frac{h^5}{15} (W_{1x} l + W_{1y} m) + \frac{128}{105} h^7 \mu (W_{2x} l + W_{2y} m) + \\
& + 16\mu \frac{h^5}{5} (U_1 l + V_1 m) + \frac{128}{21} \mu h^7 (U_2 l + V_2 m) = h^2 S_7 - S_8 + \Phi_3, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} (W_{0xx} + h^2 W_{1xx} + h^4 W_{2xx}) l + 2\lambda \frac{h^5}{5} (W_{0yy} + \\
& + h^2 W_{1yy} + h^4 W_{2yy}) l + 4\mu \frac{h^5}{5} (W_{0xy} + h^2 W_{1xy} + h^4 W_{2xy}) m + \\
& + \frac{32}{35} (\lambda + 2\mu) h^7 U_{1x} l + 16(\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{9} U_{2x} l + \frac{32}{35} \lambda h^7 V_{1y} l + \\
& + 16\lambda \frac{h^9}{9} V_{2y} l - 4\lambda \frac{h^5}{5} W_1 l - 8\lambda \frac{h^7}{7} W_2 l + \frac{32}{35} \mu h^7 (V_{1x} + U_{1y}) m + \\
& + 16\mu \frac{h^9}{9} (U_{2y} + V_{2x}) m + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 l = \Phi_4 - S_2, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5} (W_{oyy} + h^2 W_{lyy} + h^4 W_{2yy}) m + 2\lambda \frac{h^5}{5} (W_{oxx} + \\
& + h^2 W_{lxx} + h^4 W_{2xx}) m + 4\mu \frac{h^5}{5} (W_{oxy} + h^2 W_{lxy} + h^4 W_{2xy}) l + \\
& + \frac{32}{35} (\lambda + 2\mu) h^7 V_{ly} m + 16 (\lambda + 2\mu) \frac{h^9}{9} V_{2y} m + \frac{32}{35} \lambda h^7 U_{lx} m + \\
& + 16\lambda \frac{h^9}{9} U_{2x} m - 4\lambda \frac{h^5}{5} W_1 m - 8\lambda \frac{h^7}{7} W_2 m + \frac{32}{35} \mu h^7 (V_{lx} + U_{ly}) l + \\
& + 16\mu \frac{h^9}{9} (U_{2y} + V_{2x}) l + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 m = \Phi_5 - S_5, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{7} (W_{oxx} + h^2 W_{lxx} + h^4 W_{2xx}) l + 2\lambda \frac{h^7}{7} (W_{oyy} + \\
& + h^2 W_{lyy} + h^4 W_{2yy}) l + 4\mu \frac{h^7}{7} (W_{oxy} + h^2 W_{lxy} + h^4 W_{2xy}) m + \\
& + \frac{40}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 U_{lx} l + \frac{96}{77} (\lambda + 2\mu) h^{11} U_{2x} l + \frac{40}{63} \lambda h^9 V_{ly} l + \\
& + \frac{96}{77} \lambda h^{11} V_{xy} l - 4\lambda \frac{h^7}{7} W_1 l - 8\lambda \frac{h^9}{9} W_2 l + \frac{40}{63} \mu h^9 (V_{lx} + U_{ly}) m + \\
& + \frac{96}{77} \mu h^{11} (U_{2y} + V_{2x}) m + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 l = \Phi_6 - S_3, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{7} (W_{oyy} + h^2 W_{lyy} + h^4 W_{2yy}) m + 2\lambda \frac{h^7}{7} (W_{oxx} + \\
& + h^2 W_{lxx} + h^4 W_{2xx}) m + 4\mu \frac{h^7}{7} (W_{oxy} + h^2 W_{lxy} + h^4 W_{2xy}) l + \\
& + \frac{40}{63} (\lambda + 2\mu) h^9 V_{ly} m + \frac{96}{77} (\lambda + 2\mu) h^{11} V_{2y} m + \frac{40}{63} \lambda h^9 U_{lx} m + \\
& + \frac{96}{77} \lambda h^{11} U_{2x} m - 4\lambda \frac{h^7}{7} W_1 m - 8\lambda \frac{h^9}{9} W_2 m + \frac{40}{63} \mu h^9 (V_{lx} + U_{ly}) l + \\
& + \frac{96}{77} \mu h^{11} (U_{2y} + V_{2x}) l + \frac{\lambda h^3}{\lambda + 2\mu} \lambda_3 m = \Phi_7 - S_6, \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{128}{105} \mu h^7 (W_{lx} l + W_{ly} m) + \frac{64}{45} \mu h^9 (W_{2x} l + W_{2y} m) + \\
& + \frac{128}{35} \mu h^7 (U_1 l + V_1 m) + \frac{64}{9} \mu h^9 (U_2 l + V_2 m) = S_9 - h^4 S_7 - \Phi_8, \quad (28)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3\mu} F_{1x} l + 2 \frac{\lambda}{3\mu} h^3 F_{2y} l + 2 \frac{h^3}{3} (F_{1y} + F_{2x}) m, \\
\Phi_2 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^3}{3\mu} F_{2y} m + 2 \frac{\lambda}{3\mu} F_{1x} m + 2 \frac{h^3}{3} (F_{1y} + F_{2x}) l, \\
\Phi_3 &= 4 \frac{h^3}{3} (F_1 l + F_2 m), \\
\Phi_4 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5\mu} F_{1x} l + 2 \frac{\lambda}{5\mu} h^5 F_{2y} l + 2 \frac{h^5}{5} (F_{1y} + F_{2x}) m, \\
\Phi_5 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^5}{5\mu} F_{2y} m + 2 \frac{\lambda}{5\mu} h^5 F_{1x} m + 2 \frac{h^5}{5} (F_{1y} + F_{2x}) l, \\
\Phi_6 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{7\mu} F_{1x} l + 2 \frac{\lambda}{7\mu} h^7 F_{2y} l + 2 \frac{h^7}{7} (F_{1y} + F_{2x}) m, \\
\Phi_7 &= 2(\lambda + 2\mu) \frac{h^7}{7\mu} F_{2y} m + 2 \frac{\lambda}{7\mu} h^7 F_{1x} m + 2 \frac{h^7}{7} (F_{1y} + F_{2x}) l, \\
\Phi_8 &= 2 \frac{h^5}{5} F_1 l + 2 \frac{h^5}{5} F_2 m + 2 h^5 F_1 l + 2 h^5 F_2 m.
\end{aligned} \quad (29)$$

Полученная система дифференциальных уравнений описывает напряженное и деформированное состояние плиты с большей степенью точности, чем теория Кирхгофа. При отбрасывании членов более высокого порядка в полученных соотношениях мы получаем теорию Кирхгофа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О. К., Ворович И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, т. XXVII, вып. 6, 1963.
2. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, т. XXVI, вып. 4, 1962.
3. Лейбензон А. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, 1947.
4. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A boundary-layer theory, for elastic plates. Commun. Pure Appl. Math., vol. XIV, № 1, 1961.

И. И. Ворович, В. С. Салманов

Лөвһәнин әйләмәсіндә бир тәғриби нәзәријә үчүн
әсас тәнликләр вә сәрһәд шәртләри

ХҮЛАСӘ

Галынлығы $2h$ олан лөвһәнин әйләмәсіндә мәсәләсін үчүн Лагранжын вариация тәнлији вә гејри-мүәјјән әмсаллар үсулунун көмәји илә әсас тәнликләр вә сәрһәд шәртләри чыхарылып.

Алынмыш дифференциал тәнликләр системинин һәлли лөвһәнин үзләриндә сәрһәд шәртләрини дәғиг өдәјир.

Сәрһәд шәртләринин дәғиг өдәнилмәсін көстәрилән һәллин әдәбијјатда мәлүм олан һәлләрә нисбәтән даһа гәнаәтбәхш олдугуну сүбүт едир.

Алынмыш дифференциал тәнликләр системиндән јүксәк тәртибли һәлләр атылдыгда Кирхофун мәлүм нәзәријәсін алыныр.

Я. М. РАСИЗАДЕ, Р. М. МАМЕДОВ

О ТЕПЛООБМЕНЕ ПРИ СТРУКТУРНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ СРЕД МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНКАМИ И В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Для ряда технологических процессов, связанных с движением вязко-пластичных сред (глинистые и цементные суспензии, растворы полимеров, парафинистые нефти и др.), необходимо исследовать процесс теплообмена. Однако, несмотря на исключительную необходимость, эти исследования, даже для частных случаев, связаны со значительными математическими трудностями. Поэтому стремление к изысканию упрощающих приемов для решения задач о теплообмене при движении вязко-пластичных сред представляет определенный теоретический и практический интерес.

В связи с изложенным, учитывая указание А. Х. Мирзаджанзаде [1], при расчете интегральных величин (расход, количество тепла и др.) можно принимать, что дифференциальные уравнения движения вязко-пластичных сред описывают всю область движения. Пригодность этого приема* для решения гидродинамических задач о структурном режиме движения вязко-пластичных сред модели Шведова—Бингама можно считать установленной, так как известно, что выражение для обобщенного параметра Рейнольдса (Re^*)—основного параметра гидродинамических расчетов можно выводить из упрощенного уравнения Букингама (без третьего члена), которое равносильно допущению, что дифференциальные уравнения описывают всю область движения вязко-пластичных сред. При этом теоретические расчеты хорошо совпадают с практическими данными.

В настоящей работе путем решения двух частных задач для упрощенной и точной схемы движения определены: предел применимости указанного выше приема для решения задач о теплообмене при структурном режиме движения вязко-пластичных сред, модели Шведова—Бингама, предельные значения параметра Нуссельта при различных значениях поперечного размера ядра течения.

§ 1. Рассмотрим задачу о теплообмене при структурном режиме движения вязко-пластичных сред между двумя параллельными пластинками. При этом направление оси z совпадает с направлением течения, а ось y нормальна к пластинкам. Приняты следующие предположения: дифференциальные уравнения движения охватывают всю область движения, температура на пластинках по оси z изменяется ли-

нейно (удельный тепловой поток через пластинки постоянный), реологические параметры среды не зависят от температуры, течение стационарное.

В данном случае уравнение притока тепла [2] имеет вид

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial z}, 0 \leq y \leq h, \quad (1,1)$$

где $a = \lambda (C_p \rho)^{-1}$,

$$v = \frac{\tau_0 h}{\eta} \left[\frac{h}{2y_0} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{y}{h} - 1 \right], \quad (1,2)$$

T_1 —температура вязко-пластичной среды,

τ_0 —предельное напряжение сдвига,

η —структурная вязкость,

ρ —плотность,

C_p —удельная теплоемкость среды,

λ —коэффициент теплопроводности,

$2h$ —расстояние между пластинками,

$2y_0$ —поперечный размер ядра.

На основании принятых выше допущений, подставив в уравнение

$$(1,1) \quad T_1(y, z) = Az + T(y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = A, \quad \text{получим}$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = \frac{\tau_0 h}{a \eta} \left[\frac{h}{2y_0} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{y}{h} - 1 \right] \cdot A, 0 \leq y \leq h. \quad (1,3)$$

Здесь T —разность температур вязко-пластичной среды и пластинки. Имеем граничные условия:

$$T(h) = 0, \quad \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (1,4)$$

Проинтегрировав (1,3) при граничных условиях (1,4), получим

$$T = \frac{\tau_0 h^3 A}{a \eta} \left[\frac{h}{2y_0} \left(\frac{y^2}{2h^2} - \frac{y^4}{12h^4} \right) - \frac{y^2}{2h^2} + \frac{y^3}{6h^3} - \frac{5h}{24y_0} + \frac{1}{3} \right]. \quad (1,5)$$

Среднее в сечении значение T определяем из следующего выражения:

$$T_{cp} = \frac{1}{h} \int_0^h T dy. \quad (1,6)$$

С учетом (1,5) получаем

$$T_{cp} = \frac{\tau_0 A h^4}{a \eta y_0} \left(-\frac{2}{15} + \frac{5y_0}{24h} \right). \quad (1,7)$$

Из выражения коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = -\lambda \frac{1}{T_{cp}} \cdot \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=h}$$

определяем параметр Нуссельта:

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = \left(\frac{1}{3} - \frac{y_0}{2h} \right) \left(\frac{2}{15} - \frac{5y_0}{24h} \right)^{-1}. \quad (1,8)$$

В данном случае связь между градиентом температуры A и тепловой нагрузкой q может быть получена непосредственно из теплового баланса:

$$q = \tau h \rho C_p A.$$

§ 2. Рассмотрим задачу, изложенную в § 1, без допущения о том, что дифференциальные уравнения движения охватывают всю область

* Несмотря на то, что он противоречит физике явления [2], так как при таком допущении расход получается даже отрицательным.

течения (постановку задачи и обозначения см. в § 1). В данном случае уравнение притока тепла [2], соответственно, для вязко-пластичной и пластичной областей примет вид:

$$\frac{\partial^2 T_1'}{\partial y^2} = \frac{v}{a} \cdot \frac{\partial T_1'}{\partial z}, \quad y_0 \leq y \leq h; \quad (2,1)$$

$$\frac{\partial^2 T_2'}{\partial y^2} = \frac{v(y_0)}{a} \cdot \frac{\partial T_2'}{\partial z}, \quad 0 \leq y \leq y_0, \quad (2,2)$$

где

$$v = \frac{\tau_0 h}{\eta} \left[\frac{h}{2y_0} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{y}{h} - 1 \right], \quad (2,3)$$

$$v(y_0) = \frac{\tau_0 h}{\eta} \left(\frac{h}{2y_0} + \frac{y_0}{2h} - 1 \right), \quad (2,4)$$

T_1' , T_2' — температуры вязко-пластичной среды в соответствующих областях движения.

Как и в § 1, подставив в (2,1) и (2,2) $\frac{\partial T_1'}{\partial z} = \frac{\partial T_2'}{\partial z} = A$, $T_1'(y, z) = Az + T_1(y)$ и $T_2'(y, z) = Az + T_2(y)$, получим;

$$\frac{d^2 T_1}{dy^2} = \frac{\tau_0 h A}{\eta a} \left[\frac{h}{2y_0} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) + \frac{y}{h} - 1 \right], \quad y_0 \leq y \leq h; \quad (2,5)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dy^2} = \frac{\tau_0 h A}{\eta a} \left(\frac{h}{2y_0} + \frac{y_0}{2h} - 1 \right), \quad 0 \leq y \leq y_0. \quad (2,6)$$

Здесь T_1 и T_2 — разность температур вязко-пластичной среды в соответствующей области движения и на пластинке.

Проинтегрировав уравнения (2,5) и (2,6) при граничных условиях

$$T_1(h) = 0, \quad T_1(y_0) = T_2(y_0), \quad \left. \frac{dT_1}{dy} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{dT_2}{dy} \right|_{y=y_0}, \quad \left. \frac{dT_2}{dy} \right|_{y=0} = 0,$$

получим:

$$T_1 = \frac{\tau_0 A}{\eta a} \left[\frac{h^2}{2y_0} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12h^2} \right) - \frac{hy^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y_0^2 y}{6} + \frac{h^3}{3} - \frac{hy_0^2}{6} - \frac{5h^4}{24y_0} \right]; \quad (2,7)$$

$$T_2 = \frac{\tau_0 A}{\eta a} \left(\frac{h^2 y^2}{4y_0} - \frac{hy^2}{2} + \frac{y_0 y^2}{4} + \frac{y_0^3}{24} - \frac{hy_0^2}{6} + \frac{h^3}{3} - \frac{5h^4}{24y_0} \right). \quad (2,8)$$

Среднее в поперечном сечении значение температуры определяем из выражения

$$T_{cp} = \frac{1}{h} \left(\int_0^{y_0} T_2 dy + \int_{y_0}^h T_1 dy \right). \quad (2,9)$$

Параметр Нуссельта определяем из выражения коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha = -\lambda \frac{1}{T_{cp}} \cdot \left. \frac{dT_1}{dy} \right|_{y=h};$$

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = f_1 \left(\frac{y_0}{h} \right) : f_2 \left(\frac{y_0}{h} \right); \quad (2,10)$$

$$f_1 \left(\frac{y_0}{h} \right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{y_0}{2h} + \frac{y_0^3}{6h^3} \right)^2, \quad f_2 \left(\frac{y_0}{h} \right) = \frac{2}{15} - \frac{5}{24} \cdot \frac{y_0}{h} + \frac{y_0^3}{12h^3} - \frac{y_0^5}{120h^5}.$$

В данном случае связь между q и A определяется по выражению $q = [v \cdot (h - y_0) + v(y_0) \cdot y_0] \cdot \rho C_p A$, которое получается непосредственно из теплового баланса для определенного участка течения.

§ 3. Рассмотрим задачу, изложенную в § 1, для случая течения вязко-пластичной среды в круглой цилиндрической трубе*. В данном случае, когда дифференциальные уравнения движения охватывают всю область течения, имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \frac{v}{a} \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (3,1)$$

где $a = \lambda (C_p \rho)^{-1}$,

$$v = \frac{\tau_0 R}{\eta} \left[\frac{R}{2r_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{r}{R} - 1 \right]; \quad (3,2)$$

R — радиус трубы,

r_0 — радиус ядра,

остальные обозначения см. в § 1.

На основании принятых в § 1 допущений, подставив в (3,1) выражения (3,2) и $T_1(r, z) = Az + T(r)$, $\frac{\partial T_1}{\partial z} = A$, получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{\tau_0 R}{\eta a} \left[\frac{R}{2r_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{r}{R} - 1 \right] \cdot A, \quad 0 \leq r \leq R. \quad (3,3)$$

Имеем следующие граничные условия

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad T(R) = 0,$$

так как T — разность температур вязко-пластичной среды и стенки трубы. Проинтегрировав (3,3) при указанных граничных условиях, получим

$$T = \frac{\tau_0 R^3 A}{\eta a} \left[\frac{5}{35} - \frac{3R}{32r_0} + \left(\frac{R}{8r_0} - \frac{1}{4} \right) \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{9R^3} - \frac{r^4}{32r_0 R^3} \right]. \quad (3,4)$$

Среднее значение разности температур жидкости и стенки трубы определяем по формуле

$$T_{cp} = \frac{2}{R^2} \int_0^R T r dr = \frac{\tau_0 R^4 A}{\eta a r_0} \left(\frac{7}{120} \frac{r_0}{R} - \frac{1}{24} \right).$$

Параметр Нуссельта определяем из выражения коэффициента

теплоотдачи $\alpha = -\lambda \frac{1}{T_{cp}} \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R}$,

$$Nu = \frac{\alpha R}{\lambda} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{6} \frac{r_0}{R} \right) \left(\frac{1}{24} - \frac{7}{120} \frac{r_0}{R} \right)^{-1}. \quad (3,5)$$

Связь между q и A получаем из теплового баланса для определенного участка трубы:

$$2q = Rv \rho C_p A.$$

Для случая истинного распределения скоростей в поперечном сечении трубы задача решена аналогично § 2. В этом случае, решив уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_1}{dr} \right) = \frac{\tau_0 R A}{\eta a} \left[\frac{R}{2r_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{r}{R} - 1 \right], \quad r_0 \leq r \leq R,$$

* Для стационарного ламинарного течения ньютоновской жидкости эта задача решена Игло и Фергюсоном [3].

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_2}{dr} \right) = \frac{\tau_0 R A}{\eta a} \left[\frac{R}{2r_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) + \frac{r_0}{R} - 1 \right], \quad 0 \leq r \leq r_0,$$

при граничных условиях

$$T_1(R) = 0, \quad T_1(r_0) = T_2(p_0),$$

$$\left. \frac{dT_1}{dr} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{dT_2}{dr} \right|_{r=r_0}, \quad \left. \frac{dT_2}{dr} \right|_{r=0} = 0,$$

определяем следующее выражение для параметра Nu :

$$Nu = \frac{\alpha R}{\lambda} = f_1 \left(\frac{r_0}{R} \right) : f_2 \left(\frac{r_0}{R} \right), \quad (3,6)$$

где

$$f_1 \left(\frac{r_0}{R} \right) = \frac{1}{8} - \frac{r_0}{6R} + \frac{r_0^4}{24R^4},$$

$$f_2 \left(\frac{r_0}{R} \right) = \frac{1}{24} - \frac{7r_0}{120R} + \frac{r_0^4}{48R^4} - \frac{r_0^6}{240R^6}.$$

y_0/h r_0/R	Ф о р м у л ы			
	(1,8)	(2,10)	(3,5)	(3,6)
0,0	2,500	2,500	3,000	3,000
0,1	2,518	2,518	3,023	3,023
0,2	2,545	2,542	3,055	3,054
0,3	2,588	2,571	3,103	3,096
0,4	2,666	2,606	3,181	3,151
0,5	2,857	2,649	3,333	3,223
0,6	4,000	2,699	3,750	3,314
0,7	1,333	2,758	10,000	3,441
0,8	2,000	2,827	1,666	3,578
0,9	2,154	2,907	2,307	3,764
0,99	2,217	2,990	2,482	3,973
1,0	2,222	3,000	2,500	4,000

Результаты численных расчетов по выражениям (1,8), (2,10), (3,5) и (3,6) для различных значений размера ядра течения приведены в таблице. При $y_0/h = 0$ или $r_0/R = 0$ получаем известные [4,5] значения Nu для вязкой жидкости. Из таблицы видно, что упрощенный прием решения задач о теплообмене при структурном режиме движения вязко-пластичных тел в плоской и круглой цилиндрических трубках пригоден для случаев, когда значение поперечного размера ядра y_0/h или $r_0/R \leq 0,5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мирзаджанзаде А. Х., Мирзоян А. А. „ДАН Азерб. ССР“, т. X, 1955, № 5.
2. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Азербайджан, 1959.
3. Гребер Г. Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене ГИИЛ, 1958.
4. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. III. Изд. АН СССР, 1955.
5. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. II. ИИЛ, 1948.

Ж. М. Расизаде, Р. М. Маммадов

Өзлү-пластик мајеләрин ики паралел лөвһә арасында вә даирәви ен кәсикли цилиндрик боруја структур режимдә һәрәкәти заманы истилик мүбадиләси

ХҮЛАСӘ

Өзлү-пластик мајеләрин (килли мәһлул, семент мәһлулу, полимер, парафинли нефтләр вә и. а.) һәрәкәти илә бағлы олан бир сыра техноложии просесин кедишиндә баш верән истилик мүбадиләсинин өјрәнилмәси чох лазымлы бир мәсәлә олмагла јанашы, бөјүк ријази чәтинликләрлә әлағәдардыр.

Мәғаләдә ики мәсәлә дәғиг вә тәғриби јолла һәлл едилмиш, Нусселт параметринин дәғиг гијмәти һесапланмыш вә тәклиф олунан сәдәләшдирмәнин тәтбиголунма областы мүәјјән едилмишдир.

Б. А. АХМЕДОВ, А. К. КОЛОСОВСКАЯ

ВЛИЯНИЕ КОНТУРА ПИТАНИЯ И ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОДОШВЫ ПЛАСТА НА РАБОТУ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ

Рассмотрим однородно анизотропный пласт, который дренирован горизонтальной совершенной скважиной. Предположим, что кровля пласта непроницаема, подошва представляет собой слабопроницаемую перемычку, а дебит $Q(t)$, приходящийся на единицу длины скважины, известен. Пусть контур питания перпендикулярен кровле и подошве пласта и параллелен оси скважины, давление на нем известно и равно P_r . Тогда, принимая скважину за линейный источник бесконечной длины и выбирая ось x в плоскости кровли, ось y в плоскости контура питания вертикально вниз, а ось z параллельно оси скважины, запишем уравнение упругого режима:

$$\kappa_x \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + Q \mu \delta(x - x_0, y - y_0) = \mu \beta^* \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь P —давление в пласте; κ_x, κ_y —проницаемость пласта в горизонтальном и вертикальном направлениях; μ —динамический коэффициент вязкости; β^* —коэффициент упругоэластичности пласта; (x_0, y_0) —координаты точки, через которую проходит ось скважины.

Для удобства решения задачи влияние скважины на перераспределение пластового давления учтено слагаемым $Q \mu \delta(x - x_0, y - y_0)$ уравнения (1), где $\delta(x - x_0, y - y_0)$ есть функция Дирака. Решение уравнения (1) ищем при следующих краевых условиях [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 \text{ при } y = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial y} + \alpha^2 P &= 0 \text{ при } y = h, \\ P &= P_r \text{ при } x = 0, \\ P &= 0 \text{ при } t = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Давление под перемычкой принимаем равным нулю; $\alpha^2 = \frac{\kappa_r}{\kappa_y h_r}$, где κ_r, h_r —соответственно, коэффициент проницаемости и мощность перемычки под пластом. Применим к (1) конечное косинус-преобразование Фурье, т. е. умножим (1) на $M_n \cos \lambda_n y dy$ и проинтегрируем от 0 до h . Тогда

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} - \kappa^2 \lambda_n^2 P_n + \frac{1}{\kappa_x} M_n \mu Q \delta(x - x_0) \cos \lambda_n y_0 = \frac{1}{\kappa_x} \frac{\partial P_n}{\partial t}, \quad (3)$$

где

$$P_n = M_n \int_0^h P \cos \lambda_n y dy;$$

λ_n —корни уравнения $\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_n h = \alpha^2$,

$$\kappa^2 = \frac{\kappa_y}{\kappa_x}, \quad \kappa_x = \frac{\kappa_x}{\mu \beta^*}, \quad M_n = \frac{1}{\int_0^h \cos^2 \lambda_n y dy};$$

M_n —нормирующий множитель.

Краевые условия для уравнения (3):

$$\begin{aligned} P_n|_{x=0} &= P_r M_n \frac{\sin \lambda_n h}{\lambda_n}, \\ P_n|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция Грина задачи (3), (4) имеет вид

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t - \tau) &= \frac{1}{2 \sqrt{\pi \kappa_x (t - \tau)}} \left\{ \exp \left[-\kappa^2 \lambda_n^2 z_x (t - \tau) - \frac{(x - \xi)^2}{4 z_x (t - \tau)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[-\kappa^2 \lambda_n^2 z_x (t - \tau) - \frac{(x + \xi)^2}{4 z_x (t - \tau)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнения (3) при краевых условиях (4) может быть представлено в виде двух слагаемых:

$$P_n = P_n^* + P_n^{**}, \quad (6)$$

где

$$P_n^* = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \frac{M_n \mu Q z_x G}{\kappa_x} \delta(x - x_0) \cos \lambda_n y_0 d\xi, \quad (7)$$

$$P_n^{**} = z_x \int_0^t P_r M_n \sin \lambda_n h \frac{\partial G}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} d\tau. \quad (8)$$

Если предположить, что $Q = \text{const}$ и $P_r = \text{const}$, то интегралы входящие в (7) и (8), могут быть вычислены и тогда

$$P_n^* = \frac{Q M_n \mu z_x \cos \lambda_n y_0}{2 \kappa_x \sqrt{\pi z_x}} \int_0^t \left\{ \exp \left[-\kappa^2 \lambda_n^2 z_x (t - \tau) - \frac{(x - x_0)^2}{4 z_x (t - \tau)} \right] - \exp \left[-\kappa^2 \lambda_n^2 z_x (t - \tau) - \frac{(x + x_0)^2}{4 z_x (t - \tau)} \right] \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \quad (7')$$

или [2]

$$\begin{aligned} P_n^* &= \frac{M_n \mu Q \cos \lambda_n y_0}{4 \lambda_n \kappa \kappa_x} \left\{ \exp(-|x - x_0| \lambda_n \kappa) \operatorname{erf} C \left(\frac{|x - x_0|}{2 \sqrt{z_x t}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_n \kappa \sqrt{z_x t} \right\} - \exp(|x - x_0| \lambda_n \kappa) \operatorname{erf} C \left(\frac{|x - x_0|}{2 \sqrt{z_x t}} + \lambda_n \kappa \sqrt{z_x t} \right) - \\ &\quad - \exp[-(x + x_0) \lambda_n \kappa] \operatorname{erf} C \left(\frac{x + x_0}{2 \sqrt{z_x t}} - \lambda_n \kappa \sqrt{z_x t} \right) + \\ &\quad + \exp[(x + x_0) \lambda_n \kappa] \operatorname{erf} C \left(\frac{x + x_0}{2 \sqrt{z_x t}} + \lambda_n \kappa \sqrt{z_x t} \right) \Big\} \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$P_n^{**} = \frac{M_n P_r x \sin \lambda_n h}{2 \lambda_n \sqrt{\pi z_x}} \int_0^t \exp \left[-\lambda_n^2 \kappa^2 z_x (t - \tau) - \frac{x^2}{4 z_x (t - \tau)} \right] \frac{d\tau}{(t - \tau)^{3/2}}, \quad (8')$$

или

$$P_n^{**} = M_n P_r \frac{\sin \lambda_n h}{2 \lambda_n} \left[\exp(\lambda_n \kappa x) \operatorname{erf} C \left(\frac{x}{2 \sqrt{\kappa_x t}} + \lambda_n \kappa \sqrt{\kappa_x t} \right) + \exp(-\lambda_n \kappa x) \operatorname{erf} C \left(\frac{x}{2 \sqrt{\kappa_x t}} - \lambda_n \kappa \sqrt{\kappa_x t} \right) \right], \quad (10)$$

окончательно

$$P = \sum_0^{\infty} P_n \cos \lambda_n y,$$

где P_n определяется из (6), (9) и (10).

Отметим, что нами получено решение и для случая, когда Q и P_r зависят от времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде М. А. Особенности течения жидкости в неоднородном пласте. Изд-во „Недра“, 1965.
2. Иваненко Д. и Соколов А. Классическая теория поля. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Изд-во „Наука“, М., 1966.

Б. Э. Әһмәдов, А. К. Колосовскаја

Гидаланма контурунун вә лајын дабанынын кечиричи олмасынын
горизонтал гујунун ишинә тәсири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гидаланма контурунун вә лајын дабанынын кечиричили-
нини горизонтал гујуја тәсири мәсәләсинә бахылыр.

Фурјенин интеграл чевирмәсиндән вә Грин функцијасындан исти-
фадә едиләрәк анизотроп еластик лајда горизонтал гујуја ахын заманы
лајда тәзјигин пайланмасы гануну верилмишдир.

Б. О. КАСИМОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С ЧИСЛОМ КАНАЛОВ ОТ $n-1$ ДО $\binom{n}{2}$, ГДЕ n —ЧИСЛО ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

Постановка задачи. Дается n рассредоточенных объектов системы телемеханики. Необходимо для этих n источников информации найти число возможных информационных сетей с числом каналов от $n-1$ до $\binom{n}{2}$. Под информационной сетью для n объектов подразуме-
вается совокупность каналов связи (сеть), устанавливающих инфор-
мационную связь между всеми этими объектами.

Решение задачи. Пусть M_n^p —число всех информационных се-
тей, связывающих n объектов с помощью p каналов связи, где p может
быть любым числом от $n-1$ до $\binom{n}{2}$. Очевидно, чтобы найти M_n^p ,

необходимо из $\binom{\binom{n}{2}}{p}$ исключить все те сочетания, которые описы-

вают структуры в виде нескольких разобщенных групп связанных
объектов, причем одна из этих групп может быть или отдельным
объектом или группой несвязанных объектов. А чтобы найти эти ис-
ключаемые сочетания, нам предстоит:

1. Разбить n , $(n-1)$, $(n-2)$, ..., $(n-r)$ объектов на ряд возмож-
ных разобщенных групп связанных объектов, суммарное число кана-
лов которых равно искомой величине.

2. Найти число представлений каждой разбивки, различающихся
друг от друга хотя бы одним объектом. Так как разбивка числа $(n-i)$
равносильна разбивке числа n , одна из групп которой в каждой раз-
бивке состоит из i несвязанных объектов, то число представлений
каждой разбивки будет равно

$$Q = \frac{n!}{i! (\alpha!)^{\nu_{\alpha(\alpha-1)} \nu_{\alpha(\alpha-1)}! \dots \nu_{\alpha(\alpha+z)}! (q!)^{\nu_{q(q-1)} \nu_{q(q-1)}! \dots (q!)^{\nu_{qq}} \nu_{qq}! \dots (r!)^{\nu_{r(r+\psi)} \nu_{r(r+\psi)}!}}$$

где ν_{qr} —число групп объектов с q количеством объектов и p числом
связей;

$$i + [\nu_{\alpha(\alpha-1)} + \nu_{\alpha\alpha} + \nu_{\alpha(\alpha+1)} + \dots + \nu_{\alpha(\alpha+z)}] \alpha + [\nu_{q(q-1)} + \nu_{qq} + \nu_{q(q+1)} + \dots + \nu_{q(q+z)}] q + \dots + [\nu_{r(r-1)} + \nu_{rr} + \nu_{r(r+1)} + \dots + \nu_{r(r+\psi)}] r = n.$$

Разумеется, в зависимости от конкретной разбивки n те или иные сомножители и слагаемые будут отсутствовать.

В самом деле, используя известное правило из комбинаторного анализа, мы найдем выражение

$$\frac{n!}{i! (1!)^{v_{a(a-1)}} (2!)^{v_{aa}} (3!)^{v_{a(a+1)}} \dots (q!)^{v_{q(q-1)}} \dots (r!)^{v_{r(r+\psi)}}}$$

Но так как перемена порядка выбора групп объектов с одинаковым количеством объектов и связей не дает новых сетей, то, очевидно, необходимо ввести множитель $\frac{1}{(v_{qp})!}$.

3. Найти число информационных сетей, соответствующих каждому представлению любой разбивки. Обозначим это число через A .

Пусть, к примеру, данные n объектов разбиты на три группы по q, z, d объектов соответственно в каждой с p, l, f каналами связей. Тогда, согласно правилу произведения из теории сочетаний $A = M_q^p M_z^l M_d^f$. Таким образом мы сможем найти A для любого пред-

ставления разбивки n . Отсюда окончательно $M_n^p = \left(\binom{n}{2} \right)^\lambda \sum_{k=1}^{\lambda} (QA)_k$;

$$(QA)_k = [Q(M_a^{a-1})^{v_{a(a-1)}} (M_a^a)^{v_{aa}} (M_a^{a+1})^{v_{a(a+1)}} \dots (M_a^{a+z})^{v_{a(a+z)}} \times \\ \times (M_q^{q-1})^{v_{q(q-1)}} (M_q^q)^{v_{qq}} (M_q^{q+1})^{v_{q(q+1)}} \dots (M_q^{q+z})^{v_{q(q+z)}} \times \\ \times (M_r^{r-1})^{v_{r(r-1)}} (M_r^r)^{v_{rr}} (M_r^{r+1})^{v_{r(r+1)}} (M_r^{r+2})^{v_{r(r+2)}} \dots \\ (M_r^{r+\psi})^{v_{r(r+\psi)}}]_k, \quad \text{где} \\ (a-1)v_{a(a-1)} + av_{aa} + (a+1)v_{a(a+1)} + \dots + (a+z)v_{a(a+z)} + (q-1)v_{q(q-1)} + \\ + qv_{qq} + (q+1)v_{q(q+1)} + \dots + (q+z)v_{q(q+z)} + (r-1)v_{r(r-1)} + rv_{rr} + \\ + (r+1)v_{r(r+1)} + (r+2)v_{r(r+2)} + \dots + \dots + \dots + \\ + (r+\psi)v_{r(r+\psi)} = p;$$

k —порядковый номер разбивки числа n ,

λ —последний порядковый номер разбивки, равный числу возможных разбиений n .

Здесь также, в зависимости от конкретной разбивки n , те или иные сомножители и соответственно слагаемые будут отсутствовать,

Пример

$$n = 2$$

$$M_n^{n-1} = M_2^1 = C_1^1 = 1; \quad M_n^n = M_2^2 = C_1^2 = 0.$$

$$n = 3$$

$$M_n^{n-1} = M_3^2 = C_3^2 = 3; \quad M_n^n = M_3^3 = C_3^3 = 1;$$

$$M_n^{n+1} = M_3^4 = C_3^4 = 0.$$

$$n = 4$$

$$M_n^{n-1} = M_4^3 = C_6^3 - \frac{n!}{113!} = 16; \quad M_n^n = M_4^4 = C_6^4 = 15;$$

$$M_n^{n+1} = M_4^5 = C_6^5 = 6; \quad M_n^{n+2} = M_4^6 = C_6^6 = 1,$$

$$M_n^{n+3} = M_4^7 = C_6^7 = 0.$$

$$n = 5$$

$$a) \quad M_n^{n-1} = M_5^4 = C_{10}^4 - \sum_{k=1}^{\lambda} (QA)_k = C_{10}^4 - x;$$

x —случай, когда хотя бы один объект не связан с остальными. Этими случаями будут:

1. Когда два и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{2,3} \rightarrow \boxed{2_1, 3_3} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!3!} M_2^1 M_3^3.$$

2. Когда один объект находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_4} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{1!4!} M_4^4;$$

$$M_n^{n-1} = M_5^4 = C_{10}^4 - \frac{5!}{2!3!} M_2^1 M_3^3 - \frac{5!}{1!4!} M_4^4 = 125.$$

$$M_n^n = M_5^5 = C_{10}^5 - x.$$

б)

1. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_5} \rightarrow x = \frac{n!}{1!4!} M_4^5;$$

$$M_n^n = M_5^5 = C_{10}^5 - \frac{5!}{1!4!} M_4^5 = 222.$$

в)

$$M_n^{n+1} = M_5^6 = C_{10}^6 - x.$$

1. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_6} \rightarrow x = \frac{n!}{1!4!} M_4^6;$$

$$M_n^{n+1} = M_5^6 = C_{10}^6 - \frac{5!}{1!4!} \cdot 1 = 205.$$

$$г) \quad M_n^{n+2} = M_5^7 = C_{10}^7 = 120 \quad д) \quad M_n^{n+3} = M_5^8 = C_{10}^8 = 45.$$

$$е) \quad M_n^{n+4} = M_5^9 = C_{10}^9 = 10. \quad ж) \quad M_n^{n+5} = M_5^{10} = C_{10}^{10} = 1.$$

$$з) \quad M_n^{n+6} = M_5^{11} = C_{10}^{11} = 0.$$

$$n = 6$$

$$a) \quad M_n^{n-1} = M_6^5 = C_{15}^5 - x.$$

1. Два и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{2,4} \rightarrow \boxed{2_1, 4_4} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!4!} M_2^1 M_4^4.$$

2. Три и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{3,3} \rightarrow \boxed{3_2, 3_3} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{3!3!} M_3^2 M_3^3.$$

3. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_5} \rightarrow x_3 = \frac{n!}{1!5!} M_5^5.$$

4. Два несвязанных объекта находятся вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_5} \rightarrow x_4 = \frac{n!}{2!4!} M_4^5;$$

$$M_n^{n-1} = M_6^5 = C_{15}^5 - \frac{6!}{2!4!} M_2^1 M_4^4 - \frac{6!}{3!3!} M_3^2 M_3^3 - \frac{6!}{1!5!} M_5^5 - \\ - \frac{6!}{2!4!} M_4^5 = 1296;$$

6)

$$M_n^n = M_6^6 = C_{15}^6 - x.$$

1. Два и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{2, 4} \rightarrow \boxed{2_1, 4_5} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!4!} M_2^1 \cdot M_4^5.$$

2. Три и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{3, 3} \rightarrow \boxed{3_3, 3_3} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{(v_{qp})! q! q!} M_3^3 \cdot M_3^3;$$

v_{qp} — число групп объектов с q -количеством объектов и рассматриваемым p -числом связей. Так как перемена порядка выбора групп объектов с одинаковым количеством объектов и связей не дает новых сетей, то, очевидно, необходимо ввести указанный множитель $\frac{1}{(v_{qp})!}$.

3. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_6} \rightarrow x_3 = \frac{n!}{1!5!} M_5^6.$$

4. Два несвязанных объекта находятся вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_6} \rightarrow x_4 = \frac{n!}{2!4!} M_4^6;$$

$$M_n^n = M_6^6 = C_{15}^6 - \frac{6!}{2!4!} M_2^1 \cdot M_4^5 - \frac{6!}{2!3!3!} (M_3^3)^2 - \frac{6!}{1!5!} M_5^6 - \frac{6!}{2!4!} M_4^6 = 3660.$$

$$в) \quad M_n^{n+1} = M_6^7 = C_{15}^7 - x.$$

1. Два и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{2, 4} \rightarrow \boxed{2_1, 4_6} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!4!} M_2^1 M_4^6.$$

2. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_7} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{1!5!} M_5^7;$$

$$M_n^{n+1} = M_6^7 = C_{15}^7 - \frac{6!}{2!4!} M_2^1 M_4^6 - \frac{6!}{1!5!} M_5^7 = 5700.$$

$$г) \quad M_n^{n+2} = M_6^8 = C_{15}^8 - x.$$

1. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_8} \rightarrow x = \frac{n!}{1!5!} M_5^8;$$

$$M_n^{n+2} = M_6^8 = C_{15}^8 - \frac{6!}{1!5!} M_5^8 = 6165.$$

$$д) \quad M_n^{n+3} = M_6^9 = C_{15}^9 - x.$$

1. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_9} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{1!5!} M_5^9;$$

$$M_n^{n+3} = M_6^9 = C_{15}^9 - \frac{6!}{1!5!} M_5^9 = 4945.$$

$$е) \quad M_n^{n+4} = M_6^{10} = C_{15}^{10} - x.$$

1. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_{10}} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{1!5!} M_5^{10};$$

$$M_n^{n+4} = M_6^{10} = C_{15}^{10} - \frac{6!}{1!5!} M_5^{10} = 2997.$$

$$ж) \quad M_n^{n+5} = M_6^{11} = C_{15}^{11} = 1365.$$

$$з) \quad M_n^{n+6} = M_6^{12} = C_{15}^{12} = 455.$$

$$и) \quad M_n^{n+7} = M_6^{13} = C_{15}^{13} = 105.$$

$$к) \quad M_n^{n+8} = M_6^{14} = C_{15}^{14} = 15.$$

$$л) \quad M_n^{n+9} = M_6^{15} = C_{15}^{15} = 1.$$

$$м) \quad M_n^{n+10} = M_6^{16} = C_{15}^{16} = 0.$$

$$n = 7$$

$$а) \quad M_n^{n-1} = M_7^6 = C_{21}^6 - x.$$

1. Два и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{2, 5} \rightarrow \boxed{2_1, 5_5} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!5!} M_2^1 M_5^5.$$

2. Три и остальные объекты связаны между собой порознь:

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{3, 4} \rightarrow \boxed{3_2, 4_4} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{3!4!} M_3^2 M_4^4.$$

3. Три и остальные объекты связаны между собой порознь, но с одинаковым количеством каналов:

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{3, 4} \rightarrow \boxed{3_3, 4_3} \rightarrow x_3 = \frac{n!}{3!4!} M_3^3 M_4^3.$$

4. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{6_6} \rightarrow x_4 = \frac{n!}{1!6!} M_6^6.$$

5. Один объект изолирован, а остальные распадаются на две изолированные группы связанных между собой объектов — по два и четыре объекта соответственно в каждой:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{2, 4} \rightarrow \boxed{2_1, 4_5} \rightarrow x_5 = \frac{n!}{1!2!4!} M_2^1 M_4^5.$$

6. Один объект изолирован, а остальные — относительно числа объектов и каналов связи — распадаются на две равные изолированные группы связанных между собой объектов:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{3, 3} \rightarrow \boxed{3_3, 3_3} \rightarrow x_6 = \frac{n!}{1!(v_{qp})! 3!3!} (M_3^3)^2.$$

7. Два несвязанных объекта находятся вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_6} \rightarrow x_7 = \frac{n!}{2!5!} M_5^6.$$

8. Три несвязанных объекта находятся вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{4} \rightarrow \boxed{4_6} \rightarrow x_8 = \frac{n!}{3!4!} M_4^6;$$

$$M_n^{n-1} = M_7^6 = C_{21}^6 - \frac{7!}{2!5!} M_2^1 M_5^5 - \frac{7!}{3!4!} M_3^2 M_4^4 - \frac{7!}{3!4!} M_3^3 \cdot M_4^3 - \frac{7!}{1!6!} M_6^6 - \frac{7!}{2!4!} M_2^1 M_4^5 - \frac{7!}{2!3!3!} (M_3^3)^2 -$$

$$-\frac{7!}{2!5!}M_5^6 - \frac{7!}{3!4!}M_4^6 = 16807.$$

$$6) \quad M_n^n = M_7^7 = C_{21}^7 - x$$

1. Объекты распадаются на две изолированные группы связанных между собой объектов—по два и пять объектов соответственно в каждой:

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{2, 5} \rightarrow \boxed{2_1, 5_6} \rightarrow x_1 = \frac{n!}{2!5!} M_2^1 M_5^6.$$

2. Объекты распадаются на две изолированные группы связанных между собой объектов—по три и четыре объекта соответственно в каждой:

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{3, 4} \rightarrow \boxed{3_2, 4_5} \rightarrow x_2 = \frac{n!}{3!4!} M_3^2 M_4^5;$$

$$\boxed{7} \rightarrow \boxed{3, 4} \rightarrow \boxed{3_3, 4_4} \rightarrow x_3 = \frac{n!}{3!4!} M_3^3 M_4^4.$$

3. Один из объектов находится вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{6_7} \rightarrow x_4 = \frac{n!}{1!6!} M_6^7.$$

4. Один объект изолирован, а остальные распадаются на две изолированные группы связанных между собой объектов—по два и четыре объекта соответственно в каждой.

$$\boxed{6} \rightarrow \boxed{2, 4} \rightarrow \boxed{2_1, 4_6} \rightarrow x_5 = \frac{n!}{1!2!4!} M_2^1 M_4^6.$$

5. Два несвязанных объекта находятся вне связи с остальными связанными:

$$\boxed{5} \rightarrow \boxed{5_7} \rightarrow x_6 = \frac{n!}{2!5!} M_5^7;$$

$$M_n^n = M_7^7 = C_{21}^7 - \frac{7!}{2!5!} M_2^1 M_5^6 - \frac{7!}{3!4!} M_3^2 M_4^5 -$$

$$- \frac{7!}{3!4!} M_3^3 M_4^4 - \frac{7!}{1!6!} M_6^7 - \frac{7!}{2!4!} M_2^1 M_4^6 - \frac{7!}{2!5!} M_5^7 = 68295$$

и т. д. аналогично для другого числа каналов связи и для других n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимов В. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966 № 3.
2. Касимов В. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967 № 1.

Б. О. Гасимов

$(n-1)$ -дэн $\binom{n}{2}$ -јә гэдэр каналлы информасија

шәбәкәләринин структурлар сајынын тәјини мәсәләсинә даир

ХҮЛАСӘ

О-дан $\left[\binom{n}{2} - (n-1)\right]$ -јә гэдәр артыг каналлы информасија шәбәкәләри сајынын сәпәләнмиш n объектли телемеханика системи үчүн тәјини мәсәләсинә бахылып.

Н. Д. ДАГКЕСАМАНСКИЙ

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРАВЛЕНИИ ПРОЦЕССОМ ВУЛКАНИЗАЦИИ АВТОПОКРЫШЕК

Вулканизация—заключительный процесс в производстве автопокрышек. В результате вулканизации резина, имевшая ранее пластические свойства, необходимые на предыдущих стадиях производства, утрачивает их и приобретает эластичность, которой должна обладать готовая автопокрышка. На современном предприятии шинной промышленности широкое применение для целей вулканизации находят аппараты периодического действия, называемые форматорами-вулканизаторами. В этих аппаратах выполняются как формирование автопокрышек, так и вулканизация, заключающаяся в температурном воздействии на изделие с целью придания ему необходимых физико-механических свойств.

Покрышка представляет собой многослойное изделие из резины, причем слои ее имеют, вообще говоря, различную толщину и другие физические параметры (плотность, теплоемкость, теплопроводность). Обогрев изделия происходит с двух сторон—со стороны пресс-формы (снаружи) и со стороны диафрагмы (изнутри). С некоторым допущением можно принять, что распределение температур во всех сечениях автопокрышки одинаково. Тогда для исследования температурного режима вулканизации можно будет ограничиться рассмотрением произвольного сечения покрышки, которое состоит (в общем случае) из n слоев. Если каждый слой рассматривать как элемент с сосредоточенными параметрами, то модель этого слоя может быть представлена апериодическим звеном. Тогда модель сечения будет представлять собой цепочку апериодических звеньев, на вход каждого из которых будут поданы воздействия с выходов соседних с ним звеньев (либо внешние воздействия).

Обозначим температуру в i -ом слое автопокрышки через x_i , а через u_1 и u_2 температуры теплоносителей, соответственно со стороны пресс-формы и со стороны диафрагмы. С учетом вышеизложенного температурная модель сечения автопокрышки может быть описана следующей системой уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_{i-1} - a_{i2}x_i + a_{i3}x_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_0 = u_1, \quad x_{n+1} = u_2. \quad (1)$$

Основным требованием, предъявляемым к процессу вулканизации, является условие получения за заданное время T покрышки высокого качества. Качество готового изделия может быть оценено по ряду

физико-механических показателей (предел прочности при растяжении, относительное удлинение, эластичность, твердость и т. д.). Однако в настоящее время отсутствует функциональная зависимость этих показателей от основных технологических параметров процесса. Вместе с тем существует косвенный показатель, называемый эффектом вулканизации, по которому может быть оценена эффективность от температуры гического процесса. Зависимость эффекта вулканизации от температуры резины в i -ом слое и продолжительности процесса вулканизации определяется следующим выражением:

$$\frac{dE_i}{dt} = \kappa \frac{x_i - x^0}{10}, \quad (2)$$

где E_i — эффект вулканизации;
 x^0 — температура (обычно 100°C), при которой интенсивность вулканизации $I = \frac{dE}{dt}$ принимается равной единице;

κ — температурный коэффициент вулканизации.

Из литературы известно [1], что если эффекты вулканизации в различных режимах достигают одного и того же значения, то перечисленные выше физико-механические показатели в этих случаях также получаются идентичными. Следовательно, если лабораторным путем найдены оптимальные условия вулканизации для каждого слоя автопокрышки и на их основе рассчитаны соответствующие им оптимальные значения эффектов вулканизации, то может быть поставлена задача определения температурного режима вулканизации покрышки в целом, при котором достигается наилучшее, в определенном смысле, приближение к заданному распределению эффектов вулканизации по слоям.

Пусть оптимальные значения эффектов вулканизации для отдельных слоев автопокрышки имеют следующие значения: $E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*$. Тогда в качестве оценки приближения к заданному распределению эффектов вулканизации может быть взят следующий функционал:

$$I = g[E_1(T), E_2(T) \dots E_n(T)] = \sum_{i=1}^n [E_i(T) - E_i^*]^2, \quad (3)$$

где T — продолжительность вулканизации;

$E_i(T)$ — достигаемое к концу процесса значение эффекта вулканизации в i -ом слое.

Таким образом, выражение (3), представляющее собой сумму квадратичных отклонений от оптимальных значений эффектов вулканизации, может быть выбрано в качестве критерия оптимальности для нашей задачи. Функционал (3) отличается на константу от следующего функционала:

$$I = \int_0^T \frac{dg[E_1(t), E_2(t) \dots E_n(t)]}{dt} dt = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial E_i} \cdot \frac{dE_i}{dt} \right] dt =$$

$$2 = \int_0^T \sum_i \left\{ [E_i(t) - E_i^*] \cdot \frac{dE_i}{dt} \right\} dt, \quad (4)$$

который с учетом (2) может быть переписан в виде

$$I = 2 \int_0^T \sum_i \left\{ [E_i(t) - E_i^*] \cdot \kappa \frac{x_i - x^0}{10} \right\} dt. \quad (5)$$

Теперь может быть окончательно сформулирована задача в следующей форме. Рассматривается объект, состоящий из линейной и нелинейной частей, подчиненных следующим системам уравнений, записанным в векторной форме:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u},$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \bar{f}(\bar{x}), \quad (6)$$

где

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\bar{E} = (E_1, E_2, \dots, E_n),$$

$$\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

A — $n \times n$ -мерная матрица вида

$$A = \begin{vmatrix} -a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n1} - a_{n2} \end{vmatrix}$$

B — $n \times 2$ -мерная матрица вида

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & a_{n3} \end{vmatrix}$$

Управляющие функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ подчинены следующим техническим ограничениям:

$$U_1 \leq u_1 \leq \bar{U}_1,$$

$$U_2 \leq u_2 \leq \bar{U}_2. \quad (7)$$

Время движения T объекта фиксировано. Ставится задача определения управлений $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$, на которых достигается минимум функционала

$$I = \int_0^T \sum_{i=1}^n \left\{ [E_i(t) - E_i^*] \cdot \kappa \frac{x_i - x^0}{10} \right\} dt. \quad (8)$$

Применим к задаче принцип максимума:

$$H = - \left\{ \sum_i [E_i(t) - E_i^*] \cdot \kappa \frac{x_i - x^0}{10} \right\} + \langle \bar{\psi} \{ A\bar{x} + B\bar{u} \} \rangle +$$

$$+ \langle \bar{\varphi} \cdot \bar{f}(\bar{x}) \rangle, \quad (9)$$

где

$$\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n),$$

$$\bar{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n).$$

Координаты векторов $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$ подчинены следующим уравнениям:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad (10)$$

Согласно принципу максимума [2] для минимизации (8) при соблюдении (6) необходимо, чтобы в каждый момент времени функция (9) принимала максимальное значение. Из последнего условия следует:

$$\begin{aligned} u_1^* &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \bar{U}_1) - \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \bar{U}_1) \operatorname{sign} \psi_1, \\ u_2^* &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2 + \bar{U}_2) - \frac{1}{2}(\underline{U}_2 - \bar{U}_2) \operatorname{sign} \psi_n. \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения оптимальных управляющих функций u_1^* и u_2^* необходимо совместно решить системы уравнений (6) и (10) с учетом (11) при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i^{\text{зад}}, & \psi_i(T) &= 0, \\ E_i(0) &= 0, & \varphi_i(T) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Совместное решение указанных систем уравнений весьма трудоемко. В то же время решение системы (10) необходимо лишь для того, чтобы определить знаки функций $\psi_1(t)$ и $\psi_n(t)$ и моменты их изменения.

Выпишем подробно уравнения (10):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= [E_1(t) - \varphi_1(t) - E_1^*] \cdot \kappa^{\frac{x_1 - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{12} \cdot \psi_1 - a_{21} \cdot \psi_2; \\ \frac{d\psi_i}{dt} &= [E_i(t) - \varphi_i(t) - E_i^*] \cdot \kappa^{\frac{x_i - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{i2} \cdot \psi_i - \\ &\quad - a_{i-1,3} \cdot \psi_{i-1} - a_{i+1,1} \cdot \psi_{i+1}; \\ \frac{d\psi_n}{dt} &= [E_n(t) - \varphi_n(t) - E_n^*] \cdot \kappa^{\frac{x_n - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{n2} \cdot \psi_n - a_{n-1,3} \cdot \psi_{n-1}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \kappa^{\frac{x_i - x^0}{10}}. \quad (14)$$

В силу того, что разность $E_i(t) - \varphi_i(t) = E_i(T)$, выражения, стоящие в квадратных скобках (13), равны константам. Обозначив их через C_i и обернув счет времени (для чего положим $\tau = -t + T$), систему уравнений (13) можно будет переписать в следующем виде:

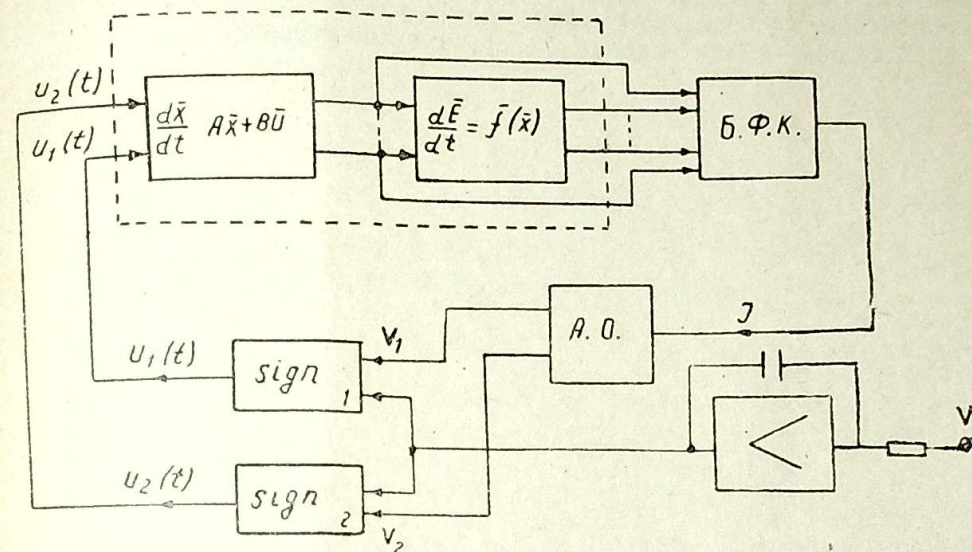
$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} + a_{12} \cdot \psi_1 &= -C_1 \cdot \kappa^{\frac{x_1 - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{21} \cdot \psi_2; \\ \frac{d\psi_i}{d\tau} + a_{i2} \cdot \psi_i &= -C_i \cdot \kappa^{\frac{x_i - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{i-1,3} \cdot \psi_{i-1} + a_{i+1,1} \cdot \psi_{i+1}; \\ \frac{d\psi_n}{d\tau} + a_{n2} \cdot \psi_n &= -C_n \cdot \kappa^{\frac{x_n - x^0}{10}} \ln \kappa + a_{n-1,3} \cdot \psi_{n-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученная система уравнений имеет нулевые начальные условия по всем переменным. Анализ этой системы позволяет сделать заключение о числе переключений управляющих функций.

Действительно, если все C_i меньше нуля, функции $\psi_i(\tau)$ всюду положительны. Если все C_i больше нуля, $\psi_i(\tau)$ на всем интервале решения отрицательны. Наконец, в том случае, когда для крайних слоев покрывки $C_i < 0$, а для внутренних $C_i > 0$, посредством простого качественного анализа системы уравнений (15) устанавливается, что функции $\psi_1(\tau)$ и $\psi_n(\tau)$ меняют знак не более одного раза. В первом случае процесс состоит в прогреве изделия, во втором — только в лишь в охлаждении и, наконец, в третьем, наиболее важном с точки зрения практики — в разогреве с последующим охлаждением.

Лишь в том случае, когда все $C_i = 0$, $\psi_i \equiv 0$ и, следовательно, управление не определено. Однако этот случай не имеет физического смысла.

Итак, оптимальные управляющие функции $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ нужно искать, согласно (11), в классе кусочно-постоянных функций с числом переключений не более одного. После того как мы определили предельное число переключений управляющих функций, необходимость



в решении системы уравнений (10) отпадает. Задавшись числом переключений управляющих функций, мы можем на модели процесса, описываемой системами уравнений (6), методом поиска подобрать моменты переключения, при которых достигается минимального значения функционал (8). Подбор моментов переключения управляющих функций может быть произведен автоматически по схеме, изображенной на рисунке. Схема состоит из модели исходной системы, блока БФК, в котором формируется критерий оптимальности (3), автоматического оптимизатора АО и схемы формирования управляющих функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые формируются на выходах релейных элементов знака.

Управление моментами переключения управляющих функций осуществляется посредством изменения уровней V_1 и V_2 . Автоматический оптимизатор производит пробные изменения этих уровней, анализирует влияние на них критерия оптимальности и затем производит рабочий шаг по направлению к оптимуму. Решение заканчивается по достижении таких значений V_1 и V_2 (и, следовательно, моментов переключения управляющих функций), при которых достигается минимальное значение (3), принятое в качестве критерия оптимальности исследуемой задачи. Таким образом, в классе кусочно-постоянных функций с числом переключений не более одного будут определены оптимальные управляющие функции $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошелев Ф. Ф., Климов Н. С. Общая технология резины. М. 1958.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. ФМ, М., 1961.

Вулканизасија просесинни идарәдилмә мәсәлинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә вулканизасија просесинни оптималь идарәси мәсәләси араздырылыр. Көстәрилыр ки, бу просесин оптималь идарәси бир вәзијәтдән о бири вәзијәтә кечирилмәләрин сајы бирдән чох олмајан тикәли-сабит функцијалар синфиндә ахтарылмалыдыр.

Мәсәләнни ријази машында һәллиниң схеми верилир.

М. А. ГУЛИЕВ

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ С УЧЕТОМ НАЛИЧИЯ ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМЫХ ЗОН НА КРОВЛЕ

Точное аналитическое решение задачи о плоскопараллельном или осесимметричном течении жидкости в пластах с проницаемой кровлей связано с большими математическими трудностями. В тех случаях, когда удается получить точные решения, расчеты по ним становятся очень громоздкими. Этим в основном объясняется применение приближенных методов к решению подобного рода задач. Чаще удается получать приближенные решения [1, 2, 3]. В настоящей работе, исходя из [1], решается задача о плоскопараллельном течении в пласте, кровля которого содержит любое число частично проницаемых зон. Подобные задачи представляют большой интерес для теории и практики разработки нефтяных месторождений. Отметим, что такие задачи также рассмотрены в [4].

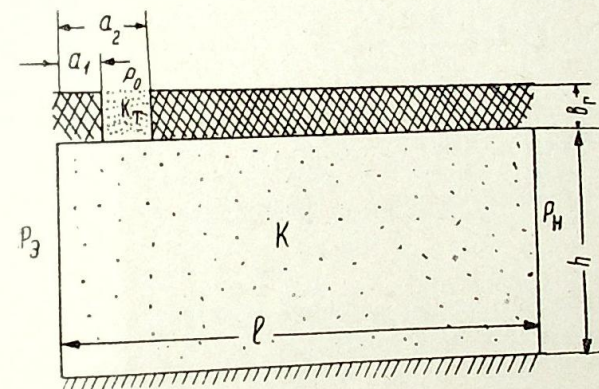


Рис. 1

Пусть продуктивный пласт эксплуатируется прямолинейной батареей скважин, параллельно которой имеется прямолинейная батарея нагнетательных скважин. Батареи эксплуатационных и нагнетательных скважин заменяем галереями, на линии которых соответственно поддерживаются постоянные давления P_z и P_n . Предположим, что над пластом имеется перемычка, над которой поддерживается постоянное давление P_0 . Для начала представим, что перемычка имеет лишь одну частично проницаемую зону шириной $(a_2 - a_1)$. Подошву пласта считаем непроницаемой (рис. 1).

Движение жидкости в продуктивном пласте описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $P(x, y)$ — давление в любой точке пласта. Граничными же условиями будут:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=h} = 0 \quad (2)$$

$$P|_{x=0} = P_3, \quad P|_{x=l} = P_n. \quad (3)$$

Распределение давления в пласте берем в виде [1]

$$P = P_n - (P_n - A) \left(1 - \frac{x}{l}\right) + (P_3 - A) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \quad (4)$$

что удовлетворяет условиям:

$$P = P_n \text{ при } x = l, \\ P = P_3 \text{ при } x = 0,$$

где l — расстояние между галереями, h — мощность пласта,

Постоянную A будем определять исходя из уравнения материального баланса.

Обозначим через Q_3 и Q_n расходы жидкости через единицу длины эксплуатационной и нагнетательной галерей, соответственно. Тогда из (4) получим

$$Q_3 = \frac{\kappa \cdot h}{\mu} \cdot \frac{P_n - A}{l}, \quad (5)$$

$$Q_n = \frac{\kappa \cdot h}{\mu} \left[\frac{P_n - A}{l} - \frac{2(P_3 - A)}{l} \right]. \quad (6)$$

Количество жидкости, перетекающей через частично проницаемую зону, обозначим Q_y . Тогда

$$Q_y = \frac{\kappa_r}{\mu} \cdot \int_{a_1}^{a_2} \frac{P_0 - \bar{P}}{b_r} dx, \quad (7)$$

где $\bar{P}$ есть средневзвешенное давление в пласте,

κ — коэффициент проницаемости пласта,

μ — вязкость жидкости,

κ_r — коэффициент проницаемости перемычки,

b_r — мощность перемычки.

Исходя из (4) и (7), получим

$$Q_y = \frac{\kappa_r(a_2 - a_1)}{\mu \cdot b_r} \left[(P_0 - A) - \frac{(P_n - A)(a_2 + a_1)}{2 \cdot l} - (P_3 - A) \frac{3l^2 - a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2}{3l^2} \right]. \quad (8)$$

Так как

$$Q_3 - Q_n = Q_y, \quad (9)$$

то из (5), (6) и (8) получим

$$A = \frac{a_2^2 \cdot (a_2 - a_1) \left[P_3 - P_3 \frac{a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2}{3 \cdot l^2} + P_n \frac{a_2 + a_1}{2l} - P_0 \right] + 2P_3}{\frac{(a_2^2 - a_1^2)a^2}{2} + 2 - \frac{a^2(a_2^3 - a_1^3)}{3l}}, \quad (10)$$

где

$$a^2 = \frac{\kappa_r}{\kappa \cdot h \cdot b_r}. \quad (11)$$

При $a_1 = 0$ и $a_2 = l$ получим

$$A = P_3 - \frac{a^2 l^2 \cdot \left(P_0 - \frac{P_3 + P_n}{2} \right)}{2 + \frac{a^2 \cdot l^2}{6}}, \quad (12)$$

которая совпадает с формулой М. А. Гусейн-заде, выведенной для случая, когда имеется переток жидкости по всей кровле пласта. Кроме того, при $a_1 = a_2$ (или же $a = 0$), т. е. когда кровля пласта непроницаема, из формулы (10) получим $A = P_3$ и подставляя в (4), будем иметь классическое решение задачи о прямолинейнопараллельном течении [2].

Поступая так же, как это мы делали выше, находим формулу для определения A при наличии двух частично проницаемых зон (рис. 3):

$$A = \frac{\left[P_n \frac{a_2^2 - a_1^2}{2l} - P_0(a_2 - a_1) + P_3 \cdot (a_2 - a_1) - P_3 \frac{a_2^3 - a_1^3}{3l^2} \right] + \frac{2P_3}{a^2 l} + \frac{1}{l} \cdot \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + \frac{2}{a^2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3l} + \right. \\ \left. + \left[P_n \frac{(a_4^2 - a_3^2)}{2 \cdot l} - P_0(a_4 - a_3) + P_3 \cdot (a_4 - a_3) - P_3 \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{a_4^2 - a_3^2}{2} - \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l} \right)}{2 + \frac{a^2 \cdot l^2}{6}}, \quad (13)$$

где $(a_4 - a_3)$ показывает ширину второй зоны. При $(a_4 - a_3) = 0$ из (13) получим формулу (10), выведенную для случая одной зоны. В случае, когда кровля пласта содержит n частично проницаемых зон, находим

$$A = \frac{\left[P_n \frac{a_2^2 - a_1^2}{2l} + (P_3 - P_0)(a_2 - a_1) - \frac{1}{l} \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + \frac{2}{a^2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3l} + \frac{a_4^2 - a_3^2}{2} - \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l} \right) \right] + \frac{2 \cdot P_3}{a^2 l}}{2 + \frac{a^2 \cdot l^2}{6}} + \\ + \frac{\left[P_n \frac{a_4^2 - a_3^2}{2l} + (P_3 - P_0)(a_4 - a_3) - P_3 \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l^2} \right] + \dots + \frac{1}{l} \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{2} + \frac{2}{a^2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3l} + \frac{a_4^2 - a_3^2}{2} - \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l} + \dots + \right)}{2 + \frac{a^2 \cdot l^2}{6}}$$

$$\rightarrow \frac{\left[P_n \frac{a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2}{2l} + (P_n - P_0)(a_{2n} - a_{2n-1}) - P_n \frac{a_{2n}^3 - a_{2n-1}^3}{3l^2} \right]}{\left[\frac{a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2}{2} - \frac{a_{2n}^3 - a_{2n-1}^3}{3l} \right]}, \quad (14)$$

где n — целое положительное число.
Формула (14) получена при условии

$$Q_y = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \left[\int_{a_1}^{a_2} (P_0 - \bar{P}) dx + \int_{a_3}^{a_1} (P_0 - \bar{P}) dx + \dots + \int_{a_{2n-1}}^{a_{2n}} (P_0 - \bar{P}) dx \right]. \quad (15)$$

Таким образом, получаем простую формулу (14), которая с учетом (4) позволяет определить давление в любом сечении пласта при любом числе частично проницаемых зон.

Если задан постоянный расход эксплуатационной галереи Q , приходящийся на единицу длины, то закон распределения давления берем в виде

$$P = P_n - \frac{\mu \cdot l}{h \cdot \kappa} Q \cdot \left(1 - \frac{x}{l} \right) + A \cdot \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right). \quad (16)$$

Из (16) Q_n находим в виде

$$Q_n = Q - \frac{2}{l} \cdot \frac{A \cdot \kappa \cdot h}{\mu}; \quad (17)$$

Q_y определяется из (7) и (16) и для случая одной проницаемой зоны шириной $a_1 \leq x \leq a_2$ имеет следующий вид:

$$Q_y = \frac{\kappa_r}{\mu b_r} \cdot \left[(P_0 - P_n)(a_2 - a_1) + \frac{\mu \cdot l \cdot Q}{h \cdot \kappa} (a_2 - a_1) - \frac{Q \cdot \mu}{2 \cdot h \cdot \kappa} (a_2^2 - a_1^2) - A(a_2 - a_1) + \frac{A}{l^2} \cdot \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right]. \quad (18)$$

Далее из (9), (17) и (18) находим

$$A = \frac{\alpha^2 l \cdot (a_2 - a_1) \cdot \left[P_0 - P_n + \frac{Q \cdot \mu \cdot l}{h \cdot \kappa} - \frac{Q \cdot \mu}{2 \cdot h \cdot \kappa} (a_2 + a_1) \right]}{2 \cdot \left[1 + \frac{\alpha^2 l \cdot (a_2 - a_1)}{2} - \frac{\alpha^2 \cdot (a_2^3 - a_1^3)}{6l} \right]}. \quad (19)$$

При $a_1 = 0$ и $a_2 = l$ получаем

$$A = \frac{\alpha^2 \cdot l^2 \cdot \left[P_0 - P_n + \frac{Q \cdot \mu \cdot l}{2 \cdot h \cdot \kappa} \right]}{2 \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{3} \right)}, \quad (20)$$

которая совпадает с формулой М. А. Гусейн-заде для случая, когда вся кровля проницаема. И в этом случае при $a_1 = a_2$ (или $\alpha = 0$) получаем решение задачи, когда кровля непроницаема [2].

Аналогичным образом выводится формула для определения A , когда кровля имеет две частично проницаемые зоны:

$$A = \frac{\alpha^2 l \cdot (a_2 - a_1) \left[(P_0 - P_n) + \frac{\mu \cdot l \cdot Q}{h \cdot \kappa} - \frac{Q \cdot \mu}{2 \cdot h \cdot \kappa} (a_2 + a_1) \right] +}{2 - \alpha^2 l \cdot \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3l^2} - (a_2 - a_1) + \right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\left[\alpha^2 l (a_4 - a_3) \left[(P_0 - P_n) + \frac{\mu \cdot l \cdot Q}{h \cdot \kappa} - \frac{Q \cdot \mu}{2 \cdot h \cdot \kappa} (a_4 + a_3) \right] + \frac{a_4^3 - a_3^3}{3l^2} - (a_4 - a_3) \right]}{2 - \alpha^2 l \cdot \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3l^2} - (a_2 - a_1) + \frac{a_4^3 - a_3^3}{3 \cdot l^2} - \right]} \rightarrow$$

Заметим, что при $(a_4 - a_3) = 0$ из формулы (21) получается (19). Для произвольного числа проницаемых зон A определяется в виде

$$A = \frac{\alpha^2 l \cdot (a_2 - a_1 + a_4 - a_3 + \dots + a_{2n} - a_{2n-1}) \left(P_0 - P_n + \frac{Q \cdot \mu \cdot l}{h \cdot \kappa} \right) +}{2 - \alpha^2 l \cdot \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3l^2} - (a_2 - a_1) + \frac{a_4^3 - a_3^3}{3 \cdot l^2} - \right]} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\left[\alpha^2 l \cdot \frac{Q \cdot \mu}{2 \cdot h \cdot \kappa} (a_2^2 - a_1^2 + a_4^2 - a_3^2 + \dots + a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2) - (a_4 - a_3) + \dots + \frac{a_{2n}^3 - a_{2n-1}^3}{3 \cdot l^2} - (a_{2n} - a_{2n-1}) \right]}{2 - \alpha^2 l \cdot \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3l^2} - (a_2 - a_1) + \frac{a_4^3 - a_3^3}{3 \cdot l^2} - (a_{2n} - a_{2n-1}) \right]}. \quad (22)$$

Таким образом, получены простые формулы, по которым легко определить давление в любом сечении пласта и количество перетекающей жидкости.

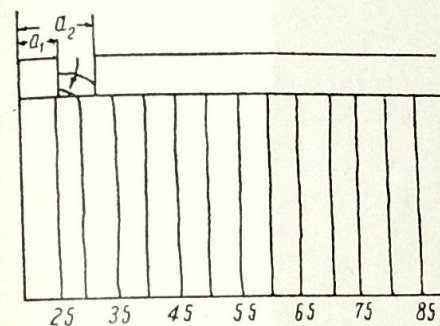


Рис. 2

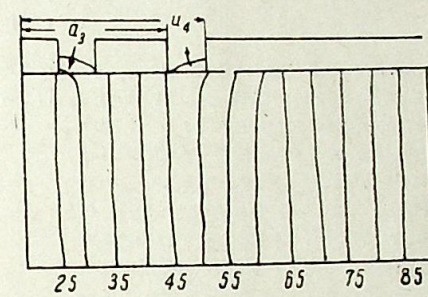


Рис. 3

Вышеописанная задача в своей точной постановке была решена на сеточной модели [5] нами для граничных условий (2) и (3). Результаты решения для различного числа частично проницаемых зон в виде эквипотенциальных линий представлены на рис. 2, 3, 4 и 5 (рис. 2

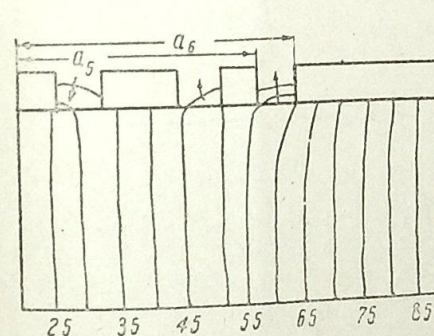


Рис. 4

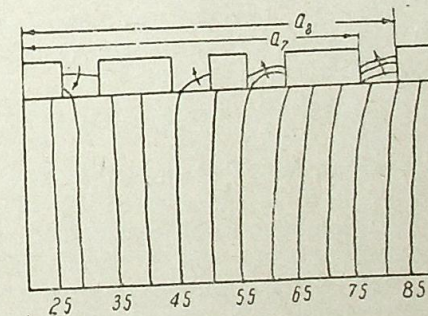


Рис. 5

относится к случаю одной зоны, рис. 3 — к случаю двух зон и т. д.). Результаты, полученные на сеточной модели расчетов, приведенных проницаемых зон, были сравнены с результатами расчетов, приведенных по выведенной формуле (14) с учетом закона распределения (4), для

Таблица

Сечения пласта	$x = 3 \text{ м}$	$x = 6 \text{ м}$	$x = 9 \text{ м}$	$x = 12 \text{ м}$	$x = 15 \text{ м}$	$x = 18 \text{ м}$	$x = 21 \text{ м}$	$x = 24 \text{ м}$	$x = 27 \text{ м}$	$x = 30 \text{ м}$
Число зон										
Одна зона	26,47	32,92	39,32	45,79	52,38	58,32	65,31	71,53	77,72	83,15
	26,60	32,90	39,30	45,70	52,20	58,40	64,80	70,60	77,40	83,90
Две зоны	26,33	32,65	38,97	45,28	51,57	57,87	64,88	71,16	77,44	83,67
	26,50	32,70	38,90	45,20	51,30	57,90	64,20	70,60	77,10	83,80
Три зоны	26,00	32,06	38,17	44,35	50,61	56,90	63,89	70,35	76,84	83,40
	26,25	32,30	38,40	44,50	50,20	56,80	63,10	69,80	76,50	83,50
Четыре зоны	25,38	30,57	36,60	42,55	48,73	55,03	62,04	68,80	75,68	82,78
	26,10	32,00	38,10	44,00	49,90	56,20	62,20	69,00	75,8	83,00

различных сечений пласта. В таблице сравниваются результаты для одной зоны, для двух зон и т. д. Под чертой представлены результаты экспериментов. Как показывают данные таблицы, результаты численных расчетов по формуле (14) с учетом (4), приведенные над чертой, дают хорошее совпадение с результатами, полученными на электрической модели. Для самого худшего случая (четыре зоны, $x = 6 \text{ м}$) относительная погрешность составляет лишь 4,5%. Отметим, что результаты, представленные в таблице, получены при $P_n = 90 \text{ атм}$, $P_o = 40 \text{ атм}$, $P_g = 20 \text{ атм}$, $h = 15 \text{ м}$, $b_r = 3 \text{ м}$, $\alpha^2 = \frac{1}{225} \text{ м}^{-2}$, $a_1 = 3 \text{ м}$, $a_2 = 6 \text{ м}$, $a_3 = 12 \text{ м}$, $a_4 = 15 \text{ м}$, $a_5 = 18 \text{ м}$, $a_6 = 21 \text{ м}$, $a_7 = 27 \text{ м}$, $a_8 = 30 \text{ м}$, $l = 33 \text{ м}$.

При проведении экспериментов на модели обращалось внимание на выбор места зон перетока жидкости. Другими словами, если в случае одной зоны центр ее находится на расстоянии 4,5 м от оси y , направленной по мощности пласта, то для случая двух проницаемых зон первая зона сохраняет свое прежнее расположение. Указанное справедливо также для случаев трех и четырех зон (рис. 2, 3, 4 и 5). Это обстоятельство позволяет судить о взаимодействии зон перетока. На рис. 6 представлена зависимость $Q_y = f(n)$. Кривая I показывает изменение количества жидкости, перетекающей через кровлю пласта в зоне ($a_2 - a_1$). Как видно из этого рисунка, для случая одной

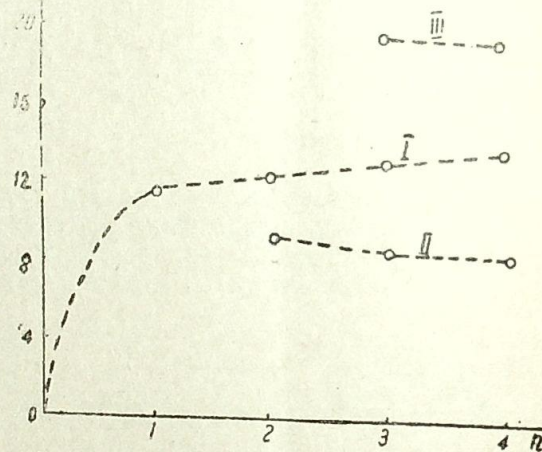


Рис. 6

зоны количество перетекающей жидкости составляет $11,38 \text{ см}^3/\text{сек}$, в случае двух зон в первой зоне оно становится $11,59 \text{ см}^3/\text{сек}$. В той же зоне ($a_2 - a_1$), когда кровля содержит три и четыре зоны, количество перетекающей жидкости соответственно увеличивается до $11,98$ и $12,14 \text{ см}^3/\text{сек}$. Кривая II показывает картину изменения количества перетекающей жидкости в зоне ($a_4 - a_3$) в зависимости от числа час-точно проницаемых зон. Если в случае двух зон оно составляет $8,71 \text{ см}^3/\text{сек}$, то для случаев трех и четырех зон оно уменьшается до $7,48$ и $6,86 \text{ см}^3/\text{сек}$. Изменение количества жидкости, перетекающей через кровлю пласта в зоне ($a_6 - a_5$), показывает кривая III.

Выводы

1. Аналитически получены простые формулы для определения давления в любом сечении пласта при наличии большого числа проницаемых зон кровли.
2. Эта же задача решена методом электрического моделирования и результаты представлены в виде эквипотенциальных линий.
3. Сравнение результатов расчетов по выведенной нами формуле (14), с учетом (4), с результатами электромоделирования показывает их хорошее совпадение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде М. А. Изв. вузов, нефть и газ, 1961, № 6.
2. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. Изд-во «Недра», 1965.
3. Гулиев М. А. Вопросы вычисл. математики и вычисл. техники. Тр. ВЦ АН Азерб. ССР, т. III, 1965.
4. Мусаев М. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 6.
5. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. Физматгиз, 1930.

М. А. Гулиев

Таваны мүэјјән кечиричи зснaлaрa мaлик oлaн лaјдa мaјe aхыны

ХУЛАСӘ

Мәғаләдә таваны чохла мүэјјән кечиричи зонаја малик ләјдә мүх-тәлиф режимләрдә маје ахыны илә әләғәдар олан мәсәләләрә бахы-лыр.

Тәзјигин пәјланма ганунлары (4) вә (16)-дан истифадә етмәклә (2) вә (3) сәһһәд шәртләри олан вә (1) тәнлији илә тәсвир едилән мәсә-ләнин мүхтәлиф сәјлы зоналар үчүн һәлли верилмишдир. Һәмин мәсәлә-електрик моделләшдирмә методундан, истифадә илә һәлл едилмиш-дир. Моделләшдирмә методунун тәтбиғи илә вә аналитик үсулла алы-нан нәтичәләрин мүғајисәси чәдвәллә кәстәрилмишдир.

А. Х. МАМЕДОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА СИСТЕМЫ ПНЕВМОТРАНСПОРТА УСТАНОВКИ ГИДРОКРЕКИНГА

В процессе гидрогенизации установки гидрокрекинга по методу ИНХС АН СССР под давлением 30 атм с циркулирующим шариковым катализатором поверхность катализатора в реакторе покрывается коксом и его активность снижается. Для поддержания активности закоксованный катализатор после десорбции углеводородов в отпарной секции непрерывно отводится в регенератор. Катализатор, регенерированный продувкой кислород содержащим газом, поступает в дозатор пневмотранспорта, транспортируется вверх в бункер пневмоподъемника и, наконец, по стояку попадает в реактор [1]. Движение катализатора имеет место в том случае, когда скорость потока транспортирующего газа превышает скорость витания катализатора:

$$v_k = v_n - v_b, \quad (1)$$

где v_n — скорость потока,

$$v_n = \frac{Q}{3600 pF} \text{ м/сек}; \quad (2)$$

Q — расход транспортирующего газа, $\text{м}^3/\text{час}$;

p — давление в пневмолинии, атм;

F — площадь поперечного сечения пневмолинии, м^2 ;

v_b — скорость витания катализатора — это такая величина скорости восходящего в вертикальном трубопроводе потока, при которой данный катализатор с диаметром d и удельным весом γ находится во взвешенном равновесном состоянии. Она определяется из следующего уравнения [2]:

$$v_b = \frac{\nu Re}{d} \text{ м/сек}, \quad (3)$$

где ν — кинематическая вязкость,

$$\nu = \frac{\mu_1}{\rho_1} \text{ м}^2/\text{сек}; \quad (4)$$

μ_1 — динамическая вязкость;

$$\mu_1 = \mu_0 \frac{1 + \frac{c_1}{273}}{1 + \frac{c_1}{273+t}} \sqrt{\frac{t+273}{273}} \text{ кг/м·сек}; \quad (5)$$

ρ_1 — плотность газа при температуре t ,

$$\rho_1 = \frac{273 \rho_0 P}{273 + t} \text{ кг/м}^3; \quad (6)$$

μ_0 — динамическая вязкость при 0°C , кг/м·сек ;

ρ_0 — плотность газа при 0°C кг/м^3 ;

c_1 — постоянный коэффициент;

Re — параметр Рейнольдса,

$$Re = \frac{Ar(1-\sigma)^{4.75}}{18 + 0,6 \sqrt{Ar(1-\sigma)^{4.75}}}, \quad (7)$$

где параметр Архимеда

$$Ar = \frac{g(\gamma - \gamma_0)}{\gamma_0 \nu} d^3; \quad (8)$$

g — ускорение силы тяжести, м/сек^2 ;

γ_0 — удельный вес транспортирующего газа, кг/м^3 ;

σ — объемная концентрация катализатора,

$$\sigma = \frac{G}{3600 F \gamma v_n} \cdot \frac{\text{м}^3 \text{кат}}{\text{м}^3 \text{газа}}; \quad (9)$$

G — вес транспортируемого катализатора, кг/час .

Как видно из вышеприведенных формул (3) — (9), скорость витания катализатора зависит от температуры и кинематической вязкости транспортирующего газа, давления системы, концентрации, диаметра и удельного веса катализатора, вычисление которых требует значительного времени. Учитывая это, ниже прилагается формула, которая дает возможность быстро и легко вычислять скорость витания:

$$v_b = Ad + B \cdot t - B\sigma - DP - K(\gamma - \gamma_0) + 2,12, \quad (10)$$

где $A = 0,38$; $B = 0,0018$; $B = 5$; $D = 0,043$ и $K = 1,58 \cdot 10^{-4}$.

При выведении этой формулы были взяты за основу основные параметры (t , d , γ , σ и P), которые используются в процессе гидрокрекинга. Точность результатов, полученных по этой формуле, с использованием определенных значений параметров ($t = 20 \div 600^\circ\text{C}$; $\sigma = 0,05 - 0,1 \text{ м}^3/\text{м}^3$; $d = 2 - 3 \text{ мм}$; $\gamma = 1300 \text{ кг/м}^3$ и 1600 кг/м^3 при $\gamma_0 = 35 \text{ кг/м}^3$; $P = 20$ и 30 атм) колеблется в пределах 3 — 5% (табл.).

Сравнение экспериментальных и расчетных данных показывает, что скорость витания катализатора, а также скорость потока в пневмолинии при повышенном давлении (30 атм) в 5 — 5,5 раза меньше, а количестве требуемого транспортирующего газа в 6 — 7 раз больше, чем при пневмотранспорте в атмосферных условиях [1]. Это показывает, что пневмотранспорт катализатора под давлением 30 атм более чувствителен к изменению перепада давления, чем при пневмотранспорте в атмосферных условиях, и поэтому требует соблюдения определенных ограничений перепада давления в соответствующих установках.

В связи с отмеченным обстоятельством при пневмотранспорте под давлением на установке гидрокрекинга нужно выбирать входные параметры (Q и σ) так, чтобы при пневмотранспорте определенного количества катализатора перепад давления в пневмолинии удовлетворял условия ограничения при минимальном расходе транспортирующего газа. Перепад давления в пневмолинии определяется следующим образом:

$$\Delta P = \frac{(\gamma - \gamma_0) HG}{3600 \gamma F v_k} + \lambda_{\text{см}} \frac{v_k^2 H \sigma \gamma}{2 g D} + \frac{G v_k}{g F}, \quad (11)$$

где $\gamma_{см}$ — коэффициент сопротивления смеси;
 D — диаметр пневмолинии, м;
 H — высота пневмолинии, м.

$\gamma = 1600 \text{ кг/м}^3$ $\gamma_0 = 35 \text{ кг/м}^3$ $P = 30 \text{ атм}$												
$d = 2 \text{ мм}$ $\sigma = 0,5 \text{ м}^3 \text{ кат/м}^3 \text{ газа}$						$d = 3 \text{ мм}$ $\sigma = 0,1 \text{ м}^3 \text{ кат/м}^3 \text{ газа}$						
Темп. $t^\circ\text{C}$	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ
20	1,35	1,37	-2,00	1,70	1,75	-2,94	1,18	1,13	4,24	1,48	1,50	-1,62
100	1,52	1,52	0,00	1,90	1,90	0,00	1,30	1,27	2,30	1,65	1,65	0,00
200	1,72	1,70	1,16	2,12	2,08	1,89	1,50	1,45	3,24	1,90	1,83	3,68
300	1,90	1,88	1,05	2,33	2,26	3,00	1,67	1,63	2,40	2,06	2,01	2,42
400	2,07	2,06	0,48	2,52	2,44	2,38	1,82	1,81	0,55	2,23	2,19	1,80
500	2,22	2,24	-0,95	2,70	2,62	2,96	1,97	1,99	-1,03	2,38	2,37	0,42
600	2,36	2,42	-2,54	2,86	2,80	2,10	2,12	2,17	-2,36	2,53	2,55	-0,80

$P = 20 \text{ атм}$												
Темп. $t^\circ\text{C}$	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ	$v_{в, \text{м/сек}}$	$v'_{в, \text{м/сек}}$	ϵ
20	1,74	1,80	-3,45	2,14	2,15	-0,47	1,50	1,55	-3,70	1,86	1,93	-3,80
100	1,90	1,95	-2,63	2,32	2,33	-0,43	1,65	1,70	-3,00	2,06	2,08	-0,97
200	2,10	2,13	-1,43	2,51	2,51	0,00	1,86	1,88	-1,10	2,28	2,26	0,87
300	2,30	2,31	-0,44	2,70	2,69	0,35	2,03	2,06	-1,50	2,50	2,44	2,40
400	2,50	2,49	0,40	2,89	2,87	0,69	2,20	2,24	-1,80	2,70	2,62	2,96
500	2,68	2,67	0,38	3,08	3,05	0,97	2,36	2,42	-1,54	2,90	2,80	3,45
600	2,85	2,85	0,00	3,27	3,23	1,12	2,50	2,60	-4,00	3,10	2,98	4,00

Примечание: $v_{в}$ — скорость витания по формулам (3) (9); $v'_{в}$ — скорость витания по формуле автора (10); ϵ — относительная ошибка

$$\epsilon = \frac{v_{в} - v'_{в}}{v_{в}} 100 \%$$

Рассмотрение этой формулы показывает, что в нее непосредственно не входит количество транспортирующего газа (Q), которое является одним из входных параметров. Поэтому для получения уравнения, связывающего Q с перепадом давления в пневмолинии, совместно решая (1), (2) и (10), получим следующую зависимость для скорости катализатора:

$$V_{к} = 2,78 \cdot 10^{-4} \frac{Q}{FP} - 0,38d - 0,0018 \cdot t + 5\sigma + 0,043P + 1,58 \cdot 10^{-4} (\gamma - \gamma_0) - 2,12. \quad (12)$$

В связи с тем, что для работающей установки все параметры, за исключением Q , σ и G , являются постоянными, используя исходные крупнй пилотной установки ($P = 30 \text{ атм}$, $H = 30 \text{ м}$, $D = 0,02 \text{ м}$, $\gamma_{см} = 0,05$, $\gamma = 1600 \text{ кг/см}^3$ и $\gamma_0 = 35 \text{ кг/см}^3$), и формулы (11) и (12), найдем перепады давления для различных Q , изменяя значения σ и G . Затем, откладывая по оси абсцисс значения Q , а по оси ординат значения перепада давления, построим соответствующие кривые.

Полученные кривые выражают зависимость перепада давления от расхода транспортирующего газа при постоянном G и заданных значениях σ , причем построены они для трех постоянных значений G .

Для удобства пользования построенными кривыми последние совмещены на одном графике для различных G (рис. 1). Таким образом, полученные кривые выражают зависимость перепада давления от расхода транспортирующего газа и концентрации катализатора при постоянных значениях веса транспортируемого катализатора. Как показывают кривые, при увеличении расхода транспортирующего газа, при постоянном весе транспортируемого катализатора, перепад давления в пневмолинии сначала уменьшается, а затем увеличивается.

Сравнение перепадов давления при различных концентрациях катализатора в пневмолинии показывает, что с увеличением их значения возрастает перепад давления.

Точки минимума этих кривых с увеличением концентрации катализатора смещаются в положительном направлении оси ординат, что отвечает сравнительно меньшему потреблению транспортирующего газа при соответствующем большем перепаде давления. В связи с тем, что эти условия определяют оптимальный режим работы системы пневмотранспорта, при установлении оптимального режима необходимо использовать левую ветвь кривых. Таким образом, используя построенные кривые, можно установить оптимальный режим работы системы пневмотранспорта катализатора для установки гидрокрекинга.

Используя выведенную автором формулу (12), можно построить кривые зависимости перепада давления в пневмолинии от расхода транспортирующего газа для любой промышленной установки гидрокрекинга и определить по ним оптимальный режим их работы.

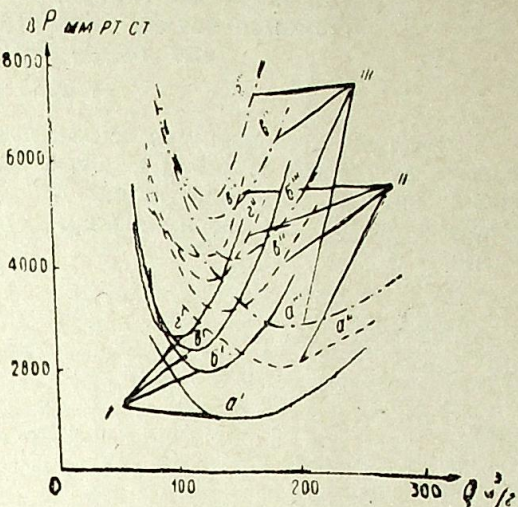


Рис. Зависимость перепада давления в пневмолинии от расхода транспортирующего газа:

I — $G_{к} = 100 \text{ кг/час}$; II — $G_{к} = 200 \text{ кг/час}$; III — $G_{к} = 300 \text{ кг/час}$; а — при $\sigma = 0,01 \text{ м}^3 \text{ кат/м}^3 \text{ газа}$; б — при $\sigma = 0,03$; в — при $\sigma = 0,05$; г — при $\sigma = 0,07 \text{ м}^3 \text{ кат/м}^3 \text{ газа}$.

Выводы

1. Предложена формула для определения скорости витания катализатора (1), дающая возможность в отличие от существующих достаточно точно и быстро определить скорость витания.
2. Выведена формула (12) для установления зависимости скорости катализатора от количества транспортирующего газа. Используя эту формулу и формулу перепада давления (11), построены кривые для установления оптимального режима работы системы пневмотранспорта установки гидрокрекинга.
3. Показано, что выведенная формула и предложенная методика построения кривых могут быть использованы для составления соответствующих кривых зависимости перепада давления в пневмолинии от расхода транспортирующего газа в типовой промышленной установке гидрокрекинга под невысоким давлением и для определения оптимального режима их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кацобашвили Я. Р. и Мамедов А. Х. „Нефтепереработка и нефтехимия“, 1965, № 2.
2. Успенский В. А. Пневматический транспорт. Металлургиздат, 1959.

Ә. Х. Мәммәдов

Нидрокрекинг гурғусу пневмо нәглијјат системинин оптимал режимини тә’јининин бә’зи мәсәләләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә катализаторун асылы вәзијјәт сүр’әтинин тә’јини үчүн формул вә тәклиф олунмуш формула әсасән пневмо нәглијјат системинин оптимал режимини тә’јин едән әјриләрин гурулмасы вә ондан истифадә методикасы верилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијјат елмләри серијасы, 1967, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 5

М. А. МАМЕДОВ

ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ОРБИТА КОМЕТЫ 1954 XII КРЕСАК—ПЕЛЬТЬЕ

Комета открыта Кресаком (Скалнате Плеси, Чехославакия) в созвездии Волонаса 26 июня 1945 года, как объект 10-ой звездной величины. Через три дня, 29 июня, независимо от Кресака, эту комету обнаружил Пельтье (США), поэтому она получила название Кресак—Пельтье. Предварительно комета была названа 1954 d. В дальнейшем она получила окончательное обозначение 1954 XII. Комета наблюдалась всего в шести обсерваториях и никогда не была ярче 8-ой звездной величины. Последний раз комета наблюдалась 24 октября 1954 года в обсерватории Скалнате Плесо. Комета прошла через перигелий 29 августа 1954 года и после этого наблюдалась несколько раз.

Изучением физических свойств кометы занималось несколько исследователей. Сводку о физических свойствах можно найти в книге проф. С. К. Всехсвятского (1966).

Таблица 1

Автор	$T (UT)$ 1954	ω	Ω	i	равно- денст- вие	q	e	Дит. ис- точник
L. Kresak	авг. 30.060	252°. 55'	74°. 07'	91°. 25'	1954.0	0.7709	1.0	UAJ Circ. 1460
L. Cunning- ham	авг. 29.511	255.22	75.14	87.23	"	0.7377	1.0	
Merton	авг. 29.6718	254.7209	74.9229	88.5568	"	0.746437	1.0	MN 115,197
L. Cunning- ham	авг. 29.67226	254.73645	74.92642	88.53478	"	0.7462545	1.0	AN 284,121

Первая орбита кометы Кресака—Пельтье по трем наблюдениям была вычислена после открытия кометы Л. Кресаком (L. Kresak, 1954). В дальнейшем еще тремя авторами были вычислены параболические орбиты, список которых представлен в табл. 1. Для улучшения нами принята параболическая орбита, вычисленная Кеннингемом:

$$\begin{aligned} T &= 1954, \text{ авг. } 29.67226 \\ \omega &= 254^\circ.73594 \\ \Omega &= 74^\circ.87056 \\ i &= 88^\circ.53469 \\ q &= 0.7462545, \\ e &= 1.0. \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T \\ \omega \\ \Omega \\ i \\ q \\ e \end{aligned}} \right\} 1950.0$$

В вычислениях в качестве эпохи оскуляции был выбран момент 1954, августа 0.6 эфемеридного времени. Все вычисления окончательной орбиты кометы Кресак—Пельтье производились на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2.

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА НАБЛЮДЕНИЙ

Всего было собрано 32 наблюдения, которые охватывают период с 26 июня по 24 октября 1954 года. Из этих наблюдений 8 оказались приближенными. В табл. 2 перечислены обсерватории, наблюдавшие

Таблица 2

Обсерватории, в которых производились наблюдения кометы

Обсерватория	Колич. наблюдений	Лит. источник
Kordoba	3	Bol. Ins. Mat. Astr. Fis. Kordoba I, N1, 33.
Eva Peron	3	Harv. Card. 1265.
Johannesberg	3	U. C. 6, 258.
Kwasan	1	UAI Circ. 1461.
Lick	8	A. J. 60, 440.
Skalnate Pleso	1	Prace Astr. Obser. po Skal. Pleso vol. 3, 1966
Jerkes	5	A. J. 60, 60.

Таблица 3

Наблюдения комет 1954 d = 1954 XII

Эфемеридное время	$\alpha_{\text{наб}}$	$\delta_{\text{наб}}$	0—C		Равноденствие	№ обсерватории
			$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$		
1954 июнь 30.25308	14 ^h 18 ^m 40 ^s .49	8°13'15".6	+0 ^s .39	+3".5	1954,0	5
30.27110	14 18 40. 49	+ 8 10 39.4	+0.62	+7.6		5
июль 5.15891	13 42 55.40	+ 2 06 00.1	+0.19	+1.4	"	7
5.24434	13 42 20.01	+ 1 59 42.4	+0.04	+1.3	"	5
5.24875	13 42 18.41	+ 1 59 25.5	+0.03	+1.3	"	5
6.16705	13 36 04.25	+ 0 51 55.1	—0.19	+0.6	"	7
6.57010	13 33 23.26	+ 0 22 49.9	[+0.03]	—14.6	"	4
8.12764	13 33 15.83	— 1 29 06.1	+0.03	—2.3	"	7
12.20830	12 58 46.28	— 6 04 31.3	—0.09	—3.3	"	5
12.21276	12 58 45.18	— 6 04 42.0	—0.04	—0.8	"	5
14.12695	12 48 15.80	— 8 03 40.2	[+0.37]	[+5.9]	"	7
19.12868	12 23 31.44	—12 42 03.8	—0.16	+0.2	"	7
19.75036	12 20 41.72	—13 13 10.1	—0.06	—0.5	"	3
22.99549	12 06 43.48	—15 45 25.0	+0.11	—3.4	"	2
23.71720	12 03 46.81	—16 16 53.4	+0.25	—6.9	"	3
24.96175	11 58 49.71	—17 08 58.3	+0.10	—5.9	"	2
27.96021	11 47 30.07	—19 04 34.2	+0.07	—5.5	"	2
31.74446	11 34 13.63	—21 11 52.0	+0.14	—7.6	"	3
авг. 6.96071	11 14 14.06	—24 00 20.2	—0.10	—7.8	"	1
11.94181	10 59 20.70	—25 42 10.9	—0.05	—8.5	"	1
20.94821	10 34 07.52	—27 36 38.5	—0.14	—11.9	"	1
окт. 9.52505	08 52 40.73	—20 03 08.0	—0.05	—58.2	"	5
9.53543	08 52 39.51	—20 02 56.3	—0.07	—58.4	"	5
24.15244	08 19 24.64	—14 35 07.1	—1.44	—86.6	1950.0	6

комету. Там же указаны первоисточники, в которых эти наблюдения опубликованы. Все моменты наблюдений приведены к эфемеридному времени, которое отличается от всемирного в 1954 году на $\Delta t = 0^d.00036$.

В табл. 3 представлены наблюдения кометы, а также результаты сравнения наблюденных и вычисленных координат ($\Delta \alpha$, $\Delta \delta$). Из общего числа наблюдений пришлось исключить два, оказавшихся ошибочными. Они заключены в квадратные скобки. Координаты Солнца вычисляются до начала работы по методу Ньюкома и записываются во внутреннюю память машины.

§ 2. ОБРАЗОВАНИЕ НОРМАЛЬНЫХ МЕСТ И ИСПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Все наблюдения были объединены в 7 нормальных мест. В табл. 3 наблюдения, объединенные в одно нормальное место, отделены чертой. В табл. 4 даны прямое восхождение и склонение для момента нормального места, отнесенные к равнодействию 1950.0, а также величины $\Delta \alpha$, $\Delta \delta$, ρ и число наблюдений для каждого нормального места.

Таблица 4

Нормальные места

Эфемеридное время	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	$\Delta \alpha$	$\Delta \delta$	ρ	Колич. наблюдений
1954 июнь 30.25309	14 ^h 18 ^m 21 ^s .17	+08°13'13".2	+0 ^s .51	+5".55	0.60349	2
июль 5.21713	134219.49	+020304.1	+0.09	+1.33	0.61792	3
10.0	131127.88	—033724.5	—0.07	—1.45	0.64986	4
24.0	120226.38	—162741.2	+0.06	—4.23	0.80652	7
авг. 13.0	105605.14	—255903.0	—0.10	—9.40	1.06474	3
окт. 9.53024	085229.60	—200201.5	—0.06	—58.2	1.12380	2
24.15244	081925.04	—143500.4	—1.44	—86.6	0.98317	1

При исправлении орбиты использована программа, составленная автором. В результате вычислений были получены следующие поправки в исходной системе элементов:

$$\begin{aligned}dT &= -0.00644, \\d\omega &= -0^{\circ}.01542, \\d\Omega &= -0^{\circ}.00051, \\di &= +0.00481, \\dq &= +0.0001234, \\de &= +0.0001795.\end{aligned}$$

Как видно, окончательная орбита кометы 1954 XII Кресак—Пельтье оказались гиперболической.

После получения α и δ по новым элементам для каждого нормального места были вычислены невязки. В табл. 5 приведены невязки по условным уравнениям и по новым элементам. Средняя квадратическая ошибка единицы веса равна

$$\epsilon_0 = \pm 2''.78.$$

Прибавляя поправки элементов к исходной системе, находим следующую систему элементов и их средние квадратические ошибки. Оскуляция: 1955, август 6.0 эфемеридного времени

$$\begin{aligned}T &= 1954, \text{ авг. } 29.66582 \pm 0.00066, \\ \omega &= 254^{\circ}.72052 \pm 0.00074, \\ \Omega &= 74.87005 \pm 0.00059,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= 88.539501 \pm 0.00209, \\ q &= 0.7463779 \pm 0.0000042, \\ e &= 1.0001795 \pm 0.0000243. \end{aligned}$$

На выполнение этих вычислений было затрачено всего шесть минут машинного времени.

Таблица 5

Представление нормальных мест			
После улучшения			
по условным уравнениям		по новым элементам	
$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$	$\Delta \alpha \cos \delta$	$\Delta \delta$
+2".3	+0".8	+2".3	+0".8
-1.7	-0.5	-1.7	-0.5
-2.2	-0.6	-2.2	-0.6
+2.4	+1.0	+2.5	+1.0
-0.9	-2.2	-1.0	-2.2
+4.7	+0.4	+5.0	+0.5
-3.7	+0.3	-3.9	+0.3

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Макову за ценные советы по настоящей работе.

М. Э. Маммадов

Кресак-Пелте (1954, XII) кометинин сон орбити

ХҮЛАСЭ

Күнэш системинин эмэлэ кэлмэсинин өрөнилмэси мүасир астрономијанын эн вачиб мәсәлэләриндән биридир.

Мәгаләдә кометин сон орбити һесаблиыр вә онун кәләчәк вәзијәти барәдә үмуми нәтичә чыхарылыр. һесаблама „БЭСМ—2“ электронһесаблама машынында апарылмышдыр. һесаблама заманы беш бөјүк планетин (Венера—Сатурн) камети көстәрдији сарсыдычы тәсир гүввәси нәзәрә алынмышдыр. Орта квадратик хәтанын кифәјәт гәдәр аз олмасы һесабламанын доғрулуғуну көстәрир.

МҮНДӘРИЧАТ

- М. С. Әлмәмәдов. Јарымохда икинчи чәркәнин хәтти интегродифференциал тәнликләрин һәлли үчүн асимптотик формуллары 3
- А. А. Бабајева, Г. К. Намазов. Башланғыч мүстәвидә чырлашан кәсилән әмсаллы гиперболик тәнлик һаггында 11
- К. Г. Һәсәнов, Г. Т. Әһмәдов. Ади дифференциал тәнликләр үчүн мүәјјән мәһдудийәт дахилиндә бир вариасија мәсәләси 17
- Х. М. Нәчәфов. Кәсилән әмсаллы трикома типли бир тәнлик үчүн Т мәсәләсинин јекәнә һәлли һаггында 28
- Т. А. Хәлилова. Бир синиф өз-өзүнә гошма олмајан, параметрдән асылы дифференциал операторларын спектринин тәдгиги 33
- К. С. Һагвердијев, А. К. Никитин. Өзлү газын даирәви узун боруда изотермик һәрәкәти 39
- И. И. Ворович, В. С. Салһанов. Лөвһәнин әјилмәсиндә бир тәгриби нәзәријә үчүн әсас тәнликләр вә сәрһәд шәртләри 46
- Ј. М. Расизадә, Р. М. Мәммәдов. Өзлү-пластик мајеләрин ики паралел лөвһә арасында вә даирәви еп кәсикли цилиндрлик боруја структур режымдә һәрәкәти заманы истилик мүбадиләси 54
- Б. Ә. Әһмәдов, А. К. Колосовскаја. Гидаланма контурунун вә лајын дабанынын кечиричи олмасынын һоризонтал гујунун ишинә тәсири 60
- Б. О. Гасимов. $(n-1)$ -дән $\left(\frac{n}{2}\right)$ -јә каналды информасија шәбәкәләринин структурлар сајынын тәјини мәсәләсинә даир 63
- И. Д. Дагкесамански. Вулканизасија просесинин идарәдилмә мәсәләсинә даир 69
- М. А. Гулијев. Таваны мүәјјән кечиричи зоналара малик олан лајда маје ахывы 75
- Ә. Х. Мәммәдов. Нидрокрекинг гурғусу пневмо нәглијјат системинин оптимал режими тәјининин бәзи мәсәләләри һаггында 82
- М. Э. Мәммәдов. Кресак-Пелте (1954, XII) кометинин сон орбити 87

СОДЕРЖАНИЕ

М. С. Алмамедов. Асимптотические формулы для решений линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка на полуоси	3
А. А. Бабаева, Г. К. Намазов. О гиперболических уравнениях с разрывными коэффициентами, вырождающихся на начальной плоскости	11
К. К. Гасанов, К. Т. Ахмедов. Об одной задаче вариационного исчисления для обыкновенного дифференциального уравнения при наличии ограничений	17
Х. М. Наджафов. О единственности решения задачи для одного уравнения типа Трикоми с разрывными коэффициентами	28
Т. А. Халилова. Исследование спектра одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов, зависящих от параметра	33
К. С. Ахвердиев, А. К. Никитин. Об изотермическом движении вязкого газа в длинной круглой трубе	39
И. И. Ворович, В. С. Салманов. Основные уравнения и граничные условия одной приближенной теории изгиба пластин	46
Я. М. Расизаде, Р. М. Мамедов. О теплообмене при структурном режиме движения вязкопластичных сред между двумя параллельными пластинками и в круглой цилиндрической трубе	54
Б. А. Ахмедов, А. К. Колосовская. Влияние контура питания и проницаемости подошвы пласта на работу горизонтальной скважины	60
Б. О. Касимов. К вопросу определения числа структур информационных сетей с числом каналов от $n-1$ до $\left(\frac{n}{2}\right)$, где n —число источников информации	63
Н. Д. Дагкесаманский. К задаче об управлении процессом вулканизации автопокрышек	69
М. А. Гулиев. Течение жидкости в пласте с учетом наличия частично проницаемых зон на кровле	75
А. Х. Мамедов. О некоторых вопросах определения оптимального режима системы	82
М. М. Мамедов. Окончательная орбита кометы 1954 XII Кресак—Пельтье	87

Подписано к печати 29/XII 1967 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 2,88.

Печ. лист. 7,88. Уч.-изд. лист. 7,6. ФГ 21101. Заказ 392. Тираж 640.

Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров
Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, № 80.