

*Бөјүк Октябр
социалист ингилабынын
50 иллижинэ нәср олунур*

*Посвящается 50-летию
Великой Октябрьской
социалистической революции*

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

3—4

1967

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ

НАШИ ДОСТИЖЕНИЯ В ОБЛАСТИ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Физико-технические и математические науки в Азербайджане по существу начали развиваться при Советской власти. Большое влияние на это развитие оказал ряд русских и азербайджанских ученых: профессора А. М. Аммосов, А. А. Ахундов, Л. И. Елкин, З. Б. Ельяшевич, И. Г. Есьман, С. А. Кованько, Т. Г. Кулиев, Е. Б. Лопухин, П. П. Лукин, К. В. Покровский, Н. С. Усатый, М. Р. Эфендиев, доценты М. А. Абдуллаев, А. Б. Алфимов, А. Б. Бабаев, З. Е. Лозанова, Б. Р. Меликов, Б. Р. Мирзоев, И. Л. Рза-заде и др. В Баку начинал свою научно-педагогическую деятельность выдающийся физик нашего времени академик И. В. Курчатov.

Благодаря мудрой политике Коммунистической партии Советского Союза и советского правительства к концу Великой Отечественной войны Азербайджан уже имел достаточное число ученых в области физико-технических и математических наук, что позволило организовать при Азербайджанском филиале Академии наук СССР Институт энергетики и Институт физики и математики. В дальнейшем на базе этих институтов был создан целый ряд других научных учреждений, из коих в настоящее время в состав Отделения физико-технических и математических наук входят Институт физики с физико-техническим сектором, Институт математики и механики, Институт кибернетики и Шемахинская астрофизическая обсерватория.

В Отделении работает около 400 научных сотрудников, в том числе 3 академика, 6 членов-корреспондентов АН Азербайджанской ССР, 16 докторов и 128 кандидатов наук. Отделение координирует и направляет развитие физико-технических и математических исследований в республике не только в рамках академических институтов, но и тех научно-исследовательских учреждений, которые не входят в состав Академии наук Азербайджанской ССР.

В Институте физики проводятся исследования в области теоретической физики, атомарных полупроводников, бинарных тройных и более сложных систем, $p-n$ -переходов, жидкого состояния вещества, рентгенофизики, радиофизики и др.).

Изучены влияние фoрмфакторов, а также поляризационных эффектов в процессах электромагнитной и слабой аннигиляций электронно-позитронных пар в пару спинорных частиц (Н. А. Гулиев, Ф. С. Садыхов). Проведено теоретическое исследование поляризации нуклонов при рассеянии на ядрах (Н. А. Гулиев).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор) Г. А. Абдуллаев (зам редактора), А. И. Гусейнов (зам редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“

1250793

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА

Академия наук Азербайджанской ССР

В области теории твердого тела с единой точки зрения построены квантовая теория косвенного обмена и его анизотропии, а также микроскопическая теория магнетоэлектрических явлений (Ю. М. Сеидов). Разработан метод вычисления магнитооптических эффектов в квантующих магнитных полях. Исходя из общих дисперсионных соотношений, вычислены коэффициент межзонного поглощения света и эффект Фарадея в скрещенных электрических и магнитном полях (Ф. Н. Гашимзаде).

Развита теория поперечного термомагнитного эффекта Нернста—Эттингсгаузена в квантующем магнитном поле с учетом спина электронов, проводимости, определен критерий вырождения электронного газа, изучены общие свойства энергетического спектра бинарных и тройных полупроводниковых соединений, определены места расположения экстремумов энергетических зон и места смыкания последних (Б. М. Аскеров и Ф. М. Гашимзаде).

Проводятся работы по изучению монокристаллов новых полупроводниковых соединений, изучению их электрических, оптических, фотоэлектрических, термодинамических свойств, изучению диффузионных процессов и упругости насыщенных паров. Институт является головной организацией по комплексному исследованию селена и приборов из него.

Исследования по селену показали, что при кристаллизации вследствие активизации акцепторных центров тип проводимости селена переходит от электронного к дырочному.

Методом ЭПР исследовано состояние кислорода и других примесей в селене, что позволило управлять свойствами селена и параметрами селеновых приборов (Г. Б. Абдуллаев, Г. М. Алиев, Н. И. Ибрагимов, М. М. Алекперова, М. А. Талиби).

Исследована теплопроводность германия и кремния, легированных различными примесями. Показано, что теплопроводность решетки этих элементов зависит от типа и концентрации легирующих примесей (М. Н. Алиев). Исследования монокристаллов твердых растворов теллур—селен позволили наблюдать увеличение подвижности носителей тока в этой системе при определенной концентрации селена. Впервые выращены кристаллы мышьяка, твердых растворов сурьма мышьяк и исследованы их электрические свойства в широком интервале концентрации (А. А. Кулиев, М. Г. Шахтахтинский, В. Г. Тагиров).

Разработаны методы получения монокристаллов новой группы полупроводников $A^{III}B^{VI}$, где имеются легколетучие компоненты. Выявлено наличие взаимосвязи между ионной долей связи и электроотрицательностью, между шириной запрещенной зоны и средним атомным весом, а также определены основные параметры, характеризующие полупроводимость данного класса кристаллов. Исследование электрических, термоэлектрических, фотоэлектрических, оптических и выпрямляющих свойств полученных монокристаллов дало основание ожидать наличия электролюминесценции, рекомбинационного и индуцированного излучения под действием быстрых электронов, увлечения носителей тока фононами, высокой фоточувствительности. Обнаружено, что под действием постоянного и переменного электрического поля монокристаллы GaSe светятся. При этом свечение с усилением поля распространяется до анода. Установлено, что в монокристаллах GaSe при возбуждении быстрыми электронами имеет место индуцированное излучение с максимумом $5939 \text{ \AA}$ при 77°K . Данная линия совпадает с электронной линией поглощения и поэтому можно предположить, что имеет место экситонный механизм рекомбинации. На основе GaSe был создан оптический квантовый генератор, возбуждаемый быстрыми

электронами с помощью излучающих зеркал (Г. Б. Абдуллаев, Г. А. Ахундов Э. Ю. Салаев).

Исходя из принципа кристаллохимической аналогии, впервые показано предположение о существовании нового класса трехкомпонентных полупроводниковых соединений типа $A^{III}B^{III}C_2^{IV}$ и $A^{II}B^{III}C_2^{VI}$. Указанные соединения должны являться тройными аналогами бинарных полупроводниковых соединений $A^{III}B^{VI}$, из коих многие получены в виде монокристаллов, на которых проводились структурные и физические исследования (Г. Д. Гусейнов).

Методом электродвижущих сил ведутся термодинамические исследования бинарных полупроводниковых систем. Полученные данные позволяют судить о прочности химической связи и термической устойчивости. Рассчитаны абсолютные величины энтропий исследованных фаз при 298°K . Вычислены энергии и энтропии атомизации указанных веществ (К. А. Шарифов, А. С. Аббасов). Исследована теплоемкость слоистых и цепочечных структур соединений селенидов галлия, таллия и индия в области температур от твердого азота до комнатных. Показано, что в данном интервале температур теплоемкость этих соединений не подчиняется теории цепочечных и слоистых структур (И. Г. Керимов).

Кинематическим методом исследованы взаимодействие пленок ряда двойных систем, а также стабильность соединений, образующихся между компонентами. Полученные результаты позволили заключить, что реакция между пленками протекает по механизму реактивной диффузии, имеет ступенчатый характер, равновесная фаза образуется не сразу, а через промежуточные фазы (Г. А. Эфендиев, Р. Б. Шафизаде).

Впервые на базе селена высокой чистоты получены селеновые выпрямители, обратный ток в которых при высоких температурах ($350\text{--}400^\circ\text{K}$) достигает насыщения. На базе данных исследований получены высокотемпературные селеновые фотодиоды и полевой транзистор. Обнаружены и изучены индуктивные свойства $p\text{--}n$ -переходов, предложены методы измерений температуры $p\text{--}n$ -перехода и распределения потенциала (З. А. Алирова, Ш. М. Алекперова, М. Я. Бакиров, З. А. Искендерзаде).

Разработаны методы исследования вязкости жидкостей и газообразных сред при ортобарических условиях в широком интервале температур, включающем и критическую область. Исследована вязкость двойных смесей некоторых углеводородов в зависимости от концентраций в интервале $-40\text{--}60^\circ\text{C}$. Изучена вязкость различных нефтепродуктов при давлениях до 1000 ат , а также бинарных смесей гомологов бензола при $20\text{--}80^\circ\text{C}$ (Х. М. Халилов).

Разработан рентгено-дифрактометрический метод получения изотермических кинетических кривых кристаллизации при переходе веществ из аморфного в поликристаллическое состояние. Показано, что энергия активации кристаллизации зависит от чистоты вещества и вводимых в него примесей. Эти результаты представляют непосредственный интерес для заводов, изготавливающих селеновые приборы (К. П. Мамедов, З. Я. Нуриева и др.).

Исследованы структура и физические свойства сплавов и установлена для них справедливость закона Видемана—Франца.

Проводятся исследования по изучению диэлектрических свойств веществ и по разработке новых радиотехнических методов определения диэлектрических коэффициентов. С целью получения энергетических и структурных характеристик молекул исследован сверхвысокочастотный спектр поглощения молекулы этилового спирта и ее дейтерированных разновидностей, молекул хлорфторэтана, трифторэтана, трифторэтилена и их изотопических разновидностей. В системе хлорбензол—бутиловый спирт обнаружена дисперсия, характеризующаяся

асимметричным распределением времени релаксаций при температурах ниже ливидуса. Проводились исследования микроволнового вращательного спектра молекулы нормального пропилового спирта и этилмеркаптана методом газовой радиоспектроскопии. Установлено, что молекула этилмеркаптана является молекулой типа асимметричного волчка, близкой к вытянутому симметричному волчку, и принятая для расчетов жесткая модель молекулы вполне приемлема для рассмотрения переходов (А. М. Иманов, Е. О. Каджар, А. А. Абдулрахманов, Я. М. Аббасов).

Проводятся работы по исследованию структуры и физических свойств молекул жидкостей методом комбинационного рассеяния света. На основании экспериментального материала был установлен новый закон частотной зависимости интенсивности линий комбинационного рассеяния света молекулы с сопряженными кратными связями. Широкое развитие получили исследования по люминесценции кристаллофоров и ароматических углеводородов (А. Х. Халилов, А. Д. Мамедов, Ф. К. Исаев).

В Физико-техническом секторе Института физики АН Азербайджанской ССР проводятся исследования по физико-техническим проблемам энергетики. К этому направлению относятся работы, посвященные исследованию возможности использования электрических полей и рядов в технологии, исследования электрофизических процессов в изоляционных материалах, исследования электромагнитных переходных процессов в сложных электрических системах и работы по преобразованию энергии солнца и ветра.

Разработаны электроимпульсные методы разделения эмульсий, в частности метод обезвоживания и обессоливания нефтей импульсным напряжением, имеющий большое практическое значение особенно для химической и нефтедобывающей промышленности. Этот метод является новым научным направлением в технике подготовки нефтей к переработке и обладает высокой перспективностью, рекомендован к внедрению в нефтяных районах страны и отмечен большой серебряной медалью ВДНХ (Ч. М. Джуварлы).

Актуальны работы по электрическому воздействию на истощенные нефтеносные пласты, с целью создания первоначального очага горения в пласте. Успешное завершение этих работ позволит значительно повысить суммарную нефтеотдачу многих месторождений, особенно с тяжелой нефтью (Ч. М. Джуварлы, М. А. Багиров, Г. В. Вечхайзер).

Проводятся исследования закономерностей электрического разряда в газе при наличии диэлектрического барьера между электродами. Эти исследования открывают возможность соответствующей обработки поверхности полимерных диэлектриков для придания необходимых адгезионных свойств и выявляют закономерности поведения слоистых изоляционных материалов под воздействием частичных разрядов. Проведено исследование барьерного разряда в узких щелях при различных условиях и получен ряд важных характеристик разряда, в частности обнаружена область давлений и расстояний, где характер разряда претерпевает существенные изменения (Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, Ю. В. Горин, П. В. Леонов).

Проведена большая серия работ по исследованию электрофизических свойств изоляционных масел, а также процессов старения полимерных пленок в электрическом поле. Выяснены природа диэлектрических потерь и механизм электропроводности, влияние исходного сырья и технологических факторов на электрофизические показатели и стабильность масел. Установлены оптимальные технологические условия производства и влияние сернистых соединений различного класса на электрофизические свойства и стабильность масел, изготовленных

из сернистых нефтей. Показаны преимущества адсорбционного метода очистки, внедрение которого откроет большие перспективы для производства высококачественных изоляционных масел и расширит сырьевые ресурсы для их получения. Начаты работы по изучению поведения изоляционных масел в сильных электрических полях. Исследуются механизм пробоя изоляционных масел, воздействие на них электрического разряда, поведение масел в условиях ионизированной газовой среды и др. (Ч. М. Джуварлы, Л. А. Мухарская).

Проводятся важные исследования по влиянию электрических полей и разрядов на диэлектрические и механические свойства полимеров и исследования взаимосвязи между строением полимеров и их диэлектрическими и механическими свойствами. Исследованы изменения ряда электрофизических характеристик, температурно-временная зависимость механической прочности полистирольной пленки от величины приложенного электрического напряжения, вызывающего старение, получен ряд важных выводов (М. А. Багиров, С. А. Аббасов, Н. В. Климова).

В Секторе разрабатываются методы расчета с помощью ЦВМ электромагнитных процессов в электрических сетях любой сложности при учете различных физических факторов, влияющих на указанные процессы. Рассмотрен вопрос о решении уравнений линий электропередач с учетом поверхностного эффекта и короны, составлены алгоритмы и программы расчета различных переходных процессов в электрической сети (Ч. М. Джуварлы, Е. В. Дмитриев).

Исследована возможность разземления нейтрали у части трансформаторов в современных мощных электрических сетях. В результате исследований, проведенных с помощью ЦВМ и физических моделей, выяснены факторы, влияющие на повышение напряжения на разземленной нейтрали трансформаторов. Предложены методика наиболее рационального выбора места разземления нейтрали, способ защиты изоляции нейтрали трансформаторов от опасного повышения напряжения. Эти результаты используются в разрабатываемых в настоящее время в Союзе рекомендациях для СЭВ по уровню разземления нейтрали трансформаторов в защите ее изоляции (Ч. М. Джуварлы, Е. В. Дмитриев, Э. М. Джафаров).

Значительная работа проведена по ветро- и гелиотехнике. Составлен и опубликован ветроэнергетический и частично гелиокадастр Азербайджана, проведены исследования, связанные с изучением теплового режима гелиотеплиц, по использованию ветровой и солнечной энергии в качестве автономного источника питания для защиты от коррозии индивидуальных морских оснований и магистральных трубопроводов, по изучению структуры ветрового потока с точки зрения влияния ее на прочностные характеристики ветродвигателя. Создан опытно-показательный полигон в районе ст. Гюздек (В. И. Есьман, К. Х. Сафаров, Г. А. Фаривер, П. Ф. Рзаев и др.).

В Шемахинской астрофизической обсерватории проводятся исследования по физике Солнца, физике звезд, планетной астрономии и др. Изучение физики Солнца проводилось с помощью хромосферно-фотосферного телескопа. Выполнена большая разнообразная программа по „Службе Солнца“, Международному геофизическому году, Международному году спокойного Солнца и другим специальным заданиям.

За десять лет, особенно в период максимума солнечной активности, зарегистрированы, измерены и обработаны тысячи образований на Солнце — вспышки, волокна, протуберанцы, — получены тысячи фотогелиограмм.

Выяснено, что хотя солнечные вспышки обладают в общем одинаковыми особенностями развития, тем не менее наблюдаются

Разработаны численные методы решения задач с неизвестными подвижными границами (задач типа Стефана). Эти методы позволяют относительно легко и успешно решать аналогичные задачи вытеснения также и в тех случаях, когда увеличение числа фаз приводит к серьезным вычислительным трудностям (К. Ф. Ширинов, В. Г. Пирмамедов).

Применением сеточных моделей и метода электрогидродинамической аналогии решен ряд задач, связанных с рациональной разработкой нефтяных месторождений и строительством туннелей. Ведутся исследования по изучению процессов, протекающих в нефтяных и нефтегазовых пластах, с целью выявления их закономерностей для последующего оптимального управления (Ф. Г. Гасанов, Ю. А. Бабиц). Построен численный метод решения задачи обтекания тонкого треугольного крыла сверхзвуковым потоком идеальной жидкости (Д. А. Бабаев).

Применением вновь разработанного математического аппарата преобразования Лапласа—Галуа построена теория линейных последовательностей машин, подобная хорошо известной теории линейных импульсных систем (Р. Фараджев). Промоделированы на ЭЦВМ решающие алгоритмы, позволяющие построить машинные доказательства утверждений из алгебры полиномов и из теории пределов (Н. Джафарова, С. В. Пшеничникова).

Значительные результаты получены при исследовании несамосогласованных операторов, рационально зависящих от спектрального параметра. Показано, что собственные значения и собственные функции могут быть определены численно решением той же задачи для некоторых конечномерных операторов. Эти результаты были применены для решения некоторых задач, связанных с устойчивостью плоского движения вязкой жидкости (Д. Э. Аллахвердиев).

Проводятся работы по исследованию структурных свойств сингулярных интегральных операторов и их применению к сингулярным уравнениям (А. И. Гусейнов, В. В. Салаев).

Исследовалась устойчивость решений дифференциальных уравнений. Установлен критерий монотонной устойчивости систем, нейтральных в линейном приближении. Получены необходимые и достаточные условия сохранения нейтральности во втором приближении при наличии внутреннего резонанса (З. А. Искендер-заде, Н. К. Ибрагимов).

Исследована задача обслуживания неординарного потока n одинаковыми приборами. Получено обобщение классической задачи теории нового обслуживания Эрланга. Решена задача обслуживания при наличии профилактики и восстановления и исследован вопрос влияния надежности приборов на характеристики обслуживания. Осуществлено статическое моделирование действующего производственного процесса автоматизированного стана печной сварки труб. Предложен метод „группового обслуживания“ для моделирования некоторых процессов и способ нахождения оценок параметров вероятных распределений (Т. И. Насирова, Г. А. Алиев, И. Ш. Ибрахмалилов).

На базе действующей промышленной установки Новобакинского нефтеперерабатывающего завода составлена математическая модель процесса. Система автоматического управления процессом каталитического крекинга, основанная на построенной модели, после промышленных испытаний рекомендована к внедрению на Новобакинском нефтеперерабатывающем заводе (К. Ф. Ширинов).

Проведены работы по математическому моделированию и оптимизации процесса синтеза акрилонитрила в „кипящем“ слое катализатора. На основе построенной математической модели решена задача оптимального размещения газораспределяющих решеток в реакторе. Решена также задача определения оптимального режима трубчатого реактора

идеального вытеснения для получения окиси этилена (С. Р. Мусаев Н. Д. Дагкесаманский).

Методами математического программирования исследован ряд задач рациональной разработки нефтяных месторождений. Разработан метод треугольной матрицы для расчета временных характеристик сетевого графика. Метод эффективен для ручного счета и впервые был применен в г. Челябинске при сооружении блюминга 1300 (Мустафазаде, В. И. Теймуров).

Ведутся исследования целочисленных моделей математического программирования. Рассмотрена задача оптимального резервирования. Математически задача сводится к определению минимума аддитивной выпуклой функции при линейных ограничениях на целочисленные переменные. Был предложен приближенный численный метод решения. Предложены приближенные численные методы решения целочисленных задач оптимального резервирования и целераспределения. Разработаны алгоритм и программа для построения оптимальной трассы, соединяющей заданные точки (Д. А. Бабаев).

Выполнены исследования по применению математических методов и вычислительной техники в планировании производства на нефтеперерабатывающих предприятиях. Разработана методика составления экономико-математической модели завода или группы нефтеперерабатывающих предприятий и на основе этой методики разработан годовой производственный план НБНЗ им. Владимира Ильича (А. Амирагов).

Разработана и построена первая в Союзе универсальная цифровая вычислительная машина ЛЭМ-1 на феррит-диодных элементах. Предложена методика подсчета расхода газа, разработано и построено специализированное цифровое вычислительное устройство для централизованного подсчета расхода газа и цифровой регистрации. Устройство совместно с телемеханической системой, разработанной НИПИ „Нефтехимавтомат“, прошло опытно-промышленное испытание и рекомендовано для внедрения на газовых промыслах страны. Создано специализированное цифровое вычислительное устройство для автоматического подсчета дебита нефтяных скважин. Разработаны алгоритмы и создаются устройства для распознавания и анализа телединамограмм глубинных насосов с целью выявления характерных неполадок и установления оптимального режима эксплуатации глубинно-насосных скважин (Ю. А. Махмудов, Г. Х. Алиев).

Разработаны различные варианты преобразователей непрерывно изменяющихся величин в цифровой код, предназначенный для ввода первичной информации от различных объектов в ЭЦВМ (С. А. Алескеров, Р. Я. Касумов).

Институт кибернетики постоянно проводит работу по математической постановке, программированию и решению на электронных вычислительных машинах задач для различных научно-исследовательских и промышленных организаций республики, по распространению методов кибернетики и разъяснению принципов, возможностей и областей применения электронных вычислительных машин, систематически организует семинары для специалистов различных ведомств.

В Институте математики и механики разрабатываются следующие основные научные направления: функциональный анализ с применением дифференциальных уравнений, конструктивная теория функций, теория упругости и пластичности, гидродинамика реальных жидкостей.

Построена общая теория сингулярных операторов в банаховых пространствах, являющаяся абстрактным аналогом теории линейных сингулярных уравнений (З. И. Халилов).

Азербайджанские математики активно работают в области функционального анализа и его применений, и Баку стал одним из основных центров развития этой важнейшей отрасли современной математики.

Именно здесь появились одни из первых в Союзе работы по дифференциальным уравнениям в абстрактных пространствах. Сейчас в Институте математики и механики, так же как и в некоторых других научных центрах Союза и зарубежных стран (США, Япония), эта отрасль активно развивается. В Институте получены важные результаты, относящиеся к разрешимости задачи Коши для уравнений в банаховом пространстве и их применению к уравнениям в частных производных, к задачам оптимального управления системой с бесконечным числом степеней свободы, к исследованию асимптотического поведения решений (З. И. Халилов, С. Я. Якубов, Ю. О. Домшлак, Т. А. Заманов).

Ряд исследований посвящен спектральной теории несамосопряженных операторов как дифференциальных, так и общих. В основном изучались структура спектра и полнота системы собственных и присоединенных функций. Найдены условия кратной полноты системы собственных и присоединительных функций несамосопряженных операторов, мероморфно зависящих от параметра. Найдены условия полноты некоторой части системы собственных и присоединенных функций несамосопряженных операторов. Получены разложения по решениям задачи квантовой теории рассеяния для уравнения Шредингера любой квадратинтегрируемой функции (З. И. Халилов, М. Г. Джавадов, Дж. Э. Аллахвердиев, Ф. Г. Максудов, М. Г. Гасымов).

Цикл работ посвящен функциональным и приближенным методам исследования краевых задач для квазилинейных уравнений в частных производных. Отметим здесь установление разрешимости общих граничных задач некоторым аналогом метода Галеркина, исследования по теории смешанных задач с различными коэффициентами, развитие приближенных методов решения нелинейных операторных уравнений с недифференцируемыми операторами типа метода касательных парабол и гипербол (Г. Н. Агаев, Ш. И. Векилов, Г. К. Намазов, Р. М. Алиев, Р. А. Шафиев).

Ряд работ посвящен исследованию дифференциальных уравнений с малым параметром. Построена асимптотика по малому параметру при старшей производной для решения уравнения второго порядка в банаховом пространстве, решена задача о стационарных соотношениях квантово-механической частицы, находящейся в глубокой потенциальной яме, построена асимптотика по малому параметру, входящему в геометрию области решения краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка (А. М. Ахмедова, М. Г. Джавадов, Б. Н. Панайоти).

Получены также существенные результаты в области конструктивной теории функций, в основном в области экстремальных задач в классе целых функций (И. И. Ибрагимов). Установлен ряд точных неравенств между различными нормами целой функции многих переменных конечной степени по каждому переменному. Цикл исследований посвящен изучению задач приближения в пространствах со взвешенной нормой и применению этих задач к установлению новых прямых и обратных теорем вложения. Изучен интерполяционный процесс типа Ньютона, узлы которого являются нулями данной целой функции (И. И. Ибрагимов, А. С. Джафаров, А. Гамидов, М. Б. Бабаев). Существенные результаты получены также по теории рядов Фурье, по общим ортогональным системам (А. Махмудов, Г. М. Джафарли).

Основным направлением научной работы Института в области механики являются исследования по научным основам прочности и пластичности. В этой области усилия направлены главным образом на решение актуальных статических и динамических задач теории упругости и пластичности—разработку точных и приближенных методов теории упругости и пластичности, теоретические и экспериментальные

исследования законов динамического деформирования материалов. При этом особое внимание уделяется изучению материалов полимерной структуры.

Отметим некоторые основные результаты, полученные в этом направлении. Предложена новая модель физической зависимости „напряжение—деформация“ (скорости напряжения и скорости деформации). На основе модели разработаны методы исследования физико-механических свойств материалов, особенно материалов полимерной структуры; установлен предел применимости принятого закона деформирования. Решены задачи об ударе по деформируемой нити с учетом сопротивления среды. Разработаны точные и приближенные методы решения задачи поперечного удара по нити, проходящей через систему гладких не вращающихся блоков с неподвижными центрами, применяемых в аэрофинишерах (К. А. Керимов, Д. Д. Агаларов, П. А. Рахманов, Ф. Д. Теймуров).

Изучена концентрация напряжений возле отверстий различной формы в пластических полых цилиндрических и сферических оболочках, а также деформация изотропных и ортотропных мембран и оболочек при больших прогибах. Исследована концентрация напряжений в пластинках с рядом отверстий, в которые посажены шайбы из другого материала. Решены также задачи оптимального проектирования наиболее употребимых элементов конструкций, их приспособляемость и устойчивость с учетом ползучести (Ю. А. Амен-заде, Ф. Г. Шамиев, А. М. Дадашев, М. Р. Ибрагимов, И. Мамедов).

Говоря о перспективах развития работ, следует отметить, что в свете решений XXIII съезда КПСС перед институтами Отделения стоят большие и важные задачи.

В Институте физике предусматривается развитие исследований по изучению магнитооптических эффектов в полупроводниках с учетом механизмов рассеяния в квантовых полях, по получению, легированию и изучению физических свойств монокристаллов, по созданию новых источников когерентного и некогерентного излучения, высокоэффективных преобразователей в области высоких температур. Методами электронографии и электронной микроскопии намечается выяснить механизм в кинетику реакций между двойными слоями фазовых переходов в пленках. Будут проведены исследования микроволновых вращательных спектров молекул замещенных углеводородов и полимеров, комплексное исследование природы взаимодействия и микроструктуры центров захвата и центров свечения в кристаллофосфорах и др.

В физико-техническом секторе значительно расширятся исследования электрофизических процессов в газообразных, твердых и жидких диэлектриках, будут разрабатываться вопросы, связанные с изысканием новых способов непосредственного применения электричества в технологии, намечается разработка новых методов расчета переходных процессов в сложных электрических системах с помощью ЦВМ и исследование самих переходных процессов. Намечены исследования по применению низкотемпературной плазмы для интенсификации процессов в нефтехимии. Будут разрабатываться вопросы опреснения и очистки воды методом электролиза, а также новые вопросы по преобразованию энергии солнца и ветра в электрическую, механическую и другие виды энергии.

В Шемахинской астрофизической обсерватории дальнейшее развитие получают исследования по физике Солнца, физике звезд и по планетной астрономии. Будут исследоваться хромосферные вспышки, физические условия в протуберанцах, флоккулах, магнитные поля в пятнах, тонкая структура солнечной фотосферы и хромосферы, радио-

излучение Солнца и др. Намечается изучение особенностей новых и новоподобных звезд в тесных двойных системах, а также нестационарных звезд, изучение изменения спектра магнитных звезд и свойств плотных звезд и происходящих в них процессов. Будут продолжены исследования по происхождению астероидов в результате распада первичных крупных тел и начаты работы по изучению атмосфер Венеры и Марса.

В Институте кибернетики намечается проведение исследований, направленных в основном на разработку и применение математических методов вычислительной техники для решения задач оптимизации планирования и управления в нефтедобывающей и нефтехимической промышленности и в экономике. Будут проводиться работы в области теории автоматов и теории алгоритмов, численных методов решения уравнений математической физики, исследования по разработке принципов построения и применения специализированных вычислительных и информационно-технических устройств и автоматизированных систем управления, планирования и учета для ведущих отраслей промышленности.

Перед институтом математики и механики стоит важная задача развития новых направлений современной математики, связанных с главными научными направлениями Института, таких как гомологическая алгебра и ее применения к общей теории дифференциальных уравнений и теории функций многих комплексных переменных. В области механики получают дальнейшее развитие исследования, проводимые по статическим и динамическим задачам теории прочности и пластичности, по гидродинамике реальных жидкостей, связанные главным образом с научной проблематикой нефтедобычи, нефтепереработки и нефтехимии.

В организации научных исследований в наших учреждениях и в подготовке кадров большую помощь оказали и оказывают выдающиеся ученые страны академики В. А. Амбарцумян, Н. Г. Басов, А. И. Берг, В. И. Глушков, А. А. Дородницын, М. В. Келдыш, А. А. Михайлов, Н. И. Мухомелов, В. И. Попков, А. М. Прохоров, А. Н. Тихонов, члены-корреспонденты АН СССР И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, М. В. Костенко, О. А. Мельников, Э. Р. Мусстель, А. Р. Нейман, А. Б. Северный, акад. АН Азербайджанской ССР Х. И. Амирханов, акад. АН УССР Я. Б. Лопатинский, акад. АН Узбекской ССР Х. А. Рахматуллин, профессора В. А. Крат, А. Г. Масевич, Д. Н. Наследов, Л. С. Полак, Д. В. Разевиг, А. Р. Регель и др. Пользуясь случаем мы приносим им глубокую благодарность.

Институты, входящие в Отделение, поддерживают тесные творческие контакты с головными институтами Союза, принимают активное участие во Всесоюзных конференциях и симпозиумах по важнейшим направлениям науки. Своими исследованиями ученые Азербайджана обогащают советскую науку. Их результаты используются во многих других научно-исследовательских учреждениях и в народном хозяйстве. За последние годы значительно окрепли научные связи ученых Азербайджана с учеными зарубежных стран. Ученые Отделения принимали участие в Международных конгрессах, съездах, симпозиумах и конференциях в США, Англии, Франции, Японии, ГДР, ФРГ, Болгарии, Финляндии и в ряде других стран. Труды многих наших ученых опубликованы не только в Союзной печати, но и за рубежом. Все это свидетельствует о возросшем авторитете азербайджанской физико-технической и математической науки — детище Великой Октябрьской революции.

Я. Н. НАСИРОВ, В. А. НАГИЕВ, А. А. ЗЕЙНАЛОВ

ВЛИЯНИЕ МАЛЫХ ЗАМЕЩЕНИЙ ГЕРМАНИЯ КАДМИЕМ НА ТЕПЛОВЫЕ И ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА GeTe

Исследования систем $A^{IV}B^{IV} - A^{II}B^{VI}$, где $A^{II} - Zn, Cd, Hg$; $A^{IV} - Ge, Sn, Pb$, а $A^{VI} - Te$, изучены очень мало [1, 2]. В работе [1] были исследованы системы $SnTe - CdTe$, $SnTe - ZnTe$, $PbTe - ZnTe$, $PbTe - CdTe$ и определены зависимости некоторых структурных параметров от состава твердых растворов. При этом малые замещения компонентов в порядке до 10 мол% исследованы не были. Влияния малых замещений Ge цинком на термоэлектрические свойства GeTe изучалось в работе [2], где при содержании ZnTe в растворе до 1 мол% наблюдается процесс «заполнения» дефективных мест из-под германия и появление новых «дефектов», обусловленных образованием твердых растворов, что связано с дефектностью кристаллической структуры и сложностью валентной зоны GeTe.

Настоящая статья посвящена исследованию систем $[GeTe]_{1-x} - [CdTe]_x$ при значениях $x \leq 0,08$, где x — молярная доля растворенного компонента. Исследование сплавов с содержанием CdTe более 10 мол% не представляло в данном случае интереса в связи с тем, что «аномалии», присущие GeTe, обнаруживаются лишь в указанной выше области. Были проведены измерения термоэдс, электропроводности в широком интервале температур, а э. д. с. Холла — при комнатной температуре на всех исследованных нами образцах. В работе приводятся результаты измерения термоэдс, теплопроводности, значения концентрации и подвижности носителей тока (вычисленные из

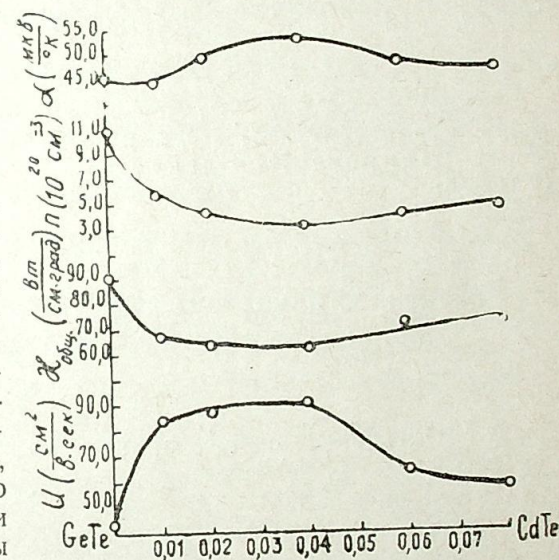


Рис. 1

Зависимость термоэдс, теплопроводности, концентрации и подвижности носителей тока от состава при комнатных температурах.

э. д. с. Холла, измеренные при интенсивности магнитного поля 10^4 э в зависимости от состава при комнатной температуре.

В отличие от малых замещений германия цинком, максимум термоэдс обнаруживается на сплавах $\text{Ge}_{0,96}\text{Cd}_{0,04}\text{Te}$. Концентрация носителей

тока при этом обнаруживает минимальное значение, т. е. падает от $1,1 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ для GeTe до $3,0 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ для указанных сплавов, а затем растет незначительно, до $4,6 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ для сплава $\text{Ge}_{0,92}\text{Cd}_{0,08}\text{Te}$.

Общая теплопроводность (измеренная экспериментально) также обнаруживает минимум на сплавах состава $x = 0,04$, т. е. уменьшается от $90 \text{ Вт/сек} \cdot \text{град}$ для GeTe до $63 \text{ Вт/сек} \cdot \text{град}$ для $\text{Ge}_{0,96}\text{Cd}_{0,04}\text{Te}$, а затем

растет до $72 \text{ Вт/сек} \cdot \text{град}$ для сплавов состава $x = 0,08$. Подвижность носителей тока при содержании GdTe в сплаве до 1 мол% резко растет до $85 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{сек}$, а затем незаметно до $90 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{сек}$ (до максимума) для $\text{Ge}_{0,96}\text{Cd}_{0,04}\text{Te}$. При дальнейшем увеличении CdTe до 8 мол%

подвижность падает до $\sim 57 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{сек}$.

По результатам измерений термоэдс, теплопроводности и э. д. с. Холла можно предполагать, что в области малых замещений германия кадмием происходит как „заполнение“ дефектных мест из-под германия в GeTe , так и образование твердых растворов. Причем в области $x \leq 0,04$ преобладает процесс уменьшения концентрации дефектов из-под германия, а в области $0,04 < x \leq 0,08$ появление „новых“ дефектов обусловлено образованием твердых растворов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenberg A. J., Grierson R., Woolley J. C., Nicolik P., Trans Metallurg. Soc. AIME, 1964, 230, № 2, 342—350.
2. Насиров Я. Н., Нагиев В. А., Зейналов А. А., „ДАН Азерб. ССР“ (в печати).

Я. Н. Насиров, В. Э. Нагиев, А. Э. Зейналов

Германијаны кадмилә эвәз етмәнин GeTe бирләшмәсинин истилик вә электрофизики хассәләринә тәсири

ХҮЛАСӘ

$\text{A}^{\text{IV}}\text{B}^{\text{VI}} - \text{A}^{\text{II}}\text{B}^{\text{VI}}$ системләринин, мәхсусән $\text{A}^{\text{II}} = \text{Zn}, \text{Cd}, \text{Hg}$; $\text{A}^{\text{IV}} = \text{Ge}, \text{Sn}, \text{Pb}$ вә $\text{A}^{\text{VI}} = \text{Te}$ олан һалда, тәдгигат ишләри чох аз апарылмышдыр.

Һазыркы иш $[\text{GeTe}]_{1-x} - [\text{CdTe}]_x$ системиндә $x < 0,08$ тәркибә малик мәһлулар термоэлектрик хассәләри тәдгигинә һәсрәдилмишдир. Мүшәһидәләр көстәрир ки, тәдгигат едилмиш областда GeTe анд олан хассәләр сахланылыр. Тәдгигатлар көстәрир ки, CdTe кичик фаизләриндә бирләшмәсинә GeTe -лә анд олан бош јерләрин тутулмасы вә һәм дә бәрк мәһлулун јаранмасы мүшәһидә олунур ки, бу да өзүнү бүтүн истилик вә электрофизики хассәләрдә көстәрир. Јәни јүк дашы-јычыларын сыхлығы вә јүрүклүлүјү вә һәм дә истилик кеңирмә әмсалы мәһлулун тәркибиндән асылы олараг өзләрини көстәрилән областда мүхтәлиф апарырлар.

Башлангыч тәдгигатлар көстәрир ки, һәмин груп элементләриндән чивә дә германија илә эвәз едилсә, ујғун һадисә мүшәһидә едиләчәкдир.

А. А. КУЛИЕВ, М. Г. ШАХТАХТИНСКИЙ, Д. С. ТОМТИЕВ

ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ ВИСМУТ—СУРЬМА

Интерпретация гальваномагнитных свойств твердых тел обычно основывается на теоретических расчетах при определенных модельных представлениях о структуре энергетических зон. Феноменологическая теория исходит из записи закона Ома:

$$E_i = \sum_j \rho_{ij}(H) I_j, \quad (1)$$

связывающего компоненты электрического поля (E_i) и тока (I_j) через тензор сопротивления, компоненты которого, в свою очередь, являются функцией магнитного поля. Для слабых полей в разложении

$$\rho_{ij}(H) = \rho_{ij} + \rho_{ijk} H_k + \rho_{ijkl} H_k H_l \quad (2)$$

принимаются ограничения, налагаемые симметрией кристаллов и принципом Онзагера. В работе [1] показано, что симметрии кристаллов типа висмута соответствуют две независимых компоненты тензора сопротивления (ρ_{ik}), две независимых компоненты тензора коэффициента Холла (ρ_{ikl}) и восемь независимых компонент магнитосопротивления (ρ_{ijkl}). Выражения (1) и (2) могут быть также записаны для обратных тензоров проводимости σ_{ij} , σ_{ijk} , σ_{ijkl} .

При вычислениях согласно модели зонной структуры обычно исходят из независимости вкладов отдельных эллипсоидов в общий ток (предполагается пренебрежение межзонными переходами). Расчеты производятся для моделей, в той или иной степени приближающихся к действительной форме поверхностей Ферми для электронов и дырок. Первым приближением является представление поверхностей равных энергий в К-пространстве в виде сфер [2]. Для чистого висмута широкое распространение получила модель, рассчитанная в [3], в предположении одного эллипсоида вращения для дырок, вытянутого вдоль тригональной оси кристалла, и трех эллипсоидов общего вида для электронов с осями, совпадающими с направлениями главных осей кристалла и переходящих друг в друга при повороте на 120° вокруг тригональной оси.

В предположении изотропности времени релаксации вклад плотности тока в заданном направлении от одного экстремума равен [3]

$$i_i = \sum_k \sigma_{ik} \left[E + \frac{1}{nec} I \times H \right], \quad (3)$$

где n —число носителей вблизи экстремума на единицу объема кристалла. Компоненты тензора σ_{ik} определяются выражением

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{e^2 n \tau}{m_i} \right) \delta_{ik} = e n u_i \delta_{ik}, \quad (4)$$

где δ_{ik} —символ Кронекера, τ —время релаксации, а $u_i = \frac{e \tau}{m_i}$ —парци-

альная подвижность носителей тока в соответствующем направлении.

Дальнейшие вычисления производятся с учетом принятой модели, т. е. соответственно трехосным эллипсоидам поверхности Ферми электронов рассматриваются три подвижности: u_{α_1} , u_{α_2} , u_{α_3} вдоль основных осей кристаллов и соответственно эллипсоиду вращения две подвижности дырок: u_{β_1} , u_{β_2} . Принимая для нелегированного сплава, так же как для чистого висмута, равенство концентрации носителей обоих знаков, можно считать, что для описания гальваномагнитных свойств сплавов Bi—Sb необходимо знание шести параметров—концентрации носителей

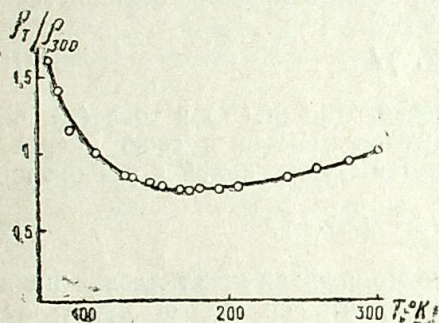


Рис. 1. Температурная зависимость удельного сопротивления монокристалла сплава Bi—Sb, содержащего 12 ат. % Sb.

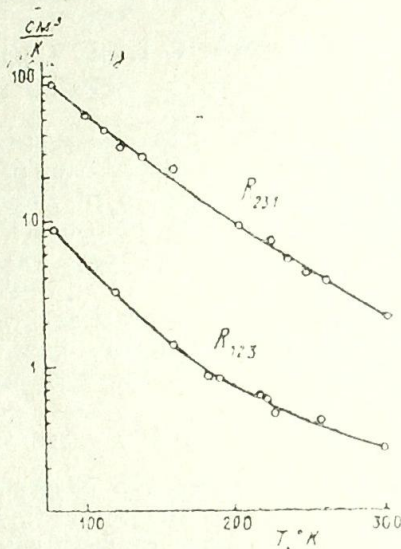


Рис. 2. Температурная зависимость независимых компонент тензора коэффициента Холла.

тока и пяти парциальных подвижностей. Экспериментально это, очевидно, требует проведения шести независимых измерений. Ниже приводятся результаты таких исследований, проведенные в данной работе. Измерения проводились на монокристаллах твердых растворов Bi—Sb, полученных вытягиванием из расплава согласно методике, частично описанной в нашей работе [4].

Кристаллографические направления определялись по плоскостям спайности и рентгенограмм. На рис. 1 показана температурная зависимость удельного сопротивления монокристалла сплава Bi—Sb, содержащего 12 ат. % Sb. Сплав этого состава согласно данным [5] обладает максимальной шириной запрещенной зоны и коэффициентом термоэлектрической эффективности [6].

Как видно из рисунка, эта зависимость ниже 170° K носит полупроводниковый характер. Надо отметить, что анизотропии электропроводности нами не наблюдалось, что, очевидно, связано с противоположным характером изменения подвижностей электронов и дырок при изменении направления тока. Удельные сопротивления образцов из соседних частей кристалла не отличались в пределах ошибки из-

мерений, что свидетельствовало о достаточной однородности выбранных участков кристалла.

Коэффициент Холла измерялся в слабых магнитных полях, в направлениях, соответствующих двум независимым компонентам тензора R_{123} и R_{231} . Значение наиболее чувствительной к магнитному полю компоненты R_{123} ниже 40 э остается постоянным, что свидетельствует о выполнении условия $\frac{uH}{c} \ll 1$. Температурная зависимость

независимых компонент тензора коэффициента Холла представлена на рис. 2, из которого видно, что в противоположность удельному сопротивлению коэффициент Холла в этом сплаве значительно анизотропен.

Существенным моментом при измерениях магнитосопротивлений являлось наблюдение квадратичных участков их зависимости от поля, поскольку расчет основных параметров твердых растворов Bi—Sb должен производиться именно для этих участков. На рис. 3 и 4 приведены результаты измерений двух независимых компонент магнитосопротивления при различных температурах. Как видно, обе компо-

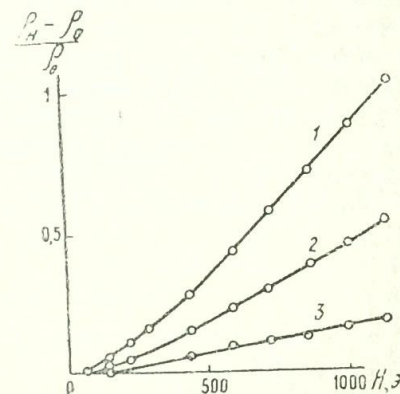


Рис. 3. Зависимости магнитосопротивления сплава $\text{Bi}_{88}\text{Sb}_{12}$ от напряженности магнитного поля направленного вдоль тригональной оси кристалла: 1—77°K; 2—120°K; 3—148°K.

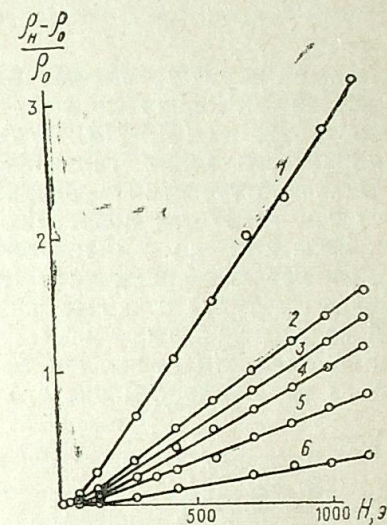


Рис. 4. Зависимости магнитосопротивления сплава $\text{Bi}_{88}\text{Sb}_{12}$ от напряженности магнитного поля, направленного перпендикулярно тригональной оси кристалла: 1—77°K; 2—99°K; 3—110°K; 4—118°K; 5—132°K; 6—172°K.

ненты быстро уменьшаются с повышением температуры, что свидетельствует об уменьшении подвижностей носителей тока. Если принять подобно чистому висмуту описанную выше [3] модель структуры энергетических зон, то компоненты тензоров электропроводности должно определяться соотношениями:

$$\sigma_{11} = Ne \left(\frac{u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2}}{2} + u_{\beta_1} \right), \quad (5)$$

$$\sigma_{33} = Ne (u_{\alpha_3} + u_{\beta_2}). \quad (6)$$

А независимые компоненты тензора коэффициента Холла

$$R_{123} = 4 \frac{(u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} - u_{\beta_1}^2)}{Nec (u_{\alpha_1} + u_{\alpha_2} + 2u_{\beta_1})^2}, \quad (7)$$

$$R_{231} = \frac{(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2}) u_{\varepsilon_3} - 2 u_{\varepsilon_1} u_{\varepsilon_3}}{N e c (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_3})} \quad (8)$$

Компоненты тензоров магнитосопротивления при направлении магнитного поля вдоль главных осей кристалла определяются следующим образом:

$$q_{11,11} = \frac{u_{\varepsilon_3} (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})^2}{4 c^2 (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})}, \quad (9)$$

$$q_{11,12} = \frac{u_{\varepsilon_3} [(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2})(u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})^2 + 2 u_{\varepsilon_3} (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})^2]}{4 c^2 (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_3})}, \quad (10)$$

$$q_{11,33} = \frac{u_{\varepsilon_1} u_{\varepsilon_2} (u_{\varepsilon_1} - u_{\varepsilon_2})^2 + 2 u_{\varepsilon_1} [(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2})(u_{\varepsilon_1} u_{\varepsilon_2} + u_{\varepsilon_3}^2) + 4 u_{\varepsilon_1} u_{\varepsilon_2} u_{\varepsilon_3}]}{2 c^2 (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})^2}, \quad (11)$$

$$q_{33,11} = \frac{u_{\varepsilon_1} (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2})(u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_3})}{c^2 (u_{\varepsilon_1} + u_{\varepsilon_2} + 2 u_{\varepsilon_3})}, \quad (12)$$

$$q_{33,33} = 0. \quad (13)$$

Левые части уравнений (5)–(13) — экспериментально определяемые величины. Решая систему уравнений, состоящую из любых шести соотношений (5)–(13), в принципе можно определить все параметры, характеризующие гальваномангнитные свойства твердых растворов. Однако эту систему уравнений в аналитическом виде решить не удается и требуется проведение решения методом подбора, обычно выполняемого на вычислительной машине. При этом существенную роль играет возможность ограничения области, в которой корни этой системы будут отвечать физическому смыслу неизвестных параметров. В частности, можно искать решения, соответствующие парциальным подвижностям носителей тока, относительно близким к соответствующим подвижностям чистого висмута. В табл. 1 приведены эксперимен-

Таблица 1

ат. % Sb	3		7		12	
	эксп.	вычисл.	эксп.	вычисл.	эксп.	вычисл.
$\varepsilon_{11}, \text{ом}^{-1} \text{см}^{-1}$	$1,1 \cdot 10^4$	$1,1 \cdot 10^4$	$5,9 \cdot 10^3$	$6,1 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^3$
$\varepsilon_{33}, "$	$1,0 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$	$5,9 \cdot 10^3$	$5,9 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^3$	$3,7 \cdot 10^3$
$R_{123}, \text{см}^3/\text{к}$	—	—	4,3	4,5	9,3	9,0
$R_{231}, "$	29	27,4	50,5	51	93,4	96,4
$q_{11,33}, \text{э}^{-2}$			$2,2 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$
$q_{11,22}, "$			$1,1 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$
$q_{33,11}, "$	$5,0 \cdot 10^{-6}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$				

тально определенные кинетические коэффициенты в слабых магнитных полях и их вычисленные значения, полученные путем подбора концентрации носителей тока и пяти парциальных подвижностей. Как видно из этой таблицы, экспериментальные и вычисленные значения хорошо согласуются, что свидетельствует о достаточно точном подборе.

Интересно сравнить полученные значения подвижностей носителей тока в твердых растворах Bi—Sb с чистым висмутом при 77° К, приведенные в табл. 2. Нетрудно видеть, что в направлении, перпендикулярном тригональной оси, парциальные подвижности в спла-

Таблица 2

ат. % Sb	$N, \text{см}^{-3}$	u_{ε_1}	u_{ε_2}	u_{ε_3}	u_{ε_1}	u_{ε_3}
		$\text{см}^2/\text{в. сек}$				
7	$1,4 \cdot 10^{17}$	$6,7 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^4$	$4,2 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$
3	$6,8 \cdot 10^{16}$	$7,8 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^4$	$4,5 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^5$	$9 \cdot 10^4$
12	$3,0 \cdot 10^{16}$	$1,1 \cdot 10^6$	$2,8 \cdot 10^4$	$5,7 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$

вах отвечают соответствующим подвижностям в чистом висмуте, умноженным на одну и ту же величину, т. е.

$$\frac{u_{\varepsilon_1}(\text{Bi—Sb})}{u_{\varepsilon_1}(\text{Bi})} = \frac{u_{\varepsilon_2}(\text{Bi—Sb})}{u_{\varepsilon_2}(\text{Bi})} = \frac{u_{\varepsilon_3}(\text{Bi—Sb})}{u_{\varepsilon_3}(\text{Bi})}. \quad (14)$$

В то же время подвижность дырок в направлении тригональной оси изменяется значительно сильнее.

В работе [7], очевидно ввиду сложности решения уравнений (5)–(13) и недостаточности экспериментальных данных, предполагалось сохранение отношения всех парциальных подвижностей таким же, как в чистом висмуте. Нетрудно показать, что такое упрощение приводит к значениям параметров, не удовлетворяющим уравнениям, соответствующим компонентам магнитосопротивления, которые наиболее чувствительны к изменению подвижностей. При этом вычисленные значения не совпадают с экспериментальными данными самих авторов [7].

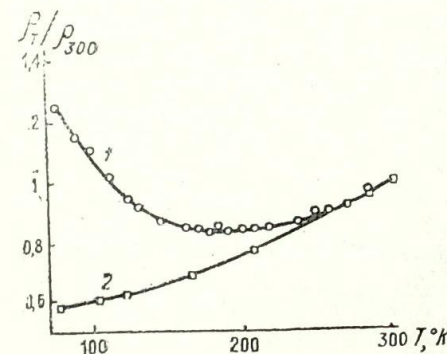


Рис. 5. Изменение удельного сопротивления сплавов от температуры: 1—7 ат. % Sb; 2—3 ат. % Sb.

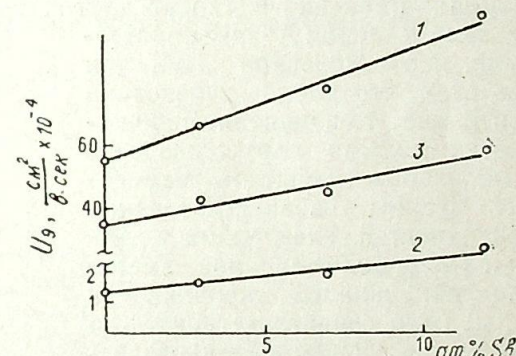


Рис. 6. Зависимость парциальных подвижностей электронов от состава сплавов Bi—Sb: 1— u_{ε_1} ; 2— u_{ε_2} ; 3— u_{ε_3} .

Соотношения (14) облегчают подбор решения уравнения (5)–(13) для других составов сплавов Bi—Sb. На рис. 5 показано изменение удельного сопротивления сплавов, содержащих 3 и 7 ат. % Sb, от температуры. Для сплава, содержащего 3 ат. % Sb, в котором энергетический зазор между валентной зоной и зонной проводимостью еще не образовался, ход этой зависимости, подобно чистому висмуту, носит металлический характер во всем интервале температур, а для 7%-ного состава, подобно 12%-ному, наблюдается переход к полупроводниковому характеру ниже 170° К. Характер изменения гальваномангнитных коэффициентов в этих сплавах в зависимости от температуры и напряженности магнитного поля аналогичен приведенным выше зависимостям для сплава, содержащего 12 ат. % Sb. Результаты измерений этих коэффициентов в слабом магнитном поле при-

ведены в табл. 1. Для этих сплавов были также рассчитаны концентрации носителей тока и их парциальные

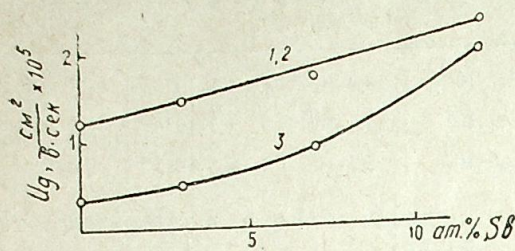


Рис. 7. Зависимость парциальных подвижностей дырок от состава сплавов Bi-Sb: 1, 2 — $u_{g1} = u_{g2}$; 3 — u_{g3} .

мени релаксации. Следует отметить, что все парциальные подвижности, кроме подвижности дырок в направлении тригональной оси кристалла, изменяются пропорционально содержанию сурьмы в твердом растворе. Это особенно ясно видно из построенных в относительном масштабе зависимостей парциальных подвижностей от состава $\left(\frac{u_i(\text{Bi-Sb})}{u_i(\text{Bi})}\right)$, изображенных на рис. 8. Для четырех пар-

циальных подвижностей эти зависимости сливаются в одну прямую, и лишь изменение u_{d3} носит другой характер. Если принять, как это сделано в теории Абельса и Мейбума, использованной нами при расчетах, что время релаксации изотропно, то изменение подвижностей должно характеризовать в некотором масштабе изменение формы изоэнергетических поверхностей электронов и дырок. Тогда более сильное изменение парциальной подвижности u_{d3} должно свидетельствовать об изменении формы дырочного эллипсоида. Причем эта поверхность стягивается вдоль тригональной оси, приближаясь к сфере.

Полученные значения парциальных подвижностей и концентрации носителей тока могут быть использованы для вычисления зависимостей гальваномагнитных коэффициентов от напряженности магнитного поля. Электропроводность в магнитном поле может быть рассчитана по зависимостям коэффициента Холла и магнитосопротивления согласно выражению [7]

$$\frac{1}{\sigma_x} = \rho_x + \frac{R^2 H^2}{\rho_y}, \quad (15)$$

где σ_x — компонента электропроводности в направлении x , при перпендикулярном направлении магнитного поля (z) и ρ_x, ρ_y — измеренные

удельные сопротивления в направлениях x и y (перпендикулярно к x и z).

Согласно этому выражению по экспериментальным результатам вычислено

$$\frac{1}{\sigma_{11}} = \frac{1}{\rho_{11}} + \frac{R_{231}^2 H^2}{\rho_{22}}, \quad (16)$$

где в нашем случае $\rho_{11} = \rho_{22}$ — удельное сопротивление в магнитном поле H , R_{231} — коэффициент Холла при том же магнитном поле. На рис. 9 представлена зависимость σ_{11} от напряженности магнитного поля для твердого раствора $\text{Bi}_{88}\text{Sb}_{12}$. Теоретически эту зависимость можно рассчитать согласно использованной выше теории Абельса и Мейбума [3]. При направлении магнитного поля перпендикулярно тригональной оси

$$\sigma_{11} = \sigma_{11z} + \sigma_{11d}; \quad (17)$$

$$\sigma_{11z} = N_z e \left[\frac{u_{z1}}{1 + u_{z1} u_{z3} H^2} + \frac{2(u_{z1} + 3u_{z3})}{3[4 + u_{z3}(u_{z1} + 3u_{z3})H^2]} \right], \quad (18)$$

$$\sigma_{11d} = N_d e \left(\frac{u_{d1}}{1 + u_{d1} u_{d3} H^2} \right). \quad (19)$$

Компоненты дырочной и электронной проводимости рассчитывались по приведенным выше (табл. 2) значениям парциальных подвижностей и концентрации носителей тока при различных значениях магнитного поля. Построенная по этим данным теоретическая зависимость также приведена на рис. 9. Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей показывает удовлетворительное согласие теории Абельса и Мейбума с изменением гальваномагнитных коэффициентов от напряженности магнитного поля. Однако, как видно из рисунка, с увеличением напряженности магнитного поля наблюдается расхождение между теоретической и экспериментальной зависимостями. Такое расхождение нужно было ожидать, поскольку теория Абельса и Мейбума построена на основе целого ряда предположений, очевидно, количественно согласующихся с экспериментом только при слабых магнитных полях. В частности, неточность теории определяется допущением изотропии и независимости от энергии времени релаксации и, наконец, пренебрежением наклоном электронных эллипсоидов по отношению к тригональной оси кристалла. Тем не менее эта теория дает хорошие количественные результаты при слабом магнитном поле.

Полученные выше по значениям гальваномагнитных коэффициентов в слабых полях концентрации носителей тока позволяют определить величину перекрытия валентной зоны и зоны проводимости и ширину энергетического зазора при образовании щели между зонами. Расчет основан на определении уровней Ферми при отсчете от дна зоны проводимости (для электронов) и вершины валентной зоны (для дырок). На рис. 10 приведена зависимость перекрытия зон ($-\Delta E$) и ширины энергетического зазора (ΔE) от состава твердых растворов Bi-Sb. На этот же график нанесены значения перекрытия зон и ширины энергетического зазора, полученные другими авторами. В рабо-

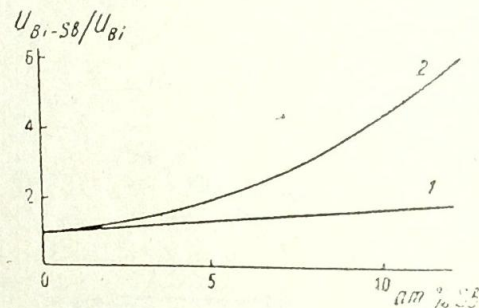


Рис. 8. Относительное изменение парциальных подвижностей носителей от состава сплава:

$$1 - \frac{u_{g1}(\text{Bi-Sb})}{u_{g1}(\text{Bi})} = \frac{u_{g2}(\text{Bi-Sb})}{u_{g2}(\text{Bi})} = \frac{u_{d3}(\text{Bi-Sb})}{u_{d3}(\text{Bi})},$$

$$2 - \frac{u_{d3}(\text{Bi-Sb})}{u_{d3}(\text{Bi})}.$$

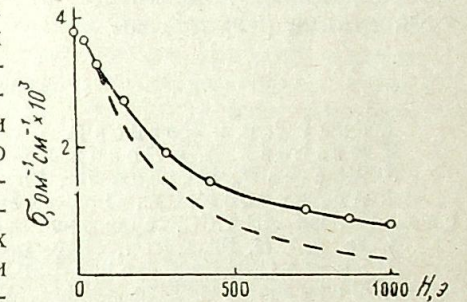


Рис. 9. Зависимость σ_{11} от напряженности магнитного поля для твердого раствора $\text{Bi}_{88}\text{Sb}_{12}$ при $H \perp$ оси. Сплошная линия — эксперимент, прерывистая — теория.

те [8] перекрытия зон для составов твердых растворов, содержащих менее 5% сурьмы вычислялись по эффекту де-Гааза-Ван Альфена, а выше 5% — по наклону кривых зависимости $\rho = \rho_0 \exp \left(\frac{E_0}{2KT} \right)$. В работах [9, 10] энергетический зазор также определялся по этой зависимости. Оценка перекрытия зон энергетического зазора в работе [2] проводилась по зависимости

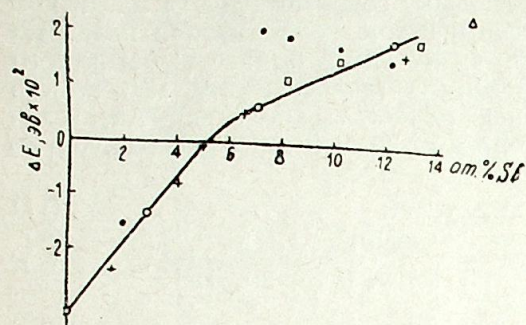


Рис. 10. Зависимость перекрытия зон ($-\Delta E$) и ширины энергетического зазора от состава твердого раствора Bi—Sb: ● — (2); × — (8); □ — (9); △ — (10); ○ — наши данные.

величинами может свидетельствовать о правильности количественной интерпретации гальваномагнитных свойств твердых растворов Bi—Sb, проведенных в данной работе на основе представления о зонной структуре.

В заключение авторы выражают благодарность старшему научному сотруднику Гашиму-заде Ф. М. за помощь при теоретической интерпретации результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гицу Д. В. и Иванов Г. А. ФТТ, 2, 7, 1464, 1960.
2. Иванов Г. А. и Попов А. М. ФТТ, 5, 9, 2409, 1963.
3. Abeles B., Meiboom S. Phys. Rev., 101, 544, 1956.
4. Абрикосов Н. Х., Томтиев Д. С., Шахтахтинский М. Г., Кулиев А. А. Изв. АН СССР, серия «неорганические материалы», 3, 6, 1967.
5. Iain A. H. Phys. Rev., 114, 6, 1518, 1959.
6. Smith G. E. and Wolfe. Bull. Am. Phys. Soc., 6, 137, 1961.
7. Goldsmid H. J. Phil. Mag., 8, 91, 1225, 1963.
8. Брандт Н. Б., Пономарев Я. Г. ЖЭТФ, 50, 2, 367, 1966.
9. M. Dugue, Phys. Stat Sol, 11, 149, 1965.
10. Brown D. M. and Silverman S. J. Phys. rev., 136, 1A, A290, 1964.

Г. А. ЭФЕНДИЕВ

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЭЛЕКТРОНОГРАФИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ

Развитие микроэлектроники сильно повысило актуальность исследования тонких пленок и поставило перед исследователями новую задачу: создание одно- или многослойных пленок с заданными свойствами. Получение многослойных пленок последовательной конденсацией молекулярных пучков — сложный физико-химический процесс. В формировании этих пленок происходят процессы кристаллизации, гомогенизации, взаимной диффузии, фазовых переходов и т. д. Поэтому их исследования сопряжены с большими трудностями и получение пленок с воспроизводимыми свойствами требует проведения работ новыми методами.

С другой стороны, исследования тонких пленок представляют самостоятельный теоретический интерес для физики твердого тела и выяснение некоторых явлений (кристаллизации, упорядочения, атомной и реактивной диффузии и пр.) на образцах в виде тонких пленок гораздо проще и дает больше информации, чем на массивных образцах. Процессы, протекающие в массивных образцах длительное время и трудно поддающиеся наблюдению, в тонких пленках продолжают недолго и выступают более рельефно, что облегчает работу исследователя и помогает получить ценный материал о состоянии твердого тела. В качестве примера можно указать на реакцию в твердом состоянии, на процессы упорядочения сплавов и фазовых переходов. По этим вопросам много новых данных получено именно из области исследования тонких пленок.

В исследовании тонких пленок важная роль принадлежит электронографическим исследованиям, основанным на дифракции быстрых электронов [1].

Характерной особенностью электронных лучей, по сравнению с рентгеновскими, является их сильное взаимодействие с веществом. Так как интенсивности дифрагированных лучей пропорциональны квадратам атомных амплитуд, при отношении $f_{\text{рент}}:f_{\text{эл}} = 1:10^3$, отношение соответствующих интенсивностей будет $I_{\text{рент}}:I_{\text{эл}} = 1:10^6$. Эти числа относятся к рассеянию одним атомом, им пропорциональна интенсивность рассеяния от кристалла [2].

Благодаря такому сильному рассеянию электронов от вещества, время экспозиции для получения электронограммы, по сравнению с рентгенограммой, сильно сокращается. Против часовых экспозиций, требуемых в рентгенографии, в электронографии достаточны секунды,

что позволяет фиксировать дифракционную картину на движущуюся фотопластинку или фотопленку, т. е. получать кинематические электронограммы. С этой целью непосредственно перед фотопластинкой помещается экран с горизонтальным щелевым вырезом, шириной которого 1 мм. Дифракционная картина от поликристаллического образца обычно представляющая собой совокупность концентрических колец, падающая через эту щель на фотопластинку оставляет на ней ряд точек, переходящих в совокупность прямых линий, симметричных относительно центральной линии, являющейся следом первичного неотклоненного пучка (рис. 1). Так как эти линии принадлежат к исследуемому объекту, изменение их расположения и интенсивности характеризует состояние объекта, в данное время. Меняя температуру объекта, непрерывно можно фиксировать все процессы, связанные с изменением структуры.

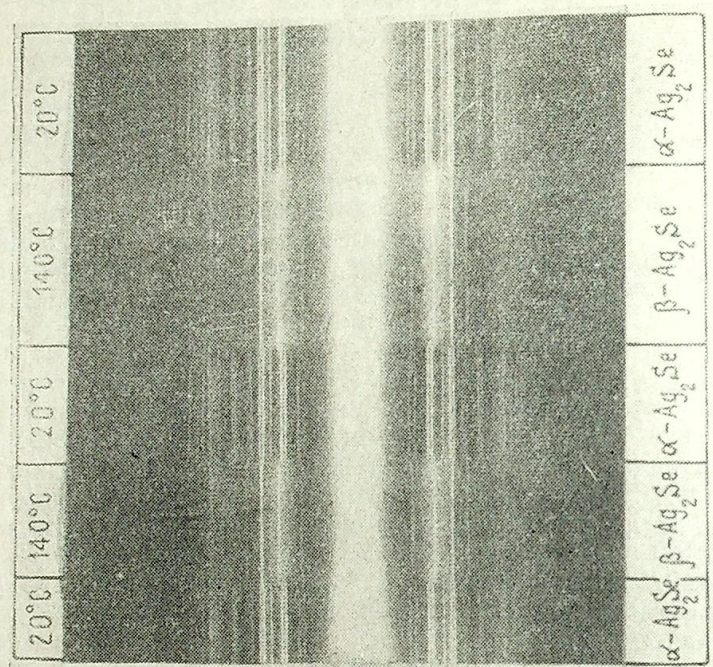


Рис. 1.
Кинематическая электронограмма Ag_2Se , показывающая повторные $\alpha \leftrightarrow \beta$ превращения при нагреве и охлаждении пленки

За рубежом этот метод использовался некоторыми исследователями для изучения состояния тонких пленок при их термообработке. Frillat и Takahashi [3] методом кинематических съемок исследовали тонкие пленки ($\text{Cu}+\text{Al}$). Boettcher и Fhup [4] этим методом исследовали кинетику превращения сплавов $\text{Ag}-\text{Al}$ при их нагреве. Boettcher, Haase и Freipel [5] указанный метод применили к исследованию сульфидов и селенидов серебра и меди. Fhup [6] сконструировал специальный электронограф для непрерывной регистрации дифракционной картины и этим прибором исследовал кристаллизацию аморфных пленок германия. Однако авторы указанных работ интересовались только идентификацией фаз, а интенсивности линий не рассматривали. Благодаря этому, результаты, полученные по кинетике кристаллиза-

ции и фазовых превращений, носят качественный характер. Они нагревали пленки непрерывно и не использовали изотермического отжига. При таком способе отжига трудно добиться равновесного состояния.

В данной работе для кинематической съемки мы использовали горизонтальный электронограф марки ЭГ. Для получения узкой дифракционной картины приспособили шторки, имеющиеся в электронографе. Движение фотопластинки внутри электронографа в процессе съемки осуществлялось при помощи специальной приставки с электромотором и редукторным устройством. Для регистрации процессов, происходящих с различными скоростями, предусмотрено изменение скорости движения пластинки четырьмя ступенями: $3/4$; $1/2$; $1/6$ и $1/10$ мм/сек. На одной фотопластинке $13 \times 18 \text{ см}^2$ умещается около 100 кадров—электронограмм. Сеточка, на которой укреплялась пленка для исследования электронным пучком, одновременно являлась печкой. Сеточка-печь нагревалась до 600°C пропусканием через нее электрического тока $\sim 8 \text{ а}$ [7].

Для количественного фазового анализа на основе интенсивности линий электронограмм было использовано следующее соотношение, полученное по кинематической теории рассеяния электронов:

$$I_{hkl} = I_0 \lambda^2 \left| \frac{\Phi_{hkl}}{\Omega} \right|^2 V \frac{d_{hkl}^2 \Delta}{4\pi L \lambda} \cdot P.$$

Для линии с индексами hkl при условии постоянства I_0 и $2L\lambda$

$$I_{hkl} \sim V,$$

т. е. интенсивность дифракционной линии пропорциональна облученному объему.

В случае плоского объекта $V = Sh$, где S —сечение пучка, h —толщина пленки. Если S считать постоянным, то

$$I_{hkl} \sim h,$$

т. е. интенсивность дифракционной линии пропорциональна толщине пленки. Надо помнить, что под h подразумевается толщина, усредненная по сечению пучка. Если пленка состоит из нескольких фаз различной кристаллической структуры, то общая толщина пленки складывается из эффективных толщин отдельных фаз:

$$H = h_1 + h_2 + h_3 + \dots$$

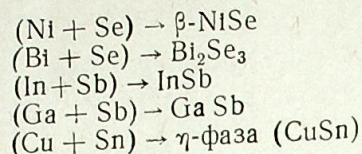
конечно, $h_1, h_2, h_3 \dots$ как отдельные толщины не существуют. Они выражают долю каждой фазы в общей толщине, усредненную по сечению пучка.

Формула $I_{hkl} \sim h$ применима для таких толщин, у которых рассеяние когерентное. Выбор предельной толщины h_0 , выше которой нарушается когерентность рассеяния, зависит от атомного номера вещества и от величины ускоряющего напряжения. С целью установления кинематического характера рассеяния для некоторых веществ проверялась зависимость интенсивности линий от структурного фактора. $I \sim \Phi^2$ соответствует кинематическому, а $I \sim \Phi$ динамическому случаю.

Кинематический метод съемки, дополненный измерением интенсивности линий электронограммы, полученных в изотермических условиях, позволил нам исследовать кинетику реакций между тонкими пленками и фазовых превращений в тонких пленках и выяснить законы, управляющие этими процессами.

Говоря о взаимодействии пленок, можно отметить, что при последовательном осаждении элемента A на элемент B они не остаются нейтральными. В большинстве случаев в процессе осаждения меж-

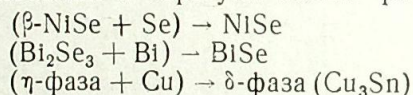
ду ними образуется определенная фаза толщиной $h_0 \sim 150 - 200 \text{ \AA}$.
Например:



Взаимодействие элементов и начальная толщина h_0 образовавшейся фазы зависят от последовательности напыления. Как правило, в смысле фазообразования $A + B \neq B + A$ [8, 9, 10, 11, 12].

Эти закономерности можно объяснить на основе энергетических соображений. Действительно, теплота сублимации изучаемых элементов составляет значительную величину и достаточна для локального кратковременного повышения температуры пленки при конденсации элемента. Такой нагрев подложки обеспечивает ее энергией активации, необходимой для реакции между пленками. Благодаря этому обстоятельству, при последовательном осаждении элементов создается возможность фазообразования между конденсирующимися элементами в процессе их осаждения. Соединения $\beta\text{-NiSe}$, Bi_2Se_3 , InSb , GaSb , CuSn и др., обнаруженные электронографически при взаимодействии компонентов в процессе их осаждения, возникли на этой основе. Так как все эти реакции экзотермические, выделяющаяся при образовании указанных соединений энергия также частично ускоряет реакцию. Поэтому указанные процессы можно назвать автокаталитическими. Зависимость фазообразования между элементами от последовательности осаждения компонентов также может быть объяснена различием теплот сублимаций конденсирующихся элементов.

Реакция между пленками имеет ступенчатый характер. Это означает, что при последовательном осаждении двух элементов, по диаграмме состояния имеющих несколько фаз, между ними вначале процесса образуется одна определенная фаза, которая в дальнейшем, в результате вторичной реакции с одним из компонентов переходит в новую фазу. Равновесная фаза получается в результате многоступенчатой реакции. Отмеченные выше $\beta\text{-NiSe}$, Bi_2Se_3 , CuSn являются первичными фазами. Оставшиеся свободными компоненты входят в реакцию с этими соединениями и образуют новые фазы:

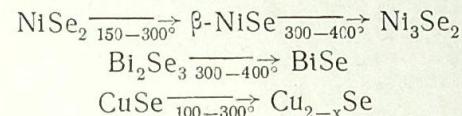


Если рассматривать вопрос о последовательности фазообразования в исследованных системах с точки зрения термодинамики, то следует сравнивать $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$ при образовании отдельных фаз. В случае реакции в твердом состоянии в первом приближении можно пренебречь энтропийным членом, что позволяет пользоваться ΔH , т. е. изменением энтальпии системы. Если учесть, что при этих реакциях изменение объема также незначительно, то $\Delta H = H_2 - H_1$ сводится к теплоте образования.

Сопоставление теплот образования и последовательности фазообразования рассмотренных бинарных систем показывает, что только на основе теплот образования нельзя судить о последовательности образования фаз. Не всегда в первую очередь образуется фаза, обладающая максимальной теплотой образования; часто встречаются фазы с меньшим значением теплоты образования. Следовательно, в этих процессах большую роль играют кинетические факторы. Из многих возможных по диаграмме состояния фаз в первую очередь мы наблюдаем фазу, имеющую максимальную скорость образования. В этом прояв-

ляется сила „закона о конкурирующих возможностях превращений“, установленного Делингером [13].

Следует отметить, что для очень тонких пленок при расчете свободной энергии нужно учитывать и поверхностную энергию, как это было сделано в работе [14]. Но, к сожалению, это не всегда удается. Применение кинематического метода съемки к сложным полупроводниковым соединениям показало, что при термообработке в вакууме эти соединения не остаются стабильными, в них происходят концентрационные фазовые превращения с изменением не только кристаллической структуры, но и химического состава. Например:



Эти превращения могут быть объяснены на основе общей характеристики тонких пленок и их кристаллической структуры.

На самом деле, если вычислить удельную поверхность пленок используемой нами толщины ($h \sim 200 - 300 \text{ \AA}$), то получим очень большую разницу в ее значении относительно массивных образцов.

Для пленок CuSe толщиной $h = 300 \text{ \AA}$ удельная поверхность (поверхность 1 г вещества) составляет 10^7 мм^2 , а поверхность шарика из 1 г CuSe равна 150 мм^2 . Таким образом, удельная поверхность пленки CuSe в $6 \cdot 10^4$ раз больше удельной поверхности массивных образцов. Так как испарение вещества пропорционально величине поверхности, то с увеличением удельной поверхности число испарившихся атомов растет. Благодаря этому явления, связанные с испарением компонентов, незаметные в массивных образцах, становятся ощутимыми в пленках.

По Фольмеру [15] процесс испарения носит ступенчатый характер. В начальной стадии испарения атомы перемещаются из своих „полукристаллических позиций“ к поверхности, где их энергия связи равна энергии испарения. Здесь они менее сильно связаны и находятся только в адсорбированном состоянии. Атомы перемещаются вдоль поверхности на протяжении различного времени и затем испаряются. В этой стадии испарения сильно сказывается разница в давлении паров составляющих элементов. В первую очередь в большом количестве испаряются элементы, имеющие сравнительно большое давление. В состав рассмотренных выше соединений входили следующие элементы: Ni , Cu , Bi и Se . Из них при низкой температуре самым большим давлением паров обладает селен. Поэтому с поверхности пленки сильнее всего испаряется селен. Создается разность концентрации селена на поверхности и внутри пленки. Благодаря этому атомы селена движутся изнутри на поверхность пленки, откуда опять испаряются. Таким образом, количество селена в пленке непрерывно уменьшается и создается концентрационное условие для следующей фазы, состав которой беднее селеном.

В. И. Архаров и др. [16] с помощью видоизмененного таблеточного метода Вагнера доказали диссоциацию сульфидов и испарение серы. Были испытаны следующие сульфиды: CuS , Cu_2S , NiS , Ni_3S_2 . Авторы отмечают, что вначале из высшего сульфида образуется более низкий, который затем диссоциирует на металл и газообразную серу.

Результаты этой работы полностью подтверждают вышеотмеченный механизм превращений в тонких пленках селенидов меди, никеля и висмута путем улетучивания селена. На примере решетки Bi_2Se_3 ,

можно показать, что уход части атомов селена из этого соединения и перестройка решетки Bi_2Se_3 в BiSe вполне возможны.

Как известно, решетка Bi_2Se_3 является слоистой. Слои атомов селена чередуются со слоями висмута. Как было установлено, С. А. Селеновым [17], в основе структуры соединения Bi_2Se_3 ($a = 4,14 \text{ \AA}$, $C = 28,9 \text{ \AA}$) лежит 9-слойная ромбоэдрическая (тетрадимитовая) упаковка из атомов Se (большие буквы), в которой $2/3$ октаэдрических

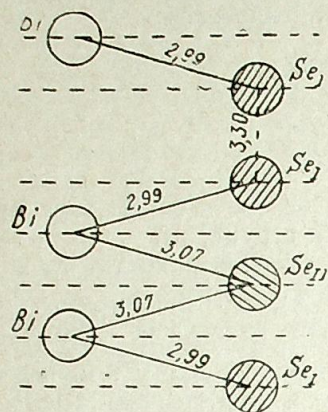


Рис. 2.

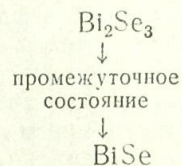
пустот занято атомами Bi (малые буквы): $\dots \text{Ac BA cBa CBa Cв AC в A} \dots$ (Пр. Гр. $D_{3d}^5 - R3m$). При этом два слоя заселенных пустот чередуются с одним слоем свободных.

Расположение атомов селена и висмута в решетке Bi_2Se_3 схематически изображено на рис. 2. В этой решетке селен с селеном ($\text{BA}, \text{CB}, \text{AC} \dots$) имеет слабую остаточную связь [18], благодаря чему, при отжиге в вакууме пленок Bi_2Se_3 часть слабо связанных атомов селена улетучивается и таким путем обеспечивается состав BiSe . А перестройку решетки Bi_2Se_3 в решетку BiSe можно представить следующим образом. Соединение BiSe имеет структуру типа NaCl с $a = 5,98 \text{ \AA}$. В этой структуре атомы селена и висмута чередуются в порядке $\text{Ac Ba Cв Ac BaC} \dots$. С уходом части атомов селена из решетки Bi_2Se_3 устанавливается неустойчивое промежуточное состояние с чередованием слоев селена и висмута. Вслед за этим начинается внутрирешеточная перестройка, приводящая к упаковке BiSe :

$\text{A c B A c B a C B a C в A C в A} \dots$

$\text{A c B c B a C a C в A в A} \dots$

$\text{A c B a C в A c B a C в A}$



где стрелки указывают на необходимость перестройки B слоев в C слои, C в A , A в C и т. д. Для такой перестройки атомы селена или висмута должны перемещаться на $\Delta S = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е. примерно на половину постоянной решетки.

Анализ этих данных показывает, что механизм концентрационных фазовых превращений сложный. Он состоит из двух стадий: 1) диффузия части атомов легколетучего компонента к поверхности и испарение; 2) мартенситное (бездиффузионное) превращение в материнской решетке.

С помощью кинематического метода также удалось изучить кинетику кристаллизации аморфных пленок TlSe , Sb и Se . На рис. 3 представлена кинематическая электронограмма, показывающая процесс кристаллизации аморфных пленок TlSe . Верхние диффузные линии относятся к аморфной, нижние резкие линии к кристаллической фазе TlSe . В промежутке имеется область сосуществования обеих фаз. Микрофотограммы (рис. 4), полученные от различных участков этой электронограммы, в процессе кристаллизации аморфной пленки позво-

лили установить, что зависимость количества закристаллизовавшегося вещества от времени отжига описывается формулой:

$$V_t = V_0 (1 - \exp(-at^4)).$$

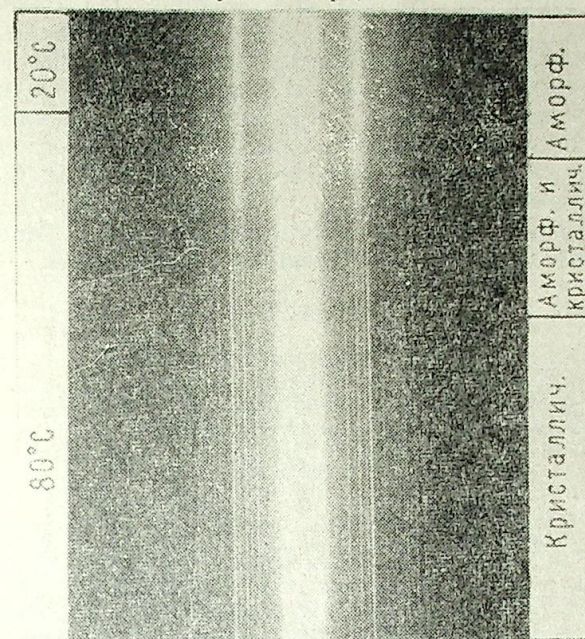


Рис. 3.

Скорость кристаллизации подчиняется уравнению Аррениуса. Для энергии активации получено значение $\Delta E = 19 \text{ ккал/моль}$.

Кинематический метод особо эффективен в изучении процессов упорядочения сплавов. Обработывая пленки при различном температурном режиме и одновременно получив от этих пленок кинематические снимки, можно обнаружить сверхструктурные линии, относящиеся к упорядоченным фазам, существование которых раньше не было известно.

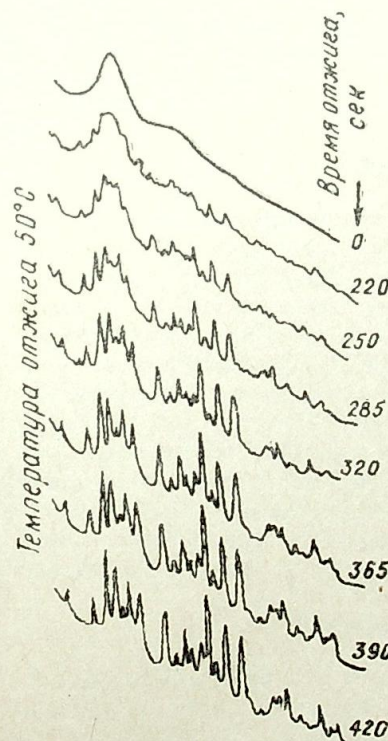


Рис. 4

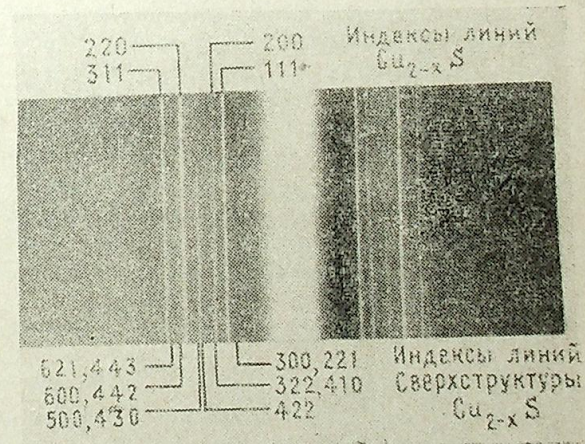


Рис. 5

На рис. 5 представлена кинематическая электронограмма соединения Cu_{2-x}Se , у которого при 150°C происходит процесс упорядочения, благодаря чему появились сверхструктурные линии. Постоянная решетки упорядоченной фазы вдвое больше постоянной основной решетки.

Все отмеченные явления: реакция между пленками и рост новой фазы, фазовые переходы, кристаллизация аморфных пленок, упорядочение сплавов тесно связаны с процессом старения пленочных схем. Успешное решение проблемы надежности микроэлектронной аппаратуры требует их систематического исследования. Как было показано на отдельных примерах, применение кинематического метода съемки в исследовании этих явлений может дать весьма ценные данные, которые никакими другими методами нельзя получить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пинскер З. Г. Дифракция электронов. М., 1949.
2. Вайнштейн Б. К. Структурная электронография. М., 1956.
3. Trillat I. I., Takahashi N. Acta Cryst., 7, 15, (1954).
4. Boettcher A., Thum R. Optik, 11, 1 (1954).
5. Boettcher A., Haase G., Treupel H. Zs. Angew. Physik., 7, 10 (1955).
6. Thum R. Rev. scien. Instr. 30, 6 (1959).
7. Эфендиев Г. А., Шафи-заде Р. Б. ПТЭ, 1963, № 1.
8. Эфендиев Г. А., Иванова И. В. ДАН СССР, 143, 1962, № 1.
9. Эфендиев Г. А. и Иванова И. В. ФТТ, 5, 1963, № 10.
10. Эфендиев Г. А. и Шафи-заде Р. В., ДАН Азерб ССР, XVI, 1960, 9.
11. Эфендиев Г. А. и Шафи-заде Р. Б. ФТТ, III, 1961, № 9.
12. Эфендиев Г. А. и Алиев Ф. И. ДАН СССР, 165, 1965, № 5.
13. Попов А. А. Фазовые превращения в металлических сплавах. М., 1963.
14. Бублик А. И. и Пинес Б. Я. ДАН СССР, 87, 1952, 2.
15. Volmer M. Цитируется по О. Кнакке и И. Странскому. Усп. физики металлов, III, 1960.
16. Архаров В. И. и др. ФММ, 18, 1964, 3.
17. Семилетов С. А. Автореф. канд. дисс. ИКАН. 1953.
18. Айрапетянц С. В. и Ефимова Б. А. ЖТФ, 28, 1958, 8.

Л. М. ИМАНОВ, Ч. О. КАДЖАР

МИКРОВОЛНОВОЙ СПЕКТР, СТРУКТУРА, ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ И ВНУТРЕННЕЕ ЗАТОРМОЖЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ МОЛЕКУЛЫ ЭТИЛОВОГО СПИРТА

Радиоспектроскопическое измерение молекулы этанола входит в программу наших исследований ряда спиртов и меркаптанов. Для каждой молекулы определяются структура, потенциальный барьер, затормаживающий внутреннее вращение, дипольный момент и составляются атласы спектральных линий, попадающих в микроволновой диапазон. Полученные результаты должны расширить информацию, необходимую для развития ряда вопросов теоретической химии, теории внутреннего вращения и вращательно-колебательных взаимодействий.

В настоящей статье подводятся итоги многолетнего исследования микроволнового спектра молекулы этилового спирта. Исследован и идентифицирован спектр восьми изотопозамещенных образцов молекулы этилового спирта. Определена структура молекулы, найдены высота потенциального барьера и дипольный момент молекулы.

Эксперимент

Использовался радиоспектрометр с электрической молекулярной модуляцией [1]. Диапазон $12-33,5$ т. Mгц перекрывался четырьмя клистродами. На частотах выше $16,5$ тыс. Mгц частота клистрода умножалась на кремниевых диодах вдвое. Частота клистрода во всем диапазоне частот стабилизировалась и управлялась специально изготовленными прецизионными волномерами. Частота спектральных линий измерялась с точностью $\pm 0,2$ Mгц по частотным меткам вторичного стандарта частоты контролируемого по частотам известных спектральных линий аммиака или метилового спирта. Благодаря применению системы синхронного детектирования и ряда специальных мер чувствительность радиоспектрометра была не ниже $10^{-8}-10^{-9}$ см^{-1} .

Блок-схема радиоспектрометра нашей конструкции вместе с системами стабилизации и измерения частот показана на рис. 1.

Микроволновый спектр

Вращательный спектр молекулы этанола является спектром асимметричного волчка, близкого к спектру симметричного вытянутого волчка с переходами, связанными с составляющей дипольного момента μ_a . В табл. 1 приведены частоты идентифицированных переходов.

дов наблюдаемого спектра всех изотопозамещенных образцов. Идентификация производилась по анализу эффекта Штарка каждой спектральной линии, с учетом ориентировочно определенных частот этих

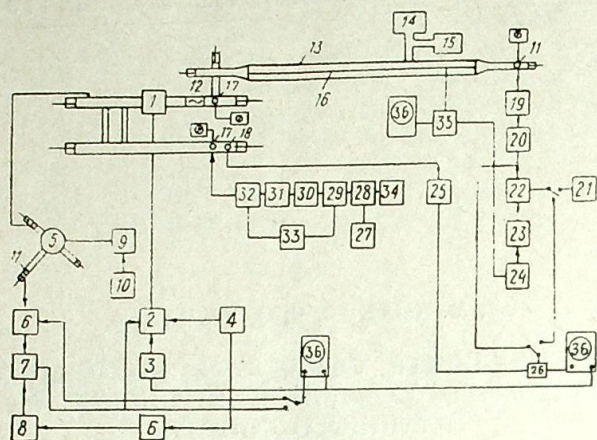
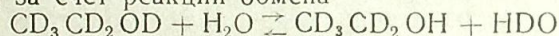


Рис. 1

1—клизотрон; 2—питание клизотрона; 3—генератор развертки; 4—генератор модуляционный 100 кГц; 5—волномер; 6—усилитель 100 кГц; 7—синхронный детектор; 8—фазовращатель; 9—мотор; 10—3Г; 11—присмычный кристалл; 12—аттенюатор; 13—волноводная поглощающая ячейка; 14—вакуумная система; 15—система запуска обр. зца; 16—модуляционный электрод; 17—умножительный кристалл; 18—смесительный кристалл; 19—предварительный усилитель 75 кГц; 20—усилитель 75 кГц; 21—самопищек; 22—синхронный детектор 75 кГц; 23—фазовращатель; 24—усилитель опорного напряжения; 25—калброванный приемник; 26—смеситель; 27—система сравнения частот; 28—кварцевый генератор 10 МГц; 29, 33—усилитель 100 МГц; 30, 31, 32—умножители частоты 30, 60, 270 МГц; 34—система термостатирования кварца; 35—генератор напряжения прямоугольной формы 75 кГц 36—осциллограф.

переходов и их интенсивностей. Анализ спектра образца $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OD}$ привел нас к мысли, что благодаря содержанию в нем определенного процента воды за счет реакции обмена



наблюдаемый спектр является спектром двух молекул: $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OD}$ и $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$.

Это предположение подтвердилось тем, что при разбавлении образца водой интенсивность линий НДО и линий, отнесенных нами к $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$, возрастает.

Вращательные постоянные и структура молекулы

Разность вращательных постоянных $A-C$ и параметр асимметрии x для всех молекул определялась из переходов $1_{01}-1_{10}$ и $2_{02}-2_{11}$. Сумма вращательных постоянных $A+C$ находилась из переходов с низкими J . В табл. 2 приводятся вращательные постоянные, параметр асимметрии, главные моменты инерции и разность $I_a+I_b-I_c$ восьми изотопозамещенных молекул этанола. Благодаря тому, что вращательные постоянные определялись из переходов с низкими J , влияние центробежного возмущения незначительно. Это подтверждается хорошим согласием рассчитанных по найденным вращательным постоянным частот переходов с высокими J .

Структура молекулы определялась методом изотопических замещений, предложенным Крайчманом [3]. Согласно этому методу, последовательно замещая каждый атом в молекуле его изотопом, опреде-

Таблица 1

Переходы	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2^{18}\text{OH}$	CH_3CHDOH	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OD}$	$\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$	$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	$\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OD}$
$1_{01}-1_{10}$	26755,8	26636,2	22278,4	27085,6	18898,5	21405,0	16164,6
$2_{02}-2_{11}$	28013,6	27816,8	23646,5	28199,7	20276,7	22349,0	17100,1
$3_{03}-3_{12}$	29978,8	29657,4	25808,1	29932,1	22473,5	23820,6	18574,6
$4_{04}-4_{13}$	32742,6	32239,6	28877,3	32353,9	25632,0	25884,5	20668,8
$5_{05}-5_{14}$	36417,1[2]	—	33031,1	—	29916,4	28621,2	23480,2
$6_{06}-6_{15}$	41124,8[2]	—	—	—	—	32118,6	27007,1
$7_{07}-7_{16}$	46980,1[2]	—	—	—	—	—	31628,1
$0_{00}-1_{11}$	—	—	—	—	16050,5	—	29062,6
$1_{11}-2_{02}$	—	—	13309,3	—	—	—	26824,8
$2_{12}-3_{03}$	27919,5	—	31549,3	24280,0	—	25527,3	—
$3_{22}-4_{13}$	—	—	—	—	19035,7	—	12413,1
$4_{22}-5_{15}$	—	—	—	—	12888,1	—	—
$4_{23}-5_{14}$	—	—	—	—	—	—	28304,9
$5_{23}-6_{16}$	17827,3	—	30391,6	—	—	19238,7	24464,6
$5_{23}-6_{24}$	—	—	21717,5	—	—	16693,8	—
$5_{24}-6_{15}$	—	—	—	—	—	—	—
$6_{34}-7_{25}$	—	—	—	—	—	—	—
$3_{13}-2_{20}$	29700,6	—	17387,8	—	—	20377,0	21535,6
$3_{12}-2_{21}$	22367,1	—	—	27042,6	—	—	—
$4_{23}-3_{30}$	—	—	—	—	23895,1	—	—
$4_{14}-3_{21}$	—	—	—	19462,4	—	—	—
$4_{22}-3_{31}$	—	—	—	—	22850,9	—	—
$5_{23}-4_{32}$	—	—	20571,2	—	—	—	—
$5_{24}-4_{31}$	—	—	22606,2	—	—	29482,5	26942,8
$6_{34}-5_{11}$	—	—	—	—	26082,7	—	26857,0
$6_{33}-5_{12}$	—	—	—	—	25877,4	—	—
$6_{23}-5_{22}$	26408,8	—	—	—	—	14611,0	—
$6_{24}-5_{23}$	23493,4	—	—	32164,8	—	12280,0	—

Таблица 2

Вращательные постоянные (M_2), параметры асимметрии, главные моменты инерции (а. е. м. $\text{\AA}^2$) и величина $I_a + I_b - I_c$ (а. е. м. $\text{\AA}^2$)

Молекула	A	B	C	κ	I_a	I_b	I_c	$I_a + I_b - I_c$
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	34890,8	9350,8	8135,0	0,909148	14,4889	54,0629	62,1427	6,4090
$\text{CH}_3\text{CH}_2^{18}\text{OH}$	34437,0	8943,5	7800,8	0,914199	14,6799	56,52149	64,8050	6,3998
CH_3CHDOH	30208,7	9238,9	7930,3	0,882518	16,7346	54,7174	63,7468	7,7052
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OD}$	34773,1	8768,6	7687,5	0,920170	14,5380	57,65246	5,7601	6,4302
$\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$	26672,4	9081,8	7773,9	0,861590	18,9533	55,6642	65,0291	9,5884
$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	23490,0	7999,0	7085,1	0,094604	17,7441	63,1991	71,3516	9,5916
$\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$	22641,3	7794,8	6792,8	0,873544	22,3278	64,8549	74,4227	12,7606
$\text{CD}_3\text{CD}_2\text{CD}$	22613,2	7346,1	6448,8	0,888980	22,3555	68,8160	78,3909	12,7806

ляют координаты этих атомов из следующего выражения:

$$|a| = \left\{ \frac{1}{P_{aa} - P_{aa'}} \left(1 + \frac{P'_{bb} - P_{bb}}{P_{bb} - P_{aa}} \right) \left(1 + \frac{P'_{cc} - P_{cc}}{P_{cc} - P_{aa}} \right) \right\}^{1/2}, \quad (1)$$

где P_{aa} , P_{bb} , P_{cc} , P'_{aa} , P'_{bb} и P'_{cc} — вторичные моменты исходной молекулы и молекулы, у которой один атом замещен его изотопом и $\mu = \frac{M(M' - M)}{M'}$; M и M' — молекулярные веса исходной и изотопозамещенной молекул.

Вторичные моменты связаны с моментами инерции следующим образом:

$$\begin{aligned} 2P_{aa} &= I_b + I_c - I_a, \\ 2P_{bb} &= I_a + I_c - I_b, \\ 2P_{cc} &= I_a + I_b - I_c. \end{aligned}$$

Координаты b и c атомов определяются из выражения (1) циклической перестановкой индексов. Зная координаты атомов в системе главных осей, из простых геометрических соотношений находят все структурные параметры молекулы.

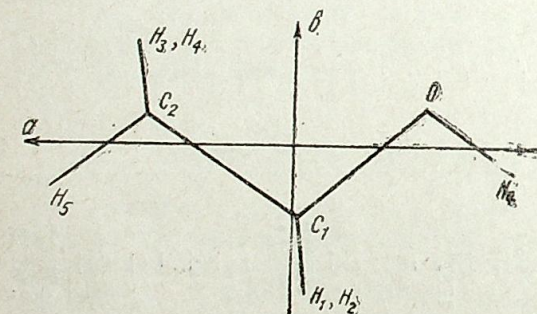


Рис. 2

$\text{CH}_3\text{CH}_2^{18}\text{OH}$. Координата c атомов метильной группы определялась из выражения

$$c = [(P'_{cc} - P_{cc}) / 2\Delta M]^{1/2},$$

справедливого для молекул, обладающих плоскостью симметрии по моментам инерции молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

Неопределенными оказались только координаты атомов углерода и координаты a и b атомов водорода метильной группы. Для нахождения этих координат, используя уже найденные координаты были составлены уравнения моментов $\Sigma m_i a_i$, $\Sigma m_i b_i$ и $\Sigma m_i a_i b_i$. Задавая возможные границы, в которых могут изменяться неизвестные координаты, добивались минимизации указанных значений. При этом предполагалось равенство расстояний $C-H$ для всех трех атомов водорода метильной группы.

Задача решалась на ЭЦВМ „Минск“ методом наискорейшего спуска.

Поставленным требованиям удовлетворял ряд близких решений. Используя структурные параметры, полученные для каждого из этих решений, были рассчитаны главные моменты инерции молекул $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OD}$ непосредственно неиспользуемых при определении координат и выбрано одно решение, наиболее близкое к экспериментальному.

Найденные координаты атомов молекулы этилового спирта в системе главных осей приведены в табл. 3.

Таблица 3

Координаты атомов ($\text{\AA}$) молекулы этилового спирта в системе главных осей

Координаты атома	a	b	c
H_1	-0,0790	-1,2215	0,8877
H_2	-0,0790	-1,2215	-0,8877
H_3	1,2721	0,8851	0,8890
H_4	1,2721	0,8851	-0,8890
H_5	2,1570	0,3868	
H_6	-1,9066	-0,2317	
C_1	-0,0290	-0,5862	
C_2	1,2521	0,2387	
O	1,1293	0,3249	

В табл. 4 приводятся межатомные расстояния и валентные углы, рассчитанные по координатам табл. 3.

Таблица 4

Межатомные расстояния ($\text{\AA}$) и валентные углы

Межатомные расстояния		Валентные углы	
$C-H$	1,093	$\angle CCH$	110°41
$C-H$	1,100	$\angle CCH$	109°30
$C-C$	1,524	$\angle CCO$	107°36
$C-O$	1,428	$\angle COH$	104°46
$O-H$	0,956		

На рис. 1, где дается проекция атомов на плоскость симметрии молекулы, показана ориентация главных осей.

Угол связи $C-C$ с направлением главной оси a составляет 32°47'.

Внутреннее заторможенное вращение и деформационные колебания

Тщательный анализ спектра молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, CH_3CHDOH , $\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, концентрация которых достаточна велика, показал, что наиболее интенсивные вращательные линии ($^{\text{в}}$ Q-ветвь) основного колебательного состояния наблюдаются и в возбужденных колебательных состояниях, которые можно связать с наиболее низкочастотными колебаниями, имеющими место в молекуле этилового спирта: кручением вокруг связи C—C и деформационным колебанием группы C—C—O.

За счет связи углового момента всеобщего и внутреннего вращений энергетические уровни (соответственно и переходы) в молекулах с внутренним заторможенным вращением относительно метильной группы расщепляются на два подуровня: невырожденный A и вырожденный E. Расстояние между этими подуровнями очень чувствительно к высоте потенциального барьера. В основном колебательном состоянии линии всех исследуемых изотопозамещенных образцов оказались нерасщепленными, что указывает на наличие достаточно высокого потенциального барьера.

Таблица 5

Частота (МГц) вращательных переходов молекул CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ в первом возбужденном крутильном колебательном состоянии

Переходы	CH_3CHDOH		$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	
	измеренные	рассчитанные	измеренные	рассчитанные
$1_{01}-1_{10}$	23160,8 23163,8	21160,8 23163,8	21270,0	21270,0
$2_{02}-2_{11}$	24537,1 24540,0	24537,1 24540,0	22186,8	22186,8
$3_{03}-0_{12}$	26707,3 26710,4	26708,7 26711,4	23616,3	23615,0
$4_{04}-4_{13}$	29791,0 29794,7	29797,7 29800,1	25618,2	25616,0
$5_{05}-5_{14}$			28269,4	28267,2
$6_{06}-6_{15}$			31658,7	31654,1

В первом возбужденном крутильном колебательном состоянии вращательные линии удалось обнаружить только у молекул $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и CH_3CHDOH (табл. 5). Причем, только у молекулы CH_3CHDOH они оказались расщепленными. При расчете высоты потенциального барьера нами использовался метод Гершбаха [4]. Потенциальный барьер представляется первым членом ряда Фурье:

$$V = \frac{1}{2} V_3 (1 - \cos 3\sigma). \quad (2)$$

Эффективные гамильтонианы для уровней A и E в приближении высокого барьера для нижних J и достаточно высокой асимметрии из-за малости членов возмущения нечетного порядка с достаточной для нашего случая точностью могут быть выражены как для двух независимых псевдожестких волчков:

$$\begin{aligned} H_{VA} &= A' P_z^2 + B_A' P_x^2 + C_A' P_y^2, \\ H_{VE} &= A' P_z^2 + B_E' P_x^2 + C_E' P_y^2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$A' = A + F\alpha^2 w_{V\sigma}^{(2)}, \quad B' = B + F\beta^2 w_{V\sigma}^{(2)}, \quad C' = C + F\gamma^2 w_{V\sigma}^{(2)}, \quad (4)$$

$$\alpha = \lambda_a I_a / I_a, \quad \beta = \lambda_b I_b / I_b, \quad \gamma = \lambda_c I_c / I_c,$$

$$F = \frac{\hbar^2}{2r I_a}, \quad r = 1 - \sum_{g=a, b, c} \lambda_g^2 I_g / I_a$$

и $w_{V\sigma}^{(2)}$ — коэффициенты возмущения, определенные и табулированные в работе [4].

Разность вращательных постоянных A и E составляющих переходов определяет величину $w_A^{(2)} - w_E^{(2)}$, по которой, используя вышеуказанные таблицы, можно определить параметр s (приведенная высота потенциального барьера), а из выражения

$$V = \frac{9}{4} F \cdot s \quad (5)$$

и высоту потенциального барьера.

В нашем случае, однако, из-за большой погрешности в определении разностей вращательных постоянных была взята разность вращательных энергий двух псевдоэнергетических волчков:

$$\Delta w = w_A - w_E = \frac{\partial w}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial w}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial w}{\partial C} \Delta C. \quad (6)$$

Подставляя сюда выражения для вращательных постоянных (4) и учитывая, что для молекулы CH_3CHDOH $\lambda_c = 0,0007$, получим

$$\Delta w = F\alpha^2 [w_{VA}^{(2)} - w_{VE}^{(2)}] \left[\frac{\partial w}{\partial A} + d \frac{\partial w}{\partial B} \right],$$

$$\text{где } d = \frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{\lambda_b}{\lambda_a} \cdot \frac{I_a^2}{I_b^2}.$$

Определенное из этого выражения среднее значение высоты потенциального барьера для четырех переходов $^{\text{в}}$ Q-ветви молекулы CH_3CHDOH оказалось равным 3370 кал/моль.

Таблица 6

Наблюдаемые и рассчитанные величины расщеплений вращательных линий молекулы CH_3CHDOH в первом возбужденном крутильном колебательном состоянии

Переход	$\Delta\nu$ (мГц)	
	измеренные	рассчитанные
$1_{01}-1_{01}$	—3,0	—2,9
$2_{02}-2_{11}$	—2,9	—2,9
$3_{03}-3_{12}$	—3,1	—3,0
$4_{04}-4_{13}$	—3,7	—3,5

В табл. 6 приводятся величины наблюдаемых расщеплений линий $^{\text{в}}$ Q-ветви и расщеплений, рассчитанных по этому барьеру.

Высоту потенциального барьера можно с достаточно высокой точностью определить и по отношению интенсивностей вращательных линий молекул CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{C}_2\text{OH}$ в основном и первом возбужденном крутильно-колебательном состоянии.

Это отношение дается выражением

$$R = \frac{I_0}{I_1} = e^{\frac{E_{00} - E_{10}}{kT}} \quad (7)$$

Энергия данного крутильного состояния связана с собственным значением ν_{vs} уравнения Матье для крутильного осциллятора соотношением

$$E_{vs} = \frac{9}{4} F \cdot \nu_{vs} \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) получаем

$$\Delta \nu = \frac{4}{9F} kT \cdot \ln R,$$

откуда, используя таблицы функций Матье [6], определялась высота потенциального барьера. Точность определения высоты потенциального барьера этим методом ограничена отражениями, возникающими в волноводном и приемном трактах радиоспектрометра. Поэтому при измерениях приняты специальные меры для уменьшения до минимума отражений.

Высота потенциального барьера, определенная по отношению интенсивностей вращательных линий в основном и первом крутильном состояниях молекул CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, соответственно равна $V = 3250 \text{ кал/мол}$ и $V = 3.170 \text{ кал/мол}$.

Для крутильных частот получены следующие значения: 230 см^{-1} для CH_3CHDOH и 184 см^{-1} для $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$. Таким образом, значения высоты потенциального барьера, определенные из расщепления вращательных линий молекулы CH_3CHDOH в первом возбужденном крутильном состоянии и из отношения интенсивностей линий в основном и первом возбужденном крутильном состояниях молекул CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, находятся в хорошем согласии.

Параметры внутреннего вращения, используемые при определении высоты потенциального барьера представлены в табл. 7. Отсюда видно,

Таблица 7

Параметры внутреннего вращения молекул CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$

Параметры	CH_3CHDOH	$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$
$F(\text{к Мгц})$	184,3550	111,8356
I_a	3,2449	0,3854
λ_a	0,8429	0,8552
λ_b	0,5380	0,5192
α	0,1634	0,3077
B	0,0319	0,0524
γ	0,0007	
r	0,8451	0,7095
s	85,2	142,0

что расщепление вращательных линий молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ не должны наблюдаться вследствие большой величины приведенного барьера.

Вращательные переходы, отнесенные нами к деформационному колебательному состоянию приведены в табл. 8.

При комнатной температуре интенсивность линий в первом возбужденном состоянии получается в 4—4,5 раза слабее интенсивности

соответствующих линий основного состояния во втором возбужденном состоянии, обнаруженном только в спектре молекул, в 20—25 раз.

Таблица 8

Частоты (Мгц) вращательных переходов в деформационном колебательном состоянии и величины смещения их $\Delta\nu$ (Мгц) от соответствующих частот основного колебательного состояния

Переход	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$			CH_3CHDOH			$\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$		$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	
	$\nu=1$	$\Delta\nu$	$\nu=2$	$\Delta\nu$	$\nu=1$	$\Delta\nu$	$\nu=1$	$\Delta\nu$	$\nu=1$	$\Delta\nu$
$1_{01}-1_{10}$	23307,4	1448	27094,6	—339	21089,8	1188	17870,6	1026	19923,3	1482
$2_{02}-2_{11}$	26437,2	1576	28861,4	—348	22326,2	1320	19108,0	1168	20740,4	1608
$3_{03}-3_{12}$	28199,3	1778	30340,0	—362	24257,8	1532	21074,8	1398	22011,0	1809
$4_{04}-4_{13}$	30672,1	2074	33116,0	—374	27045,4	1841	23894,6	1737	23787,2	2097
$5_{05}-5_{14}$	—	—	—	—	30764,2	2260	27709,9	2206	26134,4	2487
$6_{06}-6_{15}$	—	—	—	—	—	—	32651,2	—	29126,4	2992
$7_{07}-7_{15}$	—	—	—	—	—	—	—	—	32835,5	—

Предполагая, что относительная интенсивность пропорциональна множителю Больцмана $e^{-\frac{E_{01}}{kT}}$, вычислены энергии первого ($\nu=1$) и второго ($\nu=2$) возбужденных состояний: $\Delta E = 310 \text{ см}^{-1}$ и $\Delta E = 624 \text{ см}^{-1}$. Частоты деформационных колебаний, определенные по значениям отношений интенсивностей для молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, CH_3CHDOH и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, равны соответственно 310, 291 и 256 см^{-1} .

В работе [2] переходы ^nQ -ветви молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, определенные нами как переходы в возбужденном деформационном колебательном состоянии, приписаны гош-изомеру этой молекулы, образованному вращением гидроксильной группы относительно связи $\text{C}-\text{O}$. Наши расчеты и исследование микроволнового спектра не только молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, но и ее изотопозамещенных CH_3CHDOH , $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, у которых идентифицированы аналогичные переходы, показали необоснованность выводов автора работы. Если бы линии этой серии относились к гош-изомеру, то должны были бы наблюдаться довольно интенсивные ($10^{-6}-10^{-7} \text{ см}^{-1}$) линии, соответствующие переходам ^aQ и ^cQ -ветвей, частоты которых могут быть точно рассчитаны по $A-C$ и χ .

Дипольный момент

Дипольный момент определялся по смещению штарковских компонент переходов $1_{01}-1_{10}$, $2_{02}-2_{11}$ ($M=2$), $3_{03}-3_{12}$ ($M=2$ и $M=3$). Градуировка поля в волноводе производилась по линии $3_{13}-3_{12}$ ($M=2$ и $M=3$) молекулы формальдегида /6 рв/, имеющей дипольный момент $2,340 \text{ D}$. Учитывая наличие плоскости симметрии, мы считали $\mu_c = 0$. Величина μ_a также оказалась близкой к нулю, а среднее значение составляющей дипольного момента было найдено равным $1,58 \pm \pm 0,050 \text{ D}$.

В табл. 9 приводятся экспериментальные и рассчитанные при $\mu_a=0$ и $\mu_b=1,58 \text{ D}$ значения $\Delta\nu/F^2$.

Таблица 9

Переход	$\Delta\nu/E^2 \left[\frac{Mg\mu}{(в/см)^2} \right]$	
	измеренное	рассчитанное
$1_{01}-1_{10}$	12,32	12,60
$1_{02}-2_{11} (M=2)$	14,03	14,11
$3_{03}-3_{12} (M=3)$	14,03	13,68
$3_{03}-3_{12} (M=2)$	5,16	4,97

ЛИТЕРАТУРА

1. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук" 49, 4, (1951).
2. Michielsen-Effinger J. Bull. Classe des Sciences, 50, 6 (1964).
3. Kraitchman J. Am. J. phys. 31, 17 (1953).
4. Herschbach D. R. J. chem. phys. 31, 91 (1959).
5. Tables Relating to Mathieu Functions (Columbia University Press, New York, 1951).
6. I. W. Shoolery, A. H. Sharbaugh Phys. Rev. 82, 95, (1951).

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ
Физика-техника ва ризаијјат елмлэри серијасы, 1967, № 3—4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук. 1967, № 3—4

Х. И. МАМЕДОВ

КВАЗИЛИНЕЙЧАТЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ СПЕКТР ОРГАНИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛ В ПАРАФИНАХ ПРИ НИЗКОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Обычный электронный спектр многоатомных органических соединений состоит из одной или 3—4 сильно диффузионных полос. Наличие таких полос сильно уменьшает получение информации при помощи этих спектров, как в случае поглощения, так и в люминесценции. В ряде случаев, главным образом для простых многоатомных молекул, удается получить электронный спектр с узкополосатой структурой при температуре водорода (20,4°K) и гелия (4,2°K).

В 1952 году впервые Э. В. Шпольским с сотрудниками [1] было показано, что если многоатомная органическая молекула растворяется в нормальных парафинах и исследуется ее электронный спектр при низкой температуре, то широкополосный электронный спектр люминесценции многих сложных органических молекул даже при азотной температуре расщепляется на несколько десятков узких полос, которые уже полос чистых кристаллов несложных молекул. Открытие „эффекта Шпольского“ послужило началом многочисленных исследований, проводимых главным образом школой самого автора эффекта.

С 1960 года в Институте физики АН Азербайджанской ССР начались систематические исследования квазилинейчатых электронных спектров ароматических и гетероциклических соединений. Эти исследования проводились с целью выяснения природы квазилинейчатых спектров в парафинах и развития молекулярного спектрального анализа исследованных молекул. Для решения этой задачи прежде всего нужно было разобраться в экспериментальных условиях проявления квазилинейчатой структуры, в форме и температурной зависимости отдельных квазилиний. В развитии спектроскопии кристаллов было замечено, что благоприятные условия для изучения молекул при низкой температуре создаются при включении их в другую решетку, являющуюся изоморфной с исследуемой.

В основе метода получения квазилинейчатых спектров лежат также выбор матрицы для активной молекулы и низкотемпературные исследования. Однако здесь для исследуемой молекулы и матрицы изоморфизм проявляется слабо. Для многих разнообразных соединений легко подбираются матрицы из нормальных парафинов. Многие интересные вопросы, касающиеся этой проблемы, подробно обсуждались в обзоре Э. В. Шпольского [2]. Мы остановимся на тех вопросах, которые непосредственно связаны с нашими исследованиями. Все низкотемпературные нормальные парафины, которые отличаются друг от друга

группой CH_2 , создают богатый класс для выбора матрицы. Развитие исследований по квазилинейчатым спектрам привело к расширению круга веществ для матрицы. По нашим данным, изопарафины [3] и циклогексан [4] оказались не менее подходящим растворителем для ряда веществ. Однако не только большой выбор растворителей является преимуществом метода Шпольского, но и прозрачность парафинов в исследуемой области спектра делает их незаменимыми.

Теория квазилинейчатых электронных спектров эффекта Э. В. Шпольского дана К. К. Ребане и В. В. Хижняковым и доложена на XI Совещании по люминесценции. В этой работе авторы обратили внимание на аналогию между механизмом возникновения в твердом теле γ -линий в эффекте Мессбауэра и узких "линий" в оптическом квазилинейчатом спектре. Ими показано, что наличие в примесных центрах кристаллов локальных колебаний приводит к появлению в электронно-колебательных спектрах наряду с полосами (фоном) и линией чисто электронного перехода серии узких колебательных квазилиний, шириной порядка $1-5 \text{ см}^{-1}$. Эти теоретические результаты находятся в хорошем качественном согласии, о чем докладывалось нами на той же конференции [6]. При описании спектров фосфоресценции гомологов нафталина в парафинах при 77°K было обращено внимание на то, что каждая отдельная полоса содержит четкую линию на фоне самой полосы.

Нами [7] экспериментально исследовались выводы теории Ребане и Хижнякова о том, что с повышением температуры должно происходить не обычное постепенное уширение линий, а быстрое перераспределение интенсивности между квазилиниями и фоном (полосы) в пользу фона. Именно это перераспределение является главной причиной исчезновения колебательной структуры.

Действительно, в согласии с теорией, было установлено, что для исследуемой молекулы в случае парафинов, кристаллическая структура которых создает достаточно благоприятное условие для возникновения квазилиний (например, хинолин в пентане) в спектре наряду с квазилиниями проявляется фон (полоса) и с повышением температуры соотношение интенсивностей между последними изменяется в пользу фона (рис. 1). В других парафинах, где условия проявления квазилиний слегка отличаются от наиболее выгодных, наряду со слегка расширенными квазилиниями выявляются обычные широкие полосы, интенсивность которых с повышением температуры сильно уменьшается.

Наши исследования по ряду вопросов о происхождении квазилинейчатых электронных спектров проводились при помощи двух подходов. Сначала изучалось влияние строения и состояния исследуемых молекул на структуру квазилинейчатого спектра в парафинах. Затем, считая причины возникновения и свойства квазилинейчатого спектра достоверно решенной задачей, рассматривалась обратная задача: квазилинейчатый спектр применялся как чувствительный индикатор к решению структурных превращений среды—парафина.

Для выяснения состояния активной молекулы в решетке нормального парафина был детально проанализирован квазилинейчатый элек-

тронно-колебательный спектр аценафтена в гексане [8]. Сравнение выявленных колебательных частот спектров флуоресценции, фосфоресценции и поглощения со спектрами комбинационного рассеяния жидкого и твердого аценафтена привело к выводу о том, что состояние активной молекулы в решетке *n*-парафина близко к жидкому состоянию вещества, т. е. в решетке парафина связь молекулы аценафтена с окружением идентична с его жидким состоянием. Следовательно, конфигурации активной молекулы в матрице не деформированы и соответствуют ее структуре в жидком состоянии.

Это положение в дальнейшем подтвердилось при выяснении связи между строением молекулы и спектром фосфоресценции в парафинах при низкой температуре. В этих исследованиях было замечено, что для молекулы с одинаковыми линейными размерами наиболее четкая

Рис. 2
Спектры фосфоресценции α , α' -дипиридила и дифинила в гептане при 77°K .

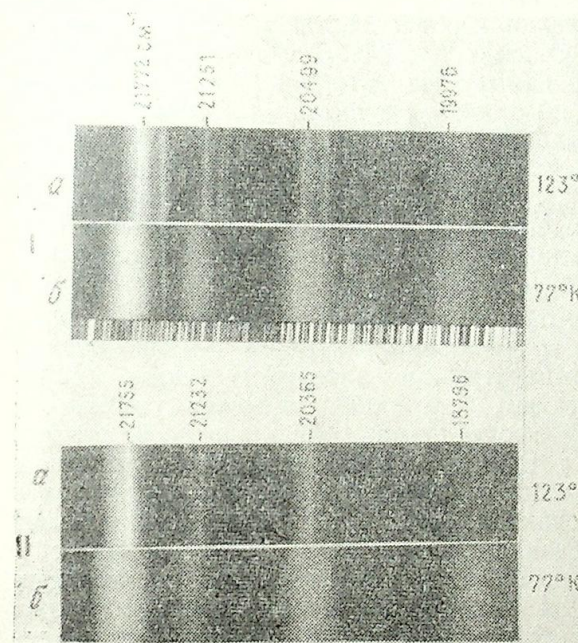
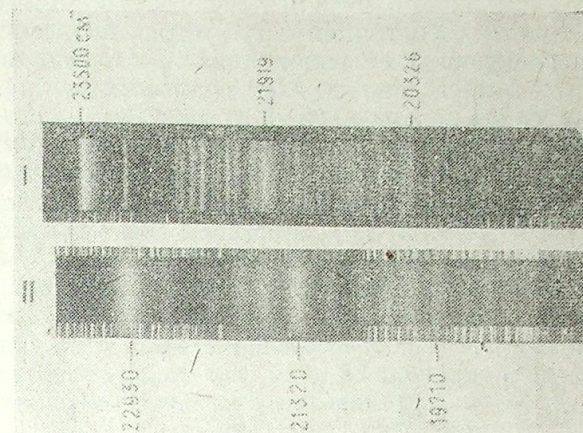


Рис. 3
Спектры фосфоресценции гексанового раствора хинолина до и после фазового перехода матрицы.

электронно - колебательная структура наблюдается в случае с компланарными бензольными кольцами (рис. 2). Отклонение от плоскостного расположения бензольных колец ухудшает четкость строения спектра [9].

Несмотря на то, что в молекуле дифенила межмолекулярные сферы атомов углерода и водорода, находящиеся в ортоположении, перекрываются, в кристаллическом состоянии два бензольных кольца лежат на одной плоскости [10], а в парах они образуют угол 45° [11], имеются также спектроскопические указания нарушения плоскостного строения молекулы в жидком состоянии вследствие выхода фенильных колец из об-

щей плоскости [12]. Учитывая это, мы полагаем, что в случае фосфоресценции в матрице—парафине при 77°K молекула дифенила не вполне плоская и поэтому колебательная структура спектра состоит из менее четких полос. Следовательно, состояние молекулы

дифенила в матрице гептана при 77°K соответствует ее жидким конфигурациям.

По квазилинейчатым электронным спектрам органических молекул в парафинах при низкой температуре можно получить информации не только о состоянии и геометрии активной молекулы в решетке, но и последующих ее изменениях при переходе в триплетное состояние — под возбуждением электронной оболочки. При обсуждении этого вопроса мы вправе идти обратным путем, считая возникновение квазилинейчатого спектра достоверным признаком близости размеров включенной молекулы к размерам молекулы парафина. Ухудшения в структуре спектра (размытия полос) одного из видов свечения (например, фосфоресценции) под действием возбуждающего света считается признаком изменения конфигурации молекулы в триплетном состоянии.

В частности, такого рода экспериментальные результаты получены при исследовании α - и β -метилнафталинов в парафинах 77°K [3, 6]. Для этих веществ, выбранных в качестве матрицы, парафиновый растворитель, пригодный для возникновения квазилинейчатой структуры спектров флуоресценции, оказался совершенно непригодным для развития тонкой структуры фосфоресценции.

Исследования квазилинейчатых спектров показали, что они чрезвычайно чувствительны к мельчайшим изменениям в окружении активной молекулы. Незначительное различие в пространственно разделенном „центре“ приводит к появлению в спектре дублетов и более сложных группировок линий, повторяющихся по всему спектру без изменения расстояния в частотах. Прямыми опытами [13] доказано, что этими так называемыми „мультиплетами“ являются те же молекулы, подверженные влиянию локально различных воздействий кристаллического поля основной решетки [2]. Однако уверенное объяснение „мультиплетности“ различными внедрениями активатора в решетку матрицы затруднительно, когда число компонент „мультиплета“ достигает пяти и более, так как согласно кристаллографическим данным многообразие внедрения активатора в решетку (матрицы) парафина маловероятно.

Автор статьи совместно с Р. З. Лайпановым установили, что „мультиплетности“ могут увеличиться еще за счет полиморфного превращения матричных соединений. Так, например, гексан в присутствии хинолина (10^{-3} мол/л) в интервале от точки плавления (177°K) до 100°K в основном находится в высокотемпературной α -модификации. Ниже 100°K он частично переходит в низкотемпературную β -модификацию (рис. 3). В исследованном температурном интервале (ниже 100°K) α - и β -модификации сосуществуют, что и обуславливает увеличение „мультиплетности“ спектра фосфоресценции хинолина до 6. Гептан, так же как и гексан, в присутствии хинолина в основном находится в высокотемпературной α -модификации, которая полностью переходит в низкотемпературную β -модификацию до 77°K, что и обуславливает замену последовательности квазилиний последовательностью полос.

Возможность люминесцентного метода установления структурных изменений среды и растворителя (в частности жидких, стеклообразных и различных кристаллографических модификаций) используется недостаточно. Между тем для выявления таких превращений наряду с резкими изменениями в спектре можно пользоваться наглядным изменением выхода свечения активной молекулы, введенной в органическую среду. В таких измерениях люминесцентная молекула является чувствительным индикатором на подвижности окружения.

В частности, для выявления температуры фазового превращения парафинов нами измерялись температурные изменения интенсивности полос флуоресценции и фосфоресценции активатора [9]. В области фазового превращения увеличение температуры всего на несколько

градусов приводит к уменьшению интенсивности люминесценции не менее чем в 5—10 раз. Причем температура скачкообразного изменения интенсивности совпадает с температурой резкого изменения спектра, что лишний раз подтверждает наличие фазового превращения в парафине при этой температуре.

Методика определения фазового превращения по изменению интенсивности люминесценции применена также к спиртовым замороженным растворам, содержащим малое количество активных молекул. При разогреве спиртовых растворов, после охлаждения до температуры жидкого азота (77°K), был замечен ряд вспышек свечения с максимумами, расположенными перед структурными переходами. В зависимости от спирта (метилловый, этиловый, бутиловый) число вспышек изменяется от одного до нескольких. Было установлено, что число вспышек не зависит от введенной в спиртовую среду активной молекулы, она характерна для самой среды.

Качественное наблюдение максимумов на кривой температурной зависимости перед фазовыми превращениями привело также к выводу о том, что введенная в спиртовую среду активная молекула может служить чувствительным индикатором для суждения о фазовых превращениях в матрице.

ЛИТЕРАТУРА

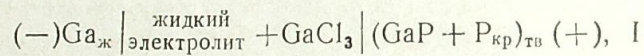
1. Шпольский Э. В. и др. „ДАН СССР“, 1952, 87, № 6.
2. Шпольский Э. В. „Усп. физич. наук“, 80, 255, 1963.
3. Левшин В. Л. и Мамедов Х. И. Вестн. МГУ, III, 2, 30, 1963.
4. Claude B., Josetti K. P. J. chim. phys. et phys. chim. biol. 62, 1243, 1965.
5. Ребане К. К. и Хижняков В. В. Тезисы докл. на XI Совещании по люминесценции. Минск, 1962; „Оптика и спектроскопия“, 14, 362, 1963.
6. Левшин В. Л. и Мамедов Х. И. Тезисы докл. на XI Совещании по люминесценции. Минск, 1962; „Изв. АН СССР, серия физич.“, 27, 605, 1963.
7. Мамедов Х. И. и Лайпанов Р. З. Тезисы докл. на International conference on luminescence. Budapest, 1966; „Оптика и спектроскопия“, 22, 491, 1967.
8. Мамедов Х. И. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 27, 1404, 1965.
9. Мамедов С. И. и Лайпанов Р. З. „Прикл. спектроскопия“ (в печати).
10. Китайгородский А. И. „Орг. кристаллохимия“. М., 1955.
11. Bastionsen O. Acta chim. Scand., 4, 926, 1950.
12. Бобров А. В. и Стерин Х. Е. „Оптика и спектроскопия“, 17, 625, 1964.
13. Свищев Г. М. „Оптика и спектроскопия“, 16, 364, 1964.

А. С. АББАСОВ, К. Н. МАМЕДОВ, Д. М. СУЛЕЙМАНОВ

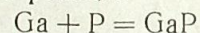
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФОСФИДА ГАЛЛИЯ

Фосфид галлия (GaP) относится к полупроводниковым соединениям типа $A^{III}B^V$, кристаллизующимся в структуре сфалерита. Результаты некоторых исследований [1, 2] указывают на перспективность данного материала для изготовления высокотемпературных полупроводниковых приборов. Из-за высокой упругости диссоциации и температуры плавления фосфид галлия является трудно исследуемым объектом. Термодинамические свойства GaP изучены слабо. Имеющиеся же в литературе сведения лишь только по стандартным теплотам образования, полученные различными авторами из данных по давлению диссоциации фосфида галлия, сильно различаются [3, 4, 5]. Поэтому целью настоящей работы являлось исследование основных термодинамических функций образования фосфида галлия методом электродвижущих сил (э. д. с.) с жидким электролитом.

В температурном интервале 320—430°K были изучены э. д. с. концентрационных (относительно электродов) электрохимических ячеек вида



Изменение изобарно-изотермического потенциала (ΔG°) в результате протекающей в ячейке реакции



пропорционально величине э. д. с. (E) ячейки

$$\Delta G^\circ = -zFE, \quad (1)$$

где z —заряд потенциалообразующего иона галлия, в данном случае $z_{Ga} = 3$ [6]; F —число Фарадея, равное 23,062 ккал/в.г-экв; E —э. д. с. в вольтах.

Изучение зависимости э. д. с. от температуры позволяет установить функциональную зависимость ΔG° от T и, следовательно, найти изменение энтальпии ΔH° и энтропии ΔS° при образовании GaP по уравнениям

$$\Delta S = - \frac{d(\Delta G)}{dT} = zF \frac{dE}{dT}, \quad (2)$$

$$\Delta H = \Delta G + T\Delta S = zF \left(\frac{dT}{dT} E - E \right). \quad (3)$$

Электроды—сплавы представляли смесь фосфида галлия* с красным или черным фосфором, приготовленную в инертной атмосфере. Хлорид галлия ($GaCl_3$) готовился согласно методике, описанной в работе [7]. В качестве электролита был использован обезвоженный и откочанный глицерин с введенными в него хлоридами калия (4 вес. %) и галлия (0,1 вес. %).

Ячейка собиралась в специально изготовленном Н-образном пирексовом сосуде, который впервые введен автором для работы в вакууме и подробно описан в [8]. После этого сосуд погружали в печь, постоянство температуры ячейки поддерживалось с точностью $\pm 1-2^\circ$.

Изучение э. д. с. сплавов, относящихся к гетерогенной области GaP—P проводилось в интервале 320—430°K. Методика эксперимента подробно описана в работах [9—10]. Зависимость э. д. с.—температура изучалась при прямом и обратном ходе в исследуемом температурном интервале. Практически одинаковые значения э. д. с. для сплавов разного состава, полученные для цикла нагрев—охлаждение, подтверждают выполнение условий обратимой работы электрохимического элемента. Совокупность экспериментальных данных по э. д. с. для всех электродов гетерогенной области GaP—P обработана методом наименьших квадратов [11].

Были выведены уравнения вида $E = A + B \cdot T$ в нашем случае $E = 0,320 - 0,081 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 0,009$ в. (4) и $E = 0,223 - 0,102 \cdot T \cdot 10^{-3} \pm 0,008$ в. (5), максимальные погрешности в величине как э. д. с., так и коэффициентов A и B отыскивались как доверительный интервал с 95%-ной вероятностью.

Таблица 1

320—430°K						
$-\Delta G^\circ_{375}$ ккал/моль	$-\Delta S^\circ$ э. е./моль	$-\Delta H^\circ$ ккал/моль	$-\Delta G^\circ_{375}$ ккал/моль	$-\Delta S^\circ$ э. е./г-ат	$-\Delta H^\circ$ ккал/г-ат	Реакция
$20,0 \pm 0,6$	$5,5 \pm 0,9$	$22,1 \pm 1,6$	$10,0 \pm 0,2$	$2,8 \pm 0,4$	$11,1 \pm 0,1$	I
$12,0 \pm 0,5$	$7,1 \pm 0,8$	$15,4 \pm 1,4$	$6,4 \pm 0,1$	$3,4 \pm 0,4$	$8,0 \pm 0,7$	II

На основании уравнений (1), (2), (3), (4) и (5) были вычислены изменения изобарно-изотермического потенциала Гиббса, энтальпии и энтропии при образовании 1 моля фосфида галлия из чистого жидкого галлия и твердого фосфора (красного и черного). Результаты исследования приведены в табл. 1. Используя наши экспериментальные данные, а также литературные величины энтропий и теплоты плавления компонентов [12], мы произвели расчет стандартных значений термодинамических функций образования фосфида галлия.

В табл. 2 приведены также литературные данные по стандартным теплотам образования, полученные различными авторами из экспериментальных результатов по давлению диссоциации фосфида галлия, а также расчетные величины абсолютных энтропий. Следует отметить, что теплота образования, полученная авторами [3], приведена без оценки погрешности. Энтропия, приведенная в [13], вычислена автором по приближенной формуле Эстмана, которая дает погрешность ± 5 э. е./моль для соединений типа $A^{III}B^V$.

Нами было также замечено, что стандартные теплоты образования фосфида галлия, вычисленные из экспериментальных данных, как в случае использования в электроде красного фосфора, так и черного,

* Фосфид галлия был синтезирован в Ин-те редких металлов.

Таблица 2

298°K							
$-\Delta G^\circ$ ккал моль	$-\Delta S^\circ$ э. е. моль	$-\Delta H^\circ$ ккал моль	S° э. е. моль	$-\Delta G^\circ$ ккал г-ат	$-\Delta S^\circ$ э. е. г-ат	$-\Delta H^\circ$ ккал г-ат	S° э. е. г-ат
23,2±0,6	5,4±0,9	24,8±1,6 17,29 [3] 24,4±1,25 [4] 29,1±2,5 [5]	14,3±0,9 9,3 [13]	11,6±0,2	2,7±0,4	12,4±0,8	7,3±0,4 I
22,8±0,5	6,8±0,8	24,9±1,4	12,9±0,8	11,4±0,1	3,4±0,4	12,4±0,7	6,4±0,4 II

Таблица 3

$\Delta H_{\text{ат.}298}$ ккал/г-ат	$\Delta S_{\text{ат.}298}$ э. е./г-ат	$\Delta G_{\text{ат.}298}$ ккал/г-ат
84,80;85 [14]	46,95	77,76

оказались одинаковыми, и это находится в хорошем согласии с величиной, приведенной в [4]. Кроме того, на основании экспериментальных данных мы рассчитали свободную энергию Гиббса, энтропию и энергию атомизации фосфида галлия, которые приведены в табл. 3 и сопоставлены с имеющимися масс-спектрометрическими данными [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelkorn D. Proc. 9KE, 47, 2012 (1959).
2. Allen I. W., Cherry R. I. J. Phys. Chem. Solids, (1962), 23, 509.
3. Марина Л. И., Нашельский А. Я., Якобсон С. В. Научные труды Гиредмета, т. XIII, изд-во "Металлургия", М., 1964.
4. Thurman C. D. J. Phys. Chem. Solids, 26, № 5 (1965) 785.
5. Ермоленко Е. Н., Сирота Н. Н. Химическая связь в полупроводниках и твердых телах. Минск 1963.
6. Laitinen H. A. Lin C. V., Ferguson W. S. Anal. Chem, 30, 2266 (1958).
7. Руководство по препаративной неорганической химии, под ред. Г. Брауера ИЛ. 1956.
8. Герасимов Я. И., Аббасов А. С., Никольская А. В. "ДАН СССР" 147, № 4 (1962).
9. Герасимов Я. И., Никольская А. В. Вопросы металлургии и физики полупроводников. Изд. АН СССР, 1961.
10. Аббасов А. С., Герасимов Я. И., Никольская А. В. 156, № 6, (1964).
11. Налимов В. В. Применение математической статистики при анализе вещества. М., 1960.
12. Stull D. R., Sinke G. C., Thermodynamic Properties of Elements. Washington, 1956.
13. Rennar T. Solid State Electronics, 1,38 (1960).
14. Goldfinger P. I. Chem. Phys., 55, № 10, 721 (1958).

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ризајијат елмләри серијасы. 1967, № 3—4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук. 1967, № 3—4

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Р. Г. БАГРАМОВ, Д. В. ИРЕМАШВИЛИ,
Н. И. ЛЕОНТЬЕВ, Э. Ю. САЛАЕВ

ИМПУЛЬСНЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ УСКОРИТЕЛЬ

Описан импульсный электронный ускоритель, используемый в исследовательской установке для возбуждения электронным пучком полупроводниковых квантовых генераторов. Энергия электронов 250 кэВ ток в импульсе 10 а, длительность 200 нсек. Приводятся первые результаты, полученные при возбуждении током ускорителя монокристалла GaSe.

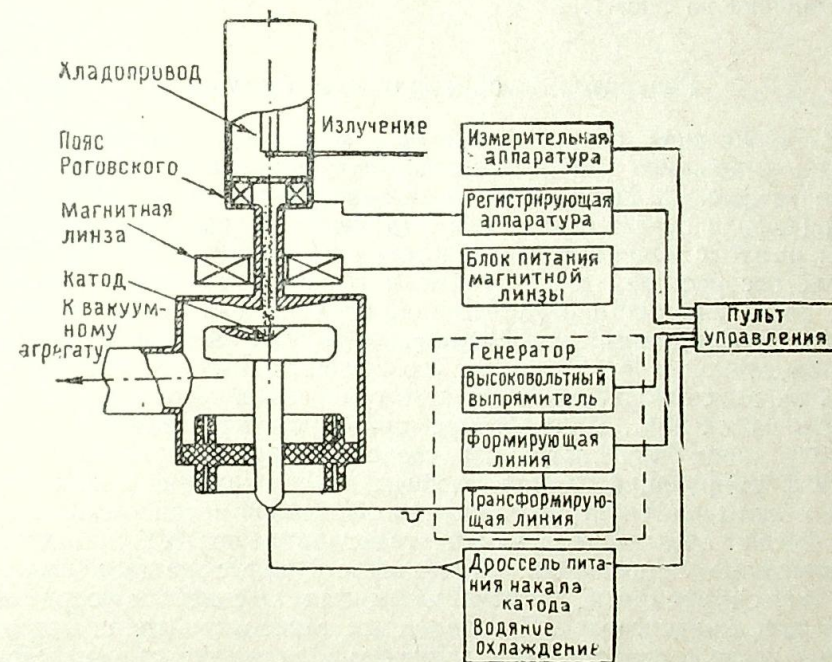


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки.

Одним из перспективных направлений в квантовой радиофизике является использование полупроводников, полупроводниковых соединений и диэлектриков в качестве рабочего вещества квантовых генераторов [1, 2]. Использование пучка быстрых электронов для получения инверсной заселенности в полупроводниках, предложенного Н. Г. Басовым [2], и первые работы, выполненные в ФИАН им. Лебедева [3], открыли новые возможности для получения источников

когерентного излучения в широком диапазоне длин волн. Инверсная заселенность уровней для большинства полупроводниковых соединений достигается при концентрации неравновесных носителей, достигающей $\sim 10^{17} \div 10^{18} \text{ см}^{-3}$. Время жизни пар $\sim 10^{-8} \text{ сек}$ [4]. Следовательно, необходимая скорость образования пар должна быть равна $\sim 10^{26} \text{ см}^{-3} \text{ сек}^{-1}$. Поэтому для осуществления генерации требуется ускоритель электронов, позволяющий получать большие токи. Чтобы избежать разогрева кристалла, ускоритель должен работать в импульсном режиме с малой длительностью токового импульса и малой частотой повторения. Объем кристалла, который можно возбудить, зависит от глубины проникновения электронов и ограничивается энергией, при которой происходят необратимые нарушения кристаллической решетки. Оптимальная энергия электронов зависит от химического состава полупроводника и лежит в пределах $0,15 \div 1,5 \text{ Мэв}$. Для ряда исследований максимальная энергия электронов может быть ограничена 250 кэв .

Отсюда могут быть сформулированы следующие требования к ускорителю исследовательской установки для электронной накачки полупроводниковых квантовых генераторов: ток в импульсе не менее 5 а , диаметр пучка на мишени $\sim 5 \text{ мм}$, длительность токового импульса $\sim 200 \text{ нсек}$, энергия ускоренных электронов $100 \div 250 \text{ кэв}$, частота следования импульсов $0 \div 15 \text{ гц}$. Блок-схема экспериментальной установки, включающая импульсный электронный ускоритель, представлена на рис. 1.

Генератор высоковольтных импульсов

Электрическая схема генератора, в основу которого положен принцип умножения напряжения на коаксиальных кабелях [5, 6], приведена на рис. 2. После заряда двухступенчатых формирующих линий (1, 2) и срабатывания коммутирующих тиратронов (3) формируется импульс напряжения с амплитудой $\sim 30 \text{ кВ}$. Сформированный импульс распространяется по кабелям трансформирующей линии (5) и при достижении ее последовательно соединенных концов возрастает в k раз. Коэффициент трансформации k можно вычислить по формуле, приведенной в [6]. Величина его зависит также от ионизационных потерь на высоковольтных элементах генератора, вызывающих уменьшение k на $2 \div 30\%$. В генераторе при 24 двухступенчатых формирующих линиях и 7 катушках трансформирующей линии $k = 8,5$. Кабели формирующей линии разбиты на две группы, в каждую из которых включен тиратрон. Запуск тиратронов автономный и осуществляется через разделительные трансформаторы (4), выполненные на ферритовых сердечниках. Длительность запускающего импульса определяется временем, необходимым для насыщения сердечника при разряде конденсатора. У водородных тиратронов время задержки развития разряда относительно запускающего импульса меняется от экземпляра к экземпляру и для ТГИИ—2500/35 составляет $160 \div 300 \text{ нсек}$.

Следовательно, для нормальной работы тиратронов, включенных параллельно, необходимо либо подбирать тиратроны с одинаковым временем задержки, либо применять постоянную задержку запускающего импульса одного из тиратронов. В генераторе тиратроны подобраны с одинаковым временем задержки, равным 180 нсек . Как показали испытания, схема запуска работает надежно и время разброса в срабатывании тиратронов не превышает 10 нсек . Применение магнитной линзы для фокусировки электронного пучка позволило увеличить крутизну фронтов токового импульса без коррекции формы

импульса, ускоряющего напряжения, что упростило настройку генератора и несколько увеличило коэффициент трансформации. Кроме того, отказ от нелинейной коррекции позволяет регулировать амплитуду выходного импульса в пределах $100 \div 250 \text{ кВ}$, без изменения

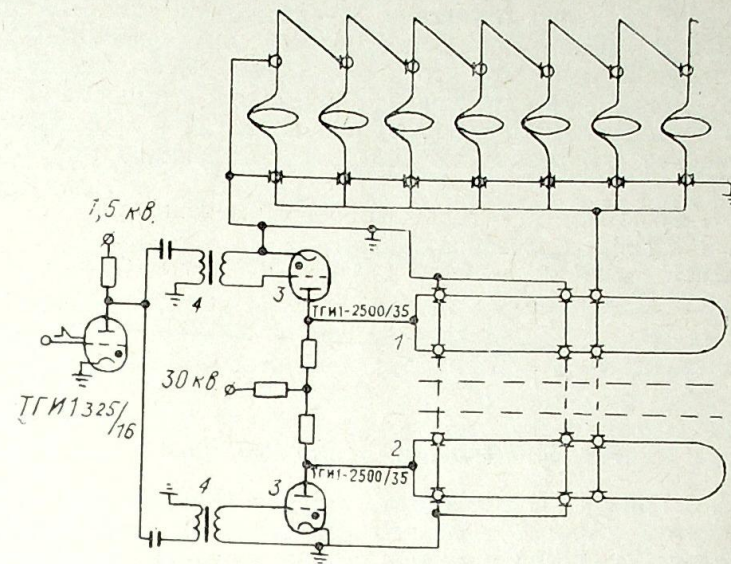


Рис. 2. Электрическая схема генератора высоковольтных импульсов.

формы импульса. Генератор при работе на электронную пушку, представляющую собой комплексную нагрузку с $R = 25 \text{ ком}$, $C = 50 \text{ пф}$, $L = 1,4 \text{ мГн}$, формирует отрицательные импульсы напряжения колоколообразной формы с длительностью 400 нсек по основанию и 200 нсек на уровне 0,9.

Электронная пушка и фокусирующая магнитная линза

В ускорителе используется двухэлектродная пушка с оптикой Пирса [8], формирующая параллельный аксиально-симметричный поток электронов с микропервеансом $P = 0,08$. Профили электродов пушки позволяют легко решить вопрос о предельной напряженности электрического поля не только на краях электродов, но и в ускоряющем зазоре, чего не всегда удается достичь в пушках, описанных в [9]. Испытания электронной пушки с электродами простой формы [9], рассчитанной на данный микропервеанс и компрессию 10 при вакууме $5 \cdot 10^{-6} \text{ тор}$ показали, что уже при 150 кВ ускоряющего напряжения наступает пробой вследствие большого градиента поля на краях катодного электрода.

Катод пушки гексаборидлантановый с косвенным накалом (диаметр 16 мм). Рабочая температура катода 1650° С . Для удобства в эксплуатации анод пушки заземлен, а катод находится под отрицательным потенциалом. Поэтому питание накала катода осуществляется через развязывающий дроссель. Большая мощность, рассеиваемая катодом (450 Вт), и малый зазор между катодом и катодным электродом потребовали охлаждения катодного электрода проточной водой. В области анодного отверстия электронной пушки образуется сильная рассеивающая линза [10]. Угол вылета электронов γ , обу-

словленный действием данной линзы (с учетом пространственного заряда пучка) определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{3} \frac{r_a}{d} \left(1 + \frac{1}{4} \sqrt{P} \right),$$

где r_a — радиус анодного отверстия, d — расстояние анод-катод. При $r_a = 8,5$ мм и $d = 56$ мм величина γ должна быть равной $0,054$ рад. Однако измерения показали, что $\gamma = 0,033$ рад. Это свидетельствует о том, что уменьшение расстояния анод-катод в пушках Пирса по сравнению с расчетным ($d = 80$ мм) при неизменной геометрии электродов приводит к образованию полей, фокусирующих пучок.

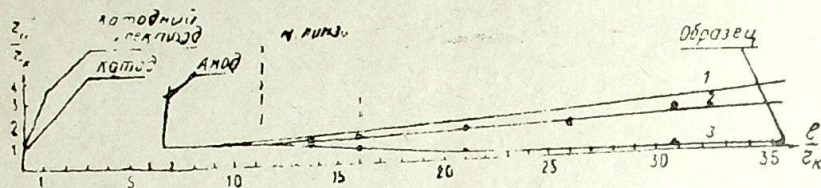


Рис. 3. Расходимость электронного пучка.

На рис. 3 кривая (1) представляет собой границу пучка, рассчитанную с учетом влияния анодного отверстия и пространственного заряда. Кривая (2) — граница пучка, снятая экспериментально; кривая (3) — граница пучка, снятая экспериментально с включенной магнитной линзой.

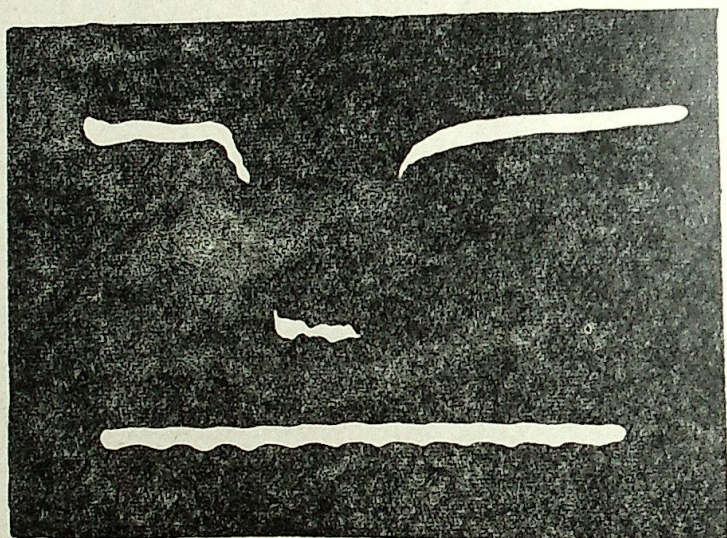


Рис. 4. Осциллограмма токового импульса.

Для фокусировки электронного пучка и регулирования его диаметра на мишени (в пределах $5 \div 10$ мм) используется тонкая магнитная линза. Линейная зависимость фокусного расстояния магнитной линзы от энергии электронов приводит к сепарации электронов по энергиям. Совмещенные осциллограммы токового импульса и ускоряющего напряжения показывают, что разброс энергии электронов на плоской части токового импульса не превышает $\pm 5\%$. При колоколообразном импульсе ускоряющего напряжения регулировкой тока

линзы можно менять не только диаметр пучка на мишени, но и регулировать длительность плоской части токового импульса.

Измерение параметров токового импульса осуществляется с помощью пояса Роговского, расположенного вблизи мишени. Для увеличения амплитуды сигнала пояс Роговского выполнен в виде тора на двух ферритовых кольцах типа Ф - 1000 ($D = 55$ мм, $d = 33$ мм, $h = 12$ мм). Число витков — 60. Импульс напряжения с пояса Роговского поступает на пластины осциллографа по коаксиальному кабелю, согласованному на выходе. Калибровка и контроль формы импульса с пояса Роговского осуществлялись с помощью цилиндра Фарадея, причем амплитуды импульсов подбирались одинаковыми для их совмещения на экране двухлучевого осциллографа. Параметры импульса (рис. 4): $I_s = 10$ а, $\tau_\phi = 100$ нсек, $t_u = 200$ нсек, $\tau_{cp} = 120$ нсек.

Первые экспериментальные результаты

Проверка работы экспериментальной установки проведена на монокристалле p — GaSe, исследованном ранее [11]. Кристаллы были получены методом, описанным в работе [12], и имели концентрацию равновесных носителей $5 \cdot 10^{15}$ см $^{-3}$ с удельным сопротивлением ~ 200 ом·см при 300° К. Сколотые монокристаллические слои с естественными плоскопараллельными зеркальными гранями припаивались

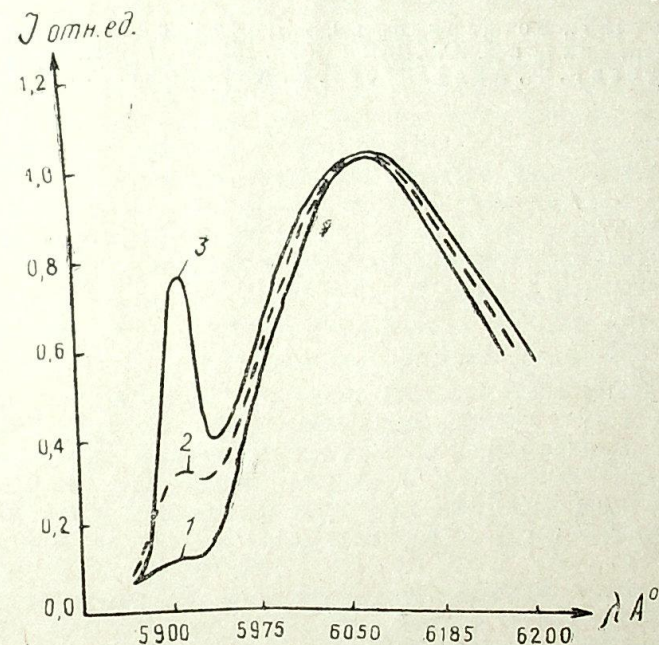


Рис. 5. Зависимость спектральной интенсивности излучения от тока накачки.

к хладопроводу криостата и охлаждались жидким азотом. Пучок электронов с энергией ~ 80 кэВ падал на поверхность образца под углом 45° . При определении энергетического выхода рекомбинационное излучение регистрировалось в направлении, перпендикулярном сколотой поверхности. Для разложения излучения в спектр применялся спектрограф ИСП-51 с фотоэлектрической приставкой ФЭП-1. Спектр излучения при 77° К и малых токах состоял из одного широкого максимума и коротковолнового пика. На рис. 5 показана спектральная интенсивность излучения в относительных единицах в

зависимости от тока накачки. С ростом тока накачки интенсивность линий возрастала, причем коротковолновый максимум рос по интенсивности быстрее длинноволнового (кривые 2, 3). Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с опубликованными ранее.

В заключение авторы выражают благодарность А. С. Насибову и В. Л. Ломакину за участие в разработке эскизного проекта ускорителя, а также А. И. Смирнову, З. П. Русакову, Т. Р. Мехтиева, Э. В. Васильеву и Р. В. Швецову за участие в наладке установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов Н. Г., Попов Ю. М., Вул Б. М. ЖЭТФ, 37, 587, 1959.
2. Advances in Quantum Electronic Columbia University pres, № V, p. 506, 1961.
3. Басов Н. Г., Богданкевич О. В. ЖЭТФ, 44, 3, 1115, 1963.
4. Басов Н. Г. Вестник АН СССР, № 9, 19, 1964.
5. Насибов А. С., Ломакин В. Л., Баграмов В. Г. ПТЭ, № 5, 133, 1965.
6. Воробьев Г. А., Месяц Г. А. Техника формирования высоковольтных наносекундных импульсов. Атомиздат, 1963.
7. Гельцель М. Ю., Панфилов А. Д., Соболев С. С., Юдин А. И. ПТЭ, № 2, 121, 1965.
8. Пирс Д. Р. Теория и расчет электронных пучков (перевод с англ.). "Советское радио", 1956.
9. Тренина С. Н. "Радиотехника и электроника", 7, № 2, 925, 1959.
10. Алямовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. "Советское радио", 1966.
11. Басов Н. Г., Богданкевич О. В., Печенов А. Н., Абдуллаев Г. А., Ахундов Г. А., Салаев Э. Ю. ДАН СССР, 161, № 5, 1965.
12. Мехтиев Р. Ф., Абдуллаев Г. Б., Ахундов Г. А. ДАН Азерб. ССР, 18, 15, 1962.

Р. Э. ГУСЕЙНОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕХАНИЗМОВ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК И ОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ

Впервые А. Б. Северный [1] обратил внимание на возможность наличия, при определенных условиях на Солнце, взрывоподобных процессов, сопровождающихся появлением ударной волны. В [2] Эллисоном явление вспышки рассматривается как процесс очень быстрого высвобождения энергии. По современному представлению [3] максимальная энергия, излучаемая наиболее мощной вспышкой, составляет 10^{32} эрг, что приходится на космические лучи. Данные, касающиеся определения количества энергии, излучаемой вспышкой в линии H_{α} , впервые получены А. Б. Северным [4] и Эллисоном [5]; нами в [6, 7] произведены вычисления, дающие количество энергии излучения наблюдаемой вспышки во всех характерных линиях, в рентгене и непрерывном спектре, т. е. определен порядок энергии, излучаемой данной вспышкой в виде оптической эмиссии. Верхний предел этой энергии для вспышки балла 3^{+} составляет 10^{31} эрг.

Известно [8], что вообще оптическая эмиссия вспышки $\leq 6 \cdot 10^8$ эрг/см²/сек. Если для площади вспышки балла 3^{+} принять $5 \cdot 10^{19}$ см⁻², то в течение 10^3 сек такая вспышка в оптической эмиссии будет излучать энергию $\leq 3 \cdot 10^{31}$ эрг. Если считать, что по сути дела высвобождение всей энергии происходит за время возгорания вспышки за 2—3 мин, верхний предел энергии в оптической эмиссии должен быть уменьшен в несколько раз или даже на целый порядок. Таким образом, верхний предел энергии излучения в оптической эмиссии самой мощной вспышки 10^{31} эрг.

По мнению автора [2], процесс высвобождения энергии подобен ударной волне или разряду. В [9] указывается, что перед наблюдаемой вспышкой в возмущенной области происходило что-то подобное распространению фронта со скоростью примерно 10 км/сек. Автор [9] связывает это со звуковой волной в хромосфере, образовавшейся из ударной волны, вызванной вспышкой. В [10] считается, что вспышка является чисто поверхностным явлением; основным фактором, определяющим образование вспышки, по мнению автора [10], являются ударные волны. В [11] высказывается мнение о том, что условия возбуждения в видимой вспышке очень быстро меняются с глубиной. Это наводит на мысль о том, что видимая вспышка—лишь проявление распространения более мощного возбуждения. Наблюдения авторов [12] показывают, что некоторые вспышки в период роста яркости в H_{α} проходят "взрывную" фазу; при этом происходят очень быстрые изменения яркости, наблюдаются движения со скоростями до

400 км/сек, выбросы, внезапные исчезновения и активизация волокон расположенных довольно далеко от вспышки. Аналогичная картина еще с большей скоростью и эффективным влиянием на волокна обнаруживается в [13]. Можно было бы привести еще много факторов, наблюдений, приводящих к мнению о том, что основным фактором, определяющим образование вспышки, являются ударные волны. Однако все эти выводы носят качественный характер.

Нами выполнен ряд работ, где сделана попытка количественно доказать, что солнечные вспышки действительно представляют собой ударные волны [6, 7, 14—19]. В [6, 7, 15, 16] мы сделали попытку показать, что подобные ударные волны могут быть результатом сильного точечного взрыва в атмосфере Солнца. В настоящей статье приводятся новые данные, касающиеся некоторых вопросов механизмов вспышек и образования энергии во вспышках.

Вычисления, по соответствующим данным наблюдений вспышек, величины кинетической энергии ударной волны согласно теории о сильном точечном взрыве без учета магнитного поля в работах [6, 7] привели нас к заключению, что одна кинетическая энергия ударной волны, возникающей в результате сильного точечного взрыва в атмосфере Солнца, недостаточна для обеспечения энергии всей оптической эмиссии в течение существования вспышки. Однако оказывается, что учет магнитного поля и, следовательно, рассмотрение магнетогидродинамической ударной волны могут устранить эту трудность (при этом наш предыдущий вывод о том, что, кроме кинетической энергии ударной волны во время сильного точечного взрыва, выделяется энергия и в других видах, остается в силе).

В работах [20—22] исследовался вопрос, связанный с рассмотрением цилиндрических магнетогидродинамических ударных волн. В [22] этот вопрос исследовался более подробно и было получено автомодельное решение. Из решения задачи в [22] получено уравнение энергии в виде

$$E_0 = 2 \pi \rho_0 c^{*2} \ln(\beta_0, \gamma). \quad (1)$$

В (1) E_0 —общая энергия системы, состоящая из механической и магнитной энергий и рассчитанная на единицу длины; ρ_0 —плотность невозмущенной плазмы; $c^* = \frac{r_s^2}{\eta s t}$; r_s —расстояние от центра взрыва до

фронта ударной волны; $\eta_s = \frac{r}{r_s}$ (r —координата ударной волны); t —

время, прошедшее с момента взрыва; $\ln(\beta_0, \gamma)$ —функция постоянной адиабаты γ и параметра β_0 (β_0 —отношение скорости Альфвена в плазме сразу же перед ударом к скорости ударной волны). Функция $\ln(\beta_0, \gamma)$ найдена путем интегрирования уравнений движения и представлена графически при разных γ и β_0 , для случаев так называемой „чистой“ магнитной гидродинамики и „изменяющейся“ гидродинамики [22]. Ввиду того, что в изменяющейся гидродинамике [23] проводимостью газа в покое пренебрегают, а в „чистой“ магнитной гидродинамике газ, находящийся в состоянии покоя, считается хорошим проводником и это последнее условие как раз подходит к солнечной атмосфере, мы должны были бы пользоваться результатами этого случая. Однако при определении E_0 из (1) выбор случая не играет роли, ибо в обоих

случаях $\ln(\beta_0, \gamma) \geq 0,7$, если $\gamma = \frac{5}{3}$ и $\beta_0 \leq 10^{-1}$. В условиях солнечной атмосферы (имеем в виду нижнюю корону и верхнюю хромосферу) скорость Альфвена может составлять $10^6 - 10^7$ см/сек, а скорость ударной волны в самой начальной фазе возгорания вспышки

можно принять 10^8 см/сек, т. е. в интересующих нас условиях действительно $\beta_0 \leq 10^{-1}$. Далее следует отметить, что при $\gamma = \frac{5}{3}$ и $\beta \leq 10^{-1}$ доля механической энергии в E_0 составляет почти всю энергию E_0 , ибо $\frac{\Delta E_G}{E_0} > 0,9$, где ΔE_G —механическая энергия взрыва, которая идет на образование ударной волны.

Для вспышки балла $3^+ r_s \approx 4 \cdot 10^9$ см (площадь $5 \cdot 10^{19}$ см²) [8] и такого расстояния ударная волна достигнет за $t \approx 40$ сек; тогда, учитывая, что на ударной волне $\eta_s = 2^{3/2}$, из формулы для c^* находим $c^* \approx 1,4 \cdot 10^{17}$ см²/сек. Таким образом, для вспышки балла 3^+ из (1) получим $E_0 \geq 10^{35}$ эрг; при $\rho \approx 10^{-13}$ г/см³ для вспышки балла 3^+ будем иметь $E_0^* \geq 10^{22}$ эрг/см и поскольку $r_s \approx 4 \cdot 10^9$ см, полная энергия взрыва составит $E_0^* \geq 4 \cdot 10^{31}$ эрг или, что все равно, кинетическая энергия ударной волны $\geq 4 \cdot 10^{31}$ эрг.

Таким образом, кинетическая энергия ударной волны, возникающей в результате сильного точечного взрыва в условиях солнечной атмосферы, вполне достаточна для обеспечения всей оптической эмиссии за все время существования самой мощной вспышки. Учет космических лучей не создает затруднения, ибо при $\rho_0 \approx 10^{-12}$ г/см³ для вспышки балла 3^+ имели бы $E_0^* \approx 4 \cdot 10^{32}$ эрг. При этом следует отметить, что, во-первых, все не вспышки сопровождаются космическим излучением и, во-вторых, энергия космического излучения 10^{32} эрг является верхним пределом. Кроме того, здесь же следует отметить еще следующее: в [24] А. Н. Коваль и Н. В. Стешенко рассматривали наиболее интересные особенности спектров 7 протонных и 21 не протонной вспышек и, исходя из идентичности их спектров, заключили, что за генерацию высокоэнергичных протонов вряд ли ответственные те области вспышки, которые определяют характер ее видимого спектра (в то время как наши вычисления для определения величины кинетической энергии ударной волны проводятся на базе наблюдений, относящихся к области вспышки, которая характеризует ее видимый спектр).

В результате сильного точечного взрыва область взрыва значительно нагревается ($\approx 10^7$ °К) и, благодаря интенсивной теплопроводности, через несколько десятков секунд температура в ядре вспышки должна уменьшиться до температуры невозмущенной атмосферы [15, 16]. Предположим, что такой взрыв происходит во внутренней короне; тогда отдельные сгустки, выталкиваемые из области взрыва будут представлять собой сильные ударные волны, уносящие магнитные силовые линии, т. е. явление будет сходным с плазмоидом (И. С. Шкловский [25] рассматривал аналогичное с плазмоидом явление для объяснения „усов“). Прежде всего можно показать, что температура сгустка, движущегося в сторону хромосферы, до вхождения в хромосферу уменьшится до температуры не более, чем температура невозмущенной короны. Пусть сгусток имеет форму цилиндра высотой $l \approx 10^9$ см и температуру $T \approx 10^7$ °К. Тогда поток тепла на границе сгустка будет

$$F_c = \kappa \frac{dT}{dr}, \quad (2)$$

где $\kappa = 5 \cdot 10^{-7} T^{5/2}$ —коэффициент теплопроводности, $\frac{dT}{dr} = \text{grad } T$. При

$dr \approx \frac{l}{2} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ см}$ и $dT \approx 10^7 \text{ К}$ из (2) получим

$$F_c \approx 3 \cdot 10^9 \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек.} \quad (3)$$

В столбе с сечением 1 см^2 и проходящем „поперек“ сгустка число электронов $N_e = n_e l$. Пусть $n_e = 2 \cdot 10^{10}$, т. е. электронная плотность в сгустке всего в несколько раз больше плотности в корональной конденсации; тогда $N_e = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-2}$. Охлаждение сгустка до температуры невозмущенной короны требует отдачи от каждой частицы в сгустке энергии $\frac{3}{2} k \Delta T \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ эрг}$, а от всех частиц — около $4 \cdot 10^{10} \text{ эрг/см}^2$. Поэтому (с учетом (3)) потребуется примерно 10 сек для того, чтобы температура сгустка уменьшилась до температуры невозмущенной короны, окружающей сгусток. При скорости $\approx 10^8 \text{ см/сек}$ за это время сгусток пройдет путь $\approx 10^9 \text{ см}$.

Если сильный точечный взрыв происходит в нижней короне, то температура сгустка при его вступлении в хромосферу будет $< 10^6 \text{ К}$, а плотность увеличится за счет охлаждения сначала главным образом из-за теплопроводности и частично из-за излучения в короне, а затем только из-за излучения. Причем в начале усиления излучения преобладающую роль будут играть излучения, связанные свободно-свободными, свободно-связанными переходами. Грубо качественно можно оценить скорость охлаждения сгустка в хромосфере из-за этих излучений. Для того, чтобы температура одной частицы уменьшилась на ΔT , она должна отдать энергию $\frac{3}{2} k \Delta T = \frac{3}{2} k dT$. За еди-

ницу времени отдача энергии от n частиц сгустка составит $\frac{3}{2} k n \frac{dT}{dt}$.

Для оценки количества потерь n частицами из-за упомянутых выше излучений можно пользоваться выражением, полученным Орралом и Зиркером [26] для температур 10^4 — $6 \cdot 10^6 \text{ К}$:

$$E_{\text{рад}} = 4,4 \cdot 10^{-24} n^2 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{сек}} \quad (4)$$

Если пока пренебречь изменением объема (или плотности) сгустка то уравнение энергетического баланса, вернее уравнение энергии будет

$$\frac{3}{2} k n \frac{dT}{dt} = - E_{\text{рад}}, \quad (5)$$

решение которого даст

$$T = T_0 - 2 \cdot 10^{-8} n t. \quad (6)$$

Пусть $T_0 \approx 7 \cdot 10^5 \text{ К}$, тогда $2 \cdot 10^{-8} n t \approx 7 \cdot 10^5$, если $n t \approx 3,5 \cdot 10^{13}$. При $n = 2 n_e \approx 4 \cdot 10^{10}$, $t < 10^3 \text{ сек}$. Но, благодаря быстрому охлаждению сгустка в короне, из-за усиленной теплопроводности и частично из-за излучения в момент вступления сгустка в хромосферу должно быть $n \gg 4 \cdot 10^{10}$.

Если к этому добавить еще уплотнение за счет охлаждения в хромосфере из-за свободно-свободного и свободно-связанного излучений (излучение пропорционально квадрату плотности), то по сути дела в момент вхождения сгустка в хромосферу должно быть $n > 10^{12}$ и, следовательно, $t < 50 \text{ сек}$, т. е. сгусток — ударная волна довольно быстро может стать источником излучения в эмиссионных линиях в спектре вспышки. Тогда возникает другое затруднение: для поддер-

жания повышенной яркости в течение существования вспышки ($\sim 10^3 \text{ сек}$) должны иметь необходимый источник энергии. Трудно себе представить механизм, обеспечивающий постоянную (в течение 10^3 сек) „подкачку“ такой энергии в область вспышки, и поэтому источник энергии, поддерживающий свечение вспышки, нужно искать в процессах, происходящих внутри самой вспышки.

В наших работах [19, 27—32] спектрофотометрические исследования вспышек привели в частности к тому, что турбулентность является одной из основных характеристик плазмы вспышки. В частности мы убедились, что механизм уширения эмиссионных линий в спектре вспышек в основном определяется турбулентностью, вернее макроскопическим движением внутри областей эмиссии; между турбулентной скоростью в области эмиссии водородных линий и интенсивностью (в частности центральной интенсивностью) бальмеровских линий водорода имеется удивительная связь: турбулентная скорость в области излучения водорода и центральная интенсивность в водородных линиях серии Бальмера меняются синхронно, т. е. рост турбулентной скорости сопровождается ростом интенсивности и наоборот. Все эти факты являются любопытной загадкой. Напрашивается вопрос: не может ли турбулентность во вспышке являться источником, постоянно „подкачивающим“ энергию в эмиссию вспышки?

В работах [17, 18] нами исследовался вопрос о турбулентности во вспышках, исходя из теории газомангнитной турбулентности со сверхзвуковыми скоростями и коллективных процессов в плазме. Оказывается, что если в случае наиболее мощной вспышки массу водородного газа в области вспышки принять $\sim 10^{16} \text{ г}$, а в случае слабой $\sim 5 \cdot 10^{14} \text{ г}$, и их размеры взять, соответственно, $4 \cdot 10^9 \text{ см}$ и $5 \cdot 10^8 \text{ см}$, а скорости турбулентного движения соответственно принять 150 и 25 км/сек , то количество кинетической энергии, передаваемое всей водородной эмиссии за секунду, будет $\sim 10^{28}$ и $\sim 10^{25} \text{ эрг/сек}$ для наиболее мощной и слабой вспышек, соответственно. Учет количества энергии, передаваемого турбулентности крупного масштаба, ответственного за эмиссию в других эмиссионных линиях, не может изменить (увеличить) порядок полученных выше величин энергии.

Поэтому за время существования вспышки ($\sim 10^3 \text{ сек}$) количество энергии, передаваемое турбулентности крупного масштаба, ответственного за всю оптическую эмиссию наиболее мощной вспышки, будет $\leq 10^{31} \text{ эрг}$ (знак $<$ может иметь место из-за того, что величина скорости турбулентного движения, принятая нами для вспышек, не представляет собой некоторую среднюю, а соответствует максимуму интенсивности, т. е. максимальной скорости турбулентного движения); для слабой вспышки эта величина будет $\leq 10^{28} \text{ эрг}$.

Следует заметить, что величины масс, размеров и скоростей лежащие в основе выше приведенных результатов вычислений, являются вполне допустимыми и реальными. Собственно говоря, величина скорости турбулентного движения для наиболее мощной и слабой вспышек нами определена спектрофотометрическими исследованиями подобных вспышек [27—32]. Принятым размерам соответствуют площади $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^2$ (по которой мы определяли верхний предел энергии, излучаемой во всей оптической эмиссии вспышкой 3^+) и $8 \cdot 10^{17} \text{ см}^2$ (для вспышки балла 2 обычно принимается 10^{18} см^2 , см., например, [8]). Что касается величин массы, то они не могут быть меньше вышепринятых. Действительно, для наиболее мощной вспышки площадь $5 \cdot 10^{19} \text{ см}^2$, а для концентрации водорода можно принять $\sim 10^{14}$, т. е. $\rho \approx 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ г/см}^3$. В настоящее время имеется довольно много фактов, говорящих о том, что вспышки представляют собой структурное

образование, поэтому если „эффективную толщину“ вспышки принять $\sim 10^6$ см, то для массы наиболее мощной вспышки получим $\sim 10^{16}$ г.

Таким образом, мы видим, что энергия турбулентности во вспышках вполне достаточна для обеспечения их оптической эмиссии. Источником энергии турбулентности во вспышках может являться сильный точечный взрыв в атмосфере Солнца, кинетическая энергия которого как мы видели в начале статьи, вполне достаточна.

Как показано нами в [17, 18], применение теории газомангнитной турбулентности со сверхзвуковыми скоростями и современное представление о коллективных процессах в плазме могут привести к весьма интересным результатам, объясняющим многие спектрофотометрические характеристики вспышек. По современному представлению о коллективных процессах в плазме, приводящих к разным видам колебаний плазмы [33], усиленную турбулентность во вспышках можно объяснить градиентом плотности, вызванным ударными волнами (очевидно, что вне зависимости от причины возникновения ударной волны, следовательно, вопрос о турбулентности во вспышках является в некотором смысле самостоятельным—независимым от применения теории о сильном точечном взрыве).

Ударные волны, градиент плотности, возникающий под действием ударных волн, турбулентность, вызванная этим градиентом, характер изменения магнитного поля; во вспышке и связь между турбулентностью и изменением магнитного поля могут объяснить особенности изменения яркости во вспышках. Действительно, при наличии сильных ударных волн, большой градиент плотности должен привести к почти мгновенному усилению турбулентности (начало возгорания вспышки); усиление турбулентности не должно продолжаться долго, ибо это усиление в среде с высокой проводимостью увеличивает напряженность магнитного поля; но процесс нарастания поля прекращается, когда поле достигает определенной величины, ибо достаточно сильное поле подавляет турбулентное движение [34]; фаза усиления турбулентности во вспышке может соответствовать фазе ее возгорания; в дальнейшем должно произойти постепенное ослабление турбулентности с уменьшением градиента плотности (послемаксимальная фаза—фаза угасания вспышки).

Изучение вопроса о турбулентности во вспышках приводит и к другим весьма интересным результатам [17, 18]. Оказывается, что внутренний масштаб, т. е. наименьший масштаб, в котором представляемая энергия превращается в тепловую, во вспышке может составлять всего несколько десятков метров (структурное образование и тонкая структура). Далее, поскольку с уменьшением скорости турбулентного движения доля кинетической энергии, непосредственно диссипирующей в тепловую, в ударных волнах уменьшается и благодаря этому переход кинетической энергии ударной волны в тепло осуществляется в сравнительно больших масштабах, изменение интенсивности эмиссионных линий спектра вспышек со временем должно происходить синхронно со скоростью турбулентного движения, что действительно обнаруживается спектрофотометрическими исследованиями [27—32].

Исходя из изложенного выше, можно сделать заключение о том, что изучение природы солнечных вспышек, пользуясь достижениями теорий газомангнитной турбулентности со сверхзвуковыми скоростями и коллективных процессов в плазме, откроет возможности для понимания многих вопросов механизмов вспышек и образования энергии во вспышках.

ЛИТЕРАТУРА

- Северный А. Б. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“ 17, 129, 1957.
- Ellison M. A. Quart. J. Roy. Astron. Soc., 4, № 1, 1963.
- Пикельнер С. Б. Усп. физич. наук, вып. 3, 1966.
- Северный А. Б. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“ 9, 3, 1952.
- Ellison M. A. Publ. Royal Obs. Edinburgh. 1, 75, 1952.
- Гусейнов Р. Э. „Астроном. ж.“, 38, вып. 5, 1961.
- Гусейнов Р. Э. Тр. Шемахинской астрофиз. обс. 2, 1962.
- Kierpenheuer K. O. aaS—NaSa. Symposium on the physics of solar flares. Maryland. October, 28—30, 1963.
- Russo Dora Righini Guglielmo. 30, 5, 1961.
- Chen Riao sci. Rec. № 12, 635—639, 1959.
- Jefferis J. T., Smith Ev. P., Smith H. T. Ap. J., 129, 146, 1959.
- Athay R. Grant, Moreton Coile E. Ap. J., 133, № 3, 1861.
- Moreton Coile E. Astronom. J., 69, № 2, 1964.
- Гусейнов Р. Э. Тр. Шемахинской астрофиз. обс. 3, 1964.
- Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 7, 1964.
- Гусейнов Р. Э. Сообщ. Шемахинской астрофиз. обс., вып. IV, 1965.
- Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 5, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 6, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Астроном. ж.“, 43, вып. 6, 1966.
- Pai S. T. Techn. Note BN—109, Inst. for Fluid Dynamics a. Appl. Math. Univ. Maryland, 1957.
- Бай Ш и -и. Магнитная газодинамика и динамика плазмы. Изд-во „Мир“, М., 1964.
- Greiffinger C. a. Cole J. D. The Phys. of Fluids. 5, № 12, 1962.
- Grenspan H. P. The Phys. of Fluids. 5, № 3, 1962.
- Коваль А. Н. и Стешенко Н. В. „Изв. Крымской астрофиз. обс.“, 30, 200, 1963.
- Шкловский И. С. „Астроном. ж.“, 35, вып. 6, 1958.]
- Ogall F. Q. a. Zieger J. A. Ap. J., 134, 72, 1961.
- Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 2, 129, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 75, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 83, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 4, 96, 1966.
- Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 3, 1965.
- Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 5, 1965.
- Кадомицев Б. Б. Вопросы теории плазмы. Атомиздат, 1964.
- Chandrasekhar S. Proc. Roy. Soc. A. 233, 330, 1955.

З. А. ИСМАИЛОВ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СПЕКТРА ПЕРЕМЕННЫХ ЗВЕЗД GWOri И RY Tau

По спектральным особенностям звезды типа Т Тау сильно отличаются друг от друга. Наряду со звездами, имеющими в спектре множество эмиссионных линий (например: RWAur, Т Тау, LKHa 120 и т. д.), существуют и такие, у которых в излучении наблюдаются только линии Н и К (Ca II) и несколько низших членов серии Бальмера. Сильно отличается у различных Т Тау звезд также интенсивность непрерывной эмиссии, наблюдаемой в коротковолновой части спектра. В работе [1] были отмечены некоторые особенности изменения RWAur. Она как раз относится к той группе Т Тау звезд, где большинство линий наблюдается в эмиссии. Настоящая статья посвящена исследованию некоторых особенностей изменения спектра тех Т Тау звезд, у которых помимо избыточной непрерывной эмиссии в излучении наблюдаются только линии Н и К и несколько низших членов серии Бальмера. Например, у GWOri, кроме Н и К (Ca II), только Ha наблюдается в эмиссии. Есть подозрение, что в H_β тоже иногда существует слабая эмиссия [2]. У RY Tau, согласно [2], признаки эмиссии в водородных линиях наблюдаются до H_ε включительно.

Сначала коротко остановимся на предыдущих исследованиях, касающихся этих звезд. RY Tau была открыта на Гарвардских фотографиях в 1907 году. Звезда расположена в головной части кометарной туманности, длина которой около 7'. Джой [3] классифицирует спектр как F8 — G0, а Ликские спектрограммы высокой дисперсии (10 Å/мм) позволяют оценить спектр как dG5e. По линиям Н и К (Ca II) обнаружено, что лучевые скорости равнялись —75, —90, —96 км/сек в три различных года [4]. Линии поглощения слегка расширены; им соответствует V sin i = 45 — 50 км/сек, если считать, что расширение вызвано вращением. Изменение цвета дано в работе [5], а кривая блеска представлена в работах [6, 7].

До сих пор не наблюдалось больших быстрых изменений блеска, хотя около максимума имеется много мелких быстрых флуктуаций. Блеск меняется в пределах $m_{pg} = 9,3 - 12,3$. GWOri считается подобной Т Тау в основном из-за небольшой амплитуды изменения блеска, которая, согласно Джою [8], составляет 0,7^m. В той же работе спектр оценивается как dK3e. Однако на основе излучения 393 пластинок Зоннебергской обсерватории Гётц [9] обнаружил, что амплитуда изменения блеска GWOri в два раза больше (10^m.1 — 11^m.5). Далее он отмечает, что кривая блеска звезды показывает быстрые не-

прерывные изменения (1^m.0 за 1^d.0), которые часто происходят после того, как звезда сравнительно долгое время находилась около среднего блеска (10^m.7 — 10^m.9). Возможно, что некоторые участки кривой блеска остаются без быстрых флуктуаций около максимума и минимума. В работах [10, 11] обнаружено обилие лития у звезд GWOri и RY Tau, для которых отношение (Li/металлы) звезды к (Li/металлы) Солнца равняется 50—80 и 400, соответственно.

Звезды Т Тау очень плохо изучены, особенно спектрально. Совместителей Т Тау звезд с большой дисперсией. Однако при этом большое время экспозиции сглаживает быстрые изменения спектра. Например в работе [2] три спектрограммы RY Та получены с выдержками в 137, 168 и 302 мин (дисперсия 10, 32 и 16 Å/мм, соответственно), а спектр GWOri получен с выдержкой в 226 мин (дисперсия 16 Å/мм). RY Tau и GWOri наблюдались нами на Абастуманском телескопе AC-32 с объективной призмой. Такой телескоп позволяет при относительно низкой дисперсии (166 Å/мм у H_γ) получить спектрограммы этих звезд за 20—30 мин. GWOri наблюдалась в сезоны 62—63 и 63—64 гг. Было получено 14 пригодных для обработки спектрограмм. RY Tau наблюдалась в 1962 году, когда было получено всего 4 спектрограммы. Спектры снимались на пластинках Agfa Astro несенсиблизованных. Обработка производилась в стандартных условиях. Наблюдательный материал приведен в таблице. Все спектрограммы обработаны на саморегистрирующем микрофотометре отдела физики Солнца ГАО АН СССР с увеличением в 48 и 96 раз для исследования непрерывного спектра и линий.

№ п/п	Дата	Экспозиция, мин	Время (мировое)	№ п/п	Дата	Экспозиция, мин	Время (мировое)
1	21 ноября 62	30	23.13	1	27 октября 62	30	20.31
2	27 декабря 62	30	23.36	2	28 октября 62	30	20.39
3	27 января 63	30	17.14	3	"	30	21.19
4	"	30	20.37	4	"	30	22.00
5	30 января 63	30	20.04				
6	13 ноября 63	20	23.19				
7	16 ноября 63	20	22.00				
8	17 ноября 63	20	21.46				
9	"	20	22.18				
10	"	20	23.40				
11	11 декабря 63	30	19.41				
12	"	30	21.53				
13	8 января 64	30	21.03				
14	"	30	22.03				

Непрерывный спектр проводился по верхушкам отбросов регистрограмм, а в районе сильных линий (Н и К у исследуемых звезд, H_γ, H_β, Н у звезд сравнения)—по способу, описанному в работе [1]. Изучение непрерывного спектра проводилось с помощью выражения

$$\Delta \lg I_{\lambda} = \lg I_{\lambda}(\text{иссл.}) - \lg I_{\lambda}(\text{зв. сравн.}) \quad (1)$$

Звездами сравнения служили звезды спектральных классов А0 и А2 для RY Tau и GWOri соответственно, расположенные на расстоянии не более 6' от исследуемой звезды. Обнаружилось, что в спектрах RY Tau и GWOri имеется избыточная у-ф эмиссия, которая начинается у $\lambda \approx 3880 \text{ Å}$ и усиливается в сторону коротких волн. Как правило,

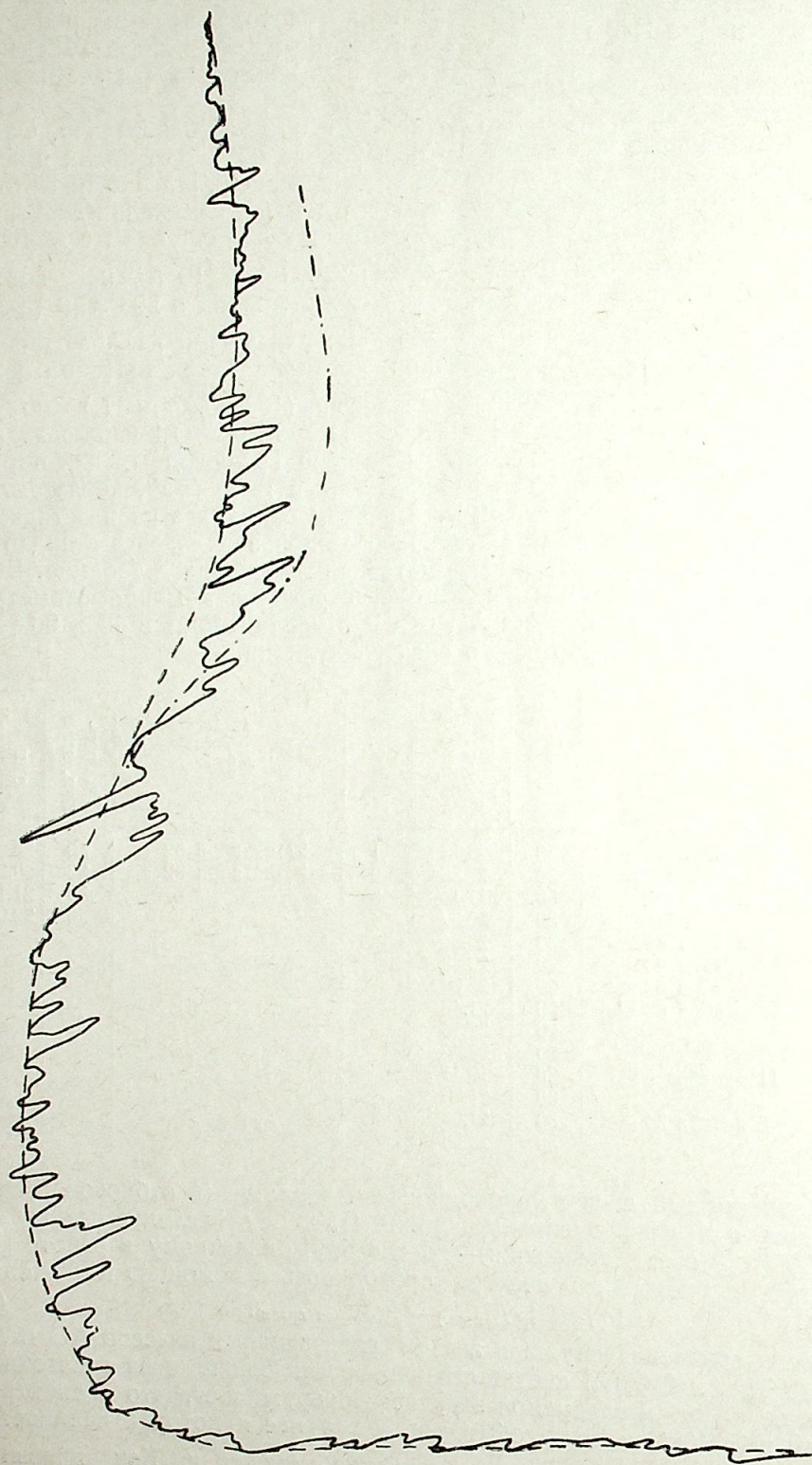


Рис. 1.

распределение этого излучения имеет максимум около бальмеровского предела, а интенсивность его меняется от пластинки к пластинке. Проверим, могло ли быть результатом ошибки проведение непрерывного спектра наблюдаемой эмиссии. Допустим, что нам известно излучение исследуемой звезды только до $\lambda = 3880 \text{ \AA}$, а звезды сравнения до $\lambda = 3500 \text{ \AA}$. Тогда для нахождения распределения энергии в спектре исследуемой звезды можно было бы кривую, найденную из (1), продолжить до $\lambda = 3500 \text{ \AA}$ с тем же наклоном и найти $\lg I_{\lambda(\text{иссл.})}$ в районе $\lambda \lambda 3880-3500 \text{ \AA}$.

На рис. 1 рядом с регистрограммой RY Tau приводится кривая, найденная таким образом (штрих-пунктир). Как видно из рисунка, никакая возможная ошибка в проведении непрерывного спектра не может быть причиной наблюдаемого у-ф избытка. Аналогичное можно показать и для GW Ori. Как известно, у различных звезд начало у-ф избытка колеблется в районе $\lambda \lambda 4100-3750 \text{ \AA}$. Были случаи, когда при наблюдениях на двух различных инструментах одной и той же звезды начало у-ф избытка смещалось на $150-200 \text{ \AA}$. Поэтому возникло предположение, что смещение начала у-ф избытка связано с разрешающей способностью используемых инструментов. Однако у RW Aug, GW Ori и RY Tau, наблюдаемых на одном и том же инструменте в различное время, также наблюдаются такие смещения. У RWAug у-ф избыток обнаруживается начиная от $\lambda \approx 4000 \text{ \AA}$, а около одного из максимумов блеска смещается до $\lambda = 3850 \text{ \AA}$ [1]. То, что у GW Ori и RY Tau начало у-ф избытка находится около $\lambda \approx 3880 \text{ \AA}$, по-видимому, связано со сходством физических условий в этих звездах. RY Tau наблюдалась в течение двух ночей, причем во вторую ночь было получено три спектрограммы друг за другом.

Распределение энергии, найденное по (1), изображено на рис. 2. Монохроматический блеск найден для $\lambda = 4350 \text{ \AA}$ ($m(4350)$). Найдена также интенсивность непрерывной эмиссии, которую мы изобразим как

$$I_{\text{н. э.}} = \lg \frac{\Delta I(3650)}{\Delta I(3900)}. \quad (2)$$

Изменение $I_{\text{н. э.}}$ и $m(4350)$, а также изменение отношения центральной интенсивности линий H и K к интенсивности непрерывного спектра у линий показаны на рис. 3. На этом же рисунке приведено изменение спектрофотометрической температуры, найденной относительно звезды сравнения (АО) в районе $\lambda \lambda 4600-4000 \text{ \AA}$. Как видно из рисунка, интенсивность непрерывной эмиссии меняется значительно больше ($\sim 0^{\text{m}}.2$) монохроматического блеска $m(4350)$ ($\sim 0^{\text{m}}.05$), а при увеличении $m(4350)$ и уменьшении $T_{\text{с}}$ уменьшается как интенсивность непрерывной эмиссии, так и эмиссия в линиях H и K. Относительные интенсивности линий H и K меняются и у них появляются абсорбционные компоненты. Очень интересно в этом смысле изменение линии K во вторую ночь, когда было получено три спектрограммы друг за другом. На первой пластинке у линии K имеется фиолетовая эмиссионная компонента. На второй она исчезает, однако фиолетовое крыло линии усиливается. И, наконец, на третьей спек-

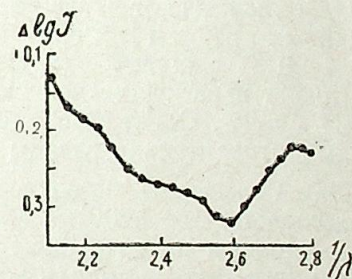


Рис. 2.

трограмме у линии К появляется абсорбционная компонента с красной стороны (рис. 4).

Лучевые скорости фиолетовой и красной компонент, соответственно получаются относительно самой линии К—825 и +590 км/сек. К сожалению, объективная призма не позволяет достаточно надежно фиксировать положение центра линии. Однако измерения относительно других линий в спектре RY Tau, а также относительно линий соседних звезд не обнаружили заметного смещения линии К. В последнем случае на щель микрофотометра одновременно проектировался спектр исследуемой звезды и звезды фона, линии которой служили репером для измерения смещения линии К. Точность такого измерения порядка ± 100 км/сек.

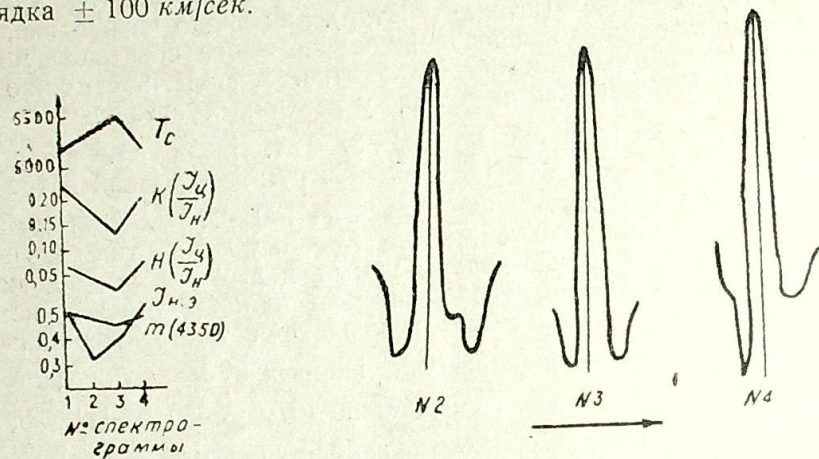


Рис. 3.

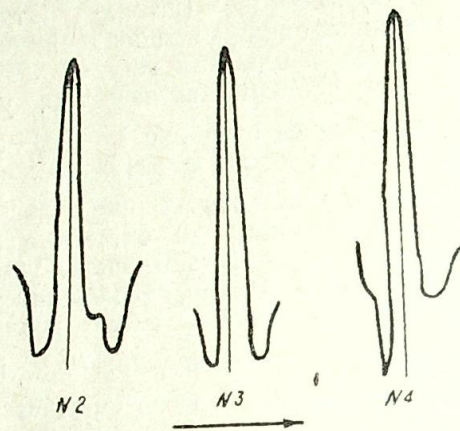


Рис. 4.

Очень заманчиво полученные лучевые скорости фиолетовой и красной компонент интерпретировать как подъем горячего и опускание охлажденного вещества. Но при этом возникает расхождение с данными работы [2], где оценивается $M_{\text{бол.}} = 3.30$ и T_e (эффективная) = 4400°K , находится $R/R_\odot = 3.25$ а $m/m_\odot$ получается равным 0.9. Отсюда параболическая скорость (v_∞) для RY Tau получается равной 325 км/сек. Спектрофотометрическая температура RY Tau, найденная нами относительно звезды сравнения (АО), в промежутке $\lambda\lambda 4600-4000 \text{ \AA}$ оказалась больше 5200°K и, вообще, она меняется во время наблюдений от 5200 до 5500°K .

Правда, автор работы [2] отмечает, что при определении $M_{\text{бол.}}$ и T_e могут быть допущены значительные ошибки. Очевидно, что скорость подъема должна быть меньше первой космической, чтобы вещество могло вернуться обратно в фотосферу. Так как она равна для RY Tau 825 км/сек, то, приняв первую космическую скорость $v_1 = 850$ км/сек, с помощью простых расчетов находим $v_\infty = \sqrt{2gR}$; $g = G \frac{M}{R^2}$, где G —гравитационная постоянная. Приняв $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$, найдем $R = 1.8 \cdot 10^{10} \text{ см}$. Следовательно, при $v_1 = 850$ км/сек и $m = m_\odot R/R_\odot = 0.27$. Ускорение силы тяжести равно $g = 3.8 \cdot 10^5 \text{ см.сек}^{-2}$, а параболическая скорость $v_\infty = 1200$ км/сек.

Можно оценить также градиент температуры в фотосфере звезды и толщину фотосферы с помощью выражений:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g\mu}{4R^*}; \quad \frac{dr}{d\tau} = -\frac{3}{4} \frac{R^* T_e^4}{4g\mu T^3}, \quad (3)$$

где μ —средний молекулярный вес,

R^* —газовая постоянная.

Полагая $\mu = 1$, $g = 3.8 \cdot 10^5$; $R^* = 8.3 \cdot 10^7$, $T_e = T$, найдем:

$$\frac{dT}{dr} = 10^{-3} \text{ град/см}, \quad \frac{dr}{d\tau} = -8.2 \cdot 10^5 \text{ см}.$$

Следовательно, при углублении в фотосферу RY Tau на 1 км температура возрастает на 100° , а толщина самой фотосферы всего порядка 10 км.

По четырнадцать спектрограммам GW Ori определены также: монохроматическая звездная величина $m(4350)$, интенсивность непрерывной эмиссии, для линий Н и К (Ca II) отношение $I_{\text{ц}}/I_{\text{н}}$, а также спектрофотометрическая температура в районе $\lambda\lambda 4600-4000 \text{ \AA}$ относительно звезды сравнения (A2). Значение $m(4350)$, $I_{\text{н.э.}}$, $I_{\text{ц}}/I_{\text{н}}$, $I_{\text{кц}}/I_{\text{кн}}$ и T_e изображены графически на рис. 5.

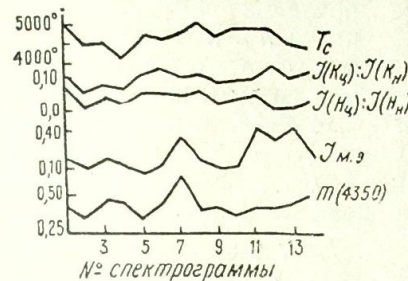


Рис. 5.

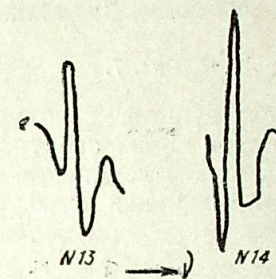


Рис. 6.

Интересно сравнить кривые изменения $m(4350)$ и $I_{\text{н.э.}}$. Если до пластинки № 7 (16—17/XI-63 г.) эти величины менялись почти синхронно, то, начиная с следующей ночи, синхронность нарушилась и изменения стали независимыми. Амплитуды изменения $m(4350)$ и $I_{\text{н.э.}}$ примерно одинаковы и составляют около 0.3 звездной величины. Отношение центральных интенсивностей линий Н и К к интенсивности непрерывного спектра около этих линий, в общем, находится во взаимной корреляции. У линий Н и К почти на всех спектрограммах имеются абсорбционные компоненты, причем они чаще появляются с фиолетовой стороны, чем с красной. В качестве примера на рис. 6 представлены две регистрограммы линии К (пл. № 13 и 14). Обе спектрограммы получены в одну ночь непосредственно друг за другом с 30-минутной выдержкой. Как видно из рисунка, за время порядка тридцати минут абсорбционная компонента сместилась из фиолетовой стороны в красную. Лучевые скорости для фиолетовой и красной компонент, соответственно, оказались равными -750 и $+675$ км/сек. Отметим, что такое быстрое изменение не редкость и оно обнаруживается как в интенсивностях линий Н и К, так и в смещении абсорбционной компоненты. По спектрограммам № 8, 9 и 10, полученным также друг за другом, с выдержкой в 20 мин обнаружено, что на первых двух пластинках у Н и К имеются фиолетовые компоненты, а на третьей наряду с фиолетовой появляется и красная абсорбционная компонента.

Очень интересной и неожиданной оказалась кривая изменения лучевых скоростей фиолетовых компонент линий Н и К. Изменения $v_{\text{н}}$ и $v_{\text{к}}$ оказались совершенно независимыми; изменение $v_{\text{н}}$ находится в хорошей обратной корреляции с изменением $I_{\text{н.э.}}$ (рис. 7). На ри-

сунке $v_n = 0$ соответствует наблюдениям, где фиолетовая компонента отсутствует. На основе рассуждений, аналогичных приведенным в работе [1], из отношения центральных интенсивностей линий Н и К можно найти оптическую глубину в центре линии с помощью выражения

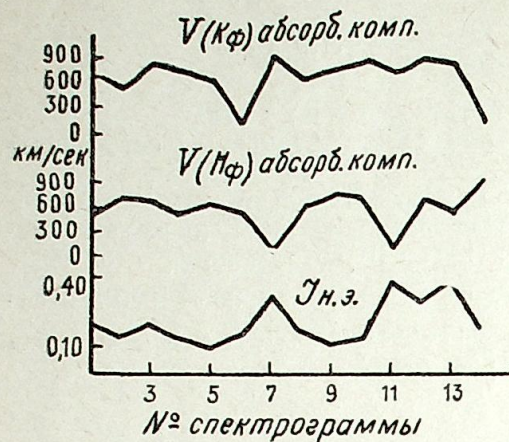


Рис. 7.

ному числу атомов на подуровнях $4P_{1/2}$ и $4P_{3/2}$. При нахождении n_2/n_1 было выбрано по две спектрограммы GW Ori и RY Tau, причем с таким расчетом, чтобы изменение отношения $i_{o,n}/i_{o,k}$ было максимальным. Найденные значения τ , B и n_2/n_1 приведены ниже.

GW Ori		RY Tau	
пл. № 1	пл. № 12	пл. № 3	пл. № 4
$r_{o,n}$ 2.6	1.2	1.3	1.1
B 1.3	1.4	1.5	1.8
n_2/n_1 $9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	2.10^{-3}	$1.7 \cdot 10^{-3}$

Зная n_2/n_1 , мы можем найти значения n_e . Если составить уравнение стационарности для уровня $4P$ и пренебречь рекомбинационными и ионизационными членами ввиду их малости, то получим

$$n_e = \frac{n_3/n_1 (A_{31} + A_{32})}{Z_{31} + n_2/n_1 Z_{23} - n_3/n_1 (Z_{32} + Z_{31})}, \quad (5)$$

где индексами 1, 2 и 3 обозначены уровни $4S$, $3D$ и $4P$, а через A и Z — радиационные и ударные переходы. В выражении для n_e мы пренебрегли членами с A_{13} и A_{23} , так как они примерно на два порядка меньше. Подставив сюда $n_3/n_1 \approx 10^{-3}$ и приняв $n_2/n_1 \approx 10^{-1}$, пользуясь значениями Z , данными для интервала температур $T_e = 5000 - 15000^\circ$ в работе [12], будем иметь:

GW Ori			RY Tau		
T_e	5000°	10000°	T_e	5000°	10000°
n_e	$4 \cdot 10^{13}$	$4 \cdot 10^{12}$	n_e	$4 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{12}$
		$1.2 \cdot 10^{12}$			$2 \cdot 1 \cdot 10^{12}$

Судя по значению ускорения силы тяжести, значение электронного давления в фотосфере должно было быть порядка $10^{15} - 10^{16}$. Но, как видно из таблицы, для GW и RY Tau оно имеет порядок $10^{12} - 10^{13}$, что близко к n_e , в солнечных вспышках и нижней хромосфере. На основании этого можно сделать вывод, что эмиссионные линии Н и К образуются в самых верхних слоях атмосферы звезд.

В заключение коротко остановимся на вопросе о происхождении непрерывной эмиссии. Механизм ее образования довольно подробно обсуждался в работе [1]. Здесь речь пойдет о начале непрерывной эмиссии. Как уже отмечалось выше, смещение начала непрерывной эмиссии практически не должно зависеть от разрешения инструмента. Если такая зависимость и существует, то она не может давать смещение больше $10 - 20 \text{ \AA}$, в то время как у различных звезд Т Тау непрерывная эмиссия появляется в районе длин волн от $\lambda = 4100 \text{ \AA}$ до $\lambda = 3750 \text{ \AA}$. По-видимому, это можно объяснить тем, что ускорение силы тяжести на поверхности Т Тау звезд в общем такого же порядка, как у RY Tau, т. е. $g = 10^{15} \text{ см/сек}^{-2}$.

Как известно, при больших давлениях вследствие возмущения электрического поля атома ионами окружающей среды число электрических уровней атома водорода ограничено некоторым значением n , так как и электрическое поле уменьшает высоту потенциального барьера, и электрон, находящийся на некотором уровне n становится свободным. Между n_e и n существует следующая зависимость [13, 14]:

$$\lg n_e = 21.65 - 6 \lg (n + 1). \quad (6)$$

Номер последнего уровня, определяемый совместным действием расширения Штарка и квантового эффекта их размывания заключен в пределах

$$n_s \leq n \leq n_{s+1},$$

где n_s — номер граничного уровня согласно формуле Инглиса — Теллера. Начиная с уровня $n_s + 1$ и выше устанавливается зона непрерывных значений энергии. В этом случае электрон легко перемещается по всей зоне, так как число ударов первого и второго рода обратно пропорционально четвертой степени разности энергий между рассматриваемыми уровнями или подуровнями. Здесь произойдет также размывание каждого дискретного уровня в полосу непрерывных значений энергий с шириной, определяемой Штарковским расщеплением компонент. Из-за снижения ионизационного континуума и значительного уширения последних уровней интенсивность нескольких последних линий будет весьма быстро убывать с приближением к границе серии, а энергия излучения будет перераспределяться в континуум.

Следовательно, при большом n_e наряду со смещением бальмеровского предела в длинноволновую часть спектра произойдет также сглаживание скачка интенсивности у предела. Поглощение в бальмеровском континууме нужно учитывать [15], начиная с частоты

$$\nu_5 = \frac{x}{4h} - \frac{3e^2}{h} \sqrt{\frac{4\pi n_i}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right), \quad (7)$$

где $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ — гамма-функция,

x — потенциал ионизации водородного атома,
 h — постоянная Планка,
 n_i — ионная концентрация.

Если рассчитать ν_5 по формуле (7), приняв ионную плотность порядка $4 \cdot 10^{15} - 7 \cdot 10^{15}$, при $g = 3.8 \cdot 10^5 \text{ см/сек}^2$ получим $\lambda_B = 3900 \text{ \AA}$. Отметим, что по водородным линиям RW Aur было получено $n_e \approx 10^{16}$, которому соответствует $\lambda_B = 4000 \text{ \AA}$, а это, в свою очередь, находится в хорошем согласии с наблюдениями [1]. Если в атмосфере звезды

степень ионизации по какой-либо причине выше, чем равновесная при данной плотности и температуре, то входящее излучение будет усиливаться [16,1] начиная от λ_b . Значение g , полученное для RY Tau, по-видимому, не является неожиданным. Дело в том, что у некоторых T Tau звезд было наблюдеено уширение линий, которое слишком велико для их спектрального класса. Хербиг [17] считает, что уширение обусловлено вращением и рассматривает его как свидетельство того, что эти звезды, поскольку они молодые, находятся еще на стадии гравитационного сжатия. Согласно Хербигу [18] звезды T Tau должны стать звездами главной последовательности (ранних подтипов F) и могут иметь заметную скорость вращения. Трудность заключается в том, что по современным представлениям молодые звезды достигают главной последовательности через стадию гиганта, но T Tau звезды считаются карликами, а скорее всего (судя на RY Tau) находятся в промежутке между нормальными звездами и белыми карликами. В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность проф. В. А. Крату за ценные советы и замечания, сделанные по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исмаилов З. А. Сообщ. ШАО, IV, 1967.
2. Kuhi L. V. Ap. J., 140, 1409, 1964.
3. Joy A. H. Ap. J., 102, 168, 1945.
4. Herbig G. H. Mem. Soc. R. Sci. Liege ser., 18, 251, 1958.
5. Бадалян Г. С. Сообщ. Бюр. обс. № 2549, 1958.
6. Холопов П. Н. П. З. 10, 180, 1954.
7. Холопов П. Н. П. З. 13, 430, 1961.
8. Joy A. H. Ap. J., 110, 434, 1949.
9. Götz W. Sonneberg Sternw. Ver. B5, H2, 1961.
10. Bonsack W. K., Greenstein Y. Ap. J., 131, 83, 1960.
11. Bonsack W. K. Ap. J., 133, 340, 1961.
12. Крат В. А. „Изв. ГАО“, т. 24, вып. I, № 177, 1964.
13. Иванов-Холодный Г. С. и др. „Астроном. ж.“ 37, 799, 1960.
14. Иванов-Холодный Г. С., Никольский Г. М. „Астроном. ж.“, 38, 455, 1961.
15. Колесов А. К. Астроном. ж., 41, 240, 1964.
16. Колесник И. Г., Франк-Каменецкий Д. А. „Астроном. ж.“, 41, 178, 1964.
17. Herbig G. H. J. R. A. S. Canada, 46, 22, 1952.
18. Herbig G. H. Ap. J., 1925, 612, 1957.

Г. Ф. СУЛТАНОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ АСТЕРОИДОВ И ОСКОЛКОВ ПЕРВИЧНЫХ КРУПНЫХ ТЕЛ ПО ПРИЗНАКАМ ИХ ФИЗИЧЕСКИХ И ОРБИТАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Первой попыткой объяснить происхождение астероидов была гипотеза Ольберса, согласно которой астероиды произошли от распада большой планеты, находившейся между орбитами Марса и Юпитера.

Предлагались и другие различные гипотезы о происхождении астероидов, часть из которых представляет собой дальнейшее развитие гипотезы Ольберса, а другая часть связана с большим космогоническими гипотезами о происхождении солнечной системы. Не прибегая к подробным анализам, многие исследователи высказывают мнение о том, что астероиды происходят в результате последовательных распадов более крупных тел. По мнению одной группы ученых, эти тела являются первичными осколками гипотетической планеты тогда как другие считают, что они представляют собой неаккумулировавшиеся тела, возникшие на первом этапе эволюции протопланетного газопылевого облака.

Важное значение для решения проблемы происхождения астероидов имеет выяснение закономерности в распределении астероидов с анализом схемы распада первичных крупных тел, чего не делалось предыдущими авторами.

Работы, выполненные нами за период 1953—1965 гг., преследуют именно эту цель.

В настоящей статье не затрагивается вопрос о происхождении первичных крупных тел; на наш взгляд, эта проблема будет решена общей теорией происхождения солнечной системы. Более правдоподобно, нам кажется, что первичные крупные тела представляют собой неаккумулировавшиеся тела, возникшие на первом этапе эволюции протопланетного газопылевого облака.

Первый раздел данного исследования посвящен разработке схемы распада первичных крупных тел, выбору инвариантных элементов орбит осколков первичного крупного тела, составлению и исследованию распределения их осколков по признакам их физических и орбитальных особенностей. При составлении и исследовании распределения осколков первичных крупных тел особое внимание было уделено подбору элементов орбит.

Подбор элементов, которые остаются почти неизменными при учете главнейших вековых или долгопериодических возмущений,

обусловленных притяжением со стороны Юпитера, осуществлен нами путем применения теории вековых и долгопериодических возмущений, разработанной Н. Д. Моисеевым с помощью осредненных вариантов ограниченной задачи трех точек: Солнце—Юпитер—осколок.

Для дальнейших исследований были избраны следующие элементы, обладающие свойством инвариантности по отношению ко времени; большие полуоси орбит осколков (a); моменты количества движения осколков относительно перпендикуляра к плоскости орбиты Юпитера $\sqrt{p} \cos i'$; моменты количества движения осколков относительно перпендикуляра к плоскости орбит первичного крупного тела $\sqrt{p} \cos i''$; моменты количества движения осколков относительно перпендикуляра к плоскости гелиоцентрической орбиты осколков $\sqrt{p}$; величины прямоугольных координат центральной проекции полюса орбит осколков на плоскость, касательной к небесной сфере в полюсе эклиптики $\operatorname{tg} i \sin Q$, $\operatorname{tg} i \cos Q$; квазиконстанта интеграла Якоби $H_0 = -10^7 h_0$ и разности средних (m_0) и абсолютных (g) звездных величин.

Используя интегралы энергии и площадей, исследуемые элементы орбит осколков выражаются как функции элементов орбит первичного крупного тела, величин (v) и эклиптических координат (β , λ) векторов относительных скоростей. Составляются законы распределения осколков первичных крупных тел по выбранным элементам их орбит и их систем, при различных предположениях о величинах и направлениях их относительных скоростей.

Исследованием инвариантных элементов и функции распределения осколков по этим элементам установлено, что функция распределения осколков является не монотонной и имеет не менее одного максимума. Составлением подобных распределений для нескольких первичных крупных тел получаются функции распределения с несколькими максимумами и минимумами, которые имеются в распределениях астероидов.

Второй раздел настоящей работы посвящен обработке статистического материала, опубликованного в эфемеридах малых планет, и выводу законов распределения астероидов по принятым элементам. В обработку входит, прежде всего, составление каталогов значений инвариантных элементов орбит астероидов, составление и изучение функции распределения астероидов по этим элементам для различных совокупностей. Показывается, что количество максимумов и минимумов этих функций, а также числовые значения принятых элементов, соответствующие этим максимумам и минимумам, являются одними и теми же для каждой совокупности. Делается вывод о том, что полученные закономерности в распределениях астероидов не изменяются от ежегодного их прибавления.

В третий раздел включены результаты по определению параметров задачи. Определяются элементы (формы орбит и положение их плоскости) орбит первичных крупных тел. Показывается, что при несовпадении плоскостей орбит первичных крупных тел с плоскостью эклиптики, орбиты осколков пересекаются с орбитой первичного крупного тела в различных точках и находятся на разных плоскостях. Делается вывод о том, что причиной распада является внешняя сила.

Составление и исследование распределения осколков первичных крупных тел по признакам их физических и орбитальных особенностей

Предполагается, что первичные крупные тела, двигаясь вокруг Солнца по эллиптической орбите, в момент прохождения через перигелий распались на мелкие осколки. Ограничимся составлением функ-

ций распределения осколков одного первичного крупного тела. Считаем, что величины скоростей осколков относительно первичного крупного тела не превосходят величины скорости первичного крупного тела.

Для совокупности выброшенных осколков считаем направления векторов относительных скоростей (β —широта, λ —долгота) равновероятными, а величины (v —величина) этих же скоростей подчинены произвольному закону $Y(v)$. Тогда функции распределения системы случайных величин β и λ , а также β, λ, v , соответственно, выражаются в следующем виде:

$$\varphi(\beta, \lambda) = \frac{\cos \beta}{4\pi}, \quad (1)$$

$$\Phi(v, \beta, \lambda) = \frac{Y(v) \cos \beta}{4\pi}. \quad (2)$$

Осколок, выброшенный в направлении, определяемом углами β и λ , имеет гелиоцентрическую скорость r , квадрат которой

$$r^2 = w^2 + v^2 + 2wv \cos \theta, \quad (3)$$

где w —скорость первичного крупного тела;

$\cos \theta = \cos \beta \sin \lambda$ в случае, когда плоскость орбиты первичного крупного тела совпадает с плоскостью орбиты Юпитера;

$\cos \theta = \cos \beta_w \cos \beta \cos (\lambda - \lambda_w) + \sin \beta_w \sin \beta$ —в случае, когда плоскость орбиты первичного крупного тела не совпадает с плоскостью эклиптики.

Равенства (1), (2) и (3) дают нам возможность вывести функцию распределения гелиоцентрических скоростей осколков в следующем виде:

$$\psi(r) = \frac{r}{2w} \int_v^b \frac{Y(v)}{v} dv. \quad (4)$$

Используя функции распределения осколков по гелиоцентрическим скоростям, мы определяем функции распределения осколков:

1) по величине больших полуосей их орбит:

$$f(a) = \frac{\kappa^2}{4wa^2} \int_v^b \frac{Y(v)}{v} dv, \quad v = \left| \kappa \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{1}{a}} - w \right|$$

$$\text{где } \left[\frac{2}{R} - \left(\frac{w-b}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1} < a < \left[\frac{2}{R} - \left(\frac{w+b}{\kappa} \right)^2 \right]^{-1};$$

2) по величине моментов количества движения осколков относительно перпендикуляра к плоскости гелиоцентрической орбиты:

$$L(N) = \frac{1}{2\pi} \int_v^b \frac{Y(v)}{v} dv, \quad v = \left| \frac{N}{\kappa} - w \right|$$

где

$$R(w-b) \leq N \leq (w+b);$$

3) по величине системы больших полуосей и эксцентриситетов их орбит:

$$E(a, e) = \frac{\kappa e}{\pi a^2 \sqrt{\frac{R^2}{a} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right) - (1 - e^2)}} \times \\ \times \int_0^b \frac{Y(v)}{v} \sqrt{\frac{4 \frac{w^2}{\kappa^2} (1 - e^2) - \frac{R^2}{a} \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} + \frac{w^2 - v^2}{\kappa^2} \right)^2}{\kappa^2 \left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a} \right) + w^2 - 2w \frac{V_a(1 - e^2)}{\kappa}}}$$

4) по величине квази-константа интеграла Якоби:

$$H(h_0) = \frac{1}{2(w - R\mu_j)} \int_{v=|w - R\mu_j|}^b \frac{Y(v)}{v} dv, \\ h^0 - b(w - R\mu_j) + \frac{b^2}{2} < h_0 < h^0 + b(w - R\mu_j) + \frac{b^2}{2};$$

5) по величинам прямоугольных координат центральной проекции полюса орбит осколка на плоскость, касательную к небесной сфере в полюсе эклиптики:

$$P(p) = \int_{q=q_{\min}}^{\frac{C_0 + A_0 p}{B_0}} \int_{v=v(p, q)}^b \psi(v, p, q) dv dq, \\ Q(q) = \int_{p=p_{\min}}^{\frac{B_0 q - C_0}{A_0}} \int_{v=v(p, q)}^b \psi(v, p, q) dv dp, \\ p = \operatorname{tg} i \sin \varrho, \quad q = \operatorname{tg} i \cos \varphi;$$

6) по величине системы i, ϱ :

$$N(i, \varrho) = \int_{v=v(i, \varrho)}^b \Phi(i, \varphi, v) dv;$$

7) по величинам $m_0 - g$:

$$\psi(m_0 - g) = \frac{\kappa^2 \cdot 10^{\frac{m_0 - g}{5}}}{5 w \sqrt{1 + 4 \cdot 10^{\frac{m_0 - g}{5}} \left[1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 10^{\frac{m_0 - g}{5}}} \right]^2}} \int \frac{Y(v)}{v} dv, \\ \text{где} \quad v_0 = \left| \kappa \sqrt{\frac{2}{R} - \frac{4}{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 10^{\frac{m_0 - g}{5}}}}} - w \right|.$$

Среди наблюдаемых астероидов имеется много таких, массы которых очень малы, т. е. число астероидов меньших масс является большим. Исходя из этого, мы можем предположить, что величины

скоростей подчинены следующему закону:

$$Y(v) = \frac{n+1}{b^{n+1}} G \cdot v^n,$$

где G — количество осколков первичного крупного тела. Легко получим функции распределения осколков по большим полуосям их орбит моментам количества движения относительно перпендикуляра к плоскости орбит Юпитера и к плоскости гелиоцентрической орбиты первичного крупного тела, квазиконстантам интеграла Якоби, по разностям средних (m_0) и абсолютных (g) звездных величин и системы-величин (a, e) и (i, ϱ). Все указанные функции на краях интервала обратятся в нуль. Тогда они будут иметь хотя бы один максимум. Значит функция распределения осколков является не монотонной.

Если рассмотреть распределение осколков нескольких первичных крупных тел, то сумма распределения образовавшихся осколков может иметь несколько достаточно резко выраженных максимумов и минимумов, что наблюдается в эмпирических распределениях астероидов.

Обработка статистического материала, опубликованного в эфемеридах малых планет, составление и получение распределения астероидов по признакам их физических и орбитальных особенностей

Основная часть настоящей работы заключается в составлении каталогов значений инвариантных элементов. В данный раздел включены каталоги значений $V \bar{p} \cos i'$, H_0 , q , Q , μ ; μ_j , $\operatorname{tg} i \sin \varrho$, $\operatorname{tg} i \cos \varphi$, $m_0 - g$, где

$$H_0 = -10^7 h_0, \\ h_0 = -\kappa^2 \left(\frac{1}{2a} + \frac{\sqrt{1 + m_j}}{a_j^{3/2}} V \bar{p} \cos i' \right),$$

$q = a(1 - e)$, μ — среднее движение астероидов, $Q = a(1 + e)$ μ_j — среднее движение Юпитера.

Каталог значений пяти первых величин опубликован в отдельном сборнике в 1962 г. и трудах ШАО, т. 2, а последних трех — в отчете о деятельности ШАО АН Азербайджанской ССР за 1962 и 1966 годы.

Составлением функции распределения астероидов по ряду элементов выявлена возможность разделения всех астероидов на 12 различных групп. Показывается, что деление астероидов на группы остается неизменными по отношению к расположению элементарных интервалов. Далее показывается, что наличие максимумов и минимумов не является следствием недостаточности материала, т. е. что кривая распределения астероидов по указанным элементам не изменяется с увеличением числа открываемых астероидов.

Сопоставление эмпирических распределений астероидов с распределениями осколков первичного крупного тела

Функция распределения осколков первичного крупного тела по принятым элементам их орбит, полученным в первом разделе, содержит некоторые параметры. К числу таких относятся элементы орбит первичных крупных тел.

Вопрос, которому посвящен данный раздел, заключается в основном в подборе указанных параметров. Для этого мы используем ин-

тегралы площадей, которые позволяют определить:

$$A_w = A_0 \cos \eta - \frac{\kappa \sqrt{p_0}}{Rw} (\sin u_0 \cos \varrho_0 + \cos u_0 \sin \varrho_0 \cos i_0),$$

$$B_w = B_0 \cos \eta + \frac{\kappa \sqrt{p_0}}{Rw} (-\sin u_0 \sin \varrho_0 + \cos u_0 \cos \varrho_0 \cos i_0)$$

$$C_w = C_0 \cos \eta + \frac{\kappa \sqrt{p_0}}{Rw} \sin i_0 \cos u_0,$$

$$\cos \eta = A_0 A_w + B_0 B_w + C_0 C_w,$$

где η — угол между векторами $\vec{R}$ и $\vec{W}$.
При совпадении плоскостей эклиптики и орбиты первичного крупного тела имеем:

$$\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} (u_0 + \varrho_0),$$

$$\operatorname{tgi} = \frac{\frac{Rw}{\kappa} n \sin \beta}{\sqrt{p_0} + \frac{Rw}{\kappa} n (A_0 \sin \lambda - B_0 \cos \lambda) \cos \beta}.$$

Если плоскость орбиты первичного тела перпендикулярна к плоскости эклиптики, то орбиты осколков пересекаются с орбитой крупного тела в различных точках и находятся на разных плоскостях:

$$\operatorname{tg} \varrho = \frac{\sin \varrho_0 + \frac{Rw}{\kappa \sqrt{p_0}} n (B_0 \sin \beta - C_0 \cos \beta \sin \lambda)}{\cos \varrho_0 + \frac{Rw}{\kappa \sqrt{p_0}} n (A_0 \sin \beta - C_0 \cos \beta \sin \lambda)};$$

$$\operatorname{tgi} = \sqrt{\frac{I^2 + II^2}{III^2}}.$$

В целях определения элементов орбиты первичного крупного тела нами исследованы большие полуоси орбит осколков, их эксцентриситеты, моменты количества движения осколков относительно перпендикуляра к плоскости орбиты Юпитера, квазиконстанты интеграла Якоби, при предположении:

- 1) $e_0 = 0$, $R = a_0$,
- 2) $e_0 \neq 0$, $R = a_0(1 - e_0)$.

1. Рассмотрим более подробно второй случай, т. е. $e_0 \neq 0$, $R = a_0(1 - e_0)$. В этом случае

$$a = \frac{a_0(1 - e_0)}{(1 - e_0) - (1 + e_0)(2n \cos \theta + n^2)},$$

$$e^2 = 1 - [(1 - e_0) - (1 + e_0)(2n \cos \theta + n^2)] \frac{I^2 + II^2 + III}{a_0(1 - e_0)},$$

$$N = \kappa \sqrt{a_0(1 - e_0^2)} \cdot n \{ C_N \sin \beta + (B_N \sin \lambda + A_N \cos \lambda) \cos \beta \},$$

$$h_0 = h^\circ + \frac{\kappa}{\sqrt{a_0}} \frac{\sqrt{1 + e_0}}{\sqrt{1 - e_0}} n \left\{ C_h \sin \beta + (B_h \sin \lambda + A_h \cos \lambda) \cos \beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\sqrt{a_0}} \frac{1 + e_0}{1 - e_0} h_0^2 \right\}.$$

Легко можно показать:

$$a_{\min} = \frac{a_0(1 - e_0)}{(1 - e_0) - (1 + e_0)(n^2 - 2n)},$$

$$a_{\max} = \frac{a_0(1 - e_0)}{(1 - e_0) - (1 + e_0)(n^2 + 2n)},$$

$$e_{\min} = 1 - (1 + e_0)(1 - n)^2,$$

$$e_{\max} = (1 + e_0)(1 + n)^2 - 1,$$

$$N_{\min} = N_0 - \kappa \sqrt{a_0(1 - a_0^2)} n,$$

$$N_{\max} = N_0 + \kappa \sqrt{a_0(1 - e_0^2)}$$

$$h_0^{\min} = h^\circ - \frac{\kappa}{\sqrt{a_0}} \sqrt{\frac{1 + e_0}{1 - e_0}} n + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2(1 + e_0)}{a_0(1 - e_0)} n^2,$$

$$h_0^{\max} = h^\circ + \frac{\kappa}{\sqrt{a_0}} \sqrt{\frac{1 + e_0}{1 - e_0}} n + \frac{1}{2} \frac{\kappa^2(1 + e_0)}{a_0(1 - e_0)} n^2.$$

Элементы орбиты первичного крупного тела выражаются в следующем виде:

$$n = \frac{\sqrt{1 + e_{\max}} - \sqrt{1 - e_{\min}}}{\sqrt{1 + e_{\max}} + \sqrt{1 - e_{\min}}},$$

$$a_0 = \frac{4(e_{\min} + e_{\max})}{[8 - (\sqrt{1 + e_{\max}} + \sqrt{1 - e_{\min}})^2] \left(\frac{1}{a_{\min}} - \frac{1}{a_{\max}} \right)},$$

$$e_0 = \frac{4 - (\sqrt{1 + e_{\max}} + \sqrt{1 - e_{\min}})^2}{4},$$

$$\cos i_0 = -\frac{1}{\kappa \psi_j \sqrt{a_0}} \left[\frac{h_0^{\min} + h_0^{\max}}{2} + \frac{\kappa^2(1 - e_0) - (1 + e_0)n^2}{2a_0(1 - e_0)} \right],$$

$$\sin i_0 \sin i_j \cos (\varrho_0 - \varrho_j) = \frac{N_{\min} + N_{\max}}{2\kappa \sqrt{a_0(1 - e_0^2)}} \cos i_0 \cos i_j.$$

Используя конкретные значения максимумов и минимумов, имеющие место в распределениях астероидов по принятым элементам, можно убедиться, что первичные крупные тела до распада двигались между орбитами Марса и Юпитера. Мы считаем, что выявленные нами закономерности в распределениях астероидов и осколков первичных крупных тел по элементам, характеризующим их физические и орбитальные особенности и согласование полученных закономерностей, открывают большие возможности для дальнейших исследований проблемы происхождения малых планет и в целом космогонии солнечной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Султанов Г. Ф. ДАН Азерб. ССР*, т. VIII, № 12, 1952.
2. Султанов Г. Ф. ДАН Азерб. ССР*, т. IX, № 1, 1953.
3. Султанов Г. Ф. Сообщ. ГАИШ, № 88—89, 1953.
4. Султанов Г. Ф. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук* № 7, 1953.
5. Султанов Г. Ф. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук* № 8, 1953.
6. Султанов Г. Ф. ДАН АН Азерб. ССР*, т. XII, 1956.
7. Султанов Г. Ф. Программа научной сессии Астросовета АН СССР и АН Азерб. ССР, посвященная обсуждению проблемы, связанной с научной тематикой Азербайджанской астрофизической обсерватории 1957 г.

8. Султанов Г. Ф. Тр. Сектора астрофизики, т. I, 1959.
9. Султанов Г. Ф. Тр. Сектора астрофизики, 1959.
10. Султанов Г. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн.“, № 3 1959.
11. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР за 1960 г.
12. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР за 1961 г.
13. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР, за 1962 г.
14. Султанов Г. Ф. и Ибрагимов Н. Б. Тр. ШАО АН Азерб. ССР, т. 2, 1962.
15. Султанов Г. Ф. Тезисы доклада на Всесоюзной конференции по исследованию малых планет и комет, 1962.
16. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР за 1963 г.
17. Султанов Г. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 1964.
18. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР, за 1964 г.
19. Султанов Г. Ф. Отчет о научной деятельности ШАО АН Азерб. ССР за 1966 г.
20. Султанов Г. Ф. Тр. Сектора астрофизики, т. I, 1959.
21. Крат В. А., Султанов Г. Ф. и Сорин С. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1969, № 3.
22. Султанов Г. Ф. Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1964, № 3.

Г. Т. АРАЗОВ

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ

Рассмотрим движение искусственного спутника сфероидальной планеты в системе координат $O x y z$, жестко связанной с вращающейся планетой. За основную координатную плоскость примем экваториальную плоскость планеты, начало координат совместим с центром масс планеты, а ось аппликата Oz направим вдоль оси вращения планеты (предполагается, что планета вращается с постоянной угловой скоростью n вокруг своей оси динамической симметрии). Согласно [1] гравитационный потенциал планеты можно аппроксимировать силовой обобщенной задачи двух неподвижных центров:

$$U = \frac{fM}{2} \left[\frac{1+i\sigma}{r} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right], \quad (1)$$

где f —гравитационная постоянная, M —масса планеты,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2},$$

а c и σ —постоянные величины, характеризующие геометрию масс. Например, для Земли эти величины имеют значения [2]:

$$c = 209,9 \text{ км}, \quad \sigma = -2,8 \cdot 10^{-2}.$$

Перейдем от прямоугольных координат x, y и z к эллипсоидальным u, v и w по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} v \sin u \cos w, \\ y &= c \operatorname{ch} v \sin u \sin w, \\ t &= c \sigma + c \operatorname{sh} v \cos u. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В этих координатах кинетическая энергия T запишется следующим образом:

$$T = \frac{c^2}{2} [(\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u)(\dot{v}^2 + \dot{u}^2) + \operatorname{ch}^2 v \sin^2 u (\dot{w}^2 + 2n\dot{w} + n^2)], \quad (3)$$

а для силовой функции получается

$$U = \frac{fM}{c} \frac{\operatorname{sh} v - \sigma \cos u}{\operatorname{sh}^2 v + \cos^2 u}. \quad (4)$$

Запишем уравнения движения в гамильтоновой форме. Для обобщенных импульсов будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} p_v &= \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} = c^2(\text{sh}^2 v + \cos^2 u) \dot{v}, \\ p_u &= \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = c^2(\text{sh}^2 v + \cos^2 u) \dot{u}, \\ p_w &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = c^2 \text{ch}^2 v \sin^2 u (\dot{w} + n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Тогда канонические уравнения движения можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_v}, & \frac{dp_v}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial v}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_u}, & \frac{dp_u}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial p_w}, & \frac{dp_w}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial w} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где характеристическая функция

$$\begin{aligned} H &= T_2 - T_0 - U = \\ &= \frac{c^2}{2} [(\text{sh}^2 v + \cos^2 u)(\dot{v}^2 + \dot{u}^2) + \text{ch}^2 v \sin^2 u \dot{w}^2] - \\ &\quad - \frac{c^2}{2} n^2 \text{ch}^2 v \sin^2 u - \frac{fM}{c} \frac{\text{sh} v - \sigma \cos u}{\text{sh}^2 v + \cos^2 u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, уравнение Гамильтона—Якоби запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2c^2(\text{sh}^2 v + \cos^2 u)} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 \right] + \\ + \frac{1}{2c^2 \text{ch}^2 v \sin^2 u} \left(\frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 - n \left(\frac{\partial W}{\partial w} \right) - \\ - \frac{fM}{c} \frac{\text{sh} v - \sigma \cos u}{\text{sh}^2 v + \cos^2 u} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) не содержит явно ни t , ни w , поэтому [полный интеграл этого уравнения можно искать в виде

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2 w + W_1'(v) + W_1''(u). \quad (9)$$

Уравнение (8) будет удовлетворено, если положим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dW_1'}{dv} \right)^2 &= 2\alpha_1 c^2 \text{sh}^2 v + \frac{c_2^2}{\text{ch}^2 v} + 2n\alpha_2 c^2 \text{sh}^2 v + 2fM c \text{sh} v + \alpha_3, \\ \left(\frac{dW_1''}{du} \right)^2 &= 2\alpha_1 c^2 \cos^2 u - \frac{c_2^2}{\sin^2 u} + 2n\alpha_2 c^2 \cos^2 u - 2fM c \sigma \cos u - \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где α_3 —третья произвольная постоянная.

Каждое из уравнений (10) содержит только одну из координат и интегрируется разделением переменных. Выполняя эти интегрирования, получим полный интеграл уравнения (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} W &= -\alpha_1 t + \alpha_2 w + \\ &+ \int \sqrt{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2) \text{sh}^2 v + \frac{c_2^2}{\text{ch}^2 v} + \alpha_3 + 2fM c \text{sh} v} dv + \\ &+ \int \sqrt{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2) \cos^2 u - \frac{c_2^2}{\sin^2 u} - \alpha_3 - 2fM c \sigma \cos u} du. \end{aligned} \quad (11)$$

Применяя теперь теорему Якоби, найдем общий интеграл системы (6) по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} &= \beta_3, \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= p_v, & \frac{\partial W}{\partial u} &= p_u, & \frac{\partial W}{\partial w} &= p_w, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где β_1, β_2 и β_3 —произвольные постоянные.

Переходя к новым переменным

$$\text{sh} v = \lambda, \quad \cos u = \mu$$

и вычисляя частные производные от W , запишем общий интеграл нашей задачи следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{c^2 \lambda^2 d\lambda}{V f(\lambda)} + \int \frac{c^2 \mu^2 d\mu}{V \varphi(\mu)} &= t + \beta_1, \\ \int \frac{nc^2 \lambda^2 (1 + \lambda^2) + \alpha_2}{(1 + \lambda^2) V f(\lambda)} d\lambda + \int \frac{nc^2 \mu^2 (1 - \mu^2) - \alpha_2}{(1 - \mu^2) V \varphi(\mu)} d\mu &= -w + \beta_2, \\ \int \frac{d\lambda}{V f(\lambda)} - \int \frac{d\mu}{V \varphi(\mu)} &= 2\beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где для сокращения использованы обозначения

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= 2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2) \left\{ \lambda^4 + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} \lambda^3 + \left[1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] \lambda^2 + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} \lambda + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) &= -2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2) \left\{ \mu^4 - \frac{fM\sigma}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} \mu^3 - \right. \\ &\quad \left. - \left[1 + \frac{c_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] \mu^2 + \frac{fM\sigma}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} \mu + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы получить явные выражения для эллипсоидальных координат, введем новую независимую переменную τ , определяющуюся соотношением

$$d\tau = \frac{dt}{c^2(\lambda^2 + \mu^2)}. \quad (16)$$

Тогда эллипсоидальные координаты λ, μ и w определяется из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2 &= f(\lambda), \\ \left(\frac{d\mu}{d\tau} \right)^2 &= \varphi(\mu), \\ \frac{dW}{d\tau} &= \frac{\alpha_2(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} - nc^2(\lambda^2 + \mu^2). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из этой системы находим

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{V f(\lambda)} = \tau - \tau_0, \quad (18)$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu} \frac{d\mu}{V \varphi(\mu)} = \tau - \tau_1, \quad (19)$$

$$w = w_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\frac{\alpha_2(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \lambda^2)(1 - \mu^2)} - nc^2(\lambda^2 + \mu^2) \right] d\tau, \quad (20)$$

где $\lambda_1, \mu_1, \tau_0, w_0, \tau_1$ — постоянные величины.

Рассмотрим случай $\rho = 0$. Тогда многочлен (15) примет вид

$$\varphi(\mu) = -2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2) \left\{ \mu^4 - \left[1 + \frac{\alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] \mu^2 + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right\}. \quad (21)$$

Корни этого многочлена обозначим через $\pm s$ и $\pm \gamma$.

Для s имеем

$$s^2 = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{4c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{4c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right]^2 - \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)}}, \quad (22)$$

а корень γ выразится через корень s следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{1 - s^2 + \frac{\alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)}}. \quad (23)$$

Постоянная α_3 связана с постоянными α_1, α_2 и s соотношением:

$$\alpha_3 = \frac{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)}{s^2 - 1} \left[s^4 - s^2 + \frac{\alpha_2^2}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right]. \quad (24)$$

Многочлен (21) теперь представится в виде

$$\varphi(\mu) = 2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)(\mu^2 - s^2)(\mu^2 - \gamma^2). \quad (25)$$

Обозначим два корня многочлена (14) через $a(1 - e)$ и $a(1 + e)$.

Тогда два других корня многочлена определяются из уравнения

$$\lambda^2 + \left[2a + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] \lambda + \left[1 + (3 + e^2)a^2 + \frac{\alpha_3 + 4cafM}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] = 0. \quad (26)$$

Введенные постоянные a, e и s связаны с постоянными α_1, α_2 и α_3 следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a^4(1 - e)^4 + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} a^3(1 - e)^3 + \left[1 + \frac{\alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] a^2(1 - e)^2 + \\ + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} a(1 - e) + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} a^4(1 + e)^4 + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} a^3(1 + e)^3 + \left[1 + \frac{\alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} \right] a^2(1 + e)^2 + \\ + \frac{fM}{c(\alpha_1 + n\alpha_2)} a(1 + e) + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3}{2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)} = 0. \end{aligned}$$

Подставим в (27) α_3 из (24) и введем малый безразмерный параметр

$$\varepsilon = \frac{c}{a(1 - e^2)}. \quad (28)$$

Разрешая систему уравнений (27) относительно α_1 и α_2 , найдем:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{AE(1 - e) - BD(1 + e)}{BE}} \left\{ \frac{fM}{4a^2e\varepsilon(1 - e^2)} \sqrt{\frac{AE(1 - e) - BD(1 + e)}{BE}} - n \sqrt{\frac{fM\varepsilon(1 - e^2)(s^2 - 1)AD[E(1 - e) - B(1 + e)]}{2e[BD(1 + e) - AE(1 - e)]}} \right\}; \quad (29)$$

$$\alpha_2 = \frac{fM\varepsilon(1 - e^2)(s^2 - 1)AD[E(1 - e) - B(1 + e)][AE(1 - e) - BD(1 + e)]}{2eBE[BD(1 + e) - AE(1 - e)]}, \quad (30)$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned} A &= 1 + a^2(1 - e)^2, & B &= s^2 + a^2(1 - e)^2, \\ D &= 1 + a^2(1 + e)^2, & E &= s^2 + a^2(1 + e)^2. \end{aligned}$$

Подставляя (28), (29) и (30) в (24), получим

$$\alpha_3 = \frac{fM\varepsilon(1 - e^2)[AE(1 - e) - BD(1 + e)]}{2eBE} \left\{ s^2 + \frac{AD[E(1 - e) - B(1 + e)]}{BD(1 + e) - AE(1 - e)} \right\}. \quad (31)$$

Подставляя (28), (29) и (30) в (26), остальные корни многочлена (14) получим в следующем виде:

$$\lambda_3 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_4 = \alpha - i\beta, \quad (32)$$

где

$$\alpha = -a - \frac{2eBE}{AE(1 - e) - BD(1 + e)}, \quad (33)$$

$$\beta^2 = \left[a + \frac{2eEB}{AE(1 - e) - BD(1 + e)} \right]^2 - \frac{AD[E(1 - e) - B(1 + e)]}{BD(1 + e) - AE(1 - e)} - 1 - s^2 - a^2(3 + e^2). \quad (34)$$

Теперь многочлен (14) можно записать в виде

$$f(\lambda) = 2c^2(\alpha_1 + n\alpha_2)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda - \lambda_1)[(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2], \quad (35)$$

а интегралы (18) и (19) представляются в форме

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{V(\lambda_2 - \lambda)(\lambda - \lambda_1)[(\lambda - \alpha)^2 + \beta^2]} = c \sqrt{2(c_1 + n\alpha_2)}(\tau - \tau_0), \quad (36)$$

$$\int_{\mu_1}^{\mu} \frac{d\left(\frac{\mu}{s}\right)}{V\left[1 - \left(\frac{\mu}{s}\right)^2\right]\left[1 - \kappa_1^2\left(\frac{\mu}{s}\right)^2\right]} = -c\lambda \sqrt{2(c_1 + n\alpha_2)}(\tau - \tau_1), \quad (37)$$

где

$$\kappa_1 = \frac{s}{\gamma}.$$

Обращая квадратуру (37), найдем

$$\mu = s \sin [c \gamma \sqrt{2(c_1 + n\alpha_2)} (\tau_1 - \tau)]. \quad (38)$$

Формулами (22), (23), (28), (29), (30) и (38) полностью определяется координата μ как явная функция τ .

Теперь, обращая квадратуру (36), получим

$$\lambda = \frac{\bar{r}[1 + \varepsilon c n \alpha_2(\tau - \tau_0)]}{1 + \varepsilon c n \alpha_2(\tau - \tau_0)}, \quad (39)$$

где

$$\bar{r} = \frac{a[\bar{\alpha}(1 - e) + \bar{\beta}(1 + e)]}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \quad (40)$$

$$\bar{e} = \frac{\bar{\alpha} - \bar{\beta}}{\bar{\alpha} + \bar{\beta}}, \quad (41)$$

$$x = \frac{\bar{\alpha}(1-e) - \bar{\beta}(1+e)}{\bar{\alpha}(1-e) + \bar{\beta}(1+e)}, \quad (42)$$

причем

$$\bar{\alpha} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\alpha(1+e) + \alpha^2(1+e)^2, \quad (43)$$

$$\bar{\beta} = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\alpha(1-e) + \alpha^2(1-e)^2. \quad (44)$$

Модуль эллиптической функции κ_2 и постоянная σ_2 находятся из равенств:

$$\kappa_2 = \frac{\alpha^2 [4e^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})^2]}{4\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \quad (45)$$

$$\sigma_2 = c \sqrt{-2\bar{\alpha}\bar{\beta}(1+n\alpha_2)}. \quad (46)$$

Итак, формулами (29), (30), (33), (34), (40)–(46) и (39) координата λ также полностью определена как явная функция τ .

Теперь получим прямоугольные координаты x , y и z по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x &= c \sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \sin w, \\ y &= c \sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \cos w, \\ z &= c\sigma + c\lambda\mu, \end{aligned} \right\}$$

а время t получим простой квадратурой как функцию переменной τ :

$$t = t_0 + c^2 \int_{\tau_0}^{\tau} (\lambda^2 + \mu^2) d\tau.$$

Полученная форма решений удобна для исследования движения искусственных спутников Земли относительно вращающейся Земли. В дальнейшем автор предполагает с помощью полученных результатов исследовать периодические движения искусственных спутников Земли при условии, что в потенциале земного тяготения сохранены тессеральные гармоники.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб. „Искусственные спутники Земли“, вып. 8, 64, 1931.
2. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. „Астроном“ ж., т. X, вып. 2, 1963.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, П. В. ЛЕОНОВ, Ю. В. ГОРИН

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД В ГАЗОВЫХ ПОЛОСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Разряд в полости, ограниченной диэлектриком, по сравнению с обычным разрядом между металлическими электродами имеет ряд особенностей, обусловленных наличием на электродах диэлектрических барьеров. Изучение такого разряда представляет интерес с точки зрения газовой электрохимии, высоковольтной изоляции и техники активации поверхностей полимерных материалов, с целью придания им необходимых адгезионных свойств. В газовой электрохимии при разработке и эксплуатации аппаратов, в которых используется газовый разряд, имеется возможность с помощью современных, химически стойких полимерных материалов и пластмасс оградить агрессивную реакционную область от металлических электродов, подводящих напряжение. При этом, конечно, необходимо иметь детальное представление о процессах, происходящих как в области газового разряда, так и на диэлектрических поверхностях электродов.

В высоковольтной технике при применении в качестве изоляции слоистых полимерных пластиков или эпоксидных смол ионизационные процессы, возникающие в пустотах, приводят как к росту потерь в изоляции, так и к ее местному разрушению, и в конечном счете к пробое. В связи с этим высоковольтная техника нуждается как в методах надежного количественного определения интенсивности таких процессов, так и в прогнозировании срока службы изоляции при заданной их интенсивности.

Газовый разряд между диэлектрическими поверхностями оказывает на них эрозионное воздействие, приводящее к изменению механических, электрических и химических свойств диэлектрика. Например, на рис. 1 представлена микрофотография (500×) поверхности триацетатной пленки, часть которой подвергалась воздействию разряда в газе в течение 30 часов. Все вышесказанное свидетельствует о необходимости комплексного изучения ионизационных процессов в газовых полостях, ограниченных диэлектриком. В лаборатории электрофизики ФИАН Азербайджанской ССР ведется исследование таких разрядов. При изучении разряда были использованы разрядная ячейка и схема измерений, описанные в [1]. В качестве диэлектрических барьеров использовались пленки полистирола, полиэтилена, фторопласта, а также слюда и стекло. Толщина барьеров находилась в пределах 20 ÷ 200 мк, а толщина разрядного промежутка в пределах 40 ÷ 200 мк. В качестве газа использовался азот. Давление газа менялось от десятков миллиметров ртутного столба до 5–6 атм.

В результате исследований подтвердилось, что напряжение пробоя технически чистого азота в полости с однородным полем подчиняется закону Пашена и определяется в основном толщиной газового промежутка, давлением и составом газа в полости, а не видом диэлектрика. Исследование показало также, что ток разряда состоит из

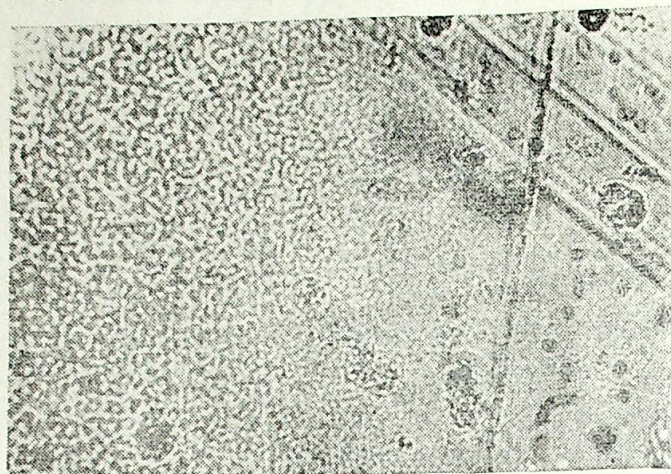


Рис. 1

отдельных импульсов, вид которых зависит от величины pd в полости (p —давление газа, d —толщина газового промежутка). Непрерывной составляющей тока разряда, описываемой в литературе [2], не обнаружено. Появление на осциллограммах „квазистационарного тока“, наблюдавшееся упомянутыми авторами, объясняется наложением импульсов тока друг на друга при большой площади электродов, или их усреднением на измерительном сопротивлении.

При pd , больших некоторого критического значения, импульсы тока имеют крутой фронт порядка $0,5 \cdot 10^{-6}$ сек и экспоненциальный спад с постоянной времени, равной произведению измерительного сопротивления R на полную емкость газовой ячейки C_0 . В литературе [3] на основе рассмотрения эквивалентной схемы разряда показано, что этот экспоненциальный спад обусловлен реакцией внешней цепи на происшедший процесс пробоя в газовой полости и выражается уравнением

$$i(t) \cong \frac{\Delta u C_0'}{RC_0} \exp\left(-\frac{t}{RC_0}\right).$$

Здесь Δu —разность напряжений зажигания и погасания разряда в полости; C_0' —величина емкости диэлектрика, разряжающаяся отдельным импульсом. Результаты измерений свидетельствуют о хорошем согласии формы наблюдаемых импульсов тока с уравнением $i(t)$. При этом имеется определенный разброс амплитуд импульсов ввиду статистических флуктуаций напряжения зажигания, напряжения погасания и площади поверхности диэлектрика, разряжающейся отдельным импульсом. Сказанное позволяет нарисовать картину процесса пробоя в газовой полости при значениях $pu > (pu)_{кр}$.

По достижении на газовом промежутке напряжения, соответствующего для данных условий пробивному, происходят пробой и разряд некоторой части полости. При этом поле в полости, бывшее ранее однородным, ослабляется на участке C_0' в среднем на величину Δu . Дальнейший рост напряжения за счет источника вызывает пробой соседних с C_0' участков диэлектрика и соответствующее ослабление

поля на этих участках. Если после пробоя напряжение на участке, пробивного, разряды прекратятся до того момента, когда оно будет достигнуто. В этом случае при росте напряжения на полости импульсы будут следовать группами, ширина которых будет определяться величиной статистического разброса по величинам напряжений зажигания и погасания. Если разность между максимальным и минимальным напряжением зажигания отдельных участков диэлектрика станет больше величины Δu , группы импульсов начнут перекрываться друг друга [1]. Группы импульсов тока, о которых идет речь, иллюстрирует осциллограмма рис. 2.

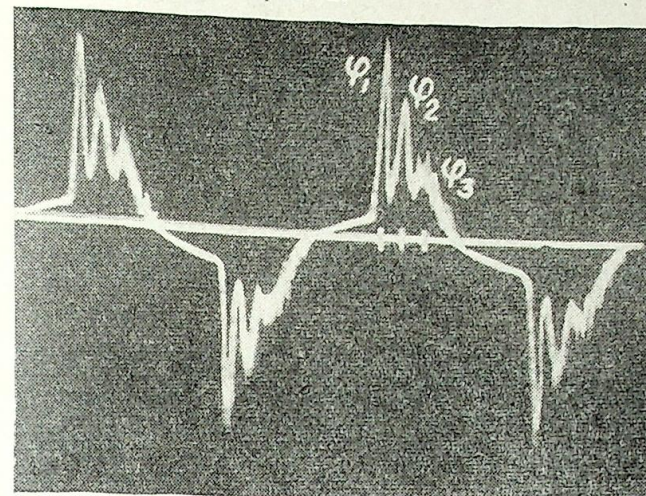


Рис. 2

Ввиду описанного группового характера следования импульсов тока разряда, в предположении, что каждый импульс переносит некоторый средний заряд q , зависимости числа импульсов и среднего тока разряда от напряжения будут носить ступенчатый характер. Этот факт экспериментально подтвержден в работе [1]. Как показывает анализ при возрастании амплитуды приложенного напряжения, ступеньки на кривой среднего тока должны сглаживаться. Следует отметить тот факт, что наиболее ярко выражены ступени на кривых, снятых на ячейке с барьерами из полистирола с применением технически чистого азота. В других условиях удается наблюдать лишь одну или две первые ступени.

Представляет интерес вопрос о минимальном числе разрядов за период приложенного напряжения. В работе [4] показано, что если разность потенциалов Δu , на которую упало напряжение в момент разряда, сохраняется неизменно до следующего разряда, минимальное число разрядов за период равно четырем. Однако имеются сведения [5] о возможности лишь двух разрядов за период приложенного напряжения. Такой случай может иметь место, если указанная разность потенциалов Δu будет со временем уменьшаться. Одной из возможных причин такого процесса может быть растекание осевших на поверхности диэлектрика зарядов, уменьшение их средней поверхностной плотности, а вследствие этого и уменьшение нормальной составляющей электрического поля этих зарядов.

Можно показать, что скорость восстановления напряжения на пробитом участке влияет на зависимость фаз зажигания групп импульсов от напряжения. В предположении экспоненциального харак-

тера уменьшения поля осевших зарядов нами получена зависимость средних фаз групп импульсов от напряжения (рис. 3); по вертикальной оси отложены значения средней фазы групп импульсов в градусах, а по горизонтальной — величина перенапряжения $\eta = \frac{u}{u_3}$. Экспе-

риментальные данные, полученные на ячейке из полистирола, заполненной техническим азотом, хорошо согласуются с расчетной зависимостью. Определенное из этих данных отношение напряжения погасания к напряжению зажигания разряда составляет примерно 0,4.

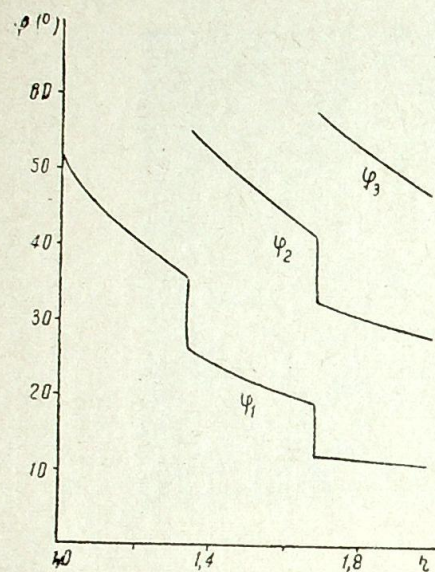


Рис. 3

Наблюдаемая периодичность следования импульсов тока разряда свидетельствует о том, что при описанных условиях один импульс вызывает разряд всей поверхности газовой полости. При этом разряд в полости происходит при достижении на газовом промежутке напряжения равного пробивному; в полости выполняются условие $\gamma e^{ad} \approx 1$ и развивается разряд с таунсендовским механизмом. Электроны, образованные каким-либо γ -механизмом или фотоионизацией у катода, размножаются в газовом промежутке так, что разряд становится самоподдерживающимся. При этом имеет важное значение малоизученный к настоящему времени процесс эмиссии и вторичной эмиссии зарядов с поверхности диэлектрика.

Как следует из основных положений теории Таунсенда, при выполнении условия $\gamma e^{ad} = 1$ ток/разряда будет нарастать. Однако с ростом тока в газовом промежутке начинает возрастать также поле осевших на диэлектрических барьерах зарядов, обратное по знаку приложенному внешнему полю. Результирующее поле внутри полости уменьшается, что приводит к гашению разряда. С погасанием разряда перестает расти противодействующее внешнему поле осевших зарядов, а рост внешнего поля не прекращается, поэтому через некоторое время, зависящее от скорости роста приложенного напряжения, процесс в полости повторится.

Исходя из известной скорости роста напряжения и периода следования импульсов тока, нами получены формулы, дающие возмож-

ность оценить отношение напряжения погасания к напряжению зажигания разряда в полости. Оно оказывается для $pd = 50$ мм рт. ст., равным 0,995. Таким образом, при $pd < (pd)_{кр}$ напряжение на газовой полости при разряде остается практически постоянным, вследствие чего в отношении среднего за полупериод тока и средней мощности являясь справедливыми выводы, сделанные в [6]. Но мощность, выделяющаяся при одном импульсе разряда, может существенно превысить среднюю за полупериод мощность. Энергия, выделяющаяся в полости при прохождении одного импульса тока, составляет величину порядка $1 \div 3 \cdot 10^{-8}$ Дж, а мощность, приходящаяся на единицу поверхности диэлектрического барьера (при условии, что вся энергия передается барьеру), составляет около $5 \cdot 10^{-3}$ Вт/см².

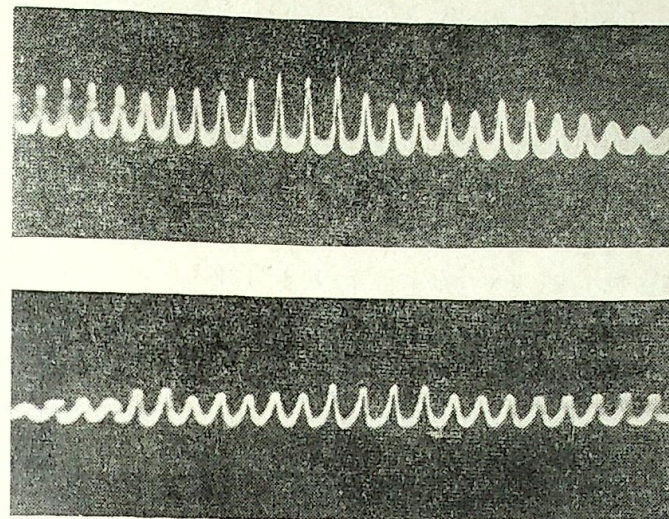


Рис. 4

При значениях pd в области $(pd)_{кр}$ наблюдаются импульсы, соответствующие как большим, так и малым значениям pd . Если в качестве диэлектрического барьера используется полистирол, то область значений pd , где наблюдаются обе формы импульсов, составляет около 10 мм рт. ст. мм и лежит вблизи значения $(pa)_{кр} = 100$ мм·мм рт. ст. Следует отметить, что абсолютное значение $(pd)_{кр}$ и ширина переходной области от одной формы импульсов к другой зависят от материала диэлектрических барьеров и состава газа в полости.

Исходя из вышеизложенного, можно сформулировать некоторые основные положения, характеризующие разряд в газовой полости, ограниченной диэлектриком.

1. Пробой газа между диэлектрическими барьерами происходит при той же напряженности поля, которая необходима для пробоя между металлическими электродами при условии, что произведение pd имеет значение, соответствующее правой ветви кривой Пашена.
2. Электрический разряд в газовой полости с диэлектрическими барьерами носит импульсный характер; форма и порядок следования импульсов при определенном газе и диэлектрических барьерах определяются значением pd .

3. При значениях pd , больших некоторого критического, каждый импульс представляет собой искровой пробой газовой полости; при этом разряжается некоторый участок газовой полости. Параметры импульсов зависят от величины этого участка, а также от значений u_3 и $u_п$ и постоянной RC_0 . Длительность пробоя определяется време-

нем порядка $5 \cdot 10^{-7}$ сек. После пробоя начинается процесс восстановления напряжения на разрядившемся участке полости, происходящий несколько быстрее, чем это обуславливается источником. Зависимости числа импульсов и среднего тока разряда от напряжения представляют собой ступенчатые кривые.

4. При pd , меньших критических, одним импульсом разряжается достаточно большая площадь ($\sim 2 \text{ см}^2$); наблюдается периодичность в следовании импульсов, длительность которых зависит от скорости роста напряжения на ячейке и составляет около $4 \cdot 10^{-6}$ сек. Зависимость среднего тока от напряжения представляет прямую линию.

5. В области критических pd наблюдаются как экспоненциальные, так и симметричные импульсы. Переход из области pd ниже критических в область выше критических обусловлен переходом от искрового разряда к разновидности тлеющего разряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Вечхайзер Г. В., Горин Ю. В., Леонов П. В., "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ-техн. и матем наук", 1966, № 2, 139.
2. Дмитриев А. В. "Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина)", вып. 47, 370, 1962.
3. Sachio Fuji, Naoshi Takemura. Adv. in Chem. ser. Amer. Chem. soc. 21, 334, 1959.
4. Böning W. Arch. Elektrotechn. 48, № 1, 7, 1963.
5. Veverka A., Hon A. Aht. technica ČSAV 9, 208, 1964.
6. Филиппов Ю. В., Емельянов Ю. М. ЖФХ, 31, № 4, 897, 1957.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Е. В. ДМИТРИЕВ

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

При исследовании переходных электромагнитных процессов в сложной электрической сети применяются такие методы, как проведение специальных опытов в натуре, регистрация различных коммутационных процессов с помощью специально установленной аппаратуры, физическое и математическое моделирование. Эти методы обладают известными достоинствами и недостатками и взаимно дополняют друг друга.

В последнее время в связи с возможностью использования вычислительных машин повысился интерес к математическому моделированию различных процессов в электрической сети и их численному расчету на ЦВМ. Сложная электрическая сеть описывается большой системой нелинейных дифференциальных уравнений, в которую входят и уравнения с частными производными. При этом, вид уравнений, соответствующих элементам сети, зависит от исследуемых процессов. Например, в случае изучения коммутационных явлений, процессы в машинах и аппаратах, размещаемых в узловых точках электрической сети, могут быть с достаточной точностью описаны системой нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, а процессы в линиях электропередач — известными телеграфными уравнениями.

Для расчета переходных процессов необходимо рассмотреть вопрос о выборе метода решения для системы уравнений первого порядка, описывающих процессы узловой точке электрической сети, и о методе решения уравнений линии электропередач. Нашедший большое применение для решения дифференциальных уравнений первого порядка на ЦВМ метод Рунге—Кутты не мог быть применен для решения уравнений узловой точки электрической сети ввиду наличия в этих уравнениях коэффициентов, резко отличающихся по величине, что приводило к существенным ошибкам, быстро накапливающимся и даже приводящим к автоматическому останову машины. Это обстоятельство вызвало необходимость поиска другого способа.

Нами был разработан метод, в котором решение системы осуществляется по формулам:

$$y_i(x+h) = y_i(x) + k_m + o_1(h^{m+1}) + o_2(h^3), \quad (1)$$

где

$$k_{i1} = h \varphi_i(x, y_{1x}, y_{2x}, \dots, y_{nx}),$$

$$k_{i2} = h \varphi_i \left(x + \frac{h}{m}, y_{1x} + \frac{1}{m} k_{i1}, y_{2x} + \frac{1}{m} k_{21}, \dots, y_{nx} + \frac{1}{m} k_{n1} \right),$$

$$\begin{aligned} \kappa_{1i} &= h \varphi_i \left(x + \frac{h}{m-1}, y_{1x} + \frac{1}{m-1} \kappa_{12}, y_{2x} + \frac{1}{m-1} \kappa_{22}, \dots, y_{nx} + \frac{1}{m-1} \kappa_{n2} \right), \\ \kappa_{im-1} &= h \varphi_i \left(x + \frac{h}{3}, y_{1x} + \frac{1}{3} \kappa_{1m-2}, y_{2x} + \frac{1}{3} \kappa_{2m-2}, \dots, y_{nx} + \frac{1}{3} \kappa_{nm-2} \right), \\ \kappa_{im} &= h \varphi_i \left(x + \frac{h}{2}, y_{1x} + \frac{1}{2} \kappa_{1m-1}, y_{2x} + \frac{1}{2} \kappa_{2m-1}, \dots, y_{nx} + \frac{1}{2} \kappa_{nm-1} \right), \\ o_2(h^3) &= -\frac{h^3}{24} A^2(\varphi_i) + \frac{h^4}{48} A^3(\varphi_i) + \frac{h^4}{96} A'(\varphi_i) A' \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \right) + \\ &+ \frac{h^4}{72} A^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} \right) + \dots, \end{aligned}$$

где оператор

$$A^k(\varphi_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + \varphi_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^k \varphi_i, \\ \varphi_i = \varphi_i(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Применение этого метода к решению электротехнических задач показало, что решение может быть получено при любых значениях коэффициентов.

Значительный интерес представляет вопрос о методе решения уравнений линии электропередач:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t} + ri, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t} + gu \end{aligned} \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (rC + gL) \frac{\partial u}{\partial t} + rgu, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (rC + gL) \frac{\partial i}{\partial t} + rgi. \quad (3')$$

При коммутациях и аварийных режимах в электрической сети происходят превращения электромагнитной энергии, которые могут привести к опасным повышениям напряжения. Поэтому весьма важно изучение законов превращения этой энергии, особенно для электропередач сверхвысокого напряжения, где низок уровень допустимых перенапряжений, что приводит к весьма высоким требованиям точности расчета различных процессов на ЛЭП. При этом, конечно, точность должна быть ограничена из соображения получения достоверных результатов за приемлемое время. Точность исследования различных процессов при их математическом моделировании зависит от двух обстоятельств: от точности математического описания этих явлений и точности решения полученных уравнений

Часто при математическом описании исследуемых явлений допускаются серьезные упрощения, вызывающие искажение физической картины этих явлений. Для возможности получения аналитического решения такие приемы в какой-то степени могут быть оправданы. При численных расчетах необходимость в этом отсутствует, так как нелинейность и сложность уравнений не служат значительным препятствием для их численного решения и поэтому следует стремиться к более точному описанию исследуемых явлений. Например, пренебрегая потерями в линии, можно получить точное решение для (2), используя которое, можно производить расчеты переходных процессов в сложной сети. Этим обстоятельством воспользовался ряд авторов [2—5]. Однако вопрос о точности получаемых результатов в этом случае остается открытым. С целью приближенного учета потерь в линии предложено [6—7] рассматривать ее сопротивление как включенное по концам ЛЭП, однако точность такого учета потерь весьма низка [8]. Лучшие результаты можно получить, заменив реальную линию неискажающей [9, 10]. В этом случае при определенном подборе коэффициентов r и g можно получить решение для неискажающей линии, близкое к решению для реальной. Как сочетание методов [9] и [6] можно указать на метод [11], содержащий недостатки обоих предыдущих.

Применяя к решению (2) численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными, можно избежать недостатков, связанных с упрощениями, принятыми в [2—5—9—11].

В настоящее время для решения задач математической физики получили распространение методы прямых и интегральных соотношений, приближенно сводящие решение уравнений с частными производными к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. А также методы, сводящие решение уравнений с частными производными к решению системы алгебраических уравнений, — разностные методы. При решении гиперболических уравнений широкое применение получил метод характеристик, который сводит их решение к решению алгебраических или дифференциальных уравнений первого порядка, что зависит от порядка решаемых уравнений.

Рассмотрим применение этих методов к решению системы (2) при заданных граничных и начальных условиях.

Метод прямых. Применение этого метода к (2) [12] дает:

$$\begin{aligned} -C \frac{du}{dt} &= (i_n - i_{n-1}) h^{-1} + ri_n, \\ -L \frac{di}{dt} &= (u_n - u_{n-1}) h^{-1} + gu_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Системы аппроксимируют (2) с точностью до h и описывают цепочечную схему. Использование (4) при решении электротехнических задач рассмотрим на примере.

Решить (2) при

$$u(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ u \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$i(l, t) = 0.$$

Результат решения этой задачи методом Рунге—Кутты при

$$L = 10^{-4} \text{ гн/км}, \quad C = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ ф/км}, \quad g = 0, \quad r = 0,2 \text{ ом/км}, \quad \omega = 50, \\ l = 225 \text{ км}$$

показан на рис. 1. Из этого результата следует, что метод прямых дает плохое решение. Кроме того, он очень длителен. Решение (4)

разностным методом в данном случае улучшения не дает. Возможна и другая, более точная разностная аппроксимация для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial i}{\partial x}$, но она применительна к методу прямых с последующим решением метода Рунге—Кутты и использоваться не может ввиду невозможности ее применения для получения уравнений, определяющих значения переменных в граничных точках.

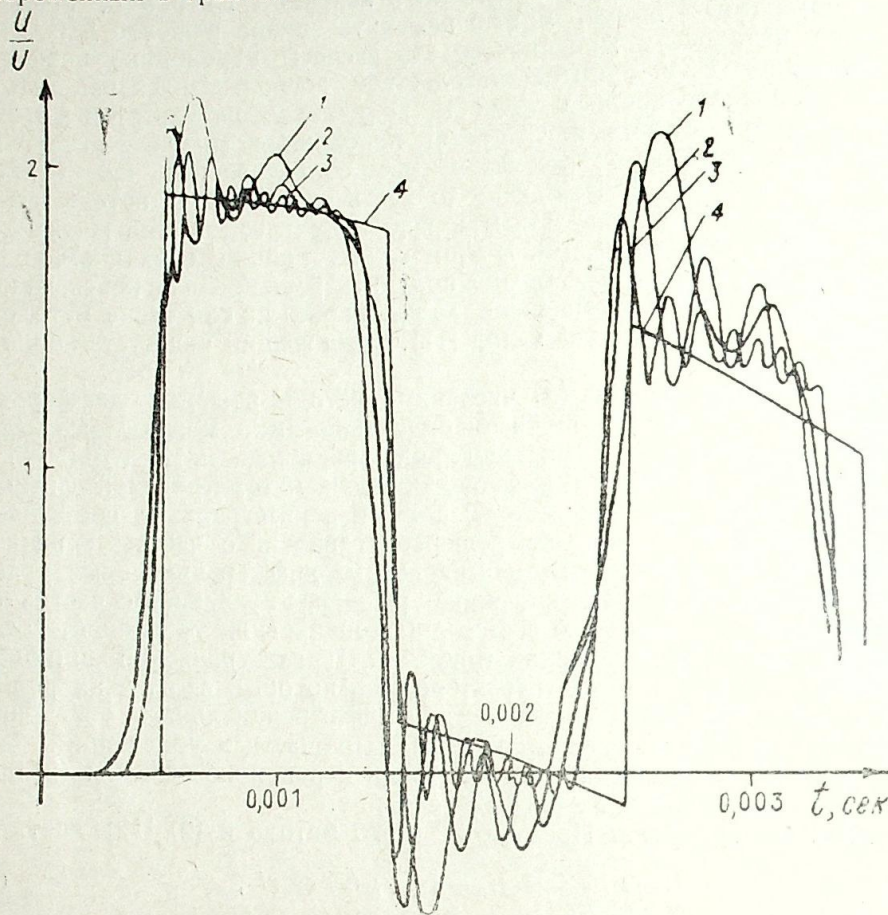


Рис. 1

1—кривая напряжения на конце холостой линии, замещенной 6 ячейками; 2—та же кривая для линии, замещенной 12 ячейками; 3—то же для линии замещенной 25 ячейками; 4—кривая напряжения на конце холостой линии, полученная при расчете разностным методом.

Метод интегральных соотношений. Известно, что метод интегральных соотношений дает хорошие результаты уже при небольшом числе полос, разбивающих область интегрирования. Умножая систему (2) на $\sin \pi n x$ и разбив область интегрирования на N полос, проинтегрируем полученное уравнение по x вдоль каждой полосы. Выбор функции, на которую умножается рассматриваемое уравнение, обусловлен необходимостью получения выражений, поддающихся интегрированию, и связан с видом функции, аппроксимирующей пере-

$$u \cos \pi n x \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \pi n \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin \pi n x u dx = -L \frac{d}{dt} \int_{x_n}^{x_{n+1}} i \cos \pi n x dx -$$

$$- L \pi n \int_{x_n}^{x_{n+1}} i \sin \pi n x dx - r \int_{x_n}^{x_{n+1}} i \cos \pi n x dx; \quad (6)$$

$$i \cos \pi n x \Big|_{x_n}^{x_{n+1}} - \pi n \int_{x_n}^{x_{n+1}} \sin \pi n x i dx = -C \frac{d}{dt} \int_{x_n}^{x_{n+1}} u \cos \pi n x dx -$$

$$- C \pi n \int_{x_n}^{x_{n+1}} u \sin \pi n x dx - g \int_{x_n}^{x_{n+1}} u \cos \pi n x dx. \quad (7)$$

Пусть в k -ом приближении

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N u_k(t) \cos \pi k x,$$

$$i(x, t) = \sum_{k=1}^N I_k(t) \cos \pi k x. \quad (8)$$

Тогда

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sum_{k=1}^N I_k \cos \pi k x \cos \pi n x dx = \sum_{k=1}^N I_k \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)\pi x}{n+k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(n-k)\pi x}{n-k} \right] \Big|_{x_n}^{x_{n+1}}, \quad (9)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sum_{k=1}^N I_k \cos \pi k x \sin \pi n x dx = \sum_{k=1}^N I_k \cdot \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+k)\pi x}{n+k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(n-k)\pi x}{n-k} \right] \Big|_{x_n}^{x_{n+1}}, \quad (10)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sum_{k=1}^N U_k \cos \pi k x \cos \pi n x dx = \sum_{k=1}^N U_k \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+k)\pi x}{n+k} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(n-k)\pi x}{n-k} \right] \Big|_{x_n}^{x_{n+1}}, \quad (11)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \sum_{k=1}^N U_k \cos \pi k x \sin \pi n x dx = \sum_{k=1}^N U_k \cdot \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(n+k)\pi x}{n+k} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(n-k)\pi x}{n-k} \right] \Big|_{x_n}^{x_{n+1}}, \quad (12)$$

При $n=0$ выражения (10) и (12) превращаются в нуль. Подставляя (9), (11) в (6) и (7), после преобразования найдем:

$$L \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N I_k \sin \pi k \frac{\Delta x}{2} \cos \pi k \frac{x_{n+1} + x_n}{2} = u_n - u_{n+1} +$$

$$+ r \sum_{k=1}^N I_k \sin \pi k \frac{\Delta x}{2} \cos \pi k \frac{x_{n+1} + x_n}{2}, \quad (13)$$

$$C \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N U_k \sin \pi k \frac{\Delta x}{2} \cos \pi k \frac{x_{n+1} + x_n}{2} =$$

$$= i_n - i_{n+1} + g \sum_{k=1}^N U_k \sin \pi k \frac{\Delta x}{2} \cos \pi k \frac{x_{n+1} + x_n}{2}.$$

Из (8) имеем

$$U_k = \sum_{k=1}^N f(k, x_n) u_k, \quad (14)$$

$$I_k = \sum_{k=1}^N \varphi(k, x_n) i_k$$

или в матричной форме

$$U_k = A^{-1} u_k, \quad (15)$$

$$I_k = A_1^{-1} i_k.$$

Здесь

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \pi \frac{x_1 + x_0}{2}, \cos \pi (x_1 + x_0), \cos \frac{3\pi}{2} (x_1 + x_0) \dots \\ \cos \pi \frac{x_2 + x_1}{2}, \cos \pi (x_2 + x_1), \cos \frac{3\pi}{2} (x_2 + x_1) \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{bmatrix}.$$

Из (13) с учетом (15) получим систему уравнений:

$$L \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N f(k, x_k) i_k = u_k - u_{k+1} + r \sum_{k=1}^N f(k, x_k) i_k, \quad (16)$$

$$C \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \varphi(k, x_k) u_k = i_k - i_{k+1} + g \sum_{k=1}^N \varphi(k, x_k) u_k. \quad (16)$$

Эта система приближенно заменяет исходную (2). Таким образом, при расчете переходных процессов в сложной электрической сети вместо уравнений ЛЭП можно использовать (16), что вместе с уравнениями узловых точек сети составит весьма громоздкую систему, которую при расчетах необходимо будет рассматривать как единое целое. Это является существенным недостатком метода, который отсутствует в методах сеток и характеристик.

Метод сеток. Суть метода сеток заключается в замене дифференциальных выражений, составляющих решаемые уравнения, конечно-разностными, в результате чего эти уравнения преобразуются в системы алгебраических уравнений, связывающих значения искомой функции в конечном числе точек. Решение этой системы дает приближенное значение искомой функции в указанных точках.

Рассмотрим некоторую точку линии и составим для нее разностные выражения, связывающие значения переменных в этой точке с их значениями в соседних точках. Для этого заменим в (2) частные производные конечно-разностными выражениями, аппроксимируемыми их с точностью до h^2 , и разнесем переменные при r и g с различным весом к соседним точкам. При этом найдем

$$-\frac{u_{x+h, t-\Delta t} - u_{x-h, t-\Delta t}}{2h} = \frac{L}{2\Delta t} (i_{x, t} - i_{x, t-2\Delta t}) + r (ai_{x+h, t-\Delta t} + bi_{x-h, t-\Delta t}), \quad (17)$$

$$-\frac{i_{x+h, t-\Delta t} - i_{x-h, t-\Delta t}}{2h} = \frac{C}{2\Delta t} (u_{x, t} - u_{x, t-2\Delta t}) + g (au_{x+h, t-\Delta t} + bi_{x-h, t-\Delta t}),$$

где

$$a + b = 1.$$

Обозначив $\Delta t = n \sqrt{LC} \cdot h$ и $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$, где $n \leq 1$.

Приняв $a = 0,5$, $b = 0,5$ и разрешив (17) относительно $u_{x, t}$; $i_{x, t}$, получим

$$u_{x, t} = \frac{i_{x-h, t-\Delta t} - i_{x+h, t-\Delta t}}{1 + hzg n} z n + u_{x, t-2\Delta t} \frac{1 - hzg n}{1 + hzg n}, \quad (18)$$

$$i_{x, t} = \frac{u_{x-h, t-\Delta t} - u_{x+h, t-\Delta t}}{z + rnh} \cdot n + i_{x, t-2\Delta t} \frac{z - rnh}{z + rnh}.$$

Эти выражения позволяют найти значение переменных во всех точках сети, при условии, что они на границах известны.

Замена производных в (2) разностными выражениями точности h ничего нового не дает по сравнению с полученным результатом применения метода прямых к решению (2). Решим вышеприведенную задачу методом сеток. В этом случае, кроме используемых для отыскания напряжения и тока во внутренних точках линии, необходимо составить выражения, определяющие

$$u(0, t), i(0, t), u(l, t), i(l, t).$$

Для отыскания этих значений можно воспользоваться разностными выражениями точности h и тогда совместно с (18) эта система позволит найти значения неизвестных во всех точках построенной сетки. Однако такой способ, имея точность порядка h , дает результаты со значительными погрешностями, близкими к результатам, получаемым по методу прямых.

Для отыскания значений напряжения и тока в точках $x=0$ и $x=l$ можно воспользоваться (3) и (3'), заменив в них производные конечными разностями:

$$\frac{i_{y, t-\Delta t} - 2i_{x, t-\Delta t} + i_{z, t-\Delta t}}{h^2} = LC \frac{i_{x, t} - 2i_{x, t-\Delta t} + i_{x, t-2\Delta t}}{\Delta t^2} +$$

$$+ (Lg + rC) \frac{i_{x, t} - i_{x, t-2\Delta t}}{2\Delta t} + 0,5rg (i_{x, t} + i_{x, t-2\Delta t}), \quad (19)$$

$$\frac{u_{y, t-\Delta t} - 2u_{x, t-\Delta t} + u_{z, t-\Delta t}}{h^2} = LC \frac{u_{x, t} - 2u_{x, t-\Delta t} + u_{x, t-2\Delta t}}{\Delta t^2} +$$

$$+ (Lg + rC) \frac{u_{x, t} - u_{x, t-2\Delta t}}{2\Delta t} + 0,5rg (u_{x, t} + u_{x, t-2\Delta t}).$$

Используя (19) и (17) для напряжения на холостом конце ЛЭП, имеем

$$u_{z, t-\Delta t} = -u_{y, t-\Delta t} + i_{y, t-\Delta t} \frac{z(1+B+A')}{1+hzg} +$$

$$+ u_{x, t-2\Delta t} \left[\frac{1-hzg}{1+hzg} (1+B+A') + 1+B-A' \right]. \quad (20)$$

Здесь принято: $n=1$, $i_{x-h, t-\Delta t} \equiv i_{y, t-\Delta t}$, $i_{x+h, t-\Delta t} \equiv i_{z, t-\Delta t}$,

$$A' = \left(\frac{g}{C} + \frac{r}{L} \right) \frac{h}{2}, \quad B = \frac{rg}{h^2}.$$

Нетрудно убедиться, рассматривая линию без потерь, что формула (20) дает удвоение напряжения на конце линии. Аналогичным образом могут быть составлены выражения для напряжения или тока в граничных точках линии при других граничных условиях. Решение задачи нахождение напряжения в конце холостой линии длиной $l = 270 \text{ км}$ с параметрами: $z = 400 \text{ ом}$, $r = 0,2 \text{ ом/км}$, $g = 0$, при вычислении значений переменных на конце ЛЭП по рассмотренному методу представлено на рис. 1. Сравнение полученного результата с методом, представленным на рис. 13, произведенным по методу характеристик, показывает их практическое совпадение. Следует отметить, что недостатком метода сеток является необходимость использования значений переменных в двух моментах времени, при нахождении их значения в некоторый другой момент.

Метод характеристик. Применение метода характеристик к решению уравнений линии (2) либо (3,3') рассмотрено нами в [8, 13, 14]. Сравнение расчетных выражений, полученных в указанных работах, и выражений, приведенных в данной работе, полученных на основе различных методов, указывает на значительное преимущество метода характеристик, что выражается в простоте расчетных выражений при высокой точности. Тем не менее рассмотренные методы представляют самостоятельный интерес. Например, при учете поверхностного эффекта в проводе и земле для решения уравнения ЛЭП необходимо применять одновременно два метода—метод характеристик и один из методов численного решения дифференциальных уравнений [15]. Как следует из представленной работы, в этом случае с успехом может быть применен разностный метод.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. ДАН Азерб. ССР, № 3, 1967.
2. Караев Р. И. "Электричество", № 10, 1954.
3. Barthold B. O., Carter C. K. Digital traveling-Waves solutions. Power Apparatus and systems, № 57, 1961.
4. McElroy A. J., Porfer, R. M. Digital computer calculation of transients in electric networks. Power Apparatus and systems № 66, 1963.
7. Долгинов А. И., Шатин В. С., Мотуско Ф. Р. "Электричество", № 4, 1964.
6. Караев Р. И. Переходные процессы в длинных линиях электропередач. ГЭИ, 1963.
7. Караев Р. И. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт", № 5, 1965.
8. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. Изв. АН СССР, "Энергетика и транспорт", № 1, 1967.
9. Кадомская К. П., Левинштейн М., Штеренберг Г. П., Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт", № 4, 1963.
10. Базуткин В. В. Тр. МЭИ ТВН, вып. 64, 1965.
11. Долгинов А. И., Ступель А. И., Левина Л. С. "Электричество", № 8, 1966.
12. Джуварлы Я. М., Дмитриев Е. В., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 4, 1965.
13. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. ДАН Азерб. ССР, № 3, 1966.
14. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Ализаде Э. М., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 4, 1966.
15. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. ДАН Азерб. ССР, № 3, 1967.

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН, Ю. М. КУРДЮКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ КРИВОЙ НАПРЯЖЕНИЯ НА ВЫХОДЕ ТРЕХФАЗНОГО ИНВЕРТОРА НА ТИРИСТОРАХ

Современное развитие тиристорной техники делает возможным создать экономически оправданные преобразователи частоты, применение которых расширит внедрение регулируемого электропривода переменного тока. Одной из рациональных схем является преобразователь с промежуточным звеном постоянного тока и трехфазным инвертором напряжения, собранным по мостовой схеме с отсекающими вентилями и с ограниченными коммутирующими емкостями [1].

Частота выходного напряжения определяется управлением главных вентилях инвертора. Форма кривой напряжения зависит от схемы соединения и характера нагрузки. Проведем исследование формы кривой при следующих предположениях. Все вентили рассматриваются как идеальные; емкость сглаживающего конденсатора достаточно велика, так что напряжение на выходе звена постоянного тока U_d остается постоянным независимо от нагрузки. При такой идеализации напряжение инвертора имеет вид ступенчатой кривой.

При смешанной активно-индуктивной нагрузке R, L , при учете продолжительности работы диодов реактивного моста, форма кривой зависит от параметра $\alpha = \frac{R}{\omega L}$ [2]. При чисто активной нагрузке ток про-

водят только главные вентили. Если нагрузка включает индуктивность, то вступают в действие также диоды реактивного моста. Продолжительность пропускания тока через диод ωt_g является функцией параметра α . Следует различать две области: $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3} \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{2}$.

Для соединения нагрузки в треугольник на рис. 1 представлены схемы замещения для двух состояний инвертора при $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$.

В момент, изображенный на рисунке 1, а закрывается тиристор 5 УВ, суммарный ток фаз С и В (i_c) замыкается через 6 УВ и D_2 . Напряжение на фазе В становится равным нулю, а напряжение фаз А и С равно $+U_d, -U_d$. При снижении тока в диоде D_2 до нуля диод D_2 закрывается, напряжение фазы А остается равным $+U_d$, а напряжение фаз В и С становится равным $-\frac{U_d}{2}$. В следующий момент (рис.

1, б) закрывается тиристор 6 УВ, суммарный ток фаз А и В (i_b) замыкается через диод D_3 и тиристор 1 УВ, напряжение на фазе А

становится равным нулю, а напряжение на фазах B и C , соответственно, $+U_d - U_d$ и т. д. Инвертор имеет шесть состояний.

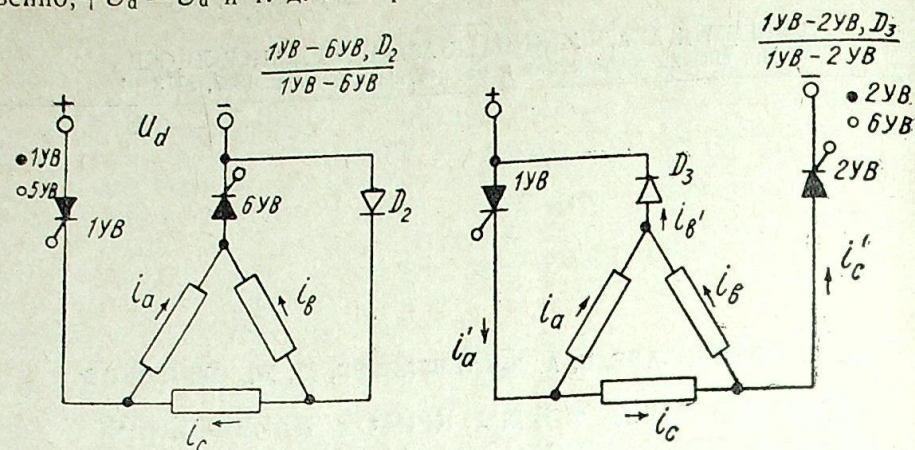


Рис. 1

Из изложенного следует, что ток в диодах моста реактивного тока протекает на каждом интервале переключения в течение времени ωt_g , а напряжение на фазе, ток которой замыкается через диод и тиристор, равно нулю. При этом осуществляется обмен реактивной энергии между фазами нагрузки.

В соответствии со схемами замещения построена кривая напряжения, изображенная на рис. 2.

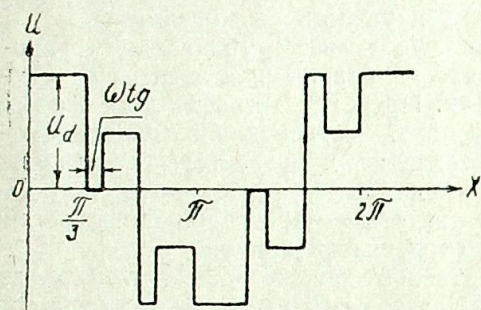


Рис. 2

Для случая $\frac{\pi}{3} \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{2}$ нагрузка подключается в источник питания через один главный тиристор и два диода или два главных тиристора и один диод. Ток в диодах моста реактивного тока протекает в течение времени ωt_g . Напряжения на фазе в момент, когда ток, протекающий в ней, замыкается через тиристор и диод, равно нулю. Таким образом, в течение времени $\omega t_g - \frac{\pi}{3}$ осуществляется возврат запасенной в нагрузке реактивной энергии в источник питания. Кривая напряжения для этого случая представлена на рис. 3.

Для соединения нагрузки

в звезду при $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$

схемы замещения для шести состояний показаны на рис. 4. В момент, изображенный на рис. 4 а, фазы A и C подключены к источнику через $6YB$ и $1YB$, ток отключившейся фазы B замыкается через тиристор $6YB$ и диод D_2 . При снижении тока до нуля D_2 закрывается, напряжение фа-

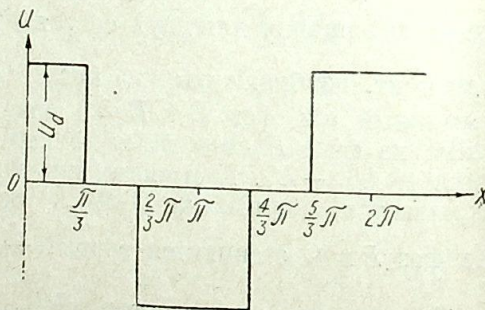


Рис. 3

зы B становится равным нулю. В момент (рис. 4, б) закрывается тиристор $6YB$ и открывается $2YB$. Ток отключившейся фазы A замыкается через $1YB$ и D_3 . Фаза A оказывается подключенной через диод D_3 к плюсу источника, т. е. полярность фазы A мгновенно изменяется на обратную. Кривая напряжения представлена на рис. 5.

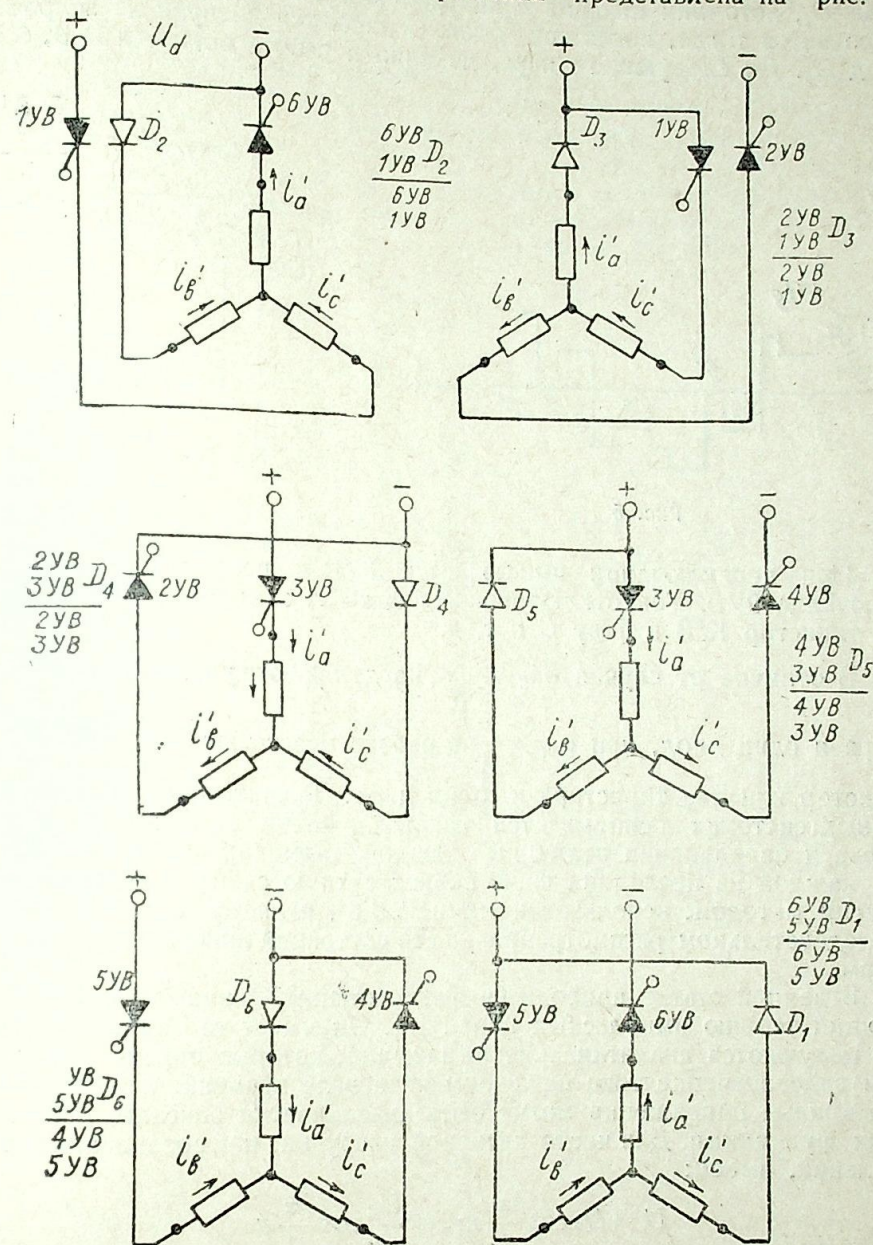


Рис. 4

При $\omega t_g \geq \frac{\pi}{3}$ в момент, изображенный на рис. 6, выключается тиристор $5YB$, ток фазы B замыкается через фазу A , $6YB$ и D_2 . Фаза B подключается к источнику питания через диод D_2 , т. е. полярность напряжения фазы B мгновенно изменяется. В этот же момент полу-

чает импульс на включение тиристор 1УВ, который, однако, не может включиться в работу, так как ток фазы С не успевает за время $\omega t_g = \frac{\pi}{3}$ снизиться до нуля и замыкается через вновь открывающийся диод D_1 , источник питания в направлении „+“ к „-“. Тиристор 1УВ включается тогда, когда ток фазы С снизится до нуля и закроется диод D_1 . До следующего переключения в работе остаются 1УВ, 6УВ, диод D_1 .

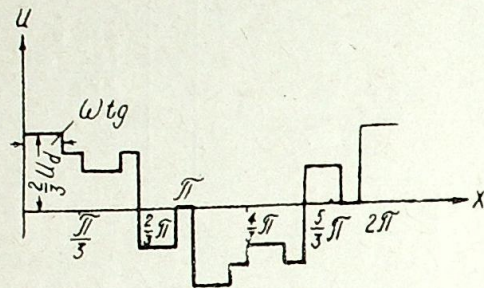


Рис. 5

D_1 . При переключении выключается 6УВ и получает импульс на включение 2УВ. Ток отключившейся фазы А замыкается через диод D_3 , тиристор 1УВ и фазу С и т. д.

В отличие от случая $\omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$, когда в работе участвуют два тиристора и один диод, при $\omega t_g > \frac{\pi}{3}$ в работе участвуют два диода и один тиристор или два тиристора и один диод. Расчет токов в представленных системах основывается на разложении напряжения в ряд Фурье и определении величины каждой гармоники тока, используя для каждой из последних свою эквивалентную схему двигателя [3,4]. Другим методом, использованным в [2,5,6], является расчет токов при последовательном рассмотрении шести состояний инвертора по интервалам.

В данной статье приводится разработанный нами метод, использующий теорию импульсных цепей [7]. Он имеет то преимущество, что получаются аналитические выражения, которые определяют в общем виде значение тока на любом интервале времени. Представленные кривые напряжения могут быть аналитически описаны ступенчатыми функциями. Для чисто активной нагрузки, при соединении в треугольник, имеем:

$$U = U_d \cos \frac{\pi}{3} n; i = \frac{U_d}{R} \cos \frac{\pi}{3} n. \quad (1)$$

Период повторения функции с регулируемой частотой связан следующим соотношением:

$$T = \frac{1}{6f} |сек| \quad \text{или} \quad T = \frac{\pi}{3\omega}. \quad (2)$$

При смешанной нагрузке, когда $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$ и $\infty > \alpha > \frac{3}{\pi} \ln 2$, кривая напряжения, представленная на рис. 2, может быть рассмот-

рена как суммарная двух кривых. Это кривая описывается следующими ступенчатыми функциями:

$$\text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \gamma \quad U = U_d \left[\cos \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} n \right]; \quad (3)$$

$$\text{при } \gamma \leq \varepsilon \leq 1 \quad U = U_d \cos \frac{\pi}{3} n. \quad (4)$$

Связь между непрерывной переменной t и дискретной n определяется зависимостью $t = T(n + \varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Рассматриваемую систему приводим к импульсной, в которой непрерывная часть представляет собой четырехполюсник из элементов R, L . Импульсный элемент создает прямоугольные импульсы, а входная величина представляет собой решетчатую функцию, описываемую уравнением (3) или (4).

Для рассматриваемой системы передаточные функции [7]:

$$\kappa^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{e^q - e^{-\beta(1-\gamma)}}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right], \quad 0 \leq \varepsilon \leq \gamma \quad (5)$$

$$\kappa^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{R} \frac{e^q (1 - e^{-\beta \gamma})}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)}, \quad \gamma \leq \varepsilon \leq 1; \quad (6)$$

$$\beta = \frac{T}{T_1} = \alpha \frac{\pi}{3}, \quad T_1 = \frac{L}{R}, \quad \omega T = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{t_g}{T} = \frac{\omega t_g}{\pi/3}.$$

Так как исследуемая система является линейной, то рассмотрим отдельно воздействие входных величин для косинусной и синусной функций. Для косинусной составляющей скважность $\gamma = 1$. При $\gamma = 1$ имеем

$$\kappa^*(q, \varepsilon) = \frac{1}{R} \left[1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right]. \quad (7)$$

Изображение для функции тока

$$i^*(q, \varepsilon) = \kappa^*(q, \varepsilon) U_{вх}^*(q, 0), \quad (8)$$

где $U_{вх}^*(q, 0)$ — изображение функции входного напряжения. Подставляя в уравнение (8) значения $\kappa^*(q, \varepsilon)$ и $U_{вх}^*(q)$, получаем выражение для изображения функции тока. Для косинусной составляющей

$$i^*(q, \varepsilon) = \frac{U_d}{R} \left[1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right] \frac{e^q (e^q - 0,5)}{e^{2q} - e^q + 1}. \quad (9)$$

Для синусной составляющей

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$i^*(q, \varepsilon) = -U_d/2R \left[1 - \frac{e^q - e^{-\beta(1-\gamma)}}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right] \frac{e^q}{e^{2q} - e^q + 1}, \quad (10)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$i^*(q, \varepsilon) = -U_d/2R \frac{(1 - e^{-\beta \gamma})}{e^q - e^{-\beta}} \frac{e^q}{e^{2q} - e^q + e} e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)}. \quad (11)$$

Значение оригинала функции определяем по формуле обращения. Полное выражение для тока получаем как сумму косинусной и синусной составляющих

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$i[n, \varepsilon] = \frac{U_d}{R} \left\{ \cos \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} \times \right. \\ \left. \times [e^{-\beta(n+\varepsilon)} (e^{-2\beta} - 2e^{-\beta} + 0,5 + 0,5 e^{-\beta(1-\gamma)}) + e^{-\beta \varepsilon} (e^{+\beta} + 0,5 - \right.$$

$$-0,5 e^{-\beta(1-\gamma)} \cos \frac{\pi}{3} n + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\beta \varepsilon} (2 e^{-\beta} - 2,5 - e^{-\beta(2-\gamma)} + 0,5 e^{-\beta(1-\gamma)}) \sin \frac{\pi}{3} n \Bigg\}; \quad (12)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$i[n, \varepsilon] = \frac{U_d}{R} \left\{ \cos \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} [e^{-\beta(n+\varepsilon)} - 2e^{-\beta} + 0,5 + 0,5 e^{-\beta(1-\gamma)}] + 0,5 e^{-\beta \varepsilon} (2 e^{-\beta} + 1 - e^{-\beta(1-\gamma)}) \cos \frac{\pi}{3} n + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\beta \varepsilon} (2 e^{-\beta} - 2,5 + e^{\beta \gamma} - 0,5 e^{-\beta(1-\gamma)}) \sin \frac{\pi}{3} n \right\}. \quad (13)$$

При значениях параметров, когда $\omega t_g > \frac{\pi}{3}$, кривая напряжения описывается следующей ступенчатой функцией:

$$U = \frac{2}{\sqrt{3}} U_d \sin \frac{\pi}{3} (n+2). \quad (14)$$

Выражение для изображения функции тока

$$i^*(q, \varepsilon) = \frac{U_d}{R} \left[1 - \frac{e^q - 1}{e^q - e^{-\beta}} e^{-\beta \varepsilon} \right] \frac{e^{3q}}{e^{2q} - e^q + 1}. \quad (15)$$

Значение оригинала изображения функции тока при $0 \leq \varepsilon \leq 1$

$$i[n, \varepsilon] = \frac{U_d}{R} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} (n+2) - \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} [(e^{-\beta} - 1) \times \times e^{-2\beta} \cdot e^{-\beta(n+\varepsilon)} + (1 - e^{-\beta}) e^{-\beta \varepsilon} \cos \frac{\pi}{3} (n+2) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\beta \varepsilon} (1 + e^{-\beta}) \sin \frac{\pi}{3} (n+2)] \right\}. \quad (16)$$

При чисто индуктивной нагрузке

$$i = \frac{1}{L} \int U dt, \quad (17)$$

где U — ступенчатая функция, описываемая уравнением (14).

В соответствии с правилами интегрирования ступенчатых функций получаем

$$i^*(q, \varepsilon) = \frac{U_d \cdot T}{L} \left\{ \frac{e^{3q}}{(e^q - 1)(e^{2q} - e^q + 1)} + \frac{e^{3q}}{e^{2q} - e^q + 1} \varepsilon \right\}. \quad (18)$$

Значение оригинала

$$i[n, \varepsilon] = \frac{U_d \cdot \pi}{3 \omega L} \left\{ 1 - \cos \frac{\pi}{3} (n+2) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{3} (n+2) \right\}. \quad (19)$$

Для случая включения нагрузки в звезду при чисто активной нагрузке имеем:

$$U = \frac{U_d}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} (n+1), i = \frac{U_d}{\sqrt{3} R} \sin \frac{\pi}{3} (n+1). \quad (20)$$

При смешанной нагрузке в случае $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$ кривую напряже-

ния, изображенную на рис. 5, представляем в виде суммы двух кривых:

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$ $U = \frac{2}{3} U_d \cos \frac{\pi}{3} n, \quad (21)$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$ $U = \frac{1}{\sqrt{3}} U_d \sin \frac{\pi}{3} (n+1) \cdot 1 [n - \gamma], \quad (22)$

при $\frac{\pi}{3} \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{2}$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) $U = \frac{2}{3} U_d \cos \frac{\pi}{3} n. \quad (23)$

При определении функции тока, используя уравнения (5) и (6), при $0 \leq \omega t_g \leq \frac{\pi}{3}$, следует учесть, что для косинусной составляющей длительности импульса γ , в то время как для синусной составляющей она равна $\lambda = 1 - \gamma$. Величина же γ для синусной составляющей представляет смещение ступенчатой функции, которое при определении оригинала функции изменяет дискретные моменты времени. Соответствие между оригиналом и изображением при смещении ступенчатой функции, не зависящей от ε , определяется из следующего соотношения [8]:

$$e^{-q\gamma} f^*(q) \div f[n - \gamma]. \quad (24)$$

С учетом изложенного, не приводя промежуточных вычислений, получаем следующие выражения для оригинала функций токов. Для косинусной составляющей:

при $0 \leq \varepsilon \leq \gamma$

$$i_{\text{кос}}[n, \varepsilon] = \frac{2 U_d}{3 R} \left\{ \cos \frac{\pi}{3} n - \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} \times \times \left\{ (e^{-\beta} - e^{-\beta(1-\gamma)}) (e^{-\beta} - 0,5) e^{-\beta(n+\varepsilon)} + e^{-\beta \varepsilon} \cos \frac{\pi}{3} n \times \times [1 - 0,5 e^{-\beta} (1 + e^{\beta \gamma} - 2 e^{-\beta(1-\gamma)})] - e^{-\beta \varepsilon} \sin \frac{\pi}{3} n \times \times \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\beta} (e^{\beta \gamma} - 1) \right\} \right\}; \quad (25)$$

при $\gamma \leq \varepsilon \leq 1$

$$i_{\text{кос}}[n, \varepsilon] = \frac{2 U_d}{3 R} (1 - e^{-\beta \gamma}) e^{-\beta(\varepsilon - \gamma)} \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} \times \times \left\{ (e^{-\beta} - 0,5) e^{-\beta(n+1)} + (0,5 - e^{-\beta}) \cos \frac{\pi}{3} (n+1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\pi}{3} (n+1) \right\}. \quad (26)$$

Для синусной составляющей:

при $0 \leq \varepsilon \leq \lambda$

$$i_{\text{син}}[n, \varepsilon] = \frac{U_d}{\sqrt{3} R} \left\{ \sin \frac{\pi}{3} (n_1 + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \times \frac{1}{e^{-2\beta} - e^{-\beta} + 1} \left\{ e^{-\beta} (1 - e^{\beta \lambda}) e^{-\beta(n_1+1+\varepsilon)} - - e^{-\beta(1+\varepsilon)} (1 - e^{\beta \lambda}) \cos \frac{\pi}{3} (n_1 + 1) - \frac{2 \sqrt{3}}{3} e^{-\beta \varepsilon} [-1 + 0,5 e^{-\beta(1-\lambda)} + + 0,5 e^{-\beta} - e^{-2\beta}] \sin \frac{\pi}{3} (n_1 + 1) \right\} \right\}; \quad (27)$$

на заранее заданное расстояние r от нагнетательной скважины, то необходимо увеличивать расход воздуха $Q_{г0}$, нагнетаемого в скважину. Это иллюстрирует рис. 2, характеризующий те же конкретные

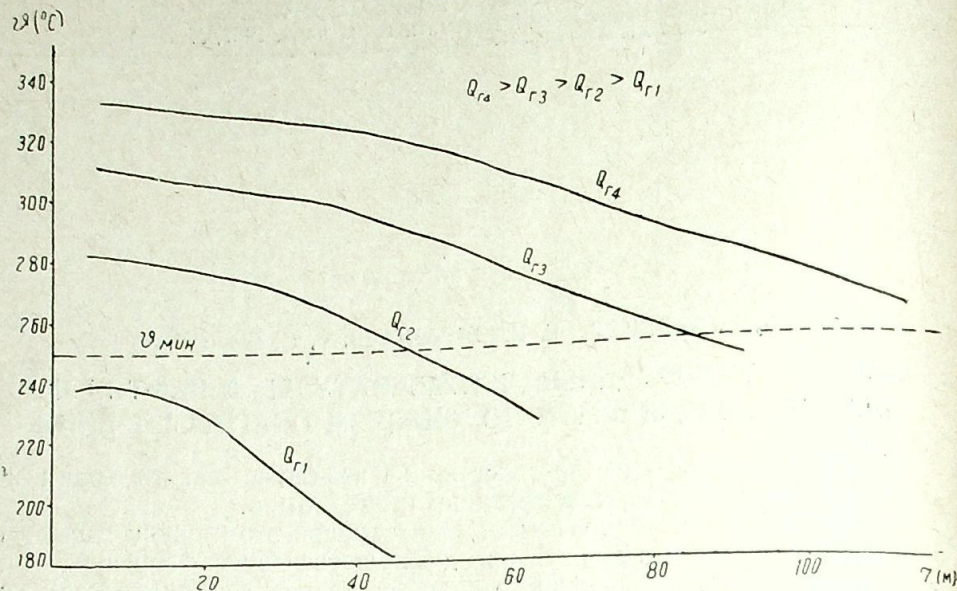


Рис. 1

Зависимость температуры на краю фронта горения от положения фронта в пласте при различных значениях расхода нагнетаемого в скважину воздуха:

$$Q_{г1} = 5800; \quad Q_{г2} = 11600; \quad Q_{г3} = 17400; \quad Q_{г4} = 23200 \frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$$

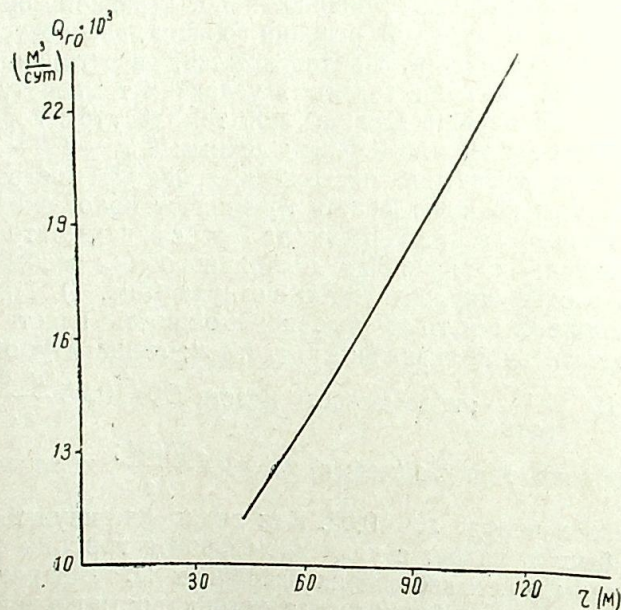


Рис. 2

Зависимость расхода воздуха, нагнетаемого в скважину, от расстояния по пласту, на которое необходимо устойчиво продвинуть фронт горения.

условия, что и предыдущий, который устанавливает линейный характер зависимости $Q_{г0} = Q_{г0}(r)$. Исходя из физических представлений жения фронта горения выражается как

$$V_{\phi} = \frac{y R_{н} Q'_{г0}}{4 \pi l z_{н} \rho_{н}} \cdot \frac{1}{r}, \quad (1)$$

где y — весовое содержание кислорода в нагнетаемом газе (воздухе), $R_{н}$ — весовое отношение нефти к кислороду в реакции горения, $\rho_{н}$ — плотность породы.

Для устойчивого продвижения фронта горения на заранее заданное расстояние от оси нагнетательной скважины необходимо, чтобы

$$Q'_{г} = Q_{г0} \frac{r}{r_0}, \quad (2)$$

где $Q_{г0}$ — расход окислителя (воздуха), нагнетаемого в скважину в начальный момент времени (при $t=0$ и $r=r_0$). С учетом (2) для фронта горения имеем

$$V_{\phi} = \frac{dr_{\phi}}{dt} = \frac{B}{r_0} = B' = \text{const}, \quad (3)$$

где

$$B = \frac{y R_{н} Q_{г0}}{4 \pi l z_{н} \rho_{н}}$$

Из (3) расстояние, на которое продвинут фронт горения к моменту времени t , равно

$$r_{\phi} = B't + r_0. \quad (4)$$

Тепловая мощность, приходящаяся на единицу поверхности фронта горения,

$$q_{\phi} = M y R_{н} \gamma_0,$$

где $M = \frac{Q'_{г0}}{2l \cdot 2\pi r} = \frac{Q_{г0}}{2l \cdot 2\pi r_0} = M_0$ — удельный расход окислителя (воздуха) на единицу поверхности фронта горения. Тогда

$$q_{\phi} = \frac{A}{r_0} C_{н} \rho_{н} = A' C_{н} \rho_{н}, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{Q_{г0} y R_{н} \gamma_0}{4 \pi l C_{н} \rho_{н}}$$

Распределение температуры $\theta(r, z, t)$ в пласте, создаваемой цилиндрическим фронтом горения конечной высоты, движущимся с постоянной скоростью w_{ϕ} , если не учитывать конвективного переноса тепла воздухом, в цилиндрической системе координат описывается уравнением:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{a}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + a \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + f(r, z, t), \quad (6)$$

где функция распределения источника $f(r, z, t)$ имеет вид:

$$f(r, z, t) = \begin{cases} A' \delta(r - r_0 - B't), & \text{при } |z| \leq l \\ 0, & \text{при } |z| > l. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\delta(\kappa)$ — дельта-функция Дирака.

Начальное условие:

$$\theta(r, z, 0) = 0.$$

Решая поставленную задачу (6) методом функции Грина с использованием известных интегральных соотношений [3]:

$$\int_0^{2\pi} \exp(k \cos x) dx = 2\pi I_0(k),$$

где $I_0(k)$ — Бесселева функция первого рода нулевого порядка от мн. аргумента;

$$\int_0^k \exp(-q^2 x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2q} \operatorname{erf}(qk),$$

где $\operatorname{erf} k = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^k \exp(-x^2) dx$ — вероятностный интеграл (интеграл ошибки), получим

$$\theta(r, z, t) = \frac{A'}{4a} \int_0^t \frac{r_0 + B't'}{t - t'} \exp\left[-\frac{r^2 + (r_0 + B't')^2}{4a(t - t')}\right] I_0\left[\frac{r(r_0 + B't')}{2a(t - t')}\right] \times \\ \times \left[\operatorname{erf} \frac{l+z}{2\sqrt{a(t-t')}} + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2\sqrt{a(t-t')}}\right] dt'. \quad (8)$$

Используя (3) и (5) и производя замену переменных $t - t' = u$, преобразуем (8):

$$\theta = \frac{A}{4a} \int_0^t \frac{1 + \frac{B}{r_0^2}(t-u)}{u} \exp\left[-\frac{r^2 + \frac{1}{r_0^2}(r_0^2 + B(t-u))^2}{4au}\right] \times \\ \times I_0\left[\frac{r(r_0^2 + B(t-u))}{2au}\right] \times \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2\sqrt{au}} + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2\sqrt{au}}\right) du. \quad (9)$$

Выражение (9) позволяет определить распределение температуры в пласте при движущемся с постоянной скоростью цилиндрическом фронте горения конечной высоты и изменяющемся по линейному закону расходе нагнетаемого в скважину воздуха. Вводя безразмерные параметры:

$$\beta = \frac{B}{4a}, \rho_0 = \frac{r_0}{l}, \tau = \frac{4at}{l^2}, \varepsilon = \frac{z}{l}, R = \frac{r}{r_0}, x = \frac{4au}{l^2},$$

можно (9) записать:

$$\theta = \frac{A}{4a} \int_0^\tau \frac{1 + \frac{\beta}{\rho_0^2}(\tau - x)}{x} \exp\left[-\frac{R^2 \rho_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2}(\rho_0^2 + \beta(\tau - x))^2}{x}\right] \times \\ \times I_0\left[\frac{2R(\rho_0^2 + \beta(\tau - x))}{x}\right] \times \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) dx. \quad (10)$$

Так как

$$\frac{A}{4a} = \frac{Q_{гo} \gamma R_n \gamma_o z_n}{4\pi l C \rho_n 4a z_n} = \frac{B \gamma_o z_n}{4a C_n} = \beta \frac{\gamma_o z_n}{C_n},$$

то, вводя $\theta^* = \frac{C_n \theta}{\gamma_o z_n}$, найдем

$$\theta^* = \beta \int_0^\tau \frac{1 + \frac{\beta}{\rho_0^2}(\tau - x)}{x} \exp\left[-\frac{\rho_0^2 [R^2 + (1 + \frac{\beta}{\rho_0^2}(\tau - x))^2]}{x}\right] \times \\ \times I_0\left[\frac{2R \rho_0^2 (1 + \frac{\beta}{\rho_0^2}(\tau - x))}{x}\right] \times \left(\operatorname{erf} \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf} \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right) dx. \quad (11)$$

Безразмерный параметр R , характеризующий радиальное расстояние от оси нагнетальной скважины до точки пласта, где подсчитывается температура, можно выразить следующим образом:

$$R = \frac{r}{r_0} = \frac{r_\phi + r'}{r_0} = \frac{r_0 + B't + r'}{r_0} = \left(1 + \frac{\beta \tau}{\rho_0^2}\right) (1 + \alpha),$$

где $r_0 + B't$ — расстояние от оси скважины до фронта горения;

r' — расстояние от фронта горения до точки пласта, в которой определяется температура; $\alpha = \frac{R'}{1 + \frac{\beta \tau}{\rho_0^2}}$. При $\alpha = 0$ определяется тем-

пература непосредственно на фронте горения в момент времени, соответствующий безразмерному параметру τ (критерий Фурье). При $\alpha \neq 0$ находится распределение температуры в точках пласта, удаленных от фронта горения. Выражение (11) имеет более сложный вид, чем полученное в [2], так как расход воздуха, нагнетаемого в скважину, не постоянен, а изменяется по линейному закону с удалением фронта горения от оси скважины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аликишибекова Т. М., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1960, № 2.
2. Багиров М. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук, 1966, № 6.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ФМ, 1962.

М. А. Багиров, Б. П. Николаев, В. П. Малин

Һәрәкәт едән јанма мәркәзи васитәсилә нефт лајында
јарадылан температур пајланмасынын һесапланмасы

ХҮЛАСӘ

Дахилиндә һәрәкәт едән јанма мәркәзи јарадылан нефт лајында кедән просесин ән вачиб шәртләриндән бири лај дахилиндәки јанма мәркәзинин дајаныглы һәрәкәтини тәмин етмәкдир. Мәгаләдә кәстәрилмишдир ки, јанма мәркәзини әввәлчә нәзәрдә тутулмуш мәсәфә-јә гәдәр дајаныглы һәрәкәт етдирмәк үчүн гујуја верилән һаванын мигдарыны һәмин мәсәфәјә кәрә хәтти ганунла артырмаг лазымдыр. Бу һалда јанма мәркәзинин лај дахилиндә сабит сүр'әтлә һәрәкәтини тәмин етмәк олар. Бу мәгсәдлә дахилиндә сонлу һүндүрлүјә малик сабит сүр'әтли јанма мәркәзи олан вә ичәрисинә хәтти ганун үзрә һава верилән лајда температур пајланмасыны тапмаг үчүн һесабат дүстуру алынмышдыр.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. МУСЛИМОВ

ВЕРОЯТНОСТЬ ОПАСНЫХ ГРОВОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ НА НЕЙТРАЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ В СЕТИ 110 кВ

Пришедшая на подстанцию волна грозового перенапряжения претерпевает преломление и отражение, при этом результирующее напряжение, воздействуя на трансформатор, приводит к еще большему повышению напряжения на его разземленной нейтрали. По ГОСТу 1516—60 для трансформаторов 110 кВ импульсное испытательное напряжение для нейтрали с заниженным классом изоляции составляет 180 кВ, с полным классом—400 кВ. Таким образом, вероятность появления на нейтрали трансформаторов 110 кВ опасных перенапряжений

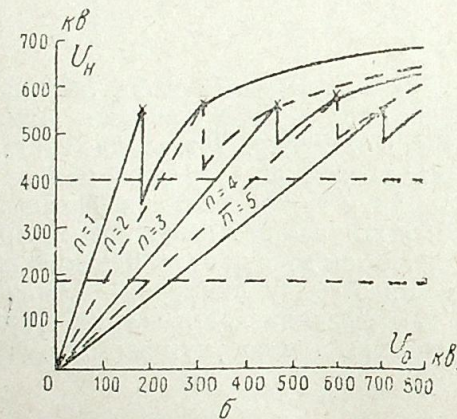
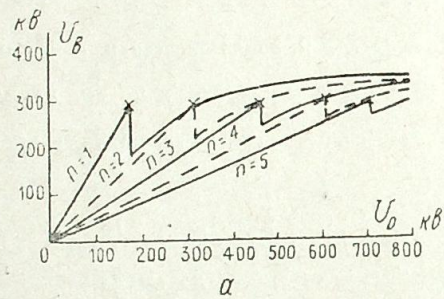


Рис. 1

ло отличается от кратности перенапряжений при воздействии стандартной волны, поэтому необходимые исследования можно проводить для

волны стандартной формы. При таких расчетах полагают, что затухание волны вследствие импульсной короны и сопротивления земли можно не учитывать [3].

На рис. 1 представлена полученная на физической модели зависимость максимальных значений напряжения на ошиновке подстанции (а) и на нейтрали (б) для трансформатора ТДТНГ-40500/110 от величины падающей стандартной волны по трем проводам ЛЭП при различных числах отходящих линий (n). Момент срабатывания разрядника отмечен звездочкой (*). Как следует из этих результатов для тупиковой подстанции, при приходе с ЛЭП волны амплитудой 800 кВ на линиях напряжение на нейтрали повышается до 680 кВ, а при пяти отходящих этом импульсное напряжение изоляции достигает 550 кВ, превышая и при числе отходящих линий имеется вероятность прихода с ЛЭП волн, опасных для изоляции нейтрали трансформаторов 110 кВ. Рассмотрим различные случаи: прямой удар молнии в опору, в провод и в трос, а также удар молнии вблизи ЛЭП.

Прямой удар молнии в опору. В этом случае расчет проводится в соответствии с [4] для ЛЭП на опорах крымского типа с одним тросом ($h_{оп} = 24,8$ м). Кривые параметров молнии, приводящих к однофазному перекрытию гирлянды верхнего провода, лежат выше кривых параметров, приводящих к перекрытию гирлянды одного из нижних проводов, вследствие меньшей связи между этими проводами и тросами. Поэтому при прямом ударе молнии в опору сначала перекрывается гирлянда одной фазы, при этом к сопротивлению системы опора — трос параллельно подключается одна фаза ЛЭП (рис. 2), благодаря чему амплитуда напряжения на опоре снижается, так как часть зарядов отсасывается с опоры на провод.

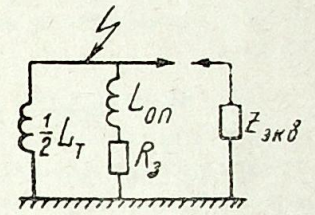


Рис. 2

Напряжение на опоре

$$U_{оп} = \frac{z_{экв}}{z_1 + z_{экв}} u_{раз} = \kappa(t_{ф}) u_{раз}, \quad (1)$$

где

$$z_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{t_{ф}} L_{оп} + R_з \right) \frac{1}{2} \frac{\pi}{t_{ф}} L_{тр}}{\frac{\pi}{t_{ф}} \left(L_{оп} + \frac{1}{2} L_{тр} \right) + R_з}$$

Здесь $L_{оп}$ —индуктивность опоры до уровня подвеса провода;

$L_{тр}$ —индуктивность троса до соседней опоры;

$R_з$ —сопротивление заземления опоры;

$t_{ф}$ —длина фронта волны тока молнии;

$$z_{экв} = \frac{z_{пр}}{2};$$

$z_{пр}$ —волновое сопротивление провода с учетом троса;

$u_{раз}$ —разрядное напряжение гирлянды.

С увеличением длины фронта тока молнии $\kappa(t_{ф})$ увеличивается, приближаясь к единице, при этом минимальное значение амплитуды волны в ЛЭП мало отличается от $u_{раз}$. При ударе молнии, приводящем к перекрытию изоляции всех трех фаз ЛЭП, напряжение на опоре определяется также выражением (1), при этом $z_{экв}$ представляет эквивалентное волновое сопротивление всех трех фаз.

На рис. 3 представлена кривая параметров молнии, приводящих к однофазным и трехфазным перекрытиям верхнего и нижнего проводов, при различных значениях сопротивления заземления. Несмотря на то, что с увеличением числа отходящих от подстанций линий опасные величины волн, приходящих с ЛЭП, смещаются в сторону больших амплитуд и крутизны, значения их все же достаточны для перекрытия изоляции нейтрали и при большом числе отходящих линий.

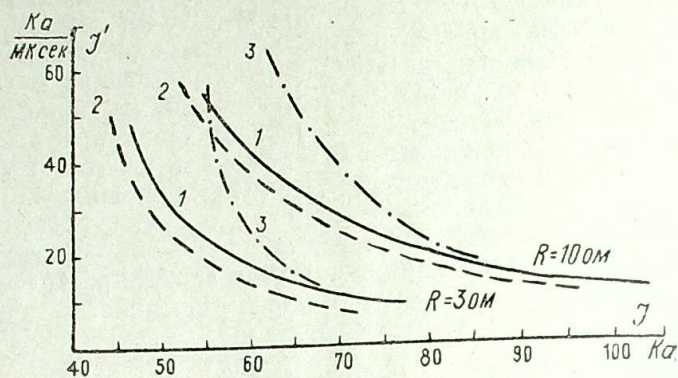


Рис. 3

Параметры тока молнии, приводящие к перекрытию гирлянды ЛЭП: 1, 2 — к однофазному; 3 — к трехфазному.

Ниже приводится расчетное число ударов молнии, являющихся опасными для изоляции нейтрали рассматриваемого выше трансформатора, при 30 грозовых часах в году на 100 км длины линии.

Приход волны по одному проводу

$$\gamma = 0,61 \text{ ударов/год при } R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$\gamma = 0,27 \text{ ударов/год при } R_3 = 3 \text{ Ом}.$$

Приход волн по трем проводам

$$\gamma = 0,48 \text{ ударов/год при } R_3 = 10 \text{ Ом};$$

$$\gamma = 0,24 \text{ ударов/год при } R_3 = 3 \text{ Ом}.$$

Как известно, напряжение на проводе при ударе молнии в провод определяется выражением

$$V_{пр} = \frac{z(I)}{z(I) + \frac{z_{пр}}{2}} \cdot \frac{z_{пр}}{2} I, \quad (2)$$

где I — ток в канале молнии;

$z(I)$ — волновое сопротивление канала молнии [5].

Последнее выражение справедливо до момента прихода отраженных волн от места перекрытия гирлянды у ближайшей опоры. После перекрытия гирлянды для косоугольной волны тока молнии с крутизной a напряжение

$$V_{пр} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{2} L_{пр} + L_{оп} + R_3 t_{ф} \right). \quad (3)$$

Как известно, приход волны по ЛЭП, обусловленный прорывом молнии сквозь тросовую защиту, вследствие малой вероятности его составляет доли процента. Расчет показывает, что при тупиковом режиме работы подстанции удельное число ударов, опасных для заниженного класса изоляции нейтрали трансформатора, составляет 0,023 ударов/год, для полного класса — 0,0006 ударов/год. При отсутствии

тросовой защиты удельное число ударов в год, соответственно, 1,92 и 0,05.

Индуктированные перенапряжения возникают при ударе молнии вблизи линии в землю и при разрядах в трос в середине пролета. Появляются они на всех фазах ЛЭП приблизительно с одинаковой амплитудой и поэтому для изоляции нейтрали являются наиболее опасными.

При ударе молнии в трос в середине пролета потенциал провода под местом удара может достигать значительных величин. Однако блуждающая волна, распространяясь по проводам, рассеивается в нескольких пролетах [6], поэтому эти перенапряжения в расчетах можно не учитывать.

Число индуктированных напряжений с амплитудой V_u на проводах, обусловленное разрядами молнии вблизи ЛЭП в землю, для различного числа линий, присоединенных к шинам подстанции [7], будет

$$N = 2l \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot n \cdot \frac{783 h_{пр}}{V_u} (1 - \kappa) \cdot l, \quad \frac{V_u}{261(1 - \kappa)}$$

где l — длина отходящих линий;

m_1 — число грозовых часов в год;

m_2 — среднее число разрядов на 1 км² земной поверхности;

n — число отходящих линий от подстанции;

$h_{пр}$ — средняя высота подвеса провода;

κ — коэффициент связи между проводами и тросом.

В таблице даны расчетные удельные числа опасных индуктированных перенапряжений для рассматриваемого случая, в зависимости от числа отходящих линий.

Число отходящих линий		1	2	3	4	5
Число индукт. напряж. при 30 гроз. час на 100 км длины линии, являющ. опасным	Для полного кл. изоляции нейтрали	9,1	6,85	5,25	3,15	2,03
	для заниж. кл. изоляции нейтрали	25,4	31,5	23,4	18,6	11,8

При отсутствии тросовой защиты число опасных ударов для изоляции нейтрали становится еще больше. Если удар молнии не приводит к замыканию фазы ЛЭП на землю, тогда перекрытие изоляции нейтрали не сопровождается токами рабочего напряжения, однако срез волны при этом будет представлять опасность для изоляции трансформатора вблизи нейтрали, создавая значительное межвитковое перенапряжение и большое число перекрытий изоляции нейтрали в значительной мере повысит вероятность повреждения трансформатора.

Выводы

1. Амплитуды напряжений волн, приходящих с ЛЭП и представляющих опасность для изоляции нейтрали разземленного трансформатора в сети 110 кВ, могут быть ориентировочно определены из известной кратности перенапряжения при воздействии стандартной волны на трансформатор и по кривой $V_n = f(n, V_{н.м})$.
2. В отличие от существующих мнений [3] вероятность появления на подстанции волн, опасных для изоляции нейтрали как заниженного,

так и полного класса изоляции трансформаторов в сети 110 кВ, имеет место и при большом числе отходящих от подстанции линий.

3. Как показывают расчеты, а также опыты эксплуатации сетей с разземленными трансформаторами [1, 8], число описанных перенапряжений для заниженного класса изоляции нейтрали может достигать нескольких десятков ударов в год.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вилгейм Р., Устерс М. Заземление нейтрали в высоковольтных системах. Госэнергоиздат, 1959.
2. Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук“, 1966, № 1.
3. Коген-Далин В. В., Соколова М. В. Тр. МЭИ, вып. XIV, 1965.
4. Корсунцев А. В., Кузнецова Л. Е. „Изв. НИИПТ“, 1963, № 10.
5. Горин Б. Н. Процессы формирования тока длинной искры и молнии. Канд. дисс. 1966.
6. Бьюлей А. В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. ОНТИ 1938.
7. Разевиг Д. В. Атмосферные перенапряжения на линиях электропередачи. Госэнергоиздат, 1959.
8. Перенапряжения и высоковольтная изоляция в электрических системах. Энергетика за рубежом Госэнергоиздат, 1959.

Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов

110 кВ шәбәкәләрдә трансформаторларын нејтралында тәһлүкәли илдырым ифрат кәркинликләринин еһтималы

ХҮЛАСӘ

ЕВХ илә јарымстансијаја илдырым ифрат кәркинлик далғасы кәлдә, трансформаторларын нејтралында кәркинлик нејтралын импульсына кәркинлијиндән чох олан гијмәтә гәдәр артыр.

Мәгаләдә тәјјин едилмишдир ки, хәттин 100 км узунлуғунда, 30 илдырым сааты әрзиндә белә тәһлүкәли кәркинлик 10 дәфәдән дө чох јарана биләр.

Апарылан тәдгигатлар көстәрмишдир ки, јарымстансијанын шининә бир нечә ЕВХ бирләшдирилмиш оларса белә, ЕВХ илә, нејтралын изолясијасы үчүн тәһлүкәли олан ифрат кәркинликләрин кәлмәси еһтималы вардыр.

Ә. М. МУСАЕВ, Т. И. НАСИРОВА

СИСТЕМА С ОЖИДАНИЕМ В СЛУЧАЕ ВОЗМОЖНОСТИ ВЫХОДА ПРИБОРА ИЗ СТРОЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Известно, что телефонная станция может одновременно обеспечивать разговоры ограниченного числа абонентов. Если число заявок на обслуживание превышает число линий связи, к которым одновременно могут вестись телефонные разговоры, то каждый очередной абонент, который обратится на станцию в этот момент получает отказ. В часы „пик“ в телефонной трубке слышатся частые гудки уже после набора первой цифры. Это означает, что станция полностью загружена, хотя тот абонент, с которым можно связаться, в этот момент свободен. Специалистов, разрабатывающих и эксплуатирующих автоматические телефонные станции, интересует, какова вероятность того, что очередной абонент получит отказ и какова степень загрузки всех линий. В данной работе решается одна задача теории массового обслуживания, результаты которой могут найти разнообразные применения в отраслях народного хозяйства.

Постановка задачи. На один прибор поступает два независимых простейших потока с параметрами λ_1 и λ_2 . Прибор может выйти из строя во время простоя. Время выхода прибора из строя и время восстановления его являются случайными величинами, которые распределены по показательному закону, соответственно:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t} \text{ и } \Phi(t) = 1 - e^{-\nu t}, \text{ где } t \geq 0.$$

Если требования застают прибор свободным, то он немедленно приступает к обслуживанию. Если требование I типа застаёт прибор либо занятым обслуживанием, либо на восстановлении, то оно становится в очередь. Если требование II типа застаёт прибор не свободным, то оно теряется. Законы распределения времени обслуживания I и II типа—случайные величины, распределенные по показательному закону, соответственно:

$$F^{(1)}(t) = 1 - e^{-\beta_1 t} \text{ и } F^{(II)}(t) = 1 - e^{-\beta_2 t}, \text{ где } t \geq 0.$$

Требование I типа после обслуживания с вероятностью p возвращается снова в прибор для обслуживания, а с вероятностью $1 - p$ покидает систему. Требуется найти вероятности состояний системы и закон распределения времени ожидания.

Уравнения и производящая функция стационарных состояний системы

Рассмотрим случайный процесс

$$X(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t); t \geq 0\},$$

где функция $x_1(t)$ означает число требований I типа в системе в момент t ; $x_2(t)$ означает число требований II типа в системе в момент t , которая принимает значение 0, если в системе нет требования этого типа и 1, если оно имеется. $x_3(t)$ означает состояние прибора в момент t и принимает значение 0, если прибор находится на ремонте и 1, если он исправен. Поэтому процесс $X(t)$ в момент t примет одно из трех значений:

$$\{x_1(t), 0, 0\}, \{x_1(t), 1, 1\} \text{ и } \{x_1(t), 0, 1\}.$$

Очевидно, что процесс $X(t)$ является марковским. Пусть $p_{k0}(t)$ есть вероятность того, что в момент t в системе имеется k требований I типа и нуль требований II типа ($k \geq 0$), $r_{k1}(t)$ — вероятность того, что в момент t в системе имеется k требований I типа и одно требование II типа ($k \geq 0$), $a_{k1}(t)$ — вероятность того, что в момент t в системе имеется k требований I типа и прибор находится на восстановлении ($k \geq 0$).

Положим

$$P(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{k0}(t) z^k, R(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{k1}(t) z^k, A(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1}(t) z^k.$$

Легко составить системы дифференциальных уравнений для вероятностей p_{k0} , r_{k1} и a_{k1} и матричным методом Т. А. Сарымсакова, как в [1], можно доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{k0}(t) = p_{k0}, \lim_{t \rightarrow \infty} r_{k1}(t) = r_{k1}, \lim_{t \rightarrow \infty} a_{k1}(t) = a_{k1}, \text{ где } k \geq 0.$$

Окончательно получим выражения для производящих функций:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t, z) = P(z) = \frac{[(q\beta_1 - \lambda_2 - \mu)z - q\beta_1]p_{00} + \beta_2 z R(z) + \nu z A(z)}{-\lambda_1 z^2 + (\lambda_1 + q\beta_1)z - q\beta_1};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t, z) = R(z) = \frac{\lambda_2 p_{00}}{\lambda_1 + \beta_2 - \lambda + z};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t, z) = A(z) = \frac{\mu p_{00}}{\lambda_1 + \nu - \lambda_1 z}.$$

Из уравнения расхода находим, что

$$p_{00} = \frac{1 - \frac{\lambda_1}{q\beta_1}}{1 + \frac{\lambda_2}{\beta_2} + \frac{\mu}{\nu}}.$$

Закон распределения времени ожидания

Найдем характеристическую функцию распределения времени ожидания требования. Через γ обозначим время ожидания требования. Пусть $P=0$

Очевидно, что

$$\gamma = \begin{cases} \tau_1 + T, & \text{если в обслуживании находится требование I типа;} \\ \tau_{II} + T, & \text{если в обслуживании находится требование II типа;} \\ \tau + T, & \text{если прибор находится на обслуживании;} \\ 0, & \text{если система свободна.} \end{cases}$$

τ_1 — остаточная длительность обслуживания требования I типа, которое еще обслуживается в момент появления требования; τ_{II} — остаточная длительность обслуживания требования II типа, которое еще обслуживается в момент появления требования; τ — остаточная длительность восстановления прибора, который еще восстанавливается в момент появления требования. T — суммарная длительность обслуживания тех ожидающих, которые требование застало при своем появлении.

Очевидно, что

$$\varphi(\xi) = M e^{i\tau\xi} = p_{00} + \sum_{k=0}^{\infty} M_k e^{i\tau\xi} [P(k) (M_k e^{i\tau_1\xi} + M_k e^{i\tau_{II}\xi} + M_k e^{i\tau\xi})] =$$

$$= p_{00} + \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(\xi)]^k P(k) [M_k e^{i\tau_1\xi} + M_k e^{i\tau_{II}\xi} + M_k e^{i\tau\xi}],$$

где $\psi(\xi)$ — характеристическая функция времени обслуживания требования I типа.

Пусть $Q_k^I(x)$ будет законом распределения величины τ_1 (вероятность неравенства $\tau_1 > x$, где $i = I, II$) при k ожидающих. Тогда, как в [2],

$$M_k e^{i\tau_1\xi} = - \int_0^{\infty} e^{i\xi x} dQ_k^I(x), P(k) M_k e^{i\tau_1\xi} = - \int_0^{\infty} e^{i\xi x} P(x) dQ_k^I(x),$$

$$M_k e^{i\tau_{II}\xi} = \int_0^{\infty} e^{i\xi x} dQ_k^{II}(x), P(k) M_k e^{i\tau_{II}\xi} = - \int_0^{\infty} e^{i\xi x} P(x) x dQ_k^{II}(x),$$

$$M_k e^{i\tau\xi} = - \int_0^{\infty} e^{i\xi x} dQ_k(x), P(k) M_k e^{i\tau\xi} = - \int_0^{\infty} e^{i\xi x} P(x) dQ_k(x).$$

Очевидно, что

$$P(k) [Q_k^I(x) - Q_k^I(x+dx)] = \lambda_1 dx \int_x^{\infty} U_k^I(t-x) dF^I(t) + o(dx),$$

$$\text{где } U_k^I(t) = \sum_{r=0}^k n_r v_{k-r}(t).$$

n_r означает вероятность того, что в начале произвольно выбранного обслуживания имеется r ожидающих, $v_r(t)$ есть вероятность того, что за время t в системы поступит r требований I типа.

Далее

$$P(k) [Q_k^{II}(x) - Q_k^{II}(x+dx)] = \lambda_2 \int_x^{\infty} U_k^{II}(t-x) dF^{II}(t) + o(dx),$$

где

$$U_k^{II}(t) = n_0 \tau_k(t).$$

Наконец,

$$P(k) [Q_k(x) - Q_k(x+dx)] =$$

$$= \mu dx \int_x^{\infty} U_k(t-x) dF(t) + o(dx),$$

где

$$U_k(t) = n_0 \tau_k(t).$$

Упростим выражение для $\varphi(\xi)$. Очевидно, что

$$I_1 = \lambda_1 \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(\xi)]^k \int_0^{\infty} e^{i\xi x} dx \int_x^{\infty} U_k^I(t-x) dF^I(t) + o(dx) =$$

$$= \frac{\lambda_1 \chi(\xi)}{i[\xi - \eta(\xi)]} [\psi(\xi) - \psi[\eta(\xi)]] + o(dx),$$

где

$$\chi(\xi) = \sum_{r=0}^{\infty} \Pi_r [\psi(\xi)]^r \text{ и } \eta(\xi) = \frac{\lambda_1}{i} [\psi(\xi) - 1].$$

Далее

$$I_2 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\psi(\xi)]^{\kappa} P(\kappa) M_{\kappa} e^{i\eta\xi} = \frac{\lambda_2 \beta_2 \Pi_0}{\beta_2 - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi(\xi)] + \beta_2};$$

$$I_3 = \sum_{\kappa=0}^{\infty} [\psi(\xi)]^{\kappa} P(\kappa) M_{\kappa} e^{i\eta\xi} = \frac{\mu \nu \Pi_0}{\nu - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi(\xi)] + \nu}.$$

Легко находим, что

$$\chi(\xi) = p_{00} \left[1 - \frac{1}{\psi(\xi)} \right] + \frac{1}{\psi(\xi)} P[\psi(\xi)] + R[\psi(\xi)] + A[\psi(\xi)].$$

Таким образом

$$\varphi(\xi) = p_{00} + \frac{\lambda_1 \chi(\xi)}{i[\xi - \eta(\xi)]} \{ \psi(\xi) - \psi[\eta(\xi)] \} + \\ + \frac{\lambda_2 \beta_2 \Pi_0}{\beta_2 - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi(\xi)] + \beta_2} + \frac{\nu \mu \Pi_0}{\nu - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi(\xi)] + \nu}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $P \neq 0$. Тогда законом распределения окончательного времени обслуживания требования I типа будет

$$F_*(t) = q \sum_{\kappa=1}^{\infty} P^{\kappa-1} F_{\kappa}^{(1)}(t),$$

где $F_{\kappa}^{(1)}(t)$ — κ -я свертка распределения $F^{(1)}(t)$. Плотность распределения $F_*(t)$ и $F_{\kappa}^{(1)}(t)$ обозначим, соответственно, через $f_*(t)$ и $f_{\kappa}^{(1)}(t)$.

Из предыдущего равенства получим $f_*(t) = q \sum_{\kappa=1}^{\infty} P^{\kappa-1} f_{\kappa}^{(1)}(t)$.

В случае $F^{(1)}(t) = 1 - e^{-\beta_1 t}$ получим

$$f_*(t) = q \sum_{\kappa=1}^{\infty} P^{\kappa-1} \frac{\beta_1 (\beta_1 t)^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!} e^{-\beta_1 t} = q \beta_1 e^{-q \beta_1 t}.$$

$$\text{Поэтому } \psi_*(\xi) = \int_0^{\infty} e^{i\xi t} f_*(t) dt = q \beta_1 \int_0^{\infty} e^{i\xi t - q \beta_1 t} dt = \frac{q \beta_1}{q \beta_1 - i\xi}.$$

Таким образом, при $P \neq 0$ получим следующее выражение для характеристической функции времени ожидания:

$$\varphi_*(\xi) = p_{00} + \frac{\lambda_1 \chi_*(\xi)}{i[\xi - \eta_*(\xi)]} \{ \psi_*(\xi) - \psi_*[\eta_*(\xi)] \} + \\ + \frac{\lambda_2 \beta_2 \eta_0}{\beta_2 - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi_*(\xi)] + \beta_2} + \frac{\mu \nu \Pi_0}{\nu - i\xi} \cdot \frac{1}{\lambda_1 [1 - \psi_*(\xi)] + \nu}$$

$$\text{где } \chi_*(\xi) = p_{00} \left[1 - \frac{1}{\psi_*(\xi)} \right] + \frac{1}{\psi_*(\xi)} P[\psi_*(\xi)] + R[\psi_*(\xi)] + A[\psi_*(\xi)].$$

Пример. Пусть $\lambda_2 = P = \mu = 0$ и $\beta_2 = \nu = \infty$.

$$\text{Тогда } p_{00} = 1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1}, \quad \psi_*(\xi) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - i\xi}, \quad \xi - \eta_*(\xi) = \frac{i\xi \beta_1 - i\xi \lambda_1 + \xi^2}{i(\beta_1 - i\xi)},$$

$$\psi_*(\xi) - \psi_*[\eta_*(\xi)] = i\beta_1 \frac{i\xi \beta_1 - i\xi \lambda_1 + \xi^2}{i(\beta_1 - i\xi)(\beta_1^2 - i\xi \beta_1 - i\xi \lambda_1)} = i\beta_1 \frac{\xi - \eta_*(\xi)}{\beta_1^2 - i\beta_1 \xi - i\xi \lambda_1},$$

$$\chi_*(\xi) = \frac{p_{00}}{\beta_1} \cdot \frac{i\xi \lambda_1 - i\xi \beta_1 + \beta_1^2}{-\lambda + \beta - i\xi}.$$

Подставив в выражение $\varphi_*(\xi)$ эти значения, получим:

$$\varphi_*(\xi) = p_{00} + \frac{\lambda_1 p_{00}}{\beta_1 - \lambda_1 - i\xi} = 1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1} + \frac{\lambda_1}{\beta_1} \cdot \frac{1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1}}{1 - \frac{\lambda_1}{\beta_1} - \frac{i\xi}{\beta_1}}.$$

$$\text{Обозначим } \rho = \frac{\lambda_1}{\beta_1}, \quad \alpha = \frac{1}{\beta_1},$$

$$\varphi_*(\xi) = 1 - \rho + \rho \frac{1 - \rho}{1 - \rho - \frac{i\xi}{\beta_1}} = 1 - \rho + \rho \frac{\frac{1 - \rho}{\alpha}}{\frac{1 - \rho}{\alpha} - i\xi}.$$

Как легко показать,

$$\frac{\frac{1 - \rho}{\alpha}}{\frac{1 - \rho}{\alpha} - i\xi} \text{ есть характеристическая функция функции } 1 - e^{-\frac{1 - \rho}{\alpha} t}.$$

$$\text{Но } 1 - \rho = (1 - \rho) \int_0^{\infty} e^{i\xi t} dE(t), \quad \text{где } E(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases}$$

$$\text{откуда } P\{\mu < t\} = (1 - \alpha) E(t) + \rho \left(1 - e^{-\frac{1 - \rho}{\alpha} t} \right)$$

или же

$$P\{\mu \geq t\} = (1 - \alpha) E(t) + \rho e^{-\frac{1 - \rho}{\alpha} t}.$$

Отсюда

$$P\{\mu > t\} = \rho e^{-(1 - \rho)t}$$

является законом распределения времени ожидания для классической задачи.

В заключение приносим благодарность акад. АН УССР Б. В. Гнеденко за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедева Э. Н. К вопросу о решении одной системы бесконечных линейных уравнений. Ташкентский госуниверситет им. В. И. Ленина, вып. 208, 1962.
2. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. 1963.
3. Гнеденко Б. В. и Коваленко И. Н. Лекции по теории массового обслуживания, 1963.
4. Насирова Т. И. Нестационарное решение в случае возможного выхода прибора из строя. Вопросы вычислительной математики и вычислительной техники, Изд. АН Азерб. ССР, 1965.
5. Насирова Т. И. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1963, № 6.
6. Тагиев А. Г. За технический прогресс, 1966, № 6.
7. Мусаев Э. М. и Тагиев А. Г. Кутлеви хилмет незерийесинин бе'зи меселелеринин хелли хаггында. Тезисы докладов сессии, посвященной XX АН Азерб. ССР.

Р. М. ИБРАГИМБЕКОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ СТАТИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ К ЗАДАЧАМ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Задача управления многими объектами нефтехимической технологии может быть интерпретирована следующим образом: дан объект управления, имеющий r входов и k выходов, к каждому из которых отнесена одна из величин $q_1, \dots, q_k$, представляющих собой функции полезности и выражающих зависимости некоторого дохода, получаемого с данного выхода от количества и качества продукции, поданного в объект, γ_j обозначает количество продукции, полученной на j -ом выходе, то через $M[q_j(\gamma_j, z_j)]$ обозначен соответствующий доход от этого выхода, причем z_j есть качество продукции, M —символ математического ожидания.

Сделаны следующие предположения:

а) доходы, полученные от разных выходов, могут быть измерены общей единицей;

б) доход, полученный от любого данного выхода не зависит от того, какие количества сырья выделены для других выходов;

в) доход объекта может быть определен как сумма доходов, полученных от отдельных выходов.

Выходные величины доступны для измерения в отдельные моменты времени, разделенные большими промежутками. Это может быть вызвано либо особенностями технологии, либо отсутствием методов непрерывного автоматического контроля. В частности, о качестве z_j готового продукта часто судят на основании данных лабораторных экспресс-анализов, или же имеется аппаратура автоматического периодического определения характеристики выходного продукта. Все величины в системе, представленной на рис. 1, рассматриваются в дискретные целочисленные моменты времени $1, 2, \dots, n$, с интервалом Δt , причем n зафиксировано и равно $\tau/\Delta t$, где τ —интервал времени, разделяющий моменты измерения выходных величин. Тогда предположения, касающиеся независимости выходов и аддитивности полезностей, приводят к выражению

$$Q_s(\gamma_{1s} \dots \gamma_{ks}, z_{1s} \dots z_{ks}) = M \left[\sum_{j=1}^k q_{js}(\gamma_{js}, z_{js}) \right] \quad (1)$$

для общей полезности или дохода объекта. Учитывая, что в объекте может быть использовано лишь ограниченное количество сырья и

обозначая общее его количество в объекте через γ_{os} , при любых $z_{1s} \dots z_{ks}$ приходим к условию

$$\gamma_{1s} + \gamma_{2s} + \dots + \gamma_{ks} = \gamma_{os}, \quad \gamma_{is} \geq 0. \quad (2)$$

Введем обозначения: $\bar{u}_s, \bar{x}_s, \bar{\gamma}_s, \bar{z}_s$ —соответственно, векторы управляющих воздействий, входных величин, количества продукции на выходах объекта, качества продукции на выходах; $\bar{z}_s = \bar{z}(\rho, \mu)$, $\bar{z}_{1s} = \bar{z}_1(\rho_1, \mu')$ —векторы возмущений, приложенных к объекту; ρ, μ' —случайные величины; $\bar{\gamma}_s, \bar{z}_s$ —соответственно, измеренные с ошибкой значения векторов γ_s, z_s . Пространственные векторы $\bar{u}_s = (u_{1s} \dots u_{rs})$ и т. д. следует отличать от временных, снабженных сверху стрелками: $u_i = (u_{i0}, u_{is} \dots u_{in})$ и т. д. и пространственно-временных матриц:

$$\bar{u}_{rs} = \begin{pmatrix} u_{10}, u_{11} \dots u_{1s} \\ u_{20}, u_{21} \dots u_{2s} \\ \vdots \\ u_{r0}, u_{r1} \dots u_{rs} \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Рассматривается объект с чистым запаздыванием. Многие инерционные объекты также могут быть рассмотрены как объекты с эквивалентным чистым запаздыванием). Операторы объекта известны и имеют вид:

$$\gamma_{js+\alpha} = \gamma_{js+\alpha}(\rho, \bar{x}_s, \mu_j); z_{js+\alpha} = z_{js+\alpha}(\rho, \bar{x}_s, \mu_j),$$

где α —запаздывание, равное целому числу интервалов времени меньшему n . Буквами $U, \bar{U}$ обозначено управляющее устройство, которое получает сведения о количестве и качестве выходов объекта по векторному каналу связи $\bar{G}$. По этому же каналу на $U, \bar{U}$ поступает информация о количестве подаваемого в объект сырья γ_{os} . Обозначение $\bar{\gamma}_{os}$ представляет собой дискретный случайный процесс, $\gamma_{os} = \gamma_{os}(\rho^k)$ где k —случайный вектор. Каналы связи $\bar{G}$ и $\bar{H}$ не имеют памяти. Комбинация сигналов с шумами известна. Пусть

$$x_{is} = u_{is} + h_{is}; \gamma'_{jn} = \gamma_{js} + g_{js}; z_{js} + g_{js} = z'_{js}; z'_{os} = \gamma_{os} = g_{k+1,s}.$$

Априорные плотности вероятности всех случайных сигналов заданы. Помехи $\bar{h}_s$ и $\bar{g}_s$ взаимно независимы и их значения в соседние моменты времени также являются независимыми случайными величинами.

Требуется найти случайную стратегию $U, \bar{U}$, т. е. плотность вероятности сигналов управления $u_{1s} \dots u_{rs}$ такую, чтобы средний доход объекта равный сумме удельных доходов (доходов на s -ом шаге) объекта:

$$Q = \sum_{s=0}^n Q_{s+\alpha}, \quad (3)$$

был максимальным. Здесь $Q_{s+\alpha}$ определяется выражением

$$Q_{s+\alpha}(u_{1s} \dots u_{rs}) = M \left\{ \sum_{j=1}^k q_{js+\alpha}[\gamma_{js+\alpha}(s, \bar{x}_s, \mu_j), z_{js+\alpha}(s, \bar{x}_s, \mu_j)] \right\}. \quad (4)$$

Очевидно, что максимальное значение критерия (3) будет зависеть от общего количества подаваемого в объект сырья, числа тактов, управления n , числа выходов объекта k , и в этом смысле решаемая задача является задачей многопараметрического динамического программирования. Но, с другой стороны, неполнота информации об

объекте, обусловленная случайными возмущениями $\bar{z}_s$ и $\bar{z}_{1s}$, случайным характером величины γ_{os} и помехами в каналах связи, означает зависимость дохода объекта от способа учета и темпа изучения случайных воздействий. В связи с этим решение поставленной задачи удобно свести к двум последовательным более простым:

1. Задаче оптимального распределения сырья γ_{os} по выходам объекта, т. е. задаче

$$\max Q_{s+\alpha} = \max_{\bar{\gamma}_{s+\alpha}, \bar{z}_{s+\alpha}} M \left[\sum_{j=1}^k q_{js+\alpha} (\gamma_{js+\alpha}, z_{js+\alpha}) \right] \quad (5)$$

при условии (2);

2. Задаче определения стратегии управления $\bar{u}_s$, минимизирующий разницу между действительными значениями количества и качества продукции на выходах объекта и оптимальными $\bar{\gamma}_{s+\alpha}^*$, $\bar{z}_{s+\alpha}^*$, найденными из условия задачи (5).

Воспользуемся для решения второй задачи методами теории статистических решений и введем некоторую функцию потерь $W_s(\bar{\gamma}_s^*, \bar{z}_s^*, \bar{\gamma}_s, \bar{z}_s)$, характеризующую близость векторов $\bar{\gamma}_s, \bar{z}_s$ к векторам $\bar{\gamma}_s^*, \bar{z}_s^*$. Тогда задача примет вид

$$\min R = \min_{\bar{u}_s} \sum_{s=0}^n R_{s+\alpha}, \quad (6)$$

где $R_{s+\alpha}$ — удельный риск, равный математическому ожиданию функции потерь $W_{s+\alpha}$; R — общий риск. Так как измерения выходных величин объекта через промежутки времени τ приводят к тому, что

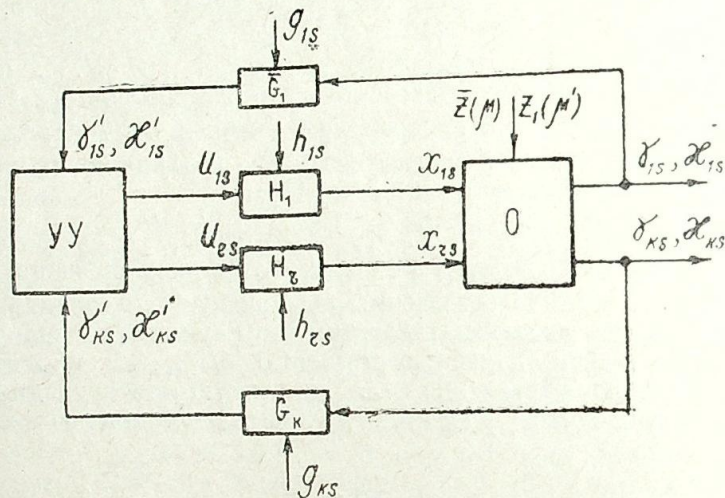


Рис. 1.

система, изображенная на рисунке 1, с 0 до $n-1$ такта находится в разомкнутом состоянии, а на n -ом замкнута, то можно записать общий риск $R = \sum_{s=0}^n R_s$ в виде

$$R = \sum_{s=0}^{n-1} R_{s+\alpha}^{(\text{разомк})} + R_{n+\alpha}^{(\text{замкн})}. \quad (7)$$

Обратим внимание на тот факт, что оптимальная стратегия в разомкнутом состоянии системы представляет собой плотности вероятности

$$p_s(\bar{u}_s | \bar{\gamma}_s^*, \bar{z}_s^*) = \Gamma_s(\bar{u}_s | \bar{\gamma}_s^*, \bar{z}_s^*), \quad (0 \leq s \leq n-1). \quad (8)$$

В замкнутом состоянии системы плотности Γ_s примут вид

$$p_n(\bar{u}_n | \bar{\gamma}_n^*, \bar{z}_n^*) = \Gamma_n(\bar{u}_n | \bar{\gamma}_n^*, \bar{z}_n^*). \quad (9)$$

Функции Γ_s должны удовлетворять ограничению

$$\int \Gamma_s(\bar{u}_s) d\Omega(\bar{u}_s) = 1, \quad (10)$$

кроме того, $\Gamma_s \geq 0$. Следует отметить, что критерий оптимальности типа (7) исключает активную изучающую роль управляющих воздействий; информация поступающая по цепи обратной связи в момент $t = n$, учитывается, но никаких „попыток“ получить дополнительную информацию не делается. Это объясняется тем, что система с критерием (7) в замкнутом состоянии делает лишь один шаг, из-за чего остается неиспользованным наиболее интересный эффект управления в системах с обратной связью — зависимость риска в некоторый момент времени от ставить в таких системах проблему наиболее эффективного излучения объекта.

Предположив, что рассматриваемая система делает l групп шагов по n шагов в каждой, можно несколько изменить критерий (7) и потребовать от У. У. минимизации среднего риска:

$$R = \sum_{p=1}^l \left(\sum_{s=0}^{h-1} R_{s+\alpha} \right)_p + \sum_{p=1}^l R_{n+\alpha}^p,$$

что обеспечит дуальность управления и строгую оптимальность системы. Однако критерий (11) приводит к весьма трудным функциональным уравнениям, аналитическое решение которых даже для одномерного объекта возможно лишь в редких случаях. Последние соображения и приводят к возможности использовать критерий (7) при решении задачи (6).

Для решения первой задачи воспользуемся методом оптимального распределения ресурсов [2] и введем последовательность функций $f_{k,s+\alpha}$, определенных для $k=1, 2, \dots$; $\gamma_{k,s+\alpha} \geq 0$ следующим образом:

$$f_{k,s+\alpha}(\gamma_{0,s+\alpha}, \gamma_{1s+\alpha}, \dots, \gamma_{ks+\alpha}) = \max Q_{s+\alpha}(\gamma_{1s+\alpha}, \dots, \gamma_{ks+\alpha}, z_{1s+\alpha}, \dots, z_{ks+\alpha}),$$

где

$$\gamma_{0s+\alpha} = \gamma_{0s+\alpha}(p+\alpha, \bar{\lambda}); \quad \gamma_{js+\alpha} \geq 0 \quad (1 \leq j \leq k) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^k \gamma_{js+\alpha} = \gamma_{os+\alpha}.$$

Функция $f_{k,s+\alpha}(\gamma_{os+\alpha}, \gamma_{1s+\alpha}, \dots, \gamma_{ks+\alpha})$ выражает доход от оптимального распределения количества сырья $\gamma_{os+\alpha}$ по k выходам объекта, причем качество $z_{js+\alpha}$ продукции на каждом j -ом выходе также оптимальное.

Пусть $\gamma_{ks+\alpha}$ — количество сырья, назначенное в момент $t = p + \alpha$ для k -го выхода. Тогда, исходя из принципа оптимальности [2], каково бы ни было точное значение $\gamma_{k,s+\alpha}$, оставшееся количество сырья $\gamma_{os+\alpha} - \gamma_{ks+\alpha}$ должно быть использовано так, чтобы получить максимальный доход от оставшихся $k-1$ выходов. Так как этот оптимальный доход от распределения количества сырья $\gamma_{os+\alpha} - \gamma_{ks+\alpha}$ по $k-1$ выходам по определению есть $f_{k-1,s+\alpha}(\gamma_{os+\alpha} - \gamma_{ks+\alpha}, \gamma_{1s+\alpha}, \dots, \gamma_{k-1,s+\alpha})$, то назначение $\gamma_{ks+\alpha}$ для k -го выхода приводит к общему доходу

$$M[q_{ks+\alpha}(\gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}) + f_{k-1,s+\alpha}(\gamma_{os+\alpha} - \gamma_{ks+\alpha}, \gamma_{1s+\alpha}, \dots, \gamma_{k-1,s+\alpha})]$$

для объекта с k выходами. Очевидно, что оптимальным будет такой выбор $\gamma_{k,s+\alpha}$ и $z_{k,s+\alpha}$, который максимизирует эту функцию, что при-

водит к функциональному уравнению (для $k=2, 3, \dots; \gamma_{0s+\alpha} \geq 0$)

$$f_{k,s+\alpha} = \max_{\gamma_{ks+\alpha}} \max_{z_{ks+\alpha}} M [q_{ks+\alpha}(\gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}) + f_{k-1,s+\alpha}(\gamma_{0,s+\alpha} - \gamma_{ks+\alpha}, z_{1s+\alpha}, \dots, z_{ks+\alpha})].$$

Так как количество подаваемого в объект сырья является случайным процессом, $\gamma_{0s+\alpha} = \gamma_{0s+\alpha}(s+\alpha, \bar{\lambda})$, то чем точнее информация о векторе $\bar{\lambda}$, тем более точным будет процесс распределения сырья по выходам объекта. Уточнение информации о векторе $\bar{\lambda}$ выражается в том, что на каждом такте управления априорные плотности вероятности $p(\bar{\lambda})$ заменяются апостериорными $p_s(\bar{\lambda})$, которые учитывают информацию, приходящую в У.У. за время $t = 0, 1, \dots, s$.

Запишем окончательное выражение для $f_{k,s+\alpha}$:

$$\begin{aligned} f_{k,s+\alpha}(\gamma_{0s+\alpha}, z_{1s+\alpha}, \dots, z_{ks+\alpha}) &= \\ &= \max_{\gamma_{ks+\alpha}} \max_{z_{ks+\alpha}} \int_{\Omega(\bar{\lambda}, \gamma_{0s+\alpha}, \gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha})} (q_{ks+\alpha} + f_{k-1,s+\alpha}) p(\gamma_{ks+\alpha} | \gamma_{0s+\alpha}) \times \\ &\times p(z_{ks+\alpha}) \cdot p(\bar{\lambda}) \prod_{m=0}^s p(\gamma_{0m+\alpha} | m, \bar{\lambda}) d\Omega(\bar{\lambda}, \gamma_{0s+\alpha}, \gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}) = \\ &= \max_{\gamma_{ks+\alpha}} \max_{z_{ks+\alpha}} \int_{\Omega(\bar{\lambda}, \gamma_{0s+\alpha}, \gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha})} c_k(\gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}) p(\gamma_{ks+\alpha} | \gamma_{0s+\alpha}) p(z_{ks+\alpha}) d\Omega(\gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$c_k(\gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha}) = \int_{\Omega(\bar{\lambda}, \gamma_{0s+\alpha}, \gamma_{ks+\alpha}, z_{ks+\alpha})} (q_{ks+\alpha} + f_{k-1,s+\alpha}) p(\bar{\lambda}) \prod_{m=0}^s p(\gamma_{0m+\alpha} | m, \bar{\lambda}) d\Omega.$$

Можно показать, что оптимальные плотности вероятности $p(z_{ks+\alpha})$ и $p(\gamma_{ks+\alpha} | \gamma_{0s+\alpha})$ являются дельта-функциями [1], а оптимальные $\gamma_{ks+\alpha}$ и $z_{ks+\alpha}$ находятся из условия максимума $\alpha_{ks+\alpha}$ по $\gamma_{ks+\alpha}$ и $z_{ks+\alpha}$. Очевидно, что для $k=1$

$$f_1(\gamma_{0s+\alpha}, z_{1s+\alpha}) = Q_{1,s+\alpha}(\gamma_{0s+\alpha}, z_{1s+\alpha}). \quad (14)$$

Решив задачу определения оптимальных в смысле (5) $\bar{\gamma}_{s+\alpha}$ и $\bar{z}_{s+\alpha}$, приступим к решению задачи минимизации (7). Запишем для этого выражение удельных рисков $R_{s+\alpha}$ и $R_{n+\alpha}$ при фиксированных матрицах $\bar{\gamma}_n$ и $\bar{z}_n$:

$$\begin{aligned} R_{s+\alpha} &= \int_{\Omega(\bar{\gamma}_{s+\alpha}, \bar{z}_{s+\alpha}, \bar{\gamma}_s, \bar{z}_s)} [W_{s+\alpha}(\bar{\gamma}_{s+\alpha}^*, \bar{z}_{s+\alpha}^*, \bar{\gamma}_{s+\alpha}, \bar{z}_{s+\alpha})] p(\bar{\gamma}_{s+\alpha} | \bar{\gamma}_s) \times \\ &\times p(\bar{z}_{s+\alpha} | \bar{z}_s) p(\bar{x}_s | \bar{u}_s) \Gamma_s(\bar{u}_s | \bar{\gamma}_s^*, \bar{z}_s^*) d\Omega, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} R_{n+\alpha} &= \int_{\Omega(\bar{\mu}, \bar{\mu}', \bar{u}_n, \bar{u}_n', \bar{\gamma}_{n+\alpha}, \bar{z}_{n+\alpha}, \bar{\gamma}_n, \bar{z}_n)} [W_{n+\alpha}(\bar{\gamma}_{n+\alpha}^*, \bar{z}_{n+\alpha}^*, \bar{\gamma}_{n+\alpha}, \bar{z}_{n+\alpha})] p(\bar{\gamma}_{n+\alpha} | \bar{\mu}, \bar{u}_n) p(\bar{z}_{n+\alpha} | \bar{\mu}', \bar{u}_n') \times \\ &\times p(\bar{\mu}) p(\bar{\mu}') p(\bar{\gamma}_n | \bar{\mu}) p(\bar{z}_n | \bar{\mu}') \Gamma_n(\bar{u}_n | \bar{\gamma}_n^*, \bar{z}_n^*) d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем вспомогательные функции:

$$\alpha_{s+\alpha}(\bar{u}_s) = \int_{\Omega(\bar{\gamma}_{s+\alpha}, \bar{z}_{s+\alpha}, \bar{\gamma}_s)} [W_{s+\alpha}(\bar{\gamma}_{s+\alpha}^*, \bar{z}_{s+\alpha}^*, \bar{\gamma}_{s+\alpha}, \bar{z}_{s+\alpha})] p(\bar{\gamma}_{s+\alpha} | \bar{x}_s) p(\bar{z}_{s+\alpha} | \bar{x}_s) p(\bar{x}_s | \bar{u}_s) d\Omega \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{n+\alpha}(\bar{u}_n, \bar{\gamma}_n', \bar{z}_n') &= \int [W_{n+\alpha}(\bar{\gamma}_{n+\alpha}^*, \bar{z}_{n+\alpha}^*, \bar{\gamma}_{n+\alpha}, \bar{z}_{n+\alpha})] \times p(\bar{\gamma}_{n+\alpha} | \bar{\mu}, \bar{u}_n) \times \\ &\times p(\bar{z}_{n+\alpha} | \bar{\mu}', \bar{u}_n') p(\bar{\gamma}_n | \bar{\mu}) p(\bar{z}_n | \bar{\mu}') p(\bar{\mu}) p(\bar{\mu}') d\Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (14) и (15) видно, что подбор функции Γ_s при $s=0, 1, \dots, n$ влияет только на одно слагаемое $R_{s+\alpha}$ полного риска. Можно показать как это сделано в [1], что все стратегии Γ_s являются дельта-функциями и оптимальные u_s находятся из условия минимума $\alpha_{s+\alpha}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. Физматгиз, 1961.
2. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. Наука, 1965.

В. Г. ПИРМАМЕДОВ

РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

С проблемой нестационарного движения газа в водонасыщенной пористой среде связаны задачи о создании и эксплуатации подземных гзохранилищ в водоносных пластах, в частности в горизонтальных и пологопадающих, а также эксплуатация газовых месторождений, граничащих с активными краевыми водами. Существенной чертой этих задач, представ яющих фильтрационный аналог термодиффузионных задач типа Стефана, является наличие неизвестной подвижной границы, что создает дополнительные трудности как при доказательстве существования и единственности решения, так и в построении алгоритмов для приближенного решения. Только в весьма частных случаях в аналитически замкнутой форме найдены точные решения задач типа Стефана. Так, например, Стефан рассматривал задачу о распространении тепла в среде, агрегатное состояние которой меняется при определенной температуре с выделением или поглощением скрытой теплоты фазового перехода, в предположении постоянства теплофизических характеристик в обеих фазах при условиях, обеспечивающих автомодельность. Аналогами классического примера Стефана являются примеры, рассмотренные Н. Н. Веригиным [2] и другими авторами. В связи с этим возникла необходимость приближенного решения этих задач.

В настоящей статье рассматривается разностный метод решения одной нестационарной задачи с подвижной границей. Другой подход к решению этих задач рассматривается в [3, 4, 8—10].

1. Пусть через гидродинамически совершенную скважину, расположенную в ограниченном горизонтальном пласте радиуса R_k , первоначально занятой водой, с известным давлением на контуре R_k и в начальный момент времени, с произвольным весовым расходом нагнетается газ.

Пренебрегая вязкостью газа, ввиду ее малости по сравнению с вязкостью воды, для определения давления в пласте и радиуса распространения газового объема получим следующую задачу [3]: найти $P(r, t)$ и $R(t)$, удовлетворяющие уравнению:

$$\chi \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad R(t) < r < R_k, \quad 0 < t < T \quad (1)$$

и условиям

$$P(r, 0) = \psi(r), \quad R(0) \leq r \leq R_k, \quad (2)$$

$$P(R_k, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\pi m \bar{\sigma} h R^2(t) \frac{P(R(t), t) T_n}{P_n T_0} = W_n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$m \sigma \frac{dR}{dt} = - \frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=R(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где χ —коэффициент пьезопроводности,
 κ —проницаемость (средняя по мощности),
 m —пористость пласта,
 μ —вязкость воды,
 $\bar{\sigma}$ —средняя газонасыщенность в объеме $\pi m h R^2(t)$,
 σ —суммарный коэффициент вытеснения, отнесенный ко всей мощности h ,
 $W_n(t)$ —объем газа при нормальных условиях: P_n, T_n ,
 T_0 —температура газа в пласте,
 $T_n = 20^\circ \text{C}$, $P_n = P_{\text{ат}} = 1 \text{ кг/см}^2$.

Предполагается, что выполнены условия сопряжения, и $R(0)$ не совпадает с концами отрезка $[0, R_k]$.

Задача (1)–(5) является также задачей разработки газового месторождения, граничащего с активными краевыми водами. На самом деле, задавая $W_n(t)$ в виде

$$W_n(t) = W_n(0) - Q_n t,$$

где Q_n —дебит газа, отбираемого из месторождения, получаем задачу эксплуатации газового месторождения.

Введем безразмерные величины, положив

$$\frac{r}{R_1} = \bar{r}, \quad \frac{t}{T_1} = \bar{t}, \quad \frac{P(r, t)}{P_k} = \bar{p}(\bar{r}, \bar{t}),$$

где R_1, T_1, P_k

—некоторые размерные величины. Тогда в новых обозначениях, после отбрасывания черточек, задачу (1)–(5) можно записать в следующем виде:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad R(t) < r < l, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$P(r, 0) = \psi(r), \quad R(0) \leq r \leq l, \quad (7)$$

$$P(l, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$P(R(t), t) = \Phi(R(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r=R(t)} = \beta \frac{dR}{dt}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$a^2 = \frac{T_1 \chi}{R_1^2}, \quad \Phi(R(t), t) = \frac{W_n(t) T_0 P_n}{\pi m \bar{\sigma} h P_k R^2(t) T_n},$$

$$\beta = - \frac{\mu m \sigma R_1^2}{\kappa T_1 P_k}.$$

После замены

$$s = \frac{r - R(t)}{l - R(t)}$$

задачу (6)–(10) можно сформулировать так: найти $P(s, t)$ и $R(t)$, удовлетворяющие условиям:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{a^2}{(l - R(t))^2} \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{a^2}{[s(l - R(t)) + R(t)](l - R(t))} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{(1 - s) \dot{R}(t)}{l - R(t)} \frac{\partial P}{\partial s}, \quad (11)$$

$$(0 \leq s < 1, 0 \leq t \leq T) \quad (12)$$

$$P(s(0), 0) = \psi(s_0), \quad 0 \leq s(0) \leq 1, \quad (13)$$

$$P(1, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$P(0, t) = \Phi(R(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

$$\beta \frac{dR}{dt} = \frac{1}{l - R(t)} \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{s=0}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$s(0) = \frac{r - R(0)}{l - R(0)}.$$

Применим неявную разностную схему с неравномерной сеткой для решения задачи (11)–(15). С этой целью разобьем отрезок $[0, 1]$ на N частей при помощи точек $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_N = 1$, а $[0, T]$ — точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

Введем следующие обозначения:

$$\nabla_1 = s_1 - s_{i-1}; \quad \nabla_j = \nabla_j t = t_j - t_{j-1}; \quad P(s_i, t_j) = P_{i,j};$$

$$\alpha_{ij} = \frac{a^2 \nabla_{j+1} t}{(l - R_{j+1})^2 \nabla_{i+1}^2}; \quad \delta_i = \frac{\nabla_{j+1}}{\nabla_i}$$

При этих обозначениях производные можно заменить следующими разностными соотношениями:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{i,j+1} = \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}}{\nabla_{i+1}} - \nabla_{i+1} \left(\frac{D^2 P}{Ds^2} \right)_{i+2,i} + \nabla_{i+1} (\nabla_{i+1} + \nabla_{i+2}) \left(\frac{D^3 P}{Ds^3} \right)_{i+3,i} + a \nabla s^{3/3}; \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_{i,j+1} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{\nabla_{j+1}} - \nabla_{j+1} t \left(\frac{D^2 P}{Dt^2} \right)_{j+2,j} + C_2 (\nabla t)^2; \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} \right)_{i,j+1} = \left(\frac{D^2 P}{Ds^2} \right)_{i+1,i-1} + C_3 |\nabla s|, \quad (18)$$

где

$$|\nabla s| = \max_i \nabla_i s; \quad \nabla t = \max_j \nabla_j t;$$

$$\left(\frac{DP}{Ds} \right)_{i+1,i} = \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}}{s_{i+1} - s_i}; \quad \left(\frac{D^2 P}{Ds^2} \right)_{i+2,i} = \frac{\left(\frac{DP}{Ds} \right)_{i+2,i+1} - \left(\frac{DP}{Ds} \right)_{i+1,i}}{s_{i+2} - s_i}.$$

Очевидно,

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{i,j+1} = \frac{P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}}{\nabla_i} - \nabla_i \left(\frac{D^2 P}{Ds^2} \right)_{i-2,i} + C_1' |\nabla s|^2. \quad (19)$$

Из (16) и (19) получим

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_{i,j+1} = \frac{1}{2} \left[\frac{P_{i+1,j+1} - P_{i,j+1}}{\nabla_{i+1}} + \frac{P_{i,j+1} - P_{i-1,j+1}}{\nabla_i} \right] + C_4 |\Delta s|. \quad (20)$$

Используя (16)–(20), после некоторых преобразований получим следующую разностную задачу, эквивалентную (11)–(15):

$$\begin{aligned} & \left[2\alpha_{ij} \frac{\delta_i}{1 + \delta_i} + \frac{a^2}{[s_i(l - R_{j+1}) + R_{j+1}](l - R_{j+1})} \frac{\nabla_{j+1}}{2\nabla_{i+1}} + \right. \\ & \left. + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}} \frac{R_{j+1} - R_j}{2\nabla_i} \right] P_{i+1,j+1} - 2 \left[\alpha_i + \right. \\ & \left. + \frac{a^2 \nabla_{i+1} (1 - \delta_i)}{4\nabla_i [s_i(l - R_{j+1}) + R_{j+1}](l - R_{j+1})} + \frac{1}{2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}} \frac{R_{j+1} - R_j}{4\nabla_{i+1}} (1 - \delta_i) \right] P_{i,j+1} + \left[2\alpha_{ij} \frac{\delta_i^2}{1 + \delta_i} - \right. \\ & \left. - \frac{a^2 \nabla_{j+1}}{2\nabla_i [s_i(l - R_{j+1}) + R_{j+1}](l - R_{j+1})} \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}} \frac{R_{j+1} - R_j}{2\nabla_i} \right] P_{i-1,j+1} = -P_{ij} \\ & (i = 1, 2, \dots, N-1; j = 0, 1, 2, \dots, n-1); \\ & P_{0,j+1} = \Phi_{j+1} (j = 0, 1, \dots, n-1); \quad P_{j,0} = \varphi_i (i = 0, 1, \dots, N); \\ & P_{N,j+1} = f_{j+1} (j = 0, 1, \dots, n-1); \\ & \frac{R_{j+1} - R_j}{\nabla_{j+1}} = \frac{1}{\beta(l - R_{j+1})} \frac{P_{1,j+1} - P_{0,j+1}}{\nabla_1} (j = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Для решения нелинейной разностной задачи применим метод итераций (5), (6):

$$\begin{aligned} & \left[2\alpha_{ij}^{(k)} \frac{\delta_i}{1 + \delta_i} + \frac{a^2}{[s_i(l - R_{j+1}^{(k)}) + R_{j+1}^{(k)}](l - R_{j+1}^{(k)})} \frac{\nabla_{j+1}}{2\nabla_{i+1}} + \right. \\ & \left. + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}^{(k)}} \frac{R_{j+1}^{(k)} - R_j}{2\nabla_i} \right] P_{i+1,j+1}^{(k)} - 2 \left[\alpha_{ij}^{(k)} \delta_i + \right. \\ & \left. + \frac{\nabla_{j+1} a^2 (1 - \delta_i)}{4\nabla_{i+1} [s_i(l - R_{j+1}^{(k)}) + R_{j+1}^{(k)}](l - R_{j+1}^{(k)})} + \frac{1}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}^{(k)}} \frac{R_{j+1}^{(k)} - R_j}{4\nabla_{i+1}} (1 - \delta_i) \right] P_{i,j+1}^{(k)} + \left[2\alpha_{ij}^{(k)} \frac{\delta_i^2}{1 + \delta_i} - \right. \\ & \left. - \frac{\nabla_{j+1} a^2}{2\nabla_i [s_i(l - R_{j+1}^{(k)}) + R_{j+1}^{(k)}](l - R_{j+1}^{(k)})} \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}^{(k)}} \frac{R_{j+1}^{(k)} - R_j}{2\nabla_i} \right] P_{i-1,j+1}^{(k)} = \\ & = -P_{ij}^{(k)} (i = 1, \dots, N-1, j = m, \dots, n-1); \quad (21) \end{aligned}$$

$$P_{0,j+1}^{(k)} = \Phi_{j+1}^{(k)} (j = m, \dots, n-1); \quad P_{j,0} = \varphi_i (i = 0, 1, \dots, N); \quad (22)$$

$$P_{N,j+1} = f_{j+1} (j = m, \dots, n-1); \quad (23)$$

$$\frac{R_{j+1}^{(k)} - R_j}{\nabla_{j+1}} = \frac{1}{\beta(l - R_{j+1}^{(k-1)})} \frac{P_{1,j+1}^{(k-1)} - P_{0,j+1}^{(k-1)}}{\nabla_1}, \quad (24)$$

где $k = 1, 2, \dots$

Принимая за нулевое приближение для $P_{i,j+1}$ и R_{j+1} значение их на предыдущем слое, согласно (24) определим $R_{j+1}^{(1)}$. Затем, используя (21)–(23), при найденных $R_{j+1}^{(1)}$ определяем $P_{i,j+1}^{(1)}$. Поступая аналогично, определяем остальные приближения. При каждой итерации для решения (21)–(23) используется метод прогонки.

При прямой прогонке вычисляются вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} H_{i,j+1} &= \frac{D_{i,j+1} - C_{i,j+1} H_{i-1,j+1}}{C_{i,j+1} Q_{i-1,j+1} - 2B_{i,j+1}}; \quad Q_{ij+1} = \frac{-A_{i,j+1}}{C_{i,j+1} Q_{i-1,j+1} - 2B_{i,j+1}} \\ & (i = 2, 3, \dots, N-1; j = m, \dots, n-1), \\ A_{i,j+1} &= 2\alpha_{ij} \frac{\delta_i}{1 + \delta_i} + \frac{a^2}{[s_i(l - R_{j+1}) + R_{j+1}](l - R_{j+1})} \frac{\nabla_{j+1}}{2\nabla_{i+1}} + \\ & + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}} \frac{R_{j+1} - R_j}{2\nabla_i}; \\ B_{i,j+1} &= \alpha_{ij} \delta_i + \frac{1}{4} \frac{\nabla_{j+1} a^2}{[s_i(l - R_{j+1}) + R_{j+1}](l - R_{j+1})} \frac{1 - \delta_i}{\nabla_{i+1}} \frac{1}{2} + \\ & + \frac{1 - s_i}{l - R_{j+1}} \frac{R_{j+1} - R_j}{4\nabla_{i+1}} (1 - \delta_i); \end{aligned}$$

$$C_{ij+1} = 2\alpha_{ij} \frac{\delta_i^2}{1+\delta_i} - \frac{\nabla_{j+1} a^2}{2\nabla_i [s_i(l-R_{j+1}) + R_{j+1}](l-R_{j+1})} - \frac{1-s_i}{l-R_{j+1}} \frac{R_{j+1}-R_{i+1}}{2\nabla_i}$$

$$D_{ij+1} = -P_{ij}.$$

Здесь и далее для простоты записи верхние индексы опущены.

При обратной прогонке используются уравнения

$$P_{i,j+1} = H_{i,j+1} + Q_{i,j+1} P_{i+1,j+1} \quad (i = N-1, \dots, 1).$$

Значения $H_{i,j+1}$, $Q_{i,j+1}$, $P_{N,j+1}$ определяются граничными условиями.

2. Как говорилось выше, только в сугубо частных случаях может быть получено точное решение задачи типа Стефана. Однако полученные автомодельные решения являются одним из эффективных средств для проверки численных методов.

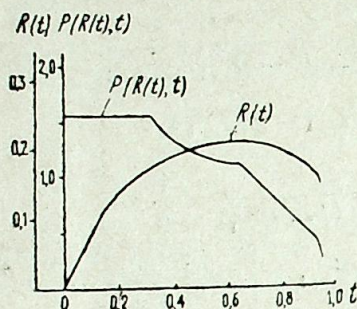


Рис. 1.

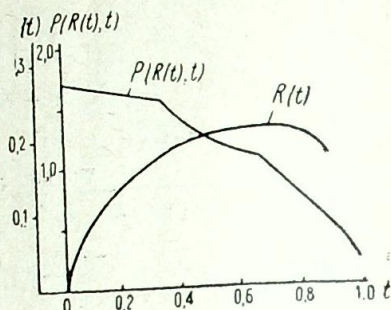


Рис. 2.

Рассмотрим некоторый частный случай задачи (6)–(10), а именно в качестве краевых и начальных данных возьмем функции:

$$P(R(t), t) = \frac{F(t)}{R^2(t)}, \quad \psi(r) = 1, \quad f(t) = 1, \quad (25)$$

где

$$F(t) = \begin{cases} 3F_1 t + R^2(0), & 0 \leq t < \frac{1}{3} \\ F_1 + R^2(0), & \frac{1}{3} \leq t < \frac{2}{3} \\ 3F_1(1-t) + R^2(0), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\alpha^{-2} = 0,23129640; \quad \beta = -6,3208169; \quad l = 1; \quad F_1 = 0,046810270.$$

При $R(0) = 0,01$ эта задача соответствует тому, что в начальный момент радиус газовой зоны равен 100 м, и в пласт, на контуре которого поддерживается постоянное давление, закачивается 100 млн. н.м³ газа с постоянным весовым расходом в течение четырех месяцев, затем газохранилище простаивает четыре месяца и в последующие четыре месяца года закаченный газ извлекается.

На рис. 1 представлены кривые изменения давления на подвижной границе и закон изменения последней. Очевидно, что при стремлении $R(0)$ к нулю и радиуса внешнего контура к бесконечности для первых четырех месяцев должно быть получено автомодельное решение, найденное И. А. Чарным [3, 4]. Результаты расчета для случая (25) при $R(0) = 10$ см и $R_k = 100$ см представлены на рис. 2. Из приведенных графиков видно, что при малых $R(0)$ и больших R_k решение практически совпадает с автомодельным решением, а при боль-

ших $R(0)$ оно отличается от автомодельного. Одним из существенных вопросов при реализации разностных методов на ЭВМ является вопрос о наиболее экономичной разностной сетке. С этой целью рассматривались следующие виды разбиений по переменной S .

1. В начале 4–6 шагов брались равными $R(0)$, а затем шаги удваивались до тех пор, пока сумма длин всех шагов не достигала некоторого значения s_c , если после некоторого шага сумма становилась больше s_c , то за шаг принималась разность между s_c и ми, равными h .

2. Шаги брались равными $R(0)$ до тех пор, пока сумма длин всех шагов не достигала s_c , после чего шаги брались равными h .

3. Начальные шаги порядка четырех–шести брались равными $R(0)$, затем шаги удваивались по тому же принципу, что и в пункте 1 до $s_c \cdot 10^{-1}$, после чего остальные шаги брались равными $h \cdot 10^{-1}$.

В табл. 1 для сравнения приведены расчеты задачи (6)–(10) в случае (25) $R(10) = 0,1 \cdot 10^{-2}$. Индексы при $R(t)$ и $P(R(t), t)$ соответствуют первому, второму и третьему видам разбиений.

Таблица 1

t	$R_1(t)$	$R_2(t)$	$R_3(t)$	$R_1(R(t), t)$	$R_2(R(t), t)$	$R_3(R(t), t)$
$0,1 \cdot 10^{-4}$	$0,1230 \cdot 10^{-2}$	$0,1230 \cdot 10^{-2}$	$0,1230 \cdot 10^{-2}$	0,1589-10	0,1591-10	0,1589-10
$0,3 \cdot 10^{-4}$	$0,1743 \cdot 10^{-2}$	$0,1738 \cdot 10^{-2}$	$0,1745 \cdot 10^{-2}$	0,1716-10	0,1725-10	0,1711-10
$0,7 \cdot 10^{-4}$	$0,2512 \cdot 10^{-2}$	$0,2500 \cdot 10^{-2}$	$0,2514 \cdot 10^{-2}$	0,1716-10	0,1734-10	0,1714-10
$0,15 \cdot 10^{-3}$	$0,3609 \cdot 10^{-2}$	$0,3532 \cdot 10^{-2}$	$0,3605 \cdot 10^{-2}$	0,1694-10	0,1720-10	0,1698-10
$0,31 \cdot 10^{-3}$	$0,5163 \cdot 10^{-2}$	$0,5114 \cdot 10^{-2}$	$0,5147 \cdot 10^{-2}$	0,1670-10	0,1702-10	0,1681-10
$0,63 \cdot 10^{-3}$	$0,7358 \cdot 10^{-2}$	$0,7284 \cdot 10^{-2}$	$0,7324 \cdot 10^{-2}$	0,1653-10	0,1686-10	0,1668-10
$0,127 \cdot 10^{-2}$	$0,1046 \cdot 10^{-1}$	$0,1037 \cdot 10^{-1}$	$0,1040 \cdot 10^{-1}$	0,1637-10	0,1668-10	0,1659-10
$0,235 \cdot 10^{-2}$	$0,1487 \cdot 10^{-1}$	$0,1474 \cdot 10^{-1}$	$0,1474 \cdot 10^{-1}$	0,1625-10	0,1652-10	0,1653-10

Таблица 2

$10^4 t$	$10^4 R(t)$	$10^4 R_2(t)$	$10^4 R_3(t)$	$10^3 P_1(R, t)$	$10^3 P_2(R, t)$	$10^3 P_3(R, t)$	$10^3 P_1(l, t)$	$10^3 P_2(l, t)$	$10^3 P_3(l, t)$
$1000 \cdot 10^{-4}$	$1230 \cdot 10^{-2}$	$1229 \cdot 10^{-2}$	$1230 \cdot 10^{-2}$	1589	1591	1589	1000	1000	1000
$1500 \cdot 10^{-4}$	$3609 \cdot 10^{-2}$	$3582 \cdot 10^{-2}$	$3605 \cdot 10^{-2}$	1694	1720	1698	1000	1000	1000
$2550 \cdot 10^{-4}$	$1486 \cdot 10^{-1}$	$1474 \cdot 10^{-1}$	$1477 \cdot 10^{-1}$	1625	1652	1653	1000	1000	1000
$1023 \cdot 10^{-3}$	$2981 \cdot 10^{-1}$	$2964 \cdot 10^{-1}$	$2953 \cdot 10^{-1}$	1618	1636	1649	1000	1000	1000
$2047 \cdot 10^{-3}$	$4215 \cdot 10^{-1}$	$4197 \cdot 10^{-1}$	$4178 \cdot 10^{-1}$	1619	1633	1647	1005	1005	1005
$4095 \cdot 10^{-3}$	$5954 \cdot 10^{-1}$	$5937 \cdot 10^{-1}$	$5909 \cdot 10^{-1}$	1622	1632	1647	1033	1034	1035
$8191 \cdot 10^{-3}$	$8387 \cdot 10^{-1}$	$8372 \cdot 10^{-1}$	$8335 \cdot 10^{-1}$	1635	1641	1655	1119	1125	1125
1638	1164	1163	1158	1697	1701	1714	1300	1303	1310
3277	1566	1564	1559	1876	1880	1893	1611	1615	1625

Аналогично в табл. 2 для сравнения приведены значения $R(t)$, $P(R(t), t)$ и $P(l, t)$ в случае задачи, рассматриваемой в [7].

Из анализа приведенных таблиц можно заключить, что для практических расчетов весьма эффективным разбиением является разбиение первого вида, ибо при достаточно малом разбиении достигается точность, пригодная для практики. Заметим, что рассмотренную в § 1 разностную схему можно распространить как на линейные уравнения теплопроводности, фильтрации, диффузии, так и на нелинейные. Применение этого метода для решения многомерных задач типа Стефана является предметом дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веригин Н. Н. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1952.
2. Тирский Г. А. ДАН СССР, т. 425, № 2, 1959.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
4. Чарный И. А. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, № 5, 1963.
5. Будаков Б. М., Васильев Ф. П., Успенский А. Б. Разностные методы решения некоторых краевых задач типа Стефана. Численные методы в газовой динамике. Сб. работ ВЦ МГУ, вып. VI. Изд. МГУ, 1965.
6. Будаков Б. М., Гольдман Н. Л., Успенский А. Б. ДАН СССР, т. 167, № 4, 1966.
7. Гасанов С. А., Пирмамедов В. Г. Тр. ИК АН Азерб. ССР, 1965.
8. Пирмамедов В. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 4, 1965.
9. Широков К. Ф., Пирмамедов В. Г., Гасанов С. А. Численное решение некоторых нестационарных задач фильтрации с подвижной границей. Тезисы Международного конгресса математиков. М., 1966.
10. Пирмамедов В. Г. Тр. ИК АН Азерб. ССР, 1966.

А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ, А. М. ХАСАЕВ, Р. С. ГУРБАНОВ, З. М. АХМЕДОВ

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗРАБОТКИ И ЭКСПЛУАТАЦИИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКИХ НЕФТЕЙ

До последнего времени динамическая характеристика нефтей представлялась в виде вязкости и плотности. В то же время при исследовании вопросов транспортировки парафинистых и эмульсионных нефтей было обращено внимание на отклонения трения от закона Ньютона. Такого рода жидкости называются неньютоновскими или аномальными.

Вопросы гидравлики или гидродинамики неньютоновских жидкостей в основном начали разрабатываться в нефтепромысловой механике в связи с исследованием движения глинистых и цементных растворов, применяемых в процессе проводки нефтяных и газовых скважин. В последние годы в АЗИНЕФТЕХИМ и АЗНИИ ДН, а также в целом ряде ЦНИПров МНДП Азербайджанской ССР началось систематическое изучение реологических характеристик неньютоновских нефтей. Было показано, что реологическая характеристика таких нефтей может быть представлена степенной зависимостью, которую в целом ряде случаев удобно аппроксимировать вязко-пластичной моделью. На рис. 1 показана типичная кривая зависимости средней скорости v от перепада давления Δp , снятая на капиллярном вискозиметре.

В данной статье рассматриваются некоторые особенности теории и практики разработки месторождений неньютоновских нефтей. Многочисленные исследования, проведенные на капиллярном вискозиметре, показали, что неньютоновский характер движения имеют не только парафинистые и эмульсионные нефти, но и нефти, содержащие сравнительно большее количество асфальтно-смолистых веществ. Ниже при реологических характеристиках неньютоновских нефтей применяется аппроксимационная вязко-пластичная модель.

В результате экспериментальных исследований было выявлено, что нефти целого ряда месторождений Азербайджана (НПУ Кировнефти, Артемнефти, Лениннефти, Ширваннефти и др.), Узбекистана (Кокайты, Лялькияр, Аму-Дарья и др.), Татарии, Казахстана и др. обладают аномальными свойствами в пластовых условиях, причем с увеличением количества растворенного газа значения предельного напряжения сдвига (τ_0) и структурной вязкости (η) уменьшаются.

Исследования проводились так, чтобы осветить различные аспекты фильтрации и движения неньютоновских нефтей. Прежде чем перейти к изложению полученных результатов, рассмотрим возможность

определения τ_0 на основании данных исследования скважин. Как было отмечено выше, количество растворенного газа, а также пластовая температура и давление оказывают существенное влияние на τ_0 . Поэтому τ_0 , определенное при помощи капиллярного вискозиметра, является сугубо ориентировочной величиной.

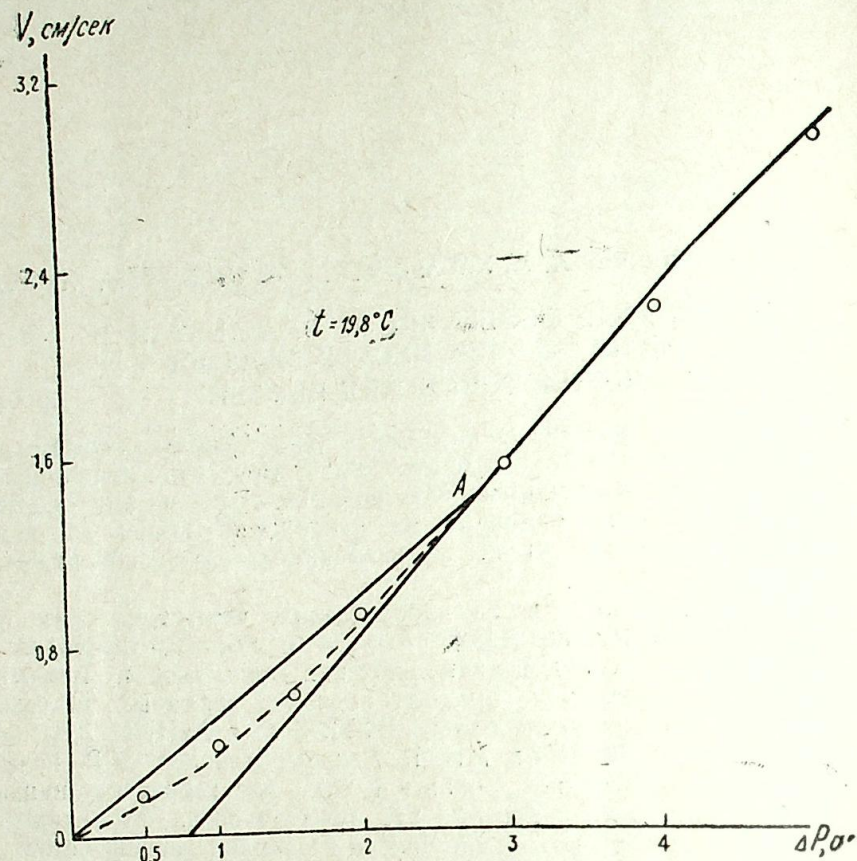


Рис. 1.

При определении пластового давления в месторождениях, содержащих вязкие нефти, скважину закрывают, в результате чего происходит восстановление давления на забое. По истечении определенного времени забойное давление практически становится равным пластовому. В рассматриваемом случае ствол скважины и пласт представляются в виде сообщающихся сосудов. В случае вязко-пластичной нефти уровни жидкости в сообщающихся сосудах будут на разных отметках. Поэтому восстановленное забойное давление в скважинах, продуцирующих аномальными нефтями, будет меньше пластового на величину давления, расходуемого на преодоление предельного напряжения сдвига. Определение этого давления аналитическим способом практически невозможно, в частности ввиду отсутствия информации о неоднородности пласта, поэтому представляет интерес опытное определение этой величины на основании данных эксперимента (рис. 2).

Проведение экспериментального исследования заключается в следующем: останавливают скважину и следят за восстановлением забойного давления, затем в скважину нагнетают жидкость и вновь следят за восстановлением забойного давления. Восстановленное значение

забойного давления, полученное после остановки скважины (p_1), меньше восстановленного значения забойного давления, полученного после нагнетания жидкости в скважину (p_2).

Отметим, что

$$2\Delta p_0 = p_2 - p_1.$$

Таким образом, пластовое давление будет

$$p_{пл} = p_1 + \Delta p_0 = p_2 - \Delta p_0.$$

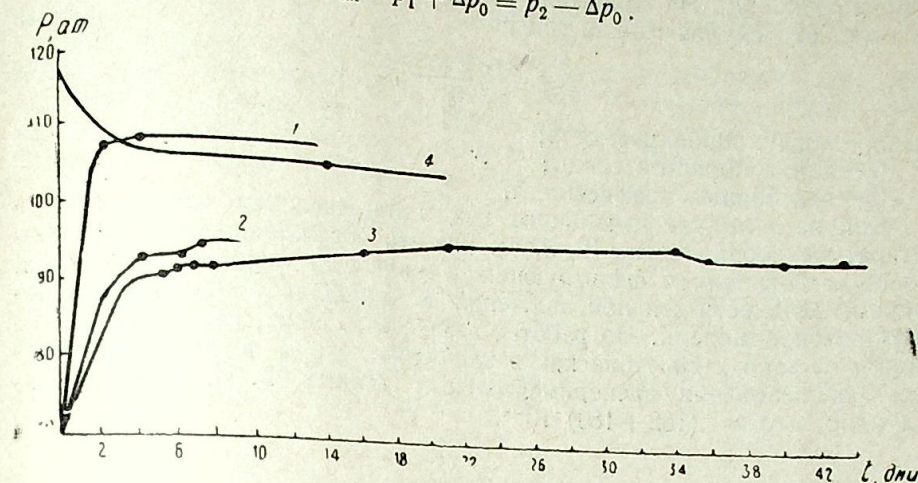


Рис. 2.

Зависимость восстановления пластового давления от времени остановки (в днях) по скв. №18 (XIII гор):
1—IX—64; 2—IX—65; 3—V—VII—65; 4—XI—66 г. (после осуществления ГРП).

Так как τ_0 аппроксимационная константа, то при $t \rightarrow \infty$ кривые восстановления и падения забойного давления должны сливаться. Ориентировочные расчеты показали, что на восстановление давления, соответствующего начальному участку реологической кривой OA (рис. 1), которая может быть аппроксимирована моделью неньютоновской жидкости высокой вязкости (сотнями спазов, а иногда достигает тысячи и даже десяти тысяч спз), требуется сравнительно много времени—от суток до нескольких месяцев. Поэтому введением вязко-пластичной модели можно ускорить время исследования скважин для определения пластового давления.

В лабораториях АЗИНЕФТЕХИМа и АЗНИИ ДН рассматривались следующие вопросы:

- 1) фильтрация неньютоновской нефти и смеси ее с водой и газом;
- 2) вытеснение неньютоновской нефти газом и водой;
- 3) исследование скважин (данный вопрос обсужден выше);
- 4) движение неньютоновской жидкости в фонтанных трубах;
- 5) псевдооживление песчаной пробки неньютоновской жидкостью;
- 6) глубиннонасосный способ добычи неньютоновской жидкости.

Вот перечень вопросов, которые, на наш взгляд, являются основными, подлежащими рассмотрению в первую очередь.

На основании экспериментальных исследований, проведенных с различными нефтями (смеси вапора—брайтстока и нефтей), была предпринята попытка записать обобщенный закон Дарси на случай фильтрации аномальных нефтей. Для вязко-пластичной модели обобщенный закон Дарси был записан одним из авторов в 1950 году и имел вид:

$$\bar{V} = -\frac{k}{\eta} \left(1 - \frac{P_0}{|\text{grad } p|} \right) \text{grad } p_1, \quad (1)$$

где p_0 —модуль градиента давления на преодоление предельного напряжения сдвига;

k —проницаемость для вязко-пластичной жидкости;

p —давление.

В дальнейшем, по предложению одного из авторов Б. И. Султановым [1] были проведены экспериментальные исследования по определению Δp_0 . На основании анализа размерностей для линейного одномерного случая можно записать

$$\alpha = \frac{\Delta p_0 \sqrt{k_1}}{l \cdot \tau_0},$$

где k_1 —воздухопроницаемость;

l —длина пористой среды;

α —постоянный коэффициент.

Вопрос о модуле начального градиента давления обсуждался в литературе неоднократно [2, 3, 4]. Все эти обсуждения были связаны с особым поведением фильтрующихся жидкостей в пористых средах, причем, жидкости эти при движении в капилляре подчинялись не-ньютоновской модели. Но работы, излагаемые ниже, связаны с отклонением от закона Ньютона как в капилляре, так и в пористых средах. На основании экспериментальных данных Б. И. Султановым получено, что $\alpha = (162 \div 180) \cdot 10^{-4}$.

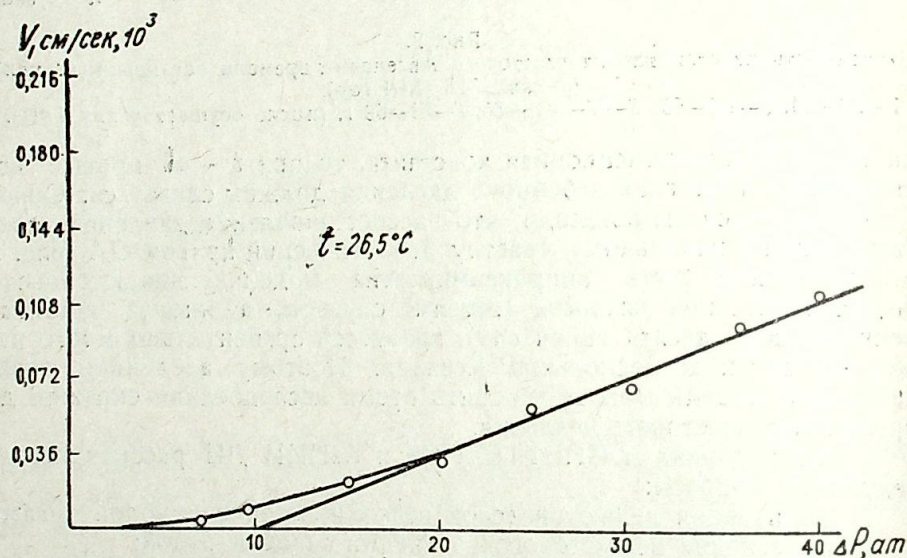


Рис. 3.

Справедливость уравнения (1) подтверждена целым рядом экспериментов, проведенных с различными нефтями. Типичная кривая зависимости скорости фильтрации от перепада давления для пористой среды приводится на рис. 3. Эта кривая может быть аппроксимирована двумя прямыми при сравнительно малых скоростях—законом Дарси и обобщенным законом Дарси. Отмеченная зависимость может быть представлена и как степенная. Следовательно, закон фильтрации аномальных жидкостей может представлен как

- 1) закон Дарси при сравнительно малых скоростях;
- 2) степенной закон;
- 3) обобщенный закон Дарси для вязко-пластичных жидкостей;
- 4) комбинацией 1 и 3.

Выбор той или иной модели определяется условиями задачи. Так например, как было отмечено выше, при определении пластового давления по кривым восстановления давления использование модели 3 позволяет ускорить процесс исследования скважин. При решении же нестационарных задач, связанных с упруго-водонапорным режимом, могут быть применены как модель 2, так и 4. Целесообразность применения той или иной модели в данном случае определяется тематическими трудностями, возникающими при решении конкретной задачи.

Представляет интерес определение размеров застойных зон при фильтрации вязко-пластичных жидкостей. В качестве первого приближения принимаем, что дифференциальное уравнение фильтрации вязко-пластичных жидкостей совпадает с уравнением фильтрации вязких жидкостей и застойные зоны определяются из условия

$$\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} = \frac{\alpha \tau_0}{\sqrt{k_1}}.$$

Такой прием применялся в гидродинамике вязко-пластичных сред И. А. Чарным и П. М. Белашем при решении задачи о структурном движении в трубе прямоугольного сечения.

Численные расчеты для этого случая (рис. 4) выполнены С. И. Пейсаховым. При этом принималось

$$\frac{\alpha K_0}{2\pi A} = 2,$$

$$K_0 = \frac{\alpha \tau_0}{\sqrt{k_1}}, \quad A = \frac{\eta q}{4\pi k_1 h},$$

где q —дебит скважины;
 h —мощность пласта.

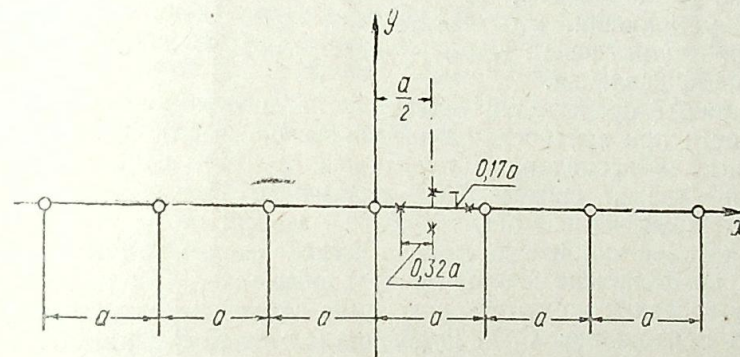


Рис. 4.

На рис. 4 показаны границы застойной области. Отметим, что при решении задач фильтрации вязко-пластичных жидкостей должны рассматриваться задачи стационарного движения, что объясняется наличием застойных зон. Экспериментальные исследования показали, что относительные фазовые проницаемости существенно зависят от τ_0 .

а точнее — от параметра Лагранжа $L'_a = \frac{\Delta p \sqrt{k_1}}{l \tau_0}$ для пластичных жидкостей.

На рис. 5 приводится кривая зависимости $k = k^*(p)$, где k^* —относительная фазовая проницаемость газа, p —насыщенный пористой среды вязко-пластичной жидкостью, для системы пар—трансформаторное масло—газ. Как и следовало ожидать, с увеличением k_1 влия-

ние τ_0 на фазовую проницаемость уменьшается. Таким образом, путем увеличения k_1 можно уменьшить влияние τ_0 на дебит скважины. Об этом свидетельствуют результаты исследования, проведенного А. А. Ильяевым, на основе которого установлено, что гидравлический разрыв пласта приводит к существенному уменьшению Δp_0 практически до нуля (рис. 6). Экспериментальные исследования влияния τ_0 на коэффициент нефтеотдачи впервые были проведены М. А. Гейманом, Р. А. Фридман [5]. В дальнейшем такие опыты проводились Г. А. Ма-

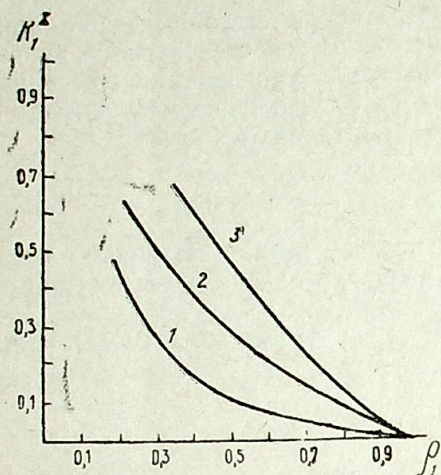


Рис. 5.

1— $k=110$; 2— $k=750$; 3— $k=1400$; $\tau_0=0,12/\text{см}^2$.

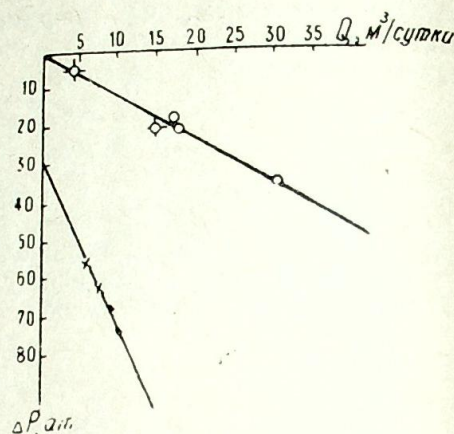


Рис. 6.

медовым, Я. Г. Фарзане, В. А. Алиевым, С. И. Пейсаховым и др., которые установили, что коэффициент нефтеотдачи при вытеснении не-newтоновской нефти газом в существенной степени зависит от τ_0 и градиента давления.

На рис. 7 представлена зависимость коэффициента нефтеотдачи от вязкости при вытеснении не-newтоновской нефти газом. Имеются две зоны, разграниченные пунктирной линией, слева вытесняемая жидкость—вязкая, справа—вязко-пластичная. При вытеснении вязкой жидкости коэффициент нефтеотдачи не зависит от η , а при вытеснении вязко-пластичной существенно зависит от η . Причем с увеличением k_1 коэффициент нефтеотдачи уменьшается.

Исследования по вытеснению вязко-пластичных жидкостей водой в щелях проводились С. Г. Гурбановым и А. Х. Гасановым. В опытах применялась смесь масел пара и брайтстока.

Экспериментальными исследованиями установлено, что:

1) с увеличением значения τ_0 при одних и тех же перепадах давления Δp безводная и конечная нефтеотдача уменьшается, с увеличением же Δp безводная отдача уменьшается, а конечная увеличивается;

2) продолжительность времени безводного периода по мере увеличения перепада давления уменьшается, что резко проявляется при меньших Δp , с увеличением τ_0 наблюдается обратная картина;

3) с повышением температуры при одних и тех же Δp безводная и конечная нефтеотдача увеличивается. В безводном периоде с уменьшением τ_0 нефтеотдача возрастает примерно с 15 до 45% для щелевой модели с малой и с 25 до 65% — со сравнительно большой раскрытостью. Конечная нефтеотдача возрастает, соответственно, с 20 до 90% и с 45 до 97% по отношению к начальной нефтенасыщенности;

4) продолжительность времени безводного периода по мере увеличения температуры уменьшается, что резко проявляется при малых температурах.

Рассмотрена задача об определении распределения температуры по длине лифта при движении вязко-пластичной жидкости. Изменение температуры с течением времени определено методом мгновенных

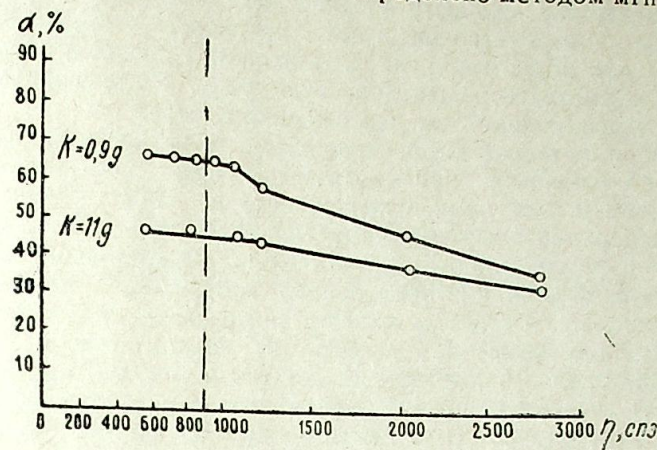


Рис. 7.

источников. Расчеты показали, что τ_0 существенно влияет на распределение температуры по длине лифта, причем с увеличением τ_0 интенсивность изменения температуры уменьшается. Температурные расчеты значительно затруднены ввиду отсутствия точных данных о коэффициенте теплоотдачи вязко-пластичной жидкости для различных режимов движения и непостоянства тепловых констант жидкости по длине лифта. В связи с этим был предложен опытный прием определения температуры. Для этого производится замер температуры в двух точках, в частности на забое и на устье, и расчеты воздуха производятся по формуле:

$$t = T_1 / \text{ch} \left(\frac{z}{H} \text{arc ch} \frac{T_1}{T_2} \right),$$

где T_1 —температура на забое;

T_2 —температура на устье;

H —глубина скважины;

t —температура жидкости в сечении z .

Расчеты показывают, что распределение температуры по длине лифта может быть определено по известной формуле, предложенной И. Д. Дергуновым.

Для определения давления на забое скважины проведено исследование движения квазигомогенной смеси газ — вязко-пластичная жидкость и кольцевого режима движения газированной вязко-пластичной жидкости в лифтовых трубах. Эти задачи представляют собой естественное обобщение соответствующих задач для вязкой жидкости.

В литературе рассмотрен вопрос об определении роста давления при разделении фаз газированной вязкой жидкости в замкнутой системе, что вызвано аномальным поведением кривых восстановления давления. Этот вопрос исследован экспериментально для газированной вязко-пластичной жидкости. Опыты подтвердили качественную применимость выводов для вязкой жидкости и для рассматриваемого случая.

С целью исследования процесса фильтрации вязко-пластичной жидкости через слой зернистого материала и выявления зависимости между высотой взвешивания и некоторыми физическими параметрами, имеющими место при фильтрации жидкости, проведены эксперименты на специальной установке. Полученные данные, в отличие от имеющихся в литературе приемов (использование гидравлического радиуса порового канала, скорости витания частиц), обработаны введением параметра „внутреннего масштаба“, предложенного М. Д. Миллиончиковым для пористых сред. Показано, что псевдооживленный слой следует рассматривать как пористую среду, характеризующую пористостью и проницаемостью невзвешенного слоя.

Экспериментально определено минимальное значение дебита вязко-пластичной жидкости, при котором песчаная пробка находилась бы во взвешенном состоянии и практически не влияла бы на дебит скважин. Экспериментально установлено, что при добыче аномальных нефтей подача глубинного насоса обуславливается свойствами нефтей, в частности величиной предельного напряжения сдвига.

При подаче глубинным насосом вязко-пластичной нефти требуется дополнительное давление, расходуемое на преодоление предельного напряжения сдвига в системе клапан-цилиндр глубинного насоса, и происходит отставание шарика приемного клапана при ходе плунжера вниз. В ряде случаев (при значительных τ_0) шарики приемных клапанов могут не тонуть в вязко-пластичной среде.

На лабораторной глубиннонасосной установке изучались изменения коэффициента наполнения в зависимости от изменения физико-механических свойств откачиваемой жидкости, скорости движения плунжера и геометрических размеров приемной части насоса. Опыты показали, что при откачке вязко-пластичных сред коэффициент наполнения насоса резко падает, причем чем меньше диаметр насадки в приемной части насоса, тем меньше коэффициент наполнения. Коэффициент наполнения резко снижается с увеличением скорости движения плунжера. Этого явления не наблюдается при откачке воды и нефти, и не обладающих предельным напряжением сдвига и имеющих вязкости, соответственно, 1, 16 и 160 спз.

Кривая зависимости коэффициента наполнения от скорости движения плунжера и для вязкой жидкости, вероятно, имеет два характерных участка, т. е. до определенной скорости движения плунжера коэффициент наполнения практически не изменяется (I участок); по достижении определенной скорости движения плунжера (II участок) отмечается изменение коэффициента. Для вязко-пластичной жидкости I участок на кривой зависимости коэффициента наполнения от скорости движения плунжера практически отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Султанов Б. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1960, № 5.
2. Флорин В. А. Основы механики грунтов. т. I. Госстройиздат, 1959.
3. Горбунов Б. П. „Изв. АН СССР, серия технич. наук“, 1958, № 9.
4. Котов А. И. и Нерпин С. В. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1958, № 9.
5. Гейман М. А. и Фридман Р. А. НХ, 1956, № 9.

А. И. ГУСЕИНОВ, Х. Ш. МУХТАРОВ

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ

$\tilde{H}(\tau, 0)$, $H(\delta, 0)$, $H(\tau_1, \tau_2, \tau, 0)$ и $H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$

Определение 1. Классом Φ назовем совокупность функций $\varphi(\sigma)$, определенных при $0 < \sigma < 1$ и удовлетворяющих условиям:

$$1^\circ. \lim_{\sigma \rightarrow 0} \varphi(\sigma) = 0,$$

$$2^\circ. \varphi(\tau) \text{ монотонно возрастает,}$$

$$3^\circ. \text{существует постоянная } C > 1 \text{ такая, что}$$

$$1 < \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\varphi(C\sigma)}{\varphi(\sigma)} \leq \frac{\varphi(C\sigma)}{\varphi(\sigma)} < C.$$

Определение 2. $u(x) \in \tilde{H}_k(\tau)$ ($a \leq x \leq b$), если для любых $a \leq x_1, x_2 \leq b$ она удовлетворяет условиям:

$$|u(x)| \leq k, |u(x + \Delta x) - u(x)| \leq k \varphi(|\Delta x|),$$

где $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° . Если, кроме того, $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию 3° , то класс $\tilde{H}_k(\tau)$ мы будем обозначать через $H_k(\tau)$ ($H(\tau) = \bigcup_{k=0} H_k(\tau)$).

Для классов $H(\tau)$ справедлива следующая

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы класс $H(\tau)$ совпал с классом $H(\psi)$ ($\psi \in \Phi$) является существование положительных постоянных таких, что

$$m \leq \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \leq M.$$

Установлено также, что для любого класса $H(\psi)$ существует класс $H(\psi^*)$ такой, что $H(\psi) = H(\psi^*)$ и $\psi^*(\cdot) \in H_1(\psi^*)$, причем указан эффективный способ построения $\psi^*(\cdot)$. Поэтому в дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что $\varphi(\tau) \in \Phi$ и $\varphi(\sigma) \in H_1(\varphi)$.

Если в $\tilde{H}(\varphi) = \bigcup_{k=0} \tilde{H}_k(\varphi)$ ввести норму

$$\|u\|_\varphi = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)| + \sup \frac{|u(x) - u(y)|}{\varphi(|x - y|)},$$

то оно превращается в пространство Бачаха. Пусть $u(x) \in \tilde{H}(\varphi)$ и удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon. \quad (1')$$

Обозначим через $\tilde{H}(\varphi, 0)$ множество тех функций из $\tilde{H}(\varphi)$, для которых выполняется неравенство (1').

Имеет место следующая

Теорема 2. Множество $\tilde{H}(\varphi, 0)$ является собственным подпространством пространства $\tilde{H}(\varphi)$ и не совпадает ни с одним пространством типа $\tilde{H}(\varphi)$.

Теорема 3. Для того, чтобы множество $K \subset \tilde{H}(\varphi, 0)$ было компактным в смысле метрики $\rho_\varphi(u, v) = \|u - v\|_\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Множество K было ограниченным;
2. При произвольном $\varepsilon > 0$ для любой $\{u(x) \in K$ существовало $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon \quad (1)$$

Доказательство

Достаточность. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная последовательность из K . В силу компактности K в смысле метрики пространства непрерывных функций из $\{u_n(x)\}$ мы можем извлечь подпоследовательность $\{u_n(x)\}^*$, которая сходится к некоторой непрерывной функции $u_0(x)$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u_0(x)\|_\varphi = 0. \quad (2)$$

Очевидно, $u_0(x)$ ограничено в смысле нормы $\|u_0\|_\varphi$ с той же постоянной, что и для множества K .

Остается показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x, y < b} \left\{ \frac{|W_n(x) - W_n(y)|}{\varphi(|x - y|)} \right\} = 0, \quad (3)$$

где

$$W_n(x) = u_n(x) - u_0(x).$$

Пусть это не так. Тогда существует $l > 0$ и некоторая подпоследовательность $\{u_n(x)\}$, для которой справедливо неравенство

$$\sup_{a < x, y < b} \left\{ \frac{|W_n(x) - W_n(y)|}{\varphi(|x - y|)} \right\} > l \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Отсюда следует существование $a \leq x_n, x'_n \leq b$ таких, что

$$\frac{|W_n(x_n) - W_n(x'_n)|}{\varphi(|x_n - x'_n|)} \geq l, \quad (4)$$

причем $x_n \neq x'_n$ ($n = \overline{1, \infty}$).

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} l$. В силу (1) для $\varepsilon > 0$

существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$

$$\frac{|u_n(x_1) - u_n(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon.$$

Если в этом неравенстве перейти к пределу, то получим

$$\frac{|u_0(x_1) - u_0(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} \leq \varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon).$$

* Чтобы не загромождать обозначениями, мы здесь и в дальнейшем выделенную подпоследовательность будем обозначать так же, как и саму последовательность.

Из последних двух неравенств для $W_n(x)$ имеем

$$\frac{|W_n(x_1) - W_n(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < 2\varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon). \quad (5)$$

Для последовательности $\{x_n - x'_n\}$ существует хотя бы одна подпоследовательность, для которой справедливо одно из двух условий:

$$\text{а) } |x_n - x'_n| \geq \eta(\varepsilon),$$

$$\text{б) } |x_n - x'_n| < \eta(\varepsilon).$$

В случае а) силу монотонности $\varphi(x)$ из (4) получим

$$l < \frac{|W_n(x_n) - W_n(x'_n)|}{\varphi(\eta(\varepsilon))}.$$

Если перейти к пределу в последнем неравенстве, то в силу (2) получим $0 < l \leq 0$, что невозможно. В случае б) из (5) получим

$$l \leq \frac{|W_n(x_n) - W_n(x'_n)|}{\varphi(|x_n - x'_n|)} \leq 2\varepsilon,$$

что противоречит выбору ε .

Значит имеет место (3).

Необходимость. Пусть множество $K \subset \tilde{H}(\varphi, 0)$ компактно в смысле метрики ρ_φ . Очевидно, условие 1 для множества K выполнено. Покажем выполнимость условия 2.

В силу теоремы Хаусдорфа для множества K существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$ = сеть, которую обозначим через $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$.

Так как $u_i(x) \in \tilde{H}(\varphi, 0)$ ($i = \overline{1, n}$), то для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует

$\eta_i(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta_i(\varepsilon)$ имеет место

$$\frac{|u_i(x_1) - u_i(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\eta(\varepsilon) = \min_i \eta_i(\varepsilon)$. Тогда при любых $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ для любого $u_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) имеет место

$$\frac{|u_i(x_1) - u_i(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5')$$

Пусть $u(x)$ — любая функция из K . Тогда существует $u_i(x)$ такое, что

$$\rho_\varphi(u, u_i) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ или}$$

$$\sup_{a < x_1, x_2 < b} \frac{|u(x_1) - u_i(x_1) - u(x_2) + u_i(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5'')$$

Пусть $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$. Тогда из (5') и (5'') получим

$$\begin{aligned} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} &\leq \frac{|u(x_1) - u_i(x_1) - u(x_2) + u_i(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} + \\ &+ \frac{|u_i(x_1) - u_i(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если $\varphi(\sigma) \in \Phi$, класс $\tilde{H}(\varphi, 0)$ обозначим через $H(\varphi, 0)$, если же $\varphi(\sigma) = \sigma^\delta$ ($0 < \delta \leq 1$), то $H(\varphi, 0)$ обозначим через $H(\delta, 0)$.

Следствие 1. Для того, чтобы множество $K \subset H(\delta, 0)$ было

компактным в смысле метрики $\rho_\delta(u, v) = \|u - v\|_{\varphi=\sigma^\delta}$, необходимо и достаточно, чтобы:

1. Множество K было ограниченным;
2. При произвольном $\varepsilon > 0$ для любой $u(x) \in K$ существовало $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство
$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^{\frac{\delta}{\delta'}}} < \varepsilon. \quad (6)$$

Следствие 2. Пространство $H_{k, \delta}$ компактно в $H_{k, \delta'}$ ($0 < \delta' < \delta$) в смысле метрики $\rho_{\delta'}$. Отметим, что это следствие вытекает и из неравенства

$$\sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{\delta}{\delta'}}} \right\} \leq \kappa^{\frac{\delta}{\delta'}} (2 \max_{a < x < b} |u(x)|)^{\frac{\delta - \delta'}{\delta}},$$

которое было получено в работе [1].

Следствие 3. Если $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} = 0$, то пространство $\tilde{H}_k(\varphi)$ компактно в $H_{k, \delta}$ в смысле метрики ρ_δ .

Замечание 1. В условиях следствия 3 в качестве $\varphi(\sigma)$ можно взять функцию
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sigma^{\delta_n}, \quad a_n > 0, \quad 0 < \delta < \delta_n \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0,$$
 а также

$$\sigma^\delta \ln^{-p} \frac{1 + b - a}{\sigma} \quad (a < b, p > 0).$$

Следствие 4. Если $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\psi(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 0$, то пространство $\tilde{H}_k(\varphi)$ компактно в $\tilde{H}_{k(\varphi)}$.

Замечание 2. Следствие 4 в случае, когда $\varphi(\sigma)$ и $\psi(\sigma)$ принадлежат Φ , доказано в [2].

Следствие 5. Пространство $H_{k, \delta}$ компактно в $\tilde{H}_k(\varphi)$ в смысле метрики ρ_φ , если

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma^\delta}{\varphi(\sigma)} = 0.$$

Отметим, что при $\delta = 1$ условие (6) означает, что $u(x) = \text{const}$. Следовательно, множество $H(1, 0)$ есть числовое множество. В классе $H_{k, \delta}$ существует сколько угодно функций, не удовлетворяющих условию (6). В частности, x^δ ($0 \leq x \leq 1$) условию (6) не удовлетворяет.

Более того, в [3] построен пример функции $u(x)$ из $H_{k, \delta}$, для которой выполняется неравенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^{\frac{\delta}{\delta'}}} > C > 0$$

при любом $a \leq x \leq b$ и при малом $|\Delta x|$.

Ауэрбах и Банах в работе [4] доказали существование такой функции $u(x)$ на класса $H_{k, \delta}$, что при любом $a \leq x \leq b$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^\beta} = \infty,$$

где $\beta > \delta$ — любое. Результат, полученный в [3], перенесен в [5] на случай класса $H(\varphi)$.

Определение 3. $u(x) \in H_k(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ ($a < x < b$), если она удовлетворяет условиям:

$$|u(x)| \leq \frac{\kappa}{\varphi_1(x-a) \varphi_2(b-x)},$$

$$|u(x + \Delta x) - u(x)| \leq \frac{\kappa \varphi(|\Delta x|)}{\varphi_1(x-a) \varphi_2(b-x) \varphi(x-a) \varphi(b-x-\Delta x)},$$

где $\varphi_1(\sigma)$, $\varphi_2(\sigma)$, $\varphi(\sigma) \in \Phi$ и, кроме того, $\varphi_1(\sigma) \cdot \varphi(\sigma)$ и $\varphi_2(\sigma) \cdot \varphi(\sigma)$ такие, что функции

$$\frac{\varphi_1(\sigma) \varphi(\sigma)}{\sigma}, \quad \frac{\varphi_2(\sigma) \varphi(\sigma)}{\sigma}$$

не возрастающие на $(0, l]$, $|\Delta x| \leq \sigma(x) = \min \left\{ \frac{|x-a|}{4}, \frac{|b-x|}{4} \right\}$.

Класс $H_k(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ мы назовем обобщенным классом Гусейнова, ибо при $\varphi_1(\sigma) = \sigma$, $\varphi_2(\sigma) = \sigma^\beta$, $\varphi(\sigma) = \sigma^\alpha$, $0 < \alpha, \beta, \delta < 1$, $0 < \alpha + \delta, \beta + \delta \leq 1$ мы получаем известное [6] пространство $H_{\alpha, \beta, \delta}^k$ Гусейнова.

Для класса $H_k(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ доказана

Теорема 4. Если $u(x) \in H_k(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$, то функция $v(x) = u(x) \rho(x)$, $\rho(x) = \varphi_1(x-a) \varphi_2(b-x) \varphi(x-a) \varphi(b-x)$, принадлежит классу $H_{k_1}(\varphi)^*$ и, наоборот, если $u(x) \in H_{k_1}(\varphi)$, то функция

$$v(x) = \frac{u(x)}{\rho(x)}$$

принадлежит классу $H_{k_2}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$.

Пусть $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi) = U_{k=0} H_k(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ и $H^\circ(\varphi) = U_{k=0} H_k^\circ(\varphi)$. В классах

$H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ и $H^\circ(\varphi)$ введем соответственно нормы:

$$\|u\|_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi} = \max_{a < x < b} |\rho(x) u(x)| + \sup_{a < x, y < b} \left\{ \frac{|\rho(x) u(x) - \rho(y) u(y)|}{\varphi(|x-y|)} \right\},$$

$$\|v\|_\varphi = \|v\|_c + \sup_{a < x, y < b} \frac{|v(x) - v(y)|}{\varphi(|x-y|)},$$

где $u(x) \in H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$, $v(x) \in H^\circ(\varphi)$.

Тогда эти пространства станут пространствами типа Банаха.

Для этих пространств из теоремы 3 следует

Теорема 5. Банахово пространство $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ линейно изометрично Банахову пространству $H^\circ(\varphi)$.

Пусть $u(x) \in H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ и удовлетворяет условию: для $\varepsilon > 0$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x-y| < \eta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{|u(x) \rho(x) - u(y) \rho(y)|}{\varphi(|x-y|)} < \varepsilon. \quad (7')$$

Обозначим через $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi, 0)$ множество тех функций из $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$, для которых выполняется неравенство (7').

Теорема 6. Пространство $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi, 0)$ является собственным подпространством пространства $H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$.

Эта теорема следует из теорем 2 и 5. Далее из теоремы 4 следует.

Теорема 7. Для компактности множества $K \subset H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi, 0)$ в смысле метрики $\rho_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi}(u, v) = \|u - v\|_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi}$ необходимо и достаточно, чтобы:

* Класс $H_{k_1}^\circ(\varphi)$ состоит из всех функций класса $H_{k_1}(\varphi)$, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a, b]$.

1. Множество K было ограниченным;
2. При произвольном $\varepsilon > 0$ для любой $u(x) \in K$ существовало бы $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\frac{|u(x_1) \rho(x_1) - u(x_2) \rho(x_2)|}{\varphi(|x_1 - x_2|)} < \varepsilon.$$

В частности, для пространства

$$H_{\alpha, \beta, \delta, 0} = H(\sigma^\alpha, \sigma^\beta, \sigma^\delta, 0)$$

имеем следующее:

Следствие 1. Для компактности множества $K \subset H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$ в смысле метрики $\rho_{\alpha, \beta, \delta}(u, v) = \|u - v\|_{\alpha, \beta, \delta}$ необходимо и достаточно, чтобы:

1. Множество K было ограниченным;
2. При произвольном $\varepsilon > 0$ для любой $u(x) \in K$ существовало бы $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\frac{|u(x_1)(x_1 - a)^{\alpha+\delta}(b - x_1)^{\beta+\delta} - u(x_2)(x_2 - a)^{\alpha+\delta}(b - x_2)^{\beta+\delta}|}{|\Delta x|^{\delta}} < \varepsilon.$$

В пространстве $H_{\alpha, \beta, \delta}$ введем норму вида

$$\|u\|_{\alpha, \beta, \delta} = \|W\|_C(\tilde{\varphi}) + \sup \left\{ \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \tilde{\varphi}(x) \right\},$$

где

$$\tilde{\varphi}(x) = (x - a)^{\alpha+\delta}(b - x)^{\beta+\delta}, \quad W(x) = u(x) \tilde{\varphi}(x),$$

$$\|W\|_C(\tilde{\varphi}) = \sup_{a < x < b} |u(x)| \tilde{\varphi}(x).$$

Тогда оно превращается в пространство Банаха.

Пусть $u(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$ и удовлетворяет условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $a < x < b$ и $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \tilde{\varphi}(x) < \varepsilon. \quad (7'')$$

Обозначим через $\tilde{H}_{\alpha, \beta, \delta, 0}$ множество тех функций из $H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$, для каждой из которых выполняется неравенство (7').

Теорема 8. Для компактности множества $K \subset \tilde{H}_{\alpha, \beta, \delta, 0}$ в смысле метрики $\tilde{\rho}_{\alpha, \beta, \delta}(u, v) = \|u - v\|_{\alpha, \beta, \delta}$ необходимо и достаточно, чтобы:

1. Множество K было ограниченным;
2. При произвольном $\varepsilon > 0$ для любой $u(x) \in K$ существовало бы $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что всех $a < x < b$ и $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} (x - a)^{\alpha+\delta} (b - x)^{\beta+\delta} < \varepsilon. \quad (7)$$

Доказательство

Достаточность. Пусть $\{u_n(x)\}$ — произвольная последовательность из K . В силу теоремы 3 множество K является компактным в смысле метрики

$$\rho_C(\tilde{\varphi})(u, v) = \sup_{a < x < b} \{|u(x) - v(x)| \tilde{\varphi}(x)\}.$$

Поэтому из $\{u_n(x)\}$ мы можем извлечь подпоследовательность $\{u_n(x)\}$, сходящуюся к $u_0(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$ в смысле метрики $\rho_C(\tilde{\varphi})$.

Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < b} \left\{ \frac{|W_n(x + \Delta x) - W_n(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \cdot \tilde{\varphi}(x) \right\} = 0, \quad (8)$$

Предположим противное, т. е. существует по крайней мере одна подпоследовательность $\{W_n(x)\}$ последовательности $\{W_n(x)\}$ и некоторое положительное число $l > 0$ такое, что

$$\sup_{\substack{a < x < b \\ |\Delta x| < \sigma(x)}} \left\{ \frac{|W_n(x + \Delta x) - W_n(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \cdot \tilde{\varphi}(x) \right\} > l > 0.$$

Следовательно, существуют $a < x_n < b$ и $|\Delta x_n| < \sigma(x_n)$ такие, что

$$\frac{|W_n(x_n + \Delta x_n) - W_n(x_n)|}{|\Delta x_n|^{\delta}} \cdot \tilde{\varphi}(x_n) \geq l, \quad (9)$$

$$x_n \neq a, b.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} l$. Так как $\{u_n(x)\} \in K$, то в силу (7) имеем

$$\frac{|u_n(x + \Delta x) - u_n(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \tilde{\varphi}(x) < \varepsilon \quad (9')$$

при $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$, $a < x < b$.

Если в неравенстве (9') перейти к пределу, то в силу сходимости $u_n(x)$ в смысле метрики $\rho_C(\tilde{\varphi})$ получим

$$\frac{|u_0(x + \Delta x) - u_0(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \tilde{\varphi}(x) \leq \varepsilon \quad (10)$$

при $a < x < b$ и $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$.

Если иметь в виду (9') и (10), то для $W_n(x)$ имеем

$$\frac{|W_n(x + \Delta x) - W_n(x)|}{|\Delta x|^{\delta}} \tilde{\varphi}(x) < 2\varepsilon \quad (11)$$

при $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$, $a < x < b$.

Так как $a < x_n < b$, то из $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_n\}$, которая сходится к x_0 , т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Рассмотрим следующие случаи:

- а) $a < x_0 < b$,
- б) $x_0 = a$,
- в) $x_0 = b$.

Исследуем случай а). Обозначим

$$\inf_n \{\sigma(x_n), \eta(\varepsilon)\} = \eta_1(\varepsilon) > 0.$$

Из последовательности $\{\Delta x_n\}$ мы можем извлечь подпоследовательность $\{\Delta x_n\}$, для всех членов которой либо $|\Delta x_n| \geq \eta_1(\varepsilon)$, либо $|\Delta x_n| < \eta_1(\varepsilon)$.

В первом случае в силу (9)

$$l \leq \frac{|W_n(x_n + \Delta x_n) - W_n(x_n)|}{\eta_1^{\delta}(\varepsilon)} \tilde{\varphi}(x_n) \leq$$

$$\leq \frac{|u_n(x_n + \Delta x_n) - u_0(x_n + \Delta x_n)| \tilde{\varphi}(x_n)}{\eta_1^{\delta}(\varepsilon)} +$$

$$+ \frac{|u_n(x_n) - u_0(x_n)| \tilde{\varphi}(x_n)}{\eta_1^{\delta}(\varepsilon)}. \quad (12)$$

Так как $\tilde{\varphi}(x) = A \tilde{\varphi}(x + \Delta x)$, где

$$A = \max \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^{\alpha+\delta}, \left(\frac{4}{3} \right)^{\beta+\delta} \right\},$$

то из (12) получим

$$l \leq \frac{(1+A) \sup_{a < x < b} \{ |W_n(\tilde{x})| \tilde{\varphi}(x) \}}{\eta_1(\varepsilon)}.$$

Если в этом неравенстве перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, учитывая, что выражение, стоящее в числителе, стремится к нулю, получим $l \leq 0$, что невозможно.

Во втором случае из (9) в силу (9') и (10) получим

$$l \leq \frac{|u_n(x_n + \Delta x_n) - u_n(x_n)| \tilde{\varphi}(x_n)}{|\Delta x_n|} + \frac{|u_0(x_n + \Delta x_n) - u_0(x_n)| \tilde{\varphi}(x_n)}{|\Delta x_n|^\delta} < 2\varepsilon,$$

что противоречит выбору ε .

Рассмотрим случай б). В этом случае, поскольку $x_n \rightarrow a$, имеем что, начиная с некоторого N , $\sigma(x_n) < \eta(\varepsilon)$ ($n > N$), следовательно, $|\Delta x_n| < \eta(\varepsilon)$. Если теперь для $n > N$ воспользоваться неравенствами (9) и (11), то получим $l < \varepsilon$.

Аналогично исследуется случай с).

Необходимость. Пусть множество $K \subset H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$ является компактным. Докажем выполнимость условия 2) для множества K . В силу теоремы Хаусдорфа для множества K существует $\frac{\varepsilon}{2}$ — сеть, состоя-

щая из функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, принадлежащих пространству $H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$.

Так как $u_i(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta, 0}$ ($i = \overline{1, n}$), то для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует такое $\eta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех $a < x < b$ и $|\Delta x| < \eta_1(\varepsilon)$ имеет место

$$\frac{|u_i(x + \Delta x) - u_i(x)| \tilde{\varphi}(x)}{|\Delta x|^\delta} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12')$$

Пусть $\eta(\varepsilon) = \min_i \{\eta_1(\varepsilon)\}$. Тогда при всех

$$a < x < b \text{ и } |\Delta x| < \eta(\varepsilon)$$

будет выполняться неравенство (12').

Пусть теперь $u(x)$ — любая функция из K . Тогда существует функция $u_i(x)$ такая, что

$$\frac{|u(x + \Delta x) - u_i(x + \Delta x) - u(x) + u_i(x)| \tilde{\varphi}(x)}{|\Delta x|^\delta} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12'')$$

при всех $a < x < b$ и $|\Delta x| \leq \sigma(x)$.

Пусть $a < x < b$ и $|\Delta x| < \eta(\varepsilon)$. В силу (12') и (12'') получим

$$\begin{aligned} & \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)| \tilde{\varphi}(x)}{|\Delta x|^\delta} \leq \\ & \leq \frac{|u(x + \Delta x) - u_i(x + \Delta x) - u(x) + u_i(x)| \tilde{\varphi}(x)}{|\Delta x|^\delta} + \\ & + \frac{|u_i(x + \Delta x) - u_i(x)| \tilde{\varphi}(x)}{|\Delta x|^\delta} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если $0 < \alpha' < \alpha$, $0 < \beta' < \beta$, $0 < \delta < \delta' \leq 1$, то пространство $H_{\alpha', \beta', \delta'}$ является компактным в $H_{\alpha, \beta, \delta}$ в смысле метрики $\rho_{\alpha, \beta, \delta}$. Для доказательства этого следствия достаточно показать выполнение условия (7).

Теорема 9. Пространство $H_{\alpha, \beta, \delta}$ является компактным в $H_{\alpha, \beta, \delta'}$ в смысле метрики $\rho_{\alpha, \beta, \delta}$ ($0 < \delta' < \delta$).

Эта теорема следует из неравенства Мухтарова, которое заключается в следующем: для всех $u(x) \in H_{\alpha, \beta, \delta}$ имеет место оценка

$$\sup_{\substack{a < x < b \\ |\Delta x| < \sigma(x)}} \left\{ \frac{|u(x + \Delta x) - u(x)|}{|\Delta x|^{\delta'}} (x-a)^{\alpha+\delta} (b-x-\Delta x)^{\beta+\delta} \right\} \leq l_1 \cdot \kappa^{\frac{\delta'}{\delta}} \left\{ \sup_{a < x < b} |u(x)| (x-a)^{\alpha+\delta} (b-x)^{\beta+\delta} \right\}^{\frac{\delta-\delta'}{\delta}},$$

$$\text{где } 0 < \delta' < \delta, l_1 = \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^{\alpha+\delta} + \left(\frac{5}{4} \right)^{\beta+\delta} \right\}^{\frac{\delta-\delta'}{\delta}}.$$

В заключение отметим, что теорема 3 и вытекающие из нее следствия остаются в силе и в том случае, когда функции $u(\tau) \in \tilde{H}(\varphi, 0)$ определены на замкнутой (или на разомкнутой) гладкой кривой, расположенной на комплексной плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухтаров Х. Ш. „ДАН Азерб. ССР“, XXI, № 4, 1965.
2. Бабаев А. А. „Уч. зап. АГУ, серия физ.матем. наук“, № 4, 1963.
3. Lond W. S. Functions with Prescribed Lipschitz condition. Proc. Amer. Math. Soc. 2, № 3 (1951), 358—360.
4. Auerbach H. Über die Höldersch Banach Bedingung. Studia Math. № 3, 1931, 180—184.
5. Рубинштейн А. И. Об ω -локунарных рядах и о функциях классов. Матем. сб. т. 65 (107:2), 1964.
6. Гусейнов А. И. „Изв. АН СССР, серия матем.“, т. 12, 1948.

И. Н. ИБРАГИМОВ и Р. М. АЛИЕВ

О НЕКОТОРЫХ НАИЛУЧШИХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

Обозначим через $W_{L_2}(M; D)$ класс функций $f(x, y)$, имеющих интегрируемые с квадратом частные производные $f'_x(x, 1)$, $f'_y(1, y)$ и $f''_{xy}(x, y)$, которые в заданном квадрате $D \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$ удовлетворяют условиям:

$$1^\circ. \left(\int_0^1 [f'_x(x, 1)]^2 dx \right)^{1/2} \leq M; \quad 2^\circ. \left(\int_0^1 [f'_y(1, y)]^2 dy \right)^{1/2} \leq M; \\ 3^\circ. \left(\int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}(x, y)]^2 dx dy \right)^{1/2} \leq M. \quad (0,1)$$

Кроме того, обозначим через $WH^{(\alpha, \beta)}(M; D)$ класс функций $f(x, y)$ удовлетворяющих в квадрате (D) условию:

$$\left| f(x', y') + f(x'', y'') - 2f\left(\frac{x' + x''}{2}, \frac{y' + y''}{2}\right) \right| \leq \\ \leq M \left\{ \left| \frac{x' - x''}{2} \right|^\alpha + \left| \frac{y' - y''}{2} \right|^\beta \right\}, \quad (0,2)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, $0 \leq x', x'' \leq 1$ и $0 \leq y', y'' \leq 1$.

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k, s=0}^{m, n} C_{ks} f(x_k, y_s) + R_{mn}(f) \quad (0,3)$$

при условиях, что

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1, \quad (0,4) \\ 0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < y_n = 1, \\ C_{ks} = A_k B_s, \quad \sum_{k=0}^m A_k = \sum_{s=0}^n B_s = 1.$$

В дальнейшем, следуя С. М. Никольскому [1], кубатурную формулу (0,3) при условиях (0,4) будем называть наилучшей кубатурной формулой вида (0,3) если числа x_k , y_s и C_{ks} ($k = 0, 1, \dots, m$; $s = 0, 1, 2, \dots, n$) подобраны так, чтобы величины

$$E_{mn} \{ M_{L_2}(M; D) \} = \sup_{f \in M_{L_2}} |R_{mn}(f)|$$

и

$$E_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)}(M; D) \} = \sup_{f \in WH^{(\alpha, \beta)}} |R_{mn}(f)|$$

оказались наименьшими.

Введем обозначения:

$$E_{mn} \{ W_{L_2} \} = \min_{(x_k, y_s, C_{ks})} E_{mn} \{ W_{L_2}(M; D) \}; \quad (0,5)$$

$$E_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)} \} = \min_{(x_k, y_s, C_{ks})} E_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)}(M; D) \}. \quad (0,6)$$

В настоящей работе найдены наилучшие кубатурные формулы* вида (0,3) при условиях (0,4) в классах функций

$$W_{L_2}(M; D) \text{ и } WH^{(\alpha, \beta)}(M; D).$$

1. Заметим, что для каждой функции $f(x, y)$ из класса $W_{L_2}(M; D)$ имеет место тождество:

$$f(x, y) = f(1, 1) - \int_x^1 f'_u(u, 1) du - \int_y^1 f'_v(1, v) dv + \\ + \int_x^1 \int_y^1 f''_{uv}(u, v) dudv. \quad (1,1)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию:

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1,2)$$

Тогда тождество (1,1) примет вид

$$f(x, y) = f(1, 1) - \int_0^1 E(u - x) f'_u(u, 1) du - \\ - \int_0^1 E(v - y) f'_v(1, v) dv + \\ + \int_0^1 \int_0^1 E(u - x) E(v - y) f''_{uv}(u, v) dudv. \quad (1,3)$$

Заметим, что в силу тождества (1,3) сумма, стоящая в правой части (0,3), при условиях (0,4) примет вид

$$\sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^n A_k B_s f(x_k, y_s) = f(1, 1) - \sum_{k=0}^m A_k \int_0^1 E(u - x_k) f'_u(u, 1) du - \\ - \sum_{s=0}^n B_s \int_0^1 E(v - y_s) f'_v(1, v) dv + \\ + \sum_{k=0}^m \sum_{s=0}^n A_k B_s \int_0^1 \int_0^1 E(u - x_k) E(v - y_s) f''_{uv}(u, v) dudv. \quad (1,4)$$

* Г. Я. Доронин [3] в классе функций $f(x)$, имеющих производную $f'(x)$ на интервале $(0, 1)$ и удовлетворяющих условиям: $1^\circ f(0) = 0$;

$$2^\circ \|f'(x)\|_{L_2} = \left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leq 1,$$

построил наилучшую квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n p_k f(x_k).$$

Наилучшая кубатурная формула вида (0,3)* была построена М. Левиным [4] в классе функций $f(x, y)$, удовлетворяющих условиям

$$1^\circ f(0, y) \equiv f(x, 0) \equiv 0,$$

$$2^\circ. \left(\int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}(x, y)]^2 dx dy \right)^{1/2} \leq M$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что для функции $f(x, y) \in W_{L_2}(M; D)$ имеет место еще следующее тождество:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = f(1, 1) - \int_0^1 u f'_u(u, 1) du - \int_0^1 u f'_u(1, v) dv + \int_0^1 \int_0^1 uv f''_{uv}(u, v) dudv. \quad (1,5)$$

Из тождества (1,4) и (1,5) следует, что для $R_{mn}(f)$ в формуле (0,3) имеет место представление:

$$R_{mn}(f) = - \int_0^1 [u - \sum_{k=0}^m A_k E(u - x_k)] f'_u(u, 1) du - \int_0^1 [v - \sum_{s=0}^n B_s E(v - y_s)] f'_v(1, v) dv + \int_0^1 \int_0^1 [uv - \sum_{k,s=0}^{m,n} C_{ks} E(u - x_k) E(v - y_s)] f''_{uv}(u, v) dudv.$$

Отсюда, используя неравенство Буняковского и имея в виду условие (0,1) находим:

$$|R_{mn}(f)| \leq M \left[\left(\int_0^1 F_{10}^2(u) du \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 F_{01}^2(v) dv \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \int_0^1 F_{11}^2(u, v) dudv \right)^{1/2} \right], \quad (1,6)$$

где положено, что

$$F_{10}(u) = u - \sum_{k=0}^m A_k E(u - x_k), F_{01}(v) = v - \sum_{s=0}^n B_s E(v - y_s), F_{11}(u, v) = uv - \sum_{k,s=0}^{m,n} C_{ks} E(u - x_k) E(v - y_s). \quad (1,7)$$

Заметим, что в силу тождества (1,1) функция $f(x, y) \in W_{L_2}(M; D)$ может быть определена при задании ее частных производных в следующем виде:

$$f'_x(x, 1) = -M \left(\int_0^1 F_{10}^2(u) du \right)^{-1/2} F_{10}(x), \\ f'_y(1, y) = -M \left(\int_0^1 F_{01}^2(v) dv \right)^{-1/2} F_{01}(y), \\ f''_{xy}(x, y) = M \left(\int_0^1 \int_0^1 F_{11}^2(u, v) dudv \right)^{-1/2} F_{11}(x, y).$$

Очевидно, для функции $f(x, y)$ неравенство (1,6) превращается в равенство, а это означает, что

$$E_{mn}\{W_{L_2}(M; D)\} = \sup_{f \in W_{L_2}} |R_{mn}(f)| = M \left[\left(\int_0^1 F_{10}^2(u) du \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 F_{01}^2(v) dv \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 \int_0^1 F_{11}^2(u, v) dudv \right)^{1/2} \right], \quad (1,8)$$

где $F_{10}(u)$, $F_{01}(v)$ и $F_{11}(u, v)$ определяются равенствами (1,7).

Разобьем каждый из интегралов, стоящих в правой части (1,8), соответственно, на m , n и mn интегралов:

$$E_{mn}\{W_{L_2}(M; D)\} = M \left[\left(\sum_{k=0}^{m-1} I_1^{(k)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{s=0}^{n-1} I_2^{(s)} \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} I_3^{(k,s)} \right)^{1/2} \right], \quad (1,9)$$

где

$$I_1^{(k)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [u - \sum_{j=0}^m A_j E(u - x_j)]^2 du = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [u - \sum_{j=0}^m A_j]^2 du, \\ I_2^{(s)} = \int_{y_s}^{y_{s+1}} [v - \sum_{j=0}^n B_j]^2 dv, \\ I_3^{(k,s)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} [uv - \sum_{i,j=0}^{m,n} C_{ij}]^2 dudv. \quad (1,10)$$

Равенство (1,9) показывает, что для нахождения величины $\varepsilon_{mn}\{W_{L_2}\}$, определяемой равенствами (0,5), достаточно подобрать узлы (x_k, y_s) и коэффициенты C_{ks} так, чтобы при условии (0,4) $E_{mn}\{W_{L_2}(M; D)\}$ имела бы наименьшие значения.

Для этой цели заметим, что если неотрицательные функции $f_1(x)$, $f_2(y)$, и $f_3(x, y)$ ($0 \leq x, y \leq 1$) обладают, соответственно, минимальными значениями $f_1(x^0)$, $f_2(y^0)$, $f_3(x^0, y^0)$, то для минимального значения функции

$$\Phi(x, y) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(x, y)$$

по совокупности переменных (x, y) имеет место равенство

$$\min_{(x,y)} \Phi(x, y) = \min_{(x)} f_1(x) + \min_{(y)} f_2(y) + \min_{(x,y)} f_3(x, y).$$

Благодаря этому, из равенства (1,9) находим

$$\varepsilon_{mn}\{W_{L_2}\} = M \left[\min_{(x_k, y_s)} \left(\sum_{k=0}^{m-1} I_1^{(k)} \right)^{1/2} + \min_{(y_s, \beta_s)} \left(\sum_{s=0}^{n-1} I_2^{(s)} \right)^{1/2} + \min_{(x_k, y_s, \alpha_k, \beta_s)} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} I_3^{(k,s)} \right)^{1/2} \right], \quad (1,11)$$

где положено

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^k A_i, \beta_s = \sum_{j=0}^s B_j \quad (\kappa = 0, 1, \dots, m; s = 0, 1, \dots, n). \quad (1,12)$$

Прежде всего, при фиксированных x_k и y_s подберем числа A_k и B_s ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, m, s = 0, 1, \dots, n$) так, чтобы интегралы $I_1^{(k)}$, $I_2^{(s)}$ и $I_3^{(k,s)}$ имели наименьшее значение. Очевидно, имеет место равенство

$$\frac{dI_1^{(k)}}{d\alpha_k} = -(x_{k+1} - x_k)(x_k + x_{k+1} - 2\alpha_k) = 0.$$

при условии, что

$$\sum_{i=0}^k A_i = \alpha_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \quad (\kappa = 0, 1, \dots, m). \quad (1,13)$$

Кроме того, в силу условия (0,4) имеем:

$$\frac{d^2 I_1^{(k)}}{d\alpha_k^2} = 2(x_{k+1} - x_k) > 0 \quad (\kappa = 0, 1, \dots, m).$$

Отсюда следует, что

$$\min_{(x_k)} I_1^{(k)} = \frac{1}{3} (x_{k+1}^3 - x_k^3) - \frac{1}{4} (x_k + x_{k+1})^2 (x_{k+1} - x_k).$$

Аналогично этому доказывается, что $I_2^{(s)}$ принимает минимальное значение при

$$\sum_{j=0}^s B_j = \beta_s = \frac{1}{2} (y_s + y_{s+1}) \quad (s = 0, 1, \dots, n), \quad (1,14)$$

а $I_3^{(k,s)}$ при

$$\gamma_{ks} = \alpha_k \beta_s = \frac{1}{4} (x_k + x_{k+1}) (y_s + y_{s+1}). \quad (1,15)$$

Кроме того, имеем:

$$\min_{(\beta_s)} I_2^{(s)} = \frac{1}{3} (y_{s+1}^3 - y_s^3) - \frac{1}{4} (y_s + y_{s+1})^2 (y_{s+1} - y_s);$$

$$\min_{(\gamma_{ks})} I_3^{(k,s)} = \frac{1}{9} (x_{k+1}^3 - x_k^3) (y_{s+1}^3 - y_s^3) - \frac{1}{16} (x_k + x_{k+1})^2 (x_{k+1} - x_k) (y_s + y_{s+1})^2 (y_{s+1} - y_s).$$

Таким образом, из равенства (1,11) находим

$$\varepsilon_{mn} \{ W_{L_2} \} = M \left[\min_{(x_k)} \left(\varphi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \right)^{1/2} + \min_{(y_s)} \left(\varphi_2(y_1, \dots, y_{n-1}) \right)^{1/2} + \min_{(x_k, y_s)} \left(\varphi_3(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) \right)^{1/2} \right], \quad (1,16)$$

где положено:

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{m-1} (x_k + x_{k+1}) (x_{k+1}^2 - x_k^2),$$

$$\varphi_2(y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \sum_{s=0}^{n-1} (y_s + y_{s+1}) (y_{s+1}^2 - y_s^2), \quad (1,17)$$

$$\varphi_3(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \sum_{k,s=0}^{m-1, n-1} [(x_{k+1} + x_k) (x_{k+1}^2 - x_k^2) \times \\ \times (y_{s+1} + y_s) (y_{s+1}^2 - y_s^2)].$$

Определим теперь x_k и y_s ($k = 1, 2, \dots, m-1$; $s = 1, 2, \dots, n-1$), минимизирующие функции φ_1 , φ_2 , и φ_3 . Для определения x_k ($k = 1, 2, \dots, m-1$), минимизирующих $\varphi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ первого равенства (1,17), получим систему уравнений:

$$x_2^2 - 2x_1 x_2 = 0, \quad (1,18)$$

$$x_{k+1}^2 - 2x_k x_{k+1} + 2x_k x_{k-1} - x_{k-1}^2 = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, m-1).$$

Из равенства (1,18) следует, что

$$x_2 = 2x_1, x_3 = 3x_1, \dots, x_{m-1} = (m-1)x_1, x_m = mx_1 = 1.$$

Отсюда находим

$$x_k = \frac{k}{m} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1). \quad (1,19)$$

Нетрудно убедиться, что функция $\varphi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ имеет минимальное значение при $x_k = \frac{k}{m}$ ($k = 1, 2, \dots, m-1$). Аналогично этому доказывается, что

$$y_s = \frac{s}{n} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \quad (1,20)$$

минимизирует функцию $\varphi_2(y_1, \dots, y_{n-1})$ и, кроме того, функция $\varphi_3(x_1, \dots, x_{m-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$ достигает своего минимума при тех же значениях x_k и y_s , определенных равенствами (1,19) и (1,20); причем имеем:

$$\min \varphi_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4m^3} \sum_{k=0}^{m-1} (2k+1)^2 = \frac{1}{12m^2};$$

$$\min \varphi_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4n^3} \sum_{s=0}^{n-1} (2s+1)^2 = \frac{1}{12n^2};$$

$$\min \varphi_3 = \frac{1}{9} -$$

$$\frac{1}{16m^3n^3} \sum_{k,s=0}^{m-1, n-1} (2k+1)^2 (2s+1)^2 = \frac{4m^2 + 4n^2 - 1}{144m^2n^2}. \quad (1,21)$$

При этом мы воспользовались тем, что

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2\lambda-1)^2 = \frac{\lambda(2\lambda-1)(2\lambda+1)}{3}.$$

Далее в силу равенства (1,19) и (1,20) из (1,13), (1,14) и (1,15) находим:

$$\sum_{i=0}^k A_i = \frac{2k+1}{2m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1);$$

$$\sum_{j=0}^s B_j = \frac{2s+1}{2n} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n-1); \quad (1,22)$$

$$\sum_{i,j=0}^{k,s} C_{ij} = \frac{(2k+1)(2s+1)}{4mn} \quad \left(\begin{matrix} k = 0, 1, \dots, m-1 \\ s = 0, 1, \dots, n-1 \end{matrix} \right).$$

Кроме того, учитывая условия (0,4), из равенств (1,22) получим:

$$A_0 = A_m = \frac{1}{2m}; \quad A_k = \frac{1}{m} \quad (k = 1, 2, \dots, m-1);$$

$$B_0 = B_n = \frac{1}{2n}; \quad B_s = \frac{1}{n} \quad (s = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1,23)$$

В силу (1,21) из равенства (1,16) получим

$$\varepsilon_{mn} \{ W_{L_2} \} = M \left(\frac{1}{2m\sqrt{3}} + \frac{1}{2n\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{4m^2 + 4n^2 - 1}}{12mn} \right). \quad (1,24)$$

Таким образом, мы приходим к следующему заключению:

Теорема 1. Кубатурная формула (0,3) при условиях (0,4) является наилучшей кубатурной формулой в классе $W_{L_2}(M; D)$, если ее узлы x_k , y_s и коэффициенты C_{ks} ($k = 0, 1, \dots, m$; $s = 0, 1, \dots, n$) определяются, соответственно равенствами (1,19), (1,20) и (1,23). Кроме того, для величины $\varepsilon_{mn} \{ W_{L_2} \}$ имеет место равенство (1,24).

II. Займемся теперь построением наилучшей кубатурной формулы вида (0,3) в классе $WH^{(a,b)}(M; D)$ при условиях:

$$\sum_{i=0}^m A_i = 1 \quad (A_i > 0), \quad \sum_{j=0}^n B_j = 1 \quad (B_j > 0). \quad (2,1)$$

Следуя А. Х. Турецкому [2], выберем узлы (x_k, y_s) ($k = 0, 1, \dots, m-1$; $s = 0, 1, \dots, n-1$) в виде*:

$$x_k = \sum_{i=0}^k A_i - \frac{A_k}{2}, y_s = \sum_{j=0}^s B_j - \frac{B_s}{2} \quad (2,2)$$

и заметим, что $x_k \pm \frac{A_k}{2} \in [0, 1]$, $y_s \pm \frac{B_s}{2} \in [0, 1]$.

В этом случае имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k,s=0}^{m,n} \int_{x_k - \frac{A_k}{2}}^{x_k + \frac{A_k}{2}} \int_{y_s - \frac{B_s}{2}}^{y_s + \frac{B_s}{2}} f(x, y) dx dy =$$

$$\sum_{k,s=0}^{m,n} \int_0^{\frac{A_k}{2}} \int_0^{\frac{B_s}{2}} [f(x_k + t, y_s + \tau) + f(x_k + t, y_s - \tau) + f(x_k - t, y_s + \tau) + f(x_k - t, y_s - \tau)] dt d\tau.$$

Кроме того, для $f(x) \in WH^{(\alpha, \beta)}$ остаточный член $R_{mn}(f)$ формулы (0,3) примет вид

$$R_{mn}(f) = \sum_{k,s=0}^{m,n} \int_0^{\frac{A_k}{2}} \int_0^{\frac{B_s}{2}} [f(x_k + t, y_s + \tau) + f(x_k - t, y_s + \tau) + f(x_k + t, y_s - \tau) + f(x_k - t, y_s - \tau) - 4f(x_k, y_s)] dt d\tau,$$

из которого в силу условия (0,2) находим

$$R_{mn}(f) \leq M \left[\sum_{k=0}^m \frac{A_k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} + \sum_{s=0}^n \frac{B_s^{\beta+1}}{(\beta+1)2^{\beta+1}} \right]. \quad (2,3)$$

Отсюда вытекает

$$\varepsilon_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)} \} = M \min_{(A_k, B_s)} \left[\sum_{k=0}^m \frac{A_k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} + \sum_{s=0}^n \frac{B_s^{\beta+1}}{(\beta+1)2^{\beta+1}} \right]. \quad (2,4)$$

Для подсчета правой части (2,4), применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, рассмотрим функцию

$$\Phi(0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_n) = \sum_{k=0}^m \frac{A_k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} + \sum_{s=0}^n \frac{B_s^{\beta+1}}{(\beta+1)2^{\beta+1}} - \frac{\lambda_1}{2} \sum_{k=0}^m A_k - \frac{\lambda_2}{2} \sum_{s=0}^n B_s.$$

* При таком выборе узлов М. В. Аксень [5] построил наилучшую квадратную формулу вида

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^m p_k f(x_k)$$

в классе функций $f(x)$, непрерывных на $[a, b]$ и удовлетворяющих для всех $x \pm h \in [a, b]$ неравенству

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq M|h|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Заметим, что из уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A_k} = \frac{A_k^\alpha}{2^{\alpha+1}} - \frac{\lambda_1}{2} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, m),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B_s} = \frac{B_s^\beta}{2^{\beta+1}} - \frac{\lambda_2}{2} = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

и из равенств (2,2) следует, что

$$A_k = 2\lambda_1, x_k = \lambda_1(2k+1) \quad (k = 0, 1, \dots, m) \\ B_s = 2\lambda_2, y_s = \lambda_2(2s+1) \quad (s = 0, 1, \dots, n).$$

(2,5)

Из первого равенства (2,5) и из условия $\sum_{k=0}^m A_k = 1$ вытекает, что

$\lambda_1 = \frac{1}{2(m+1)}$. Аналогично этому из второго равенства (2,5) и из условия $\sum_{s=0}^n B_s = 1$ вытекает, что $\lambda_2 = \frac{1}{2(n+1)}$. Нетрудно убедиться в том, что функция

$$\sum_{k=0}^m \frac{A_k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}} + \sum_{s=0}^n \frac{B_s^{\beta+1}}{(\beta+1)2^{\beta+1}}$$

достигает своего минимума при

$$A_k = \frac{1}{m+1}, B_s = \frac{1}{n+1}, x_k = \frac{2k+1}{2m+2}, y_s = \frac{2s+1}{2n+2} \quad (k = 0, 1, \dots, m; s = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2,6)$$

Кроме того, имеем

$$\varepsilon_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)} \} = \frac{M}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}(m+1)^\alpha} + \frac{M}{(\beta+1)2^{\beta+1}(n+1)^\beta}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 2. Наилучшая кубатурная формула вида (0,3) в классе $WH^{(\alpha, \beta)}(M; D)$ при условиях (2,1) имеет вид

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k,s=0}^{m,n} f\left(\frac{2k+1}{2m+2}, \frac{2s+1}{2n+2}\right) + R_{mn}(f),$$

причем

$$\varepsilon_{mn}^* \{ WH^{(\alpha, \beta)} \} = M \left\{ \frac{1}{(\alpha+1)2^{\alpha+1}(m+1)^\alpha} + \frac{1}{(\beta+1)2^{\beta+1}(n+1)^\beta} \right\}.$$

В частности, в случае $\alpha = \beta = 1$ имеем

$$\varepsilon_{mn}^* \{ WH^{(1,1)} \} = \frac{M}{8} \frac{m+n+2}{(m+1)(n+1)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М., 1958.
2. Турецкий А. Х. „Успехи матем. наук“, вып. 5, 1956, 166—171.
3. Доронин Г. Я. К вопросу о формулах механических квадратур. Сб. науч.-техн. трудов Днепропетровского инженерно-строительного ин-та, 1955, № 1—2, 210—217.
4. Левин М. „Изв. АН ЭССР, серия физ.-матем. и техники наук“, 1963, 2, 141—145.
5. Аксель М. Б. „Ж. вычисл. матем. и матем. физики“, т. 4, 1964, № 3, 554—558.

М. Б. МАМЕДОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕСАМОСПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В НЕКОТОРЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Настоящая работа посвящена разложению по решениям задачи теории рассеяния (з. т. р.) для несамоспряженного уравнения Шредингера с экспоненциально убывающим потенциалом в полупространстве или октантах пространства E_3 . Эта задача в случае всего пространства E_3 впервые решена М. Г. Гасымовым [1].

Изложение проведем для случая полупространства $x_2 \geq 0$. Обозначим его через E_3^+ . Рассмотрим уравнение

$$l(u) \equiv - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u + q(x_1, x_2, x_3)u = \lambda^2 u \quad (1)$$

с граничным условием $u(x_1, 0, x_3) = 0$.

Здесь $q(x_1, x_2, x_3) = q(x)$ — комплекснозначная функция в E_3^+ , удовлетворяющая условию

$$|q(x)| \leq C e^{-\varepsilon r}, \quad (3)$$

где C и ε — положительные постоянные, $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = |x|$. Обозначим через L оператор в $L_2(E_3^+)$, порожденный дифференциальным выражением l и условием (2).

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in E_3, \\ |\omega| = (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)^{1/2} = 1.$$

Определение. Решением з. т. р. для уравнения (1) при условии (2) назовем такое решение $u(x, \lambda, \omega)$ задачи (1) — (2), которое имеет вид

$$u(x, \lambda, \omega) = \frac{1}{2} [e^{i\lambda(x, \omega)} - e^{i\lambda(\alpha x, \omega)}] + v(x, \lambda, \omega), \quad (4)$$

где $v(x, \lambda, \omega)$ при вещественных λ удовлетворяет условиям Зоммерфельда:

$$rv = O(1), \quad r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i\lambda v \right) = o(1) \quad (5)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow x'} v(x, \lambda, \omega) = v(x', \lambda, \omega) = 0. \quad (6)$$

Здесь $x \in E_3^+$, x' — произвольная точка плоскости $x_2 = 0$. Из (4) и (1) получим

$$-\Delta v - \lambda^2 v = -q(x) \text{ и } (x, \lambda, \omega). \quad (7)$$

Пусть L_0 — оператор, порожденный дифференциальным выражением Лапласа и условиями (5), (6). Известно [5], что уравнение $-L_0 v = \lambda^2 v$ при действительных λ имеет только тривиальное решение. Следовательно, существует обратный оператор $(-L_0 - \lambda^2)^{-1}$. Обозначим ядро этого оператора через $R^0(x, y, \lambda)$. Известно, что

$$R^0(x, y, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{i\lambda|\alpha x-y|}}{|\alpha x-y|} \right).$$

Применим оператор $(-L_0 - \lambda^2)^{-1}$ к обоим сторонам уравнения (7). В результате, принимая во внимание (4), получаем уравнение з. т. р.:

$$u(x, \lambda, \omega) = \frac{1}{2} [e^{i\lambda(x, \omega)} - e^{i\lambda(\alpha x, \omega)}] - \int_{E_3^+} R^0(x, y, \lambda) q(y) \cdot u(y, \lambda, \omega) dy. \quad (8)$$

Теорема 1. Оператор L имеет только конечное число собственных значений $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_k^2$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x, \lambda) = - \int_{E_3^+} R^0(x, y, \lambda) q(y) u(y, \lambda) dy \quad (Im \lambda > 0). \quad (9)$$

Заметим, что собственными значениями оператора L являются те λ^2 при которых уравнение (9) имеет нетривиальное решение из $L_2(E_3^+)$. Учитывая, что при $Im \lambda > 0$

$$\left| \frac{e^{i\lambda|x-y|}}{|x-y|} \right| \geq \left| \frac{e^{i\lambda|\alpha x-y|}}{|\alpha x-y|} \right|,$$

проинтегрировав интегральное уравнение (9), легко можно обнаружить, что ядро у полученного уравнения является ядром типа Гильберта — Шмидта, а коэффициент при $q(y)u(y, \lambda)$ в подынтегральном выражении является ограниченной и непрерывной функцией переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ во всем полупространстве E_3^+ . После этого замечания доказательство проводится по той же схеме, как в работе [3].

Из работы [4] следует, что оператор L на положительной полуоси не имеет собственных значений. Следовательно, все точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ лежат в верхней полуплоскости. Методом, описанным в работе [1], можно получить связь между собственными значениями оператора L и точками разрешимости уравнения з. т. р. Для формулировки соответствующих результатов введем гильбертово пространство $L_2(E_3^+, \varepsilon)$ функций $f(x)$, для которых

$$\int_{E_3^+} |f(x)|^2 e^{-\varepsilon|x|} dx < \infty.$$

Теорема 2. Уравнение з. т. р. разрешимо при всех λ с $Im \lambda > -\varepsilon/2$, за исключением, быть может, счетного множества M точек с возможными предельными точками на прямой $Im \lambda = -\varepsilon/2$. При этом любое решение данного уравнения из $L_2(E_3^+, \varepsilon)$ при действительных λ является решением з. т. р.

Из уравнения (8) и из этой теоремы следует, что $u(x, \lambda, \omega)$ является аналитической функцией λ в области $Im \lambda > -\varepsilon/2$, за исключением точек из M . А в каждой точке множества M функция $u(x, \lambda, \omega)$ имеет полюсы конечного порядка. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ те точ-

ки множества M , для которых $\operatorname{Im} \lambda_i > 0$ ($i = 1, \dots, \kappa$). В этих точках функция $u(x, \lambda, \omega)$ имеет полюсы конечного порядка: $m_1, \dots, m_\kappa$, соответственно. Если положим $s = \lambda^2$ (предполагается, что $\operatorname{Im} \sqrt{s} > 0$), то функция $u(x, \sqrt{s}, \omega)$ будет аналитической функцией s везде, за исключением полуоси $s > 0$ и $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_\kappa^2$. Очевидно, что $u(x, \sqrt{s}, \omega)$ имеет полюсы порядка $m_1, m_2, \dots, m_\kappa$ в точках $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_\kappa^2$, соответственно. Поэтому в окрестности $s = \lambda_j^2$ ($j = 1, \dots, \kappa$) она разлагается в ряд Лорана:

$$u(x, \sqrt{s}, \omega) = \sum_{q=1}^{m_j} \frac{u_{m_j-q,j}(x, \omega)}{(s - \lambda_j^2)^q} + u_j(x, s, \omega), \quad (10)$$

где $u_j(x, s, \omega)$ регулярна в точке $s = \lambda_j^2$.

Теорема 3. Система функций $u_{0,j}(x, \omega)$, $u_{1,j}(x, \omega)$, ..., $u_{m_j-1,j}(x, \omega)$ из (10) образует цепочку из собственных и присоединенных функций оператора L , соответствующих собственному числу λ_j^2 . Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ суть полюсы функции $u(x, \lambda, \omega)$ на действительной оси λ . Можно показать, что в этих точках з. т. р. неразрешима. Известно [4], что числа $\mu_1^2, \dots, \mu_p^2$ не могут быть собственными значениями оператора L . Эти числа принято называть спектральными особенностями оператора L . В окрестности этих точек функция $u(x, \lambda, \omega)$ разлагается в ряд Лорана:

$$u(x, \lambda, \omega) = \sum_{\mu=1}^{n_j} \frac{v_{n_j-\mu,j}(x, \omega)}{(\lambda - \mu_j)^{\mu}} + v_j(x, \lambda, \omega), \quad (11)$$

где $v_j(x, \lambda, \omega)$ — голоморфная функция в окрестности точки μ_j . Предположим, что в разложениях (10) и (11) функции $u_{m_j-q,j}(x, \omega)$ и $v_{n_j-\mu,j}(x, \omega)$ не зависят от ω , поскольку в общем случае добавятся лишь технические осложнения.

Лемма 1. Функции $v_{\gamma,j}(x)$ ($\gamma = 0, \dots, n_j - 1, j = 1, \dots, p$) удовлетворяют интегральным уравнениям:

$$v_{\gamma,j}(x) = \int_{E_3^+} \sum_{p=0}^{\gamma} \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} R_0(x, y, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_j} q(y) v_{\gamma-p}(y) dy, \\ \gamma = 0, \dots, n_j - 1, j = 1, \dots, p.$$

Очевидно, что при каждом $\delta > 0$ функция

$$v_{\gamma,j}(x, \delta) = \int_{E_3^+} \sum_{p=0}^{\gamma} \frac{\partial^p}{\partial \lambda^p} R_0(x, y, \lambda) \Big|_{\lambda=\mu_j + \delta} q(y) v_{\gamma-p}(y) dy$$

лежит в $L_2(E_3^*)$ и при $\delta \rightarrow 0$ равномерно сходится к $v_{\gamma,j}(x)$ в каждой области изменения x .

Определение. Если существует предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{E_3^+} v_{\lambda,j}(x, \delta) v_{\lambda,j}(x, \delta) dx,$$

то он называется регуляризованным интегралом для $v_{\lambda,j}(x) v_{\lambda,j}(x)$.

Лемма 2. Регуляризованный интеграл для $v_{\lambda,j}(x) v_{\lambda,j}(x)$ существует.

Если обозначим ядро резольвенты оператора L через $R(x, y, \lambda)$, то можно показать, что она удовлетворяет уравнению

$$R(x, y, \lambda) = R^0(x, y, \lambda) - \int_{E_3^+} R^0(x, z, \lambda) q(z) R(z, y, \lambda) dz. \quad (12)$$

Очевидно, что при каждом фиксированном y свободный член этого уравнения принадлежит пространству $L_2(E_3^+, \varepsilon)$ и ядро является ядром типа Гильберта—Шмидта, если только $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$. Поэтому уравнение (12) разрешимо в $L_2(E_3^+, \varepsilon)$ при каждом λ , если только $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$ и $\lambda \in M$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\kappa$ — точки из верхней полуплоскости, принадлежащие M , $\mu_1, \dots, \mu_p$ — спектральные особенности. Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 4. Ядро резольвенты оператора L является ядром Карлемана при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $\lambda \in M$ и аналитической функцией λ в области $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$, за исключением точек из множества M и

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{j=1}^{\kappa} R_j(x, y, \lambda) + \tilde{R}(x, x, \lambda),$$

где $\tilde{R}(x, y, \lambda)$ является мероморфной функцией области $\operatorname{Im} \lambda > -\varepsilon/2$ и голоморфной при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, $R_j(x, y, \lambda)$ — главная часть ядра резольвенты в окрестности λ_j^2 и поэтому определяется обычным способом через линейные комбинации функций $u_{\gamma,j}(x)$ и $v_{\gamma,j}(y)$.

Теорема 5. В окрестности спектральных особенностей μ_j^2 ядро представимо в виде

$$R(x, y, \lambda) = \sum_{q=1}^{m_j} \frac{\beta_{q,j}(x, y)}{(\lambda^2 - \mu_j^2)^q} + A_j(x, y, \lambda), \\ j = 1, \dots, p,$$

где $A_j(x, y, \lambda)$ — голоморфная функция в точке $\lambda = \mu_j$, $\beta_j(x, y)$ линейно выражается через функции $v_{\gamma,j}(x)$ и $v_{\gamma,j}(y)$. Теперь можно сформулировать теорему о разложении. Пусть $\mu_1, \dots, \mu_p$ — спектральные особенности оператора L . Среди них могут быть симметричные относительно нуля. Пусть они занумерованы так, что $\mu_1 = -\mu_p, \mu_2 = -\mu_{p-1}, \dots, \mu_s = -\mu_{p-s+1}$, причем $\mu_1, \dots, \mu_s < 0$. Обозначим через Γ кривую, составленную из отрезков полуоси $\lambda > 0$ и маленьких полуокружностей вокруг полюсов функций $u(x, \lambda, \omega)$ и $u(x, -\lambda, \omega)$ на полуоси $\lambda > 0$. Притом эти полуокружности находятся в верхней полуплоскости, если центр является полюсом функции $u(x, \lambda, \omega)$, и в нижней полуплоскости, если центр находится в полюсе функции $u(x, -\lambda, \omega)$. Имеет место.

Теорема 6. Пусть $f(x)$ — финитная функция из $L_2(E_3^+)$, принадлежащая области определения оператора L . Пусть $R(x, y, \lambda)$ — ядро резольвенты оператора L . Тогда, если $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\lambda \in M$, то

$$\int_{E_3^+} R(x, y, \lambda) f(y) dy = \sum_{j=\kappa}^p \int_{E_3^+} R_j(x, y, \lambda) f(y) dy + \\ + \sum_{j=1}^p \sum_{q=1}^{n_j} \frac{1}{(\lambda^2 - \mu_j^2)^q} \int_{E_3^+} \beta_j(x, y) f(y) dy + \\ + \frac{1}{4\pi^3} \int_{\Gamma} \int_{W_3^+} \frac{u(x, -s, \omega) u(x, s, \omega) s^2 ds d\omega}{s^2 - \lambda^2} \quad (12)$$

где $F(s, \omega) = \int_{E_3^+} f(x) u(x, \lambda, \omega) d\omega$; ω_3^+ — единичная полусфера в E_3^+ , $d\omega^+$ —

—элементарная мера на ней. Формула (12) фактически является разложением по решениям з. т. р. для задачи (1)–(2). Разлагая решение з. т. р. по сферическим функциям, мы сводим эту задачу к задаче о разложении по решениям бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $P_l^m(\theta, \varphi)$ — ортонормированная система сферических функций, т. е.

$$P_l^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} \cos m \theta P_l^{-m}(\cos \varphi) (C_l^{-m})^{-1} & \text{если } m < 0 \\ \sin m \theta P_l^m(\cos \varphi) (C_l^m)^{-1} & \text{если } m > 0, \\ P_l^0(\cos \varphi) (C_l^0)^{-1} & \text{если } m = 0, \end{cases}$$

где

$$(C_l^{-m})^2 = \frac{2\pi}{2l+1} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}, \quad C_l^0 = \frac{4\pi}{2l+1},$$

$$l = 0, 1, 2, \dots; \quad m = -l, \dots, l$$

Известно, что эти функции образуют полную систему в $L_2(W_3)$, где W_3 — единичная сфера в E_3 . Часть этих функций, а именно (сообразно условию (2)): $\frac{1}{\sqrt{2}} P_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\theta, \varphi)$, $l = 1, 2, \dots, m = 1, \dots, l$ образуют пол-

ную систему функций в полусфере: $R = 1, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$. Обозначим эту полусферу, как и раньше, через W_3^+ .

Решение уравнения (8) ищем в виде

$$u(x, \lambda, \omega) =$$

$$= (2\pi)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \frac{1}{r} u_{l, m}^{l_1, m_1}(r, \lambda) \times$$

$$\times P_l^m(\theta, \varphi) \cdot P_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1),$$

где (θ, φ) — координаты вектора $\tilde{x} = \frac{x}{|x|} \in E_3^+$, (θ_1, φ_1) — координаты вектора $\omega \in E_3$. Используя уравнение (8), определим коэффициенты $u_{l, m}^{l_1, m_1}$. После некоторых выкладок [6] находим, что

$$R_0(x, y, \lambda) = \frac{\pi i}{2\sqrt{rt}} \sum_{l=1}^{\infty} I_{l+1/2}(\lambda r) H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda t) \sum_{m=1}^l P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta_2, \varphi_2), \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} [e^{i\lambda(x, \omega)} - e^{i\lambda(x, \omega)}] =$$

$$= 2(\pi)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{\lambda r}} \sum_{l=1}^{\infty} i^l I_{l+1/2}(\lambda r) \sum_{m=1}^l P_l^m(\theta, \varphi) \cdot P_l^m(\theta_1, \varphi_1), \quad (15)$$

где $r = |x| \leq |y| = t$; (θ_2, φ_2) — координаты вектору $\bar{y} = \frac{y}{|y|}$;

$I_{l+1/2}^{(r)}$, $H_{l+1/2}^{(t)}$ — соответственно, функции Бесселя и Ханкеля первого рода.

Подставив (13), (14) и (15) в уравнение (8), получим

$$2(\pi)^{3/2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{l_1=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{m_1=1}^{l_1} \frac{1}{r} u_{l, m}^{l_1, m_1}(r_1 > \lambda) P_l^m(\theta, \varphi) P_{l_1}^{m_1}(\theta_1, \varphi_1) =$$

$$= 2(\pi)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{\lambda r}} \sum_{l=1}^{\infty} i^l I_{l+1/2}(\lambda r) \sum_{m=1}^l P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta_1, \varphi_1) -$$

$$- \int_{W_3^+} \int_0^{\pi} \frac{\pi i t^2}{\sqrt{rt}} \sum_{l=1}^{\infty} I_{l+1/2}(\lambda t) H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda r) \cdot \sum_{m=1}^l P_l^m(\theta, \varphi) P_l^m(\theta_2, \varphi_2) \times$$

$$\times q(t, \theta_2, \varphi_2) \cdot (\pi)^{3/2} \cdot \frac{1}{t} \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{l_1'=0}^{\infty} \sum_{m'=1}^{l'} \sum_{m_1'=1}^{l_1'} i_{l', m'}^{l_1', m_1'}(t, \lambda)$$

$$F_{l'}^{m'}(\theta_2, \varphi_2) \cdot P_{l_1'}^{m_1'}(\theta_1, \varphi_1) dy dt - \int_{W_3^+} \int_r^{\infty} \dots \quad (16)$$

Отсюда непосредственно следует, что

$u_{l, m}^{l_1, m_1}(r, \lambda) = 0$, если $e_1 \leq 0$ или $m_1 \leq 0$, а при $e_1 > 0, m_1 > 0$ имеем

$$u_{l, m}^{l_1, m_1}(r, \lambda) = \sqrt{\frac{r}{\lambda}} i^l I_{l+1/2}(\lambda r) - \int_0^r \sqrt{rt} I_{l+1/2}(\lambda t) H_{l+1/2}^{(1)}(\lambda r) \times$$

$$\times \sum_{l'=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{l'} q_{l', m'}^{l_1', m_1'}(t) u_{l', m'}^{l_1', m_1'}(t, \lambda) dt - \int_r^{\infty} \dots$$

Здесь

$$q_{l', m'}^{l_1', m_1'}(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{W_3^+} q(t, \theta, \varphi) P_{l'}^m(\theta, \varphi) P_{l_1'}^{m_1'}(\theta, \varphi) d\omega_3^+$$

$$l = 1, 2, \dots, m = 1, \dots, l$$

$$l_1 = 1, 2, \dots, m_1 = 1, \dots, l_1$$

$d\omega_3^+$ — элементарная мера на W_3^+ .

Если положить

$$V(r, \lambda) = \begin{pmatrix} u_{1,1}^{1,1} u_{1,1}^{2,1} u_{1,1}^{2,2} u_{1,1}^{3,1} \dots \\ u_{2,1}^{1,1} u_{2,1}^{2,1} u_{2,1}^{2,2} u_{2,1}^{3,1} \dots \\ u_{2,2}^{1,1} u_{2,2}^{2,1} u_{2,2}^{2,2} u_{2,2}^{3,1} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \mathcal{Q}(r) = \begin{pmatrix} q_{1,1}^{1,1} q_{1,1}^{2,1} q_{1,1}^{2,2} \dots \\ q_{2,1}^{1,1} q_{2,1}^{2,1} q_{2,1}^{2,2} \dots \\ q_{2,2}^{1,1} q_{2,2}^{2,1} q_{2,2}^{2,2} \dots \\ \dots \end{pmatrix},$$

а $I(r, \lambda)$ и $A(r, \lambda, \lambda)$ суть диагональные матрицы соответственно с

элементами $\sqrt{\frac{r}{\lambda}} i^k I_{\frac{2k+1}{2}}(\lambda r)$ и $\sqrt{rt} I_{\frac{2k+1}{2}}(\lambda t) \cdot H_{\frac{2k+1}{2}}(\lambda r)$ по главной

диагонали ($k = 1, \infty$) то систему (17) можно записать в виде

$$V(r, \lambda) = I(r, \lambda) - \int_0^r A(r, t, \lambda) \mathcal{Q}(t) V(t, \lambda) dt -$$

$$- \int_r^{\infty} A(t, r, \lambda) \mathcal{Q}(t) V(t, \lambda) dt. \quad (18)$$

Можно показать, что решение этой системы является регулярным в

нуле матричным решением системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} -u'' + \frac{1}{r}Lu + Qu &= \lambda^2 u, \\ u(0, \lambda) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где L —бесконечная диагональная матрица с диагональными элементами вида $l(l+1)$, $l=1, 2, \dots$, причем $l(l+1)$ повторяется l раз. Для уравнения вида (19) разложение по решениям з. т. р. получено в [2]. Отсюда следует справедливость теоремы. Аналогичные результаты получены для октантов всего пространства. Автор искренне благодарен Ф. Г. Максудову и М. Г. Гасимову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасимов М. Г. Докт. дисс., МГУ, 1967.
2. Гасимов М. Г. ДАН Азерб. ССР*, т. XXII, 10, 1966.
3. Мартиросян Р. М., Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук, т. X, 1957, № 1.
4. Рамм А. Г. ДАН СССР*, т. 152, № 2, 1963.
5. Хёнигс Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., 1964.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.

Р. З. ХАЛИЛОВА

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ

1. Рассмотрим в l^2 симметричный оператор

$$A_h = \begin{pmatrix} h & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 & b_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Индексы дефекта такого оператора есть $(0, 0)$ или $(1, 1)$, так что у оператора A_h имеется самосопряженное расширение. Обозначим некоторое такое расширение через A , а вернее через A_h , тем самым связав его с первым элементом h матрицы.

Пусть $(p_0(s, h), p_1(s, h), \dots, p_n(s, h), \dots)$ есть решение уравнения

$$A_h y = sy. \quad (1)$$

Так как все функции $p_n(s, h)$, $n = \overline{1, \infty}$, выражаются однородно через $p_0(s, h)$, то можно положить $p_0(s, h) = 1$. Очевидно, что функция $p_n(s, h)$ есть полином n -ой степени от s . Известно, что существует монотонно растущая функция $\sigma(\lambda, h)$ ($\sigma(\lambda, h)$ называется спектральной функцией оператора A_h) такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(\lambda, h) \cdot P_m(\lambda, h) \cdot d\sigma(\lambda, h) = \begin{cases} 1 & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases} \quad (2)$$

С другой стороны, если нам задана монотонно растущая функция $\sigma(\lambda, h)$, для которой все моменты

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda, h) = s_k \quad (3)$$

существуют и $s_0 = 1$, то можно построить оператор A_h такой, что $\sigma(\lambda, h)$ будет спектральной функцией этого оператора. Теперь предположим, что оператор A_h имеет дискретный спектр $\lambda_0(h) < \lambda_1(h) < \dots$. Заменим h в матрице A_h один раз на h_1 , а другой раз на h_2 . Собственные значения полученных операторов обозначим соответственно через $\{\lambda_h(h_1)\}$ и $\{\lambda_h(h_2)\}$.

В настоящей работе доказывается, что по двум спектрам операторов A_{h_1} и A_{h_2} матрица A_h определяется однозначно, т. е. однознач-

но восстанавливаются числа $a_0, a_1, a_2, \dots; b_0, b_1, b_2, \dots; h_1$ и h_2 . Получены также некоторые простые достаточные условия для того, чтобы две числовые последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ были двумя спектрами одного оператора A_h с различными h_1 и h_2 .

2. Очевидно, что при $\lambda = \lambda_k$ следующий ряд сходится

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda_k, h) = \alpha_k(h) < \infty.$$

Числа $\{\alpha_k(h)\}$ называются нормировочными числами оператора A_h , а функция

$$\sigma(\lambda, h) = \sum_{k(h) < \lambda} \frac{1}{\alpha_k(h)}$$

—спектральной функцией оператора A_h .

Теперь докажем следующую лемму:

Лемма 1. При любых k, h_1 и h_2 имеет место соотношение

$$\lambda_k(h_2) - \lambda_k(h_1) = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\sigma_k(h)}. \quad (4)$$

В самом деле,

$$[\lambda_k(h + \Delta h) - \lambda_k(h)] \cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\lambda_k, h + \Delta h) \cdot p_n(\lambda_k, h) = \Delta h.$$

Поэтому

$$\lambda_k'(h) = \frac{1}{\alpha_k(h)},$$

что равносильно равенству (4). Лемма доказана.

Положим $\lambda_n(h_2) = \mu$ и

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} (\mu_n - \lambda_n). \quad (5)$$

Из условия $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(h)} = \sigma(\infty, h) - \sigma(-\infty, h) = 1$ и из формул (5) и

(4) следует, что

$$\rho(+\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = h_2 - h_1. \quad (6)$$

Теорема 1. Монотонно растущая функция $\frac{1}{h_2 - h_1} \rho\lambda$ является спектральной функцией некоторого оператора типа A_h , т. е. моменты

$$\tau_k = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_0^{\infty} \lambda^k d\rho(\lambda)$$

существуют при всех $k = 0, 1, 2, \dots$ и $\tau_0 = 1$.

Доказательство. Несколько позже мы докажем перемежаемость чисел λ_n и μ_n , из которой следует, что функция $\frac{1}{h_2 - h_1} \rho(\lambda)$ монотонно растущая и если $h_2 > h_1$, то очевидно, при любом $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \tau_k &= \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k (\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^k \cdot \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{\alpha_n(h)} \leq \\ &\leq \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_{h_1}^{h_2} \frac{\lambda_n^k(h)}{\alpha_n(h)} dh = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \int_{h_1}^{h_2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda, h) \right) dh < \infty \end{aligned}$$

и $\tau_0 = 1$. Теорема доказана.

3. Как мы уже заметили, по спектральной функции оператора A_h можно восстановить матрицу A_h . В этом пункте мы укажем способ построения спектральной функции оператора A_h при $h = h_1$ по двум различным спектрам $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, и тем самым докажем, что двумя различными спектрами матрица A_h определяется однозначно. Пусть

$$F_n(\lambda) = P_n(\lambda, h_1) + m(\lambda) \cdot P_n(\lambda, h_2) \quad (7)$$

и при любом комплексном λ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(\lambda)|^2$$

сходится (уравнение (1) имеет такое решение, см. [1]). Можно показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(\lambda)|^2 = (h_1 - h_2) \cdot \frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im} m(\lambda)}.$$

Следовательно, функция $(h_1 - h_2) \cdot m(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость на себя.

С другой стороны, нули и полюсы функции $m(\lambda)$ совпадают с собственными значениями оператора A_h при $h = h_2$ и $h = h_1$, соответственно*. Поэтому

$$m(\lambda) + C \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu_k}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}},$$

где C — некоторое постоянное число. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)$

следует, что

$$m(\lambda) = B \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}, \quad B = C \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k}. \quad (8)$$

Теперь рассмотрим сумму

$$(\lambda_k - \lambda) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda) \cdot P_n(\lambda_k, h_1) = h_2 - h_1. \quad (9)$$

Из формул (7), (8) и (9) при $\lambda \rightarrow \lambda_k$ следует, что

$$\alpha_k(h_1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2(\lambda_k, h_1) = \frac{h_2 - h_1}{B(\mu_k - \lambda_k)} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n}. \quad (10)$$

* Поскольку $\frac{\operatorname{Im} m(\lambda)}{\operatorname{Im} \lambda}$ знакопостоянно, из теории аналитических функций следует перемежаемость нулей и полюсов функции $m(\lambda)$, а следовательно и перемежаемость собственных значений операторов A_{h_1} и A_{h_2} .

Эта формула позволяет определить спектральную функцию оператора A_h при $h = h_1$ по двум спектрам $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$. В этой формуле число B пока не определено.

Теперь определим число B .

Лемма 2. Число $B = 1$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\lim_{i\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) \lim_{i\lambda \rightarrow \infty} B \cdot \prod \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right) = B.$$

Поэтому, чтобы доказать лемму, нам достаточно доказать, что $\lim_{i\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = 1$.

Возьмем любое целое число m и рассмотрим уравнение (1) и $Im = 0$. Положим

$$F_{n,m}(\lambda) = P_n(\lambda, h_1) + m_m(\lambda) \cdot P_n(\lambda_1, h_2) \quad (11)$$

и потребуем, чтобы $F_{m,m}(\lambda) = 0$. Тогда из (11) при $n = m$ мы получаем

$$m_m(\lambda) = \frac{P_m(\lambda, h_2)}{P_m(\lambda, h_1)}. \quad (12)$$

Корни полиномов $P_m(\lambda, h_1)$ и $P_m(\lambda, h_2)$ перемежаются, а коэффициенты степеней λ^m в обоих полиномах совпадают.

Поэтому

$$m_m(\lambda) = 1 + \frac{1}{h_2 - h_1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{Im}{(\lambda - \lambda_{k,m}) \cdot c_{k,m}}. \quad (13)$$

где $\lambda_{k,m}$ и $c_{k,m}$ — собственные значения и нормировочные числа оператора A_h и $Im = 0$ (при $h = h_1$). При $m \rightarrow \infty$ функция $m_m(\lambda)$ сходится к $m(\lambda)$, $Im\lambda \geq 1$, $\lambda_{k,m} \rightarrow \lambda_k$, $c_{k,m} \rightarrow c_k$.

Поэтому из (13) при $m \rightarrow \infty$ следует, что

$$m(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_2 - h_1}{(\lambda - \lambda_k) \alpha_k}. \quad (14)$$

Отсюда и из сходимости ряда $\sum \frac{1}{\alpha_k}$ вытекает, что при $i\lambda \rightarrow \infty$ функция $m(\lambda)$ стремится к 1. Лемма доказана.

Из (10) для нормировочных чисел $c_k(h_1)$ окончательно получаем формулу

$$\alpha_k(h_1) = \frac{h_2 - h_1}{\mu_k - \lambda_k} \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda_k}{\mu_n - \lambda_k}. \quad (15)$$

Следовательно, по двум спектрам уравнения (1) мы можем по формуле (15) построить нормировочные числа при $h = h_1$, а затем по спектральной функции

$$\sigma(\lambda, h_1) = \sum_{n: \lambda(h_1) < \lambda} \frac{1}{\alpha_n(h_1)}$$

построить само уравнение (1). Но эти построения носят условный характер, так как мы заранее предполагаем, что числа $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ являются двумя спектрами одного и того же оператора типа A_h . Поэтому интересно дать безусловное решение этой задачи. Следующая теорема в одном частном случае решает эту задачу.

Теорема 2. Пусть заданы две последовательности чисел: $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ и $\mu_0 < \mu_1 < \dots$, которые удовлетворяют условиям:

1. Числа λ_n и μ_n перемежаются;
2. При некотором фиксированном p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n^p (\lambda_{n+1} - \lambda_n)} < \infty; \quad (16)$$

3. Для функции

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} (\mu_n - \lambda_n) \quad (17)$$

существуют все моменты

$$\int_0^{\infty} \lambda^k d\rho(\lambda) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (18)$$

Тогда существуют такие числа $a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots; h_1$ и h_2 , что последовательности $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ и $\mu_0, \mu_1, \dots$ являются двумя спектрами уравнения (1) с различными h_1 и h_2 .

Доказательство. Положим

$$h_2 - h_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n)$$

и

$$\frac{1}{\alpha_n(h_1)} = \frac{\mu_n - \lambda_n}{h_2 - h_1} \cdot \prod_{k: \lambda_k < \lambda_n} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n}.$$

Покажем, что все $\alpha_n(h_1) > 0$. В силу перемежаемости чисел λ_n и μ_n имеют место

$$\text{sign} \frac{\mu_k - \lambda_n}{\lambda_k - \lambda_n} = 1; \text{ при } k \neq n,$$

$$\text{sign} \frac{\mu_n - \lambda_n}{h_2 - h_1} = 1.$$

Эту формулы показывают, что $\alpha_n(h_1) > 0$ при всех n . Теперь докажем, что монотонно растущая функция

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} \quad (19)$$

являются спектральной функцией некоторого оператора типа A_h . Для этого сначала нужно доказать, что при любом целом k существуют моменты

$$\int_0^{\infty} \lambda^k d\sigma(\lambda) = s_k.$$

Из условия 2 следует, что при $k \neq n$

$$|\lambda_k - \lambda_n| \geq \frac{C}{\lambda_k^p}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \leq C \sum \lambda_k^p \cdot |\mu_k - \lambda_k| = |\tau_p|$$

и, следовательно, бесконечные произведения

$$\prod' \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda_n} \right)$$

равномерно ограничены при всех n . Тогда

$$\frac{1}{a_n} \leq C \cdot |\mu_n - \lambda_n|,$$

где C — некоторое постоянное число. Из этой оценки и из условия 3: следует, что при любом k число s_k конечное.

Теперь докажем, что $s_0 = 1$. Положим

$$M(\lambda) = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \prod_k \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{a_n(h_1)} = \text{Res } M(\lambda)|_{\lambda=\lambda_k}$$

и при $\lambda \rightarrow i\infty$ функция

$$M(\lambda) \rightarrow \frac{1}{h_2 - h_1}.$$

Поэтому

$$M(\lambda) = \frac{1}{h_2 - h_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n(h_1) \cdot (\lambda_k - \lambda)}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$s_0 = -\lim_{\lambda \rightarrow i\infty} \lambda \cdot \left[M(\lambda) - \frac{1}{h_2 - h_1} \right].$$

С другой стороны, при $\lambda \rightarrow i\infty$

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \left(\frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} \right)^p \right\} = \\ &= \frac{1}{h_2 - h_1} + \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_k - \lambda} + O \left(\frac{1}{\lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Из этой формулы очевидно, что

$$-\lim_{\lambda \rightarrow i\infty} \left[M(\lambda) - \frac{1}{h_2 - h_1} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k - \lambda_k}{h_2 - h_1} = 1.$$

Следовательно, $s_0 = 1$. Вышеприведенные рассуждения показывают, что существуют числа $a_0, a_1, \dots; b_0, b_1, \dots$ и h_1 такие, что $\sigma(\lambda)$, определенная формулой (19), является спектральной функцией оператора A_h . Положим

$$h_2 = h_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n).$$

Для завершения доказательства теоремы нам нужно еще доказать, что собственные значения $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ оператора A_h совпадают с числами $\mu_0, \mu_1, \dots$.

Пусть $\{p_n(\lambda)\}$ и $\{Q_n(\lambda)\}$ являются решениями уравнения (1). Положим

$$F_n(\lambda) = p_n(\lambda) + m(\lambda) \cdot p_n(\lambda)$$

и потребуем, чтобы при $Im \lambda \neq 0$ имело место неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} |F_n(\lambda)|^2 < \infty.$$

Тогда полюсы и нули функции $m(\lambda)$ совпадают с числами λ_n и γ_n , соответственно.

В доказательстве леммы 2 мы показали, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow i\infty} m(\lambda) = 1.$$

Поэтому

$$m(\lambda) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k - \lambda}{\lambda_k - \lambda} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_2 - h_1}{a_k(h_1) \cdot (\lambda - \lambda_k)}. \quad (21)$$

Из формулы (20) и (21) следует, что

$$M(\lambda) = \frac{1}{h_2 - h_1} \cdot m(\lambda).$$

Следовательно, собственные значения оператора A_h совпадают с числами $\mu_0, \mu_1, \dots$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961.

Л. Г. МУСТАФАЕВ

СВЯЗКИ ПОЛУГРУД*

Настоящая статья является продолжением работы [7]. В ней освещаются строения латерально-коммутативных связок b -полугруд. Основной здесь является теорема 2, сводящая изучение таких полугруд к коммутативным связкам их максимальных b -подполугруд. Все, не приведенные здесь определения и понятия теории полугруд можно найти в работе [7].

Следуя В. В. Вагнеру [1], полугруду S назовем латерально-коммутативной, если для любых $a, b, c \in S$

$$[abc] = [cba].$$

Связку же полугруд (см. [7]) назовем латерально-коммутативной если из $[G_\alpha G_\beta G_\gamma] \subseteq G_\delta$ всегда следует

$$[G_\gamma G_\beta G_\alpha] \subseteq G_\delta.$$

Подполугруду A полугруды S назовем фасом [6], если для любых $x, y, z \in S$ из $[xyz] \in A$ всегда следует, что $x, y, z \in A$. Будем говорить, что элементы $x, y \in S$ находятся в одном и том же N -классе тогда и только тогда, когда содержащие их наименьшие фасы $N(x)$ и $N(y)$ полугруды S совпадают. Далее нам понадобятся следующие три леммы, которые мы сформулируем без доказательства.

Лемма 1. Если A_1, A_2, A_3 являются идеалами идемпотентной полугруды, то $[A_1 A_2 A_3] = [A \varphi_1 A \varphi_2 A \varphi_3]$, где φ —любая взаимнооднозначная подстановка индексов $\{1, 2, 3\}$.

Лемма 2. Каждый D -класс латерально-коммутативной полугруды идемпотентов есть груда.

Лемма 3. Для любых двух D -классов D_α и D_β произвольной латерально-коммутативной полугруды идемпотентов из $[D_\alpha D_\beta D_\beta] \subseteq D_\kappa$ всегда следует $[D_\beta D_\alpha D_\alpha] \subseteq D_\kappa$.

Теорема 1. Любая латерально-коммутативная полугруда идемпотентов S является специальной коммутативной связкой груд.

Полугруда S является объединением своих попарно не пересекающихся D -классов, каждый из которых есть груда согласно лемме 2.

Возьмем три произвольных D -класса $D_\alpha, D_\beta, D_\gamma$ полугруды S и выделим в них по два произвольных элемента

$$x_\alpha, x'_\alpha \in D_\alpha; y_\beta, y'_\beta \in D_\beta; z_\gamma, z'_\gamma \in D_\gamma.$$

* Работа была доложена в 1965 г. на VII Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре в г. Кишиневе.

Согласно определению D -эквивалентности имеем:

$$[Sx_\alpha S] = [Sx'_\alpha S]; [Sy_\beta S] = [Sy'_\beta S]; [Sz_\gamma S] = [Sz'_\gamma S].$$

Далее

$$\begin{aligned} [S[x_\alpha y_\beta z_\gamma] S] &= [Sz_\gamma y_\beta x_\alpha S] \subseteq [Sz_\gamma S Sy_\beta S Sx_\alpha S] = \\ &= [SZ_\gamma S Sy'_\beta S Sx'_\alpha S] = [SSS z'_\gamma y'_\beta x'_\alpha SSS] \subseteq [S[x'_\alpha y'_\beta z'_\gamma] S]. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать и обратное включение:

$$[S[x'_\alpha y'_\beta z'_\gamma] S] \subseteq [S[x_\alpha y_\beta z_\gamma] S].$$

Отсюда следует, что элементы $[x_\alpha y_\beta z_\gamma]$ и $[x'_\alpha y'_\beta z'_\gamma]$ находятся в одном и том же D -классе. Последнее же означает, что $[D_\alpha D_\beta D_\gamma] \subseteq D_\delta$, где D_δ —некоторый D -класс полугруды S . Пользуясь леммой 1, легко получить, что $[D_{\psi_\alpha} D_{\psi_\beta} D_{\psi_\gamma}] \subseteq D_\delta$, где ψ —любая взаимнооднозначная подстановка символов $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Отсюда и из леммы 3 следует, что связка будет специальной коммутативной.

Пусть полугруда S является специальной коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд $G_\alpha, S = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha$ (см. [7]). В каждой из групп $\hat{G}_\alpha$ выделим по нормальному делителю N_α , удовлетворяющему условиям:

1. $\xi_\alpha N_\alpha = \hat{N}_\alpha$, где ξ_α —некоторая инволюция группы $\hat{G}_\alpha$;
2. $P_\alpha \in \hat{N}_\alpha$, где P_α —фиксированный элемент из $\hat{G}_\alpha$;
3. $\xi_\alpha a \cdot a \in \hat{N}_\alpha$ для любого элемента $a \in \hat{G}_\alpha$;
4. $K_\alpha \subseteq N_\alpha$, где K_α коммутант группы $\hat{G}_\alpha$;
5. $\varphi_\alpha^\beta(\hat{N}_\beta) \subseteq \hat{N}_\alpha$ для $\alpha \leq \beta$, где φ_α^β —гомоморфизм группы $\hat{G}_\alpha$ в группу $\hat{G}_\alpha$ [7].

Разобьем компоненты G_α полугруды S на смежные классы $a N_\alpha$ группы $\hat{G}_\alpha$ по нормальному делителю N_α . Покажем, что это разбиение будет латерально-коммутативной связкой полугруды S . Каждый смежный класс $a N_\alpha$ группы $\hat{G}_\alpha$ для любого $\alpha \in \Gamma$ будет подполугрудой полугруды S : Действительно, в силу пп. 1—3

$$\begin{aligned} [a N_\alpha a N_\alpha a N_\alpha] &= a N_\alpha \cdot \xi_\alpha(a N_\alpha) \cdot P_\alpha \cdot a N_\alpha = a N_\alpha \cdot \xi_\alpha N_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot P_\alpha a N_\alpha = \\ &= a N_\alpha \cdot N_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot P_\alpha \cdot a N_\alpha = a N_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot P_\alpha \cdot a N_\alpha = a N_\alpha \xi_\alpha a \cdot a N_\alpha = a N_\alpha. \end{aligned}$$

Это означает, что $a N_\alpha$ —полугруда.

Покажем, что $a N_\alpha$ есть b -полугруда. Равенство

$$[a N_\alpha a a] = a N_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot P_\alpha \cdot a_\alpha = a \cdot \xi_\alpha a \cdot N_\alpha \cdot P_\alpha \cdot a = a \cdot \xi_\alpha a \cdot N_\alpha a = a N_\alpha.$$

показывает, что $a N_\alpha$ не содержит собственных левых идеалов. Аналогично можно показать, что $a N_\alpha$ не содержит собственных правых идеалов.

Пусть $a N_\alpha, b N_\beta$ и $c N_\gamma$ являются смежными классами групп $\hat{G}_\alpha, \hat{G}_\beta$ и $\hat{G}_\gamma$, соответственно. Согласно теореме 2,2 [7] и 2,5 имеем

$$\begin{aligned} [a N_\alpha b N_\beta c N_\gamma] &= [f_\alpha^\alpha(a N_\alpha) f_\beta^\beta(b N_\beta) f_\gamma^\gamma(c N_\gamma)] = f_\alpha^\alpha(a N_\alpha) * \\ &* \{ \xi_\alpha^\beta f_\beta^\beta(b N_\beta) \} * P_\beta * f_\gamma^\gamma(c N_\gamma) = (c_\beta^\alpha)^{-1} * \varphi_\alpha^\beta(a) * \varphi_\alpha^\beta(N_\alpha) * \xi_\beta \varphi_\beta^\beta(N_\beta) * \\ &* \xi_\alpha \varphi_\alpha^\beta(b) * \xi_\beta (c_\beta^\alpha)^{-1} * P_\beta * (c_\beta^\alpha)^{-1} * \varphi_\alpha^\gamma(c) * \varphi_\alpha^\gamma(N_\gamma) \subseteq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \subseteq (c_\delta^\alpha)^{-1} * \varphi_\delta^\alpha(a) * \hat{N}_\delta * \hat{N}_\delta * \xi_\delta * \varphi_\delta^\beta(b) * \xi_\alpha(c_\delta^\beta)^{-1} P_\delta (c_\delta^\gamma)^{-1} * \varphi_\delta^\gamma(c) * \hat{N}_\delta = \\ & = (c_\delta^\alpha)^{-1} * \varphi_\delta^\alpha(a) * \xi_\delta [(c_\delta^\beta)^{-1} * \varphi_\delta^\beta(b)] * (c_\delta^\gamma)^{-1} * \varphi_\delta^\gamma(c) * \hat{N}_\delta = \\ & = a_\delta * \xi_\delta b_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $a_\delta = (c_\delta^\alpha)^{-1} * \varphi_\delta^\alpha(a)$, $b_\delta = (c_\delta^\beta)^{-1} * \varphi_\delta^\beta(b)$, $c_\delta = (c_\delta^\gamma)^{-1} * \varphi_\delta^\gamma(c)$.

Аналогично

$$[c \hat{N}_\gamma b \hat{N}_\beta a \hat{N}_\alpha] \subseteq c_\delta * \xi_\delta b_\delta * a_\delta * \hat{N}_\delta. \quad (2)$$

Но в силу п. 4

$$a_\delta * \xi_\delta b * c_\delta * \hat{N}_\delta = c_\delta * \xi_\delta b_\delta * a_\delta * \hat{N}_\delta.$$

Последнее означает, что полугруда S является латерально-коммутативной связкой своих b -подполугруд $a \hat{N}_\alpha$.

Теорема 2. *Всякая латерально-коммутативная связка в -полугруд F_i является специальной коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд G_α . Компоненты делителя N_α удовлетворяющим условиям пп. 1—5.*

Доказательство. Пусть полугруда S является латерально-коммутативной связкой b -полугруд $F_i, S = UF_i$.

Обозначим через G_α объединение тех F_i , для которых $i \in D_\alpha$, где D_α — некоторый фиксированный D -класс латерально-коммутативной полугруды идемпотентов H .

Как и в теореме 2,2 [7], можно показать, что G_α является максимальной b -подполугрудой полугруды S . По теореме 1 полугруда H является специальной коммутативной связкой своих D -классов. Тогда отсюда следует, что и полугруда S является специальной коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд G_α , $S = UG_\alpha$. По определению $G_\alpha = UF_i$, $i \in D_\alpha$. Полугруды G_α и D_α являются вполне простыми [2,3]. Здесь фактически нам дан гомоморфизм полугруды G_α на полугруду D_α . Полное описание гомоморфизмов вполне простых полугруд дано в статьях [2,3].

Согласно [2,3] гомоморфизм G_α на D индуцируется некоторым нормальным делителем $\hat{N}_\alpha$ группы $\hat{G}_\alpha$. При этом компонентами F_i полугруды G_α будут смежные классы группы $\hat{G}_\alpha$ по нормальному делителю $\hat{N}_\alpha$. Таким образом, каждый смежный класс $a \hat{N}_\alpha$ группы $\hat{G}_\alpha$ по нормальному делителю $\hat{N}_\alpha$ есть b -полугруда. Следовательно,

$$N_\alpha = [\hat{N}_\alpha l_\alpha l_\alpha],$$

где l_α — единица группы $\hat{G}_\alpha$. Но

$$[\hat{N}_\alpha l_\alpha l_\alpha] = \hat{N}_\alpha \cdot P_\alpha.$$

Поэтому $P_\alpha \in \hat{N}_\alpha$, т. е. выполняется условие п. 2. Далее, с одной стороны, так как

$$\hat{N}_\alpha = [\hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha l_\alpha] = \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha \hat{N}_\alpha \cdot P_\alpha, \text{ то } \xi_\alpha \hat{N}_\alpha \subseteq \hat{N}_\alpha. \quad (3)$$

С другой стороны, для любого $z \in \hat{G}_\alpha$ $\xi_\alpha^2 z = z$.

Поэтому для любого $a \in \hat{N}_\alpha$ находим, что

$$a = \xi_\alpha \xi_\alpha a \in \xi_\alpha \hat{N}_\alpha.$$

А это вместе с (1) дает нам равенство $\xi_\alpha \hat{N}_\alpha = \hat{N}_\alpha$.

В силу того, что $a \hat{N}_\alpha$ есть b -полугруда,

$$[a \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha] = a \hat{N}_\alpha.$$

Однако

$$\begin{aligned} [a \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha] &= a \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha (a \hat{N}_\alpha) \cdot P_\alpha \cdot a \hat{N}_\alpha = a \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha \cdot a \cdot P_\alpha \cdot a \hat{N}_\alpha = \\ &= a \hat{N}_\alpha \cdot \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot P_\alpha \cdot a \hat{N}_\alpha = a \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha a \cdot a \hat{N}_\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому

$$a \hat{N}_\alpha = a \hat{N}_\alpha \xi_\alpha a \cdot a \hat{N}_\alpha.$$

Отсюда следует, что $\xi_\alpha a \cdot a \in \hat{N}_\alpha$.

Пусть теперь

$$[a \hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha b \hat{N}_\alpha] \subseteq d \hat{N}_\alpha,$$

$$[b \hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha] \subseteq d \hat{N}_\alpha.$$

Согласно пунктам 1 и 2 имеем:

$$[a \hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha b \hat{N}_\alpha] = a \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha \hat{N}_\alpha \cdot P_\alpha \cdot b \hat{N}_\alpha = a \hat{N}_\alpha \cdot b \hat{N}_\alpha = ab \hat{N}_\alpha \subseteq d \hat{N}_\alpha,$$

$$[b \hat{N}_\alpha \hat{N}_\alpha a \hat{N}_\alpha] = b \hat{N}_\alpha \cdot \xi_\alpha \hat{N}_\alpha \cdot P_\alpha \cdot a \hat{N}_\alpha = b \hat{N}_\alpha \cdot a \hat{N}_\alpha = ba \hat{N}_\alpha \subseteq d \hat{N}_\alpha.$$

Отсюда следует, что коммутант K_α группы $\hat{G}_\alpha$ содержится в нормальном делителе $\hat{N}_\alpha$.

Остается показать выполнимость пункта 5, т. е. что для $\alpha \leq \beta$

$\varphi_\alpha^\beta(\hat{N}_\beta) \subseteq \hat{N}_\alpha$, где φ_α^β — гомоморфизм группы $\hat{G}_\beta$ в группу $\hat{G}_\alpha$. Пусть

$[\alpha_\beta \gamma] = \delta$. Найдется такой смежный класс $d \hat{N}_\alpha$ группы $\hat{G}_\alpha$ по нормальному делителю $\hat{N}_\alpha$, что

$$[a \hat{N}_\alpha b \hat{N}_\beta c \hat{N}_\gamma] \subseteq d \hat{N}_\alpha.$$

Согласно теореме 2,2 [7]

$$\begin{aligned} [a \hat{N}_\alpha b c] &= [f_\alpha^\alpha(a \hat{N}_\alpha) f_\beta^\beta(b) f_\gamma^\gamma(c)] = f_\alpha^\alpha(a \hat{N}_\alpha) \cdot \xi_\delta f_\gamma^\beta(b) \cdot P_\delta f_\beta^\alpha(c) = \\ &= (c_\delta^\alpha)^{-1} \cdot \varphi_\delta^\alpha(a \hat{N}_\alpha) \cdot \xi_\delta \varphi_\delta^\beta(b) \cdot \xi_\delta (c_\delta^\beta)^{-1} \cdot (c_\delta^\gamma)^{-1} \cdot \varphi_\delta^\alpha(c) = \\ &= (c_\delta^\alpha)^{-1} \cdot \varphi_\delta^\alpha(a) \cdot \varphi_\delta^\alpha(\hat{N}_\alpha) \cdot \xi_\delta \varphi_\delta^\beta(b) \cdot \xi_\delta (c_\delta^\beta)^{-1} \cdot P_\delta (c_\delta^\gamma)^{-1} \cdot \varphi_\delta^\alpha(c) = \\ &= d_1 \varphi_\delta^\alpha(\hat{N}_\alpha) d_2, \text{ где } d_1 = (c_\delta^\alpha)^{-1} \varphi_\delta^\alpha(a), \\ & d_2 = \xi_\delta \varphi_\delta^\beta(b) \xi_\delta (c_\delta^\beta)^{-1} P_\delta (c_\delta^\gamma)^{-1} \cdot \varphi_\delta^\alpha(c). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$d_1 \cdot \varphi_\delta^\alpha(\hat{N}_\alpha) \cdot d_2 \subseteq d \hat{N}_\alpha.$$

Отсюда при некотором $n_\delta \in \hat{N}_\delta$ $d_1 d_2 = d n_\delta$.

$$\text{Поэтому } d_1 \varphi_\delta^\alpha(\hat{N}_\alpha) \cdot d_2 \subseteq d_1 d_2 n_\delta^{-1} \hat{N}_\delta = d_1 d_2 \hat{N}_\delta = d_1 \hat{N}_\delta d_2.$$

Из последнего включения имеем $\varphi_\delta^\alpha(\hat{N}_\alpha) \subseteq \hat{N}_\delta$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Латерально-коммутативная связка b -полугруд F_i^a будет коммутативной связкой тех же b -полугруд F_i , тогда и только тогда, когда нормальные делители $\hat{N}_a$ групп $\hat{G}_a$ (см. теорему 2) удовлетворяют, кроме условий пп. 1—3,5, также условию $a^2 \in N$ для любого $a \in \hat{G}_a$.

Доказательство. В самом деле, пусть связка b -полугруд $S = \bigcup_{i \in H} F_i$ будет коммутативной. Тогда нормальные делители $\hat{N}_a$ групп $\hat{G}_a$ удовлетворяют условиям пп. 1—3,5 теоремы 2. Далее для любого $a \in \hat{G}_a$

$$\begin{aligned} [\hat{N}_a a \hat{N}_a \hat{N}_a] &= \hat{N}_a \cdot \xi_a a, \\ [a \hat{N}_a \hat{N}_a \hat{N}_a] &= \hat{N}_a \cdot a. \end{aligned}$$

Из этих равенств, согласно предположению, имеем

$$\hat{N}_a a \xi_a a^{-1} = \hat{N}_a, \text{ т. е. } a \cdot \xi_a a^{-1} \in \hat{N}_a.$$

Однако в силу пункта 3 для любого $a \in \hat{G}_a$ $\xi_a a \cdot a \in \hat{N}_a$.

Отсюда следует, что $a^2 \in \hat{N}_a$.

Наоборот, пусть нормальные делители $\hat{N}_a$ групп $\hat{G}_a$ удовлетворяют, кроме условий пп. 1—3,5, также условию $a^2 \in \hat{N}_a$ для любого $a \in \hat{G}_a$. Покажем, что латерально-коммутативная связка b -полугруд будет коммутативной связкой. Пусть $a \hat{N}_a, b \hat{N}_b$ и $c \hat{N}_c$ — некоторые смежные классы групп $\hat{G}_a, \hat{G}_b$ и $\hat{G}_c$, соответственно.

Пусть далее $[a\beta\gamma] = \delta$. Тогда согласно (1)

$$[a \hat{N}_a b \hat{N}_b c \hat{N}_c] \subseteq a_\delta * \xi_\delta b_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta,$$

и аналогично

$$[b \hat{N}_b a \hat{N}_a c \hat{N}_c] \subseteq b_\delta * \xi_\delta a_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta,$$

где

$$a_\delta = (c_\delta^a) * \varphi_\delta^a(a), \quad b_\delta = (c_\delta^b)^{-1} * \varphi_\delta^b(b), \quad c_\delta = (c_\delta^c)^{-1} * \varphi_\delta^c(c).$$

Докажем равенство

$$a_\delta * \xi_\delta b_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta = b_\delta * \xi_\delta a_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta.$$

Согласно условию $a^2 \in \hat{N}_\delta$ для любого $a \in \hat{G}_\delta$ имеем

$$\hat{N}_\delta * (a_\delta * b_\delta^{-1})^2 = \hat{N}_\delta.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{N}_\delta * a_\delta * b_\delta^{-1} = \hat{N}_\delta * b_\delta * a_\delta^{-1}.$$

Умножая справа последнее равенство на $c_\delta \in \hat{G}_\delta$, находим

$$\hat{N}_\delta * a_\delta * b^{-1} * c_\delta = \hat{N}_\delta * b_\delta * a_\delta^{-1} * c_\delta. \quad (4)$$

Равенство (4) можно переписать в виде

$$a_\delta * \xi_\delta b_\delta * b_\delta * b_\delta^{-1} * c_\delta * \hat{N}_\delta = b * \xi_\delta a_\delta * a_\delta * a_\delta^{-1} * c_\delta * \hat{N}_\delta$$

или

$$a_\delta * \xi_\delta b_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta = b_\delta * \xi_\delta a_\delta * c_\delta * \hat{N}_\delta.$$

Аналогично можно показать, что

$$[a \hat{N}_a c \hat{N}_c b \hat{N}_b] \subseteq a_\delta * \xi_\delta b_\delta * c * \hat{N}_\delta.$$

Теорема доказана.

Остается выяснить вопрос, как связаны между собой смежные классы $a \hat{N}_a$ группы $\hat{G}_a$.

В теореме 2 нами было выяснено, что при определенных условиях, накладываемых на нормальный делитель $\hat{N}_a$ группы $\hat{G}_a$, смежные классы $a \hat{N}_a$ будут b -подполугрудами, и, следовательно, группами относительно некоторых бинарных операций. Операция полугруды G_a выражается через бинарную операцию, инволюцию ξ_a и фиксированный элемент P_a группы $\hat{G}_a$. В свою очередь, операция полугруды N_a выражается через бинарную операцию группы $\hat{G}$, некоторый фиксированный элемент P_0 группы $\hat{N}_a$ и через некоторую инволюцию ξ_0 . Поэтому для любых элементов $n_1, n_2, n_3 \in \hat{N}_a$ находим:

$$\begin{aligned} [n_1 n_2 n_3] &= n_1 \xi_0 \cdot n_2 \cdot P_0 \cdot n_3, \\ [n_1 n_2 n_3] &= n_1 \cdot \xi_a n_2 \cdot P_2 \cdot n_3. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\xi_0 n_2 \cdot P_0 = \xi_a \cdot n_2 \cdot P_a.$$

Полагая в этом равенстве $n_2 = l_a$, где l_a — единица группы $\hat{G}_a$, находим $P_0 = P_a$ и, следовательно, $\xi_0 = \xi_a$.

Тем самым нами доказана следующая

Лемма 4. Для инволюций ξ_0 и ξ_a , фиксированных элементов P_0 и P_a групп $\hat{N}_a$ и $\hat{G}_a$ справедливы равенства:

$$\xi_0 = \xi_a, \quad P_0 = P_a.$$

Лемма 5. Для фиксированных элементов P_a и P_1 инволюций ξ_a и ξ_a групп $a \hat{N}_a$ и $\hat{G}_a$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} P_a &= \xi_a l_a \cdot P_a, \\ \xi_a(x) &= l_a \cdot \xi_a(x) \cdot \xi_a l_a^{-1}, \end{aligned}$$

где l_a — единица группы $a \hat{N}_a$, $x \in a \hat{N}_a$.

Действительно,

$$l_a = l_a * l_a = [l_a P_a^{-1} l_a] = l_a \cdot \xi_a (P_a^{-1}) \cdot P_a \cdot l_a.$$

Отсюда следует, что

$$l_a = \xi_a (P_a^{-1}) \cdot P_a \cdot l_a.$$

Применяя инволюцию ξ_a к обеим частям этого равенства, получим

$$P_a = \xi_a (l_a) \cdot P_a.$$

Далее для любого $x \in a \hat{N}_a$

$$\begin{aligned} \xi_a(x) &= [l_a x P_a^{-1}] = l_a \cdot \xi_a(x) \cdot P_a \cdot P_a^{-1} = l_a \cdot \xi_a(x) \cdot P_a \cdot P_a^{-1} \cdot \xi_a(l_a^{-1}) = \\ &= l_a \cdot \xi_a(x) \cdot \xi_a(l_a^{-1}), \end{aligned}$$

т. е.

$$\xi_a(x) = l_a \cdot \xi_a(x) \cdot \xi_a(l_a^{-1}).$$

Теорема 4. Группы $a \hat{N}_a$ и $\hat{N}_a$ изоморфны.

Доказательство. Рассмотрим отображение f группы $a \hat{N}_a$ в

группу $\hat{N}_a$, определяемое равенством

$$f(x) = l_a^{-1} \cdot x \quad (x \in a\hat{N}_a).$$

Это отображение является гомоморфизмом группы $a\hat{N}_a$ в группу $\hat{N}_a$. Действительно, пользуясь леммой 5, получим

$$\begin{aligned} f(x_* y) &= l_a^{-1} \cdot (x_* y) = l_a^{-1} \cdot [x P_a^{-1} y] = l_a^{-1} \cdot x \cdot \xi_a(P_a^{-1}) \cdot P_a \cdot y = \\ &= l_a^{-1} \cdot x \cdot \xi_a(P_a^{-1}) \cdot \xi_a(P_a) \cdot l_a^{-1} \cdot y = l_a^{-1} \cdot x \cdot l_a^{-1} \cdot y = f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Из $l_a^{-1} \cdot x = l_a^{-1} \cdot y$ следует, что $x = y$.

Таким образом, отображение f есть изоморфизм групп $a\hat{N}_a$ и $\hat{N}_a$. Выясним, когда полугруда S , являющаяся коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд, будет обобщенной грудой [1]. Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 5. Полугруда S , являющаяся коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд G_a , будет обобщенной грудой тогда и только тогда, каждая ее компонента G_a -груда.

Доказательство. Пусть полугруда S , являющаяся коммутативной связкой своих максимальных b -подполугруд G_a , будет обобщенной грудой. Тогда в силу того, что все элементы S идемпотентны,

$$l_a = [l_a l_a] = P_a,$$

где l_a — единица группы $\hat{G}$. Далее для любого $a \in \hat{G}_a$

$$a = [aaa] = a \cdot \xi_a a \cdot P_a \cdot a = a \cdot \xi_a a,$$

а это означает, что $\xi_a a = a^{-1}$, т. е. что инволюция ξ_a группы $\hat{G}_a$ каноническая [1]. Отсюда следует, что каждый элемент полугруды G_a биунитарный [1].

Наоборот, пусть каждая компонента G_a полугруды S есть груда. Тогда для любых $x_a, y_\beta, z_\gamma \in S$ при $[\alpha\beta\gamma\gamma] = \delta$ имеем

$$\begin{aligned} [x_a y_\beta z_\gamma z_\gamma] &= [f_\alpha^\alpha(x_a) f_\beta^\beta(y_\beta) f_\gamma^\gamma(z_\gamma) f_\gamma^\gamma(z_\gamma)] = \\ &= f_\alpha^\alpha(x_a) * (f_\beta^\beta(y_\beta))^{-1} * f_\beta^\beta(y_\beta) * (f_\gamma^\gamma(z_\gamma))^{-1} * f_\gamma^\gamma(z_\gamma) = f_\alpha^\alpha(x_a). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$[x_a z_\gamma z_\gamma y_\beta y_\beta] = f_\alpha^\alpha(x_a),$$

$$[y_\beta y_\beta z_\gamma z_\gamma x_a] = [z_\gamma z_\gamma y_\beta y_\beta x_a] = f_\beta^\beta(x_a),$$

Теорема 6. Пусть $S = \bigcup_{a \in H} G_a$ и $S' = \bigcup_{a \in H'} G_{a'}$ — две полугруды, являю-

щиеся коммутативными связками своих максимальных b -подполугруд. Для того, чтобы полугруды S и S' были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы существовали:

а) изоморфизм коммутативных полугруд идемпотентов H и H' ; б) изоморфизм ψ_a^α соответствующих компонент G_a и $G_{a'}$ полугруд S и S' ; в) равенство $\psi_a^\alpha f_a^\alpha = f_{a'}^{\alpha'} \psi_{a'}^{\alpha'}$ для всех соответствующих пар α, α' и β, β' ($\alpha \leq \beta$).

Необходимость. Пусть f — изоморфизм полугруд S и S' . Отметим, что компоненты C_a и $G_{a'}$ полугруд S и S' являются N -классами последних. Поэтому можно отождествить компоненты G_a и $G_{a'}$ с N -классами полугруд S и S' , соответственно. Покажем, что при изоморфизме f образом N -класса полугруды S является N -класс полугруды S' . Для этого нужно показать, что при изоморфизме f образом наименьшего фаса полугруды S есть наименьший фас полугруды S' . Очевидно, что при изоморфизме образом фаса есть фас. Пусть $f(N(x)) = N(x')$, где $N(x)$ — наименьший фас полугруды S , содер-

жащий $x \in S$, а $N(f(x))$ — некоторый фас полугруды S' , содержащий элемент $f(x) \in S'$. Докажем, что $N(f(x))$ есть наименьший фас полугруды S' , содержащий элемент $f(x) \in S'$. Пусть $\bar{N}(f(x))$ есть некоторый фас полугруды S' , содержащий элемент $f(x)$ и входящий в $N(f(x))$. Тогда $f^{-1}(\bar{N}(f(x)))$ есть некоторый фас полугруды S , содержащий элемент $x \in S$ и входящий в фас $N(x)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $N(f(x))$ есть наименьший фас полугруды S' . Отсюда уже следует, что при изоморфизме f образом N -класса полугруды S является N -класс полугруды S' , а также изоморфизм полугруд идемпотентов H и H' .

Итак, изоморфизм f полугруд S и S' индуцирует изоморфизм ψ_a^α компонент G_a и $G_{a'}$. Изоморфизмы вполне простых полугруд изучены в работах [2, 3]. Из результатов этих работ следует:

$$\begin{aligned} P_{a'} &= \xi_{a'} r * c^{-1} * \varphi P_a * r, \\ \xi_{a'} z &= c^{-1} * \varphi \xi_a \varphi^{-1} z * c, \\ l_{a'} &= s * c * \xi_{a'} c, \\ f(x_a) &= r^{-1} * \varphi(x_a) * s^{-1}, \end{aligned}$$

где c, r, S и z — произвольные элементы $G_{a'}$, φ — изоморфизм групп $\hat{G}_a$ и $\hat{G}_{a'}$, ξ_a и $\xi_{a'}$ — инволюции этих групп, $P_{a'} \in \hat{G}_{a'}$, $P_a \in \hat{G}_a$ и $l_{a'}$ — единица группы $\hat{G}_{a'}$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi_a^\alpha f_a^\alpha(x_\beta) &= f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = f[l_a P_a^{-1} x_\beta] = [f(l_a) f(P_a^{-1}) f(x_\beta)] = \\ &= [f(l_a) f(P_a^{-1}) f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta)] = f(l_a) * \xi_{a'} f(P_a^{-1}) * P_{a'} * f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = \\ &= r^{-1} * s^{-1} * \xi_{a'} S^{-1} * \xi_{a'}^{-1} \varphi(P_a^{-1}) * \xi_{a'} r^{-1} * \xi_{a'} r * c^{-1} * \varphi(P_a) * r * \\ &* f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = r^{-1} * s^{-1} * \xi_{a'} S^{-1} * c^{-1} * \varphi \xi_a P_a^{-1} * c * c^{-1} * \varphi(P_a) * \\ &* r * f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = r^{-1} * S^{-1} * S * c * c^{-1} * r * f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = \\ &= f_{a'}^{\alpha'} f_{a'}^{\alpha'}(x_\beta) = f_{a'}^{\alpha'} \psi_{a'}^{\alpha'}(x_\beta). \end{aligned}$$

т. е.

$$\psi_a^\alpha f_a^\alpha(x_\beta) = f_{a'}^{\alpha'} \psi_{a'}^{\alpha'}(x_\beta).$$

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Построим отображение ψ полугруды S на S' , определяемое равенством $\psi(x_a) = \psi_{a'}^{\alpha'}(x_a)$.

Если $[\alpha\beta\gamma] = \delta$, то

$$\begin{aligned} \psi([x_a y_\beta z_\gamma]) &= \psi([f_\alpha^\alpha(x_a) f_\beta^\beta(y_\beta) f_\gamma^\gamma(z_\gamma)]) = \psi_\delta^\delta([f_\alpha^\alpha(x_a) f_\beta^\beta(y_\beta) f_\gamma^\gamma(z_\gamma)]) = \\ &= [\psi_\delta^\delta f_\alpha^\alpha(x_a) \psi_\delta^\delta f_\beta^\beta(y_\beta) \psi_\delta^\delta f_\gamma^\gamma(z_\gamma)] = [f_{\alpha'}^{\alpha'} \psi_{a'}^{\alpha'}(x_a) f_{\beta'}^{\beta'} \psi_{a'}^{\beta'}(y_\beta) f_{\gamma'}^{\gamma'} \psi_{a'}^{\gamma'}(z_\gamma)] = \\ &= [\psi_{a'}^{\alpha'}(x_a) \psi_{a'}^{\beta'}(y_\beta) \psi_{a'}^{\gamma'}(z_\gamma)] = [\psi(x_a) \psi(y_\beta) \psi(z_\gamma)]. \end{aligned}$$

Последнее означает, что отображение ψ — изоморфизм полугруд S и S' . В заключение, пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность проф. Глускину Л. М. за постановку задачи и за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Матем. сб., 32 (74), № 3 (1953).
2. Глускин Л. М. ДАН СССР, 151, № 3, 485 (1963).
3. Глускин Л. М. Сб. "Теория полугрупп и ее приложения". Изд. Саратовского ун-та, 1965.

4. Курош А. Г. Теория групп.
5. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., 1960
6. Petrich M. The maximal similitude decomposition of a semigroup "Math. z". 1964, 85, № 1, 68—82.
7. Мустафаев Л. Г. Коммутативные связки полугруд. "Изв. АН Азерб. ССР", серия физ.-техн. и матем. наук. (в печати).
8. Мустафаев Л. Г. Об идеальных эквивалентностях полугруд. "Изв. АН Азерб. ССР", серия физ.-техн. и матем. наук, № 6, 1966.

К. А. КЕРИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЯЗКО-УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ

Распространение волн в вязко-упруго-пластических средах является в настоящее время наиболее актуальным и малоизученным вопросом в связи с возникающими математическими трудностями. За последние годы значительно расширены исследования в области динамики твердой сплошной среды. Выдвинуто несколько новых моделей материалов твердых тел, более полно учитывающих их реальные свойства. Имеющиеся экспериментальные исследования показывают, что упруго-вязко-пластические модели недостаточно охватывают реальные свойства многих материалов полимерной структуры.

Результаты экспериментальных исследований по динамическим испытаниям над полимерными материалами (резина, капрон, поливинил), проведенными нами в работе [1], показывают, что упруго-пластические модели могут описывать реальные свойства для такого типа материалов в малом диапазоне скоростей деформации. Так, например, для некоторых сортов резины деформационный закон справедлив при скоростях удара 10—15 м/сек. При больших же скоростях деформации наблюдается отклонение от указанного закона. Ввиду того, что упруго-вязко-пластический закон деформирования также не охватывает реальных свойств таких материалов, нами совместно с Х. А. Рахматулиным [2] предложена новая модель, объединяющая упруго-пластические и вязкие свойства материалов.

Предлагаемая модель основывается на таком принципе, что из существующих многочисленных недеформационных законов выбирается такой, при котором уравнения движений были бы волновыми, т. е.

$$E(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + f(\sigma - \sigma_d), \quad (1, 1)$$

где $E(\varepsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$ — соответственно, неизвестные функции, а $\sigma_d = \sigma_d(\varepsilon)$ — заданная функция, даваемая деформационной теорией. Если $\sigma = \sigma_d$, то мы получаем зависимость σ только от ε . Функция f выражает меру отклонения зависимости от деформационной теории. Функция $E(\varepsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$, выражающие вязко-упруго-пластическую зависимость, существенно отличаются от деформационной зависимости, так как в данном случае в уравнении движения интеграл $v = \int a(\varepsilon) d\varepsilon$ не имеет места, что и осложняет разработку методики определения функций $E(\varepsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$.

На основе (1, 1) даются: методика исследования динамических характеристик материалов полимерной структуры с вязко-упруго-пластическими свойствами и метод определения $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$ на опытах по поперечному удару. Предлагается два метода, основанных на численном интегрировании уравнений движения с помощью ЭВЦМ и замера натяжения, возникающего в закрепленном конце образца.

Метод, основанный на замене сплошной среды системой с конечным числом степеней свободы

Сущность первого метода выражена заменой сплошной среды системой физических частиц с конечным числом степеней свободы. При поперечном ударе с постоянной скоростью v_0 по гибкой нити возникают продольные волны распространяются с большей скоростью, чем поперечные. Картина движения волн в плоскости (x, t) показана на рис. 1.

Первоначально передним фронтом возмущенной области являются продольные волны, которые распространяются с различными скоростями (волны Римана) вдоль прямолинейных характеристик, выходящих из точки удара. Далее эти волны взаимодействуя с отраженными от закрепленного конца волнами, образуют область криволинейных характеристик (ABC).

Явления внутри криволинейного треугольника ABC (рис. 1) будут происходить точно так же, как и при продольном ударе по стержню.

Тогда можно пользоваться решением задачи об отражении продольных волн от закрепленного конца полимерного шнура и при помощи расчетов можно найти время t , т. е. момент встречи отраженной продольной волны с падающей поперечной волной. Поэтому в данной работе мы пользуемся уравнениями распространения продольных волн при ударе по стержню со скоростью $u_t(v_0)$, соответствующей продольной скорости, возникающей при поперечном ударе по нити с некоторой скоростью v_0 . При помощи этих уравнений, как это будет показано ниже, можно определить две неизвестные функции $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$, входящие в выражение (1, 1),

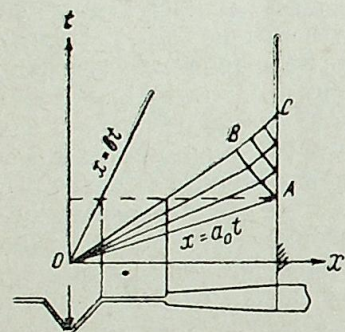


Рис. 1

которые и определяют вязкоупруго-пластические свойства исследуемого материала.

Для вывода основных уравнений движения заменим сплошную среду системой частиц с конечным числом степеней свободы. С этой целью представим полудлину шнура, испытывающего поперечный удар в виде системы, состоящей из N частиц. Это позволяет заменить уравнения в частных производных эквивалентной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, записанной для каждой из частиц. Закон деформирования в данном случае будет иметь вид

$$E(\epsilon)_n \frac{d\epsilon_n}{dt} = \frac{d\sigma_n}{dt} + k(\sigma_n - \sigma_d). \quad (1, 2)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $f(\sigma_n - \sigma_d)$ представляет собой выражение в виде линейной зависимости $f = k(\sigma_n - \sigma_d)$. Уравнение (1, 1) примет вид

$$E(\epsilon)_n \frac{d\epsilon_n}{dt} = \frac{d\sigma_n}{dt} + k(\sigma_n - \sigma_d), \quad (1, 3)$$

где ϵ_n — деформация; σ_n — натяжение, относящееся к соответствующей фиксированной физической частице; σ_d — натяжение, найденное по деформационной теории.

Теперь рассмотрим уравнение движения для каждой частицы:

$$\Delta m \frac{d^2 \bar{u}_n}{dt^2} = \bar{\sigma}_{n+1} - \bar{\sigma}_n. \quad (1, 4)$$

Из определения деформации для n -частицы будем иметь

$$\epsilon_n = \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_{n-1}}{\Delta l} - 1, \quad (1, 5)$$

где $\bar{u}_n$ — Эйлера координата частицы.

Дифференцируя (1, 5) по времени, получим

$$\frac{d\epsilon_n}{dt} = \frac{1}{\Delta l} \left(\frac{d\bar{u}_n}{dt} - \frac{d\bar{u}_{n-1}}{dt} - 1 \right). \quad (1, 6)$$

Принимая во внимание, что $\frac{d\bar{u}_n}{dt} = \bar{v}$,

$$(1, 7)$$

и подставляя полученное значение $\bar{v}_n$ в (1, 3), имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}_n}{dt} = E(\epsilon_n)(\bar{v}_n - \bar{v}_{n-1}) - k(\sigma_n - \sigma_d). \quad (1, 8)$$

Если ввести безразмерные переменные $u_n = \frac{\bar{u}_n}{\Delta l}$, $\sigma_n = \frac{\bar{\sigma}_n}{\sigma_0}$, $v_n = \frac{\bar{v}_n}{\Delta l t}$, то система уравнений (1, 4), (1, 7) и (1, 8), описывающих явление, примет вид

$$\frac{d\sigma_n}{dt} = E(\epsilon_n)(v_n - v_{n-1}) - k(\sigma_n - \sigma_d), \quad (1, 9)$$

где $n = 1, 2, \dots, N-1$;

$$\Delta m \frac{dv_n}{dt} = \sigma_{n+1} - \sigma_n, \quad (1, 10)$$

$$\frac{du_n}{dt} = v_n; \quad (1, 11)$$

$n = 1, 2, \dots, N-1$.

Как видно из описанного, система уравнений (1, 9), (1, 10) и (1, 11) будет замыкаться, если известны зависимости $E(\epsilon)$ и $k(\sigma_n - \sigma_d)$. Начальные и граничные условия для этой системы уравнений будут: при $t = 0$, $\sigma_n = 0$, $v_n = 0$, если $n \neq N$,

$$v_N = v_{ox} = \text{const},$$

$$u_n = n;$$

при $t > 0$

$$u_N = N + \frac{v_{ox} t}{\Delta l},$$

$$u_0 \equiv v_0 \equiv 0.$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы (1, 9), (1, 10) и (1, 11) при заданных начальных условиях и при известных $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$. Определение функций E и f является обратной задачей.

Пусть нам известна зависимость $\frac{d\sigma}{dt} = f(t)$, которая получается

дифференцированием аппроксимированной экспериментальной кривой $\sigma(t)$, начиная с момента времени $t_0 = \frac{l}{a_0}$. Для решения этой задачи предлагается метод последовательных приближений, в котором существенны два момента:

1. Предлагается одновременно интегрировать систему (1, 9) (1, 10) и (1, 11) для двух скоростей v_1 и v_1^* удара.

2. До момента пробега волны к точке закрепления $x=0$ задаваться в качестве первого приближения значениями функций E и f . Затем, пользуясь граничными условиями, можно определить эти значения. Найденные в первом приближении E и f подставляются в указанную систему, после чего она вновь интегрируется.

Как видно, (1, 12) является системой функциональных уравнений относительно E и f . Так как эти уравнения заданы только в одной точке, то они, вообще говоря, неразрешимы. Но ввиду того, что передний фронт волн мало зависит от скорости удара, то для $t=t_0 + \Delta t$ можно вполне принять $\epsilon_1 = \epsilon_1^* = 0$; $\sigma_1^* - \sigma_{1\text{уп}} = \sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}}$; более того, можно принять $\epsilon_1 = \epsilon_1^* = 0$; $\sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}} = \sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}} = 0$.

В силу того, что $v_1 = v_1^*$ и $\frac{d\sigma_1}{dt} = \frac{d\sigma_1^*}{dt} = 0$, мы не можем для малых значений времени определить E и f . Это вытекает из физических соображений, ибо в окрестности скорости деформации малы и можно положить $f=0$ и $E=E_{\text{уп}}$. Для решения этой задачи воспользуемся существованием еще одной дополнительной информации. А именно: известно, что, начиная с момента $t=t_0$, $\sigma_1 = \sigma_1(t)$, $\sigma_1^* = \sigma_1^*(t)$. Тогда уравнение (1, 4) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1}{dt} &= E(\epsilon_1) v_1 - f(\sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}}), \\ \frac{d\sigma_1^*}{dt} &= E(\epsilon_1^*) v_1^* - f(\sigma_1^* - \sigma_{1\text{уп}}). \end{aligned} \quad (1, 12)$$

Пользуясь тем, что известны σ_1 и σ_1^* , мы можем найти связь между теми значениями времени, при которых имело бы место равенство $\sigma_1 = \sigma_1^*$. Тогда из $\sigma_1 = \sigma_1^*$ находим соответствующую зависимость $t_1^* = \varphi(t_1)$. Установим связь между шагами интегрирования, начиная с $\Delta t^* = \varphi(t_1) \Delta t_1$.

Итак, в (1, 12) второе уравнение будет записано для момента времени, обеспечивающего равенство $\sigma_1 = \sigma_1^*$. Однако в этот момент времени $\epsilon_1 \neq \epsilon_1^*$ и, следовательно, $\sigma_{1\text{уп}} \neq \sigma_{1\text{уп}}^*$. В силу того, что при t , близких к t_0 , ϵ_1 и ϵ_1^* достаточно близки, если взять время (1, 13), то до некоторого t_1 можно определить E и f из (1, 12), считая, что $E(\epsilon_1) = E(\epsilon_1^*)$ и $f(\sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}}) = f(\sigma_1^* - \sigma_{1\text{уп}})$. Начиная с $t=t_1$, аргументы искомых функций будут отличаться заметно. В этом случае можно в (1, 12) положить:

$$\begin{aligned} E(\epsilon_1^*) &= E(\epsilon_1) + \frac{dE_1}{d\epsilon_1} (\epsilon_1^* - \epsilon_1), \\ f(\sigma_1^* - \sigma_{1\text{уп}}^*) &= f(\sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}}) + \frac{\partial f}{\partial (\sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}})} (\sigma_1^* - \sigma_1 - \sigma_{1\text{уп}}^* - \sigma_{1\text{уп}}). \end{aligned} \quad (1, 14)$$

Производные в этих уравнениях будут определяться по значениям аргументов в предыдущих точках.

При еще больших разностях аргументов вместо (1, 14) можно пользоваться формулами Лагранжа для квадратичной интерполяции. Таким образом, задача определения функций $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_{\text{уп}})$ может считаться решенной. Тогда, используя граничные условия, получаем второе приближение для значений функций E и f до момента времени $t_{01} = \frac{l}{a_{01}}$. Третье и последующие приближения для значений функций E и f находятся аналогичным образом. Этот процесс приближения продолжается до тех пор, пока последовательности значений функций E и f не сойдутся. Аналитическое доказательство сходимости этих функций вызывает определенные математические затруднения. Однако наличие ЭВЦМ позволяет произвести необходимые расчеты и легко убедиться в сходимости процесса приближения.

Следует заметить, что необходимо вести расчеты для различного числа частиц, на которые мы разбиваем экспериментируемый образец. Если окажется, что функции E и f , найденные таким способом для скоростей удара v_N и v_N^* , не приведут к удовлетворительному совпадению $T_{\text{расч}}$ и $T_{\text{эксп}}$, то это будет указывать на непригодность предлагаемого закона деформирования для данного материала.

Покажем теперь, что действительно можно определить функции E и f описанным выше методом. Задаемся E_0 и f_0 . Например, $f_0 = 0$, $E_0 = E_{\text{уп}}$, где $E_{\text{уп}}$ — переменный модуль Юнга, определенный в предположении, что материал обладает упруго-пластическими свойствами. В этом случае можем интегрировать (1, 9) ... (1, 11) и найти значения всех σ_n , v_n и u_n , соответствующих скорости удара v_N и σ_n^1 , $v_n^1 u_n^1$, соответствующих скорости v_N^* для момента времени $t = \frac{l}{a_{01}}$.

Начиная с этого момента, будем считать, что $\frac{d\sigma_1}{dt}$ и $\frac{d\sigma_1^*}{dt}$ — известные функции времени. Тогда для момента времени $t_1 = t_0 + \Delta t$ по начальным условиям и значениям функций E_0 , f_0 найдем все остальные значения функций: $\sigma_2, \dots, \sigma_n$; $v_1, \dots, v_{n-1}$; $u_1, \dots, u_{n-1}$ и, следовательно, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$.

Исследование динамических характеристик полимерных материалов с применением ЭВЦМ

Произведенные нами численные расчеты на вычислительной машине по вышеизложенному методу показывают, что начиная с некоторого времени полученная кривая $\sigma(t)$ имеет неустойчивый характер, который, по-видимому, является недостатком метода замены сплошных сред системой конечного числа физических частиц. Поэтому предложен более эффективный метод последовательного приближения для определения экспериментальных функций $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_n)$, входящих в закон деформирования (1, 1), характеризующий влияние скорости деформации и изменение упругого модуля, который свободен от вышеуказанного недостатка. Предлагаемый метод основан также на знании экспериментальной зависимости $\sigma = \sigma(t)$, полученной регистрацией волн натяжения $T(t)$ при отражении от точки закрепления образца при поперечном ударе. Для определения функций $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_n)$ решим задачу об отражении волн натяжения от закрепленной границы при рассматриваемом законе деформирования.

Задача об отражении пластических волн для стержней при продольном ударе, когда закон деформирования подчиняется упрощенной схеме линейного упрочнения (Прандтля), рассмотрена в работах Уайта [3] и Ленского [4]. Для частного вида зависимости упруго-пла-

стического закона эта задача рассмотрена в работах Зволинского и Рыкова [5], Буравцева [6], Литвинова [7] и др. Для нелинейно-упругого закона деформирования эта же задача рассмотрена Д. Г. Агала-ровым [8].

Рассмотрим задачу об отражении от закрепленного конца продольных волн, возникающих при поперечном ударе. Учитывая, что при поперечном ударе возникают продольные волны распространения по образцу с большой скоростью, чем поперечные, в области, где нет влияния поперечной волны, процесс можно рассматривать таким же, как и при продольном ударе. Напишем основные уравнения при законе деформирования (1, 1):

$$E(\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + f(\sigma - \sigma_d),$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$
(1, 15)

Эквивалентными характеристическими уравнениями будут:

$$dx = \pm a dt,$$

$$dx = 0,$$

$$Edv = \pm a d\sigma + f dx,$$

$$Ed\sigma = d\sigma + f dt,$$

$$a^2 = \frac{E(\varepsilon)}{\rho}.$$
(1, 16)

Начальными и граничными условиями будут:

$$t = 0, \quad \sigma = \varepsilon = v = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$x = 0, \quad v = v_0, \quad t \geq 0,$$

$$x = l, \quad v = 0, \quad t \geq 0.$$
(1, 17)

В области АОД (рис. 1), являющейся невозмущенной, решение будет тривиальным, т. е. $\sigma = \varepsilon = v = 0$.

Заменим дифференциальные уравнения (1, 16) следующими уравнениями в конечных разностях:

$$E_{i,j-1}(v_{ij} - v_{i,j-1}) = a_{i,j-1}(\sigma_{ij} - \sigma_{i,j-1}) + f_{i,j-1}(x_{ij} - x_{i,j-1}),$$

$$E_{i-1,j}(v_{ij} - v_{i-1,j}) = -a_{i-1,j}(\sigma_{ij} - \sigma_{i-1,j}) + f_{i-1,j}(x_{ij} - x_{i-1,j}),$$

$$E'_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}) = \sigma_{ij} - \sigma'_{ij} + f'_{ij}(t_{ij} - t'_{ij}),$$
(1, 18)

где индексами i, j обозначены значения параметров в соответствующей сетки на плоскости x, t (рис. 2). Штрихом отмечены значения параметров в проекции i, j , как показано на рис. 2. Из уравнений (1, 18) можно найти величины $x_{ij}, t_{ij}, \sigma_{ij}, v_{ij}, \varepsilon_{ij}$ по формулам:

$$v_{ij} = \frac{[E_{i,j-1}v_{i,j-1} - a_{i,j-1}\sigma_{i,j-1} + f_{i,j-1}(x_{ij} - x_{i,j-1})]a_{i-1,j} + [E_{i-1,j}v_{i-1,j} + a_{i-1,j}\sigma_{i-1,j} + f_{i-1,j}(x_{ij} - x_{i-1,j})]a_{i,j-1}}{E_{i,j-1}a_{i-1,j} + E_{i-1,j}a_{i,j-1}};$$

$$\sigma_{ij} = \frac{-E_{i-1,j}[E_{i,j-1}v_{i,j-1} - a_{i,j-1}\sigma_{i,j-1} + f_{i,j-1}(x_{ij} - x_{i,j-1})] + [E_{i,j-1}v_{i,j-1} + a_{i,j-1}\sigma_{i,j-1} + f_{i,j-1}(x_{ij} - x_{i-1,j})]}{E_{i,j-1}a_{i-1,j} + E_{i-1,j}a_{i,j-1}};$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij} - \sigma'_{ij} + f_{ij}(t_{ij} - t'_{ij})}{E_{ij}} + \varepsilon'_{ij};$$

$$x_{ij} = \frac{(x_{i,j-1} - a_{i,j-1}t_{i,j-1})a_{i-1,j} + (x_{i-1,j} + a_{i-1,j}t_{i-1,j})a_{i,j-1}}{a_{i-1,j} + a_{i,j-1}} \quad (1, 19)$$

$$t_{ij} = \frac{x_{i-1,j} - a_{i-1,j}t_{i-1,j} + x_{i,j-1} - a_{i,j-1}t_{i,j-1}}{a_{i-1,j} + a_{i,j-1}}.$$

Значения $\varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}, t'_{ij}$ находятся из интерполяционных соотношений:

$$\frac{\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{i-1,j-1}}{\varepsilon_{i-1,j} - \varepsilon_{i-1,j-1}} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}};$$

$$\frac{\sigma'_{ij} - \sigma_{i-1,j-1}}{\sigma_{i-1,j} - \sigma_{i-1,j-1}} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}};$$

$$\frac{t'_{ij} - t_{i-1,j-1}}{t_{i-1,j} - t_{i-1,j-1}} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}.$$
(1, 20)

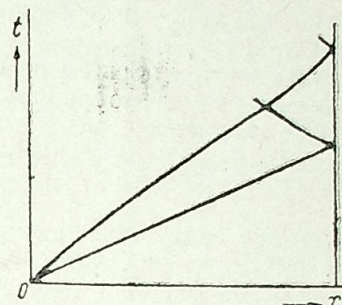


Рис. 2

Решая систему относительно $\varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}, t'_{ij}$, получим:

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}(\varepsilon_{i-1,j} - \varepsilon_{i-1,j-1}) + \varepsilon_{i-1,j-1};$$

$$\sigma'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}(\sigma_{i-1,j} - \sigma_{i-1,j-1}) + \sigma_{i-1,j-1};$$

$$t'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{i-1,j-1}}{x_{i-1,j} - x_{i-1,j-1}}(t_{i-1,j} - t_{i-1,j-1}) + t_{i-1,j-1}.$$
(1, 21)

Граничные условия рассматриваемой задачи для данной разностной схемы при $E'(\varepsilon) < 0$ примут вид:

$$j \leq n, \quad i = j, \quad \sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} = v_{ij} = 0,$$

$$i \leq k, \quad j = 0, \quad \sigma_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} E d\varepsilon, \quad v_{ij} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} a d\varepsilon,$$

$$i \geq k, \quad j = i - k, \quad v_{ij} = v_0,$$

$$j \geq n, \quad j = i + n, \quad v_{ij} = 0,$$
(1, 22)

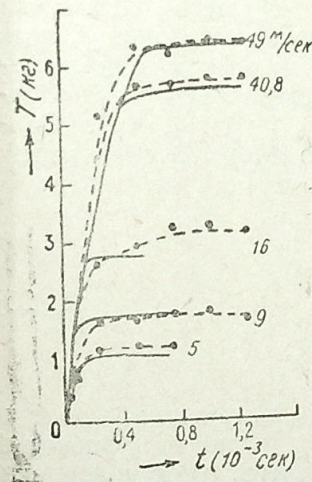


Рис. 3

где k —число делений области АОВ характеристиками положительного наклона; n —число делений той же области характеристиками отрицательного наклона.

Таким образом, решение задачи об отражении методом характеристик сводится к вычислению системы алгебраических уравнений (1, 19), (1, 20), (1, 21) при условиях (1, 22), легко решаемой на электронных вычислительных машинах. Результаты конкретного решения применительно к исследованиям

механических характеристик поливинила и капрона, определяемых законом (1, 1), приведены на рис. 3.

Определение функций $E(\epsilon)$ и $f(\sigma - \sigma_d)$

Напишем уравнение (1, 1) применительно к каким-либо двум скоростям удара v_1 и v_2 (рис. 3). Имеем:

$$E(\epsilon_1) \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + f(\sigma_1 - \sigma_d); \quad (1, 23)$$

$$E(\epsilon_2) \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + f(\sigma_2 - \sigma_d),$$

где $\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$ — деформации и натяжения, соответствующие скоростям удара v_1 и v_2 .

В качестве первого приближения возьмем $E(\epsilon)$ — значение, определяемое из деформационной теории, f — как линейную функцию своего аргумента:

$$E(\epsilon) = \frac{d\sigma_d}{d\epsilon}, \quad f(\sigma - \sigma_d) = k(\sigma - \sigma_d). \quad (1, 24)$$

Задаваясь величиной k , решим задачу об отражении указанным методом для двух значений скорости удара v_1 и v_2 . Используем найденные из решения значения деформаций ϵ_1, ϵ_2 в соотношениях (1, 23). Натяжения $T_1 = T_1(t), T_2 = T_2(t)$ берем из эксперимента, т. е. из кривых, аналогичных кривым, указанным на рис. 4. Тогда функция $f(\sigma - \sigma_d)$ определяется из (1, 23). Мы имеем два уравнения, но может случиться так, что:

1) f определится из одного уравнения для одних значений аргумента $\sigma - \sigma_d$ и из другого уравнения для других значений аргумента;

2) из двух уравнений для f получим два значения. В последнем случае следует отбросить то уравнение из (1, 23), которое дает f для меньшего диапазона $\sigma - \sigma_d$. После определения f , зная $E(\epsilon)$, взятое в первом приближении, решим снова задачу об отражении для $v_0 = v_1$ и $v_0 = v_2$. Считая функцию $f = f_1$ известной, найдем функцию $E(\epsilon) = E_1$ следующим образом.

В уравнения (1, 22), которые примут вид

$$E_1(\epsilon_1) \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_1}{\partial t} + (f\sigma_1 - \sigma_d), \quad (1, 25)$$

$$E_1(\epsilon_2) \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial \epsilon_2}{\partial t} + f_1(\sigma_2 - \sigma_d),$$

подставим найденные из решения ϵ_1 и ϵ_2, σ_1 и σ_2 , взятые из экспериментальных кривых, соответствующие v_1 и v_2 . Тогда из уравнений (1, 25) определится новый вид $E(\epsilon) = E_1(\epsilon)$. Теперь, имея новое значение функции $E = E_1$ и прежние значения функции $f = f_1$, решим снова задачу об отражении для $v_0 = v_1$ и $v_0 = v_2$. В результате получим новое значение $\epsilon = \epsilon(t)$. Далее, считая функцию $E = E_1$ известной, найдем функцию $f = f_2$ так же, как прежде. Этот процесс надо продолжать до тех пор, пока не будут получены сходящиеся последовательности для E и f .

Указанный метод нами применен для определения механических свойств нити из поливинила и капрона, свойства которых согласуются с применяемой физической зависимостью (1, 1). На рис. 3 приведены графики зависимостей $T(t)$, полученных на ЭЦВМ для закона деформирования (1, 1) при $E = \frac{300}{50\epsilon + 1}$ кг, $f(\sigma - \sigma_d) = k(\sigma - \sigma_d)$, где $k = 1200$ 1/сек, $\sigma_d = 80\epsilon$ кг.

Функции E и f выбраны так, чтобы в первом приближении описывать свойства капрона. $\sigma_d(\epsilon)$, получаемая с помощью деформационной теории, в данном случае взята из результатов статических испытаний. Графики соответствуют продольным скоростям удара 49, 40, 8; 16,9; 5 м/сек (соответствующие скорости поперечных ударов 146, 128, 66, 51, 8, 36 м/сек). Для сравнения на том же рисунке штриховой линией изображены зависимости $T(t)$, полученные из эксперимента (осциллограмма представлена на рис. 4). Как видно, расчетные кривые удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Последующие приближения функций E и f позволят приблизить расчетные кривые к экспериментальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керимов К. А. "Изв. АН Азерб. ССР", 1964, № 3.
2. Рахматулин Х. А., Керимов К. А. Тр. Всесоюз. СИМП по распр. упруго-пластических волн в сплошных средах.
3. White M. P. "Appl. mech.", № 16, 1949.
4. Ленский В. С. ПММ, т. XIII, 1949, № 2.
5. Зволлинский Н. В. ПММ, 27, 1963, № 1.
6. Буравцев "Вестник ЛГУ", сер. матем. и мех., 1963, № 1.
7. Литвинов Г. В. "Изв. АН СССР. мех. и матем.", 1964, № 5.
8. Аггаларов Д. Г. "Изв. АН Азерб. ССР" 1964, № 5.

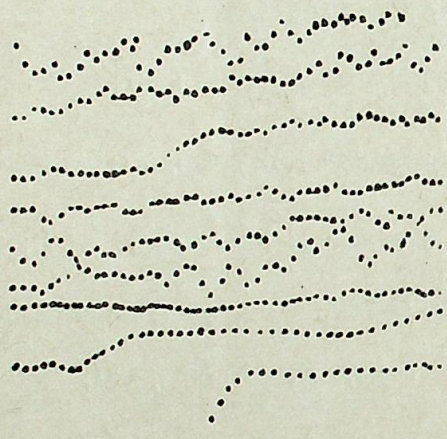


Рис. 4

СОДЕРЖАНИЕ

Ч. М. Джуварлы. Наши достижения в области физико-технических и математических наук	3
Я. Н. Насиров, В. А. Нагиев, А. А. Зейналов. Влияние малых замещений германия кадмием на тепловые и электрофизические свойства GeTe	15
А. А. Кулиев, М. Г. Шахтахтинский, Д. С. Томтиев. Гальвано-магнитные свойства твердых растворов висмут-сурьма	17
Г. А. Эфендиев. Кинематический метод электронографии в исследовании фазовых превращений в тонких пленках	25
Л. М. Иманов, Ч. О. Каджар. Микроволновый спектр, структура, дипольный момент и внутреннее заторможенное вращение молекулы этилового спирта	33
Х. И. Мамедов. Квазилинейчатый электронный спектр органических молекул в парафинах при низкой температуре	43
Г. Б. Абдуллаев, В. Г. Баграмов, Д. В. Иремашвили, Н. И. Леонтьев, Э. Ю. Салаев. Импульсный электронный ускоритель	51
Р. Э. Гусейнов. Некоторые вопросы механизмов солнечных вспышек и образования энергии	57
З. А. Исмаилов. Об особенностях спектра переменных звезд GWOri и RY Tau	64
Г. Ф. Султанов. Некоторые закономерности в распределениях астероидов и осколков первичных крупных тел по признакам их физических и орбитных особенностей	73
Г. Т. Аразов. Относительное движение искусственного спутника сферической планеты	81
Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, П. В. Леонов, Ю. В. Горин. Электрический разряд в газовых полостях, ограниченных диэлектриком	87
Ч. М. Джуварлы, Е. В. Дмитриев. К вопросу численного расчета переходных процессов в электрической сети	93
А. А. Эфендизаде, Б. А. Листенгартен, Ю. М. Курдюков. Исследование формы кривой напряжения на выходе трехфазного инвертора на тиристорах	101
М. А. Багиров, Б. П. Николаев, В. П. Малин. Расчет распределения температуры в нефтяном пласте, создаваемой подвижным очагом горения	109
Ч. М. Джуварлы, М. М. Муслимов. Вероятность опасных грозозовых перенапряжений на нейтрали трансформаторов в сети 110 кв	114
Э. М. Мусаев, Т. И. Насирова. Система с ожиданием в случае возможности выхода прибора из строя и восстановления	119
Р. М. Ибрагимбеков. Применение теории статистических решений к задачам субоптимального управления многосвязными технологическими объектами	124
В. Г. Пирмамедов. Разностный метод решения одной нестационарной задачи фильтрации с подвижной границей	130
А. Х. Мирзаджанзаде, А. М. Хасаев, Р. С. Гурбанов, З. М. Ахмедов. Некоторые особенности разработки и эксплуатации месторождений негьютоновских нефтей	137
А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров. Критерий компактности в пространствах	145
И. И. Ибрагимов и Р. М. Алиев. О некоторых наилучших кубатурных формулах	154
М. Б. Мамедов. О разложении по собственным функциям несамосопряженного оператора Шредингера в некоторых неограниченных областях	162
Р. З. Халилова. Об одной обратной задаче	169
Л. Г. Мустафаев. Связки полугруд	176
К. А. Керимов. Исследование вязко-упруго-пластических характеристик полимерных материалов при поперечном ударе	185

Подписано к печати 21/X 1967 г. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. лист. 6,13.
Печ. лист. 16,78. Уч-изд. лист. 16,4. ФГ 18490. Заказ 325. Тираж 650.
Цена 1 руб. 60 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров
Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асанова, № 80.