

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

2

1967

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Р. А. АББАСОВ

О ВЗАИМССВЯЗИ МЕЖДУ ПОЛНЫМ И ЧАСТНЫМИ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Обозначим через Q_k класс равномерных почти-периодических функций k -переменных, показатели Фурье которых по каждой переменной не имеют предельных точек на конечном расстоянии. Будем считать, что ряд Фурье почти-периодической функции $f(x_1, \dots, x_k) \in Q_k$ записан следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_k) \sim \sum_{n_1, \dots, n_k} A_{n_1, \dots, n_k} e^{i(\Lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \Lambda_{n_k}^{(k)} x_k)}$$

$$(\Lambda_{n_r}^{(r)} = 0 \text{ при } n_r = 0, \Lambda_{-n_r}^{(r)} = -\Lambda_{n_r}^{(r)}, \Lambda_{n_r}^{(r)} < \Lambda_{n_r+1}^{(r)} \\ \text{при } n_r \geq 0; \lim_{n_r \rightarrow \infty} \Lambda_{n_r}^{(r)} = \infty; r = 1, 2, \dots, k).$$

Положим

$$\|f(x_1, \dots, x_k)\| = \sup_{x_1, \dots, x_k} |f(x_1, \dots, x_k)|.$$

Пусть

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_k}(f) = \inf_{T_{\mu_1, \dots, \mu_k}} \sup_{x_1, \dots, x_k} |f(x_1, \dots, x_k) - T_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x_1, \dots, x_k)|$$

есть полное наилучшее приближение функции $f(x_1, \dots, x_k)$ почти-периодическими многочленами

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_k}(x_1, \dots, x_k) = \sum \dots \sum_{|\Lambda_{n_1}^{(1)}| < \mu_1, |\Lambda_{n_k}^{(k)}| < \mu_k} C_{n_1, \dots, n_k} e^{i(\Lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \Lambda_{n_k}^{(k)} x_k)},$$

где $\mu_r \geq 0$ ($r = 1, 2, \dots, k$), $C_{n_1, \dots, n_k}$ — произвольные комплексные коэффициенты.

Величину

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_p, \infty}(f) = \inf_{T_{\mu_1, \dots, \mu_p}} \sup_{x_1, \dots, x_k} |f(x_1, \dots, x_k) - T_{\mu_1, \dots, \mu_p}[x_1, \dots, x_p; (x_{p+1}, \dots, x_k)]|$$

для любого $p < k$ будем рассматривать как частное наилучшее приближение почти-периодическими многочленами

$$T_{\mu_1, \dots, \mu_p}[x_1, \dots, x_p; (x_{p+1}, \dots, x_k)] = \\ = \sum \dots \sum_{|\Lambda_{n_1}^{(1)}| < \mu_1, |\Lambda_{n_p}^{(p)}| < \mu_p} C_{n_1, \dots, n_p}(x_{p+1}, \dots, x_k) e^{i(\Lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \Lambda_{n_p}^{(p)} x_p)}$$

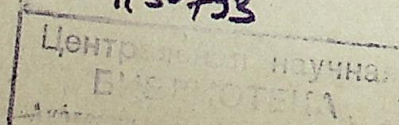
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор) Г. А. Абдуллаев (зам редактора), А. И. Гусейнов (зам редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“

Подписано к печати 28/VII-1967 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 3,63. Печ. лист. 9,93. Уч.-изд. лист. 9,5. ФГ 10727. Заказ 226. Тираж 650. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, № 80.

750793



где $C_{n_1, \dots, n_r}(x_{r+1}, \dots, x_k)$ — равномерно почти-периодические функции, показатели Фурье которых по каждой переменной не имеют предельных точек на конечном расстоянии.

В данной статье устанавливается связь между полным и частными наилучшими приближениями равномерно почти-периодических функций и обобщается одно неравенство О. Д. Габасония [2], относящееся к некоторым линейным методам приближения непрерывных функций, на равномерные почти-периодические функции.

2. Следующие результаты при $r=1$ доказаны в [3], которые мы сформулируем при любом $r=1, 2, \dots, \kappa$.

Пусть $a_r < b_r$ ($r=1, 2, \dots, \kappa$) — произвольные положительные числа и

$$\varphi_{a_r, b_r}(t_r) = \begin{cases} 1 & |t_r| \leq a_r, \\ \frac{1}{b_r - a_r}(b_r - |t_r|) & a_r < |t_r| < b_r, \\ 0 & |t_r| \geq b_r, \end{cases} \quad (1)$$

а ее преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \psi_{a_r, b_r}(u_r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a_r, b_r}(t_r) e^{-iu_r t_r} dt_r = \\ &= \frac{2}{\pi(b_r - a_r)} \cdot \frac{\sin \frac{b_r - a_r}{2} u_r \sin \frac{b_r + a_r}{2} u_r}{u_r^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a_r, b_r}(u_r)| du_r \leq \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{b_r + a_r}{b_r - a_r}, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{a_r, b_r}(u_r) du_r = 1 \quad (4)$$

и, если $f(x_1, \dots, x_k) \in Q_k$, то

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, \dots, x_k; f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + u_1, \dots, x_k + u_k) \psi_{a_1, b_1}(u_1) \dots \psi_{a_k, b_k}(u_k) du_1 \dots du_k = \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_k} \varphi_{a_1, b_1}(\Lambda_{n_1}^{(1)}) \dots \varphi_{a_k, b_k}(\Lambda_{n_k}^{(k)}) A_{n_1, \dots, n_k} e^{i(\Lambda_{n_1}^{(1)} x_1 + \dots + \Lambda_{n_k}^{(k)} x_k)} \end{aligned} \quad (5)$$

3. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если $f(x_1, \dots, x_k) \in Q_k$, то

$$\begin{aligned} E_{b_1, \dots, b_k}(f) &\leq \min \{E_{a_{v_1}, \dots, a_{v_r}, \infty}(f) + E_{b_{v_r+1}, \dots, b_{v_k}, \infty}(f)\} \left(1 + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a_{v_1}, b_{v_1}}(u_{v_1})| du_{v_1} \dots \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a_{v_r}, b_{v_r}}(u_{v_r})| du_{v_r}\right) \right) \\ &\left(v_p = 1, 2, \dots, \kappa; p = 1, 2, \dots, r; r \leq \left\lfloor \frac{\kappa}{2} \right\rfloor; a_r < b_r \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство проведем лишь для случая функций двух переменных. Пусть

$$T_{a_1}[x_1; (x_2)] = \sum_{\Lambda_{n_1}^{(1)} < a_1} C_{n_1}(x_2) e^{i \Lambda_{n_1}^{(1)} x_1},$$

$$T_{a_2}[(x_1); x_2] = \sum_{\Lambda_{n_2}^{(2)} < a_2} C_{n_2}(x_1) e^{i \Lambda_{n_2}^{(2)} x_2}$$

— почти-периодические многочлены такие, что

$$|f(x_1, x_2) - T_{a_1}[x_1; (x_2)]| \leq E_{a_1, \infty}(f), \quad (7)$$

$$|f(x_1, x_2) - T_{a_2}[(x_1); x_2]| \leq E_{\infty, a_2}(f). \quad (8)$$

Вследствие (5) и (2)

$$T_{a_1}[x_1; (x_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} T_{a_1}[x_1 + u_1, (x_2)] \psi_{a_1, b_1}(u_1) du_1, \quad (9)$$

$$T_{a_2}[(x_1); x_2] = \int_{-\infty}^{\infty} T_{a_2}[(x_1); x_2 + u_2] \psi_{a_2, b_2}(u_2) du_2.$$

Учитывая (7), (8), (9) и (10), получим

$$\begin{aligned} E_{b_1, b_2}(f) &\leq \|f(x_1, x_2) - \int_{-\infty}^{\infty} T_{b_2}[(x_1 + u_1); x_2] \psi_{a_1, b_1}(u_1) du_1\| \leq \\ &\leq \|f(x_1, x_2) - T_{a_1}[x_1; (x_2)]\| + \\ &+ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \{T_{a_1}[x_1 + u_1; (x_2)] - f(x_1 + u_1, x_2)\} \psi_{a_1, b_1}(u_1) du_1 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x_1 + u_1, x_2) - T_{b_2}[(x_1 + u_1); x_2]\} \psi_{a_1, b_1}(u_1) du_1 \right\| \leq \\ &\leq \{E_{a_1, \infty}(f) + E_{\infty, b_2}(f)\} \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a_1, b_1}(u_1)| du_1\right). \end{aligned}$$

Аналогично можно получить и неравенство

$$E_{a_1, b_1}(f) \leq \{E_{a_1, \infty}(f) + E_{\infty, a_2}(f)\} \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{a_2, b_2}(u_2)| du_2\right). \quad (12)$$

Из (11) и (12) следует неравенство (6) для случая функций двух переменных. Отметим, что (6) содержит в себе соответствующее неравенство М. Ф. Тимана [4], устанавливающее связь между полным и частными наилучшими приближениями непрерывных функций, имеющих по каждой переменной период 2π , которое в случае функций двух переменных получено С. Н. Бернштейном [1].

Действительно, пусть $f(x_1, \dots, x_k)$ — непрерывная функция κ -переменных периода 2π по каждой переменной, $E_{n_1, \dots, n_k}(f)$ — полное наилучшее приближение этой функции тригонометрическими полиномами порядка не выше n_r по переменным x_r ($r=1, 2, \dots, \kappa$). $\bar{E}_{n_1, \dots, n_p, \infty}(f)$ — частное наилучшее приближение этой функции тригонометрическими полиномами порядка не выше n_p по переменным x_p ($p=1, 2, \dots, r$). Тогда

$$E_{n_1, \dots, n_k}(f) = E_{n_1, \dots, n_k}(f),$$

$$E_{n_1, \dots, n_p, \infty}(f) = \bar{E}_{n_1, \dots, n_p, \infty}(f).$$

Полагая $\Lambda_{n_r}^{(r)} = n_r$, $a_r = n_r$, $b_r = n_r + \frac{10}{11}$, $n_r \geq 2$; $r=1, 2, \dots, \kappa$, получим

$$\bar{E}_{n_1, \dots, n_k}(f) \leq \min \{\bar{E}_{n_{v_1}, \dots, n_{v_r}, \infty}(f) + \bar{E}_{n_{v_r+1}, \dots, n_{v_k}, \infty}(f)\} \left(3 + \right.$$

$$\left(3 + \frac{2}{\pi} \ln n_{v_r}\right) \dots \left(3 + \frac{2}{\pi} \ln n_{v_r}\right) \cdot \left(v_p = 1, \dots, \kappa; p = 1, 2, \dots, r; r \leq \left[\frac{\kappa}{2}\right]\right).$$

Поэтому неравенства (11) и (12) будут содержать в себе соответствующие неравенства С. Н. Бернштейна [1] для непрерывных функций двух переменных.

Положив в неравенстве (6) $a_{v_p} = \theta b_{v_p}$ ($p = 1, 2, \dots, r$), где $0 \leq \theta < 1$, получим

$$E_{b_{v_1}, \dots, b_{v_r}}(f) \leq \min \{E_{a_{v_1}, \dots, a_{v_r}, \infty}(f) + E_{b_{v_r+1}, \dots, b_{v_\kappa}, \infty}(f)\} C^r(0) \quad (6')$$

$$\left(v_p = 1, 2, \dots, \kappa; p = 1, 2, \dots, r; r \leq \left[\frac{\kappa}{2}\right]\right),$$

где $C^r(0)$ — постоянная, не зависящая от функции f . Отметим, что (6') содержит в себе соответствующее неравенство (5) М. Ф. Тимана [5].

4. Теорема 2. Если $f(x_1, \dots, x_\kappa) \in Q_\kappa$, то

$$|f(x_1, \dots, x_\kappa) - \sigma(x_1, \dots, x_\kappa; f)| \leq \sum_{r=1}^{\kappa} \frac{1}{l_r + 1} \sum_{k_r=0}^{l_r} E_{\Lambda_{n_r-k_r}, \infty}^{(r)}(f) \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_r}^{(r)} + \Lambda_{n_r-l_r}^{(r)} + c_r}{\Lambda_{n_r}^{(r)} - \Lambda_{n_r-l_r}^{(r)} + a_r}\right)^{\kappa},$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство проведем для случая функций двух переменных. Положим $a_r = \Lambda_{n_r-l_r}^{(r)}$, $b_r = \Lambda_{n_r}^{(r)} + a_r$, $c_r > 0$ ($r = 1, 2$).

Учитывая (3), (7), (8), (9) и (10) получим

$$\begin{aligned} & \|f(x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2; f)\| \leq \|f(x_1, x_2) - T_{\Lambda_{n_1-l_1}}^{(1)}[x_1; (x_2)]\| + \\ & + \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \{T_{\Lambda_{n_1-l_1}}^{(1)}[x_1 + u_1; (x_2)] - f(x_1 + u_1; x_2)\} \psi_{\Lambda_{n_1-l_1}, \Lambda_{n_1}^{(1)}+a_1}(u_1) du_1 \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{l_1 + 1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x_1 + u_1, x_2) - \right. \\ & - T_{\Lambda_{n_1-k_1}}^{(1)}[x_1 + u_1, (x_2)]\} \psi_{\Lambda_{n_1-k_1}, \Lambda_{n_1}^{(1)}+a_1}(u_1) du_1 \left. \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{l_1 + 1} \sum_{k_1=0}^{l_1} \int_{-\infty}^{\infty} \{T_{\Lambda_{n_1-k_1}}^{(1)}[x_1 + u_1; (x_2)] - \right. \\ & - f(x_1 + u_1; x_2)\} \psi_{\Lambda_{n_1-k_1}, \Lambda_{n_1}^{(1)}+a_1}(u_1) du_1 \left. \right\| + \\ & + \left\| \frac{1}{l_2 + 1} \sum_{k_2=0}^{l_2} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x_1 + u_1, x_2) - \right. \\ & - T_{\Lambda_{n_2-k_2}}^{(2)}[(x_1 + u_1); x_2]\} \psi_{\Lambda_{n_2-k_2}, \Lambda_{n_2}^{(2)}+a_2}(u_2) du_2 \left. \right\| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left\| \frac{1}{l_2 + 1} \sum_{k_2=0}^{l_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{T_{\Lambda_{n_2-k_2}}^{(2)}[(x_1 + u_1); x_2 + u_2] - \right. \\ & - f(x_1 + u_1, x_2 + u_2)\} \psi_{\Lambda_{n_2-k_2}, \Lambda_{n_2}^{(2)}+a_2}(u_1) \psi_{\Lambda_{n_2-k_2}, \Lambda_{n_2}^{(2)}+a_2}(u_2) du_1 du_2 \left. \right\| \leq \\ & \leq \frac{3}{l_1 + 1} \sum_{k_1=0}^{l_1} E_{\Lambda_{n_1-k_1}, \infty}^{(1)}(f) \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_1}^{(1)} + \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}{\Lambda_{n_1}^{(1)} - \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}\right) + \\ & + \frac{1}{l_2 + 1} \sum_{k_2=0}^{l_2} E_{\Lambda_{n_2-k_2}, \infty}^{(2)}(f) \left(\frac{4}{\pi} + \right. \\ & + \left. \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_2}^{(2)} + \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}{\Lambda_{n_2}^{(2)} - \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}\right). \quad (14) \end{aligned}$$

Аналогично можно получить оценку

$$\begin{aligned} & |f(x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2; f)| \leq \frac{3}{l_2 + 1} \sum_{k_2=0}^{l_2} E_{\Lambda_{n_2-k_2}, \infty}^{(2)}(f) \left(1 + \frac{4}{\pi} + \right. \\ & + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_2}^{(2)} + \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}{\Lambda_{n_2}^{(2)} - \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}\left) + \frac{1}{l_1 + 1} \sum_{k_1=0}^{l_1} E_{\Lambda_{n_1-k_1}, \infty}^{(1)}(f) \left(\frac{4}{\pi} + \right. \\ & + \left. \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_1}^{(1)} + \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}{\Lambda_{n_1}^{(1)} - \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}\right) \left(\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_2}^{(2)} + \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}{\Lambda_{n_2}^{(2)} - \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}\right). \quad (15) \end{aligned}$$

Объединяя (14) и (15), получим неравенство для рассматриваемого случая функций двух переменных:

$$\begin{aligned} & |f(x_1, x_2) - \sigma(x_1, x_2; f)| \leq \\ & \leq \frac{3}{l_1 + 1} \sum_{k_1=0}^{l_1} E_{\Lambda_{n_1-k_1}, \infty}^{(1)}(f) \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_1}^{(1)} + \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}{\Lambda_{n_1}^{(1)} - \Lambda_{n_1-l_1}^{(1)} + a_1}\right)^2 + \\ & + \frac{3}{l_2 + 1} \sum_{k_2=0}^{l_2} E_{\Lambda_{n_2-k_2}, \infty}^{(2)}(f) \left(1 + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\Lambda_{n_2}^{(2)} + \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}{\Lambda_{n_2}^{(2)} - \Lambda_{n_2-l_2}^{(2)} + a_2}\right)^2. \end{aligned}$$

Отметим, что неравенство (13) содержит в себе известные оценки: оценку отклонения $S_{n_1, \dots, n_\kappa}(f)$ — частной суммы ряда Фурье 2π -периодической функции $f(x_1, \dots, x_\kappa)$ по совокупности переменных $x_1, \dots, x_\kappa$; оценку отклонения $\sigma_{n_1, \dots, n_\kappa}(f)$ — суммы Фейера 2π -периодической функции $f(x_1, \dots, x_\kappa)$ по всем переменным; оценку отклонения $V_{n_1, \dots, n_\kappa}(f)$ — суммы Валле-Пуссена 2π -периодической функции $f(x_1, \dots, x_\kappa)$ по совокупности переменных, которые содержатся также в неравенстве (3) работы [2].

Действительно, полагая в неравенстве (13)

$$l_r = 0, \Lambda_{n_r}^{(r)} = n_r, a_r = \frac{10}{11} \text{ и } n_r \geq 2 \text{ (} r = 1, 2, \dots, \kappa \text{),}$$

имеем

$$|f(x_1, \dots, x_\kappa) - S_{n_1, \dots, n_\kappa}(f)| \leq C_1 \sum_{r=1}^{\kappa} \bar{E}_{n_r, \infty}(f) \ln^{\kappa} n_r.$$

Аналогично, при $l_r = n_r$, $\Lambda_{n_r}^{(r)} = n_r$, $a_r = 1$ ($r = 1, 2, \dots, k$) из неравенства (13) следует оценка

$$|f(x_1, \dots, x_k) - \sigma_{n_1, \dots, n_k}(f)| \leq C_2 \sum_{r=1}^k \frac{1}{n_r + 1} \sum_{n_r=0}^{n_r} \bar{E}_{n_r, \infty}(f).$$

Наконец, если $l_r = 0$, $\Lambda_{n_r}^{(r)} = n_r$, $\sigma_r = n_r$ ($r = 1, 2, \dots, k$), из неравенства (13) получим

$$|f(x_1, \dots, x_k) - V_{2n_1, \dots, 2n_k}(f)| \leq C_3 \sum_{r=1}^k \bar{E}_{n_r, \infty}(f),$$

причем C_1, C_2, C_3 — абсолютные постоянные.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность научному руководителю доц. А. С. Джафарову за постановку задачи и руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 24 (1951).
2. Габисония О. Д. Сообщения АН Груз. ССР, т. XV, 3, 1965.
3. Левитан Б. М. Почти-периодические функции, ГИТТЛ, М., 1953.
4. Тиман М. Ф. ДАН СССР, т. 112, № 1, 1957.
5. Тиман М. Ф. ДАН СССР, т. 124, № 3, 1959.

Р. Э. Аббасов

Санки периодик функцијаларын эн јахшы там вэ хусуси јахынлашмалары арасында гаршылыгы элагэ наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә санки периодик функцијаларын тригонометрик полиномларла әл јахшы там вэ хусуси јахынлашмалары арасындагы гаршылыгы элагәдән бәһс едилир.

А. Д. АДигЕЗАЛОВ

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Пусть $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольная, начинающаяся с нуля последовательность комплексных чисел, лежащих в единичном круге:

$$a_0 = 0, \quad |c_j| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Следуя М. М. Джрбашяну [1] и А. А. Китбашяну [5], составим системы рациональных функций:

$$\varphi_0(e^{ix}) = 1, \quad \varphi_m(e^{ix}) = \frac{(1 - |a_m|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_m e^{ix}} \cdot e^{ix} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{c_j - e^{ix}}{1 - \bar{c}_j e^{ix}} \cdot \frac{|a_j|}{c_j}, \quad (1)$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

причем предположим, что при условии $c_j = 0$ $\frac{|c_j|}{a_j} = \frac{|c_j|}{a_j} = -1$ ($j = 1, 2, \dots$) и при условии $m = 1$ под символом $\prod_{j=1}^0 \{\dots\}$ подразумеваем единицу.

Положим

$$\Phi_m(e^{ix}) = \begin{cases} \varphi_m(e^{ix}) & \text{при } m \geq 0, \\ \varphi_m(e^x) & \text{при } m \leq -1. \end{cases} \quad (2)$$

Известно (см. например, [1]), что система (2) ортонормальна на единичной окружности. Обозначим через $L_{p, 0, 2\pi}^+[\vec{p} = (p_2, \dots, p_m)]$ множество функций $f(x, \dots, x_m)$, перисдических по каждому переменному с периодом 2π и удовлетворяющих условию

$$\|f(x_1, \dots, x_m)\|_{\vec{p}} = \|\dots\| f(x_1, \dots, x_m) \|_{p_1} \dots \|_{p_m} < \infty$$

(в правой части сначала рассматривается норма по переменной x_1 , потом x_2 и т. д.),

$$\text{где } \|F(x)\|_{p_1} = \begin{cases} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{-\pi \leq x_1 \leq \pi} |F(x)|, & \text{если } p_1 = \infty. \end{cases}$$

Заметим, что в случае $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$ ($1 \leq p < \infty$) мы получаем Лебеговский класс $L_p^{(m)}(0, 2\pi)$.

В работах [2, 3, 4, 6, 7, 9] была установлена зависимость в виде неравенства между различными нормами для целых функций конечной степени, а также для тригонометрических полиномов. Рассмотрим рациональные функции, обобщающие тригонометрические полиномы, вида

$$Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} C_{k_1, \dots, k_m} \prod_{j=1}^m \Phi_{k_j}(e^{ix_j}), \quad (3)$$

где $C_{k_1, \dots, k_m}$ не зависит от x . В данной статье устанавливается зависимость в виде неравенства между различными нормами

$$\|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}} \rightarrow \|\vec{Q}_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}'} \quad (\vec{p}' = (p'_1, \dots, p'_m), \vec{p} = (p_1, \dots, p_m))$$

при различных $p'_1, \dots, p'_m$ и $p_1, \dots, p_m$. Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма. При $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ справедлива оценка

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t, x)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi^2 \left(\frac{p_n}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (4)$$

где

$$K_n(t, x) = \frac{\sin v_n(x, t)}{2 \sin \frac{t-x}{2}}, \quad v_n(x, t) = \int_x^{t-x} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(v - \theta_j) + |\alpha_j|^2} \right] dv, \quad (5)$$

$$p_n = \frac{1}{2} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - |\alpha_j|^2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin v_n(t, x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \right|^q dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin v_n(u+x, x)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right|^q du. \quad (6)$$

Из (6) в силу $|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|$ при $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ приходим к оценке

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin v_n(u+x, x)}{2 \sin \frac{u}{2}} \right|^q du \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^q \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin v_n(u+x, x)}{u} \right|^q du \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^q \int_0^{\pi} \{ |\sin v_n(u+x, x)|^q + |\sin v_n(-u+x, x)|^q \} \frac{du}{a^q}. \quad (7)$$

Из (5) имеем оценку

$$|v_n(u+x, x)| \leq p_n |u|. \quad (8)$$

Действительно, так как

$$\frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(v - \theta_j) + |\alpha_j|^2} \leq \frac{2}{1 - |\alpha_j|}, \quad \text{то}$$

$$\int_x^{u+x} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(v - \theta_j) + |\alpha_j|^2} \right] dv \geq \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{2}{1 - |\alpha_j|} \cdot u.$$

Разобьем в (7) отрезок интегрирования $[0, \pi]$ на две части: $\left[0, \frac{\pi}{p_n}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{p_n}, \pi\right]$. Для первой части применим оценку $|\sin x| \leq |x|$ и (8), а для второй — оценку $|\sin x| \leq 1$, тогда получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin v_n(t, x)}{2 \sin \frac{t-x}{2}} \right|^q dt \leq 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^q p_n^{q-1}.$$

Извлекая корень из обеих частей степени q последнего неравенства получим искомую оценку (4). Лемма доказана.

Теорема. Пусть $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и $\vec{p}' = (p'_1, \dots, p'_m)$. Если $1 \leq p_k \leq p'_k \leq \infty$ ($k = 1, \dots, m$), то для произвольного обобщенного тригонометрического полинома $Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m)$ от многих переменных имеет место неравенство

$$\|\vec{Q}_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}'} \leq \prod_{k=1}^m \pi \left(\frac{p_{n_k}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p'_k}} \|\vec{Q}_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}}, \quad (9)$$

$$\text{где } p_{n_k} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1}{1 - |\alpha_j|^2}.$$

Доказательство. Для сокращения записи докажем сначала теорему в случае, когда

$$\vec{p} = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_m) \text{ и } \vec{p}' = (p_1, \dots, p'_k, \dots, p_m).$$

Ясно, что

$$Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, t, \dots, x_m) K_{n_k}(t, x_k) dt, \quad (10)$$

$$\text{где } K_{n_k}(t, x_k) = \frac{\sin v_{n_k}(x_k, t)}{2 \sin \frac{t-x_k}{2}} \text{ и } v_{n_k}(x_k, t) =$$

$$= \int_{x_k}^t \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - |\alpha_j| \cos(v - \theta_j) + |\alpha_j|^2} \right] dv.$$

И (10), применяя обобщенное неравенство Минковского, относительно x_1 получим

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_m)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, t, \dots, x_m) K_{n_k}(t, x_k) dt \right|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \right]^{\frac{1}{p_1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, t, \dots, x_m)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} |K_{n_k}(t, x_k)| dt,$$

$$\|Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)\|_{p_1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, t, \dots, x_m)\|_{p_1} |K_{n_k}(t, x_k)| dt.$$

Продолжая этот процесс, после $(k=1)$ -го шага получим

$$\|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}(x_1, \dots, t, \dots, x_m)\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}} |K_{n_k}(t, x_k)| dt.$$

Применяя к последнему неравенство Гельдера с учетом (4), получим

$$\|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}} \leq \pi \left(\frac{p_{n_k}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p_k}} \|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_k}, \quad (11)$$

где $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$. В силу условия $p_k \leq p'_k$ имеем

$$\|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}} \|_{p'_k} =$$

$$= \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}} \right)^{p'_k - p_k} (\|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_{k-1}}) dt \right\}^{\frac{1}{p_k}} \leq$$

$$\leq \pi \left(\frac{p_{n_k}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p'_k}} \|\dots\{ \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{p_1} \dots \|_{p_k}. \quad (12)$$

Таким образом, из неравенства (12) последовательным применением в каждой его части Лебеговский норм $\|\cdot\|_{p_{k+1}}, \dots, \|\cdot\|_{p_m}$ находим, что

$$\|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}} \leq \pi \left(\frac{p_{n_k}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p'_k}} \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}}, \quad (13)$$

где $\vec{p}' = (p_1, \dots, p'_k, \dots, p_m)$ и $\vec{p} = (p_1, \dots, p_k, \dots, p_m)$
 $(1 \leq p_k \leq p'_k \leq \infty)$.

Неравенство (9) получается последовательным применением неравенства (13). Отметим, что [8] установлено равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} [K_{n_k}(t, x_k)]^2 dt = \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1 - |\alpha_j|^2}{1 - 2|\alpha_j| \cos(x_k - \theta_j) + |\alpha_j|^2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1 + |\alpha_j|}{1 - |\alpha_j|} \right).$$

Поэтому при условии $p_k = 2$, неравенство (9) примет вид

$$\|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}} \leq \prod_{j=1}^m \left[\frac{\pi}{2} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{n_k} \frac{1 + |\alpha_j|}{1 - |\alpha_j|} \right) \right]^{\frac{1}{2} \frac{1}{p_k}} \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}}. \quad (14)$$

В заключение заметим, что при условии $\epsilon_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$) из неравенств (9) и (14) получаются некоторые результаты для тригонометрических полиномов. Подобные неравенства ранее были установлены в работах [2, 4, 6, 7 и 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Джрбашян М. М. „Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук“, т. 9, 1956, № 7.
2. Джафаров А. С. „ДАН Азерб. ССР“, т. 19, 1963, № 10.
3. Ибрагимов И. И. и Джафаров А. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1962, № 5.
4. Ибрагимов И. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. наук“, 1958, № 2.
5. Китбальян А. А. „Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-матем. наук“, т. 16, 1963, № 6.
6. Никольский С. М. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38, 1958.
7. Тиман А. Ф. Геория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960.
8. Русак В. Н. „ДАН БССР“, т. 8, 1964, № 7.
9. Сабзиев Н. М. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Баку, 1965.

А. Ч. Адыкөзөлов

Үмүмиләшмиш тригонометрик чохәддиләр үчүн бә'зи бәрабәрсизликләр

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мұхтәлиф $p_1, \dots, p_m$ вә $p'_1, \dots, p'_m$ ($1 \leq p_k \leq p'_k \leq \infty$)
 $(k = 1, \dots, m)$ үчүн

$$\|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}'} \text{ вә } \|Q_{n_1, \dots, n_m}\|_{\vec{p}}$$

нормалары арасында (9) вә (11) бәрабәрсизликләри исбат едилір, бурада $Q_{n_1, \dots, n_m}$ (3) бәрабәрсизлији илә тә'јин олунур.

Сонлу тәртибли там функцијалар вә тригонометрик чохәддиләр үчүн охшар бәрабәрсизликләр С. М. Николски, А. Ф. Тиман, И. И. Ибраһимов, А. С. Чәфәров вә Н. М. Сәбзиев тәрафиндән верилмишдир.

Г. М. ГАСАНОВ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

1°. Пусть заданы две треугольные матрицы узлов, расположенные на сегменте $[-1, 1]$:

$$-1 < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} < 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

$$-1 < \bar{x}_1^{(n)} < \bar{x}_2^{(n)} < \dots < \bar{x}_{n+p}^{(n)} < 1 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

где $p \geq 0$ — целое фиксированное число. В дальнейшем будем предполагать, что при всех $n > n_0$, k и s ($k = 1, \dots, n$; $s = 0, 1, \dots, p$)

$$|\bar{x}_{k+s}^{(n)} - \bar{x}_k^{(n)}| \leq \varepsilon_n \quad (\varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Пусть $\{\lambda_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность положительных чисел, для которых $\lambda_n \rightarrow \infty$ ($\lambda_n \neq \infty$) при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через

$$H_n^*(x) = H_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) \text{ „распространенный“ интерполяционный полином}$$

Эрмита—Фейера степени $(2n-1)$, построенный согласно условиям:

$$H_n(x_k^{(r)}) = U_k^{(n)}, \quad H_n'(x_k^{(n)}) = 0,$$

где $U_k^{(n)}$ ($k = 1, \dots, n$) — заданные числа.

Этот полином имеет следующий вид:

$$H_n^*(x) = \sum_{k=1}^n U_k^{(n)} h_k^{(n)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right), \quad (4)$$

где

$$h_k^{(n)}(x) = \left\{ 1 - \frac{\omega_n'(x_k^{(n)})}{\omega_n(x_k^{(n)})} (x - x_k^{(n)}) \right\} \left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)}) (x - x_k^{(n)})} \right]^2,$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}).$$

Когда $\lambda_n \equiv 1$, приближение ведется на отрезке $[-1, 1]$.

Введем обозначение

$$\max_{1 \leq k \leq n} |U_k^{(n)} - f(\lambda_n x_k^{(n)})| = F_n. \quad (5)$$

В настоящей работе изучался порядок сходимости интерполяционного полинома (4). Учитывая теоремы 1—3 работы [4], теоремы 3—5 из нашей совместной работы с А. С. Джафаровым [5] и равенство (5), можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, узлы (1) составлены из корней полиномов Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Тогда в любом конечном сегменте $[-A, A]$ ($A > 0$) для всех n ($n \geq 2$), для которых $\lambda_n \geq A$, имеет место

$$|H_n^*(x) - f(x)| \leq F_n + C \omega\left(\frac{\lambda_n \ln n}{n}\right) \lambda_n,$$

где C — константа, $\omega(\delta)_n$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ в $[-\lambda_n, \lambda_n]$, λ_n такая, что $\frac{\lambda_n \ln n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию

$$f(x) = O(\exp^m(|x|)), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть далее узлы (1) составлены из нулей полиномов Чебышева. Тогда в любом конечном сегменте $[-A, A]$ для всех n ($n \geq 2$), имеет место

$$|H_n^*(x) - f(x)| \leq F_n + \omega(\lambda_n \delta_n) \lambda_n + O\left(\frac{\ln^2 n}{n \delta_n}\right),$$

где $\lambda_n = \ln^{m+1}(n)$, $\ln'(n) = \ln n$, $\ln^{m+1}(n) = \ln(\ln^m(n))$,

$$\exp^1(|x|) = e^{|x|}, \quad \exp^{m+1}(|x|) = \exp(\exp^m(|x|));$$

m — фиксированное положительное целое число.

В частности, можно выбрать $\delta_n = O\left[(n \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \ln n\right]$.

Теорема 3. Если в теореме 2 условие (6) заменить условием

$$f(x) = O(|x|^m), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

и предположить, что $\lambda_n = n^0$, то справедлива оценка

$$|H_n^*(x) - f(x)| \leq F_n + \omega(\delta_n n^0) \lambda_n + O(n^{m0-1} \delta_n^{-1} \ln n),$$

где m и 0 — фиксированные положительные числа.

В частности, можно предположить, что $\delta_n = O\left[(n^{(m+1)0-1} \ln n)^{\frac{1}{2}}\right]$.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$, узлы (1) составлены из корней полиномов Якоби:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (-1 < \alpha, \beta \leq 0).$$

Тогда на любом конечном отрезке $[-A, A]$ для всех n , для которых $(1-\varepsilon)\lambda_n \geq A$ ($0 < \varepsilon < 1$), имеет место

$$|H_n^*(x) - f(x)| \leq F_n + O(1) \omega\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}\right),$$

где λ_n такие, что $\frac{\lambda_n}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 5. Пусть $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условию

$$f(x) = O(\exp^m(|x|)) \quad (|x| \rightarrow \infty);$$

Пусть далее узлы (1) составлены из корней полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Тогда в любом конечном сегменте $[-A, A]$ для всех n , для которых

$$\delta_n \leq \frac{\varepsilon(1-\varepsilon_0)}{2(|\alpha| + |\beta| + \alpha + \beta + 2)} \quad (0 < \varepsilon, \varepsilon_0 < 1) \text{ и } (1-\varepsilon)\lambda_n \geq A,$$

имеет место

$$|H_n^*(x) - f(x)| = O(1) \left[F_n + \omega(\lambda_n \delta_n)_{\lambda_n} + \frac{\ln n}{n \delta_n^2} \right],$$

где $\lambda_n = \ln^{m+1}(n)$.

Теорема 6. Если в теореме 5 условие (6) заменить условием $f(x) = O(|x|^m)$, $|x| \rightarrow \infty$, и предположить, что $\lambda_n = n^0$, то справедлива оценка

$$|H_n^*(x) - f(x)| = O(1) [F_n + \omega(n^0 \delta_n)_{\lambda_n} + n^{m-1} \delta_n^{-2}].$$

При доказательстве теорем 5 и 6 следует учесть известную оценку (см. [2])

$$\sum_{k=1}^n |h_k^{(n)}(x)| = O(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (|x| \leq 1 - \varepsilon).$$

Аналогичным образом можно построить интерполяционный полином $\bar{H}_n\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ степени $(2n-1)$, удовлетворяющий условиям:

$$\bar{H}_n(x_k^{(1)}) = U_k^{(n)}, \quad \bar{H}_n'(x_k^{(r)}) = V_k^{(n)},$$

где $|V_k^{(r)}| \leq M_n$, и изучить порядок его сходимости. Отметим, что если матрицы узлов (1) и (2) совпадают, то из теорем 1-3 следует, соответственно, теоремы 1-3 работы [4], а из теорем 4-6 следуют, соответственно, теоремы 3-5 нашей совместной работы с А. С. Джафаровым [5].

В частности, числа $U_k^{(r)}$ ($n = 1, \dots, n$) можно определить следующим образом:

$$a) \quad U_k^{(n)} = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \left[(-1)^{l_j-1} \sum_{i=1}^{l_j} (-1)^{l_j-i} \binom{l_j}{i} f(\lambda_n x_k^{(n)} + \frac{i}{l_j} \Delta_k^{(n)}) \right], \quad (7)$$

где $\Delta_k^{(n)} = x_k^{(n)} \lambda_n - \bar{x}_{k+p}^{(n)} \lambda_n$.

Тогда при условии (3) из (5) следует

$$F_n \leq \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \omega_{l_j}(\lambda_n \delta_n)_{\lambda_n}.$$

Если в (7) предполагать, что $l_j = 1$ ($j = 0, 1, \dots, p$), то

$$U_k^{(n)} = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p f(\lambda_n \bar{x}_{k+j}^{(n)}).$$

Этот случай, когда $\lambda_n = 1$ и узлы (1) такие, что $h_k^{(n)} > 0$, рассматривался Мерли [3].

$$б) \quad U_k^{(n)} = \frac{1}{\Delta_k^{(n)}} \int_{\lambda_n \bar{x}_k^{(n)}}^{\lambda_n \bar{x}_{k+p}^{(n)}} f(t) dt.$$

Тогда при условии (3) и (5) имеем

$$F_n \leq \left| \frac{1}{\Delta_k^{(n)}} \int_{\lambda_n \bar{x}_k^{(n)}}^{\lambda_n \bar{x}_{k+p}^{(n)}} |f(t) - f(\lambda_n x_k^{(n)})| dt \right|.$$

В этом случае следует предположить, что

$$\left| \frac{1}{\Delta_k^{(n)}} \int_{\lambda_n \bar{x}_k^{(n)}}^{\lambda_n \bar{x}_{k+p}^{(n)}} |f(t) - f(\lambda_n x_k^{(n)})| dt \right| = O(|\Delta_k^{(n)}|^\alpha) \quad (\alpha > 0).$$

Все эти результаты получены также для функций двух переменных, определенных на всей плоскости.

2°. Теперь рассмотрим интерполяционный полином Лагранжа вида

$$L_n^*(x) = \sum_{k=1}^n U_k^{(n)} l_k^{(n)}(x),$$

где $l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(x_k)(x - x_k)}$, матрицы узлов (1) и (2) расположены на сегменте $[a, b]$. Так как (см. [1])

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leq (p_n + 1) E_{n-1}(f),$$

где

$$L_n(f; x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) l_k^{(n)}(x),$$

$p_n = \max_{a < x < b} \sum_{k=1}^n |l_k^{(n)}(x)|$, $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x) \in C([a, b])$ полиномами степени не выше n , то, учитывая (5), при $\lambda_n = 1$ можно показать, что

$$|L_n^*(x) - f(x)| \leq p_n F_n + (p_n + 1) E_{n-1}(f)$$

равномерно на $[a, b]$.

В частности, если матрица (1) составлена из корней полиномов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, то равномерно на сегменте $[-1, 1]$

$$|L_n^*(x) - f(x)| \leq \left(8 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) F_n + \left(9 + \frac{4}{\pi} \ln n\right) E_{n-1}(f),$$

ибо в силу теоремы Бернштейна (см. [1]) для узлов Чебышева равномерно на $[-1, 1]$ $p_n \leq 8 + \frac{4}{\pi} \ln n$, а если узлы (1) составлены из

корней полиномов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($\alpha > -1$, $\beta > -1$), то равномерно на всяком сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < 1$).

$$|L_n^*(x) - f(x)| = O(\ln n) [F_n + E_{n-1}(f)],$$

ибо для узлов Якоби (см. [2]) равномерно на всяком сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$p_n = O(\ln n), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь рассмотрим пример, удовлетворяющий условию (3). Пусть $\bar{x}_k^{(n)} = \cos \frac{\kappa \pi}{n+p+1}$, $\kappa = 1, \dots, n+p$, $n = 1, 2, \dots$, $p \geq 0$ — фиксированное целое число. Тогда, если

$$x_k^{(n)} = \cos \frac{1}{n} [\kappa \pi + O(1)], \quad \kappa = 1, \dots, n$$

(узлы Якоби, см. [2]), то при всех $s = 0, 1, \dots, p$; $\kappa = 1, \dots, n$

$$|\bar{x}_{k+s}^{(n)} - x_k^{(n)}| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.
2. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М., 1962.
3. Merli L. Atti Acad. naz. Lincei Rend. Cl. Sci. fis. mat. e natur. 38, № 2, 1965.
4. Гасанов Г. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 4.
5. Джафаров А. С. и Гасанов Г. М. Материалы научной конференции молодых ученых и аспирантов АН Азерб. ССР (серия физ.-техн. и матем. наук). Баку, 1966.

Г. М. Гасанов

Бә'зи интерполјасија просесләринин јығылмасы тәртиби һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $[-1, 1]$ парчасында јерләшмиш $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ вә $\{\bar{x}_i^{(n)}\}_{i=1}^{n+p}$ нөгтәләрин көмәји илә гурулмуш

$$\bar{H}_n(f; x) = \sum_{k=1}^n U_{k,p}^{(n)}(f; \lambda_n) h_k^{(n)}\left(\frac{x}{\lambda_n}\right),$$

интерполјасија чохәддиләринин (3) вә (4) шәртләринә әсасән јығылмасы тәртиби тәдгиг олунур.

Мәгаләнин сонунда һәммин шәртләр дахилиндә

$$L^*(f; x) = \sum_{k=1}^n U_{k,p}^{(n)}(f) l_k^{(n)}(x)$$

интерполјасија чохәддиләринин јығылмасы тәртиби верилир.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 2

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1967, № 2

М. Х. НАСИБОВ

СУММИРОВАНИЕ ДВОЙНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ ОБЩИМ МЕТОДОМ БЕРНШТЕЙНА-РОГОЗИНСКОГО

Как известно, метод суммирования Бернштейна-Рогозинского для простых рядов [1] изучен достаточно хорошо. Двойным рядам посвящены работа И. И. Огневского [4], в которой изучены ряды с ограниченными частными суммами, а также А. Д. Бендукидзе [5] и Н. Р. Тевзадзе [6], которые рассматривают некоторый класс рядов с неограниченными частными суммами.

В настоящей статье рассматривается суммирование двойных рядов общим методом Бернштейна-Рогозинского. Пусть дан двойной числовой ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} U_{m,n}. \quad (1)$$

Определение 1. Рассмотрим две последовательности положительных и стремящихся к нулю чисел $\{\alpha_m\}$ и $\{\beta_n\}$ и λ — некоторое число ≥ 1 . Ряд (1) будем называть λ -суммируемым методом Бернштейна-Рогозинского или $BP(\lambda, \alpha_m, \beta_n)$ -суммируемым к числу S , если

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} P_{m,n}(\alpha_m, \beta_n) = S,$$

где

$$P_{m,n}(\alpha_m, \beta_n) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n U_{i,k} \cos i \alpha_m \cos k \beta_n, \quad (2)$$

и символом $(m, n)_{\lambda} \rightarrow \infty$ обозначено такое стремление m и n к бесконечности, при котором $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$.

А. Д. Бендукидзе [5], используя результаты В. Г. Челидзе [3], доказал нижеследующую теорему.

Теорема. Если двойной ряд (1) сходится, имеет суммой число S и, кроме того, частные суммы $S_{m,n}$ этого ряда удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}}{(m+1)^2} &= 0 \text{ при любом фиксированном } n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{m,n}}{(n+1)^2} &= 0 \text{ при любом фиксированном } m, \end{aligned} \quad (3)$$

то двойной ряд (1) БР $(\lambda, \alpha_m, \beta_n)$ — суммируем к той же сумме S для любого $\lambda \geq 1$, при условии, что

$$\alpha_m = \frac{\pi}{2m+1}, \quad \beta_n = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Н. Р. Тевзадзе [6] доказал эту теорему для общего случая последовательностей аргументов, а именно при условии, что

$$\alpha_m = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Мы будем рассматривать общий метод суммирования типа БР $(\lambda, \alpha_m, \beta_n)$, когда вместо (2) имеем

$$B_{m,n} = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n U_{i,k} \varphi(i \alpha_m, k \beta_n), \quad (4)$$

где $\varphi(x, y)$ — заданная функция.

Определение 2. Следуя В. Г. Челидзе [2], непрерывную на $Q = [a_1, b_1; a_2, b_2]$ функцию $\varphi(x, y)$ будем называть функцией класса Липшица, если для любых двух точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ из Q выполняются следующие условия:

$$|\varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_1, y_2) + \varphi(x_1, y_1)| \leq M |x_2 - x_1| |y_2 - y_1|, \\ |\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)| \leq M_1 |x_2 - x_1|, \quad |\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)| \leq M_2 |y_2 - y_1|,$$

где M_1, M_2, M — некоторые положительные константы.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x, y)$ определена для всех $x \geq 0, y \geq 0$ и удовлетворяет условию Липшица. Если ряд (1) сходится к числу S и последовательность его частных сумм для некоторых $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ удовлетворяет условию

$$|S_{m,n}| \leq C(m+1)^a(n+1)^b, \quad (5)$$

где C — постоянная и, кроме того,

$$\alpha_m \geq 0, \beta_n \geq 0, \alpha_m = O\left(\frac{1}{m^p}\right), \beta_n = O\left(\frac{1}{n^q}\right), \quad (6)$$

причем $p, q \geq 1, a < q, \beta < p$, то

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} B_{m,n} = S \varphi(0, 0). \quad (7)$$

Доказательство. Положим для $i < m, k < n$

$$\Delta_{ik}''(m, n) = \varphi(i \alpha_m, k \beta_n) - \varphi((i+1) \alpha_m, k \beta_n) - \\ - \varphi(i \alpha_m, (k+1) \beta_n) + \varphi((i+1) \alpha_m, (k+1) \beta_n),$$

$$\Delta_{ik}^{10}(m, n) = \varphi(i \alpha_m, k \beta_n) - \varphi((i+1) \alpha_m, (k+1) \beta_n),$$

$$\Delta_{ik}^{01}(m, n) = \varphi(i \alpha_m, k \beta_n) - \varphi(i \alpha_m, (k+1) \beta_n).$$

Очевидно,

$$|\Delta_{ik}^{11}(m, n)| \leq M \alpha_m \beta_n = O\left(\frac{1}{m^p n^q}\right),$$

$$|\Delta_{ik}^{10}(m, n)| \leq M_1 \alpha_m = O\left(\frac{1}{m^p}\right),$$

$$|\Delta_{ik}^{01}(m, n)| \leq M_2 \beta_n = O\left(\frac{1}{n^q}\right). \quad (8)$$

Применяя к (4) преобразование Харди, получим

$$B_{m,n} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} S_{i,k} \Delta_{ik}^{11}(m, n) + \sum_{i=0}^{m-1} S_{i,n} \Delta_{in}^{10}(m, n) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} S_{m,k} \Delta_{ik}^{01}(m, n) + S_{m,n} \varphi(m \alpha_m, n \beta_n). \quad (9)$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\varphi(0, 0) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{ik}^{11}(m, n) + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_{ik}^{10}(m, n) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_{ik}^{01}(m, n) + \varphi(m \alpha_m, n \beta_n). \quad (10)$$

Умножая (10) на S и вычитывая из (9), получим

$$B_{m,n} - S \varphi(0, 0) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} (S_{i,k} - S) \Delta_{ik}^{11}(m, n) + \\ + \sum_{i=0}^{m-1} (S_{i,n} - S) \Delta_{ik}^{10}(m, n) + \sum_{k=0}^{n-1} (S_m - S) \Delta_{ik}^{01}(m, n) + \\ + (S_{m,n} - S) \cdot \varphi(m \alpha_m, n \beta_n) = I_{m,n}^{(1)} + I_{m,n}^{(2)} + I_{m,n}^{(3)} + I_{m,n}^{(4)}. \quad (11)$$

Покажем, что $I_{m,n}^{(j)} \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) при $(m, n)_\lambda \rightarrow \infty$. Так как $\varphi(m \alpha_m, n \beta_n)$ ограничена, то

$$I_{m,n}^{(4)} \rightarrow 0 \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Из сходимости ряда (1) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число $N(\varepsilon) > 0$, что справедливо неравенство

$$|S_{i,k} - S| < \varepsilon, \text{ когда } i, k \geq N(\varepsilon).$$

Таким образом, имеем

$$|I_{m,n}^{(2)}| \leq O\left(\frac{1}{m^p}\right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} |S_{i,n} - S| + \sum_{i=N}^{m-1} |S_{i,n} - S| \right) \leq \\ \leq O\left(\frac{(n+1)^b}{m^p}\right) + O\left(\frac{1}{m^{p-1}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda^p} \cdot \frac{1}{n^{p-\beta}}\right) + O\left(\frac{1}{m^{p-1}}\right) \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} I_{m,n}^{(2)} = 0. \quad (12)$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} I_{m,n}^{(3)} = 0. \quad (13)$$

Далее

$$|I_{m,n}^{(1)}| \leq O\left(\frac{1}{m^p n^q}\right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} |S_{i,k} - S| + \sum_{i=N}^{m-1} \sum_{k=0}^{N-1} |S_{i,k} - S| + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=N}^{n-1} |S_{i,k} - S| + \sum_{i=N}^{m-1} \sum_{k=N}^{n-1} |S_{i,k} - S| \right) \leq \\ \leq O\left(\frac{1}{m^p n^q}\right) C^* N^{2+a+\beta} + O\left(\frac{1}{m^p n^q}\right) C^* N^{1+\beta} m^a (m - N - 1) + \\ + O\left(\frac{1}{n^{q-1}} \cdot \frac{1}{\lambda^\beta} \cdot \frac{1}{m^{p-\beta}}\right) + o(1) = o(1) + O\left(\frac{1}{m^{p-1}} \cdot \frac{\lambda^a}{n^{q-a}}\right) + \\ + o(1) + o(1) = o(1).$$

Значит

$$\lim_{(m,n)_\lambda \rightarrow \infty} I_{m,n}^{(1)} = 0 \text{ и} \quad (14)$$

теорема доказана.

Следствие. Если частные суммы ряда (1) удовлетворяют условию

$$|S_{m,n}| \leq C(m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta},$$

где C — постоянная, $0 \leq \alpha, \beta < 1$ и

$$\varphi(i\alpha_m, \kappa\beta_n) = \cos i\alpha_m \cdot \cos \kappa\beta_n, \quad \alpha_m = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то метод $BP(\lambda, \sigma_m, \beta_n)$ регулярен. Действительно, функция $\varphi(u, v) = \cos u \cos v$ удовлетворяет условию Липшица, $\varphi(0, 0) = 1$, $p = q = 1$ и, следовательно, все условия теоремы 1 выполняются.

Можно привести пример сходящегося ряда, последовательность частных сумм которого не удовлетворяет условию теоремы Бендукидзе, но он $BP(\lambda, \sigma_m, \beta_n)$ -суммируем.

В самом деле, возьмем двойной ряд, члены которого определены следующим образом:

$$U_{i,\kappa} = \begin{cases} \kappa & \text{при } m=0, \kappa=0, 1, 2, \dots, \\ -\kappa & \text{при } i=1, \kappa=0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{при } i=2, \kappa=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

Ясно, что

$$S_{m,n} = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{при } m=0, \kappa=0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{при } m \geq 1, n=0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

и

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{m,n} = 0.$$

Значит данный ряд сходится. Но

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{S_{0,n}}{(n+1)^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, не удовлетворено условие (3). Легко показать, что данный ряд не суммируем методом А. Д. Бендукидзе, но суммируем к нулю методом $BP(\lambda, \sigma_m, \beta_n)$ для любого $2 < \alpha < q$, $2 < \beta < p$.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x, y)$ определена для всех $x \geq 0$, $y \geq 0$, удовлетворяет условию Липшица, $\varphi(0, 0) = 1$ и существует такая постоянная $C_1 > 0$, что $|\varphi(x, y)| \geq C_1 > 0$.

Если двойной ряд (1) $BP(\lambda, \alpha_m, \beta_n)$ -суммируем к числу S , последовательность его частных сумм квазиограничена и

$$S_{m,n} = O((m+1)^{\alpha}) \text{ при фиксированном } n,$$

$$S_{m,n} = O((n+1)^{\beta}) \text{ при фиксированном } m$$

и, кроме того,

$$\alpha_m \geq 0, \alpha_m = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \beta_n \geq 0, \beta_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

причем $p, q > 1$, $0 \leq \alpha < q$, $0 \leq \beta < p$, то

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} S_{m,n} = S.$$

Доказательство. Из равенства (11) легко получить

$$|S_{m,n} - S| \leq \frac{|B_{m,n} - S|}{|\varphi(m\alpha_m, n\beta_n)|} + \frac{1}{|\varphi(m\alpha_m, n\beta_n)|} \cdot (|I_{m,n}^{(1)}| + |I_{m,n}^{(2)}| + |I_{m,n}^{(3)}|). \quad (15)$$

В силу условия теоремы $\frac{1}{|\varphi(m\alpha_m, n\beta_n)|}$ ограничено и

$$\lim_{(m,n) \rightarrow \infty} (B_{m,n} - S) = 0,$$

поэтому первое слагаемое в правой стороне (15) стремится к нулю при $(m, n)_{\lambda} \rightarrow \infty$. Далее, так как все условие остается, имеет место равенство (14). Покажем, что $I_{m,n}^{(2)}$ и $I_{m,n}^{(3)} \rightarrow 0$ при $(m, n)_{\lambda} \rightarrow \infty$.

В силу квазиограниченности последовательности частных сумм ряда существуют такие положительные числа M и N , что

$$|S_{i,\kappa} - S| \leq M \text{ при } i, \kappa \geq N.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_{m,n}^{(2)}| &\leq O\left(\frac{1}{m^p}\right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} |S_{i,n} - S| + \sum_{i=N}^{m-1} |S_{i,n} - S| \right) \leq \\ &\leq O\left(\frac{1}{m^p}\right) C^* N(n+1)^{\beta} + O\left(\frac{1}{m^p}\right) (m - N - 1) M = \\ &= O\left(\frac{(n+1)^{\beta}}{m^p}\right) + O\left(\frac{1}{m^{p-1}}\right) \cdot M = O\left(\frac{1}{\lambda^p} \cdot \frac{1}{n^{p-\beta}}\right) + O\left(\frac{1}{m^{p-1}}\right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} I_{m,n}^{(2)} = 0.$$

Аналогично покажем, что

$$\lim_{(m,n)_{\lambda} \rightarrow \infty} I_{m,n}^{(3)} = 0.$$

Таким образом, второе слагаемое тоже стремится к нулю при $(m, n)_{\lambda} \rightarrow \infty$ в неравенстве (15). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.—Л., 1939.
2. Челидзе В. Г. ДАН СССР, 54, 1946.
3. Челидзе В. Г. Тр. Матем. ин-та АН Груз. ССР, 17, 1949.
4. Огиевецкий И. И. Суммирование двойных рядов методом Бернштейна-Рогозинского. Уч. зап. Днепропетровского госуниверситета, т. XXXIV, 1948.
5. Бендукидзе А. Д. Тр. Груз. политехн. ин-та им. С. М. Кирова, т. 2 (37) 1955.
6. Тевзаде Н. Р. Тр. Тбилисского госуниверситета, 60, 1956.

М. Х. Нәсиров

Икигат эдәди сыраларын Бернштейн-Рогозинскини
үмүми үсулу илә чәмләnmәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Липшиц шәртини өдәјән ики дәјишәнли $\varphi(x, y)$ функцијасына әсасән хүсуси чәмләри (5) шәртини өдәјән икигат эдәди сыраларын Бернштейн-Рогозински үсулу илә чәмләnmәси вә һәмчинин бу үсулла чәмләнән сыраларын јығылмасы өјрәнилир.

Г. И. ОСМАНОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ, ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$

Для функции $f(x, y) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$ функция $\hat{f}(x, y) = F(x, y) =$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \tau) e^{-ixt-iy\tau} dt d\tau$$
 называется ее преобразованием

Фурье и силу теоремы Планшереля [1] справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy.$$

Известно, что величины

$$\omega_p(\delta_1, \delta_2) = \omega_p^{(1,1)}(f; \delta_1, \delta_2) = \sup_{\substack{|h| < \delta_1 \\ |t| < \delta_2}} \left\| \sum_{\nu=0}^1 \sum_{\mu=0}^1 (-1)^{2-\nu-\mu} \binom{1}{\nu} \binom{1}{\mu} f(x + \right.$$

$$\left. + \nu h, y + \mu t) \right\|_{L_p^{(2)}},$$

$$\omega_p(\delta_1, 0) = \omega_p^{(1,0)}(f; \delta_1, 0) = \sup_{|h| < \delta_1} \|f(x + h, y) - f(x, y)\|_{L_p^{(2)}}$$

и

$$\omega_p(0, \delta_2) = \omega_p^{(0,1)}(f; 0, \delta_2) = \sup_{|t| < \delta_2} \|f(x, y + t) - f(x, y)\|_{L_p^{(2)}}$$

соответственно называются смешанными и частными модулями гладкости функции $f(x, y) \in L_p^{(2)}(-\infty, \infty)$ в метрике пространства $L_p^{(2)}$
 $(-\infty, \infty)$.

Теперь положим, что

$$\begin{aligned} {}^{(s)}\Delta_{ht}^{11} f(x, y) &= f(x + h, y + t) - f(x - \\ &- h, y + t) - f(x + h, y - t) + f(x - h, y - t), \end{aligned}$$

$${}^{(s)}\Delta_{h0}^1 f(x, y) = f(x + h, y) - f(x - h, y)$$

и

$${}^{(s)}\Delta_{0t}^1 f(x, y) = f(x, y + t) - f(x, y - t)$$

есть, соответственно, симметрическая разность первого порядка функции $f(x, y)$ по x и y с шагом h и t , симметрическая разность отно-

сительно x с шагом h при фиксированном y и симметрическая разность относительно y с шагом t при фиксированном x .

В первом параграфе настоящей статьи устанавливается достаточное условие для того, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} dx dy \quad (1)$$

был сходящимся при $0 < \gamma < 2$, где $F(x, y) = \hat{f}(x, y)$. Эти условия выражаются через смешанный и частный модули гладкости функции $f(x, y)$. Кроме того, оценивается сверху интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} |x|^p |y|^q dx dy \quad (p \geq 0, q \geq 0)$$

при $0 < \gamma < 2$ посредством модуля гладкости.

Во втором параграфе, исходя из свойств преобразования Фурье функции $f(x)$, мы изучим свойства преобразований Фурье функции $g(x)$, при наличии соотношения

$$|{}^{(s)}\Delta_h^m g(x)| \leq |{}^{(s)}\Delta_h^m f(x)|.$$

§ 1. Прежде всего отметим, что относительно сходимости интеграла (1) справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x, y) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$. Если при некотором значении γ , из интервала $(0, 2)$, сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma} < \infty, \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right]^{\gamma} < \infty \quad (3)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(0, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma} < \infty, \quad (4)$$

то при том же значении γ сходится двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} dx dy < \infty,$$

где $F(x, y) = \hat{f}(x, y)$ является преобразованием Фурье функции $f(x, y) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что функция $-4 \sin x h \sin y t F(x, y)$ является преобразованием Фурье функции

$${}^{(s)}\Delta_{ht}^2 f(x, y).$$

В силу теоремы Планшереля [1] имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |-4 \sin x h \sin y t F(x, y)|^2 dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |{}^{(s)}\Delta_{ht}^2 f(x, y)|^2 dx dy \leq C [\omega_2(h, t)]^2. \end{aligned}$$

Далее верно и следующее неравенство:

$$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} |\sin xh \sin yt F(x, y)|^2 dx dy \leq C_1 [\omega_2(h, t)]^2.$$

Полагая $h = \frac{\pi}{2M}$, $t = \frac{\pi}{2N}$, из последнего находим

$$\int_1^M \int_1^N \left| \sin \frac{x\pi}{2M} \sin \frac{y\pi}{2N} F(x, y) \right|^2 dx dy \leq C_1 \left[\omega_2 \left(\frac{\pi}{2M}, \frac{\pi}{2N} \right) \right]^2.$$

Положим $M = 2^\nu$, $N = 2^\mu$, где $\nu, \mu = 1, 2, 3, \dots$

Тогда ясно, что

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} \left| \sin \frac{x\pi}{2^{\nu+1}} \sin \frac{y\pi}{2^{\mu+1}} F(x, y) \right|^2 dx dy \leq C_1 \left[\omega_2 \left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}}, \frac{\pi}{2^{\mu+1}} \right) \right]^2.$$

Далее, имея в виду, что $\sin \frac{x\pi}{2^{\nu+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ при $2^{\nu-1} \leq x \leq 2^\nu$ и

$$\sin \frac{y\pi}{2^{\mu+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{при } 2^{\mu-1} \leq y \leq 2^\mu,$$

из последнего неравенства получим

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} |F(x, y)|^2 dx dy \leq C_2 \left[\omega_2 \left(\frac{1}{2^\nu}, \frac{1}{2^\mu} \right) \right]^2. \quad (5)$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера при $0 < \gamma < 2$ и пользуясь оценкой (5), находим

$$\begin{aligned} \int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} |F(x, y)|^\gamma dx dy &\leq \left(\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} |F(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{\gamma}{2}} \left(\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} dx dy \right)^{1-\frac{\gamma}{2}} \leq \\ &\leq C_3 2^{\nu(1-\frac{\gamma}{2})} 2^{\mu(1-\frac{\gamma}{2})} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{2^\nu}, \frac{1}{2^\mu} \right) \right]^\gamma. \end{aligned}$$

Можно показать, что верно и следующее неравенство:

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_4 \sum_{m=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} \sum_{n=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right]^\gamma.$$

Суммируя обе стороны последнего неравенства по ν и $\mu = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right]^\gamma.$$

Следовательно, в силу (2) имеем

$$\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy < \infty$$

при $0 < \gamma < 2$.

Наконец, имея в виду

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy &= \int_0^1 \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy + \\ &+ \int_1^{\infty} \int_0^1 |F(x, y)|^\gamma dx dy + \int_1^{\infty} \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy, \end{aligned}$$

докажем, что сходятся и следующие интегралы:

$$\int_0^1 \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \int_0^1 |F(x, y)|^\gamma dx dy$$

при $0 < \gamma < 2$. Функция $^{(s)}\Delta_{h0} f(x, y)$ имеет преобразование Фурье $-2i \sin xh F(x, y)$. Тогда

$$\int_1^{\infty} \int_0^1 |\sin xh F(x, y)|^2 dx dy \leq C_1 [\omega_2(h, 0)]^2.$$

Полагая $h = \frac{\pi}{2M}$, из последнего неравенства получим

$$\int_1^M \int_0^1 \left| \sin \frac{x\pi}{2M} F(x, y) \right|^2 dx dy \leq C_1 \left[\omega_2 \left(\frac{\pi}{2M}, 0 \right) \right]^2.$$

Далее при $M = 2^\nu$ из последнего следует, что

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_0^1 |F(x, y)|^2 dx dy \leq C_2 \left[\omega_2 \left(\frac{1}{2^\nu}, 0 \right) \right]^2. \quad (6)$$

В силу неравенства Гельдера при $0 < \gamma < 2$ из (6) имеем

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_0^1 |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_3 2^{\nu(1-\frac{\gamma}{2})} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{2^\nu}, 0 \right) \right]^\gamma.$$

Следовательно,

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^\nu} \int_0^1 |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_3 \sum_{m=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right]^\gamma.$$

Суммируя обе стороны последнего неравенства по $\nu = 1, 2, 3, \dots$, получим

$$\int_1^{\infty} \int_0^1 |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_3 \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right]^\gamma.$$

Аналогично устанавливаем, что

$$\int_0^1 \int_1^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(0, \frac{1}{n} \right) \right]^\gamma.$$

Таким образом, мы доказали, что если условия (2), (3) и (4) удовлетворяются, то

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |F(x, y)|^\gamma dx dy < \infty \quad \text{при } 0 < \gamma < 2. \quad \text{Далее сходимость интегралов}$$

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} dx dy, \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 |F(x, y)|^{\gamma} dx dy \text{ и } \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 |F(x, y)|^{\gamma} dx dy$$

доказывается аналогично. Из теоремы 1 выводится следующее утверждение:

Следствие. Пусть $f(x, y) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$ и положительные функции $\varphi(u)$ и $\psi(v)$ такие, что $\varphi(u) \downarrow 0$ при $u \downarrow 0$, $\psi(v) \downarrow 0$ при $v \downarrow 0$ и $\varphi(u^k) = 0$ [$\varphi^k(u)$], $\psi(v^k) = 0$ [$\psi^k(v)$].

Если при $h \rightarrow 0$ и $t \rightarrow 0$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |^{(s)} \Delta_{ht} f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = O[\varphi(h) \psi(t)], \quad (7)$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |^{(s)} \Delta_{ht} f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = O[\varphi(h)]$$

и

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |^{(s)} \Delta_{ht} f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = O[\psi(t)],$$

то сходится интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} dx dy < \infty$$

при всех

$$2 > \gamma > \max \left\{ \frac{2}{1 - 2 \log_2 \varphi \left(\frac{1}{2} \right)}, \frac{2}{1 - 2 \log_2 \psi \left(\frac{1}{2} \right)} \right\}.$$

В самом деле, в силу равенства (7) имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma} =$$

$$= O \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \varphi^{\gamma} \left(\frac{1}{m} \right) \psi^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \varphi^{\gamma} \left(\frac{1}{m} \right) \psi^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\sum_{m=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1} \sum_{n=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} m^{-\frac{\gamma}{2}} n^{-\frac{\gamma}{2}} \varphi^{\gamma} \left(\frac{1}{m} \right) \psi^{\gamma} \left(\frac{1}{n} \right) \right] \ll$$

$$\leq C \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[2^{1-\frac{\gamma}{2}} \varphi^{\gamma} \left(\frac{1}{2} \right) \right]^{\nu} \left[2^{1-\frac{\gamma}{2}} \psi^{\gamma} \left(\frac{1}{2} \right) \right]^{\mu}.$$

Последний ряд сходится, если

$$2^{1-\frac{\gamma}{2}} \varphi^{\gamma} \left(\frac{1}{2} \right) < 1 \quad \text{и} \quad 2^{1-\frac{\gamma}{2}} \psi^{\gamma} \left(\frac{1}{2} \right) < 1,$$

$$\text{или, если } \gamma > \max \left\{ \frac{2}{1 - 2 \log_2 \varphi \left(\frac{1}{2} \right)}, \frac{2}{1 - 2 \log_2 \psi \left(\frac{1}{2} \right)} \right\}.$$

Таким же образом можно показать, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right]^{\gamma} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(0, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}$$

сходятся при

$$\gamma > \max \left\{ \frac{2}{1 - 2 \log_2 \varphi \left(\frac{1}{2} \right)}, \frac{2}{1 - 2 \log_2 \psi \left(\frac{1}{2} \right)} \right\}.$$

В заключение отметим, что, пользуясь рассуждениями, приведенными в доказательстве теоремы 1, можно доказать справедливость более общего утверждения:

Теорема 2. Пусть $f(x, y) \in L_2^{(2)}(-\infty, \infty)$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x, y)|^{\gamma} |x|^p |y|^q dx dy \leq C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^{p-\frac{\gamma}{2}} n^{q-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma} +$$

$$+ C_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^{p-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(\frac{1}{m}, 0 \right) \right]^{\gamma} + C_3 \sum_{n=1}^{\infty} n^{q-\frac{\gamma}{2}} \left[\omega_2 \left(0, \frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}$$

при $0 < \gamma < 2$, $p \geq 0$, $q \geq 0$.

§ 2. Рассмотрим теперь случай, когда между функциями $f(x)$ и $g(x)$ имеет место соотношение

$$|^{(s)} \Delta_n^m g(x)| \leq |^{(s)} \Delta_n^m f(x)|. \quad (8)$$

В этом случае, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и связаны между собой соотношением (8). Далее пусть преобразование Фурье функции $f(x)$ удовлетворяет условию $F(x) \leq \varphi(x)$, где

$F(x) = \hat{f}(x)$ и $\varphi(x)$ — некоторая четная или нечетная функция. Тогда, если при некотором γ из интервала $(0, 2)$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_1^{\infty} x^{-(\frac{1}{2} + m)\gamma} \left\{ \int_0^x |t^m \varphi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{\gamma}{2}} dx + \int_1^{\infty} x^{-\frac{\gamma}{2}} \left\{ \int_x^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{\gamma}{2}} dx < \infty,$$

то при той же γ для преобразования Фурье функции $g(x)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^{\gamma} dx < \infty, \quad \text{где } G(x) = \hat{g}(x).$$

Доказательство. При условии (7) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |^{(s)} \Delta_n^m g(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |^{(s)} \Delta_n^m f(x)|^2 dx.$$

Нетрудно убедиться в том, что функции $^{(s)}\Delta_h^m g(x)$ и $^{(s)}\Delta_h^m f(x)$ соответственно имеют преобразования Фурье:

$$(-i)^m 2^m \sin^m x h G(x) \text{ и } (-i)^m 2^m \sin^m x h F(x).$$

Тогда по теореме Планшереля имеем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin^m x h G(x)|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\sin^m x h F(x)|^2 dx.$$

Далее в силу условия теоремы при $h = \frac{\pi}{2n}$ из последнего находим

$$\int_0^n \left| \sin^m \frac{x\pi}{2n} G(x) \right|^2 dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^m \frac{x\pi}{2n} \varphi(x) \right|^2 dx, \quad (9)$$

Так как

$$\sin \frac{x\pi}{2n} \geq \frac{x}{n} \text{ при } 0 \leq x \leq n, \text{ то из (9) получим}$$

$$\int_0^n |x^m G(x)|^2 dx \leq n^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^m \frac{x\pi}{2n} \varphi(x) \right|^2 dx. \quad (10)$$

Пусть

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} |t^m G(t)|^2 dt.$$

Применяя неравенство Гельдера при $0 < \gamma < 2$, получим

$$\Phi(\xi) \leq \xi^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_0^{\xi} |t^m G(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}}. \quad (11)$$

Далее

$$\int_1^N |G(x)|^2 dx = \int_1^N \frac{\Phi'(x)}{x^{\gamma m}} dx \leq \frac{\Phi(N)}{N^{\gamma m}} + \gamma m \int_1^N \frac{\Phi(x)}{x^{\gamma m+1}} dx. \quad (12)$$

Учитывая (11), из (12) находим

$$\begin{aligned} \int_1^N |G(x)|^2 dx &\leq N^{1-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^N |t^m G(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} + \\ &+ \gamma m \int_1^N x^{-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^x |t^m G(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} dx = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Если покажем, что при $N \rightarrow \infty$ A_1 и A_2 ограничены, то этим доказательство исчерпывается.

Используя (10), для A_1 , получим следующее выражение:

$$A_1 \leq N^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^m \frac{t\pi}{2N} \cdot \varphi(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_1 &\leq 2N^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_N^{\infty} |\varphi(t)|^2 \sin^2 \frac{t\pi}{2N} dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} + \\ &+ 2N^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_0^N \left| \sin^m \frac{t\pi}{2N} \varphi(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}$$

С помощью неравенств $|\sin x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq |x|$ из последнего неравенства находим

$$\begin{aligned} A_1 &\leq 2N^{1-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_N^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} + C_1 N^{1-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^N |t^m \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} = \\ &= B_1 + C_2. \end{aligned}$$

Берем

$$\int_1^{\infty} x^{-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^x |t^m \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} dx$$

и через $A(x)$ обозначим

$$\left(\int_0^x |t^m \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Ясно, что $A(x)$ не убывает при возрастании x , поэтому

$$\int_N^{2N} x^{-(\frac{1}{2}+m)\gamma} A(x) dx \geq C_2 A(N) N^{1-(\frac{1}{2}+m)\gamma}$$

и

$$\begin{aligned} N^{1-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^N |t^m \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} &\leq \\ &\leq C_3 \int_N^{2N} x^{-(\frac{1}{2}+m)\gamma} \left(\int_0^x |t^m \varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} dx. \end{aligned}$$

Итак, $B_2 = 0(1)$.

Теперь положим, что

$$B(x) = \left(\int_x^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}}.$$

Так как $B(x)$ не возрастает при возрастании x , то

$$\int_N^{2N} x^{-\frac{\gamma}{2}} \left(\int_x^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{\gamma}{2}} dx = \int_{\frac{N}{2}}^N x^{-\frac{\gamma}{2}} B(x) dx \geq C_4 N^{1-\frac{\gamma}{2}} B(N)$$

Тогда

$$N^{1-\frac{1}{2}} \left(\int_N^\infty |\varphi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_5 \int_N^N x.$$

Следовательно,

$$B_1 = O(1) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Аналогичным образом устанавливаем, что

$$A_2 = O(1) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье, М., 1962.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 2

АЗƏРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə рижийјат елмлери серијасы, 1967, № 2

А. Г. ТАГИ-ЗАДЕ

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Для решения краевых задач теории пластин переменной толщины известно множество методов, которые применимы в отдельных частных случаях, но непригодны для общего случая. Метода, который позволял бы решать и статические, и динамические задачи теории пластин переменной толщины, пока не найдено.

Именно этому вопросу и посвящена настоящая статья. Методом малого параметра уравнение равновесия теории пластин переменной толщины расщепляется на бесконечную систему зацепляющихся уравнений равновесия вида постоянной толщины. Эти уравнения, при заданных граничных условиях, интегрируются известными методами, и решение исходной задачи можно с любой наперед заданной точностью.

§ 1. Теория равновесия тонких упругих пластин переменной толщины, в предположении, что эта толщина в рассматриваемой области изменяется всюду постепенно, без резких скачков, приводит к следующему уравнению в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами [1]:

$$\Delta(D\Delta w) - (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = q, \quad (1, 1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — оператор Лапласа;}$$

$$D = \frac{Eh^3(x, y)}{12(1-\nu^2)} \text{ — жесткость при изгибе; здесь } E \text{ — модуль Юнга мате-}$$

риала пластинки; $h(x, y)$ — переменная толщина; ν — коэффициент Пуассона; w — прогиб; $q(x, y)$ — плотность поверхностной нормальной нагрузки; x, y — прямоугольные декартовы координаты средней поверхности (плоскости) пластинки.

В случае прямоугольной области предположение о плавном изменении толщины дает возможность принять для изгибающих и крутящих моментов их выражения, выведенные для пластин постоянной толщины:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1, 2)$$

§ 2. Сведение уравнения (1, 1) к бесконечной системе зацепляющихся уравнений вида постоянной толщины.

Пусть уравнение (1, 1) рассматривается в некоторой области G , граница которой состоит из кривой L . Предположим, что в замкнутой области $\bar{G} = G + L$ и функция толщины $h(x, y)$ нигде не обращается в нуль. Тогда в области $\bar{G}$ справедливы неравенства.

$$0 < h_1 \leq h(x, y) \leq h_0, \quad (2, 1)$$

где, соответственно, h_1 —наименьшее, h_0 —наибольшее значения толщины.

Выводим функцию безразмерной толщины $h^*(x, y)$ по соотношению

$$h(x, y) = h_c \cdot h^*(x, y), \quad (2, 2)$$

где h_c —среднее значение толщины. Вводя вспомогательную функцию $\delta(x, y)$ функцию безразмерной толщины представим в виде

$$h^*(x, y) = 1 + \varepsilon \delta(x, y). \quad (2, 3)$$

Легко видеть, что вспомогательная функция $\delta(x, y)$ и параметр ε в области G удовлетворяют неравенствам

$$-1 \leq \delta(x, y) \leq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (2, 4)$$

Таким образом, выражение жесткости $D(x, y)$ мы можем переписать в следующем виде:

$$D = D_c(1 + \varepsilon \delta(x, y)^3), \quad D_c = \frac{E h_c^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2, 5)$$

В уравнении (1, 1), подставляя выражение жесткости по (2, 5), получим

$$\Delta \Delta w + 3\varepsilon L,(\delta, w) + 3\varepsilon^2 L,(\delta^2, w) + \varepsilon^3 L,(\delta^3, w) = \frac{q}{D_c}, \quad (2, 6)$$

где

$$L,(\delta^k, w) = \Delta(\delta^k \cdot \Delta w) - (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \delta^k}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \delta^k}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta^k}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (2, 7)$$

($k = 1, 2, 3$)

В уравнении (2, 6) величина ε является малым параметром и позволяет искать решение этого уравнения в области $\bar{G}$ в виде степенного ряда:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \quad (2, 8)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2, 7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε из обеих частей, получим бесконечную систему зацепляющихся уравнений вида постоянной толщины:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_0 &= \frac{q}{D_c}, \\ \Delta \Delta w_1 &= -3 L,(\delta, w_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta w_2 &= -3 [L,(\delta, w_1) + L,(\delta^2, w_0)], \\ \Delta \Delta w_3 &= -3 [L,(\delta, w_2) + L,(\delta^2, w_1)] - L,(\delta^3, w_0), \\ \Delta \Delta w_n &= -3 [L,(\delta, w_{n-1}) + L,(\delta^2, w_{n-2})] - L,(\delta^3, w_{n-3}). \end{aligned} \quad (2, 9)$$

($n = 3, 4, 5, \dots$)

Каждое уравнение системы (2, 9) представляет собой уравнение равновесия тонкой упругой пластины постоянной толщины. Такие уравнения при заданных граничных условиях решаются известными методами.

§ 3. Рассматривая уравнение (1, 1) в произвольной области G , мы получили систему (2, 9). Если теперь область является кругом с центром в начале координат, т.е. если имеем круглую пластинку переменной толщины радиуса a , то вместо исходного уравнения (1, 1) будем иметь

$$\frac{d}{dr} \left[D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) \right] - (1 - \nu) \frac{dD}{dr} \cdot \frac{\varphi}{r} = Q, \quad (3, 1)$$

где

$$\varphi = -\frac{dw}{dr}. \quad (3, 2)$$

В рассматриваемом случае моменты по кольцевым и диаметрально-ным сечениям даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \\ M_t &= D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3, 3)$$

Аналогично предыдущему случаю, представляя переменную жесткость в виде (2, 5) и разлагая функцию φ в ряд по степеням малого параметра ε :

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 + \dots, \quad (3, 4)$$

получим следующую бесконечную систему зацепляющихся уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \Lambda \varphi_0 &= \frac{Q}{D_c}; \\ \frac{d}{dr} \Lambda \varphi_1 &= -3 \Lambda,(\delta, \varphi_0); \\ \frac{d}{dr} \Lambda \varphi_2 &= -3 [\Lambda,(\delta, \varphi_1) + \Lambda,(\delta^2, \varphi_0)]; \\ \frac{d}{dr} \Lambda \varphi_3 &= -3 [\Lambda,(\delta, \varphi_2) + \Lambda,(\delta^2, \varphi_1)] - \Lambda,(\delta^3, \varphi_0); \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dr} \Lambda \varphi_n &= -3 [\Lambda,(\delta, \varphi_{n-1}) + \Lambda,(\delta^2, \varphi_{n-2})] - \Lambda,(\delta^3, \varphi_{n-3}), \end{aligned} \quad (3, 5)$$

($n = 3, 4, 5, \dots$)

где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda \varphi_n &= \frac{d\varphi_n}{dr} + \frac{\varphi_n}{r}, \\ \Lambda,(\delta^k, \varphi_n) &= \frac{d}{dr} (\delta^k \cdot \Lambda \varphi_n) - (1 - \nu) \frac{d\delta^k}{dr} \cdot \frac{\varphi_n}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (3, 6)$$

($k = 1, 2, 3; n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Левые части уравнений системы (3, 5) полностью совпадают с левой частью уравнений равновесия круглой пластинки постоянной толщины. Приведение уравнений равновесия (1, 1) и (3, 1), соответственно, к системам (2, 9) и (3, 5) имеет важное прикладное значение в расчете пластин переменной толщины и позволяет решать краевые задачи на основе методов расчета пластин постоянной толщины. При решении практических задач, когда $\epsilon \leq 0,5$ (при $\epsilon = 0,5$, $h_0 = 3h_1$), вполне достаточно ограничиться тремя-четырьмя членами в разложениях (2, 8) и (3, 4).

§ 4. Решение численного примера. Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим решение круглой пластинки радиуса a , заземленной по контуру и нагруженной нормальной нагрузкой $q = \text{const}$. Закон изменения толщины примем в виде

$$h = h_1(1 + \kappa r^2), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (4, 1)$$

где постоянная κ определяется из равенства

$$h_0 = h_1(1 + \kappa a^2). \quad (4, 2)$$

Легко видеть, что при изменении отношения $\frac{h_0}{h_1}$ будут изменяться только h_c и ϵ , а выражение вспомогательной функции $\delta(r)$ будет неизменным:

$$\delta(r) = \frac{2}{a^2} r^2 - 1. \quad (4, 3)$$

Это свойство вспомогательной функции $\delta(r)$ дает универсальный характер решению поставленной задачи.

Таким образом, раз найденные выражения решений $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ остаются неизменными для различных значений малого параметра ϵ . Ниже приводятся эти выражения для приведенных функций наклона $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ при $\nu = 0,15$: $\tilde{\varphi}_0 = -x^3 + x$;

$$\tilde{\varphi}_1 = 3,575 x^5 - 4,725 x^3 + 1,15 x; \quad (4, 4)$$

$$\tilde{\varphi}_2 = -10,17780 x^7 - 18,16687 x^5 - 9,70875 x^3 + 1,71969 x;$$

$$\tilde{\varphi}_3 = 38,12096 x^9 - 85,52345 x^7 + 71,30564 x^5 - 27,30021 x^3 + 3,18896 x,$$

где

$$x = \frac{r}{a}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi_k = \frac{qa^3}{16D_c} \cdot \tilde{\varphi}_k, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3.$$

В соответствии с (4, 4) для выражений приведенных функций прогибов будем иметь:

$$\tilde{w} = 0,25 x^4 - 0,5 x^2 + 0,25;$$

$$\tilde{w}_1 = -0,59583 x^6 + 1,18125 x^4 - 0,57500 x^2 - 0,01032; \quad (4, 5)$$

$$\tilde{w}_2 = 1,27223 x^8 - 3,02781 x^6 + 2,42719 x^4 - 0,85984 x^2 + 0,18823;$$

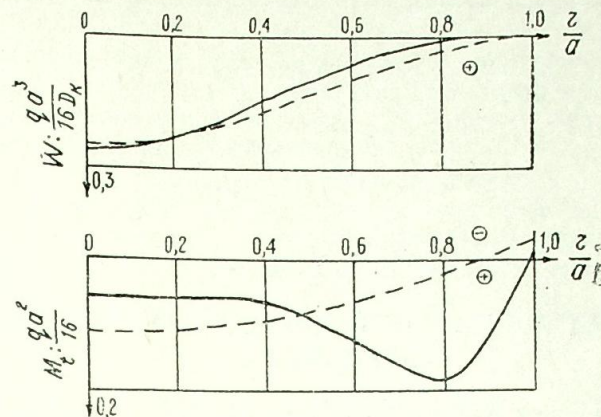
$$\tilde{w}_3 = -3,81291 x^{10} + 10,69043 x^8 - 11,88427 x^6 + 6,82505 x^4 - 1,59448 x^2 - 0,22382,$$

где

$$w_k = \frac{qa^4}{16D_c} \tilde{w}_k, \quad \kappa = 0, 1, 2, 3.$$

На рисунке приведены численные результаты для рассматриваемой круглой пластинки при $\epsilon = 0,33333$. Сплошными линиями показаны результаты вычисления четырех членов ряда (2, 8) и соответст-

вующие этому приближению моменты, штриховыми—результаты первого приближения. Легко показать, что при таком приближении погрешность в определении w будет меньше $0,02 \frac{qa^4}{16D_c}$.



ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.

Э. Н. Тағызада

Дэјишэн галынлыглы лөвһәләрин сәрһәд мәсәләләринин кичик параметр үсулу илә һәлли

Мәгалә дәјишән галынлыглы лөвһәләрин сәрһәд мәсәләләринин кичик параметр үсулу илә һәллине һәср едилмишдир. Дэјишән әмсаллы (1, 1) мұвазинәт тәнлији кичик параметр (2, 4) васитәси илә (2, 9) сабит әмсаллы илишән сонсуз мұвазинәт тәнликләри системинә кәтирилир.

Бу тәнликләрин һәр бири галынлыгы $h_c = \text{const}$ олан лөвһәний мұвазинәт тәнлији илә ејнидир.

Охшар гәјда илә даирәви дәјишән галынлыглы лөвһәнин мұвазинәт тәнлији (3, 1) сабит галынлыглы даирәви лөвһәләрин мұвазинәт тәнликләри (3, 5) системинә кәтирилир.

Мәгаләдә тәклиф олуан бу үсул бир чох вачиб мәсәләләрин һәллини хејли асанлашдырыр.

Мәгаләнин сонунчу параграфында тәклиф олуан үсул илә галынлыгы

$$h = h_1(1 + \kappa r^2)$$

гануну илә дәјишән вә ғырағлары мөһкәм кејиндирилмиш "а" радиуслу даирәви лөвһә үчүн сәрһәд мәсәләси һәлл едилмишдир. Һәллин нәтичәси 1-чи шәкилдә верилмишдир.

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА (II)*

§ 3. Рассмотрим более общий случай, когда коэффициенты в (1, 1) являются комплексными постоянными величинами. Соотношения, составленные так же, как (1, 2) и (1, 3), здесь выглядят несколько по-иному

$$[(a + \bar{b}) \Phi(t) + (c + \bar{d}) \Psi(t)] + [(\bar{a} + b) \overline{\Phi(t)} + (\bar{c} + d) \overline{\Psi(t)}] = 2f_1(t); \quad (3, 1)$$

$$[(a - \bar{b}) \Phi(t) + (c - \bar{d}) \Psi(t)] - [(\bar{a} - b) \overline{\Phi(t)} + (\bar{c} - d) \overline{\Psi(t)}] = 2if_2(t). \quad (3, 2)$$

Вспомогательное соотношение берем в форме

$$[(a + \bar{b}) \Phi(t) + (c + \bar{d}) \Psi(t)] - [(\bar{a} + b) \overline{\Phi(t)} + (\bar{c} + d) \overline{\Psi(t)}] = 2\omega(t). \quad (3, 3)$$

При этом равенство (1,5) не претерпевает по внешнему виду каких-либо значительных изменений; в него лишь вместо b и d войдут величины с ними сопряженные.

Формулы (1, 6) для $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ останутся теми же по структуре и заменятся следующими:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a + \bar{b})} \int_L \frac{\omega(t) + f_1(t)}{t - z} dt; \\ \Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i(c + \bar{d})} \int_L \frac{\omega(t) + f_1(t)}{t - z} dt. \quad (3, 4)$$

Однако подстановка этих функций в (3, 2) приводит к уже усложненному в принципе по сравнению с (1, 7), сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2} (A + B) \omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \frac{D - \bar{D}}{t - t_0} dt + \bar{D} d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} = 2i \operatorname{Im} F(t_0) \quad (3, 5)$$

* Начало см. в „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1967 № 1.

с коэффициентами и свободным членом, равными:

$$A = 2Re \frac{a - \bar{b}}{a + \bar{b}}; B = 2Re \frac{c - \bar{d}}{c + \bar{d}}; D = \frac{a - \bar{b}}{a + \bar{b}} - \frac{c - \bar{d}}{c + \bar{d}}; \\ E = \frac{a - \bar{b}}{a + \bar{b}} + \frac{c - \bar{d}}{c + \bar{d}}; F(t_0) = f(t_0) - \frac{1}{2} E f_1(t_0) - \frac{D}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t)}{t - t_0} dt. \quad (3, 6)$$

Будем считать $B \neq 0$ (исключительное нулевое значение B , обязанное особому соотношению $|c| = |d|$, — один из вырожденных случаев, выпадающий из общего анализа и обсуждаемый наряду с другими в заключительной части настоящего параграфа).

Пусть $T(z)$ и $H(z)$ — функции, регулярные в области S и задаваемые соотношениями (первая из них — $T(z)$ восстанавливается с точностью до вещественной постоянной, по предписываемому граничному значению ее мнимой части; другая же — $H(z)$ зависит от первой функции)

$$[Im T(t), H(z)] = \left[Im \Lambda(t), T(z) - \frac{D}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t)}{t - z} dt \right], \quad (3, 7)$$

где величина $\Lambda(t)$ указывается ниже. Сингулярное уравнение (3, 5) без труда преобразуется к виду

$$B\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) \left[\frac{D}{t - z} dt - \frac{\bar{D}}{\bar{t} - \bar{z}} d\bar{t} \right] = H(t_0) - \overline{H(t_0)}, \quad (3, 8)$$

где точка z принадлежит S $z = t_0$ изнутри L .

Назовем далее $\varphi(z)$ регулярной в области S функцией, мнимая часть которой совпадает на L со значением $\frac{1}{2} \omega(t)$. Тогда, располагая $\varphi(z)$, извлечем из (3, 8) легко обозримое функциональное уравнение, справедливое в области S (с точностью до вещественной постоянной; последняя опускается, так как при $B \neq 0$ она может быть скомпенсирована за счет некоей вещественной же постоянной, включаемой в $\varphi(z)$):

$$(B + D) \varphi(z) - \frac{D}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{t - z} dt = H(z); \Lambda(t) = f(t) - \frac{c - \bar{d}}{c + \bar{d}} f_1(t). \quad (3, 9)$$

Устремим в этом уравнении $z \rightarrow t_0$ на L и учтем соотношение (равнозначное условию регулярности $\varphi(z)$)

$$\frac{\overline{\varphi(t_0)}}{2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(t)} \left[\frac{dt}{t - t_0} - d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} \right], \\ R_{1,2}(t_0) = \frac{1}{B + D} [H(t_0) + r_{1,2} H(t_0)]. \quad (3, 10)$$

В итоге получим интегральное уравнение Фредгольма:

$$(B + D) \varphi(t_0) - \frac{D}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(t)} d \ln \frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} = H(t_0). \quad (3, 11)$$

Сложим его почленно с сопряженным уравнением, умноженным на параметр $r_{1,2} = \pm \exp i(\beta + \gamma)$, где $\beta = \arg(B + D)$ и $\gamma = \arg D$. Наконец, положив

$$\mathcal{Q}_{1,2}(t_0) = \varphi(t_0) \pm \sigma^{-2} \overline{\varphi(t_0)}, \omega(t_0) = -\frac{\sigma}{2} [n \mathcal{Q}_1(t_0) + im \mathcal{Q}_2(t_0)], \quad (3, 12)$$

при входящей в эти формулы величине $\sigma = m + in = \exp \frac{i(\beta - \gamma)}{2}$ от-
носительно каждой из линейно зависящих функций (3, 12) получим
интегральное уравнение желаемой структуры:

$$\mathcal{Q}_{1,2}(t_0) \mp \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \mathcal{Q}_{1,2}(t) d \ln \frac{-t_0}{t-t_0} = R_{1,2}(t_0); \lambda = \left| \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{ac - \bar{b}d} \right|. \quad (3, 13)$$

Оба уравнения (3, 13), как явствует из способа их образования, при несовпадающих μ_1 и μ_2 в совокупности адекватны (3, 11). Для характеристических значений λ ядер (3, 13) эти интегральные уравнения, а следовательно и задача (1, 1), вообще говоря, неразрешимы (поскольку в их правых частях фигурирует произвольно задаваемая мнимая часть $f(t)$, наряду с другими слагаемыми, в отдельности зависящими от вещественной части той же функции). Заметим, что в порядке исключения $\lambda = 1$ ($\lambda = -1$) является характеристическим числом только для ядра первого (второго) уравнения (3, 13). Надо думать, что в этом столь простом случае можно добиться разрешимости (3, 13) за счет лишь добавления к $\Phi(z)$ надлежащей константы.

Допустим теперь, что λ не принадлежит к характеристическим числам ядер уравнений (3, 13), так что последние разрешимы при любой правой части. Однако мы сумеем извлечь из них требуемое решение краевой задачи (1, 1), если функция $\varphi(t)$, определяемая из (3, 12) по найденным $\mathcal{Q}_1(t)$ и $\mathcal{Q}_2(t)$, окажется аналитически продолжимой внутрь контура L . Нетрудно оказать, в согласии с тем, как было принято при выводе (3, 9), что любая функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая уравнению (3, 11), на самом деле обладает указанным важным свойством. При помощи элементарных выкладок, преимущественно базирующихся на теореме о предельных значениях интеграла типа Коши, придадим тому же уравнению (3, 11) форму краевого равенства:

$$\sigma(t) - (B + D)\mu(t) - D\bar{\mu}(\bar{t}) = 0; \mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad (3, 14)$$

где функция $\sigma(z)$ регулярна внутри области S , а $\mu(z)$ — регулярна вне той же области и обращается в нуль на бесконечности. Выражение для последней функции приведено в (3, 14); она (с точностью до постоянного множителя) задается интегралом типа Коши с плотностью $\varphi(t)$. Формула же для $\sigma(z)$ выглядит гораздо сложнее:

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [(B + D)\varphi(t) - D\bar{\varphi}(\bar{t})] \frac{dt}{t-z} - H(z). \quad (3, 15)$$

Применительно к предельному условию (3, 14) воспроизведем почти буквально рассуждения, изложенные выше. Именно сначала преобразуем его к соотношениям той же структуры, что (3, 1) и (3, 2), и по формуле, вполне аналогичной (3, 3), введем вспомогательную функцию $\Delta(t)$. После этого приведем к (однородным) равенствам, подобным (1, 5) и к сходным с (3, 4) формулам:

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Delta(t)}{t-z} dt; (B + D + \bar{D})\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Delta(t)}{t-z} dt. \quad (3, 16)$$

Далее построенное на основе этих формул однородное сингулярное уравнение по образцу (3, 9) последовательно приводится к однородному регулярному интегральному уравнению и к равнозначной ему паре (однородных же) раздельных уравнений типа (3, 13), при тож-

дественных с прежними (что особенно важно) параметрах Фредгольма (в этом убедимся, взяв коэффициенты, определяющие согласно (3, 13) параметр λ , такими: $a = 1$, $b = 0$, $c = -(B + D)$ и $d = -D$). Отсюда (не отклоняясь от допущения, ранее принятого по поводу фигурирующих параметров Фредгольма) заключаем, что каждое из названных раздельных уравнений имеет лишь тривиальное решение и значит $\mu(z) = 0$, а плотность $\varphi(t)$ (как это вначале было обусловлено) совпадает с граничным значением некоей функции, регулярной в области S . Итак, разрешив интегральные уравнения (3, 13), после простых операций придем к искомому величинам функций в задаче (1, 1).

Примечание. В особом случае, когда $a\bar{d} - \bar{b}c = 0$, иначе говоря, $b = \bar{\lambda}a$ и $d = \bar{\lambda}c$, краевое условие (1, 1) записывается так:

$$[a\Phi(t) + c\Psi(t)] + \lambda [\bar{a}\bar{\Phi}(\bar{t}) + \bar{c}\bar{\Psi}(\bar{t})] = f(t). \quad (3, 17)$$

Отсюда при $|\lambda| \neq 1$ функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ находятся в замкнутой форме посредством интегралов типа Коши. Если же $|\lambda| = 1$, то, полагая

$$a = |a|e^{i\delta}, b = |b|e^{i\beta}, c = |c|e^{i\delta}, d = |d|e^{i\gamma},$$

получим условие (1, 1) в специфически упрощенной форме:

$$|a|e^{i\nu} \operatorname{Ree}^{\frac{i(\alpha-\beta)}{2}} \Phi(t) + |c| \operatorname{Ree}^{\frac{i(\delta-\gamma)}{2}} \Psi(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{-i(\delta+\gamma)}{2}} f(t), \quad (3, 18)$$

где $\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \delta - \gamma)$. При $\nu \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1$)... она распадается на два отдельных вещественных краевых условия порознь относительно каждой из искомых функций; вторая из них — $\Psi(z)$ без труда определяется, если слегка расширить первоначальное допущение о поведении функции, точнее считать, что она ограничена (а не исчезает) в удаленной части области.

Для критических $\nu = k\pi$ последнее соотношение вырождается: его левая часть становится вещественной, а значит оно будет непротиворечивым при подчинении свободного члена (резко сужающему его выбор) особому условию. При этом задача перестает быть корректной в том смысле, что одно (предельное) равенство (3, 17) само по себе уже недостаточно для нахождения аналитических функций (с обычно дозволяемой степенью произвола). Упомянем еще о частном случае $|a| \neq |b|$ и $|c| = |d|$ ($B = 0$), также исключенном выше из рассмотрения.

Преобразуем в том же условии (1, 1) слагаемые, зависящие от $\Psi(z)$ совершенно так же, как в предшествующем равенстве (3, 18), а затем отделим в нем вещественную и мнимую части. В результате заменим (1, 1) парой следующих (краевых же) соотношений:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[m\Phi(t) + 2|c|e^{\frac{i(\delta+\gamma)}{2}} \Psi(t) - e^{\frac{-i(\delta+\gamma)}{2}} f(t) \right] &= 0; \\ \operatorname{Im} \left[n\Phi(t) - e^{\frac{-i(\delta+\gamma)}{2}} f(t) \right] &= 0, [m, n] = ae^{\frac{-i(\delta+\gamma)}{2}} \pm be^{\frac{i(\delta+\gamma)}{2}}. \end{aligned} \quad (3, 19)$$

Второе из них выдает $\Phi(z)$ с точностью до комплексного слагаемого $E(N)^{-1}$ с (пока произвольным) вещественным множителем E . По внешнему значению $\Phi(z)$ в первое соотношение фиксируем тот же множитель из специального функционального условия, обеспечивающего разрешимость возникающей при этом внешней задачи Дирихле (стесненной требованием принимать за искомую гармоническую функцию некий потенциал двойного слоя). В данном случае, видимо, удастся найти функцию $\Psi(z)$, не отходя от предписанного для нее поведения

на бесконечности (и, стало быть, не присовокупляя к ней дополнительной константы; надобность в таковой почти всегда неизбежна, если только отсутствуют иные элементы, вроде называвшейся постоянной E , предназначенные типическими особенностями задачи и логическим развитием подсказываемого ими процесса решения для целевого выбора).

§ 4. В заключение рассмотрим более простую (по сравнению с изложенной выше) задачу определения функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, регулярных в односвязной области S и удовлетворяющих на L условию

$$a\varphi_1(t) + b\overline{\varphi_1(t)} + c\varphi_2(t) + d\overline{\varphi_2(t)} = f(t), \quad (4, 1)$$

где a, b, c и d — по-прежнему постоянные величины.

Почувствительно сопоставить методики, используемые ранее и здесь, подметить объединяющее их общее начало и различие, обусловленное типом задач, вообще говоря, неодинаковой степени сложности и тождественных между собой лишь в случае, когда граница L является окружностью. В данном случае вспомогательную (уже комплексную) функцию $\omega(t)$ введем по формуле

$$a\varphi_1(t) - b\overline{\varphi_1(t)} + c\varphi_2(t) - d\overline{\varphi_2(t)} = 2\omega(t). \quad (4, 2)$$

Сложим почленно и вычтем одно из другого равенства (4, 1) и (4, 2) и во втором из полученных соотношений перейдем к сопряженным величинам. Тогда, принимая, что $\Delta^* = a\overline{d} - \overline{b}c \neq 0$, будем иметь

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{\Delta^*} \left[m_j \omega(t) + n_j \overline{\omega(t)} + \frac{1}{2} g_j(t) \right], \quad (j=1, 2) \quad (4, 3)$$

где (постоянные) $m_1 = \overline{d}$, $n_1 = c$ и $m_2 = -\overline{b}$, $n_2 = -a$; $g_j(t)$ — задаваемая функция (указываемая чуть ниже). Отсюда видно, что искомые $\varphi_j(z)$ представимы в области S следующим образом:

$$\varphi_j(z) = \frac{1}{2\pi i \Delta^*} \int_L \frac{m_j \omega(t) + n_j \overline{\omega(t)}}{t-z} dt + F_j(z) \quad (j=1, 2) \quad (4, 4)$$

при известных функциях

$$F_j(z) = \frac{1}{4\pi i \Delta^*} \int_L \frac{g_j(t)}{t-z} dt; \quad g_j(t) = m_j f(t) - n_j \overline{f(t)}. \quad (4, 5)$$

Выражения (4, 4) для $\varphi_j(z)$, будучи внесены в (4, 2), приводят к фредгольмову уравнению

$$-\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\overline{t_0}} = G(t_0) \quad (4, 6)$$

со свободным членом

$$G(t_0) = -\frac{1}{4\pi i} \int_L f(t) \left[\frac{dt}{t-t_0} + \frac{dt}{t-\overline{t_0}} \right]. \quad (4, 7)$$

Между тем (в противовес наблюдавшемуся прежде) те же выражения (4, 4) для любой $\omega(t)$ (построенной несколько по-иному, нежели в предыдущих параграфах) отнюдь не обращают в тождество исходное предельное равенство; именно подстановка (4, 4) в это равенство дает относительно $\omega(t)$ сингулярное уравнение первого рода:

$$\frac{1}{\pi i} \omega(t) \left[\frac{dt}{t-t_0} - \frac{1}{2} d \ln \frac{t-t_0}{t-\overline{t_0}} \right] = R(t_0), \quad (4, 8)$$

причем зависящая от $f(t)$ функция

$$R(t_0) = \frac{1}{2} f(t_0) - \frac{1}{4\pi i} \int_L f(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\overline{t_0}}. \quad (4, 9)$$

Уравнение (4, 6) с хорошо знакомым из теории потенциала вещественным ядром само по себе, вообще говоря, комплексное, но в него одновременно не входят взаимно сопряженные значения неизвестной $\omega(t)$. Благодаря этому вещественная и мнимая части $\omega(t)$ составляют, как видно, плотности потенциалов двойного слоя, разрешающих внешние задачи Дирихле с граничными величинами гармонических функций, задаваемыми вещественной и мнимой компонентами свободного члена (4, 7).

Уравнение, сходное с однородным (4, 6), выглядит так:

$$-\omega(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\overline{t_0}} = 0. \quad (4, 10)$$

Ни в одно из этих уравнений не входят коэффициенты, фигурирующие в (4, 1), так что характер зависимости от таковых решения задачи целиком предопределяется (4, 4). В том же предположении $\Delta^* \neq 0$ нетрудно, рассуждая по-другому, установить разрешимость задачи (4, 1). Это можно сделать, исходя хотя бы из сугубо частного вида (4, 1) и попутно привлекая какую-либо из формул (4, 4) и (4, 5) для одной искомой функции, а другую также задавая интегралом типа Коши с сопряженным значением плотности. Полагая, например, $a = d = 1$, $b = c = 0$ ($\Delta^* = 1$) и

$$[\varphi_1(z), \varphi_2(z)] = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu(t)}{t-z} dt, \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\nu(t)}}{t-\overline{z}} dt \right], \quad (4, 11)$$

получим для плотности $\nu(t)$ разрешимое интегральное уравнение (с тем же ядром, что в обычном уравнении для задачи Дирихле)

$$\nu(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \nu(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\overline{t_0}} = f(t_0). \quad (4, 12)$$

В то же время отвечающие этому случаю формулы (4, 4) оставляют неизменными уравнения (4, 6) и (4, 8), поэтому последние также разрешимы и значит при $\omega(t)$, как-то найденной из (4, 6) или (4, 8), формулы (4, 4) позволяют найти решение задачи (4, 1) для любых коэффициентов (с ненулевым Δ^*).

Едва видоизменяя рассуждения, можно избежать обращения к уравнениям (4, 6) и (4, 8). В самом деле, разбив $f(t)$ (посредством названных интегралов типа Коши) на сумму слагаемых $\delta(t)$ и $\chi(t)$, таких, что $\delta(t)$ и $\chi(z)$, даваемые (4, 11), регулярны в области S , из вполне очевидных равенств

$$a\varphi_1(z) + c\varphi_2(z) = \delta(z) + c; \quad \overline{b}\varphi_1(z) + \overline{d}\varphi_2(z) = \chi(z) - \overline{c}, \quad (4, 13)$$

вытекающих из условия (4, 1), в них C — произвольная постоянная, получим искомые $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Из найденных столь просто равенств (4, 13) сразу усматривается, что однородное интегральное уравнение (4, 6) имеет негравитальное решение $\omega_0(t) = c$. К такому же выводу придем, заметив, что это уравнение (как отмечалось) равнозначно двум вещественным интегральным уравнениям, на которые она распадается, и каждое из них, построенное на основе потенциала двойного слоя, отвечает внешней задаче Дирихле с однородным краевым условием.

Примечание. Задача становится существенно особой, когда фиксация коэффициентов в (4, 1) регламентируется связью $b = \lambda \cdot \bar{a}$, $\bar{a} = \lambda \bar{c}$ ($a\bar{a} - \bar{b}c = 0$) при некотором (вообще говоря, комплексном) параметре λ ; при этом само условие (4, 1) приобретает вид

$$\mathcal{Q}(t) + \lambda \overline{\mathcal{Q}(t)} = f(t), \quad \mathcal{Q}(z) = a \varphi_1(z) + c \varphi_2(z),$$

откуда, считая $|\lambda| \neq 1$, получаем

$$\mathcal{Q}(t) = \frac{1}{1 - |\lambda|^2} [f(t) - \lambda \overline{f(t)}]. \quad (4, 14)$$

Однако последняя формула не теряет своего смыслового значения лишь тогда, когда ее правая часть (в унисон с левой) аналитически продолжима в S , только при таком (из ряда вон выходящем) благоприятном обстоятельстве удастся выразить какую-либо одну из функций $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(z)$ через другую. Надо думать, что далеко не просто натолкнуться или даже подыскать относящийся к приложениям вопрос, который приводился бы к краевой задаче, разрешаемой с такой (согласующейся с его физическим содержанием) непривычной степенью произвола. Нетрудно видеть, что при $\lambda = e^{iv}$ условием непротиворечивости равенства, предшествующего (4, 14), служит вещественность величины $e^{-\frac{iv}{2}} f(t)$.

Итак, вполне элементарным путем, отличным от предложенного вначале (при допущении, что $\Delta^* \neq 0$), установлена разрешимость задачи (4, 1). С одной стороны, наличие такого факта (это уже указывалось) означает, что фредгольмово уравнение (4, 6) также имеет соответствующее решение, поскольку операции, в итоге приведшие к нему, закономерны и нигде не уводят в сторону от (4, 1). С другой стороны, располагая тем же фактом, мы вправе сделать заключение о неперменном соблюдении условия ортогональности:

$$\Lambda(\mu(t)) \equiv \int_L G(t) \mu(t) ds = 0 \quad (4, 15)$$

или же (после перестановки порядка интегрирования) ему адекватного функционального соотношения

$$\int_L f(s) \{ \mathcal{Q}[\mu(t_0), t_0] + T[\mu(t_0), t_0] \} ds = 0 \quad (4, 16)$$

со значащейся под знаком интеграла суммой таких операторов

$$[\mathcal{Q}, T] = \left[\frac{t(s)}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t_0)}{t_0 - t} ds_e, \frac{t(s)}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t_0)}{t - t_0} ds_0 \right]. \quad (4, 17)$$

В свою очередь, то же соотношение (4, 16) в силу произвольного выбора $f(t)$ неотвратимо ведет к операторному равенству

$$\mathcal{Q}[\mu(t), t_0] + T[\mu(t), t_0] = 0. \quad (4, 18)$$

Заметим, что при обозначениях (4, 17) введенное интегральное уравнение (4, 10) записывается следующим образом:

$$-\mu(t_0) - \mathcal{Q}[\mu(t), t_0] + T[\mu(t), t_0] = 0. \quad (4, 19)$$

Выявленное только что косвенным путем дополнительное равенство (4, 18) само по себе весьма важно; оно, видимо, предельно детализирует и обнажает свойства схожего уравнения (4, 10); держа (4, 18) в поле зрения, мы позже легко вскрыем внутреннюю взаимосвязь, существующую между решениями (4, 10) и некоей весьма простой краевой задачей.

Не постулируя заранее известное (или не доказав предварительно) существование решения задачи (4, 1), как-будто несколько затрудни-

тельно, апеллируя лишь к (4, 10), высказаться непреложно и без обиняков утвердительно по поводу выполнения равенства (4, 15). Впрочем нетрудно, оставляя втуне (4, 18), воочию убедиться в справедливости равенства (4, 15). Для этого понадобится произвести некоторые вполне элементарные, но все же в известной своей части своеобразные по характеру выкладки. Их своеобразие состоит в том, что они осуществляются при прямом и активном участии произвольно задаваемой функции $f(t)$, так что последняя в отличие от того, как в подобных случаях обычно принято, не воспринимается только зря в качестве важного (но пассивного) фактора, бережно и с тщанием протаскиваемого сквозь комплекс совершаемых по ходу дела выкладок. Вовлечение $f(t)$ в перипетии выкладок достигается благодаря заимствуемому в промежуточных расчетах (и выпадающему из итоговых формул) недавно использованному расщеплению $f(t)$ на сумму двух слагаемых $\delta(t)$ и $\bar{\chi}(t)$, $\delta(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$ регулярны в области S .

Действительно, по применению такого разбиения $f(t)$ свободный член в (4, 6) будет иметь вид

$$G(t_0) = -\frac{1}{4} [\delta(t_0) - \bar{\chi}(t_0)] - \frac{1}{4\pi i} \int_L \left[\frac{\bar{\chi}(t)}{t - t_0} dt + \frac{\delta(t)}{t - t_0} \bar{dt} \right],$$

в связи с чем, учитывая (4, 19), для величины функционала (4, 15) будем иметь

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \int_L \left\{ \delta(t) \left[\frac{\mu(t)}{2} - T(t) \right] - \bar{\chi}(t) \left[\frac{\mu(t)}{2} + \mathcal{Q}(t) \right] \right\} ds. \quad (4, 20)$$

Эту формулу, обращаясь к (4, 18), заменим следующей:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int_L \left\{ \delta(t) \left[\frac{\mu(t)}{2} + \mathcal{Q}(t) \right] - \bar{\chi}(t) \left[\frac{\mu(t)}{2} - T(t) \right] \right\} ds^*.$$

Из нее же при соотношениях (проверка последних зиждется на заурядных операциях: изменение порядка интегрирования, применение формулы Коши, продиктованное стремлением выразить встречающиеся двойные интегралы через подходящие ординарные)

$$\int_L [\delta(t) \mathcal{Q}(t), \bar{\chi}(t) T(t)] ds = \frac{1}{2} \int_L [-\delta(t), \bar{\chi}(t)] \mu(t) ds$$

автоматически вытекает интересующее нас условие ортогональности (4, 15).

Как видно (союзное с (4, 6) и с вещественным же ядром), уравнение (4, 10) совпадает по структуре (вообще говоря, при комплексном значении плотности) с однородным уравнением Фредгольма для внутренней задачи Неймана. Поэтому излишне уметь фактически находить его нетривиальные решения; таковые, как явствует из хорошо известных упоминавшихся свойств однородного уравнения (4, 6) и высказанных попутных замечаний, должны иметь вид $\mu(t) = C\delta(s)$, где $\delta(s)$ — некая вещественная функция, а C — любая комплексная постоянная. Отмеченное обстоятельство (оно достаточно очевидно, но тем не менее мы акцентируем на нем внимание читателей) в данном случае играет

* Реализуемый (относительно не наименее сложный) путь решения (поначалу избранный как наиболее подходящий в целях предусмотренного анализа вид изменений, терпимых методикой при переходе к другой, хотя и родственной задаче), применен еще и тем, что приводит к некоторым любопытным (может быть, не лишены занимательности) побочным результатам.

немаловажную роль; оно занимает подобающее место в последующих рассуждениях, закономерно проявляется в заключительных выводах.

Те же решения (4, 10) одновременно удовлетворяют сингулярному равенству первого рода (4, 18), приобретающему отнюдь не вспомогательное, а радикальное значение при совместном анализе с союзным уравнением (4, 10). В самом деле, из них после элементарных действий, не нуждающихся в пояснениях, находим

$$p(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(t)}{t-t_0} dt = 0, \quad q(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q(t)}{t-t_0} dt = 0, \quad (4, 21)$$

причем вновь фигурирующие плотности равны

$$p(t) = \frac{\mu(t)}{t}, \quad q(t) = \frac{\nu(t)}{t} \quad (4, 22)$$

и что ясно из предшествующих формул, совпадают с предельными значениями некоторых функций $p(\cdot)$ и $q(\cdot)$, регулярных вне L и исчезающе малых в удаленной части области. Для нахождения этих функций служит краевое условие на L :

$$p(t) = \bar{t}^2 \bar{q}(\bar{t}); \quad p(\infty) = q(\infty) = 0, \quad (4, 23)$$

получаемое из (4, 22) по исключении $\mu(t)$. Пусть функция $z = \lambda(\zeta)$, где

$$\lambda(\zeta) = a_{-1}\zeta + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\zeta^n}, \quad \bar{t}^2 = -\frac{\lambda'(\tau)}{\tau^2 \lambda'(\tau)} \quad (4, 24)$$

взаимно однозначно и конформно отображает (одну на другую) внешности контура L и окружности γ единичного радиуса плоскости ζ ; при этом коэффициенты $a_n (n = -1, 0, \dots)$, вообще говоря, — комплексные постоянные. В силу (4, 24) условие (4, 23) трансформируется на γ к следующему виду:

$$\tau^2 \lambda'(\tau) p^*(\tau) = -\overline{\lambda'(\tau)} \bar{q}^*(\tau); \quad p(z) = p^*(\zeta), \quad q(z) = q^*(\zeta), \quad (4, 25)$$

где τ — аффикс точки γ .

Далее положим

$$\lambda'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{1}{\zeta^n}; \quad \beta_0 = a_{-1}; \quad \beta_n = -(n-1)a_{n-1} \quad (\beta_1 = 0) \quad (4, 26)$$

и возьмем неизвестные $p^*(\zeta)$ и $q^*(\zeta)$ в форме рядов

$$p^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{1}{\zeta^k}, \quad q^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{1}{\zeta^k} \quad (4, 27)$$

с коэффициентами a_k и b_k , являющимися неизвестными задачи. Обратив (4, 24), найдем в удаленной части области

$$\zeta = \gamma_{-1}z + \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \frac{1}{z^k}, \quad \gamma_{-1} = \frac{1}{a_{-1}}, \quad \gamma_0 = -\frac{\sigma_0}{a_{-1}} \quad (4, 28)$$

и в связи с этим там же

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \frac{1}{z^k}; \quad \varepsilon_1 = a_{-1}a_1, \quad \varepsilon_2 = a_{-1}(\sigma_0 a_1 + a_{-1}a_2). \quad (4, 29)$$

Условие (4, 24), при учете (4, 26) и (4, 27), дает для определения a_k и b_k бесконечную систему рекуррентно разрешаемых линейных уравнений:

$$\beta_0 a_1 + \bar{\beta}_0 \bar{b}_1 = 0, \quad a_2 = b_2 = 0, \quad \sum_{k=1}^{n+2} \beta_{n+2-k} [a_k, b_k] = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4, 30)$$

Здесь ради краткости принята та же запись, что в предыдущих параграфах; ее следует (по прежним разъяснениям) понимать в том смысле, что выписанные уравнения выполняются независимо и в отдельности для коэффициентов a_k и b_k ($k = 3, 4, \dots$). Отсюда ясно, что в конечном счете последние (для одного и того же индекса k) получаются в виде выражений, тождественных между собой с точностью (соответственно) до множителей a_1 и b_1 , подчиненных первому уравнению (4, 30); какой-либо один из них, например a_1 , можно считать произвольным.

Из сказанного без труда заключаем, что

$$q^*(\tau) = -\frac{\bar{\beta}_0 \bar{a}_1}{\beta_0 a_1} p^*(\tau), \quad \bar{\beta}_0 \bar{a}_1 \bar{t} p(t) + \beta_0 a_1 \bar{t} \bar{p}(\bar{t}) = 0.$$

Привлекая теперь к рассмотрению регулярные вне L функции

$$\sigma(z) = \bar{\beta}_0 \bar{a}_1 \left[p(z) - \frac{\varepsilon_1}{z} \right], \quad h(z) = \int_{t_n}^z \sigma(z) dz, \quad h(t_n) = 0, \quad (4, 31)$$

где t — аффикс фиксированной точки кривой L_1 (от нее условно ведется отсчет дуг), вместо предыдущего условия будем иметь

$$h(t) + \bar{h}(\bar{t}) = -|\beta_0 a_1|^2 \left[\ln \frac{t}{t_n} + \ln \frac{\bar{t}}{\bar{t}_n} \right]. \quad (4, 32)$$

Решив эту задачу Дирихле и восстановив функцию $h(z)$ (значение добавляемой к ней чисто мнимой аддитивной постоянной предписывается требованием $h(t_n) = 0$), найдем $\sigma(z)$, $p(z)$ и, наконец, плотность $\mu(t)$.

Пример 1. Пусть L — окружность радиуса R . Полагая

$$p(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{z} \right)^k, \quad q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{z} \right)^k \quad \left(t = i, \frac{t}{R}, \bar{t} \bar{t} = 1 \right),$$

из (4, 30) получим, исключая остающиеся произвольными $a_1 = -\bar{b}_1$, все остальные $a_k = b_k = 0$ ($k = 2, 3, \dots$) и поэтому

$$\bar{p}(\bar{z}) = a_1 \frac{R}{\bar{z}}, \quad q(z) = -\bar{a}_1 \frac{R}{z}, \quad \mu(t) = ia,$$

Очевидно, это значение плотности удовлетворяет (4, 10).

Пример II. В более сложном случае, когда кривая L является эллипсом, надо (поступая как при общем изучении вопроса) использовать конформное отображение внешности окружности γ радиуса $\rho > 1$ в плоскости ζ на внешность эллипса, реализуемое формулой

$$z = A \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad 2A = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad p^*(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + r^*(\zeta),$$

где a и b — полуоси эллипса. Из $p^*(\zeta)$ выделены два первых слагаемых с остаточным членом $r^*(\zeta) = O(\zeta^{-3})$, что позволяет записать условие (4, 25) на γ в виде

$$\frac{a_1}{\tau} + \frac{a_2}{\tau^2} + (1 - \tau^2) r^*(\tau) = a_2 + a_1 \tau + \left(\rho^2 - \frac{\tau^2}{\rho^2} \right) \bar{q}^*(\tau),$$

где справа содержатся лишь положительные (включая свободный член), а слева — отрицательные степени переменной τ . Отсюда вытекает, что постоянная $a_2 = 0$ и функции

$$r^*(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta(\zeta^2 - 1)}, \quad p^*(\zeta) = -q^*(\zeta) = a_1 \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}.$$

При этом величина искомой плотности

$$\rho(t) = i\rho a_1 \frac{\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(\tau^4 - \rho^2)}}, \quad \dot{t} = i\rho \sqrt{\frac{\tau^2 - 1}{\rho^4 - \tau^2}}$$

и входящий в нее радикал считается положительным для $\tau = \rho$.

В завершение разбираемого случая отметим разложения (проверяемые банальными выкладками)

$$\left[\frac{dt}{t-t_0}, \frac{dt}{t-t_0} \right] = \left\{ -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau - \rho_0} + \left[\frac{1}{\tau - \frac{1}{\tau_0}}, \frac{1}{\tau - \frac{\rho^4}{\tau_0}} \right] \right\} d\tau,$$

где первое (второе) из слагаемых, заключающихся справа в квадратных скобках, вкупе с двумя предшествующими (в общих фигурных скобках), составляет преобразованную форму первого (второго) выражения, стоящего слева (в квадратных же скобках). При помощи этих разложений легко прийти к формулам

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \rho(t) ds \left[\frac{1}{t-t_0}, \frac{1}{t-t_0} \right] = \left[-\frac{a_1}{2} \frac{\tau_0}{(\tau_0^2 - 1)}, -\frac{a_1}{2} \frac{\rho^2 \tau_0}{\rho^4 - \tau_0^2} \right]$$

и тем самым удостовериться, что найденная плотность на самом деле обращает в тождество интегральное уравнение (4, 10). Сходным образом могут быть найдены в замкнутой форме решения того же уравнения для иных (образующих некоторый класс) криволинейных границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. второе, переработанное, 1962.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. второе, переработанное, 1963.
3. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. 55, 1947, № 8.
4. Шерман Д. И. ДАН СССР, т. 63, 1948, № 5.
5. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, 1953.

Б. Т. ГУСЕЙНОВ

О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ СУДОВ, ПРИБЫВАЮЩИХ СОСТАВАМИ

В настоящее время на речном транспорте все большую важность приобретает комплектование в составы несамоходных судов, так называемое „увеличение секционности“ (в железнодорожном транспорте, как известно, это давно имеет место). В связи с этим представляет интерес нижеследующая задача.

Пусть суда прибывают составами, по m несамоходных судов в каждом. В порту прибытия имеется n причалов, каждый из которых обслуживает одновременно по одному судну. В порядке очереди суда подаются на свободные причалы. Если все причалы заняты, суда образуют строгую очередь. Каково же время ожидания судном начала обработки? Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться теорией массового обслуживания.

Постановка задачи

Пусть на систему массового обслуживания, состоящую из n приборов, поступает поток вызовов группами по m . Пусть поступление групп — пуассоновское, параметра λ , а каждое требование обслуживается любым свободным прибором по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$. Система с ожиданием. Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в данный момент времени в системе имеется k требований.

1. Сначала рассмотрим случай (будем считать его первым), когда $m = n + s$, $s \geq 0$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= p_0(t) (1 - \lambda h) + \mu h p_1(t) + O(h); \\ p_k(t+h) &= p_k(t) [1 - (\lambda + k\mu)h] + (k+1)\mu h p_{k+1}(t) + O(h), \quad 0 < k < n; \\ p_k(t+h) &= p_k(t) [1 - (\lambda + n\mu)h] + n\mu h p_{k+1}(t) + O(h), \quad n \leq k \leq m-1; \\ p_k(t+h) &= p_k(t) [1 - (\lambda + n\mu)h] + n\mu h p_{k+1}(t) + \lambda h p_{k-m}(t) + O(h), \\ &\quad k \geq m \end{aligned}$$

(в случае $s = 0$ уравнения третьей строки опускаются). Как было доказано ранее [1], при $\lambda m < n\mu$ (это означает, что число обслуживающих приборов n должно быть больше среднего числа приборов, необходимых для обслуживания всех требований, поступивших за единицу времени $\lambda \mu^{-1} m$) предельные распределения

$$p = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

независимые от начального состояния системы, существуют и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} -(\lambda + \kappa \mu) p_k + (k+1) \mu p_{k+1} &= 0, & 0 \leq k < n; \\ -(\lambda + n \mu) p_k + n \mu p_{k+1} &= 0, & n \leq k \leq m-1; \\ -(\lambda + n \mu) p_k + n \mu p_{k+1} + \lambda p_{k-m} &= 0, & k \geq m. \end{aligned} \quad (1)$$

Вводя в рассмотрение производящую функцию

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

из системы (1), путем умножения k -го уравнения на x^{k-1} ($k=1, 2, \dots$) и суммируя по k , получим

$$\begin{aligned} -\lambda \Phi(x) - \mu \sum_{k=1}^{m-s-1} \kappa p_k x^k - n \mu \sum_{k=m-s}^{\infty} p_k x^k + \mu \sum_{k=0}^{m-s-1} (k+1) p_{k+1} x^k + \\ + n \mu \sum_{k=m-s}^{\infty} p_{k+1} x^k + \lambda \sum_{k=m}^{\infty} p_{k-m} x^k = 0. \end{aligned}$$

Отсюда после некоторых преобразований будем иметь

$$[\lambda x^{m+1} - (\lambda + n \mu) x + n \mu] \Phi(x) = \mu (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} (k-n) p_k x^k.$$

Сократив это выражение на $(x-1)$ и приняв $\lambda/\mu = \rho$, получим

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (k-n) p_k x^k}{\rho \sum_{j=0}^m x^j - n}. \quad (3)$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (1), рекуррентным образом получаем

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\rho(\rho+1) \dots (\rho+k-1)}{k!} p_0 = \\ &= \frac{p_0}{(\rho+k) B(k+1; \rho)} \quad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в (3) и воспользовавшись условием нормировки для нахождения p_0 , получим

$$\Phi(x) = \frac{(m \rho - n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-n)}{(\rho+k) B(\rho_0 k+1)} x^k}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-n)}{(\rho+k) B(\rho_1 k+1)} \cdot \left(\rho \sum_{j=1}^m x^j - n \right)}. \quad (5)$$

Так как среднее число требований в системе

$$\bar{n} = \Phi'(1),$$

то, беря производную по x от (5), при $x=1$ получим

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-n)}{(\rho+k) B(\rho, k+1)}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-n)}{(\rho+k) B(\rho, k+1)}} - \frac{m(m+1)\rho}{2(m\rho-n)}. \quad (6)$$

Для определения времени ожидания обратимся к следующим рассуждениям [2]: рассмотрим достаточно большой промежуток времени T ; в среднем за это время через систему пройдет $\lambda m T$ требований. Тогда средняя продолжительность суммарного времени обслуживания $\lambda m T$ требований равна

$$\lambda m T \cdot \frac{1}{\mu} = m \rho T. \quad (7)$$

Следовательно, если вместо n приборов, функционирующих в течение интервала времени T , рассматривать лишь один прибор с параметром μ , функционирующий в течение интервала длительностью nT , то полное время занятости этого прибора будет равно $m \rho T$. Итак, можно сказать, что в нашей системе в среднем имеется $m \rho$ занятых приборов. Тогда

$$\bar{v} = \bar{n} - \bar{\psi}, \quad (8)$$

где $\bar{v}$ — среднее число ожидающих очереди требований,

$\bar{\psi}$ — среднее число занятых приборов.

Значит среднее время ожидания требований в очереди будет

$$\bar{w} = \frac{\bar{v}}{m \lambda} = \frac{\bar{n}}{m \lambda} - \frac{1}{\mu}. \quad (9)$$

Окончательно

$$\bar{w} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-n)}{(\rho+k) B(\rho, k+1)}}{m \lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k-n)}{(\rho+k) B(\rho, k+1)}} - \frac{m+1}{2\mu(m\rho-n)} - \frac{1}{\mu} \quad (m \geq n). \quad (10)$$

В частности, при $m=n=1$ из (10) получаем

$$\bar{w} = \rho/(\mu - \lambda),$$

что точно совпадает с известным средним временем ожидания в случае одного прибора при пуассоновском поступлении требований (но не групп требований) с параметром λ и обслуживанием параметра μ .

II. Рассмотрим случай, когда

$$n = m + s, \quad s = 1, 2, \dots \quad (*)$$

Аналогично случаю I для установившегося режима получим систему:

$$\begin{cases} -(\lambda + k \mu) p_k + (k+1) \mu p_{k+1} = 0, & 0 \leq k < m; \\ -(\lambda + k \mu) p_k + (k+1) \mu p_{k+1} + \lambda p_{k-m} = 0, & m \leq k < n; \\ -(\lambda + n \mu) p_k + n \mu p_{k+1} + \lambda p_{k-m} = 0, & k \geq n. \end{cases} \quad (11)$$

Так же, как и в случае I, вводя в рассмотрение производящую функ-

цию (2), получим

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (k-n) p_k x^k}{\rho \sum_{j=1}^m x^j - n}. \quad (12)$$

Но если в случае I все $(n-1)$ нужных вероятностей p_k непосредственно выражались через p_0 согласно (4), то в данном случае это несколько сложнее. Однако, если ограничиться в (*) теми s , которые принимают значение 1 или 2, т. е. рассматривать лишь случаи, когда

$$n = m + s, \quad s = 1; 2,$$

то выражение p_k ($k = 1, 2, \dots, (n-1)$), найденное из (11), имеет вид:

$$p_k = \frac{p_0}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k} p_{k-m-1} \quad (\text{при } k < m+1 \quad p_{k-m-1} \equiv 0), \quad (13)$$

$$p_k = \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k} \frac{1}{(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] p_0.$$

Аналогично случаю I получаем выражения для производящей функции

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & \frac{(m\rho - n) \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{k-n}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} x^k + \left(\rho \sum_{j=1}^m x^j - n \right) \times \right. \\ & + \sum_{k=m+1}^{n-1} (k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k} \frac{1}{(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] x^k \Big\}}{+ \sum_{k=m+1}^{n-1} (k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k} \frac{1}{(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right]} \cdot \quad (14) \end{aligned}$$

$$n = m + s, \quad s = 1; 2.$$

Среднее число требований в системе

$$\bar{n} = \frac{\sum_{k=0}^m \frac{k(k-n)}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} + \sum_{k=0}^m \frac{(k-n)}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} +$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{k=m+1}^{n-1} k(k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] \\ & + \sum_{k=m+1}^{n-1} (k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] - \\ & - \frac{m(m+1)\rho}{2(m\rho - n)}. \quad (15) \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения в точности совпадают со случаем I, поэтому равенства (7), (8), (9) имеют место и в случае II. Окончательно

$$\begin{aligned} \bar{\omega} = & \frac{\sum_{k=0}^m \frac{k(k-n)}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} + m\lambda \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(k-n)}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} + \right. \\ & + \sum_{k=m+1}^{n-1} k(k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] \\ & + \sum_{k=m+1}^{n-1} (k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right] \Big\}}{+ \sum_{k=m+1}^{n-1} (k-n) \left[\frac{1}{(\rho + k) B(\rho, k+1)} - \frac{\rho}{k(k-m-1) B(\rho, k-m-1)} \right]} \\ & - \frac{m+1}{2(m\rho - n)} - \frac{1}{\mu}; \quad n = m + s; \quad s = 1, 2. \quad (16) \end{aligned}$$

Замечание. Легко установить теперь, что (10) получается из (16), если полагать $n = m + s$, $s = 0, -1, -2, \dots$. Действительно, при этом в (16) k будет изменяться от 0 до $n-1 = m + s - 1 < m+1$, а для $k < m+1$ вторые слагаемые внутри квадратных скобок в числителе и знаменателе обращаются в 0, согласно (13). В частности, при $m = 1$, $n = 2; 3$ из (16) легко получатся известные выражения для среднего времени ожидания при пуассоновом поступлении отдельных требований и экспоненциальном обслуживании:

$$1) \quad m = 1, \quad n = 2.$$

$$\bar{\omega} = \frac{\rho^2}{\mu(4 - \rho^2)};$$

$$2) \quad m = 1, \quad n = 3.$$

$$\bar{\omega} = \frac{\rho^3}{\mu(3 - \rho)(6 + 4\rho + \rho^2)}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахбазов А. А. и Самандаров Э. Г. Об обслуживании неординарного потока. Кибернетику на службу коммунизму, т. 2, 1964.
2. Кофман А. и Крюон Р. Массовое обслуживание. Изд-во „Мир“, 1965.

Б. Т. Нүсөјнов

Группа дахил олдугда кэмилэрин көзлэмэ вахты наггында

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә n чиназдан ибарәт күтләви хидмәт системинә пуассон гануну илә һәр бири m тәләбдән ибарәт группар сели дахил олур. Һәр чиназ бир тәләбә хидмәт едир. Хидмәтәтмә мүддәти тәсадүфи кәмијјәт олуб

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

гануну илә пайланмышдыр. Систем көзлэмә системидир. Мәгаләдә системин һал еһтималларыны доғуран функцијасы вә һәр тәләбин орта көзлэмә вахты тапылмышдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1967, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 2

Ф. М. НАГИЕВА

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ КОД-АНАЛОГ

Наибольшее распространение в преобразователях цифровых кодов в электрические величины нашла схема преобразования, основанная на принципе суммирования напряжений и токов на attenuаторе сопротивлений двух номиналов R и $2R$. Преобразователи с суммированием токов имеют большие преимущества перед преобразователями с суммированием напряжений с точки зрения начальной регулировки и требований к сопротивлениям R и $2R$. Точное значение номиналов этих сопротивлений не нужно, важно только постоянство их во времени.

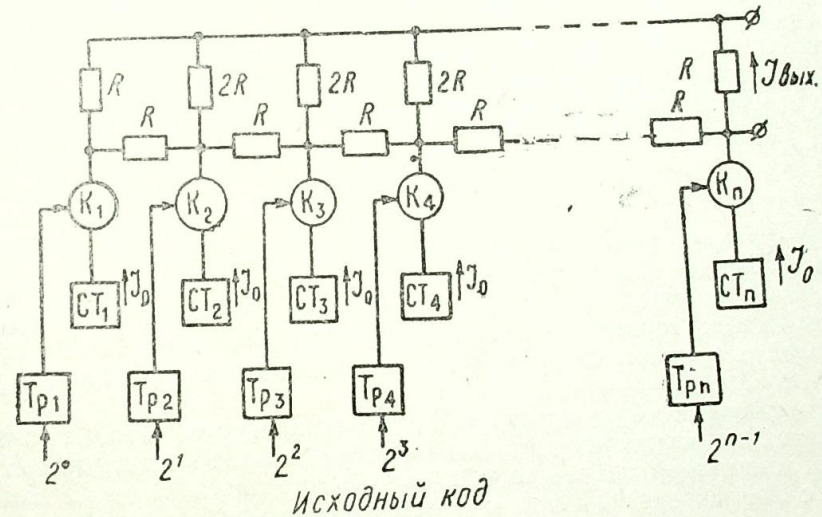


Рис. 1

Основными элементами преобразователей с суммированием токов являются источники стабильного тока (CT_i) и ключи (K_i). На рис. 1 показана блок-схема преобразователя кода в выходной ток (напряжение) с суммированием токов. Аналоговая величина ($I_{вых}$ или $U_{вых}$) получается в результате суммирования равных токов I_0 на цепочке сопротивлений R , $2R$. Выходной ток (напряжение) делителя опреде-

ляется выражением [1, 2]:

$$I_{\text{вых}} = \frac{I_0}{3 \cdot 2^{n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i,$$

$$U_{\text{вых}} = \frac{I_0 R}{3 \cdot 2^{n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} 2^i a_i,$$

где I_0 — стабильный ток каждого разряда,

n — число разрядов,

i — номер разряда,

a_i — коэффициент, равный 1 или 0 (в зависимости от кода числа).

Основным недостатком существующих схем преобразователей

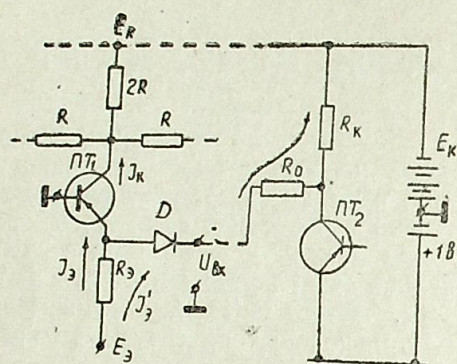


Рис. 2

транзистора $ПТ_1$ через большое стабильному источнику E_3 , создавая ток эмиттера, величина которого при нулевом уровне на базе равна

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{эб}}{R_3},$$

где $U_{эб}$ — падение напряжения на переходе эмиттер—база открытого триода. Величина $U_{эб}$ весьма мала по сравнению с E_3 и при поддержании E_3 с заданной точностью (R_3 считаем постоянной) получаем стабильный эмиттерный ток. Так как триоды работают по схеме с общей базой и в линейном режиме, то обеспечивается стабильность разрядных токов: $I_0 = I_k = I_{k0} + \alpha I_3$.

Переключение транзистора $ПТ_1$, его эмиттерного тока, производится диодным ключом в цепь и эмиттера триода. Анод диода D подключен к эмиттеру транзистора, а на катод подается перепад напряжения с коллектора триггера соответствующего разряда счетчика, код которого необходимо преобразовать (рис. 2). При положительном уровне входного сигнала диод D закрыт и постоянный по величине ток I_3 , задаваемый от источника E_3 через сопротивление R_3 , протекает только через транзистор $ПТ_1$. Рабочий режим его выбран линейным, соответственно $I_k = I_{k0} + \alpha I_3$.

При отрицательном уровне входного сигнала диод D открывается и ток эмиттера проходит по диоду, величина которого равна

$$I'_3 = \frac{E_3 + U'_{эб}}{R_3},$$

здесь $U'_{эб}$ — падение напряжения на переходе эмиттер—база закрытого триода $ПТ_1$. Чтобы триод $ПТ_1$ при этом был полностью закрыт, необходимо потенциал его эмиттера снизить до $-0,4$; $-0,8$ в. Исходя из этого, выбирается величина входного напряжения (отрицательный уровень): $U_{\text{вх}} = U_d + U'_{эб}$, где U_d — падение напряжения на проводящем диоде D .

Положительный уровень входного напряжения образуется (при насыщенном триоде $ПТ_2$ счетчика, рис. 2, б) за счет напряжения $+1$ в эмиттере триггера. Триггер, задающий величину $U_{\text{вх}}$, работает на токовую нагрузку, поэтому параметры триггера (при относительно больших токах) необходимо рассчитывать исходя из тока нагрузки I'_3 . Коллекторное напряжение триодов преобразователя и триггеров счетчика преобразуемого кода может быть выбрано общим.

Чтобы не было утечки тока I_3 по диоду D при открытом триоде $ПТ_1$ за счет изменения обратного сопротивления триода, применены кремниевые диоды типа Д-101. Так как триоды в преобразователе включены по схеме с общей базой, то скорость переключения в 3 раз выше, чем в схемах с общим эмиттером в ненасыщенном режиме. Соответственно скорость преобразования данного преобразователя высока и определяется максимально допустимой граничной частотой f_a для данного типа транзисторов. Таким образом, данная схема при своей простоте позволяет, применяя любые низкочастотные транзисторы, получать высокую скорость преобразования. Погрешность преобразователя определяется в основном температурной погрешностью.

В общем случае выходной ток преобразователя с увеличением температуры возрастает линейно, так как основная погрешность, вносимая параметрами $U_{эб}$, α и I_{k0} , в малом диапазоне температур ($\Delta t^\circ\text{C} \approx 25^\circ\text{C}$) имеет линейную зависимость от температуры. Поэтому температурная погрешность преобразователя может быть доведена до минимума включением последовательно с нагрузкой сопротивления из меди.

На основе разработанной схемы был собран 8-разрядный преобразователь, приведенная погрешность которого при изменении окружающей температуры от 25 до 50°C составила 0,7%, а при введении в цепь нагрузки сопротивления из меди — не более 0,1%. Данные преобразователя следующие: триоды типа П-15, $E_k = -10$ в, $E_3 = -20$ в, $2R = 390$ ом, $R = 180$ ом, $I_{\text{вых}} = 5$ ма, $f_{\text{преобр}} = 1,5$ мГц.

Выводы

Описанная простая схема преобразователя, использующая на каждый разряд по одному транзистору и одному диоду, позволяет получить высокую скорость преобразования, равную предельной частоте f_a примененных транзисторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств, Госэнергониздат, 1961.
2. Дроздов Е. А., Пятибратов А. П. Автоматическое преобразование и кодирование информации, Госэнергониздат, 1965.
3. Степаненко И. П. Основы теории транзисторов и транзисторных схем, Госэнергониздат, 1963.

Чәлд ишләјән код-аналог чевирчисис

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә транзисторларда җыгылмыш код-аналог чевирчисисинин схеми тәсвир олунар. Чевирчи чәрәјанлар чәми методу илә ишләјир. Схем чох садәдир. Транзисторлар үмуми база схеми илә бирләшдирилдијинә вә хәтти режимдә ишләдијинә көрә чевирчидә чәлд чевирмә дә әлдә едилир.

Чевирчисинин тезлији тәтбиг олунар транзисторларын f_a тезлији илә тәјин олунар.

Д. Б. БАЯСАНОВ, З. А. КЕРИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ НА ДИНАМИКУ ПРОЦЕССОВ ГАЗОСНАБЖЕНИЯ

В системах газоснабжения пункты подачи газа (газорегуляторные станции—ГРС) и приема последнего (газорегуляторные пункты) обычно оборудованы автоматизированными системами производительности, выходными элементами которых являются исполнительные механизмы—клапаны. Анализ переходных процессов в этих системах газоснабжения показывает, что здесь существенную роль играет поведение исполнительных механизмов на автоматизированных пунктах (ГРС и ГРП). Покажем, как можно определить аналитически зависимости изменения основного регулируемого параметра в системе газоснабжения—давления P_1 на выходе питающей ГРС при нестационарном режиме движения газа по отводящему трубопроводу от хода m штока исполнительного механизма ГРС и хода l штока исполнительного механизма питаемого ГРП.

Обычно отводящие газопроводы от ГРС практически имеют длину от нескольких до десятков километров. Для таких газопроводов, где трение весьма мало, линеаризованные дифференциальные уравнения с учетом величин отклонений давления ΔP и расхода ΔG от некоторых средних значений этих величин P_{cp} и G_{cp} примут следующий вид [1]:

$$-\frac{d\Delta p(x, s)}{dx} = \kappa_1 \cdot s \cdot \Delta G(x, s), \quad (1)$$

$$-\frac{d\Delta G(x, s)}{dx} = \frac{s}{\kappa_2} \Delta p(x, s) \quad (2)$$

в операторной форме.

Здесь x —координата длины, s —оператор дифференцирования, κ_1 и κ_2 —коэффициенты, зависящие от параметров системы.

Продифференцировав уравнение (2) по x и подставив значение в уравнение (1), после преобразования получим

$$\frac{d^2 \Delta G(x, s)}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} \Delta G(x, s) = 0, \quad (3)$$

где $\frac{1}{c^2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$. Характеристическое уравнение здесь будет иметь вид

$$z^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0,$$

а его корни соответственно равны

$$z_1 = z_2 = \frac{s}{c}.$$

Проинтегрировав уравнение (3), находим

$$\Delta G(x, s) = C_1 e^{zx} + C_2 e^{-zx} \quad (4)$$

С учетом граничных условий получим равенства:

$$\text{при } x=0 \quad C_1 + C_2 = \Delta G_1(0, s); \quad (5)$$

$$\text{при } x=L \quad C_1 e^{zL} + C_2 e^{-zL} = \Delta G_2(L, s), \quad (6)$$

Из уравнения (2) с помощью (4) получим

$$P(x, s) = -\frac{\kappa_2}{c} (C_1 e^{zx} - C_2 e^{-zx}).$$

Следовательно,

$$\text{при } x=0 \quad \Delta p_1 = -\frac{\kappa_2}{c} (C_1 - C_2), \quad (7)$$

$$\text{при } x=L \quad \Delta p_2 = -\frac{\kappa_2}{c} (C_1 e^{zL} - C_2 e^{-zL}), \quad (8)$$

Из (7) и (8) определяем значения коэффициентов C_1 и C_2 . Из уравнения (7)

$$C_1 = -\frac{\Delta p_1 \cdot c}{\kappa_2} + C_2.$$

Подставляя полученное значение C_1 в уравнение (8), получим

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 e^{zL} - \frac{\kappa_2}{c} C_2 \cdot 2 \operatorname{sh} zL.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{\Delta p_1 \cdot c \cdot e^{zL} - \Delta p_2 \cdot c}{2\kappa_2 \operatorname{sh} zL} \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{\Delta p_1 \cdot c \cdot e^{-zL} - \Delta p_2 \cdot c}{2\kappa_2 \operatorname{sh} zL}.$$

Подставляя значения коэффициентов C_1 и C_2 в равенства (5) и (6), получим:

$$\Delta G_1 = \frac{\Delta p_1 c \cdot \operatorname{ch} zL - \Delta p_2 \cdot c}{\kappa_2 \cdot \operatorname{sh} zL}, \quad (9)$$

$$\Delta G_2 = \frac{\Delta p_1 \cdot c - \Delta p_2 \cdot c \cdot \operatorname{ch} zL}{\kappa_2 \cdot \operatorname{sh} zL}. \quad (10)$$

Давления p_1 и p_2 принимаем постоянными, а расходы заданными:

$$G_1 = f_1(p_1 m) \quad \text{и} \quad G_2 = f_2(p_2 l),$$

поэтому для малых приращений этих величин получим следующие равенства в линейном приближении:

$$\Delta G_1 = \frac{\partial G_1}{\partial p_1} \Delta p_1 + \frac{\partial G_1}{\partial m} \Delta m, \quad (11)$$

$$\Delta G_2 = \frac{\partial G_2}{\partial p_2} \Delta p_2 + \frac{\partial G_2}{\partial l} \Delta l. \quad (12)$$

Считаем, что профилировка окон регулирующих клапанов обеспечивает линейные характеристики, поэтому

$$\frac{\partial G_1}{\partial m} \cdot m_{\max} = G_{\max} = \frac{\partial G_2}{\partial l} \cdot l_{\max},$$

где $G_{\max}$ — максимальный расход газа при полном открытии клапанов ГРП и ГРС, т. е. при $m_{\max}$ и $l_{\max}$. Вводя, кроме этого, безразмерные переменные

$$\frac{\Delta m}{m_{\max}} = \mu \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l}{l_{\max}} = \lambda,$$

учитываем, что члены вышеприведенного равенства $\frac{\partial G_1}{\partial p_1}$ и $\frac{\partial G_2}{\partial p_2}$ характеризуют саморегулирование системы. Влияние последнего в системе в принципе мало из-за наличия критических перепадов давления газа на регулирующих клапанах ГРП и ГРС [2]. Кроме того, пренебрежение положительным саморегулированием, как известно, идет в запас устойчивости и качества работы автоматизированной системы. Следовательно, в первом приближении можно принять в уравнениях (11) и (12)

$$\frac{\partial G_1}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial p_2} = 0,$$

поэтому здесь справедливы следующие равенства:

$$\Delta G_1 = \mu \cdot G_{\max}, \quad (13)$$

$$\Delta G_2 = \lambda \cdot G_{\max}. \quad (14)$$

Далее, подставляя в уравнения (13) и (14) значения ΔG_1 и ΔG_2 из (9) и (10), после соответствующих преобразований получим: из уравнений (9) и (13)

$$\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1 \cdot c \cdot \operatorname{ch} zL - \mu \kappa_2 \cdot \operatorname{sh} zL \cdot G_{\max}}{c}, \quad (15)$$

из уравнений (11) и (14)

$$\Delta p_2 = \frac{\Delta p_1 \cdot c - \lambda \kappa_2 \operatorname{sh} zL \cdot G_{\max}}{c \cdot \operatorname{ch} zL}. \quad (16)$$

Приравнявая уравнения (15) и (16), определим величину

$$\Delta p_1 = \frac{\kappa_2 G_{\max} (\mu \cdot \operatorname{ch} zL - \lambda)}{c \cdot \operatorname{sh} zL}. \quad (17)$$

Обозначив $\frac{\Delta p_1}{p_{\max}} = \bar{\varphi}$, $\frac{L}{c} = \tau$ и подставляя в равенство (17) значения κ_2 и z , получим

$$\bar{\varphi} = \frac{c \cdot G_{\max} (\mu \cdot \operatorname{ch} \tau s - \lambda)}{p_{\max} \cdot F \cdot g \cdot \operatorname{sh} \tau s};$$

окончательно

$$\bar{\varphi} = \frac{\operatorname{ch} \tau s}{B \cdot \operatorname{sh} \tau s} \bar{\mu} - \frac{1}{B \cdot \operatorname{sh} \tau s} \bar{\lambda}, \quad (18)$$

где

$$B = \frac{p_{\max} \cdot F \cdot g}{c \cdot G_{\max}}.$$

Последнее равенство представляет собой искомую зависимость изменения относительной величины давления газа на выходе ГРС ($\bar{\varphi}$) от относительных величин перемещений штоков регулирующих клапанов в системах автоматики ГРС и ГРП ($\bar{\mu}$ и $\bar{\lambda}$) в операторной форме. Для полного решения поставленной задачи необходимо перейти от полученного изображения функции (18) к ее оригиналу.

В уравнении (18) $\bar{\varphi}$ является функцией двух переменных ($\bar{\mu}$ и $\bar{\lambda}$) а для решения поставленной задачи необходимо, чтобы она являлась

функцией одной переменной. Для реализации последнего требования вводим в анализ уравнение регулирующей аппаратуры ГРС. Полагаем последнюю оборудованной серийным изотропным регулятором типа 04, уравнение которого имеет следующий вид [1]:

$$\kappa_4 T_n \frac{dG_1}{dt} = \kappa_1 \kappa_3 \left(T_n \frac{dp_1}{dt} + p_1 \right), \quad (19)$$

где κ_3 и κ_4 — постоянные, зависящие от параметров системы; T_n — время изотропа. Подставляя в уравнение (19) регулятора вместо G_1 и p_1 их приращения, получим равенство

$$\kappa_4 T_n \frac{d\Delta G_1}{dt} = \kappa_1 \kappa_3 \left(T_n \frac{d\Delta p_1}{dt} + \Delta p_1 \right),$$

которое в операторной форме будет иметь следующий вид:

$$\kappa_4 T_n s \Delta G_1 = \kappa_1 \kappa_3 (s T_n \Delta p_1 + \Delta p_1).$$

Отсюда

$$\Delta G_1 = \frac{\kappa_1 \kappa_3 \Delta p_1 (s T_n + 1)}{\kappa_4 T_n s}.$$

Подставив полученное значение ΔG_1 в уравнение (9), получим

$$\frac{\kappa_1 \kappa_3 \Delta p_1 (s T_n + 1)}{\kappa_4 T_n s} = \frac{\Delta p_1 \cdot c \cdot \operatorname{ch} zL - \Delta p_2 \cdot c}{\kappa_2 \cdot \operatorname{sh} zL}.$$

Отсюда определим значение Δp_2 :

$$\Delta p_2 = \frac{\kappa_4 T_n \cdot c \cdot \Delta p_1 \cdot \operatorname{ch} zL - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \Delta p_1 (s T_n + 1) \operatorname{sh} zL}{\kappa_4 \cdot T_n \cdot s \cdot c}. \quad (20)$$

Приравнявая уравнения (20) и (16) и подставляя значения

$$\frac{\Delta p}{p_{\max}} = \varphi \quad \text{и} \quad zL = \tau s,$$

Окончательно получим

$$\bar{\varphi}(s) = - \frac{\kappa_2 \kappa_4 \lambda \cdot s G_{\max}}{[\kappa_4 T_n s \cdot c \cdot \operatorname{sh} \tau s - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 (s T_n + 1) \operatorname{ch} \tau s] p_{\max}}. \quad (21)$$

Или, обозначив

$$A = \kappa_4 T_n c; \quad B = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 T_n; \quad C = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3; \quad D = \kappa_2 \kappa_4 T_n G_{\max},$$

будем иметь

$$\bar{\varphi}(s) = - \frac{D \cdot \lambda \cdot s}{[A s \cdot \operatorname{sh} \tau s - B \cdot s \cdot \operatorname{ch} \tau s - C \cdot \operatorname{ch} \tau s] p_{\max}}. \quad (22)$$

Уравнение (22) соответствует отношению следующего вида:

$$\bar{\varphi}(s) = \frac{u(s)}{v(s)}.$$

Для перехода от изображения к оригиналу к этой функции применима формула разложения:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u(s_k)}{s_k v'(s_k)} \cdot e^{s_k t}.$$

Известно, что корни характеристического уравнения здесь определяются из равенства $v(s) = 0$. Определим эти корни.

Уравнение (22) может быть записано в следующем виде:

$$\varphi(s) = - \frac{D \cdot \lambda \cdot s}{[A \cdot s \cdot \operatorname{th} \tau s - B s - C] p_{\max}} = - \frac{u(s)}{v(s)},$$

где

$$u(s) = \frac{D \cdot \lambda \cdot s}{\operatorname{ch} \tau s}; \quad v(s) = [A s \cdot \operatorname{th} \tau s - B s - C] p_{\max}.$$

Приравнявая $\tau(s) = 0$, считаем, что в общем случае оператор дифференцирования есть число комплексное: $s = a + jb$. Подставив значение оператора в равенство $\tau(s) = 0$, получим

$$A(a + jb) \operatorname{th} \tau(a + jb) - B(a + jb) - C = 0$$

или

$$A(a + jb) \frac{\operatorname{tg} \tau a + \operatorname{tg} \tau b}{1 + j \operatorname{th} \tau a \cdot \operatorname{tg} \tau b} - B(a + jb) - C = 0.$$

Чтобы избавиться от мнимой части в последнем равенстве, принимаем $b = \pm \frac{\kappa \pi}{\tau}$. При этом $\operatorname{tg} \tau b = 0$; $\kappa = 0, 1, 2, 3 \dots \infty$, а само уравнение примет следующий вид:

$$j A \kappa \pi \cdot \operatorname{th} \tau a + j B \kappa \pi = 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad \operatorname{tg} \tau a = - \frac{b}{A} = -0,912; \quad \tau a = -1,54; \quad a = -1,54 \cdot 10^{-2}.$$

Следовательно, при $s = -1,54 \cdot 10^{-2} \pm j \kappa \pi \cdot 10^{-2}$ $v(s) = 0$.

Для перехода от изображения к оригиналу подставим значения коэффициентов A, B, C, D в уравнение (22) и определим функцию $u(s_k)$ и производную функцию $v'(s_k)$. Полагая изменение нагрузки потребителя равным 10%, т. е. $\lambda = 0,1$, получим:

$$u(s_k) = \frac{D \cdot \lambda \cdot s}{\operatorname{ch} \tau s_k} = 81,2 \cdot 10^7 \cdot s_k;$$

$$v'(s_k) = (A \cdot s_k \operatorname{th} \tau s_k - B s_k - C)' =$$

$$= A \cdot \operatorname{tg} \tau s_k + A s_k \frac{\tau}{\operatorname{ch}^2 \tau s_k} - B =$$

$$= 340,2 \cdot 10^7 \cdot \operatorname{tg} \tau s_k + 57,5 \cdot 10^9 \cdot s_k - 310,2 \cdot 10^7.$$

При этом оригинал рассматриваемой функции будет иметь следующий вид:

$$\varphi(t) = - \frac{81,2}{340,2 \operatorname{th} \tau s_k + 57,5 \cdot 10^2 \cdot s_k - 310,2} \cdot e^{s_k t}. \quad (23)$$

Это есть уравнение переходного процесса по параметру давления газа на выходе ГРС, связанного с изменением его расхода через ГРП. Изменяя значение коэффициента K в уравнении оператора

$$s_k = -1,54 \cdot 10^{-2} \pm j \kappa \pi \cdot 10^{-2}$$

по формуле (23), определяем закон изменения давления $\varphi(t)$ в функции времени. Для:

$$\kappa = 0, \quad \varphi_0(t) = 0,114 \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-2} \cdot t};$$

$$\kappa = 1, \quad \varphi_1(t) = [-0,215 \cos 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot t + 0,055 \sin 3,14 \cdot 10^{-2} \cdot t] \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-2} \cdot t};$$

$$\kappa = 2, \quad \varphi_2(t) = [0,1824 \cos 6,28 \cdot 10^{-2} \cdot t - 0,093 \sin 6,28 \cdot 10^{-2} \cdot t] \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-2} \cdot t}$$

$$\kappa = 3, \quad \varphi_3(t) = [-0,144 \cos 9,42 \cdot 10^{-2} \cdot t + 0,109 \sin 9,42 \cdot 10^{-2} \cdot t] \cdot e^{-1,54 \cdot 10^{-2} \cdot t};$$

$$\kappa = 4, \quad \varphi_4(t) = [0,112 \cos 12,56 \cdot 10^{-2} \cdot t -$$

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Л. Н. АЛИЕВА, К. Ш. КАГРАМАНОВ, А. З. КУЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСЕЙ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУЛЬФИДА СВИНЦА

Интерес к сульфиду свинца вызван теми особенностями в его физических свойствах, которые делают его пригодным для использования в качестве материала в фотоэлектрических и термоэлектрических преобразователях [1—2]. Влияние примесей на электрические свойства PbS изучалось авторами [2—6]. Однако во всех этих работах, кроме [3], исследовались слабо легированные соединения. В литературе нет данных по влиянию примесей: V_i , $V_i + Pb$, $V_{i2}S_3$ и $(PbCl_2 + \text{металл})$ на электрические свойства сульфида свинца.

При сравнительном изучении монокристаллических и поликристаллических образцов PbS, легированных $PbCl_2 + Pb$ [3], было показано, что в поликристаллических образцах PbS прослойки между зернами создают добавочные сопротивления, составляющие до 40% от сопротивления монокристаллов. Нам кажется, что столь сильное различие электропроводности моно- и поликристаллических образцов PbS связано с несовершенством технологии получения прессованных образцов.

Для практических целей в термопреобразователях при высоких температурах используются легированные прессованные образцы. Настоящая работа посвящена исследованию влияния V_i , $V_i + Pb$, $V_{i2}S_3$, $PbCl_2 + Pb$, $(PbCl_2 + \text{металл})$ на электрические свойства и на характер проводимости в PbS, с целью создания оптимальной концентрации носителей тока при использовании сульфида свинца в качестве материала для отрицательной ветви термоэлемента. Измерения проводились в основном на поликристаллических образцах сульфида свинца, отожженных при 900°K. Стехиометрические соединения PbS (табл. 1) отжигались при 600°K.

На свойства PbS сильно влияет отклонение от стехиометрии, а также предварительная термическая обработка [6]. В табл. 1 приведены параметры PbS, полученные непосредственно сплавлением исходных компонентов при использовании серы различной чистоты и свинца марки СВ. Как видно из таблицы, столь высокую концентрацию носителей тока в образце № 1, изготовленном из технической серы, приходится приписать влиянию примесей, имеющих в неочищенной сере. Образцы, полученные с использованием спектрально чистой серы, также имеют высокую концентрацию носителей тока ($n = 2,1 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ электронов), их состав далек от стехиометрического сульфида свинца.

Таблица 1

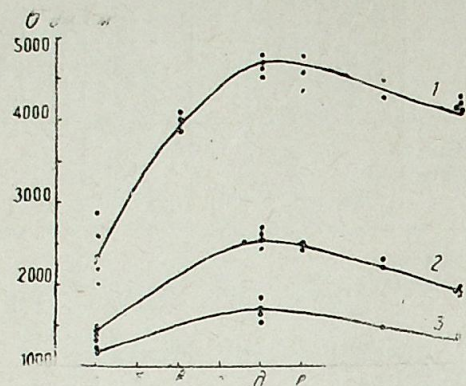
№ образца	Вид образца	Электропроводность, σ (ом ⁻¹ ·см ⁻¹)	α , д. с., а. мкв ⁻¹ ·С	Конц. носителей по Холлу, n (см ⁻³)	Подвижность μ $\frac{\text{см}^2}{\text{В} \cdot \text{сек}}$
1	Поликристаллические образцы, полученные с использованием технической серы	400	—190	$8,1 \cdot 10^{18}$	460
2	Поликристаллические образцы, полученные с использованием серы марки В ₂	320	—218	$5,6 \cdot 10^{18}$	480
3	Поликристаллические образцы, полученные с использованием серы марки В ₃	160	—280	$2,1 \cdot 10^{18}$	560
4	Монокристаллические образцы, полученные с использованием серы марки В ₃	180	—282	$2,1 \cdot 10^{18}$	620
5	Поликристаллические образцы, полученные из порошка, с использованием раствора тиомочевины	1	+520	$5 \cdot 10^{16}$	200

Для получения чистого PbS, близкого к стехиометрическому составу, нами был использован новый метод, предложенный в работе [7], автором которой для осаждения PbS была применена тиомочевина и определены условия количественного осаждения Pb с образованием крупнокристаллического осадка PbS. Из полученного порошка методом порошковой металлургии готовились образцы, параметры одного из них приведены в табл. 1 (№ 5). Изготовленные образцы обладали p-типом проводимости (свинец и сера вводились в реакцию в атомном отношении 1:1). Сернистый свинец, полученный методом осаждения из раствора при комнатной температуре, месяцами не поглощает кислорода [3]. Нами он был использован как исходный для введения примесей свинца.

Выбор примесей $PbCl_2 + Pb$, $(PbCl_2 + \text{металл})$ не был случайным. В 1954 г. Бребрик и другие изучали влияние хлористого свинца на электрические свойства PbTe [5], они показали, что наиболее надежной донорной примесью, при помощи которой можно значительно увеличить концентрацию свободных электронов, является двойная примесь вида $PbBr_2$ (или $PbCl_2$, PbJ_2) + избыток свинца, при достаточном количестве которого соотношение между числом введенных атомов галогенов и числом полученных носителей электричества близко к единице. Образцы, приготовленные по этому способу, имеют большие абсолютные значения подвижности электронов. Этот метод легирования PbTe оказался наиболее перспективным и им в настоящее время пользуются почти во всех лабораториях мира.

Нами было изучено влияние хлористого свинца на электрические свойства поликристаллического PbS. Установлено, что электропроводность сульфида свинца сильно зависит от величины среднего размера зерна, из которого прессуется образец. На рисунке представлена зависимость электропроводности PbS, легированного хлористым свин-

пом (кривые 1 и 2), от величины прессуемого зерна. Нами была выбрана оптимальная величина зерна ($0,1 < d < 0,3$ мм), при которой электропроводность PbSn-типа имела значение, близкое к монокристаллическому образцу, полученному в работе [4]. Аналогичная картина наблюдается также на образцах p -типа PbS (рис., кривая 3). При величине зерна меньше 0,05 мм и больше 0,4 мм электропроводность и подвижность PbS n -типа имели значения, отличающиеся от таковых у монокристаллических образцов [4] (для тех же концентраций) на 30–50%.



Влияние величины на электропроводность сульфида свинца: 1— $n = 2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ и 2— $n = 3,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ (для $n = \text{PbS}$); 3— $p = \text{PbS}$.

Цифры у оси абсцисс соответствуют интервалам величины зерна (в мм): а— $0,1 < d < 0,05$; б— $0,05 < d < 0,1$; в— $0,1 < d < 0,25$; г— $0,25 < d < 0,3$; д— $0,3 < d < 0,4$.

Полученные нами значения электропроводности и подвижности (табл. 2) прессованных образцов PbS (величина зерна $0,1 < d < 0,3$ мм), легированных хлористым свинцом, разнятся от монокристаллических (полученных в работе [4]) в пределах 8–15%. Таким образом, при сплавлении сульфида свинца с PbCl_2 параметры образцов изменяются только при добавлении избытка свинца. Нами исследовалось также влияние избытка других металлов при введении примеси PbCl_2 . В табл. 3 представлены результаты этих экспериментов. В сульфид свинца вводились хлор ($3 \cdot 10^{19}$ атомов в 1 см^3) и тот металл, действие которого мы изучали. Такие элементы, как Mg, Sn, Ge, Fe, Ni, действуют на электрические свойства PbS подобно свинцу. Далее идет группа металлов, сильно снижающих электропроводность сернистого свинца, содержащего галоид. Эти элементы являются акцепторными примесями. Действие висмута на наиболее чистый PbS показано в табл. 4. По-видимому, висмут, как и галоиды, на каждый введенный атом дает один свободный электрон. Однако значение электропроводности и подвижности PbS при этом меньше, чем в случае примесных галоидов. Причиной, по-видимому, может являться частичное образование Bi_2S_3 . Если то же количество

Таблица 2

Влияние хлористого свинца на параметры сульфида свинца ($T = 300^\circ \text{K}$)

№ образца	Число атомов введенного хлора и свинца в см^{-3}	Электропроводность, σ ($\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$)	Т. э. д. с., α мкв/°С	Подвижность поликристаллических образцов, μ ($\text{см}^2/\text{в-сек}$)	Конц. электронов по Холлу, n (см^{-3})
7	$2 \cdot 10^{19}$	930	—141	600	$1,4 \cdot 10^{19}$
8	$3 \cdot 10^{19}$	1550	—108	480	$2,6 \cdot 10^{19}$
9	$5 \cdot 10^{19}$	2200	—75	400	$6,4 \cdot 10^{19}$
10	$8 \cdot 10^{19}$	3400	—52	357	$8,2 \cdot 10^{19}$
11	$1 \cdot 10^{20}$	3606	—44	305	$9,2 \cdot 10^{19}$
12	$2 \cdot 10^{20}$	4400	—33	210	$1,4 \cdot 10^{20}$
13	$3 \cdot 10^{20}$	4760	—29	180	$2,4 \cdot 10^{20}$
14	$4 \cdot 10^{20}$	4750	—28	160	$2,5 \cdot 10^{20}$

Таблица 3
Влияние металлов на параметры PbS, легированного хлором при $T = 300^\circ \text{K}$

№ образцов	Металл	Конц. добавленного металла, N (см^{-3})	Концентрация хлора $N_{\text{Cl}} = 3 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$		
			Электропроводность, σ ($\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$)	Т. э. д. с., α (мкв/°С)	Конц. носителей тока, n (см^{-3})
1	Pb	$3 \cdot 10^{19}$	1500	—106	$2,6 \cdot 10^{19}$
2	Mg	$3 \cdot 10^{19}$	1390	—108	$2,5 \cdot 10^{19}$
3	Sn	$3 \cdot 10^{19}$	1460	—103	$2,7 \cdot 10^{19}$
4	Ge	$3 \cdot 10^{19}$	1480	—107	$2,5 \cdot 10^{19}$
5	Fe	$3 \cdot 10^{19}$	1330	—109	$2,4 \cdot 10^{19}$
6	Ni	$3 \cdot 10^{19}$	1300	—104	$2,6 \cdot 10^{19}$
7	Cd	$3 \cdot 10^{19}$	15	+186	$4 \cdot 10^{18}$
8	Zn	$3 \cdot 10^{19}$	60	+180	$3 \cdot 10^{18}$
9	Sb	$3 \cdot 10^{19}$	980	—90	$3,1 \cdot 10^{19}$
10	Bi	$3 \cdot 10^{19}$	2080	—82	$3,3 \cdot 10^{19}$
11	Al	$3 \cdot 10^{19}$	160	+70	—
12	In	$3 \cdot 10^{19}$	240	+80	—
13	Ga	$3 \cdot 10^{19}$	150	+76	—
14	Te	$3 \cdot 10^{19}$	35	+410	—
15	Na	$3 \cdot 10^{19}$	180	+170	—
16	Cu	$3 \cdot 10^{19}$	1,5	+480	—

висмута добавить в PbS в виде Bi_2S_3 , электропроводность уменьшается (обр. № 5–6, табл. 4).

Таблица 4

№ образца	Примесь	Конц. атомов Bi в 1 см^3	Конц. атомов Pb в 1 см^3	Электропроводность, σ ($\text{ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$)	Т. э. д. с., α мкв/°С	Подвижность μ ($\text{см}^2/\text{в-сек}$)	Конц. носителей тока, n (см^{-3})
1	Bi	$9 \cdot 10^{18}$	—	350	—198	396	$7,4 \cdot 10^{18}$
2	Bi	$3 \cdot 10^{19}$	—	1200	—104	326	$2,1 \cdot 10^{19}$
3	Bi	$2 \cdot 10^{20}$	—	1750	—71	280	$3,6 \cdot 10^{19}$
4	Bi_2S_3	$2,1 \cdot 10^{19}$	—	45	—90	—	—
5	Bi_2S_3	$2,2 \cdot 10^{20}$	—	115	—112	—	—
6	$\text{Bi} + \text{Pb}$	$2 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{19}$	1400	—102	400	$1,0 \cdot 10^{19}$
7	$\text{Bi} + \text{Pb}$	$8 \cdot 10^{19}$	$8 \cdot 10^{19}$	2000	—76	320	$5,8 \cdot 10^{19}$
8	$\text{Bi} + \text{Pb}$	$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{20}$	3100	—45	200	$0,8 \cdot 10^{20}$
9	$\text{Bi} + \text{Pb}$	$2 \cdot 10^{20}$	$2 \cdot 10^{20}$	3500	—41	105	$1,1 \cdot 10^{20}$
10	$\text{Bi} + \text{Pb}$	$3 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{20}$	3520	—40	100	$1,1 \cdot 10^{20}$

Следует отметить, что концентрацию носителей тока удается увеличить от $3,6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ до $1,1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ только при введении висмута с избытком свинца.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Все примеси по характеру действия их на знак проводимости сернистого свинца можно разделить на три группы:

- 1) донорные примеси—элементы V и VII групп периодической таблицы (Sb, Bi, Cl, Br, J);
- 2) акцепторные примеси—элементы I, II и III групп периодической таблицы (Na, Cu, Zn, Cd, Al, Ga, Te);

3) примеси, влияние которых аналогично влиянию избыточного свинца—Mg, Sn, Ge, Fe, Ni—элементы, находящиеся в IV и VIII группах таблицы Менделеева.

По отношению к отступлениям от стехиометрического состава сульфид свинца ведет себя так же, как и ионные кристаллы; избыток свинца обуславливает электронную проводимость, сера-дырочную [6]. Однако предел растворимости свинца в данном случае ограничен ($<0,1\%$), поэтому отступлениями от стехиометрии не удастся создать в материале концентрацию носителей тока выше 10^{19} см^{-3} .

Изменять концентрацию носителей в широком интервале (до $3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$) в сернистом свинце удастся только введением двойной примеси, например, хлора и избытка свинца, а также висмута и избытка свинца. Введение одного хлористого свинца, по-видимому, может сопровождаться образованием вакантных мест в кристаллической решетке, уменьшающих подвижность носителей электричества. Свинец, если он имеется в избытке, занимает вакантное место катиона и при сохранении нейтральности два электрона могут быть свободными. Каждому введенному атому хлора соответствует один электрон в зоне проводимости при избытке свинца. Так же можно представить влияние висмута. Если металлический висмут сплавляется с PbS, он занимает место свинца и один из пяти валентных электронов висмута освобождается. Если висмут вводить в виде Bi_2S_3 , то при внедрении этого соединения в решетку PbS образуется вакантное место из-под катиона. Как видно, из табл. 4, это опять-таки ведет к сильному уменьшению подвижности электронов и электропроводности. При избытке свинца висмут может отдать электрон в зону проводимости, но внедрение свинца на вакантное место здесь, по-видимому, не так легко осуществляется, как в случае галогидных примесей.

В работе [9] с теллуристым свинцом установлено, что и у этого аналога сульфида свинца наблюдается аналогичная картина. Таким образом, сульфид свинца ведет себя аналогично ионным соединениям: замена любой из компонент элементом с большим числом валентных электронов, т. е. серы одним из галогенов или свинца металлом V группы, создает электронную проводимость. При замене свинца металлом, принадлежащим к левой половине периодической системы, появляется соответствующее число дырок.

При использовании сульфида свинца в качестве материала для отрицательной ветви термоэлемента целесообразнее создавать оптимальную концентрацию носителей тока путем частичного замещения серы галогеном (Cl), чем путем замещения свинца элементом V группы (Bi), так как в первом случае подвижность электронов выше, чем во втором (сравним табл. 2 и 4). При этом предполагается [10], что хлор является примесью замещения и занимает в решетке место серы, а висмут, являясь примесью замещения, занимает место свинца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lummis F. L., Petritz R. L. Phys. rev., p. 502, 105, 1957.
2. Telkes M. J. appl. phys., 18, 1116, 1947.
3. Ненсберг Е. Д. ДАН СССР, 160, № 4—6, 1965.
4. Ненсберг Е. Д. Изв. АН СССР, т. 2, 1965, № 3.
5. Brebrik R. F. Phys. rev., p. 593, 96, 1954.
6. Bloem I., Kröger F. A., Vink H. J. Report of conference on Defects in crystalline Solids, p. 273, Berlin, 1954.
7. Угай Я. А. Введение в химию полупроводников. Изд-во „Высшая школа“, 1965.
8. Фриттше К. Получение полупроводников. Изд-во „Мир“, 1964.
9. Wagner C. J. Chem. Phys. p. 151, 13, 1950.
10. Bloem J., Kröger F. A. Report of Meeting on Semiconductors, April, p. 77, 1956.

Ч. О. КАДЖАР, Л. М. ИМАНОВ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВТОРИЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ

Неточность структуры молекул, найденная радиоспектроскопическим методом, в основном получается за счет влияния нулевых колебаний. При определении структуры методом Крайчмана [1] этот эффект уменьшается и, как показал Костейн [2], он может быть сведен к минимуму, если координаты всех атомов исследуемой молекулы найдены из уравнений Крайчмана (r_s —структура). Однако в случае, когда замещающий атом близок к главной оси, эти уравнения также дают большую погрешность при определении координаты.

Костейн [2] проанализировал много молекул методом Крайчмана и нашел, что результаты оказываются верными, когда атомы удалены от главной оси приблизительно на 0,15 Å и больше. Пирс предложил и проверил метод вторичных разностей главных моментов инерции для нахождения координат атомов, расположенных близко к главной оси [3]. Для использования метода вторичных разностей моментов инерции необходимо большое количество экспериментальных данных, так как этот метод требует наличия моментов инерции дважды изотопически замещенных молекул. Поэтому до сих пор этот метод был применен всего лишь к нескольким молекулам и представляет большой интерес применение его к какой-либо новой молекуле. В работе Кришера и Пирса [4] исследованы две молекулы типа асимметричного волчка: $\text{CH}_3\text{SiH}_2\text{F}$ и CH_3SiHF_2 , у которых атомы кремния лежат ближе, чем 0,02 Å к главной оси.

Имея много экспериментальных данных для различных изотопических разновидностей молекулы этилового спирта, мы воспользовались выражениями, выведенными в этой работе, для уточнения координаты а атомов водорода метиленовой группы молекулы этилового спирта. Определенная методом Крайчмана эта координата оказалась равной 0,079 Å. Для определения ее методом вторичных разностей было взято четыре изотопозамещенных образца молекулы этилового спирта: $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, $\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$, $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$, главные моменты инерции приведены в табл. 1.

Для того, чтобы имеющиеся данные можно было использовать в методе вторичных разностей, все молекулы приводятся к молекулам, у которых два атома метиленовой группы замещены одним атомом с удвоенной массой $2m$, расположенным в плоскости симметрии (плос-

Таблица 1

Образец	I_a	I_b	I_c
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}[5]$	14,4889	54,0629	62,1427
$\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}[6]$	18,9573	55,6642	65,0291
$\text{D}_3\text{CH}_2\text{OH}[7]$	17,7437	63,1991	71,3516
$\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}[8]$	22,3278	64,8549	74,4227

кость a , b) и имеющим те же координаты a и b , что и атомы метиленовой группы. В табл. 2 даются приведенные моменты инерции I_a^* и I_b^* таких молекул, полученные вычитанием величины $2m_H c^2$ из значений моментов инерции I_a и I_b , приведенных в табл. 1, и значения моментов I_c , оставшихся без изменения.

Таблица 2

Образец	I_a^*	I_b^*	I_c
$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$	12,9001	52,4740	62,1427
$\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$	15,7781	52,4889	65,0291
$\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	16,1549	61,6103	71,3516
$\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$	19,1526	61,6797	74,4227

Координата b определялась обычным образом из уравнения Крайчмана. Координата же a находилась в следующей последовательности. Определялись разности моментов инерции:

$$\Delta I_b^*(\text{CH}_3) = I_b^*(\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}) - I_b^*(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}),$$

$$\Delta I_b^*(\text{CD}_3) = I_b^*(\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}) - I_b^*(\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}).$$

Разность $\Delta I_b^*(\text{CH}_3)$, используя уравнения Крайчмана, можно записать так:

$$\Delta I_b^*(\text{CH}_3) = \mu a^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\Delta I_a^*(\text{CH}_3)}{I_a^* - I_b^*} \right] \right\}^{-1} = k a^2,$$

где I_a^* , I_b^* — главные моменты инерции молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$; $\mu = \frac{M \Delta m}{M + \Delta m}$; M — масса молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, а $\Delta m = M(\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}) - M(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH})$; a — координата атома водорода в системе главных осей молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$. Такое же выражение получается и для разности $\Delta I_b^*(\text{CD}_3)$:

$$\Delta I_b^*(\text{CD}_3) = \mu' (a')^2 \left\{ 1 + \left[\frac{\Delta I_a^*(\text{CD}_3)}{I_a^* - I_b^*} \right] \right\}^{-1} = k' (a')^2,$$

где I_a^* , I_b^* — главные моменты инерции молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$; $\mu' = \frac{\Delta m'}{M' + \Delta m'}$; M' — масса молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, а $\Delta m' = M'(\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}) - M'(\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH})$ и a' — координата атома водорода в системе главных осей молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

Координаты a' , b' и a , b связаны между собой простым преобразованием от координатной системы молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ к системе молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$:

$$a' = (a - A) \cdot \cos \theta - (b - B) \sin \theta;$$

$$b' = (a - A) \sin \theta + (b - B) \cos \theta,$$

где A и B — координаты центра тяжести молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ в системе главных осей молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и θ — угол вращения от системы координат молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ к координатной системе молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

Кроме того ясно, что

$$a' = a \cos \theta + c,$$

где c — величина, которую легко рассчитать. Теперь вторичная разность главных моментов инерции I_b^* оказывается связанной очень простым выражением с координатой a атома водорода:

$$\begin{aligned} \Delta I_b^* &= \Delta I_b^*(\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}) - \Delta I_b^*(\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}) = k'(a')^2 - k a^2 = \\ &= (k' \cos^2 \theta - k) a^2 + (2k' \cdot c \cdot \cos \theta) a + k' c^2. \end{aligned}$$

В табл. 3 приведены значения величин k , k' , c и разностей моментов инерции.

Таблица 3

Параметр	
$\Delta I_b^*(\text{CH}_3)$	0,0150
$\Delta I_b^*(\text{CD}_3)$	0,0694
$\Delta \Delta I_b$	0,0544
K	2,0802
K'	2,0704
C	-0,1144
$\cos \theta$	0,996

Рассчитанная по этим значениям координата a атомов водорода метиленовой группы молекулы этилового спирта оказалась равной $-0,0575 \text{ \AA}$, что на $0,0215 \text{ \AA}$ меньше значения, найденного из уравнения Крайчмана, и явно превышает ошибку измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kraitichman J. Am. J. phys., 21, 17, 1953.
2. Costain C. C. T. Chem. Phys., 29, 864, 1958.
3. Pierce L. J. Mol. Spectroscopy, 3, 575, 1959.
4. Krisher L. C., Pierce L. J. Chem. Phys., 32, 1619, 1960.
5. Иманов Л. М., Каджар Ч. О., Исаев И. Дж. „Оптика и спектроскопия“, 18, 344, 1965.
6. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Оптика и спектроскопия“, 17, 366, 1964.
7. Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 3, 103, 1964.
8. Иманов Л. М., Каджар Ч. О., Исаев И. Дж. „Оптика и спектроскопия“, 18, 904, 1965.

Ч. О. Гачар, Л. М. Иманов

Баш эталэт моментлэринин ики тэртибли фэрги
методунун тэтбиги

ХҮЛАСЭ

Пирс методуна эсасэн $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, $\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$, $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ вэ $\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$ молекулларынын баш эталэт моментлэринин ики тэртибли фэргиндэн истифадэ едэрэк, этил спирти молекулунун баш охларындан биринэ јахын олан метилен группундакы гидроген атомларынын координатлары дэтиглэшдирилмишдир.

И. А. МУХТАРОВ, Р. И. МУХТАРОВ, Э. И. МУХТАРОВ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ СТРУКТУРА 1, 1, 2-ТРИФТОРЕТАНА

Исходя из шахматного расположения атомов для молекулы 1, 1, 2-трифторэтана можно ожидать наличия трех изомерных конфигураций. Проекция расположения атомов в устойчивых конфигурациях на плоскости, перпендикулярной оси $C-C$, иллюстрирует рис. (а, б, в). Конфигурация $\alpha = 0$ (рис. а) молекулы 1, 1, 2-трифторэтана полностью определяется двенадцатью параметрами. При переходе из $\alpha = 0$ в свернутую конфигурацию $\alpha = \pm 120^\circ$ (рис. б, в) симметричные в группах атомы H_1 и H_2 в группе FH_2C и F_2 и F_3 в группе F_2HC подвергаются (вследствие неодинакового расположения относительно противоположной для каждой из них групп) различным влияниям со стороны атомов этих групп. Поэтому можно ожидать появления незначительного (вследствие малости взаимодействия несвязанных атомов) отклонения от плоскостей симметрии в группах, и для полного определения свернутой конфигурации молекулы необходимо восемнадцать параметров.

Информация, которой мы располагали и которая может быть использована в качестве необходимых условий для нахождения структуры молекулы, представляет собой вращательные постоянные молекул F_2HC-CH_2F , $F_2HC-CHDF$, $F_2DC-CHDF$, $F_2DC-CDF$ для $\alpha = \pm 120^\circ$ и $\alpha = -120^\circ$ [1 ÷ 4]. Однако из этих величин независимыми являются лишь двенадцать. Действительно, разницa при повороте одной из групп относительно другой на $+\alpha$ или $-\alpha$ заключается (в случае нашей молекулы) лишь в обмене одинаковых атомов (F_2-F_3) или H_2-H_1 местами. Подобная перестановка, являющаяся зеркальным отображением относительно плоскости симметрии в группах, не дает какой-либо новой информации о конфигурации молекулы.

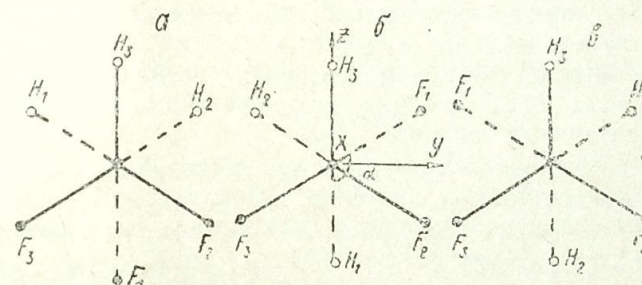
Таким образом, по имеющимся данным мы не можем полностью определить структуру молекулы. Для нахождения неполной (частичной) или приближенной структуры возникает необходимость введения какого-либо допущения или приближенного задания некоторых параметров. Анализ возникающей ситуации показал, что оптимальным для приближения является допущение существования плоскости симметрии в группах, отклонения от которой затем могут быть оценены из приближенных расчетов и учтены при определении ошибок к найденным структурным параметрам.

Выбор системы координат и параметризация молекулы представлены на рис. б и в табл. 1.

В качестве двенадцати условий для определения двенадцати приведенных в таблице параметров могли бы служить инварианты тензо-

		Т а б л и ц а 1		
АТОМ	X_i	X	Y	Z
F_1		$X_c + X_{F_1}$	$Z_{F_1} \cdot \sin \alpha$	$- Z_{F_1} \cdot \cos \alpha$
H_1		$X_c + X_{H_{1,2}}$	$- Z_{H_{1,2}} \cdot \sin \alpha - Y_{H_{1,2}} \cdot \cos \alpha$	$Z_{H_{1,2}} \cdot \cos \alpha - Y_{H_{1,2}} \sin \alpha$
H_2		$X_c + X_{H_{1,2}}$	$Y_{H_{1,2}} \cdot \cos \alpha - Z_{H_{1,2}} \cdot \sin \alpha$	$Y_{H_{1,2}} \cdot \sin \alpha - Y_{H_{1,2}} \cdot \cos \alpha$
F_2		$- X_c - X_{F_{2,3}}$	$Y_{F_{1,2}}$	$- Z_{F_{1,2}}$
F_3		$- X_c - X_{F_{2,3}}$	$- Y_{F_{1,2}}$	$- Z_{F_{1,2}}$
H_3		$- X_c - X_{H_3}$	0	$- Z_{H_3}$
C_1		X_c	0	0
C_2		$- X_c$	0	0

ров инерции указанных выше молекул. Однако при таком подходе затруднительно провести какой-либо учет влияния эффективности вращательных постоянных; малое же различие масс в этих молекулах



Проекция расположения атомов в устойчивых конфигурациях на плоскости, перпендикулярной оси $C-C$.

и высокий порядок уравнений делают систему близкой к вырождению, что существенно затрудняет решение задачи и приводит к большим ошибкам в определении переменных. Поправки на эффективность вращательных постоянных в настоящей задаче сводятся к возможному минимуму, если в качестве условий использовать девять координат атомов водорода, полученных методом изотопических замещений $H \rightarrow D$ по формулам Крайчмена [5], и три момента инерции исходной изотопической разновидности (F_2HC-CH_2F).

Из имеющихся в наличии вращательных постоянных различных изотопических разновидностей и их изомеров можно выбрать пять различных комбинаций для определения координат атомов водорода в главных осях инерции исходной изотопической разновидности. Определенные из этих комбинаций координаты атомов водорода обнаруживают относительно большие различия. Главным образом это вызвано, по-видимому, влиянием крутильных колебаний и внутреннего враще-

ния, так как эти движения подвергаются заметному изменению при замене Н на D. На это указывает, в частности, заметное различие между разностями эффективных вращательных постоянных основного и первого возбужденного крутильного состояния для молекул F_2HC-CH_2F , $F_2HC-CHDF$ ($\alpha = \pm 120^\circ$) и $F_2HC-CHDF$ ($\alpha = -120^\circ$).

Другой причиной, существенной для малых по абсолютной величине координат, являются экспериментальные ошибки в измерении вращательных постоянных. Оценки вращательно-колебательного взаимодействия в одномодовом приближении, которым приходится ограничиться вследствие недостаточной информации, не позволяют улучшить положения. Поэтому для определения структуры использовались средние по различным вариантам значения координат атомов водорода, которые приведены в табл. 2. Здесь же приведены абсолютные ошибки в определении координат атомов водорода.

Таблица 2

	H ₁	H ₂	H ₃	$\delta_{H_1, \alpha}$	δ_{H_2}	δ_{H_3}
X	0,6883	0,8431	0,3720	0,0055	0,0003	0,0073
Y	0,5337	1,6870	0,0868	0,0035	0,0009	0,0175
Z	1,4138	0,1015	1,4262	0,0151	0,0185	0,0012

Задача решалась с использованием стандартной программы минимизации квадратичного функционала методом итераций [5]:

$$F = \sum_{\alpha=a,b,c} (1 - I_{\alpha\alpha} / I_{\alpha\alpha}^0)^2 / \sigma_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha} (r_{A\alpha} - r_{A\alpha}^0)^2 / \sigma_{A\alpha}^2.$$

Здесь $I_{\alpha\alpha}$ — вычисленные по структурным параметрам моменты инерции относительно α -ой главной оси; $I_{\alpha\alpha}^0$ — экспериментально определенные эффективные моменты инерции; аналогично $r_{A\alpha}$ — вычисленные, $r_{A\alpha}^0$ — определенные по формулам Крайчмена координаты замещенных атомов в главных осях инерции исходной изотопической разновидности. Относительные ошибки σ_{α} для I_a , I_b , I_c полагались равными 10^{-3} , исходя из сравнения вращательных постоянных основного и возбужденного колебательных состояний молекулы F_2HC-CH_2F .

Получены следующие значения для углов и длин связей:

$C-C = 1,522 \pm 0,008 \text{ \AA}$	$\angle H_1CC = \angle H_2CC = 110^\circ \pm 2'30''$
$C-F_{2,3} = 1,35 \pm 0,01 \text{ \AA}$	$\angle F_3CC = \angle F_2CC = 109^\circ \pm 1'30''$
$C-F_1 = 1,37 \pm 0,01 \text{ \AA}$	$\angle H_3CC = 110^\circ 40' \pm 1^\circ$
$C-H_{1,2} = 1,08 \pm 0,013 \text{ \AA}$	$\angle H_1CH_2 = 109^\circ 10' \pm 1^\circ$
$C-H_3 = 1,11 \pm 0,016 \text{ \AA}$	$\angle F_2CF_3 = 110^\circ 5' \pm 1^\circ 30''$
$\angle F_1CC = 110^\circ \pm 1^\circ$	$\alpha = 127^\circ 10' \pm 50''$

Для оценки отклонения от плоскостей симметрии в группах решалась „строгая“ задача по определению восемнадцати структурных параметров в предположении, что координаты атомов углерода в главных осях инерции равны вычисленным по вышеприведенным структурным параметрам. Результаты показали, что наибольшим отклонениям подвержены $\angle H_1CC$ и $\angle H_2CC$ и длины связей CH_1 и CH_2 . Однако отклонения структурных параметров от плоскостей симметрии лежат в пределах приведенных выше ошибок.

Используя матрицу поворота к главным осям инерции, вычисленную по структурным параметрам, и компоненты дипольного момента на главные оси инерции свернутого изомера молекулы 1, 1, 2-трифторэтана, находим компоненты дипольного момента μ_x , μ_y , μ_z в системе

координат, выбор которой показан на рис. б. Предполагая, что дипольные моменты групп CH_2F и CHF_2 лежат в плоскостях симметрии этих групп, по величинам μ_y , μ_z находим проекции дипольных моментов групп на плоскость, перпендикулярную связи $C=C$:

$$d_{CH_2F}^\perp = 1,66 \pm 0,04 D \text{ и } d_{CHF_2}^\perp = 1,63 \pm 0,04 D.$$

Вычисленные по этим данным проекции дипольного момента изомера $\alpha = 0$ и $\sum \mu_i^2$ приведены в табл. 3, там же приведены соответствующие величины для свернутого изомера.

Таблица 3

μ_i	$\alpha \approx 120^\circ$	$\alpha = 0^\circ$
μ_x	$-0,67 \pm 0,02 D$	$-0,67 \pm 0,02 D$
μ_y	$1,32 \pm 0,12 D$	0
μ_z	$-0,62 \pm 0,02 D$	$-3,29 \pm 0,08 D$
$\sum \mu_i^2$	$2,59 \pm 0,02 D^2$	$11,28 \pm 0,15 D^2$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухтаров И. А. ДАН СССР, 151, 1076, 1963.
2. Мухтаров И. А. Оптика и спектроскопия, 14, 728, 1963.
3. Мухтаров И. А. ДАН СССР, 143, 566, 1963.
4. Мухтаров И. А. Оптика и спектроскопия, 16, 360, 1964.
5. Kraitchman I. Amer. J. Phys., 21, 17, 1953.
6. Соколов С. Н., Силин И. Н. Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации. Дубна, 1961.

И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров, Е. И. Мухтаров

1, 1, 2-үчфторлуетан молекулунун гурулушу

ХҮЛАСЭ

F_2HC-CH_2F , $F_2HC-CHDF$, $F_2DC-CHDF$ вэ F_2DC-CD_2F молекулларынын фырланма сабитлэриндэн истифадэ едэрэк, 1, 1, 2-үчфторлуетан молекулунун атомларарасындакы мөсәфэлэрин вэ бучагларын гижмэтлэри тапылмышдыр. Бу һесабламада F_2HC —вэ CH_2F группларында симметриклик олдуғу нәзәрдә тутулур. һесаблама электрон һесаблаҗычы машинлар васитәсилә апарылмышдыр.

В. А. ИВАНОВА, Г. М. АЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСЕЙ ХРОМА НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО И ЖИДКОГО СЕЛЕНА

Как известно, электрические свойства селена чувствительны к количеству и качеству введенных примесей. В настоящее время накоплен ряд экспериментальных данных по исследованию влияния как металлических, так и неметаллических примесей на свойства селена. Отсутствие селена высокой чистоты и обескислороженного селена не позволяет сделать общего вывода о роли примесей в селене.

В последнее время внимание исследователей стали привлекать образцы, легированные переходными элементами, атомы и ионы которых в изолированном состоянии имеют незаполненные внутренние электронные уровни. Переходные элементы в диэлектрической среде должны создавать глубоколежащие уровни. В связи с этим представляет интерес изучение влияния примеси хрома на явления переноса в селене.

В данной статье приводятся результаты влияния примеси хрома (Cr) на электропроводность кристаллического и жидкого селена в широком интервале температур, включая и область плавления, а также на процесс кристаллизации. Подобные исследования дадут возможность выяснить роль кислорода, его состояние и взаимодействие с примесями в селене, сделать определенные выводы относительно изменения характера химической связи при плавлении и последующем нагреве селена. С другой стороны, такие исследования помогут в дальнейшем заменить быстроулетучивающиеся галоидные примеси в селеновых выпрямителях металлическими.

Для изучения влияния хрома были изготовлены образцы, содержащие различные количества примесей: 0,01; 0,1; 0,25; 0,5; 2 ат. % Cr. Они изготовлялись сплавлением смеси селена и хрома в определенных весовых отношениях при 900°C и 10-часовой выдержке в вакууме порядка 10^{-4} мм рт. ст. При этом происходит также процесс обескислороживания селена. Как известно, все возможные неустойчивые соединения Se с кислородом (Se_3O_4 и Se_2O_4) переходят в SeO_2 . Двуокись селена при высоких температурах обладает малой растворимостью в Se [11], поэтому она в основном находится над жидкостью в парообразной фазе. При быстром охлаждении ампулы SeO_2 конденсируется на ее стенках, т. е. происходит частичное обескислороживание Se.

Результаты исследования влияния примеси хрома на σ селена представлены на рис. 1, который показывает изменение электропровод-

ности селена марки В₅ в зависимости от процентного содержания хрома. Значение σ чистого селена численно равно $5,6 \cdot 10^{-6}$ ом⁻¹, см⁻¹, т. е. на два порядка меньше, чем у обычного, что связано с уменьшением концентрации дырок, созданных кислородом в результате частичного обескислороживания при 900°C в течение 10 часов. Как видно, даже при частичном обескислороживании с увеличением содержания примеси хрома до 0,1% электропроводность возрастает и при 0,1% Cr достигает максимума, а при дальнейшем увеличении концентрации хрома σ падает.

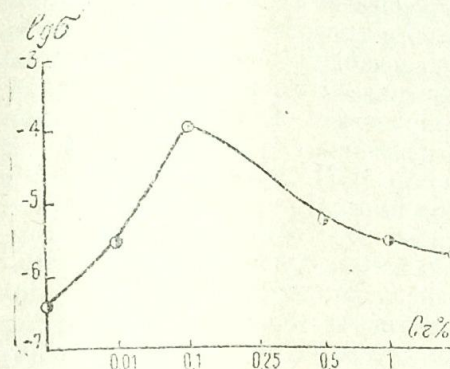


Рис. 1. Зависимость $\lg \sigma$ селена от концентрации хрома.

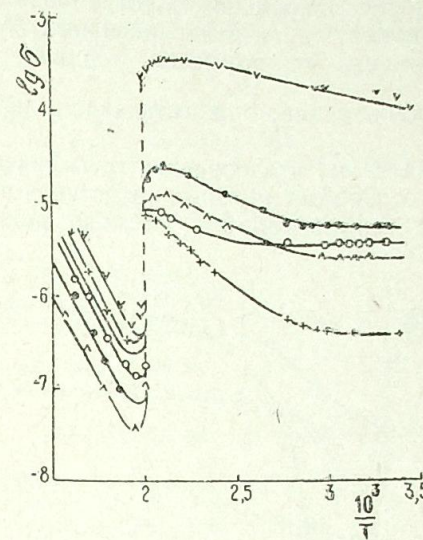


Рис. 2. Зависимость $\lg \sigma$ от T : $\circ$ — чистый селен; $\bullet$ — селен с 0,1% хрома; $\triangle$ — с 0,25%; $\square$ — с 0,5%; $\times$ — с 1%.

Изменение σ селена с примесью Cr можно объяснить следующим образом. Металлические примеси в необескислороженном селене, образуя комплексы с кислородом, компенсируют его действие и уменьшают концентрацию носителей тока, а следовательно и σ . После обескислороживания вероятность образования таких комплексов уничтожается и примеси Cr, подобно другим металлам, создавая глубоколежащие уровни, увеличивают σ селена. На рис. 2 представлена температурная зависимость средних значений σ селена с примесями Cr в интервале 20—450°, включая область плавления, как видно, σ селена обработанного при 900°C, растет с температурой.

Электропроводность всех образцов, содержащих примеси хрома, имеет полупроводниковый ход, т. е. растет с температурой, что объясняется ионизацией примесных центров, создаваемых примесью хрома. При плавлении во всех образцах σ уменьшается скачком. Для чистого

селена отношение $\frac{\sigma_r}{\sigma_{ж}}$ составляет 120 (где σ_r — электропроводность

образца при 218°C, $\sigma_{ж}$ — после плавления), что еще раз свидетельствует о частичном обескислороживании, так как величина скачка σ необескислороживания селена марки В₅ порядка ~ 2000 раз, после обескислороживания скачкообразное изменение σ при плавлении исчезает и восстанавливается после окислороживания [12].

Величина скачки σ в зависимости от примеси Cr изменяется от 180 до 1600 раз. Уменьшение σ селена при плавлении связано, во-первых, с ослаблением действия примесей, во-вторых, с возрастанием расстояний между цепочками селена (от 3,46 до 3,74 Å). Первое приводит к уменьшению n , а второе — к уменьшению взаимодействия между цепоч-

ками и увеличению их тепловых колебаний, а вследствие этого и к уменьшению U .

При введении примесей хрома скачок σ при плавлении, как и в случае галогенов и кислорода, увеличивается. Это показывает, что примеси Cr создают локальные уровни в селене, при плавлении ослабляется их действие и следствием этого является увеличение скачка σ . После плавления электропроводность растет экспоненциально как в чистых, так и в легированных образцах. В жидком состоянии независимость от примесей усиливает полупроводниковый ход. Энергия

активизации, определенная из наклона $\lg \sigma$ от $\frac{1}{T}$, имеет значение равное 2 эв, что совпадает с оптическими данными [10].

Особый интерес представляет исследование σ селена в зависимости от термообработки. Исследование данного вопроса дает возможность

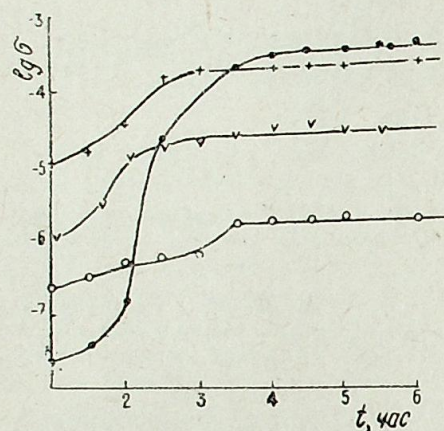


Рис. 3. Зависимость σ от времени термообработки при 210°C: ○ — чистый селен; ● — селен с 0,1% хрома; ■ — с 0,5%; △ — с 0,25%.

в дальнейшем выяснить причины старения селеновых выпрямителей. Полученные результаты в этом направлении противоречивы. В работе [13] указывается, что в зависимости от термообработки σ селена проходит через максимум, дальнейшее уменьшение электропроводности авторы объясняют улетучиванием галогенов, в то время как другие исследователи [14—16] связывают это с уменьшением межкристаллических прослоек. В указанных работах учтена роль кислорода, сильно влияющего на физические свойства Se.

Нами исследовалось влияние термообработки на σ обескислороженного Se с примесью Cr. Образцы, приготовленные ранее указанным способом, расплавили и охлаждали до 210°C, а затем при данной температуре σ измерялась как функция времени. Результаты исследования представлены на рис. 3. Как видно, электропроводность чистого селена и образцов, легированных хромом, сначала возрастает, а затем претерпевает насыщение. После достижения состояния насыщения мы не наблюдали уменьшения σ , отмеченного авторами [13—16].

Возрастание проводимости является обычным и объясняется кристаллизацией первоначально аморфного селена. При насыщении он становится полностью кристаллическим. Из графика также видно, что кристаллизация чистого селена наступает примерно через 4 часа с момента кристаллизации. С увеличением процентного содержания хрома процесс насыщения σ наступает значительно раньше, а это значит, что хром ускоряет процесс кристаллизации селена. Эти результаты можно объяснить следующим. Как известно, селен в твердом состоянии находится в трех различных модификациях; аморфной, моноклинной и гексагональной. Исследования показывают, что гексагональная модификация термодинамически наиболее устойчивая, поэтому при термообработке обе другие модификации превращаются в гексагональную. Процесс кристаллизации селена заключается в разрыве длинных цепей и колец атомов

аморфного селена и в образовании упорядоченных коротких цепочек из малого числа атомов.

Ускорение кристаллизации под влиянием хрома, по-видимому, обусловлено тем, что атомы последних, внедряясь в межатомные пространства цепей и колец, ведут к их разрыву.

Отсутствие максимума σ в зависимости от времени отжига, в отличие от [13—16], можно объяснить частичным обескислороживанием. При улетучивании уменьшается количество кислорода в селене, что ведет к уменьшению концентрации носителей тока, а следовательно и σ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Henkels W. and Maczuk. J. appl. phys., vol. 25, 1954.
2. Сидякин В. Г., Алгайский Ю. М. Изв. вузов, физика, 1959.
3. Баркин Хев Х. Г., Алиев Г. М., Керимов М. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1961, № 4.
4. Алиев Б. Д., Алиев Г. М., Керимов И. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1961, № 4.
5. Курашов В. И. Автореф. канд. дисс. Л., 1952.
6. Наследов Д. Н., Малышев Е. М. ЖТФ, 15, 42, 1945.
7. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М. и др. ФТТ, 6, 1018, 1964.
8. Gobrecht H. and Tausend A. Phys. of semiconductors proceedings of the international conference paris. 1189, 1964.
9. Schweikert I. Zeitschrift für Physik. Bd. 128, 41, 1950.
10. Dowd I. I. Proc. Phys. soc., 64 B 783, 1951.
11. Козырев П. Т. ФТТ, 1, 113, 1959.
12. Abdullaev G. B., Mehtieva S. I., Abdinov D. Sh. and Aliiev G. M. Phys. Stat Sol., 11, 891 1965.
13. Schweikert H. Zs. Phys., 123, 47, 1950.
14. Kestok H. and Seiler K. O. Zs., Naturf., 9a, 49, 1954.
15. By Tsuneo Araki. Bull. Chem. soc. Japan, 36, 247, 1963.

В. А. Иванова, Г. М. Әлиев

Хром ашгарларынын кристалл вә маје селенин электриккечирмәсинә тәсири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кечид элементләриндән хром ашгарларынын кениш температур интервалында, әримә областына дахил олмага, селенин электриккечиримчилигине тәсириндән данышылыр. Мүәјјән едилмишдир ки, хром ашгарлары бир гәдәр оксикендән тәмизләнмиш селенин электриккечирмәсини артыраг максимум чатдыр. Тәркибиндә хром ашгары олан бүтүн нүмунәләрин электриккечирмәси температурла артыр, әримә нөгтәсиндә исә электриккечирмә сычрајышла азалыр. Әримә заманы электриккечирмәнин сычрајышла азалмасы хром ашгарларынын мигдарындан асылдыр.

Мәгаләдә һәмчилиин электриккечирмәнин термик ишләмә мүддәтиндән дә асылылығы өрәнилмишдир. Тәчрүбә көстәрир ки, электриккечирмә термик ишләмә мүддәтиндән асылы олараг әввәл артыр, сонра исә дојма һалына јахынлашыр.

М. А. АЛИДЖАНОВ, Я. Н. НАСИРОВ, П. Г. РУСТАМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ GaTe—SnTe

Исследование физико-химических свойств сплавов в системе GaTe—SnTe представляет большой теоретический и практический интерес. Это обусловлено тем, что теллурид олова образуется в виде SnTe [2] с нарушением стехиометрии и поведение температурной и концентрационной зависимостей термоэдс может быть объяснено привлечением сложной структуры [3—5] валентной зоны, т. е. имеется два сорта носителей тока с различными эффективными массами плотности состояний, тогда как другой компонент этой системы (GaTe) является полупроводником с обычной структурой валентной зоны. SnTe известен как перспективное соединение, на основе которого могут быть созданы эффективные термоэлектрические материалы для работы в области средних температур.

Представляет интерес исследование тепловых и электрических свойств системы GaTe—SnTe как с целью выяснения сохранения аномалий физических свойств, наблюдающихся в SnTe, так и с целью определения термоэлектрической эффективности полученных сплавов. В работе [1] на основе исследований термического, микроструктурного и рентгеноструктурного анализов было установлено, что в системе $[GaTe]_x - [SnTe]_{1-x}$ как со стороны SnTe, так и со стороны GaTe до 40 мол. % имеет место наличие области твердых растворов. Исходные вещества имели чистоту Ga—ГЛ-00, а теллур Б-3.

Синтез исходных соединений производился сплавлением компонентов (в стехиометрическом соотношении) в кварцевых ампулах под вакуумом порядка $\sim 10^{-3}$ мм рт. ст. Сплавы приготавливались сплавлением исходных соединений также в кварцевых ампулах под вакуумом $\sim 10^{-3}$ мм рт. ст. Ампула как при синтезе исходных соединений, так и при приготовлении сплавов вибрировалась с частотой 100 гц и остывала вместе с печью. После синтеза в ампуле не наблюдалось следов непрореагировавших компонентов. Полученные образцы отжигали при 550°C в течение 720 часов, достижение равновесного состояния контролировалось периодическим измерением микротвердости. Были проведены также исследования зависимости от состава при комнатной температуре и в интервале от комнатной до 800° К.

Зависимость термоэдс от состава показывает, что в областях, где обнаруживаются твердые растворы, т. е. при значениях $x = 0 \div 0,4$ и $x = 0,6 \div 1,0$ она изменяется соответственно изменению термоэдс в обычных твердых растворах (рис. 1). Знак проводимости на теллуриде олова и на сплавах состава $x = 0,0,3$ p -типа, а на теллуриде галлия

и на сплавах состава $x = 0,4:1,0$ n -типа. „Аномалий“ в зависимости термоэдс от состава при малых замещениях ($x = 0,01:0,1$) олова элементами IV группы [6], наблюдается и в случае малых замещений его галлием.

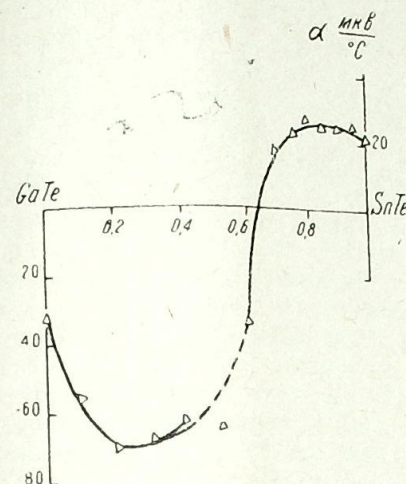


Рис. 1. Термоэдс сплавов системы GaTe—SnTe.

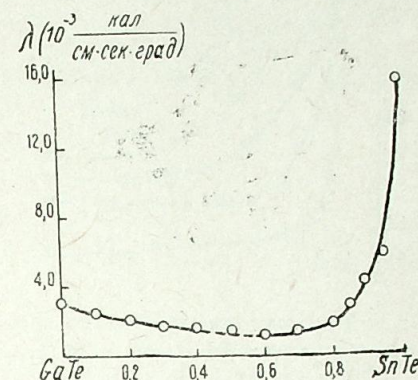


Рис. 2. Теплопроводность сплавов системы GaTe—SnTe.

Зависимость теплопроводности от состава также подтверждает наличие твердого раствора в области $x = 0:0,4$ и $x = 0,6:1,0$ (рис. 2). Теплопроводность по мере замещения олова галлием до 20 мол. % резко уменьшается, а затем слабо меняется. При замещении галлия

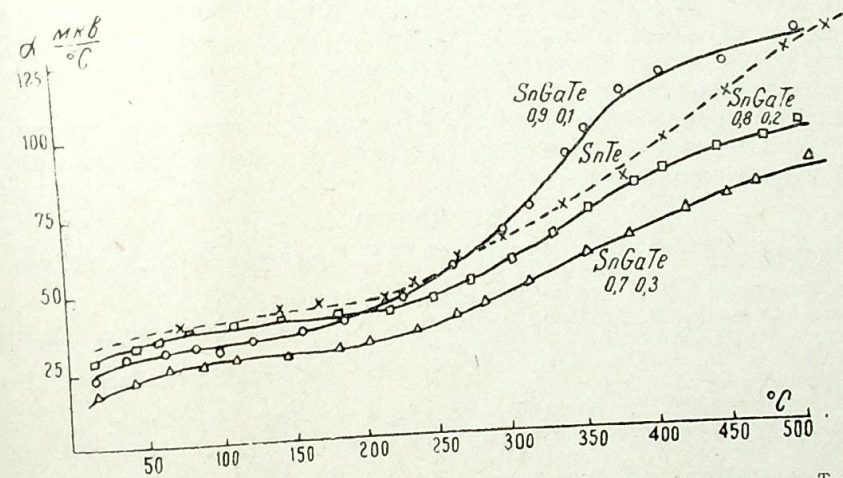


Рис. 3. Температурная зависимость термоэдс для SeTe, $Sn_{0,9}Ga_{0,1}Te$, $Sn_{0,8}Ga_{0,2}Te$ и $Sn_{0,7}Ga_{0,3}Te$.

оловом теплопроводность изменяется намного слабее, чем в случае замещений олова галлием, что, видимо, обусловлено дефективностью решетки теллурида олова. В случае малых замещений олова (порядка до 10 мол. %) при вычислениях электронного рассеяния. Зависимость [7] необходимо учитывать влияние межзонального рассеяния. Зависимость электропроводности от состава показывает наличие твердых растворов в ограниченных областях.

Температурная зависимость термоэдс исследована для образцов всех сплавов, но данные приведены лишь для некоторых, близких к теллуриду олова (рис. 3). Как видно из графика, величина термоэдс

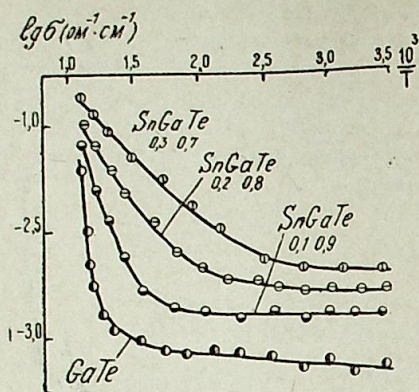


Рис. 4. Температурная зависимость электропроводности GaTe, $\text{Sn}_{0,1}\text{Ga}_{0,9}\text{Te}$, $\text{Sn}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{Te}$ и $\text{Sn}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{Te}$.

Электропроводность измерялась в области от комнатной температуры до 500 С у всех образцов всех исследуемых сплавов и соединений GaTe и SnTe. Температурный ход электропроводности в сплавах, близких по составу к теллуриду олова, т. е. при значениях $x = 0 \div 0,3$, металлический, а сплавов состава $x = 0,7 \div 1,0$ полупроводниковый (рис. 4).

Выводы

1. Результаты исследований электрических и тепловых свойств в системе $[\text{GaTe}]_x - [\text{SnTe}]_{1-x}$ находятся в хорошем согласии с результатами исследований диаграммы состояния, т. е. обнаружена область твердых растворов при значениях $0,6 \geq x \geq 0,4$.

2. Температурная зависимость термоэдс у сплавов с содержанием до 10 мол. % GaTe указывает на сохранность сложной зонной структуры аналогично теллуриду олова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиджанов М. А., Рустамов П. Г., Сафаров М. Г. „Азерб. хим. ж.“ 1966, № 6.
2. Brebrick R. F. J. phys. and chem. sol., 24, 1963, № 1.
3. Allagaier R. S., Houston B. B., Rept. Internat. Conf. phys. Semiconductors, Exeter, 1962, London, Inst. phys. and soc., 1962.
4. Sagar A., Miller R. C. Rept. Internat. Conf. phys. Semiconductors. Exeter, 1962, London, Inst. phys. and phys. soc., 1962.
5. Brebrick R. E., Strause A. J. Phys. rev., 1963, 131, 2, № 1.
6. Абдуллаев Г. Б., Насиров И., Османов Т. Г. „ДАН Азерб. ССР“, 1966, № 2.
7. Кайданов В. И. Канд. дисс. Л., Политехн. ин-т, 1966.

М. Э. Эличанов, J. Н. Насыров, П. Б. Рустамов

GaTe—SnTe системинде истилик вэ електрик хассэлэринин тэдги ги
ХУЛАСЭ

Мәлумдур ки, термоэлементләр һазырланаркән бәрк мәһлул сәһәсиндә истифадә олуна һарымкечиричи маддәләрин кәйфијјәти онун истилик кечирмәсиндән, електрик кечирмәсиндән вэ термо-ЕһГ-дән

асылыдыр. Истилик кечирмәнин мүтәһәрриклији мүмкүн гәдәр кичик, жүкдашыјанларынкы исә бөјүк оларса, ишләдилән материал даһа эффектли олар. $[\text{GaTe}]_x - [\text{SnTe}]_{1-x}$ системинин истилик вэ електрик хассэлэринин өјрәнилмәси нәтичәсиндә һәмин систем үзрә $0,65 \geq x \geq 0,85$ ки, бу да һал диаграммыны тәсдиг едир.

10 мол. % GaTe тәркибли әринтјә гәдәр термо-ЕһГ-нин температурдан асылылығында, „аномалија“ мүһәһидә олуһур. Бу исә SnTe-ун ики зоналы модел гурулуша малик олдуғуну кестәрир.

Термик активләшмә енерјисинин дәјишмәси GaTe—SnTe системи үзрә бәрк мәһлул сәһәсини тәсдиг едир.

А. И. МУХТАРОВ, Р. Х. МУРАДОВ

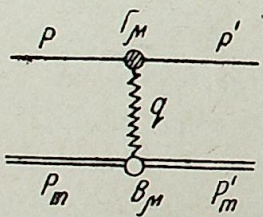
УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ π^- -МЕЗОНОВ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ НА ЭЛЕКТРОНАХ

В процессе выполнения данной работы были получены дифференциальные и интегральные сечения рассеяния π^- -мезонов на электронах с учетом структуры обеих частиц. Исследовано влияние поляризации электронов на сечение и проведено сравнение с результатами существующих экспериментов. Было вычислено также дифференциальное сечение для столкновения электронов и отрицательных пионов на встречных пучках с целью оценки сечения, измеряемого в экспериментах, проектируемых в ЦЕРНе.

1. Определение электромагнитных размеров частиц — одно из важнейших направлений в физике высоких энергий. Основным способом изучения структуры частиц является исследование столкновения их с чисто электродинамическими объектами, т. е. электронами и фотонами [1]. Несмотря на то, что опыты по рассеянию электронов на протонах и дейтеронах, проведенные в последнее десятилетие группами Р. Хофштадтера и Р. Вильсона, многое объяснили в электромагнитной структуре нуклонов в области передаваемых пространственноподобных импульсов, изучение структуры пионов только началось. Определения структуры π^- -мезонов представляют большой интерес еще и потому, что расчеты методом дисперсионных соотношений дают для формфакторов нуклонов выражения в виде интегралов, зависящих от структуры пионов [2].

С целью исследования электромагнитных размеров π^- -мезонов для временеподобных значений q^2 в [3, 4] был рассмотрен процесс образования пионных пар при столкновении встречных электронно-позитронных пучков. В работах [5—7] содержатся результаты экспериментов по исследованию рассеяния π^- -мезонов на электронах в жидководородной пузырьковой камере с импульсами начальных пучков 1, 12; 4 и 16 Гэв/с. Получено также дифференциальное сечение упругого рассеяния точечных скалярных частиц на свободных неполяризованных электронах [8—10].

Рис. 1. Диаграмма Фейнмана, соответствующая процессу (1).



В данной работе в наинизшем электромагнитном приближении получено дифференциальное и интегральное сечение процесса:

$$e^- + \pi^- \rightarrow e^- + \pi^- \quad (1)$$

с учетом структуры обеих частиц и поляризации электронов (раздел 2), а также вычислено дифференциальное сечение для столкновений частиц на встречных пучках (раздел 3).

2. Рассеяние тяжелых заряженных частиц высоких энергий на электроне атомной оболочки может рассматриваться как рассеяние на свободном электроне. Этот процесс описывается диаграммой Фейнмана второго порядка в нулевом приближении теории возмущений (рис. 1) и имеет матричный элемент:

$$S = ie^2 M [2\pi^4 \delta(p + p_m - p' - p'_m)], \quad (2)$$

$$\text{где } M = [\bar{u}(p') \Gamma_\mu u(p)] \frac{1}{q^2} [\bar{\varphi}(p'_m) B_\mu \varphi(p_m)], \quad B_\mu = F_m(q^2) \hat{p}_\mu,$$

$$\Gamma_\mu = F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{i\gamma_5}{2m_e} F_2(q^2) (\gamma_\mu \hat{q} - q_\mu);$$

$F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, γ_5 и m_e — соответственно, дираковский и паулиевский формфакторы, аномальный магнитный момент и масса электрона, $F_m(q^2)$ — формфактор, описывающий структуру π^- -мезона, $q_\mu = (p' - p)_\mu$ — четырехмерный импульс, передаваемый от пиона к электрону.

Согласно правилам, развитым в монографии [11], дифференциальное сечение рассеяния равно*

$$d\sigma = \frac{e^4}{(2\pi)^2 j} |M|^2 \delta(p + p_m - p' - p'_m) d\vec{p}' d\vec{p}'_m, \quad (3)$$

где j — плотность потока падающих частиц и

$$|M|^2 = \frac{F_m^2(q^2)}{4q^4 E E' E_m E'_m} \left[F_1^2 f_{00} + \frac{\gamma_5}{m_e} F_1 F_2 f_{01} + \frac{\gamma_5^2}{2m_e^2} F_2^2 f_{02} \right],$$

$$f_{00} = (1 + s \cdot s') \left(\frac{1}{2} q^2 \Lambda^2 + 2 \Lambda \cdot p \Lambda \cdot p' \right) - q^2 \Lambda \cdot s \Lambda \cdot s' - \Lambda^2 q \cdot s q \cdot s' +$$

$$+ 2 q \cdot s' \Lambda \cdot s \Lambda \cdot p' - 2 q \cdot s \Lambda \cdot s' \Lambda \cdot p,$$

$$f_{01} = m_e [\Lambda^2 q^2 (1 + s \cdot s') - 2 \Lambda^2 q \cdot s q \cdot s' - 2 q^2 \Lambda \cdot s \Lambda \cdot s' - (p + p') \cdot \Lambda \times$$

$$\times (\Lambda \cdot s' q \cdot s - \Lambda \cdot s q \cdot s')] + (p + p') \cdot \Lambda [(\hat{p}' \hat{s} \hat{\Lambda})_+ + (\hat{p}' \hat{s}' \hat{\Lambda})_-],$$

$$f_{02} = m_e^2 [(q \cdot \Lambda)^2 (1 + s \cdot s') + 2 q \cdot \Lambda (q \cdot s' \Lambda \cdot s + q \cdot s \Lambda \cdot s') - q^2 \Lambda \cdot s \Lambda \cdot s'] +$$

$$+ [q^2 (1 + s \cdot s') - 2 q \cdot s q \cdot s'] \left(m_e^2 \Lambda^2 + \frac{1}{4} (q \cdot \Lambda)^2 + \Lambda \cdot p \Lambda \cdot p' \right), \quad \Lambda = p_m + p'_m.$$

Все известные опыты по рассеянию пионов на электронах проводились в лабораторной системе, т. е. в системе, где электроны до столкновения покоились. Поэтому для сравнения наших результатов с известными ранее получим выражения дифференциальных и интегральных сечений в Л-системе. В этой системе между кинетической энергией электронов отдачи T и углом рассеяния θ имеется соотношение

$$T = 2 m_e a^2 \frac{\cos^2 \theta}{1 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (4)$$

где

$$a^2 = \beta^2 \gamma^2 \left[\gamma + \frac{m_e}{m} \right]^{-2}, \quad \gamma = \frac{E_m}{m},$$

* Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$, $e^2/4\pi = \alpha = 1/137$, $r_e = e^2/m_e$, и метрикой, принятой в [11].

β —скорость начальных пионных пучков (в аналогичном выражении работ [5, 6] имеются опечатки). Как видно из (4), максимальная кинетическая энергия, получаемая электронами отдачи, равна

$$T_{\max}(\theta = 0^\circ) = 2 m_e a^2 (1 - a^2)^{-1}. \quad (4')$$

Если электроны мишени поляризованы перпендикулярно к плоскости рассеяния (хотя о поляризации покоящегося электрона не имеется никаких сведений, а движущиеся электроны за счет излучения в однородном магнитном поле поляризуются поперечно [12]), то выражение дифференциального сечения имеет вид:

$$d\sigma_I = d\sigma_B (1 + \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}'), \quad (5)$$

$$d\sigma_B = \frac{2\pi m_e r_e^2}{\beta^2} \left[1 - \frac{1 + 2\gamma \left(\frac{m_e}{m} \right)}{2 m_e \gamma^2} T \right] \frac{dT}{T^2}. \quad (6)$$

Здесь (6)—дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных точечных частиц, $\vec{\xi}$ и $\vec{\xi}'$ —единичные векторы в направлении поляризации частиц в собственной системе координат (детальное изучение учета поляризации было успешно развито в [13]). Как следует из (5), процесс рассеяния в основном происходит с сохранением направления спина. Выражение дифференциального сечения в случае, когда вектор поляризации электронов лежит в плоскости рассеяния и перпендикулярен к $\vec{p}_m$, можно представить в виде

$$d\sigma = d\sigma_I + (\vec{k} \cdot \vec{\xi}') d\sigma_{II} + (\vec{n} \cdot \vec{\xi}') d\sigma_{III}, \quad (7)$$

где

$$d\sigma_{II} = \frac{4\pi r_e^2}{\beta T^2} p' b s (dT), \quad b^2 = \frac{1 + \frac{2}{x} - a^{-2}}{1 + \frac{2}{x}}, \quad x = \frac{T}{m_e},$$

$$d\sigma_{III} = x b s d\sigma_B + \frac{2\pi r_e^2}{\beta^2 \gamma^2 m_e^2 x} b s \left\{ \left(1 + 2\gamma \frac{m_e}{m} \right) T + 2 m_e (1 - 2\gamma^2) \right\} dT;$$

$\vec{n}$ и $\vec{k}$ —единичные векторы в направлении импульса электрона отдачи и начального π^- -пучка соответственно.

Считая электроны отдачи поперечно поляризованными (предполагается, что вектор поляризации электронов после столкновения лежит в плоскости рассеяния), получаем

$$d\sigma = d\sigma_B (1 + \lambda ss') + \frac{4\pi r_e^2}{\beta T^2} p' b^2 ss' (dT), \quad (8)$$

здесь $\lambda^2 = a^{-2} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{-1}$. Соответствующие функции для углового

распределения получаются из (6—8) заменой T на угол θ через соотношения (4). Выполнив интегрирование в (6) и (8), получаем интегральное сечение для двух вышеуказанных частных случаев:

$$\sigma_B = \frac{2\pi m_e r_e^2}{\beta^2} \left[\frac{1}{T_{\min}} - \frac{1}{T_{\max}} + \frac{2 m_e \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{m}} \ln \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \right]. \quad (6')$$

$$\sigma = \sigma_B + \frac{2\pi r_e^2}{\beta^2} ss' \left\{ I_1(x) - \frac{1 + 2\gamma \frac{m_e}{m}}{2\gamma^2} I_2(x) + 2a\beta \left[I_3(x) - \frac{1}{a^2} I_2(x) \right] \right\}; \quad (8')$$

$$I_1(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}}, \quad I_3(x) = 2 I_2(x) + I_1(x),$$

$$I_2(x) = \ln 2 \left[1 + x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) \right] \Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}}.$$

Здесь $T_{\min}$ —произвольная величина, зависящая от условий эксперимента, $T_{\max}$ —определяется из (4). Полное сечение, вычисленное по (6) с учетом условий эксперимента [7] (т. е. $T_{\min} = 30 \text{ МэВ}$, $T_{\max} = 7,3 \text{ ГэВ}$), получается равным $8,27 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2$, а экспериментальное значение этой величины равно $(8,69 \pm 0,19) 10^{-27} \text{ см}^2$.

Отклонение экспериментального результата для полного сечения от теоретического, по-видимому, обусловлено структурой пиона. На рис. 2 изображены кривые энергетического распределения электронов отдачи, вычисленные по (5), (6) и (8). Сравнение кривой 2 с экспериментальными точками на рис. 2 в [7] показывает, что при низких энергиях экспериментальные точки находятся выше теоретической кривой, а при больших энергиях они лежат ниже.

Это несоответствие эксперимента с теорией может быть либо результатом ошибки, допущенной в эксперименте, либо результатом неучета радиационных поправок высших порядков, которые при построении кривой 2 считались пренебрежимо малыми. Радиационные поправки предварительно вычислялись [14] применительно к условиям опыта работы [7]. Показано, что учет излучения электронной линии приводит к отклонению на 0,2 % в сторону упругого рассеяния для малых значений q^2 . Надо заметить, что вычисления радиационных поправок высших порядков и зависимости их от q^2 представляют большой интерес, так как при обнаружении такой зависимости (сильной) можно с уверенностью говорить, что они обусловлены факторами (структурными) эффектами.

Пунктирная кривая на рис. 2 для протяженного пиона построена в предположении, что формфактор пиона имеет вид

$$F_\pi^2(q^2) = 1 - \frac{a_1^2}{3} q^2, \quad (9)$$

где $a_1 = 2,6 f$. Выражение для формфактора, полученное с помощью метода максимальной вероятности частотной функции [7], совпадает с (9). Как видно из (9), при больших передаваемых импульсах влия-

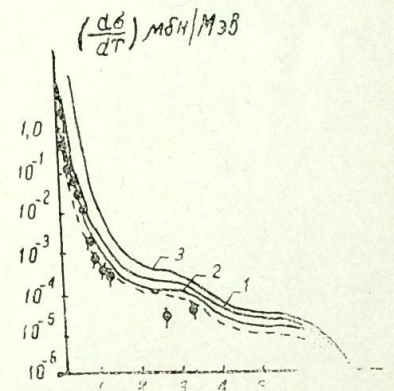


Рис. 2. Зависимость дифференциального сечения от кинетической энергии электронов отдачи. Кривые 1, 2, 3 вычислены, соответственно, по (5), (6) и (8). Пунктирная линия соответствует протяженному пиону.

ние структуры пиона оказывается значительным (например, при $T = 7,3 \text{ Гэв}$, $F_m^2(q^2) = 0,55$), поэтому расположение экспериментальных точек при больших энергиях ниже теоретической кривой может быть объяснено эффектами, обусловленными структурой π^- -мезонов.

3. Для изучения радиуса распределения пионного заряда надо проникнуть внутрь пиона, т.е. приходится иметь дело с расстояниями меньше его „физического радиуса“ $r_m \cong 1,4f$, которому соответствует $q^2 \cong 0,017 (\text{Гэв})^2$. В опытах по рассеянию π^- -мезонов на электронах легких атомов эта величина недостижима из-за ограниченности энергий пионных пучков.

Например, пучками пионов с импульсами $16 \text{ Гэв}/c$, получаемых протонным синхротроном в ЦЕРНе, максимально достижимое значение $q^2 \cong 0,007 (\text{Гэв})^2$, поэтому ясно, что в существующих экспериментах основную роль играл только полный пионный заряд, а не его распределения. Положение меняется, если электроны до столкновения имели некоторую кинетическую энергию $T \geq 0,25 \text{ Мэв}$. Тогда

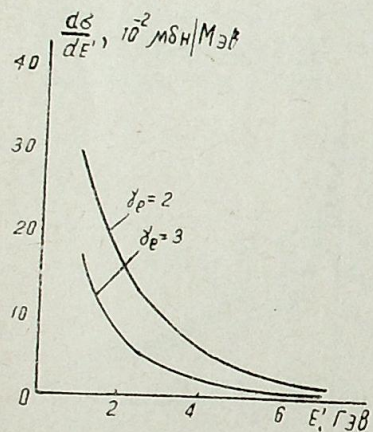
$$q^2 = q_{\text{л.с.}}^2 + 2T_e E' + \frac{2p}{\Delta p} (E_0 E' - EE_m - pp_m - m_e^2), \quad (10)$$

где E_0 — полная энергия системы. В этом случае, как видно из (10), значение $q^2 = 0,017 (\text{Гэв})^2$ и, следовательно, становится доступным изучение радиуса распределения пионного заряда. С этой целью в ЦЕРНе проектируются эксперименты, в которых К-оболочку тяжелых атомов типа урана будут использовать как готовый электронный накопитель с энергией $\sim 1 \text{ Мэв}$ [15].

Дифференциальное сечение рассеяния π^- -мезонов высоких энергий на электронах с малыми энергиями имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{dE'} = \frac{\pi m_e r_e^2}{1 + \beta_e/\beta_m} \cdot \frac{F_m^2(q^2)}{q^4 |\Delta p| p_m \gamma_e} \{ -q^2 (q^2 + 4m^2) + (q^2 - 4pp_m - 4EE_m) [q^2 - 2x(q^2 - 2EE' + 2m_e^2) - 4EE'] \}. \quad (11)$$

Рис. 3. Зависимость дифференциального сечения от энергии рассеянных электронов.



Здесь $x = \frac{p_m}{p}$, β_e , β_m — скорости электронов и пионов до столкновения. Чтобы получить угловое распределение рассеянных электронов, нужно использовать соотношение

$$\cos \psi = E_0 E' - E_0 E_m - pp_m - m_e^2 / p' \Delta p. \quad (12)$$

На рис. 3. изображены вычисленные из (11) зависимости дифференциального сечения рассеяния от энергии рассеянных электронов при $\gamma_e = 2$ и 3. Мы не учитываем влияния формфактора пиона на дифференциальное сечение, так как (9) пригодно только для малых значений q^2 . Опыты на встречных пучках дадут возможность определить аналитическое выражение последующих членов разложения по q^2 формфактора пиона. Как видно из рис. 2 и 3, значения дифференциального сечения, полученные из опытов со встречными пучками,

намного больше (иногда на несколько порядков), чем в опытах с покоящимися электронами.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В. Н. Байеру за ценные советы и замечания, а также В. С. Фадину, В. М. Каткову за многочисленные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байер В. Н. УФН, 78, 619, 1962.
2. Дрелл С., Захариазен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. ИЛ, 1962.
3. Gabibbo N., Gatto R. Phys. Rev., 124, 1577, 1961.
4. Джафаров И. ЯФ, 1, 665, 1965.
5. Crowford F. Phys. Rev., 117, 1119, 1960.
6. Гришин В., Кистенев Э., Му Цзюнь. ЯФ, 2, 886, 1965.
7. Allan J. et al Nuovo Cim., 32, 1144, 1964.
8. Bhaba H. Proc. Roy. Soc., A164, 269, 1938.
9. Salecker H. Zs. Natur f., 15a, 1302, 1960.
10. Росси Б. Частицы больших энергий. Гостехиздат, 1955.
11. Ахиезер И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Физматгиз, 1959.
12. Байер В. Н., Катков В. М. ЯФ, 3, 81, 1966.
13. Мухтаров А. И. Докт. дисс., 1964.
14. Edin K., Eriksson K. Nuovo Cim., 41, 349, 1966.
15. Маглис Б., Коста Г. Материалы XII Международной конференции по физике частиц высоких энергий. Дубна, 1964.

А. И. Мухтаров, Р. Х. Мурадов

Јүксәк енержили π^- -мезонларын электронлардан еластики сәпилмәси

ХҮЛАСӘ

Зәррәчикләрин электромагнит формфакторларынын өрәнилмәси јүксәк енержиләр физикасында бөјүк әләмијјәт кәсб едир. Мәгаләдә бу мәгсәдлә π^- -мезонларын электронлардан еластики сәпилмәсинин дифференциал эффектив кәсијинин лаб. вә ихтијари һесаблама системиндә ифадәси алынмыш вә һәмчинин электронларын полјаризасиясынын она тәсири өрәнилмишдир. Алынмыш нәтичәләр ујғун тәчрүби фактларла мүгајисә едилмишдир.

Г. И. АББАСОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ЭЦВМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ СПЕКТРОГРАММ

Как известно, основное количество информации о физических процессах, протекающих в небесных телах, получают путем применения метода спектрального анализа излучения, посылаемого этими телами. Световое излучение небесных объектов состоит из непрерывного спектра и спектральных линий (излучения и поглощения). Для обработки спектрограмм применяются микрофотометры, при помощи (которых) спектрограммы записываются на специальных бумагах (диаграммных) в почернениях [1]. Таким образом получают так называемые моллиграммы. После этого, используя характеристическую кривую для данной пластинки (пленки), почернения каждой (избранной) точки моллиграммы переводят в интенсивности. В последнее время построены специальные микрофотометры, которые дают записи моллиграмм прямо в интенсивностях [2]. Этот тип микрофотометров значительно упрощает обработку полученного материала.

Можно смело утверждать, что дальнейшее развитие астрофизической науки, связанной с наблюдением, во многом будет зависеть от дальнейшей автоматизации процесса обработки, который очень кропотлив и требует много времени. Эту задачу можно решить применяя современные электронные машины, которые подразделяются на два класса: непрерывного и дискретного действия.

Конструкция машины непрерывного действия определяется типом решаемых ею задач. Вследствие этого они более или менее специализированы поэтому непригодны для решения общих задач. Машины дискретного действия оперируют величинами, представленными в виде дискретных значений [3].

Чтобы ввести в ЭЦВМ аналоговую величину (ход спектра), последнюю необходимо преобразовать в дискретную [4]. Процесс преобразования и заключается в следующем. Непрерывная величина представляется как последовательность дискретных точек. Расстояние между точками называется шагом квантования. Эту операцию производит преобразователь аналог-код. В качестве последнего применен преобразователь аналог-код цифровой гаротажный преобразователь разработанный в Азинефтехим им. Азизбекова [5].

Он имеет следующие основные данные:

скорость протяжки 1, 4, 8 м/час;
ход острия копира 180 мм;
шаги квантования 0,5; 1 и 2 мм;
разрешающая способность 1 мл. разряд/мм;
средняя погрешность проскальзывания 0,4%;

линейность перемещения копира в код десятикратным снятием показаний счетчика в каждой контролируемой точке 1,3%.

При остановке диаграммы максимум выбега ее 0,5 мм. На выходе преобразователя получается перфолента, позволяющая непосредственно вводить информацию в ЭЦВМ МИНСК-1 [5]. Такой комплекс аппаратуры позволил автоматизировать нахождение длин волн и для нахождения эквивалентных ширин спектральных линий из записей в почернениях и интенсивностях. Методика для нахождения длин волн спектральных линий будет описана в другой статье.

1. Определение эквивалентной ширины спектральных линий из записи, выраженных в почернениях фотографического приемника.

Допустим, что характеристическая кривая (зависимость почернения от логарифма интенсивности) фотопластинки (фотопленки), а также контуры линий на фоне непрерывного спектра преобразованы шагом квантования d (мм).

Примем следующие обозначения:

масштаб при построении характеристической

кривой фотопластинки (пленки) — β ;

ординаты точек характеристической кривой — a_{ii} ;

ординаты точек линии — a_i ;

ординаты точек непрерывного спектра — a'_i ;

Для нахождения интенсивностей, соответствующих амплитудам точек линии и непрерывного спектра, амплитуды всех точек обеих кривых сравниваются с амплитудами точек характеристической кривой. Условия равенства амплитуды: $a_{ii} = a_i$, $a_{ii} = a'_i$ позволяют найти эти интенсивности. $\lg I_i$ соответствующие ординатам точек линии будут

$$\lg I_i = \beta \cdot d \cdot r_i, \quad (1)$$

где r_i — количество шагов по оси абсцисс от начала системы координат, в которой построена характеристическая кривая, до точек, удовлетворяющих условию

$$a_{ii} = a_i;$$

$$I_i = 10^{2dr_i},$$

$$\beta \cdot d = \text{const.}$$

Тогда

$$I_i = 10^{cr_i}$$

Интенсивности, соответствующие ординатам точек непрерывного спектра I'_i , будут определяться таким же путем. Здесь количество шагов r'_i будет удовлетворять условию $a_{ii} = a'_i$,

$$I'_i = 10^{cr'_i}$$

Остаточная интенсивность линии будет определяться формулой:

$$R_{vi} = 10^{c(r_i - r'_i)} \quad (2)$$

R_{vi} меняется в следующем интервале:

$$R_{i \max} = 1,$$

$$R_{vi \min} > 0.$$

А глубина спектральной линии

$$R_{vi}^* = 1 - R_{vi}.$$

Последняя дает возможность найти величину

$$S_i = d \sum_{i=1}^n R_{vi}^*, \quad (3)$$

имеющую следующую связь с эквивалентной шириной:

$$W_{\lambda_i} = S_i \frac{d\lambda_i}{dl}, \quad (4)$$

где $\frac{d\lambda_i}{dl}$ — линейная дисперсия спектрографа (на диаграмме).

2. Определение эквивалентной ширины спектральных линий из записи, выраженных в интенсивностях.

Примем обозначения, указанные выше. Если запись выражена в интенсивностях, остаточная интенсивность спектральных линий будет

$$R_{v_i} = \frac{I_i}{I_i'},$$

где I_i и I_i' — амплитуды точек линии и непрерывного спектра, соответственно. А глубина линии

$$R_{v_i}^* = 1 - R_{v_i},$$

$$S_i = d \sum_{i=1}^n R_{v_i}^*, \quad (5)$$

$$W_{v_i} = S_i \frac{d\lambda_i}{dl}.$$

Для обоих случаев составлена стандартная программа, по которой найдены величины S_i на машине МИНСК-1 для 18 спектральных линий. Нами были использованы спектрограммы звезды η Leo, полученные в КРАО на большом телескопе ЗТШ с большей дисперсией 1.3 А/мм. Записи спектрограмм были произведены на микрофотометре типа Молли и на микрофотометре, записывающем в прямых интенсивностях в КРАО. В случае записи в почернениях характеристическая кривая, контур спектральных линий и соответствующий ей непрерывный спектр преобразовывались шагом квантования $d = 1$ мм. Масштаб при построении характеристической кривой $\beta = 0,01$, тогда $C = 0,01$. Поскольку разрешающая способность цифрового преобразователя равна 1 мм, цифры на перфоленге показывают ординат точек в миллиметрах.

Данные характеристической кривой вводились в память машины и в течение времени вычислений не стирались. При этом менялись только данные линий. В памяти ЭЦВМ одновременно находилось три группы цифр. Первую цифру контура линии ЭЦВМ сравнивала со всеми цифрами характеристической кривой и находила цифру, равную ей. При каждом сравнении таким образом в одну ячейку посылается единица. В итоге число этих единиц показывает r_i . Таким же путем находится r_i' , и по формуле (2) вычисляется R_{v_i} , а по формуле (3) — S_i .

Ниже приводятся таблица и график сравнения (рис. 1) результатов, полученных на машине, с результатами, полученными обычным способом.

Здесь на оси ординат рис. 1 отложены значения S_i , полученные обычным способом, а на оси абсцисс — значения S_i , вычисленные машинной. Расположение точек относительно линии, проведенной под углом 45° , показывает, что разработанный метод может с успехом применяться для массового определения эквивалентной ширины спектральных линий.

В случае записи в интенсивностях опять-таки контур линии и соответствующий ей непрерывный спектр преобразовывались шагом квантования в 1 мм. Эти данные вводились в ЭЦВМ. Машина делит

первую цифру контура линии на первую цифру непрерывного спектра, причем отношения вычитываются из единицы. Эта операция производится для всех цифр и результаты суммируются. Произведение полученной суммы на длину шагов даст величину S_i . Для этого случая также приведены сравнения S_i , найденных обычным и машинным способами.

На рис. 2 по оси ординат отложены значения S_i , полученные обычным путем, а по оси абсцисс — значения S_i , полученные

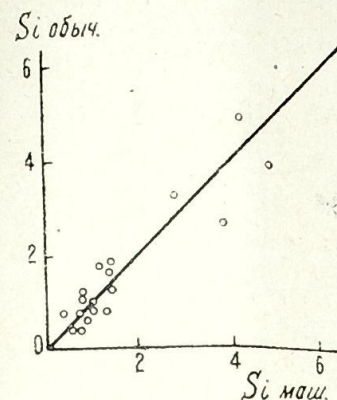


Рис. 1. Сравнение значений S_i , найденных обычным способом (S_i обыч.) и при помощи машины (S_i маш.) из записей, выраженных в почернениях.

Таблица 1

	S_i обыч.	S_i маш.		S_i обыч.	S_i маш.
1.	3,93	4,89	10.	1,26	1,41
2.	2,63	3,86	11.	0,74	0,74
3.	0,46	0,59	12.	4,88	4,22
4.	0,81	1,28	13.	1,80	1,40
5.	1,71	1,20	14.	3,24	2,79
6.	1,62	1,38	15.	1,12	0,85
7.	0,82	1,00	16.	0,79	0,29
8.	0,43	0,70	17.	0,65	0,87
9.	1,05	0,98	18.	1,17	0,85

машинным способом. Как видно, и в этом случае ЭЦВМ можно применять для массового определения эквивалентных значений ширины спек-

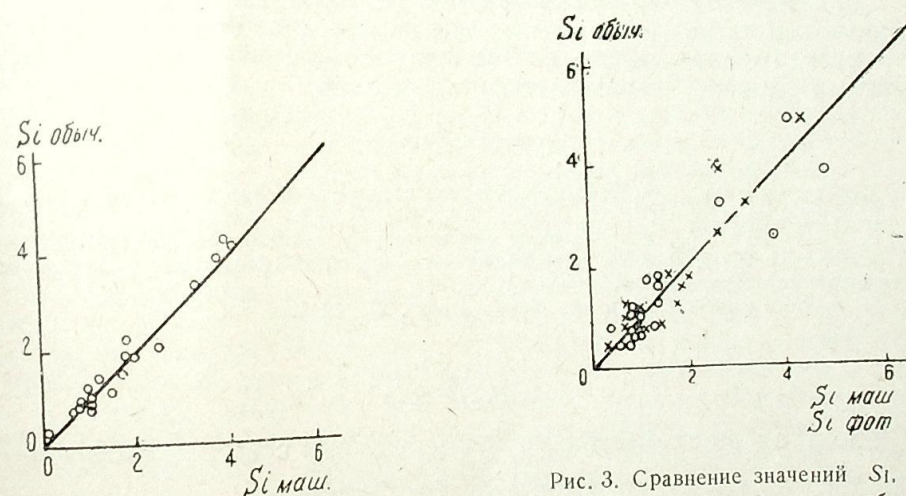


Рис. 2. Сравнение значений S_i , найденных обычным способом (S_i обыч.) и при помощи машины (S_i маш.) из записей, выраженных в интенсивностях.

Рис. 3. Сравнение значений S_i , найденных обычным способом (S_i обыч.), с найденными при помощи машины (S_i маш.) из почернения (точки) и при помощи фотометра (S_i фот.) в прямых интенсивностях (крестики).

тральных линий. Если сравнивать значения S_i , найденные из записи в почернениях обычным способом, со значениями S_i , найденными также из записи в почернениях машинной (точки) и из записи в интенсивностях обычным способом (крестики) на одном графике, можно судить, насколько отличаются значения S_i маш. от S_i , полученных при

помощи фотометра в прямых интенсивностях. Это показано на рис. 3, здесь на оси ординат отложены значения S_i обыч., а на оси абсцисс — значения S_i маш. и S_i фот.

Таблица 2

	S_i обыч.	S_i маш.		S_i обыч.	S_i маш.
1.	4,18	4,12	10.	2,11	2,51
2.	3,96	3,78	11.	1,41	1,17
3.	0,27	0,16	12.	4,32	3,92
4.	1,14	1,42	13.	1,55	1,67
5.	2,21	1,79	14.	3,34	3,28
6.	1,90	1,79	15.	0,93	0,81
7.	1,20	1,08	16.	1,09	0,93
8.	0,71	0,68	17.	0,94	0,93
9.	1,90	1,91	18.	0,67	1,04

Таблица 3

	S_i обыч.	S_i фот.	S_i ЭЦВМ		S_i обыч.	S_i фот.	S_i ЭЦВМ
1.	3,93	2,66	4,89	10.	1,26	1,79	1,41
2.	2,63	2,64	3,86	11.	0,74	0,75	0,74
3.	0,46	0,20	0,59	12.	4,88	4,46	4,22
4.	0,81	1,34	1,28	13.	1,80	1,60	1,40
5.	1,71	1,97	1,20	14.	3,24	3,24	2,79
6.	1,62	1,90	1,38	15.	1,12	0,83	0,85
7.	0,82	0,99	1,00	16.	0,79	1,05	0,29
8.	0,43	0,64	0,70	17.	0,65	1,00	0,87
9.	1,05	1,88	0,98	18.	1,17	0,69	0,85

Результаты, полученные машиной из почернения и фотометром в прямых интенсивностях, очень близки. Это свидетельствует о том, что предложенный метод вполне пригоден для определения эквивалентных значений ширины спектральных линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынов Д. Я. Курс практической астрофизики. Физматгиз, 1960.
2. Абражеский Б. П. „Изв. КраО“, 34, 331, 1965.
3. Дроздов Е. А. и др. Основы вычислительной техники. Воениздат, 1964.
4. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Госэнергоиздат, 1961.
5. Мельников А. Г. и др. „Нефть и газ“, 197, № 1.

Н. И. Аббасов

Електрон рэгэм һесаблама машинларынын спектрограмларын ишләдилмәсинә тәтбиги

Спектрограмларын ишләдилмәсиндә олдуғча узун һесаблама тәләб олунур. Бу просес мөвчуд олан рэгәмһесаблама гурӯулары тәтбиги едиләрәк автоматлашдырылмышдыр. Алынған нәтичәләр көстәрир ки, тәзә ишләнмиш үсул күлли мигдарда спектр хәтләринин эквивалент енләринин тапылмасында тәтбиги едилә биләр.

К. И. ЭФЕНДИЕВ, К. М. ДАШДАМИРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИНТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В СМЕСИ ГЕЛИЙ—КИСЛОРОД

Согласно теории Кадомцева и Недоспасова [1] критическое значение магнитного поля для возникновения винтовой неустойчивости зависит от продольного градиента потенциала в положительном столбе. Для проверки этого положения теории некоторые исследователи [2,3] градиент потенциала изменяли воздействием на положительный столб Bz -поля.

В данной работе изменение градиента потенциала в достаточно больших переделах достигалось путем прибавления примеси молекулярного газа к основному газу. Примесью являлся молекулярный кислород, полученный химическим путем. В качестве инертного газа был выбран гелий. Процент примеси кислорода в смеси менялся от 0 до 25%, при общем давлении до 0,5 мм рт.ст. Исследования проводились на стеклянной трубке (непроводящая стенка), геометрические размеры которой ($L/R = 45$) способствовали развитию неустойчивости в положительном столбе. В трубках использовался холодный цилиндрический катод длиной 10 см, диаметром 2,5 см. Разряд представлял собой классический тлеющий разряд. Разрядный ток при всех измерениях поддерживался постоянным. Магнитное поле напряженностью до 5200 гс создавалось соленоидом длиной 60 см. Катод находился вне магнитного поля. В тех случаях, когда катодная область попадает внутрь соленоида, интерпретация результатов затрудняется тем, что при увеличении магнитного поля катодная область расширяется в сторону положительного столба и при низких давлениях может достигать до области, где производятся зондовые измерения [4]. В этом случае нарушение монотонной зависимости плотности тока на стенку от магнитного поля не обязательно связано с возникновением в плазме винтовой неустойчивости.

В работе исследуется винтовая неустойчивость плазмы на смеси гелий-кислород, находящейся в продольном магнитном поле. Экспериментальным путем определено критическое значение магнитного поля, при котором возникает неустойчивость при различном проценте содержания кислорода в смеси. Переход положительного столба в состояние винтовой неустойчивости сопровождается появлением хаотических шумов и при этом наблюдается также скачкообразное изменение продольного градиента потенциала, плотности тока на стенку и разрядного тока.

Продольный градиент потенциала (E_z) определялся методом компенсации. Результаты измерений его (для случая $p = 0,2$ мм рт. ст. при различных процентных содержаниях кислорода в смеси) приве-

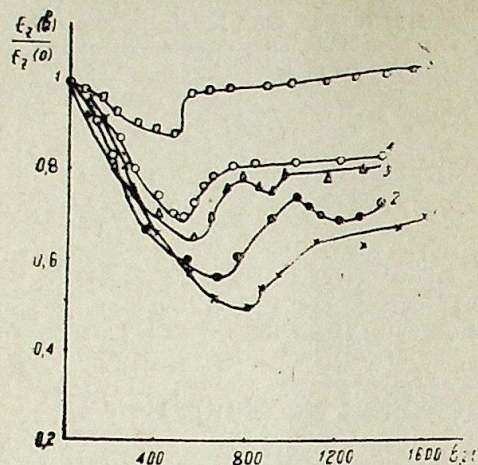


Рис. 1. Относительная зависимость градиента потенциала от магнитного поля: 1—чистый гелий при $p = 0,20$ мм рт. ст.; 2—7%; 3—14%; 4—20% кислорода в смеси; 5—чистый кислород при $p = 0,27$ мм рт. ст.

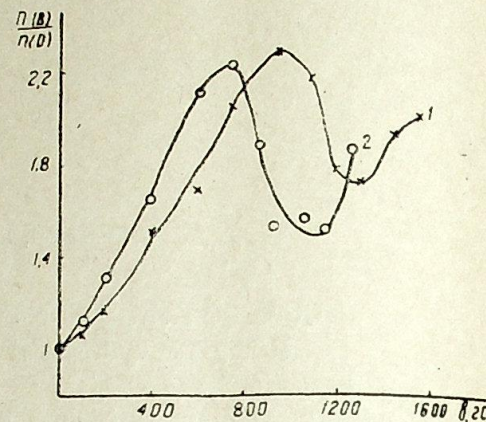


Рис. 2. Зависимость $n(B)/n(0)$ от напряженности магнитного поля: $p_{см} = 0,25$ мм рт. ст.; 1—8%; 2—14% кислорода в смеси.

дены на рис. 1 в виде отношения $E_z(B)/E_z(0)$ в зависимости от напряженности магнитного поля. Как видно из рисунка, с увеличением магнитного поля E_z уменьшается, а затем, достигнув некоторого минимального значения, возрастает. $E_z(B)/E_z(0)$ в минимуме падает в чистом гелии до 0,5, а при наличии 25% примеси кислорода в гелии уменьшается всего на 20%, но характер зависимости от магнитного поля для смеси остается таким же, как и для чистого гелия.

Плотность тока ионов на стенку (j_w) определялась плоским стеночным зондом. Как показали измерения, при возрастании магнитного поля отношение $j_w(B)/j_w(0)$ сначала монотонно уменьшается и при дальнейшем росте магнитного поля ($B > B_{кр}$) наблюдается повышенный уход ионов на стенку, что связано с наступлением неустойчивости.

Концентрация носителей зарядов на оси разрядной трубки определялась по ионной части зондовой характеристики. На рис. 2 представлены результаты определения концентрации носителей зарядов на оси трубки в виде отношения $n(B)/n(0)$ в зависимости от магнитного поля для смеси гелий—кислород. Как видно, концентрация заряженных частиц на оси с увеличением магнитного поля возрастает и, достигнув максимума, начинает уменьшаться. Интересно отметить, что спаду кривой $n(B)/n(0)$, зависящей от B , соответствует $B_{кр}$.

Таким образом, начиная с критического значения поля, характер зависимости всех перечисленных выше параметров от магнитного поля меняется, т. е. налицо все признаки перехода положительного столба в состояние винтовой неустойчивости. Опыты, проведенные со смесью, содержащей гелий и кислород в различных соотношениях, показали, что критическое значение магнитного поля для смеси гелий—кислород меньше, чем для чистого гелия (табл.) Как видно из таблицы, с увеличением процентного содержания кислорода в смеси (E_z)_{min} возрастает, расчеты показали, что при низких парциальных давлениях кислорода объемными процессами можно пренебречь и

p_{He} мм рт. ст.	0,20										0,27	0,40					
% O_2 в He	0	5	7	9	11	14	20	25	100	0	5	10	18	20	25		
$E_z(0)$, в/см	2,7	2,8	2,0	3,1	3,2	3,3	3,5	3,7	5,8	3	3,1	3,2	3,8	4,2	4,7		
$E_z(B)_{кр}$, в/см	1,4	1,5	1,7	1,9	2	2,1	2,3	2,6	5,1	1,6	1,8	2,3	2,8	3,1	3,9		
$B_{кр}(зкс)$, гс	800	720	650	610	560	540	500	520	470	1200	1100	1050	800	640	570		

уменьшение $B_{кр}$ в присутствии примеси кислорода можно объяснить увеличением продольного градиента потенциала в положительном столбе. Это согласуется с вышеупомянутой теорией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadomtzev B. B. and Nedospasov A. V. J. Nucl. Energy. Part C. 1; 230, 1960.
2. Ахмедов А. Р. и Зайцев А. А. Вестн. МГУ, физика—астрономия, № 1, 3, 1964.
3. Нох F. G. Phys. Fluids., 5, 22, 1962.
4. Вдовин В. Л. и Недоспасов А. В. ЖТФ, т. XXXII, вып. 7, 817, 1962.

Г. И. Эфенди́ев, К. М. Дашдэмиров

Гелий-оксиген гарышыгы плазмасынын винтвары дајаныгсызлыгынын тэдиги

ХҮЛАСӘ

Тәчрүбә заманы плазманы винтвары дајаныгсызлыг Һалына кәти-рән магнит сәһәсинин бәһран гймәтләри тәјин едилимишдир. Алын-мыш нәтичәләр кәстәрир ки, магнит сәһәсинин критик гймәти Һели-умда оксиген газы гарышыгынын тәзјигинин артмасы илә азалыр. Бу гарышыг мүсбәт сүтунда потенциалын узунуна градијентинин артмасы илә әләгәләндирилмиш вә нәтичәләрин мөвчуд нәзәријјә илә ујғун-луг тәшкил етдији кәстәрилмишдир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Л. А. МУХАРСКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ СТАБИЛЬНОСТИ ТРАНСФОРМАТОРНЫХ МАСЕЛ

Одним из основных требований, предъявляемых к трансформаторным маслам, является их термическая стабильность. Масла после длительной работы в силовых трансформаторах в условиях рабочих температур (70—80°C) должны характеризоваться незначительным изменением своих первоначальных свойств. Этому требованию удовлетворяли бакинские масла из высококачественной балаханской масляной нефти. Однако за последние годы в связи с ростом энергетической базы страны и уменьшением ресурсов этой нефти в производство трансформаторных масел вовлекаются более смолистые и менее доброкачественные нефти (бузовнинская, сернистые и высокопарафинистые нефти восточных районов страны и др.). Поэтому выпускаемые в настоящее время заводами трансформаторные масла не удовлетворяют возросшим требованиям эксплуатации прежде всего по антиокислительной стабильности. В маслах после двух-трех лет работы трансформаторов наблюдается преждевременное образование агрессивных низкомолекулярных кислот, что приводит к необходимости частой замены масел, производству внеплановых ремонтов и ревизий трансформаторов, порче твердой изоляции и в конечном счете к авариям с выходом трансформаторов из строя.

Соответствие качества масел действующему в настоящее время стандарту (ГОСТ 982—56) по всем показателям, в том числе и по антиокислительной стабильности, не всегда гарантирует необходимую стабильность масел в условиях эксплуатации. В связи с этим нами для изучения антиокислительной стабильности масел был применен статистический метод окисления, близкий к условиям работы масел в трансформаторах. Масла в количестве 500 см³ выдерживали в течение 300 часов при температуре 105°C в условиях свободного доступа воздуха к поверхности. Для имитации работы масел в трансформаторах окисление проводилось как в отсутствие, так и в присутствии катализаторов—меди и железа. Оценка стабильности масел производилась по изменению их электрических и химических характеристик.

Проведенные исследования показали, что из электрических характеристик наиболее чувствительными показателями, непосредственно связанными со склонностью масел к окислению, оказались электропроводность и тангенс угла диэлектрических потерь. В окисленных маслах, как и в исходных, дипольно-релаксационная поляризация отсутствует, т. е. диэлектрические потери в них обусловлены сквозной омической проводимостью. Поэтому величина $\operatorname{tg} \delta$ окисленных ма-

сел полностью определяет электрическую стабильность их при окислении.

Химическая стабильность масел характеризовалась изменением в процессе окисления кислотного числа, содержания водорастворимых при снятии электрических показателей, так и при производстве химических анализов, осадок находился во взвешенном состоянии и оказывал непосредственное влияние на полученные результаты.

Нами изучалась стабильность масел, изготовленных из различных бакинских нефтей, принятым кислотно-щелочным методом очистки. Расход кислоты составлял 8 % на дистиллят. Результаты окисления масел представлены в табл. 1. В той же таблице приведены некоторые характеристики масел в исходном состоянии. По остальным показателям масла удовлетворяли требованиям стандарта. Исключение составляло масло, полученное из нефти „Нефтяных Камней“, характеризующееся повышенной температурой застывания (минус 25°C при норме минус 45°C). Однако, учитывая перспективность указанного месторождения, целесообразно применение этих масел как в условиях теплого климата, так и в других климатических условиях в сочетании с депрессорными присадками или с использованием процесса депарафинизации.

Полученные результаты свидетельствуют о заметном влиянии исходного сырья на склонность масел к окислению. При принятом режиме очистки из масел бакинского происхождения наиболее стабильны как по электрическим, так и по химическим показателям масла, полученные из малосмолистых нефтей—балаханской масляной и сураханской отборной.

Таблица 1
Характеристика масел, полученных из бакинских нефтей
кислотно-щелочным методом очистки

Масло	Время окисления, час.	Условия окисления	$\operatorname{tg} \delta$ в %			Кислотное число, мг КОН/г	Водорастворимые кислоты		Цвет, марки НРА
			при 20°C	при 70°C	при 100°C		мг КОН/г	реакция	
Товарное из бузовнин- ской неф- ти	0	—	0,1	0,8	2,5	0,006	0	нейтральная	1 1/2
	300	без катали- заторов	0,6	5,9	19	0,052	0,017	кислая	4 минус
	300	с катализа- торами	1,0	17	50	0,12	0,035	.	7
Из балахан- ской мас- ляной нефти	0	—	0,04	0,4	1,5	0,007	0	нейтральная	1
	300	без катали- заторов	0,05	0,5	1,7	0,01	0,003	.	2 минус
	300	с катализа- торами	0,4	3,5	10,5	0,03	0,004	.	2 1/2
Из сурахан- ской от- борной нефти	0	—	0,1	0,8	2,5	0,01	0	нейтральная	1
	300	без катали- заторов	0,1	0,9	2,9	0,025	0,003	.	1 1/2
	300	с катализа- торами	0,4	3,7	10,8	0,035	0,004	.	3 минус
Из нефти „Нефтя- ных Кам- ней“	0	—	0,1	1,1	3,2	0,01	0	нейтральная	1 1/2
	300	без катали- заторов	0,6	6,4	22	0,05	0,018	кислая	4 минус
	300	с катализа- торами	1,3	17	50	0,14	0,032	.	7

В соответствии с общеустановленным положением металлы (медь и железо) значительно ускоряют процесс окисления масел (табл. 1). Для исследуемых бакинских масел закономерности, полученные при их окислении в отсутствие катализаторов, сохраняются при старении тех же масел в присутствии катализаторов. Это, по-видимому, обуславливается самим процессом кислотной обработки, при котором в маслах остаются в определенном количестве ароматические углеводороды и смолистые вещества.

Основным недостатком масел из нефтей бузовнинской и „Нефтяных Камней“ является склонность к образованию низкомолекулярных кислот в процессе старения, что соответствует появлению в этих маслах кислой реакции водной вытяжки при эксплуатации их в трансформаторах. Принятая глубина очистки (8 % кислоты на дистиллят) является недостаточной для масел из указанных нефтей. Изучение группового химического состава показало, что низкая стабильность масел из этих нефтей обусловлена в основном повышенным содержанием в них смолистых веществ; некоторое влияние оказывает также характер строения входящих в состав масел ароматических углеводородов.

Для получения высококачественных трансформаторных масел из используемых бакинских нефтей необходимо привлечь новые, более совершенные технологические приемы их очистки. Одним из таких способов является непрерывная адсорбционная очистка, разработанная во ВНИИ НП [1—3]. Изучалась возможность применения этого метода очистки для улучшения качества бакинских трансформаторных масел. Масла изготавливались в ИНХП АН Азербайджанской ССР непрерывным контактированием нисходящего слоя адсорбента с восходящим потоком трансформаторного дистиллята, предварительно разбавленного растворителем. В качестве адсорбента применялась крошка алюмосиликатного катализатора гранулометрического состава 0,25 ÷ 0,5 мм. Растворителем служил бензин сураханской отборной нефти с содержанием ароматических углеводородов около 5 %. Исходя из оптимального значения вязкости рабочего потока раствора, растворитель был взят в отношении 1:1,5 к дистилляту. После очистки он отгонялся из масляного раствора. Соотношение адсорбента к дистилляту составляло 1:1.

Таблица 2

Характеристика масел, полученных из бакинских нефтей адсорбционным методом очистки

Масло	Время окисления, час	Условия окисления	tg δ в %			Кислотное число, мг КОН/г	Водорастворимые кислоты		Цвет, марки НРА
			при 20°С	при 70°С	при 100°С		мг КОН/г	реакция	
Из бузовнинской нефти	0	—							
	300	без катализаторов	0,02	0,2	0,6	0,006	0	нейтральная	1
	300	с катализаторами	0,05	0,5	1,7	0,01	0,002	„	1½
Из нефти „Нефтяных Камней“	0	—							
	300	без катализаторов	0,03	0,3	0,8	0,007	0	нейтральная	1
	300	с катализаторами	0,04	0,4	1,5	0,01	0,002	„	1½
			0,1	2,6	8,2	0,027	0,004	„	2

Характеристика полученных масел представлена в табл. 2. По всем показателям масла отвечали требованиям стандарта, за исключением температуры застывания для масла из нефти „Нефтяных Камней“ (около минус 25°С). Снижение температуры застывания этого его адсорбционной очистки, при этом депрессатор не оказывал отрицательного влияния на электрические свойства и антиокислительную стабильность масел.

Как видно из полученных результатов, масла адсорбционной очистки характеризуются исключительно низкими диэлектрическими потерями, что обуславливается самим процессом очистки, обеспечивающим наиболее полное удаление из масел проводящих компонентов. Окисление масел как в отсутствие, так и в присутствии катализаторов показывает, что очистка в движущемся слое адсорбента обеспечивает получение стабильных трансформаторных масел, удовлетворяющих современным требованиям эксплуатации, из смолистых нефтей—бузовнинской и „Нефтяных Камней“.

Изучение группового углеводородного состава показало, что масла адсорбционной и кислотно-щелочной очистки, полученные из одного и того же сырья, характеризуются примерно одинаковым содержанием ароматических углеводородов. Высокая антиокислительная стабильность масел адсорбционной очистки обусловлена хорошей селективной способностью адсорбента, обеспечивающей удаление из дистиллятов нежелательных компонентов, прежде всего смолистых веществ, и переход в масло необходимого количества ароматических углеводородов и других естественных ингибиторов окисления.

Для исследуемых бакинских масел характерно соответствие изменений в процессе окисления электрических показателей нарастанию в маслах кислых продуктов реакции, т. е. электрическая стабильность масел определяет склонность их к термическому старению.

В последнее время освоено производство масел из сернистых парафинистых нефтей восточных районов СССР. На Новоуфимском нефтеперерабатывающем заводе нашел промышленное применение селективный метод очистки [4, 5]. Сущность процесса селективной очистки заключается в избирательной физической экстракции растворителем нежелательных компонентов, находящихся в дистилляте. В качестве растворителя применяется фенол. Для достижения необходимой температуры застывания масла проходят депарафинизацию в растворе метил-этил-кетона и толуола. Масла, полученные селективным методом очистки смеси сернистых нефтей (туймазинская, мухановская, бавлинская и др.), характеризует табл. 3.

Новокуйбышевским нефтеперерабатывающим заводом совместно с ВНИИ НП разработана технология получения масел из смеси сернистых нефтей (туймазинская, мухановская, бавлинская и др.) методом гидрирования [6]. Сущность процесса заключается в том, что воздействие водорода при высоких температурах в присутствии катализаторов на нежелательные серу и кислородсодержащие высокомолекулярные соединения, входящие в состав исходных дистиллятов, способствует их распадом. При этом непредельные углеводороды превращаются в предельные, увеличивается содержание метано-нафтенных углеводородов в маслах и снижается содержание нежелательных компонентов—смоли и тяжелых ароматических углеводородов. Гидрирование производится при давлении 40 ат, температуре 400—425°С, скорости подачи сырья порядка 0,5 час⁻¹ с использованием алюмо-кислород-молибденового катализатора. Депарафинизация гидрогенизата осуществляется в растворе метил-этил-кетона и толуола.

Характеристика гидроочищенных масел приведена в той же табл. 3. Здесь приведены также данные, характеризующие трансформаторные масла.

Таблица 3

Характеристика масел, полученных из сернистых нефтей
разными методами очистки

Масло	Время окисления, час	Условия окисления	tg δ в %			Кислотное число, мг КОН/г	Водорастворимые кислоты		Цвет, марки НРА
			при 20° С	при 70° С	при 100° С		мг КОН/г	реакция	
Фенольной очи тки Новоуфим- ского заво- да, до ввода стабили- зирующей присадки	0	— без катали- заторов с катализа- торами	0,03	0,2	0,6	0,01	0	нейтральная	1 1/2
	300		0,1	1,0	2,5	0,02	0,002	"	2
	300		1,3	14	48	0,15	0,04	кислая	7
Гидроочи- стки Нова- куйбис- евского завода	0	— без катали- заторов с катализа- торами	0,2	2,1	5,8	0,01	0	нейтральная	2 1/2
	300		0,6	7,1	21	0,02	0,003	"	5
	300		0,8	9,5	27	0,03	0,004	"	7
Адсорбци- онной очистки (получено во ВНИИ НП по схеме №1)	0	— без катали- заторов	0,3	2,5	6,9	0,01	0	нейтральная	2 1/2
	300		1,4	1,2	30	0,04	0,008	"	4 1/2
Адсорбцион- ной очист- ки (полу- чено во ВНИИ НП по схеме №2)	0	— без катали- заторов с катализа- торами	0,05	0,5	1,3	0,01	0	нейтральная	1
	300		0,1	0,8	2,2	0,02	0,004	"	1 1/2
	300		0,3	2,8	8,8	0,04	0,007	"	2 1/2

маторные масла, полученные из смеси сернистых нефтей (туймазинской, мухановской, бавлинской и др.) методом непрерывной адсорбционной очистки. Адсорбционная очистка осуществлялась во ВНИИ НП по двум технологическим схемам, различающимся между собой последовательностью операций. По первой схеме исходная дистиллятная фракция направляется на адсорбционную очистку, где из нее извлекаются нежелательные компоненты. Полученный основной рафинат далее подвергается депарафинизации, в результате чего получается масло, застывающее при низких температурах. Лучшее качество масел обеспечивается очисткой по второй технологической схеме, согласно которой трансформаторный дистиллят подвергается депарафинизации. Депарафинированный дистиллят направляется на очистку движущимся адсорбентом, после чего получается готовое трансформаторное масло с низкой температурой застывания. Депарафинизация в обоих случаях производилась в растворе метил-этил-кетона и толуола.

Анализируя результаты, прежде всего следует отметить различное действие катализаторов на процесс окисления масел. Если для бакинских масел кислотно-щелочной очистки наблюдалось закономерное ускорение процесса окисления в присутствии катализаторов, то для

масел сернистых нефтей интенсивность действия катализаторов различна в зависимости от технологии их изготовления.

Особенностью масел селективной очистки является резкое ускорение процесса окисления в присутствии катализаторов. Из результатов окисления этих масел без катализаторов можно сделать заключение о высокой стабильности масел фенольной очистки, по сравнению с бакинскими товарными маслами. Присутствие катализаторов, главным образом меди, заметно интенсифицирует процесс старения масел, что выражается в значительном повышении tg δ, кислотного числа и соотв. очистки обусловлена спецификой их группового углеводородного состава, чрезмерным удалением ароматических углеводородов, также оставшейся в них серой (в количестве 0,5 %), ведущей себя более агрессивно в присутствии меди. Низкая стабильность масел селективной очистки отмечалась также другими авторами [7]. Было сделано заключение о необходимости добавления в эти масла антиокислительной присадки (топанол-о) для повышения их стабильности.

Масла селективной очистки характеризуются низкими исходными значениями tg δ и электропроводности и пологими температурными зависимостями этих показателей, что свидетельствует о глубоком удалении из дистиллятов проводящих компонентов.

Для масел селективной очистки, как и для бакинских, характерна зависимость изменения в процессе окисления электрических характеристик от изменения кислотных чисел, содержания водорастворимых кислот и цвета. Однако рост электрических показателей масел в процессе окисления не всегда соответствует повышению содержания в них кислых продуктов. Масла сернистых нефтей, полученные методом гидроочистки, характеризуются несколько иным протеканием окислительных реакций. У гидроочищенных масел заметное повышение в процессе окисления tg δ сопровождается незначительным возрастанием кислотных чисел, содержания водорастворимых кислот и нейтральной реакцией водной вытяжки. Различный характер окислительных реакций исследуемых масел связан с различием в их групповом химическом составе. Метано-нафтенная фракция масел характеризуется стабильностью электрических показателей при склонности к окисляемости по химическим показателям. Добавление ароматических углеводородов к метано-нафтенным повышает химическую стабильность последних против окисления, но ухудшает при этом стабильность по tg δ [8]. Возрастание tg δ в процессе окисления гидроочищенных масел обусловлено повышенным содержанием в них ароматических углеводородов, обеспечивающих незначительное нарастание в маслах кислых продуктов реакции. Таким образом, высокая стабильность масел по химическим показателям не всегда обуславливает устойчивость их электрических параметров.

Гидроочищенные масла, содержащие относительно большое количество ароматических углеводородов, характеризовались значительно меньшим катализирующим воздействием металлов, чем бакинские и тем более масла селективной очистки. Недостатком гидроочищенных трансформаторных масел из сернистых нефтей, помимо низкой электрической стабильности, является образование при старении относительно большого количества осадка.

По характеру окисления к гидроочищенным близки масла, полученные непрерывной адсорбционной очисткой по первой технологической схеме. Анализ группового химического состава показал относительно высокое содержание в этих маслах ароматических углеводородов, обуславливающее повышение в процессе окисления величины tg δ при незначительном нарастании кислых продуктов реакции.

Значительно лучшие результаты получены для масел адсорб-

ционной очистки, изготовленных из тех же сернистых нефтей по второй технологической схеме, с предварительной депарафинизацией дистиллята. Обработка депарафинированного дистиллята движущимся адсорбентом обеспечивает селективное удаление из него нежелательных компонентов и переход в масла необходимых ингибиторов окисления. В этом случае масла характеризуются высокой электрической и химической стабильностью, вполне отвечающей современным требованиям эксплуатации (табл. 3). Полученные результаты свидетельствуют о необходимости промышленного применения метода непрерывной адсорбционной очистки на нефтеперерабатывающих заводах для улучшения качества выпускаемых масел.

Выводы

Изменение электрических характеристик трансформаторных масел в процессе окисления не всегда соответствует нарастанию в них кислотных продуктов реакции. Несоответствие электрических и химических характеристик масел обусловлено в основном особенностями их группового химического состава. Для исследованных гидроочищенных масел сернистых нефтей такое несоответствие обуславливается повышенным содержанием в них ароматических углеводородов.

Действие катализаторов на процесс старения масел различно в зависимости от их группового химического состава. Для бакинских масел наблюдалось закономерное ускорение процесса окисления в присутствии катализаторов. Масла сернистых нефтей селективной очистки характеризовались резким ускорением процесса старения в присутствии катализаторов. Гидроочищенные масла сернистых нефтей, содержащие относительно большое количество ароматических углеводородов, отличаются значительно меньшим катализирующим воздействием металлов.

Основным недостатком бакинских трансформаторных масел из бузовинской нефти кислотно-щелочной очистки является их склонность к образованию низкомолекулярных кислот в процессе старения. Недостатком трансформаторных масел сернистых нефтей селективной очистки является низкая электрическая и химическая стабильность при контакте их с катализаторами, главным образом медью. Основным недостатком трансформаторных масел сернистых нефтей, полученных методом гидрирования, является, помимо низкой электрической стабильности, образование при старении повышенного количества осадка.

Значительное улучшение качества трансформаторных масел может быть достигнуто применением метода непрерывной адсорбционной очистки, обеспечивающей выработку высококачественных трансформаторных масел, отвечающих современным требованиям эксплуатации, из смолистых бакинских нефтей (бузовинской, „Нефтяных 1-амней“ и др.), а также сернистых высокопарафинистых нефтей восточных районов страны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жердева Л. Г., Михайлов И. А., Демченко А. Д., Черченко Н. В., Тимофеева К. М. Тр. ВНИИ НП, VII. Гостоптехиздат, М., 1958.
2. Жердева Л. Г., Михайлов И. А., Демченко А. Д., Левинсон С. З., Черченко Н. В., Тимофеева К. М. Тр. ВНИИ НП, VII. Гостоптехиздат, М., 1958.
3. Джуварлы Ч. М., Кулиев Р. Ш., Мухарская Л. А., Дрейзин М. М., Чикарева Н. И. АНХ, 1961, № 3.
4. Карасева А. А., Жердева Л. Г., Вознесенская Е. В. Тр. ВНИИ НП, VII. Гостоптехиздат, М., 1958.
5. Вознесенская Е. В., Слугина З. П., Кутукова В. И., Якоби Ф. С., Шахсуварова Г. В., Васильева Н. И., Грязнов Б. В., Розенштейн М. З. Тр. ВНИИ НП. Гостоптехиздат, М., 1958.

6. Гольдштейн Д. Л., Рысаков М. В., Скрипник З. М., Рогов С. П. Тр. ВНИИ НП, УЦ. Гостоптехиздат, М., 1958.
7. Липштейн Р. А., Иванов К. И., Михельсон А. Я. Оценка эксплуатационных свойств трансформаторных масел. Химия и технология топлив и масел, 7, 1963.
8. Крейн С. Э., Кулакова Р. В. Нефтяные изоляционные масла. Госэнергоиздат, М.—Л., 1959.

Ч. М. Чуварлы, Л. А. Мухарская

Трансформатор јағларынын термик дајаныглыгынын тэдиги

ХҮЛАСӘ

Трансформатор јағларынын тэдиги онларын трансформатордакы иш шэраитинә јахын бир ҳалда апарылмышдыр.

Јағларын електрик дајаныглыгы оксидләшмә просесиндә диелектрик итки бучағы танкесинин, кимјәви дајаныглыгы исә туршу рәғәми вә суда һәлл олан туршуларын тәркибинин дәјишмәсилә характеризә олунур.

Јағларын трансформатордакы ишинә ујғун олараг, оксидләшмә катализаторун (мис вә дәмир) иштиракы илә вә һәмчинин иштиракы олмадан апарылмышдыр.

Апарылан тэдигатлар көстәрир ки, оксидләшмә просесиндә тгд-нын дәјишмәси јағлардакы туршу реаксияларынын мәһсулларынын артмасына һәмишә ујғун олмур.

Јағларын електрик вә кимјәви характеристикаларынын ујғунлуғу, әсасән, онларын групунун кимјәви тәркибинин хүсусијјәтләрилә изаһ олунур.

Катализаторун јағларын көһнәлмәси просесинә тә’сири онларын групунун кимјәви тәркибиндән асылы олараг мүхтәлиф олур.

Селектив тәмизләнмиш күкүрдлү нефт јағынын көһнәлмә просесинин кәскин сүр’әтләнмәси катализаторун олмасы илә характеризә едилур.

Тәркибиндә нисбәтән чоҳ ароматик карбон олан гидро-тәмизләнмиш күкүрдлү нефт јағына металларын катализатор тә’сиринин кифајәт гәдәр аз олдуғу гејд едилмишдир.

Трансформатор јағларынын кејфијјәтинин кифајәт гәдәр јахшылашдырылмасына фәсиләсиз адсорбцион тәмизләмә методуну тәтбиғ етмәклә наил олмаг олар.

Бу метод Бакынын гатранлы вә өлкәнин шәрг рајонларынын күкүрдлү-парафинли нефтләриндән һазыркы истисмарын тәләбләринә чаваб верән, јүксәк кејфијјәтли трансформатор јағларынын һазырланмасына тә’мин едир.

Я. Д. ВИШНЯКОВ, Г. Ш. ГАСАНОВ и Я. С. УМАНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ УПАКОВКИ В РЯДЕ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ МЕДИ

Согласно теории дифракции отраженных рентгеновских лучей от кристалла наличие дефектов упаковки в случае металлов с г. ц. к. решеткой проявляется в виде трех эффектов: уширения интерференционных максимумов, смещения положения их пиков и изменения интенсивности [1—6]. Смещение пика максимума пропорционально деформационным дефектам упаковки α , а также зависит от индексов интерференции [6]:

$$\Delta(2\theta^\circ) = \frac{90\sqrt{3}\alpha \operatorname{tg} \theta}{\pi^2(u+b)h_0^2} \sum (\pm) L_0, \quad (1)$$

где θ — угол Вульфа—Брэгга; $h_0^2 = h^2 + k^2 + l^2$ (h, k, l — индексы плоскостей в кубической решетке); $L_0 = |h+k+l|$ — третий индекс в гексагональном обратном пространстве г. ц. к. решетки; u — доля компонентов не испытывающих влияния дефектов упаковки; b — доля компонентов, испытывающих это влияние. При этом показано, что интерференции, удовлетворяющие условию $L_0 = 3N \mp 1$, испытывают это влияние дефекта упаковки, в то время как интерференции, для которых $L_0 = 3N$, не испытывают его.

Из формулы (1) получим, что изменение расстояния между рефлексами (111) и (200), имеющими противоположные смещения, через концентрацию дефектов выражается формулой:

$$\Delta(2\theta_{200} - 2\theta_{111}) = -\frac{45\sqrt{3}\alpha}{\pi^2} (\operatorname{tg} \theta_{200} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta_{111}). \quad (2)$$

При определении α по формуле (2) происходит частичная компенсация малого изменения периода решетки в результате холодной обработки. Если изменение периода решетки значительно, то удобно вычислить смещение, обусловленное наличием дефектов упаковки в веществе, через отношение $\sin \theta_{200}/\sin \theta_{111}$, которое при отсутствии дефектов упаковки постоянно ($\sin \theta_{200}/\sin \theta_{111} = 1,155$), а при наличии их меньше этой величины.

Имеется ряд экспериментальных работ [9—14], посвященных изучению дефектов упаковки в сплавах на основе меди. Большинство работ, в которых исследовалось влияние легирования на склонность металла к образованию дефектов упаковки, проводилось на сплавах с добавкой легирующего элемента в количествах, превышающих один процент. Показано, что с увеличением концентрации легирующего элемента увеличивается склонность металла к образованию дефектов упаковки. В работе [10] обнаружено, что концентрация деформацион-

ных дефектов упаковки α возрастает в сплавах, содержащих до 40—50% Ni, а при дальнейшем возрастании содержания Ni α уменьшается. В работе [14] получилась нелинейная зависимость α от концентрации легирующего элемента.

Целью настоящей работы являлось исследование влияния как малых, так и больших добавок легирующего элемента на склонность металла с г. ц. к. решеткой к образованию дефектов упаковки.

Материалы, методы исследования, механическая и термическая обработка образцов

В работе исследовались медь и ее сплавы, содержащие 0,01; 0,02; 0,1; 15 и 18 вес. % галлия, 0,01; 0,02; 0,1; 5 и 8 вес. % германия, 23,52; 27,3; 31,4 и 33,4 вес. % цинка. Для приготовления сплавов Cu—Ga и Cu—Ge использовалась медь чистотой 99,993%, Ga—99,98%, Ge—99,999, Zn—аналитический чистый, гранулированный. Сплавы выплавлялись в алундовых тиглях, в печи сопротивления с графитовым нагревателем, в защитной атмосфере аргона. Каждый сплав переплавляли два раза, чтобы уменьшить влияние ликвидации по удельному весу. Слитки были прокованы в прутки 6—7 мм при температуре 650°C. Прутки после гомогенизирующего отжига в вакууме при 650°C в течение 24 часов прокатывались при комнатной температуре в ленту толщиной 0,4 мм. В процессе прокатки прутки, содержащие 15 и 18% Ga подвергались промежуточной закалке от 700°C в воде. Из прокатанной ленты вырезали образцы, которые подвергали рекристаллизационному отжигу при 360°C в запаянных ампулах, с выдержкой при этой температуре в течение двух часов и охлаждением в воде.

Образцы были исследованы в следующих состояниях: деформированные прокаткой на 50% после рекристаллизационного отжига; отожженные; закаленные; деформированные прокаткой на 50% после закалки деформированные после отжига шлифованием шкуркой поверхности; деформированные шлифованием шкуркой поверхности закаленных образцов. Отжиг сплавов Cu—Ga и Cu—Ge производился при 800°C в запаянных ампулах с атмосферой гелия, с выдержкой при этой температуре в течение часа, охлаждение производилось со скоростью 25°C/час. Отжиг сплавов, содержащих 15 и 18% Ga, производился при 500°C (выдержка один час), охлаждение — со скоростью 25°C/час. Отжиг сплавов Cu—Zn также производился в запаянных ампулах в атмосфере гелия. Режим отжига был следующий: выдержка при 500°C 4 часа, охлаждение в течение 24 часов до температуры 215°C, выдержка при этой температуре 10 часов далее происходило с печью.

Закалка отожженных образцов производилась с 800°C для сплавов Cu—Ge и Cu—Ga (выдержка при этой температуре 5 мин) и с 650°C для сплавов Cu—Zn (выдержка 15 мин) в воде. Деформация прокаткой и деформация шлифованием шкуркой поверхности образцов производилась при комнатной температуре. После всех термических и механических обработок, конечно, кроме шлифования поверхности, образцы полировали азотной кислотой.

Съемки велись на установке УРС-50 ИМ со счетчиком МСТР-4. Использовалось SiK_α -излучение. Фильтрация излучения меди производилась с помощью никелевого фильтра перед счетчиком. Для всех образцов непосредственно на ленте самописца были зарегистрированы линии (111) и (200), которые также регистрировались методом фиксации точек через 2' около окрестности максимума пика. В случае асимметрии линии максимум пика определялся методом Shoulder экстраполяции [14], т. е. брались точки, соответствующие точкам окрестности максимума пика и экстраполировались к максимуму пика.

Таким образом, ошибка при определении Вульф-Брэгговского угла не превышала $0,03^\circ$ по шкале 20.

Результаты исследования и обсуждения

При определении концентрации упаковки α рентген-дифрактометрическим методом обычно пользуются изменением расстояния ($2\theta_{200}$ — $2\theta_{111}$) после деформации. При этом считают, что дефекты образуются при холодной деформации, тогда как в отожженном образце количество их незначительно. Это, по-видимому, не всегда справедливо. В ряде случаев дефекты упаковки обнаруживались и у отожженных сплавов [13], тогда как в деформированных образцах они отсутствовали.

В исследованных нами сплавах концентрации дефектов упаковки были определены методом, изложенным в работах [7—8]. На рис. 1—6 представлены значения α в исследованных сплавах после механических и термических обработок. Как следует из рис. 1, отношение $\sin \theta_{200}/\sin \theta_{111}$ при малых концентрациях легирующего элемента мало изменяется в зависимости от обработки, подчас изменения лежат в пределах погрешности измерений, в то время как при больших добавках (рис. 1а) это отношение существенно зависит от обработки материала. При этом не обнаруживается линейной зависимости изменения отношения $\sin \theta_{200}/\sin \theta_{111}$ от количества легирующего элемента.

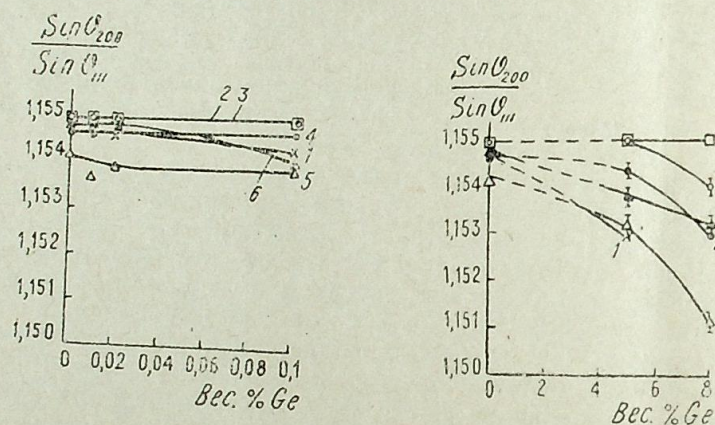


Рис. 1, 1а. Зависимость отношения синусов $\sin \theta_{200}/\sin \theta_{111}$ от состава для сплава Cu—Ge, соответственно, для малых и больших примесей: 1—деформация 50% прокаткой рекристаллизованного образца; 2—отожженные; 3—закаленные; 4—деформация 50% прокаткой после закалки; 5—шлифование отожженного образца; 6—шлифование закаленного образца.

Значение α , найденное по данным, представленным на рис. 1 и 1а, показано на рис. 2 и 2а (на этих графиках нет данных для образца с 8% Ge, деформированного прокаткой на 50% рекристаллизованного образца, из-за отсутствия в этом случае линии (200)). В хорошо отожженных образцах дефекты упаковки не обнаружены, кроме образца с 8% Ge. Во всех закаленных образцах сплавов Cu—Ge дефекты упаковки также отсутствуют. Появление дефектов упаковки в отожженном образце с 8% Ge, возможно, связано со скоростью охлаждения, при медленном охлаждении происходит сегрегация примесей на дислокациях. В процессе закалки примеси не успевают диффундировать к дислокациям. Таким образом, отожженный сплав становится более неоднородным по сравнению с закаленным. Так, микротвердость у образца с 8% Ge в отожженном состоянии больше ($H_{\text{отожж}} = 53 \text{ кг/см}^2$), чем в закаленном ($H_{\text{закален}} = 47 \text{ кг/мм}^2$). Из вышеизложенного объяснения

следует, что закалка должна способствовать уменьшению склонности меди к образованию дефектов упаковки. Как видно из рис. 2, 2а, это имеет место во всех случаях.

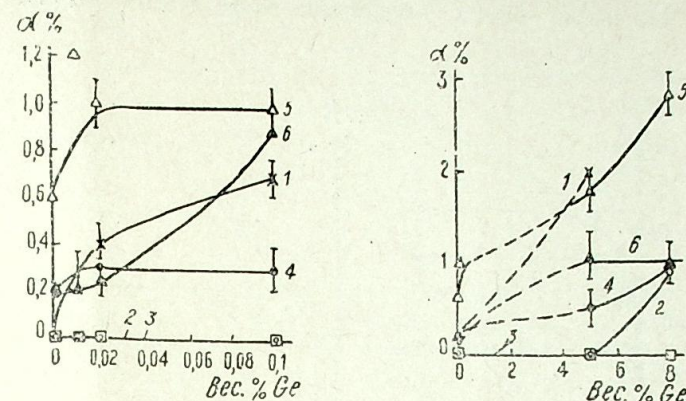


Рис. 2, 2а. Зависимость концентрации дефектов упаковки α от состава для сплава Cu—Ge, соответственно, для малых и больших примесей.

Как в сплавах медь—германий, так и в сплавах медь—галлий (рис. 3, 3а, 4, 4а) влияние малых добавок на склонность меди к образованию дефектов упаковки при данной обработке слабо и выходит за пределы погрешности измерений лишь для образцов с 0,1% примеси после

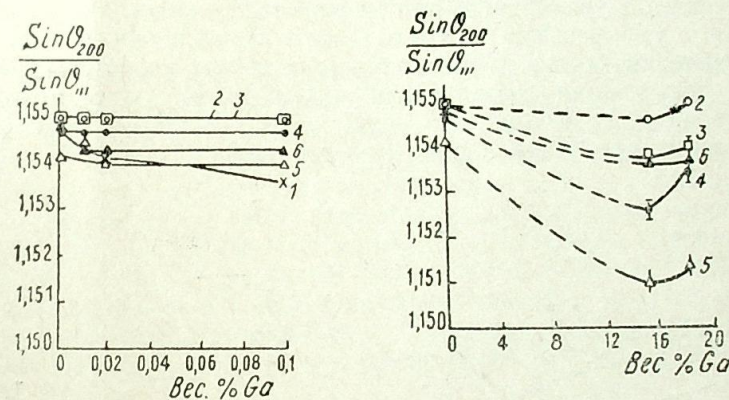


Рис. 3. 3а. То же, что на рис. 1, 1а, для сплава Cu—Ga.

деформации на 50% рекристаллизованного сплава. После закалки только у образцов с 15 и 18% Ga появляются рентгенографические эффекты, объяснимые наличием дефектов упаковки. Как видно из рис. 4а, в случае деформации шлифованием шкуркой и деформации прокаткой на 50% после закалки от высокой температуры эффект у образцов с 15 и 18% Ga уменьшается. Это, вероятно, может быть объяснено тем, что при закалке от высокой температуры в этих сплавах происходит упорядочение структуры.

Упорядочение при закалке в сплавах Cu—Ga обнаружено также авторами работы [15], в которой изучались электрические свойства твердых растворов галлия (10, 12, 16 вес. %) в меди и показано, что электросопротивления твердых растворов уменьшаются после закалки от 800°C в воде. Уменьшение электросопротивления в результате закалки становится более значительным по мере роста содержания галлия. Авторы объясняют это установлением ближнего порядка.

В отличие от Cu—Ga в сплавах Cu—Zn (рис. 5, 6) эффект при деформации шлифованием шкуркой поверхности образца после закалки несколько больше, чем в случае деформации шлифованием отожженного образца. Но после обеих обработок эффект для образцов с 31,4 и

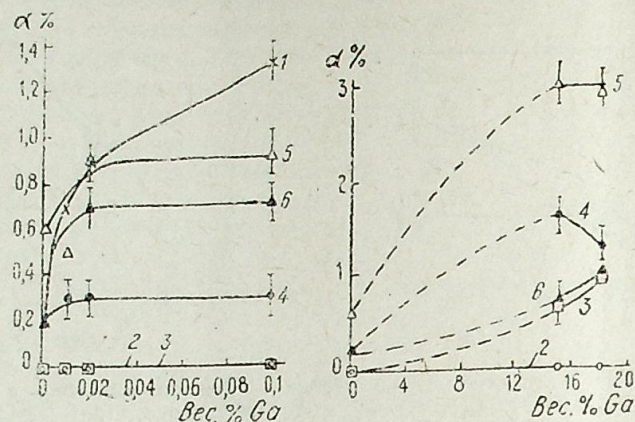


Рис. 4, 4а. То же, что на рис. 2, 2а, для сплава Cu—Ga.

33,4% Zn изменяется одинаково. В этом случае также нет данных для образцов с 31,4 и 33,4% Zn при деформации прокаткой из-за отсутствия линии (200). Закалка отожженных образцов не привела к появлению дефектов упаковки, а при деформации прокаткой на 50% после закалки α уменьшается с увеличением содержания цинка. Причина этого явления неясна. Возможно, что подобное несоответствие данных после деформации прокаткой и шлифованием чисто методического характера. Дело в том, что наличие значительной текстуры после деформации прокатной в ряде случаев может привести к смещению линий.

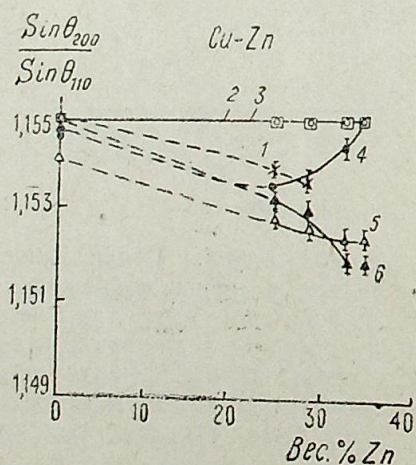


Рис. 5. То же, что на рис. 1, для сплава Cu—Zn.

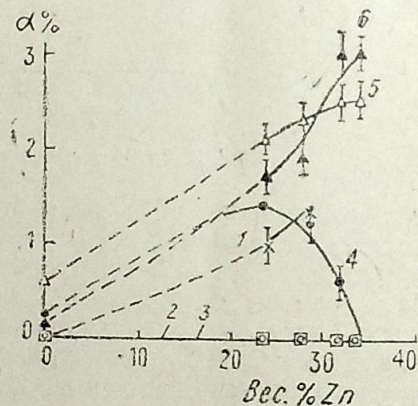


Рис. 6. То же, что на рис. 2, для сплава Cu—Zn.

Таким образом, при рассмотрении исследуемого объекта следует в основном, по-видимому, ориентироваться на данные, полученные для образцов, деформированных путем шлифования. В таблице дается значение α , вычисленное методами, изложенными в работе [8] (α_1) и по

формуле (2) (α_2), для сплавов Cu—Ga, деформированных шлифованием шкуркой поверхности отожженных образцов.

Образцы	$\alpha_1 10^{-2}$	$\alpha_2 10^{-2}$
Cu		
Cu+0,01% Ga	0,6	0,7
Cu+0,02% Ga	0,5	0,7
Cu+0,1% Ga	0,9	0,9
Cu+15% Ga	0,9	0,7
Cu+18% Ga	3,0	3,1
	2,9	2,7

Значения α , определенные обоими методами в пределах точности измерений, совпадают. На рис. 7 показан профиль линии (200), полученной непосредственно на ленте самописца для образца с 18% Ga, деформированного шкуркой после закалки. Кривые с подобной асим-



Рис. 7. Линия (200), полученная непосредственно на ленте самописца, для образца с 18% Ga, деформированного шкуркой закаленного образца.

метрией получают для образца с 15% Ga и для всех образцов Cu—Zn, деформированных шкуркой. Известно, что причинами асимметрии обычно являются: а) α_1 — α_2 дублет; б) нечеткость фона; в) вертикальная расходящаяся пучка лучей; г) поляризационный фактор и фактор Лоренца и д) двойниковые и внутренние дефекты упаковки. Эти причины асимметрии не могут дать того эффекта, какой виден на рис. 7, так как все они приводят к асимметрии в сторону больших углов. Асимметрия линии (200) к малым углам связана, по-видимому, с сегрегацией атомов легирующего элемента в областях, близких к области дефектов упаковки. Таким образом, создаются области с увеличенным периодом решетки относительно среднего по объему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Paterson M. S. J. appl. phys., 23, p. 805, (1952).
2. Wagner C. N. J. Acta metallurgica, 5, 427, (1957).
3. Wilson A. J. C. Proc. Roy. soc. A 1, 80, 277 (1942).
4. Mering J. Acta cryst., 2, 371, (1941).
5. Worren B. E., Warekois E. p. „Acta met“, 3, 473, (1955).
6. Уоррен Б. Е.—Успехи физики металлов, т. V. Металлургиздат, 1963.
7. Вишняков Я. Д., Уманский Я. С. „Изв. АН ССР, серия физич.“, 26, 3, 352, (1962).
8. Вишняков Я. Д., Уманский Я. С. „Кристаллография“, 8, № 2, (1963).
9. Foley J. H. „Acta met“, 11, № 5; 355—360, (1963).
10. Henderson B. „J. Inst. metals“, 2, № 55—56, (1963).
11. Vassamillet L. F., Massalski I. B. J. appl. phys. 34, № 11, 3402, (1963).
12. Vassamillet L. F., Massalski I. B. „J. appl. phys.“, 34, № 11, 3398, (1963).
13. ЭИМТ, вып. 7, р. 29, 1964 (обзор).
14. Vassamillet L. F. „J. appl. phys.“, 35, № 9, 2629—2633, (1964).
15. Лившиц Б. Г., Литвинов Ю. М., Сумин В. И. ФММ, 19, 3, 397, (1965).

Бир сыра мис хэлитэлэриндэ гурулуш дефектинин тэ'јини

ХҮЛАСЭ

Бу тэдгигатда ренткен дифраксија үсулу илэ сэтһинэ мэркэзлэш-миш кубик гэфэсли металда гурулуш дефектинин эмэлэ кэлмэсинин дахил едилмиш элементин мигдарындан асылылығы өрәннилмишдир.

Мүэјјән едилмишдир ки, керманиум вэ галлиумун кичик фаизлэ-риндэ мис гэфэсиндэ гурулуш дефектинин эмэлэкэлмэ еһтималы аздыр. Лакин мис гэфэсиндэ бу элементлэрин мигдары артдыгча гурулуш дефектинин эмэлэкэлмэ еһтималы артыр. Нэлл олан элементин һәм кичик, һәм дэ бөјүк фаизлэриндэ гурулуш дефектинин гатылығынын һэллолан маддэ мигдарында хэтти асылылығы мүшаһидэ олунма-мышдыр.

МҮНДЭРИЧАТ

Р. Ә. Аббасов. Санки периодик функцијаларын ән јахшы там хусуси јахынлашмалары арасында гаршылыгы элагэ һаггында	3
А. Ч. Адыкөзөлов. Үмумилэшмиш тригонометрик чохһәдлиләр үчүн бә'зи бәрабәрсизликләр	9
Г. М. Насанов. Бә'зи интерполјасија просеслэринини јыгылмасы тәртиби һаггында	14
М. Х. Нәсибов. Икигат әдәди сыраларын Бернштејн-Рогозинскинин үмуми үсулу илэ чөләнмәси	19
Г. И. Османов. $I_2^{(2)}(-\infty, \infty)$ синфиндән олан функцијаларын чеврил-мәсинин бә'зи хассәләри	24
Ә. Н. Тағызадә. Дәјишән галынлыгы лөвһәләрин сәрһәд мәсәләлэринин кичик параметр үсулу илэ һәлли	33
Д. И. Шерман. Потенциаллар нәзәријәсинини бир хусуси сәрһәд мәсә-ләси һаггында	38
Б. Т. Нүсәјнов. Група дахил олдуғда кәмиләрин көзләмә вахты һаг-гында	49
Ф. М. Нағыјева. Чәлд ишләјән код-аналог чевирчиси	55
Д. Б. Бајасанов, З. Ә. Кәримов. Автоматик газтәңзимләмә систем-ләриндә ичраәдичи механизмләрин газтәңһизаты просесинин динамикасына олан тә'сиринин тәдгиг едилмәси	59
Н. Б. Абдуллајев, Л. Н. Әлијева, К. Ш. Гәһрәманов, А. З. Гулијев. Ашгарларын сульфид-гургушунун електрик хассәләринә тә'сир	66
Ч. О. Гачар, Л. М. Иманов. Баш әталәт моментләринин ики тәртибли фәрги методунун тәтбиги	71
Н. А. Мухтаров, Р. Н. Мухтаров, Е. Н. Мухтаров. I, I, 2-үч-фторлустан молекулунун гурулушу	74
В. А. Иванова, Г. М. Әлијев. Хром ашгарларынын кристал вә маје селенин електриккечирмәсинә тә'сир	78
М. Ә. Әличанов, Ј. Н. Нәсиров, П. Н. Рүстәмов. GaTe—SnTe системиндә истилик вә електрик хассәләринин тәдгиги	82
А. И. Мухтаров, Р. Х. Мурадов. Јүксәк енержили π -мезонларын электронлардан еластики сәпилмәси	86
Н. И. Аббасов. Электрон рәгәм һесаблама машиналарынын спектрограм-ларынын ишләдилмәсинә тәтбиги	92
Г. И. Әфәндијев, К. М. Дашдәмиров. Гелиум-оксикен гарышыгы плазмасынын винтвары дајаныгсызлыгынын тәдгиги	97
Ч. М. Чуварлы, Л. А. Мухтарскаја. Трансформатор јағларынын термик дајаныглыгынын тәдгиги	100
Ј. Д. Вишњаков, Г. Ш. Насанов, Ј. С. Умански. Бир сыра мис хэлитэлэриндэ гурулуш дефектинин тэ'јини	108

СОДЕРЖАНИЕ

Р. А. Аббасов. О взаимосвязи между полным и частными наилучшими приближениями почти-периодических функций	3
А. Д. Адигезалов. Некоторые неравенства для обобщенных тригонометрических полиномов	9
Г. М. Гасанов. О порядке сходимости некоторых интерполяционных процессов	14
М. Х. Насибов. Суммирование двойных числовых рядов общим методом Бернштейна-Рогозинского	19
Г. И. Османов. Некоторые свойства преобразований Фурье, функций из класса $L^{(2)}(-\infty, \infty)$	24
А. Г. Таги-заде. Решение краевых задач теории пластин переменной толщины методом малого параметра	33
Д. И. Шерман. Об одной частной краевой задаче теории потенциала	38
(II)* Б. Т. Гусейнов. О времени ожидания судов, прибывающих составами	49
Ф. М. Нагиева. Быстродействующий преобразователь Код-аналог	55
Д. Б. Баясанов, З. А. Керимов. Исследование влияния режимов работы исполнительных механизмов автоматизированных систем на динамику процессов газоснабжения	59
Г. Б. Абдуллаев, Л. Н. Алиева, К. Ш. Каграманов, А. З. Кулиев. Влияние примесей на электрические свойства сульфида свинца	66
Ч. О. Каджар, Л. М. Иманов. Применение метода вторичных разностей главных моментов инерции	71
И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров, Э. И. Мухтаров. Молекулярная структура 1, 1, 2-трифторэтана	74
В. И. Иванова, Г. М. Алиев. Влияние примесей хрома на электропроводность кристаллического и жидкого селена	78
М. А. Алиджанов, Я. Н. Насиров, П. Г. Рустамов. Исследование тепловых и электрических свойств системы GaTe—SnTe	82
А. И. Мухтаров, Р. Х. Мурадов. Упругое рассеяние π -мезонов высоких энергий на электронах	86
Г. И. Аббасов. Применение ЭЦВМ для обработки спектрограмм	92
К. И. Эфендиев, К. М. Дашдамиров. Исследование винтовой неустойчивости плазмы в смеси гелий—кислород	97
Ч. М. Джуварлы, Л. А. Мухарская. Исследование термической стабильности трансформаторных масел	100
Я. Д. Вишняков, Г. Ш. Гасанов, И. Я. Суманский. Исследование деформационных дефектов упаковки в ряде сплавов на основе меди	108