

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1

1967

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Т. А. ЗАМАНОВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)), \quad (1)$$

где $x(t)$ — искомая функция со значениями из банахова пространства E ; A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в E ; f — нелинейный оператор со значениями в E ; числа τ_i положительные и $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$.

Дифференциальное уравнение (1) будем рассматривать при условии

$$x(t) \equiv 0, \text{ при } -\tau_m \leq t < 0 \text{ и } x(0) = \varphi_0, \quad (2)$$

где φ_0 — некоторый элемент пространства E .

1°. Будем делать следующие предположения.

Оператор A порождает сжимающую полугруппу e^{-tA} ,

$$\|e^{-tA}\| \leq 1, \quad (3)$$

функция $f(t, u_1, u_2, \dots, u_{m+1})$ непрерывна в топологическом произведении $[0, \infty) \times \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{m+1}$ и удовлетворяет условию

$$\|f(t, u_1, u_2, \dots, u_{m+1})\| \leq \kappa(t) [F(\|u_1\|) + F(\|u_2\|) + \dots + F(\|u_{m+1}\|)]. \quad (4)$$

Здесь $\kappa(t)$ — непрерывная положительная функция на $[0, \infty)$, а $F(r)$ — кусочно-непрерывная, неотрицательная, неубывающая для $r \geq 0$, причем

$F(r) = 0$ тогда и только тогда, если $r = 0$; $\int_0^\infty \frac{dr}{F(r)} = \infty$. Для определенности пусть $\|\varphi_0\| = r_0$. При сделанных выше предположениях задач (1) — (2) сводится к следующей задаче:

$$x(t) = e^{-tA} \varphi_0 + \int_0^t e^{-sA} f(s, x(s), x(s - \tau_1), \dots, x(s - \tau_m)) ds \quad (5)$$

с условием (2). Непрерывное решение задачи (5) — (2) называем обобщенным решением задачи (1) — (2). Имеет место следующая

Теорема 1. При вышеуказанных предположениях существует, притом единственное решение задачи (5) — (2).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор), Г. Б. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция "Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)"

Доказательство. Обозначим $\lambda(t) = \kappa(t) + \kappa(t + \tau_1) + \dots + \kappa(t + \tau_m)$. Пусть $r(t)$ — дифференцируемая функция и $0 < r_0 \leq r(t)$. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\int_{r_0}^r \frac{d\rho}{F(\rho)} = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (0 \leq t < \infty). \quad (6)$$

Здесь обе части, правая и левая, являются монотонными функциями, следовательно, из этого уравнения r можно найти однозначно как функцию от t , в интервале $0 \leq t < \infty$. Эта функция удовлетворяет условию $r(0) = r_0$ и находится как единственное решение эквивалентного с (6) дифференциального уравнения

$$r' = \lambda(t)F(r) \quad (7)$$

с начальным условием

$$r(0) = r_0. \quad (8)$$

Рассмотрим полное метрическое пространство C_{φ_0} всевозможных непрерывных функций, определенных на $[-\tau_m, \infty)$ со значениями в пространстве E , причем все эти функции на отрезке $[-\tau_m, 0)$ тождественны нулевому элементу пространства E и в точке $t = 0$ совпадают с заданным элементом φ_0 . Метрика обычная:

$$\rho(x(t), y(t)) = \sup \|x(t) - y(t)\|, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Рассмотрим в пространстве C_{φ_0} множество R , состоящее из семейства функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\|x(t)\| \leq r(t)$ в интервале $0 \leq t < \infty$. Оператор

$$Bx(t) = e^{-tA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-sA}f(s, x(s), x(s - \tau_1), \dots, x(s - \tau_m))ds$$

с условием (2) определен на множестве R и отображает это множество в себя, т. е. $BR \subset R$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|Bx(t)\| &\leq \|e^{-tA}\varphi_0\| + \int_0^t \|e^{-sA}f(s, x(s), x(s - \tau_1), \dots, x(s - \tau_m))\| ds \leq \\ &\leq \|\varphi_0\| + \int_0^t \kappa(s)[F(\|x(s)\|) + F(\|x(s - \tau_1)\|) + \dots + F(\|x(s - \tau_m)\|)] ds \leq \\ &\leq \|\varphi_0\| + \int_0^t \lambda(s)F(\|x(s)\|) ds \leq r_0 + \int_0^t \lambda(s)F(r(s)) ds = r(t) \end{aligned}$$

для любого $x(t)$ из R , следовательно, $BR \subset R$. Тогда на основании принципа сжатых отображений утверждаем существование и единственность решения.

Следствие. При предположениях теоремы 1, если

$$\int_0^\infty \kappa(t) dt < \infty, \text{ но } \int_{r_0}^\infty \frac{d\rho}{F(\rho)} = \infty, \text{ существует ограниченное решение}$$

задачи (5)–(2).

Доказательство. При этих дополнительных условиях из уравнения (6) r определяется как ограниченная функция переменного t в интервале $0 \leq t < \infty$. В самом деле при $t \rightarrow \infty$, $r(t)$ не может бесконечно возрастать, ибо равенство (6) нарушилось бы, поэтому

при $t \rightarrow \infty$ функция $r(t)$ остается ограниченной. Тогда, повторяя доказательство теоремы 1, замечаем, что определенное выше множество R оказывается семейством ограниченных функций в $0 \leq t < \infty$. Следовательно, неподвижная точка, являющаяся элементом множества R , также ограничена в $0 \leq t < \infty$.

Замечание. До сих пор мы предполагали, что оператор A порождает сжимающую полугруппу. Если оператор A порождает полугруппу

$$\|e^{-tA}\| \leq M,$$

указанная теорема остается в силе. В этом случае в качестве функции $\lambda(t)$ следует брать $\lambda(t) = M[\kappa(t) + \kappa(t + \tau_1) + \dots + \kappa(t + \tau_m)]$.

2°. Пусть теперь линейный оператор A является сильно позитивным оператором, т. е. он замкнутый, имеет плотную область определения и существует постоянная $C_1 > 0$,

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C_1}{1 + |\lambda|} \quad (9)$$

при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Если A — сильно позитивный оператор, то, как показал М. З. Соляк [1], оператор $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы e^{-tA} ($t \geq 0$), так что существуют постоянные C_2 и $\mu > 0$ такие, что имеют место следующие оценки:

$$\|e^{-tA}\| \leq C_2 e^{-\mu t}, \quad (10)$$

$$\|Ae^{-tA}\| \leq \frac{C_2 e^{-\mu t}}{t}. \quad (11)$$

Оценка (9) позволяет (см. [2]) определить любые отрицательные дробные степени $A^{-\beta}$ оператора A , причем для любого $\beta \geq 0$

$$\|A^\beta e^{-tA}\| \leq \frac{C(\beta) e^{-\delta t}}{t^\beta}, \quad \delta > 0. \quad (12)$$

Предполагаем, что функция f удовлетворяет всем предыдущим условиям, за исключением условия (4), вместо которого предполагается, что выполнено условие

$$\|f(t, A^{-\alpha}u_1, \dots, A^{-\alpha}u_{m+1})\| \leq \kappa(t)[F(\|u_1\|) + F(\|u_2\|) + \dots + F(\|u_{m+1}\|)]. \quad (13)$$

Начальная функция $\varphi(t)$ такая, что $A^\alpha \varphi(t) = \psi(t)$ является непрерывной функцией (это условие в приложении к уравнениям в частных производных означает, что производная определенного порядка начальной функции является непрерывной функцией).

Теорема 2. При этих условиях существует, притом единственное решение задачи (5)–(2).

Доказательство. Если сделаем замену $x = A^{-\alpha}z$, то уравнение (5) и условие (2) перейдут, соответственно,

$$A^{-\alpha}z(t) = e^{-tA}\varphi_0 + \int_0^t e^{-sA}f(s, A^{-\alpha}z(s), A^{-\alpha}z(s - \tau_1), \dots, A^{-\alpha}z(s - \tau_m))ds,$$

$$A^{-\alpha}z(t) = \varphi(t) \text{ на множестве } E_0,$$

Или, окончательно,

$$z(t) = A^\alpha e^{-tA}\varphi_0 + \int_0^t A^\alpha e^{-sA}f(s, A^{-\alpha}z(s),$$

$$A^{-\alpha} z(s - \tau_1), \dots, A^{-\alpha} z(s - \tau_m) ds. \quad (14)$$

$$z(t) = A^{\alpha} \varphi(t) \text{ на множестве } E_0. \quad (15)$$

Условие (15) означает, что на отрезке $-\tau_m \leq t < 0$ функция $z(t) \equiv 0$, а при $t = 0$ $z(t) = A^{\alpha} \varphi_0$.

Пусть, для определенности,

$$\|A^{\alpha} e^{-tA} \varphi_0\| = r_0. \quad (16)$$

Рассмотрим полное метрическое пространство C_{φ_0} всевозможных непрерывных функций, определенных на $[-\tau_m, \infty)$ со значениями в E , причем все эти функции на отрезке $[-\tau_m, 0]$ тождественны с нулевым элементом пространства E и в точке $t = 0$ совпадают с заданным элементом $\varphi_0 = A^{\alpha} \varphi_0$. В пространстве C_{φ_0} рассмотрим множество R , состоящее из семейства функций $z(t)$, удовлетворяющих условию $\|z(t)\| \leq r(t)$ в интервале $0 \leq t < \infty$, где $0 < r_0 \leq r(t)$. Оператор

$$Bz(t) = A^{\alpha} e^{-tA} \varphi_0 + \int_0^t A^{\alpha} e^{-sA} f(s, A^{-\alpha} z(s), A^{-\alpha} z(s - \tau_1), \dots, A^{-\alpha} z(s - \tau_m)) ds$$

с условиями (15) и (16) определен на множестве R и отображает это множество в себя, т. е. $BR \subset R$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|Bz(t)\| &\leq \|A^{\alpha} e^{-tA} \varphi_0\| + \int_0^t \|A^{\alpha} e^{-sA}\| k(s) [F(\|z(s)\|) + \\ &+ F(\|z(s - \tau_1)\|) + \dots + F(\|z(s - \tau_m)\|)] ds \leq \\ &\leq r_0 + \int_0^t \lambda(s) F(r(s)) ds = r(t) \end{aligned}$$

для любого $z(t)$ из R , т. е. $BR \subset R$. Тогда на основании принципа сжатых отображений утверждаем существование и единственность решения.

3°. Теперь рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{dx(t)}{dt} + A(t)x(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_m)) \quad (17)$$

с условием (2). На оператор $A(t)$ наложим следующие условия. Оператор $A(t)$ при каждом t имеет плотную в E область определения D и при любом λ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$ оператор $A(t) + \lambda I$ имеет ограниченный обратный, причем

$$\|[A(t) + \lambda I]^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}. \quad (18)$$

Из этого условия вытекает, что $-A(t)$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $e^{-sA(t)}$ ($s \geq 0$), причем имеют место оценки

$$\|e^{-sA(t)}\| \leq Ce^{-\delta s} \quad (\delta > 0), \quad (19)$$

$$\|A(t)e^{-sA(t)}\| \leq \frac{Ce^{-\delta s}}{s}. \quad (20)$$

Как указано в [2], оценка (18) позволяет определить любые отрицательные дробные степени $A^{-\alpha}(t)$ оператора $A(t)$ по формуле

$$A^{-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-sA(t)} s^{\alpha-1} ds, \quad (21)$$

причем для любого $\beta \geq 0$ имеет место оценка

$$\|A^{\beta}(t) e^{-sA(t)}\| \leq \frac{C(\beta) e^{-\delta s}}{s^{\beta}}. \quad (22)$$

Пусть функция f удовлетворяет всем выше налагаемым условиям, за исключением условия (13), вместо которого, как полагается, выполнено условие

$$\|f(t, A^{-\alpha}(t)u_1, \dots, A^{-\alpha}(t)u_{m+1})\| \leq \kappa(t) [F(\|u_1\|) + F(\|u_2\|) + \dots + F(\|u_{m+1}\|)].$$

При этих условиях, аналогично теореме 2, доказывается следующая теорема.

Теорема 3. При указанных условиях существует, притом единственное решение задачи (5)–(2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соломяк М. З. Изв. ВУЗов, математика*, 1960, № 1 (14).
2. Соболевский П. Е. Тр. Московского матем. об-ва, т. 10, 1961.

Т. А. Заманов

Мүчэррэд фэзаларда јубанан аргументли дифференциал тэнликлэрэ даир

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә мүчэррэд фэзаларда јубанан аргументли операторлу тэнликләр үчүн варлыг вә Јеканәлик теоремләри исбат едилмишдир.

А. С. МАХМУДОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КАРЛЕМАНА

Обозначения. C — пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$; C_1 — единичная сфера пространства C ; $a_n = a_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in C$ по ортонормированной на отрезке $[0, 1]$ системе (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}$, т. е. $a_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx$; $M_n = \int_0^1 |\varphi_n(x)| dx$; A, B, E — абсолютные положительные константы.

Постановка задачи

Карлеманом [1] была доказана теорема о том, что существует функция $f(x) \in C$, коэффициенты Фурье a_n по ОН тригонометрической системе которой удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = \infty \quad \text{при всех } p, 0 < p < 2.$$

А. М. Олевский [2] установил, что теорема Карлемана верна для любой полной ОНС. Пусть $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Рассматриваются задачи: при каких ограничениях на ОНС $\{\varphi_n(x)\}$, не обязательно полную существует функция $f(x) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |a_n|^p = \infty \quad (1)$$

при некотором фиксированном p , $0 < p < 2$, а также при каких ограничениях на ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ существует функция $f(x) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |a_n|^p = \infty \quad \text{при всех } p, 0 < p < 2. \quad (2)$$

Решение задачи

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < 2$, $d_n \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 M_n^{\frac{2p}{2-p}} = \infty. \quad (3)$$

Тогда существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию (1). Сначала докажем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $R_k > 0$ заданная числовая последовательность и $\{f_k(x)\}$ — заданная последовательность суммируемых функций. Для того, чтобы для любого натурального $n \geq 1$ и любой последовательности действительных чисел $\{N_k\}$ ($k = \overline{1, n}$) существовала последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$) такая, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k N_k f_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 R_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int_0^1 |f_k(x)| dx \geq B \cdot R_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Доказательство. Необходимость. Возьмем любое фиксированное натуральное число $n \geq 1$ и положим $N_k = 0$ ($k = \overline{1, n-1}$), $N_n = 1$. Тогда существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$) такая, что

$$\int_0^1 |\varepsilon_n f_n(x)| dx \geq A R_n, \quad \text{откуда} \quad \int_0^1 |f_n(x)| dx \geq A \cdot R_n.$$

Достаточность. Известно, что для ОНС функций Радемахера $\{r_k(t)\}$ справедливо следующее неравенство Хинчина [3, стр. 154]:

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n b_k r_k(t) \right| dt \geq E \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где $\{b_k\}$ — любая последовательность действительных чисел. Полагая в (6) $b_k = N_k f_k(x)$ и интегрируя по x , получаем

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n N_k r_k(t) f_k(x) \right| dt \right\} dx \geq E \cdot \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx. \quad (7)$$

Из неравенства (7) заключаем существование последовательности $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$), удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k N_k f_k(x) \right| dx \geq E \cdot \int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx. \quad (8)$$

Наконец, по неравенству Коши имеем

$$\sum_{k=1}^n N_k^2 R_k |f_k(x)| \leq \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 R_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу (5) получаем, что

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{k=1}^n N_k^2 f_k^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} dx \geq B \cdot \left(\sum_{k=1}^n N_k^2 R_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Неравенство (4) следует из неравенств (8) и (9). Лемма 1. доказана.

Лемма 2. Пусть n — натуральное число, $H_n > 0$, $\{A_k\}$ — последовательность чисел и ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right| dx \geq H_n. \quad (10)$$

Тогда существует функция $f(x) \in C_1$ такая, что

$$\sum_{k=1}^n |A_k| |a_k| > \frac{H_n}{2}. \quad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим линейный функционал в пространстве C :

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right\} dx = \sum_{k=1}^n A_k a_k.$$

Так как

$$\|\Phi\| = \sup_{f \in C_1} |\Phi(f)| = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right| dx,$$

то существует функция $f(x) \in C_1$, для которой

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k a_k \right| = |\Phi(f)| > \frac{1}{2} \|\Phi\| = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(x) \right| dx,$$

откуда в силу (10) следует (11) и лемма 2 доказана.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 3 работы [4], получаем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $A_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 = \infty$, $\sup_n \sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n A_k |a_k| = \infty$. Тогда существует функция $f(x) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n |a_n| = \infty.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $p=1$ и $n \geq 1$ — любое фиксированное натуральное число. В силу леммы 1 существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$), для которой

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k \varphi_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 M_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу леммы 2 существует функция $f(x) \in C_1$ такая, что

$$\sum_{k=1}^n d_k |a_k| \geq \frac{A}{2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 M_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу условия (3) ($p=1$),

$$\sup_n \sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k |a_k| = \infty.$$

В силу леммы 3 существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию (1) с $p=1$.

Пусть $1 < p < 2$. Полагая $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2 M_k^{\frac{2p}{2-p}}$,

$$B_n = M_n^{\frac{2(p-1)}{2-p}} S_n^{-\frac{1}{2}},$$

в силу теоремы Абеля—Дини [5, стр. 292] имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_n^2 M_n^2 = \infty, \quad (12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_n^{\frac{p}{p-1}} < \infty. \quad (13)$$

Пусть $n \geq 1$ — любое фиксированное натуральное число. В силу леммы 1 существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$), удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k B_k \varphi_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 B_k^2 M_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу леммы 2 существует функция $f(x) \in C_1$, для которой

$$\sum_{k=1}^n d_k B_k |a_k| = \frac{A}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 B_k^2 M_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу (12)

$$\sup_n \sup_{f \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k B_k |a_k| = \infty.$$

В силу леммы 3 существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n B_n |a_n| = \infty,$$

откуда, применяя неравенство Гельдера с показателями $p, \frac{p}{p-1}$, в силу (13) получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |a_n|^p = \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть $2 < q \leq \infty$, $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 M_n^s = \infty \quad \text{при всех } s, 0 < s < q. \quad (14)$$

Тогда существует функция $f(x) \in C$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |a_n|^p = \infty \quad \text{при всех } p, 0 < p < \frac{2q}{2+q}. \quad (15)$$

Примечание. Если $2 \leq q < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 M_n^q = \infty$, то существует функция $f(x) \in C$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |a_n|^p = \infty \quad \text{при всех } p, 0 < p \leq \frac{2q}{2+q}.$$

Доказательство. Отметим, что вторая часть теоремы 2 получается из теоремы 1. Чтобы доказать ее первую часть, докажем следующую лемму

Лемма 4. Пусть $0 < q \leq \infty$, $0 < a < q$, $d_n \geq 0$, $0 \leq A_n \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 A_n^s = \infty \quad \text{при всех } s, 0 < s < q. \quad (16)$$

Тогда существует последовательность $\{B_n\}$, $0 \leq B_n \leq 1$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_n^p < \infty \quad \text{при всех } p > 1, \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 A_n^a B_n^{\frac{q-a}{q}} = \infty. \quad (18)$$

Доказательство. Пусть $1 < p_m < \infty$, $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = \infty$,

$$q_m = \frac{aq p_m}{q + a(p_m - 1)}, \quad S_{n,m} = \sum_{k=1}^n d_k^2 A_k^{q_m},$$

$$B_{n,m}^* = A_n^{\frac{q_m p_m - 1}{p_m}} \cdot S_{n,m}^{\frac{q}{a - q_m}} \quad (n, m = \overline{1, \infty}).$$

В силу условия (16) и теоремы Абеля—Дини [5, стр. 292] имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_{n,m}^{*p_m - 1} < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_{n,m}^{*q} A_n^a = \infty \quad (m = \overline{1, \infty}).$$

Положим

$$C_m = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_{n,m}^{*p_m - 1}, \quad B_{n,m} = 2^{\frac{m(1-p_m)}{p_m}} \frac{1-p_m}{C_m^{p_m}} B_{n,m}^* \quad (m = \overline{1, \infty}).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_{n,m}^{p_m - 1} = 2^{-m}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_{n,m}^{\frac{q-a}{q}} A_n^a = \infty \quad (m = \overline{1, \infty}).$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,m} = 0$ ($m = \overline{1, \infty}$). Поэтому для каждого m ($m = \overline{1, \infty}$) существует такой номер $\alpha_m \geq 1$, что $B_{n,m} \leq 1$ при всех $n \geq \alpha_m$. Построим индуктивно возрастающую последовательность номеров $\{n_i\}$ ($i = \overline{0, \infty}$), положив $n_0 = 0$ и выбрав n_1 из условий

$$\sum_{n=\alpha_1}^{n_1} d_n^2 A_n^a B_{n,1}^{\frac{q-a}{q}} \geq 1, \quad n_1 \geq \max\{\alpha_2 - 1, \alpha_1\}, \quad (19)$$

а n_{i+1} ($i = \overline{1, \infty}$) из условий

$$\sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} d_n^2 A_n^a B_{n,i+1}^{\frac{q-a}{q}} \geq 1, \quad (20)$$

$$n_{i+1} \geq \max\{\alpha_{i+2} - 1, n_i + 1\}.$$

Положим $B_n = 0$, если $1 \leq n \leq \alpha_1 - 1$, $B_n = B_{n,1}$, если $\alpha_1 \leq n \leq n_1$, $B_n = B_{n,i+1}$, если $n_{i+1} \geq n \geq n_i + 1$ ($i = \overline{1, \infty}$). Тогда $B_n \leq 1$ при всех n , $n = \overline{1, \infty}$. В силу (19) и (20) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 A_n^a B_n^{\frac{q-a}{q}} = \sum_{n=\alpha_1}^{n_1} d_n^2 A_n^a B_{n,1}^{\frac{q-a}{q}} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=n_i+1}^{n_{i+1}} d_n^2 A_n^a B_{n,i+1}^{\frac{q-a}{q}} \geq \sum_{i=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Пусть $p > 1$, i — такое натуральное число, что $p_{j+1} > \frac{p}{p-1}$ при всех j , $j = \overline{i, \infty}$,

$$a_0 = \sum_{n=\alpha_1}^{n_1} d_n^2 B_n^p + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} d_n^2 B_n^p.$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_n^p = a_0 + \sum_{j=i}^{\infty} \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} d_n^2 B_n^p < a_0 + \sum_{j=i}^{\infty} \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} d_n^2 B_n^{\frac{p_{j+1}}{p_{j+1}-1}} < < a_0 + \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} < \infty, \quad \text{т. е. } \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 B_n^p < \infty \quad \text{при всех } p > 1.$$

Лемма 4 доказана. Можно показать, что условие (16) необходимо для существования последовательности $\{B_n\}$, $0 \leq B_n \leq 1$, удовлетворяющей условиям (17) и (18).

Доказательство первой части теоремы 2. Пусть ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию (14). Так как $M_n \leq 1$, то в силу леммы 4 существует последовательность $\{B_n\}$, $0 \leq B_n \leq 1$, удовлетворяющая условиям (17) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 M_n^2 B_n^{\frac{q-2}{q}} = \infty. \quad (21)$$

Пусть $n \geq 1$ — любое фиксированное натуральное число. В силу леммы 1 существует последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ ($k = \overline{1, n}$), удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k d_k B_k^{\frac{q-2}{2q}} \varphi_k(x) \right| dx \geq A \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 M_k^2 B_k^{\frac{q-2}{q}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В силу леммы 2 существует функция $f(x) \in C_1$ такая, что

$$\sum_{k=1}^n d_k B_k^{\frac{q-2}{2q}} |a_k| \geq \frac{A}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n d_k^2 M_k^2 B_k^{\frac{q-2}{q}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда в силу (21)

$$\sup_n \sup_{\epsilon \in C_1} \sum_{k=1}^n d_k B_k^{\frac{q-2}{2q}} |a_k| = \infty.$$

В силу леммы 3 существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n B_n^{\frac{q-2}{2q}} |a_n| = \infty. \quad (22)$$

Из (22) непосредственно следует, что эта функция удовлетворяет условию (15) при всех p , $0 < p \leq 1$. Пусть $1 < p < \frac{2q}{2+q}$. Применяя

неравенство Гельдера с показателями $p, \frac{p}{p-1}$, в силу (17) и (22) получаем, что эта функция удовлетворяет условию (15) и при всех p ,

$1 < p < \frac{2q}{2+q}$. Теорема 2 доказана.

Беря $q = \infty$, из теоремы 2 имеем:

Теорема 3. Пусть $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 M_n^s = \infty$ при всех s , $0 < s < \infty$ (23). Тогда существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию (2). Отметим, что если ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию $M_n \geq A$ ($n = \overline{1, \infty}$) (24), то условие (23) имеет место для любой последовательности $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Имея это в виду, из теоремы 3 получаем, что если $M_n \geq A$ ($n = \overline{1, \infty}$), то ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ обладает так называемой особенностью Пэли [6], т. е. для любой последовательности $d_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$ существует функция $f(x) \in C$, удовлетворяющая условию (2).

Замечание. Если ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ состоит из ограниченных в совокупности функций, то она удовлетворяет условию $\|\varphi_n\|_q \leq A_q$ (25) для любого $q > 0$, а если ОНС $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию (25) для некоторого $q > 2$, то она удовлетворяет и условию (24).

Действительно, в силу (25) $1 = \int_0^1 \varphi_n^2(x) dx = \int_0^1 |\varphi_n(x)|^{\frac{q-1}{q-2}} \times$

$$\times |\varphi_n(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \leq M_n^{\frac{q-2}{q-1}} \cdot \|\varphi_n\|_q^{\frac{q}{q-1}} \leq A_q^{\frac{q}{q-1}} M_n^{\frac{q-2}{q-1}},$$

откуда $M_n \geq B_q$. Это замечание показывает, что теорема 3 содержит в себе, например, теоремы Карлемана [1] и Орлича [7, стр. 313].

ЛИТЕРАТУРА

1. Carleman T. Acta Math. 41 (1918).
2. Олевский А. М. Изв. АН ССР, серия. матем., 27, 1963.
3. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
4. Махмудов А. С. Некоторые вопросы функционального анализа и его применений (сб. статей аспирантов и соискателей). Изд. АН Азерб. ССР, 1965.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления т. II, Гостехиздат, М., 1958.
6. Paley R. E. A. C. Journ. London Math. Soc. 7 (1932).
7. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.

А. С. Махмудов

Карлеман теореминин үмүмиләшмәси

ХҮЛАСӘ

Карлеман исбат етмишдир ки, ортонормал тригонометрик систем үзрә Фурје әмсаллары сыфра јаваш јахынлашан кәсимләз функција вардыр.

Карлеманын бу теореме мүүјјән шәрти өдәјән ортонормал системләр үчүн үмүмиләшдирилмишдир.

Х. М. НАДЖАФОВ

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НА ГРАНИЦЕ, С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

В настоящей статье рассматривается уравнение вида

$$P(z) \equiv yz_{xx} + z_{yy} + \frac{p}{x^r} z_x + c(x, y)z = 0, \quad (1)$$

где

$$p - \text{постоянная, } 0 < r < \frac{1}{3}, \quad (1)$$

в области D , ограниченной отрезком AB оси OX , дугами характеристик AC и BC уравнения (1), выходящими из точек $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$. Коэффициент $c(x, y)$ предполагается непрерывным.

§ 1. Постановка задачи

Найти решение $z(x, y)$ уравнения (1) в области D , непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяющее начальным условиям:

$$z|_{AB} = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$z_y|_{AB} = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (3)$$

В характеристических координатах уравнение (1) принимает вид

$$L_1(z) \equiv z_{\xi\eta} + A(\xi, \eta)z_{\xi} + B(\xi, \eta)z_{\eta} + C(\xi, \eta)z = 0, \quad (4)$$

где

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{6(\eta - \xi)} + \alpha(\xi, \eta), B(\xi, \eta) = -\frac{1}{6(\eta - \xi)} + \alpha(\xi, \eta),$$

$$C(\xi, \eta) = -\frac{1}{4} \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{C}{(\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

$$\alpha(\xi, \eta) = -\frac{p}{2^{2-r}} \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}.$$

Область D преобразуется в область H , ограниченную линиями $\xi = 0, \eta = 1, \eta = \xi$.

В характеристических координатах начальные условия имеют вид

$$z|_{\eta=\xi} = \tau(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (5)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{1}{3}} (\eta - \xi)^{\frac{1}{3}} (z_{\xi} - z_{\eta}) = \nu(\xi), \quad 0 < \xi < 1. \quad (6)$$

Решение поставленной задачи будем искать по методу Римана, для этого построим функцию Римана уравнения (4).

§ 4. Построение функции Римана

Сопряженное уравнение для (4) имеет вид

$$L_1^*(z) \equiv z_{\xi\eta} - [A(\xi, \eta)z]_{\xi} - [B(\xi, \eta)z]_{\eta} + C(\xi, \eta)z = 0. \quad (7)$$

Введем обозначения:

$$u(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta) = \tilde{\alpha}(\xi_0, \eta_0; \eta) \equiv \left(\frac{\eta - \xi_0}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot e^{\frac{1}{6} \int_{\eta_0}^{\eta} \alpha(\xi_0, \eta') d\eta'},$$

$$u(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta_0) = \tilde{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi) \equiv \left(\frac{\eta_0 - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^{\frac{1}{6}} \cdot e^{\frac{1}{6} \int_{\xi_0}^{\xi} \alpha(\xi', \eta_0) d\xi'},$$

$$D(z) = \frac{\partial}{\partial \xi} [\alpha(\xi, \eta)z] + \frac{\partial}{\partial \eta} [\alpha(\xi, \eta)z] - C(\xi, \eta)z.$$

Функцию Римана для уравнения (4) будем строить методом последовательных приближений по Ф. И. Франкля [1]. Отыскивая решение уравнения (7) в виде ряда

$$u(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta), \quad (8)$$

для u_n получим следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} u_1(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = & \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} u_0(\xi', \eta'; \xi, \eta) D[u_0(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta' + \\ & + \int_{\xi_0}^{\xi} u_0(\xi', \eta_0; \xi, \eta) \alpha(\xi', \eta_0) \tilde{\beta}(\xi_0, \eta_0; \xi') d\xi' + \\ & + \int_{\eta_0}^{\eta} u_0(\xi_0, \eta'; \xi, \eta) \alpha(\xi_0, \eta') \tilde{\alpha}(\xi_0, \eta_0; \eta') d\eta', \end{aligned} \quad (9)$$

$$u_{n+1}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta_0}^{\eta} u_n(\xi', \eta'; \xi, \eta) D[u_n(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')] d\xi' d\eta', \quad (10)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$u_0(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) =$$

$$= \frac{(\eta - \xi)^{\frac{1}{3}}}{(\eta_0 - \xi)^{\frac{1}{6}} (\eta - \xi_0)^{\frac{1}{6}}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1, \sigma\right), \quad \sigma = \frac{(\xi - \xi_0)(\xi_0 - \eta)}{(\eta_0 - \xi)(\eta - \xi_0)}$$

является функцией Римана для уравнения

$$E_1(z) \equiv z_{\xi\eta} + \frac{1}{6(\eta - \xi)} [z_{\xi} - z_{\eta}] = 0.$$

Имеют место следующие оценки:

$$|D(u_0)| \leq \kappa_0 (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{2}{3}} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{5}{6}} (\eta - \xi_0)^{-\frac{5}{6}}, \quad (11)$$

$$|D(u_1)| \leq \kappa_1 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{5}{6}} (\eta - \xi_0)^{-\frac{5}{6}}, \quad (12)$$

$$|D(u_2)| \leq \kappa_2 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{2}{3} - \frac{r}{2}} (\eta - \xi_0)^{-\frac{2}{3} - \frac{r}{2}} \quad (13)$$

$$|D(u_3)| \leq \kappa_3 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{1}{2} - r} (\eta - \xi_0)^{-\frac{1}{2} - r}, \quad (14)$$

$$|D(u_4)| \leq \kappa_4 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}r} (\eta - \xi_0)^{-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}r}, \quad (15)$$

$$|D(u_5)| \leq \kappa_5 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{1}{6} - 2r} (\eta - \xi_0)^{-\frac{1}{6} - 2r}, \quad (16)$$

$$|D(x_0)| \leq \kappa_6 (\eta_0 - \xi_0)^{1-r} (\eta + \xi)^{-r} (\eta - \xi)^{-\frac{2}{3}} (\eta_0 - \xi)^{-\frac{5}{2}r} (\eta - \xi_0)^{-\frac{5}{2}r}. \quad (17)$$

Оценки, начиная с $D(u_7)$, разбиваются на три вида:

$$1^\circ. \quad r < \frac{1}{18}.$$

Лемма 1. В области H имеет место оценка

$$|D[u_{\kappa+7}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq \frac{c \cdot c_0^{\kappa}(q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda)}{\Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + \kappa + 1)} \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + \kappa\gamma}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}} \frac{[\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda + \kappa}{q}}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

где

$$\kappa = 0, 1, 2, \dots, \lambda = \frac{1}{6} - 3r, \quad \gamma = \frac{1}{6} - \frac{r}{2} + \frac{\delta \left(\frac{5}{6} + \frac{r}{2} \right)}{q_1},$$

$$q_1 = \frac{1}{\frac{5}{6} + \frac{r}{2}} - \delta, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q_1} = 1, \quad \delta > 0 - \text{малое число.}$$

Доказательство. Доказательство леммы проводим методом математической индукции. Нетрудно доказать справедливость леммы при $\kappa = 0, 1, 2$. Допустим, что она верна при $\kappa = n$, докажем для $\kappa = n + 1$

$$D[u_{n+8}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)] = I_1 + I_2 + I_3;$$

$$|I_1| \leq \int_{\xi_0}^{\xi} \int_{\eta}^{\eta_0} |D[u_0(\xi', \eta'; \xi, \eta)]| \cdot |D[u_{n+7}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')]| d\xi' d\eta' \geq$$

$$\leq \frac{\kappa_0 \cdot c \cdot c_0^n (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + n\gamma}}{\Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 1) (\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}} \times$$

$$\times \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{(\xi - \xi')^{\frac{5}{6} + \frac{r}{2}}} \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{[\eta_0 - \eta' + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda + n}{q}}}{(\eta' - \eta)^{\frac{5}{6} + \frac{r}{2}}} d\eta'.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями q и q_1 , для $|I_1|$ имеем окончательно оценку:

$$|I_1| \leq \frac{\kappa_0 \cdot c \cdot c_0^n (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + (n+1)\gamma}}{\left(\frac{1}{6} - \frac{r}{2} \right) \left[\delta \left(\frac{5}{6} + \frac{r}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q_1}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 2)} \times$$

$$\times \frac{[\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda + n + 1}{q}}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}.$$

Найдем оценку для I_2 :

$$|I_2| \leq |\alpha(\xi, \eta)| \int_{\xi_0}^{\xi} |u_0(\xi', \eta; \xi, \eta)| \cdot |D[u_{n+7}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta)]| d\xi' \leq$$

$$\leq \frac{|m| c \cdot c_0^n (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda) \cdot (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + n\gamma}}{\Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 1) (\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{1}{2} + \frac{r}{2}}} \times$$

$$\times \int_{\xi_0}^{\xi} (\xi - \xi')^{-\frac{5}{6} - \frac{r}{2}} [\eta_0 - \eta + \xi' - \xi_0]^{\frac{q\lambda + n}{q}} d\xi' \leq$$

$$\leq \frac{|m| c \cdot c_0^n (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda)}{\left[\delta \left(\frac{5}{6} + \frac{r}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q_1}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 2)} \times$$

$$\times \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + (n+1)\gamma}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}} \frac{[\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda + n + 1}{q}}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}.$$

Аналогично

$$|I_3| \leq |\alpha(\xi, \eta)| \cdot \int_{\eta}^{\eta_0} |u_0(\xi, \eta'; \xi, \eta)| \cdot |D[u_{n+7}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta')]| d\eta' \leq$$

$$\leq \frac{|m| c \cdot c_0^n (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda)}{\left[\delta \left(\frac{5}{6} + \frac{r}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q_1}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 2)} \times$$

$$\times \frac{(\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + (n+1)\gamma}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}} \frac{[\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda + n + 1}{q}}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}}.$$

Тогда имеем

$$|D[u_{n+8}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq \frac{c \cdot c_0^{n+1} (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda_1) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - 4r + (n+1)r} [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda_1 + n + 1}{q}}}{\Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda + n + 2) (\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\left[\delta \left(\frac{5}{6} \pm \frac{r}{2} \right) \right]^{\frac{1}{q_1}} \left[\frac{1}{6} - \frac{r}{2} \right]} \left[\frac{\kappa_0}{6} + 2|m| \right].$$

Лемма доказана.

$$2^\circ. r = \frac{1}{18}.$$

Лемма 2. В области n имеет место оценка

$$|D[u_{n+8}(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq \frac{c \cdot c_0^k (q\lambda)^{\frac{1}{q}} \Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda_1) (\eta_0 - \xi_0)^{\frac{7}{6} - \frac{3r}{2} + \kappa r} [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{\frac{q\lambda_1 + \kappa}{q}}}{\Gamma^{\frac{1}{q}}(q\lambda_1 + \kappa + 1) (\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

где

$$\kappa = 0, 1, 2, \dots, \lambda_1 = \frac{1}{6} - \frac{r}{2}, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q_1}.$$

Доказательство проводится аналогично лемме 1.

$$3^\circ. \frac{1}{18} < r < \frac{1}{3}.$$

Если $r > \frac{1}{18}$, то аналогично предыдущему можно утверждать, что каково бы ни было $\frac{1}{18} < r < \frac{1}{3}$ всегда найдется n такое, что будет иметь место следующая оценка:

$$|D[u_n(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)]| \leq C \frac{(\eta_0 - \xi_0)^s [\eta_0 - \eta + \xi - \xi_0]^{s_1}}{(\eta + \xi)^r (\eta - \xi)^{\frac{2}{3}}},$$

где $s > 0, s_1 > 0$.

Начиная с этого номера, можно получить оценки, аналогичные леммам 1 и 2.

Из доказанных лемм вытекает, что ряд (8) в замкнутой области $\bar{H}$ сходится абсолютно и равномерно, возможно также полученное дифференцирование этого ряда.

§ 3. Решение задачи Коши

Запишем тождество Грина для уравнения (4):

$$uL_1(z) - zL_1^*(u) = N_\xi + M_\eta, \quad (18)$$

где

$$N = Auz - zu_\eta + \frac{1}{2}(uz)_\eta,$$

$$M = Buz + uz_\xi - \frac{1}{2}(uz)_\xi.$$

Рассмотрим область $H_{0\varepsilon}$, ограниченную линиями

$$\xi = \xi_0, \eta = \eta_0, \eta = \xi + \varepsilon, (\varepsilon > 0).$$

Принтегрировав тождество (18) по области $H_{0\varepsilon}$ и после несложных выкладок перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим формулу

$$z(\xi_0, \eta_0) = \int_{\xi_0}^{\eta_0} \tau(\xi) \bar{g}(\xi_0, \eta_0; \xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{\eta_0} \nu(\xi) \bar{h}(\xi_0, \eta_0; \xi) d\xi, \quad (19)$$

где

$$\bar{h}(\xi_0, \eta_0; \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}u(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \varepsilon)}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3} \frac{1}{3}}}, \quad (20)$$

$$\bar{g}(\xi_0, \eta_0; \xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[(A-B)u(\xi_0, \eta_0; \xi, \xi + \varepsilon) + \frac{1}{2}(u_\xi - u_\eta) \right]. \quad (21)$$

Существование ядер (20) и (21) следует из существования функции Римана. Заменяя переменные интегрирования, формулу (19) можно представить в виде

$$z(\xi_0, \eta_0) = \int_0^1 g(\xi_0, \eta_0; t) \tau[\xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t] dt + \int_0^1 h(\xi_0, \eta_0; t) \nu[\xi_0 + (\eta_0 - \xi_0)t] dt, \quad (22)$$

где

$$g(\xi_0, \eta_0; t) = (\eta_0 - \xi_0) \bar{g}[\xi_0, \eta_0; \xi_0 + t(\eta_0 - \xi_0)], \quad (23)$$

$$h(\xi_0, \eta_0; t) = (\eta_0 - \xi_0) \bar{h}[\xi_0, \eta_0; \xi_0 + t(\eta_0 - \xi_0)]. \quad (24)$$

Доказательство того, что формула (22) является решением поставленной задачи Коши, проводится аналогично, как в работе [1]. Исходя из изложенного, можно сформулировать следующие утверждения.

Лемма 3. Если $\nu(x)$ непрерывна и $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем больше $\frac{2}{3}$, то формула (22) представляет собой единственное предельное решение (в смысле Соболева [2]) уравнения (1) с данными Коши $\tau(x)$ и $\nu(x)$.

Лемма 4. Если, кроме функций $\tau(x)$ и $\nu(x)$, непрерывны также и их первые и вторые производные, то формула (22) является единственным классическим решением поставленной задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Изв. АН СССР, серия матем., т. 8, № 5, 1944.
2. Соболев С. Л. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, IX (1935).

Һеперболик типли бир тәнлик үчүн Коши мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $y < 0$ ярыммүстәвисиндә ики характеристика вә OX охунун AB парчасы илә әһатә олан D областына

$$yz_{xx} + z_{yy} + \frac{p}{x^r} z_x + C(x, y)z = 0 \quad (1)$$

бахылыр.

(1) тәнлији кичик һәдләрә малик олан Трикоми операторлу тәнликләр синфинә аиддир.

Мәгаләдә $0 < r < \frac{1}{3}$ олдугда (1) тәнлији үчүн Коши мәсәләси

Ритман методу илә һәлл едилир.

9

Ш. М. БАХЫШЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТОНКОЙ КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В статье рассматривается задача о приближенном определении нестационарного температурного поля в цилиндрической оболочке конечной длины. Для этого температура представляется в виде квадратичного трехчлена по толщине оболочки. Полученное решение точно удовлетворяет граничным условиям на боковых поверхностях, условиям на торцах и начальным условиям в интегральной форме и приближенно уравнению теплопроводности.

Рассмотрим тонкую цилиндрическую оболочку длиной $2L$ с внутренним радиусом $r = a$ и внешним $r = b$. Задачу целесообразно решать в цилиндрической системе координат, для которой плоскость $z = 0$ соответствует середине оболочки. Оболочка нагревается вследствие теплообмена с внешней средой, температура которой изменяется по длине по заданному закону $T_2(z)$, где T_2 предположим четной функцией. Температуру внутренней среды примем $T_1 = 0$. Концы оболочки теплоизолированы. Коэффициенты относительной теплоотдачи внутренней и внешней среды обозначим, соответственно, через h_1 , h_2 и предположим, что они постоянны. В силу симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$ достаточно рассмотреть лишь половину оболочки, т. е. принять, что $0 \leq z \leq L$.

Определение температуры $T(r, z, t)$ сводится к решению уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

при начальном условии

$$T(r, z, 0) = 0, \quad (2)$$

граничных условиях на боковых поверхностях

$$\frac{\partial T}{\partial r} = h_1 T \text{ при } r = a, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = h_2 [T_2(z) - T(r, z, t)] \text{ при } r = b, \quad (3)$$

условии симметрии

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0 \quad (4)$$

и условию на торце

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = L. \quad (5)$$

Условие (4) написано в силу симметрии оболочки относительно плоскости $z = 0$.

Ищем температуру в виде квадратичного трехчлена по степеням $(r - a)$, что хорошо согласуется с опытом для тонких оболочек

$$T(r, z, t) = \varphi_0(z, t) + \varphi_1(z, t)(r - a) + \varphi_2(z, t)(r - a)^2, \quad (6)$$

где функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ подлежат определению. Подставляя (6) в (1) и сравнивая коэффициенты при свободных членах, получим одно уравнение, в которое войдут функции φ_0, φ_1 и φ_2 . Подставляя (6) в (3), получаем еще два уравнения, в которые войдут те же три функции. Выражая из полученной системы трех уравнений функции φ_1 и φ_2 через функцию φ_0 , для $T(r, z, t)$ будем иметь

$$T(r, z, t) = \varphi_0(z, t) [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + \lambda_0 T_2(z)(r - a)^2, \quad (7)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{h_1 [1 + h_2(b - a)] + h_2}{(b - a) [2 + h_2(b - a)]}, \quad \lambda_0 = \frac{h_2}{(b - a) [2 + h_2(b - a)]}.$$

Функция $\varphi_0(z, t)$ представляющая температуру внутренней стенки оболочки, определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \kappa \varphi_0 + \gamma(z) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\text{где } \kappa = 2\alpha_0 - \varepsilon h_1, \quad \gamma(x) = 2\lambda_0 T_2(z), \quad (9)$$

ε — осредненное значение величины $\frac{1}{r}$ по толщине оболочки, т. е.

$$\varepsilon = \frac{\ln b - \ln a}{b - a}.$$

Таким образом, мы свели задачу к решению уравнения (8). При сварке температурное поле по длине оболочки хорошо аппроксимируется формулой

$$T_2(z) = A \left(\frac{e^{-q|z|}}{q} - \frac{e^{-p|z|}}{p} \right) \quad (10)$$

где A, p, q — постоянные. В дальнейшем вместо $|z|$ будем писать z и условимся понимать его абсолютное значение. Чтобы $T_2(z)$ была положительной величиной, должно выполняться неравенство $p > q$. Нетрудно видеть также, что при этом предположении функция $T_2(z)$ будет убывающей.

Из условий (2), (4) и (5), налагаемых на температуру, найдем условия для функции $\varphi_0(z, t)$. Из (4) и (7), учитывая (10), получим

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (11)$$

Остальные два условия могут удовлетворяться лишь в интегральной форме. Удовлетворяя условия (2) и (5) в интегральной форме, получим

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \{ \varphi_0(z, 0) [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + \lambda_0(r - a)^2 T_2(z) \} r dr d\theta = 0,$$

$$\int_a^b \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + \lambda_0(r - a)^2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right\} r dr d\theta = 0$$

при $z = L$.

Отсюда вытекают следующие условия для функции $\varphi_0(z, t)$:

$$\varphi_0(z, 0) = -\frac{Q}{2} \gamma(z), \quad (12) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = A \lambda_0 Q (e^{-qL} - e^{-pL})$$

при $z = L, \quad (13)$

где

$$Q = \frac{(b - a)^2 (3b + a)}{6(b + a) + 2h_1(2b + a)(b - a) - \alpha_0(b - a)^2 (3b + a)} \quad (14)$$

Таким образом, мы пришли к решению уравнения (8) при начальном и граничных условиях (11)–(13), для чего пользуемся преобразованием Лапласа:

$$\Phi(z, s) = \int_0^\infty \varphi_0(z, t) e^{-st} dt.$$

Применяя это преобразование к уравнению (8) и условиям (11)–(13), приходим к решению уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \left(\kappa + \frac{s}{\kappa} \right) \Phi = \left(\frac{Q}{2\kappa} - \frac{1}{s} \right) \gamma(z) \quad (8')$$

при граничных условиях

$$\frac{d\Phi}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad \frac{d\Phi}{dz} = \frac{A \lambda_0 Q}{s} (e^{-qL} - e^{-pL}).$$

Общее решение уравнения (8') имеет вид

$$\Phi(z, s) = \frac{A \lambda_0}{s} (Qs - 2\kappa) \left(\frac{1}{\kappa q^2 - \kappa \kappa - s} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{\kappa p^2 - \kappa \kappa - s} \frac{e^{-pz}}{p} \right) + C_1 e^{\sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} z} + C_2 e^{\sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} z},$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из условий (4'). Окончательно для функции $\Phi(z, s)$ имеем

$$\Phi(z, s) = \frac{A \lambda_0}{s} (Qs - 2\kappa) \left(\frac{1}{\kappa q^2 - \kappa \kappa - s} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{\kappa p^2 - \kappa \kappa - s} \frac{e^{-pz}}{p} \right) + \frac{A \lambda_0 (Qs - 2\kappa)}{s \sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} L} + \frac{A \lambda_0 Q \operatorname{ch} \sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} z}{s \sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa + \frac{s}{\kappa}} L} (e^{-qL} - e^{-pL}).$$

Как видно из выражения $\Phi(z, s)$, знаменатели и числители слагаемых есть обобщенные полиномы относительно s , причем знамена-

тели не содержат постоянных слагаемых. Следовательно, условия теоремы разложения Ващенко—Захарченко соблюдены. Приравнивая знаменатели нулю, находим корни функций, входящих в эти знаменатели:

$$s_1 = 0, s_2 = -\kappa(x - q^2), s_3 = -\kappa(x - p^2), s_4 = -\kappa x,$$

а нули функции $\text{sh} \sqrt{x + \frac{s}{\kappa}} L$ определяются следующим образом:

$$\text{sh} \sqrt{x + \frac{s}{\kappa}} L = 0, \quad -i \sin i \sqrt{x + \frac{s}{\kappa}} L = 0,$$

$$i \left(x + \frac{s}{\kappa} \right) L = n\pi,$$

$$s_{n+4} = -(x + \alpha_n^2), \quad \text{где } \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Применяя эту формулу, после некоторых упрощений получаем функцию $\varphi_0(z, t)$, окончательно

$$\varphi_0(z, t) = \frac{1}{x - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{x - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} + \mathcal{Q}_1 \text{ch} \sqrt{x} z - \mathcal{Q}_2 \text{ch} \sqrt{x} (L - z) - \mathcal{Q}_3 e^{-\kappa x t} - \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\kappa(x + \alpha_n^2)t} \cos \alpha_n z, \quad (15)$$

где для краткости обозначены:

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{2A\lambda_0}{\sqrt{x} \text{sh} \sqrt{x} L} \left[\frac{e^{-qL}}{x - q^2} - \frac{e^{-pL}}{x - p^2} + \frac{Q}{2} (e^{-qL} - e^{-pL}) \right],$$

$$\mathcal{Q}_2 = \frac{2A\lambda_0}{\sqrt{x} \text{sh} \sqrt{x} L} \left(\frac{1}{x - q^2} - \frac{1}{x - p^2} \right),$$

$$\mathcal{Q}_3 = \frac{A\lambda_0}{xL} \left[Q(e^{-qL} - e^{-pL}) + (2 + xQ) \left(\frac{1 - e^{-qL}}{q^2} - \frac{1 - e^{-pL}}{p} \right) \right],$$

$$G_n = \frac{2A\lambda_0}{L} \left\{ \left(Q + \frac{2}{x + \alpha_n^2} \right) \left[\frac{1 - (-1)^n e^{-qL}}{q^2 + \alpha_n^2} - \frac{1 - (-1)^n e^{-pL}}{p^2 + \alpha_n^2} \right] + \frac{(-1)^n Q}{x + \alpha_n^2} (e^{-qL} - e^{-pL}) \right\}. \quad (16)$$

Подставляя (15) в (7) и учитывая (10), получим

$$T(r, z, t) = \left[2A\alpha_0 \left(\frac{1}{x - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{x - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} \right) + \mathcal{Q}_1 \text{ch} \sqrt{x} z - \mathcal{Q}_2 \text{ch} \sqrt{x} (L - z) - \mathcal{Q}_3 e^{-\kappa x t} - \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{-\kappa(x + \alpha_n^2)t} \cos \alpha_n z \right] \times [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + A\lambda_0 \left(\frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right) (r - a)^2. \quad (17)$$

Для бесконечно длинной оболочки эта формула упрощается и принимает следующий вид:

$$T(r, z, t) = \left\{ 2A\lambda_0 \left[\frac{1}{x - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{x - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} - \frac{e^{-V\sqrt{x}z}}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x - q^2} - \frac{1}{x - p^2} \right) \right] \times (1 - e^{-\kappa x t}) - A\lambda_0 Q \left(\frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right) e^{-\kappa x t} \right\} [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + A\lambda_0 \left(\frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right) (r - a)^2. \quad (18)$$

В случае стационарного нагрева будем иметь

$$T(r, z) = \left\{ 2A\lambda_0 \left[\frac{1}{x - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{x - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} - \frac{e^{-V\sqrt{x}z}}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x - q^2} - \frac{1}{x - p^2} \right) \right] + \mathcal{Q}_1 \text{ch} \sqrt{x} z - \mathcal{Q}_2 \text{ch} \sqrt{x} (L - z) \right\} [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + A\lambda_0 \left(\frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right) (r - a)^2. \quad (19)$$

Для бесконечной оболочки из (19) получим

$$T(r, z) = 2A\lambda_0 \left[\frac{1}{x - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{x - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} - \frac{e^{-V\sqrt{x}z}}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x - q^2} - \frac{1}{x - p^2} \right) \right] \times [1 + h_1(r - a) - \alpha_0(r - a)^2] + A\lambda_0 \left(\frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right) (r - a)^2. \quad (20)$$

Чтобы получить численные значения температуры по формулам (17)–(20), надо учитывать параметры x и λ_0 , которые зависят от размеров оболочки и коэффициентов относительной теплоотдачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухарин В. И., Даниловская В. И. Инженерный сборник, т. XXX, 1960
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. Гостехиздат, 1952.

Ш. М. Бахышов

Назик цилиндрик сонлу өртүкдө гејри-стационар температур саһәсинин тәјини

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә назик сонлу цилиндрик өртүкдә температур саһәсинин тәғриби тәјини верилмишдир. Бунун үчүн температур саһәси өртүјүн галынлығына көрә квадратик үчһәдли шәклиндә көтүрүлмүшдүр.

$T(r, z, t) = \varphi_0(z, t) + \varphi_1(z, t)(r - a) + \varphi_2(z, t)(r - a)^2$ бурада φ_0 , φ_1 вә φ_2 функцијалары ахтарылып. Гојулмуш мәсәләнин һәлли өртүјүн даһили диварынын температур саһәсини тәјин едән $\varphi_0(z, t)$ функцијасына нәзәрән сәрһәд мәсәләсинин һәллине кәтирлир. Алынмыш һәлл даһили вә харичи сәтһ үзәриндә сәрһәд шәртләкини дәғиг, башланғыч вә ен кәсик шәртләрини интеграл шәклиндә, истиликечирмә тәнлијини исә тәғриби өдәјир. Лимитә кечмә васитәсилә стационар, гејри-стационар һалда сонлу вә сонсуз цилиндрик өртүјүн температур саһәси тәјин едилир.

В. И. МАРОН, Г. Г. САФАРОВ

ВЫБРАСЫВАНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКЕ

В статье представлены результаты решения задачи об обтекании потоком жидкости плоской пластинки, с поверхности которой выдувается другая жидкость. Имеется большое число работ, в которых дается решение этой задачи. В отличие от них в данной статье движение жидкостей рассматривается как взаимопроникающее. Для описания явления используются уравнения, предложенные в работе [1].

Настоящая статья содержит результаты качественного исследования движения. Рассматривается следующая задача: плоская полубесконечная пластинка обтекается потоком несжимаемой жидкости, причем с поверхности пластинки в основной поток выдувается другая жидкость. Для описания движения жидкости воспользуемся уравнениями, предложенными в [1]. Согласно этой работе уравнения установившегося движения двухкомпонентной жидкости в ламинарном пограничном слое на пластинке запишутся следующим образом:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{k}{\rho_i} (u_j - u_i),$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \quad (1)$$

где x —расстояние вдоль пластинки от ее передней кромки;

y —расстояние от поверхности пластинки;

u_i и v_i —составляющие скоростей, соответственно, вдоль пластинки и в поперечном направлении;

ν_i —кинематическая вязкость жидкости, составляющей i -ый компонент смеси;

ρ_i —масса i -ого компонента в единице объема смеси (эта величина, подобна тому как это сделано в работе [1], предполагается постоянной).

По известной схеме пограничного слоя область течения разделяется на пограничный слой и область течения вне его. Вне пограничного слоя жидкость движется без трения, с постоянной скоростью U_∞ . В дальнейшем индекс 1 будем относить к параметрам набегающего потока, а индекс 2—к параметрам выдуваемой жидкости.

Краевые условия задачи имеют следующий вид:

$$u_i = 0; \quad v_i = 0; \quad w_i = U_w \quad \text{при } y = 0,$$

$$u_i = U_\infty; \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y \geq \delta_i, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где U_w —скорость, с которой выдувается жидкость с поверхности пластинки;

δ_i —толщина пограничных слоев, образуемых первой и второй жидкостями. Предполагается, что эти величины не равны друг другу.

Пусть уравнения (1) и краевые условия (2) составляют первую задачу (I). В дальнейшем будет рассматриваться еще одна вторая задача (II), у которой краевые условия имеют вид:

$$u_i = 0; \quad v_i = 0 \quad \text{при } y = 0,$$

$$u_i = U_\infty; \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y \geq \delta_i. \quad (3)$$

Эти условия и уравнения (1) описывают взаимопроникающее движение двух жидкостей вблизи поверхности пластинки. В этом случае жидкость не выдувается с поверхности пластинки и обе жидкости набегают на пластинку с постоянной скоростью U_∞ .

Отыскание точных решений задач (I) и (II) представляет большие математические трудности. Поэтому воспользуемся приближенным методом интегрирования уравнений пограничного слоя. Одним из них является метод последовательных приближений М. Е. Швеца [2], получивший широкое распространение в работах советских гидромехаников [2—4]. Опуская выкладки, которые проводятся по общей схеме метода, приведем здесь систему уравнений для определения толщины пограничного слоя каждого компонента смеси в случае задачи I. Она имеет вид

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{8\nu_1}{U_\infty \delta_1} - \frac{8k_1 \delta_1^2}{3U_\infty \delta_2} + \frac{8k_1 \delta_1}{3U_\infty},$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{8\nu_2}{U_\infty \delta_2} - \frac{8k_2 \delta_2^2}{3U_\infty \delta_1} + \frac{8k_2 \delta_2}{3U_\infty} + \frac{4U_w}{U_\infty}.$$

Эти уравнения получены во втором приближении. Второму приближению соответствуют профили скорости в виде полиномов четвертой степени.

Трудно ожидать, что удастся найти решение нелинейных уравнений (4) в квадратурах. Численное решение этой системы связано с конкретным выбором параметров ν_i ; k_i ; U_∞ и U_w и не позволяет в целом судить о поведении интегральных кривых. Однако система (4) допускает подробное качественное исследование в фазовой плоскости δ_1 и δ_2 для важнейших случаев, постоянной скорости выдува ($U_w = \text{const}$; $U_w > 0$) и переменной ($U_w = z/\delta_2(x)$; $z = \text{const}$; $z > 0$).

Перейдем к качественному исследованию системы (4).

1. Случай $U_w = 0$.

Этот случай соответствует задаче (II) и систему уравнений (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{d\delta_2}{d\delta_1} = \frac{\nu_2}{\delta_2} - \frac{k_2 \delta_2^2}{3\delta_1} + \frac{k_2 \delta_2}{3} = \frac{f_2(\delta_1; \delta_2)}{f_1(\delta_1; \delta_2)}. \quad (5)$$

Функции $f_2(\delta_1; \delta_2)$ и $f_1(\delta_1; \delta_2)$ аналитические всюду в плоскости ($\delta_1 \geq 0; \delta_2 \geq 0$). Кроме прямых $\delta_1 = 0$ и $\delta_2 = 0$. В силу теоремы существования и единственности через каждую неособую точку этой плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения (5). Изоклины, соответственно, нулевого (а) и бесконечного (б) направлений имеют вид:

$$\delta_1 = \frac{k_2 \delta_2^3}{3\nu_2 + k_2 \delta_2^2}; \quad (a) \quad \delta_2 = \frac{k_1 \delta_1^3}{3\nu_1 + k_1 \delta_1^2}. \quad (b) \quad (6)$$

Прямая $\delta_1 = \delta_2$ является изоклиной (с) направления $\tan \alpha = \nu_2/\nu_1$. Легко показать, что при $\delta_1 \rightarrow \infty$ и $\delta_2 \rightarrow \infty$ изоклины (а) и (б) асимптотически стремятся к прямой $\delta_1 = \delta_2$, т. е. к изоклине (с). Плоскость ($\delta_1 > 0; \delta_2 > 0$) разбивается изоклинами на три области (рис. 1). В области I $f_2 < 0; f_1 > 0$, поэтому $d\delta_2/d\delta_1 < 0$. Интегральные кривые $\delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ убывают и достигают минимума в точках изоклины (а). В области III $f_1 < 0; f_2 > 0$ и $d\delta_2/d\delta_1 < 0$. Интегральные кривые $\delta_1 = \delta_1(\delta_2)$ убывают и достигают минимума в точках изоклины (б). В области II заключены все неотрицательные направления $0 \leq d\delta_2/d\delta_1 < \infty$.

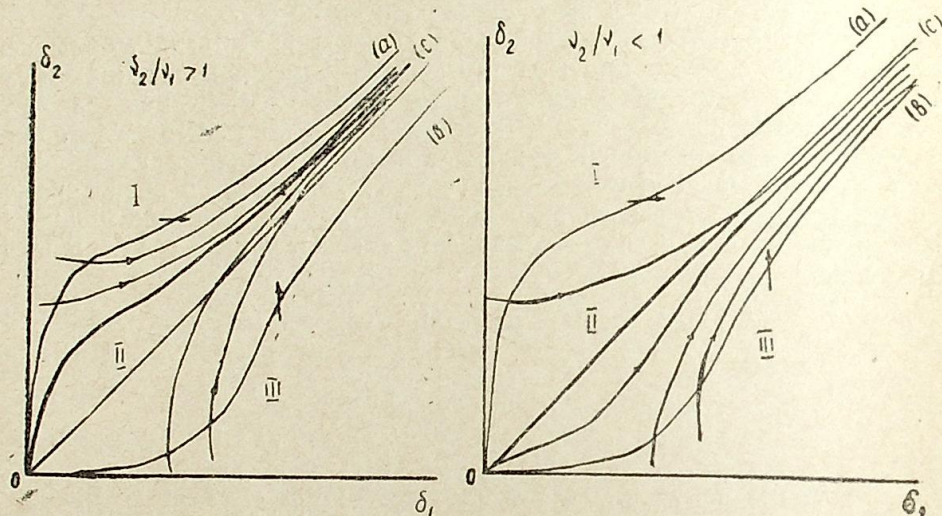


Рис. 1

Рис. 2

Точка $\delta_1 = \delta_2 = 0$ является особой для уравнения (5). Нетрудно убедиться, что особая точка является седлом, поэтому в области $\delta_1 \geq 0; \delta_2 \geq 0$ существует только одна интегральная кривая, проходящая через особую точку. Эта кривая выходит из начала координат с направлением $\delta_1/\delta_2 = (\nu_1/\nu_2)^{1/2}$ и при $\delta_1 \rightarrow \infty$ и $\delta_2 \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к прямой $\delta_1 = \delta_2$. Эта интегральная кривая является сепаратрисой найденных выше семейств интегральных кривых. Поведение интегральных кривых для $\nu_2/\nu_1 > 1$, $\nu_2/\nu_1 < 1$ и $\nu_2/\nu_1 = 1$ представлено на рис. 1, 2, 3. Стрелками указано направление движения по фазовым траекториям с ростом x — расстояния вдоль пластинки. Из рисунков видно, что в случае $\nu_2/\nu_1 > 1$ с ростом x толщина пограничного слоя жидкости с большей кинематической вязкостью при любых начальных условиях станет больше толщины первого слоя жидкости с меньшей кинематической вязкостью.

Разделяющая интегральная кривая проходит в области $\delta_2 > \delta_1$. Она соответствует пограничным слоям, для которых $\delta_1(0) = 0$ и $\delta_2(0) = 0$.

Эти слои развиваются так, что $\delta_2(x) > \delta_1(x)$ для $x > 0$. При $\nu_2/\nu_1 < 1$ картина развития пограничных слоев аналогична. Сепаратриса проходит в области $\delta_1 > \delta_2$, т. е. слои развиваются так, что внешним всегда оказывается пограничный слой компонента с большей кинематической вязкостью. В случае $\nu_2/\nu_1 = 1$, в зависимости от начальных условий, могут реализоваться слои, для которых:

- а) $\delta_2(x) > \delta_1(x)$ при $x \geq 0$,
- б) $\delta_2(x) < \delta_1(x)$ при $x \geq 0$,
- в) $\delta_2(x) = \delta_1(x)$ при $x \geq 0$ и $\delta_1(a) = \delta_2(0) = 0$.

В случае с) можно выписать решение:

$$\delta_2 = \delta_1 = 4 \sqrt{\frac{4x}{U_\infty}}, \quad (3)$$

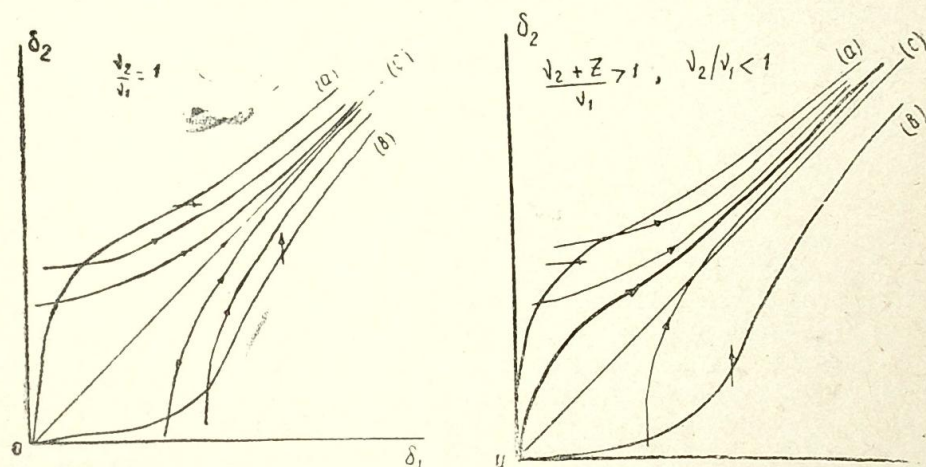


Рис. 3

Рис. 4

Это решение соответствует обтеканию полубесконечной пластинки однородной несжимаемой жидкостью. Во всех трех случаях при $x \rightarrow \infty$ $\delta_2/\delta_1 \rightarrow 1$, т. е. происходит сближение пограничных слоев.

2. Случай $U = \frac{z}{\delta_2(x)}$; $z = \text{const}$; $z > 0$.

Аналогично предшествующему исследуется система (4) в случае убывающей скорости вдува. Находим изоклину нуля

$$\delta_1 = \frac{k_2 \delta_2^3}{3\nu_2 + k_2 \delta_2^2}, \quad (a) \quad (9)$$

изоклину бесконечности

$$\delta_2 = \frac{k_1 \delta_1^3}{3\nu_1 + k_1 \delta_1^2} \quad (b) \quad (10)$$

и изоклину направления $\tan \alpha = (\nu_2 + z)/\nu_1$,

$$\delta_1 = \delta_2. \quad (c) \quad (11)$$

На рис. 4 изображены интегральные кривые системы (4) в плоскости ($\delta_1; \delta_2$) ($\delta_1 \geq 0$ и $\delta_2 \geq 0$). Поведение интегральных кривых ука-

зывает на принципиальное отличие в физике явления по сравнению с уже рассмотренным случаем. Именно, например, при $v_2/v_1 < 1$, отношение $(v_2 + z)/v_1$ может быть > 1 . Наиболее интересный случай, когда

да при $v_2/v_1 < 1$ $(v_2 + z)/v_1 > 1$. Несмотря на то, что кинематическая вязкость первого компонента больше кинематической вязкости второго при достаточно большей величине z — интенсивности вдува внешним окажется пограничный слой второго компонента.

Если $v_2/v_1 = 1$, то всегда при $z > 0$ $(v_2 + z)/v_1 > 1$, т. е. пограничный слой утолщается по отношению к его величине в случае обтекания пластинки без вдува. Характер особенности в точке $\delta_1 = 0$; $\delta_2 = 0$ сохраняется и в этом случае. Разделяющая интегральная кривая выходит из начала координат под углом $\tan \alpha = [(v_2 + z)/v_1]^{1/2}$ и при $x \rightarrow \infty$ $\delta_1/\delta_2 \rightarrow 1$.

3. Случай $U_w = U_0$; $U_0 = \text{const}$; $U_0 > 0$.

В этом случае опять имеется два семейства интегральных кривых и разделяющая интегральная кривая — единственная, так как в начале координат — особая точка — седло. Разделяющаяся интегральная кривая выходит из начала координат с направлением $\tan \alpha = (v_2/v_1)^{1/2}$. Для всех интегральных кривых

$$\lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow \infty \\ \delta_2 \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\delta_2}{\delta_1} = 1. \quad (12)$$

Интересно отметить следующее:

1) во всех рассмотренных случаях поведение интегральных кривых в фазовой плоскости $\delta_1 \geq 0$; $\delta_2 \geq 0$ не зависит от U_∞ ;

2) изученное явление — формирование пограничных слоев является устойчивым в том смысле, что при любых начальных условиях асимптотическое поведение интегральных кривых на бесконечности оказывается одинаковым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Grenzschicht—theorie der homogenen und Zweikomponenten-Flüssigkeit mit Zwei Geschwindigkeiten intam Symposium. Freiburg/Br. 1957.
2. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя, ПММ, т. XIII, № 3, 1949.
3. Кулонен Т. А. „Вестн. ЛГУ, серия матем.-астр.“, № 1, 1960.
4. Добрышман Е. М. Приближенное решение некоторых нестационарных задач пограничного слоя, ПММ, т. XX, вып. 3, 1956.
5. Берлянд О. С. Тр. Географ. ин-та АН СССР, № 22, (149) 1954.

В. И. Марон, Н. Н. Сэфаров

Мајенин мустәви лөвһәнин сәрһәд лајына атылмасы

ХУЛАСӘ

Магалә мустәви, мәсамәли лөвһәнин јујулмасы мәсәләсинә һәср едилмишдир. Мустәви сәтһиндән үфүрүлән мајенин физики хассәләри әсас ахыны тәшкил едән маједән фәрглидир. Мајеләрин ахыны гаршылыглы нүфуз едән бир нечә мүһитин һәрәкәт нәзәријәсинә әсасән өјрәнилмишдир.

А. Г. МУГАЛОВ

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА В СМЫСЛЕ ЧЕЗАРО—ДАНЖУА

В настоящей статье изучаются условия предельного перехода под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой в смысле Чезаро—Данжуа или коротко C_1 —Д интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если существует функция $F(x)$, являющаяся ACG^* (C_1 —смысле)*—функцией на $[a, b]$, такая, что

$$C_1 DF(x) = f(x)^{**}$$

почти всюду на $[a, b]$. Выражение $F(b) - F(a)$ называется определенным C_1 —Д интегралом от $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается через

$$(C_1 - D) \int_a^b f(x) dx,$$

а функция $F(x)$ называется неопределенным C_1 —Д интегралом на $[a, b]$. В работе А. Г. Джаваршейшвили [2] доказан ряд достаточных условий предельного перехода под знаком интеграла Данжуа.

Введем следующие понятия. Пусть на интервале (a, b) задана последовательность функций

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots \quad (1)$$

Определение 1. Последовательность функций (1) будем называть равностепенной AC^* (C_1 —смысле) на множестве $E \subset (a, b)$, если функции $F_n(x)$ при $n = 1, 2, \dots$ будут (D) интегрируемыми в интервалах, которые содержит E , и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$\sum_{r=1}^m (b_r - a_r) \leq \delta,$$

где $\{(a_r, b_r)\}$ — неналегающие друг на друга интервалы, концы которых принадлежат множеству E , вытекает:

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, a_r, x) - F_n(a_r)| < \varepsilon,$$

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, b_r, x) - F_n(b_r)| < \varepsilon,$$

* Определение ACG^* (C_1 —смысле) функции см. в [1], стр. 222.

** Определение C_1 —производной функции см. в [1], стр. 213.

где

$$C_1(F_n, a_r, x) = \frac{1}{x - a_r} (D) \int_{a_r}^x F_n(t) dt,$$

$$C_1(F_n, b_r, x) = \frac{1}{x - b_r} (D) \int_{b_r}^x F_n(t) dt$$

($n = 1, 2, \dots$).

Определение 2. Последовательность функций (1) будем называть равностепенно ACG^* (C_1 -смысле) на интервале (a, b) , если всякое совершенное множество $E \subset (a, b)$ содержит такую порцию $P \subset E^*$, на которой последовательность (1) будет равностепенна AC^* (C_1 -смысле).

Докажем некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. Если последовательность (1) равностепенно C_1 -непрерывных** функций, определенных на интервале (a, b) , сходится к C_1 -непрерывной функции $F_0(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < \beta} |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| \geq \sup_{a < x < \beta} |C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)|,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{a < x < \beta} |C_1(F_n, \beta, x) - F_n(\beta)| \geq \sup_{a < x < \beta} |C_1(F_0, \beta, x) - F_0(\beta)|,$$

где (α, β) — произвольный подынтервал интервала (a, b) .

Доказательство. В силу равностепенной C_1 -непрерывности последовательности (1) и C_1 -непрерывности функции $F_0(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$|x - \alpha| \delta$$

вытекает

$$\left| \frac{1}{x - \alpha} (D) \int_{\alpha}^x F_n(t) dt - F_n(\alpha) \right| < \varepsilon$$

при

$$n = 1, 2, \dots;$$

$$\left| \frac{1}{x - \alpha} (D) \int_{\alpha}^x F_0(t) dt - F_0(\alpha) \right| < \varepsilon.$$

Пусть $\alpha < x < \beta$, тогда

$$|C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)| \leq |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| + |C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x)| + |F_n(\alpha) - F_0(\alpha)|.$$

Рассмотрим следующую разность:

$$C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x) = \frac{1}{x - \alpha} \int_{\alpha}^x F_0(t) dt - \frac{1}{x - \alpha} \int_{\alpha}^x F_n(t) dt \leq F_0(\alpha) + \varepsilon - F_n(\alpha) + \varepsilon = F_0(\alpha) - F_n(\alpha) + 2\varepsilon.$$

Из условия леммы получим, что

$$F_0(\alpha) - \varepsilon < F_n(\alpha) < F_0(\alpha) + \varepsilon \text{ при } n > N. \quad (2)$$

Тогда

$$C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x) \leq 3\varepsilon.$$

* Определение порции см. в кн. С. Сакса „Теория интеграла“, стр. 67.

** Определение C_1 -непрерывных функций см. в [1], стр. 213.

Аналогично получаем, что

$$C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x) \geq -3\varepsilon.$$

Наконец, имеем

$$-3\varepsilon \leq C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x) \leq 3\varepsilon,$$

откуда следует

$$|C_1(F_0, \alpha, x) - C_1(F_n, \alpha, x)| \leq 3\varepsilon.$$

Из (2) и (3) имеем

$$|C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)| \leq |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| + 4\varepsilon$$

для любого $x, \alpha < x < \beta$. Отсюда вытекает:

$$|C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)| \leq \sup_{\alpha < x < \beta} |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| + 4\varepsilon.$$

$$\sup_{\alpha < x < \beta} |C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)| \leq \sup_{\alpha < x < \beta} |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| + 4\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\alpha < x < \beta} |C_1(F_n, \alpha, x) - F_n(\alpha)| \geq \sup_{\alpha < x < \beta} |C_1(F_0, \alpha, x) - F_0(\alpha)|.$$

Аналогично можно доказать и второе неравенство.

Лемма 2. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ интегрируемы в смысле Чезаро–Данжуа на интервале (a, b) . Если последовательность функций

$$F_1(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_1(t) dt, \dots, F_n(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_n(t) dt, \dots$$

на замкнутом множестве $E \subset (a, b)$ равностепенна AC^* (C_1 -смысле), то семейство интегралов

$$\left\{ (L) \int_e f_n(x) dx \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $e \subseteq E$, будет равностепенно абсолютно непрерывным.

Доказательство. Из условия леммы $\{F_n(x)\}$ интегрируемы (D) в интервале, который содержит E , и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства

$$\sum_{r=1}^m (b_r - a_r) \leq \delta,$$

где $\{(a_r, b_r)\}$ — не налегающие друг на друга интервалы, концы которых принадлежат множеству E , вытекает:

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, a_r, x) - F_n(a_r)| < \frac{\varepsilon}{2H},$$

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, b_r, x) - F_n(b_r)| < \frac{\varepsilon}{2H},$$

при $n = 1, 2, \dots$. Здесь H — константа из леммы III [1]. Обозначим через e такое измеримое подмножество множества E , что $|e| < \delta$. Покроем множество e такой убывающей последовательностью $G_1, G_2, \dots, G_m, \dots$ открытых множеств, чтобы:

- 1) концы интервалов $\{(a_r^{(m)}, b_r^{(m)}) = \delta_r^{(m)}\}$, смежных к множеству CG_m , принадлежали множеству E ;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} |G_m| = e$.

Очевидно, что если

$$e_m = E \cdot G_m = \sum_{r=1}^m \delta_r^{(m)} \cdot E,$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |e_m| = |e|.$$

Если обозначим через $(a_{r,j}^{(m)}, b_{r,j}^{(m)})$ смежные интервалы к множеству $\delta_r^{(m)} \cdot E$

по отношению интервала $\delta_r^{(m)}$, тогда

$$G_m - e_m = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_{k,j}^{(m)},$$

где

$$\Delta_{k,j}^{(m)} = (a_{r,j}^{(m)}, b_{r,j}^{(m)}).$$

По условию 2) для $\delta > 0$ существует такое целое положительное число $M(\delta)$, что из неравенства $m \geq M(\delta)$ вытекает неравенство $G_m < \delta$.

Из леммы III (см [1], стр. 216) имеем

$$\left| (C_1 - D) \int_{a_r^{(m)}}^{b_r^{(m)}} f_n(x) dx \right| = |F_n(b_r^{(m)}) - F_n(a_r^{(m)})| \leq H \cdot \omega(F_n),$$

где

$$\omega(F_n) = \max \left\{ \sup_{a_r^{(m)} < x < b_r^{(m)}} |C_1(F_n, a_r^{(m)}, x) - F_n(a_r^{(m)})|, \right. \\ \left. \sup_{a_r^{(m)} < x < b_r^{(m)}} |C_1(F_n, b_r^{(m)}, x) - F_n(b_r^{(m)})| \right\}.$$

Таким образом при $m \geq M(\delta)$ и $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left| (C_1 - D) \int_{a_r^{(m)}}^{b_r^{(m)}} f_n(x) dx \right| \leq \\ \leq H \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \sup_{a_r^{(m)} < x < b_r^{(m)}} |C_1(F_n, a_r^{(m)}, x) - F_n(a_r^{(m)})| + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{\infty} \sup_{a_r^{(m)} < x < b_r^{(m)}} |C_1(F_n, b_r^{(m)}, x) - F_n(b_r^{(m)})| \right\} \leq \epsilon. \quad (4)$$

Аналогично можно получить, что при $m \geq M(\delta)$ и $n = 1, 2, \dots$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| (C_1 - D) \int_{a_{r,j}^{(m)}}^{b_{r,j}^{(m)}} f_n(x) dx \right| < \epsilon. \quad (5)$$

На основании свойства B интеграла Чезаро—Данжуа (см. [1], стр. 219) имеем

$$(C_1 - D) \int_{a_r^{(m)}}^{b_r^{(m)}} f_n(x) dx = (L) \int_{\delta_r^{(m)} \cdot E} f_n(x) dx + \sum_{j=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_{r,j}^{(m)}}^{b_{r,j}^{(m)}} f_n(x) dx,$$

при $n = 1, 2, \dots$

Суммируя последнее равенство по r , получаем

$$\sum_{r=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_r^{(m)}}^{b_r^{(m)}} f_n(x) dx = (L) \int_{e_m} f_n(x) dx + \\ + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_{r,j}^{(m)}}^{b_{r,j}^{(m)}} f_n(x) dx, \quad (6)$$

при $n = 1, 2, \dots$. Пусть $m \geq M(\delta)$, тогда из (4), (5) и (6) получаем

$$\left| (L) \int_{e_m} f_n(x) dx \right| \leq 2\epsilon$$

($n = 1, 2, \dots$).

Переходя к пределу в последнем неравенстве, когда $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\left| (L) \int_e f_n(x) dx \right| \leq 2\epsilon$$

($n = 1, 2, \dots$). Лемма доказана.

Теорема. Пусть последовательность функций $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots$, интегрируемых в смысле Чезаро—Данжуа на интервале (a, b) , сходится почти всюду к функции $f_0(x)$. Если последовательность функций

$$F_1(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_1(t) dt, \dots, F_n(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_n(t) dt, \dots$$

на интервале (a, b) равномерно C_1 -непрерывна и равномерно АСГ* (C_1 -смысле), то предельная функция $f_0(x)$ будет $C_1 - D$ интегрируемой и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_a^b f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_a^b f_0(x) dx.$$

Доказательство. Обозначим через F семейство таких интервалов $\delta \subset (a, b)$, для любого подынтервала которых справедлива теорема. Отметим некоторые свойства интервалов семейства F .

(α). Если интервалы (ϵ, β) и (β, γ) принадлежат семейству F , то интервал $(\epsilon, \gamma) \in F$.

(β). Если интервал $(\alpha, \beta) \in F$, то любой его подынтервал также принадлежит F .

Справедливость свойств (α) и (β) очевидна.

(γ). Если любой внутренний подынтервал интервала (α, β) принадлежит семейству F , то $(\alpha, \beta) \in F$. Пусть $\gamma_0 \in (\alpha, \beta)$, $\alpha < \epsilon + t < \gamma_0$. Интервал $(\alpha + t, \gamma_0)$ есть подынтервал интервала (α, γ_0) , поэтому $(\epsilon + t, \gamma_0) \in F$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $N(\epsilon)$, что при $n > N(\epsilon)$ имеем

$$(C_1 - D) \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx - \epsilon \leq \\ \leq (C_1 - D) \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq (C_1 - D) \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx + \epsilon.$$

Проинтегрируем это неравенство в смысле Данжуа на интервале $(0, h)$ и умножим на $\frac{1}{h}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx - \varepsilon &\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx + \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

По условию теоремы для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что при $0 < h \leq \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx - \varepsilon &\leq F_n(\alpha) - F_n(\gamma_0) \leq \\ &\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_n(x) dx + \varepsilon \end{aligned}$$

($n = 1, 2, \dots$).

Тогда неравенство (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_n(\alpha) - F_n(\gamma_0) - 2\varepsilon &\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq \\ &\leq F_n(\alpha) - F_n(\gamma_0) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) - F_0(\gamma_0) - 2\varepsilon &\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) - F_0(\gamma_0) + 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) - 2\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha) + 2\varepsilon.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ произвольно малое, поэтому вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\alpha)$$

существует, обозначим его через $S(\alpha)$.

Тогда из неравенства (8) получим

$$S(\alpha) - F_0(\gamma_0) - 2\varepsilon \leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq S(\alpha) - F_0(\gamma_0) + 2\varepsilon.$$

Переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\begin{aligned} S(\alpha) - F_0(\gamma_0) &\leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx \leq S(\alpha) - F_0(\gamma_0). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\alpha+t}^{\gamma_0} f_0(x) dx = S(\alpha) - F_0(\gamma_0).$$

По теореме IX (см. [1], стр. 240) $S(\alpha) = F_0(\alpha)$. Следовательно, функция $f_0(x)$ интегрируема в смысле Чезаро—Данжуа на интервале (α, γ_0) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_{\alpha}^{\gamma_0} f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_{\alpha}^{\gamma_0} f_0(x) dx.$$

Аналогично можно доказать для интервала (γ_0, β) . Следовательно, в силу свойства (а) функция $f_0(x)$ интегрируемая в смысле Чезаро—Данжуа на интервале (α, β) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_{\alpha}^{\beta} f_0(x) dx,$$

то есть $(\alpha, \beta) \in F$.

Если смежные интервалы совершенного множества E принадлежат семейству F , то существует такой интервал $\Delta \in F$, что $\Delta \cdot \bar{E} = P$ непустое. По условию теоремы для множества E существует такой интервал Δ , что последовательность функций

$$F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$$

на порции $P = \Delta \cdot \bar{E}$ будет равностепенна AC^* (C_1 -смысле). Следовательно, $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$\sum_{r=1}^{\infty} (b_r - a_r) < \delta,$$

где $\{a_r, b_r\}$ — неналегающие интервалы, концы которых принадлежат множеству P , вытекает

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, a_r, x) - F_n(a_r)| < \varepsilon, \quad (9)$$

$$\sum_{r=1}^m \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_n, b_r, x) - F_n(b_r)| < \varepsilon \quad (10)$$

($n = 1, 2, \dots$).

Обозначим через $\Delta_r = (a_r, b_r)$ смежные интервалы к множеству P по отношению интервала Δ , а через $F_0(x)$ неопределенный $C_1 - D$ интеграл от $f_0(x)$ на интервалах Δ_r . Докажем, что ряды

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_0, a_r, x) - F_0(a_r)|, \quad (11)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sup_{a_r < x < b_r} |C_1(F_0, b_r, x) - F_0(b_r)| \quad (12)$$

сходятся.

На основании леммы 1 и (9), (10) ряды (11) и (12) сходятся. Кроме того, из леммы 2 семейство интегралов

$$\left\{ (L) \int_c f_n(x) dx \right\}, \quad e \subset P$$

равностепенно абсолютно непрерывно на множестве P . Следовательно, по известной теореме Витали (см. [4], стр. 168) функция $f_0(x)$ суммируема на P и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_P f_n(x) dx = (L) \int_P f_0(x) dx. \quad (13)$$

На основании (11), (12) и по свойству B (см. [1], стр. 219) интеграла в смысле Чезаро—Данжуа мы заключаем, что $f_0(x)$ интегрируема в смысле Чезаро—Данжуа в интервале Δ и

$$(C_1 - D) \int_{\Delta} f_0(x) dx = (L) \int_P f_0(x) dx + \sum_{r=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_r}^{b_r} f_0(x) dx.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_r}^{b_r} f_n(x) dx = \sum_{r=1}^{\infty} (C_1 - D) \int_{a_r}^{b_r} f_0(x) dx. \quad (14)$$

Из равенств (13) и (14) получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_{\Delta} f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_{\Delta} f_0(x) dx,$$

т. е. интервал $\Delta \in F$ и свойство (б) справедливо для интервалов семейства F .

Пользуясь фундаментальной леммой П. Романовского [3], заключаем, что $(a, b) \in F$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_a^b f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_a^b f_0(x) dx.$$

Теорема доказана.

Для дальнейшего изучения условий предельного перехода под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа введем еще одно понятие.

Определение 3. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ интегрируемых C_1-D на сегменте $[a, b]$, назовем равномерно C_1-D интегрируемой на сегменте $[a, b]$, если всякое совершенное множество E содержит такую порцию $P = (\alpha, \beta) \cdot E$, на которой все функции $f_n(x)$ суммируемы и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |C_1(F_n, \alpha_k, x) - F_n(\alpha_k)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |C_1(F_n, \beta_k, x) - F_n(\beta_k)|$$

сходятся равномерно относительно n , где (α_k, β_k) —смежные интервалы множества P относительно (α, β) , а

$$F_n(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Опираясь на фундаментальную лемму П. Романовского [3], при таких же рассуждениях, как в теореме 1, аналогично можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ есть последовательность равномерно C_1-D интегрируемых функций на $[a, b]$, сходящаяся почти всюду к функции $f(x)$. Если функции

$$F(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

равностепенно C_1 -непрерывны и для всякого совершенного множества найдутся: порция $P = E \cdot (\alpha, \beta)$ и суммируемая функция $\varphi_P(x)$ такая, что

$$|f_n(x)| < \varphi_P(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

когда $x \in P$, то функция $f(x)$ C_1-D интегрируема и имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_a^b f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема 3. Пусть последовательность на $[a, b]$ равностепенно C_1-D интегрируемых функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ почти всюду сходится к C_1-D интегрируемой функции $f(x)$ и неопределенных интегралы

$$F_n(x) = (C_1 - D) \int_a^x f_n(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

равностепенно C_1 -непрерывны на $[a, b]$. Если всякое совершенное множество E содержит такую порцию $P = (\alpha, \beta) \cdot E$, что для убывающей последовательности измеримых множеств $e_n \subset P$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{e_n} f_n(x) dx = 0,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_1 - D) \int_a^b f_n(x) dx = (C_1 - D) \int_a^b f(x) dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sargent W. L. C. A Descriptive definition of Cesaro-Perron integrals. Proc. London math. soc. (2) 47, Part 3, 1941, 217—247.
2. Джаваршвейшвили А. Г. Тр. Тбилисского матем. ин-та, т. XXV, 1958.
3. Романовский П. И. Essai d'une exposition de l'integrale de Denjoy sans nombres transfinis. Fund. Math., 19, 1932.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.

А. Н. Мугалов

Чезаро-Данжуа ма'нада интегралда лимитэ кечмэк баггында

ХҮЛАСЭ

Лебег интегралында лимитэ кечмэк үчүн Д. Витали вэ А. Лебег тэрэфиндэн мүүжэн теоремлэр исбат едилмишдир. А. К. Чваршејшвили исэ Данжуа интегралында лимитэ кечмэк үчүн кафи шэртлэр көстэрмишдир.

Мэгалэдэ Чезаро-Данжуа ма'нада интегралда лимитэ кечмэк үчүн бир нечэ теоремлэр исбат едилмишдир.

Д. И. ШЕРМАН

ОБ ОДНОЙ ЧАСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА (Часть первая)

§ 1. В вопросах приложений нередко встречается задача об определении пары функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, одна из которых, например $\Phi(z)$, регулярна от переменной $z = x + iy$ в некоторой конечной и односвязной области S , ограниченной достаточно гладким контуром L , а другая функция $\Psi(z)$ регулярна вне L — в области, дополняющей S до расширенной плоскости, и (допустим) исчезает на бесконечности; на (общей же) границе L эти функции оказываются связанными (служащим, вообще говоря, для их нахождения) предельным соотношением вида

$$a\Phi(t) + b\overline{\Phi(t)} + c\Psi(t) + d\overline{\Psi(t)} = f(t), \quad (1, 1)$$

где t обозначает аффикс точки L . Ограничимся сравнительно несложным случаем, когда коэффициенты a, b, c и d являются постоянными* величинами; задаваемую функцию $f(t) = f_1(s) + if_2(s)$ (ее вещественная и мнимая составляющие $f_1(s)$ и $f_2(s)$ зависят от дуги s) будем считать непрерывной в смысле Гельдера.

Цель настоящей статьи заключается в выявлении качественных характеристик задачи, выступающих по ходу изучения на передний план и имеющих прямое отношение к установлению критериев ее разрешимости.

Как увидим, формулировка критериев разрешимости весьма проста и (как бывает в подобных обстоятельствах) исчерпывающе широка, причем, как правило (и это также не является неожиданным) возникают значительные осложнения при фактической проверке соблюдения критериев (в целом). Все же в данном случае (и это встречается гораздо реже) оказывается возможным (не прибегая к обременительным исследованиям) высказаться непреложно в положительном смысле по поводу разрешимости важного (видимо, наиболее распространенного в приложениях) подкласса задач типа (1, 1).

Рассуждения и выкладки упрощаются при вещественных коэффициентах. Сначала разберем задачу, считая их таковыми. Исходное (комплексное) соотношение (1, 1) разобьем на два отдельных равенства, состоящие порознь из вещественных и чистомнимых слагаемых, так что

* Более сложные случаи (одного или системы краевых условий типа (1, 1) с переменными коэффициентами) обсуждались с иных общих позиций многими авторами [1, 2].

$$[(a+b)\Phi(t) + (c+d)\Psi(t)] + [(a+b)\overline{\Phi(t)} + (c+d)\overline{\Psi(t)}] = 2f_1(s), \quad (1, 2)$$

$$[(a-b)\Phi(t) + (c-d)\Psi(t)] - [(a-b)\overline{\Phi(t)} + (c-d)\overline{\Psi(t)}] = 2if_2(s). \quad (1, 3)$$

Введем вспомогательную чистомнимую функцию $\omega(t)$ по формуле*

$$[(a+b)\Phi(t) + (c+d)\Psi(t)] - [(a+b)\overline{\Phi(t)} + (c+d)\overline{\Psi(t)}] = 2\omega(t). \quad (1, 4)$$

Сложив почленно равенства (1, 2) и (1, 4), получим

$$(a+b)\Phi(t) + (c+d)\Psi(t) = \omega(t) + f_1(s). \quad (1, 5)$$

Отсюда находим, что искомыми функциями (обход L ведется в направлении, положительном относительно области S) будут

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i(a+b)} \int_L \frac{\omega(t) + f_1(s)}{t-z} dt,$$

$$\Psi(z) = -\frac{1}{2\pi i(c+d)} \int_L \frac{\omega(t) + f_1(s)}{t-z} dt, \quad (1, 6)$$

причем в первом равенстве точка z лежит внутри контура L , а во втором — вне L . Явной проверкой убедимся, что функции (1, 6) удовлетворяют (1, 5); иначе говоря, равенства (1, 6) равносильны краевым соотношениям (1, 2) и (1, 4).

Перейдем в каждой из формул (1, 6) к пределу $z \rightarrow t_0$ на L и внесем значения для $\Phi(t_0)$ и $\Psi(t_0)$ в условие (1, 3). Тогда будем иметь для $\omega(t)$ интегральное уравнение Фредгольма:

$$\omega(t_0) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} = F(t_0), \quad \lambda = \frac{ad-bc}{ac-bd} \quad (1, 7)$$

с чистомнимым свободным членом

$$F(t_0) = i \frac{(a+b)(c+d)}{ac-bd} f_2(s_0) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L f_1(s) \left[\frac{dt}{t-t_0} + \frac{\bar{a}t}{\bar{t}-\bar{t}_0} \right].$$

Мы, естественно, полагаем $ac-bd \neq 0$ (ряд вырожденных случаев, кстати сказать, не представляющих серьезного интереса, включающих в том числе и условие $ac-bd=0$, будет рассмотрен позже).

Заметим, что (1, 7) при $\lambda=1$ совпадает с обычным интегральным уравнением для задачи Дирихле. Как известно, из теории потенциала**, характеристические значения ядра (1, 7) вещественны и (помимо $\lambda=-1$) численно превосходят единицу, так что лишь при $|\lambda|>1$ задача (1, 1) может не иметь решения. Как видно, ее разрешимости в особом случае ($\lambda=-1$) легко добиться, считая при численно неодинаковых c и d функцию $\Psi(z)$ не исчезающей, а ограниченной на бесконечности.

В качестве примера возьмем коэффициенты $a=1, b=2, c=3$ и $d=4$; при этом параметр $\lambda = \frac{2}{5}$ и, следовательно, интегральное уравнение (1, 7) всегда (при любой правой части) имеет единственное решение. Если же a и b поменять местами, оставляя прежними c и d ,

* Здесь в слегка модифицированной форме используется способ, изложенный первоначально в [3, 4].

** Сведения по этому поводу можно почерпнуть из монографии Н. М. Гюнтера [5], внесшего (после Ляпунова и Стеклова) выдающийся вклад в теорию потенциала.

то $\lambda = \frac{5}{2}$ и уравнение (1, 7) будет разрешимо либо тогда, когда это значение параметра не является характеристическим числом ядра (при рассматриваемой конфигурации L), либо же (в противоположном случае (при специальной правой части (1,7)). То же самое имеет место при коэффициентах $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ и $d = 1$ ($\lambda = -7$). Аналогично разбираются и другие случаи.

§ 2. Перейдем к более сложному случаю, когда две пары функций $\Phi_j(z)$ и $\Psi_j(z)$ ($j = 1, 2$) — первые из них $\Phi_j(z)$ регулярны в области S , а $\Psi_j(z)$ вне S (причем $\Psi_j(\infty) = 0$), — подлежат определению из системы двух краевых условий:

$$\sum_{k=1}^2 [a_{\nu k} \Phi_k(t) + b_{\nu k} \overline{\Phi_k(t)} + c_{\nu k} \Psi_k(t) + d_{\nu k} \overline{\Psi_k(t)}] = f_{\nu}(t) \quad (\nu = 1, 2). \quad (2, 1)$$

Здесь также коэффициенты $a_{11}, \dots, d_{22}$ будем считать вещественными. Из этих соотношений и сопряженных с ними имеем

$$U_{\nu}(t) + \overline{U_{\nu}(t)} = 2g_{\nu}(t), \quad V_{\nu}(t) - \overline{V_{\nu}(t)} = 2i\chi_{\nu}(t) \quad (\nu = 1, 2), \quad (2, 2)$$

где $g_{\nu}(t)$ и $\chi_{\nu}(t)$ — вещественная и мнимая части $f_{\nu}(t)$ и

$$[U_{\nu}(t), V_{\nu}(t)] = \sum_{k=1}^2 [(a_{\nu k} \pm b_{\nu k}) \Phi_k(t) + (c_{\nu k} \pm d_{\nu k}) \Psi_k(t)]. \quad (2, 3)$$

Каждая из функций в квадратных скобках слева определяется выражением, стоящим справа с удерживаемым (в той же последовательности, в которой проставлены эти функции) знаком плюс или минус.

Следуя тому же приему, зададим промежуточные (чистотные) функции $\omega_{\nu}(t)$ равенствами (попутно приводимые постоянные Δ_1 и $\gamma_{\kappa, \nu}^{(1)}$, наряду с Δ_2 и $\gamma_{\kappa, \nu}^{(2)}$ составленными по тем же формулам из коэффициентов $c_{\nu k}$ и $d_{\nu k}$, появятся ниже; в формуле для Δ_1 при раскрытии суммы надо, как везде далее, индекс 3 заменить на 1)

$$U_{\nu}(t) - \overline{U_{\nu}(t)} = 2\omega_{\nu}(t) \quad (\nu = 1, 2);$$

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} (a_{k1} + b_{k1})(a_{k+1,2} + b_{k+1,2}). \quad (2, 4)$$

Складывая их с надлежащими, из соотношений (2, 2) получим

$$U_{\nu}(t) = \omega_{\nu}(t) + g_{\nu}(t); \quad \gamma_{\kappa, \nu}^{(1)} = (-1)^{\kappa+\nu} (a_{\kappa, \nu} + b_{\kappa, \nu}) \quad (\kappa, \nu = 1, 2). \quad (2, 5)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекают формулы

$$\sum_{k=1}^2 (a_{\kappa, \nu} + b_{\nu k}) \Phi_k(z) = F_{\nu}(z), \quad \sum_{k=1}^2 (c_{\nu k} + d_{\nu k}) \Psi_k(z) = G_{\nu}(z), \quad (2, 6)$$

причем первая их группа, содержащая $\Phi_{\nu}(z)$, справедлива в области S , а вторая — вне S ; функции справа в этих формулах равны (они берутся, соответственно, с верхним и нижним знаком)

$$[F_{\nu}(z), G_{\nu}(z)] = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega_{\nu}(t) + g_{\nu}(t)}{t - z} dt \quad (\nu = 1, 2). \quad (2, 7)$$

Интегралы типа Коши (с приданными им знаками), зависящие от плотности $g_{\nu}(t)$, назовем $P^{(1)}(z)$ и $P^{(2)}(z)$. Разрешим системы уравнений (2, 6) относительно входящих в них функций. Тогда предполагая, что Δ_1 и Δ_2 отличны от нуля, найдем (индексы $\kappa = \nu = 3$ следует принимать за 1)

$$T_{\nu}^{(n)}(z) \equiv [\Phi_{\nu}(z), \Psi_{\nu}(z)] = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{k=1}^2 \gamma_{k+1, \nu+1}^{(n)} F_k(z) \quad (n = 1, 2). \quad (2, 8)$$

Искомые функции, значащиеся в квадратных скобках, определяются значением завершающей части равенства последовательно при $n = 1$ и $n = 2$. На основании последней формулы, учитывая (2, 7), будем иметь на L

$$Im T_{\nu}^{(n)}(t_0) = \frac{1}{\Delta_n} \sum_{k=1}^2 \gamma_{k+1, \nu+1}^{(n)} \left[-\frac{i \omega_k(t_0)}{2} + \frac{(-1)^n}{4\pi} \int_L \omega_k(t) d \ln \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} + Im P_k^{(-)}(t_0) \right]. \quad (2, 9)$$

Имея в виду эти равенства и обращаясь к неиспользованной еще второй группе условий (2, 2), получим для $\omega_{\nu}(t)$ систему фредгольмовых уравнений:

$$\sum_{n=1}^2 \left[\sigma_{\nu n} \omega_n(t_0) + \gamma_{\nu n} \frac{1}{2\pi i} \int_L \omega_n(t) d \ln \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} \right] = Q_{\nu}(t_0) \quad (\nu = 1, 2). \quad (2, 10)$$

В ней приняты обозначения

$$[\sigma_{\nu, n}, \gamma_{\nu, n}] = \varepsilon_{\nu, n}^{(1)} \pm \varepsilon_{\nu, n}^{(2)}, \quad \varepsilon_{\nu, n}^{(1)} = \frac{1}{\Delta_1} \sum_{k=1}^2 (a_{\nu k} - b_{\nu k}) \gamma_{n+1, k+1}^{(1)}, \quad (2, 11)$$

где $\varepsilon_{\nu, n}^{(2)}$ (видимо, этого можно было бы уже не пояснять) вычисляется по формуле той же структуры, что для $\varepsilon_{\nu, n}^{(1)}$, при участвующих $c_{\nu k}$ и $d_{\nu k}$, вместо $a_{\nu k}$ и $b_{\nu k}$; кроме того, свободный член

$$Q_{\nu}(t_0) = 2i \left\{ \chi_{\nu}(t_0) - Im \sum_{n=1}^2 \sum_{e=1}^2 \varepsilon_{\nu, n}^{(e)} P_n^{(e)}(t_0) \right\}; \quad \sigma(\mu) = \frac{\sigma_{12} + \mu \sigma_{22}}{\sigma_{11} + \mu \sigma_{21}}.$$

Помимо указанной $\sigma(\mu)$, нужно держать в памяти еще величину $\eta(\mu)$, выражаемую таким же образом через $\gamma_{\nu, k}$. Умножим второе уравнение системы (2, 10) на параметр μ_{ν} ($\nu = 1, 2$), удовлетворяющий соотношению $\sigma(\mu) = \eta(\mu)$, и затем сложим его почленно с первым уравнением. После этого (допуская для простоты, что $\mu_1 \neq \mu_2$) придем к двум отдельным фредгольмовым уравнениям, в совокупности равносильным (2, 1) и того же типа, что (1, 7):

$$\Omega_{\nu}(t_0) + \frac{\lambda_{\nu}}{2\pi i} \int_L \Omega_{\nu}(t) d \ln \frac{t - t_0}{t - \bar{t}_0} = R_{\nu}(t_0); \quad \lambda_{\nu} = \frac{\eta_{11} + \mu_{\nu} \eta_{21}}{\sigma_{11} + \mu_{\nu} \sigma_{21}}, \quad (2, 12)$$

$$\Omega_{\nu}(t_0) = \omega_1(t_0) + \sigma(\mu_{\nu}) \omega_2(t), \quad R_{\nu}(t) = \frac{1}{\sigma_{11} + \mu_{\nu} \sigma_{21}} [Q_1(t) + \mu_{\nu} Q_2(t)]. \quad (2, 13)$$

В зависимости от значений параметров λ , можно (подобно тому, как в предыдущем случае) сделать то или иное заключение по поводу разрешимости каждого из уравнений (2, 12), а тем самым и задачи (2, 1).

Примечание. I. Остановимся кратко на исключительном случае, когда одна из величин Δ_1 или Δ_2 , например, $\Delta_1 = 0$. При этом из (2, 4) и (2, 6) вытекает, что необходимо

$$\Phi_1(z) + \gamma \Phi_2(z) = \frac{F_{\nu}(z)}{a_{\nu 1} + b_{\nu 1}}, \quad \nu = 1, 2; \quad \gamma = \frac{a_{12} + b_{12}}{a_{11} + b_{11}}. \quad (2, 14)$$

Чтобы обе формулы (2,14) были непротиворечивыми, должны обязательно соблюдаться—это явствует из (2,5) и (2,7)—следующие соотношения на контуре L :

$$\sum_{v=1}^2 (-1)^{v-1} [\omega_v(t) + g_v(t), U_v(t) - g_v(t)] = [\delta(t), i\delta_2(s)], \quad (2, 15)$$

где функция $\delta(z) = \delta_1(x, y) + i\delta_2(xy)$ регулярна вне L и обращается в нуль на бесконечности; $\delta_2(s)$ —граничное значение вещественной $\delta_2(x, y)$. Дабы исчезающая на бесконечности гармоническая функция $\delta_1(x, y)$ могла быть определена по задаваемому граничному значению, такое, равное вещественной части первой функции слева в (2, 15), должно удовлетворять специальному интегральному соотношению. Будем считать, что это соотношение на самом деле выполняется; в таком случае можно в принципе полагать известной функцию $\delta(z)$ (если же упомянутое соотношение не имеет места, то задача (2, 1), очевидно, неразрешима при $\Delta_1=0$).

При наличии (2, 15) достаточно удержать какое-либо одно, например, первое из (вещественных) условий (2, 2); при этом другое условие будет содержать в себе второе из соотношений (2, 15) с чистомнимой правой частью $i\delta_2(s)$. Оно же позволяет, используя извлекаемое из него выражение для $\Psi_2(z)$, преобразовать совместно то же первое и вторую группу (еще неучтенных) условий (2, 2) к системе трех краевых равенств (при вещественных же коэффициентах A_{kv}):

$$\sum_{v=1}^3 A_{kv} [\Phi_v(t) + \epsilon_k \overline{\Phi_v(t)}] = 2\mu P_k(t) \quad (\kappa = 1, 2, 3). \quad (2, 16)$$

Здесь для упрощения записи последующих формул положено $\Psi_1(z) = \Phi_3(z)$; $P_k(t)$ —некоторые известные функции; кроме того, $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$ и $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \mu_3 = i$. Придерживаясь развиваемого приема, возьмем в качестве новых дополнительных неизвестных (вещественные) функции $\sigma_2(t)$ и $\sigma_3(t)$ согласно формулам (как прежде, по ходу изложения выписываются и другие встречающиеся ниже величины)

$$Re \sum_{v=1}^3 A_{kv} \Phi_v(t) = \sigma_k(t) \quad (\kappa = 2, 3), \quad B_{11} = A_{32} A_{32} - A_{22} A_{33}. \quad (2, 17)$$

Учитывая наряду с ними подходящие из (2, 16), найдем

$$\sum_{v=1}^3 A_{kv} \Phi_v(t) = \Delta_k(t) \equiv \sigma_k(t) + ip_k(t), \quad B_{12} = A_{21} A_{33} - A_{23} A_{31}. \quad (2, 18)$$

При помощи кусочно-голоморфных функций (первая из них с плотностью $ip_k(t)$ известна)

$$[\epsilon_k(z), T_k(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_L [ip_k(t), \sigma_k(t)] \frac{dt}{t-z},$$

$$B_{13} = A_{21} A_{32} - A_{22} A_{31} \quad (2, 19)$$

получим из (2, 18) две группы равенств:

$$\left[\sum_{v=1}^2 A_{kv} \Phi_v(z), A_{k3} \Phi_3(z) \right] = \pm T_k^\pm(z) \pm \epsilon_k^\pm(z); \quad p_1^*(t) = A_{23} B_{13} p_1(t). \quad (2, 20)$$

Сопоставив оба выражения для $\Phi_3(z)$, придем к выводу, что они будут совместными лишь при соблюдении на L равенства

$$A_{33} \Delta_2(t) - A_{23} \Delta_3(t) = h(t) + C; \quad N_3^*(t) = B_{13} \epsilon_1^-(t), \quad (2, 21)$$

где $h(z)$ —функция, регулярная внутри L и определяемая по граничному значению ее мнимой части (величина вещественной части той же функции, равная $A_{33} \sigma_2(t) - A_{23} \sigma_3(t)$, с точностью до постоянной фиксируется в некоторой точке области); C —произвольная вещественная постоянная.

Имея в виду вытекающую из (2, 21) зависимость между $\sigma_2(t)$ и $\sigma_3(t)$, найдем

$$\Phi_v(z) = \frac{1}{B_{13}} \left[\frac{B_{1v}}{A_{23}} T_2(z) + N_v(z) \right], \quad \dot{N}_v^*(t) = -A_{23} N_v(t) \quad (v = 1, 2), \quad (2, 22)$$

где функция (из-за несколько искусственной ее записи, принятой ради краткости, при формальном разворачивании суммы появляются A_{kv} с индексами—одновременно и порознь— $\kappa = 4$ и $v = 3$; их надо считать за 2 и 1)

$$N_v(z) = (-1)^{v+1} \left[\sum_{\kappa=2}^3 (-1)^\kappa A_{\kappa+1, v+1} \epsilon_\kappa(z) + \frac{A_{2, v+1}}{A_{23}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Re h(t) + C}{t-z} dt \right].$$

Внесем теперь значения $\Phi_v(z)$ из (2, 22) и (отвечающее $\kappa = 2$) $\Phi_3(z)$ из (2, 20) в (остававшееся пока втуне) первое условие (2, 16). Тогда (полагая $\sigma_2(t) = \sigma(t)$) придем к совпадающему по виду с (1, 7) интегральному уравнению

$$\sigma(t_0) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_L \sigma(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} = 2Re G(t_0), \quad \lambda = 1 - 2\mu A_{13} B_{13}, \quad (2, 23)$$

$$G(t_0) = \mu \left[p_1^*(t_0) + \sum_{v=1}^3 A_{1v} N_v^*(t_0) \right], \quad \mu = \left(\sum_{v=1}^3 A_{1v} B_{1v} \right)^{-1}.$$

Сходным образом могут быть изучены остальные критические случаи.

Примечание II. Для удобства читателей схематически воспроизведем доказательство утверждения по поводу характеристических параметров ядра (1, 7) (при принятых менее ограничительных, нежели в общей теории, условиях оно выглядит весьма простым).

Положив $\omega_0(t) = i\gamma_0(s)$, где $\omega_0(t)$ —некоторое решение однородного уравнения (1, 7) и $\gamma_0(s)$ —вещественная величина, определим функции $u(x, y)$, гармонические внутри и вне области S (в зависимости от расположения точки z), равенством

$$u_0(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma_0(s) \left[\frac{dt}{t-z} - \frac{\bar{dt}}{t-\bar{z}} \right] (t = \xi + i\eta). \quad (2, 24)$$

Устремив в нем аффикс $z \rightarrow t$ поочередно изнутри и извне S (на что, по обыкновению, внимание фиксируется индексами i и e , придаваемыми в той же последовательности предельным значениям $u_0(x, y)$, получим соотношения

$$u_0^{(i)}(\xi_{01}, \eta) \mp u_0^{(e)}(\xi_{01}, \eta) = \left[2\gamma_0(s_0), \frac{1}{\pi i} \int_L \gamma_0(s) d \ln \frac{t-t_0}{t-\bar{t}_0} \right]. \quad (2, 25)$$

Наряду с ними укажем формулы

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = \frac{\epsilon_n}{2\pi i} \int_L \gamma_0'(s) \left[\frac{1}{t-z} \mp \frac{1}{t-\bar{z}} \right] ds; \quad \epsilon_1 = 1, \quad \epsilon_2 = i, \quad (2, 26)$$

где множители ϵ_1 и ϵ_2 , равно как верхний и нижний знаки, присущи выражениям для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ (в том же порядке, в котором они простав-

лены слева в квадратных скобках). Предельные значения каждой из этих производных (изнутри и извне S) различаются лишь знаками при внеинтегральных членах, так что

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y} \right]_{xy \rightarrow \xi_0, \eta_0} = [\pm \dot{\gamma}_0(s_0) \xi_0 + \dots, \pm \dot{\gamma}_0(s_0) \eta_0 + \dots], \quad (2, 27)$$

причем точки сверху над $\gamma(s)$ означают дифференцирование по дуге u (в согласии со сказанным), под многоточием в скобках справа подразумеваются интегральные члены, одинаковые для обоих предельных значений соответствующей частной производной.

В составленных при помощи (2, 27) нормальных производных $\frac{du_0^{(i)}}{dn}$ и $\frac{du_0^{(e)}}{dn}$ выпадают (взаимно сокращаясь) зависящие от $\gamma_0(s)$ вне-

интегральные члены и, следовательно, нормальная производная $\frac{du_0}{dn}$

остается непрерывной при переходе сквозь границу L . Имея это в виду и учитывая однородное уравнение (1, 7) и (2, 25), без труда придем к равенствам

$$(1 + \lambda) u_0^{(i)} = (1 - \lambda) u_0^{(e)} \text{ на } L, \quad (1 + \lambda) D(u_0^{(i)}) + (1 - \lambda) D(u_0^{(e)}) = 0. \quad (2, 28)$$

Второе из них получим, проинтегрировав первое, умноженное на $\frac{du_0}{dn}$,

по дуге L и применив в отдельности к его левой и правой частям формулу Грина; при этом $D(u_0^{(i)})$ и $D(u_0^{(e)})$ — так называемые интегралы Дирихле, распространенные по (конечной) области S и смежной бесконечной области (дополняющей S до расширенной плоскости) и содержащие под своим знаком сумму квадратов первых производных от функций $u_0^{(i)}(x, y)$ и $u_0^{(e)}(x, y)$. Оба слагаемых во втором равенстве (2, 28) сохраняют один и тот же знак только при условии $-1 < \lambda < 1$ и, очевидно, для параметра λ , изменяющегося в этих пределах вследствие обращения функции $u(x, y)$ в нуль на бесконечности, имеем $u_0^{(i)}(x, y) = C$ и $u_0^{(e)}(x, y) = 0$. Однако при этом из первого равенства (2, 28) сразу вытекает, что $C = 0$ и значит в силу (2, 25) плотность $\gamma_0(s) = 0$. Итак, требуемое предположение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. II, переработанное, 1962.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. II, переработанное, 1963.
3. Шерман Д. И. „ДАН СССР“, т. 55, 1947, № 8.
4. Шерман Д. И. „ДАН СССР“, т. 63, 1948, № 5.
5. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. 1953.

Б. О. КАСИМОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ С ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ В ОДИН КАНАЛ

Постановка задачи. Дается n рассредоточенных объектов системы телемеханики. Необходимо для этих n источников информации найти число возможных информационных сетей с избыточностью в один канал (под информационной сетью для n объектов подразумевается совокупность каналов связи (сеть), устанавливающих информационную связь между всеми этими объектами).

Решение задачи. Будем считать, что каналы связи полного графа пронумерованы от 1 до $\binom{n}{2}$, как, например, на рис. 1. Из такого графа путем исключения соответствующих $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$ каналов можно

получить информационную сеть с избыточностью в один канал любой возможной структуры. Так как структура информационной сети не зависит от длины ее каналов связи, то, очевидно, информационные сети, которые при наложении совпадут со всеми своими точками, должны приниматься за информационные сети одинаковой структуры. Информационные сети, имеющие одну и ту же структуру, но разные сочетания из числа пронумерованных каналов связи, будем называть разновидностями этой структуры. Число разновидностей информационной сети любой структуры обозначим через $B_{n\delta}^p$, где δ — порядковый номер структуры информационной сети при n объектах и p каналах связи.

Объекты информационной сети, перестановка которых местами не меняет каналы связи, т. е. не дает новых разновидностей рассматриваемой структуры, будем считать одинаковыми (или симметричными). Тогда нетрудно видеть, что

$$B_{n\delta}^p = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_{i_k}! \dots a_{j_1}! a_{j_2}! \dots a_{j_m}! \dots a_z},$$

где $a_1, \dots, a_j, \dots, a_z$ — число одинаковых по структуре „ветвей“ $1 \div k, \dots, 1 \div m, \dots, 1 \div z$ видов, непосредственно отходящих соот-

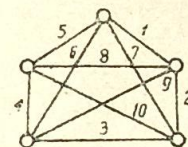


Рис. 1

ветственно от $i, \dots, j, \dots, e$ действительных (или воображаемых) объектов рассматриваемой информационной сети. Под ветвью подразумевается часть информационной сети, которая связана с остальной частью сети (объекты $i, \dots, j, \dots, e$) только одним каналом связи. При этом число одинаковых объектов отождествляется с числом ветвей. При одинаковой структуре, так как одинаковые объекты, согласно определению, расположены по одному по одинаковым по структуре ветвям.

В самом деле, пусть $a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} + \dots + a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m} + \dots + a_{e_z}$ будет число объектов из n отличных как друг от друга, так и от других объектов, входящих в перестановку из n объектов. За $B_{n_0}^p$ нами было взято число всех перестановок из n объектов без учета перестановок одинаковых объектов. Очевидно, в каждой $B_{n_0}^p$ можно теперь переставить и перечисленные объекты, перестановка которых ранее как одинаковых не меняла перестановку, т. е. будем иметь

$$B_{n_0}^p \cdot a_{i_1}! \cdot a_{i_2}! \cdot \dots \cdot a_{i_k}! \cdot \dots \cdot a_{j_1}! \cdot a_{j_2}! \cdot \dots \cdot a_{j_m}! \cdot \dots \cdot a_{e_z}! = n!$$

Поэтому

$$B_{n_0}^p = \frac{n!}{a_{i_1}! \cdot a_{i_2}! \cdot \dots \cdot a_{i_k}! \cdot \dots \cdot a_{j_1}! \cdot a_{j_2}! \cdot \dots \cdot a_{j_m}! \cdot \dots \cdot a_{e_z}!}.$$

Теперь, в частности, найдем B_n^n для n -угольника. Очевидно, данные на рис. 2 однофидерные линии с n объектами представляют собой одну и ту же информационную сеть. А это значит (так как каждая перестановка из $n!$ имеет свою пару), что однофидерная линия

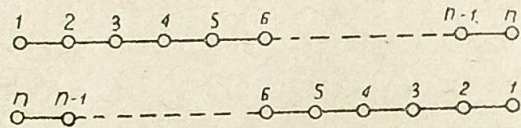


Рис. 2

имеет $\frac{n!}{2}$ разновидностей, как и по формуле для $B_{n_0}^p$. Если же концы однофидерной линии замкнуть, как на рис. 3, то каждой разновидности такой сети будет соответствовать n разновидностей (или n перестановок (по числу объектов) из $\frac{n!}{2}$. Отсюда число всех разновидностей таких сетей будет $B_n^n = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$.

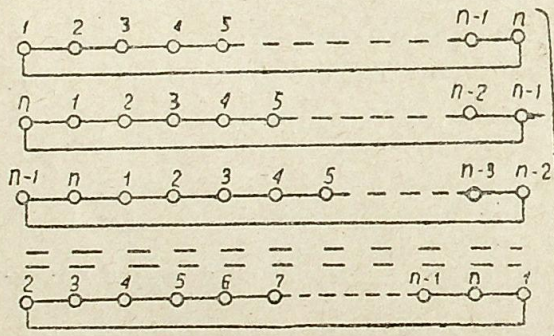


Рис. 3

Для каждого n число возможных информационных сетей с числом

каналов от $n-1$ до $\binom{n}{2}$ обозначим через $M_n = \sum_{p=n-1}^{\binom{n}{2}} M_n^p$, где M_n^p —

число всех информационных сетей с k_n^p возможными отличными друг от друга структурами при n объектах и p каналах связи, т. е.

$$M_n^p = \sum_{\delta=1}^{k_n^p} B_{n_\delta}^p = B_{n_1}^p + B_{n_2}^p + \dots + B_{n_1}^p + \dots + B_{n_{k_n^p}}^p,$$

$$M_n = \sum_{p=n-1}^{\binom{n}{2}} \sum_{\delta=1}^{k_n^p} B_{n_\delta}^p.$$

Определение величины M_n^n . Если взять полный n -граф, то из всех возможных размещений из этих n элементов (объектов) по k можно получить только $A_k = \frac{A_n^k}{2k}$ разных k -угольников.

Действительно, так как на каждое сочетание из $\binom{n}{k}$ приходится

$B_k^k = \frac{k!}{2k}$ разновидностей каждого k -угольника, то число возможных k -угольников (A_k), которое можно получить из n объектов, комбинируя связи полного n -графа, будет

$$A_k = \frac{k!}{2k} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k!}{2k \cdot k!} A_n^k = \frac{A_n^k}{2k}.$$

При n объектах и n каналах связи, связывающих эти объекты, каждая получающаяся информационная сеть будет содержать только один какой-нибудь соответствующий k -угольник, где k принимает значение от трех (треугольник) до n (n -угольник). Отсюда напрашивается сравнительно простой метод нахождения общего числа информационных сетей с избыточностью в один канал. А именно, по порядку находим

1. число всех информационных сетей; с n -угольниками
2. " " " " с $n-1$ -угольниками;
3. " " " " с $n-2$ -угольниками;

($n-2$) число всех информационных сетей с треугольниками.

Сумма же этих чисел будет равна искомой величине M_n^n .

Обозначим, через j — число ветвей (каналов связи) информационной сети, не входящих в k -угольник, но непосредственно связанных с его вершинами; Φ_k^j — число информационных сетей с k -угольником и порядковым номером i ; φ_α — число ветвей из числа j , каждая из которых содержит α объектов. Таким образом,

$$M_n^n = \sum_{\delta=1}^{k_n^n} B_{n_\delta}^n = \sum_{k=3}^n \sum_{i=1}^n \Phi_k^i.$$

Для нахождения Φ_k^i будем пользоваться следующим представлением информационных сетей с k -угольником. Все объекты вне k -угольника разбиваем на j групп. Число объектов в каждой группе определяем конкретным разбиением $n-k$ не j слагаемых из натурального ряда. Каждая рассматриваемая нами ветвь, без учета канала, связывающего какой-нибудь объект этой ветви с вершиной k -угольника, представляет собой информационную сеть без избыточности. Число информационных сетей без избыточности, как было показано ранее [1], для каждой группы равно q^{q-2} , где q — число объектов группы. Так как связь каждого объекта каждой ветви из числа q^{q-2} с каждой вершиной k -угольника дает новую связь, т. е. новую структуру или новую разновидность информационной сети с k -угольником, то, если обозначим число различных j групп через λ ,

$$\begin{aligned}\Phi_k^i &= \frac{A_n^k}{2k} \cdot \lambda \cdot 1^{\varphi_1} (1^{-1} k)^{\varphi_1} \cdot 2^{\varphi_2} (2^0 k)^{\varphi_2} \cdot 3^{\varphi_3} (3^1 k)^{\varphi_3} \dots \\ &\dots (n-k)^{\varphi_{(n-k)}} [(n-k)^{n-k-2} k]^{\varphi_{n-k}} = \\ &= \frac{A_n^k}{2k} \cdot \lambda \cdot (1^0 k)^{\varphi_1} \cdot (2^1 k)^{\varphi_2} \cdot (3^2 k)^{\varphi_3} \cdot (4^3 k)^{\varphi_4} \dots (n-k)^{n-(k+1)} k = \\ &= \frac{A_n^k}{2k} \cdot \lambda \cdot \prod_{q=1}^{n-k} (q^{q-1} k)^{\varphi_q}.\end{aligned}$$

Так как перестановка объектов в каждой группе из j не влияет на разбиение $n-k$ объектов на j групп, то при такой разбивке объекты в каждой группе можно считать одинаковыми, а

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{(n-k)!}{(1!)^{\varphi_1} (2!)^{\varphi_2} \cdot (3!)^{\varphi_3} \cdot (4!)^{\varphi_4} \dots [(n-k)!]^{\varphi_{(n-k)}} \cdot \varphi_1! \varphi_2! \varphi_3! \dots \varphi_{(n-k)}!} = \\ &= \frac{(n-k)!}{(1!)^{\varphi_1} (2!)^{\varphi_2} (3!)^{\varphi_3} (4!)^{\varphi_4} \dots (5!)^{\varphi_5} \dots (n-k)! \varphi_1! \cdot \varphi_2! \cdot \varphi_3! \cdot \varphi_4! \dots 1!} = \\ &= \frac{(n-k)!}{\prod_{q=1}^{n-k} (q!)^{\varphi_q} \varphi_q!}.\end{aligned}$$

При выводе Φ_k^i нами были учтены все возможные связи объектов групп с вершинами k -угольника. Поэтому в выражение для λ введен коэффициент $\frac{1}{\varphi_1! \cdot \varphi_2! \cdot \varphi_3! \cdot \varphi_4! \dots \varphi_{(n-k)}!}$, так как в этом случае перестановка групп с одинаковым числом объектов не дает новых связей. Итак,

$$\Phi_k^i = \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{(n-k)!}{\prod_{q=1}^{n-k} (q!)^{\varphi_q} \varphi_q!} \cdot \prod_{q=1}^{n-k} (q^{q-1} k)^{\varphi_q} \quad \text{при}$$

$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \dots + \varphi_{(n-k)} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \dots + 1 = j$, причем, в зависимости от конкретных значений k и i те или иные слагаемые суммы $\sum_{q=1}^{n-k} \varphi_q$ и, соответственно, множители из произведений

$$\begin{aligned}\prod_{q=1}^{n-k} (q!)^{\varphi_q} \varphi_q! &= (1!)^{\varphi_1} (2!)^{\varphi_2} \cdot (3!)^{\varphi_3} \cdot (4!)^{\varphi_4} \dots (n-k)! \cdot \varphi_1! \cdot \varphi_2! \cdot \varphi_3! \dots 1!, \\ \prod_{q=1}^{n-k} (q^{q-1} k)^{\varphi_q} &= (1^0 k)^{\varphi_1} \cdot (2^1 k)^{\varphi_2} \cdot (3^2 k)^{\varphi_3} \cdot (4^3 k)^{\varphi_4} \dots (n-k)^{n-(k+1)} k\end{aligned}$$

будут отсутствовать.

Определение $k_n^p = k_n^n$. Каждую вершину k -угольника (а если от вершины отходит ветвь, то вместе с объектами этой ветви) можно рассматривать как отдельную структуру. Тогда каждую структуру с n объектами и k -угольником можно представить как информационную сеть с k отдельными структурами и k каналами связи, связывающими их между собой. Поскольку, как было отмечено ранее [1], число разных структур при каждой вершине k -угольника равно σ_{n+1} , то, очевидно, число разных структур с данным k -угольником и числом j ветвей будет

$$\sum_{j,i} E_{kji} \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \dots \binom{\sigma_{n-k+1} + \varphi_{n-k} - 1}{\varphi_{n-k}}, \quad a$$

$$k_n^n = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{i=1}^j E_{kji} \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \dots \binom{\sigma_{n-k+1} + \varphi_{n-k} - 1}{\varphi_{n-k}},$$

где E_k — число возможных перестановок j ветвей по вершинам k -угольника, при каждой из которых образуется новая структура с k -угольником. Но так как E_k в зависимости от разбиения $n-k$ объектов по j ветвям имеет то или иное значение, мы вводим еще индекс i , который указывает порядок (очередность) рассредоточения $n-k$ объектов по j ветвям:

$$\begin{aligned}\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{(n-k)} &= n - k, \\ 0 \cdot \varphi_0 + 1 \cdot \varphi_1 + 2 \varphi_2 + \dots + (n-k) \varphi_{(n-k)} &= n - k.\end{aligned}$$

Эти суммы, как и раньше, нужно понимать условно, так как в зависимости от i , конкретного разбиения $n-k$ на j слагаемых, те или иные слагаемые указанных сумм будут отсутствовать.

φ_0 — число ветвей, не содержащих объектов, равное числу вершин k -угольника, от которых не отходят ветви.

Пример 1.

$$n = 6$$

$$j = 0, k = 6. \quad \Phi_6 = \frac{A_n^k}{2k} = \frac{A_6^6}{12} = \frac{6!}{12} = 60.$$

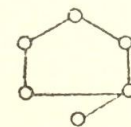


Рис. 4

$$j = 1, k = 5. \quad \Phi_5 = \frac{A_n^k}{2k} \cdot (1^{-1} k) = 360.$$

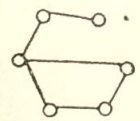


Рис. 5

$$j = 1, k = 4. \quad \Phi_4^I = \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{(n-k)!}{2! \varphi_2!} \cdot 2 (2^0 k) = A_6^4 = 360.$$

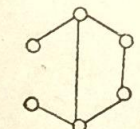


Рис. 6

$$j = 2, k = 4. \quad \Phi_4^{II} = \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{(n-k)!}{1! 1! \varphi_1!} \cdot 1 (1^{-1} k)^2 = 720.$$

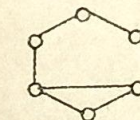


Рис. 7

$$j = 1, k = 3. \quad \Phi_3^I = \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{(n-k)!}{3! \varphi_3!} \cdot 3 (3^1 k) = \frac{A_6^3}{2} \cdot 9 = 540.$$

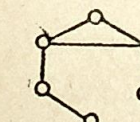


Рис. 8

$$j = 2, k = 3. \quad \Phi_3^{II} = \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{(n-k)!}{1! 2! \varphi_1! \varphi_2!} \cdot 1 (1^{-1}) 2 (2^0 k) =$$

$$= \frac{A_n^k}{2k} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2} \cdot 2k^2 = 1080.$$



Рис. 9

Итого:

$$M_6^6 = \Phi_6 + \Phi_5 + \Phi_4^I + \Phi_4^{II} + \Phi_3^I + \Phi_3^{II} + \Phi_3^{III} = 3660.$$

Пример 2.

$$\frac{n=6}{k=6, j=0, \varphi_0=6.}$$

$$k_6^{6I} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} = 1 \cdot \binom{1+6-1}{6} = 1. \quad B_{6I}^6 = \frac{A_n^6}{12} = 60.$$

$$k_6^{6II} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = 1 \cdot \binom{1+4-1}{4} \binom{1+1-1}{1} = 1.$$

$$B_{6II}^6 = \frac{n!}{2!} = 360 \quad (\text{рис. 4}).$$

$$k_6^{6III} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_3 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} = 1 \cdot \binom{1+3-1}{3} \binom{2+1-1}{1} = 2.$$

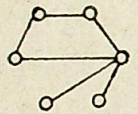


Рис. 10

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2!} = 360 \quad (\text{рис. 5}).$$

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2! 2!} = 180.$$

$$k=4, j=2, \varphi_1=2, \varphi_0=2.$$

$$k_6^{6IV} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = 2 \cdot \binom{1+2-1}{2} \binom{1+2-1}{2} = 2.$$

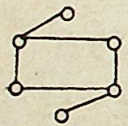


Рис. 11

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2!} = 360 \quad (\text{рис. 6}).$$

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2! 2!} = 180.$$

$$k=3, j=1, \varphi_3=1, \varphi_0=2.$$

$$k_6^{6V} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_4 + \varphi_3 - 1}{\varphi_3} = 1 \cdot \binom{1+2-1}{2} \binom{4+1-1}{1} = 4.$$

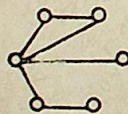


Рис. 12

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2!} = 360 \quad (\text{рис. 7}).$$

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2!} = 360.$$

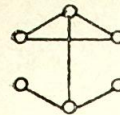


Рис. 13

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2! 2!} = 180.$$

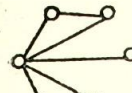


Рис. 14

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{2! 3!} = 60.$$

$$k=3, j=2, \varphi_2=1, \varphi_1=1, \varphi_0=1.$$

$$k_6^{6IV} = E_k \cdot \binom{\sigma_{0+1} + \varphi_0 - 1}{\varphi_0} \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_3 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} = 1 \cdot \binom{1+1-1}{1} \binom{1+1-1}{1} \binom{2+1-1}{1} = 2.$$

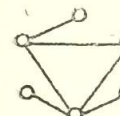


Рис. 15

$$B_{6II}^6 = n! = 720 \quad (\text{рис. 8}).$$

$$B_{6II}^6 = \frac{n!}{2!} = 360.$$

$$k=3, j=3, \varphi_1=3, \varphi_0=0.$$

$$k_6^{6VII} = E_k \cdot \binom{\sigma_2 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = 1 \cdot \binom{1+3-1}{3} = 1.$$

$$B_{6I}^6 = \frac{n!}{3!} = 120 \quad (\text{рис. 9}).$$

Итого:

$$k_6^6 = k_6^{6I} + k_6^{6II} + k_6^{6III} + k_6^{6IV} + k_6^{6V} + k_6^{6VI} + k_6^{6VII} = 13,$$

$$M_6^6 = B_{6I}^6 + B_{6II}^6 + B_{6III}^6 + B_{6IV}^6 + B_{6V}^6 + B_{6VI}^6 + B_{6VII}^6 + B_{6I}^6 + B_{6II}^6 + B_{6III}^6 + B_{6IV}^6 + B_{6V}^6 = 3660.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимов Б. О. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, №3.

Б. О. Касимов

Бир артыг каналлы информасија шәбәкәләринин
структурлары сајынын тәјини мәсәләсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә бир артыг каналлы мүмкүн олан информасија шәбәкә-
ләринин сајы мәсәләсинә бахылыр.

Г. М. ОСТРОВСКИЙ, Л. Н. ШУМУНОВ

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Задачи оптимального управления химико-технологическими процессами, описываемыми нелинейными дифференциальными уравнениями при фиксированном времени протекания процесса и свободным правым концом траектории, привлекают внимание исследователей. В подобных задачах вычисления производятся от конца (т. е. от момента $t = T$ и координат цели) к началу. Однако из-за крайней чувствительности решения и некоторых трудностей в расчетах вычисления удобнее производить от начала ($t = 0$) к концу [3]. В настоящей статье для определения начальных условий сопряженной системы применяется методика, изложенная в [2].

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \quad (1)$$

с начальными условиями, заданными в виде

$$x_i(0) = x_{i0}. \quad (2)$$

Здесь $x_i(t)$ — фазовые координаты, $u(t)$ — управление (для простоты изложения рассматривается случай одного управления). Функции f_i достаточно гладкие ($i = 1, \dots, n$; $0 \leq t \leq T$). Конечные значения $x_i(T)$, $i = 1, \dots, n$, являются свободными. Ставится следующая задача оптимального управления: найти такое управляющее воздействие $u(t)$, чтобы в момент $t = T$ координата $x_1(T)$ приняла минимальное значение. Предполагается, что $u \in G$ (G — открытая область).

Для решения поставленной оптимальной задачи может быть применен принцип максимума Л. С. Понтрягина [1], который приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, u), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \lambda_k, \quad j = 1, \dots, n \quad (4)$$

и управление $u(t)$ выбирается так, чтобы функция $H = \sum_{j=1}^n f_j \lambda_j$ при-

нимала максимальное значение. Начальные условия для x_i заданы в виде (2), для переменных λ_j задаются конечные значения

$$\lambda_j(T) = \begin{cases} -1, & j = 1, \\ 0, & j \neq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Для совместного решения двух систем уравнений (3) и (4) с одновременным подбором соответствующего оптимального управления $u(t)$ в каждой точке оптимальной траектории необходимо знать всего $2n$ значений начальных условий $x_i(0)$ и $\lambda_j(0)$, $i, j = 1, \dots, n$. Условия (2) определяют n значений $x_i(0)$ и потому необходимо найти такое решение $\lambda_j(t)$, которое удовлетворяет условиям (5). Таким образом, ставится следующая задача: подобрать начальные условия $\lambda_j(0)$, $j = 1, \dots, n$ так, чтобы конечные значения $\lambda_j(T)$, определяемые из решения системы (4), были равны заданным (5). Для этой цели необходимо вычислить $\partial \lambda_j(T) / \partial \lambda_j(0)$. Зададимся произвольным набором значений $\lambda_1^{(0)}(0), \dots, \lambda_n^{(0)}(0)$ и решим систему (3) и (4). Для получения оптимального решения необходимо, чтобы значения $\lambda_j(T)$ совпали с (5). В противном случае поступаем следующим образом. Пусть $\lambda_k^{(0)}(0)$ ($k \leq n$) получит приращение $\delta \lambda_k(0)$. Тогда решение системы $\lambda_j(t)$ при условии $\lambda_1^{(0)}(0), \dots, \lambda_k^{(0)}(0) + \delta \lambda_k, \dots, \lambda_n^{(0)}(0)$ изменится и будет

$$\tilde{\lambda}_j(t) = \lambda_j(t) + \delta \lambda_j(t). \quad (6)$$

Введем следующие функции:

$$\delta x_i^j(t) = \tilde{x}_i(t) - x_i(t), \quad (7)$$

$$\delta u^j(t) = \tilde{u}(t) - u(t), \quad (8)$$

где $\tilde{x}_i(t)$ и $x_i(t)$ есть решения системы (1), когда управление равно $u^j + \delta u^j$ и u , соответственно. Управление $u(t)$ определяется из условия максимума функции $\tilde{H} = \sum_{k=1}^n \tilde{\lambda}_k \tilde{f}_k$, где $\tilde{\lambda}_k(t)$ — решение сопряженной системы

$$\frac{d\tilde{\lambda}_j}{dt} = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}_k}{\partial x_j} \tilde{\lambda}_k, \quad (9)$$

$\tilde{f}_k = f_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u})$ и $\tilde{x}_i$ — решение системы

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u}). \quad (10)$$

Системы (10), (9) решаются соответственно при условиях (2) и

$$\tilde{\lambda}_j(0) = \lambda_j(0) + \delta \lambda_j(0).$$

Дифференциальные уравнения в вариациях $\delta \lambda_j$ и δx_i можно получить следующим образом. Разлагая в правой части (9) $\partial \tilde{f}_k / \partial x_j$ в ряд Тейлора по степеням δx_j и δu и отбрасывая члены высшего порядка малости, с учетом (4) и (6) получим

$$\frac{d\delta \lambda_j}{dt} = - \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta \lambda_k + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_r} \delta x_r + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial u} \lambda_k \delta u \right]. \quad (11)$$

Аналогично, с точностью до бесконечно малых второго порядка, с учетом (1) и (7) получим

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial u} \delta u. \quad (12)$$

Системы (11) и (12) дают $2n$ уравнений относительно $2n+1$ вариаций $\delta x_i, \delta \lambda_j (i, j = 1, \dots, n), \delta u$. Недостающее уравнение получим из условия максимума функции H . Так как G — открытая область, то при разложении $\partial f_k / \partial u$ в ряд Тейлора (отбрасывая члены порядка малости выше первого и учитывая (6), (7), (8) и $\partial H / \partial u = 0$) имеем

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial x_r} \delta x_r + \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} \delta u + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial u} \delta \lambda_k = 0. \quad (13)$$

Таким образом, для определения $\delta \lambda_j, \delta x_i (i, j = 1, \dots, n), \delta u$ имеем $2n+1$ уравнений (11), (12), (13). Разрешая (13) относительно δu и подставляя полученное значение δu в (11) и (12), получим

$$\frac{d\delta \lambda_j}{dt} = - \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \delta \lambda_k + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_r} \lambda_k \delta x_k - \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial u} \lambda_k \left(\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial x_r} \lambda_k \delta x_r + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial u} \delta \lambda_k \right)}{\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2}} \right].$$

Вводя обозначения и меняя порядок суммирования, получим

$$\frac{d\delta \lambda_j}{dt} = \sum_{k=1}^n [g_{jk} \delta \lambda_k + p_{jk} \delta x_k]. \quad (14)$$

где

$$g_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u} \lambda_i \frac{\partial f_k}{\partial u}}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} \lambda_i} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \quad (15)$$

$$p_{jk} = \sum_{r=1}^n \left[\frac{\frac{\partial^2 f_r}{\partial u \partial x_k} \lambda_r \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial u} \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial u^2} \lambda_i} - \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_j \partial x_k} \lambda_r \right]. \quad (16)$$

Аналогично, подставляя значение δu в (12), получим

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k - \frac{\frac{\partial f_i}{\partial u} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial x_r} \lambda_k \delta x_r + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial u} \delta \lambda_k \right)}{\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} \lambda_k}.$$

После несложных преобразований имеем

$$\frac{d\delta x_i}{dt} = \sum_{k=1}^n [\psi_{ik} \delta x_k + \varphi_{ik} \delta \lambda_k], \quad (17)$$

где

$$\psi_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\sum_{r=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial^2 f_k}{\partial u \partial x_r} \lambda_r}{\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} \lambda_k}, \quad (18)$$

$$\varphi_{ik} = - \frac{\frac{\partial f_i}{\partial u} \frac{\partial f_k}{\partial u}}{\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial u^2} \lambda_k}. \quad (19)$$

Так как $x_i(0)$ фиксированы, то начальными условиями будут

$$\begin{cases} \delta x(0) = 0, \\ \delta \lambda_j^k(0) = \varepsilon_k \delta_{jk}, \end{cases} \quad (20)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера; $\varepsilon_k = \delta_{\lambda_k}(0)$, $\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$

Таким образом, для определения вариаций $\delta x_i, \delta \lambda_j (i, j = 1, \dots, n)$ имеем линейную систему дифференциальных уравнений (17) и (14) с переменными коэффициентами, удовлетворяющую условиям (20). Систему эту можно записать в виде

$$\frac{d\delta z_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta z_j, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (21)$$

где положено

$$\delta z_j^k = \begin{cases} \delta x_i^k, & i \leq n, \\ \delta \lambda_j^k, & i > n, \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\left\| \begin{matrix} \Psi & \Phi \\ P & G \end{matrix} \right\| \text{ и } \begin{cases} \Psi = \|\psi_{ik}\| & \Phi = \|\varphi_{ik}\| \\ P = \|p_{ik}\| & G = \|g_{ik}\|. \end{cases}$$

Начальными условиями для системы (21) будут

$$\delta z_i^k(0) = \begin{cases} 0, & i \leq n, \\ \delta \lambda_j^k(0), & i > n, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (22)$$

Общим решением системы (21) будет

$$\delta z_i^k = C_1 \alpha_{i1}(t) + C_2 \alpha_{i2}(t) + \dots + C_{2n} \alpha_{i,2n}(t), \quad (23)$$

где матрица

$$\alpha = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{matrix} \right\|$$

является матрицей фундаментальной системы частных решений (21). Постоянные $C_1, \dots, C_{2n}$ можно определить так, чтобы функции δz_i при $t=0$ удовлетворяли начальным условиям (22). Система (21) решается n раз для получения n^2 производных $\partial \lambda_i(T) / \partial \lambda_k(0), i, k = 1, \dots, n$, при условиях (22), где нижний индекс (i) указывает номер переменной, от которой вычисляется производная, а верхний (k) — номер независимой переменной, по которой эта производная вычисляется.

Пользуясь (22), из (23) получим для $C_i^k, i = 1, \dots, 2n; k = 1, \dots, n$ систему $2n$ алгебраических уравнений:

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
2. Островский Г. М. "Автоматика и телемеханика", т. XXVI, 1965, № 3.
3. Весткотт Дж. Г., Флорентин Дж. Д. Тр II Международного конгресса ИФАК, т. II, "Наука", 1965.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1958.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II. Физматгиз, 1959.

Г. М. Островский, Л. Н. Шумунов

Оптимальн мәсәләләрнн бир эдәди һәлл методу һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сағ сәрбәст трајекторијалы оптимальн мәсәләннн гошма системиннн башлангыч шәртләриннн тә'ин етмәк үчүн Нјутон методундан бәһс едилнр. Бундан башга, мәгаләдә һәмнн оптимальн мәсәләннн һәлл методикасы вернлмншднр.

$$\begin{cases} C_1^k \alpha_{11}(0) + C_2^k \alpha_{12}(0) + \dots + C_{2n}^k \alpha_{1,2n}(0) = 0, \\ \dots \\ C_1^k \alpha_{n+1,1}(0) + C_2^k \alpha_{n+1,2}(0) + \dots + C_{2n}^k \alpha_{n+1,2n}(0) = \delta \lambda_1^k(0), \\ \dots \\ C_1^k \alpha_{2n,1}(0) + C_2^k \alpha_{2n,2}(0) + \dots + C_{2n}^k \alpha_{2n,2n}(0) = \delta \lambda_n^k(0). \end{cases} \quad (24)$$

Так как определитель этой системы $D(0) = |\alpha_{ij}(0)| \neq 0$ [4], то (24) определяет C_i^k , $i = 1, \dots, 2n$; $k = 1, \dots, n$, которые, будучи подставлены в (23), дают искомое частное решение. Поэтому в момент времени $t = T$ имеем

$$\delta z_i^k(T) = C_1^k \alpha_{i1}(T) + C_2^k \alpha_{i2}(T) + \dots + C_{2n}^k \alpha_{i,2n}(T). \quad (25)$$

Отсюда получаем следующий способ вычисления величин δz_i^k , $i = 1, \dots, 2n$; $k = 1, \dots, n$. Задав произвольными значениями $\lambda_k^{(0)}(0)$, решаем систему (4) совместно с (21), причем начальные значения для системы (3) заданы в виде (2), а для системы (4) берем n совокупностей начальных условий $\lambda_k^{(0)}$ для получения фундаментальной системы решений, т. е. одновременно получаем всю фундаментальную систему решений. Значение $u(t)$ в каждой точке определяется из условия максимума H . Интегрирование указанных систем ведется до момента $t = T$. Получив значения $C_i^k \alpha_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, 2n$; $k = 1, \dots, n$), можно при помощи формул (25) получить искомое значение $\delta z_i^k(T)$ и использовать их для получения $\partial \lambda_i(T) / \partial \lambda_k(0)$ (в формулах (25) первые n значений $\delta z_i^k(T)$ определяют $\delta x_i^k(T)$, $i = 1, \dots, n$, остальные n значений — $\delta \lambda_j^k(T)$, $j = 1, \dots, n$).

Частые производные $\frac{\partial \lambda_i(T)}{\partial \lambda_k(0)}$ можно определить из следующих приближенных формул:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i(T)}{\partial \lambda_k(0)} &\approx \\ &\approx \frac{\lambda_i(T, \lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0) + \delta \lambda_k(0), \dots, \lambda_n(0)) - \lambda_i(T, \lambda_1(0), \dots, \lambda_k(0), \dots, \lambda_n(0))}{\delta \lambda_k(0)} = \\ &= \frac{\delta \lambda_i(T)}{\delta \lambda_k(0)}, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя в (26) значения $\delta \lambda_i^k(T)$, $i = 1, \dots, n$, определяемые формулами (25), получим искомые частные производные $\partial \lambda_i(T) / \partial \lambda_k(0)$. Из условия (5) вытекает, что должно быть

$$\begin{cases} \lambda_j(T, \lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)) - 1 = 0, & j = 1, \\ \lambda_j(T, \lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)) = 0, & j \neq 1. \end{cases} \quad (27)$$

Таким образом, имеем систему уравнений (27) относительно начальных условий $\lambda_1(0), \dots, \lambda_n(0)$. Применяя к (27) схему Ньютона [5], получим

$$\lambda_i^{(m)}(0) = \lambda_i^{(m-1)}(0) - \sum_{j=1}^n S_{ij} \lambda_j(T, \lambda_1^{(m-1)}(0), \dots, \lambda_n^{(m-1)}(0)) + S_{i1}, \quad (28)$$

где m — номер приближения, $\|S_{ij}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$) — матрица, обратная матрице

$$\left\| \frac{\partial \lambda_i(T)}{\partial \lambda_k(0)} \right\|.$$

М. Ф. БАДАЛОВ, М. А. РЗАЕВ, М. И. АЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ТУННЕЛЬНЫХ p - n ПЕРЕХОДОВ В АНТИМОНИДЕ ГАЛЛИЯ

В настоящей статье рассматриваются экспериментальные результаты исследования механизма проводимости туннельных p - n -переходов в антимониде галлия в интервале 77—330°К. Полученные данные интерпретируются в рамках существующих теорий. В работе изучалась также температурная зависимость основных параметров диодов. В области инжекционного тока вольтамперной характеристики рекомбинационные и диффузионные токи изменяются в зависимости от напряжения, согласно закону $I \sim \exp\left(\frac{eU}{\beta kT}\right)$, $\beta = 1 \div 1,2$ и $2,5 \div 3$, соответственно. Изучение температурной зависимости избыточного тока позволяет судить об изменении плотности состояний в запретной зоне антимонида галлия.

До последнего времени как в получении и очистке GaSb, так и в изучении его электрических свойств и создании в нем p - n -переходов наблюдалось заметное отставание из-за сходства некоторых параметров с Ge. Однако немногочисленные работы [1—5], посвященные туннельным диодам в GaSb, показывают их преимущество по сравнению с Ge (по отношению коэффициента шума и способности работать при более СВЧ). В этих работах основное внимание уделялось техническому применению туннельных диодов из GaSb и поэтому их вольтамперные характеристики не рассматривались. Всестороннее изучение свойств p - n -переходов в GaSb еще больше расширит область применения приборов из него и даст возможность улучшить параметры, характеризующие туннельные диоды.

В настоящей статье приводятся результаты исследования вольтамперной характеристики туннельных диодов, созданных на основе p -GaSb.

Методика

Антимонид галлия синтезировался из исходных компонентов Ga и Sb. После зонной очистки концентрация неконтролируемых примесей p -типа в нем была $\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Для получения кристаллов с более высокой концентрацией примесей GaSb легировали Zn. Диоды создавали на пластинках с концентрацией $10^{19} \div 20^{20} \text{ см}^{-3}$. Вплавление производили в вакууме. Вплавленным материалом служил сплав в составе Sn + (1÷2%) Te. Омические контакты вплавливали во время сплавления или припайвали, используя чистое олово. Вольтамперные характеристики диодов снимали на постоянном токе компенсационным методом, в интервале 77 ÷ 380°К.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены вольтамперные характеристики двух диодов при 300°К. На кривой зависимости тока от напряжения легко обнаруживаются четыре отдельных участка. Общий ток через p - n -переход можно представить в виде

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (1)$$

где I_1 —туннельный, I_2 —избыточный, I_3 —рекомбинационный, I_4 —диффузионный токи. При напряжениях $U \leq U_{\text{макс}}$ общий ток является туннельным и (1) принимает вид

$$I = I_1 = AU \exp[-\alpha U], \quad (2)$$

где A и α —постоянные,

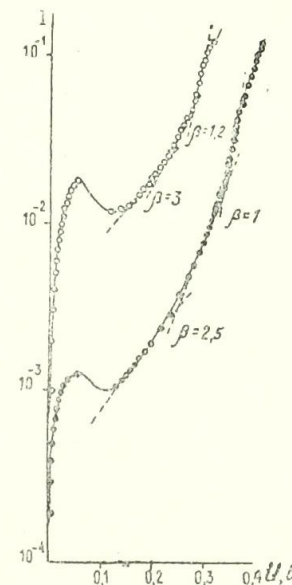


Рис. 1. Вольтамперные характеристики двух туннельных диодов при 300 К: ● — $N_a = 2 \cdot 10^{19}$; ○ — $N_a = 6 \cdot 10^{19}$.

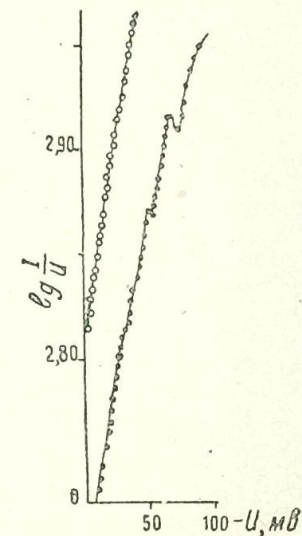


Рис. 2. Зависимость $\lg \frac{I}{U}$ от U при различных температурах: ○ — 300°К; ● — 77°К.

График зависимости $\ln \frac{I}{U}$ от U должен дать прямую линию. На

рис. 2 показаны экспериментальные кривые для одного и того же диода, построенные по (2), наклон которых при комнатной темпера-

туре равен $\alpha = \frac{d\left(\ln \frac{I}{U}\right)}{dU} = 9\beta^{-1}$. При низких температурах график

зависимости $\ln \frac{I}{U}$ от U выражается ступенчатой линией, состоящей из трех частей. Наклоны линейных участков отличаются друг от друга незначительно ($7,4 \div 8,3 \text{ в}^{-1}$). В области $U_{\text{макс}} < U < U_{\text{ин}}$ происходит уменьшение тока до его минимального значения ($I_{\text{мин}}$). При $U > U_{\text{мин}}$ туннельный диод ведет себя как обычный. Тот факт, что при $U =$

$=U_{\text{мин}} I \neq 0$, связан с наличием избыточных и диффузионных токов [7–8].

При напряжениях $U > U_{\text{мин}}$ на графике зависимости $I = f(U)$, построенном в полулогарифмическом масштабе (рис. 1), вольтамперная характеристика описывается выражением

$$I \sim \exp\left(\frac{eU}{\beta kT}\right), \quad (3)$$

предсказываемыми теориями [9–11]. За областью избыточного тока наблюдается два экспоненциальных участка, для которых значение коэффициента β при 300°K $2.5 \div 3$ и $1 \div 1.2$. При низких температурах β возрастает. По величине β можно утверждать, что в этих двух областях характеристики токи являются рекомбинационными и диффузионными. Тот факт, что значение β для участка, соответствующего рекомбинационному току, немного больше 2, по-видимому, связан с влиянием поверхности [10–12]. За областью рекомбинационных и диффузионных токов наблюдается отклонение от экспоненциального закона, которое обусловлено остаточным сопротивлением диодов.



Рис. 3. Вольтамперная характеристика туннельного диода при различных температурах. Прямая ветвь: $\odot$ —77°K; $\bullet$ —142°K; $\circ$ —185°K; $\oplus$ —218°K; $\ominus$ —300°K; $\oplus$ —390°K; обратная ветвь: $\bullet$ —300°K; $\circ$ —77°K.

На рис. 3 представлена вольтамперная характеристика туннельного диода с $I_{\text{макс}} = 1,8 \text{ ма}$ при различных температурах. Как видно, значительные температурные изменения характеристики лежат в области инжекционного тока. Температурный коэффициент смещения составляет $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ эВ/°K}$, что почти в три раза больше, чем температурный коэффициент ширины запрещенной зоны GaSb, который равен $4,0 \cdot 10^{-4} \text{ эВ/°K}$ [18]. Из графика (рис. 3) определялось $U_{\text{отс}}$ для различных температур. Как известно, $U_{\text{отс}}$ при низких температурах должно равняться высоте потенциального барьера, т. е. ширине запрещенной зоны. Экстраполяцией температурной зависимости $U_{\text{отс}}$ при $T = 0$ найдено предполагаемое значение ширины запретной зоны. Оно оказалось равным $0,74 \text{ эВ}$, что на $0,07 \text{ эВ}$ меньше, чем по литературным данным (0,81) [18] для чистого GaSb. Для всех исследованных диодов $U_{\text{отс}} < E_g$.

Объяснение данной картины надо искать в изменении зонной структуры полупроводника при сильном легировании. В сильнолегированных полупроводниках происходит искажение зонной структуры. Узкая зона примесных состояний на границах обеих зон сливается с основ-

ными разрешенными зонами и уровень Ферми проникает в них до заметной глубины. Доказательством этому, в частности, является существование туннельного эффекта в вырожденных полупроводниках и изменение эффективной массы носителей тока [19].

Кроме того, с ростом степени легирования наблюдается отступление экстремальных точек основных зон, что также приводит к сужению расстояния между дном зоны проводимости и вершиной валентной зоны.

Температурному изменению подвергаются и другие параметры туннельных диодов.

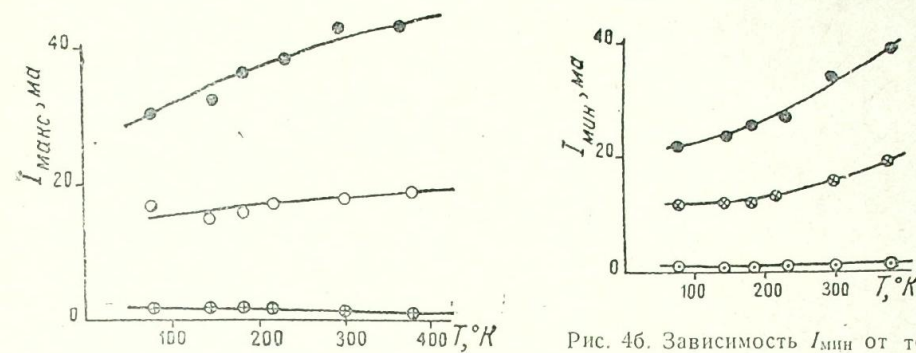


Рис. 4а. Зависимость $I_{\text{макс}}$ от температуры: $\odot$ — $N_a = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; $\square$ — $N_a = 6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$; $\bullet$ — $N_a = 8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

На рис. 4 (а) представлена зависимость $I_{\text{макс}}$ от температуры для трех диодов. Температурный коэффициент максимального тока $I_{\text{макс}}$ имеет как положительный, так и отрицательный знак, причем до концентрации $2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ в p -области с понижением температуры $I_{\text{макс}}$ увеличивается. С увеличением концентрации примесей базового материала знак зависимости $I_{\text{макс}}$ от T меняется на положительный.

Как известно, ток максимума туннельных диодов выражается формулой [20–21]

$$I_{\text{макс}} = A n^{* - \frac{1}{2}} D_{\text{макс}} \exp\left[-\beta m^* n^{* - \frac{1}{2}} E_g\right] \quad (4)$$

где $n^* = \frac{N_a N_d}{N_a + N_d}$ — приведенная концентрация; $m^* = \frac{m_n m_p}{m_n + m_p}$ —

приведенная эффективная масса; E_g — ширина запретной зоны; $D_{\text{макс}}$ — вероятность туннелирования. В этой формуле есть два параметра,

зависящие от температуры: $D_{\text{макс}}$ и $(m^* \frac{1}{2} E_g)$. Отрицательное значение $\frac{\partial E_g}{\partial T}$ указывает на то, что второй параметр должен дать положительный

температурный коэффициент для $I_{\text{макс}}$. $D_{\text{макс}}$ по существу должно быть постоянным, так как уровни Ферми μ_n и μ_p больше по сравнению с kT при высоких N_a ($> 10^{19} \text{ см}^{-3}$). При высоких температурах уровень Ферми приближается к границам зон и как следствие уменьшается $D_{\text{макс}}$.

Температурная зависимость $I_{\text{мин}}$ представлена на рис. 4 (б). Надо сказать, что детальное изучение $I_{\text{мин}}$ невозможно из-за того, что его трудно отличать от избыточного тока. Однако существует два коли-

чественных фактора, характеризующих $I_{\min}$: $\frac{I_{\max}}{I_{\min}} U_{\min}$, значение которых наряду с другими данными туннельных диодов приводится в таблице.

Основные параметры исследованных туннельных диодов в области туннелирования зона—зона

№	$n, \text{см}^{-3}$	$P, \text{см}^{-3}$	$I_{\max}, \text{мА}$	$U_{\max}, \text{мВ}$	$U_{\min}, \text{В}$	$I_{\max}, I_{\min}$
6	$2,5 \cdot 10^{18}$	$2 \cdot 10^{19}$	1,3	54	0,143	1,5
9	$1,7 \cdot 10^{18}$	$2,9 \cdot 10^{19}$	48	50	0,162	2
17	$3 \cdot 10^{18}$	$5,2 \cdot 10^{19}$	48	123	0,298	2,5
36	$2 \cdot 10^{18}$	$5,6 \cdot 10^{19}$	42	144	0,223	3
29	$2,2 \cdot 10^{18}$	$8,4 \cdot 10^{19}$	50	124	0,175	2,4
22	$1,5 \cdot 10^{18}$	10^{20}	100	115	0,190	4
30	$3 \cdot 10^{18}$	10^{20}	100	178	0,225	3,5
12	$2,5 \cdot 10^{18}$	$6 \cdot 10^{19}$	20	59	0,160	4
23	$1,2 \cdot 10^{18}$	$4 \cdot 10^{19}$	35	44	0,112	5
41	$4 \cdot 10^{18}$	10^{20}	150	140	0,250	3
47	$2,7 \cdot 10^{18}$	$5 \cdot 10^{19}$	40	90	0,308	2

В менее легированных образцах экспоненциальный избыточный ток сравнительно больше (рис. 1), отношение $\frac{I_{\max}}{I_{\min}}$ уменьшается и

$U_{\min}$ смещается к более низким значениям, которое заметно увеличивается с ростом степени легирования. Это указывает на то, что механизмом возникновения тока минимума является туннельный переход зона—зона. Некоторые авторы предполагают, что ток $I_{\min}$ обусловлен туннелированием между „хвостами“ зон [8]. Однако изучение температурной зависимости $I_{\min}$ показывает, что здесь не исключено влияние области термического тока.

На рис. 5 (а) и 5 (б) показана температурная зависимость $U_{\max}$ и $U_{\min}$. Как видно, обе величины до некоторой температуры ($\sim 200^\circ\text{K}$) возрастают, а потом уменьшаются, причем изменение $U_{\min}$ более резкое, чем $U_{\max}$. Такой ход температурной зависимости $U_{\max}$ и $U_{\min}$, по-видимому, связан с механизмом рассеяния носителей тока в зоне, проводимости GaSb. В точке, где напряжения $U_{\max}$ и $U_{\min}$ максимальны, происходит резонансное рассеяние носителей тока, уменьшается проводимость, т. е. при одинаковых токах падение напряжения достигает максимума при 200°K . Ниже этой температуры идет как бы „настройка“ к резонансу с постепенным ростом рассеяния. Выше 200°K рассеяние снова уменьшается и это обуславливает уменьшение напряжения смещения. Роль рассеяния носителей в проводимости GaSb исследовалась в работах [22–23].

За исключением редких случаев, во всех исследованных диодах избыточный ток экспоненциально возрастает с напряжением. На рис. 6 представлена область избыточного тока для четырех температур. Экспоненциальная зависимость избыточного тока наиболее хорошо видна при низких температурах. Переход от области избыточного тока к области термического происходит при значениях напряжения, равных половине ширине запрещенной зоны GaSb. В работах [7, 8, 20] исс-

ледовалась экспоненциальная зависимость избыточного тока от степени легирования и облучения. Авторы полагают, что избыточный ток обусловлен туннелированием электронов на примесные состояния в энергетическом зазоре. Соотношение между избыточным током и напряжением выражается формулой:

$$I_{\text{изб}} = D' \exp \left[-\beta' m^* \frac{1}{2} n^* \frac{1}{2} (E_g - eU + Q) \right], \quad (5)$$

где Q —функция уровня Ферми и значительно меньше E_g ; D' —предэкспоненциальный множитель, характеризующий изменение плотности примесных состояний в энергетическом зазоре.

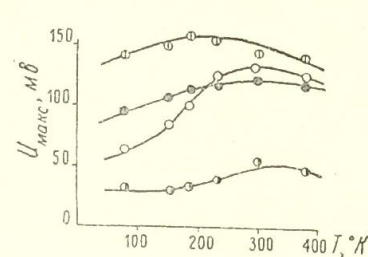


Рис. 5а. Зависимость $U_{\max}$ от температуры:

- — $N_a = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 2,9 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

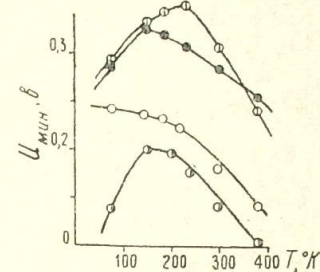


Рис. 5б. Зависимость $U_{\min}$ от температуры:

- — $N_a = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 2,9 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 6 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$;
- — $N_a = 8 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

Построив зависимость $I_{\text{изб}}$ от приложенного напряжения, можно определить наклон $\sigma = e\beta' m^* \frac{1}{2} n^* \frac{1}{2}$ и D' (рис. 6). Для различных диодов σ меняется в пределах $(9 \div 16) b^{-1}$ и с понижением температуры незначительно уменьшается. Постоянная $D' \sim$ равна $5 \cdot 10^{-4} a$.

Таким образом, прямая ветвь вольт-амперной характеристики туннельных диодов на основе p -GaSb имеет четыре области, механизм протекания тока в которых различен. Тепловой ток, имеющий место при больших прямых смещениях, зависит от напряжения по закону $I = I_0 \exp \left(\frac{eU}{\beta k T} \right)$. Высота потенциального барьера, найденная экстраполяцией при 0°K , на $0,07 \text{ эВ}$ меньше, чем ширина запрещенной зоны в чистом GaSb. Избыточный ток диодов подчиняется экспоненциальному закону.

Напряжение максимума и максимальный ток ($U_{\max}$ и $I_{\max}$) увеличиваются с ростом степени легирования.

Величины $U_{\max}$ и $U_{\min}$ проходят через максимум вблизи 200°K , что, по-видимому, связано с резонансным рассеянием носителей тока в GaSb.

Туннельный ток имеет отрицательный коэффициент при малой степени легирования, почти равен нулю при концентрациях $\sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ и положительный при сильном вырождении.

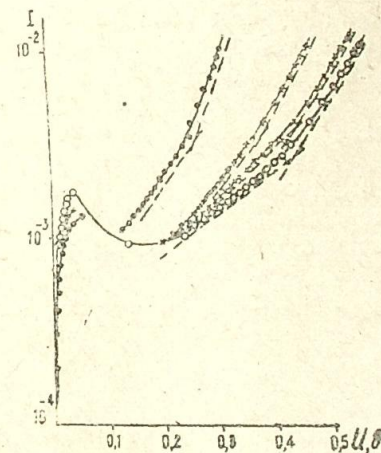


Рис. 6. Зависимость избыточного тока от температуры:
⊕ — -77°K ; × — -148°K ; + — -202°K ;
● — -300°K .

ЛИТЕРАТУРА

1. Minamoto M. J. appl. phys., 34, 7, 1876, 1963.
2. Burrus C. A. Proc. JRE, 49, 6, 1103, 1961.
3. King B. G. and Sharpe G. E. JEEE ED — 11, 6, 273, 1964.
4. Hall R. N. JRE Transactions on electron devices ED — 7, 1, 1, 1960.
5. Carr W. N. Solid State Electronics 5, 7, 261, 1962.
6. Kane E. O. J. appl. phys., 32, 1, 83, 1961.
7. Gajima T. and Esaki L. J. Phys. soc. Japan, 13, 1261, 1958.
8. Chynoweth A. G., Feldman W. A. and Logan R. A. Phys. rev., 121, 684, 1961.
9. Shockley W. Bell System Tech. J., 23, 435, 1949.
10. San C. T., Noyce R. N. and Shockley W. Proc. Inst. Radio Engrs., 45, 1228, 1957.
11. Shockley W. and Henley R. Bull. Am. Phys. soc., 6, 106, 1961.
12. Галаванов В. А., Наследов Д. Н., Рзаев М. А. „Радиотехника и электроника“, 8, 7, 1187, 1963.
13. Вул В. М., Шотов А. П., Гришечкина С. П. ФТТ, 3, 2, 667, 1961.
14. Ковалев А. Н., Серебренников П. С. „Радиотехника и электроника“, 9, 4, 676, 1964.
15. Белова Н. А. „Радиотехника и электроника“, 6, 160, 1961.
16. Furukawa V. J. Phys. soc. Japan, 15, 1130, 1960.
17. Именков А. Н., Мескин С. С., Наследов Д. Н., Равич В. Н. и Царенков Б. В. ФТТ, 6, 8, 2281, 1964.
18. Sclar N. J. appl. phys., 33, 10, 2999, 1962.
19. Бонч-Бруевич В. Л. „Радиотехника и электроника“, 12, 2041, 1961.
20. Meverhofer D., Brown G. A. and Sommers H. S. Phys. rev., 126, 4, 1329, 1962.
21. Nanavati R. P. Proc. JRF, 49, 1, 349, 1961.
22. Long D. and Hager R. F. J. appl. phys. 36, 11, 3436, 1965.
23. Robinson J. E. Phys. rev., 135, 3A, 779, 1964.

М. Ф. Бадалов, М. А. Рзаев, М. И. Әлиев

Галлиум антимонидиндә тунел $p-n$ кечидләринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә галлиум антимонидиндә тунел $p-n$ кечидләринин мұх-тәлиф температурларда ($77-400^{\circ}\text{K}$) кечиричилик механизминә даир апарылан тәчрүбәләрин нәтичәләри верилмиш вә мөвчуд нәзәријәләр чәрчивәсиндә изаһ олунмушдур. Хүсуси һалда тунел диодларынын әсас параметрләринин температур асылылығы өјрәнилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, базада консентрасијаны артырдыгча мак-симал тунел чәрәјаны вә она ујғун кәркинлик дүшкүсү артыр. Тунел чәрәјанынын температур әмсалы кичик консентрасијаларда (10^{-19}) мәнфи, бөјүк консентрасијаларда исә мүсбәт олур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АҚАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1967, № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 1

И. Г. КЕРИМОВ, А. Г. РУСТАМОВ, Л. М. ВАЛИЕВ

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ И ТЕРМОЭДС АНТИФЕРРОМАГНИТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ MnS И MnSe

С целью выяснения влияния магнитного упорядочения на электрические свойства были исследованы электропроводность и термоэДС MnS и MnSe в зависимости от температуры. На основе полученных экспериментальных данных делается предположение о возможном механизме электропроводности и влиянии магнитного упорядочения на электрические свойства в данных соединениях.

Антиферромагнитные полупроводники обладают весьма интересными физическими свойствами, в частности магнитными и электрическими. Однако электрические свойства этих полупроводников изучены крайне недостаточно. Имеющиеся в литературе теоретические [2, 3, 4, 7] и экспериментальные [1, 5, 6, 8, 9] данные, посвященные электрическим свойствам антиферромагнитных полупроводников, очень незначительны и, можно сказать, нет единой точки зрения о механизме электропроводности и влиянии магнитного упорядочения на явления переноса зарядов в антиферромагнитных полупроводниках. Выбранные нами объекты при низких температурах ($T < T_N$) являются антиферромагнетиками, а при высоких ($T > T_N$) парамагнетиками. При переходе из антиферромагнитного в парамагнитное состояние должно иметь место изменение параметров, определяющих электрические свойства (подвижность, концентрацию носителей тока и др.). В целях получения сведений по указанным вопросам и было принято настоящее исследование в интервале $90 \div 550^{\circ}\text{K}$, охватывающем область антиферромагнитного превращения.

Образцы и метод измерения

Серу и селен чистотой 99,99999%, а также электролитический марганец смешивали по требуемой стехиометрии с точностью до 0,01 мг и помещали в откаченную кварцевую ампулу (10^{-4} мм рт. ст.). Смесь нагревали в печи до 900°C (в случае MnSe) и 600°C (в случае MnS) и держали при этой температуре 8 суток, после чего медленно охлаждали до комнатных температур. Полученный продукт представлял собой твердый материал темно-серого цвета в случае MnSe и зеленого в случае MnS .

По рентгенографическим данным оба соединения имели кристаллическую структуру типа NaCl с параметрами решетки $a = 5,46 \text{ \AA}$.

(MnSe) и $a = 5,22 \text{ \AA}$ (MnS), которые соответствуют литературным данным [10]. Полученные вещества размельчали и спрессовывали под давлением 4 т/см^2 , а затем спекали в печи в течение пяти суток в вакууме при 1100°C .

Измерения электропроводности, а также термоэдс производились компенсационным методом. Потенциальными зондами служили вольфрамовые проволоки, которые были прижаты к образцу. При низких температурах с целью улучшения контактов использовались сплавы InGa. В качестве токовых контактов использовались платиновые фольги, которые прижимали к образцу. Температура измерялась двумя медьконстантановыми термопарами, прижатыми к торцам образца (бралось среднее значение). Размеры образцов были $6 \times 10 \times 15 \text{ мм}$.

Результаты эксперимента

Зависимость электропроводности MnSe от обратной температуры показана на рис. 1, а. Как видно, при низких температурах электропроводность медленно увеличивается с повышением температуры. Около температуры антиферромагнитного превращения ($\sim 150^\circ\text{K}$) электропроводность обнаруживает незначительный скачок. В области

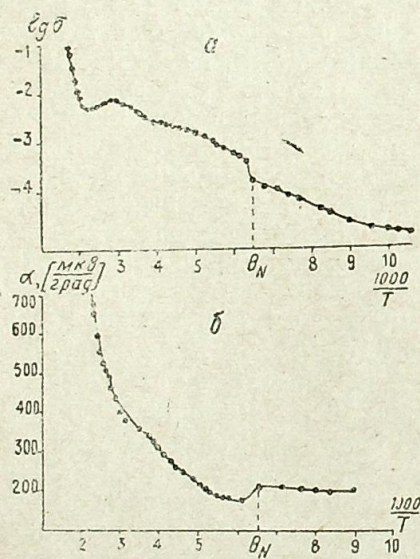


Рис. 1. Зависимость от $1000/T$ у MnS: а— $\lg \sigma$; б—коэффициента термоэдс.

$\sim 360^\circ\text{K}$ в температурной зависимости электропроводности обнаруживается аномалия. Энергия активации электропроводности у MnSe при комнатной температуре примерно $0,12 \text{ эв}$, а при низких температурах она порядка $0,09 \text{ эв}$. Коэффициент термоэдс у MnSe (рис. 1, б) во всем интервале с повышением температуры увеличивается, обнаруживая незначительную аномалию около температуры антиферромагнитного превращения.

Зависимость электропроводности от обратной температуры у MnS представлена на рис. 2, а. В антиферромагнитной области с повышением температуры электропроводность медленно увеличивается. В отличие от MnSe в MnS при переходе из антиферромагнитного в па-

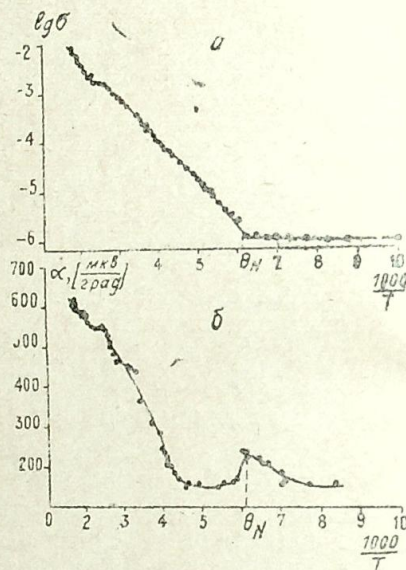


Рис. 2. Зависимость от $1000/T$ у MnSe: а— $\lg \sigma$; б—коэффициента термоэдс.

рамагнитное состояние наклон кривой значительно изменяется, т. е. энергия активации электропроводности увеличивается на $\sim 0,17 \text{ эв}$.

Ход зависимости коэффициента термоэдс от обратной температуры у MnS (рис. 2, б) аналогичен MnSe. Однако у MnS в точке антиферромагнитного превращения наблюдается более значительная аномалия, чем у MnSe. Знак термоэдс на всем температурном интервале для обоих соединений остается положительным.

Обсуждение результатов

Антиферромагнитные полупроводники, представляющие соединения переходных элементов 3d-группы с O, S, Se и др., изучены очень мало. Электрические свойства, MnS, можно сказать, совсем не изучены. Известно, что [5, 11] в подобных соединениях подвижность мала ($U \leq 0,1 \text{ см}^2/\text{в.сек}$) и концентрация носителей тока приближается к концентрации их в металлах. Для выяснения электрических свойств был предложен ряд моделей, в одной из которых исключался механизм движения носителей тока в зоне проводимости [12, 13]. В других моделях влияние магнитного упорядочения на электрические свойства либо исключалось, либо учитывалось через обменную и сверхобменную связь между ионами [3, 4, 14, 15]. Существование таких различных точек зрения затрудняет интерпретацию полученных экспериментальных данных.

На основании проведенных опытов можно получить некоторые сведения о носителях тока в исследованных антиферромагнитных полупроводниках и таким образом судить о механизме электропроводности. Если предполагать, что исследованные нами полупроводники обладают одним типом носителей тока (по знаку термоэдс дырки), тогда из известных соотношений [16]

$$n = \frac{N_0}{1 + e^{\mu^*}}$$

можно вычислить их концентрацию. Здесь N_0 —плотность состояний, которая для этих соединений равна числу металлических ионов в 1 см^3 [16]; $\mu^* = \left(\frac{e}{k} \right) - \delta e^*$ — δe^* есть приведенный химический потенциал

(здесь α —коэффициент термоэдс, δe^* —энергия связи малого полярона [18], определенные из температурной зависимости $e(T)$).

Вычисления показывают, что в отличие от ферритов [17] в этих веществах энергия связи малого полярона δe^* может дать существенный вклад в температурную зависимость концентрации носителей тока. Нами из измерения σ и α вычислена дрейфовая подвижность носителей тока в антиферромагнитной области (дрейфовая подвижность носителей тока для MnSe в температурной области $90 \div 150^\circ\text{K}$ с ростом температур уменьшается от $\sim 2,9 \cdot 10^{-4}$ до $7,9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{в.сек}$). Вычисление дрейфовой подвижности носителей тока для MnS показало, что с увеличением температуры от ~ 90 до 165°K подвижность уменьшается от $2,1 \cdot 10^{-1}$ до $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{в.сек}$.

Низкая подвижность носителей тока и уменьшение ее с ростом температур свидетельствует о том, что в антиферромагнитной области оба соединения обладают узкой зоной проводимости и носители тока двигаются в этой зоне. Результаты эксперимента не противоречат теории полупроводников с низкой подвижностью [2, 18], которая

утверждает зонное движение полярона малого радиуса при низких температурах.

В заключение авторы приносят благодарность А. А. Самохвалову и проф. Г. Б. Абдуллаеву за ценные советы и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ксендзов Я. М., Ансельм Л. Н. и др. ФТТ, т. 5, вып. 6, 1963.
2. Нагаев Э. Л. ФТТ, т. III, вып. 9, 1961.
3. Ирхин Ю. П., Туров Е. А. ФММ, № 4, 9, 1957.
4. Гитерман М. Ш., Ирхин Ю. П., ФТТ, т. II, № 1, 1960.
5. Morin F. R. Bell Syst. Techn. J., 37, № 4, 1047, 1958.
6. Жузе В. П., Шельх А. И. ФТТ, т. 5, вып. 6, 1963.
7. Sewell G. L. Proc. Phys. Soc. 76, № 6, 1960.
8. Маковецкий Г. И., Сирота Н. Н. ДАН СССР*, т. 9, № 1, 1965.
9. Palmer W. J. of Appl. Phys., Vo 25, 1, 1954.
10. Hansen. Metallurgy and metal. Eng. Ser. 1960.
11. Ксендзов Я. М. ФТТ, № 11, 1960.
12. Verwey E. J. W., Haaman P. W. и др. Phil. Res. Rep., 5, 173, 1950.
13. Heikes R. R., Jonston W. D., J. chem. Phys., 26, № 3, 582, 1957.
14. Frohlich H., Sewell G. L. Proc. Phys. Soc., 74, № 479, 1959.
15. Mott N. F., Canad. J. Phys., 34, 1356, 1956.
16. Jonker G. H., Van Houten S. Holbleiter Probleme VI, 118, изд. Von F. Sauter Brau., 1961.
17. Самохвалов А. А., Рустамов А. Г. ФТТ, 7, 4, 1199, 1965.
18. Клинггер М. И. Докт. дисс. ИПАН СССР, 1964.

И. К. Каримов, Э. Н. Рустамов, Л. М. Валиев

Антиферромагнит жарымкечиричи MnS вэ $MnSe$ -нин электриккечирмэ вэ термо EhF -си

ХУЛАСЭ

Электриккечирмэ механизми, енеркетик золагларын гурулушу вэ магнит дүзүлүшүнүн бунлара тәсирини өйрөнмөк мәгсәди илэ антиферромагнит жарымкечиричиләр олан MnS вэ $MnSe$ бирләшмәләринин электриккечирмәси вэ термо EhF -си өйрәнилмишдир. Температур областы, антиферромагнит кечид нөгтәләри дахил олмагла, 90 — 550°K сечилмишдир. Тәчрүбәдән алынган нәтичәләрин музакирәси көс-тәрир ки, электрик чәрәяанынын дашычылары бу маддәләрдә алчаг жүрүклүлө малик олмагла, энсиз кечиричилик золагында һәрәкәт едир.

К. П. МАМЕДОВ, С. Б. БАГИРОВ

РЕНТГЕНДИФРАКТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ КРИСТАЛЛА $TiSe$

Коэффициент линейного теплового расширения кристаллов (α) является одним из параметров, характеризующих связь атомов в решетке. α входит во многие расчетные формулы, связывающие механические и тепловые параметры кристаллов. В одноатомных кубических кристаллах имеет место корреляция между параметрами решетки и коэффициентом линейного термического расширения. Если в одноатомных кристаллах характер связи атомов различен в основных кристаллографических направлениях, то по величине и знаку α , можно выявить силы связи атомов в соответствующих направлениях. Как было показано в [1], в случае Se α_a и α_c отличаются не только по величине, но и по знаку. Отрицательное значение α_c указывает на то, что связь атомов Se вдоль цепочки (оси c) значительно сильнее, чем связь между атомами соседних цепочек. Там же было показано, что когда в данном направлении кристалла имеет место чередование различных атомов (как в кристалле $GaSe$), характер связи между которыми различен, то связь между параметрами решетки и α_i значительно осложняется.

Структура $TiSe$ изучалась в работе [2], где показано, что из восьми атомов Ti , имеющих в элементарной ячейке тетрагональной решетки кристалла, четыре атома с координатами $00\frac{1}{4}$, $00\frac{3}{4} + (000, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2})$ по положениям, по связям с атомами селена в решетке отличаются от остальных четырех, координаты которых $0\frac{1}{2}\frac{1}{4}$, $0\frac{1}{2}\frac{3}{4} + (000, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2})$. Таким образом, кристаллы $TiSe$ принадлежат к примерам, где характер связи между соседними атомами ($Ti - Se - Ti$) меняется. Поэтому исследование α в двух основных кристаллографических направлениях (a и c) в $TiSe$, чему посвящена данная статья, позволит судить об эффективной связи атомов в соответствующих направлениях.

Температурное изменение параметров a и c монокристаллов $TiSe$ изучалось на рентгенидифрактометре УРС-50-У, дублетом Cu -излучения. K_β -излучение отфильтровывалось никелевой фольгой. Нагрев образцов производился на специальном теплоизолированном кристалло-

* Образцы монокристаллов выращены и любезно представлены для рентгеновского исследования Х. М. Халиловым, Г. Ахундовым и К. Рзаевым.

держателе [3], температура образца контролировалась термопарой. Так как кристаллы TlSe легко раскалываются по плоскостям ($hh\ 0$), то температурное изменение параметра a определялось по смещению K_a -дублетов интерференций типа $hh\ 0$, угловые положения острых пиков которых измерялись с точностью до $1'$, в 2° .

Для большей точности определения значения параметра при данной температуре наиболее выгодно измерение углового положения интерференции 770. Однако в силу того, что пространственная группа кристалла TlSe L_{4h}^{18} , а возможные интерференции для этой группы удовлетворяют условию $h+k+l=2n$, интерференция с нечетными индексами оказывается значительно слабее. Действительно, как следует из структурного фактора TlSe, при четном l

$$F(hkl) = F_{Ti}(hkl) + F_{Se}(hkl) = 4f_{Ti}[1 + (-1)^k](-1)^{l/2} + 8f_{Se}(-1)^k \cos 2\pi hx \cos 2\pi kx,$$

а при нечетном k (или h) $F_{Ti}(hkl) = 0$.

Другими словами, интенсивности интерференции с нечетными индексами будут обусловлены рассеянием только от атомов селена. Это существенно сказывается на уменьшении интенсивности если учесть, что $f_{Ti}(0) = z = 81$, а $f_{Se}(0) = 34$. Учитывая это обстоятельство, для температурного изменения параметра a использовалось смещение углового положения дублетов

660, угловое положение которых при 15°C оказывается $109^\circ 13'$ и $109^\circ 37'$ в 2° .

При этом точность измерения $\frac{\Delta a}{a} = \text{ctg}$

$\theta \Delta \theta = 1.028 \cdot 10^{-4}$ при данной температуре оказывается достаточно высокой. Действительно, ошибка данного измерения $\frac{\Delta a}{a} \sim 0,01\%$, а ошибка в определении

параметра a порядка $0,08\%$ вполне достаточна, ибо температурное изменение параметра в исследуемой температурной области ($12-35^\circ\text{C}$) значительно превосходит ошибку измерения.

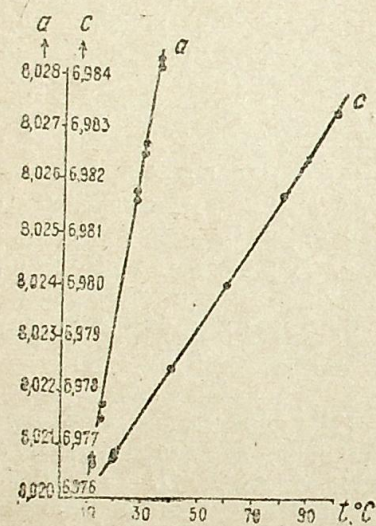
Температурная зависимость параметра a в исследуемой области температур представлена на рисунке. Все экспериментальные значения хорошо укладываются на прямую

$$a = a_0(1 + \alpha_a t),$$

где $a_0 = 8,0167^*$ (параметр решетки при 0°C), а $\alpha_a = 41,210 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ — коэффициент линейного термического расширения этого параметра.

Температурное изменение параметра c было исследовано на образце монокристалла TlSe, срезанного по плоскости $(00l)$, по смещению положений K_a -дублета интерференции 008. Угловые положения острых дублетов также были измерены с точностью до $\pm 1'$ в 2° . При 20°C положения дублетов оказываются $124^\circ 04'$ и $124^\circ 36'$, соответственно. Для полноты сведений в таблице приведены значения

* a_0 найдено путем интерполяции.



Температурная зависимость параметров a и c в интервале $20-100^\circ\text{C}$.

параметров c , рассчитанных по положениям K_{a_1} и K_{a_2} линий дублета. Как видно из таблицы, точность отдельного измерения достаточно высокая. В этом случае $\Delta c = c \text{ ctg } \theta \Delta \theta = 0,0005 \text{ \AA}$ или $0,05\%$. Температурная зависимость параметра в интервале $20-100^\circ\text{C}$ показана на рисунке. Эта зависимость выражается прямой

$$c = c_0(1 + \alpha_c t),$$

где $C_0 = 6,9752$; $\alpha_c = 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$.

Температурная зависимость параметров c

$t, ^\circ\text{C}$	$C (\text{\AA})$	по K_{a_1}	по K_{a_2}	Средняя
20		6,9767(4)	6,9768	6,9767(7)
40		6,9784	6,9783(9)	6,9783(9)
60		6,9799	6,9799(6)	6,9799(3)
80		6,9816(5)	6,9816	6,9816(3)
100		6,9832(3)	6,9832	6,9832

Сопоставление α_a и α_c показывает большую анизотропию коэффициента линейного термического расширения в кристалле TlSe. Результаты указывают также на то, что в направлении оси c , где имеет место цепочное строение с чередованием атомов $\text{Ti} - \text{Se} - \text{Ti}$, эффективная связь атомов значительно больше, чем в перпендикулярном направлении. Последнее должно сказываться как на электрических, тепловых, так и на упругих свойствах кристалла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов К. П., Нуриева З. Д. Химическая связь в полупроводниках и твердых телах. Минск, 1965.
2. Ketelaar J. A. Zs. Kristallogr., 101, 395, 1959.
3. Мамедов К. П., Нуриева З. Д. „Изв. АН. Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 2, 46, 1962.

К. П. Мамедов, С. Б. Багыров

TlSe кристаллынын истидэн кенишлэнмэсинин ренткендифрактометриктэ тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Истидэн кенишлэнмә эмсалы a кристал гәфәсиндә атомларарасы әләгәни характеризә едән параметрләрден биридир.

TlSe кристалында охларын истигамәтиндән асылы олараг, гоншу атомлар арасындакы әләгә мұхтәлифдир. Буна көрә a -нын ики кристаллографик ох истигамәтиндә өлчүлмәси уғун истигамәтләрдә атомлар арасындакы әләгә һаггында фикир сөйләмәжә имкан верир. Бу мәгсәдлә гәфәссабитләри „ a “ вә „ c “-нин температурдан асылылығыны өјрәнмәк кифәјәтдир.

Тәдгигатлар УРС-50—И ренткен дифрактометри васитәсилә апарылмышдыр. (110) вә (001) үзләри бојунча кәсилмиш TlSe монокрис-

талларындан алынган 660 вә 008 дублет хәтләринин температур сү-
рүшмәсиндән (κ_{α_1} , κ_{α_2} , Cu) һәр ики әмсал һесабланмышдыр. $\sigma_{\alpha} = 41,2 \cdot 10^{-6} \text{ дәр}^{-1}$ $\sigma_{\epsilon} = 11,6 \cdot 10^{-6} \text{ дәр}^{-1}$ гиймәтләри TlSe кристалында истидән кенишләнмә әмсалынын анизотроплугуну вә „с“ истигамәтиндә атом-
лар арасындакы әлагәнин она перпендикулјар истигамәтдәкинә нисбә-
тән мөһкәм олмасыны көстәрир. Бу анизотроплуг кристалын елек-
трик, термик вә еластиклик хассәләриндә дә өзүнү көстәрмәлидир.

М. А. ТАЛИБИ, Е. Г. КРУТЕНЮК, Э. М. НАГИЕВ

ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ НА СЕЛЕНОВЫХ $p-n$ -ГЕТЕРОПЕРЕХОДАХ

На $p-n$ -переходах и запиорных слоях из пьезоэлектрического и непьезоэлектрического материалов наблюдается электроакустический эффект [1, 2, 3]. Теория этого вопроса рассмотрена в [1, 2, 4, 5]. Благодаря пьезоэлектрическим свойствам в поликристаллических слоях селена наблюдается сильное поглощение ультразвука [6]. Для монокристаллов селена среднее значение пьезомодуля равно $1,95 \cdot 10^6$ [7]. На селеновых выпрямительных элементах наблюдается как электроакустический эффект [8], так и пьезоэлектрический [9—11]. Однако в литературе нет единого мнения о природе электроакустического эффекта на селеновых $p-n$ -гетеропереходах, отсутствуют данные об электроакустическом спектре. Следует отметить, что известные работы [8—11] выполнены на селеновых элементах серийного производства, для которых толщина слоя области объемного заряда при максимально допустимых запиорных смещающих напряжениях имеет величину около 1 мм.

В настоящей работе изучался электроакустический эффект в селеновых $p-n$ -гетеропереходах Se—CdSe и Se—CdS, изготовленных на базе селена 99,99999%. В таких элементах введением примесей в селен толщина слоя области объемного заряда варьируется до 15 мм [12, 13]. В качестве источника переменного напряжения были использованы генераторы 3Г-10 и ГЗ-7А. Звуковые сигналы от элемента принимались с помощью микрофона, с достаточно равномерной частотной характеристикой. Сигнал от микрофона после усиления регистрировался с помощью лампового вольтметра. Температура образца контролировалась термодарой, примыкающей к элементу. Постоянное смещение на образец подавалось от аккумулятора, через катушку с индуктивностью $L = 1 \text{ гн}$. При этом во избежание шунтирования элемента по постоянному току выходной обмоткой трансформатора генератора переменный сигнал подавался через конденсатор емкостью $C = 120 \text{ мкф}$.

На рис. 1 для одного из образцов Se—CdSe без примеси приводится частотная зависимость звучания, полученная при $U_{\sim} = 50 \text{ в}$. На рисунке видны четко выраженные частотные максимумы. В литературе нет данных об этих частотных максимумах и отсутствует единое мнение о природе самого электроакустического эффекта на селеновых $p-n$ переходах. В настоящей работе исследовались также купроксные вентили, в их частотном спектре звучания наблюдается лишь один широкий максимум, растянутый в интервале 1—10 кГц.

В [8] полагается, что звучание селеновых элементов связано термомеханическими колебаниями слоя селена, обусловленными периодическими локальными разогревами области переходного слоя. Такое объяснение представляется нам не совсем удачным. Звучание селеновых элементов наблюдается и при $\nu = 15-20$ кГц. При этом, по-видимому, частота тепловых пульсаций не сможет следовать за частотой переменного сигнала и отношение частоты возбуждения к частоте звучания будет намного больше 2.

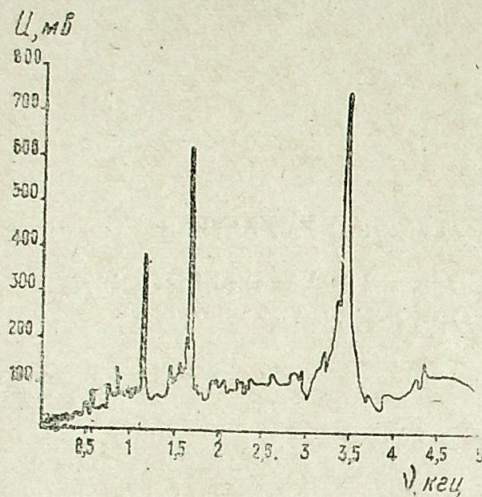


Рис. 1

С целью определения места возникновения электроакустического эффекта на селеновых элементах нами был выполнен следующий опыт. Брали два последовательно соединенных идентичных селеновых элемента. Один из них с $p-n$ -переходом, а в другом слой кадмия был заменен слоем висмута, т. е. не было выпрямляющего слоя. При подключении напряжения наблюдалось звучание лишь элемента с $p-n$ -переходом, это непосредственно указывает на то, что источником звука является область

объемного заряда. Исследования показали, что интенсивность звучания при данном переменном напряжении, приложенном к элементу, зависит от нулевой толщины слоя области объемного заряда, а также от направления и величины постоянного смещающего напряжения.

Исследование элементов с различной нулевой толщиной слоя области объемного заряда W_0 показало, что интенсивность звучания при данном $U_{\sim}$ и ν растет с увеличением W_0 . Наименьшая интенсивность звучания наблюдается для элементов с галлоидной примесью, в которых $W \sim 1$ мк. Интенсивность звучания элементов с примесью Na 0,01% почти такая же, как у элементов без примеси.

Из изложенных экспериментальных фактов и существующих теорий [2, 4, 5] следует, что в селеновых $p-n$ -гетеропереходах электроакустический эффект обусловлен переменными механическими напряжениями, возникающими при пульсации неоднородного электрического поля в области объемного заряда.

Заметим, что в отличие от данных [8] частота звучания для наших элементов совпадает с частотой входного переменного сигнала. Попробуем выяснить природу электроакустических максимумов (рис. 1).

Так как селен является пьезоэлектриком, то изменение потенциала на слое объемного заряда должно сопровождаться деформацией решетки. При определенной частоте электрического сигнала возбуждение звука может принять резонансный характер и объемный заряд может работать наподобие кварцевой пластины толщиной t , равной толщине слоя области объемного заряда W .

Для кристаллического селена модуль Юнга $E = 0,55 \cdot 10^6$ кг/см², а плотность $\rho = 4,807$ г/см³ [14]. По этим данным скорость распространения звуковых волн в селене $C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 3,34 \cdot 10^5$ см/сек. Известно, что $\lambda = \frac{c}{f}$, где λ — длина волны, f — частота при резонансе $t = \frac{\lambda}{2}$, следовательно, $f = \frac{c}{2t}$ [15]. По значениям $c = 3,34 \cdot 10^5$ см/сек и эффективной толщины слоя области объемного заряда $W = t = 10^{-4}$ см для селенового $p-n$ -перехода получаем $f \sim 10^9$ гц, т. е. величину, значительно превосходящую f резонансных максимумов по рис. 1.

Селеновые элементы обладают, помимо емкости, и индуктивными свойствами и при определенных условиях могут вести себя как колебательный контур [16]. Эффективная емкость исследованных селеновых элементов $C \sim 0,1$ мкф, индуктивность $L \sim 0,1$ гн. Резонансная частота соответствующего колебательного контура $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 10^3$ гц. Можно полагать, что максимумы звучания при частотах $\sim 10^3$ гц соответствуют резонансным частотам селенового элемента как колебательного контура.

Полагаем также, что возможно уподобление совокупности электроакустических максимумов частотным спектрам вибрационных шумов электронных ламп [17]. При данных значениях приложенного к элементу переменного напряжения $U_{\sim}$ были приведены измерения зависимости звучания от величины и направления прилагаемого к элементу постоянного смещающего напряжения $U_{см}$. Пропускное смещающее напряжение приводит к исчезновению звучания. Запорное смещающее напряжение (при увеличении его до некоторого значения) усиливает интенсивность звучания до определенного максимума, последующее же увеличение $U_{см}$ снижает его интенсивность (рис. 2).

Максимум звучания с ростом $U_{\sim}$ смещается в сторону больших $U_{см}$, и это обусловлено тем, что с ростом $U_{\sim}$ увеличивается значение выпрямленного напряжения, имеющего по отношению к $U_{см}$ противоположную полярность. При данном входном переменном напряжении в схеме с емкостной нагрузкой C интенсивность звучания элементов растет в зависимости от C до значений $C \sim C$ элемента (рис. 3).

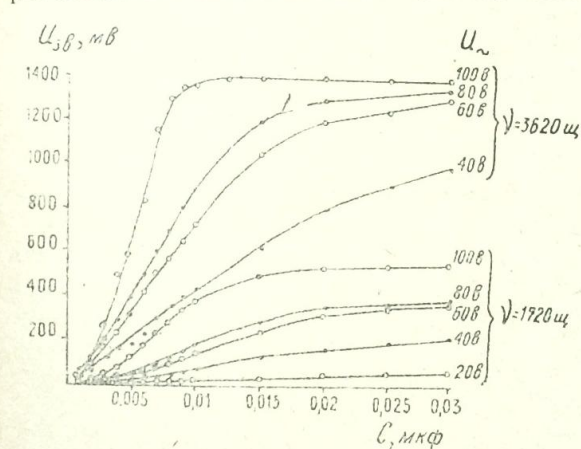


Рис. 3

Сравним интенсивности звучания без емкостной нагрузки (таб.). Как видно, наличие емкостной нагрузки $C \sim C$ элемента позволяет при данном $U_{\sim}$ усиливать интенсивность звучания.

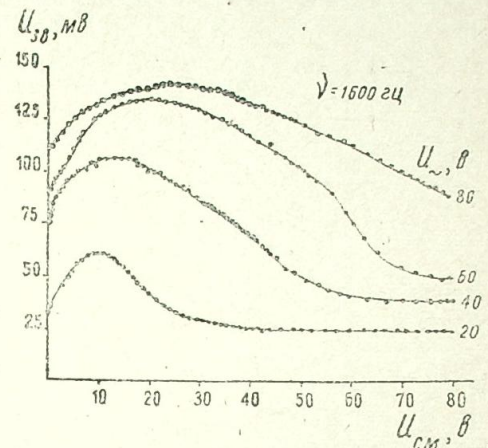


Рис. 2

исчезновению звучания. Запорное смещающее напряжение (при увеличении его до некоторого значения) усиливает интенсивность звучания до определенного максимума, последующее же увеличение $U_{см}$ снижает его интенсивность (рис. 2).

Максимум звучания с ростом $U_{\sim}$ смещается в сторону больших $U_{см}$, и это обусловлено тем, что с ростом $U_{\sim}$ увеличивается значение выпрямленного напряжения, имеющего по отношению к $U_{см}$ противоположную полярность. При данном входном переменном напряжении в схеме с емкостной нагрузкой C интенсивность звучания элементов растет в зависимости от C до значений $C \sim C$ элемента (рис. 3).

Сравним интенсивности звучания без емкостной нагрузки (таб.). Как видно, наличие емкостной нагрузки $C \sim C$ элемента позволяет при данном $U_{\sim}$ усиливать интенсивность звучания.

Специально изготовленные селеновые элементы при входной мощности 5 Вт генерируют звук интенсивностью $10^{-7} - 10^{-6}$ Вт/м². Эти элементы в наушниках обеспечивают нормальную слышимость от городской радиотрансляционной сети. На выходе приемника с выходной мощностью 30–40 Вт элемент, вложенный в центр конического динамика, обеспечивает звучание интенсивностью 10^{-5} Вт/м².

При $C=0$		
$U_{\sim}, \text{В}$	$U_{\text{зв}}, \text{мВ}$	
	$\nu=1720 \text{ Гц}$	$\nu_T=3620 \text{ Гц}$
20	88	76
40	230	300
60	400	420
80	600	500
100	700	580

Прямое преобразование электрической энергии в звуковую наблюдалось нами в диапазоне 20–20000 Гц. На этих же элементах наблюдается излучение ультразвука при приложении переменного напряжения в интервале частот 20 кГц–10 МГц.

Выводы

1. Электроакустический эффект на селеновых вентилях обусловлен переменными механическими напряжениями, возникающими в результате пульсации неоднородного электрического поля в области объемного заряда.

2. В частотном спектре электроакустического эффекта в диапазоне 1–4 кГц обнаружены узкие интенсивные максимумы.

3. Элементы, изготовленные из селена чистотой 99,9999%, можно использовать в качестве акустических, особенно при условиях, когда требуются малогабаритные плоские источники звука. При данной величине входного сигнала интенсивность звучания можно повышать подключением последовательной емкости, а также подачей постоянного заpornого смещающего напряжения.

Электроакустические максимумы могут быть использованы в схеме микрофон–усилитель–реле для сигнализации при поступлении на элемент резонансной частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. White D. L. JRE, 9, 1962.
2. Константинов Б. П., Гринберг А. А., Кастальский А. А., Рывкин С. М. „ДАН СССР“, т. 159, № 1, 1964.
3. Кальвенас С. П., Игнатовичус Н. Н., Климка Л. А. Тезисы докладов конференции молодых ученых, посвященной 25-летию Советской Литвы Вильнюс, 1965.
4. Гуревич В. Л., Пикус Г. Е. Тезисы докладов второго Всесоюзного совещания по $p-n$ -переходам в полупроводниках. Изд. АН Латв. ССР. Рига, 1964.
5. Гуревич В. Л. Автореф. докт. дисс. ИПАН СССР, 1965.
6. Gobrecht H., Hamisch H. Acustica, 7, № 1, 1957.
7. Gobrecht H., Hamisch H., Tansend A. Zs. Phys., 148, № 2, 1957.
8. Некрашевич Н. Г. ЖТФ, т. 26, № 3, 1956.
9. Numata T. J. Phys. soc. Japan, 13, 1066, 1958.

10. Такака Т. and Kawatiga H. J. F. Phys. soc. Japan. 14, № 10, 1455, 1959.
11. Шибеева А. В. „Изв. вузов (Физика)“, № 4, 1964.
12. Абдуллаев Г. Б., Манафли Э. Н., Талиби М. А. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд. АН Азерб. ССР, 1965.
13. Манафли Э. Н., Талиби М. А. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд. АН Азерб. ССР, 1965.
14. Славинский М. Физико-химические свойства элементов. Металлургиздат, 1952.
15. Керлин В. Ультразвук. М., 1950.
16. Авакьянц Г. М., Гринберг Н. С., Заугольникова Е. Г., Мурятин В. И. Сб. „Электронно-дырочные переходы в полупроводниках“. Изд. АН Узбек. ССР, 1952.
17. Бергельсон И. Г., Вадерко Н. К., Пароль Н. В., Петухов В. М. Приемно-усилительные лампы повышенной надежности. Изд. „Советское радио“, М., 1962.

М. Э. Талиби, Л. Г. Крутенчук, Э. М. Нагышев

Селен $p-n$ гетерокечидларинда електроакустик эффект

Ишдә, тәмизлији 99,99999% олан селендән һазырланмыш Se—CdSe вә Se—CdS $p-n$ -гетерокечидларинда електроакустик эффект тәдгиг олунмушдур. Мүхтәлиф ашгарлар вурмагла һәчми жүкләр областы тәбәгәсинин галынлығы (W) дәјишдирилмишдир. Елементә дәјишән кириш сигналы ($U_{\sim}$) тәтбиг олундугда, харици сабит кәркинлик тәтбиг етмәклә, сәсләнмәнин интенсивлијини идарә етмәк олур. Верилмиш $U_{\sim}$ -дә дүз истигамәтдә тәтбиг олунмуш сабит кәркинликдә сәсләнмә кәсилир вә әкс истигамәтдә тәтбиг олунмуш сабит кәркинлијин мүйәјјән гијмәтинә гәдәр сәсләнмәнин интенсивлији күчләнир.

Селен гетерокечидларинда електроакустик һадисә дәјишән гејри-бирчинсли elektrik саһәсинин пулсасијасы заманы һәчми жүкләр областында баш верән дәјишән механики кәркинликлә изаһ олунур.

Верилмиш дәјишән кириш кәркинлијиндә Se—CdSe вә Se—CdS кечидларинин сәсләнмәсинин тезлик асылылығында күчлү максимумлар мұшаһидә олунур. Se—CdSe вә Se—CdS кечидларинин һәчми жүкләр областы тәбәгәсинин галынлығы W олан кварс тәбәгәсинә охшар көтүрсәк, онда резонанс тезлији үчүн $f \sim 10^9$ һс алынар. Һалбуки селен гетерокечидлариндә әсас резонанс максимумлары 1–4 кҺс областында мұшаһидә едилир.

Селен элементләри тутумдан башга индуктив хассәјә дә малик-дир вә мүйәјјән шәраитдә өзүнү рәгс контуру кими апарыр. Селен элементларинин ефектив тутуму $C \sim 0,1$ мкф, бөјүк әкс кәркинлик-ләрдә мұшаһидә олунан индуктивлији исә $L \sim 0,1$ һн-дир. Белә рәгс контуруна ујгун олан резонанс тезлији $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 10^3$ һс олур.

Күман етмәк олар ки, $\sim 10^3$ һс тезлијә ујгун олан максимал сәсләнмә селен элементинә ујгун олан рәгс контурунун резонанс тезлијинә ујгун кәлир.

Хүсуси технолокија илә һазырланмыш селен вентилләри, кириш күчү ~ 5 Вт олдугда, интенсивлији $10^{-7} - 10^{-6}$ Вт/м² олан сәс јарадыр.

А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. К. ИСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРОВ ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ $KClBr + AgCl$ ФОСФОРОВ

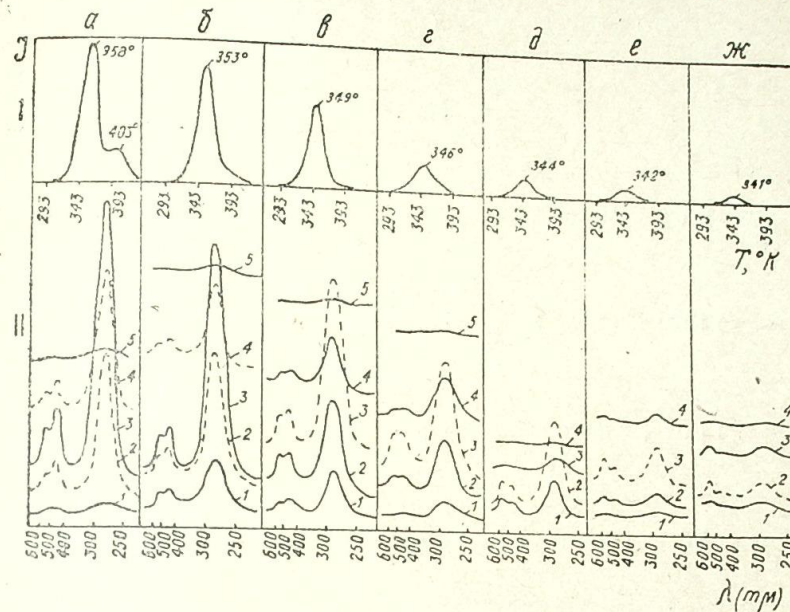
Исследование интегральной термостимулированной люминесценции позволяет выяснить расположение и основные тепловые характеристики отдельных групп уровней окраски кристаллофосфоров. Изучение спектров термостимулированной люминесценции дает возможность выяснить механизм возникновения отдельных пиков на кривых термостимулированной люминесценции. Анализ указанных спектров позволяет установить эффективность передачи энергии рекомбинации электронов и дырок к центрам свечения в различных стадиях релаксационного процесса. С этой точки зрения щелочно-галогидные фосфоры, активированные серебром, являются благоприятными объектами, так как для них имеются достоверные сведения о микроструктуре участвующих в свечении примесных центров.

Рекомбинационная люминесценция активированных серебром щелочно-галогидных кристаллофосфоров с однокомпонентным основанием исследовалась в ряде работ [1—6]. Термостимулированная рекомбинационная люминесценция в кристаллофосфорах со смешанным основанием еще ни кем не изучалась. Изучение спектров термостимулированной люминесценции в щелочно-галогидных фосфорах со смешанным основанием позволило бы выяснить характерные особенности активаторных центров свечения, проявляющихся в спектрах термостимулированной люминесценции указанных фосфоров. Кроме того, исследование спектров термостимулированной люминесценции смешанных щелочно-галогидных кристаллофосфоров необходимы также для выяснения влияния большой плотности точечных дефектов и дислокаций, имеющих место в смешанных щелочно-галогидных фосфорах, на рекомбинационную люминесценцию.

В настоящей статье приводятся результаты исследования спектров термостимулированной люминесценции смешанных монокристаллических $KSClBz + AgCl$ фосфоров в зависимости от состава основания. Монокристаллы выращивались по методу Киропулоса. В качестве солей основания кристаллофосфоров использовались соли марки „особо чистые“. Концентрация активатора ($AgCl$) составляла 0,5 мол % в расплаве. Условия опытов для всех исследуемых кристаллофосфоров были одинаковы.

Исследуемые образцы возбуждались излучением от рентгеновской трубки с вольфрамовым антикатодом ($I = 10 \text{ mA}$, $V = 50 \text{ kV}$) при комнатной температуре. Кривые и спектры термостимулированной люми-

несценции измерялись на установке, где в качестве спектрального прибора использовался монохроматор от прибора СФ-4 (см. также работу [7]). Для регистрации интегральных кривых и спектров термостимулированной люминесценции применялись ФЭУ-18, усилитель постоянного тока и ЭПП-09 с временем пробега каретки 2,5 сек.



Интегральные кривые (I) и спектральный состав (II) термостимулированной люминесценции кристаллофосфоров:

$$a - \text{KCl} + \text{AgCl}; \delta - \text{KCl} (90 \text{ мол. \%}) \text{KBr} \times (10 \text{ мол. \%}) + \text{AgCl}; \varepsilon - \text{KCl} (70 \text{ мол. \%}) \text{KBr} \times (30 \text{ мол. \%}) + \text{AgCl}; \zeta - \text{KCl} (50 \text{ мол. \%}) \text{KBr} \times (50 \text{ мол. \%}) \text{AgCl}; \theta - \text{KCl} (30 \text{ мол. \%}) \times \text{KBr} (70 \text{ мол. \%}) + \text{AgCl}; e - \text{KCl} (10 \text{ мол. \%}) \times \text{KBr} (90 \text{ мол. \%}) + \text{AgCl}; жс - \text{KBr} + \text{AgCl}.$$

Температурные интервалы измерения спектров:

а. 1) 311—328°K; 2) 333—318°K; 3) 319—366°K; 4) 3-5—31°K; 5) 406—423°K;
б. 1) 313—333°K; 2) 331—345°K; 3) 346—363°K; 4) 3-5—332°K; 5) 390—409°K;
в. 1) 308—325°K; 2) 326—339°K; 3) 340—357°K; 4) 358—375°K; 5) 385—400°K; з. 1) 397—
322°K; 2) 324—337°K; 3) 333—354°K; 4) 357—373°K; 5) 378—393°K; д. 1) 320—313°K;
2) 335—352°K; 3) 351—370°K; 4) 373—386°K; е. 1) 312—315°K; 2) 317—330°K;
3) 333—353°K; 4) 353—368°K; 5) 370—383°K; ж. 1) 320—333°K; 2) 333—348°K;
3) 351—363°K; 4) 365—378°K. Скорость нагрева—0,3 град/сек.

На рисунке представлены интегральные кривые (*I*) и спектральный состав (*II*) термостимулированной люминесценции смешанных $KClKBr + AgCl$ фосфоров. Как видно из сравнения кривых термостимулированной люминесценции исследованных фосфоров, с ростом содержания KBr -компоненты в смешанном основании $KClKBr + AgCl$ фосфоров до 10 мол % интенсивность пика с $T_m = 403^\circ K$ термостимулированной люминесценции ослабляется до нуля и происходит некоторое ослабление интенсивности пика $T_m = 358^\circ K$. Дальнейший рост содержания KBr -компоненты в смешанном основании фосфора также приводит к падению интенсивности единственного пика термостимулированной люминесценции, расположенного для указанных фосфоров в области $341 - 358^\circ K$. Как видно из работы [8], указанный пик обусловлен рекомбинационным свечением, возникающим при разрушении E -центров окраски ($435m\mu$) $KClKBr + AgCl$ фосфоров со смешанным основанием.

Как видно из сравнения, спектр термостимулированной люминесценции, возникающей в различных этапах релаксационного процесса, состоит из нескольких полос люминесценции, максимумы которых испытывают длинноволновое смещение при возрастании содержания KBr .

Кристаллофосфоры	Положение пика интегральной термостимулированной люминесценции (°K)		Спектральный состав отдельных пиков термостимулированной люминесценции (mμ)	
	T_1	T_2	T_1	T_2
KCl+AgCl	358	403	280 440 540	280 440 540
KCl (90 мол %) KBr* (10 мол %) +AgCl	353		285 448 548	
KCl (70 мол %) KBr* (30 мол %) +AgCl	349		286 452 550	
KCl (50 мол %) KBr (50 мол %) +AgCl	346		288 454 553	
KCl (30 мол %) KBr* (70 мол %) +AgCl	344		289 456 555	
KCl (10 мол %) KBr* (90 мол %) +AgCl	342		290 458 558	
KBr+AgCl	341		290 460 560	

* Приведенные концентрации KCl- и KBr-компонентов смешанного основания фосфора соответствуют их концентрациям в расплаве.

компоненты в смешанном основании фосфора (см. табл.). Так, например, если у KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров на всех этапах релаксационного процесса наблюдаются, соответственно, полосы свечения с максимумами при 280, 440, 540 mμ и 290, 460, 560 mμ, то у фосфоров со смешанным основанием максимумы однотипных полос свечения расположены между вышеуказанными значениями длин волн для однокомпонентных фосфоров. При этом смещение максимумов указанных полос у смешанных фосфоров происходит неравномерно. Действительно, как видно из таблицы и рисунка, при переходе от KCl+AgCl к KCl (90 мол %) KBr (10 мол %) +AgCl фосфору наблюдается значительно большее смещение максимумов вышеуказанных полос свечения, чем при переходе от KCl (50 мол %) KBr (50 мол %) +AgCl к фосфору KCl (30 мол %) KBr (70 мол %) +AgCl. Такая же закономерность в смещении максимума полос наблюдалась нами для спектров возбужденного поглощения указанных смешанных фосфоров [9].

Сравнение интенсивностей вышеуказанных полос свечения KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров показывает, что соотношение интенсивностей полос свечения с максимумом при 440 и 540 mμ KCl+AgCl

фосфора при переходе к KBr+AgCl фосфору меняется настолько значительно, что наблюдается обратное соотношение интенсивностей указанных полос для KBr+AgCl фосфора. При этом интенсивности всех пика на кривых термовысвечивания с $T_m = 358^\circ\text{K}$ очень резко ослабляется при переходе от KCl+AgCl к KBr+AgCl фосфору. Аналогичная закономерность наблюдалась нами и для активаторных полос возбужденного поглощения, и для F-полос поглощения указанных фосфоров [8, 9].

Сравнивая спектры термостимулированной люминесценции указанных фосфоров с однокомпонентным основанием и смешанных KClKBr+AgCl фосфоров, можно заметить, что по мере роста содержания KBr-компоненты в основании смешанных фосфоров падает относительная интенсивность полосы свечения с максимумами, при 280 и 440 mμ и растет интенсивность более длинноволновой полосы при 540 mμ, хотя при этом по мере роста содержания KBr абсолютная интенсивность всех трех полос свечения уменьшается. Кроме этого, сравнение спектров термостимулированной люминесценции указанных фосфоров показывает, что по мере увеличения содержания KBr-компоненты интенсивность полосы свечения при 285 mμ KClKBr+AgCl фосфоров значительно больше ослабляется, чем интенсивность более длинноволновых полос свечения. При этом почти у всех фосфоров максимальное разгорание коротковолновых полос свечения происходит в максимуме пика термовысвечивания, расположенного при 358—341°K. Падение абсолютной интенсивности свечения полос 280 и 440 mμ при переходе от KCl+AgCl к смешанным KClKBr+AgCl фосфорам и к KBr+AgCl фосфору, по-видимому, обусловлено тем, что большая доля термически освобожденных электронов из-за повышенной вероятности безызлучательных переходов, наблюдаемых у KBr+AgCl фосфоров, не приводит к излучению свечения в области 280 и 440 mμ.

Известно, что коротковолновая полоса излучения фосфоров KCl+Ag и KBr+Ag связана с ионами Ag^+ . Что касается интерпретации длинноволновых полос свечения указанных фосфоров с однокомпонентным основанием, то они могут быть отнесены к свечению В- и С-центров, возникающему при рекомбинации термически освобожденных электронов с В (288 mμ) - и С (318 mμ) - центрами захвата (см. также работу [4]). Следует отметить, что на указанные полосы может дать наложение свечения чистой решетки KCl, расположенное в области 400—420 mμ.

Изложенные данные по изменению положения максимума и интенсивности свечения полосы 280 mμ термостимулированной люминесценции при увеличении содержания KBr-компоненты в смешанном основании KClKBr+AgCl фосфоров могут быть объяснены на основе представлений о пребывании иона активатора в узлах кристаллической решетки с различным ближайшим окружением анионов (в разных изоструктурах) [8, 9, 10, 11]. Другими словами, непрерывный переход полосы свечения термостимулированной люминесценции при 280 mμ у KCl+AgCl фосфора к соответствующей полосе 290 mμ у KBr+AgCl-фосфора при увеличении содержания KBr-компоненты в смешанном основании KClKBr+AgCl фосфоров объясняется наложением близко расположенных элементарных полос излучения, принадлежащих разным изоструктурам. При этом неравномерное смещение указанной выше полосы свечения обусловлено тем, что активатор преимущественно располагается в изоструктурах с наибольшим числом более тяжелых анионов [9, 11].

Для однозначной интерпретации длинноволновых полос свечения термостимулированной люминесценции у фосфоров со смешанным основанием необходимы дополнительные исследования на приборе с большой дисперсией. У смешанных фосфоров в области длинноволновых полос свечения термостимулированной люминесценции могут наблюдаться также *B*- и *C*-полосы свечения, обусловленные различными изоструктурами *B*- и *C*-центров окраски, но очень малая дисперсия прибора СФ-4 в указанной области приводит к значительному осложнению интерпретаций наблюдаемых полос свечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочногалогенных соединений. Изд. Саратовского гос. университета, 1960.
2. Витол И. К. „Оптика и спектроскопия“, 9, 4, 555, 1960.
3. Лушник Ч. Б., Золотарев Г. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 23, 224, 1963.
4. Халилова А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 1, 2, 3, 1964.
5. Парфианович И. А., Шуралева Е. И. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 29, 19, 1965.
6. Лушник Ч. Б., Золотарев Г. К., Соовик Т. А., Яэк И. В., Эланго М. А. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 29, 38, 1965.
7. Яэк И. В., Окк М. Ф. Тр. ИФА АН ЭССР, № 21, 96, 1962.
8. Исаев Ф. К. Дисс. Баку, 1964.
9. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 4, 1963.
10. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 25, 28, 1961.
11. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. Тр. ИФА АН ЭССР, № 14, 76, 1961.

Ә. Х. Хәлилов, Ф. К. Исаев

КСіКВг+АгСі фосфорларынын термостимулаланмыш люминесценсия спектрлеринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә КСіКВг+АгСі фосфорларынын термостимулаланмыш
люминесценсия спектрлеринә һәмин фосфорларын компонентләри олан
КСі вә КВг дузларынын анионларынын тәсириндән бәһс едилир.

С. И. ТАИРОВ, В. И. ТАГИРОВ, А. А. КУЛИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ХОЛЛА В МОНОКРИСТАЛЛАХ СИСТЕМЫ ГЕРМАНИЙ—КРЕМНИЙ Р-ТИПА, СОДЕРЖАЩИХ ДО 15 АТ. % КРЕМНИЯ

Наличие двух видов дырок в германии и кремнии осложняет картину изменения коэффициента Холла (*R*) в зависимости от температуры и магнитного поля. В примесной области проводимости при постоянной концентрации носителей тока (когда все примесные центры ионизированы) в слабых магнитных полях сложный ход *R* возникает вследствие сложной структуры валентной зоны, а в температурной зависимости—за счет изменения механизма рассеяния носителей тока.

Зона проводимости в сплаве с содержанием кремния до 15 ат. % такая же, как у германия, выше 15 ат. % кремния она напоминает зону проводимости кремния [1]. В сплавах германий—кремний общая картина валентной зоны германия и кремния сохраняется, но меняются эффективные массы плотности состояний и спин-орбитальное расщепление [2]. Эффективную массу носителей тока в сплаве германия с кремнием при значительной концентрации второго компонента определить циклотронным резонансом не удается [3, 4]. Поэтому ее приходится определять либо более грубыми методами, либо устанавливать ее изменение, хотя бы качественно, в зависимости от состава сплава.

Исследование зависимости коэффициента Холла от магнитного поля в сплавах германий—кремний *p*-типа позволяет следить за изменением отношения эффективных масс легких и тяжелых дырок с ростом концентрации кремния в сплаве. Кроме того, в сплаве германий—кремний *p*-типа определение концентрации носителей тока по эффекту Холла затруднено наличием легких дырок, сложным механизмом рассеяния и негладкими (деформированными) изоэнергетическими поверхностями валентной зоны. Для разумного использования коэффициента Холла при определении концентрации дырок необходимо следить за его изменением в зависимости от магнитного поля и температуры.

Настоящая статья посвящена исследованию влияния магнитного поля на коэффициент Холла в монокристаллах сплавов германий—кремний *p*-типа, содержащих 4,4; 5,6; 7,8; 10,0 и 15,0 ат. % кремния. При исследовании использовались монокристаллы, выращенные вытягиванием из расплава [5].

На рис. 1 показано изменение коэффициента Холла от магнитного поля при 300 и 77°К. С увеличением магнитного поля до $H \approx 7000$ э. R уменьшается. Дальнейшее увеличение H мало сказывается на значении R . При малых концентрациях носителей тока наблюдается слабо выраженный минимум, который с уменьшением температуры смещается в сторону малых значений магнитного поля. С повышением концентрации кремния в сплаве этот минимум смещается в сторону больших H . При малых значениях H $R_{300^\circ\text{K}}/R_{77^\circ\text{K}} > 1$ для всех исследованных составов. С ростом магнитного поля это отношение приближается к единице.

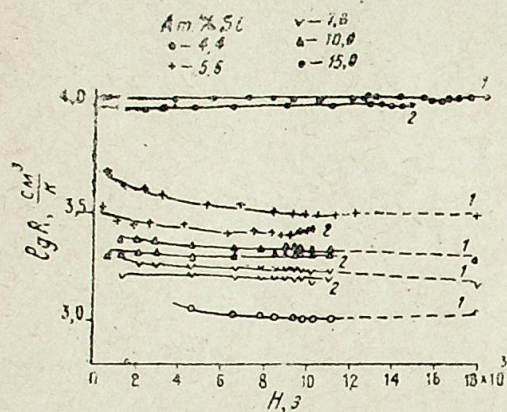


Рис. 1. Зависимость коэффициента Холла от магнитного поля в сплавах германия с кремнием, содержащих 4,4; 5,6; 7,8; 10,0; 15,0 ат. % кремния при 300 (кривые 1) и 77°К (кривые 2).

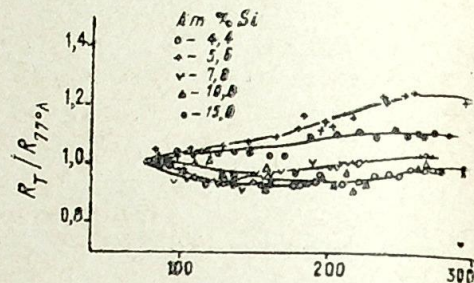


Рис. 2. Зависимость $\frac{R_T}{R_{77^\circ\text{K}}}$ от температуры в сплавах германия с кремнием, содержащих 4,4; 5,6; 7,8; 10,0; 15,0 ат. % кремния.

Уменьшение коэффициента Холла с увеличением H связано со сложной структурой валентной зоны. Когда выполняется условие $\frac{uH}{C} = 1$ для легких дырок, в зависимости $R = f(H)$ наблюдается минимум. Чем меньше концентрация кремния в сплаве, тем раньше наступает область сильного поля (для легких дырок), так как подвижность дырок с повышением концентрации кремния падает.

На рис. 2 представлена температурная зависимость $\frac{R_T}{R_{77^\circ\text{K}}}$ для различных составов раствора германий—кремний при $H = 2300$ э. Эти результаты показывают, что в области примесной проводимости с изменением температуры механизм рассеяния носителей тока меняется. Действительно, при 300°К основными механизмами являются рассеяние на тепловых колебаниях и нарушениях сплава. При 77°К заметную роль играет рассеяние на ионизированных примесях, а доля рассеяния на тепловых колебаниях значительно уменьшается. В более чистых образцах изменение $\frac{R_T}{R_{77^\circ\text{K}}}$ вызвано в основном вкладом легких дырок в значение R_T . В образцах более высокой концентрацией носителей тока, помимо этого, R_T меняется также вследствие изменения механизма рассеяния.

При определении концентрации дырок по коэффициенту Холла наибольшей точности можно ожидать при выполнении условия сильного поля $\left(\frac{uH}{C} \gg 1\right)$, где u —подвижность носителей тока. В этом случае общая концентрация дырок $n = n_T + n_L$ связана с коэффициентом Холла простым соотношением [6]:

$$R = \frac{1}{en}, \quad (1)$$

где n_T и n_L —концентрации тяжелых и легких дырок, e —заряд электрона. Однако практически не всегда доступны магнитные поля, удовлетворяющие условию сильного поля, так, например, при комнатной температуре это условие выполняется при $H \gg 38000$ и 63000 э для сплавов, содержащих 4,4 и 15,0 ат. % кремния, соответственно.

Но концентрацию дырок можно определить из (1) при меньших полях с некоторой погрешностью. Действительно, рис. 1 показывает, что заметное изменение R наблюдается при $H < 7000$ э, а при больших значениях H коэффициент Холла изменяется незначительно. Поэтому определение n из (1) при $H > 7000$ э, но не выполняющих условия очень сильного поля, не приведет к заметным ошибкам.

Ат. % кремния	Концентрация дырок, см^{-3}	Подвижность дырок при 300° К, $\text{см}^2/\text{в. сек}$
4,4	$5,48 \cdot 10^{15}$	1460
5,6	$2,10 \cdot 10^{15}$	1360
7,8	$4,43 \cdot 10^{15}$	1330
10,0	$3,29 \cdot 10^{15}$	890
15,0	$6,70 \cdot 10^{14}$	800

В настоящей работе концентрация дырок определялась по формуле (1), при напряженности магнитного поля 18000 э. Концентрации дырок и их подвижности при комнатной температуре приведены в таблице для различных составов. Подвижность дырок определялась из значения электропроводности по известной концентрации носителей тока.

Нужно отметить, что резкость изменения коэффициента Холла в зависимости от магнитного поля уменьшается с увеличением содержания кремния в сплаве. Это показывает, что с повышением концентрации кремния отношение подвижностей легких и тяжелых дырок приближается к единице. Этот вывод подтверждается еще и тем, что с увеличением концентрации кремния отношение $\frac{R_{300^\circ\text{K}}}{R_{77^\circ\text{K}}}$ уменьшается

(при малых H).

С другой стороны, отношение подвижностей легких и тяжелых дырок обратно пропорционально отношению их эффективных масс при рассеянии носителей тока на акустических колебаниях, а при рассеянии на ионизированных примесях обратно пропорционально квадрату корню отношения эффективных масс. Отсюда можно сделать заключение, что с увеличением содержания кремния в сплаве отношение эффективных масс тяжелых и легких дырок приближается к единице. Этот вывод согласуется с результатами работы [2], где от-

ношение эффективных масс было оценено оптическим методом по температурной зависимости спектра поглощения свободных дырок.

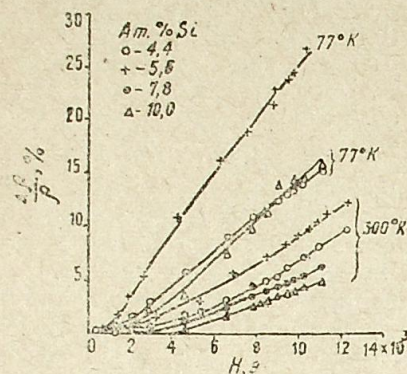


Рис. 3. Зависимость поперечного магнетосопротивления от магнитного поля для различных составов сплава германий—кремний при 300 и 77°K.

Результаты исследования коэффициента Холла находятся в согласии с измерениями магнетосопротивления. На рис. 3 показана зависимость поперечного магнетосопротивления $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ от магнитного поля

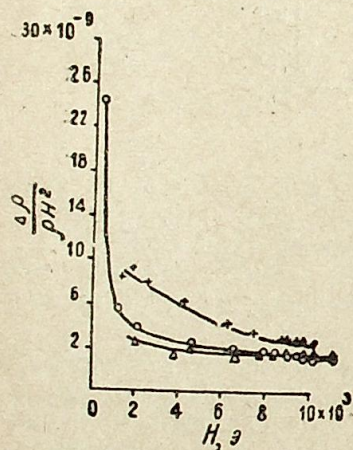


Рис. 5. Зависимость $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2}$ от магнитного поля для различных составов сплава германий—кремний при 77°K.

показывает, что с увеличением концентрации кремния в германии подвижность легких дырок приближается к подвижности тяжелых.

ЛИТЕРАТУРА

1. Herman F. Phys. Rev., 95, 3, 847, 1954.
2. Braunstein R. Phys. Rev., 130, 3, 863, 1963.
3. Dresselhaus G., Han-Ying Ku, Wagoner G., Christian S. M. Phys. Rev., 100, 4, 1218, 1955.

4. Otsuka Eizo, Nagata Seichi, Murase Kazuo. J. Phys. Soc. Japan, 19, 4, 1503, 1964.
5. Таиров С. И., Таиров В. И., Шахтагинский М. Г., Кулиев А. А. "Кристаллография", 10, 5, 751, 1965.
6. Willardson R. K., Harman T. C., Beer A. C. Phys. Rev., 96, 6, 1512, 1954.

С. И. Таиров, В. И. Таиров, Э. А. Гулиев

Тэркибиндә 15 ат. %-дәк силиснум олан *p*-типли керманиум-силиснум системи монокристалларында магнит саһәсинин Һолл әмсалына тә'сиринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Ишдә тәркибиндә 4,4; 5,6; 7,8; 10,0; 15,0 ат. %-и гәдәр силиснум олан *p*-типли керманиум-силиснум бәрк мәһлуллары монокристалларында Һолл әмсалынын магнит саһәсиндән вә температурдан асылы олараг дәјишмәси тәдгиг едилмишдир. Кичик саһәләрдә мәһлулда силиснумун гатылығы артдыгча Һолл әмсалынын магнит саһәсиндән асылы олараг дәјишмә сүр'әти азалыр. Бурадан белә нәтичә чыхарылмышдыр ки, мәһлулда силиснумун гатылығы артдыгча јүнкүл вә ағыр дешикләрин јүрүклүкләрин нисбәти (демәли, онларын эффектив күтләри нисбәти) ваһидә јахынлашыр. Бу нәтичә мүғавимәтин магнит саһәсиндән асылы олараг дәјишмәсинин өрәнилмәси илә дә тәсдиг едилмишдир.

Сабит магнит саһәсиндә Һолл әмсалынын температурдан асылы олараг дәјишмәси көстәрир ки, температурун дәјишмәси илә јүкдашыјычыларын сәпилмә механизми дәјишир.

Тәдгигатлар нәтичәсиндә јүкдашыјычыларын јүрүклүјү тә'јин едилмиш вә көстәрилмишдир ки, онун гијмәти мәһлулда силиснумун гатылығынын артмасы илә азалыр.

Рис. 4. Зависимость $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2}$ от магнитного поля для различных составов сплава германий—кремний при 300°K

для различных составов сплава при 300 и 77°K. Во всех образцах электрический ток протекал параллельно направлению [111], а магнитное поле было перпендикулярно к этому направлению. Отметим, что в исследованных значениях магнитного поля не наблюдалось насыщения $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. Изменение

величины $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2}$ от магнитного поля для различных составов показано на рис. 4 и 5 при 300 и 77°K, соответственно. В работе [6] указывается, что наличие легких дырок в германии *p*-типа приводит к резкому изменению зависимости $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2}$ от *H*. Как видно

из рис. 4 и 5, с ростом концентрации кремния в сплаве резкость изменения величины $\frac{\Delta\rho}{\rho H^2}$ от магнитного поля уменьшается. Это

Д. М. КУЛИЗАДЕ

ОБ АСИММЕТРИИ КОНТУРОВ СЛАБЫХ ФРАУНГЕФЕРОВЫХ ЛИНИЙ

Еще в 1947 г. Миннаерт [1] обнаружил, что большинство хорошо изолированных линий в утрехтском атласе показывает красную асимметрию. Однако вскоре Бейс и Онжеринг [2] показали, что эта асимметрия носит инструментальный характер.

Фойгт [3] и Гасанализаде [4] установили, что инфракрасные линии кислорода в спектре центра диска Солнца характеризуются фиолетовой асимметрией, а в спектре края диска они симметричны. Исследуя изменения контуров трех линий железа по диску Солнца, Хиггс [5] нашел, что в спектре центра диска линии имеют небольшую фиолетовую асимметрию, а около края его фиолетовая асимметрия заменяется красной.

Ольсен [6] и Бабий [7] обнаружили, что в спектре центра диска Солнца большинство линий характеризуется красной асимметрией, а в спектре края — фиолетовой. Некоторые линии в спектре края обладают симметричными контурами.

В настоящей работе изучалась асимметрия контуров 45 слабых фраунгоферовых линий. Наблюдения проводились нами летом 1964 года с помощью башенного солнечного телескопа в комбинации с большим дифракционным спектрографом. Диаметр изображения Солнца на щели спектрографа составлял 203 мм. Наблюдения велись в четвертом порядке спектра, где в области D линий NaI линейная дисперсия спектрографа составляла 2.88 мм/Å. Время экспозиции варьировалось от 0,5 до 3 сек — при фотографировании спектра краев диска.

Фотометрические измерения производились при помощи саморегистрирующего микрофотометра системы Молля при ширине щелей 0,1 мм, что соответствует 6 мÅ в спектрограммах. При записи контуров линий использовалось увеличение 100. Следовательно, дисперсия на регистрограммах в области спектра 6000 Å составляла около 300 мм/Å.

Исследование показало, что рассеянный свет и дуги решетки практически не искажают наблюдаемых контуров фраунгоферовых линий. Интенсивность ложных линий составляет 0,018% от интенсивности основной линии. Инструментальный контур спектрографа с полушириной 30 мÅ² хорошо аппроксимируется контуром Фойгта с параметрами $\beta_1 = 8 \text{ мÅ}$ и $\beta_2^2 = 150 \text{ мÅ}^2$.

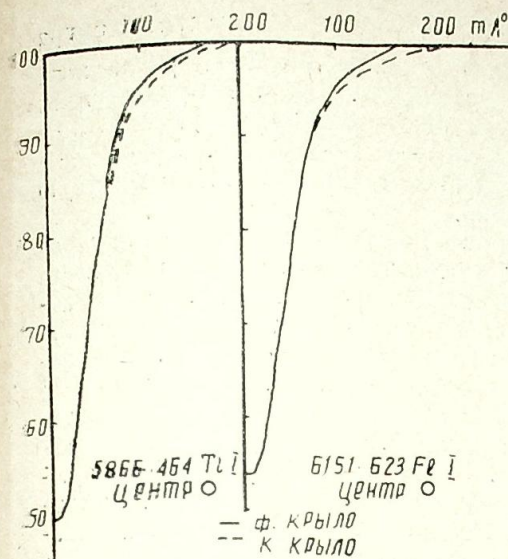


Рис. 1

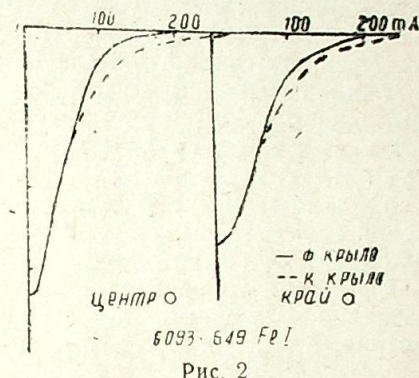


Рис. 2

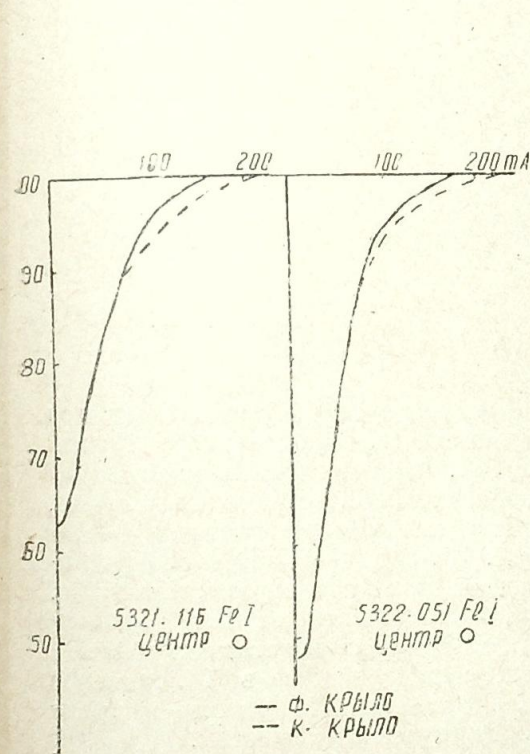


Рис. 3

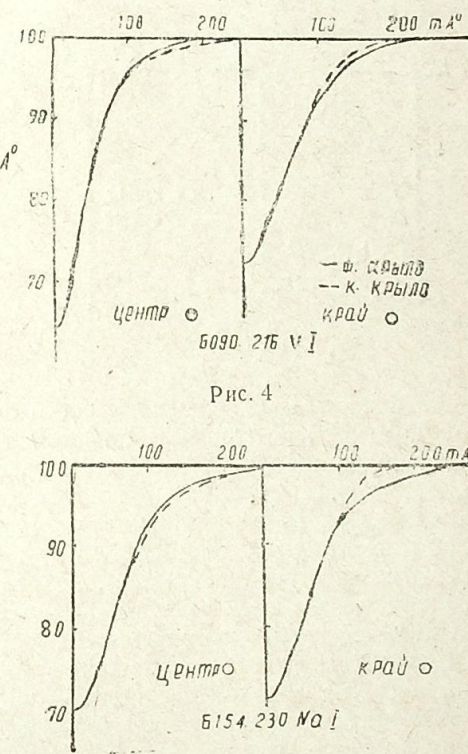


Рис. 4

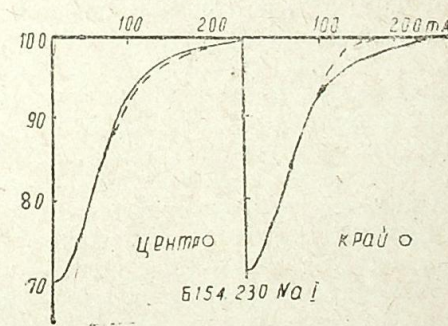


Рис. 5

Были выбраны свободные от бленд линии в области спектра λ 5200—6300 Å. Контур каждой линии измерялся по 3—4 различным спектрограммам и результаты были усреднены. Как и в предыдущих работах, мы будем называть асимметрию красной, если $R(\Delta\lambda) - R(-\Delta\lambda) > 0$, и фиолетовой, если $R(\Delta\lambda) - R(-\Delta\lambda) < 0$. Здесь R — глубина контура, $\Delta\lambda$ и $-\Delta\lambda$ — расстояние от центра линии в красную и фиолетовую стороны, соответственно.

Результаты исследования контуров 45 слабых и умеренных фраунгоферовых линий показали, что в спектре центра диска Солнца большинство линий характеризуется красной асимметрией. У некоторых линий в ядре имеет место небольшая фиолетовая асимметрия. От ядра к крыльям линии фиолетовая асимметрия переходит в красную. Из 45 исследованных линий в спектре центра диска Солнца 5 линий имеют симметричные контуры, 1 линия характеризуется фиолетовой асимметрией, а все остальные красной. В спектре края диска 9 линий имеют симметричные контуры, 14 показывают красную асимметрию и 22 линий характеризуются фиолетовой асимметрией. Следовательно, для спектра центра диска Солнца характерна красная асимметрия, а для спектра его края — фиолетовая.

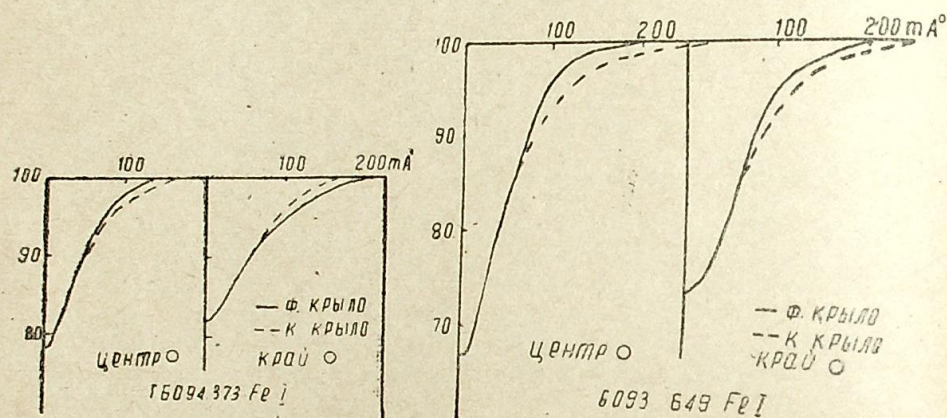


Рис. 6

Рис. 7

Максимальная вспышка асимметрии для разных линий меняется от 1 до 2%, причем наибольшая асимметрия наблюдается в крутой части контура, где глубина порядка 5%. В ряде случаев асимметрия наблюдается даже на уровне полуширины линий. Встречаются случаи, когда наблюдаемая асимметрия на глубине контура порядка 4—5% около непрерывного спектра исчезает. На рис. 1—7 для примера показаны контуры ряда линий, показывающих характерную асимметрию. В таблице мы приводим длины волн, принадлежность, переход, потенциал возбуждения нижнего уровня и характеристику асимметрии контуров исследуемых фраунгоферовых линий. Как и в [7], красную асимметрию обозначили значком +, а фиолетовую значком — в трехбалльной системе. Симметричные контуры отмечены точкой.

До недавнего времени предполагалось, что наблюдаемая красная асимметрия линий обусловлена красным смещением линий вследствие давления. Действительно, ядро и крылья линии эффективно образуются в различных слоях фотосферы, характеризующихся различными газовыми и электронными давлениями. Поскольку ядра линий испытывают меньшее давление, нежели крылья, то крылья линий смещаются больше, чем ядра. Вследствие этого наблюдаемые контуры

λ , Å	Элемент	Переход	E_n	Характер асимметрии	
1	2	3	4	5	6
5238.974	CrI	$a^5F - x^5P^o$	2.70	+	.
5295.315	FeI	$z^5G^o - e^5H$	4.40	+	.
5295.785	TiI	$a^3P - x^3D^o$	1.06	+	— —
5305.816	CrII	$a^4P - z^6D^o$	3.81	++	+
5321.116	FeI	$z^3G - e^3H$	4.42	+++	+
5322.051	FeI	$a^3P - y^3F^o$	2.27	+++	.
5325.560	FeII	$a^4G - z^4F^o$	3.27	.	—
5334.872	CrII	$a^4F - z^4F^o$	4.06	+++	++
5379.584	FeI	$a^1G - z^1H^o$	3.69	++	— — —
5402.780	II	$a^1D - z^1F^o$	1.73	++	.
5425.259	FeII	$a^4G - z^4F^o$	3.19	++	— —
5435.868	NiI	$a^3F - y^3D^o$	1.98	+	.
5560.222	FeI	$z^3G^o - f^3D$	4.42	++	+
5576.101	FeI	$z^5F^o - e^5D$	3.42	+++	++
5578.731	NiI	$a^1D - z^1D^o$	1.67	++	++
5665.563	SiI	$4s^3P^o - 5p^3P$	4.90	++	+
5670.857	VI	$a^4D - z^2G^o$	1.11	++	—
5679.034	FeI	$y^3F^o - f^3F$	4.63	++	.
5693.653	FeI	—	—	+++	++
5805.226	NiI	$y^3F^o - e^1F$	4.45	.	—
5806.766	FeI	$y^3F^o - e^3G$	4.59	—	— — —
5809.228	FeI	$z^3D^o - e^3F$	3.87	+	—
5814.879	FeI	$y^5F^o - d^5D$	4.27	++	— — —
5866.464	TiI	$a^3P - y^3D^o$	1.06	+	.
5867.577	CaI	$4^1P^o - 4^3P^o$	2.90	.	.
6003.027	FeI	$z^3F^o - e^3F$	3.86	+	—
6016.653	MuI	$z^6P^o - e^6S$	3.06	+	—
6024.073	FeI	$y^3F^o - f^5G$	4.53	+	—
6027.064	FeI	$e^3F - v^3G^o$	4.06	+	++
6089.574	FeI	$a^1F - v^1G^o$	5.00	+	— —
6090.216	VI	$a^4D - z^4P^o$	1.08	+	— —
6093.649	FeI	$y^3F^o - f^5P$	4.59	+++	++
6094.373	FeI	$y^3F^o - f^5P$	4.63	+	— —
6108.126	NiI	$a^1G - z^3D$	1.67	.	— —
6111.078	NiI	$y^3F^o - e^3F$	4.07	++	+
6125.032	SiI	$3d^3D - 5f^3D$	5.00	.	— — —
6126.224	TiI	$a^3P - z^3S^o$	1.06	++	— — —
6128.984	NiI	$a^1D^o - z^5D$	1.67	.	++
6130.141	NI	$y^3D^o - f^3D$	4.25	+	—
6149.249	FeII	$a^4D - z^4P^o$	3.87	++	++

1	2	3	4	5	6
6151.623	Fel	$a^5p-y^5p^\circ$	2.17	++	+
6154.230	NaI	$3^2p^\circ-5^2S$	2.09	+	---
6232.665	Fel	$z^5p^\circ-e^5D$	3.64	+	-
6245.628	Scl	$a^5p-z^3D^\circ$	1.50	+	-
6246.333	Fel	$z^5p^\circ-e^5D$	3.59	+	.

могут иметь асимметричный вид. Однако этот механизм не может объяснить величину наблюдаемой асимметрии, особенно изменения ее знака при переходе от ядра к крыльям линий и от центра к краю диска Солнца.

Хиггс [5] считает, что наблюдаемая асимметрия фотосферных линий обусловлена наложением эмиссионных линий хромосферы, которые смещены относительно фотосферных линий. Однако наложение хромосферных эмиссионных линий на линии невозмущенной фотосферы вряд ли может привести к таким величинам асимметрии, которые получаются из наблюдений. Действительно, в частотах слабых линий металлов хромосферу можно считать совершенно прозрачной. Кроме того, указанное наложение не может объяснить изменения знака асимметрии при удалении от центра линии, а также при переходе от центра к краю диска Солнца.

Ольсен [6] считает, что асимметрия фотосферных линий может быть объяснена конвективными движениями. Более или менее удовлетворительное объяснение наблюдаемой асимметрии франгоферовых линий можно получить в том случае, если допустить, что фотосфера Солнца состоит из горячих поднимающихся и холодных опускающихся элементов. Горячие элементы создают сильную линию, смещенную в фиолетовую сторону, а холодные элементы—слабую смещенную в красную сторону. Наблюдаемые контуры являются взвешенной суммой контуров этих двух компонентов.

К некоторым интересным результатам приводит гипотеза Крата [8, 9] и др. о распространении продольных акустических волн в верхних слоях фотосферы, генерируемых конвективными движениями. Согласно этой гипотезе движения частиц в сгущениях акустических волн, соответствующих большей температуре, направлены вверх, а в разрежениях, соответствующих меньшей температуре,—вниз. Следовательно, сгущение частиц создает сильную линию, смещенную в фиолетовую сторону, а разрежение—слабую, смещенную в красную сторону.

Бабий [7] считает, что в случае центра диска Солнца контуры линий должны искажаться совместным действием конвекции и акустических волн. В спектре же края диска мы имеем дело с наиболее верхними слоями фотосферы, где конвективные движения отсутствуют и поэтому контуры линий искажаются только акустическими волнами.

Следует отметить, что фиолетовый и красный компоненты, создаваемые акустическими волнами, смещаются относительно друг друга весьма незначительно. Конвективные же движения дают значительно большее смещение, поэтому в случае центра диска Солнца суммарный контур будет характеризоваться красной асимметрией в крыле и небольшой фиолетовой асимметрией в ядре. В спектре же края диска, где мы не имеем дела с конвективными движениями, ядра фиолето-

вого и красного компонентов практически не смещаются относительно друг друга, далекие же крылья, которые образуются сравнительно глубже, могут незначительно сдвигаться. Поскольку фиолетовый компонент сильнее красного, то, взвешенный суммарный контур будет характеризоваться небольшой фиолетовой асимметрией.

Если далекие крылья линий образуются в наиболее верхних слоях фотосферы, где скорости конвективных движений очень малы, фиолетовый и красный компоненты совершенно не будут сдвигаться относительно друг друга и поэтому суммарный контур будет иметь симметричный вид. Действительно, как видно из таблицы, большинство контуров соответствует меньшим оптическим глубинам, чем у линий, характеризующихся фиолетовой асимметрией.

В работе Бабия [7] и др. для объяснения наблюдаемой асимметрии линий контуры фиолетового и красного компонентов просто суммируются. Однако такое суммирование весьма грубо. В действительности, поскольку оба компонента образуются практически в одних и тех же слоях фотосферы, происходит не простое сложение их контуров, а сложение коэффициентов поглощения. Следовательно, для получения суммарного контура необходимо решить уравнение переноса для обоих компонентов совместно с учетом их сдвига. Наконец отметим, что даже такое грубое сложение контуров фиолетового и красного компонентов не может дать полного объяснения наблюдаемой асимметрии фотосферных линий. Дело в том, что ряд линий в спектре центра диска Солнца показывает фиолетовую асимметрию, которую невозможно объяснить указанными поднимающимися и опускающимися конвективными потоками.

Наблюдаемая асимметрия слабых фраунгоферовых линий, вероятно, частично ответственна за различие коротковолнового и длинноволнового σ компонентов, как по сдвигу (относительно π -компонента), так и по интенсивности. Такое различие было обнаружено недавно Мельниковым и Журавлевым [10]. Разница сдвигов σ_f и σ_k компонентов составляет 3—4 $m\text{Å}$, что вполне достаточно для объяснения наблюдаемой асимметрии фотосферных линий. В указанной работе различие интенсивностей σ компонентов количественно не исследовалось, хотя качественно оно заметно.

Если указанное различие σ компонентов реально, то наблюдаемую асимметрию фраунгоферовых линий можно объяснить следующим образом. В случае, когда сдвиг σ_k компонентов больше, чем сдвиг σ_f компонента, даже при их одинаковой интенсивности суммарный контур будет характеризоваться красной асимметрией в крыле и фиолетовой в ядре. Если к тому же σ_k компонента по интенсивности сильнее, чем σ_f , то величина красной асимметрии еще больше возрастает. Аналогичным образом можно объяснить фиолетовую асимметрию контуров слабых линий, если сдвиг и интенсивность σ_f компонента больше, чем σ_k .

В заключение отметим, что ни один из указанных механизмов не может полностью объяснить сложной картины наблюдаемой асимметрии контуров слабых фраунгоферовых линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minnaert M. Monthly Notices RAS, 107, 274, 1947.
2. Buijs F., Ongerling F. BAN, 389, 374, 1948.
3. Voight H. Zs. Astrophys., 47, 144, 1959.
4. Гасанализаде А. Г. „Солнечные данные“, 1963, № 4.

5. Higgs L. Monthly Notices RAS, 124, 51, 1962.
6. Olsen E. Astrophys. J., 136, 946, 1962.
7. Бабий Б. Т. „Солнечные данные“, 1962, № 12.
8. Крат Б. А. „Изв. ГАО АН СССР“, 22, 169, 1961.
9. Крат Б. А. „Изв. ГАО АН СССР“, 22, 170, 1962.
10. Мельников О. А., Журавлев С. С. Тр. АО ЛГУ 00, 00, 1966.

Ч. М. Гулузаде

Зейф фразунхофер хэтлэри контурларынын асимметриклийи наггында

ХҮЛАСӘ

Күнәш спектринин гырмызы областында сечилмиш 45 зейф вә орта интенсивликли фразунхофер хэтлэринин контурлары өйрәнилмишдир. Мүшәһидә материалы Ленинград Университетинин гүлләли Күнәш телескопунда алынмышдыр. Мүшәһидә спектрографын IV тәркинбіндә апарылмышдыр. Спектрин 6000Å далға областында спектрографын хәтти дисперсиясы 2,88 мм/Å-дыр. Ашкар едилмишдир ки, Күнәш дискинин мәркәзинин спектриндә тәдгиг олуна хэтлэрин әксәрийјәти гырмызы асимметрия кәстәрир. Дискин мәркәзиндән кәнарына кечдикдә бәзи хэтләр үчүн гырмызы асимметрия бәнөвшәји асимметрия илә әвәз олунур, бәзиләринин контурлары исә симметрик олур. Үмүмијәтлә, Күнәш дискинин мәркәзи үчүн гырмызы асимметрия, кәнары үчүн исә бәнөвшәји асимметрия характердир. Мәгаләдә күнәш спектриндә фразунхофер хэтлэринин контурларынын асимметrijасынын сәбәблэри изаһ олунмушдур.

А. Г. ГАСАНАЛИЗАДЕ

К ВОПРОСУ О НОВОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ С РАЗМЕРНОСТЬЮ ДЛИНЫ

Цель настоящей статьи — обратить внимание на некоторые выводы вытекающие из работы [1], посвященной „элементарной длине“ — актуальному вопросу современной теории поля. В работе [1] выведены следующие соотношения и получены численные значения некоторых новых физических величин:

$$\lambda_{\odot} = \frac{G \cdot M_{\odot}}{c^2 \cdot R \cdot R_{\odot}} = 2,02 \cdot 10^{-11} \text{ см}, \quad (1)$$

$$\lambda_{\odot} \cdot m_0 \cdot c = \frac{E_{\odot}^G}{E_i} \cdot h = 0,552 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}, \quad (2)$$

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_{\odot}} = \frac{E_i}{E_{\odot}^G} = 12,00. \quad (3)$$

Здесь G — гравитационная постоянная; c — скорость света; R — постоянная Ридберга; h — постоянная Планка; m_0 — масса покоя электрона; $\lambda_c = h/m_0 c$ — комптоновская длина волны электрона; $E_i = R \cdot h \cdot c$ — энергия ионизации атома водорода с основного состояния; $M_{\odot}$ и $R_{\odot}$ — соответственно, масса и радиус Солнца; $\lambda_{\odot}$ — эйнштейновская величина гравитационного красного смещения (ГКС) границы континуума лямбда-мановской серии водорода в спектре Солнца (новая „элементарная длина“); $E_{\odot}^G = (G m_0 M_{\odot})/R_{\odot} = 1,1334_5 \text{ эв}$ — критическое значение энергии, необходимой для отрыва свободного электрона из статического поля тяготения Солнца.

Очевидно, что полученная новая физическая постоянная („элементарная длина“) $\lambda_{\odot}$ не может отдельно иметь места ни в общей теории относительности (ОТО), ни в нерелятивистской квантовой механике. Необходимо отметить следующие выводы, которые могут явиться косвенным подтверждением универсальности постоянной $\lambda_{\odot}$:

1. Численная величина ($\sim 10^{-11} \text{ см}$) новой постоянной $\lambda_{\odot}$ — это пространственный размер той области, в которой вокруг электрона поляризуется вакуум [2].

Численная величина $0,552 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ приблизительно равна величине спина электрона (точная величина с. э. = $1/2 \hbar = 0,52 \times 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$).

3. Согласно [3, 4, 5], если поляризация вакуума вызывается только частицами (фермионами) со спинами $1/2\hbar$ и зарядом, равным заряду электрона, можно написать следующее соотношение между физическим зарядом e и „внутренним“ („голым“) зарядом электрона e_0 в квантовой электродинамике:

$$e^2 = \frac{e_0^2}{1 + \frac{n \cdot e_0^2}{3\pi \cdot \hbar \cdot c} \cdot \ln \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_g} \right)^2}, \quad (4)$$

где $\hbar = 1/2 \pi \hbar$; $\lambda_g = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$ см — гравитационная длина и

n — неизвестное, названное числом сортов частиц. Однако предполагается [3, 4], что „в настоящее время ничего нельзя сказать относительно количества сортов таких частиц“.

Весьма примечательно, что только при $e_0^2/\hbar c \gg 1$ и $n \approx 12$ физический заряд e совпадает с наблюдаемой величиной заряда электрона [3, 4, 5]. Этот факт, по-видимому, не случаен, поэтому кажется естественным поставить вопрос о том, не являются ли на самом деле в рассматриваемом случае λ_c/λ_g и число n одними и теми же физическими величинами.

Таким образом, фундаментальные принципы ОТО и квантовой теории при совместном рассмотрении (в первом приближении) приводят к важной модификации наших понятий о размерах квантового поля и взаимодействии электростатических и гравитационных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасанализаде А. Г. „Солнечные данные“, 1965, № 7.
2. Блохинцев Б. И. Сб. „Философские проблемы физики элементарных частиц“, М., 1964.
3. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я. „ДАН СССР“, 102, 489, 1955.
4. Landau L. In „Niels Bohr and the Development of Physics“ (ed. Pauli W.), Pergamon, London, p. 52, 1955 (см. перевод: „Нильс Бор и развитие физики“, МИЛ, М., 1958).
5. Dicke R. H. In „Science in Space“ (eds. Berkner Lloyd V. and Odishaw Hugh), Mc Graw-Hill, New-York—London, p. 91, 1961 (см. перевод: „Наука в космосе“ М., 1964).

Ә. Н. Гасанализаде

Узунлуг ваҳиди илэ өлчүлән јени физики сабит мәсәләси
һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә мүүллиф тәрәфиндән алынмыш, индијә гәдәр мә’лум
олмајан јени сабитин физики мә’насындан бәһс едилір.

М. А. БАГИРОВ, Н. В. КЛИМОВА, В. П. МАЛИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИСТИРОЛЬНОЙ ПЛЕНКИ

Полимеры благодаря своим высоким диэлектрическим свойствам широко применяются в электротехнике и радиотехнике. При воздействии электрических полей и разрядов на полимерные диэлектрики в них происходит так называемый процесс электрического старения, следствием которого является ухудшение их диэлектрических свойств. Поэтому изучение влияния электрических полей и разрядов на диэлектрические свойства полимеров представляет практический интерес

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследовалась полистирольная (ПС) пленка толщиной 20 мк, применяющаяся в качестве диэлектрика в конденсаторостроении, которая подвергалась действию высокого напряжения (от 1 до 9 кВ) промышленной частоты в специальной испытательной ячейке, схематически показанной на рис. 1. Пленка прилегалa к металлическому заземленному электроду, а высокое напряжение прикладывалось к металлизированной стеклянной пластинке, являющейся вторым электродом. Испытательную ячейку помещали в эксикатор, где и наблюдали электрическое старение как на воздухе, так и в кислороде или азоте. Для исследования действия продуктов разряда (косвенное строение) в эксикатор помещали вторую пленку, находящуюся вне зоны электрического разряда. После воздействия разряда пленку промывали спиртом и сушили над хлористым кальцием до постоянного веса.

Диэлектрические свойства пленок исследовались в диапазоне от 0,4 до 10 кГц, в области 20—170°С.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Полистирол принадлежит к неполярным полимерам, и наличие у него дипольно-эластических потерь (ДЭП) в данном диапазоне частот обнаруживается примерно в области 110—150°С (температура стеклования 80—100°С) и объясняется небольшой полярностью моновена или наличием примесей, химически связанных с цепью [1].

Нами обнаружено, что при электрических напряжениях, недостаточных для зажигания разряда в воздушном промежутке испытательной ячейки (напряжение зажигания разряда определялось по осциллограмме и вольтамперной характеристике [2] и составляло около

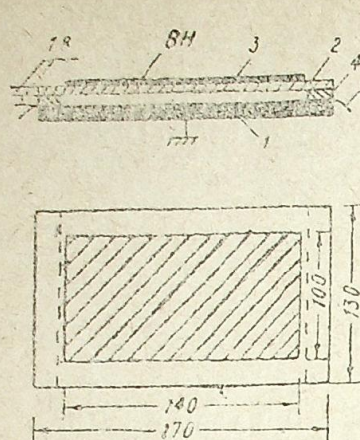


Рис. 1 Испытательная ячейка:
1—металлический электрод;
2—стеклянная пластинка;
3—металлизированный слой;
4—стеклянные прокладки;
5—полимерная пленка;
ВН—подвод высокого напряжения.

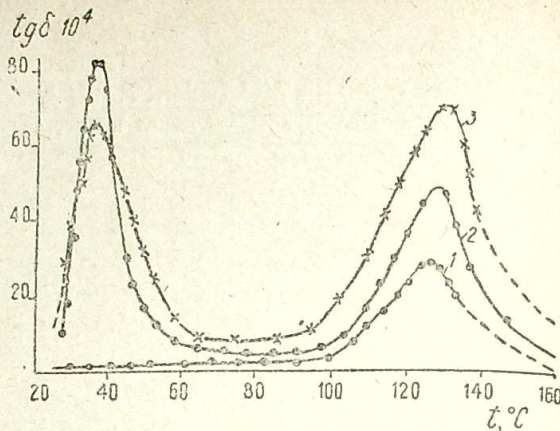


Рис. 2 Зависимость $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$ при $f = 1$ кГц ПС пленки, подвергнутой разрядом при $U_{\text{ст}} = 7$ кВ, $t_{\text{ст}} = 70^\circ\text{C}$, $T_{\text{ст}} = 5$ часов:
1— $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$ исходной пленки;
2— $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$ при косвенном влиянии разряда;
3— $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$ при прямом действии разряда.

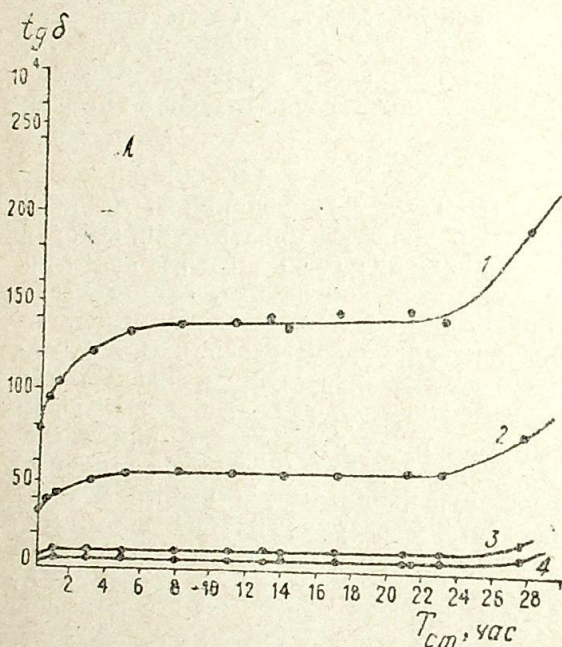


Рис. 3 Зависимость $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ дипольно-эластических потерь ПС пленки в зависимости от времени экспозиции пленки $T_{\text{ст}}$ при

$U_{\text{ст}} = 7$ кВ и $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$:

- 1— $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП при $f = 0,4$ кГц;
2— $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП при $f = 1$ кГц;
3— $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП при $f = 5$ кГц;
4— $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП при $f = 10$ кГц.

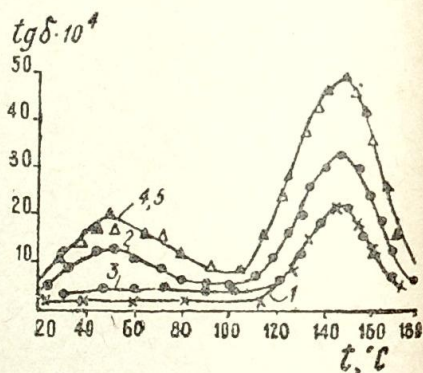


Рис. 4 Зависимость $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$ при $f = 1$ кГц ПС пленки, подвергнутой действию разряда при $U_{\text{ст}} = 9$ кВ, $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$, $T_{\text{ст}} = 54$ часов в различных средах:
1—исходная пленка;
2—при прямом действии разряда в азоте;
3—при косвенном действии разряда в азоте;
4 и 5—при прямом и косвенном действии разряда в кислороде.

6 кВ), изменений диэлектрических свойств пленки не происходит. При наличии же электрического разряда в воздушном зазоре ячейки в температурно-частотной зависимости $\operatorname{tg} \delta$ пленки наблюдалось появление новой области потерь в интервале $30-80^\circ\text{C}$ и увеличение ДЭП (рис. 2). Следует отметить, что при увеличении частоты измерения величина диэлектрических потерь уменьшалась. Новая область потерь не имеет релаксационного характера (т. е. она не обусловлена изменениями химической структуры ПС) и сильно зависит от степени промывки поверхности пленки. Вероятно, ее появление следует приписать возникновению низкомолекулярных соединений при разрушении поверхности пленки разрядами. В силу этого в качестве параметра, характеризующего старение ПС пленки были взяты ДЭП.

На рис. 3 показана зависимость $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП от времени воздействия электрического разряда, которую можно разделить на три участка: 1) замедляющегося роста, 2) насыщения, 3) быстрого роста (кончающийся пробоем). С повышением напряжения или температуры, при которых происходит старение пленки, $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП увеличивается, при этом область насыщения охватывает все меньший интервал времени. Энергия активации ДЭП подсчитывается по известной формуле

$$\lg f_m = \lg f_0 - \frac{\Delta U}{2,303 RT_{\text{max}}},$$

где T_{max} , f_{max} — соответственно, абсолютная температура и частота $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ ДЭП;

R — газовая постоянная ≈ 2 ккал/моль;

ΔU — энергия активации.

Энергия активации при воздействии электрического разряда существенно не изменялась и составляла примерно 90 ккал/моль. Это означает, что процессы, вызывающие увеличение ДЭП, не охватывают весь образец и не вызывают существенных изменений химической структуры. В то же время $\operatorname{tg} \delta_{\text{max}}$ смещается в сторону более высоких температур. Это смещение означает увеличение времени релаксации сегментов макромолекулы, т. е. уменьшение их подвижности. По аналогии с [3] это смещение можно объяснить либо повышением концентрации полярных групп в полимерной цепи, т. е. увеличением внутри- и межмолекулярных взаимодействий, либо [4] сшиванием макромолекул, которое также может уменьшать подвижность сегментов. О процессе сшивания свидетельствует и образование нерастворимого осадка — геля. Исходная ПС пленка практически растворяется почти во всех органических растворителях, но пленка, подвергшаяся действию электрического разряда в присутствии кислорода, дает белый нитевидный осадок — гель. Отсутствие геля при старении ПС пленки в азоте свидетельствует о том, что сшивание происходит через кислородсодержащие соединения.

На рис. 4 представлена зависимость $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ\text{C})$ при $f_{\text{изм}} = 1$ кГц для ПС пленок, подвергшихся как прямому, так и косвенному действию разряда в кислороде и азоте. Воздействие электрического разряда в кислороде (как прямое, так и косвенное) приводит к значительному увеличению как ДЭП, так и области низкотемпературных потерь (НТП) в интервале от 30 до 80°C , в то время как прямое воздействие разряда в азоте приводит лишь к небольшому увеличению указанных параметров в этих областях, косвенное воздействие практически не изменяет зависимости $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ\text{C})$. Это означает, что основной вклад в изменение диэлектрических потерь вносят кислородсодержащие соединения, образующиеся в результате окисления поверхности пленки озоном. Действительно, инфракрасные спектры по-

казали значительное увеличение кислородсодержащих соединений после воздействия электрического разряда в присутствии кислорода.

Незначительное увеличение диэлектрических потерь при прямом воздействии электрического разряда в азоте может быть объяснено как наличием некоторого количества кислорода в порах самой пленки, так и образованием при разряде в азоте долго живущих радикалов, способных окисляться при внесении пленки в кислородсодержащую атмосферу. Наличие таких радикалов было обнаружено Стюартом методом ЭПР [5].

С учетом основной роли озона в изменении диэлектрических потерь ПС пленки можно объяснить зависимость $\lg \delta_{\text{max}}$ ДЭП следующим образом. При возникновении разряда в воздушном зазоре образующиеся озон и окислы азота взаимодействуют с основными цепями полимера, вызывая рост ДЭП. Скорость окисления полимера постепенно уменьшается из-за существования другого, одновременно протекающего процесса—разрушения пленки [6], т. е. разрушения и окисленного слоя. Наконец, когда для данной концентрации озона процессы окисления и разрушения поверхности ПС пленки находятся в динамическом равновесии, наступает насыщение.

Можно считать, что изменение диэлектрических потерь ПС пленки является в основном химическим процессом; в то же время протекает и физический процесс—развитие в полимере канала пробоя. Согласно [6] этот пробой имеет древовидный характер, т. е. наличие дефекта в поверхности вызывает частичный пробой, который затем прогрессирует вглубь в виде тонкого разветвляющегося древовидного канала пробоя. При каждом импульсе разряда увеличивается напряженность в головке древовидного канала пробоя, благодаря чему он продвигается вглубь полимера, пока не произойдет полный пробой. Таким образом, развитие канала пробоя вызывает как разрыхление структуры полимера, так и увеличение поверхности, способной к окислению. Эти два явления и обуславливают участок быстрого роста ДЭП, кончающийся пробоем полимера. В отличие от диэлектрических потерь диэлектрическая проницаемость (ϵ) меняется незначительно. Можно отметить лишь небольшое возрастание ϵ с увеличением напряжения старения.

Выводы

1. Изменение диэлектрических потерь ПС пленки происходит в основном за счет окисления поверхности пленки озоном и окислами азота, образующимися в результате электрического разряда в воздушных промежутках.
2. При действии электрического разряда в присутствии кислорода в ПС пленке наблюдается появление новой области потерь в интервале 20—60°С и увеличение ДЭП. Новая область потерь не имеет релаксационного характера и обусловлена низкомолекулярными соединениями, образующимися за счет разрушения поверхности пленки.
3. Энергия активации ДЭП при воздействии электрического разряда существенно не изменяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Broens O., Müller F. H. Kolloid. Zs., 140 121, 1957.
2. Филиппов Ю. В., Емельянов Ю. П. "Ж. физ. химии", 32, 2817, 1958.
3. Михайлов Г. П., Борисова Г. И. Высокомолекулярные соединения 2, 1772, (1960.)
4. Schmieder K., Woelf K. Kolloid. Zs., 134, 2, 1953.
5. Stuart H. Nature (Engl.). 199, 59, 1963.
6. Olyphant M. Insulation USA, 9, 42, 1933.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, В. Я. ШТЕЙНШРАЙБЕР

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЦИЛИНДР В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ С ОБЪЕМНЫМ ЗАРЯДОМ

Вопрос о зарядке диэлектрических частиц в поле униполярной короны может представлять интерес для понимания явлений, связанных с поведением частиц в электрическом поле. Выражение для зарядки диэлектрической сферы выведено при условии, что из-за вращения сферы поверхностная плотность осевшего заряда постоянна по всей поверхности сферы [1]. Однако представляет интерес выяснение роли вращения в процессе зарядки диэлектрических частиц. Ввиду трудностей расчетного порядка нами рассмотрена задача не о зарядке сферы, а о зарядке диэлектрического цилиндра, ось которого перпендикулярна направлению электрического поля. Полученные результаты могут служить для качественного описания поведения реальных диэлектрических частиц.

Неподвижный цилиндр. Рассмотрим зарядку цилиндра в поле, содержащем положительный объемный заряд. Как известно, уравнение, описывающее процесс зарядки, имеет вид

$$\frac{\partial \sigma(\theta, t)}{\partial t} = \begin{cases} \rho \kappa E_n(\theta, t), & \text{если } E_n > 0, \\ 0, & \text{если } E_n < 0. \end{cases}$$

Здесь $\sigma(\theta, t)$ —плотность осевших на поверхность цилиндра зарядов к моменту времени t ; $E_n(\theta, t)$ —нормальная составляющая суммарной напряженности поля на его внешней поверхности; ρ —объемная плотность заряда в окружающем цилиндр пространстве; κ —подвижность ионов; θ —полярный угол (полярная ось направлена против поля; за положительное принято направление внутренней нормали).

Поле $E_n(\theta, t)$ равно сумме двух полей: поля E'_n при отсутствии осевших зарядов и поля E''_n , обусловленного осевшими зарядами. Нормальная составляющая поля на внешней поверхности цилиндра, помещенного во внешнее однородное поле E_0 , равна [2]

$$E'_{cn} = \frac{2\epsilon}{\epsilon + \epsilon_1} E_0 \cos \theta, \quad (2)$$

где ϵ и ϵ_1 —относительные диэлектрические проницаемости цилиндра и внешней среды.

Незаряженный диэлектрический цилиндр радиуса a и помещенный параллельно его оси линейный заряд плотностью q на единицу длины создают поле, напряженность которого внутри цилиндра совпа-

дает с напряженностью поля в отсутствие цилиндра при замене линейного заряда q на $q'' = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} q$ [2]. Нормальная составляющая этого

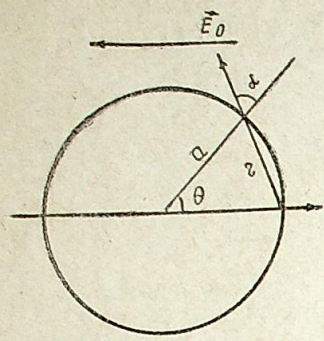


Рис. 4

поля на внутренней поверхности цилиндра, когда заряд q лежит на поверхности при $\theta = 0$, равна (рис. 1)

$$E_{in} = -\frac{q''}{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 r} \cos \alpha = -\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon + \varepsilon_1} \cdot \frac{q}{a} \quad (3)$$

Из условия $\varepsilon E_{in} = \varepsilon_1 E_{en}$ находим

$$E_{en} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)} \cdot \frac{q}{a} \quad (4)$$

Таким образом, нормальная составляющая поля, создаваемого в данной точке поверхности цилиндра линейным зарядом, лежащим на его поверхности, не зависит от расположения заряда (прямая, вдоль которой расположен заряд, исключается из рассмотрения). При произвольном распределении $\sigma(\theta)$ заряда по поверхности цилиндра напряженность поля E_{en} будет складываться из (4) (с зарядом $q = \int \sigma(\theta) \cdot a d\theta$)

и выражения $-\frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_1)}$, учитывающего поле поверхностных зарядов, расположенных в непосредственной близости рассматриваемой точки [2].

Уравнение зарядки приобретает вид

$$\frac{1}{\rho\kappa} \cdot \frac{\partial \sigma(\theta, t)}{\partial t} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} E_0 \cos \theta - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1(\varepsilon + \varepsilon_1)} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sigma(\theta, t) d\theta - \frac{\sigma(\theta, t)}{\varepsilon_0(\varepsilon + \varepsilon_1)} \quad (5)$$

если правая часть (5) положительна, или при обозначениях

$$\frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)\sigma}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\varepsilon} = y, \quad \frac{\rho\kappa t}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} = \tau, \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \lambda, \quad (6)$$

$$\frac{\partial y(\theta, \tau)}{\partial \tau} = \cos \theta - \frac{\lambda}{\lambda + 1} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} y(\theta, \tau) d\theta - \frac{2\pi}{\lambda + 1} y(\theta, \tau). \quad (7)$$

Если правая часть (7) отрицательна, то $\frac{\partial y(\theta, \tau)}{\partial \tau} = 0$.

Уравнение (7) с начальным условием $y(\theta, 0) = 0$ решалось численно методом Эйлера для $\lambda = 2; 3; 5; 10$.

Выбрав по τ достаточно малый шаг h , будем иметь последовательно

$$y'(\theta, 0) = y'_0 = \cos \theta; \\ y(\theta, h) = y_1 = y_0 + h y'_0 = h \cos \theta.$$

Обозначив относительный заряд через

$$q = \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0\varepsilon E_0 a}, \quad (8)$$

где Q — истинный осевший заряд, для относительного заряда q , осевшего на этом шаге, получим выражение

$$\Delta q_1 = h \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} y'_0 d\theta = 2h.$$

Суммарный заряд

$$q_1 = q_0 + \Delta q_1 = \Delta q_1.$$

Далее

$$y'_1 = \left(1 - \frac{2\pi h}{\lambda + 1}\right) \cos \theta - \frac{2\lambda h}{\lambda + 1},$$

причем в дальнейшем будет заряжаться лишь область, удовлетворяющая соотношению

$$\cos \theta \geq \cos \theta_1 = \frac{2\lambda h}{\lambda + 1 - 2\pi h},$$

при соблюдении которого правая часть (7) на этом шаге остается положительной. Затем находим

$$\Delta q_2 = h \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} y'_1 d\theta,$$

$$q_2 = q_1 + \Delta q_2 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что на i -ом шаге

$$y_i = A_i \cos \theta - B_i,$$

$$y'_i = C_i \cos \theta - D_i.$$

Для величин $A_i, B_i, C_i, D_i, q_i, \Delta q_i, \theta_i$ нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения:

$$\Delta q_{i+1} = 2h(C_i \sin \theta_i - D_i \theta_i),$$

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_{i+1},$$

$$A_{i+1} = A_i + h C_i,$$

$$B_{i+1} = B_i + h D_i$$

(9)

$$C_{i+1} = 1 - \frac{2\pi}{\lambda + 1} A_{i+1},$$

$$D_{i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} q_{i+1} - \frac{2\pi}{\lambda + 1} B_{i+1},$$

$$\theta_{i+1} = \arccos \frac{D_{i+1}}{C_{i+1}}.$$

Алгоритм (9) начальными условиями

$$\Delta q_0 = 0; q_0 = 0; A_0 = 0; B_0 = 0; C_0 = 1; D_0 = 0; \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

был реализован на ЦВМ.

Результаты расчета для $\lambda = 2; 3; 5$ и 10 представлены на рис. 2 сплошными линиями (зависимость q от τ) и на рис. 3 (зависимость y

от $\cos \theta$). Как видно из последнего рисунка, распределение заряда по поверхности, вопреки утверждению [3], не является линейным.

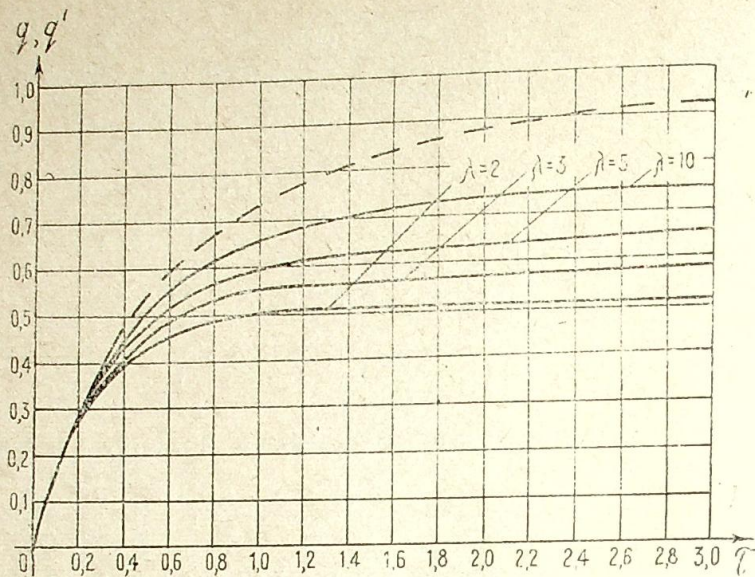


Рис. 2

Вращающийся цилиндр. Полагая, что из-за вращения, связанного с действием поля на осевые заряды, поверхностная плотность

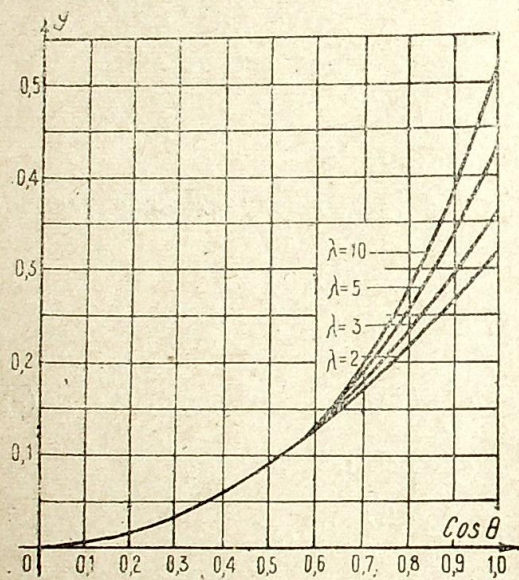


Рис. 3

их постоянна по всей поверхности цилиндра, можно написать выражение для нормальной составляющей поля, при наличии осевого заряда Q' на единицу длины, в виде

$$E_n = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} \cdot 2E_0 \cos \theta - \frac{Q'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a} \quad (11)$$

Уравнение зарядки удобно записать в виде

$$\frac{dQ'(t)}{dt} = \rho\kappa \int E_n(\theta, t) dS, \quad (12)$$

причем интегрирование проводится по всей области, где $E_n > 0$. В момент времени t эта область определяется неравенством, вытекающим из (11):

$$\theta < \theta_{lim} = \arccos \frac{(\varepsilon + \varepsilon_1)Q'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon E_0 a} \quad (13)$$

Зарядка прекратится, когда θ_{lim} станет равным нулю, откуда

$$Q'_{max} = 4\pi\varepsilon_0 a E_0 \cdot \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} \quad (14)$$

Используя (11), (6) и (8), перепишем уравнение (12) в виде

$$\frac{dq'}{d\tau} = \int_{-\theta_{lim}}^{+\theta_{lim}} (\cos \theta - q') d\theta. \quad (15)$$

С учетом (13) после интегрирования по θ получим

$$\frac{dq'}{d\tau} = 2(V\sqrt{1-q'^2} - q' \arccos q'). \quad (16)$$

Решение этого уравнения с начальным условием $q'(0) = 0$:

$$\tau(q') = \frac{1}{2} \int_0^{q'} \frac{dx}{V\sqrt{1-x^2} - x \arccos x} \quad (17)$$

описывает динамику зарядки вращающегося цилиндра. Интеграл (17) рассчитывался численно. График функции $q'(\tau)$ представлен на рис. 2 пунктиром. Результаты показывают, что при всех λ неподвижный цилиндр заряжается до меньшего предельного заряда, чем вращающийся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reiffay R. Сб. „Применение сил электрического поля в промышленности и сельском хозяйстве“. М., 1964.
2. Смайт. „Электростатика и электродинамика“. М., 1954.
3. Pech J. Elektrotechnicky Časopis, XIII, 1962, číslo 4.

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Т. А. ЗАИРОВА

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАБОТЕ ТРЕХФАЗНОГО ПОЛУУПРАВЛЯЕМОГО ВЫПРЯМИТЕЛЯ ПРИ НАГРУЗКЕ НА ДВИГАТЕЛЬ

Одной из важнейших проблем в области регулируемого электропривода постоянного тока является дальнейшая работа по разработке, исследованию и внедрению регулируемого постоянного тока с использованием статических преобразователей на базе тиристоров. Из большого числа разновидностей схем преобразователей почти универсальной является трехфазная мостовая схема, которая позволяет применять тиристоры, имеющие в настоящее время низкие значения напряжения переключения и обратного напряжения. Применение трехфазной симметричной схемы выпрямителя оправдано либо при проектировании реверсивных приводов, либо когда необходимо обеспечить инверторный режим. В случае неререверсивного электропривода целесообразнее применение несимметричной, полууправляемой схемы, позволяющей уменьшить число управляемых вентилей и таким образом удешевить установку и упростить схему устройства управления.

Ранее опубликованные работы [1, 2] посвящены исследованию режимов симметричного трехфазного выпрямителя на нагрузку с противо-эдс, но возникает необходимость в исследовании работы полууправляемого трехфазного выпрямителя, имеющего свои особенности. Существует много методов, каждый из которых имеет свою область применения, но широкое внедрение тиристоров требует совершенствования методов расчета установившихся и переходных процессов. В последнее время успешно развивается новое направление в области исследования, основанное на методе использования уравнений в конечных разностях, развитом в теории импульсных систем [3]. Разностное уравнение при этом содержит только дискретные значения тока в моменты коммутации. Этот метод применен и для системы, представленной на рис. 1. Анализ системы проводится при следующих допущениях.

1. Не учитываются сопротивления на стороне переменного тока и перекрытие анодов, т. е. считаем, что вентиль, выходящий из работы, размыкает свою цепь мгновенно, в момент поступления управляющего импульса на вентиль, входящий в работу.

2. Считаем вентили идеальными и падение напряжения на них принимаем постоянным ($E_B = \text{const}$).

3. Не учитывается изменение скорости вращения в течение интервала повторяемости.

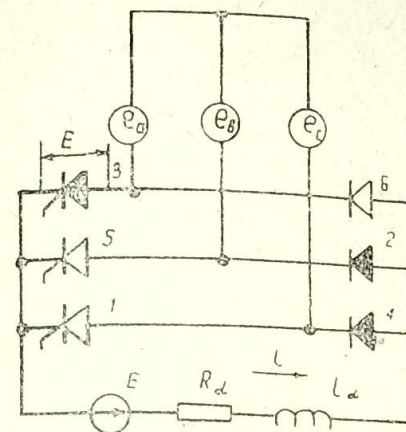


Рис. 1.

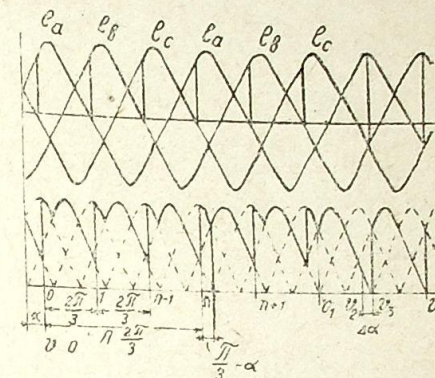


Рис. 2

Целью анализа является исследование переходных процессов в вышеуказанной системе, обусловленных изменением угла регулирования и амплитуд трехфазной системы э. д. с.: e_a, e_b, e_c от E_m до E_m при сохранении непрерывности выпрямленного тока. В интервале $n \frac{2\pi}{3} \leq v \leq (n+1) \frac{2\pi}{3}$ (рис. 2) имеются две части, в каждой из которых горят определенные вентили, например, 2 и 3—в первой части 3 и 4—во второй.

Проходя по контуру через вентили 2 и 3, получаем дифференциальное уравнение цепи:

$$\omega L \frac{di}{dv} + Ri + E + 2E_B = e_c - e_a, \quad (1)$$

где

$$e_c - e_a = e(n) = \sqrt{3} E_m \cos \left(v + \alpha - \frac{\pi}{6} - n \frac{2\pi}{3} \right).$$

Анализ проводится в относительных единицах:

$$\varepsilon = \frac{E + 2E_B}{E_m}; \quad j = \frac{iR}{E_m}; \quad \tau = \frac{\omega L}{R} = \text{tg} \varphi. \quad (2)$$

Тогда с учетом (2) получим

$$\tau \frac{dj}{dv} + j = \sqrt{3} \cos \left(v + \alpha - \frac{\pi}{6} - n \frac{2\pi}{3} \right) - \varepsilon. \quad (3)$$

Выпрямленный ток в интервале

$$n \frac{2\pi}{3} \leq v \leq n \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \alpha$$

и при условии, что при $v = n \frac{2\pi}{3}$, $j = j[n]$ будет

$$j = \sqrt{3} \cos \varphi \left[\cos \left(v + \alpha - \frac{\pi}{6} - n \frac{2\pi}{3} \right) - \right.$$

$$-\cos\left(\alpha - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) e^{-\left(v-n\frac{2\pi}{3}\right)\text{ctg}\varphi} + \varepsilon \left(e^{-\left(v-n\frac{2\pi}{3}\right)\text{ctg}\varphi} - 1 \right) + j[n] e^{-\left(v-n\frac{2\pi}{3}\right)\text{ctg}\varphi} \quad (4)$$

В интервале $n\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \alpha \leq v \leq (n+1)\frac{2\pi}{3}$ горят вентили 3 и 4. Исходя из условия, что при $v = (n+1)\frac{2\pi}{3}$ $j = j[n+1]$, находим выпрямленный ток во второй части промежутка:

$$j = \sqrt{3} \cos \varphi \left[\cos\left(v + \alpha - \varphi - \frac{\pi}{2} - n\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{6}\right) e^{-\left[v-(n+1)\frac{2\pi}{3}\right]\text{ctg}\varphi} + \varepsilon \left(e^{-\left[v-(n+1)\frac{2\pi}{3}\right]\text{ctg}\varphi} - 1 \right) + j[n+1] e^{-\left[v-(n+1)\frac{2\pi}{3}\right]\text{ctg}\varphi} \right] \quad (5)$$

Стыкуем участки кривой выпрямленного тока на границе обеих частей промежутка. Подставив в (4) и (5)

$$v = n\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \alpha$$

и приравняв значения тока, получим разностное уравнение:

$$j[n+1] - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} j[n] = \sqrt{3} \cos \varphi \left[\sin \varphi e^{-\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\text{ctg}\varphi} - \cos\left(\alpha - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} + \cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right] - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right). \quad (6)$$

Полученное разностное уравнение решаем с помощью дискретного преобразования Лапласа. Пусть

$$D\{j[n]\} = J^*(q),$$

тогда на основании теорем линейности и сдвига

$$D\{j[n+1]\} = e^q [J^*(q) - j(0)].$$

Принимая во внимание эти соответствия и начальное условие $j(0) = j_0$, представляем уравнение (6) относительно изображений в виде:

$$e^q J^*(q) - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} J^*(q) = R \frac{e^q}{e^q - 1} + e^q j_0; \quad (7)$$

$$R = \sqrt{3} \cos \varphi \left[\sin \varphi e^{-\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\text{ctg}\varphi} - \cos\left(\alpha - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} + \cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{6}\right) - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right) \right]. \quad (8)$$

Решая (7) относительно $J^*(q)$, находим.

$$J^*(q) = \frac{Re^q}{(e^q - 1) \left(e^q - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right)} + j_0 \frac{e^q}{\left(e^q - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right)} \quad (9)$$

Переходя от изображений к оригиналам, получим

$$j[n] = R \frac{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi}} + j_0 e^{-n\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \quad (10)$$

Выражение (10) представляет собой решетчатую функцию и позволяет рассчитать дискретные значения выпрямленного тока в любой момент времени при $n = 1, 2, 3 \dots$. Мгновенные значения выпрямленного тока для установившегося режима находятся из (6) при $j[n] = j[n+1]$, т. е.

$$j_{\text{уст}} = \frac{\sqrt{3} \cos \varphi \left[\sin \varphi e^{-\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\text{ctg}\varphi} - \cos\left(\alpha - \varphi - \frac{\pi}{6}\right) e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} + \cos\left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{6}\right) \right]}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi}} \quad (11)$$

Сравнивая (11) и (8), получим

$$j_{\text{уст}} = \frac{R}{1 - e^{-\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi}} \quad (12)$$

Тогда уравнение (10) примет вид

$$j[n] = j_{\text{уст}} \left(1 - e^{-n\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right) + j_0 e^{-n\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} = j_0 + (j_{\text{уст}} - j_0) \left(1 - e^{-n\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right). \quad (13)$$

По этому уравнению можно рассчитать переходные процессы, вызванные изменением угла регулирования α , и э. д. с. при условии сохранения непрерывности выпрямленного тока.

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ АМПЛИТУД ТРЕХФАЗНОЙ Э. Д. С.

Допустим, что переходный процесс вызван изменением э. д. с. питающей сети и возмущение совпадает с началом очередного интервала времени. В уравнении (13) начальное значение тока j_0 обозначим как $j'_{\text{уст}}$, а установившийся ток после окончания переходного процесса, связанного с изменением амплитуды фазной э. д. с., через $j_{\text{уст}}$. Тогда уравнение (13), определяющее значение выпрямленного тока в переходном процессе, примет вид

$$j[n] = j'_{\text{уст}} + (j_{\text{уст}} - j'_{\text{уст}}) \left(1 - e^{-n\frac{2\pi}{3}\text{ctg}\varphi} \right). \quad (14)$$

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ УГЛА РЕГУЛИРОВАНИЯ α

Допустим, что увеличение угла произошло в промежутке $v_1 v_2$ (рис. 2), поэтому очередной импульс возник не в момент v_2 а со сдвигом на $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$, т. е. в момент v_3 . В промежутке $v_2 v_3$ ток проводят те же вентили 3 и 4, а мгновенное значение тока, рассчитанное по уравнению (5), имеет вид

$$j_0 = \sqrt{3} \cos \varphi \left[\cos \left(\alpha' - \varphi + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\alpha - \varphi + \frac{\pi}{6} \right) e^{-\Delta\alpha \operatorname{ctg} \varphi} + \varepsilon (e^{-\Delta\alpha \operatorname{ctg} \varphi} - 1) + j_{уст} e^{-\Delta\alpha \operatorname{ctg} \varphi} \right];$$

здесь j_0 — начальный ток для последующего переходного процесса с новым значением угла регулирования α' .

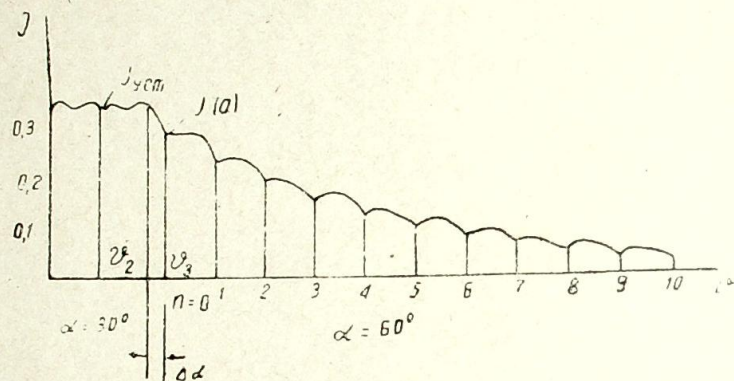


Рис. 3

Установившийся ток после окончания переходного процесса, связанного с изменением угла регулирования обозначим через $j_{уст}$ и уравнение (13) примет вид

$$j[n] = j_0 + (j_{уст} - j_0) \left(1 - e^{-n \frac{2\pi}{3} \operatorname{ctg} \varphi} \right). \quad (16)$$

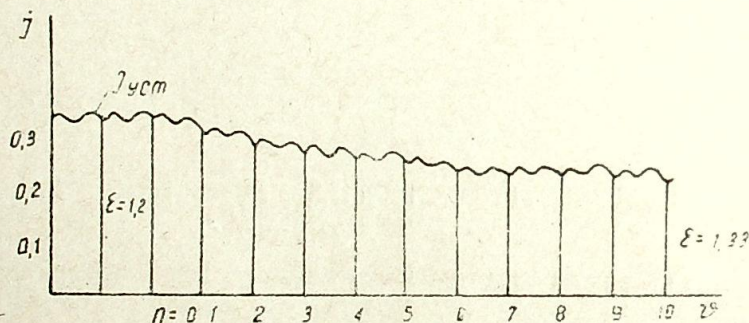


Рис. 4

На рис. 3 изображена кривая выпрямленного тока при переходном процессе, вызванном увеличением угла регулирования от $\alpha = 30^\circ$ до $\alpha' = 60^\circ$ при $\varepsilon = 1.2$ и $\operatorname{ctg} \varphi = 0.1$, а на рис. 4 — кривая выпрямленного тока при переходном процессе, вызванном изменением амплитуды фазной э. д. с. от $E_m = 28$ в до $E_m = 74$ в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поссе А. В. Изв. АН СССР, энергетика и транспорт, 1, 1964.
2. Емельянов В. И. Изв. НИИПТ, т. 8, 1961.
3. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. М., 1958.

А. Э. Эфендизаде, Т. А. Заирова

Мүһәрриклә жүкләнмиш үчфазлы жарытәнзимләнән дүзләндиричидә кечид просесләринин һесабы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә «жарытәнзимләнән үчфазлы дүзләндиричи-мүһәррик» системиндә кечид просесинин фәрг тәнликләри методу илә һесапланмасынын бир үсулу шәрһ едилмишдир.

Практикада кениш тәтбиг олунмасына вә һәмчинин, гејри-реверсив интигал үчүн әһәмијјәтинә бахмајараг, жарытәнзимләнән үчфазлы схемин тәдгиги бу вахта гәдәр демәк олар ки, ајдынлашдырылмамышдыр.

Бу тәдгигатда әсас мәгсәд бәсләјичи шәбәкәнин ЕНГ-си вә тәнзим бучағынын дәјишмәси баш верән системдә кечид просесини һесабламагдан ибарәтдир. Фәрг тәнлији Лапласын дискрет чеврилмәләр методу илә һәлл олунмуш вә дүзләндирилмиш чәрәјанын истәнилән андакы гијмәтинин дискрет кәмијјәти алынмышдыр.

Әкәр $n = 1, 2, 3, \dots$ исә

$$j[n] = j_0 + (j_{уст} - j_0) \left(1 - e^{-n \frac{2\pi}{3} \operatorname{ctg} \varphi} \right) \text{ -дыр.}$$

Бурада j_0 — чәрәјанын башланғыч гијмәти, $j_{уст}$ — кечид просеси гуртардыгдан сонра гәрарлашмыш чәрәјандыр.

Алынмыш тәнликләрдән ЕНГ-си дәјишән заман вә һәмчинин, дүзләндиричи гошуларкән баш верән кечид просесләринин тәдгиги үчүн истифадә едилә биләр.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, А. М. МУРАДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С ПОМОЩЬЮ МОДИФИЦИРОВАННЫХ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В статье рассматриваются электрические цепи с линейными и нелинейными элементами применительно к блочной электропередаче. Исходим из общественных уравнений ЛЭП в частных производных:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = ri + L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = gu + C \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2)$$

Приведем уравнения (1) и (2) к операторному по двум переменным (x, t) , с учетом ненулевых, начальных и граничных условий [1]:

$$U(p, s) = \frac{sU(p, 0) - (r + pL)I(p, 0) - C(r + pL)U(0, s) + Lsi(0, s)}{s^2 - \gamma^2}, \quad (3)$$

$$I(p, s) = \frac{sI(p, 0) - (g + pC)U(p, 0) - L(g + pC)i(0, s) + Csu(0, s)}{s^2 - \gamma^2}, \quad (4)$$

где $u(0, s)$, $i(0, s)$ — напряжение и ток при $t = 0$ и $0 \leq x \leq l$;
 $U(p, 0)$, $I(p, 0)$ — напряжение и ток при $x = 0$ и $0 \leq t \leq \infty$.
Переходя от s -к x -преобразованию, получим

$$U(p, x) = \operatorname{ch} \gamma x U(p, 0) - z_c I(p, 0) \operatorname{sh} \gamma x - \\ - \sqrt{LC} \int_0^x \operatorname{sh} \gamma (x - y) u(0, y) dy + L \int_0^x \operatorname{ch} \gamma (x - y) i(0, y) dy, \quad (5)$$

$$I(p, x) = I(p, 0) \operatorname{ch} \gamma x - \frac{U(p, 0)}{z_c} \operatorname{sh} \gamma x - \\ - \sqrt{LC} \int_0^x \operatorname{sh} \gamma (x - y) i(0, y) dy + C \int_0^x \operatorname{ch} \gamma (x - y) u(0, y) dy, \quad (6)$$

где $z_c = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$ и $\gamma = \sqrt{(r + pL)(g + pC)}$.

Уравнения (5) и (6) могут быть использованы как для линии с потерями, так и для линии без потерь. Для некоторого упрощения задачи применим (5) и (6) для линий без потерь. Тогда, умножая (6) на z_c , складывая с (5) и вычитывая из (5), будем иметь

$$U(p, x) + z_c I(p, x) = e^{-\gamma x} [U(p, 0) + z_c I(p, 0)] + \\ + \sqrt{LC} \int_0^x e^{-\gamma(x-y)} [u(0, y) + z_c i(0, y)] dy, \quad (7)$$

$$U(p, x) - z_c I(p, x) = e^{\gamma x} [U(p, 0) - z_c I(p, 0)] + \\ + \sqrt{LC} \int_0^x [u(0, y) - z_c i(0, y)] e^{\gamma(x-y)} dy. \quad (8)$$

Полученные уравнения содержат все начальные и граничные условия и являются полным решением (1) и (2) в операторной форме по разованию. При переходе к оригиналу t будем пользоваться z -преоб-

В (7) и (8) содержатся члены $e^{\mp \gamma \sqrt{LC} x}$ и p , поэтому при обратном преобразовании этих уравнений появятся члены, соответствующие переходному и установившимся процессам. Обычно эти составляющие содержат бесконечные сходящиеся тригонометрические ряды, что усложняет расчет. Однако можно обойтись применением модифицированного z -преобразования, что дает возможность решать задачу не в виде бесконечного ряда, а в замкнутой форме. Связь между z -преобразованием и непрерывной функцией может быть установлена из рассмотрения импульсных систем. Из определения импульсных систем ясно, что информация, получаемая системой, дискретна и поступает в нее через равные промежутки времени.

Процесс квантования по времени производится импульсным элементом, который преобразует непрерывную информацию в дискретную и выдает последовательность импульсов на вход систем [2]. Аналитически дискретная функция на выходе импульсного элемента может быть записана в виде

$$e_T(t) = e(t) \cdot \delta_T(t), \quad (9)$$

где дельта-функции $\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ представляют собой последовательность единичных импульсов.

Существуют различные методы преобразования входного сигнала

$$e_T(t) = e(t) \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT). \quad (10)$$

Применяя z -преобразования к (9) и (10), получим

$$z[c_T(t)] = z[e(t) \cdot \delta_T(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) e^{-pTn} = \\ = \left[\sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n} \right]_{z=e^{pT}} = E_T(z). \quad (11)$$

При подаче на вход импульсного элемента синусоидального напряжения

$$e(nT) = E_{\text{макс}} \cdot \sin \omega T n,$$

при этом из (11) имеем

$$E_T(z) = E_{\text{макс}} \frac{z \sin \omega T}{z - 2z \cos \omega T + 1}. \quad (12)$$

Исходя из эквивалентности обратного преобразования Лапласа (L^{-1}) и обратного модифицированного z -преобразования (z_m^{-1}), можно написать

$$e(t) = z_m^{-1} [E(z, m)] = L^{-1} [E(p)],$$

где $t = (n-1+m)T$, $m = (0 \div 1)$, — малый параметр из интервалов $n = 0, 1, 2, 3 \dots$; применяя к уравнениям (7) и (8) модифицированное z -преобразование, получаем

$$U(z, m, \delta) + \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, \delta) = z^{-\delta} \left[U(z, m, 0) + \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, 0) \right] + F_1(z, m, \delta), \quad (13)$$

$$U(z, m, \delta) - \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, \delta) = z^{\delta} \left[U(z, m, 0) - \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, 0) \right] + F_2(z, m, \delta); \quad (14)$$

где $\delta = \frac{x}{l}$, $e^{\pm p \sqrt{LC} \cdot l} = z^{\pm 1}$ и

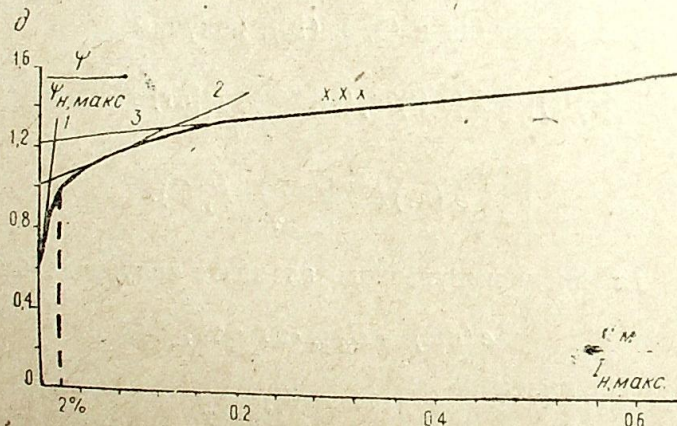
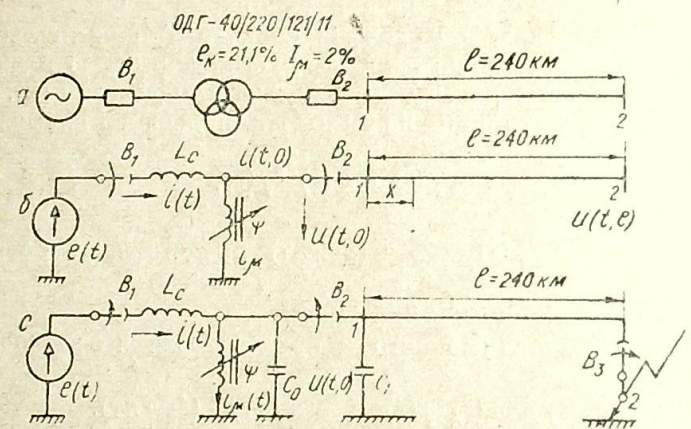


Рис. 1

$$F_{1,2}(z, m, \delta) = z_m \left(\sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^x e^{\pm \sqrt{LC} p (x-y)} \left[u(0, y) \pm \sqrt{\frac{L}{C}} i(0, y) \right] dy \right). \quad (15)$$

Совместное решение (13) и (14) дает

$$U(z, m, \delta) = \frac{1}{2} (z^{\delta} - z^{-\delta}) U(z, m, 0) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} (z^{\delta} - z^{-\delta}) I(z, m, 0) + F_1(z, m, \delta) + F_2(z, m, \delta), \quad (16)$$

$$I(z, m, \delta) = \frac{1}{2} (z^{\delta} - z^{-\delta}) I(z, m, 0) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} (z^{\delta} - z^{-\delta}) U(z, m, 0) + \sqrt{\frac{L}{C}} [F_1(z, m, \delta) - F_2(z, m, \delta)]. \quad (17)$$

Эти уравнения содержат в замкнутой форме все начальные и граничные условия в изображениях z -преобразования.

Рассмотрим переходный процесс включения блока генератор—трансформатор—линия со стороны низшего и высшего (B_1 и B_2) напряжений трансформатора (рис. 1, а).

Граничные условия

Включение со стороны низшего напряжения трансформатора при $x = 0$ ($\delta = 0$):

$$E(z, m) = \frac{L_c}{T} (z-1) I(z, m) + U(z, m, 0), \quad (18)$$

$$I(z, m) = I(z, m, 0) + I_{\mu}(z, m), \quad (19)$$

$$U(z, m) = \frac{1}{T} (z-1) \psi(z, m), \quad (20)$$

$$I_{\mu}(z, m) = z_m (f[\psi(t)]). \quad (21)$$

Зависимость $i_{\mu}(t) = f[\psi(t)]$, представленная в относительных единицах, показана на рис. 1, б.

При $x = l$ ($\delta = 1$).

$$f(z, m, 1) = 0. \quad (22)$$

Включение со стороны высшего напряжения трансформатора при $x = 0$ ($\delta = 0$):

$$E(z, m) = \frac{L_c}{T} (z-1) I(z, m) - \frac{L_c}{T} z i(0) + U(z, m, 0), \quad (23)$$

$$I(z, m) = I(z, m, 0) + I_{\mu}(z, m), \quad (24)$$

$$U(z, m) = \frac{1}{T} (z-1) \psi(z, m) - \frac{1}{T} z \psi(0), \quad (25)$$

$$I_{\mu}(z) = z_m (f[\psi(t)]), \quad (26)$$

где $i_{\mu}(0) = i(0) = i_y$ при $t = 0$.

Начальные значения тока $i(0)$ и потока $\psi(0)$ определяются из установившегося режима до включения трансформатора со стороны высшего напряжения.

При нулевых начальных условиях, т. е. $u(0, x)$ и $i(0, x)$, $F_{1,2}(0, \delta) = 0$, при этом уравнения (13) и (14) принимают следующий вид:

$$U(z, m, \delta) + \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, \delta) = z^{-\delta} \left[U(z, m, 0) + \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, 0) \right] \quad (27)$$

$$U(z, m, 0) - \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, \delta) = z^{-\delta} \left[U(z, m, 0) - \sqrt{\frac{L}{C}} I(z, m, 0) \right] \quad (28)$$

или, учитывая условие (22), $\delta = 1$, будем иметь

$$I(z, m, 0) = \frac{U(z, m, 0) z - 1}{\sqrt{\frac{L}{C}} z + 1}$$

Перейдем к рассмотрению отключения коротких замыканий в точках 1, 2 (рис. 1, с), отключение которых производится выключателями B_1 , B_2 и B_3 . Граничные условия при коротком замыкании в точке 2, установившееся значение напряжения и тока в любой точке линии, определяемые без учета насыщения, будут следующие:

$$u(t, x) = E_{\max} \sin(\omega t + \alpha) \frac{z_c \sin \omega \sqrt{LC}(l-x)}{\omega L_c \cos \omega \sqrt{LC} \cdot l + z_c \sin \omega \sqrt{LC} \cdot l}, \quad (29)$$

$$i(t, x) = E_{\max} \sin(\omega t + \alpha - 90^\circ) \frac{\cos \omega \sqrt{LC}(l-x)}{\omega L_c \cos \omega \sqrt{LC} \cdot l + z_c \sin \omega \sqrt{LC} \cdot l}. \quad (30)$$

Для коротких линий ($l = 250 \text{ км}$) $\cos \omega \sqrt{LC} l = 1$, $\sin \omega \sqrt{LC} l = \omega \sqrt{LC} \cdot l$, при этом (29) и (30) принимают вид

$$u_y(t, x) = \frac{z_c E_{\max}}{\omega(L_c + L_n)} \sin(\omega t + \alpha) \sin \omega \sqrt{LC}(l-x), \quad (31)$$

$$i_y(t, x) = \frac{E_{\max}}{\omega(L_c + L_n)} \sin(\omega t + \alpha - 90^\circ) \cos \omega \sqrt{LC}(l-x), \quad (32)$$

где $L_n = L \cdot l$ — полная индуктивность линии.

После ликвидации короткого замыкания граничные условия в форме модифицированного z -преобразования с учетом усредненного разностного уравнения принимают вид:

$$E(z, m) = \frac{L_c}{T} (z-1) I(z, m) - \frac{L_c}{T} z i(0) + \frac{1}{2} (z+1) U(z, m, 0) - \frac{1}{2} z u_y(0, 0), \quad (33)$$

$$(z-1) U(z, m, 0) - z u_y(0, 0) = \frac{2}{T} [(z-1) \psi(z, m) - z \psi(0)], \quad (34)$$

$$I(z, m) = I_\mu(z, m) + I(z, m, 0), \quad (35)$$

$$I_\mu(z, m) = z_m (f[\psi(t)]). \quad (36)$$

Решая уравнения (33) ÷ (36) совместно, с учетом (13) ÷ (15) и (31) и (32), последовательно можно определить изображения искомых величин

$$\psi(z, m), \quad U(z, m, 0) \quad \text{и} \quad U(z, m, 1).$$

Восстанавливающее напряжение после ликвидации короткого замыкания равно

$$(z-1) \psi(z, m) - U(z, m, 0) = U_v(z, m). \quad (37)$$

Переход к оригиналу без учета насыщения изображения неизвестных величин получается в виде правильной дроби относительно z^k :

$$X(z, m) = \frac{\sum_{k=1}^{k_2} A_k(m) z^k}{\sum_{k=0}^{k_1} B_k z^k}, \quad (38)$$

где k_1, k_2 — степени многочленов числителя и знаменателя. При учете насыщения неизвестную функцию в изображениях z -преобразования можно представить в виде

$$X(z, m) = \sum_{k=0}^{k_2} B_k(m) z^{-k} E(z, m) - \sum_{k=1}^{k_1} A_k(m) z^{-k} X(z, m) + \sum_{k=0}^{k_3} C_k(m) z_m (f[x(t)]).$$

Обратное преобразование в (38) производится контурным интегралом или методом вычетов [2]:

$$x[n, m] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X(z, m) z^{n-1} dz, \quad (40)$$

где Γ — контур интегрирования в плоскости z , охватывающий особые точки подынтегрального выражения.

При вычислении расчет по (40) при $k \geq 3$ дает приближенные результаты. Для более точного расчета $x(n, m)$ может быть использован другой метод.

Известно, что

$$X(z, m) = C_0(m) z^0 + C_1(m) z^{-1} + \dots + C_n(m) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n, m) z^{-n}. \quad (41)$$

Разложив в (38) дробь в ряд по отрицательным степеням z , получим

$$X(z, m) = C_0(m) z^0 + C_1(m) z^{-1} + \dots, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} C_0(m) &= A_1(m), \\ C_1(m) &= A_1(m) - B_1 C_0(m), \\ C_2(m) &= A_2(m) - B_1 C_1(m) - B_2 C_0(m), \\ &\dots \\ C_k(m) &= A_k(m) - B_1 C_{k-1}(m) - B_2 C_{k-2}(m) - \dots - B_k C_0(m). \end{aligned}$$

Сопоставление (41) и (42) дает

$$\begin{aligned} x(0, m) &= C_0(m), \\ x(1, m) &= C_1(m), \\ &\dots \\ x(n, m) &= C_n(m)_{n=k}. \end{aligned}$$

Аналогичным путем можно получить более точные результаты (при учете насыщения):

$$x(n, m) = \sum_{\kappa=0}^{\kappa_2} B_{\kappa}(m) e(n - \kappa, m) - \sum_{\kappa=1}^{\kappa_1} A_{\kappa}(m) x(n - \kappa, m) + \sum_{\kappa=0}^{\kappa_3} C'_{\kappa}(m) f[x(n - \kappa, m)], \quad (43)$$

где $f[x(n - \kappa)]$ — нелинейный член, $e[n]$ — э. д. с. источника. В явном виде (43) будет

$$x(0, m) = B_0(m) e(0) + C'_0(m) f(x[0, m]),$$

$$x(1, m) = B_0(m) e(1) + B_1(m) e(0) - A(m) x(0, m) + C'_0(m) f(x[1]) + C'_0(m) f(x[0]),$$

$$x_2[2, m] = B_0(m) e[2] + B_1(m) e(1) + B_2(m) e(0) - A_1(m) x(1) - \dots$$

и далее $x(n, m)$ по (43).

Произведем расчет восстанавливающегося напряжения на контактах выключателя B_2 и его скорости восстановления при коротком замыкании в точке 2 (рис. 1, с). Напряжение на контактах [3]

$$U_B(p) = Z_{BX}(p) \cdot I_B(p),$$

где $Z_{BX}(p)$ — входное сопротивление между контактами разомкнутого выключателя;

$I_B(p)$ — изображение установившегося значения тока короткого замыкания через выключатель.

Входное сопротивление $Z_{BX}(p)$, с учетом насыщений, учитываемых касательными 1, 2 и 3 (рис. 1, в), можно представить в виде

$$Z_{BX}(p) = \frac{pL_c}{p^2 L_c C_0 + \frac{L_c}{L_{\mu}} + 1} + \frac{\frac{1}{pC_1}}{1 + \frac{1}{pc_1 \sqrt{\frac{L}{C}} \operatorname{th} p \sqrt{LC} \cdot l}},$$

здесь

$$\operatorname{th} p \sqrt{LC} l = \frac{e^{p_2 \sqrt{LC} l} - 1}{e^{p_2 \sqrt{LC} l} + 1} = \frac{z - 1}{z + 1},$$

где $z = e^{pT}$ и $T = 2\sqrt{LC} \cdot l$.

Подвергая выражения $Z_{BX}(p)$ z -преобразованию и используя аппроксимации

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{2} \frac{z + 1}{z - 1},$$

получим

$$Z_{BX}(z) = \sqrt{\frac{L}{C}} \left[z \left(\frac{2 \frac{C_n}{C_0} p}{p^2 + \omega_0^2} \right) + z \left(\frac{\frac{C}{C_1 \sqrt{LC}} \frac{1}{p}}{1 + \frac{C}{C_1 \sqrt{LC}} \frac{1}{p} \frac{z + 1}{z - 1}} \right) \right]$$

или в явном виде

$$Z_{BX}(z) = \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{\frac{2C_n}{C_0} z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1} + \frac{C_n}{C_n + C_1} \frac{z^2 - 1}{z^2 + \frac{C_n - C_1}{C_n + C_1} z + 1} \right),$$

где

$$\omega_0^2 = \left(\frac{L_c}{L_{\mu}} + 1 \right) \frac{1}{L_c C_0};$$

$C_n = C \cdot l$ — полная емкость линии.

Ток короткого замыкания определяется выражением [3]

$$I_B(p) = \frac{E}{\omega(L_c + L_n)} \frac{1}{p^2 + \omega^2}.$$

Для $I_B(p)$ модифицированное z -преобразование принимает вид [2]

$$I_B(z, m) = \frac{E}{\omega(L_c + L_n)} \frac{z \sin \omega m T + \sin \omega(1 - T) T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}.$$

Для восстанавливающегося напряжения на контактах выключателя имеем

$$U_B(z, T) = Z_{BX}(z) I_B(z, T).$$

По правилам модифицированного z -преобразования, в отличие от [3 и 4], можно определить общее выражение для $U_B(z)$. В [3 и 4] указывается, что наибольшая скорость восстановления напряжения (СВН) получается в интервале

$$0 \leq t \leq T, \text{ где } F = 2\sqrt{CL} \cdot l,$$

поэтому значение $U_B(n, m)$ за первый интервал определяется следующим образом:

$$U_B(m) = \lim_{z \rightarrow \infty} [z \cdot U_B(z, m)] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot Z_{BX}(z) \cdot I_B(z, m).$$

Из этого соотношения имеем

$$u_B(m) = \frac{E \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{2C_n}{C_0} + \frac{C_n}{C_n + C_1} \right)}{\omega(L_c + L_n)} \sin \omega m T.$$

Скорость восстановления напряжений

$$S = \frac{\partial u_B(m)}{\partial(mT)} = \frac{E \sqrt{\frac{L}{C}}}{L_c + L_n} \left(\frac{2C_n}{C_0} + \frac{C_n}{C_n + C_1} \right) \cos \omega m T.$$

Начальное значение СВН

$$s_{m=0} = \frac{E \sqrt{\frac{L}{C}}}{L_c + L_n} \left(\frac{2C_n}{C_0} + \frac{C_n}{C_n + C_1} \right).$$

Выражение $s_{m=0}$ не содержит члена с нелинейной индуктивностью, так как начальному периоду восстанавливающегося напряжения соответствует линейный участок кривой намагничивания трансформатора. Как следует из полученных результатов, приведенный метод расчета, учитывая влияние различных факторов, приводит к более простым выражениям, чем это достигается применением операторного метода [3, 4]. Использование z -преобразования при расчете сложных переходных процессов имеет явные преимущества перед рядом других методов, находящих широкое применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Х а я с и С. Волны в линиях электропередачи. Госэнергоиздат, 1960.
2. Д ж у р и Э. Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.

3. Хамморлунд П. Восстанавливающееся напряжение на контактах выключателя. Госэнергоиздат, 1976.
4. Дорф Г. А. "Электричество" 1964, № 3.

Ч. М. Чуварлы, Э. М. Мурадов

Электрик дөврэләрində кечид һадисәсини һесаһланмасында z-модерилләшдирилмиш чеврилмәсини тәтбиғи

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә z-чеврилмәсиниң електрик дөврәләрində кечид һадисәсинә тәтбиғиндән алынған нәтиҗәләр верилмишдир.

Ғејд етмәк ләзымдыр ки, електрик дөврәләрində кечид һадисәләрини һесаһлајаркән, иткисиз хәтт шәраитində пајланмыш параметр нәзәрә алынарса, Лаплас чевирмәси шәклиндә олан тәнликләрдә P вә e^{-pt} һәдләри иштирак едир. Тәнликләри тәсвири шәкилдән орижинал шәклә кәтирдикдә сонсуз тригонометрик сыра алыныр ки, бу да сонрақы һесабаты хејли чәтинләшдирир. Електрик дөврәләриниң ғејри-хәттилији нәзәрә алындыгда исә мүасир машинларсыз (әл илә) һесаһбат апармағ олмур.

Бу чәтинликләри арадан ғалдырмағ үчүн z-әвәзләмәсиндән истифадә етмәк даһа әлверишлидир. Нәтиҗәдә тригонометрик сыралар ғапалы шәкилдә топланыр.

Беләликлә, кенератор-трансформатор хәтт блокунун трансформаторун алчағ вә јүксәк тәрәфиндән ғошулмасы мүхтәлиф вариантларда өјрәнилмиш вә трансформаторун магнитләнмә чәрәјанының кечид һадисәсинә тәсири мүәјјәнләшдирилмишдир.

АЗӘРБАЈҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫҢ ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри сәријасы, 1967, № 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1967, № 1

Р. М. ИБРАГИМБЕКОВ

СУБОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОСВЯЗНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ ПО КОСВЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ

Объекты управления нефтехимической технологией представляют собой сложные комплексы со многими связанными друг с другом входами и выходами. Управление количеством и качеством продукции, получаемой на выходах таких объектов, осуществляется обычно регулированием некоторого количества показателей режима работы объекта, таких как температура, давление, расход сырья и т. д. Другой особенностью этих объектов управления является то, что измерение качества выходных величин объекта доступно в отдельные моменты времени, разделенные длительными промежутками. Ниже исследуется система автоматического управления нефтехимическим объектом (рис. 1) с неполной информацией.

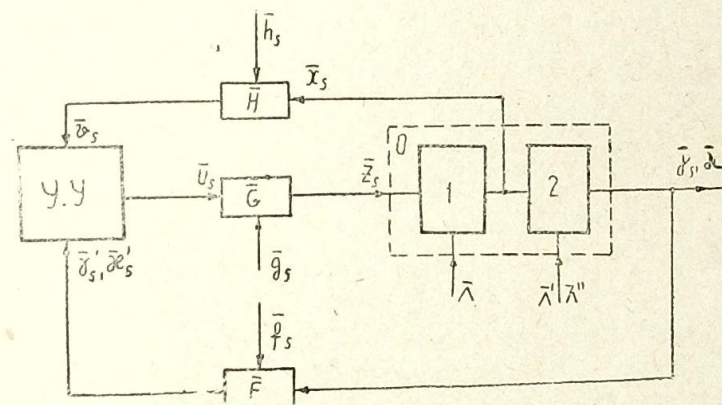


Рис. 1.

а. К каждому j -му выходу ($1 \leq j \leq k$) отнесена функция полезности q_j . Если из общего количества сырья, поданного в объект, γ_j обозначает количество продукции, полученной на j -ом выходе, то $M[q_j(\gamma_j, x_j)]$ выражает доход, полученный от этого выхода, причем x_j есть качество продукции, M —символ математического ожидания. Доходы, полученные от разных выходов, могут быть измерены общей единицей. Доход, полученный от любого данного выхода, не зависит

от того, какие количества сырья были выделены другим выходом. Доход объекта может быть определен как сумма доходов, полученных от отдельных выходов. Все величины в системе рассматриваются в дискретные моменты времени $0, 1, 2, \dots$ с интервалом Δt . Сигналы, действующие в момент $t = s$ обозначены индексом s . Тогда предположения, касающиеся независимости выходов и аддитивности доходов, приводят к выражению

$$Q_s(\gamma_{1s}, \dots, \gamma_{ks}, x_{1s}, \dots, x_{ks}) = M \left[\sum_{j=1}^k g_{js}(\gamma_{js}, x_{js}) \right] \quad (1)$$

для общего дохода объекта в момент времени s . Учитывая, что в объекте может быть использовано лишь ограниченное количество сырья и обозначая общее количество сырья в объекте через γ_{os} , при любых $x_{1s}, \dots, x_{ks}$ приходим к условию

$$\gamma_{1s} + \gamma_{2s} + \dots + \gamma_{ks} = \gamma_{os}, \quad (2)$$

где $\gamma_{js} \geq 0$.

б. Управляющее устройство получает сведения о качестве и количестве продукции на выходах объекта по векторному каналу связи $\bar{F}$, где к ним примешиваются шумы $f_1, \dots, f_k$. Кроме того, по векторному каналу связи $\bar{H}$ с шумами $h_1, \dots, h_{r+1}$ на устройство управления поступает информация о показателях режима объекта; по этому же каналу поступают сведения о количестве подаваемого в объект сырья γ_{os} . Способы комбинации сигналов и шумов в каналах связи $\bar{H}_1$, $\bar{F}$ и $\bar{G}$ известны и неизменны, а сами каналы не имеют памяти. Пусть $z_{is} = u_{is} + g_{is}$; $x_{is} = v_{is} + h_{is}$; $\gamma'_{js} = \gamma_{js} + f_{js}$; $x'_{js} = x_{js} + f_{js}$; $\gamma'_{os} = \gamma_{os} + h_{r+1}$ ($1 \leq i \leq r$). Помехи h_{is} , g_{is} , f_{js} представляют собой последовательность независимых случайных величин с известными и неизменными плотностями вероятностей $p(h_i)$, $p(g_i)$, $p(f_i)$. Введены пространственные векторы $\bar{u}_s = (u_{1s}, \dots, u_{rs})$; $\bar{\gamma}_s = (\gamma_{1s}, \dots, \gamma_{ks})$ и т. д., временные векторы, снабженные сверху стрелкой, и пространственно-временные матрицы $\bar{u}_s$:

$$\bar{u}_s = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & \dots & u_{1s} \\ u_{20} & u_{21} & \dots & u_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{r0} & u_{r1} & \dots & u_{rs} \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

в. Операторы объекта известны, в общем случае они обладают памятью и характеризуются векторами случайных параметров $\bar{\Lambda} = \Lambda(s, \lambda)$; $\bar{\Lambda}' = \Lambda'(s, \lambda')$ и $\bar{\Lambda}'' = \Lambda''(s, \lambda'')$, приложенными (рис. 1) к первой и второй частям объекта. Рассматривается байесова задача, т. е. априорные плотности вероятности всех случайных сигналов известны. Так как качество продукции на выходах объекта доступно для измерения только в моменты времени $0, \tau, 2\tau, \dots$, где $\tau \geq 1$, т. е. через интервалы времени, равные τ тактам, то для управления используются косвенные показатели, статистически связанные с $x_1, \dots, x_k$.

Под косвенными показателями понимаются как величина, характеризующая режим работы объекта, так и количество продукции на выходах объекта $\bar{\gamma}$.

г. Управляющее устройство характеризуется случайной стратегией, т. е. значения найденных им $\bar{u}_s$ представляют собой случайную функцию от матриц $\bar{\gamma}_{s-1}$, $\bar{x}_{s-1}$, $\bar{v}_{s-1}$, поступивших на него в предыдущие моменты времени, от значений $\bar{u}_{s-1}$ своих выходов в прошлом и от сигнала γ'_{os} , где $\gamma'_{os} = \gamma_{os}(s, \rho)$.

Требуется определить оптимальную стратегию устройства управления, т. е. плотность вероятности сигналов управления $u_{1s}, \dots, u_{rs}$, при которых средний доход объекта Q , равный сумме математических ожиданий удельных доходов (доходов на s -ом шаге) объекта:

$$Q = \sum_{s=0}^n Q_s, \quad (3)$$

максимален. Здесь Q_s определяется выражением (1). Очевидно, что максимальное значение критерия (3) будет зависеть от количества подаваемого в объект сырья γ_{os} , числа тактов управления и числа выходов объекта, и в этом смысле решаемая задача является задачей многопараметрического динамического программирования. Но, с другой стороны, наличие обратных связей, неполнота информации об объекте, обусловленная случайными параметрами $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Lambda}'$ и $\bar{\Lambda}''$, случайным вектором $\bar{o}$ и помехами в каналах связи, означает зависимость удельного дохода объекта (1) от способа учета и темпа изучения этих случайных воздействий. Поэтому решение поставленной задачи удобно свести к двум последовательным более простым задачам:

1. Задаче оптимального распределения сырья γ_{os} по выходам объекта, т. е.

$$\max Q_s = \max_{\gamma_s} \max_{x_s} M \left[\sum_{j=1}^k g_{js}(\gamma_{js}, x_{js}) \right] \quad (4)$$

при условии (2), где $\gamma'_{os} = \gamma_{os} + h_{r+1}$ (рис. 2).

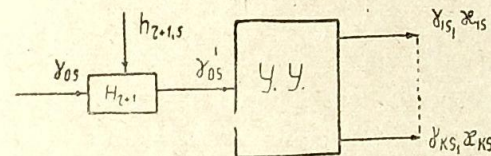


Рис. 2.

2. Задаче определения стратегии управления, минимизирующей риск $R = \sum_{s=0}^n R_s$, (5)

где R_s — (удельный риск) математическое ожидание суммы некоторых функции потерь $W_{1s}(\bar{\gamma}_s^* \bar{\gamma}_s)$, $W_{2s}(\bar{x}_s^* \bar{x}_s)$ характеризующей близость векторов $\bar{\gamma}_s$, $\bar{x}_s$ на выходах объекта к оптимальным $\bar{\gamma}_s^*$, $\bar{x}_s^*$, найденным из задачи (4). Тогда вторая задача примет вид

$$\min_{\bar{u}_s} R = \min_{\bar{u}_s} \sum_{s=1}^n R_s = \min_{\bar{u}_s} \sum_{s=1}^n M [W_{1s}(\bar{\gamma}_s^* \bar{\gamma}_s) + W_{2s}(\bar{x}_s^* \bar{x}_s)], \quad (6)$$

где R — общий риск.

Стратегия устройства управления в этом случае представляет собой условную плотность вероятности

$$P_s(\bar{U}_s) = \Gamma_s \left(\bar{U} \mid \bar{\gamma}_s^* \bar{z}_s^* \bar{v}_{s-1}, \bar{U}_{s-1}, \bar{\gamma}_{s-1}^*, \bar{z}_s^* \right). \quad (7)$$

Здесь индекс s обозначает предшествующий s -му момент времени, в который производится измерение вектора качества продукции на выходах объекта. Для решения первой задачи воспользуемся методом оптимального распределения ресурсов [1] и введем последовательность функций f_{ks} , определенных для $k=1, 2, \dots$; $\gamma_{ks} \geq 0$ следующим образом:

$$f_{ks}(\gamma_{os}, z_{1s}, \dots, z_{ks}) = \max Q_s(\gamma_{1s}, \dots, \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{ks}), \quad (8)$$

$$\gamma_{os} = \gamma_{os}(s, \bar{\rho}), \gamma_{js} \geq 0 \text{ и } \sum_{j=1}^k \gamma_{js} = \gamma_{os}.$$

Функция $f_{ks} = f_{ks}(\gamma_{os}, z_{1s}, \dots, z_{ks})$ выражает доход от оптимального распределения количества сырья γ_{os} по k выходам объекта, причем качество z_{js} продукции на каждом j -ом выходе также оптимальное. Пусть γ_{ks} — количество сырья, назначенное в момент $t=s$ для k -го выхода. Тогда, исходя из принципа оптимальности [2], каково бы ни было точное значение γ_{ks} , оставшееся количество сырья $\gamma_{os} - \gamma_{ks}$ должно быть использовано так, чтобы получить максимальный доход от оставшихся выходов. Так как этот оптимальный доход от распределения количества сырья $\gamma_{os} - \gamma_{ks}$ по $k-1$ выходам по определению есть $f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})$, то назначение γ_{ks} для k -го выхода приводит к общему доходу $M[q_{ks}(\gamma_{ks}, z_{ks}) + f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})]$ для объекта с k выходами. Очевидно, что оптимальным будет такой выбор γ_{ks} и z_{ks} , который максимизирует эту функцию, что приведет к функциональному уравнению (для $k=2, 3, \dots$, $\gamma_{os} \geq 0$):

$$f_{ks}(\gamma_{os}, z_{1s}, \dots, z_{ks}) = \max_{\gamma_{ks}} \max_{z_{ks}} M[q_{ks} + f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})]. \quad (9)$$

Так как количество подаваемого в объект сырья является случайным процессом, $\gamma_{os} = \gamma_{os}(s, \bar{\rho})$, то чем точнее информация о векторе $\bar{\rho}$, тем более точным будет процесс распределения сырья по выходам объекта. Уточнение информации о векторе $\bar{\rho}$ выражается в том, что на каждом такте управления априорные плотности вероятности $p(\bar{\rho})$ заменяются апостериорными $P_s(\bar{\rho})$, которые учитывают информацию, приходящую к устройству управления за время $t=0, 1, \dots, s$. Поэтому

$$P_s(\gamma_{os}, z_{1s}, \dots, z_{ks}) = \max_{\gamma_{ks}} \max_{z_{ks}} \int_{\Omega(\bar{\rho}, \gamma_{ks}, z_{ks})} [q_{ks} + f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})] p(\gamma_{ks}, z_{ks}, \bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os}) d\Omega \quad (10)$$

определим при условии, что вектор $\bar{\gamma}_{os}$ на входе устройства управления фиксирован.

По теореме умножения $p(\gamma_{ks}, z_{ks}, \bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os}) = p(\gamma_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) \cdot p(z_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) \cdot p(\bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os})$. (11)

Действительно плотность вероятности γ_{ks} от значений $\bar{\gamma}_{os-1}$ в предыдущие моменты времени не зависит, а при фиксированном $\bar{\gamma}_{os}$ она не

зависит и от γ_{os} (а значит и от $\bar{\rho}$). $p(\bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os})$ есть не что иное, как апостериорная плотность вероятности $P_s(\bar{\rho})$. Так как

$$p(\bar{\rho}, \bar{\gamma}_{os}) = p(\bar{\rho}) \cdot p(\bar{\gamma}_{os} \mid \bar{\rho}) = p(\bar{\gamma}_{os}) \cdot p(\bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os}), \quad (12)$$

то

$$p_s(\bar{\rho}) = p(\bar{\rho}) \frac{p(\bar{\gamma}_{os} \mid \bar{\rho})}{p(\bar{\gamma}_{os})};$$

Здесь $p(\bar{\rho})$ — априорная плотность вероятности для

$p(\bar{\gamma}_{os})$ — априорная (безусловная) плотность вероятности,

$p(\bar{\gamma}_{os} \mid \bar{\rho})$ — условная плотность вероятности для $\bar{\gamma}_{os}$ при фиксированном значении $\bar{\rho}$. Последнюю функцию (она имеет вид функции правдоподобия) можно найти, зная свойства калана $\bar{H}$. Так как значения h_{r+1} независимы для различных $m \leq s$, а канал $\bar{H}$ безынерционен, то

$$p(\bar{\gamma}_{os} \mid \bar{\rho}) = \prod_{m=0}^s p(\gamma_{om} \mid \bar{\rho}). \quad (14)$$

Здесь p может зависеть еще от номера такта m , поэтому

$$p(\bar{\gamma}_{os} \mid \bar{\rho}) = \prod_{m=0}^s p(\gamma_{om} \mid m, \bar{\rho}). \quad (15)$$

Подставив (15) в (13), (13) в (11), (11) в (10) и усреднив результат по всем возможным значениям вектора $\bar{\gamma}_{os}$, получим окончательно

$$\begin{aligned} f_{ks}(\gamma_{os}, z_{1s}, \dots, z_{ks}) &= \max_{\gamma_{ks}} \max_{z_{ks}} \int_{\Omega(\bar{\rho}, \gamma_{ks}, z_{ks}, \bar{\gamma}_{os})} [q_{ks} + \\ &+ f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})] p(\gamma_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) p(z_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) p(\bar{\rho} \mid \bar{\gamma}_{os}) \times \\ &\times \prod_{m=0}^s p(\gamma_{om} \mid m, \bar{\rho}) d\Omega(\bar{\rho}, \gamma_{ks}, z_{ks}, \bar{\gamma}_{os}) = \\ &= \max_{\gamma_{ks}} \max_{z_{ks}} \int_{\Omega(\gamma_{ks}, z_{ks})} a_{ks}(\gamma_{ks}, z_{ks}) \cdot p(\gamma_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) p(z_{ks} \mid \bar{\gamma}_{os}) d\Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$a_{ks}(\gamma_{ks}, z_{ks}) = \int_{\Omega(\bar{\gamma}_{os}, \bar{\rho})} [q_{ks} + f_{k-1, s}(\gamma_{os} - \gamma_{ks}, z_{1s}, \dots, z_{k-1, s})] p(\bar{\rho}) \cdot \prod_{m=0}^s p(\gamma_{om} \mid m, \bar{\rho}) d\Omega(\bar{\gamma}_{os}, \bar{\rho}). \quad (17)$$

Можно показать, что оптимальные плотности вероятности $p(\gamma_{os} \mid \bar{\gamma}_{os})$ и $p(z_{ks})$ являются дельта-функциями [1], оптимальные γ_{ks} и z_{ks} находятся из условия максимума a_{ks} по γ_{ks} и z_{ks} . Очевидно, что для $k=1$

$$f_1(\gamma_{os}, z_{1s}) = Q_{1s}(\gamma_{os}, z_{1s}). \quad (18)$$

Решив задачу определения оптимальных в смысле (4) $\bar{\gamma}_s$ и $\bar{z}_s$, приступим к решению задачи (6). Запишем для этого окончательное выражение удельного риска:

$$\begin{aligned} R_s &= \int_{\Omega(\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{z}_s, \bar{u}_s, \bar{v}_{s-1}, \bar{\gamma}_{s-1}, \bar{z}_s)} [W_{1s}(\bar{\gamma}_s^* \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{z}_s, s) + \\ &+ W_{2s}(\bar{z}_s^* \bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{z}_s, s)] p(\bar{\mu}) p(\bar{\lambda}) p(\bar{z}_s) \times \end{aligned}$$

$$\times \prod_{m=0}^s \Gamma_m \cdot \prod_{m=0}^s p(\bar{z}_m | \bar{u}_m) \prod_{m=0}^{s-1} p(\bar{v}_m | \bar{\lambda}, \bar{u}_m) \times \\ \times \prod_{m=0}^{s-1} p(\bar{\gamma}_m | \bar{\mu}', \bar{\lambda}, \bar{u}_m) \cdot \prod_{m=0, \tau, \dots}^e p(\bar{x}_m | \bar{\mu}', \bar{\lambda}, \bar{u}_m) d\Omega, \quad (19)$$

где e — ближайшее к s значение, взятое из ряда $0, \tau, 2\tau, \dots, e < s$ (19), является более общим выражением, чем формула, полученная в [2], так как в подынтегральное выражение помимо произведения плотностей вероятности для $\bar{v}$ — информации о косвенных показателях x входит произведение условных плотностей вероятностей для $\bar{\gamma}$, что позволяет в моменты времени $m \neq 0, \tau, 2\tau, \dots$ и $0 < m \leq s-1$ в качестве дополнительного канала информации о некоторых выходах объекта (измерение которых доступно через длительные промежутки времени) использовать сведения о других выходах, статистически связанных с первыми.

Определение стратегии устройства управления проведем в предположении, что число тактов управления не фиксировано и известно только то, что оно невелико. Тогда, считая, что каждый шаг может оказаться последним, получаем, что от оптимальной стратегии в каждом такте зависит лишь удельный риск на этом же такте. Это позволяет искать оптимальные управления в s -ный момент времени из условия минимума риска R_s [3].

Критерий (6) в этом случае примет вид

$$\min R = \min \sum_{s=0}^n R_s = \sum_{s=0}^n \min R_s. \quad (20)$$

Введем вспомогательные функции

$$\beta_s = \sum_{m=0}^s \Gamma_m, \quad (21)$$

$$\alpha_s(\bar{U}_s, \bar{v}_s, \bar{\gamma}_s, \bar{x}_s) = \int_{\Omega(\bar{\mu}', \bar{\mu}'', \bar{\lambda})} [W_{1s} + W_{2s}] p(\bar{\mu}') p(\bar{\mu}'') p(\bar{\lambda}) \times \\ \times \prod_{m=0}^s p(\bar{z}_m | \bar{u}_m) \times \prod_{m=0}^{s-1} p(\bar{v}_m | \bar{\lambda}, \bar{u}_m) \cdot \prod_{m=0}^{s-1} p(\bar{\gamma}_m | \bar{\mu}', \bar{\lambda}, \bar{u}_m) \times \\ \times \prod_{m=0, \tau, 2\tau, \dots}^{s-1} p(\bar{x}_m | \bar{\mu}', \bar{\lambda}, \bar{u}_m) d\Omega(\bar{\mu}', \bar{\mu}'', \bar{\lambda}). \quad (22)$$

Можно показать, как это сделано в [4], что все стратегии являются дельта-функциями и оптимальные $\bar{u}_s$ находятся из условия минимума α_s по $\bar{u}_s$. Следует отметить, что критерий (20), исключая активную изучающую роль управляющих воздействий, приводит к асимптотически оптимальному управлению [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. "Наука", 1965.
2. Живоглазов В. П. Автоматика и телемеханика, т. XXV, 1964, № 10.
3. Терпугов А. Ф. Автоматика и телемеханика, т. XXV, 1964, № 8.
4. Фельдубаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. Физматгиз, 1963.

МҮНДЭРИЧАТ

Т. А. Заманов. Мүчэррэд фазаларда жубанан аргументли дифференциал тэнцлэрэ даир	3
А. С. Маһмудов. Карлеман теореминин үмүмиләшмәси	8
Х. М. Нәчәфов. Гиперболик типли тәнлик үчүн Коши мәсәләси	18
Ш. М. Бахышов. Назик цилиндрик сонду өртүклә гејри-стационар температур сәһәсинин тәјини	23
В. И. Марон, Н. Н. Сәфәров. Мајенин мүстәви дөвһәнин сәрһәд лајына атылмасы	28
А. Н. Мугалов. Чезаре—Данжуа мәһнада интегралда лимитә кечмәк һаггында	33
Д. И. Шерман. Потенциаллар нәзәријәсинин бир хүсүсиләшмиш сәрһәд мәсәләси һаггында	42
Б. О. Касимов. Бир артыг каналлы информәсија шәбәкәләринин структурлары сајынын тәјини мәсәләсинә даир	49
Г. М. Островски, Л. Н. Шумунов. Оптимал мәсәләләрин бир әдәди һәлл методу һаггында	56
М. Ф. Бәдәлов, М. А. Рзајев, М. И. Әлијев. Галлий антимонидиндә түнел р-п кечидләринин тәдгиги	62
И. К. Кәримов, Ә. Н. Рүстәмов, Л. М. Вәлијев. Антиферромагнит јарымкечиричи MnS вә MnSe-нин електриккечирмә вә термо EНГ-си	69
К. П. Мәмәдов, С. Б. Бағыров. TiSe кристалынын истидән кенишләймәсинин рентгендифрактометрик тәдгиги	73
М. Ә. Талиби, Л. Г. Крутенјук, Ә. М. Нағыјев. Селен р-п һетерокечидләриндә електроакустик эффект	77
Ә. Х. Хәлилов, Ф. К. Исәјев. КСГКВг+AgCl фосфорларынын термостимулјаланмыш лүминесценсија спектрләринин тәдгиги	82
С. И. Таһиров, В. И. Таһиров, Ә. А. Гулијев. Тәркибиндә 15 ат%-дәк силисиум олан р-типли германий-силисиум системи монокристалларында магнит сәһәсинин һәлл әмсалына тәсиринин тәдгиги	87
Ч. М. Гулузәдә. Зәйф фраунһофер хәтләри контурларынын асимметриклији һаггында	92
Ә. Н. Нәсәнәлизадә. Узунлук вәһиди илә өлчүлән јени физики сабит мәсәләси һаггында	99
М. Ә. Бағыров, Н. В. Климова, В. П. Малин. Јарыметирол өртүкләрин диелектрик хәсәләринә електрик бошлмасынын тәсиринин тәдгиги	101
А. Ә. Әфәндизадә, Т. А. Зајрова. Мүһәрриклә јүкләнмиш үчфазлы јарымизмләһән дүзләп ириһидә кечид просесләринин һесабы	110
Ч. М. Чуварлы, Ә. М. Мурадов. Електрик дөврәләриндә кечид һадисәсинин һесабынасында z-модерилләшдирилмиш чеврилмәсинин тәдгиги	116
Р. М. Ибраһимбәјов. Чохрабитали техноложии объектләрин долајы кес-тәричиләринә кәрә квазиоптимал нәзәрәси	125

СОДЕРЖАНИЕ

Т. А. Заманов. О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом в абстрактных пространствах	3
А. С. Махмудов. Обобщение теоремы Карлемана	8
Х. М. Наджафов. Задачи Коши для одного уравнения гиперболического типа, выражающегося на границе, с разрывным коэффициентом в одной точке	16
Ш. М. Бахышев. Определение нестационарного температурного поля в тонкой конечной цилиндрической оболочке	23
В. И. Марон, Г. Г. Сафаров. Выбрасывание жидкости в пограничный слой на пластинке	28
А. Г. Мугалов. О предельном переходе под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа	33
Д. И. Шерман. Об одной частной красной задаче теории потенциала	42
Б. О. Касимов. К вопросу определения числа структур информационных сетей с избыточностью в один канал	49
Г. М. Островский, Л. Н. Шумунов. Об одном численном методе решения оптимальных задач	56
М. Ф. Бадалов, М. А. Рзаев, М. И. Алиев. Исследование туннельных p - n переходов в антимониде галлия	62
И. Г. Керимов, А. Г. Рустамов, Л. М. Валиев. Электропроводность и термоэдс антиферромагнитных полупроводников MnS и $MnSe$	69
К. П. Мамедов, С. Б. Багиров. Рентгendifрактометрическое исследование теплового расширения кристалла	73
М. А. Талиби, Е. Г. Крутенюк, Э. М. Нагиев. Электроакустический эффект на селеновых p - n гетеропереходах	77
А. Х. Халилов, Ф. К. Исаев. Исследование спектров термостимулированной люминесценции $KSiKBr + AgCl$ фосфоров	82
С. И. Таиров, В. И. Тагиров, А. А. Кулиев. Исследование влияния магнитного поля на коэффициент Холла в монокристаллах системы германий-кремний p -типа, содержащих до 15 ат. % кремния	87
Д. М. Кулизаде. Об асимметрии контуров слабых фраунгоферовых линий	92
А. Г. Гасанлизаде. К вопросу о новой физической постоянной с размерностью длины	99
М. А. Багиров, Н. В. Климова, В. П. Малин. Исследование влияния электрического разряда на диэлектрические свойства полистирольной пленки	101
Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, В. Я. Штейншрайбер. Диэлектрический цилиндр в электрическом поле с объемным зарядом	105
А. А. Эфенлизаде, Т. А. Заирова. Расчет переходных процессов при работе трехфазного полууправляемого выпрямления при нагрузке на двигатель	110
Ч. М. Джуварлы, А. М. Мурадов. Исследование переходных процессов в электрических цепях с помощью модифицированных z -преобразований	116
Р. М. Ибрагимбеков. Субоптимальное управление многосвязными технологическими объектами по косвенным показателям	125

Подписано к печати 11/V 1967 г. Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Бум. лист. 4,13.
 Печ. лист. 11,30. Уч.-изд. лист. 10,61. ФГ 10622. Заказ 94.
 Тираж 650. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров
 Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, 80.