

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

6

1966

~~~~~  
АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
БАКЫ — БАКУ



Н. К. АСКЕРОВ

### ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

В настоящей работе результаты [1] были применены к исследованию спектра и к доказательству полноты собственных и присоединенных функций некоторого класса регулярных граничных задач для самосопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка с параметром  $\lambda$  в граничном условии. Обозначим через  $l(y)$  самосопряженное дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^m (p_0(x) y^{(m)}(x))^{(m)} + \dots + p_m(x) y(x), \quad (1)$$

которые регулярно в интервале  $(0, 1)$ .

Будем предполагать, что коэффициенты  $p_k(x)$  имеют непрерывные производные до  $m - k$ -го порядка включительно, а коэффициент  $p_0(x)$  ограничен снизу положительной константой

$$p_0(x) \geq q > 0. \quad (2)$$

Через  $H$  обозначим пространство  $L_2(0, 1)$  измеримых функций, интегрируемых с квадратом на интервале  $(0, 1)$ . Дифференциальное выражение (1) естественным образом порождает линейный оператор  $Ay = l(y)$ , заданный на множестве  $D(A)$  всех функций  $y(x)$ , имеющих непрерывные производные до  $2m - 1$ -го порядка включительно и интегрируемую с квадратом производную  $2m$ -го порядка (в терминологии М. Г. Крейна такие операторы называются максимальными, см. [2]).

Определим на линейном многообразии  $D(A)$  два линейных оператора  $T$  и  $B$ , отображающих  $D(A)$  в  $2m$ -мерное евклидово пространство  $H_1$  следующим образом:

$$Ty = \{y^{[2m-1]}, \dots, y^{[m]}(1), -y^{[2m-1]}(0), \dots, -y^{[m]}(0)\} \quad (y(x) \in D(A)), \quad (3)$$

$$By = \{y(1), \dots, y^{(m-1)}(1), y(0), \dots, y^{(m-1)}(0)\} \quad (y(x) \in D(A)). \quad (4)$$

Покажем, что для операторов  $A$ ,  $T$  и  $B$  выполняются условия 1) — 4) статьи [1]. В самом деле, все финитные функции принадлежат множеству  $D(A)$  и являются всюду плотным линейным многообразием в гильбертовом пространстве  $H$ . Кроме того, всякая финитная функция входит в нуль-многообразия операторов  $T$  и  $B$ . Обозначим через  $A_0$  сужение оператора  $A$  на множество функций из  $D(A)$ , для которых  $Ty = 0$ : в нашем случае область определения  $D(A_0)$  опе-

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор), Г. Б. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР“ (серия физико-технических и математических наук).



ратора  $A_0$  состоит из всех функций  $y(x) \in (A)$ , удовлетворяющих граничным условиям

$$y^{[m]}(0) = \dots = y^{[2m-1]}(0) = y^{[m]}(1) = \dots = y^{[2m-1]}(1) = 0. \quad (5)$$

Известно, что (см. [3]) сужение оператора  $A$  на множестве всех функций, удовлетворяющих линейно неизвестным граничным условиям вида

$$\sum_{k=1}^{2m} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(0) + \sum_{k=1}^{2m} \beta_{jk} y^{[k-1]}(1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2m), \quad (6)$$

будет самосопряженным оператором, если

$$\sum \alpha_{j,v} \bar{\alpha}_{k,2m-v+1} - \sum \alpha_{j,2m-k+1} \bar{\alpha}_{k,v} = \sum \beta_{j,v} \bar{\beta}_{k,2m-v+1} - \sum \beta_{j,2m-k+1} \bar{\beta}_{k,v}. \quad (7)$$

Граничные условия (3)–(4) получаются из граничных условий (6), если положить:

- 1)  $\alpha_{j,k} = 0$  при  $k \neq j + m - 1$  и  $\alpha_{j,j+m-1} = 1$  при  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
- 2)  $\alpha_{j,k} = 0$  при всех  $k$ , для которых  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
- 3)  $\beta_{j,k} = 0$  при всех  $k$ , для которых  $j = 1, 2, \dots, m$ ;
- 4)  $\beta_{j,k} = 0$  при  $k \neq j - 1$  и  $\beta_{j,j-1} = 1$  в случае, если  $j = m + 1, \dots, 2m$ .

Нетрудно видеть, что при этом выполняются условия (7), так что оператор  $A_0$  является самосопряженным. Для дифференциального выражения (1) справедлива формула Лагранжа—Грина:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L y, \bar{z} dx &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{p_0(x)} y^{[m]}(x) \bar{z}^{[m]}(x) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + p_m(x) y(x) \bar{z}(x) \right] dx - \sum_{k=1}^m y^{[2m-k]}(x) \bar{z}^{[k-1]}(x) \Big|_0^1 = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{p_0(x)} y^{[m]}(x) \bar{z}^{[m]}(x) + \dots + p_m(x) y(x) \bar{z}(x) \right] dx - (Ty, Bz) \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (8)$$

Если элемент  $y \in D(A_0)$ , то формула (8) примет вид

$$(A_0 y, y) = \int_0^1 [p_0(x) |y^{(m)}(x)|^2 + \dots + p_m(x) |y(x)|^2] dx. \quad (9)$$

Известно, что самосопряженные операторы, порожденные дифференциальным выражением (1), являются полуограниченными [2]. Тем не менее мы приведем доказательство этого утверждения, так как некоторые моменты его будут использованы в дальнейшем. Пусть  $f(x)$  — произвольная дифференцируемая функция.  $n$ -ая производная которой интегрируема с квадратом. Известны следующие неравенства (для функций нескольких переменных они установлены впервые Эрлингом):

$$\|f^{(k)}(x)\|_{L_2} \leq \frac{\alpha_n}{h^k} \|f(x)\|_{L_2} + \sigma_0 h^{n-k} \|f^{(n)}(x)\|_{L_2}, \quad (10)$$

$$\|f^{(k)}(x)\|_{L_2} \leq \frac{\alpha_n}{h^{k+\frac{1}{2}}} \|f(x)\|_{L_2} + \sigma_0 h^{n-k-\frac{1}{2}} \|f^{(n)}(x)\|_{L_2}, \quad (11)$$

где  $h$  — любое положительное число, а константы  $\alpha_n$  и  $\sigma_0$  не зависят от выбора функции  $f(x)$  и величины  $h$ . Используя неравенство (11) при  $n=m$  и  $k=0, 1, 2, \dots, m-1$ , мы сможем оценить сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^1 |p_k(x)| |y^{(m-k)}(x)|^2 dx &\leq \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \left\{ \frac{\alpha_n}{h^k} \left( \int_0^1 |y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0 h^{m-k} \left( \int_0^1 |y^{(m)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \leq 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \left\{ \frac{\alpha_n^2}{h^{2n}} \int_0^1 |y(x)|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_0^2 h^{2(m-k)} \int_0^1 |y^{(m)}(x)|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

По условию функция  $p_0(x) \geq q > 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^1 |p_k(x)| |y^{(m-k)}(x)|^2 dx &\leq 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \left\{ \frac{\alpha_m^2}{h^{2n}} \int_0^1 |y(x)|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_0^2 h^{2(m-k)}}{q} \int_0^1 p_0(x) |y^{(m)}(x)|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Применяя эту оценку к правой части равенства (9), получим

$$\begin{aligned} (A_0 y, y) &\geq \int_0^1 p_0(x) |y^{(m)}(x)|^2 dx + \int_0^1 p_m(x) |y(x)|^2 dx - \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \left\{ \frac{\alpha_m^2}{h^{2n}} \int_0^1 |y(x)|^2 dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_0^2 h^{2(m-k)}}{q} \int_0^1 p_0(x) |y^{(m)}(x)|^2 dx \right\} = \int_0^1 \left[ p_0(x) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \frac{\sigma_0^2 h^{2(m-k)}}{q} p_0(x) \right] |y^{(m)}(x)|^2 dx + \\ &\quad + \int_0^1 \left[ p_m(x) - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \frac{\alpha_m^2}{h^{2n}} \right] |y(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Выберем  $h$  настолько малым, чтобы

$$1 - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 \leq x \leq 1} |p_k(x)| \frac{\sigma_0^2 h^{2(m-k)}}{q} \geq \frac{1}{2},$$



тогда

$$(A_0 y, y) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 p_0(x) |y^{(m)}(x)|^2 dx + \int_0^1 p_m(x) - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 < x < 1} |p_k(x)| \frac{\alpha_m^2}{h^{2k}} |y(x)|^2 dx. \quad (12)$$

Из этого неравенства следует полуограниченность оператора  $A_0$ :

$$(A_0 y, y) \geq \inf \left[ p_m(x) - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 < x < 1} |p_k(x)| \frac{\alpha_m^2}{h^{2k}} \right] \int_0^1 |y(x)|^2 dx.$$

Предположим теперь, что функция  $p_m(x)$  достаточно велика, существует константа  $C$  такая, что

$$p_m(x) - 2 \sum_{k=1}^{m-1} \max_{0 < x < 1} |p_k(x)| \frac{\alpha_m^2}{h^{2k}} \geq C > 0. \quad (13)$$

Тогда из неравенства (12) получаем

$$(A_0 y, y) \geq C \|y\|^2, \quad (14)$$

то есть оператор  $A_0$  при условии (13) является положительно определенным.

Чтобы окончательно проверить выполнение условия 2) [1], остается лишь показать, что оператор  $A_0$  имеет вполне непрерывный обратный. Последнее утверждение вытекает из того факта, что резольвента оператора  $A_0$  есть вполне непрерывный оператор (см. [3]). Перейдем к проверке условия 3) в [1]. В силу леммы 2 § 17, гл. IV книги [3] оператор  $B$  отображает  $D(A_0)$  на все пространство  $H_1$ . Для проверки неравенства

$$\|By\|_1 \leq C_1 \|A_0^{-\frac{1}{2}} y\|$$

применим неравенство (11), полагая в нем  $m=n$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, m-1$  и  $h=1$ , тогда

$$\|By\|_1^2 = \sum_{k=0}^{m-1} [(y^{(k)}(1))^2 + (y^{(k)}(0))^2] \leq 2m [\alpha_m \|y\| + \alpha_0 \|y\|]^2 \leq 4m [\alpha_m^2 \|y\|^2 + \alpha_0^2 \|y^{(m)}\|^2]. \quad (15)$$

С другой стороны, при условии (13) неравенство (12) дает

$$(A_0 y, y) \geq \frac{1}{2} q \|y^{(m)}\|^2 + C \|y\|^2. \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), приходим к неравенству

$$\|By\|_1^2 \leq C_1^2 (A_0 y, y)$$

или

$$\|By\|_1 \leq C_1 \|A_0^{-\frac{1}{2}} y\|. \quad (17)$$

Из этого неравенства следует также, что оператор  $B$  переводит множество функций с ограниченными нормами  $\|A_0^{-\frac{1}{2}} y\|$  в ограниченное и в силу конечномерности пространства  $H_1$  компактное множе-

ство в  $H_1$ . Таким образом свойство 3) выполняется. Отметим, наконец, что формула Грина (условия 4) в [1]) в нашем случае совпадает с формулой Лагранжа—Грина (8). Таким образом, операторы  $A$ ,  $T$  и  $B$  удовлетворяют всем условиям [1].

Рассмотрим следующую граничную задачу: найти все ненулевые решения уравнения

$$Ly = \lambda y,$$

удовлетворяющие граничному условию

$$\lambda Ty = \sigma By,$$

где  $\sigma$  — линейное положительное определенное преобразование пространства  $H_1$ . В развернутой форме эти граничные условия имеют вид:

$$\lambda^{[2m-k-1]} y(1) = \sum_{l=0}^{m-1} p_{kl} y^{(l)}(1) + \sum_{l=m}^{2m-1} p_{kl} y^{[l-m]}(0)$$

$$(\kappa = 0, 1, 2, \dots, m-1),$$

$$-\lambda^{[3m-k-1]} y(0) = \sum_{l=0}^{m-1} p_{kl} y^{(l)}(1) + \sum_{l=m}^{2m-1} p_{kl} y^{[l-m]}(0)$$

$$(\kappa = m, m+1, \dots, 2m-1).$$

Символом  $(p_{kl})$  обозначена квадратная положительно определенная матрица  $2m$ -го порядка. Предыдущие рассуждения показывают, что для этой задачи справедливы все результаты [1]. Покажем теперь, что для этой задачи выполнены условия теоремы 4. С этой целью исследуем асимптотику собственных чисел оператора  $A_0$  и найдем оценку для его собственных функций. Граничные условия (5) являются регулярными и нормированными. Для доказательства этого утверждения необходимо найти числа  $\theta_{-1}$  и  $\theta_1$  (см. [3], § 4, гл. 11), определенные равенством

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_1^{2m-1} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-1} & \omega_m^{2m-1} & \omega_{m+1}^{2m-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s \omega_m^{2m-1} & \frac{1}{s} \omega_{m+1}^{2m-1} & \omega_{m+2}^{2m-1} & \dots & \omega_{2m}^{2m-1} \\ \omega_1^{2m-2} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-2} & \omega_m^{2m-2} & \omega_{m+1}^{2m-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s \omega_m^{2m-2} & \frac{1}{s} \omega_{m+1}^{2m-2} & \omega_{m+2}^{2m-2} & \dots & \omega_{2m}^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^m & \dots & \omega_{m-1}^m & \omega_m^m & \omega_{m+1}^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s \omega_m^m & \frac{1}{s} \omega_{m+1}^m & \omega_{m+2}^m & \dots & \omega_{2m}^m \end{vmatrix},$$

где  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2m}$  корни  $2m$ -ой степени из единицы, занумерованные в порядке возрастания действительной части. Проводя элементарные вычисления, получим следующие значения для величин  $\theta_0, \theta_1$  и  $\theta_{-1}$ :

$$\theta_0 = 0;$$



$$\theta_1 = \begin{vmatrix} \omega_1^{2m-1} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-1} & \omega_{m+1}^{2m-1} \\ \omega_1^{2m-2} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-2} & \omega_{m+1}^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^m & \dots & \omega_{m-1}^m & \omega_m^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_m^{2m-1} & \omega_{m+2}^{2m-1} & \dots & \omega_{2m}^{2m-1} \\ \omega_m^{2m-2} & \omega_{m+2}^{2m-2} & \dots & \omega_{2m}^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_m^m & \omega_{m+2}^m & \dots & \omega_{2m}^m \end{vmatrix} \quad (18)$$

$$\theta_{-1} = \begin{vmatrix} \omega_1^{2m-1} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-1} & \omega_m^{2m-1} \\ \omega_1^{2m-2} & \dots & \omega_{m-1}^{2m-2} & \omega_m^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^m & \dots & \omega_{m-1}^m & \omega_m^m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{m+1}^{2m-1} & \omega_{m+2}^{2m-1} & \dots & \omega_{2m}^{2m-1} \\ \omega_{m+1}^{2m-2} & \omega_{m+2}^{2m-2} & \dots & \omega_{2m}^{2m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{m+1}^m & \omega_{m+2}^m & \dots & \omega_{2m}^m \end{vmatrix} \quad (19)$$

Определители, стоящие в правых частях равенств (18) и (19) будучи определителями Ван-дер-Монда, всегда отличны от нуля. Регулярность условий (5) доказана, нормированность их очевидна. В этом случае справедлива следующая асимптотическая формула для собственных чисел  $\lambda_n$ :

$$\lambda_n = O(n^{2m}). \quad (20)$$

Мы можем записать асимптотические формулы (см. [3], формулы (77), стр. 13) для функции  $y(x)$  и ее производных  $y^{(k)}(x)$ :

$$y_n(x) = C_1^{(0)} e^{2\pi i x n} + C_2^{(0)} e^{-2\pi i x n} + O\left(\frac{1}{n}\right); \quad (21)$$

$$\frac{d^k y_n(x)}{dx^k} = \left[ C_1^{(k)} e^{2\pi i x n} + C_2^{(k)} e^{-2\pi i x n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \rho_n^k, \quad (22)$$

где

$$\rho_n = \frac{1}{\omega_n} [2\pi n i + \ln_0 \xi],$$

а  $C_1^{(k)}$  и  $C_2^{(k)}$  — константы, не зависящие от номера  $n$  и коэффициентов дифференциального выражения  $l(y)$ . Функция

$$y_n(x) = C_1^{(0)} e^{2\pi i x n} + C_2^{(0)} e^{-2\pi i x n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

вообще говоря, не является нормированной. Норма этой функции равна

$$\|y_n(x)\| = \sqrt{|C_1^{(0)}|^2 + |C_2^{(0)}|^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{|C_1^{(0)}|^2 + |C_2^{(0)}|^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

так что нормированная собственная функция имеет вид

$$y_n(x) = \frac{C_1^{(0)} e^{2\pi i x n} + C_2^{(0)} e^{-2\pi i x n}}{\sqrt{|C_1^{(0)}|^2 + |C_2^{(0)}|^2}} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Асимптотическое выражение для  $k$ -ой производной нормированной функции будет иметь вид

$$y_n^{(k)}(x) = \frac{C_1^{(k)} e^{2\pi i x n} + C_2^{(k)} e^{-2\pi i x n}}{\sqrt{|C_1^{(k)}|^2 + |C_2^{(k)}|^2}} \rho_n^k + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Пользуясь только что полученными асимптотическими формулами\* можно найти следующую оценку для величины  $\|By_n\|^2$ :

$$\|By_n\|^2 = |y(1)|^2 + \dots + |y^{m-1}(1)|^2 + |y(0)|^2 + \dots + |y^{(m-1)}(0)|^2 \leq C |\rho_n^{m-1}|^2 \leq C_1 n^{2(m-1)}. \quad (23)$$

Для собственных значений  $\lambda_n$  выполняются условия (10) статьи [1]. В самом деле, на основании формул (20) и (23) можно гарантировать сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|By_n\|^2}{\lambda_n} < \infty.$$

Мы доказали таким образом утверждение:

Т е р е м а. Дифференциальное уравнение

$$(-1)^m (p_0(x) y^{(m)}(x))^{(m)} + \dots + p_m(x) y(x) = \lambda y(x), \quad (24)$$

коэффициенты  $p_k(x)$  которого имеют непрерывные производные до  $m-k$ -го порядка включительно и удовлетворяют условиям (1) и (13), обладают нетривиальными решениями, соответствующими счетному множеству собственных значений, удовлетворяющими граничным условиям:

$$\lambda^{[2m-k-1]} y(1) = \sum_{l=1}^{m-1} p_{kl} y^{(l)}(1) + \sum_{l=m}^{2m-1} p_{kl} y^{[l-m]}(0), \quad \kappa = 1, 2, \dots, m, \quad (25)$$

$$-\lambda^{[2m-k-1]} y(0) = \sum_{l=1}^{m-1} p_{kl} y^{(l)}(0) + \sum_{l=m}^{2m-1} p_{kl} y^{[l-m]}(0). \quad (26)$$

( $\kappa = m, m+1, \dots, 2m-1$ ).

Собственные значения уравнения (24) могут иметь две точки сгущения: 0 и  $\infty$ , причем существует не более чем конечное число комплексных собственных значений. Собственные и присоединенные функции задачи (24), (26) и (25) образуют полную систему в пространстве  $L_2(0, 1)$ .

В заключение автор выражает искреннюю благодарность руководителю С. Г. Крейну за постоянную помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аскеров Н. К., Крейн С. Г. и Лаптев Г. И. "ДАН СССР", т. 115, № 3: 1964.
2. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, II. Матем. сб. 21 (63), 1947.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1964.

Н. К. Эскеров

Сэрһэд шэртиндэ параметр олан ади дифференсиал тэнлик үчүн сэрһэд мәсәләси

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә өз-өзүнә гошма олан  $2m$  тәртибли ади дифференсиал тэнлијин:

$$(-1)^m (p_0(x) y^{(m)}(x))^{(m)} + \dots + p_m(x) y(x) = \lambda y(x) \quad (1)$$



$[0, 1]$  парчасында  $\lambda T u = \sigma B u$  (2)  
сәһәд шәртини өдәјән һәлл верилмишдир. Мә'лум олмушдур ки,  
(1) тәнлијинин мәхсуси әдәдләри 0 вә  $\infty$ -а јығылыр вә јалныз сонлу  
сајда комплекс мәхсуси әдәдләри ола биләр. (1) — (2) мәсәләләринин  
мәхсуси вә бирләшмиш функцијалары  $L_2(0, 1)$  фәзасында долу сис-  
тем әмәлә кәтирир.

Ариф ДЖАФАРОВ

# О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ СРЕДНИМИ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СУММАМИ ЕЕ РЯДА ФУРЬЕ— ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля:

$$U''(x) + [\lambda - B(x)] U(x) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} U'(0) - h U(0) = 0, \\ U'(\pi) + H U(\pi) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функция  $B(x)$  задана и непрерывна на  $[0, \pi]$ ;  $h$  и  $H$  — вещественные числа (необязательно положительные).

Как известно [1], задача (1) — (2) имеет бесконечную последовательность простых собственных чисел

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$$

и соответствующие этим числам собственные функции

$$U_0(x), U_1(x), U_2(x), \dots,$$

которые образуют на  $[0, \pi]$  ортогональную систему. Отметим, что теория приближения функций линейными комбинациями функций Штурма—Лиувилля имеет много общего с теорией приближения функций тригонометрическими полиномами. В этом направлении различными авторами были получены интересные и важные результаты. В частности, имеют место следующие теоремы из работы [2] Г. И. Натансона.

**Теорема А.** Пусть функция  $B(x)$  в уравнении (1) непрерывна. Тогда для любой непрерывной на  $[0, \pi]$  функции  $f(x)$  будет

$$E_{n+1}^{SL}(f) = O(1) \left[ \omega\left(f; \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \|f\| \right],$$

где для величины  $O(1)$  имеется оценка, которая не зависит ни от  $n$ , ни от  $f(x)$ .

**Теорема Б.** Пусть функция  $B(x)$  в уравнении (1) имеет  $r - 1$  производных ограниченной вариации (в случае  $r = 1$  дополнительно предполагается непрерывность  $B^{(0)}(x) = B(x)$ ). Если  $f(x)$  задана на  $[0, \pi]$  и имеет на этом отрезке  $r$  производных, причем  $f^{(r)}(x)$  непрерывна, и функции

$$L^{[i]}f \left( i = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{r-1}{2} \right] \right),$$

где

$$L^{[0]}f = f(x), L^{[1]}f = f''(x) - B(x)f(x), L^{[i]}f = L^{[1]}(L^{[i-1]}f),$$



удовлетворяют граничным условиям (2), то

$$E_{n+1}^{SL}(f) = O(n^{-r}) \left[ \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^r \|f^{(m)}\| \right].$$

В этих теоремах положено

$$\|f\| = \max |f(x)|, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\omega(f; \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|;$$

$$E_n^{SL}(f) = \inf_{c_k} \left\{ \max_{0 \leq x \leq \pi} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k U_k(x) \right| \right\}.$$

Г. И. Натансоном же [3] метод Бернштейна—Рогозинского был применен к суммированию рядов Фурье—Штурма—Лиувилля и установлен порядок приближения функций суммами Бернштейна—Рогозинского (так называемой экстраполированной задачи Штурма—Лиувилля). Венгерские математики G. Freud и M. Sallay [4] исследовали скорость сходимости разложения функций по собственным функциям Штурма—Лиувилля.

В настоящей заметке изучается порядок приближения непрерывной на  $[0, \pi]$  функции средними арифметическими суммами ее ряда Фурье—Штурма—Лиувилля:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k U_k(x), \quad \text{где } a_k = \int_0^{\pi} f(t) U_k(t) dt; \quad (3)$$

предполагая, что система  $\{U_k(x)\}$  нормирована. Мы покажем, что справедливо следующая теорема, являющаяся аналогом соответствующей теоремы С. Н. Вернштейна [6] для тригонометрических рядов Фурье.

**Теорема.** Предположим, что функция  $B(x)$  в уравнении (1) имеет ограниченную производную. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$  и  $\sigma_n(f; x)$  — средняя арифметическая ряда (3), т. е.

$$\sigma_n(f; x) = \frac{S_0(f; x) + S_1(f; x) + \dots + S_n(f; x)}{n+1},$$

где

$$S_k(f; x) = a_0 U_0(x) + a_1 U_1(x) + \dots + a_k U_k(x).$$

Тогда

$$\|f - \sigma_n(f)\| \leq \begin{cases} \frac{c_1(\alpha)}{n^\alpha}, & \text{если } \omega(f; \delta) = O(\delta^\alpha), 0 < \alpha < 1; \\ \frac{c_2 \ln n}{n}, & \text{если } \omega(f; \delta) = O(\delta); \\ \frac{c_3}{n}, & \text{если существует } f'(x), \omega(f'; \delta) = O[\varphi(\delta)], \end{cases}$$

функция  $\varphi(\delta)$  такая, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) < \infty$ , и функция  $f(x)$  удовлетворяет граничным условиям (2), т. е.

$$f'(0) - hf(0) = 0$$

$$f'(\pi) + Hf(\pi) = 0.$$

Введем для рассмотрения суммы Валле—Пуссена:

$$\sigma_{n,m}(f; x) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n-m}^n S_k(f; x),$$

$$(m = 0, 1, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots)$$

где  $S_k(f; x)$  —  $k$ -ая частичная сумма ряда (3) функции  $f(x)$ .

Как видно,

$$\sigma_{n,n}(f; x) = \sigma_n(f; x), \quad \sigma_{n,0}(f; x) = S_n(f; x),$$

и если  $f(x)$  — некоторая линейная комбинация первых  $\mu + 1$  собственных функций Штурма—Лиувилля, то при  $n - m \geq \mu$

$$\sigma_{n,m}(f; x) = f(x).$$

В предположении, что функция  $B(x)$  в уравнении (1) имеет ограниченную производную, покажем, что суммы Валле—Пуссена удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_{n,m}(f; x)| \leq C \frac{2n - m + 1}{m + 1} \|f\|, \quad (4)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $n$  и  $m$ . В самом деле, пусть  $S_n^*(f; x)$  —  $n$ -ая частичная сумма косинус ряда Фурье функции  $f(x)$ . В таком случае

$$S_n(f; x) - S_n^*(f; x) = \int_0^{\pi} \Phi_n(x, t) f(t) dt, \quad (5)$$

где

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k(x) U_k(t) - \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \cos kx \cos kt \right\}.$$

Но, как доказано [1] в предположении, сделанном относительно функции  $B(x)$ , существует такая постоянная  $M$ , не зависящая от  $n, x$  и  $t$ , что

$$|\Phi_n(x, t)| < M. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получаем неравенство

$$|S_n(f; x) - S_n^*(f; x)| < \pi M \|f\|,$$

откуда следует, что

$$|\sigma_n(f; x) - \sigma_n^*(f; x)| < \pi M \|f\|, \quad (7)$$

где  $\sigma_n^*(f; x)$  — сумма Фейера косинус ряда Фурье функции  $f(x)$ . Учитывая хорошо известное неравенство для  $\sigma_n^*(f; x)$  [6] и неравенство (7), получаем

$$|\sigma_n(f; x)| \leq |\sigma_n(f; x) - \sigma_n^*(f; x)| + |\sigma_n^*(f; x)| \leq (\pi M + 3) \|f\|.$$

Таким образом,

$$|\sigma_n(f; x)| \leq C \|f\|,$$

откуда следует неравенство (4) в силу следующей связи между  $\sigma_{n,m}(f; x)$  и  $\sigma_n(f; x)$ :

$$\sigma_{n,m}(f; x) = \frac{n+1}{m+1} \sigma_{n+1}(f; x) - \frac{n-m}{m+1} \sigma_{n-m}(f; x).$$

Посредством неравенства (4) нетрудно установить следующее важное свойство сумм Валле—Пуссена (предполагая, что функция  $B(x)$  в уравнении (1) имеет ограниченную производную):

$$\|f - \sigma_{n,m}(f)\| \leq C \frac{n+1}{m+1} E_{n-m+1}^{SL}(f), \quad (8)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $n$  и  $m$ .

Теперь мы получим оценку отклонения для средних арифметических сумм  $\sigma_n(f; x)$ . Пусть функция  $B(x)$  в уравнении (1) имеет огра-



ниченную производную. Тогда для любой непрерывной на  $[0, \pi]$  функции  $f(x)$  справедливо неравенство

$$\|f - \sigma_{n-1}(f)\| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=1}^n E_k^{SL}(f), \quad (9)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $n$ . Это неравенство аналогично соответствующему результату С. Б. Стечкина [5] для тригонометрических рядов Фурье.

Доказательство основывается на применении неравенства (8). Зафиксировав натуральное число  $n$ , можно написать

$$f - \sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n} \left\{ [f - S_0(f)] + \sum_{\nu=1}^{p-1} \sum_{k=2^\nu-1}^{2^\nu-1} [f - S_k(f)] + \sum_{k=2^{p-1}}^{n-1} [f - S_k(f)] \right\}, \quad (10)$$

где целое  $p \geq 0$  находится из условий

$$2^p \leq n < 2^{p+1};$$

в случае  $n=1$  обе суммы справа являются пустыми. После этого правая часть (10) выражается через суммы Валле—Пуссена в следующем виде:

$$f - \sigma_{n-1}(f) = \frac{1}{n} \left\{ [f - \sigma_{0,0}(f)] + \sum_{\nu=1}^{p-1} 2^{\nu-1} [f - \sigma_{2^\nu-1, 2^\nu-1}(f)] + (n - 2^{p-1}) [f - \sigma_{n-1, n-2^{p-1}-1}(f)] \right\}.$$

Таким образом, все сводится к использованию оценки (8), как это делается в работе С. Б. Стечкина [5].

Из неравенства (9), теорем А и Б следует теорема, сформулированная в начале заметки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям. Гостехиздат. М.—Л., 1950.
2. Натансон Г. И. ДАН СССР, т. 114, № 2, 1957.
3. Натансон Г. И. О некоторых новых применениях метода суммирования Бернштейна—Рогозинского. Уч. зап. Лен. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, серия матем. т. 166, 1958.
4. Freud G. et Sallay M. Тр. Матем. ин-та Академии наук Венгрии, т. VI, серия А, вып. 3, 1961.
5. Стечкин С. Б. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LXII, 1961.
6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, М. Л. 1949.

Ариф Чэфаров

Функция Фурье—Штурм—Лиувил сырасынын орта эдэди чэмлэри, васитэсилэ жахынлашдырылмасынын тэртиби наггында

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә  $[0, \pi]$  парчасында тәҗин олунмуш  $f(x)$  функцијасынын (1) — (2) мәсәләсинин мәхсуси  $U_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) һәлләри үзрә Фурје аҗрылышына, Јәни Фурје—Штурм—Лиувил (Ф.—Ш.—Л.) сырасына бахылыр.

Мәлумдур ки, тригонометрик Фурје сырасынын хусуси чәмләриндән дүзәлдилмиш чәмләр васитәсилә жахынлашдырылманын тэртиби кифәјәт гәдәр јахшы өјрәнилмишдир. Буну функцијанын Ф.—Ш.—Л. сырасы наггында демәк олмаз. Бу истигамәтдә бизә мәлум олан ишләрдә функцијанын Ф.—Ш.—Л. сырасынын Бернштейн—Рогозински (бах: [3]) вә хусуси чәмләри (бах: [4]) васитәсилә жахынлашдырылмасынын тэртиби өјрәнилмишдир.

Бу мәгаләдә  $[0, \pi]$  парчасында кәсилмәјән функцијанын Ф.—Ш.—Л. сырасынын орта эдәди чәмләри васитәсилә жахынлашдырылмасынын тэртиби тәдгиг олунур. Бунун үчүн уҗун мәсәлә әввәлчә Валле—Пуссен чәмләри үчүн өјрәнилир. Алынган нәтичәләр (8), (9) вә мәгаләнин әввәлиндә верилмиш теоремдәки бәрәбәрсизликләрдә ифадә олунмушдур.



Л. Г. ЛАБСКЕР

# СУММАТОРНЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФЕЙЕРА—ВАЛЛЕ—ПУССЕНА

Во многих вопросах теории приближения функций приходится сталкиваться с интегральным оператором Фейера—Валле—Пуссена:

$$F_n(f; x) = \frac{2}{\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t}{t} \right)^2 dt,$$

поэтому не случайно, что его аппроксимативные свойства достаточно полно исследованы в литературе. В связи с этим, естественно, возникает интерес к изучению аппроксимативных свойств сумматорного аналога оператора  $F_n(f; x)$ , который мы строим в следующем виде:

$$\tilde{F}_n(f; x) = \frac{4}{n(2n-1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+t_m^{(n)}) \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{t_m^{(n)}} \right)^{2**}, \quad (1)$$

$$\text{где } t_m^{(n)} = \frac{2\pi m}{2n-1}.$$

Настоящая статья и посвящена этому вопросу.

За область определения оператора  $\tilde{F}_n(f; x)$  возьмем множество заданных на вещественной оси функций  $f(x)$ , каждая из которых обладает при некоторых  $M$  и  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$ , свойством

$$|f(x)| \leq M(1+|x|^\alpha), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Для таких функций ряд в правой части равенства (1), очевидно, сходится в каждой точке  $x$ .

Если функция  $f(x)$ , обладающая свойством (2), имеет период  $2\pi$ , то нетрудно показать, аналогично интегральному случаю (см. [1], стр. 125), что

$$\tilde{F}_n(f; x) = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} f(x+t_m^{(n)}) \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{\sin \frac{1}{2} t_m^{(n)}} \right)^2,$$

\* См., например, [1] стр. 125.

\*\* Асимптотическое равенство для приближения в точке  $x$  такими операторами ограниченных на вещественной оси функций, у которых в точке  $x$  существуют правая и левая конечные производные, получено в [2] (см. стр. 101, теорема 10).

В частности

$$\tilde{F}_n(1; x) = \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{\sin \frac{1}{2} t_m^{(n)}} \right)^2. \quad (3)$$

Но правая часть [3] равна 1, как это следует из известного (см., например, (3), стр. 564) тождества

$$1 = \frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left[ \frac{\sin \frac{q+1}{2} (x-x_k)}{\sin \frac{x-x_k}{2}} \right]^2, \quad q \leq n, \quad x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$$

при замене  $n$  на  $n-1$  и  $q=n-1$ ,  $k=m$ ,  $x=0$ .  
Итак,

$$\tilde{F}_n(1; x) = 1. \quad (4)$$

Теорема 1. Если функция  $f(x)$ , обладающая свойством (2) удовлетворяет в некоторой точке  $x$  условию

$$\lim_{h \rightarrow +0} [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] = 0, \quad (5)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(f; x) = f(x)^*.$$

Доказательство. В силу (5) для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $0 < h < \delta$

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Разобьем числа  $m=1, 2, \dots$  на две группы:  $A$  и  $B$ , отнеся  $m$  в группу  $A$ , если  $t_m^{(n)} < \delta$ , и в группу  $B$ , если  $t_m^{(n)} \geq \delta$ . После этого, благодаря (4), можем записать

$$|\tilde{F}_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{4}{n(2n-1)} \left\{ \sum_{m \in A} + \sum_{m \in B} \right\} |f(x+t_m^{(n)}) - 2f(x) + f(x-t_m^{(n)})| \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{t_m^{(n)}} \right)^2. \quad (7)$$

Используя (6), для достаточно больших  $n$  получаем

$$\frac{4}{n(2n-1)} \sum_{m \in A} \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{4}{n(2n-1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{\sin \frac{1}{2} t_m^{(n)}} \right)^2 = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

А в силу (2) и сходимости рядов  $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2}$ ,  $\sum_{m=1}^{\infty} m^{\alpha-2}$  для тех же  $n$  получим

\* Отметим в связи с теоремой 1, что теорема Хсю об аппроксимации неограниченных функций класса  $\text{Lip } \alpha$  линейными положительными операторами ([5], теорема 2) неприменима к операторам  $\tilde{F}_n(f; x)$  (хотя они и являются линейными положительными операторами), так как она предполагает принадлежность функций  $x$  и  $x^2$  области определения этих операторов, что в данном случае не так.



$$\frac{4}{n(2n-1)} \sum_{m \in B} \leq \frac{8M(1+|x|^a)}{\pi^2} \sum_{m > \frac{\delta(n-1)}{2\pi}} m^{-2} +$$

$$+ \frac{4M}{\pi^{2-a} n^a} \sum_{m > \frac{\delta(n-1)}{2\pi}} m^{a-2} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7), заканчиваем доказательство теоремы. Что касается условия (5), то оно имеет место во всякой точке непрерывности функции  $f(x)$ , а также и в точках разрыва первого рода, если

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)],$$

$$\text{где } f(x+0) = \lim_{t \rightarrow x+0} f(t), \quad f(x-0) = \lim_{t \rightarrow x-0} f(t).$$

**Теорема 2.** Если функция  $f(x)$ , обладающая свойством (2), непрерывна в интервале  $(a, b)$  (конечном или нет), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(f; x) = f(x)$$

равномерно на любом  $[a', b']$ , находящемся строго внутри  $(a, b)$ .

В самом деле, так как  $f(x)$  непрерывна в  $(a, b)$  и  $a < a' < b' < b$ , то для  $[a', b']$  можно указать в зависимости от  $\epsilon > 0$  такое  $\delta > 0$ , что неравенство (6) будет иметь место одновременно для всех  $x \in [a', b']$ , а потому одновременно для всех  $x \in [a', b']$  справедливо также и неравенство (8). Так как при  $x \in [a', b']$  будет  $|x| \leq \max\{|a'|, |b'|\}$ , то и неравенство (9) выполняется сразу для всех  $x \in [a', b']$ .

**Теорема 3.** Если для функции  $f(x)$ , обладающей свойством (2), условие (5) выполняется равномерно на всей оси, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{F}_n(f; x) - f(x)}{1 + |x|^a} = 0$$

равномерно на всей оси.

**Доказательство.** Так как (5) выполняется равномерно на всей оси, то (6) имеет место одновременно для всех  $x \in (-\infty, \infty)$ . В силу этого оценка (8) выполняется также одновременно для всех  $x \in (-\infty, \infty)$ , благодаря чему получаем сразу для всех  $x \in (-\infty, \infty)$  и достаточно больших  $n$

$$\frac{4}{n(2n-1)(1+|x|^a)} \sum_{m \in A} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (10)$$

Аналогично (9) имеем

$$\frac{4}{n(2n-1)(1+|x|^a)} \sum_{m \in B} \leq \frac{8M}{\pi^2} \sum_{m > \frac{\delta(n-1)}{2\pi}} m^{-2} +$$

$$+ \frac{4M}{\pi^{2-a} n^a} \sum_{m > \frac{\delta(n-1)}{2\pi}} m^{a-2} \quad (11)$$

при всех  $x \in (-\infty, \infty)$  и достаточно больших  $n$ . Из (10) и (11) получаем теорему. Условие (5) выполняется равномерно на всей оси например, в случае равномерной непрерывности  $f(x)$  на всей оси

Из теоремы 3, в частности для ограниченных на  $(-\infty, \infty)$  функций  $f(x)$ , для которых условие (5) выполняется равномерно на всей оси, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{F}_n(f; x) = f(x) \quad (12)$$

равномерно на всей оси. Равенство (12) наводит на вопрос: существуют ли неограниченные на  $(-\infty, \infty)$  функции, для которых (12) имеет место равномерно на всей оси? Положительный ответ содержится в следующей теореме.

**Теорема 4.** Пусть

$$U_n(D; \alpha) = \sup_x \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |\tilde{F}_n(f; x) - f(x)| \right\},$$

где  $\sup$  берется по всем функциям  $f(x)$ , обладающим свойством (2) и удовлетворяющим условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Dh^a, \quad -\infty < x < \infty, \quad h > 0, \quad 0 < \alpha < 1; \quad (13)$$

$D$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $x$  и  $h$ .

Тогда

$$U_n(D; \alpha) = DC(\alpha) n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (14)$$

где

$$C(\alpha) = \frac{2}{\pi^{2-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{2}}{m^{2-\alpha}}.$$

**Доказательство.** Нетрудно видеть, что с одной стороны

$$U_n(D; \alpha) \leq \frac{2^\alpha D(2n-1)^{1-\alpha}}{\pi n^{2-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}}, \quad (15)$$

а с другой функция

$$\theta(x) = \frac{D}{2} |x|^\alpha, \quad -\infty < x < \infty.$$

обладает свойством (2) и удовлетворяет условию (13). Для нее

$$\tilde{F}_n(\theta; 0) - \theta(0) = \frac{2^\alpha D(2n-1)^{1-\alpha}}{n \pi^{2-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}},$$

а потому

$$U_n(D; \alpha) \geq \frac{2^\alpha D(2n-1)^{1-\alpha}}{n \pi^{2-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}}. \quad (16)$$

Неравенства (15) и (16) дают

$$U_n(D; \alpha) = \frac{2^\alpha D(2n-1)^{1-\alpha}}{n \pi^{2-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}}, \quad (17)$$

\* Этот результат аналогичен результатам С. М. Никольского [4] об асимптотике меры приближения суммами Фейера и тригонометрическими интерполяционными полиномами Фейера класса  $C_{2\pi} \cap \text{Lip } \alpha$ .



Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1} = \sin^2 \frac{\pi m}{2}$$

и ряд в правой части (17) сходится равномерно относительно  $n$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{2}}{m^{2-\alpha}}.$$

Отсюда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n \pi m}{2n-1}}{m^{2-\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi m}{2}}{m^{2-\alpha}} + \xi_n, \quad (18)$$

где  $\xi_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Далее нетрудно видеть, что

$$\frac{(2n-1)^{1-\alpha}}{n} = \frac{2^{1-\alpha}}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Подстановка (18) и (19) в (17) дает (14). Теорема доказана.

Так как функции, удовлетворяющие на всей оси условию Липшица порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) с постоянной  $\frac{D}{2}$ , обладают свойством (2) и удовлетворяют условию (13), а функция  $\theta(x) \in \text{Lip}_{\frac{D}{2}} \alpha$ , то величина

$$U_n^*(D; \alpha) = \sup_{f \in \text{Lip}_{D/2}} \alpha \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |\tilde{F}_n(f; x) - f(x)| \right\}$$

имеет такой же порядок стремления к нулю, что и  $U_n(D; \alpha)$ .

**Теорема 5.** Если функция  $f(x)$ , обладающая свойством (2), измерима на вещественной оси, то для любого измеримого ограниченного множества  $E$  и  $p \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{F}_n(f; x) - f(x)\|_{L^p(E)} = 0.$$

Доказательство ведется аналогично доказательству теоремы 1, с использованием свойства непрерывности нормы относительно сдвига аргумента функции из  $L^p(E)$ ,  $p \geq 1$ .

Предположим теперь, что

$$f(x) \in L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty), \quad p \geq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

т. е.

$$\|f(x)\|_{L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{|f(x)|}{1+|x|^\alpha} \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

В таком случае нетрудно видеть, что ряд в правой части (1) сходится в пространстве  $L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty)$  к некоторой функции  $\tilde{F}_n(x) = \tilde{F}_n(f; x)$ , которая в силу полноты этого пространства принадлежит ему же. Итак, рассматривая равенство (1) в смысле сходимости ряда в его правой части по метрике пространства  $L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty)$ , оказывается справедливой следующая

**Теорема 6.** Если  $f(x) \in L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty)$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{F}_n(f; x) - f(x)\|_{L_{1+|x|^\alpha}^p(-\infty, \infty)} = 0.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., 1947.
2. Лабскер Л. Г. Некоторые асимптотические соотношения для приближения функций сумматорными аналогами интегральных операторов. В сб. „Некоторые вопросы функционального анализа и его применений“. Баку, 1965.
3. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.
4. Никольский С. М. Изв. АН СССР, 4, 1940.
5. Hsu L. C. Approximation of non-bounded continuous functions by certain sequences linear positive operators or polynomials. Studia Math., т. XXI, 1961.

Л. Г. Лабскер

## Фејер-Валле-Пуссен интеграл операторунун чэмлэмэ аналогу

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә

$$\tilde{F}_n(f; x) = \frac{n}{n(2n-1)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x + t_m^{(n)}) \left( \frac{\sin \frac{n}{2} t_m^{(n)}}{t_m^{(n)}} \right)^2, \quad t_m^{(n)} = \frac{2\pi m}{2n-1} \quad (1)$$

операторунун бәзи хассәләри верилмишдир.

Бурада (1) оператору Фејер-Валле-Пуссен интеграл операторунун чәм аналогудур.



А. Г. МУГАЛОВ

# ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ПОД ЗНАКОМ ИНТЕГРАЛА В СМЫСЛЕ ЧЕЗАРО—ДАНЖУА

В этой статье мы будем изучать повторные интегрируемости функции в смысле Чезаро—Данжуа. В работе А. Г. Джваршейшвили [2] рассмотрена такая же задача для интегралов Данжуа. Обозначим через  $\{A \cdot B\}$  произведение множеств  $A \subset [a, b]$  и  $B \subset [c, d]$ .

Предположим, что на двумерном интервале  $R = [(a, b) (c, d)]$  определена измеримая функция  $f(x, y)$ , которая интегрируема в смысле Чезаро—Данжуа по каждому переменному в отдельности.

Теорема 1. Пусть  $E$  есть некоторое измеримое подмножество интервала  $(a, b)$ . Если:

1) для всякого интервала  $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$  функция

$$\varphi(x) = (c_1 - D) \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$$

суммируема на множестве  $E$  и повторный интеграл

$$\int_E dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$$

есть  $c_1$ —непрерывная функция относительно от  $\gamma$  и  $\delta$  из сегмента  $[c, d]$ ;

2) всякое замкнутое множество  $\Phi \subset (c, d)$  содержит такую порцию\*  $Q = \Phi \cdot (\gamma, \delta)$ , что функция  $f(x, y)$  суммируема на множестве  $[E \cdot (c, d)] \cdot [Q \cdot (a, b)]$ ;

3) последовательность интегралов

$$\left\{ \int_E dx \sum_{k=1}^n (c_1 - D) \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x, y) dy \right\}, n = 1, 2, \dots, e \in E,$$

где  $\{\gamma_k, \delta_k\}$ —смежные интервалы множества  $Q$ , равномерно абсолютно непрерывна на множестве  $E$  и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\gamma_k < y < \delta_k} |c_1(F, \gamma_k, y) - F(x, \gamma_k)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\gamma_k < y < \delta_k} |c_1(F, \delta_k, y) - F(x, \delta_k)|$$

\* Определение порции см. в кн. С. Сакса „Теория интеграла“, стр. 67.

сходятся почти всюду для всех значений  $x \in E$ , где

$$F(x, y) = (c_1 - D) \int_{\gamma}^{\delta} f(x, t) dt$$

и

$$c_1(F, \gamma_k, y) = \frac{1}{y - \gamma_k} (D) \int_{\gamma_k}^y F(x, t) dt,$$

$$c_1(F, \delta_k, y) = \frac{1}{y - \delta_k} (D) \int_{\delta_k}^y F(x, t) dt,$$

то существует повторный интеграл

$$\int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x, y) dx$$

и справедливо равенство

$$\int_E dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x, y) dx. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть  $F$  есть семейство таких интервалов  $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ , для любых подынтервалов которого справедливо равенство (3).

Семейство  $F$  обладает следующими условиями:

( $\alpha$ ). Если интервалы  $(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_2, \gamma_3)$  принадлежат семейству  $L$ , то  $(\gamma_1, \gamma_3) \in L$ .

( $\beta$ ). Если интервал  $(\gamma, \delta) \in L$ , то любой его подынтервал также принадлежит семейству  $L$ . Справедливость свойств  $\alpha$  и  $\beta$  очевидна.

( $\gamma$ ). Если любые строго внутренние подынтервалы интервала  $(\gamma, \delta)$  принадлежат семейству  $L$ , и  $(\gamma, \delta) \in L$ .

Пусть  $\gamma_0 \in (\gamma, \delta)$ ,  $\gamma < \gamma_0 < \delta$ . Интервал  $(\gamma + t, \gamma_0)$  есть подынтервал интервала  $(\gamma, \gamma_0)$ , поэтому  $(\gamma + t, \gamma_0) \in L$ , тогда

$$\int_E dx \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} f(x, y) dy = \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x, y) dx. \quad (4)$$

Проинтегрируем равенство (4) в смысле Данжуа на интервале  $(0, h)$  и умножим на  $\frac{1}{h}$ , тогда

$$\frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_E dx \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} f(x, y) dy = \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x, y) dx. \quad (5)$$

По условию теоремы для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой  $\delta(\varepsilon)$ , что при  $0 < h \leq \delta(\varepsilon)$  имеем

$$\frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_E dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} f(x, y) dy - \varepsilon \leq \Phi(\gamma_0) - \Phi(\gamma) \leq$$

$$\leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_E dx \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} f(x, y) dy + \varepsilon,$$

где

$$\Phi(y) = \int_E dx \int_{\gamma}^y f(x, \tau) d\tau$$



Тогда из равенства (5) получаем

$$\Phi(\gamma_0) - \Phi(\gamma) - \varepsilon \leq \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x,y) dx \leq \Phi(\gamma_0) - \Phi(\gamma) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma_0) - \Phi(\gamma) - \varepsilon &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x,y) dx \leq \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x,y) dx \leq \Phi(\gamma_0) - \Phi(\gamma) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  произвольно малое, поэтому отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (D) \int_0^h dt \int_{\gamma+t}^{\gamma_0} dy \int_E f(x,y) dx &= \Phi(\gamma_0) - \\ &- \Phi(\gamma) = \int_{\gamma}^{\gamma_0} dy \int_E f(x,y) dx. \end{aligned}$$

Аналогично это равенство можно доказать для интервала  $(\gamma_0, \delta)$ . По теореме IX (см. [1], стр. 240) и в силу свойства (а) для интеграла в смысле Чезаро—Данжуа существует повторный интеграл

$$\int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x,y) dx$$

и

$$\int_E dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x,y) dx,$$

то есть  $(\gamma, \delta) \in L$ .

(б). Если смежные интервалы совершенного множества  $\Phi$  принадлежат семейству  $L$ , то существует такой интервал  $(\gamma, \delta) \in L$ , что множество  $Q = \Phi \cdot (\gamma, \delta)$  непустое.

В самом деле, по условию теоремы существует такой интервал  $(\gamma, \delta)$ , что пересечение  $Q = \Phi \cdot (\gamma, \delta)$  непустое и выполняется условие 2) нашей теоремы. Тогда по свойству  $B$  интеграла в смысле Чезаро—Данжуа (см [1], стр. 219) почти для всех  $x \in E$  имеем

$$(c_1 - D) \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy = (L) \int_Q f(x,y) dy + \sum_{k=1}^{\infty} (c_1 - D) \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x,y) dy,$$

где  $\{\gamma_k, \delta_k\}$  суть смежные интервалы множества  $Q$ .

По теореме Витали (см. [4], стр. 168) о предельном переходе под знаком интеграла Лебега имеем

$$\int_E dx \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x,y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E dx \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x,y) dy.$$

С другой стороны,  $(\gamma_k, \delta_k) \in L$ , поэтому

$$\int_E dx \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x,y) dy = \int_{\gamma_k}^{\delta_k} dy \int_E f(x,y) dx.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \int_E dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy &= \int_E dx \int_Q f(x,y) dy + \\ &+ \int_E dx \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} f(x,y) dy = \int_Q dy \int_E f(x,y) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} dy \int_E f(x,y) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$\Phi_1(y) = \int_c^y d\sigma \int_E f(x,\sigma) dx.$$

тогда по условию (1), (2) теоремы ряды

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\gamma_k < y < \delta_k} |c_1(\Phi_1, \gamma_k, y) - \Phi_1(\gamma_k)|, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\gamma_k < y < \delta_k} |c_1(\Phi_1, \delta_k, y) - \Phi_1(\delta_k)| \end{aligned}$$

сходятся и в силу свойства  $B$  интеграла в смысле Чезаро—Данжуа функция

$$\int_E f(x,y) dx$$

интегрируема на сегменте  $[\gamma, \delta]$  и

$$\begin{aligned} \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x,y) dx &= \int_Q dy \int_E f(x,y) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} dy \int_E f(x,y) dx. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу (6) и (7) имеем

$$\int_E dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy = \int_{\gamma}^{\delta} dy \int_E f(x,y) dx,$$

то есть  $(\gamma, \delta) \in L$ . На основании фундаментальной леммы II Романовского [3] заключаем, что  $(c, d) \in L$ . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть существует повторный интеграл

$$\int_a^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy.$$

Если: 1) всякое замкнутое множество  $E \subset (a, b)$  содержит такую порцию  $p = (\alpha, \beta) \cdot E$ , что интеграл

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y) dy$$

и функции  $f(x,y)$  удовлетворяют всем условиям теоремы 1 по порции  $p$ ;

2) последовательности повторных интегралов

$$\left\{ \int_{\alpha+t}^{\beta-t} dx \int_c^y f(x,y) dy \right\}, \left\{ \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dx \int_c^y f(x,y) dy \right\}$$



равностепенно  $c_1$ -непрерывно и равностепенно  $AcG^*$  ( $c_1$ —смысле) на интервале  $(c, d)$ , где  $\{\alpha_k, \beta_k\}$ —смежные интервалы множества  $p$ , а  $\{(\alpha + t, \beta - t)\}$ —последовательность интервалов, сходящихся при  $t \rightarrow 0$  к интервалу  $(\alpha, \beta)$ , то существует повторный интеграл

$$\int_{\gamma} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$$

и имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\gamma} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть  $L$  есть семейство таких интервалов  $(\alpha, \beta)$ , для любых подынтервалов которого справедливо равенство (8), каков бы ни был интервал  $(\gamma, \delta) \subset (c, d)$ . Очевидно, что интервалы семейства обладают свойствами  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  и  $(\gamma)$ , сформулированными при доказательстве теоремы 1.

( $\delta$ ). Если смежные интервалы совершенного множества  $E$  принадлежат  $L$ , то существует такой интервал  $(\alpha, \beta) \in L$ , что  $p = (\alpha, \beta) \cdot E$  непустое.

В самом деле, для множества  $E$  найдется такой интервал  $(\alpha, \beta)$ , что порция  $p = (\alpha, \beta) \cdot E$  не пуста и будут выполнены все условия теоремы. Тогда

$$(s_1 - D) \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = (L) \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy + \sum_{k=1}^{\infty} (c_1 - D) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy.$$

На основании теоремы 1 имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\gamma} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx. \quad (9)$$

С другой стороны,  $(\alpha_k, \beta_k) \in L$ , поэтому

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\gamma} dy \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx,$$

а здесь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} dy \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx. \quad (10)$$

На основании теоремы о предельном переходе под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа [5] получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} dy \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx = \int_{\gamma} dy \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx,$$

отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} dy \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx = \int_{\gamma} dy \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx. \quad (11)$$

Пусть

$$F_1(x) = \int_a^x dt \int_{\gamma} f(t, y) dy,$$

тогда по условиям теоремы ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |c_1(F_1, \alpha_k, x) - F_1(\alpha_k)|, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |c_1(F_1, \beta_k, x) - F_1(\beta_k)|$$

сходятся.

Таким образом, по свойству  $B$  интеграла в смысле Чезаро—Данжуа функция

$$\varphi(x) = (c_1 - D) \int_{\gamma} f(x, y) dy$$

интегрируема  $c_1 - D$  на сегменте  $[z, \beta]$  и

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy.$$

В силу (9), (10) и (11) имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\gamma} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx + \int_{\gamma} dy \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx.$$

С другой стороны, по свойству  $B$  интеграла в смысле Чезаро—Данжуа получаем

$$(c_1 - D) \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx = (L) \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx + \sum_{k=1}^{\infty} (c_1 - D) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{\gamma} f(x, y) dy = \int_{\gamma} dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx,$$

то есть  $(\alpha, \beta) \in L$ . На основании фундаментальной леммы II Романовского [3] получаем, что  $(a, b) \in L$ . Теорема доказана.

Совершенно аналогичными рассуждениями можно доказать и следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть  $E$  есть измеримое подмножество интервала  $(c, d)$ . Если: 1) для всякого интервала  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  функция

$$\Psi(y) = (c_1 - D) \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$$

суммируема на множестве  $E$  и повторный интеграл

$$\int_E dy \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx$$

есть  $c_1$ -непрерывная функция от  $\alpha$  и  $\beta$  на сегменте  $[a, b]$ ; 2) всякое замкнутое множество  $\Phi \subset (a, b)$  содержит такую порцию



$p = \Phi \cdot (\alpha, \beta)$ , что  $f(x, y)$  суммируема, когда  $x \in p, y \in E$ ; 3) последовательность интегралов

$$\left\{ \int_E dy \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x, y) dx \right\}, e \in E, n = 1, 2, \dots$$

где  $\{(\alpha_k, \beta_k)\}$  — смежные интервалы множества  $p$ , равномерно абсолютно непрерывна на  $E$  и, кроме того, ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |c_1(F, \sigma_k, x) - F(\sigma_k, y)|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha_k < x < \beta_k} |c_1(F, \beta_k, x) - E(\beta_k, y)|$$

сходятся почти для всех  $y \in E$ , где

$$F(x, y) = (c_1 - D) \int_a^x f(t, y) dt,$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^{\beta} dx \int_E f(x, y) dy$$

и имеет место равенство

$$\int_a^{\beta} dx \int_E f(x, y) dy = \int_E dy \int_a^{\beta} f(x, y) dx.$$

**Теорема 4.** Пусть существует повторный интеграл

$$\int_{\gamma}^{\delta} dy \int_a^{\beta} f(x, y) dx.$$

Если: 1) всякое замкнутое множество  $E \subset (c, d)$  содержит такую порцию  $(\gamma, \delta) \cdot E = Q$ , что интеграл

$$\int_a^{\beta} f(x, y) dx$$

и  $f(x, y)$  удовлетворяют условиям теоремы 3 на порции  $Q$ ; 2) последовательности повторных интегралов

$$\left\{ \int_{\gamma+t}^{\delta-t} dy \int_a^x f(\tau, y) d\tau \right\}, \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_k}^{\delta_k} dy \int_a^x f(t, y) dt \right\}$$

равностепенно  $c_1$ -непрерывны и равностепенно  $ACG^*$  ( $c_1$ -смысле) на интервале  $(a, b)$  где  $\{(\gamma_k, \delta_k)\}$  — смежные интервалы множества  $Q$ , а  $\{(\gamma + t, \delta - t)\}$  — последовательность интервалов, сходящихся при  $t \rightarrow 0$  к интервалу  $(\gamma, \delta)$ , то существует повторный интеграл

$$\int_a^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy$$

и

$$\int_{\gamma}^{\delta} dx \int_a^{\beta} f(x, y) dx = \int_a^{\beta} dx \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy.$$

Введем обозначение

$$\varphi(y) = (c_1 - D) \int_a^b f(x, y) dx.$$

Из теоремы 2 или 4 следует

**Теорема 5.** Если: 1)  $f(x, y)$  есть функция класса  $ACG^*$  ( $c_1$ -смысле) на интервале  $(c, d)$  для всякого значения  $x \in (a, b)$ ; 2) функция  $\frac{c_1 \partial f(x, y)}{\partial y}$  удовлетворяет условиям теорем 2 и 4, то

$$c_1 D \varphi(y) = (c_1 - D) \int_a^b \frac{c_1 \partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Sargent W. L. C. A. Descriptive definition of Cesaro—Perron integrals Proc. London math. Soc. (2), 47, Part 3. 1941.
2. Джаваршейшвили А. Г. Тр. Тбилисского матем. ин-та, т. XXV, 1958.
3. Романовский П. И. Essai d'une exposition de l'integrale de Denjoy sans nombres transfinis. Fund. Math. 19, 1932.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
5. Мугалов А. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 1, 1967 (находится к печати).

А. Г. Мугалов

Чезаро-Данжуа мәнада интегралын интегралланмасы  
вə дифференциалланмасы һаггында

## ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә функцијанын Чезаро-Данжуа мәнада икигәт интегралланмасынын мүмкүн олмасы арашдырылмышдыр. Уңун мәсәлә Данжуа интегралы үчүн А.К. Чваршејшвили тәрәфиндән тәтбиг едилмишдир.



Л. Г. МУСТАФАЕВ

# ОБ ИДЕАЛЬНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЯХ ПОЛУГРУД

Настоящая статья посвящена изучению идеальных эквивалентностей Грина [4] в полугрудах. В ней доказывается, что произведение  $d = l \sigma r$  есть отношение эквивалентности. Оказалось, что отношение эквивалентности  $d$  (см. § 1) совпадает с латерально-идеальной эквивалентностью  $\sigma$ . Теоремами 3 и 4 установлено, что произвольная  $i$  простая полугруда распадается на не более чем два двусторонне идеальных класса. В теореме 6 выяснено строение регулярного  $f$ -класса произвольной полугруды  $S$ . Доказано, что в регулярных полугрудах каждый  $d$ -класс содержит не более двух  $r$ -классов (см. теорему 7 § 3).

§ 1. Полугрудой [1, 2] называется множество  $S$ , в которых определена тернарная алгебраическая операция, ставящая в соответствие каждой тройке элементов  $s_1, s_2, s_3 \in S$  элемент  $[s_1 s_2 s_3] \in S$  и удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall s_i \in S [ [s_1 s_2 s_3] s_4 s_5 ] = [ s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5 ] = [ s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5] ]. \quad (1)$$

Непустое подмножество  $A$  полугруды  $S$  называется ее левым (соответственно правым, латеральным) идеалом, если  $[SSA] \subseteq A$  (соответственно  $[ASS] \subseteq A$ ,  $[SAS] \subseteq A$ ). Если подмножество  $A$  полугруды  $S$  является одновременно и левым и правым идеалом, то оно называется двусторонним идеалом полугруды  $S$ . Двусторонний идеал, являющийся и латеральным, называется просто идеалом  $S$ .

Два различных между собой идеала  $T_1$  и  $T_2$  полугруды  $S$  назовем соседними, если один из них  $T_1$  содержит второй  $T_2$ , причем кроме самих  $T_1$  и  $T_2$  в  $S$  не существует такого идеала  $T$ , что  $T_2 \subset T \subset T_1$ . Бинарным отношением в множестве  $S$  называется произвольное подмножество декартова произведения  $S \times S$  [3, 5]. Симметричное, рефлексивное и транзитивное бинарное отношение называется эквивалентностью. Пусть  $a, b$  — некоторые элементы полугруды  $S$ .

Введем в  $S$  следующие идеальные эквивалентности:

$$\begin{aligned} (a, b) \in l &\leftrightarrow \{a\} \cup [SSa] = \{b\} \cup [SSb]; \\ (a, b) \in \sigma &\leftrightarrow \{a\} \cup [SaS] \cup [SSaSS] = \{b\} \cup [SbS] \cup [SSbSS]; \\ (a, b) \in r &\leftrightarrow \{a\} \cup [aSS] = \{b\} \cup [bSS]; \end{aligned} \quad (2)$$

\*  $\forall$  — квантор общности.

\*\*  $\leftrightarrow$  — логическая эквивалентность утверждений.

$$(a, b) \in p \leftrightarrow \{a\} \cup [SSa] \cup [aSS] \cup [SSaSS] =$$

$$= \{b\} \cup [SSb] \cup [bSS] \cup [SSbSS]$$

$$(a, b) \in f \leftrightarrow \{a\} \cup [SSa] \cup [aSS] \cup [SaS] \cup [SSaSS] =$$

$$= \{b\} \cup [SSb] \cup [bSS] \cup [SbS] \cup [SSbSS].$$

Иначе говоря,  $(a, b) \in l$  (соответственно  $\sigma, r, p, f$ ) тогда и только тогда, когда элементы  $a$  и  $b$  порождают один и тот же главный левый (соответственно главный латеральный, главный правый, главный двусторонний, главный) идеал полугруды  $S$ . Если  $(a, b) \in l$  (соответственно  $\sigma, r, p, f$ ), то элементы  $a$  и  $b$  будем называть лево-идеально (соответственно латерально-идеально, право-идеально, двусторонне-идеально, идеально) эквивалентными. В дальнейшем через  $L, \Sigma, R$  и  $F$  будем обозначать классы, на которые разбивается полугруда  $S$  эквивалентностями  $l, \sigma, r$  и  $f$ , соответственно.

Произведением  $\sigma_1 \cdot \sigma_2$  бинарных отношений  $\sigma_1, \sigma_2 \in A \times A$  называется следующее бинарное отношение  $\sigma \in A \times A$ :  $(x, y) \in \sigma$  тогда и только тогда, когда найдется такой элемент  $z \in A$ , что  $(x, z) \in \sigma_1$  и  $(z, y) \in \sigma_2$ . Обозначим через  $d$  произведение  $l \sigma r$ . Следуя Л. М. Глускину [2], полугруду без собственных идеалов назовем  $i$ -простой.

§ 2. Теорема 1. В произвольной полугруде  $S$  бинарное отношение  $d = l \sigma r$  есть отношение эквивалентности.

Доказательство этой теоремы будет дано в следующих трех леммах.

Лемма 1. Если  $a_1 \in L_1 \cap R_1$  и  $a_2 \in L_2 \cap R_2$ , где  $a_1, a_2 \in S$ , то

$$\emptyset \neq L_1 \cap R_2 \leftrightarrow L_2 \cap R_1 \neq \emptyset.$$

Действительно, пусть  $z \in L_1 \cap R_2$ . Если  $z \neq a_1$  и  $z \neq a_2$ , то согласно (2) в полугруде  $S$  должны найтись такие  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 4$ ), что

$$z = [x_1 y_1 a_1], \quad a_1 = [x_2 y_2 z],$$

$$z = [a_2 x_4 y_4], \quad a_2 = [z x_3 y_3].$$

Обозначим  $x = [a_1 x_3 y_3]$ . Так как

$$x = [a_1 x_3 y_3] = [[x_2 y_2 z] x_3 y_3] = [x_2 y_2 [z x_3 y_3]] = [x_2 y_2 a_2],$$

$$a_1 = [x_2 y_2 z] = [x_2 y_2 [a_2 x_4 y_4]] = [[x_2 y_2 a_2] x_4 y_4] = [x x_4 y_4],$$

то элементы  $a_1$  и  $x$  содержатся в одном и том же  $r$ -классе, т. е.  $x \in R_1$ .

Аналогично из

$$a_2 = [z x_3 y_3] = [x_1 y_1 [a_1 x_3 y_3]] = [x_1 y_1 x] \text{ и из } [x_2 y_2 a_2] = x$$

следует, что  $x \in L_2$ . Таким образом, в рассмотренном случае

$$x \in R_1 \cap L_2.$$

В случае, когда  $z = a_1$ , мы имеем  $a_1 \in R_2$  т. е.  $R_1 = R_2$  и поэтому

$$L_2 \cap R_1 = L_2 \cap R_2 \ni a_2.$$

Аналогично при  $z = a_2$

$$L_2 \cap R_1 = L_1 \cap R_1 \ni a_1.$$

Обратная импликация доказывается аналогично.

Доказанная лемма означает перестановочность эквивалентностей  $l$  и  $r$ .

Лемма 2. Если  $a_1 \in L_1 \cap \Sigma_1$  и  $a_2 \in L_2 \cap \Sigma_2$ , где  $a_1, a_2 \in S$ , то

$$\emptyset \neq L_1 \cap \Sigma_2 \leftrightarrow L_2 \cap \Sigma_1 \neq \emptyset.$$

Лемма 3. Если  $a_1 \in R_1 \cap \Sigma_1$  и  $a_2 \in R_2 \cap \Sigma_2$ , где  $a_1, a_2 \in S$ , то

$$\emptyset \neq R_1 \cap \Sigma_2 \leftrightarrow R_2 \cap \Sigma_1 \neq \emptyset.$$

Доказательство этих лемм ведется так же, как доказательство леммы 1. Из лемм 1, 2 и 3 следует, что в произведении  $d = l \sigma r$  эквивалентности  $l, \sigma$  и  $r$  попарно перестановочны, а это означает, что бинарное отношение  $d$  есть эквивалентность.



**Теорема 2.** В любой полугруде  $S$  эквивалентность  $d$  и латерально-идеальная эквивалентность  $\sigma$  совпадают.

**Доказательство.** Согласно определению эквивалентности  $d \subseteq \subseteq d$ . Пусть теперь  $(a, b) \in d$  ( $a, b \in S$ ).

В полугруде  $S$  найдутся такие  $x$  и  $y$ , что

$$(a, x) \in l, (x, y) \in \sigma \text{ и } (y, b) \in r.$$

Отсюда в силу (2), при некоторых  $u_i, v_i \in S$

$$a = [x u_1 v_1], x = [u_2 y v_2] \vee [u_3 u_4 y v_2 v_4], y = [u_5 v_5 b].$$

Пусть  $x = [u_2 y v_2]$ , тогда

$$a = [x u_1 v_1] = [u_2 y v_2 u_1 v_1] = [u_2 b v_5 u_5 v_2 u_1 v_1] = [u_2 b t],$$

где  $t = [v_5 u_5 v_2 u_1 v_1]$ .

Если же  $x = [u_3 u_4 y v_2 v_4]$ , то

$$a = [x u_1 v_1] = [u_3 u_4 y v_2 v_4 u_1 v_1] = [u_3 u_4 u_5 v_5 b v_2 v_4 u_1 v_1].$$

Аналогично можно показать, что при некоторых  $t_i, g_i \in S$

$$b = [t_1 a g_1] \vee [t_2 t_3 a g_2 g_3].$$

А это означает, что  $(a, b) \in \sigma$ , т. е.  $d \subseteq \subseteq \sigma$ .

§ 3. Теперь перейдем к изучению строения произвольного регулярного  $f$ -класса полугруды  $S$ . Элемент  $a$  полугруды  $S$  назовем регулярным [6], если в  $S$  найдется  $x$  такой, что

$$a = [axa].$$

$f$ -класс  $F$ , все элементы которого регулярны, назовем регулярным  $f$ -классом.

**Теорема 3.** Произвольная  $i$ -простая полугруда  $S$  без нуля содержит не более двух  $\rho$ -классов.

**Доказательство.** Пусть  $A_1$  есть некоторый  $\rho$ -класс полугруды  $S$  (см. § 1) и  $a_1 \in A_1$ . Обозначим через  $\rho[a_1]$  главный двухсторонний идеал полугруды  $S$ , порожденный элементом  $a_1$ , т. е.

$$\rho[a_1] = \{a_1\} \cup [SSa_1] \cup [a_1SS] \cup [SSa_1SS].$$

Пусть  $B_1 = \rho[a_1] \setminus A_1$ . Если  $B_1 \neq \emptyset$ , то  $B_1$  будет двухсторонним идеалом полугруды  $S$ . Действительно, пусть  $[SSB_1] \subseteq B_1$ , тогда в  $[SSB_1]$  найдется элемент  $z \in S$  такой, что  $z \in B_1$ . При некоторых  $u, v \in S$  и  $t \in B_1$

$$z = [uvt].$$

Так как

$$z = [uvt] \in [SS\rho[a_1]] \subseteq \rho[a_1] \text{ и } z \notin \rho[a_1] \setminus A_1,$$

то  $z \in A_1$ .

Согласно (2)

$$\rho[a_1] = \rho[z].$$

Но тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned} \rho[a_1] &= \{a_1\} \cup [SSa_1] \cup [a_1SS] \cup [SSa_1SS] = \\ &= \{z\} \cup [SSz] \cup [zSS] \cup [SSzSS] \subseteq \\ &\subseteq \{t\} \cup [SSt] \cup [tSS] \cup [SStSS] = \rho[t], \end{aligned}$$

с другой

$$\begin{aligned} \rho[t] &= \{t\} \cup [SSt] \cup [tSS] \cup [SStSS] \subseteq \\ &\subseteq B_1 \cup [SSB_1] \cup [B_1SS] \cup [SSB_1SS] \subseteq \\ &\subseteq \rho[a_1] \cup [SS\rho[a_1]] \cup [\rho[a_1]SS] \cup [SS\rho[a_1]SS] \subseteq \rho[a_1]. \end{aligned}$$

Однако равенство  $\rho[a_1] = \rho[t]$  невозможно, так как  $a_1 \in A_1$ , а  $t \in A_1$ . Мы показали, что  $[SSB_1] \subseteq B_1$ , а это означает, что  $B_1$  есть левый

идеал полугруды  $S$ . Аналогично можно показать, что  $B_1$  есть правый идеал той же полугруды.

Так как полугруда  $S$  не содержит собственных идеалов, то

$$S = B_1 \cup [SB_1S] \cup [S\rho[a_1]S].$$

Элемент  $a_1$  полугруды  $S$  не принадлежит  $B_1$ , поэтому  $a_1 \in [SB_1S]$  и, следовательно,  $[S\rho[a_1]S] \subseteq B_1$ .

Тогда

$$\rho = [a_1] \setminus A_1 = S \setminus A_1 = B_1.$$

Отсюда следует, что

$$S = \rho[a_1].$$

Если же  $B_1 = \emptyset$ , то  $\rho[a_1] = A_1$ . Пусть теперь  $a_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $A_i$  есть некоторые  $\rho$ -классы полугруды  $S$ , а  $B_i = \rho[a_i] \setminus A_i$ .

Тогда

$$B_i \neq \emptyset \rightarrow S = \rho[a_i]$$

$$B_i = \emptyset \rightarrow A_i = \rho[a_i].$$

Отсюда следует, что полугруда  $S$  содержит не более двух  $\rho$ -классов.

**Теорема 4.** Произвольная  $i$ -простая полугруда  $S$  с нулем содержит не более двух ненулевых  $\rho$ -классов.

**Доказательство.** Пусть  $A_1$  есть некоторый нулевой  $\rho$ -класс полугруды  $S$  и  $a_1 \in A_1$ . Тогда множество  $B_1 = \rho[a_1] \setminus A_1$  не может быть пустым, так как иначе  $A_1$  оказалось бы нулевым  $\rho$ -классом, что противоречило бы предположению относительно  $A_1$ . Рассмотрим два случая: 1)  $B_1 = \{0\}$  и 2)  $B_1$  содержит элементы, отличные от нуля. Пусть  $B_1 = \{0\}$ , тогда  $A_1^* = A_1 \cup \{0\}$  будет двухсторонним идеалом полугруды  $S$ . Если теперь  $A_2$  — другой нулевой  $\rho$ -класс полугруды  $S$  и  $B_2 = \rho[a_2] \setminus A_2 = \{0\}$ , где  $a_2 \in A_2$ , то опять  $A_2^* = A_2 \cup \{0\}$  будет двухсторонним идеалом полугруды  $S$ . Тогда в силу того, что  $S$  не содержит собственных идеалов, найдем:

$$S = A_1^* \cup [SA_1^*] = A_2^* \cup [SA_2^*S].$$

Очевидно,  $A_1^* \cup A_2^* \subseteq S$ . Но с другой стороны

$$S = A_1^* \cup [SA_1^*S] \subseteq A_1^* \cup [SSA_2^*SS] \subseteq A_1^* \cup A_2^*,$$

поэтому

$$S = A_1^* \cup A_2^* = A_1 \cup A_2 \cup \{0\}.$$

Пусть теперь  $B_1 \neq \{0\}$ , тогда как и в теореме 3 легко показать, что  $S = \rho[a_1]$ .

**Определение.** Пусть  $F$  есть некоторый  $f$ -класс полугруды  $S$ . Идеальным фактором, соответствующим  $F$ , назовем следующую полугруду  $F^*$ :

а)  $F^* = F$ , если  $F$  есть подполугруда полугруды  $S$ ;

б) если  $F$  не является подполугрудой полугруды  $S$ , то  $F^*$  состоит из всех элементов  $F$  и нового элемента  $\{0^*\}$ .

Если при этом в  $S$  для  $a, b, c, g \in F$  имеет место  $[abc] = g$ , то и в  $F^*$  полагаем  $(abc) = g$ . Во всех остальных случаях полагаем  $(xy) = 0^*$  ( $x, y, z \in F$ ). Легко проверить, что условие типа ассоциативности (1), обычное для полугруд в  $F^*$  выполняется.

**Теорема 5.** Пусть  $F^*$  есть идеальный фактор полугруды  $S$ , соответствующий регулярному  $f$ -классу  $F$ . Если  $F^* = F$ , то  $F^*$  есть полугруда, не имеющая собственных идеалов. Если  $F^* = F \cup \{0^*\}$ , то  $F^*$  есть полугруда, не имеющая иных собственных идеалов, кроме нулевого идеала  $0^*$ .



Доказательство. 1) Пусть  $F^* = F$ . Можно показать, что  $F = T_1 \setminus T_2$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — соседние идеалы [3] полугруды  $S$  (или  $T_2$  есть пустое множество, а  $T_1$  — минимальный идеал полугруды  $S$ ). Предположим, что  $H$  есть идеал полугруды  $F$ . Рассмотрим следующее множество:

$$E = \{z \in [T_1 H T_1] \cup T_2 \mid [S z S] \subseteq [T_1 H T_1] \subseteq T_2\}.$$

Очевидно, что  $E$  есть подполугруда полугруды  $S$ .  $E$  — идеал полугруды  $S$ . Действительно, пусть  $e \in E$ , тогда

$$[S [S S e] S] \subseteq [S e S] \subseteq [T_1 H T_1] \subseteq T_2,$$

$$[S [e S S] S] \subseteq [S e S] \subseteq [T_1 H T_1] \subseteq T_2,$$

$$[S S e S S] \subseteq [T_1 H T_1] \subseteq T_2.$$

Далее справедливы включения

$$T_2 \subseteq E \subseteq [T_1 H T_1] \cup T_2 \subseteq T_1;$$

$E \neq T_2$ , так как в  $E$  входят элементы из  $[T_1 H T_1]$ , не входящие в  $T_2$ . Поэтому

$$E = T_1 = F \cup T_2 = [T_1 H T_1] \cup T_2 = \\ = [(T_2 \cup F) H (T_2 \cup F)] \cup T_2 \subseteq H \cup T_2.$$

Отсюда

$$E = T_1 = F \cup T_2 \subseteq H \cup T_2, \text{ так как } F \subseteq H.$$

2) Пусть  $F^* = F \cup \{0^*\}$ . Как и в первой части, можно положить  $F_* = T_1 \setminus T_2$ .

Пусть далее  $H^*$  — идеал полугруды  $F^*$ , обладающий ненулевыми элементами. Обозначим через  $H$  множество всех элементов из  $S$ , входящих в  $H^*$ .  $H$  не пусто в силу предположения. Пусть  $a \in H$  и  $\bar{a}$  — регулярно сопряженный с  $a$  элемент, тогда  $a = [a \bar{a} a]$ ,  $\bar{a} = [\bar{a} a \bar{a}]$  и следовательно,  $a, \bar{a} \in F$ . Поэтому  $a = (a \bar{a} a)$ ,  $\bar{a} = (\bar{a} a \bar{a})$ .

Отсюда  $\bar{a} \in H$ . Рассмотрим множество

$$E = \{z \in [T_1 H T_1] \cup T_2 \mid [S z S] \subseteq [T_1 H T_1] \cup T_2\}.$$

Как и в 1), можно показать, что  $E$  есть идеал полугруды  $S$ . Далее справедливы включения

$$T_2 \subseteq E \subseteq [T_1 H T_1] \cup T_2 \subseteq T_1.$$

Очевидно,  $E \neq T_2$ , так как  $a = [a \bar{a} a]$ ,  $a \in [T_1 H T_1]$  и  $a \in T_2$ , поэтому

$$E = T_1 = T_2 \cup F = [T_1 H T_1] \cup T_2 = [(T_2 \cup F) H (T_2 \cup F)] \cup T_2 \subseteq \\ \subseteq ([F H F] \cup T_2) = (F^* H^* F^*) \setminus \{0^*\} \cup T_2 \subseteq H \cup T_2.$$

Отсюда следует, что  $F \subseteq H$  и, следовательно,  $F^* \subseteq H^*$ . Отметим, что доказательство пункта 1) остается верным, когда  $F$  есть и нерегулярный  $f$ -класс полугруды  $S$ , являющейся подполугрудой.

**Теорема 6.** Регулярный  $f$ -класс произвольной полугруды  $S$  содержит не более двух  $p$ -классов.

**Доказательство.** Пусть  $f$ -класс  $F$  не является подполугрудой. Согласно теореме 5  $F^* = F \cup \{0^*\}$  есть  $i$ -простая полугруда с нулем. Теорема 4 утверждает, что такая полугруда содержит не более двух ненулевых  $p$ -классов. Обозначим их через  $A_1$  и  $A_2$ . Пусть  $a, b \in A_1$ , тогда

$$(F^* F^* a F^* F^*) = (F^* F^* b F^* F^*).$$

Отсюда при некоторых  $x_i, y_i \in F$

$$a = (x_1 y_1 b x_2 y_2) = [x_1 y_1 b x_2 y_2],$$

$$b = (x_3 y_3 a x_4 y_4) = [x_3 y_3 a x_4 y_4]. \quad (3)$$

Согласно (3)  $A_1$  принадлежит некоторому  $p$ -классу  $B_1$  полугруды  $S$ . Аналогично  $A_2$  принадлежит некоторому  $p$ -классу  $B_2$  полугруды  $S$ . Поэтому  $f$ -класс  $F$  содержит не более двух  $p$ -классов.

**Теорема 7.** В регулярных полугрудах каждый  $d$ -класс содержит не более двух  $p$ -классов.

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы очевидно, так как в регулярных полугрудах эквивалентности  $d$  и  $f$  совпадают. Остается лишь воспользоваться теоремой 6.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Матем сб., 32 (74), 1953, № 3.
2. Глускин Л. М. ДАН СССР, 151, 1963, № 3.
3. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., 1960.
4. Green J. On the structure of semi groups Ann. Math. (2), 54, 1952.
5. Биркгоф Г. Теория структур. ИЛ, 1952.
6. Мустафаев Л. Г. Изв. АН Азерб. ССР. серия физ.-техн. и матем. наук, 1965. № 3.

Л. Г. Мустафаев

Жарымгрудларын идеал эквивалентликләри һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә жарымгрудларда Грин идеал эквивалентликләри тәдгиг олунар.

Ишин әсас нәтиҗәси ашагыда мұһакимә едилән 3 вә 4-чү теорем-ләрди:  $i$ -садә жарымгрудлар вә жарымгрудларын, регулјар  $f$ -синифләри иңилән артыг олмајан икитәрәfli идеал синифләрә парчаланыр.



Г. К. НАМАЗОВ А. А. БАБАЕВА

### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Смешанной задаче для гиперболических уравнений с разрывными коэффициентами посвящены работы [2—5] и др. В работах [6, 7] и др. исследовались задачи для вырождающихся уравнений. В настоящей статье рассматривается смешанная задача для вырождающихся уравнений с разрывными коэффициентами при условии сопряжения, содержащем производную по времени. Применяя методику О. А. Олейник [1], доказывается существование и единственность поставленной задачи.

Пусть дано уравнение в прямоугольнике  $R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$

$$\varphi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t) u + f(x, t), \quad (1)$$

коэффициенты которого терпят разрыв первого рода при  $x = \xi$  ( $0 < \xi < l$ ); кроме того,  $a(x, t) \geq \kappa_1 > 0$ ,  $\varphi(t)$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} c_2 t^\alpha &\leq \varphi(t) \leq c_1 t^\alpha, \\ c_4 t^{\alpha-1} &\leq \varphi'(t) \leq c_3 t^{\alpha-1}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (*)$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — некоторые положительные числа.

Постановка задачи: найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в  $R_1 = \{0 \leq x < \xi, 0 \leq t \leq T\}$ ,  $R_2 = \{\xi < x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  начальным условиям:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

граничным

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения вида

$$u|_{\xi-0} = u|_{\xi+0}, \quad (4)$$

$$\kappa_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\xi+0} - \kappa_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\xi-0} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi} + \sigma u|_{\xi} = z(t).$$

Здесь  $\kappa_1(t) \geq \kappa_1^0 > 0$ ,  $\kappa_2(t) \geq \kappa_2^0 > 0$ ,  $z(t)$  — заданные на  $[0, T]$  функции,  $\gamma, \delta, \sigma$  — известные числа.

Теорема 1. Если: 1) функции  $a(x, t) \in C^4(R_1)$ ,  $\kappa_1(t) \in C^4(0, T)$  ( $i = 1, 2$ ); 2)  $b(x, t), c(x, t), f(x, t) \in C^3(R_1)$  ( $i = 1, 2$ ); 3)  $\varphi(t), \varphi'(t)$  удовлетворяют условию (\*); 4)  $z(t)$  непрерывно дифференцируема

до 3-го порядка и  $x^j = O(t^{(4-j)+\frac{\alpha}{2}})$ ,  $j = \overline{0, 3}$ ,  $\gamma, \delta, \sigma$  — неположительные числа, то существует решение задачи (1) — (4).

Доказательство. Введем некоторые обозначения. Через  $\psi^h$  обозначим усреднение функции  $\psi$  [8]. Пусть  $a^h = (\kappa a)^h$ ,  $b^h = (b\kappa -$

$$- a \frac{\partial \kappa}{\partial x})^h, \quad c^h = (\kappa c)^h,$$

$$f^h = (\kappa f)^h, \quad \gamma^h = (\bar{\gamma})^h, \quad b^h = (\bar{b})^h, \quad \sigma^h = (\bar{\sigma})^h, \quad z^h = (\bar{z})^h.$$

Здесь

$$\kappa(x, t) = \begin{cases} \frac{\kappa_1(t)}{a(\xi-0, t)} & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \frac{\kappa_2(t)}{a(\xi+0, t)} & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\bar{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \gamma_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases} \quad \bar{\delta}(x) = \begin{cases} \delta_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \delta_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

$$\bar{\sigma}(x) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 < x < \xi, \\ \sigma_2 & \text{при } \xi < x < l, \end{cases} \quad \bar{z}(x, t) = \begin{cases} z_1(t) & \text{при } 0 < x < \xi, \\ z_2(t) & \text{при } \xi < x < l, \end{cases}$$

где  $\delta_1 - \delta_2 = \delta$ ,  $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma$ ,  $z_1 - z_2 = z$ ,  $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$ .

Рассмотрим уравнения:

$$\begin{aligned} \kappa^h(x, t) \varphi(t) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + c^h u^h + \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} + \\ &+ \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} + \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h + \frac{\partial z^h}{\partial x} + f^h. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение поставленной задачи получим как предел решений уравнений (5) при условиях (2) — (4). Разрешимость этой задачи при каждом  $h > 0$  следует из работы [6].

Установим некоторые равномерные по  $h$  интегральные оценки для  $u^h$  при достаточно малом  $T = T_1$ , выше уровня которого уравнение перестает быть вырожденным и интегральные оценки получаются как в работе [5]. Умножив уравнение (5) на  $\frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln(t)|}{\varphi(t)}$  и проинтегрировав по области  $R_T = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T_1\}$ , получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_1} \int_0^l \kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left( a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ &+ \int_0^{T_1} \int_0^l b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^{T_1} \int_0^l c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ &+ \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\
& + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial z^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt. \quad (6)
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, преобразуем некоторые слагаемые последнего соотношения:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^l \int_0^{T_1} \kappa^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{\partial u^h}{\partial t} |\ln t| dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l \kappa^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 |\ln t| \Big|_{t=T_1} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \kappa^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \kappa^h}{\partial t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 |\ln t| dx dt; \\
I_2 &= \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = \\
&= - \int_0^l \int_0^{T_1} a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = - \frac{1}{2} \int_0^l a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} dx dt - \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{t \varphi(t)} dx dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial a^h}{\partial t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt; \\
I_3 &= \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \left[ \frac{1}{t \varphi(t)} + \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} \right] dx dt; \\
I_4 &= \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 \left[ \frac{1}{t \varphi(t)} + \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} \right] dx dt; \\
I_5 &= \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial z^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = - \int_0^l \int_0^{T_1} z^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^l z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial z^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt - \\
&- \int_0^l \int_0^{T_1} z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{1}{t \varphi(t)} dx dt - \int_0^l \int_0^{T_1} z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} dx dt.
\end{aligned}$$

Подставляя значения интегралов  $I_1, \dots, I_5$  в (6), получим

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \left[ \frac{1}{t \varphi(t)} + \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} \right] dx dt - \\
&- \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx - \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt - \\
&- \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx - \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} (u^h)^2 \left[ \frac{1}{t \varphi(t)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} \right] dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 |\ln t| \Big|_{t=T_1} dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^l a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \kappa^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{t \varphi(t)} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} a^h \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} dx dt = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \kappa^h}{\partial t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 |\ln t| dx dt + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial a^h}{\partial t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\
&+ \int_0^l \int_0^{T_1} b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} c^h u^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\
&+ \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial z^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt - \int_0^l \int_0^{T_1} z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{1}{t \varphi(t)} dx dt - \\
&- \int_0^l \int_0^{T_1} z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} dx dt - \int_0^l z^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \\
&\quad + \int_0^l \int_0^{T_1} f^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt. \quad (7)
\end{aligned}$$

Оценим правую часть (7), пользуясь неравенством Коши

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \varepsilon > 0,$$



учитывая поведение  $x^h(t)$  при  $t \rightarrow 0$ , и  $\sigma^h \leq 0$ ,  $\delta^h \gamma^h \leq 0$ . Будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} - Mt |\ln t| - \frac{3}{2} \varepsilon - \frac{M}{\varepsilon} \int_0^{T_1} \frac{t^3 (\ln t)^2}{\varphi^2} dt \right] dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{t \varphi(t)} \left[ \frac{\lambda}{2} - \frac{Mt (\ln t)}{2} - \frac{Mt (\ln t)^2}{2 \varepsilon \varphi} - \frac{\varepsilon t |\ln t|}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon}{2} \right] dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} \left[ \frac{\lambda}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right] dx dt \leq M. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем через  $M$  обозначены постоянные, не зависящие от  $h$ .

Выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым, и соответственно достаточно малое  $T_1$ , получим

$$\int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t \varphi(t)} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt \leq M.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \right)^2 dx dt &\leq M, \\ \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 dx dt &\leq M. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Далее, дифференцируя по  $t$  уравнение (5), умножая на  $\frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)}$

и интегрируя по  $R_{T_1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^{T_1} \kappa^h \varphi' \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \kappa^h \frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} |\ln t| dx dt = \\ & = \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial}{\partial x} a^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial b^h}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial x} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} b^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial c^h}{\partial t} u^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} c^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \gamma^h}{\partial x} \frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \delta^h}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial \sigma^h}{\partial x} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial^2 x^h}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{\partial f^h}{\partial t} \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Преобразуя некоторые слагаемые (9) и оценивая их аналогично тому, как делали выше при получении оценок (8), будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Mt |\ln t| - \frac{5}{2} \varepsilon \right] dx dt + \\ & + \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t \varphi(t)} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial x} \right)^2 \left[ \frac{\lambda}{2} - Mt |\ln t| - \frac{Mt^2 (\ln t)^2}{2 \varepsilon \varphi^2} - \right. \\ & \left. - \frac{M}{\varepsilon} - Mt \varepsilon |\ln t| \right] dx dt \leq M. \end{aligned} \quad (10)$$

Подбираем  $\varepsilon$ ,  $T_1$ ,  $\lambda$  так, чтобы квадратные скобки были больше некоторого положительного числа. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right)^2 dx dt &\leq M, \\ \int_0^l \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial^2 u^h}{\partial x \partial t} \right)^2 dx dt &\leq M. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Аналогично предыдущему оцениваются производные  $\frac{\partial^3 u^h}{\partial t^3}$ ,  $\frac{\partial^3 u^h}{\partial t^2 \partial x}$ ,  $\frac{\partial^4 u^h}{\partial t^4}$ ,  $\frac{\partial^4 u^h}{\partial t^3 \partial x}$  по норме  $L_2(R)$ .

Пользуясь полученными интегральными оценками (8), (11) и методикой работы О. А. Олейник [7], доказываем, что все производные  $u^h$  до четвертого порядка равномерно ограничены по норме  $L_2$  в каждой внутренней подобласти  $R'$  области  $R$ , не содержащей точек разрыва. Применяя теорему вложения С. Л. Соболева [8], можем утверждать, что предел  $u(x, t)$  последовательности  $u^h$  удовлетворяет уравнению (1) в каждой внутренней точке  $R_1$  и  $R_2$  и условиям (2) и (3).

Теперь докажем выполнение второго условия сопряжения. Запишем уравнение (5) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \right) + b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta^h \cdot u^h) - \gamma^h \frac{\partial^3 u^h}{\partial x \partial t^2} - \\ &- \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial x} - c^h \frac{\partial u^h}{\partial x} + c^h u^h + f^h + \frac{\partial x^h}{\partial x} \end{aligned}$$



и проинтегрируем от  $\xi - \varepsilon$  до  $\xi + \varepsilon$ . Получим:

$$\begin{aligned} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi(t) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} dx &= a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} b^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx + \gamma^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \\ &+ \delta^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \sigma^h u^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \gamma^h \frac{\partial^3 u^h}{\partial x \partial t^2} dx - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial x} dx - \\ &- \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \sigma^h \frac{\partial u^h}{\partial x} dx + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} c^h u^h dx + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f^h dx + z^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \\ \text{или} \quad a^h \frac{\partial u^h}{\partial x} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \gamma^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \delta^h \frac{\partial u^h}{\partial t} \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} - \delta^h u^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} &= \\ &= \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} B^h dx - z^h \Big|_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}, \end{aligned}$$

где

$$B^h(x, t) = \varphi(t) \frac{\partial^2 u^h}{\partial t^2} - (b^h - \sigma^h) \frac{\partial u^h}{\partial x} + \delta^h \frac{\partial^2 u^h}{\partial t \partial x} + \gamma^h \frac{\partial^3 u^h}{\partial x \partial t^2} - c^h u^h - f^h.$$

Из полученных интегральных оценок следует, что

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} B^h dx \rightarrow 0 \quad \text{при } h, \varepsilon \rightarrow 0,$$

откуда следует выполнение второго условия сопряжения. Итак, теорема существования задачи (1)–(4) доказана. Теперь покажем, что полученное решение единственно. Докажем это при слабых условиях на данные задачи.

Теорема 2. Решение задачи (1)–(4) будет единственным, если:

- 1)  $\kappa(x, t), a(x, t) \in C^1(R_i)$ ,  
 $b(x, t), c(x, t), f(x, t) \in C(R_i), i = 1, 2$ ;
- 2)  $\varphi(t), \varphi'(t)$  удовлетворяют условию (\*);
- 3)  $\gamma, \delta, \sigma$  — неположительные числа.

Доказательство. Пусть задача (1)–(4) имеет два решения:  $u_1, u_2$ . Тогда функция  $u(x, t) = u_1 - u_2$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu = \varphi(t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12)$$

в области  $R_1$  и  $R_2$ , крайевым условиям (2), (3) и условиям сопряжения

$$u|_{\xi=0} = u|_{\xi+\varepsilon},$$

$$\kappa_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\xi+} - \kappa_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\xi-0} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{\xi} + \delta \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\xi} + \sigma u|_{\xi} = 0.$$

Умножим (12) на  $\kappa(x, t)$  и запишем его в  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{a} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{b} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{c} u - \kappa \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{в } R_i. \quad (13)$$

Умножим (13) на  $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)}$  и проинтегрируем по  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\begin{aligned} \iint_{R_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{a} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{b} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{c} u - \kappa \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \frac{\partial u}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ + \iint_{R_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{b} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{c} u - \kappa \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] \frac{\partial u}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуя и оценивая члены (14), учитывая, что  $\gamma \leq 0$ ,  $\delta \leq 0$ ,  $\xi \leq 0$ , получим

$$\begin{aligned} \iint_{R_1} \frac{1}{t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} - Mt |\ln t| - \varepsilon - \frac{M}{2\varepsilon} \int_0^{T_1} \frac{t^3 (\ln t)^2}{\varphi^2} dt \right] dx dt + \\ + \iint_{R_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \frac{\lambda}{2t\varphi(t)} - \frac{M |\ln t|}{2\varphi} - \frac{Mt (\ln t)^2}{2\varepsilon\varphi^2} \right] dx dt + \\ + \lambda \iint_{R_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2} dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Подбирая  $\varepsilon$  и  $T_1$  малыми, получили, что квадратные скобки положительны. Противоречие доказывает  $u \equiv 0$ . Отметим, что однородность начальных и граничных условий не нарушает общности и полученный результат при некоторых дополнительных ограничениях на данные задачи обобщается на многомерный случай.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Олейник О. А. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 1961, 25.
- 2 Ладыженская О. А. „ДАН СССР“ т. 96, 1954, 3.
- 3 Ефоров Ю. А. „ДАН СССР“, т. 134, 3, 1960, 3.
- 4 Ильин В. А. „ДАН СССР“, т. 142, 1962, 1.
- 5 Намазов Г. К., Ахмедова А. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, 2.
- 6 Барановский Ф. Т. Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та. 183, 1958.
- 7 Краснов М. Л. Математический сб., т. 49, вып. 1, 1959.
- 8 Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. МГУ, 1950.

Г. К. Намазов, А. А. Бабајева

#### Кәсилән әмсаллы чырлашан тәнликләр үчүн гојулмуш бир мәсәлә һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Ишдә кәсилән әмсаллы чырлашан гиперболик тәнлик үчүн гарышыг мәсәләнин һәлли тәдгиг едилмишдир.

Бу мәсәләнин һәлли хусуси гәјдә илә гурулмуш һамар әмсаллы тәнликләр үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләләрин һәллинин лимити кими тапылыр вә алынан һәллин јеканәлији исбат олунур.

Гејд етмәк ләзимдыр ки, кәсилмә хәтләри үзәриндә верилән шәртләрә, әввәлки ишләрдән фәргли олараг, замана көрә төрәмә дахилдир вә тәнлик башлангыч анда чырлашыр.



В. Д. ГАДЖИЕВ

# НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Как известно [1, 2], наличие начальных напряжений может существенным образом повлиять на величину критических нагрузок, при которых происходит потеря устойчивости. В настоящей статье рассматриваются три задачи устойчивости.

1. Устойчивость произвольной в плане пластины, испытавшей знакопеременный упруго-пластический изгиб.

Пусть по толщине пластины имеется следующее распределение начальных напряжений (рис. 1 а):

$$\sigma_1^0 = \lambda \sigma_s \left( 3 \frac{z}{h} - \text{sign } z \right), \quad \sigma_1^0 = \sigma_2^0; \quad \sigma_{12}^0 = 0. \quad (1,1)$$

Здесь  $\lambda$ —коэффициент линейного упрочнения,  $\sigma_s$ —предел текучести материала,  $G$ —модуль сдвига,  $\sigma_u$ ,  $\epsilon_u$ —соответственно, интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_u = \lambda \sigma_s + 3G(1 - \lambda) \epsilon_u.$$

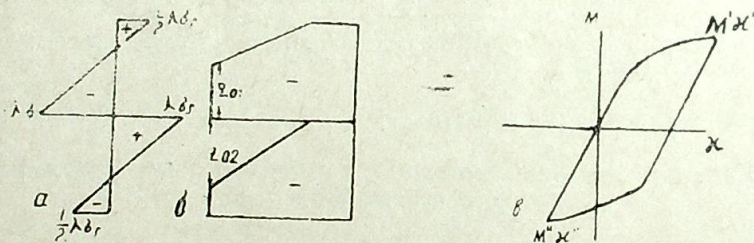


Рис. 1

Напряжения (1,1) остаются в пластине, которая предварительно была нагружена значительным изгибающим моментом  $M' > 0$ , затем после снятия момента  $M'$  был приложен такой момент  $M'' < 0$ , что после его удаления остаточная кривизна  $x^0$  пластины равнялась нулю (рис. 1 в).

Пусть на пластинку, имеющие начальные напряжения (1,1), действует сжимающая, равномерно распределенная нагрузка  $q$ . Следуя В. В. Москвитину [2], рассмотрим задачу устойчивости при совпадении направления потери устойчивости с направлением докритическо-

го изгиба. До потери устойчивости возникают следующие напряжения.

В упругой области

$$\sigma_1 = \lambda \sigma_s \left( 3 \frac{z}{h} - \text{sign } z \right) + 2E \epsilon_1, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_{12} = 0 \quad (1,2)$$

( $\epsilon_1$ —деформация, постоянная по толщине). В пластической области

$$\sigma_1 = -\lambda \sigma_s + 2E(1 - \lambda) \epsilon_1, \quad \sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (1,3)$$

Первая пластическая зона  $0 \leq z \leq z_{01}$  появится начиная с  $q = 0$  (рис. 1 б). Вторая пластическая зона  $z_{02} \geq z \geq \frac{-h}{2}$  будет существовать при

$$\epsilon_1 < -\frac{\epsilon_s}{4}. \quad \text{Очевидно}$$

$$\frac{2z_{01}}{h} = -\frac{4}{3} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s}, \quad \frac{2z_{02}}{h} = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s} \right). \quad (1,4)$$

Для определения зависимости  $\epsilon_1$  от  $q$  воспользуемся соотношением

$$-qh = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_1 dz.$$

Для случая двух пластических зон и двух упругих, с учетом (1, 2) и (1, 3), получим

$$-\frac{q}{\sigma_s} = \frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda + 6}{3} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s} + \frac{4\lambda}{3} \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_s^2}. \quad (1,5)$$

Примем, что процесс потери устойчивости происходит при неизменных внешних усилиях [3]:  $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$ .

Отсюда можно получить соотношение

$$2e \left[ h - \lambda \left( z_{s1} + z_{s2} + \frac{h}{2} \right) \right] + \lambda x \left( z_{s1}^2 + z_{s2}^2 - \frac{h^2}{4} \right) = 0, \quad (1,6)$$

где  $e = -e_1 - e_2$ ,  $x = -\nabla^2 W$ ,  $e_1$ ,  $e_2$ —вариации деформаций срединной плоскости,  $W$ —прогиб.

Если граница находится в области, где до потери устойчивости происходило пластическое нагружение, то  $\delta \epsilon_u(z_{s1}) = 0$  или  $e - z_{s1} x = 0$ . (1,7) При  $z = z_{s2}$

$$2\epsilon_1 - e + z_{s2} x + \epsilon_s \left( 3 \frac{z_{s2}}{h} + 2 \right) = 0, \quad (1,8)$$

где  $z_{s1}$  и  $z_{s2}$ —границы упруго-пластических зон после потери устойчивости. Уравнения (1,6), (1,7) и (1,8) позволяют выразить, например,  $e$ ,  $z_{s1}$ ,  $z_{s2}$  через  $x$ .

Уравнение устойчивости в нашем случае преобразуются к виду

$$\nabla^4 W + \frac{qh}{D} \nabla^2 W = \frac{9\lambda}{h^3} \nabla^2 \left[ \frac{e}{2} \left( z_{s1}^2 + z_{s2}^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \frac{x}{3} \left( z_{s1}^3 + z_{s2}^3 + \frac{h^3}{8} \right) \right]. \quad (1,9)$$

Это уравнение остается сложным. Однако, поскольку граница упругой и пластической областей мало изменяется в процессе потери



устойчивости, примем  $z_{s2} = z_{02} = \text{const}$ , причем  $z_{02}$  определяется вторым соотношением (1,4), а из (1,6), (1,7)

$$\frac{z_{s1}}{h} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s} - \sqrt{\frac{8}{9} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s}\right)^2 + \frac{2(2-\lambda)}{3\lambda} \left(1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_s}\right) + \frac{1-\lambda}{\lambda^2}}.$$

При этом уравнение устойчивости будет

$$\nabla^4 W + \frac{qh}{KD} \nabla^2 W = 0,$$

где

$$K = 1 - \frac{\lambda}{h_3} \left( -\frac{3}{2} z_{s1}^3 + 3 z_{s2}^3 - \frac{9}{2} z_{s1} z_{s2}^2 + \frac{9}{8} z_{s1}^2 h^2 + \frac{3}{8} h^3 \right).$$

Здесь  $z_{s1}$ ,  $z_{s2}$  зависят только от  $\epsilon_1$ , а так как  $\epsilon_1$  связано с  $q$  уравнением (1,2), то  $z_{s1}$ ,  $z_{s2}$ , а значит и величина  $K$  будут функциями только  $q$ . Очевидно,

$$q_{кр} = K(q_{кр}) q_{кр}^e,$$

где  $q_{кр}^e$  — критическая нагрузка при упругой потере устойчивости.

График зависимости критической нагрузки  $q_{кр}$  от

$q_{кр}^e$  представлен на рис. 2. Сплошной линией отмечена критическая нагрузка при наличии начальных напряжений, которая сравнивается с критической нагрузкой пластины, свободной от начальных напряжений (пунктирная линия). Максимальное отличие составляет 30 %.

Рис. 2

## 2. Устойчивость стержня кругового сечения под действием осевой силы

Доминирующее влияние на устойчивость оказывают осевые остаточные напряжения, распределение которых примем в следующем виде [4] (рис. 3а):

$$\sigma^0 = \frac{\sigma_z^0}{\sigma_s} = -0,8709 \lg (2,646 \sqrt{7\rho^4 - 3,08\rho^2 + 0,5929} + 7\rho^2 + 1,54) - \frac{3\rho^2 - 0,770}{\sqrt{7\rho^4 - 3,08\rho^2 + 0,5929}} + 0,9091. \quad (2,1)$$

где  $\rho = \frac{r}{R}$  ( $r$  — текущий радиус,  $R$  — радиус граничного круга).

До потери устойчивости

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^0 + \epsilon & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_s, \\ \sigma &= -\lambda + (1-\lambda)\epsilon & \text{при } \rho_s \leq \rho \leq \rho_c, \\ \sigma &= \sigma^0 & \text{при } \rho_c \leq \rho \leq 1, \end{aligned} \quad (2,2)$$

где  $\sigma = \frac{\sigma_z}{\sigma_s}$ ,  $\epsilon = \frac{\epsilon_z}{\epsilon_s}$ ,  $\rho_s$  — граница упругой и пластической областей,

$\rho_c$  — граница области, в которой не будет проходить роста напряжений. Очевидно,

$$\sigma^0(\rho_s) = -\lambda - \lambda\epsilon; \quad \sigma^0(\rho_c) = -\lambda + (1-\lambda)\epsilon, \quad \sigma^0(\rho) = -\lambda. \quad (2,3)$$

Деформация  $\epsilon$  связана с осевой силой соотношением, которое следует из

$$\frac{P}{\pi\sigma_s R^2} = 2 \int_0^{\rho_s} \sigma^0 \rho d\rho + 2 \int_{\rho_c}^1 \sigma^0 \rho d\rho + \epsilon \rho_c^2 - \lambda(1+\epsilon)(\rho_c^2 - \rho_s^2). \quad (2,4)$$

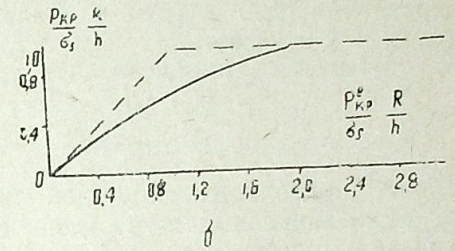
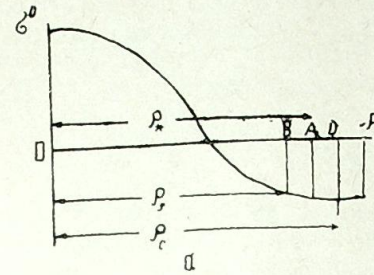


Рис. 3:

Рассмотрим устойчивость стержня при  $\rho_c \leq 1$ . Изменение напряжений при потере устойчивости будет:

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= (1-\lambda)\delta\epsilon \text{ в области догружения,} \\ \delta\sigma &= \delta\epsilon \text{ в области разгрузки.} \end{aligned} \quad (2,5)$$

Согласно закону плоских сечений  $\delta\epsilon = \bar{k} \bar{y}$ , где  $\bar{y} = \frac{y}{k}$  — безразмерное расстояние точек от нейтральной оси, а  $\bar{k}$  — безразмерная кривизна. Очевидно.

$$\iint_F \delta\sigma dF = 0. \quad (2,6)$$

Следует различать два случая: когда нейтральная ось пересекает область разгрузки и когда не пересекает ее. В первом случае, учитывая (2,5) и (2,6), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left[ 2\rho_c^2 + h^2 \right] \sqrt{\rho_c^2 - h^2} - (2 + h^2) \sqrt{1 - h^2} + \\ &+ h \left( \rho_c^2 \arcsin \frac{h}{\rho_c} - \arcsin h \right) + \frac{\pi h}{2} (1 + \rho_c^2) \Big] - \\ &- \frac{\lambda}{3} \left[ (2\rho_c^2 + h^2) \sqrt{\rho_c^2 - h^2} - (2\rho_s^2 + h^2) \sqrt{\rho_s^2 - h^2} \right] - \\ &- \frac{\lambda h}{3} \left( \rho_c^2 \arcsin \frac{h}{\rho_c} - \rho_s^2 \arcsin \frac{h}{\rho_s} \right) - \frac{\lambda \pi h}{6} (\rho_c^2 - \rho_s^2) = 0, \end{aligned}$$

где  $h$  — безразмерное расстояние нейтральной оси от центра сечения. Используя выражение для изгибающего момента, для первого случая получим

$$M = KEJ_k,$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{h}{3\pi} \left[ (13\rho_c^2 + 2h^2) \sqrt{\rho_c^2 - h^2} - (13 + 2h^2) \sqrt{1 - h^2} \right] + \\ &+ \frac{4h^2}{\pi} \left( \rho_c^2 \arcsin \frac{h}{\rho_c} - \arcsin h \right) + 2h^2 (1 + \rho_c^2) + \frac{1}{2} (1 + \rho_c^4) - \end{aligned}$$



$$-\frac{4\lambda}{\pi} \left\{ \frac{h}{12} [(13\rho_c^2 + 2h^2) \sqrt{\rho_c^2 - h^2} - (13\rho_s^2 + 2h^2) \sqrt{\rho_s^2 - h^2}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left( \rho_c^4 \arcsin \frac{h}{\rho_c} - \rho_s^4 \arcsin \frac{h}{\rho_s} \right) + h^2 \left( \rho_c^2 \arcsin \frac{h}{\rho_c} - \rho_s^2 \arcsin \frac{h}{\rho_s} \right) + \right. \\ \left. + 1,57h^2(\rho_c^2 - \rho_s^2) \right\}.$$

Аналогичные соотношения могут быть получены и для случая, когда нейтральная ось не пересекает область разгрузки. Уравнения (2,7) и (2,8) сохраняются и для случая, когда область  $\rho_c \leq \rho \leq 1$  исчезает.

Уравнение, определяющее критическую силу, будет

$$\frac{P_{кр}}{\sigma_s \pi R^2} = K \left( \frac{P_{кр}}{\sigma_s \pi R^2} \right) \frac{P_{кр}^e}{\sigma_s \pi R^2},$$

где  $K$  определяется формулой (2,8). Вычисления показывают, что при наличии начальных напряжений наибольшее отличие критической нагрузки от соответствующей, вызывающей упругую потерю устойчивости, превышает 50%.

### 3. Устойчивость цилиндрической оболочки под действием внешнего давления и осевой сжимающей силы

**А. Цилиндрическая форма потери устойчивости.** Пусть распределение начальных напряжений по толщине цилиндрической оболочки дается в следующем виде:\*

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \sigma_s, & \frac{2z}{h} &\leq \frac{3}{10} - \alpha, \\ \sigma^0 &= 5\sigma_s \left( -2\frac{z}{h} + \frac{1}{2} - \alpha \right), & \frac{3}{10} - \alpha &\leq \frac{2z}{h} < \frac{1}{2} + \alpha, \\ \sigma_1^0 &= 0, & \frac{1}{2} - \alpha &\leq \frac{2z}{h} < \frac{1}{2} + \alpha, \\ \sigma_1^0 &= 5\sigma_s \left( -2\frac{z}{h} + \frac{1}{2} + \alpha \right), & \frac{1}{2} + \alpha &\leq \frac{2z}{h} < \alpha + \frac{7}{10}, \\ \sigma_s^0 &= -\sigma_s, & \frac{7}{10} + \alpha &\leq \frac{2z}{h}, \\ \sigma_2^0 &= \sigma_1^0, & \sigma_{12}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (3,1)$$

При  $T_0 = 1038^\circ\text{C}$   $\alpha = 0$ .

Предположим, что на донья оболочки действуют вдвое большее равномерное давление, чем на боковую поверхность.

Очевидно,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ,  $\sigma_{11} = |\sigma|$ ,  $\epsilon_{11} = -2\epsilon$ .

Прогиб  $W$  является функцией только угла  $\theta$ ,

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{R_2} \left( \frac{d^2 W}{d\theta^2} + W \right). \quad (3,2)$$

Напряжение перед потерей устойчивости будет ( $\alpha = 0$ ):

$$\sigma = \sigma_s + 2E\epsilon, \quad \frac{2z}{h} \leq \frac{3}{10},$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{5}{2} \sigma_s \left( 1 - \frac{4z}{h} \right) + 2E\epsilon, & \frac{3}{10} &\leq \frac{2z}{h} \leq \frac{2z_0}{h}, \\ \sigma &= -\lambda \sigma_s + 2E(1 - \lambda)\epsilon, & z &> z_0, \end{aligned} \quad (3,3)$$

где  $z_0$  — граница упруго-пластической области;

$$\frac{4z_0}{h} = 1 + \frac{2\lambda}{5} \left( 1 + 2\frac{\epsilon}{\epsilon_s} \right) \left( |\epsilon| > \frac{1}{2} \epsilon_s \right). \quad (3,4)$$

При  $|\epsilon| < \frac{1}{2} \epsilon_s$  в (3,4) следует положить  $\lambda = 1$ . Деформация связана с нагрузкой  $P$  соотношением

$$-\frac{P}{\sigma_s} \frac{R}{h} = \frac{2}{5} + \lambda \left( 1 + 2\frac{\epsilon}{\epsilon_s} \right) \left( \frac{\lambda}{10} + \frac{\lambda}{5} \frac{\epsilon}{\epsilon_s} - \frac{1}{2} \right) + 2\frac{\epsilon}{\epsilon_s}. \quad (3,5)$$

Примем, что процесс потери устойчивости происходит при неизменных внешних усилиях [3]:  $\delta T_1 = \delta T_2 = \delta S = 0$ .

Отсюда получается соотношение

$$2e - \lambda \left[ e \left( \frac{1}{2} - \bar{z}_s \right) - \frac{xh}{2} \left( \frac{1}{4} - \bar{z}_s^2 \right) \right] = 0. \quad (3,6)$$

В нашем случае тангенциальный момент выражается через  $x_2$  следующим образом:

$$\delta M_2 = -KDx_2, \quad (3,7)$$

где  $\bar{z} = \frac{z_s}{h}$ ,

$$K = 1 - 3\lambda \left[ \frac{3\lambda \left( \frac{1}{4} - \bar{z}_s^2 \right)^2}{8 - 2\lambda + 4\lambda \bar{z}_s} + \frac{1}{8} - \bar{z}_s^3 \right].$$

Дифференциальное уравнение устойчивости будет иметь вид

$$\frac{d^2 W}{d\theta^2} + \left( 1 + \frac{PR^3}{KD} \right) W + \frac{CR^2}{KD} = 0.$$

Будем предполагать, как и выше, что  $z_s \approx z_0$ .

Если обозначить гибкость  $i = \frac{6\pi R}{h}$ , то тогда критическая нагрузка будет определяться соотношением

$$i = \pi \sqrt{\frac{72EK}{P}}, \quad (3,7)$$

причем  $\bar{z}_s$  связано с  $P$  соотношениями (3,4), (3,5).

**Б. Осесимметричная форма потери устойчивости.** В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \delta M_1 &= -K \frac{d^2 W}{dx^2} - (2K - 1) \frac{W}{2R^2} + 9\psi \frac{W}{Rh}, \\ \frac{1}{E} \delta T_2 &= - (1 - \varphi) \frac{R}{h} + \psi h \left( \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{W}{R^2} \right), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(\bar{z}_s) = \frac{4\lambda(1 - 2\bar{z}_s)}{32 - 12\lambda(1 - 2\bar{z}_s)}; \quad \psi(\bar{z}_s) = \frac{2\lambda(1 - 4\bar{z}_s^2)}{32 - 12\lambda(1 - 2\bar{z}_s)};$$

\* См. [2], стр. 199.



$$K = 1 - \frac{3\lambda}{8} \frac{36\lambda(1 - 4z_s^{-2}) + (1 - 8z_s^{-3}) [32 - 12\lambda(1 - 2z_s^{-2})]}{32 - 12\lambda(1 - 2z_s^{-2})}.$$

При  $\lambda = 0$   $\psi = \varphi = 0$ .  $K = 1$ .

Для данного случая уравнение устойчивости примет вид

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 9 \left( \frac{PR}{KEh^3} - \frac{\psi}{KRh} - \frac{\psi}{Kh^2} \right) \frac{d^2 W}{dx^2} + 9 \left( \frac{1 - \varphi}{K} \frac{1}{h^2 R^2} - \frac{\psi}{KhR^2} \right) W = 0.$$

Отсюда известным способом определяется критическая сила

$$P_{кр} = E \beta \left[ (1 + \beta) \Psi + \frac{2}{3} \beta \sqrt{K(1 - \varphi - \psi \beta)} \right],$$

где  $\beta = \frac{h}{R}$ .

Для случая А график между  $\frac{P_{кр}}{\sigma_s} \frac{R}{h}$  и  $\frac{P_{кр}^e}{\sigma_s} \frac{R}{h}$  изображен на рис. (3б).

Из этого графика следует, что при наличии начальных напряжений наибольшее отличие критической нагрузки от соответствующей, вызывающей упругую потерю устойчивости, достигает 40%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн, М. Р. Влияние остаточных напряжений на работу пластических конструкций. Сб. „Остаточные напряжения в металлах и металлических конструкциях“. ИЛ, 1957.
2. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. Изд-во МГУ, 1965.
3. Ильющин А. А. Пластичность, ч. I, ГИТТЛ, М., 1948.
4. Подзей А. В., Серебренников Г. З. „Научн. докл. высшей школы, серия „машиностроение и приборостроение“, 1959, № 1.
5. Тимошенко С. К. Устойчивость упругих систем ГТН, 1946.

Г. Г. АЛИЕВ

#### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НАТЯЖЕНИИ СВЯЗЕЙ

Дается решение задачи об устойчивости оболочки при натяжении армирующей системой тросов, причем предполагается, что сила трения между тросами и оболочкой отсутствует.

**Постановка задачи.** Рассмотрим однородную изотропную цилиндрическую оболочку, которая в цилиндрическом слое, расположенном на расстоянии  $z_0$  от срединной поверхности, армирована симметричной системой тросов, идущих по винтовым линиям с углом наклона  $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$  к образующей (рис. 1). Предполагается, что тросы взаимодействуют с оболочкой без трения, т. е. сила давления их на оболочку всюду направлена по главной нормали к винтовой линии (т. е. по нормали к оболочке). Пусть все тросы натянуты с одинаковой силой  $P$ ; число тросов, проходящих через поперечное сечение, обозначим через  $2N$  ( $N$  тросов одного и  $N$  — другого направлений). Оболочка предполагается достаточно длинной.

Начальные напряжения в оболочке (до потери устойчивости) от действия натяжений тросов будут:

$$\begin{cases} \sigma_x^0 = 0, \\ \sigma_y^0 = \frac{N}{\pi R h} \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} P, \\ \tau^0 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  направлены по образующей, по окружности и по радиусу, соответственно.

Уравнения равновесия и совместности деформаций оболочки при потере устойчивости имеют вид [1]:

$$D \nabla^4 W = \frac{h}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + [\sigma_x^0 x_x + \sigma_y^0 x_y + 2\tau^0 x_z] h - \delta q_z, \quad (2)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (3)$$

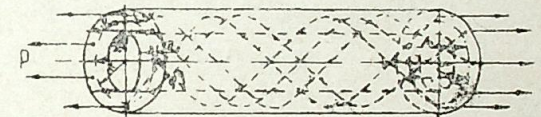


Рис. 1



где  $\Phi$  — функция напряжений для приращений напряжений,  
 $W$  — прогиб по оси  $z$ ,  
 $D = \frac{Eh_3}{12(1-\mu^2)}$  — цилиндрическая жесткость оболочки (без учета тросов),  
 $\nabla^4$  — бигармонический оператор:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$x_x, x_y, \chi$  — изменения кривизны и кручения:

$$x_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad x_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y},$$

$\delta q_z$  — нормальная составляющая давления тросов на оболочку в деформированном состоянии.

Вариация нормальной составляющей  $\delta q_z$  внешнего давления, приходящаяся на единицу площади, будет

$$\delta q_z = \frac{NP}{\pi R \sin \varphi} \left[ x_x \sin^2 \varphi + \frac{R}{R-2z_0} x_y \cos^2 \varphi + \frac{R}{R-z_0} 2\chi \sin \varphi \cos \varphi \right]. \quad (4)$$

Подставляя (1) и (4) в уравнение равновесия (2) и исключая функцию напряжений  $\Phi$ , получим основное дифференциальное уравнение устойчивости:

$$D \nabla^8 W + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{NP \sin \varphi}{\pi R} \left[ \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{2z_0}{R-2z_0} \operatorname{ctg}^2 \varphi \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{2R}{R-z_0} \operatorname{ctg} \varphi \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \right]. \quad (5)$$

Выпучивание оболочки под действием сил натяжений  $P$  тросов будет сопровождаться образованием регулярно расположенных по окружности волн, наклоненных под неизвестным углом  $\gamma$  к образующей. Поэтому для  $W$  примем выражение [2]

$$W = f \cos \frac{\nu \pi x}{L} \cdot \cos \frac{n}{R} (\gamma x + y), \quad (6)$$

где

$n$  — число полных волн по окружности,

$\nu$  — число полуволн по образующей,

$\gamma$  — тангенс угла наклона гребней волн к образующей.

Выражение (6) можно переписать в виде

$$W = W_1 + W_2, \quad (7)$$

где

$$W_1 = \frac{1}{2} f \left( \cos \frac{\nu y}{R} \cos \frac{M}{R} x - \sin \frac{\nu y}{R} \sin \frac{M}{R} x \right),$$

$$W_2 = \frac{1}{2} f \left( \cos \frac{\nu y}{R} \cos \frac{A}{R} x - \sin \frac{\nu y}{R} \sin \frac{A}{R} x \right),$$

причем

$$\frac{M}{R} = \frac{n\gamma}{R} + \frac{\nu\pi}{L}; \quad \frac{A}{R} = \frac{n\gamma}{R} - \frac{\nu\pi}{L}.$$

Выбранное выражение  $W$  дает следующие значения при  $x = \pm \frac{L}{2}$ ;

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -f \frac{\pi}{L} \cos \frac{n}{R} \left( y \pm \gamma \frac{L}{2} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = f \frac{2\pi n\gamma}{LR} \sin \frac{n}{R} \left( y \pm \gamma \frac{L}{2} \right),$$

Как видно, выбранное нами выражение для прогиба, строго говоря, не удовлетворяет ни условию шарнирного опирания, ни условию защемления для конечной длины  $L$  цилиндра, хотя  $W=0$  и на интервале

$$y_0 \leq y \leq y_0 + \frac{2\pi R}{n} = y_0 + \Delta y_0$$

имеем

$$\int_{y_0}^{y_0+\Delta y_0} \frac{\partial W}{\partial x} dy = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y_0} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dy = 0.$$

Таким образом, оба эти условия удовлетворяются одновременно в интегральном смысле на интервале

$$\Delta y_0 = \frac{2\pi R}{n} \leq \pi R$$

и определяемое нами решение будет точным только для  $L \rightarrow \infty$ .

Подставляя (7) в (5) и приравнявая коэффициенты при  $W_1$  и  $W_2$ , получаем два взаимозаменяемых уравнения, т. е. одно из них получается из другого заменой букв  $M$  и  $A$ :

$$\bar{P} = - \frac{(M^2 + n^2)^2 \left[ 1 + \lambda \frac{M^4}{(M^2 + n^2)^4} \right]}{M^2 + \frac{2z_0}{R-2z_0} n^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{2R}{R-z_0} Mn \operatorname{ctg} \varphi}, \quad (9)$$

$$\bar{P} = - \frac{(A^2 + n^2)^2 \left[ 1 + \lambda \frac{A^4}{(A^2 + n^2)^4} \right]}{A^2 + \frac{2z_0}{R-2z_0} n^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{2R}{R-z_0} An \operatorname{ctg} \varphi}, \quad (10)$$

где

$$\bar{P} = \frac{NR \sin \varphi}{\pi D} P; \quad \lambda = 12(1-\mu^2) \left( \frac{R}{h} \right)^2.$$

Эти уравнения имеют очевидное решение  $M=A$ . В этом случае имеем цилиндрическую форму потери устойчивости. Уравнения (9) и (10) в этом случае совпадут, т. е. будем иметь

$$\bar{P} = - \frac{(M^2 + n^2)^2 \left[ 1 + \lambda \frac{M^4}{(M^2 + n^2)^4} \right]}{M^2 + \frac{2z_0}{R-2z_0} n^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{2R}{R-z_0} Mn \operatorname{ctg} \varphi}. \quad (11)$$

Если известны  $M$  и  $n$ , то угол наклона вмятины  $\gamma$  определится следующим образом:

$$\gamma = \frac{M}{n}. \quad (12)$$

Обозначим через  $\Delta$  знаменатель формулы (11). Тогда могут представиться случаи:

$$\text{а) при } \frac{2z_0}{R} < 0 \text{ имеем } M < \frac{-2\frac{z_0}{R}}{2 - \frac{2z_0}{R}} n \operatorname{ctg} \varphi > 0, \Delta < 0;$$



| для $R/h = 25$ |                   |           |
|----------------|-------------------|-----------|
| $n$            | $M \cdot 10^{-3}$ | $\bar{P}$ |
| 2              | 0                 | 784,3     |
|                | 4                 | 1088      |
|                | 6                 | 1356      |
|                | 8                 | 1791      |
|                | 10                | 2666      |
|                | 12                | 5000      |
| 3              | 10                | 3319      |
|                | 12                | 4029      |
|                | 14                | 5100      |
|                | 16                | 7105      |
|                | 17                | 8231      |
| 4              | 16                | 7190      |
|                | 17                | 7805      |
|                | 20                | 10622     |
|                | 22                | 14027     |
| 5              | 20                | 11011     |
|                | 22                | 12900     |
|                | 24                | 15134     |
|                | 26                | 18383     |

| для $R/h = 50$ |                   |           |
|----------------|-------------------|-----------|
| $n$            | $M \cdot 10^{-3}$ | $\bar{P}$ |
| 2              | 0                 | 1538      |
|                | 2                 | 2133      |
|                | 3                 | 2623      |
|                | 4                 | 3478      |
|                | 5                 | 5000      |
|                | 6                 | 8883      |
| 3              | 5                 | 6429      |
|                | 6                 | 7788      |
|                | 7                 | 9747      |
|                | 8                 | 13500     |
|                | 9                 | 21316     |
| 4              | 8                 | 13913     |
|                | 9                 | 16449     |
|                | 10                | 20159     |
|                | 11                | 26123     |
| 5              | 10                | 21627     |
|                | 11                | 24704     |
|                | 12                | 29000     |
|                | 13                | 34723     |

б) при  $\frac{2\bar{\varepsilon}_0}{R} > 0$  имеем  $M \leq -\frac{2\bar{\varepsilon}_0}{R} n \operatorname{ctg} \varphi < 0, \Delta > 0$ .

Случай б) имеет места в силу неотрицательности силы натяжения. Следовательно, формулу (10) следует рассматривать при условии а).

Отсюда следует, что если армирующая система тросов расположена ниже срединной поверхности, то цилиндрическая оболочка всегда устойчива; в противном случае оболочка неустойчива. В случае армирования цилиндра с внешней поверхности уравнение (11) и условие а) примут вид:

$$\bar{P} = - \frac{(M^2 + n^2)^2 \left[ 1 + \lambda \frac{M^4}{(M^2 + n^2)^4} \right]}{M^2 - \frac{h}{R+h} n^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{4R}{2R+h} M n \operatorname{ctg} \varphi}, \quad (13)$$

$$M \leq -\frac{h}{2R+h} n \operatorname{ctg} \varphi, \quad (14)$$

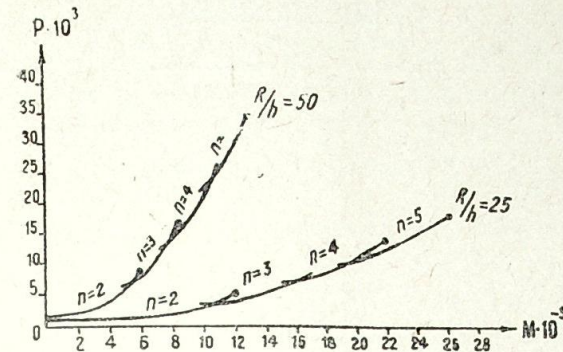


Рис. 2

На графике (рис. 2) объединены расчетные данные для определения критической силы натяжения  $P_{кр}$  тросов при различных отношениях  $R/h$ . Здесь на оси абсцисс отложено значение  $M$ , по оси ординат — параметр  $\bar{P} = \frac{NP \sin \varphi}{\pi L}$  при  $\varphi =$

$= 70^\circ$ . По графику видно, что критической силе натяжения  $\bar{P}_{кр}$  соответствует  $M = 0$  (см. стр. 54).

Рассматриваемая задача будет интересна в бурильной технике при исследовании вопроса устойчивости армированных гибких бурильных колонн или обсадных труб. В данной задаче установлена возможность потери устойчивости при неудачном расположении в сечении силовых тросов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, 1948.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. 1963.

Г. Г. Элијев

Дахили рабитэлэрин кэрилмэси заманы силиндриг өртүжүн мүвазинэти

#### ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ орта сэтхдэн мүэјјэн мэсафэдэ јерлэшмиш силиндриг гатда мүэјјэн бучаг алтында, винтвары хэтлэр бојунча јөнэлмиш симметриг систем трослар тэ'сири алтында олан бирчинсли изотроп силиндриг өртүкдэн бәһс едилир.



Б. А. АХМЕДОВ

### ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

В работе рассматривалось течение жидкости к батарее скважин, заменяемой галереей, в пласте с проницаемой кровлей [1]. Предполагалось, что коэффициенты проницаемости в горизонтальном ( $\kappa_x$ ) и вертикальном ( $\kappa_y$ ) направлениях различные. Учитывались упругие свойства жидкости и продуктивного пласта. Предполагалось также, что над продуктивным пластом имеется слабопроницаемый пропласток (перемычки), над которым поддерживается постоянное давление  $p_0$ . Определяем поле давления в продуктивном пласте с учетом указанных условий.

#### § 1. На забое поддерживается постоянное давление $p_c$

Для решения задачи необходимо построить решение уравнения

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

при условиях

$$p|_{x=0} = p_c; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0;$$

$$p|_{t=0} = p_0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\alpha^2 (p - p_0) \text{ при } y = b.$$

где  $p(x, y, t)$  — давление в точке  $(x, y)$  в момент времени  $t$ ;  $\kappa^2 = \frac{\kappa_y}{\kappa_x}$ ;  $\gamma_x$  — коэффициент пьезопроводности в горизонтальном направлении. Режим считается упруго-замкнутым. Последние условия взяты из [1].

Введя новое переменное  $P = p - p_0$ , из (1) получим

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \kappa^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2)$$

при условиях

$$P|_{x=0} = P_c = p_c - p_0; \quad \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0;$$

$$P|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \alpha^2 P = 0 \text{ при } y = b;$$

$$\alpha^2 = \frac{\kappa_r}{\kappa_y b_r}.$$

$\kappa_r$  и  $b_r$  — соответственно, коэффициент проницаемости и мощность перемычки, а  $b$  — мощность пласта.

Следуя [2], умножим (2) на  $\frac{2}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx$ , проинтегрируем от 0 до  $l$  и введем обозначение

$$P_n(y, t) = \frac{2}{l} \int_0^l P(y, x, t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как

$$\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{(2n+1)\pi}{l^2} P_c - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} P_n,$$

то из (2) для  $P_n$  получим

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} P_n + \frac{(2n+1)\pi}{l^2} P_c = \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial P_n}{\partial t} \quad (3)$$

при условиях

$$P_n|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad \frac{\partial P_n}{\partial y} + \alpha^2 P_n = 0 \text{ при } y = b.$$

Теперь умножим уравнение (3) на  $N_m \cos \lambda_m y dy$  и проинтегрируем от 0 до  $l$ , где  $\lambda_m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) — корни уравнения  $-\lambda_m \sin \lambda_m b + \alpha^2 \cos \lambda_m b = 0$ , а  $N_m$  определяется из условия нормировки. Введя обозначение

$$P_{nm}(t) = N_m \int_0^b P_n(y, t) \cos \lambda_m y dy$$

и учитывая, что

$$N_m \int_0^b \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} \cos \lambda_m y dy = -\lambda_m^2 P_{nm} \text{ из (3)}$$

получим

$$\frac{dP_{nm}}{dt} + A_{nm} P_{nm} = C_{nm} \quad (4)$$

при условии  $P_{nm}|_{t=0} = 0$ , где

$$A_{nm} = \gamma_x \left[ \kappa^2 \lambda_m^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} \right],$$

$$B_{nm} = \gamma_x \frac{(2n+1)\pi}{l^2} N_m \frac{\sin \lambda_m b}{\lambda_m} P_c.$$

Решение уравнения (4) при приведенном условии имеет вид

$$P_{nm} = \frac{B_{nm}}{A_{nm}} (1 - e^{-A_{nm} t})$$



и тогда

$$P_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{nm}}{A_{nm}} (1 - e^{-A_{nm}t}) \cos \lambda_m y,$$

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{nm}}{A_{nm}} (1 - e^{-A_{nm}t}) \cos \lambda_m y \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (4)$$

Формула (5), где  $P = p - p_0$ , дает решение поставленной задачи. Исходя из (5), количество перетекающей через кровлю жидкости  $Q$ , определится формулой

$$Q_y = - \frac{\kappa_y}{\mu} \int_0^l \left( \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{y=b} dx. \quad (6)$$

§ 2. На забое поддерживается постоянная скорость (градиент)  $A$

В этом случае требуется найти решение уравнения (2) при указанных условиях лишь с той разницей, что  $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = A$ . Умножаем уравнение (2) на  $\frac{2}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx$  и интегрируем от 0 до  $l$ . Обозначая

$$P_n(y, t) = \frac{2}{l} \int_0^l P(x, y, t) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

и учитывая, что

$$\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = - \frac{2A}{l} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 P_n,$$

из (2) получим

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 P_n = - \frac{2A}{l} = \frac{1}{x_x} \frac{\partial P_n}{\partial t} \quad (7)$$

при условиях  $P_n|_{t=0} = 0$ ;

$$\frac{\partial P_n}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \text{ и } \frac{\partial P_n}{\partial y} + \alpha^2 P_n = 0 \text{ при } y = b.$$

Далее, поступая так же, как это мы делали в первом параграфе, т. е. умножая (7) на  $N_m \cos \lambda_m y dy$ , интегрируя от 0 до  $b$ , учитывая граничные условия и обозначая

$$P_{nm}(t) = N_m \int_0^b P_n(y, t) \cos \lambda_m y dy,$$

получим

$$\frac{dP_{nm}}{dt} + C_{nm} P_{nm} = D_{nm} \quad (8)$$

при условии  $P_{nm}|_{t=0} = 0$ ,

где  $C_{nm} = x_x \left[ \kappa^2 \lambda_m^2 + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \right]$ ,

$$D_{nm} = - x_x \frac{2A}{l} N_m \frac{\sin \lambda_m b}{\lambda_m}.$$

Решая уравнение (8) при указанном условии, получим

$$P_{nm} = \frac{D_{nm}}{C_{nm}} (1 - e^{-C_{nm}t}),$$

тогда

$$P_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{nm}}{C_{nm}} (1 - e^{-C_{nm}t}) \cos \lambda_m y$$

и

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{nm}}{C_{nm}} (1 - e^{-C_{nm}t}) \cos \lambda_m y \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (9)$$

Формула (9) определяет поле давления ( $p = P + p_0$ ) в продуктивном пласте. Количество перетока, через кровлю пласта и в этом случае определится формулой (6), где значение  $P$  следует брать из (9).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гуссейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. "Недра", М., 1965.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

Б. Э. Әһмәдов

Таваны кечиричи олан анизотроп лајда мајенин ахыны

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә таваны кечиричи олан лајда гујулар батарејасына галереја кими бахылараг, маје ахыны мәсәләси верилмишдир. Белә ки, үфги вә шагули истигамәтләрдә кечиричилик мүхтәлиф һесаб олу- нур.

Мәсәләнин һәллиндә Гринберг үсулундан истифадә едиләрәк, лајда тәзјигин пајланмасы гануну тапылмышдыр.



И. Г. ТАГИЕВ

# РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОЛОГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Статья посвящена разработке нового приближенного метода решения краевых задач пологих цилиндрических оболочек произвольно заданного очертания по технической моментной теории В. З. Власова. Уравнения равновесия пологих цилиндрических оболочек произвольного очертания методом малого параметра сводятся к бесконечной системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами того же типа и порядка, как исходные уравнения. Дается также общая схема решения при шарнирно подвижном опирании краев произвольной пологой цилиндрической оболочки, имеющей форму прямоугольника в плане, и находящейся под действием поверхностной, равномерно распределенной нормальной нагрузки. В качестве численного примера рассматривается пологая цилиндрическая оболочка с очертанием цепной линии.

§ 1. Уравнения равновесия и метод сведения их к бесконечной системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами.

Уравнения равновесия пологих цилиндрических оболочек при действии только нормальной нагрузки  $z(\alpha, \beta)$  по технической моментной теории В. З. Власова имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi(\alpha, \beta) - \frac{Eh}{r(\beta)} \cdot \frac{\partial^2 w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \Delta^2 w(\alpha, \beta) + \frac{1}{Dr(\beta)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^2} &= \frac{z(\alpha, \beta)}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 1)$$

где  $E, h, D$  — постоянные, соответственно, модуль Юнга, толщина и цилиндрическая жесткость оболочки; причем  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ , здесь  $\mu$  —

коэффициент Пуассона;  $\alpha, \beta$  — криволинейные ортогональные координаты срединной поверхности оболочки;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$$

— оператор Лапласа;  $r(\beta)$  — радиус кривизны цилиндрической поверхности.

Пусть система (1, 1) рассматривается в некоторой области  $G$ , граница которой состоит из кривой  $\Gamma$ . Требуется найти решение системы (1, 1) в области  $\bar{G} = G + \Gamma$ , которое на границе  $\Gamma$  удовлетво-

ряет некоторым граничным условиям. Вводим безразмерный радиус  $\delta(\beta)$  по соотношению

$$r(\beta) = r_0 \delta(\beta) \quad \beta \in \bar{G}, \quad (1, 2)$$

где  $r_0$  — наибольшее значение радиуса кривизны в области  $\bar{G}$ . Безразмерный радиус  $\delta(\beta)$  представим в виде

$$\delta(\beta) = 1 - \gamma \sigma(\beta), \quad (1, 3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \sup (1 - \delta(\beta)) < 1, \\ \beta &\in \bar{G} \\ 0 &\leq \sigma(\beta) \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (1, 4)$$

Учитывая соотношения (1, 2) и (1, 3), уравнения (1, 1) преобразуем к виду:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi - \gamma \sigma(\beta) \Delta^2 \varphi - \frac{Eh}{r_0} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \Delta^2 w - \gamma \sigma(\beta) \Delta^2 w + \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} &= \frac{z}{D} - \gamma \sigma(\beta) \frac{z}{D}. \end{aligned} \right\} \quad (1, 5)$$

Последние уравнения позволяют искать решение в области  $\bar{G}$  в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + \gamma w_1 + \gamma^2 w_2 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \gamma \varphi_1 + \gamma^2 \varphi_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1, 6)$$

Эти разложения, подставляя в (1, 5) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\gamma$  из обеих частей, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_0 - \frac{Eh}{r_0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \alpha^2} &= 0, \\ \Delta^2 w_0 + \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} &= \frac{z}{D}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 7_0)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_1 - \frac{Eh}{r_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \alpha^2} &= \sigma \Delta^2 \varphi_0, \\ \Delta^2 w_1 + \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \alpha^2} &= -\sigma \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 7_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_2 - \frac{Eh}{r_0} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \alpha^2} &= \sigma \Delta^2 \varphi_1, \\ \Delta^2 w_2 + \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \alpha^2} &= \sigma \Delta^2 w_1, \end{aligned} \right\} \quad (1, 7_2)$$

$$\dots \dots \dots \left. \begin{aligned} \Delta^2 \varphi_n - \frac{Eh}{r_0} \frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha^2} &= \sigma \Delta^2 \varphi_{n-1}, \\ \Delta^2 w_n + \frac{1}{Dr_0} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \alpha^2} &= \sigma \Delta^2 w_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (1, 7_n)$$

( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

Каждая система (1, 7) представляет собой уравнения с постоянными коэффициентами, полностью совпадающие по виду с уравнениями равновесия круговых пологих цилиндрических оболочек. Приведение исходной системы (1, 1) к зацепляющимся системам (1, 7) устраняет трудности решения, связанные с переменностью радиуса кривизны, и позволяет получить решение обычными путями — на основе решений пологих круговых цилиндрических оболочек.



## § 2. Решение примера

Пусть область  $\bar{G}$  состоит из прямоугольника со сторонами  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . В этом случае при шарнирно подвижном опирании краев будем иметь следующие граничные условия [1]:

$$\left. \begin{aligned} v_n = w_n = N_1^{(n)} = M_1^{(n)} = 0 \quad \text{при } \alpha = 0 \text{ и } \alpha = \alpha_1, \\ u_n = w_n = N_2^{(n)} = M_2^{(n)} = 0 \quad \text{при } \beta = 0 \text{ и } \beta = \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (1, 8)$$

( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Краевые условия (1, 8) дают возможность искать решения  $w_n, \varphi_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) в виде двойного тригонометрического ряда:

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \sum_m \sum_k A_{mk}^{(n)} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1}, \\ \varphi_n &= \sum_m \sum_k B_{mk}^{(n)} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1, 9)$$

Для этого достаточно сделать предположение о разложимости поверхностной нагрузки  $z(\alpha, \beta)$  в тригонометрический ряд вида

$$z(\alpha, \beta) = \sum_m \sum_k C_{mk} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1}, \quad (1, 10)$$

где

$$C_{mk} = \frac{4}{\alpha_1 \cdot \beta_1} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} z(\alpha, \beta) \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1} d\alpha d\beta. \quad (1, 11)$$

Подставляя в уравнения (1, 7<sub>0</sub>) выражения (1, 9) и (1, 10) при  $n = 0$ , определим коэффициенты  $A_{mk}^{(0)}$  и  $B_{mk}^{(0)}$ :

$$\left. \begin{aligned} A_{mk}^{(0)} &= \frac{1}{D} \cdot \frac{\Delta_{mk}^2}{\Delta_{mk}^+} C_{mk}, \\ B_{mk}^{(0)} &= -\frac{1}{D} \cdot \left( \frac{m \pi}{\alpha_1} \right)^2 \frac{C_{mk}}{\Delta_{mk}^+} \end{aligned} \right\} \quad (1, 12)$$

где

$$\Delta_{mk}^+ = \Delta_{mk}^4 + \lambda \left( \frac{m \pi}{\alpha_1} \right)^2, \quad \Delta_{mk} = \left( \frac{m \pi}{\alpha_1} \right)^2 + \left( \frac{k \pi}{\beta_1} \right)^2, \quad \lambda = \frac{12(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2}. \quad (1, 13)$$

Поступая аналогичным образом, определим коэффициенты последующих приближений:

$$\left. \begin{aligned} A_{mk}^{(n)} &= \frac{1}{Dr_0} \cdot \left( \frac{m \pi}{\alpha_1} \right)^2 \frac{D_{mk}^{(n)} + \Delta_{mk}^2 E_{mk}^{(n)}}{\Delta_{mk}^+}, \\ B_{mk}^{(n)} &= -\frac{Eh}{r_0} \left( \frac{m \pi}{\alpha_1} \right)^2 \frac{E_{mk}^{(n)} - \Delta_{mk}^2 D_{mk}^{(n)}}{\Delta_{mk}^+} \end{aligned} \right\} \quad (1, 14)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),

где

$$D_{mk}^{(n)} = \frac{4}{\alpha_1 \cdot \beta_1} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} \sigma(\beta) \Delta^2 \varphi_{n-1} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1} d\alpha d\beta \quad (1, 15)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),

$$E_{mk}^{(1)} = \frac{-1}{Dr_0} \frac{4}{\alpha_1 \cdot \beta_1} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} \sigma(\beta) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \alpha^2} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1} d\alpha d\beta, \quad (1, 16)$$

$$E_{mk}^{(n)} = \frac{4}{\alpha_1 \cdot \beta_1} \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\beta_1} \sigma(\beta) \Delta^2 w_{n-1} \sin \frac{m \pi \alpha}{\alpha_1} \sin \frac{k \pi \beta}{\beta_1} d\alpha d\beta \quad (1, 17)$$

( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

## § 3. Решение численного примера

В качестве конкретного очертания возьмем симметричное сечение цепной линии, смещенной от начала координат на  $x_0$  единиц:

$$y = r_1 ch \frac{x - x_0}{r_1}. \quad (1, 18)$$

Отсюда легко перейти к натуральному уравнению цепной линии [2]:

$$r(\beta) = r_1 + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{r_1}, \quad (1, 19)$$

где  $\beta$  — длина дуги,  $0 \leq \beta \leq \beta_1 = 2\beta_0$ ,  $r_1$  — наименьшее значение радиуса кривизны на отрезке  $[0, \beta_1]$ .

Определим на отрезке  $[0, \beta_1]$  безразмерный радиус кривизны  $\delta(\beta)$ , малый параметр  $\nu$  и вспомогательную функцию  $\sigma(\beta)$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta(\beta) &= \frac{r(\beta)}{r_0} = \frac{r_1 + \frac{(\beta - \beta_0)^2}{r_1}}{r_1 + \frac{\beta_0^2}{r_1}}, \\ \nu &= \frac{r_0 - r_1}{r_0}, \\ \sigma(\beta) &= 1 - B(\beta - \beta_0)^2, \quad B = \frac{1}{r_1(r_0 - r_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (1, 20)$$

где  $r_0 = r_1 + \frac{\beta_0^2}{r_1}$  — наибольшее значение радиуса  $r(\beta)$  на отрезке  $[0, \beta_1]$ .

Учитывая (1, 20), легко найти выражения коэффициентов  $D_{mk}^{(n)}$ ,  $E_{mk}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\left. \begin{aligned} D_{mk}^{(n)} &= -\frac{4B\beta_1^2 k}{\pi^2} \sum_{k \neq k'} B_{mk'}^{(n-1)} \Delta_{mk'}^2 \frac{k' [1 + (-1)^{k+k'}]}{(k^2 - k'^2)^2} + \\ &+ B_{mk}^{(n-1)} \Delta_{mk}^2 \left[ \left( 1 - \frac{B\beta_1^2}{12} \right) + \frac{B\beta_1^2}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1, 21)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),



$$E_{mk}^{(1)} = -\frac{1}{Dr_0} \cdot \frac{4B\beta_1^2}{\pi^2} \left(\frac{m\pi}{\alpha_1}\right)^2 \sum_{k' \neq k} B_{mk'}^{(0)} \frac{k' [1 + (-1)^{k+k'}]}{(k^2 - k'^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{Dr_0} B_{mk}^{(0)} \cdot \left(\frac{m\pi}{\alpha_1}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{B\beta_1^2}{12}\right)^2 + \frac{B\beta_1^2}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \right], \quad (1, 22)$$

$$E_{mk}^{(n)} = -\frac{4B\beta_1^2 k}{\pi^2} \sum_{k' \neq k} \Delta_{mk}^{(n-1)} \Delta_{mk'}^2 \cdot \frac{k' [1 + (-1)^{k+k'}]}{(k^2 - k'^2)^2} +$$

$$+ A_{mk}^{(n-1)} \Delta_{mk}^2 \left[ \left(1 - \frac{B\beta_1^2}{12}\right)^2 + \frac{B\beta_1^2}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \right] \quad (1, 23)$$

( $n = 2, 3, 4, \dots$ ).

Подставляя эти выражения в (1, 14), определим коэффициенты  $A_{mk}^{(n)}$  и  $B_{mk}^{(n)}$  с помощью коэффициентов предыдущих приближений. Ниже приводятся главные значения приведенных коэффициентов:

$$\bar{A}_{mk}^{(n)} = A_{mk}^{(n)} \cdot \frac{-16q}{\pi^2 L}, \quad \bar{B}_{mk}^{(n)} = B_{mk}^{(n)} \cdot \frac{16q}{\pi^2 D} \cdot \frac{Eh}{r_0} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

при действии на оболочку нормальной нагрузки  $z = -q = \text{const}$  и при следующих геометрических и физических данных:

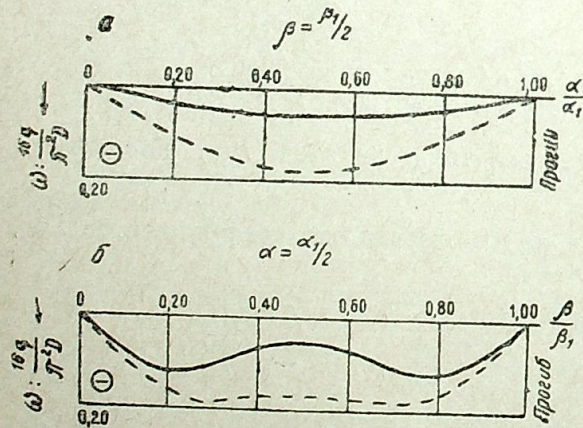
$$\left. \begin{aligned} &\text{длина по сгибающей } \alpha_1 = 12 \text{ м; длина по} \\ &\text{направляющей } \beta_1 = 2\beta_0 = 6 \text{ м; пролет } a = 5,625 \text{ м;} \\ &\text{стрела подъема } f = 0,908 \text{ м; наименьшее и} \\ &\text{наибольшее значения радиуса, соответственно,} \\ &r_1 = 4,5 \text{ м, } r_0 = 6,5 \text{ м;} \end{aligned} \right\} \quad (1, 24)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{толщина оболочки } h = 0,05 \text{ м; коэффициент Пуас-} \\ &\text{сона } \mu = 0,15; \text{ модуль Юнга } E = 40000 \text{ кг/см}^2; \\ &\text{малый параметр } \nu = 0,3076923, B = 0,25 \text{ 1/м}^2; \\ &\lambda = 111,05325 \text{ 1/м}^4; \text{ пологость } \frac{f}{a} = 0,16; \end{aligned} \right\} \quad (1, 24)$$

$$\left. \begin{aligned} &\bar{A}_{11}^{(0)} = 0,225117; \quad \bar{A}_{11}^{(1)} = -0,363378; \quad \bar{A}_{11}^{(2)} = 0,018553; \\ &\bar{B}_{11}^{(0)} = 0,127997; \quad \bar{B}_{11}^{(1)} = -0,105454; \quad \bar{B}_{11}^{(2)} = 0,001026. \end{aligned} \right\} \quad (1, 25)$$

Сохраняя в ряде (1, 6) первые три члена, вычислим прогибы вдоль сечений  $\beta = \frac{\beta_1}{2}$  и  $\alpha = \frac{\alpha_1}{2}$ .

При этом в тригонометрических рядах (1, 9) ввиду их быстрой сходимости сохранены только члены с индексами  $m, k = 1, 3, 5$ . Полученные численные результаты для (1, 24) приводятся на рисунке. Здесь сплошными линиями нанесены результаты вычисления трех членов ряда (1, 6), штриховыми — результаты первого приближения. Из (1, 25) видно, что главные значения



таты вычисления трех членов ряда (1, 6), штриховыми — результаты первого приближения. Из (1, 25) видно, что главные значения

приведенных коэффициентов  $\bar{A}_{11}^{(n)}$  и  $\bar{B}_{11}^{(n)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) по абсолютному значению образуют монотонно убывающую последовательность. Это означает равномерную сходимость ряда (1, 6) в рассматриваемой области. Можно показать, что погрешность приближенного решения в данном случае не превосходит норму, установленную расчетной практикой.

В заключение отметим, что предложенный метод малого параметра с успехом можно применить и при решении других краевых задач теории пологих цилиндрических оболочек произвольно заданного очертания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. т. I. Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. Фиктенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Физматгиз, 1959.

И. Б. Тағыев

## Ихтијари азгабарыглы цилиндрик өртүкләрин сәрһәд мәсәләләринин кичик параметр үсулу илә һәлли

### ХҮЛАСӘ

Мәгалә азгабарыглы ихтијари цилиндрик өртүкләрин дәјишән әмсаллы мұвазинәт тәнликләринин кичик параметр васитәсилә сабит әмсаллы илишән тәнликләр системинә кәтирилмәсиндән бәһс едир. (1, 2) вә (1, 3) әвәзләмәләри әсасында (1, 1) системи (1, 5) шәклинә дүшүр. (1, 5) тәнликләриндә јарадылан  $\nu$  кәмијјәти кичик параметрдир вә бахылан областда мәсәләнин һәллини (1, 6) шәклиндә ахтармаға имкан јарадыр. Беләликлә, дәјишән әмсаллы (1, 1) системи әвәзинә сабит әмсаллы (1, 7<sub>0</sub>), (1, 7<sub>1</sub>), (1, 7<sub>2</sub>), ..., (1, 7<sub>n</sub>) илишән системләри алыныр.

Мәгаләнин 2-чи вә 3-чү бәндләриндә бир сәрһәд мәсәләсинин үмуми шәкилдә һәллинә бахылмышдыр. Бурада алынған нәтичәләр сонра мұәјјән профил үчүн тәтбиг олуноур. Бу мисал әсасында [1, 6] ајрылышынын мүнтәзәм јығылдығы кәстәрилир.

Мәгаләдә тәклиф олуған үсул даһа мұрәккәб мәсәләләрин һәлиндә тәтбиг олуна биләр.



Д. М. МАНИУРОВ

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сформулируем задачу квадратичного параметрического программирования:

Задача 1. Найти для каждого фиксированного  $\lambda$  в интервале  $[\alpha, \beta]$  вектор  $X(\lambda) = (x_1(\lambda), \dots, x_n(\lambda))$ , минимизирующий функцию

$$p'(\lambda) x(\lambda) + x'(\lambda) C(\lambda) x(\lambda)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} A(\lambda) x(\lambda) &= b(\lambda), \\ X(\lambda) &\geq 0, \end{aligned}$$

где  $C(\lambda)$  — симметричная положительно-полуопределенная для каждого фиксированного  $\lambda$  матрица  $n$ -го порядка;  $A(\lambda)$  — матрица с размерами  $m \times n$ ;  $p(\lambda)$  —  $n$ -мерный и  $b(\lambda)$  —  $m$ -мерный векторы.

Условия Куна—Таккера, необходимые и достаточные для решения задачи 1, имеют вид:

Задача 2.

$$\left. \begin{aligned} A'(\lambda) U(\lambda) - V(\lambda) + 2C(\lambda) X(\lambda) &= -p(\lambda), \\ A(\lambda) X(\lambda) &= b(\lambda), \\ X(\lambda) &\geq 0, V(\lambda) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

и

$$(X(\lambda), V(\lambda)) = 0.$$

Таким образом, допустимый  $n$ -мерный вектор  $X(\lambda)$  является решением задачи 1 тогда и только тогда, когда совместно с  $n$ -мерным вектором  $V(\lambda)$  существует  $m$ -мерный вектор  $U(\lambda)$  такой, что  $\|X(\lambda) V(\lambda) U(\lambda)\|$  — решение задачи 2. Поэтому, если найдем решение задачи 2, то вектор  $X(\lambda)$  будет решением задачи 1.

Предположение 1. Пусть элементы матриц  $C(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$  векторов  $p(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  — заданные ступенчатые функции в интервале  $[\alpha, \beta]$  и все имеют разрыв с одной и той же стороны. При этом, аналогично теореме 1 из [1], справедливо следующее утверждение. Если задача 2 разрешима при всех  $\lambda \in [\alpha, \beta]$ , то ее решение есть ступенчатый вектор. Чтобы найти это решение, разбиваем  $[\alpha, \beta]$  на интервалы так, чтобы на каждом из них все элементы  $C(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$ ,  $p(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  были постоянными. Затем решаем задачу 2 для каждого интервала  $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ . Можно применить, например, метод Вульфа [2] для квадратичного программирования.

Предположение 2. Пусть теперь элементы матриц  $C(\lambda)$  и  $A(\lambda)$  векторов  $p(\lambda)$  и  $b(\lambda)$  — заданные кусочно-непрерывные функции в интервале  $[\alpha, \beta]$  и имеют разрыв с одной и той же стороны.

Определение. Пусть  $f(\lambda)$  — кусочно-непрерывная функция в интервале  $[\alpha, \beta]$ . Разделим  $[\alpha, \beta]$  на части так, чтобы точки разрыва вошли в точки деления. Обозначим через  $f_h(\lambda)$  функцию, которая на каждом интервале принимает значения, равные значению  $f(\lambda)$  на левом конце интервала. Назовем  $f_h(\lambda)$   $h$ -функцией функции  $f(\lambda)$ .

Определение. Сформулируем следующую  $h$ -задачу. Для каждого фиксированного  $\lambda$  найти решение задачи

$$\begin{aligned} A_h'(\lambda) U_h(\lambda) - V_h(\lambda) + 2C_h(\lambda) X_h(\lambda) &= -p_h(\lambda), \\ A_h(\lambda) X_h(\lambda) &= b_h(\lambda), \\ X_h(\lambda) &\geq 0; V_h(\lambda) \geq 0 \\ \text{и } (X_h(\lambda), V_h(\lambda)) &= 0, \end{aligned}$$

где

$C_h(\lambda)$ ,  $A_h(\lambda)$  — матрицы, элементы которых суть  $h$ -функции соответствующих элементов  $C(\lambda)$ ,  $A(\lambda)$ , а компоненты векторов  $p_h(\lambda)$ ,  $b_h(\lambda)$  являются  $h$ -функциями соответствующих компонент  $p(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$ .

Теорема. Допустим:

1. Задача 2 разрешима при любом  $\lambda \in [\alpha, \beta]$ ;

2.  $|\det B_h(\lambda)| \geq \alpha(\lambda) > 0$ ,

где  $B_h(\lambda)$  — любая квадратичная подматрица матрицы

$$\begin{vmatrix} A_h'(\lambda) - EC_h(\lambda) \\ 0 & 0 & A_h(\lambda) \end{vmatrix},$$

в которой векторы-столбцы линейно независимы. Тогда можно выбрать последовательность решений  $h_k$ -задач так, чтобы она имела предел при всех  $\lambda$ , для которых выполняется условие 2 и этот предел есть решение задачи 2.

Имеет место лемма, доказанная в [1]:

Решение  $h$ -задач, если они существуют, ограничены равномерно относительно  $h$  во всех точках  $[\alpha, \beta]$ , где выполнено условие 2, т. е.

$$\|X_h^0(\lambda) V_h^0(\lambda) U_h^0(\lambda)\| \leq C(\lambda). \quad (1)$$

Доказательство теоремы. Так как задача 2 разрешима, то  $h$ -задачи разрешимы, поэтому имеет место (1), где выполняется условие 2.

Следовательно, существует такая подпоследовательность

$$\|X_{h_k}^0(\lambda) V_{h_k}^0(\lambda) U_{h_k}^0(\lambda)\|$$

что

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \|X_{h_k}^0(\lambda) V_{h_k}^0(\lambda) U_{h_k}^0(\lambda)\| = \|X^0(\lambda) V^0(\lambda) U^0(\lambda)\|.$$

Этот предел существует, ибо в конечномерном пространстве ограниченное множество компактно. Итак,  $\|X^0(\lambda) V^0(\lambda) U^0(\lambda)\|$  является решением системы (\*).

Теперь покажем, что удовлетворяется и условие

$$(X^0(\lambda), V^0(\lambda)) = 0. \quad (2)$$

Вектор  $\|X_{h_k}^0(\lambda) V_{h_k}^0(\lambda) U_{h_k}^0(\lambda)\|$  является решением следующей  $h_k$ -задачи:

$$\begin{aligned} A_{h_k}'(\lambda) U_{h_k}^0(\lambda) - V_{h_k}^0(\lambda) + 2C_{h_k}(\lambda) X_{h_k}^0(\lambda) &= -p_{h_k}(\lambda), \\ A_{h_k}(\lambda) X_{h_k}^0(\lambda) &= b_{h_k}(\lambda), \end{aligned}$$



$$X_{n_k}^0(\lambda) \geq 0, V_{n_k}^0(\lambda) \geq 0, \\ (X_{n_k}^0(\lambda), V_{n_k}^0(\lambda)) = 0.$$

Поэтому, переходя к пределу в последнем равенстве при  $n_k \rightarrow 0$ , получим (2). Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян В. Б. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. Ереван, 1964.
2. Кюнц Г. П., Крелле. Нелинейное программирование. М., 1965.

Д. М. Манжуров

#### Параметрик квадратик програмлашдырманын бир мäsäläси һаггында

#### ХУЛАСӘ

Бу ишдә параметрик квадратик програмлашдырманын ашагыдакы мäsäläси тәдгиг едилмишдир;

$$\max \{p'(\lambda)x(\lambda) + x'(\lambda) \mid A(\lambda)x(\lambda) = b(\lambda), x(\lambda) \geq 0\} \quad (1)$$

Мäsäläни һәлл етмәк үчүн көмәкчи  $h$  мäsäläси гојулур вә елә ардычыл һәлләр чохлау сечилир ки, онун бүтүн  $\lambda$  үчүн лимити олур.

Бу лимит вар вә  $\|x^0(\lambda), V^0(\lambda), U^0(\lambda)\|$  бәрәбәрдир. Онда  $x^0(\lambda)$  гојулан (1) мäsäläсинин һәлли олур.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, М. И. АЛИЕВ, Г. И. САФАРАЛИЕВ

#### О МЕХАНИЗМЕ ПРОВОДИМОСТИ И РАССЕЯНИЯ ФОНОНОВ В ЛЕГИРОВАННОМ GaSb

Исследованию электрических свойств, гальвано- и термомагнитных эффектов кристаллов антимонида галлия  $n$ - и  $p$ - типа, легированных до различных концентраций примесей, посвящен ряд работ [1 ÷ 4]. Результаты этих исследований интерпретируются в предположении о сложной структуре зоны проводимости и валентной зоны [5 ÷ 7]. В зоне проводимости имеется три минимума в различных точках  $K$ -пространства: абсолютный минимум в центре зоны Бриллюэна [000] и минимумы вдоль направлений [111] и [100]. Валентная зона состоит из подзон, энергетически смыкающихся в экстремальной точке.

В связи с созданием на основе GaSb туннельных диодов и квантовых генераторов [8 ÷ 10] изучение его основных характеристик, а также таких вопросов, как механизмы рассеяния носителей тока и фононов, взаимодействие акустических и оптических фононов и др. представляет несомненный интерес. Особый интерес представляет исследование этих вопросов в зависимости от глубины легирования донорными и акцепторными примесями. Для изучения этих вопросов требуется всестороннее исследование ряда явлений, связанных с движением носителей тока и распространением тепла в широком интервале температур.

Среди соединений  $A^{III}B^V$  GaSb занимает особое положение. У него отношение масс атомов  $\frac{m_1}{m_2} = 1,75$ . Поэтому, согласно теории Блекмана [11] и Займана [12] можно предполагать, что в нем должно быть сильное взаимодействие между акустическими и оптическими фононами. С этой точки зрения исследование теплопроводности GaSb в широком интервале температур представляет собой интерес. Для интерпретации результатов по теплопроводности нам представлялось необходимым комплексное исследование ряда кинетических эффектов. Поэтому наряду с теплопроводностью ( $\kappa$ ) проведено комплексное исследование электропроводности ( $\sigma$ ), эффекта Холла ( $R$ ), термоэдс ( $\alpha$ ), поперечного магнетосопротивления ( $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ ), эффектов Нернста—Эттингсгаузена ( $Q_{II}$  и  $Q_{\perp}$ ) от 80 до 600° К. Кстати отметим, что такое комплексное исследование может дать возможность выяснить также некоторые, пока неуточненные вопросы, такие как сильное отклонение значений экспериментально определенной подвижности электронов



и дырок от теоретически вычисленных, аномальная зависимость подвижности электронов от их концентраций, механизм компенсации примесей и др.

Известно, что до сих пор не получены сверхчистые кристаллы GaSb. По-видимому, комплексное исследование процессов переноса может способствовать выяснению этого вопроса. В статье приводятся результаты исследования  $\chi$ ,  $\sigma$ ,  $R$  в зависимости от концентрации примесей и температуры.

### Приготовление образцов и методика измерений

Для синтеза GaSb были использованы галлий и сурьма высокой чистоты. После многократной зонной перекристаллизации был получен материал с концентрацией дырок  $(1,4 \div 1,5) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$  при  $300^\circ \text{ К}$ . Затем он был легирован цинком и теллуром. Зависимость концентрации носителей тока от атомного процента Zn и Te показана на рис. 1. При добавлении 0,67 ат. % Zn концентрация дырок достигает  $1,4 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . При добавлении теллура концентрация носителей тока вначале падает, что связано с компенсацией примесей, затем происходит перемена знака проводимости. При 0,67 ат. % Te концентрация носителей равна  $2,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Была изготовлена серия образцов GaSb, в которых концентрация носителей при  $300^\circ \text{ К}$  имеет значения, приведенные в таблице.

Измерение теплопроводности и термоэдс производилось на монокристаллических и крупноблочных образцах размерами  $5 \times 5 \times 12 \text{ мм}^3$ , а электрических свойств — на монокристаллических образцах размерами  $1 \times 4 \times 12 \text{ мм}^3$ . Теплопроводность была измерена абсолютным

| № образцов | Легировующий элемент Te |                                           |                  | № образца | Легировующий элемент Zn |                                           |                  |
|------------|-------------------------|-------------------------------------------|------------------|-----------|-------------------------|-------------------------------------------|------------------|
|            | ат. % Te                | холловская концентрация, $\text{см}^{-3}$ | тип проводимости |           | ат. % Zn                | холловская концентрация, $\text{см}^{-3}$ | тип проводимости |
| 1          | GaSb (чист)             | $1,4 \cdot 10^{17}$                       | p                | 2'        | 0,0007                  | $4,8 \cdot 10^{17}$                       | p                |
| 2          | 0,0007                  | $8,35 \cdot 10^{17}$                      | p                | 6'        | 0,0037                  | $1,2 \cdot 10^{18}$                       | p                |
| 3          | 0,0015                  | $6,25 \cdot 10^{16}$                      | p                | 7'        | 0,0074                  | $2,15 \cdot 10^{18}$                      | p                |
| 4          | 0,0022                  | $3,9 \cdot 10^{16}$                       | p                | 8'        | 0,0372                  | $6,94 \cdot 10^{18}$                      | p                |
| 5          | 0,0030                  | $8,68 \cdot 10^{16}$                      | n                | 9'        | 0,0744                  | $2,18 \cdot 10^{19}$                      | p                |
| 6          | 0,0037                  | $1,83 \cdot 10^{17}$                      | n                | 10'       | 0,3720                  | $5,43 \cdot 10^{19}$                      | p                |
| 7          | 0,0074                  | $4,4 \cdot 10^{17}$                       | n                | 11'       | 0,7440                  | $2,42 \cdot 10^{20}$                      | p                |
| 8          | 0,0372                  | $6,25 \cdot 10^{17}$                      | n                |           |                         |                                           |                  |
| 9          | 0,0744                  | $1,36 \cdot 10^{18}$                      | n                |           |                         |                                           |                  |
| 10         | 0,3720                  | $1,52 \cdot 10^{18}$                      | n                |           |                         |                                           |                  |
| 11         | 0,7440                  | $2,25 \cdot 10^{18}$                      | n                |           |                         |                                           |                  |

стационарным методом. Одновременно на том же приборе измерялась термоэдс. Измерение  $\sigma$  и  $R$  выполнено на установке, сконструированной нами для комплексного исследования гальвано- и термомагнитных эффектов в полупроводниках.

### Полученные результаты и обсуждение

На рис. 2 представлена температурная зависимость теплового сопротивления решетки ( $W_p$ ) GaSb, легированного теллуром. Аналогичная зависимость имеет место и в случае легирования цинком. В чистом кристалле  $W_p \sim T$ . В легированных же образцах оно в области температуры Дебая ( $\Theta_D$ ) испытывает резкое изменение. Выше и ниже этой области  $W_p$  линейно зависит от  $T$  с разными угловыми коэффициентами. Оно может быть выражено в виде

$$W_p = aT + b; \quad (1)$$

коэффициент  $a$  получает два различных значения при  $T < \Theta_D$  и  $T > \Theta_D$ ,  $b$  увеличивается с концентрацией примесей от 0,5 до  $1,3 \text{ вт}^{-1} \text{ см} \cdot \text{град}$ .

Как видно из рис. 2, в легированных образцах GaSb около  $\Theta_D$  имеется некоторая переходная область, в которой зависимость  $W_p$  от  $T$  не носит линейного характера, причем с легированием наличие этой области проявляется более наглядно. Выше переходной области возникает дополнительное тепловое сопротивление, которое, по-видимому, связано с рассеянием акустических фононов оптическими.

Известно, что при  $T < \Theta_D$  тепло переносится преимущественно акустическими фононами, так как оптические фононы еще не возбуждены. В переходной области оптические фононы начинают возбуждаться и при большой дисперсии оптической ветви они могут участвовать в переносе тепла. С появлением оптических фононов осуществляются процессы рассеяния акустических фононов на оптических. Если учесть тепловое сопротивление, вызванное рассеянием на оптических фононах, то общее сопротивление

$$W = W_{\text{ак}} + W_{\text{опт}}. \quad (2)$$

Согласно [13]

$$W_{\text{опт}} = \frac{9}{32} \frac{(6\pi^2)^{1/3}}{\pi} \left( \frac{h}{k} \right)^3 \frac{\gamma^2 R}{M \delta \Theta_D^2}, \quad (3)$$

где  $\gamma$  — постоянная Грюнаизена,  $M$  — средняя масса атомов,  $\delta^3$  — объем, приходящийся на один атом,

$$R = \left( 1 + \frac{1}{\exp \frac{h\omega_0}{kT} - 1} \right) \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_D^2} - 1 \right) \left( 6 \frac{\omega_0}{\omega_D} - 4 - \frac{\omega_0^3}{\omega_D^3} \right), \quad (4)$$

$\omega_0$  — частота оптических фононов.

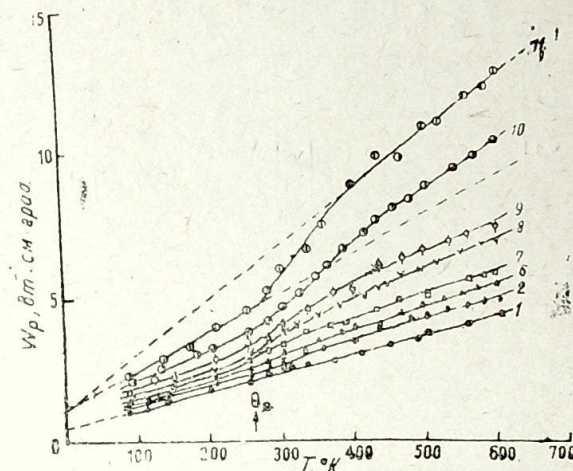


Рис. 2. Температурная зависимость теплового сопротивления решетки GaSb, легированного теллуром.



При взаимодействии с оптическими фононами вклад процессов переброса в вероятность перехода возрастает по мере возрастания отношения  $\frac{\omega_0}{\omega_d}$  (или  $\frac{m_1}{m_2}$ ) и при его некотором значении  $R$  проходит через максимум. Отклонение зависимости  $W_p(T)$  от линейности в области  $\theta_d$  предполагаем объяснить рассеянием акустических фононов оптическими. В чистом GaSb во всем интервале температур исследования  $W_p \sim T$ . По-видимому, в нем добавочное сопротивление, вызванное рассеянием акустических фононов оптическими, компенсируется добавочной теплопроводностью, обусловленной оптическими фононами. Это обстоятельство, по-видимому, указывает на значительную дисперсию оптической ветви в GaSb.

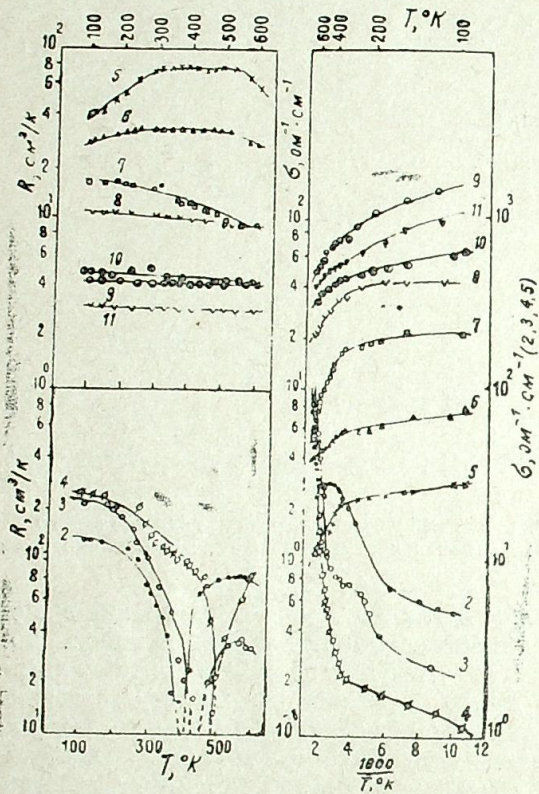


Рис. 3. Температурная зависимость электропроводности и коэффициента Холла GaSb, легированного теллуром.

ладываются в рамки существующих теорий. При легировании теллуром удается получить образцы с компенсированными примесями. При легировании до  $3 \cdot 10^{-3}$  ат. % Те холловская концентрация падает до  $3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$  при 300°K, а подвижность ( $R \cdot \sigma$ )—до  $40 \text{ см}^2/\text{в.сек}$ . До такого содержания теллура все образцы имеют дырочную проводимость. Дальнейшее повышение концентрации Те вызывает изменение знака проводимости. При этом концентрация носителей и подвижность растут до  $\sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$  и  $2600 \text{ см}^2/\text{в.сек}$ , соответственно.

Из рис. 3 отметим два результата. В более чистых образцах (5 и 6) наблюдается рост  $R$  с повышением температуры от 100 до 300°K. Это, по-видимому, объясняется ролью второго минимума в зоне проводимости. Из зависимости  $\sigma$  и  $R$  от  $T$  видно, что инверсия знака  $R$ , а также рост  $\sigma$  в компенсированных образцах (2, 3, 4) наблюдается

гораздо раньше, чем в чистом GaSb. Аналогичная картина наблюдается также в перемене знака коэффициента термоэдс (рис. 4).

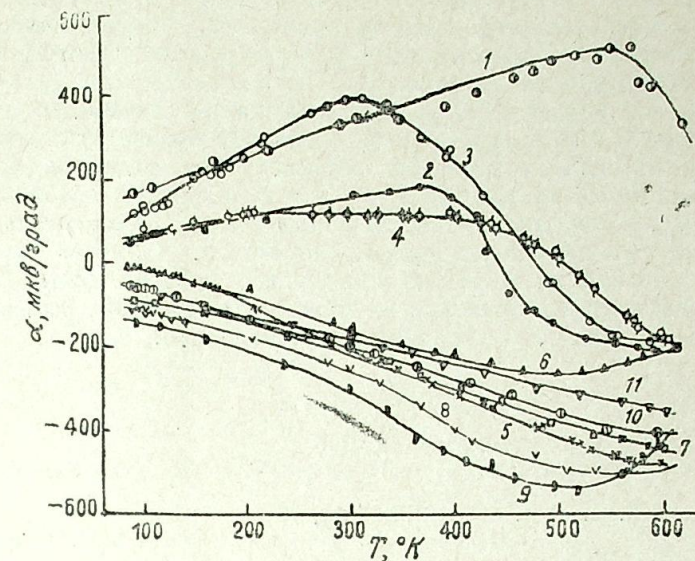


Рис. 4. Температурная зависимость термоэдс GaSb, легированного теллуром.

По-видимому, все это объясняется наступлением смешанной проводимости. В чистом GaSb ( $p \sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ) собственная проводимость наблюдается выше 600°K. Высокотемпературный наклон кривых  $\sigma(T)$  2, 3, 4 на рис. 3 не соответствует значению ширины запрещенной зоны GaSb. Большое значение наклона объясняется ролью компенсированных примесей [16]. В компенсированных образцах (2, 3, 4) термоэдс по абсолютному значению гораздо ниже, чем в чистом GaSb.

Полученные выше результаты, по-видимому, можно объяснить ис-

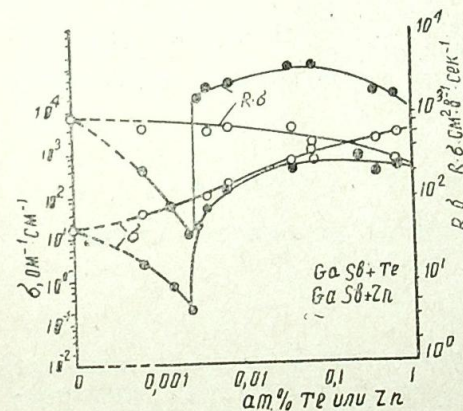


Рис. 5. Зависимость  $(R \cdot \sigma)$  GaSb от концентрации примесей цинка и теллура.

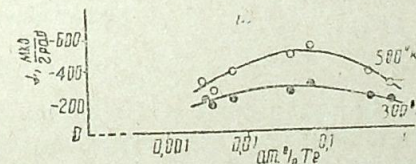


Рис. 6. Зависимость термоэдс n-GaSb от концентрации примесей.

ходя из следующих соображений. В компенсированных образцах остаются некомпенсированные акцепторные и донорные примеси и проводимость осуществляется электронами и дырками. Смешанный характер проводимости должен привести к уменьшению термоэдс. Это предположение подтверждается еще концентрационной зависимостью  $R \cdot \sigma$  (рис. 5). На этом рисунке приводится также зависимость



$\sigma$  от концентрации цинка и теллура. Как видно, в случае легирования цинком  $R \cdot \sigma$  слабо уменьшается с увеличением его концентрации. Однако при легировании теллуrom  $R \cdot \sigma$  сперва уменьшается очень резко (в области компенсации примесей), слабо повышается, а затем убывает в области электронной проводимости. Аналогичная картина имеет место также в зависимости  $\alpha$  от содержания теллура в области электронной проводимости (рис. 6).

В компенсированных образцах  $p$ -типа и слабо легированных  $n$ -типа вклад в  $\alpha$  и  $R$  неосновных носителей более эффективен, чем в сильно легированных образцах  $n$ -типа, что ведет к появлению слабого максимума на кривых  $R \cdot \sigma$  и  $\alpha$  в области  $n$ -проводимости. По-видимому, в чистых кристаллах GaSb также имеет место влияние неконтролируемых компенсирующих примесей. Причем вклад в  $R$  неосновных носителей в таких кристаллах должен быть большим, что обуславливает несоответствие между холловской подвижностью ( $R \cdot \sigma$ ) и ее значением, вычисленным теоретически.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bate R. T. J. appl. phys., 33, 1, 26, 1962.
2. Иванов-Омский В. И., Коломиец Б. Т. и Чжоу-Хуан. ФТТ, 4, № 2, 383, 1962.
3. Strauss A. G. Phys. rev., 121, 4, 1087, 1961.
4. Silverman J. I., Carlson R. O. and Ehrenreich H. I. appl. phys., vol. 34, № 3, 456, 1963.
5. Sagar A. Phys. Rev., 117, 93, 1960.
6. Zwerdling S., Lax B., Button K. and Both Z. J. phys. chem. solids, 9, 320, 1959.
7. Wagini H. Zs. Naturf., 20a, № 10, 1317—1322, 1965.
8. Burrus C. A. Proc. J. R. E., 49, 6, 1101, 1962.
9. Chiriaux C., Eymard R. Phys. stat. sol., 10, 1, 165, 1965.
10. Бадалов М. Ф., Рзаев М. А. ФТТ, 8, 7, 1966.
11. Blackman. Phil. Mag., 19, 989, 1935.
12. Займан Дж. Электроны и фононы. ИЛ, М., 1962.
13. Leroux P., Hugon et J. J. Veyssil., Phys. Stat. Sol. 8., 561, 1965.
14. Девяткова Е. Д. и Смирнов И. А. ФТТ, 4, № 9, 2507, 1962.
15. Kudman I. and Steigmeier E. F. Phys. rev., 133, A 1665, 1964; Steigmeier E. F., Kudman I. Phys. Rev., 15, № 16, A38, 1965.
16. Блекмор Дж. Статистика электронов в полупроводниках. Изд-во „Мир“, М., 1964.

Н. Б. Абдуллаев, М. И. Элиев, Г. И. Сэфэрелиев

Лекирэлэнмиш GaSb -дә кечиричилик вә фононларын сәпилмә механизмләри һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә синк вә теллура лекирэлэнмиш GaSb кристалларында истиликкечирмә ( $\kappa$ ), термоэлектрик һәрәкәт гүввәси ( $\alpha$ ), электрик-кечирмә ( $\sigma$ ) вә Холл эффектнин ( $R$ ) 80—600°K температур интервалында тәдгигинин нәтичәләри шәрһ олунур.

Мүәјјән едилмишдир ки, Дебај температуру ( $\Theta$ ) әтрафындакы оптик фононлар гәфәс истиликкечирмәсиндә иштирак едир вә лекирә-олунмуш кристалларда акустик фононларын оптик фононлардан сәпилмәси нәтичәсиндә әләвә истилик мүгавимәти јараныр.

Даһа аз лекирэләнмиш  $n$ -GaSb кристалларында 100—300°K интервалында температурун јүксәлмәси илә  $R$ -ин артмасы мүшәһидә олунур ки, бу да кечиричилик зонасында икинчи енержи минимумуну ролу илә изаһ едилер.

Компенсација олунмуш  $P$  тип нүмунәләрдә  $R \cdot \sigma$  вә  $\alpha$ -нын температур асылылығында ишарә дәјишмәси лекирэләнмиш GaSb-јә нисбәтән даһа тез баш верир ки, бу да гарышыг кечиричиликлә изаһ олунур.

Компенсација олунмуш  $P$  тип вә зәиф лекирэләнмиш  $n$  типли нүмунәләрдә гејри-әсас јүкләрин  $\alpha$  вә  $R$ -ә тәсири чох лекирэләнмиш нүмунәләрдән даһа кәскин олур. GaSb-дә контрол олунмајан ашгарларын компенсацијасы нәтичәсиндә гејри-әсас јүкләрин  $R$ -ә олан әләвәси тәчрүбәдә алыннан јүрүклүјүн ( $R \cdot \sigma$ ) нәзәри һесабыланмыш јүрүклүкдән фәргләнмәсини кәстәрир.



И. А. МУХТАРОВ, Р. И. МУХТАРОВ

# ОБ ЭФФЕКТЕ ШТАРКА В МОЛЕКУЛАХ ТИПА АСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА С КВАДРУПОЛЬНЫМ ЯДРОМ

Определение дипольных моментов молекул с квадрупольными ядрами представляет особый интерес в связи с возможностью совместного использования значений компонент дипольного момента и тензора квадрупольных постоянных для нахождения параметров электронных конфигураций молекул. Однако практическое определение дипольного момента из эффекта Штарка во вращательных спектрах таких молекул сопряжено с определенными трудностями экспериментального и расчетного характера: большое число компонент и сложный характер их изменения с изменением электрического поля затрудняют запись и расшифровку спектра.

Эффект Штарка в асимметричных молекулах с одним квадрупольным ядром рассматривался в [1, 2]. В работе [1] обобщены результаты [3, 4] для молекул линейных и типа симметричного волчка, а также для молекул типа асимметричного волчка в случае слабого поля. Авторы [2] рассматривали случай промежуточного поля для перехода  $J=0 \rightarrow J=1$  (спин ядра  $3/2$ ), однако полученные ими формулы непригодны для практического использования.

В настоящей статье более полно рассматривается эффект Штарка в молекулах типа асимметричного волчка с квадрупольным ядром, с целью получения расчетных формул и рекомендаций для практической работы.

1. Ввиду малости штарковского и квадрупольного взаимодействия по сравнению с интервалами вращательных энергий достаточно ограничиться вторым порядком теории возмущений. Для вычисления матричных элементов операторов штарковской ( $S$ ) и квадрупольной ( $Q$ ) энергий удобно использовать в зависимости от соотношения между ними одно из двух хорошо известных представлений:  $\tau JIFM$  или  $\tau Jm/\mu$ . В общем случае поправки к энергетическим уравнениям жесткого волчка ( $E_{J\tau}$ ) будут корнями секулярного уравнения для матрицы:

$$v_{n'}^n = q_{J\tau n'}^{J\tau n} + \frac{(S_{J\tau n'}^{J\tau n} + q_{J\tau n'}^{J\tau n}) \cdot (S_{J\tau n'}^{J\tau n'} + q_{J\tau n'}^{J\tau n'})}{E_{J\tau} - E_{J\tau'}}.$$

Здесь  $n, n', n''$  означают наборы  $FM$  или  $m/\mu$  при использовании представлений  $\tau JIFM$  или  $\tau Jm/\mu$ , соответственно.

Сумма членов вида  $Sq + qS$  равна нулю вследствие свойств симметрии состояний асимметричного волчка. Квадрупольные члены второго порядка ( $qq$ ) должны приниматься в расчет при точном определении постоянных сверхтонкой структуры (главным образом, в тяжелых молекулах с большими значениями  $eqQ$ ), однако на эффект Штарка влияние их ничтожно мало. Поэтому с достаточной для практических применений точностью матрица  $v$  сводится к

$$v_{n'}^n = q_{J\tau n'}^{J\tau n} + \frac{S_{J\tau n'}^{J\tau n} \cdot S_{J\tau n'}^{J\tau n'}}{E_{J\tau} - E_{J\tau'}}.$$

Так как  $M = m + \mu$  — «хорошее» квантовое число, матрица  $v$  распадается на подматрицы, соответствующие определенным значениям  $M$ .

Используя обычные обозначения постоянных эффекта Штарка  $A_{J\tau}$  и  $B_{J\tau}$  и  $(eqQ)_{J\tau}$  для квадрупольной сверхтонкой структуры [5], можно получить выражения для энергетических уровней или в виде

$$E_{JIM\lambda} = E_{J\tau} + A_{J\tau} + (eqQ)_{J\tau} a_{\lambda}(\alpha, J, I, M), \quad (1)$$

вводя переменную  $\alpha = \frac{B_{J\tau}}{(eqQ)_{J\tau}}$ , или в виде

$$E_{JIM\lambda} = E_{J\tau} + A_{J\tau} + B_{J\tau} b_{\lambda}(\beta, J, I, M), \quad (2)$$

вводя переменную  $\beta = \frac{(eqQ)_{J\tau}}{B_{J\tau}} = \frac{1}{\alpha}$ .

В формулах (1), (2)  $a_{\lambda}(\alpha, J, I, M)$  и  $b_{\lambda}(\beta, J, I, M)$  — характеристические значения матриц  $a_{F'}^F(\alpha, J, I, M)$  и  $b_{m'}^m(\beta, J, I, M)$ :

$$\begin{aligned} a_F^F &= Y(J, I, F) + \alpha \left\{ [3M^2 - F(F+1)] \times \right. \\ &\times \frac{3D(D-1) - 4F(F+1)J(J+1)}{6F(F+1)(2F-1)(2F+3)} - \frac{J(J+1)}{3} \left. \right\}; \\ a_{F+1}^F &= \alpha M [(F+1)^2 - M^2]^{1/2} \times \\ &\times \frac{(D+F)[(J+I+1)^2 - (F+1)^2]^{1/2} [(F+1)^2 - (J-I)^2]^{1/2}}{2F(F+1)(F+2)[(2F+1)(2F+3)]^{1/2}}; \\ a_{F+2}^F &= \alpha [(F+1)^2 - M^2]^{1/2} [(F+2)^2 - M^2]^{1/2} \times \\ &\times \frac{[(F+1)^2 - (J-I)^2]^{1/2} [(F+2)^2 - (J-I)^2]^{1/2}}{4(F+1)(F+2)(2F+3)} \times \\ &\times \frac{[(J+I+1)^2 - (F+1)^2]^{1/2} [(J+I+1)^2 - (F+2)^2]^{1/2}}{[(2F+1)(2F+5)]^{1/2}}; \end{aligned}$$

$Y(J, I, M)$  — известная табулированная функция, обычно используемая для расчетов сверхтонкой структуры [5], а

$$\begin{aligned} D &= F(F+1) + J(J+1) - I(I+1); \\ b_m^m &= m^2 + \beta \frac{[3m^2 - J(J+1)][3(M-m)^2 - I(I+1)]}{(2J-1)(2J+3)4I(2I-1)}; \end{aligned}$$



$$b_{m+1}^m = \beta \times \frac{3(1+2m)(2M-2m-1)[(J+m+1)(J-m)(I-M+m+1)(I+M-m)]^{1/2}}{(2J-1)(2J+3)8/(2I-1)}; \quad (4)$$

$$b_{m+2}^m = \beta \frac{3[J^2 - (m+1)^2]^{1/2}[(J+1)^2 - (m+1)^2]^{1/2}[I^2 - (M-m-1)^2]^{1/2}[(I+1)^2 - (M-m-1)^2]^{1/2}}{(2J-1)(2J+3)8/(2I-1)}.$$

Значения  $3j$  и  $6j$ -символов, необходимых для вычисления матричных элементов (3) и (4), приведены в [6].

2. По смыслу выражений (1) и (3) слабому полю соответствует  $|\alpha| \ll 1$ . Используя значения матричных элементов (3), можно получить поправки второго порядка по  $\alpha$  к приближению слабого поля, полученному в [1]:

$$a_{\lambda=F}(\alpha, J, I, M) = a_F^F(\alpha, J, I, M) + \frac{|a_F^F|^2}{Y(F) - Y(F')}. \quad (5)$$

Оценки по (5) показывают, что приближение слабого поля справедливо с относительной точностью  $\sim 10^{-2}$  при  $|\alpha| < 0,1$ . Правила отбора и интенсивности приведены в [1, 5]. При больших значениях  $|\alpha|$  необходимо точное решение секулярных уравнений, наибольший порядок которых  $2J+1$  (при  $J < I$ ) или  $2I+1$  (при  $J > I$ ).

Табулирование решений этих уравнений не представ-

ляет большого труда, однако это вряд ли целесообразно, так как для идентификации компонент и определения дипольного момента придется иметь дело с большим числом функций (смещения подуровней и относительные интенсивности компонент) от разных аргументов ( $\alpha_{J_1}$  и  $\alpha_{J_2}$  для каждого вращательного состояния). Исключение представляет переход  $0_0 \rightarrow J_1$ . Так как  $(eqQ)_{0_0} = 0$  и  $B_{0_0} = 0$ , то смещения компонент и относительные интенсивности зависят лишь от одного параметра

$$\alpha = \frac{B_{1_1}}{(eqQ)_{1_1}}. \quad \text{Для компонент линии перехода } 0_0 \rightarrow 1_1 \text{ имеем из (1)}$$

$$\Delta_{\nu}^{11MF} = A_{1_1} - A_{0_0} + (eqQ)_{1_1} \alpha_E(\alpha, 1, I, M). \quad (6)$$

Здесь индекс  $\lambda$  заменен своим предельным (при  $\alpha = 0$ ) значением  $F$ , так как для вычисления подуровней энергии удобно представление слабого поля, кроме того, при практическом исследовании Штарк-

эффекта в промежуточных полях для определения дипольного момента естественно иметь дело с предварительно определенной величиной  $(eqQ)_{1_1}$ .

На рис. 1 и 2 приведены графики функций  $a_F(\alpha, 1, I, M)$  и  $a_F(\alpha, 1, 3/2, M)$  для значений  $-1,0 \leq \alpha \leq 1,0$ , там же показаны относительные интенсивности MF-компонент в % (полная интенсивность перехода 100 %). В случае спина ядра  $I = 1$  в электрическом поле появляются четыре компоненты, для которых величины  $a_F(\alpha, 1, 1, M) \equiv a_{MF}$  определяются из двух квадратных уравнений:

$$a_{1F}^2 - (\alpha - 0,2)a_{1F} - 0,1\alpha - 0,0125 = 0 \quad (F = 2, 1),$$

$$a_{0F}^2 - (\alpha + 0,55)a_{0F} + 0,2\alpha + 0,025 = 0 \quad (F = 2, 0).$$

Пятый подуровень состояния  $1_1$  ( $\alpha_{01} = -0,25 + \alpha$ ) не проявляется в спектре (дипольный переход  $FO \rightarrow FO$  запрещен).

В случае  $I = 3/2$  появляется 5 компонент:

$$a_{2,F}^2 + (0,15 - \alpha)a_{2,F} - 0,1\alpha - 0,01 = 0 \quad \left(F = \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right),$$

$$a_{1,F}^3 - (0,1 + 2\alpha)a_{1,F}^2 + (\alpha^2 + 0,2\alpha - 0,0475)a_{1,F} - (0,1\alpha^2 - 0,015\alpha - 0,0025) = 0 \quad \left(F = \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Как видно из рис. 1 и 2, характерно заметное перераспределение интенсивностей между компонентами с выделением двух компонент при увеличении штарковского поля, соответствующие  $a_{MF}$  стремятся при этом асимптотически к значениям сильного поля. Область промежуточных полей, пригодная для исследования  $0,1 \leq |\alpha| \leq 0,6$  для

$I = 1$  и

$$0,1 \leq |\alpha| \leq 0,5 \quad \text{для } I = 3/2.$$

При этих значениях  $\alpha$  еще можно наблюдать компоненты, исчезающие в сильном поле, и определить значение  $B_{1_1}$  (напомним, что исследование Штарк-эффекта перехода  $0_0 \rightarrow 1_1$  в отсутствие сверхтонкой структуры позволяет определить лишь одну величину  $A_{1_1} - A_{0_0}$ ). Найти  $B_{1_1}$  можно следующим образом: измеренные расстояния между компонентами делим на  $(eqQ)_{1_1}$  и, пользуясь графиками, определяем подходящее значение  $\alpha$ , тогда  $B_{1_1} = \alpha \cdot (eqQ)_{1_1}$ .

Как упоминалось выше, использование промежуточного поля для других переходов практически нецелесообразно. Учитывая погрешности измерения частот и напряжений штарковского поля, предпочтительнее работать с большими смещениями компонент. Поэтому определение дипольных моментов с относительной погрешностью  $10^{-2}$

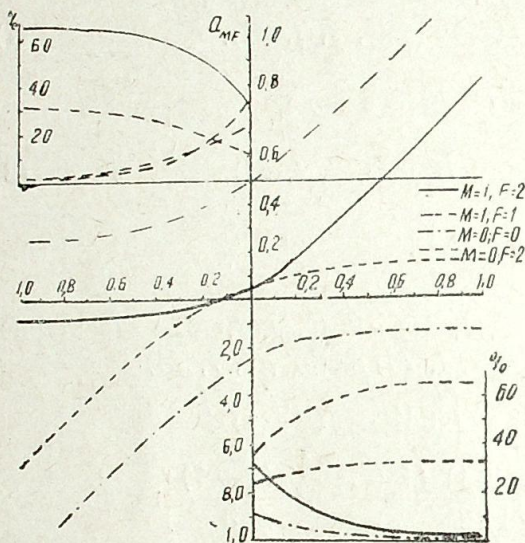


Рис. 1 Спин ядра  $I=1$ .

Шкала  $\alpha$  для относительных интенсивностей на обоих рисунках та же, что и для  $a_{MF}$

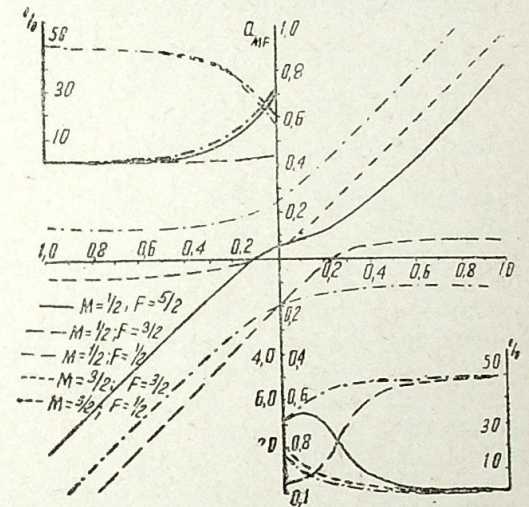


Рис. 2. Спин ядра  $I=3/2$ .



по Штарк-эффекту в слабых полях возможно лишь для молекул с большими значениями  $\partial q Q$ . В остальных случаях слабое поле удобно использовать для предварительного определения, поскольку картина относительно легко расшифровывается.

3. Сильному полю соответствует  $|\beta| \ll 1$ . Используя (2) и (4), получим при  $m^2 \neq 1$  в первом приближении

$$b_m(\beta, J, I, M) = m^2 + \beta \frac{[3m^2 - J(J+1)][3(M-m)^2 - I(I+1)]}{(2J-1)(2J+3)4I(2I-1)}; \quad (7)$$

$m \geq 0; I+m \geq M \geq m.$

Оценки, аналогичные случаю слабого поля (5), показывают, что приближение (7) справедливо при  $|\beta| < 0.5$ . Если  $m^2 = 1$ , то для  $M = I+1$  (т. е.  $|\mu| = I, I-1$ ) остается в силе (7), а для меньших  $M$  ( $M \geq 0$ ) необходимо решать уравнения второго порядка и числители при  $\beta$  в выражениях (7) заменяются на корни  $X_q$  ( $q=1,2$ ) этих уравнений;

$$X_q = [3 - J(J+1)][3(M^2+1) - I(I+1)] + (-1)^q \left\{ 36M^2[3 - J(J+1)]^2 + \frac{9}{4} J^2(J+1)^2[I^2 - M^2][(I+1)^2 - M^2] \right\}^{1/2}. \quad (8)$$

Таким образом, штарковский подуровень с  $m^2 = 1$  расщепляется на  $2I+2$  в случае целого  $I$  и  $2I+1$  в случае полуцелого  $I$  сверхтонких подуровней, остальные штарковские подуровни расщепляются на  $I+1$  (целое  $I$ ) или  $\frac{2I+1}{2}$  (полуцелое  $I$ ).

Используя правило отбора  $\Delta \mu = 0$  ( $\Delta M = 0$ ), получим для сверхтонкого расщепления штарковской компоненты с  $m^2 \neq 1$   $\frac{2I+1}{2}$  рав-

ных по интенсивности компоненты для полуцелого спина и  $I+1$  компоненту в случае целого спина, причем компонента  $M=m$  ( $\mu=0$ ) вдвое слабее остальных. Сверхтонкое расщепление штарковской компоненты  $m^2 = 1$  несколько сложнее, так как появляется дополнительное квантовое число  $q$ . Для переходов  $Q$ -ветви ( $\Delta I = 0$ ) очевидно правило отбора  $q = q'$ , таким образом получаем  $2I+1$  одинаково интенсивных компонент сверхтонкой структуры при полуцелом  $I$  и  $2I+2$  компонент при целом  $I$ , компоненты с  $M=0$  вдвое слабее остальных. Для переходов  $R$ -,  $P$ -ветвей интенсивности компонент  $M = I+1, I$  будут таким же, как и при  $m^2 \neq 1$ . Для остальных значений ( $M = I-1, \dots, 0$  или  $1/2$ ) вместо пар компонент, имевшихся для  $Q$ -ветви, появляется четверки, так как возможны переходы с  $q' \neq q$ .

Суммарные интенсивности четверок распределяются аналогично случаю  $Q$ -ветви. Распределение же интенсивности внутри четверок определяется волновыми функциями первого приближения сильного поля, которые в  $\sim I_1 m_1 I_1 M - m$ -представлении имеют вид

$$C_{\pm 1}^q = \frac{(\pm 1)^q}{\sqrt{2}} \left\{ 1 \pm (-1)^q \times \frac{6M[3 - J(J+1)]}{\left( 36M^2[3 - J(J+1)]^2 + \frac{9}{4} J^2(J+1)^2[I^2 - M^2][(I+1)^2 - M^2] \right)^{1/2}} \right\}^{1/2} \quad (9)$$

Относительные интенсивности компонент  $J_q \rightarrow J_{q'}$  равны

$$C_1^q C_1^{q'} + C_{-1}^q C_{-1}^{q'}.$$

В заключение заметим, что критерии слабого или сильного полей, т. е., как выше указано,  $|\alpha|$  или  $|\beta|$ , определяются для каждого из уровней, участвующих в переходе, отдельно, и это обстоятельство, очевидно, должно учитываться при выборе напряженностей полей для исследований линий и формул для расчета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mizushima M. J. chem. phys. 21, 539, 1953.
2. Веселого В. Г., Земсков Е. М. „Оптика и спектроскопия“, 3, 183, 1957
3. Fano U. J. Research. natl. Bur. standards. 40, 215, 1948.
4. Low W. and Townes C. H. Phys. rev., 76, 1215, 19 9.
5. Гаунс Ч., Шавлов А. „Радиоспектроскопия“. ИЛ, 1959.
6. Ланду Л. Д. и Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1963.

Н. А. Мухтаров, Р. Н. Мухтаров

Квадрупол нүвәси олан асимметрик фырфыра  
типли молекуллардакы Штарк эффекти һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә бир квадрупол нүвәси олан асимметрик фырфыра тип-ли молекуллар үчүн гүввәтли вә зәиф саһә тәхминлијинин тәтбиг имканлары гижмәтләндирилмишдир. Бундан башга, 0-1, кечидинин орта гижмәтли саһәләрдә нүвә сипинин 1 вә 2/3 олан һалларда Штарк ефектини һесабламаг үчүн графикләр верилм шдир. Ејни заманда, гүввәтли саһәдә  $m^2 = 1$  олан Штарк компонентләринин ифрат инчә гурулуша ајрылмасы һалы мүфәссәл сурәтдә ајдынлашдырылмыш-дыр.



А. А. АБДУРАХМАНОВ, Р. А. РАГИМОВА, Л. М. ИМАНОВ

# МИ РОЗОЛНОВЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$

В последние несколько лет микроволновая газовая радиоспектроскопия применяется для изучения вращательного изomerизма в сложных молекулах и в настоящее время является наиболее мощным и эффективным методом исследований в этой области. В данной работе использовался указанный метод для изучения микроволнового вращательного спектра нормального пропилового спирта, в результате чего было установлено существование поворотного изомера.

В настоящей статье приводятся результаты, полученные из спектра молекулы  $n\text{-C}_3\text{H}_7\text{OH}$ . Для эксперимента использовался образец марки ОЧ без дальнейшей очистки. Диапазон частот от 10 000 до 32 000 Мгц исследовался на радиоспектрометре с электрической молекулярной модуляцией 125 кгц [1]. В указанном интервале частот обнаружен спектр, насчитывающий до тысячи линий поглощения; часть спектра приводится в табл. 1. Самые интенсивные линии ориентировочно оцениваются не сильнее  $10^{-7} \text{ см}^{-1}$  и в таблице обозначены как линии „средней“ интенсивности. Линии с интенсивностью порядка  $10^{-8} \text{ см}^{-1}$  и ниже обозначены „очень слабые“. Ввиду сравнительно низкой интенсивности спектра все измерения производились в интервале температур от минус 30° до минус 45°С. Максимальная напряженность поля 1600 в/см в поглощающей ячейке с сечением  $6,5 \times 12,5 \text{ мм}$  была достаточна для разрешения компонент большинства идентифицированных переходов.

По Штрак-эффекту идентифицировано 26 переходов  $Q^v$ - и  $Q_c$ -ветвей. Точной оценки величины дипольного момента и его составляющих не производилось, однако по интенсивности переходов  $Q^v$ - и  $Q_c$ -ветвей ориентировочно было установлено, что  $\mu_v$  и  $\mu_c$  компоненты приблизительно равны по величине и составляют около 1Д. Это обстоятельство имело существенное значение для выяснения происхождения расшифрованного спектра, т. е. для установления, к какой именно молекулярной форме они относятся.

Первыми были расшифрованы переходы с  $J = 5$  и  $J = 6$  из серии  $J_{0, \tau} - J_{\tau, \tau-1} Q^v$ -ветви, что дало возможность грубо оценить параметры жесткого волчка  $A - C$  и  $\kappa$ , которые в дальнейшем были подтверждены остальными переходами этой серии. Точные значения параметров найдены по частоте перехода  $1_{01} - 1_{10}$ , непосредственно определяющего величину  $A - C = 10006,2 \text{ Мгц}$ , и перехода  $2_{02} - 2_{11}$ , по пересечению которых на графике  $Q$ -ветви определен параметр асимметрии  $\kappa = -0,84107546$ . Подобно этому расшифрованы  $Q_v$ -переходы

Таблица 1  
Спектральные линии нормального пропилового спирта в диапазоне частот 10 000—22 000 Мгц

| Частота | Интенсивность | Частота  | Интенсивность | Частота | Интенсивность |
|---------|---------------|----------|---------------|---------|---------------|
| 1       | 2             | 3        | 4             | 5       | 6             |
| 19976   | оч. слаб.     | 22329    | оч. слаб.     | 23841,8 | средн.        |
| 19995,6 | средн.        | 22360    | „             | 23818,7 | слаб.         |
| 20250   | оч. слаб.     | 22362    | „             | 23878   | „             |
| 20340,3 | средн.        | 22387    | „             | 23884   | оч. слаб.     |
| 20430   | оч. слаб.     | 22400    | „             | 23890   | „             |
| 20460   | „             | 22426    | „             | 23894   | „             |
| 20570   | „             | 22435    | средн.        | 23926   | слаб.         |
| 20542   | „             | 22445    | оч. слаб.     | 23933,7 | оч. слаб.     |
| 20572   | „             | 22490    | слаб.         | 23937,7 | „             |
| 20694   | „             | 22493    | оч. слаб.     | 23943,5 | „             |
| 20800   | слаб.         | 22544    | „             | 23948,2 | „             |
| 20803   | оч. слаб.     | 22558    | „             | 23955   | „             |
| 20808   | „             | 22589    | „             | 23963   | „             |
| 20838   | „             | 22600    | средн.        | 23984   | „             |
| 20872   | „             | 22629    | оч. слаб.     | 24003,6 | „             |
| 20874,3 | средн.        | 22640    | слаб.         | 24004,6 | „             |
| 20902   | оч. слаб.     | 22656    | „             | 24015,3 | слаб.         |
| 20908   | „             | 22678    | оч. слаб.     | 24035,2 | средн.        |
| 20925,6 | слаб.         | 22696    | средн.        | 24056,8 | „             |
| 20960   | оч. слаб.     | 22740    | оч. слаб.     | 24140,5 | „             |
| 21005   | „             | 22747    | „             | 24218   | слаб.         |
| 21034   | „             | 22782    | „             | 24222   | „             |
| 21059   | „             | 22800    | „             | 24309   | оч. слаб.     |
| 21074   | „             | 22828    | слаб.         | 24346   | „             |
| 21165   | „             | 22851,95 | оч. слаб.     | 24462   | „             |
| 21168   | „             | 22858    | „             | 24436   | слаб.         |
| 21180   | „             | 22886    | „             | 24486   | оч. слаб.     |
| 21192   | „             | 22951    | „             | 24494   | „             |
| 21214,4 | средн.        | 22953    | слаб.         | 24498   | „             |
| 21238   | оч. слаб.     | 22956    | оч. слаб.     | 24512   | „             |
| 21320   | „             | 23059,3  | слаб.         | 24520   | средн.        |
| 21325,7 | „             | 23070    | средн.        | 24526   | оч. слаб.     |
| 21338   | „             | 23091,8  | „             | 24555   | „             |
| 21355   | „             | 23106,8  | слаб.         | 24580   | „             |
| 21427,2 | средн.        | 23124    | оч. слаб.     | 24584   | „             |
| 21485,6 | оч. слаб.     | 23145,8  | слаб.         | 24595,2 | средн.        |
| 21563   | „             | 23184    | оч. слаб.     | 24609   | слаб.         |
| 21578   | „             | 23236    | „             | 24948   | „             |
| 21582   | „             | 23247    | „             | 24951,6 | „             |
| 21600   | „             | 23286    | „             | 24964   | „             |
| 21634   | „             | 23289    | „             | 24958   | оч. слаб.     |
| 21643   | „             | 23297,9  | слаб.         | 24970   | „             |
| 21643   | „             | 23324    | оч. слаб.     | 24996   | слаб.         |
| 21840   | слаб.         | 23326    | „             | 25026   | оч. слаб.     |
| 21894   | оч. слаб.     | 23375    | „             | 25032   | „             |
| 21900   | „             | 23414    | „             | 25034   | „             |
| 21906   | слаб.         | 23428    | слаб.         | 25048   | „             |
| 21936   | оч. слаб.     | 23439,5  | средн.        | 25083   | слаб.         |
| 21962   | слаб.         | 23454    | оч. слаб.     | 25090   | „             |
| 22000   | оч. слаб.     | 23493,0  | слаб.         | 25370,2 | слаб.         |
| 22020   | „             | 23492    | оч. слаб.     | 25428   | „             |
| 22035,8 | слаб.         | 23427    | слаб.         | 25443   | оч. слаб.     |
| 22040   | оч. слаб.     | 23534    | „             | 25444   | „             |
| 22057   | „             | 23595    | оч. слаб.     | 25494,5 | средн.        |
| 22120,4 | слаб.         | 23608    | „             | 25503,6 | „             |
| 22196   | оч. слаб.     | 23638    | слаб.         | 25542,5 | „             |
| 22226,8 | средн.        | 23664    | оч. слаб.     | 25634,9 | „             |
| 22234   | слаб.         | 23720,7  | средн.        | 25642   | слаб.         |
| 22544   | оч. слаб.     | 23730    | оч. слаб.     | 25667,7 | оч. слаб.     |
| 22258   | слаб.         | 23783    | „             | 25671,2 | слаб.         |
| 22272   | оч. слаб.     | 23788    | оч. слаб.     | 25676,7 | „             |
| 22289   | „             |          |               |         |               |



| 1       | 2         | 3       | 4         | 5       | 6         |
|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| 24614   | оч. слаб. | 23485   | оч. слаб. | 29005   | оч. слаб. |
| 24648,2 | средн.    | 26509   | "         | 29012   | "         |
| 24679,9 | слаб.     | 26517,0 | слаб.     | 29094   | слаб.     |
| 24714   | средн.    | 26567,2 | средн.    | 29103   | оч. слаб. |
| 24726   | "         | 26590   | оч. слаб. | 29152   | слаб.     |
| 24732   | оч. слаб. | 26601,0 | слаб.     | 29200   | "         |
| 24737   | "         | 26640   | "         | 29320   | "         |
| 24749,9 | средн.    | 26630   | "         | 29325   | средн.    |
| 24894   | оч. слаб. | 26668   | "         | 29260   | оч. слаб. |
| 24900   | средн.    | 26697,1 | "         | 29370   | слаб.     |
| 24907   | оч. слаб. | 26708   | оч. слаб. | 29416   | оч. слаб. |
| 24926   | слаб.     | 26718,9 | слаб.     | 29429   | "         |
| 24936   | оч. слаб. | 26778   | оч. слаб. | 29500   | "         |
| 24942   | слаб.     | 26791,5 | средн.    | 29516   | слаб.     |
| 25097   | оч. слаб. | 23804   | оч. слаб. | 29534   | слаб.     |
| 25168   | слаб.     | 26812   | "         | 29540   | "         |
| 25176   | оч. слаб. | 26814   | "         | 29560   | оч. слаб. |
| 25202,2 | средн.    | 26821,2 | слаб.     | 29570   | слаб.     |
| 25210,5 | "         | 26828,1 | "         | 29586   | "         |
| 25229   | оч. слаб. | 26960   | "         | 29592   | оч. слаб. |
| 25240   | "         | 26976   | оч. слаб. | 29334   | "         |
| 25282,8 | средн.    | 27041   | средн.    | 29634   | "         |
| 25303   | оч. слаб. | 27033   | оч. слаб. | 29634   | слаб.     |
| 25304   | "         | 27030   | "         | 29674   | средн.    |
| 25307,0 | средн.    | 27094,9 | слаб.     | 29676   | "         |
| 25325,7 | слаб.     | 27190   | "         | 29688,9 | слаб.     |
| 25336,3 | средн.    | 27210   | средн.    | 29702   | "         |
| 25359,5 | слаб.     | 27280,3 | оч. слаб. | 29706   | "         |
| 25689,2 | средн.    | 27303,3 | оч. слаб. | 29716   | оч. слаб. |
| 25698,8 | "         | 27502   | средн.    | 29728,9 | средн.    |
| 25800,0 | оч. слаб. | 27612,7 | оч. слаб. | 29736   | оч. слаб. |
| 25807   | слаб.     | 27611,2 | средн.    | 29784   | средн.    |
| 25828   | "         | 27335,2 | оч. слаб. | 29800   | слаб.     |
| 25864   | средн.    | 27650,0 | слаб.     | 29834   | оч. слаб. |
| 25874   | слаб.     | 27664,6 | оч. слаб. | 29840   | "         |
| 25886,3 | средн.    | 27680,7 | оч. слаб. | 29852,6 | "         |
| 25900   | слаб.     | 27683,8 | оч. слаб. | 29856   | слаб.     |
| 25910   | средн.    | 27736   | слаб.     | 29869,4 | оч. слаб. |
| 25914   | оч. слаб. | 27744   | "         | 29874   | "         |
| 25926   | слаб.     | 28120   | средн.    | 29878,3 | слаб.     |
| 25943,5 | средн.    | 28134   | "         | 29881,5 | оч. слаб. |
| 25948,9 | слаб.     | 28160,6 | "         | 29880   | "         |
| 25958   | слаб.     | 28176   | оч. слаб. | 29913   | "         |
| 25996   | "         | 28182,6 | средн.    | 29923   | "         |
| 26064,6 | слаб.     | 28274,5 | оч. слаб. | 29954   | "         |
| 26075   | слаб.     | 28285,3 | "         | 29962   | слаб.     |
| 26100   | оч. слаб. | 28299,0 | "         | 29968   | оч. слаб. |
| 26102   | "         | 28310   | слаб.     | 29980   | "         |
| 26107,8 | слаб.     | 28403   | оч. слаб. | 29986   | средн.    |
| 26143   | слаб.     | 28426   | слаб.     | 29993   | оч. слаб. |
| 26160   | оч. слаб. | 28446   | "         | 30018,5 | "         |
| 26165   | "         | 28482   | оч. слаб. | 30026,9 | "         |
| 26178   | "         | 28492   | "         | 30031,8 | "         |
| 26260   | "         | 28504   | "         | 30048   | "         |
| 26270   | слаб.     | 28550   | "         | 30090   | "         |
| 26290   | оч. слаб. | 28595   | оч. слаб. | 30097   | "         |
| 26326,8 | средн.    | 28640   | "         | 30115,6 | средн.    |
| 26353   | оч. слаб. | 28676   | оч. слаб. | 30129   | оч. слаб. |
| 26372,8 | средн.    | 28715   | "         | 30134   | "         |
| 26417   | слаб.     | 28745   | слаб.     | 30192   | "         |
| 26420   | "         | 28808   | "         | 30196   | средн.    |
| 26434   | оч. слаб. | 28810,9 | оч. слаб. | 30254   | оч. слаб. |
| 26464,0 | "         | 28817   | "         | 30258   | слаб.     |
| 26468,1 | средн.    | 28856   | "         | 30403   | оч. слаб. |
| 26473,4 | оч. слаб. | 28900   | слаб.     | 30406,9 | средн.    |
| 26474,6 | средн.    | 28934,7 | средн.    | 30425   | оч. слаб. |

| 1       | 2         | 3       | 4         | 5       | 6         |
|---------|-----------|---------|-----------|---------|-----------|
| 30432   | оч. слаб. | 30965   | оч. слаб. | 32015   | слаб.     |
| 30445,4 | оч. слаб. | 30976   | оч. слаб. | 32030   | средн.    |
| 30450,5 | средн.    | 31011   | оч. слаб. | 32110   | оч. слаб. |
| 30455   | оч. слаб. | 31056   | оч. слаб. | 32112   | средн.    |
| 30463   | "         | 31080   | оч. слаб. | 32120   | оч. слаб. |
| 30489   | "         | 31090   | оч. слаб. | 32140   | слаб.     |
| 30500   | "         | 31095   | оч. слаб. | 32142   | оч. слаб. |
| 30570   | "         | 31112   | слаб.     | 32145   | "         |
| 30584   | "         | 31207   | средн.    | 32157   | "         |
| 30614   | "         | 31210   | "         | 32172,4 | средн.    |
| 30620   | "         | 31214   | оч. слаб. | 32200   | слаб.     |
| 30347   | "         | 31241,3 | слаб.     | 32210   | оч. слаб. |
| 30558   | "         | 31252,6 | оч. слаб. | 32215   | оч. слаб. |
| 30664   | оч. слаб. | 31428   | "         | 32220   | оч. слаб. |
| 30680   | средн.    | 31440   | слаб.     | 32224   | "         |
| 30703   | оч. слаб. | 31563   | оч. слаб. | 32230   | средн.    |
| 30720   | слаб.     | 31836   | слаб.     | 32240   | оч. слаб. |
| 30728   | слаб.     | 31840   | "         |         |           |
| 30740   | оч. слаб. | 31842   | средн.    |         |           |
| 30743   | слаб.     | 31858   | оч. слаб. |         |           |
| 30755   | оч. слаб. | 31900   | "         |         |           |
| 30758   | слаб.     | 31934   | "         |         |           |
| 30777   | оч. слаб. | 31937   | "         |         |           |
| 30787   | оч. слаб. | 31940   | "         |         |           |
| 30836   | слаб.     | 31943   | "         |         |           |
| 30847   | "         | 31962   | слаб.     |         |           |

из серии  $J_{1,1-1} - J_{2,2-2}$  и  $Q^c$ -ветвь с  $\Delta K_{-1} = 1$  и  $\Delta K_{+1} = 0$  от  $J = 2$  и  $J = 10$ . В табл. 2 приводятся частоты идентифицированных переходов, которые сравниваются с частотами, вычисленными из экспериментальных  $A - C$  и  $\kappa$ . Отклонения рассчитанных и измеренных частот объясняются тем, что расчет производился без учета центробежного возмущения.

Таблица 2

| $Q^b (\Delta K_{-1} = +1, \Delta K_{+1} = -1)$ |                       |          |                     |                       | $Q^c (\Delta K_{-1} = +1, \Delta K_{+1} = 0)$ |                     |                       |          |
|------------------------------------------------|-----------------------|----------|---------------------|-----------------------|-----------------------------------------------|---------------------|-----------------------|----------|
| Переход                                        | Частота перехода, Мгц |          | Переход             | Частота перехода, Мгц |                                               | Переход             | Частота перехода, Мгц |          |
|                                                | измерен.              | вычислен |                     | измерен.              | вычислен                                      |                     | измерен.              | вычислен |
| $1_{01} - 1_{10}$                              | 10006,2               | 10006,2  | $2_{11} - 2_{20}$   | 27683,8               | 27682,5                                       | $2_{11} - 2_{21}$   | 27635,2               | 27633,2  |
| $2_{02} - 2_{11}$                              | 10850,6               | 10850,6  | $3_{12} - 3_{11}$   | 26718,9               | 26717,6                                       | $3_{11} - 3_{22}$   | 26474,6               | 26472,4  |
| $3_{03} - 3_{12}$                              | 12207,4               | 12207,4  | $4_{13} - 4_{22}$   | 25676,7               | 25675,3                                       | $4_{13} - 4_{21}$   | 24951,6               | 24948,3  |
| $4_{04} - 4_{31}$                              | 14174,6               | 14174,9  | $5_{14} - 5_{23}$   | 24749,9               | 24747,0                                       | $5_{14} - 5_{24}$   | 23091,3               | 23087,4  |
| $5_{05} - 5_{11}$                              | 16857,4               | 16859,5  | $6_{15} - 6_{24}$   | 24140,5               | 24133,4                                       | $6_{15} - 6_{25}$   | 20935,6               | 20930,1  |
| $6_{03} - 6_{15}$                              | 20240,3               | 20344,5  | $7_{16} - 7_{25}$   | 24035,2               | 24032,6                                       | $7_{16} - 7_{26}$   | 18544,2               | 18535,7  |
| $7_{07} - 7_{16}$                              | 24648,2               | 24656,0  | $8_{17} - 8_{26}$   | 24595,2               | 24594,1                                       | $8_{17} - 8_{27}$   | 15997,4               | 15985,9  |
| $8_{08} - 8_{17}$                              | 29728,9               | 29742,3  | $9_{18} - 9_{27}$   | 25943,5               | 25947,9                                       | $9_{18} - 9_{28}$   | 13400,3               | 13385,0  |
|                                                |                       |          | $10_{19} - 10_{28}$ | 28182,6               | 28193,1                                       | $10_{19} - 10_{29}$ | 10872,3               | 10853,5  |

Предварительный расчет вращательного спектра, произведенный на основе структурных параметров этилового спирта [2] и фтористого пропила [3], показал, что молекула  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$  в трансформе соответствует волчку с незначительной асимметрией ( $\kappa = -0,98$ ), параметр  $A - C \approx 23\,000$  Мгц, и поскольку при такой конфигурации



атомы  $C_7C_8C_9OH$  лежат в плоскости симметрии, ее дипольный момент, образованный в основном за счет связей  $C-O$  и  $O-H$ , также будет располагаться в плоскости и не может иметь сколько-нибудь заметную перпендикулярную компоненту. Сравнение экспериментальных значений  $A-C$ ,  $\chi$  с полученными расчетными данными и наличие достаточной большой  $\rho_c$  компоненты привело к заключению, что идентифицированные переходы не могут быть приписаны молекуле, находящейся в трансформе.

Не исключалась возможность существования изомерной формы в результате поворота гидроксильной группы вокруг связи  $C-O$ , при которой  $\rho_c$  компонента может принимать значения, близкие к  $1D$ , однако этого было недостаточно, чтобы отнести идентифицированные серии линий к указанному изомеру, поскольку, как показал расчет, поворот легкой атома водорода на любой угол вокруг связи  $C-O$  в молекуле с атомным весом около 62 не может столь сильно изменить параметр асимметрии (от  $-0.98$  до  $-0.84$ ).

Другая молекулярная форма, в которой перпендикулярная компонента может иметь заметную величину, представляет конфигурацию в результате поворота на некоторый угол от плоскости симметрии группы атомов  $CH_2OH$  вокруг связи  $C_3-C_7$ . Расчет спектра молекулы в такой конфигурации для многих значений углов поворота показал, что при угле приблизительно  $120^\circ$  рассчитанные значения  $A-C$ ,  $\chi$  и  $\rho_c$  соответствуют экспериментальным. Это дало основание полагать, что идентифицированный спектр относится именно к этому поворотному изомеру. Предполагается существование в спектре переходов, относящихся к трансформе.

Более полные данные будут опубликованы после дальнейшей их обработки.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Иманов Л. М., Абдурахманов А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук“, 6, 1963.
- Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Оптика и спектроскопия“, 3, 1963.
- Elzi Higota. J. chem. phys., 37, № 2, 1962.

А. А. Абдурахманов, Р. Э. Рахимова, Л. М. Иманов

#### $CH_3CH_2CH_2OH$ молекулунун микродалгадакы фырланма спектри

#### ХҮЛАСЭ

$CH_3CH_2CH_2OH$  молекулунун фырланма спектри електрик молекуллар модул асияја үсүлү илә иштәјән радиоспектрометрдә  $10 \div 32$  км/с тезлик диапозонунда тәдгиг олунмушдур.

Спектрдә 26 кечидин, Штарк ефектинә кәрә  $Q^a$  вә  $Q^c$  будагларына аид олдуғу ујғунлашдырылмышдыр. Ики сәријадан ибарәт олан  $Q^a$  будағынын  $1_{01}-1_{10} = 10036,2$  мг/с вә  $2_{12}-2_{11} = 10850,6$  мг/с кечидләринә кәрә  $A-C$  вә  $\chi$ -нын ( $\chi = -0,84107546$ ) дәгиг гијмәтләри тапылмышдыр.

Илк мә’луматлар ујғунлашдырылмыш сәријаларын молекулун изомер формасына аид олдуғуну тәсдиг едир.

Мәғаләдә  $CH_3CH_2CH_2OH$  молекулунун  $20 \div 32$  км/с тезлик диапозонунда спектри дә верилмишдир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ю. В. ГОРИН, П. В. ЛЕОНОВ

#### РАЗРЯД В ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИКОМ

#### Область линейных характеристик

В работе [1] было показано, что вид вольтамперных характеристик  $I_{cr} = f(u)$  газового разряда в полости, ограниченной диэлектриком зависит от произведения  $pd$ , где  $p$ —давление газа в полости,  $d$ —толщина газовой полости. Было также установлено существование критических значений  $pd$ , выше которых вольтамперные характеристики имеют ступенчатый характер; разряд при этом состоит из отдельных импульсов, разряжающих часть поверхности газовой полости и имеющих параметр погасания  $m = 0,4 \div 0,8$ . При значениях  $pd$  меньше критических зависимость среднего тока разряда от напряжения линейна.

В настоящей статье приводятся результаты исследования разряда в газовой полости, ограниченной диэлектриком при значениях  $pd < pd_{кр}$ . В экспериментах использовалась установка, описанная в [1], с некоторыми изменениями, расширяющими полосу пропускания измерительной цепи до 5 МГц. В установке использовался фазовращатель, позволяющий сдвигать запуск развертки осциллографа относительно фазы зажигания разряда. Ток разряда осциллографировался через промежутки  $10-12^\circ$  с разверткой  $10^{-5}$  сек/см. Применялась разрядная ячейка того же типа, что описана в [1]; прокладки, устанавливающие толщину газовой полости, были вынесены из зоны разряда.

На рис. 1 представлен схематический разрез разрядной ячейки. Ниже описаны результаты, полученные при следующих условиях: частота приложенного напряжения 50 Гц, толщина газовой полости 190 мк, диэлектрические барьеры-пленки полистирола толщиной 55 мк, площадь электродов  $1,8$  см<sup>2</sup>, давление азота в полости около 200 мм рт. ст. Разряд в полости зажигался при напряжении на ячейке  $U_{кр} = 590$  в ( $E_{кр} = 34$  кВ/см). Осциллографирование тока разряда производилось при напряжении 1750 в.—эф. Если за нуль фазы принять

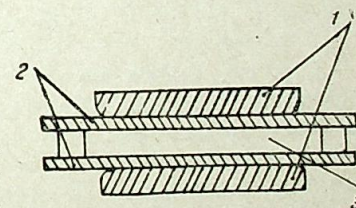


Рис. 1. Схематический разрез разрядной ячейки: 1—металлические электроды; 2—диэлектрические барьеры; 3—газовая полость.



момент прохождения напряжения через нуль, то экспериментально определенная фаза зажигания разряда равняется  $18^\circ$ .

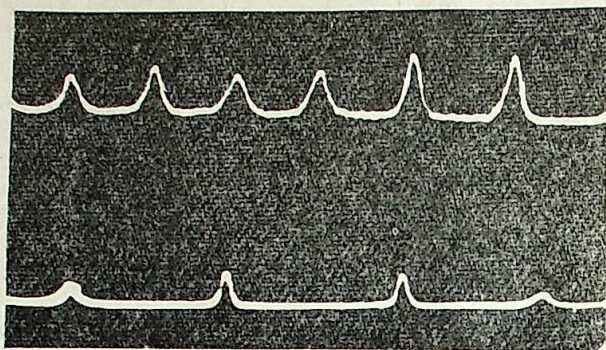


Рис. 2. Осциллограммы импульсов тока при фазах 0 и  $72^\circ$ .

Результаты экспериментов. На рис. 2 представлены осциллограммы тока разряда, полученные при фазах 0 и  $72^\circ$  приложенного напряжения. Как видно, разряд в полости при  $pd < pd_{кр}$  носит импульсный характер. Импульсы тока разряда имеют треугольную симметричную форму, причем время нарастания и спада тока составляет

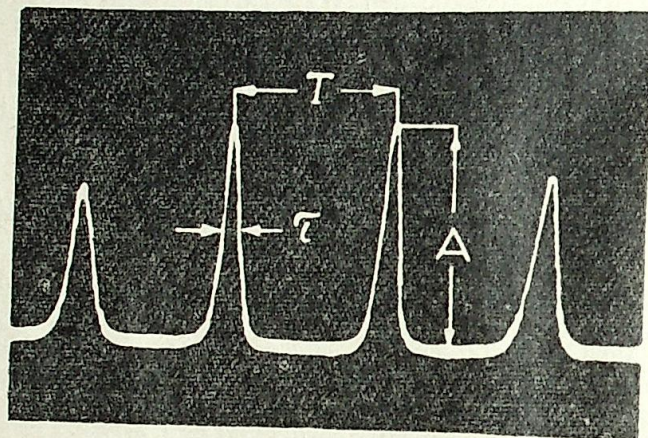


Рис. 3. Импульсы тока разряда.

2—3 мксек. Время между двумя последующими импульсами при любой заданной фазе является постоянной величиной. Для каждой фазы по осциллограммам была произведена статистическая обработка измерений 100 импульсов тока. Для всех импульсов измерялись (рис. 3): амплитуда импульса  $A$ , ширина на половине амплитуды  $\tau$  и время  $T$  между двумя последующими импульсами. По измеренным значениям  $A$  и  $\tau$  вычисляется заряд  $q = A \cdot \tau$  и средний ток за период между двумя импульсами  $i_{ср} = \frac{q}{T}$ , причем при вычислении среднего тока, соответствующего  $n$ -ому импульсу за  $T$ , брался промежуток времени между  $n$ -ым и  $n+1$  импульсом. Для величин  $A$ ,  $\tau$ ,  $T$  вычислялись средние значения  $(\bar{x})$  и относительные дисперсии  $\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \cdot \frac{1}{\bar{x}^2}$ .

Полученные результаты сведены в табл. 1.

Как видно из таблицы, величина  $T$  обладает наименьшей дисперсией. Хорошее сохранение периода следования импульсов позволяет сделать предположение о том, что при выполнении условия  $pd < pd_{кр}$  одним импульсом разряжается не часть, а вся газовая полость. Величины  $A$  и  $\tau$  не являются независимыми ( $\sigma_q^2 \ll \sigma_A^2 + \sigma_\tau^2$ ) [2], и малая величина дисперсии  $q$  подтверждает это предположение.

Таблица 1

| $(\omega t)^\circ$ | $A \cdot 10^{-6}$<br>а | $\tau \cdot 10^{-6}$<br>сек | $T \cdot 10^{-6}$<br>сек | $q \cdot 10^{-12}$<br>кул | $i_{ср}$ | $\sigma_A^2$ | $\sigma_\tau^2$ | $\sigma_T^2$ | $\sigma_q^2$ | $\sigma_{i_{ср}}^2$ |
|--------------------|------------------------|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|----------|--------------|-----------------|--------------|--------------|---------------------|
| 82                 | 38                     | 3,4                         | 33,5                     | 96                        | 2,9      | 0,41         | 0,07            | 0,04         | 0,08         | 0,04                |
| 71                 | 40                     | 3,1                         | 18,5                     | 115                       | 6,1      | 0,14         | 0,07            | 0,01         | 0,03         | 0,01                |
| 60                 | 49                     | 2,8                         | 14,3                     | 126                       | 8,9      | 0,10         | 0,04            | 0,008        | 0,02         | 0,01                |
| 49                 | 47                     | 2,9                         | 11,8                     | 126                       | 10,6     | 0,14         | 0,04            | 0,008        | 0,03         | 0,01                |
| 38                 | 53                     | 2,7                         | 10,7                     | 132                       | 12,5     | 0,09         | 0,04            | 0,005        | 0,03         | 0,008               |
| 27                 | 65                     | 2,4                         | 10,1                     | 149                       | 14,7     | 0,09         | 0,04            | 0,006        | 0,02         | 0,01                |
| 16                 | 71                     | 2,3                         | 9,8                      | 155                       | 15,7     | 0,08         | 0,04            | 0,005        | 0,02         | 0,01                |
| 5                  | 73                     | 2,1                         | 9,0                      | 150                       | 16,6     | 0,05         | 0,03            | 0,01         | 0,03         | 0,01                |
| — 6                | 71                     | 2,2                         | 9,0                      | 151                       | 16,4     | 0,08         | 0,03            | 0,006        | 0,03         | 0,02                |
| — 17               | 70                     | 2,2                         | 9,0                      | 144                       | 16,0     | 0,16         | 0,07            | 0,02         | 0,03         | 0,04                |

Введем обозначения:

$U_0$  — напряжение на ячейке,

$U_1$  — напряжение на диэлектрике,

$U_2$  — напряжение на газовой полости,

$v = \frac{du}{dt} = U_m \omega \cos \omega t$  — скорость изменения напряжения в отсутствие разряда,

$U_3, U_n$  — напряжение зажигания и погасания разряда в полости.

В любой момент времени сумма напряжений на диэлектрических барьерах и газовой полости равна напряжению на всей разрядной ячейке, изменение этого напряжения полностью определяется источником. Поскольку период следования импульсов намного меньше длительности полупериода приложенного напряжения, величины  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$  в течение времени  $T$  можно считать постоянными.

Заряд, протекающий во внешней цепи в течение времени  $T$ , равен увеличению заряда на диэлектрических барьерах ячейки при условии, что напряжение зажигания двух последующих импульсов одинаково, т. е.

$$\Delta q = C_1 (\Delta U + v_2 \cdot 2\tau + v_1 \cdot 2\tau) + v_1 (T - 2\tau),$$

где  $\Delta U = U_3 - U_n$ ,  $C_1$  — емкость диэлектрических барьеров. Первое слагаемое в (1) — увеличение заряда на диэлектрике за время разряда  $2\tau$ ; второе — за время между двумя разрядами. Принято, что напряжение погасания разряда совпадает с минимальным напряжением на газовой полости. Величина  $\Delta U$  может быть определена из условия

$$\Delta U = v_2 (T - 2\tau)$$

Подставляя (2) в (1) и производя преобразования, получим для заряда

$$\Delta q = C_1 v_0 \cdot T$$



и для среднего тока

$$i_{\text{ср}} = \frac{\Delta q}{T} = C_1 v_0. \quad (4)$$

Выражение (4) согласуется с результатами Филиппова [3], полученными в предположении постоянства напряжения на газовой полости во время разряда. Учитывая, что на осциллограммах нулевая линия соответствует значению  $i_0 = C_0 v_0$ , для заряда, соответствующего площади одного импульса на осциллограмме, получим

$$q_{\text{имп}} = (C_1 - C_0) v_0 \cdot T, \quad (5)$$

а для среднего тока

$$i_{\text{ср, имп.}} = (C_1 - C_0) v_0 = U_m \omega (C_1 - C_0) \cos \omega t, \quad (6)$$

где  $C_0$  — емкость всей ячейки.

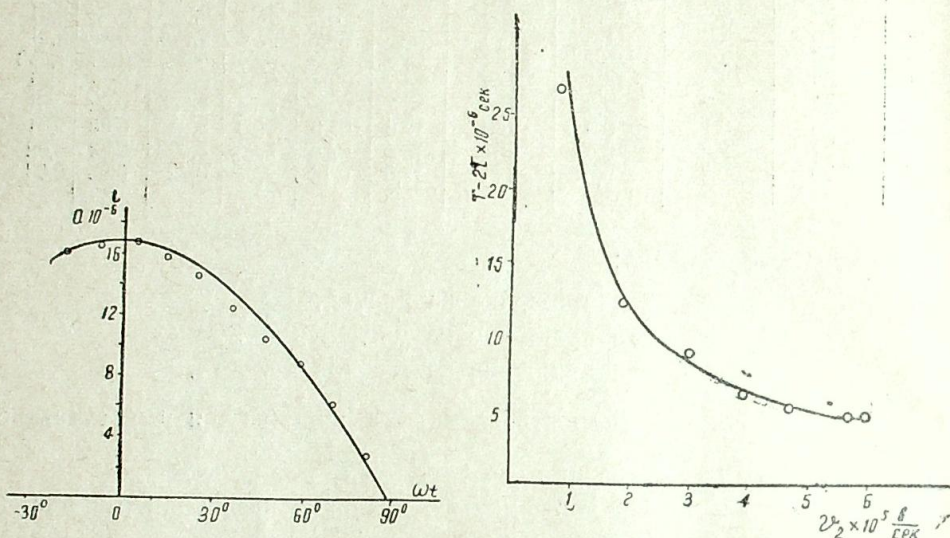


Рис. 4. Изменение среднего тока за полупериод. Сплошная кривая по формуле (6); точки — эксперимент.

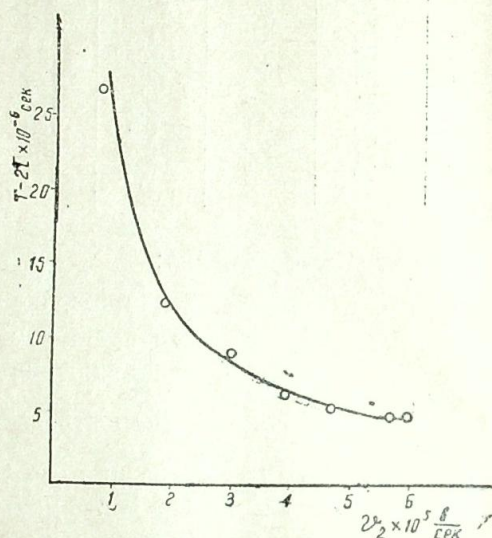


Рис. 5. Зависимость времени между разрядами от кривизны приложенного напряжения.

На рис. 4 сплошной линией показана величина  $i_{\text{ср}}$ , вычисленная по (6); точками нанесены экспериментальные значения из табл. 1. Заряд, переносимый одним импульсом в газовой полости, равен

$$\Delta q_2 = C_2 v_2 T, \quad (7)$$

а активный средний ток

$$i_{\text{ак, ср.}} = C_2 v_2 = C_0 v_0. \quad (8)$$

Заряд, протекающий во внешней цепи, всегда пропорционален заряду, переносимому импульсом в газовой полости, т. е.

$$q_{\text{имп}} = \left( \frac{C_1}{C_0} - 1 \right) \Delta q_2. \quad (9)$$

Величина заряда, соответствующая площади одного импульса на осциллограмме, равна

$$q_{\text{имп}} = C_1 (\Delta U + v_2 2\tau) = C_1 (\Delta U + \Delta U_1). \quad (10)$$

В табл. 2 представлены значения  $v_2$ ;  $\Delta U$ ;  $\Delta U_1$ , вычисленные по экспериментальным данным.

Как видно из таблицы, 2 величина  $\Delta U$  меняется слабо, в то время как изменение заряда  $q_{\text{имп}}$  в зависимости от скорости роста прило-

женного напряжения практически полностью обуславливается изменением величины  $\Delta U_1$ . Зависимость  $q_{\text{имп}}$  от скорости изменения напряжения объясняется тем, что при больших значениях  $v_2$  для компенсации поляризованных зарядов  $q_n = C_2 v_2 \cdot 2\tau$  и понижения напряжения на газовой полости до значения  $U_n$  требуется больший заряд, чем при малых значениях  $v_2$ .

Таблица 2

| $V_2 \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{СМ}}$ | $\Delta U, \text{В}$ | $\Delta U_1, \text{В}$ |
|---------------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 0,83                                        | 2,20                 | 0,6                    |
| 1,95                                        | 2,4                  | 1,2                    |
| 3,00                                        | 2,6                  | 1,7                    |
| 3,92                                        | 2,4                  | 2,3                    |
| 4,71                                        | 2,5                  | 2,5                    |
| 5,32                                        | 2,8                  | 2,6                    |
| 5,75                                        | 2,8                  | 2,6                    |
| 5,95                                        | 2,8                  | 2,6                    |

На рис. 5 представлены экспериментальные значения величины  $T - 2\tau$  в зависимости от  $v_2$ . Сплошная кривая получена обработкой экспериментальных данных по методу наименьших квадратов согласно (2) при  $\Delta U = \text{const}$ , которое оказалось равным 2,4 В. Этому соответствует значение параметра погасания [1], полученное в исследованных условиях ( $m = 0,995$ ).

## Выводы

Разряд в газовой полости, ограниченной диэлектриком, при  $pd < pd_{\text{кр}}$  носит импульсный характер. Если при  $pd > pd_{\text{кр}}$  каждый отдельный импульс разряжает часть поверхности и имеет параметр погасания  $m = 0,4 \div 0,8$ , то при  $pd < pd_{\text{кр}}$  каждый импульс разряжает всю поверхность газовой полости, причем напряжение погасания разряда отличается от напряжения зажигания на десятки доли процента. Полученные результаты могут быть применены при изучении барьерного разряда для оценки поведения высоковольтной изоляции при наличии в последней воздушных включений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Вечхайзер Г. В., Горин Ю. В., Леонов П. В. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, № 2, 1956.
2. Уорсинг А., Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных. ИЛ, М., 1949.
3. Филиппов Ю. П., Емельянов Ю. М. ЖФХ, 32, 2317, 1958.

Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхайзер, У. В. Горин, П. В. Леонов

Диелектриклә һүдудлашмыш газ аралығында бошалма

ХҮЛАСӘ

Бу тәдгигат диелектриклә һүдудлашмыш вә волтампер характеристикалары  $I_{\text{ор}} = f(u)$  хәтти олан  $pd < pd_{\text{кр}}$  гиҗәтиндә, газ аралығында електрик бошалмасынын тәдгигинә һәср олунмушдур.

Мүәјјән едилмишдир ки, газ аралығында белә бошалма импулс характерини дашыјыр вә һәр бир импулс бүтүн газ аралығыны бо-



шалдыр. Ајры-ајры импулсларын газ аралығына вә харичи дөврәҗашыдығы жүкләрин гижмәти үчүн дүстурлар алынмыш, һәмин дүстурлар тәчрүбә илә јохланмышдыр.

Мә'лум олмушдур ки, бошалманын алынмасы вә сөнмәси арасындакы кәркинликләр фәрги газ аралығында алышма кәркинлијинин 0,5%-ни тәшкил едир.

С. Н. ГАДЖИЕВ

### КОЛОНКА ДЛЯ РЕКТИФИКАЦИИ ВЛАГОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ

На существующих высокоэффективных колонках, которые обычно имеют металлические (насыпную, сеточную и т. д.) насадки, в случае ректификации влагочувствительных и агрессивных веществ, таких как хлорпроизводные кремнийорганические соединения и т. д., возникают серьезные осложнения. Под действием влаги атмосферы происходит гидролиз этих веществ, вследствие чего с одной стороны образуются трудносмываемые полимерные кремнийорганические соединения, которые, осаждаясь на насадке, делают ее несмачиваемой, то есть почти непригодной, а с другой стороны выделяющаяся из вещества HCl агрессивно влияет на металлическую насадку, также загрязняя колонку и, следовательно, очищаемое вещество.

Нами для ректификации под атмосферным давлением кремнийхлорорганических соединений собрана колонка специфической конструкции с учетом указанных трудностей. Ниже приводится описание конструктивных элементов этой колонки, причем в основном новых. Колонка с высотой рабочей части (слоя насадки) 2930 и общей высотой 4000 мм, с насадкой, состоящей из одиночных витков стеклянной спирали, имеет эффективность 96 теоретических тарелок (при полном возврате флегмы), что было определено по методике, описанной в [1—3].

Одним из основных преимуществ колонки является отсутствие на ее головке крана для отбора фракций. Как известно, кран создает опасность загрязнения своей смазкой дистиллата, в особенности в случае таких веществ, как элементарные соединения, для которых вполне удовлетворительных смазок пока не имеется. Кроме того, наличие непосредственно на входе крана постоянно сохраняющегося объема жидкости нежелательно с точки зрения четкости разделения.

Регулирование флегмового числа и отбор фракций производится при помощи несложного приспособления следующим образом. Конденсированная на обратном холодильнике 1 (рис. 1) жидкость проходит через жидкостный затвор 2 (диаметр 2 мм) и сливается вниз на стеклянный желобок 3, подвижно установленный на стеклянной оси 4. К левому на рисунке концу желобка прикреплена платиновая цепочка 5, которая изготовлена нами из 0,2-миллиметровой проволоки. Наматыванием этой цепочки на удлиненный конец стеклянной шлифованной пробки 6 можно поднимать указанный конец желобка до полного прекращения стекания жидкости с этого конца. Это положение соответствует



С. Н. ГАДЖИЕВ

## КОЛОНКА ДЛЯ РЕКТИФИКАЦИИ ВЛАГОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ

На существующих высокоэффективных колонках, которые обычно имеют металлические (насыпную, сеточную и т. д.) насадки, в случае ректификации влагочувствительных и агрессивных веществ, таких как хлорпроизводные кремнийорганические соединения и т. д., возникают серьезные осложнения. Под действием влаги атмосферы происходит гидролиз этих веществ, вследствие чего с одной стороны образуются трудносмываемые полимерные кремнийорганические соединения, которые, осаждаясь на насадке, делают ее несмачиваемой, то есть почти непригодной, а с другой стороны выделяющаяся из вещества  $\text{HCl}$  агрессивно влияет на металлическую насадку, также загрязняя колонку и, следовательно, очищаемое вещество.

Нами для ректификации под атмосферным давлением кремний хлорорганических соединений собрана колонка специфической конструкции с учетом указанных трудностей. Ниже приводится описание конструктивных элементов этой колонки, причем в основном новых. Колонка с высотой рабочей части (слоя насадки) 2930 и общей высотой 4000 мм, с насадкой, состоящей из одиночных витков стеклянной спирали, имеет эффективность 96 теоретических тарелок (при полном возврате флегмы), что было определено по методике, описанной в [1—3].

Одним из основных преимуществ колонки является отсутствие на ее головке крана для отбора фракций. Как известно, кран создает опасность загрязнения своей смазкой дистиллата, в особенности в случае таких веществ, как элементарные соединения, для которых вполне удовлетворительных смазок пока не имеется. Кроме того, наличие непосредственно на входе крана постоянно сохраняющегося объема жидкости нежелательно с точки зрения четкости разделения.

Регулирование флегмового числа и отбор фракций производится при помощи несложного приспособления следующим образом. Конденсированная на обратном холодильнике 1 (рис. 1) жидкость проходит через жидкостный затвор 2 (диаметр 2 мм) и сливается вниз на стеклянный желобок 3, подвижно установленный на стеклянной оси 4. К левому на рисунке концу желобка прикреплена платиновая цепочка 5, которая изготовлена нами из 0,2-миллиметровой проволоки. Наматыванием этой цепочки на удлиненный конец стеклянной шлифованной пробки 6 можно поднимать указанный конец желобка до полного прекращения стекания жидкости с этого конца. Это положение соответствует



полному возврату флегмы, которая, стекая с правого конца желобка, проходит через второй жидкостный затвор 7 и счетчик капель флегмы 9 и вливается в колонку.

Для отбора фракций левый конец желобка опускают вниз поворотом в обратном направлении пробки 6, то есть удлинением цепочки 5.

Таким образом, вращением пробки 6 тонко регулируется количество стекающих в приемник капель, иначе говоря — флегмовое число. В пространстве 8 головки, откуда производится отбор фракций, пары вещества не поступают, так как в обоих его соединениях с колонкой имеются жидкостные затворы 2 и 7. Небольшое же количество паров, образующихся в этом пространстве, как показали опыты, не влияет на флегмовое число, вплоть до  $\Phi = \infty$ , благодаря наличию внутреннего тубуса 10.

Капли дистиллата, стекающие в желаемом количестве с левого конца желобка 3 в трубку 10, проходят через холодильник 11, счетчик капель дистиллата 12, подвижную воронку 13 и собираются в приемные сосуды. Последние состоят из стаканчика 14 для сбора неосновной — головной фракции и колбы 15 для сбора основного вещества.\* Во втором стаканчике 16 имеется фосфорный ангидрид, служащий для поглощения паров воды, имеющихся в пространстве между

краном 17 и зажимом 18 в момент присоединения приемника к головке. Отбираемая фракция проводится в любой из сосудов 14 и 15 путем направления к нему стока подвижной воронки 13 притягиванием снаружи при помощи постоянного магнита 19.

Основное преимущество данного приемника состоит в том, что он позволяет полностью устранить проникновение атмосферной влаги как к собранным фракциям, так в головку колонки и во время отделения приемника от головки. Это достигается при помощи крана 17 и зажима 18, которые перед отделением приемника от головки закрывают. Кроме зажима 18, головку дополнительно изолировали от атмосферы при помощи пришлифованного колпака, надеваемого на шлифованную трубку 21, которая служит также для гибкого крепления приемника к головке. Связь колонки с атмосферой осуществляется через хлоркальциевую трубку 22, имеющую несколько увеличенные размеры и содержащую фосфорный ангидрид и ангидрон.

Измерение температуры на головке производилось, помимо термометров Аншютца, термистором. О методике применения термисторов в ректификации, разработанной нами на основе предыдущих исследова-

\* Такой приемник применим при ректификации индивидуальных веществ, предварительно очищенных на обычных колонках со средней эффективностью.

ний [4], а также и о методике самой ректификации на описываемой колонке будет сообщено отдельно.

Новым, насколько нам известно, является и следующий простой способ утилизации стеклянной насадки. Обыкновенная заводская (заезд „Льборп-исор“, г. Клин, Московской области) насадка, состоящая из одиночных витков стеклянной спирали, обрабатывалась 18%-ной фтористоводородной кислотой в полиэтиленовом цилиндре. Насадка предварительно распределялась путем визуального отбора на три части: первая — спирали из наиболее толстого стекла (1 мм и выше) обрабатывалась кислотой 70 мин, вторая — 50 мин и третья — самые тонкие (0,5 мм и ниже) — 15 мин (все фракции обрабатывались в один прием — последовательно всыпались в кислоту, каждая через соответствующие промежутки времени). В результате этой обработки произошло уменьшение толщины нити спиральной насадки на 60% (до обработки средний диаметр 0,9 мм, после — 0,35 мм), веса — на 56%, насыпного объема — на 34%, ВЭТ — в два раза (от 7,5 до 3,5 см). Разумеется, насадку можно утоньшить еще больше.

Таким образом, удалось достичь высокой эффективности не на металлической насадке, которую применить для наших (галогенсодержащих) веществ невозможно, а на стеклянной. Центральная ректифицирующая трубка 25 диаметром 15 мм помещена в латунную трубку 26 диаметром 25 мм, служащую для устранения температурных градиентов по высоте колонки. Поверх латунной трубки находится стеклянная трубка 27 диаметром 40 мм, на которую намотана нагревательная проволока из сплава никеля с 3% кремния. Диаметр проволоки 0,8 мм, сопротивление 0,24 ом/м, общее сопротивление 15 ом. Наружная теплоизоляционная трубка 28 диаметром 60 мм дополнительно изолирована обмоткой 29 толщиной 10 мм из асбестового шнура. Через асбест и латунь по высоте колонки проделано три сквозных отверстия для наблюдения за центральной ректифицирующей трубкой.

Учитывая указание Казанского и сотрудников [5], а также других авторов [6] на важность применения царг, особенно в случае высоких колонок, нами для повышения эффективности в центральной трубке установлено четыре царги. Царги 30 из танталовой сетки, изготовленной нами из фольги, толщиной 0,2 мм собирают сливающуюся сверху жидкость со стенок колонки к центру.

Равномерность кипения в кубе (объем 700 и 350 мл) достигалась следующим образом. На центр дна грушевидной колбы приваривали стеклянную палочку, на которую надевали служащую для облегчения образования пузырьков „кипелку“, — съемный полый цилиндр (высота 80, диаметр наружный 13, внутренний 6 мм). Этот „пузырькообразователь“ изготовлен спеканием при 600°C в течение трех часов в графитовой форме смеси, состоящей из пылевидного молибденового и мелкозернистого (1,5–2 мм) битого пирексового стекла. При этих условиях острые углы пирексового стекла не заплываются, а форма цилиндра прочно сохраняется благодаря спекшейся пыли молибденового стекла. Помимо легкости изготовления такой пузырькообразователя имеет еще то преимущество перед кипелкой, получаемой привариванием ко дну куба осколков стекла, что его можно время от времени вынимать из колбы, промывать или же заменить новым. Кроме того, при применении такого пузырькообразователя интенсивность кипения почти не зависит от изменения уровня жидкости в кубе.

Колбонагреватель, изготовленный из асбестового теста, содержащего небольшое количество жидкого стекла и каолина, состоит из двух полушарий. Нагревательная нихромовая спираль помещена в

\* Для всех трубок указаны диаметры внутренние.



нижнем полушарии. Верхний же, служащий для тепловой изоляции, съемный, состоит из двух половин, соединенных между собой на шарнирах. Наблюдение за кубом производится через окошко, продланное в верхнем полушарии колбонагревателя. Кстати, отметим, что вести наблюдение за кубом и колонкой при помощи маленькой электролампы (на 6 в) оказалось во всех отношениях более удобным.

Колбонагреватель установлен на четырех винтовых ножках, при помощи которых строго регулируется положение куба. Учитывая осложнения, связанные с заеданием шлифа при перегонке кремнийорганических соединений, на шлифу между кубом и колонкой установлена тефлоновая втулка. Втулку, толщиной 0,3 мм, выточенную на токарном станке по размерам шлифа, надевали на конец центральной трубки колонки (до сборки), быстро вставляли в нагретый шлиф колбы и зажимали. Вследствие этого она становилась еще тоньше—0,2 мм и принимала точную форму шлифа.

Тефлоновая втулка оказалась весьма эффективной—полностью устраняла заедание шлифа. Предварительные испытания показали, что на таком соединении достигается и полная герметичность, но, учитывая серьезность работы с данными веществами—органохлорсиланами, шлиф сверху дополнительно защищали глетно-глицериновой замазкой. Вода к холодильникам колонки подается из ультратермостата, что позволяет установить необходимую стабильную температуру охлаждения и обеспечить надежность работы.

Вопрос о роли стабильности охлаждения и определенного значения разности между температурой кипения перегоняемого вещества и температурой охлаждающей воды (которую можно поддерживать при помощи ультратермостата) экспериментально нами не исследовался.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую признательность акад. Б. А. Казанскому, проф. А. Ф. Платэ и А. Л. Либерману и их сотрудникам, у которых я прошел школу по органическому анализу и в частности по ректификации в 1951 г., и консультируюсь по сегодняшний день.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Ландсберг Г. С., Казанский Б. А., Бажулин П. А., Буланова Т. Ф., Либерман А. Л., Михайлова Е. А., Платэ А. Ф., Стерин Х. Е., Сушинский М. М., Тарасова Г. А., Уголин С. А. Определение индивидуального углового состава бензинов прямойгонки комбинированным методом. Изд. АН СССР, М., 1951.
2. Крель Э. Руководство по лабораторной ректификации. ИЛ, 1960.
3. Розенгарт М. И. Техника лабораторной перегонки и ректификации. Госхимиздат, 1951.
4. Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я., Шарифов К. А. ЖФХ, 33, 887, 1962, 37, 2368, 1963.
2. Казанский Б. А., Либерман А. Л., Сергиенко С. Р., Тарасова Г. А., Платэ А. Ф. ЖОХ, 12, 112, 1942.
6. Бушмакин И. Н., Лызлова Р. В. ЖПХ, 25, 303, 1952.

С. Н. Гачыев

#### Нәмәһәссас маддәләрин ректификасиясы үчүн колонка

##### ХУЛАСӘ

Мәгаләдә нәмәһәссас вә агрессив маддәләрин атмосфер тәзјиги шәраитиндә ректификасия едилмәси үчүн јүксәк эффективлијә малик олан колонканын конструксиясы верилмишдир.

Колонканын үмүми һүндүрлүјү 4000, ишчи һиссәсинин һүндүрлүјү 2960 мм, эффективлијә—флегманын там гајытмасы шәраитиндә 96 нәзәри тарелкадыр.

К. Л. КУЛИКОВСКИЙ, О. П. РУСТАМ-ЗАДЕ

#### ГАЛЬВАНОМЕТРИЧЕСКИЙ КОМПЕНСАТОР С ЕМКОСТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ

В практике измерений к наиболее распространенному типу измерительных преобразователей относятся измерительные усилители напряжения и тока. Применение электронно-вакуумных и полупроводниковых приборов непосредственно для усиления малых постоянных напряжений затруднено из-за нестабильности их характеристик и особенно дрейфа, ограничивающего минимальное значение измеряемого параметра. В последние годы получили распространение гальванометрические усилители, обладающие высокой чувствительностью, точностью, а также малым дрейфом. Благодаря наличию в этих устройствах глубокой отрицательной обратной связи удается получить стабильный коэффициент усиления, который в широких пределах не зависит от измерения параметров отдельных элементов схемы источников питания.

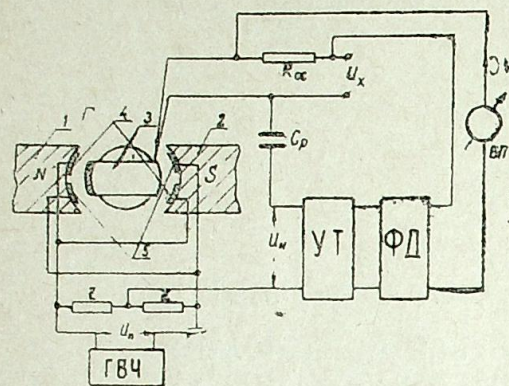
В существующих конструкциях гальванометрических усилителей в качестве преобразователя угла отклонения гальванометра в электрическое напряжение или ток схемы используется фотооптический преобразователь. Наряду с некоторыми достоинствами фотооптические преобразователи обладают такими недостатками, как зависимость коэффициента преобразования от температуры, изменения чувствительности в начальный период работы, высокая инертность фотоспротивления (постоянная времени которых достигает 0,25 сек), наличие электрической лампочки, нагревающей корпус гальванометра, необходимость крепления на рамке отражающего зеркала, снижающего динамические характеристики прибора, ограниченный срок службы и малая надежность. Все перечисленные выше недостатки в значительной степени ухудшают работу прибора, снижают его точность, чувствительность и надежность.

Нами разработан оригинальный гальванометрический усилитель, в котором в качестве индикатора угла отклонения чувствительного гальванометра использован емкостный преобразователь, расположенный в рабочем зазоре чувствительного элемента. Принципиальная схема его показана на рисунке. Основным элементом схемы является гальванометр Г специальной конструкции, в котором для уменьшения габаритов и момента инерции емкостный преобразователь монтируется в воздушном зазоре магнитной системы. При этом неподвижные электроды 4—5 наклеиваются по образующей на торцевую поверхность полюсных наконечников 1—2, а в качестве подвижного элек-



трода используется провод, которым обмотана рамка 3 гальванометра Г.

Емкости  $C_{43}$   $C_{53}$ , образованные неподвижными электродами 4, 5 и проводом рамки 3, соответственно, совместно с сопротивлениями  $\approx$



включаются в цепь моста переменного тока, питаемого высокочастотным напряжением  $U_n$ , снимаемым с генератора ГВЧ. При отсутствии на входе усилителя измеряемого напряжения  $U_x$  рамка 3 гальванометра Г располагается таким образом относительно неподвижных электродов 4 и 5, что емкости  $T_{43}$  и  $C_{53}$  равны между собой и мост находится в равновесии. При подаче на вход измеряемого напряжения  $U_x$  рамка 3 под действием вра-

щающего момента начнет поворачиваться:

$$M_{вр} = \kappa \psi U_x,$$

где  $\kappa$  — постоянная,  
 $\psi$  — потокосцепление.

Произойдет перераспределение емкостей мостового преобразователя, в результате чего на выходе его появится напряжение небаланса  $U_n$ . Как показали исследования, емкостный преобразователь оказывает влияние на рамку гальванометра, создавая дополнительный момент

$$M_{доп} = m U_n^2 \alpha,$$

где  $m$  — постоянная, зависящая от параметров емкостного преобразователя,

$\alpha$  — угол отклонения рамки гальванометра, направленный в ту же сторону, что и вращающий момент от измеряемого напряжения  $U_x$ .

Указанные моменты в гальванометрическом преобразователе уравновешиваются противодействующим моментом, создаваемым механически растяжками:

$$M_{пр} = W \alpha,$$

где  $W$  — удельный противодействующий момент растяжения.

В момент равновесия

$$M_{вр} + M_{доп} - M_{пр} = 0$$

или

$$\kappa \psi U_x + m U_n^2 \alpha - W \alpha = 0. \quad (1)$$

Все члены уравнения (1), не содержащие измеряемой величины, представляют собой результирующий противодействующий момент. Как не трудно видеть из выражения (1), противодействующий момент в гальванометре-преобразователе компенсируется дополнительным электрическим моментом, создаваемым переменным напряжением питания. Если поддерживать напряжение питания равным

$$U_{по} = \sqrt{\frac{W}{m}},$$

то противодействующий момент растяжек будет скомпенсирован дополнительным моментом во всем диапазоне углов отклонения рамки гальванометра. Напряжение небаланса  $U_n$  подается на вход усилите-

ля переменного тока (УТ). Высокочастотный ток  $I_n$  на выходе усилителя выпрямляется фазовым детектором ФД. Выпрямленный ток  $I_n$ , протекая через сопротивление обратной связи  $R_{ос}$ , создает на нем падение напряжения  $U_{ос}$ , компенсирующее измеряемое. Поворот рамки будет происходить до тех пор, пока не наступит равенство

$$U_x = U_{ос}.$$

В этом случае выпрямленный ток  $I_n$  будет служить мерой измеряемого параметра.

Разработанная конструкция гальванометрического усилителя (ГУ) с емкостным преобразователем была выполнена на базе гальванометра М-265 и имеет следующие технические характеристики:

предел измерения 0,1 мВ,  
приведенная погрешность 1%,  
сопротивление нагрузки 660 Ом,  
частота напряжения, питающего преобразователь 860 кГц,  
выходной ток 1,5 мА.

Таким образом, использование емкостного преобразователя угла отклонения рамки гальванометра в электрическое напряжение позволило не только упростить конструкцию усилителя и значительно уменьшить его габариты, но и повысить его точность за счет снижения погрешности, вызванной неполной компенсацией противодействующего момента растяжек.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А. Ф., Мелик-Шахназаров А. М. и др. Гальванометрические компенсаторы. Энергия, 1966.
2. Куликовский К. Л., Курочкин Е. П. Авт. свид. № 169670 от 1964 г. опубликовано в бюллетене.

К. Л. Куликовский, О. П. Рустамзаде

#### Тутум чевричили гальванометрик компенсатор

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә оригинал гурулуш олан тутум чевричили гальванометрик компенсатор тәсвир олунмушдур.

Гальванометрин нава мәсәфәсиндә тутум чевричиси јаратмагла чиназын конструксиясы садәләшмиш, давамлылығы артмыш вә динамики характеристикалары јахшылашмышдыр.



Ф. И. ХАСМАМЕДОВ

# УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ДВУХПОТОЧНЫХ НАГРЕВАТЕЛЬНЫХ ТРУБЧАТЫХ ПЕЧЕЙ РАДИАНТНОГО ТИПА (РАДИАНТНЫХ КАМЕР) В СЛУЧАЕ, КОГДА ТОПЛИВО ПОДАЕТСЯ ДВУМЯ ПОТОКАМИ

В данной статье описана методика составления уравнения динамики двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками на основе закона сохранения энергии. Динамика двухпоточных трубчатых печей как экспериментально, так и теоретически мало изучена. Настоящая работа одна из первых в этой области.

Двухпоточные трубчатые печи являются сложным объектом автоматического регулирования. Они характеризуются многими входами и выходами. Регулируемыми параметрами является температура сырья на их выходах; регулирующим воздействием на объект—количество тепла, воспринятое ее нагревательной поверхностью от окружающей греющей среды. Греющей средой служат топочные газы, образующиеся при сгорании топлива. Изменение подвода тепла в целях поддержания заданного значения температуры нагреваемого сырья осуществляется изменением количества топлива\*.

С увеличением числа потоков сырья и топлива усложняется регулирование температурного режима трубчатых печей, появляется взаимовлияние между потоками [7, 8, 11]. При проектировании системы автоматического регулирования температурного режима данного типа трубчатых печей нужно учитывать также взаимовлияния, которые еще больше усложняют поставленные задачи.

Как все тепловые объекты трубчатые печи обладают свойствами самовыравнивания и способны аккумулировать в своих емкостях определенное количество энергии. При выводе уравнения динамики трубчатых печей рассматриваются как объекты, связанные между собой отдельными звеньями (емкостями). В данном случае, когда сырье и топливо подаются двумя потоками, все трубчатые печи радиантного типа (радиантных камер) с точки зрения объекта регулирования являются восьмиемкостными (рис. 1, 2). Для таких объектов (емкостей) принимается, что процесс изменения температуры и других парамет-

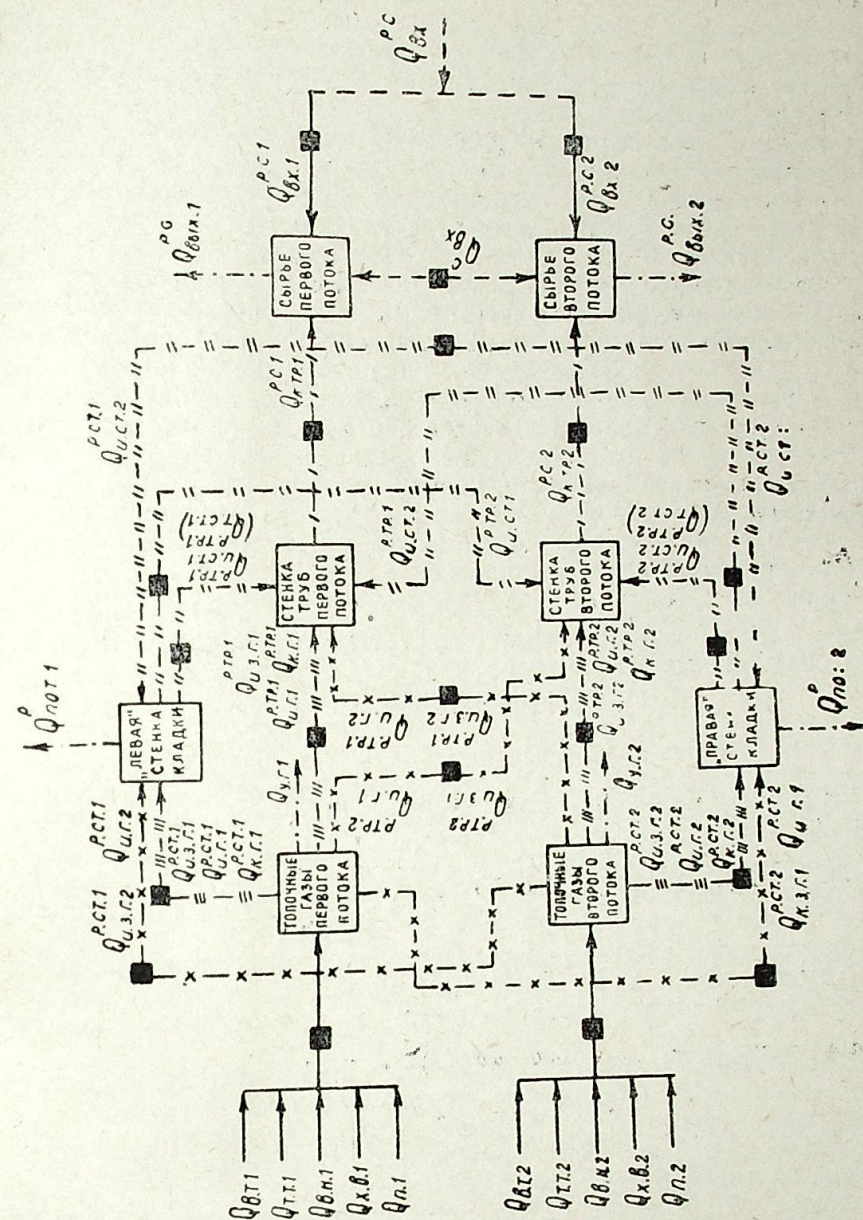


Рис. 1. Схема двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками. Тепло передается: — — — излучением (от зеркала горения и от топочных газов) и конвекцией; — — — излучением от зеркала горения и от топочных газов; — — — конвекцией; — — — теплопритоком; — — — тепло, уходящее с продуктами и потерей; — — — элемент запаздывания. Пунктирная линия показывает случай, когда оба потока сырья подаются одним насосом.

\* Количество воздуха, подаваемого в топку, до настоящего времени не регулируется и не изменяется. Пар, подаваемый для распыливания жидкого топлива, регулируется вручную и не измеряется.



ров внутри объектов происходит идеально и, следовательно, выводимые уравнения справедливы для любой точки объекта. Это условие соблюдается в любой момент времени при отсутствии запаздывания и существует постоянный сдвиг во времени между двумя точками объекта в случае запаздывания.

Отдельные звенья (емкости) трубчатых печей не являются звеньями направленного действия, так как количество тепла, передаваемого от любого греющего звена к нагреваемому, пропорционально не температуре этого звена, а разности температур греющего и нагреваемого звеньев (рис. 1). В то же время передачу тепла соседнему звену надо рассматривать как направленную. Физические процессы, происходящие в отдельных емкостях трубчатых печей при возмущенном состоянии, описываются нелинейными уравнениями, исследование которых в общем виде представляет большие трудности. Поэтому для упрощения уравнений динамики отдельных емкостей принято линеаризовать их. Для этой цели в качестве переменных параметров принимаем их отклонения от установившихся значений, причем отклонения параметров считаем малыми величинами. В связи с этим функции переменных параметров, входящие в уравнение динамики емкости, разлагаем в ряд Тейлора по степеням их малых приращений и пренебрегаем членами второго порядка и выше.

#### Передача тепла в двухпоточных трубчатых печах радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками

Как во всех типах трубчатых печей, так и в печах данного типа передача тепла, образующегося при сгорании топлива, происходит всеми тремя способами одновременно и приблизительно может быть представлена следующим образом (по одному потоку топлива):

1. Зеркало горения, образующееся от первого потока топлива, излучает тепло на первый и второй потоки стенок труб и на „левую“ и „правую“ части боковых стенок кладки камеры\*.

2. Образующиеся топочные газы от первого потока топлива, имея высокую температуру, также излучают тепло на первый и второй потоки стенок труб и на „левую“ и „правую“ части стенок кладки камеры.

3. Стенки кладки („левая“ и „правая“), в свою очередь, излучают тепло на стенки труб (первого и второго потоков).

4. При своем движении топочные газы, образующиеся от первого потока топлива, передают тепло первым потокам стенок труб и „левым“ стенкам кладки камеры свободной конвекцией.

5. Тепло, проходя через стенки труб, передается протекающему в них сырью.

6. При соприкосновении от экранированных стенок кладки к стенкам труб тепло передается также в результате теплопроводности.

7. Тепло теряется в окружающей среде: частью с топочными газами, уносимыми в дымовую трубу (или конвекционную камеру), а частью стенками кладки печи.

В работе приняты следующие обозначения:

$t$ —абсолютная температура, °K;  $q$ —низшая теплотворная способность топлива, ккал/кг;  $B$ —расход, кг/час;  $G$ —вес, кг;  $p$ —давление, кг/см<sup>2</sup>;

\* Стенки кладки камеры условно подразделяем на две части: „левую“ и „правую“. „Левая“ часть стенок кладки в основном получает тепло от первого (левого) потока топлива, а „правая“—от второго (правого).

$c$ —теплоемкость, ккал/кг·град;  $\alpha$ —приведенный коэффициент, ккал/час·град; индексы: и. з. г.—передача тепла излучением зеркала горения; и. г.—передача тепла излучением топочных газов; и. ст.—передача тепла излучением стенок кладки; к. г.—передача тепла конвекцией от топочных газов; к. тр.—передача тепла конвекцией от стенок труб; т. ст.—передача тепла теплопроводностью от стенок кладки; в. т.—выделенное тепло; т. т.—тепло, внесенное с топливом; в. н.—тепло, внесенное с нагретым воздухом; х. в.—тепло, внесенное с холодным воздухом; у. г.—уходящие топочные газы; пот.—потери; г.—топочные газы; т.—топливо; п.—пар; с.—сырье; о.—значение величины в установившемся режиме; 1 и 2—потоки; р.—радиантная камера.

При выводе уравнения динамики данного типа трубчатых печей (камер) использованы формулы из [1, 2, 3, 6,], которые приведены в работах [9, 10, 11].

Основные допущения. В работе было принято:

1. Форсунки потоков топлива расположены симметрично и делят камеры на две равные части.

2. Поверхности зеркала горения и объемы топочных газов, образующихся от отдельных потоков топлива, в установившемся режиме равны друг другу.

3. Температура топочных газов, образующихся от одного потока топлива, во всех точках половины (левой и правой) радиантной камеры одинаковы и равны\*:

$$t_r = \frac{t_{tr} - t_p}{2,3 \lg \frac{t_{tr}}{t_p}}, \quad (1)$$

где  $t_{tr}$ —теоретическая температура горения;

$t_p$ —температура топочных газов над перевальной стенкой.

4. Температура стенок труб (змеевика) и температура сырья вдоль трубы (змеевика) являются распределенными параметрами, но мы принимаем в качестве расчетного среднее логарифмическое значение их, которое определяем по формуле:

$$t = \frac{t_{вх} - t_{вых}}{2,3 \lg \frac{t_{вх}}{t_{вых}}}, \quad (2)$$

где  $t_{вх}$ ,  $t_{вых}$ —температура сырья (стенок труб) на входе и на выходе камеры.

5. Температуру наружного воздуха теплоемкости, приведенные коэффициенты лучеиспускания, теплопередачи, конвекцией и т. п. будем считать постоянными, и при расчетах принимать их значение на данном стационарном режиме.

6. Потери тепла от химической и механической неполноты горения и т. п. учитываем в % от полного продукта сгорания (по отдельным потокам топлива).

#### Уравнения динамики топочных газов

Опустив промежуточные операции\*\*, для топочных газов по одному потоку в окончательном виде получим следующие уравнения ди-

\* Если габаритные размеры камер невелики, то за температуру топочных газов можно принять температуру топочных газов над перевальной стенкой; тогда температуру зеркала горения выражаем через температуру топочных газов [9].

\*\* Промежуточные операции в окончательном виде получения уравнения динамики отдельных емкостей показаны в работах [9, 10, 11].



намики с учетом, что: расход топлива  $B^T$  является функцией давления до регулирующего клапана  $p^T$  и степени открытия регулирующего клапана  $m$ , т. е.

$$B^T = f(p^T, m); \quad (3)$$

степень открытия регулирующего клапана с линейной статической характеристикой пропорциональна расходу топлива:

$$\frac{\Delta m}{m_{\max}} = \frac{\Delta B^T}{B_{\max}^T} = \xi = \rho_T; \quad (4)$$

расход уходящих топочных газов

$$B^{y.T} = B^T + B^{B.H} + B^{X.B} + B^H, \quad (5)$$

тогда

$$T_{p.r.1} \dot{\psi}_{p1} + \psi_{p1} = a_{p11} \mu_{p1} + a_{p12} \mu_{p2} + a_{p13} \lambda_{p1} + a_{p14} \lambda_{p2} \pm f_{11}(\tau) \pm f_{12}(\tau); \quad (6)$$

где  $T_{p.r.1}$  — постоянная времени топочных газов по первому потоку топлива (сек)

$$T_{p.r.1} = \frac{G_{p.r.1} v_{p.r.1} t_{1 \max}^{p.r.}}{A_1};$$

$f_{11}(\tau)$  — возмущения со стороны топлива и воздуха по первому потоку топлива:

$$f_{11}(\tau) = a_{p15} \rho_{T1} + a_{p16} \beta_1 + a_{p17} i_1 - a_{p18} \rho_{B.H.1} - a_{p19} \rho_{X.B.1} + a_{p110} \delta_1 + a_{p111} z_1;$$

$f_{12}(\tau)$  — возмущения со стороны пара для распыливания жидкого топлива, по первому потоку топлива:

$$f_{12}(\tau) = -a_{p112} \rho_{n1} + a_{p113} a_{n1};$$

$a_{p1j}$  ( $j = 1, 2, \dots, 13$ ) — передаточные коэффициенты по первому потоку топлива:

$$a_{p11} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + \alpha_{к.г.1}^{p.тр.1}] t_{1 \max}^{p.тр.}}{A_1};$$

$$a_{p12} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.2} (t_2^{p.тр.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.2} (t_2^{p.тр.})^3] t_{2 \max}^{p.тр.}}{A_1};$$

$$a_{p13} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.ст.1} (t_1^{p.ст.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.ст.2} (t_2^{p.ст.})^3] t_{2 \max}^{p.ст.}}{A_1};$$

$$a_{p14} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.ст.2} (t_2^{p.ст.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.ст.2} (t_2^{p.ст.})^3] t_{2 \max}^{p.ст.}}{A_1};$$

$$a_{p15} = \frac{(\eta_1 q_1 + v_{T.1} t_1^T - v_{p.r.1} t_1^{p.r.}) B_{1 \max}^T}{A_1};$$

$$a_{p16} = \frac{(\eta_1 q_1 + v_{T.1} t_1^T) \left( \frac{\partial B_1^T}{\partial P_1^T} \right)_0 P_{1 \max}^T}{A_1};$$

$$a_{p17} = \frac{B_1^T \eta_1 q_{1 \max}}{A_1}; \quad a_{p18} = \frac{(v_{p.r.1} t_1^{p.r.} - v_{B.H.1} t_1^{B.H.}) B_{1 \max}^{B.H.}}{A_1};$$

$$a_{p19} = \frac{(v_{p.r.1} t_1^{p.r.} - v_{X.B.1} t_1^{X.B.}) B_{1 \max}^{X.B.}}{A_1}; \quad a_{p110} = \frac{B_1^T v_{T.1} t_{1 \max}^T}{A_1};$$

$$a_{p111} = \frac{B_1^{B.H.} v_{B.H.1} t_{1 \max}^{B.H.}}{A_1}; \quad a_{p112} = \frac{(v_{p.r.1} t_1^{p.r.} - v_{n.1} t_1^n) B_{1 \max}^n}{A_1};$$

$$a_{p113} = \frac{B_1^n v_{n1} t_{1 \max}^n}{A_1};$$

$$A_1 = [4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.r.})^3 + \alpha_{к.г.1}^{p.тр.1} + 4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.2} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.2} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.ст.1} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.ст.1} (t_1^{p.r.})^3 + \alpha_{к.г.1}^{p.ст.1} + 4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.ст.2} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.ст.2} (t_1^{p.r.})^3 + B_1^{y.T} v_{p.r.1}] t_{1 \max}^{p.r.}.$$

Аналогичным путем можно записать уравнение динамики топочных газов по второму потоку топлива, которое будет иметь вид

$$T_{p.r.2} \dot{\psi}_{p2} + \psi_{p2} = a_{p21} \mu_{p2} + a_{p22} \mu_{p1} + a_{p23} \lambda_{p2} + a_{p24} \lambda_{p1} \pm f_{21}(\tau) \pm f_{22}(\tau). \quad (7)$$

Здесь выражения  $T_{p.r.2}$ ,  $a_{p21}$ ,  $a_{p22}$ ,  $a_{p23}$ , ...,  $a_{p213}$  те же самые, что и в уравнении (6), и получаются при замене индекса 1 на индекс 2 и 2 на 1.

### Уравнение динамики стенок труб (змеевика)

Уравнение динамики стенок труб первого потока сырья имеет вид

$$T_{p.тр.1} \dot{\psi}_{p1} + \psi_{p1} = b_{p11} \psi_{p1} + b_{p12} \psi_{p2} + b_{p13} \lambda_{p1} + b_{p14} \lambda_{p2} + b_{p15} \varphi_{p1}, \quad (8)$$

где  $T_{p.тр.1}$  — постоянная времени стенок труб первого потока сырья (сек)

$$T_{p.тр.1} = \frac{G_{p.тр.1} v_{p.тр.1} t_{1 \max}^{p.тр.}}{B_1};$$

$b_{p1j}$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) — передаточные коэффициенты:

$$b_{p11} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.r.})^3 + \alpha_{к.г.1}^{p.тр.1}] t_{1 \max}^{p.r.}}{B_1};$$

$$b_{p12} = \frac{[4 \alpha_{и.з.г.2}^{p.тр.1} (t_2^{p.r.})^3 + 4 \alpha_{и.г.2}^{p.тр.1} (t_2^{p.r.})^3] t_{2 \max}^{p.r.}}{B_1};$$

$$b_{p13} = \frac{[4 \alpha_{и.ст.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.ст.})^3 + \alpha_{т.ст.1}^{p.тр.1}] t_{1 \max}^{p.ст.}}{B_1};$$

$$b_{p14} = \frac{4 \alpha_{и.ст.2}^{p.тр.1} (t_2^{p.ст.})^3 t_{2 \max}^{p.ст.}}{B_1}; \quad b_{p15} = \frac{c_{к.тр.1}^{p.c.1} t_{1 \max}^{p.c.}}{B_1};$$

$$B_1 = [4 \alpha_{и.з.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + 4 \alpha_{и.г.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + \alpha_{к.г.1}^{p.тр.1} + 4 \alpha_{и.з.г.2}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + 4 \alpha_{и.г.2}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + 4 \alpha_{и.ст.1}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + \alpha_{т.ст.1}^{p.тр.1} + 4 \alpha_{и.ст.2}^{p.тр.1} (t_1^{p.тр.})^3 + \alpha_{к.тр.1}^{p.c.1}] t_{1 \max}^{p.тр.}.$$

Аналогичным путем запишем уравнение динамики для стенок труб второго потока сырья (путем замены индекса 1 и на 2 и 2 на 1):

$$T_{p.тр.2} \dot{\psi}_{p2} + \psi_{p2} = b_{p21} \psi_{p2} + b_{p22} \psi_{p1} + b_{p23} \lambda_{p2} + b_{p24} \lambda_{p1} + b_{p25} \varphi_{p2}. \quad (9)$$

### Уравнение динамики стенок кладки

Для „левой“ стенки кладки в окончательном виде получается следующее уравнение динамики:

$$T_{p.ст.1} \dot{\lambda}_{p1} + \lambda_{p1} = c_{p11} \psi_{p1} + c_{p12} \psi_{p2} + c_{p13} \mu_{p1} + c_{p14} \mu_{p2} + c_{p15} \lambda_{p2}, \quad (10)$$

где  $T_{p.ст.1}$  — постоянная времени „левой“ стенки кладки (сек),

$$T_{p.ст.1} = \frac{G_{p.ст.1} v_{p.ст.1} t_{1 \max}^{p.ст.}}{C_1};$$



$c_{pij}$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) — передаточные коэффициенты:

$$c_{pi1} = \frac{[4\alpha_{и.з.г.1}^{р.ст.1} (t_1^{р.г})^3 + 4\alpha_{и.г.1}^{р.ст.1} (t_1^{р.г})^3 + \alpha_{к.г.1}^{р.ст.1}] t_{1\max}^{р.г}}{C_1};$$

$$c_{pi2} = \frac{[4\alpha_{и.з.г.2}^{р.ст.1} (t_2^{р.г})^3 + 4\alpha_{и.г.2}^{р.ст.1} (t_2^{р.г})^3] t_{2\max}^{р.г}}{C_1};$$

$$c_{pi3} = \frac{[4\alpha_{и.ст.1}^{р.тр.1} (t_1^{р.тр})^3 + \alpha_{т.ст.1}^{р.тр.1}] t_{1\max}^{р.тр}}{C_1};$$

$$c_{pi4} = \frac{4\alpha_{и.ст.1}^{р.тр.2} (t_2^{р.тр})^3 t_{2\max}^{р.тр}}{C_1}; \quad c_{pi5} = \frac{4\alpha_{и.ст.1}^{р.ст.2} (t_2^{р.ст})^3 t_{2\max}^{р.ст}}{C_1};$$

$$C_1 = [4\alpha_{и.з.г.1}^{р.ст.1} (t_1^{р.ст})^3 + 4\alpha_{и.г.1}^{р.ст.1} (t_1^{р.ст})^3 + \alpha_{к.г.1}^{р.ст.1} + 4\alpha_{и.з.г.2}^{р.ст.1} (t_1^{р.ст})^3 + 4\alpha_{и.г.2}^{р.ст.1} (t_1^{р.ст})^3 + 4\alpha_{и.ст.1}^{р.тр.1} (t_1^{р.ст})^3 + \alpha_{т.ст.1}^{р.тр.1} + 4\alpha_{и.ст.1}^{р.тр.2} (t_1^{р.ст})^3 + 4\alpha_{и.ст.1}^{р.ст.2} (t_1^{р.ст})^3 + \alpha_{пот.1}^{р.ст.2}] t_{1\max}^{р.ст}.$$

Аналогичным путем запишется уравнение динамики и для „правой“ стенки кладки, путем замены индекса 1 на индекс 2 и 2 на 1:

$$T_{р.ст.2} \dot{\lambda}_{p2} + \lambda_{p2} = c_{p21} \psi_{p2} + c_{p22} \psi_{p1} + c_{p23} \mu_{p2} + c_{p24} \mu_{p1} + c_{p25} \lambda_{p1}. \quad (11)$$

#### Уравнения динамики сырья в трубах (в змеевике)

Когда оба потока сырья подаются одним насосом (рис. 1) и змеевик первого потока тождествен змеевику второго, и температура сырья в них одинаковая, то расход сырья в обоих потоках будет одинаков. Но если температура сырья в потоках неодинакова, то в зависимости от температуры сырья в одном из потоков за счет другого потока расход сырья увеличится или уменьшится на количество  $B^c$ .

Увеличение или уменьшение расхода сырья в первом (втором) потоке в основном зависит от температуры сырья второго (первого) потока. Расход сырья первого (второго) потока есть функция от общего расхода  $B_{общ}^c$  и от температуры сырья второго потока  $t_2^c$  (первого потока  $t_1^c$ ):

$$B_j^c = f(B_{общ.}^c, t_i^c), \quad (12)$$

где  $j = 1, 2$ ,  $i = 2, 1$ .

Разлагая  $B_j^c$  в ряд Тейлора относительно малых приращений переменных и пренебрегая членами выше первого порядка, получим

$$\begin{aligned} \Delta B_j^c &= \left( \frac{\partial B_j^c}{\partial B_{общ.}^c} \right)_0 \Delta B_{общ.}^c + \left( \frac{\partial B_j^c}{\partial t_i^c} \right)_0 \Delta t_i^c = \\ &= \frac{B_{j\max}^c}{B_{общ. \max}^c} \Delta B_{общ.}^c + \left( \frac{\partial B_j^c}{\partial t_i^c} \right)_0 \Delta t_i^c. \end{aligned} \quad (13)$$

На неравномерное нагревание потоков наряду с возмущающим фактором также влияют расположение и число форсунок, конструкция печей, длина змеевика и т. п. Если трубчатая печь чисто нагревательная, то увеличение температуры сырья в одном из потоков уменьшает вязкость и удельный вес сырья данного потока, поэтому расход сырья в данном потоке увеличится, а в другом уменьшится, так как общий расход равен сумме расходов отдельных потоков. По одному потоку.

$$B_{вых.с} = B_{вх.с} \pm B^c = B_{1,2}^c. \quad (14)$$

Если трубчатая печь нагревательная с частичным испарением, то с повышением температуры сырья в одном из потоков за счет испарения в змеевике данного потока образуется „паровая пробка“, которая уменьшает количество сырья, проходящего через данное сечение. В этом случае расход сырья в другом потоке увеличится [8,11]. С учетом вышеизложенного уравнение динамики первого потока сырья будет иметь вид

$$T_{р.с.1} \dot{\varphi}_{p1} + \varphi_{p1} = d_{p11} \mu_{p1} \pm f_{31}(\tau) + d_{p14} \varphi_{p2}, \quad (15)$$

где  $T_{р.с.1}$  — постоянная времени первого потока сырья (сек),

$$T_{р.с.1} = \frac{G_{р.с.1} v_{р.с.1} t_{1\max}^{р.с.}}{D_1};$$

$f_{31}(\tau)$  — возмущения со стороны сырья первого потока\*:

$$f_{31}(\tau) = d_{p12} \varphi_{р.вх.с.1} - d_{p13} \varphi_{вх.с.1};$$

$d_{pij}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — передаточные коэффициенты:

$$d_{p11} = \frac{\alpha_{к.тр.1}^{р.с.1} t_{1\max}^{р.тр}}{D_1}; \quad d_{p12} = \frac{B_1^c v_{р.вх.1} t_{1\max}^{р.вх.с.}}{D_1};$$

$$d_{p13} = \frac{(v_{р.с.1} t_1^{р.с.} - v_{р.вх.с.1} t_1^{р.вх.с.}) B_{1\max}^c}{D_1};$$

$$d_{p14} = \frac{(v_{р.с.1} t_1^{р.с.} - v_{р.вх.с.1} t_1^{р.вх.с.}) \left( \frac{\partial B_1^c}{\partial t_2^c} \right)_0 t_{2\max}^{р.с.}}{D_1};$$

$$D_1 = (\alpha_{к.тр.1}^{р.с.1} + B_1^c v_{р.с.1}) t_{1\max}^{р.с.}.$$

Характерной особенностью уравнения (15) является наличие в нем члена взаимовлияния  $d_{p14} \varphi_{p2}$ . Если каждый поток сырья подается отдельным насосом (рис. 1), то в уравнении (15)  $d_{p14} = 0$  и уравнение динамики первого потока сырья примет вид\*\*)

$$T_{р.с.1} \dot{\varphi}_{p1} + \varphi_{p1} = d_{p11} \mu_{p1} \pm f_{31}(\tau). \quad (16)$$

Аналогичным образом можно записать уравнение динамики для второго потока сырья для обоих случаев:

$$T_{р.с.2} \dot{\varphi}_{p2} + \varphi_{p2} = d_{p21} \mu_{p2} \pm f_{32}(\tau) + d_{p24} \varphi_{p1}, \quad (17)$$

$$T_{р.с.2} \dot{\varphi}_{p2} + \varphi_{p2} = d_{p21} \mu_{p2} \pm f_{32}(\tau). \quad (18)$$

Здесь выражения  $T_{р.с.2}$ ,  $d_{p21}$ ,  $d_{p24}$  и  $f_{32}(\tau)$  те же, что и в уравнении (15) и получаются, соответственно, при замене индекса 1 на индекс 2 и 2 на 1. Для конкретных объектов и режимов некоторые из составляющих в уравнениях динамики отдельные емкости могут быть равны нулю. Например, если „левая“ стенка кладки получает тепло от „правой“, то она сама не сможет передать тепло. В этом случае в уравнении динамики  $c_{p25} = 0$ ; если нет соприкосновения между экранированными стенками кладки и стенками труб, то в уравнениях теплового баланса стенок труб и теплового баланса стенок кладки член, учитывающий это соприкосновение, нужно принять равным нулю и т. п.

\* Если змеевик первого потока тождествен змеевику второго потока и температура сырья в них одинакова, то  $B_1^c = B_2^c = 0.5 B_{общ.}^c$ .

\*\* В этом случае  $B_{1\max}^{вх.с} = B_{1\max}^{вх.с} = B_1^c$ , а в первом случае  $B_{1\max}^{вх.с} = B_1^c = B_{1\max}^{вх.с} \pm B^c$ .



# **Уравнения динамики нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подаётся двумя потоками**

Для получения уравнения динамики объекта в целом уравнения динамики отдельных емкостей нужно решать относительно интересующих переменных. Для уравнения динамики отдельных емкостей\*, применяя преобразование Лапласа относительно времени при нулевом начальном условии [4], получим:

$$\left. \begin{aligned} (T_{p.r.1}p + 1) \psi_{p1}(p) - a_{p11} \mu_{p1}(p) - a_{p12} \mu_{p2}(p) - a_{p13} \lambda_{p1}(p) - \\ - d_{p14} \lambda_{p2}(p) = \pm f_{11}(p) \pm f_{12}(p), \\ (T_{p.r.2}p + 1) \psi_{p2}(p) - a_{p21} \mu_{p1}(p) - a_{p22} \mu_{p2}(p) - a_{p23} \lambda_{p2}(p) - \\ - d_{p24} \lambda_{p1}(p) = \pm f_{21}(p) \pm f_{22}(p), \\ (T_{p.tr.1}p + 1) \mu_{p1}(p) - b_{p11} \psi_{p1}(p) - b_{p12} \psi_{p2}(p) - b_{p13} \lambda_{p1}(p) - \\ - b_{p14} \lambda_{p2}(p) - b_{p15} \varphi_{p1}(p) = 0, \\ (T_{p.tr.2}p + 1) \mu_{p2}(p) - b_{p21} \psi_{p1}(p) - b_{p22} \psi_{p2}(p) - b_{p23} \lambda_{p2}(p) - \\ - b_{p24} \lambda_{p1}(p) - b_{p25} \varphi_{p2}(p) = 0, \\ (T_{p.ct.1}p + 1) \lambda_{p1}(p) - c_{p11} \psi_{p1}(p) - c_{p12} \psi_{p2}(p) - c_{p13} \mu_{p1}(p) - \\ - c_{p14} \mu_{p2}(p) - c_{p15} \lambda_{p2}(p) = 0, \\ (T_{p.ct.2}p + 1) \lambda_{p2}(p) - c_{p21} \psi_{p1}(p) - c_{p22} \psi_{p2}(p) - c_{p23} \mu_{p2}(p) - \\ - c_{p24} \mu_{p1}(p) - c_{p25} \lambda_{p1}(p) = 0, \\ (T_{p.c.1}p + 1) \varphi_{p1}(p) - d_{p11} \mu_{p1}(p) - d_{p14} \varphi_{p2}(p) = \pm f_{31}(p), \\ (T_{p.c.2}p + 1) \varphi_{p2}(p) - d_{p21} \mu_{p2}(p) - d_{p24} \varphi_{p1}(p) = \pm f_{32}(p), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $\psi_{p1}(p)$ ,  $\psi_{p2}(p)$ ,  $\mu_{p1}(p)$ ,  $\mu_{p2}(p)$ ,  $\lambda_{p1}(p)$ ,  $\lambda_{p2}(p)$ ,  $\varphi_{p1}(p)$ ,  $\varphi_{p2}(p)$ ,  $f_{11}(p)$ ,  $f_{12}(p)$ ,  $f_{21}(p)$ ,  $f_{22}(p)$ ,  $f_{31}(p)$  и  $f_{32}(p)$  — лапласовые преобразования функций  $\psi_{p1}$ ,  $\psi_{p2}$ ,  $\mu_{p1}$ ,  $\mu_{p2}$ ,  $\lambda_{p1}$ ,  $\lambda_{p2}$ ,  $f_{11}(\tau)$ ,  $f_{21}(\tau)$ ,  $f_{22}(\tau)$ ,  $f_{31}(\tau)$  и  $f_{32}(\tau)$ .

Система (19) есть система линейных алгебраических уравнений, число неизвестных которых равно числу уравнений. Следовательно, мы можем воспользоваться методом Крамера [5] для ее решения, так как  $D_p(p) \neq 0$ . Тогда получим:

$$\varphi_{p1}(p) = \frac{D_{p11}(p)}{D_p(p)}; \quad \varphi_{p2}(p) = \frac{D_{p12}(p)}{D_p(p)}; \quad \psi_{p1}(p) = \frac{D_{p21}(p)}{D_p(p)}; \\ \psi_{p2}(p) = \frac{D_{p22}(p)}{D_p(p)}, \dots, \quad (20)$$

где  $D_p(p)$  представляет собой главный определитель системы уравнений (19):

$$D_p(p) = \begin{vmatrix} T_{p.r.1}p + 1 & -a_{p11} & -a_{p12} & -a_{p13} & 0 \\ 0 & -a_{p22} & -a_{p21} & -a_{p24} & 0 \\ -b_{p11} & T_{p.tr.1}p + 1 & 0 & -b_{p13} & -b_{p14} \\ -b_{p22} & 0 & T_{p.tr.2}p + 1 & -b_{p24} & -b_{p23} \\ -c_{p11} & -c_{p13} & -c_{p14} & T_{p.ct.1}p + 1 & -c_{p15} \\ -c_{p22} & -c_{p24} & -c_{p23} & 0 & T_{p.ct.2}p + 1 \\ 0 & -d_{p11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_{p21} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

\* Здесь рассматривается случай, когда оба потока сырья подаются одним насосом.

$$\begin{vmatrix} -a_{p14} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{p23} & T_{p.r.2}p + 1 & 0 & 0 \\ -b_{p14} & -b_{p12} & -b_{p15} & 0 \\ -b_{p23} & -b_{p21} & 0 & -b_{p25} \\ -c_{p15} & -c_{p12} & 0 & 0 \\ T_{p.ct.2}p + 1 & -c_{p21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{p.c.1}p + 1 & -d_{p14} \\ 0 & 0 & -d_{p24} & T_{p.c.2}p + 1 \end{vmatrix} \quad (21)$$

$D_{p11}(p)$ ;  $D_{p12}(p)$ ;  $D_{p21}(p)$ ;  $D_{p22}(p)$ ; ... — определители, получающиеся из  $D_p(p)$ , соответственно, путем замены столбца  $\varphi_{p1}(p)$ ;  $\varphi_{p2}(p)$ ;  $\psi_{p1}(p)$ ;  $\psi_{p2}(p)$  ... столбцом, составленным из выражений членов правых частей уравнений.

Теперь определим передаточные функции по каналу возмущения "расход топлива первого потока — выходная температура сырья первого потока", т. е. при  $\varphi_{p1}(\tau) = F[\varphi_{p1}(\tau)]$ . В этом случае принимаем, что  $\varphi_{p2} = \beta_1 = \beta_2 = i_1 = i_2 = \rho_{вн.1} = \rho_{вн.2} = \rho_{х.в.1} = \rho_{х.в.2} = \delta_1 = \delta_2 = z_1 = z_2 = \varphi_{р.вх.с.1} = \varphi_{р.вх.с.2} = \rho_{вх.с.1} = \rho_{вх.с.2} = 0$ . Тогда, исключая из системы уравнений (21) переменные  $\psi_{p1}(p)$ ;  $\psi_{p2}(p)$ ;  $\mu_{p1}(p)$ ;  $\mu_{p2}(p)$ ;  $\varphi_{p2}(p)$ ;  $\lambda_{p1}(p)$  и  $\lambda_{p2}(p)$ , будем иметь

$$D_p(p) \cdot \varphi_{p1}(p) = \pm M_{p11}(p) \cdot a_{p15} \rho_{p1}(p), \quad (22)$$

где  $M_{p11}(p)$  — минор главного определителя  $D_p(p)$ , получающийся при вычерчивании столбца, который относится к переменной  $\varphi_{p1}(p)$  и строка, которая соответствует в (19) уравнению с правой частью  $\rho_{p1}(p)$  [ $f_{11}(p)$ ].

С учетом запаздывания для передаточной функции по рассматриваемому каналу возмущения получим следующие выражения:

$$W_{\rho_{p1}}^{\varphi_{p1}}(p) = \pm \frac{\varphi_{p1}(p)}{\rho_{p1}(p)} e^{-p\tau} = \pm a_{p15} \frac{M_{11}(p)}{D_p(p)} e^{-p\tau}. \quad (23)$$

Аналогично можно записать передаточные функции по другим каналам возмущения. Если рассматриваемая двухпоточная трубчатая печь является полной симметричной как стороны подачи топлива, так и со стороны сырья, тогда имеем:

$$W_{i_{11}}^{\varphi_{p1}}(p) = W_{i_{21}}^{\varphi_{p2}}(p); \quad W_{i_{21}}^{\varphi_{p1}}(p) = W_{i_{11}}^{\varphi_{p2}}(p); \quad W_{i_{31}}^{\varphi_{p1}}(p) = W_{i_{32}}^{\varphi_{p2}}(p); \\ W_{i_{32}}^{\varphi_{p1}}(p) = W_{i_{31}}^{\varphi_{p2}}(p); \\ W_{i_{11}}^{\psi_{p1}}(p) = W_{i_{21}}^{\psi_{p2}}(p); \quad W_{i_{21}}^{\psi_{p1}}(p) = W_{i_{11}}^{\psi_{p2}}(p); \quad W_{i_{31}}^{\psi_{p1}}(p) = W_{i_{32}}^{\psi_{p2}}(p); \\ W_{i_{32}}^{\psi_{p1}}(p) = W_{i_{31}}^{\psi_{p2}}(p) \text{ и т. п.}$$

Такой же последовательностью можно определить передаточные функции в случае, когда каждый поток сырья подается отдельным насосом. На рис. 2 представлена структурная схема двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками с учетом выведенных уравнений динамики для отдельных емкостей.

## **Выводы**

1. Форма и размеры радиантной камеры значительно влияют на уравнение динамики отдельных емкостей радиантной камеры, а также на уравнение динамики трубчатой печи в целом.



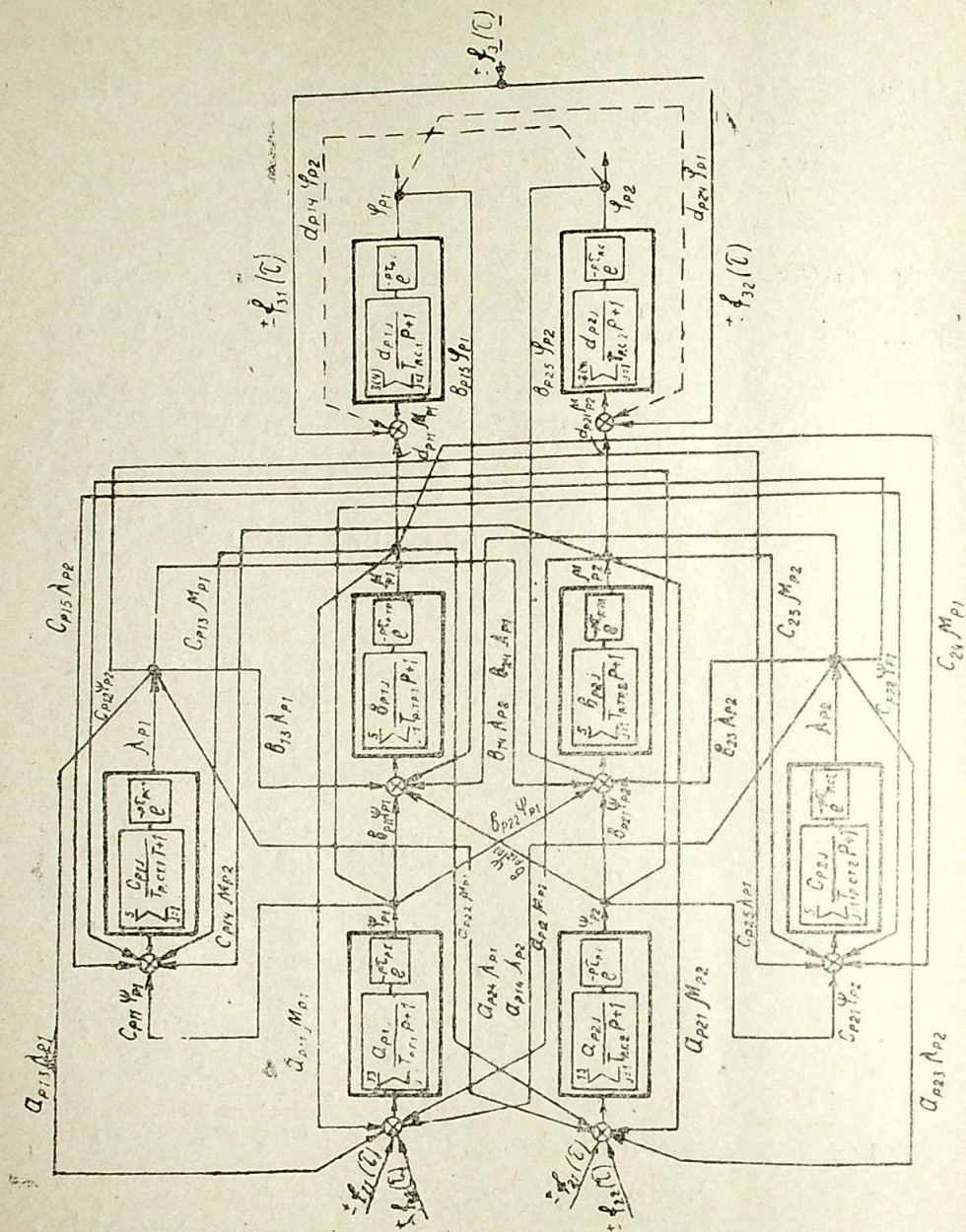


Рис. 2. Структурная схема двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками. Пунктирная линия показывает случай когда оба потока сырья подаются одним насосом.

2. Уравнение динамики отдельных емкостей радиантных камер является уравнением первого порядка и в общем виде может быть представлено так:

$$(T_j(p+1)x_{\text{вых}} = \sum_{i=1}^n K_i x_{\text{вх},i},$$

где  $x_{\text{вх}}$ ,  $x_{\text{вых}}$  — входные и выходные параметры;  $T_j$  — постоянные времени;

$K_i$  — передаточные коэффициенты.

3. Постоянная времени „топочных газов“ в радиантной камере  $T_{\text{р.г}}$  меньше по сравнению с постоянными времени  $T_{\text{р.тр}}$ ,  $T_{\text{р.ст}}$  и  $T_{\text{р.с}}$ . При пренебрежении  $T_{\text{р.г}}$ , т. е. при  $T_{\text{р.г}} \approx 0$ , „топочные газы“ будут являться безынерционными (беземкостными) звеньями.

4. В двухпоточной радиантной камере, когда топливо подается двумя потоками и оба потока сырья подаются одним насосом, в выражениях передаточных функций по всем каналам возмущения, кроме канала „сырье — выходная температура сырья (первого или второго потока)“, получают члены, учитывающие взаимовлияние между потоками —  $d_{\text{р14}} \varphi_{\text{р2}}$  и  $d_{\text{р24}} \varphi_{\text{р1}}$ .

5. Передаточные функции радиантных камер по отдельным каналам возмущения для общего случая могут быть представлены в виде

$$W(p) = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n} e^{-p\tau}, \text{ где } n > m.$$

6. Запоздывание в емкости „стенок кладки“ меньше, чем в других емкостях, поэтому им можно пренебречь и „стенки кладки“ принять как емкость, без запоздывания.

В факельных трубчатых печах большая часть запоздывания в емкости „стенок труб“, при изменении количества топлива, приходится на долю тепла, получаемого излучением от стенок кладки, так как запоздывание этого потока тепла по сравнению с запоздыванием тепла, передаваемого непосредственно от факела и топочных газов, значительно больше.

7. В радиантных камерах трубчатых печей непосредственная передача тепла от факела и от топочных газов происходит за меньшее время, чем время пребывания сырья в змеевике радиантной камеры. Поэтому при неучете влияния потока тепла от стенок кладки время переходного процесса по каналу возмущения „топливо (воздух или пар) — выходная температура сырья“ приблизительно было бы равно времени пребывания сырья в радиантной камере.

8. Уравнения динамики, выведенные для радиантных камер факельных трубчатых печей, могут быть использованы для радиантных камер трубчатых печей с излучающими стенками кладки. Однако при этом в выражениях передаточных коэффициентов и уравнениях динамики отдельных емкостей нужно принять.

$$\alpha_{\text{н.з.г}}^{\text{р.тр}} = \alpha_{\text{н.з.г}}^{\text{р.ст}} = \alpha_{\text{т.ст}}^{\text{р.тр}} = \alpha_n = 0.$$

Время переходного процесса по соответствующим каналам возмущения в радиантных камерах факельных трубчатых печей больше, чем в радиантных камерах трубчатых печей с излучающими стенками кладки, так как в факельных трубчатых печах влияние тепла от стенок кладки сказывается несколько позднее, чем при непосредственной передаче тепла.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Адельсон С. Б. Технологический расчет и конструктивное оформление нефтяных печей. Гостехиздат, 1952.
2. Быков М. И., Федоров В. С. Трубчатые печи. ОНТИ—НКПТ СССР, Грозный—М., 1935.
3. Волох С. М. Теоретические основы расчета трубчатых печей. Изд. АзНИИ им. М. А. Азизбекова, 1940.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. ГИФМЛ, М., 1958.
5. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. Учпедгиз, 1958.
6. Эмирджанов Р. Т. Основы расчета нефтяных процессов и аппаратов. Азербайджан, 1956.
7. Топчибашев М. А., Хасмамедов Ф. И. „Ж. ЗПТ“, № 12, 1961.
8. Хасмамедов Ф. И. „Ж. ЗПТ“, № 11, 1961.
9. Хасмамедов Ф. И. „Ж. ЗПТ“, № 1, 1962.
10. Хасмамедов Ф. И. „Ж. ТТУ“, № 5, 1962.
11. Хасмамедов Ф. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 5, 1962.

Ф. И. Хасмамедов

### Јаначаг ики ахынла верилэн икиахынлы гыздырычы радиант типли борулу собаларын (радиант камерлэрин) динамик тэнликлэри

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә мұәллиф тәрәфиндән тәклиф едилән метода көрә, јана-чаг ики ахынла верилән икиахынлы гыздырычы радиант типли борулу собаларын (радиант камерлэрин), һәр ики хаммал ахыны бир насосла вә һәр хаммал ахыны ајры-ајры насосла верилән һаллар үчүн динамик тәнликләр мұәјјән едилмишдир. Бу нөв борулу собалар (камерләр) 8 тутумлу гәбул олунмуш вә истилик балансына әсасән, һәр тутумун динамик тәнлији мұәјјән олунмушдур. Сонра исә тутумларын динамик тәнликлэринә әсасән бу нөв борулу собалар (камерләр) үчүн структур схем гурулмушдур.

Мәгаләнин сонунда ајры-ајры каналлар үзрә өтүрмә функцијаларынын мұәјјән едилмәси вә алынән нәтичәләр верилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1966, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 6

В. С. СЕМЕНОВ, Р. И. КРИМАН

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО ИСПАРИТЕЛЬНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРО-ПОРШНЕВОЙ ГРУППЫ ДВИГАТЕЛЯ 4DV-224

В дизельной лаборатории Одесского института инженеров морского флота проводились исследования влияния впрыска воды в цилиндры двигателя на индикаторные и эффективные показатели, а также на динамическую и тепловую напряженность дизеля 4 DV-224. Подача воды в цилиндр осуществлялась распылом тонких слоев воды, захватываемых воздушным потоком при ходе всасывания с двухкаскадных козырьков, установленных во всасывающем патрубке цилиндра [1].

Тепловая нагрузка деталей цилиндро-поршневой группы оценивалась по абсолютному изменению температур стенок, крышки и втулки, замеренных с помощью девяти медь-константановых термпар. Этим способом удается определять температуры отдельных точек деталей, в связи с чем было проведено полное исследование температурного состояния цилиндро-поршневой группы методом электротепловой аналогии (методом ЭТА). Важным этапом моделирования является правильное задание граничных условий, методика составления которых изложена ниже.

В общем случае элементарный пояс втулки высотой  $dh$  за один рабочий цикл подвергается воздействию:

- а) сжатого воздушного заряда—на такте сжатия и продуктов сгорания—на такте горения—расширения;
- б) продуктов сгорания, дросселирующих через зону компрессионных колец и зазор между втулкой и тронком поршня;
- в) продувочного (или картерного) воздуха со стороны подпоршневой полости.

Пусть  $\varphi_r$ —угол поворота коленчатого вала, соответствующий периоду теплообмена элементарного пояса с газами надпоршневого пространства (период, когда кромка поршня находится ниже элементарного пояса);  $\varphi_n$ —угол поворота коленчатого вала, соответствующий времени теплообмена с продуктами сгорания, дросселирующими из надпоршневого пространства в подпоршневое (период, когда кромка поршня находится выше элементарного пояса);  $\varphi_b$ —то же для периода взаимодействия со средой со стороны подпоршневой полости (период, когда нижняя кромка тронка поршня находится выше элементарного пояса).

Величины  $\varphi_r$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_b$  для каждого элементарного пояса, открываемого верхней кромкой поршня при угле поворота  $\varphi$ , могут быть



найден путем построения бицентральной диаграммы. Если длина поршня больше его хода, то, очевидно, ни один элементарный пояс в пределах хода поршня не открывается нижней кромкой тронка и  $\varphi_B = 0$ . Тогда надобность в бицентральной диаграмме отпадает и  $\varphi_n$  определяется из равенства  $\varphi_n = 2\varphi$ .

Средний коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{г.т}$  для элементарного пояса втулки четырехтактного двигателя в общем случае определяется из уравнения

$$\alpha_{г.т} = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} \alpha_{г.т} d\varphi + \int_{2\pi+\varphi}^{4\pi-\varphi} \alpha_{г.т} d\varphi + \int_{\varphi-0,5\varphi_n}^{\varphi} \alpha_n d\varphi + \int_{2\pi-\varphi+0,5\varphi_n}^{2\pi-\varphi} \alpha_n d\varphi + \int_{2\pi+\varphi-0,5\varphi_n}^{2\pi+\varphi} \alpha_n d\varphi + \int_{4\pi-\varphi+0,5\varphi_n}^{4\pi-\varphi} \alpha_n d\varphi + \int_{0,5\varphi_B}^{\varphi} \alpha_B d\varphi + \int_{2\pi-\varphi+0,5\varphi_B}^{2\pi-\varphi} \alpha_B d\varphi + \int_{2\pi+\varphi-0,5\varphi_B}^{2\pi+\varphi} \alpha_B d\varphi + \int_{4\pi-\varphi+0,5\varphi_B}^{4\pi-\varphi} \alpha_B d\varphi \right], \quad (1)$$

где  $\alpha_{г.т}$  — мгновенный коэффициент теплоотдачи от газа к стенке надпоршневого пространства;

$\alpha_n$  — то же от газа, дросселирующего в зазоре между поршнем и втулкой к поверхности втулки,

$\alpha_B$  — то же от продувочного (или картерного) воздуха к стенке.

Давление, температура и, следовательно, скорость движения газа, протекающего из надпоршневой полости в картер, непрерывно изменяются по углу поворота коленчатого вала. Однако для цикла в целом процесс дросселирования газа в картер можно в первом приближении рассматривать как квазистационарный. Начальные параметры истечения:

среднее давление газа в цилиндре за цикл

$$p_t = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} p_{г.т} d\varphi;$$

средняя температура газа в цилиндре за цикл

$$T_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} T_{г.т} d\varphi.$$

Из конечных параметров истечения известно только давление  $p_2$ , равное давлению в подпоршневой полости или картере.

Процесс дросселирования газа, особенно в зоне поршневых колец, аналогичен течению газа через лабиринтовое уплотнение, для которого теоретически справедливо условие постоянства теплосодержания —  $i = \text{const}$ . Для воздуха и газов это условие практически равносильно условию  $T = \text{const}$ , т. е. в каждой из закольцевых камер благодаря торможению потока температура восстанавливается и достигает  $T_m$ . В действительности как в щелях, так и в камерах за кольцами имеет место теплообмен дросселирующего газа со стенками поршня и втулки и газ охлаждается. Экспериментально и теоретически [2] установлено, что в процессе течения газа между поршнем и втулкой газ достигает температуры, близкой к температуре поршня в данной точке и поэтому для реального процесса условие  $i = \text{const}$  несправедливо. Параметры газа в зазоре изменяются политропически.

Принимая в первом приближении среднее давление протекающего газа в зазоре (кольцевая зона, тронк поршня) равным

$$p_{г.п} = 0,5 (p_t + p_r),$$

среднюю температуру газа в зазоре за цикл найдем из условия политропического изменения параметров состояния:

$$T_{г.п} = \frac{T_m}{\left( \frac{p_t}{p_{г.п}} \right)^{\frac{n-1}{n}}},$$

где  $n = 1,23 \div 1,27$ . Средняя скорость движения газа в зазоре между поршнем и втулкой может быть определена по величине утечки рабочего тела. По опытным данным утечка заряда составляет 3% для новых двигателей и до 7% для старых [3]. При этом

$$W_{ср} = \frac{0,03}{3600} \frac{28,9}{\gamma_{ум}} \frac{\beta \cdot Z_0 G_{ч}}{\delta_{ср} \pi D_{ц}},$$

где  $\beta$  — коэффициент избытка воздуха при сгорании;

$Z_0$  — теоретически необходимое количество воздуха для сгорания 1 кг топлива;

$G_{ч}$  — часовой расход топлива на цилиндр (кг/час);

$\delta_{ср}$  — диаметральный зазор между втулкой и поршнем (м);

$D_{ц}$  — диаметр цилиндра (м);

$\gamma_{ум}$  — удельный вес дросселирующего газа при средних параметрах  $p_{г.п}$ ,  $T_{г.п}$  в соответствии с уравнением состояния.

Если расчетное  $W_{ср}$  меньше средней скорости поршня  $C_{г.т}$ , то принимается последняя.

Расчеты показывают, что средние значения критерия  $Re < 3200$  для движения газа в зазоре между поршнем и втулкой, а поэтому для определения  $\alpha_n$  можно воспользоваться формулой

$$\alpha_n = D \frac{(\gamma_{ум} \cdot W_{ср})^{0,2}}{t_{ср}^{0,5}} \Delta t^{0,1},$$

где  $\Delta t = T_{г.п} - T_{ст}$  — разность средней температуры газа в зазоре и температуры стенки цилиндра;

$D$  — постоянная, зависящая от температуры текущей среды.

Соответствующая рассматриваемому элементарному поясу результирующая по теплоотдаче температура определится по формуле

$$T_{г.рез} = \frac{1}{\alpha_{г.т} 4\pi} \left[ \int_{\varphi}^{2\pi-\varphi} \alpha_{г.т} T_{г.т} d\varphi + \int_{2\pi+\varphi}^{4\pi-\varphi} \alpha_{г.т} T_{г.т} d\varphi + \int_{\varphi-0,5\varphi_n}^{\varphi} \alpha_n T_n d\varphi + \int_{2\pi-\varphi+0,5\varphi_n}^{2\pi-\varphi} \alpha_n T_n d\varphi + \int_{2\pi+\varphi-0,5\varphi_n}^{2\pi+\varphi} \alpha_n T_n d\varphi + \int_{4\pi-\varphi+0,5\varphi_n}^{4\pi-\varphi} \alpha_n T_n d\varphi + \int_{0,5\varphi_B}^{\varphi} \alpha_B T_B d\varphi + \int_{2\pi-\varphi+0,5\varphi_B}^{2\pi-\varphi} \alpha_B T_B d\varphi + \int_{2\pi+\varphi-0,5\varphi_B}^{2\pi+\varphi} \alpha_B T_B d\varphi + \int_{4\pi-\varphi+0,5\varphi_B}^{4\pi-\varphi} \alpha_B T_B d\varphi \right]. \quad (2)$$

Мгновенные значения коэффициента теплоотдачи определяются по эмпирическим формулам; в данном случае нами использовалась известная формула Эйхельберга. Расчеты по формулам (1) и (2) могут быть произведены приемами приближенного интегрирования и сведены в таблицу-форму, что облегчает и систематизирует расчет.

Определив  $\alpha_{г.т}$  и  $T_{г.рез}$  для тринадцати элементарных поясов (изменение  $\varphi$  через  $15^\circ$ ), по точкам производится построение кривых  $\alpha_{г.т}$  и  $T_{г.рез}$  по высоте втулки. Применительно к двигателю 4 DV-224 эти кривые показаны на рис. 1 (режим  $p_t = 6,3$  кг/см<sup>2</sup>,  $Ne = 96,5$  л.с.,  $Ne = 1,1 Ne$  ном). Граничные условия со стороны охлаждающей воды



рассчитываются по известным формулам теплоотдачи жидкости при движении ее в кольцевом канале. Следует лишь обращать внимание на диапазон применимости формул по значению  $Re$ . Огневая поверхность днища поршня и крышки находится под воздействием газов полный цикл. Кривые  $\alpha_r = f(\varphi)$ ;  $\sigma_r T_r = f(\varphi)$  для крышки и поршня

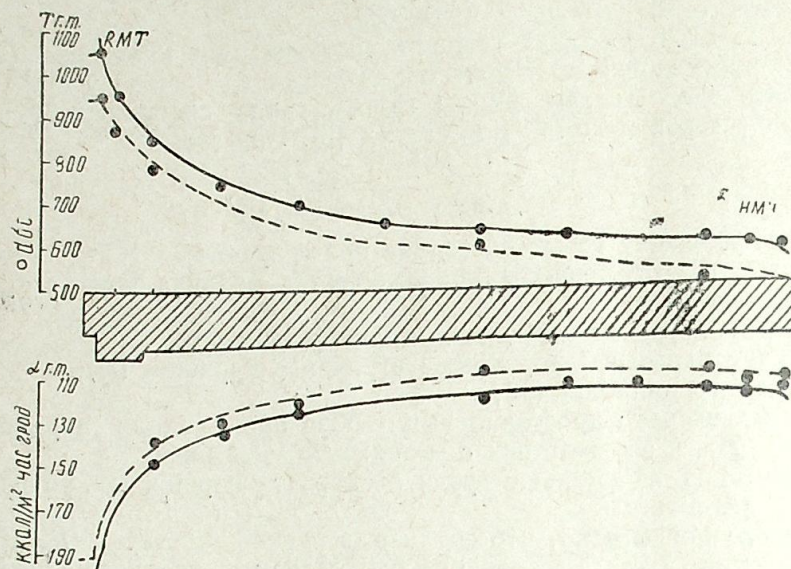


Рис. 1

те же, что и для втулки, а средний коэффициент теплоотдачи от газа к днищу крышки и поршня и результирующая по теплоотдаче температура определяются интегрированием кривых

$$\alpha_{r.m} = \frac{\int_0^{4\pi} \alpha_r d\varphi}{4\pi}; \quad T_{r.рез.} = \frac{\int_0^{4\pi} \sigma_r T_r d\varphi}{\int_0^{4\pi} \alpha_r d\varphi}$$

и по сути представляют собой значения этих величин при  $\varphi = 0$ . При моделировании температурных полей поршней важным этапом является задание граничных условий в зоне колец. Результирующая по теплоотдаче температура на рабочей поверхности  $i$ -го кольца

$$T_{рез. i} = \frac{\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \alpha_{пк} T_{ст. вт} d\varphi}{\sigma_k}$$

Учитывая  $\alpha_k = idem$ ,

$$T_{рез. i} = \frac{\int_0^{4\pi} T_{ст. вт} d\varphi}{4\pi}$$

т. е. результирующая температура на  $i$ -ом кольце равна среднеинтегральной по углу поворота температуре поверхности втулки, в пределах которой движется данное кольцо.

При задании граничных условий тепло трения считается малым по сравнению с теплопередачей от газа. Действительно, тепло тре-

ния цилиндрической группы составляет 40—45% от всего тепла трения, выделяемого в двигателе; до 30% тепла трения цилиндрической группы уходит с выпускными газами, следовательно, при механическом к. п. д. двигателя  $\eta_m \approx 0,8$  и индикаторном к. п. д.  $\eta_i \approx 0,4$  тепло трения, уходящее в стенки, составляет 2—2,5% от тепла, выведенного с топливом, в то время как теплоток от газов в охлаждающую жидкость соответственно достигает 20÷22%.

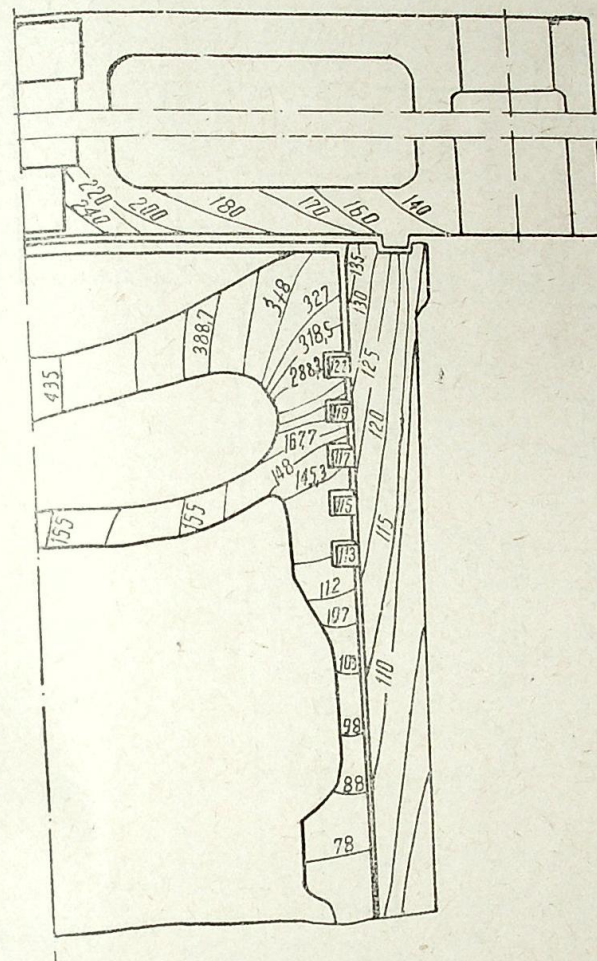


Рис. 1а

При составлении модели термическое сопротивление смазки на поверхности трения из-за малости не учитывалось. Экспериментальными исследованиями режимов смазки [5] установлено, что толщина ее слоя на поверхности трения не превышает  $2,5 \cdot 10^{-3}$  мм и при коэффициенте теплопроводности минерального масла  $\lambda = 0,11$  ккал/м·град термическое сопротивление слоя не превышает 0,5% от всего термического сопротивления теплопереходу от газа к охлаждающей жидкости. Влияние испарительного охлаждения на граничные условия учтено при определении кривых  $\alpha_r$ , рассчитанных по мгновенным параметрам  $p_r$ ,  $T_r$ , снятым с реальных индикаторных диаграмм экспериментального двигателя. Рассчитанные по вышеизложенной методике граничные условия III рода на втулке, крышке и поршне и I рода на кольцах реализуются на электрической модели, изготовля-



емой из электропроводной бумаги. Техника изготовления модели подробно описана в [6].

На рис. 2а представлены температурные поля в деталях цилиндро-поршневой группы двигателя 4 DV-224 при нагрузке 96,5 э. л. с. Наибольшая температура в днище наблюдается в центре и достигает до  $435^{\circ}\text{C}$ . Радиальный градиент по днищу в среднем составляет  $11,5 \text{ град/см}$ . Температуру в центре поршня следует считать высокой

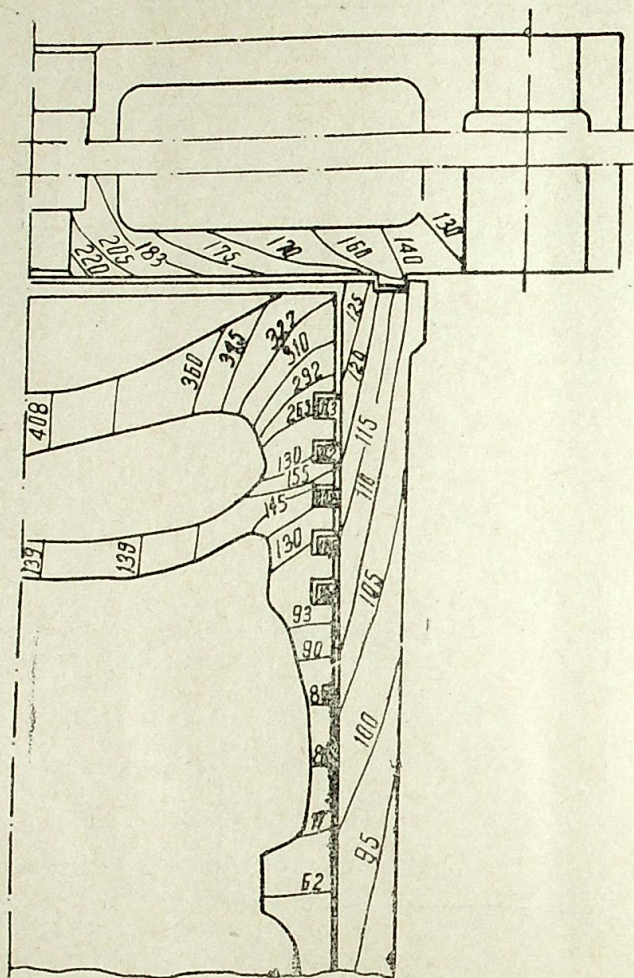


Рис. 2а

для чугунных головок и режим  $p_1 = 6,3 \text{ кг/см}^2$  мог бы быть ненадежным для двигателя, хотя номинальная мощность, установленная заводом-изготовителем, ранее составляла 100 э. л. с. В действительности эти двигатели эксплуатируются на  $N_e = 87 \text{ л. с.}$  и, естественно, температура в центре поршня на эксплуатационном режиме существенно меньше. Во втулке, как видно по расположению изотерм, имеет место существенный осевой градиент температур, связанный с закономерностью изменения кривых  $\sigma_{г.м}$  и  $T_{г.рез.}$  (рис. 1).

На рис. 2б показано температурное состояние цилиндро-поршневой группы двигателя при том же нагрузочном режиме, но с подачей воды в цилиндр в количестве  $7 \text{ кг/час}$  на цилиндр. В центре днища поршня температура снизилась на  $27^{\circ}\text{C}$ , в районе первого ручья—

на  $25^{\circ}\text{C}$  и приблизилась к температуре лакообразования. Учитывая моющее действие влаги, в избытке находящейся в цилиндре, можно утверждать, что на этом режиме залегания колец не должно наблюдаться, последнее подтвердилось опытами длительностью 300 час. Кольца были полностью подвижны в ручьях, зона колец и тронк поршня значительно чище, чем при работе без подачи воды. Температура втулки в районе первого кольца снизилась на  $15^{\circ}$ . Снижение температуры наблюдалось и в днище крышки—до  $20^{\circ}$  в районе гнезда форсунки. При расчете граничных условий не было учтено охлаждающее действие капель воды, которые, по-видимому, в небольшом количестве достигают стенок втулки, крышки и днища поршня. Поэтому результаты моделирования должны давать несколько заниженный эффект от впрыска воды и, как показывает сопоставление с опытными данными, это занижение составляет  $3 \div 5^{\circ}\text{C}$ .

### Выводы

1. Методика расчета граничных условий теплообмена деталей цилиндро-поршневой группы дизеля с рабочим телом для электромоделирования температурных полей позволяет с достаточной для практики точностью исследовать не только относительное изменение температур, но и устанавливать их абсолютные значения.
2. Впрыск воды в воздушный заряд двигателя позволяет снизить температуру деталей цилиндро-поршневой группы и в некоторых случаях существенно повысить надежность работы поршня.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Криман Р. И. „За технический прогресс“, 1965, № 7.
2. Furuhama Sh. Tosio Toda, on the flow gasthrough the piston-rings, Bulletin of JSME, vol. 4, № 16, 1961 (1 st, 2 nd report).
3. Семенов В. С., Фомин Ю. Я. Влияние изменения числа оборотов судового двухтактного двигателя на давление и температуру наддувочного воздуха. Сб. „Двигатели внутреннего сгорания“. ЦИНТИАМ. вып. 2, 1964.
4. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1949.
5. Show, Nussdorfer. Cylinder lubrication, „Automobile engineer“, 1946, № 12.
6. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Изд-во АН УССР, 1961.

В. С. Семенов, Р. И. Криман

Дахили бухарланма илэ сојутманын температур вэзијјетинэ  
тэ'сиринин өјрәнилмәси

Хүласэ

Мәгаләдә електрик-истилик мугајисәли методу илэ ишчи силиндрин диварынын температур саһәсинин гурулмасы үчүн сәрһәд шәртләринин гојулмасы методикасы верилмишдир.

Апарылан тәчрүбәләр көстәрир ки,  $p = 6,3 \text{ кг/см}^2$  тәзјигдә бир цилиндрә  $7 \text{ кг/саат}$  мигдарында сујун пүскүрүлмәси пистонун диндә  $27^{\circ}$ , биринчи пистон һалгасы гаршысында көјнәкдә  $15^{\circ}$  вә цилиндр гапағынын алт һиссәсиндә  $20^{\circ}$  температурун азалмасына сәбәб олур.

Електромодел вә билаваситә термометр илэ өлчмәдә алынған температурларын көстәрилән мугајисәси моделдә вә тәчрүбә јолу илэ алынған нәтичәләрин бир-биринә кафи гәдәр ујғун олмасыны көстәрир.



М. А. БАГИРОВ

# ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В НЕФТЕНОСНОМ ПЛАСТЕ ПРИ ДВИЖУЩЕМСЯ ОЧАГЕ ГОРЕНИЯ

В настоящее время термический способ является одним из радикальных путей извлечения остаточной нефти из истощенных месторождений. Вытеснение остаточной нефти из пласта осуществляется в основном путем создания в нем движущегося очага горения [1]. Эффективность вытеснения остаточной нефти и поддержание устойчивого внутрипластового горения при этом в значительной степени зависят от распределения температурных полей, возникающих в пласте при наличии движущегося очага горения.

В данной статье изложены результаты расчета температурных полей, возникающих в нефтеносном пласте при движущемся очаге горения, и установлено влияние некоторых теплофизических параметров на распределение температуры в пласте. Очаг горения первоначально создается на забое инжекционной скважины и нагнетанием окислителя (воздуха, кислородсодержащих газов) распространяется по пласту в виде цилиндрической поверхности со все уменьшающейся скоростью.

Рассмотрим случай, когда движущийся очаг горения имеет высоту  $2l$ , равную мощности продуктивного пласта. Предполагается, что очаг горения имеет бесконечно малую толщину и процесс горения происходит лишь на граничной поверхности, называемой фронтом горения. Такое допущение в некоторой степени оправдано, так как в реальных условиях горение в нефтеносном пласте ограничивается толщиной малой по сравнению с распространением в нем температурного поля.

Таким образом, фронт горения рассматривается как движущийся источник тепла, впереди которого по пласту распространяется тепловая волна. Тепло от фронта горения отводится в пласт в радиальном направлении за счет теплопроводности, имеют место также вертикальные теплотечи в сторону кровли и подошвы пласта. В данной задаче конвекция тепла газами не учитывается.

При постоянном расходе воздуха, нагнетаемого в инжекционную скважину, скорость распространения фронта горения  $v_f$  обратно пропорциональна радиальному расстоянию  $r$  по пласту от инжекционной скважины, т. е.

$$v_f = \frac{B}{r} = \frac{Y M_0 R_n r_0}{\varepsilon_n \rho_n r},$$

где  $B = \text{const}$ ;

$r_0$  — радиус инжекционной скважины;

$Y$  — весовое содержание кислорода в нагнетаемом воздухе (газе);  
 $R_n$  — весовое отношение нефть/кислород в реакции горения (по данным эмпирических уравнений реакции горения нефти  $R_n = 0,3 - 0,4$ );

$\varepsilon_n$  — количество топлива (нефти), сгорающего в породе. В расчетах принято, что при среднем нефтесодержании породы 6% сгорает 25% нефти, т. е.  $\varepsilon_n = 0,015$ ;

$M_0 = \frac{Q}{4\pi r_0 l}$  — удельный весовой расход воздуха на единицу поверхности забоя инжекционной скважины;

$Q$  — весовой расход воздуха (газа);

$2l$  — длина фильтра на забое скважины (высота фронта горения);

$\rho_n$  — плотность нефтеносной породы.

Исходное уравнение, описывающее распределение температуры в пласте  $\theta(r, z, t)$  в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial t} = a \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta(r, z, t)}{\partial z^2} \right] + f(r, z, t), \quad (1)$$

где  $f(r, z, t)$  — функция распределения источника:

$$f(r, z, t) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{r_0^2 + 2Bt}} \delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2Bt}) & \text{при } |z| \leq l, \\ 0 & \text{при } |z| > l, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$A = \frac{q_f \sqrt{r_0^2 + 2Bt}}{c_n \rho_n} = \frac{q}{2\pi c_n \rho_n},$$

$q$  — тепловая мощность, приходящаяся на единицу высоты фронта горения;

$c_n$  — теплоемкость нефтеносной породы;

$\delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2Bt})$  — дельта-функция [2];

$a = \frac{\Lambda}{c_n \rho_n}$  — температуропроводность;

Начальное условие  $\theta(r, z, 0) = 0$ .

Для решения уравнения (1) воспользуемся методом функции Грина, которая для трехмерной задачи теплопроводности в цилиндрических координатах имеет вид [3]

$$G(r, z, \varphi, t; r', z', \varphi', t') = \frac{1}{[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}{4a(t-t')} \right].$$

Ввиду цилиндрической симметрии задачи распределение температуры от угла  $\varphi$  не зависит, поэтому  $\varphi = 0$ . Решение уравнения (1) с учетом (2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \theta(r, z, t) = & \int_0^t dt' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_0^{\infty} r' dr' G(r, z, t; r', z', \varphi', t') f(r', z', t') = \\ = & A \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{r_0^2 + 2Bt'}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-l}^{+l} dz' \int_0^{\infty} r' dr' \delta(r - \sqrt{r_0^2 + 2Bt'}) \times \\ & \times \frac{1}{[4\pi a(t-t')]^{3/2}} \exp \left[ -\frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi' + (z - z')^2}{4a(t-t')} \right]. \quad (3) \end{aligned}$$



Интегрируя (3) и учитывая свойства дельта-функции [2], после некоторых преобразований получим

$$\theta(r, z, t) = \frac{qe^{\frac{B}{2a}}}{8ac_{п2п}} \int_0^t \frac{du}{u} \exp\left(-\frac{r_0^2 + r^2 + 2Bt}{4au}\right) I_0\left[\frac{r\sqrt{r_0^2 + 2B(t-u)}}{2au}\right] \times \left[\operatorname{erf}\frac{l+z}{2\sqrt{au}} + \operatorname{erf}\frac{l-z}{2\sqrt{au}}\right], \quad (4)$$

где обозначено  $u = t - t'$ . Выражение (4) позволяет найти распределение температуры в пласте при движущемся цилиндрическом фронте горения конечной высоты.

Если ввести безразмерные параметры:

$$\beta = \frac{B}{2a}, \quad \rho = \frac{r_0}{l}, \quad \tau = \frac{4at}{l^2}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{z}{l}, \quad \theta^* = \theta \frac{\Lambda}{q}, \quad x = \frac{4au}{l^2}.$$

то выражение (4) можно переписать в виде

$$\theta^* = \frac{e^\beta}{8\pi} \int_0^\tau \frac{dx}{x} \exp\left[-\frac{\rho^2(1+R^2) + \beta x}{x}\right] I_0\left[\frac{2R\rho}{x} \sqrt{1 + \frac{\beta}{\rho^2}(\tau - x)}\right] \times \left[\operatorname{erf}\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{x}} + \operatorname{erf}\frac{1-\varepsilon}{\sqrt{x}}\right]. \quad (5)$$

Безразмерный параметр  $R$ , характеризующий радиальное расстояние от оси скважины до точки пласта, где подсчитывается температура, можно выразить следующим образом:

$$R = \frac{r}{r_0} = \frac{\sqrt{l_0^2 + 2Bt} + r'}{r_0} = \sqrt{1 + \frac{\beta\tau}{\rho^2}} (1 + \alpha), \quad (6)$$

где  $\sqrt{l_0^2 + 2Bt}$  — расстояние от оси скважины до фронта горения;  $r'$  — расстояние от фронта горения до точки пласта, где подсчитывается температура;

$$\alpha = \frac{R'}{\sqrt{1 + \frac{\beta\tau}{\rho^2}}}.$$

При  $\alpha = 0$  определяется температура непосредственно на фронте горения в момент времени, соответствующий безразмерному параметру  $\tau$ . При  $\alpha \neq 0$  находится распределение температуры в точках пласта, удаленных от фронта горения.

Для численных расчетов и изучения тепловых явлений в пласте при движущемся очаге горения функция  $\theta^*(\varepsilon, \rho, \beta, \tau, \alpha)$  была протабулирована на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2 в Институте кибернетики Академии наук Азербайджанской ССР. На основании теоретического расчета ниже показан ряд зависимостей, характеризующих температурное поле в нефтеносном пласте при изменении некоторых теплофизических факторов. На рис. 1 в безразмерных параметрах показано изменение температуры на фронте горения ( $\alpha = 0$ ) в зависимости от расхода нагнетаемого воздуха (параметра  $\beta$ ) для различных интервалов времени  $\tau$ . Из рисунка видно, что увеличение расхода нагнетаемого воздуха в определенном интервале

времени повышает температуру на фронте горения, однако с течением времени зависимость  $\theta^* = f(\beta)$  становится пологой. При увеличении расхода нагнетаемого воздуха до больших значений температура фронта горения перестает повышаться, приобретая относительно постоянное значение. В дальнейшем при больших значениях расхода нагнетаемого воздуха может произойти стабилизация температуры на фронте горения, а также ее снижение.

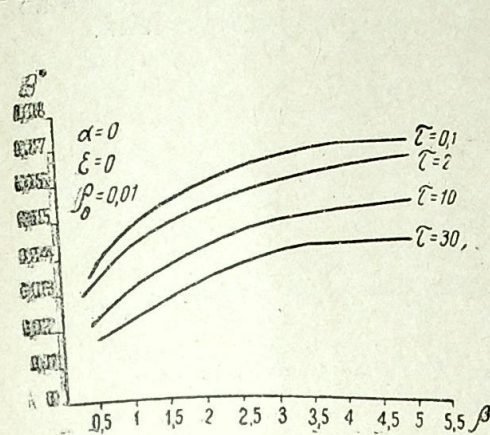


Рис. 1. Изменение температуры  $\theta^*$  на фронте горения в зависимости от расхода нагнетаемого воздуха (безразмерный параметр  $\beta$ ) для различных интервалов времени  $\tau$ .

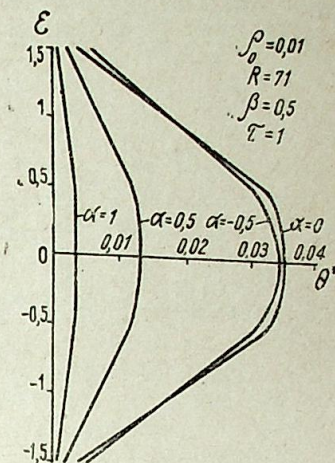


Рис. 2. Распределение температуры вдоль вертикальной плоскости зоны горения  $\theta^* = f(\varepsilon)$ .

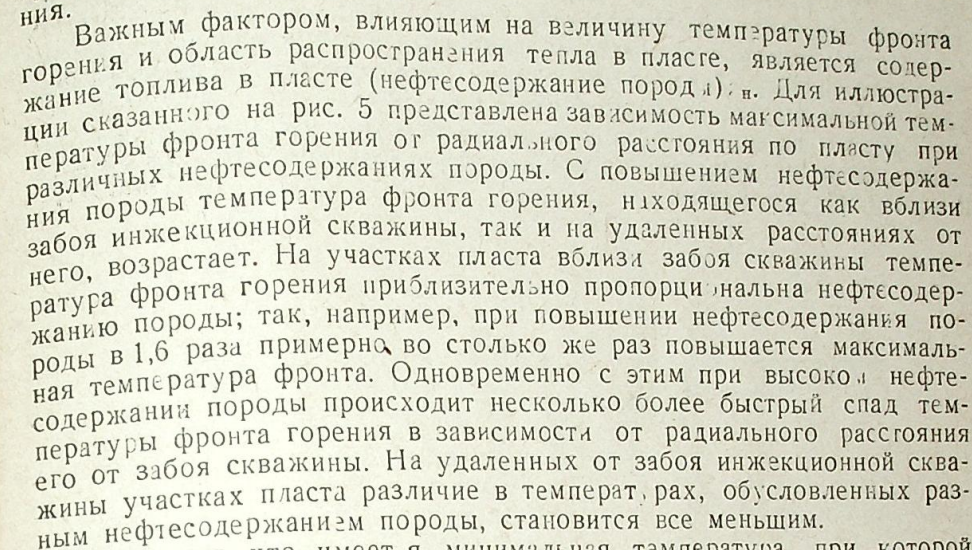
На рис. 2 для заданных значений безразмерных параметров  $\rho_0, R, \tau$  показано распределение температуры вдоль вертикальной плоскости  $\theta^* = f(\varepsilon)$  для различных точек зоны горения в пласте (непосредственно на фронте горения  $\alpha = 0$ , позади фронта  $\alpha = -0,5$  и впереди него  $\alpha = 0,5$  и  $1$ ). В вертикальной плоскости зоны горения (по высоте фронта горения) имеет место неравномерное распределение температуры с установлением максимального значения ее в центре фронта горения. Температура позади движущегося фронта горения сохраняется высокой и приближается к температуре непосредственно на фронте горения. Интересно отметить, что после прохождения фронта горения температура в точках, расположенных выше и ниже нефтяного пласта (на участках  $|\varepsilon| > 1$ ), несколько возрастает. С удалением от фронта горения температура пласта снижается.

Большой интерес представляет нахождение по результатам расчета изменений температуры в различных точках пласта по мере продвижения фронта горения. Такие температурные зависимости характеризуют тепловую волну, действующую на пласт по мере распространения фронта горения от забоя инжекционной скважины. На рис. 3 для источника, имеющего форму, соответствующую безразмерному параметру  $\rho_0 = 0,1$ , при расходе нагнетаемого воздуха, соответствующем  $\beta = 0,5$ , показано распределение температуры в пласте при различных положениях фронта горения  $\theta^* = f(R)$ . Изменения температуры показаны для средних точек плоскости фронта ( $\varepsilon = 0$ ). Как видно, по мере продвижения фронта горения температурные пики сглаживаются, однако зона повышенных температур охватывает все более удаленные участки пласта впереди фронта горения.

Как и следовало ожидать, максимум температуры устанавливается в плоскости фронта горения, а перед фронтом происходит ее довольно быстрый спад. Приведенные графики изменения температуры

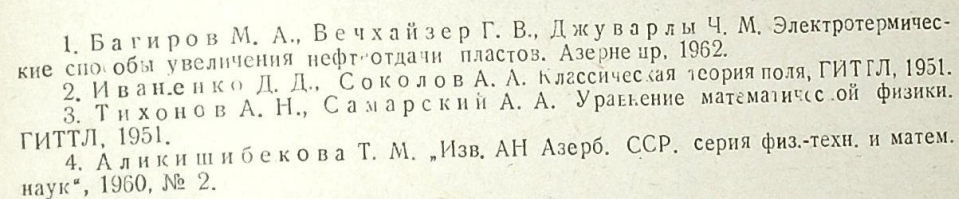


происходит более интенсивное снижение температуры фронта горения.



Учитывая, что имеет минимальная температура, при которой возможно горение в пласте, очевидно, что с возрастанием нефтесодержания породы увеличивается область распространения высокотемпературной зоны пласта.

ЛИТЕРАТУРА



М. Ә. Бағыров

Бәрәкәтдә олан яңғы зонасы шәраитиндә нефтли  
лајда температур саһәси

## ХҮЛАСЭ

Ҳазырда ишланилмиш жатаглардан галыг нефти чыхармаг үчүн  
эсас үсуллардан бири термики тә'сир үсулудур.

Термик үсулла лажлардан галыг нефтин чыхарылмасыны төмөнт  
етмэк үчүн эн эсас јол һәмин лажларда һәрәкәтдә олан јанғы зонасы  
јаратмагдыр.

Галыг нефтин чыхарылмасынын вэ лажларда жангынын дажаныглы сахланылмасынын эффективлижи эсасэн хэмнин лажда баш верэн температур саһэсинин пайланмасындан асылыдыр.

Мәгаләдә һәрәкәттә олан жанғы зонасы заманы нефтли лајларда әмәлә кәлән температур саһәләринин һесабланмасы схеми вә лајларда температур саһәләринин һесабланмасына бә'зи истилик физики параметрләрин (лајлара вурулан газын сәрфи, лајдакы жаначағын мигдары, вурулмуш газда оксикенин консентрасијасы) тә'сири мүүјјән едилмишдир. һесабламада фәрз едилир ки, жанғы зонасы инжексија гујусунун дибиндәки сәтһ үзәриндә јаранараг цилиндрик сәтһ бојунча јавашыјан сүр'әтлә јасәтһ мүүјјән едилмишдир ки, лајлара вурулыр. һесаблама нәтичәсиндә мүүјјән едилмишдир.



лан һаванын мигдары артдыгда жанғы зонасынын температуру мүәйиз вахт интервалында артыр, бундан сонра температурун сабитләшмәсә вә ашаға дүшмәси баш верә биләр.

Жанғы зонасында температур, лажларын галынлығына көрә, гејрә-бәрабәр пәјланыр. Температур өзүнүн максимум гижмәтини билавастә-тә жанманын өнүндә вә мәркәзиндә алыр.

Вурулан газын тәркибиндә оксикенин консентрасијасынын вә лаж-дакы нефтин мигдарынын артмасы илә радиал истигамәтдә жанма өнү-нүн температуру артыр.

1966-чы илдә «Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасынын Хәбәрләри»  
(физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы) журналында  
дәрч олунмуш мәгаләләрин

#### КӨСТӘРИ ЧИСИ

- Аббасов Р. Ә. Чохдәјишәнли санки-периодик функцијаларын Фурје сыралары-нын чәмләнмәси һаггында, № 5, сәһ. 3.
- Ағајев Н. Н., Мустафајев Г. Ә. Квази-хәтти оператор тәнликләрин һәлли үчүн Галјоркин методунун бир аналогу һаггында, № 1, сәһ. 42.
- Ағајев Н. Н. Гилберт фәзасында гејри-хәтти оператор тәнликләри нәзәријәси-нә даир, № 5, сәһ. 9.
- Абдуллајев Н. Б., Мөһдијев С. И., Абдинов Д. Ш., Әлијев Н. М. Јүксәк тезликли селенин јени хәссәләри һаггында, № 1, сәһ. 77.
- Абдулкәримов Л. Ш., Јагубов С. Ј. Банах фәзасында параболик типли квази-хәтти диференсиал тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин тәдгиги, № 2, сәһ. 35.
- Абдуллајев Н. Б., Әлијев М. И., Сәфәрәлијев Г. И. Лекирәләнмиш Casb-дә кечиричилик вә фононларын сәпилмә механизмләри һаггында, № 6, сәһ. 69.
- Акселрод С. М., Мустафајев А. А., Ширинов К. Ф. Сферик вибраторун кириш импедансынын онун өлчүләри вә әтраф мүнһитин параметрләриндән асылы-лығының өјрәнилмәсинә даир, № 2, сәһ. 77.
- Акилов Ж. К., Гасымов Ә. Ф. Гујуда гумун һәрәкәтинин һесапланмасына даир, № 1, сәһ. 107.
- Антонов В. Б., Нәсиров Ј. Н. GeTe-GeSbTe<sub>2</sub> бәрк мәһлулунын термоелектрик хәссәләри, № 1, сәһ. 90.
- Антонов В. Б., Нәсиров Ј. Н. GeTe-GeSe бәрк мәһлулунда термоелектрик хәссәләрин тәдгиги, № 3, сәһ. 76.
- Бабајев А. Х. Кәсилмәјән функцијаларын Фејер чәминин Ермит чоһәдлис илә јахынлашма тәртиби, № 2, сәһ. 3.
- Бабајев А. А. Кәсилән әмсаллы икинчи тәртиб чырлашан һиперболик тәнлик үчүн гарышыг мәсәлә, № 3, сәһ. 17.
- Бабајев М. А. Асинхрон електрик интигалынын динамик тормозланмасы зама-ны кечид просесләринин електрон рәгәм—һесаблајычы машында тәдгиги, № 3, сәһ. 92.
- Бағыров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. Полимер өртүкләрин ди-електрик иткиләринә һавадакы електрик гығылчымынын тәсиринин тәдгиги, № 5, сәһ. 65.
- Багдасарјан С. С. Мајенин гурулушунун модел нәзәријәсинә даир, № 2, сәһ. 116.
- Бахышов Ш. М. Сонлу цилиндрик өртүкдә температурун тәјини, № 3, сәһ. 28.
- Боровик Ј. С., Мәммәдов М. Ш., Волотскаја В. Г. Импульсу жүклә-мә шәрантиндә мисин давамлылығынын тәдгиги, № 2, сәһ. 107.
- Волевич Л. Р., Панејах Б. П. Дахилолма теоремләринә јени мүнәсибәт, № 1, сәһ. 5.
- Газијев Е. А. Диференсиал тәнликләрин Ејлер сыныг хәтләри үсулу илә һәл-линдә биртәрәфдән гижмәтләндирмәләр, № 1, сәһ. 112.
- Гасымова С. С. Һәгиги матрисләр чәбри үзәриндә гурулан квази-гејриеквид фәзалары, № 3, сәһ. 16.
- Гасымов Б. О. Телемеханиканын үмидверици системинин мүгајисәси вә сәпәлән-миш объектли телемеханик системин тәләбләри сајынын пәјланма ганунуна даир, № 1, сәһ. 63.
- Гасымов Б. О. Артыг олмајән информасија шәбәкәләринин структурлары сарајынын тәјини мәсәләсинә даир, № 3, сәһ. 126.
- Гафаров Ш. М. Функцијаларын үмуми хәссәләри илә онун Бурје-Бессел әм-саллары арасындакы бәзи әлағәләр һаггында, № 2, сәһ. 60.



Гәдиров Н. Г., Гасимова Ф. А., Иәбибов А. Б. Карбогидроген газларынын Чоул Томсон әмсалынын һесаблинамасы үчүн Марон-Торнбули бәрәбәрлигинин тәтбиғинә даир, № 3, сәһ. 101.

Горстки В. П., Романовски С. Г. Сәнаје тәзликли дәјишән чәрәянын электроманнит сәһәсинин истифадә олунмасы илә бетонун термики ишләnmәси, № 3, сәһ. 107.

Гулијев К. М. Сонсуз сәјда ејин радиуслу даирәви дешиклә зәифләмиш сонсуз мүстәвидә еластики-пластики деформасија һалында кәркиликлә, № 2, сәһ. 25.

Гулијев Н., Рүстәмова А. Електрон-позитрон чүтүнүн зәиф аннигулјасијасы, № 2, сәһ. 98.

Гулијев Р. Ш., Аббасзадә А. К., һачыјев Ш. С. Нефт јағлары үчүн әзлүлүјүн температурдан асылылыгы дүстуру, № 2, сәһ. 111.

Дадашов Ә. Ш. Температур мејданы тәсири алтында олан дахилдән өртүклү ичибош күрәнин еластик-пластик таразлыгы вә «ујғунашмасы», № 3, сәһ. 34.

Әбдүлкәримов Л. Ш. Банах фәзасында (А) синифли јарымгруп јарадан олераторлу Коши мәсәләсинин һәлли һаггында, № 1, сәһ. 48.

Әбдүррәһманов А. А., Рәһимова Р. Ә., Иманов Л. М.  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$  молекулунун микродалғадакы фырланма спектри, № 6, сәһ. 82.

Әзимов М. Ә. Мүрәккәб мүһит үчүн фәзада Лаплас тәнлијинә аид бәзи мәсәләләр, № 2, сәһ. 43.

Әлијев М. И., Сәфәрәлијев Г. И. Галлиум-сүрмәнин истиликкечирмә вә термо-электрик һәрәкәт гүввәси, № 2, сәһ. 87.

Әлијев Г. Г. Еластики әләгә илә бәркидилмиш цилиндрик һалғанын дајаначаглыгы, № 3, сәһ. 35.

Әлиханов Р. И. Бир функционал тәнлик үчүн гарышыг мәсәлә, № 3, сәһ. 28.

Әлизадә Ә. С., Гулијев Д. А., Кәләнтәров Б. А. Илдырымың параметрләри һаггында, № 5, сәһ. 93.

Әлијев Г. Г. Дахили рабәтләрин кәрилмәси заманы цилиндрик өртүјүн мүвазинәти, № 6, сәһ. 51.

Әскәров Н. К. Сәрһәд шәраитиндә параметр олан ади диференсиал тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләси, № 6, сәһ. 3.

Әфәндизадә Л. А., Сејидов Ј. М. Електроманнит тормоз валындакы моментин тәјини мәсәләсиндә вектор потенциалы нәзәријәсинин тәтбиғи, № 5, сәһ. 86.

Әфәндизадә А. Ә. Листенгартен Б. А., Курдјуков Ј. М. Бирфазлы инверторда кечид режимләринин һесабына даир, № 1, сәһ. 102.

Әһмәдов Б. Ә. Таваны кечиричи олан анизотроп лајда мајенин охасимметрик ахыны, № 3, сәһ. 104.

Әһмәдов Б. Ә. Таваны кечиричи олан анизотроп лајда мајенин ахыны, № 6, сәһ. 56.

Железнов М. И. Јахынлыг ефектинин һесаба алмагла elektrik нагилинин там дахили мүвазинәтинин тәјини, № 5, сәһ. 71.

Зүлфугарзадә Е. Ә., Мајоров Ф. В. Биртипли һесаблајычы рәғәмли комплекс машинларын ујғунлуғу һаггында № 2, сәһ. 71.

Ибраһим хәлилов И. Ш. Пајлама параметрләр үчүн дајанәтли гијмәтләрин тапылмасы, № 3, сәһ. 67.

Исајев Ф. К., Хәлилов Ә. Х. Бәзи гарышыг әсаслы гәләви-һалокен фосфорларында F—мәркәзләрин оптик дағылмасынын тәчрүби тәдиги, № 3, сәһ. 72.

Исмајилзадә И. Г., Әзизов Т. С., Нестеренко В. И., Шамилзадә З. М. Сүр'әтли электронларын поликристаллик бари титанатын структурна тәсиринин тәдиги, № 3, сәһ. 68.

Јагубов С. Ј. Банах фәзасында гејри-мәһдуд вә гејри-сабит операторлардан асылы олан јүксәк тәртибли диференсиал тәнликләр, № 1, сәһ. 20.

Јагуб С. Ј. Банах фәзасында икинчи тәртиб параболик тип диференсиал тәнликләр үчүн Коши мәсәләси, № 3, сәһ. 3.

Кәримов Р. Ј. Саф сүрүшмәдә лөвһәнин даирәви дешији әтрафында пластики зонанын јайылмасы, № 2, сәһ. 66.

Кәримова Д. Н. Ади диференсиал тәнликләр үчүн бир сәрһәд мәсәләсинин сонлу артым үсулу илә һәлли, № 2, сәһ. 157.

Көзәлов Ј. И. Бәзи системләр дајаныссылығынын кафи шәртләри, № 5, сәһ. 36.

Лабскер Л. Г. Фејер-Валле-Пуссен интеграл операторунун чәмләмә аналогу, № 6, сәһ. 16.

Малсагов Ә. У., Нани Р. һ., Нәсиров Ј. Н.  $\text{CuSbTe}_2$  бирләшмәсиндә бәрк вә маје һалында термо ЕҺГ-нин вә elektrik кечирмәнин тәдиги, № 2, сәһ. 84.

Манјуров Д. М. Параметрик хәтти програмлашдырманын бир синиф мәсәләси һаггында, № 3, сәһ. 62.

Манјуров Д. М. Параметрик-квадратик програмлашдырманын бир мәсәләси һаггында, № 6, сәһ. 66.

Марон В. И., Сәфәров һ. һ. Мүстәви лөвһәнин икикомпонентли мүһитдә һәрәкәти, № 3, сәһ. 43.

Мәһдијев И. Г. Квази-полиномлар сырасы һаггында, № 3, сәһ. 10.

Мәһдијев Ә. Г. Силиндрик нүмунәнин зәрбәдән сыхылмасы һаггында, № 3, сәһ. 42.

Мәммәдов Ә. М.  $\Omega_s \delta_{1...s}$  функцијалар синфиндә интеграл тәнликләрин тәгриби һәлли, № 1, сәһ. 37.

Мәммәдәли Е. М. Исфаф рәғәм һесаблајычы машинларын зәдәләnmәләринин контролу вә диагностикасы, № 1, сәһ. 56.

Мәммәдов М. А. Секи Икејја 1965 F комети орбитинин тәјини, № 1, сәһ. 96.

Мәммәдов Р. һ., Османов һ. И. Фурје чевирмәсинин вә Фурје сырасы әмсалларынын бәзи хәссәләри, № 2, сәһ. 15.

Мәммәдов М. А. 1941. 1. Кеннинһем кометинин сон орбитинин тәјини, № 3, сәһ. 128.

Мәммәдов Ш. Н., Нуруллајев Т. Назик дамар типли јатағлары ишләnmәсиндә газыма партлатма ишләринин бәзи оптимал өлчүләринин тәјин едилмәсинә даир, № 1, сәһ. 120.

Мәммәдов Г. М. Шәргин көркәмли ријазийјатчысы Әмәр Хәјжамын (1048—1131) һајаты вә чәбрә аид ишләри һаггында, № 3, сәһ. 48.

Михлин С. Г. Вариасија үсулларынын давамлылыгы һаггында, № 1, сәһ. 3.

Мәммәдгулијев Ш. Ф., Әмәнзадә Ј. Ә. Ен кәсији еллипс олан, мүхтәлиф материаллардан һазырланмыш призматик брусун бурулмасы, № 5, сәһ. 26.

Мугалов А. һ. Чезаро-Данжуа мәһнада интегралын интегралланмасы вә диференсиалланмасы һаггында, № 6, сәһ. 22.

Мурадәлијев Ф. Г. Күләјин шагули профилинин вә онун күләк мүһәррикләринә тәсиринин тәдиги, № 3, сәһ. 113.

Мустафајев Л. Г. Јарымгрудларын идеал эквивалентликләри һаггында, № 6, сәһ. 30.

Мусајев М. Ә. Кечирмә сәддә ајрылан гатларда маје ахыны, № 2, сәһ. 124.

Мухтаров һ. А., Мухтаров Р. һ. Квадрупол нүвәси олан асимметрик фырфара типли молекуллардакы штарк ефекти һаггында, № 6, сәһ. 76.

Намазов Ф. К., Бабајева А. А. Кәсилән әмсаллы чырлашан тәнликләр үчүн гојулмуш бир мәсәлә һаггында, № 6, сәһ. 36.

Нәчәфов Ј. Б., Шаулов Ј. Х. Силиснум 4-оксидин әмәләкәлмә енталпијасы, № 2, сәһ. 81.

Новрузов О. Н. Импульс үсулу илә јарымкечиричиләрин температур кечиричилијинин өлчүлмәси, № 2, сәһ. 91.

Пашајев А. М., Иглитсин М. И., Туркин И. Н. Чоһашгарлы јарымкечиричиләрин хүсуси мугавимәтини өлчмәк үчүн чиһазлар, № 1, сәһ. 85.

Пашајев А. М. Јарымкечиричи маддәләрин физики хәссәләринин контактсыз ифрат јүксәк тәзликли үсуллары илә тәдигинә даир, № 5, сәһ. 42.

Рәһманов П. Ә. Мугавимәтли мүһитдә јерләшән лөвһәдә еластик-пластик далғаларын әкс олунмасынын арашдырылмасы, № 3, сәһ. 25.

Самидов Х. С. Програм илә идарә олунан автоматик бурғу дэзкахы столу макетинин өтүрүчү механизмнин дајандырылма динамикасы, № 3, сәһ. 109.

Сәфәров һ. һ. Мәсамәли чисмин ики компонентли маје илә јуулмасында сәрһәд лајынын сорулмасы, № 1, сәһ. 14.

Сүләјманов Н. М. Сағтәрәфли диференсиал оператор тәнликләри үчүн јарымфәзада коррект сәрһәд мәсәләләри һаггында, № 3, сәһ. 3.

Тағыјев М. А. 1-чи нөв кечид фазасында *n*-килолда, *n*-дихлорбензолда, бензолда, бензолфенонда ултрасәсин удулмасынын вә јайылма сүр'әтинин өлчүлмәси, № 3, сәһ. 62.

Тағыјев Ф. Ә. Трикоми мәсәләсинин үмуми јапышдырма шәрти дахилиндә шәбәкә методу илә һәлли, № 3, сәһ. 48.

Тағыјев И. һ. Ихтијари азгабарыглы цилиндрик өртүкләрин сәрһәд мәсәләләринин кичик параметр үсулу илә һәлли, № 6, сәһ. 60.

Талиби М. Ә., Әзизов Т. С., Әлијев М. М. Енержиси 1—5 мев олан сүр'әтләндирилмиш электронларын гејдә алынмасында *p*—*n* кечидләринин тәтбиғи, № 5, сәһ. 47.

Талиби М. Ә., Лунјов П. А., Гәдимов Г. һ. Селен стабилитронлары, № 3, сәһ. 91.

Талиби М. Ә., Вердијева Т. М., Крутејук Ј. Г. Селенин сәһ гурулушу вә кристаллашма дәрәчәсинин Se—CdSe вә Se—CdS кечидләринин әмәлә кәлмәсинә тәсиринин тәдиги, № 2, сәһ. 101.

Тәјмуров Ф. Ч. Узунуна далғанын блокдан кечмәси мәсәләси, № 3, сәһ. 37.

Хәлилов Ә. Х., Исајев Ф. К. Күмүш вә мис ионлары илә активләшдирилмиш бәзи гарышыг әсаслы гәләви-һалокен кристаллофосфорларында әсас анионларын гејри-бәзи гарышыг әсаслы гәләви-һалокен кристаллофосфорларында әсас анионларын гејри-изотермик релаксасија хәссәләринә тәсиринин тәдиги, № 1, сәһ. 71.

Хәлилов Х. М., Ағајев А. И. 4—100 *мкe* интервалында ултрасәс далғаларынын бәрк чисимләриндә удулма әмсалы вә јайылма сүр'әтини өлчмәк үчүн гурғу, № 2, сәһ. 116.

Хәлилов Х. М., Рзајев К. И. Селендә ултрасәс сүр'әтинин јайылмасынын температурдан асылылыгы, № 3, сәһ. 71.

Хәлилов Х. М., Ағајев А. И. Мегатерс тәзлик диапазонунда KCl монокристалында ултрасәсин удулмасы, № 3, сәһ. 82.



Хәлилов Ә. Х., Әлијева Т. Ч. КСl-Си фосфорларынын термостимуллан-мыш луминесценсия спектрләринә термик ишләнмәнин тәсирийн тәдгиги, № 5, сәһ. 53.

Хәлилов Х. М., Рәзәев К. И. ТеSe монокристалында ултрасәс сүр'әтинин тем-пературдан асылылыгы, № 5, сәһ. 58.

Һачыјев С. Н., Ағарунов М. Ј., Нәчдәлијев Ј. Р., Әзизов Т. Х., Чеботарјов В. Н., Намазов Ф. А., Силисиум үзви бирләшмәләри сәһәсиндә фи-зики-химјәви тәдгигат. 1. Бәзи метилхлорсиланларын әмәләкәлмә енталпијасы, № 3, сәһ. 57.

Һачыјев В. Д. Башлангыч кәркинлик заманы еластик-пластик системдә давам-лылығын бәзи мәсәләләри, № 6, сәһ. 44.

Һачыјев А. Ч. Гејри-хәтти Гаммерштејн интеграл операторлар аиләсинин сыф-ра јакынлығы һаггында, № 2, сәһ. 32.

Һачыјев С. Н. Нәмәһәссас маддәләрин ректифаксијасы үчүн колонка, № 6, сәһ. 93.

Һејдәров Т. Г. Өлчүлү ганунларын Ечворт типли сыралара ајрылмасы, № 3, сәһ. 54.

Һәсәнов Н. М. Бүтүн охда кәсилмәјән функцијанын Ермит-Фејер интерполја-сија чохәддәлиләри васитәси илә јакынлашма тәртиби һаггында, № 3, сәһ. 9.

Һүсәјнов Р. Ә. 21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын спектрофотомет-рик тәдгигинин нәтичәләри һаггында, № 3, сәһ. 75.

Һүсәјнов Р. Ә. 25 ијун 1960-чы ил хромосфер алышмасынын спектрофотомет-рик тәдгигинин нәтичәләри һаггында (1-чи мәлумат), № 3, сәһ. 83.

Һүсәјнов Р. Ә. 21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын спектрофотомет-рик тәдгигинин нәтичәләри һаггында, № 2, сәһ. 129.

Һүсәјнов Р. Ә. 25 ијун 1960-чы ил хромосфер алышмасынын спектрофотомет-рик тәдгигинин нәтичәләри һаггында, № 3, сәһ. 96.

Чалјан К. М. Чәрәјән сыхлығынын вә магнит сәһәси кәркинлијинин даирәви ен кәскили борунун чәрәјән кечиричисиндә пәјланмасы, № 3, сәһ. 116.

Чәлилов Н. З., Әзизов Т. С., Әлијев Г. М. Електрон шүасынын һекса-гонал монокристал селенин електрик кечмәсинә тәсири, № 3, сәһ. 87.

Чәфәрли Г. М. Мультипликатив ортанормал функцијалар системи илә әләгәдар јығылма системләри, № 2, сәһ. 55.

Чәфәрлов Ә. С. Функцијаларынын чохобразлы үзәриндә чохәддәлиләр васитәси-лә ән јакшы јакынлашмасынын тәртиби һаггында, № 5, сәһ. 17.

Чәфәрлов А. С. Функцијанын Фурје-Штурм-Лувил сырасынын орта әдәди чәм-ләри васитәсилә јакынлашдырылмасынын тәртиби һаггында, № 6, сәһ. 14.

Чуварлы Ч. М., Мүслүмов М. М. Атмосфер ифрат кәркинликләринин тә-сирийндән трансформаторун нејтралында кәркинлијин артмасы просесинин моделлә тәд-гиги, № 1, сәһ. 130.

Чуварлы Ч. М., Дмитријев Ј. В., Чалјан К. М. ЕМһМ-дән истифадә етмәклә кечичи электромагнит просесләрини һесабламаг үчүн тәнлик, № 1, сәһ. 136.

Чуварлы Ч. М., Вечхәјзер Г. В., Горин Ј. В., Леонов П. В. Ди-электриклә һүдудланмыш газ аралығында електрик бошалмасынын вольт-ампер харак-теристикалары, № 2, сәһ. 139.

Чуварлы Ч. М., Миронов К. А. 110 кВ-лыг шәбәкә трансформаторунун тор-пагланмамыш нејтралында гејри-тамфазлы режимләрдә феррорезонанс ифрат кәркин-ликләр, № 2, сәһ. 147.

Чуварлы Ч. М., Дмитријев Ј. В., Әлизадә Е. М. Телеграф тәнликлә-ринин һәлли үчүн характеристика үсулу, № 3, сәһ. 118.

Чуварлы Ч. М., Мүслүмов М. М. Илдырым ифрат кәркинликләриндән 110 кВ-лыг трансформаторларын торпагланмамыш нејтралынын мұһафизәси, № 3, сәһ. 121.

Чуварлы Ч. М., Мурадова А. М. Нәһәјәти индуктивликдән сонра гыса бағланмыш хәттин синусоидал кәркинлијә гошулмасы, № 3, сәһ. 122.

Чуварлы Ч. М., Дмитријев Ј. В., Енштәјн Л. Е. Ачарда електрик гөв-сүнүн ријәзи модели, № 5, сәһ. 79.

Чуварлы Ч. М., Вечхәјзер Г. В., Горин У. В., Леонов П. В. Диелек-триклә һүдудланмыш газ аралығында бошалма, № 6, сәһ. 87.

Шамијев Ф. Н. Минимум чәкили һәлгәви еллиптик лөвһәләр лајинә етмәк һаг-гында, № 3, сәһ. 23.

## УКАЗАТЕЛЬ

статей, опубликованных в «Известиях АН Азербайджанской ССР, серия физико-технических и математических наук» за 1966 г.

Аббасов Р. А. О наилучшем приближении почти-периодических функций многих переменных, № 5, стр. 3.

Абдулкеримов Л. Ш. О разрешимости задачи Коши в банаховом простран-стве с производящим оператором полугруппы класса (A), № 1, стр. 48.

Абдулкеримов Л. Ш., Якубов С. Я. Исследование задачи Коши для ква-зилинейных дифференциальных уравнений параболического типа в банаховом прост-ранстве, № 2, стр. 35.

Абдуллаев Г. Б., Мехтиева С. И., Абдинов Д. Ш., Аллеев Г. М. О но-вых свойствах селена высокой чистоты, № 1, стр. 77.

Абдуллаев Г. Б., Алиев М. И., Сафаралиев Г. И. О механизме прово-димости и рассеяния фононов в легированном GaSb, № 6, стр. 69.

Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А., Иманов Л. М. Микроволновый спектр молекулы  $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ , № 6, стр. 82.

Агаев Г. Н. К теории нелинейных операторных уравнений в пространстве Гиль-берта, № 5, стр. 9.

Агаев Г. Н., Мустафаев К. А. Об одном аналоге метода Галеркина для решения квазилинейных операторных уравнений, № 1, стр. 42.

Азимов М. А. Некоторые задачи для уравнения Лапласа в пространстве для составной среды, № 2, стр. 43.

Аксельрод С. М., Мустафаев Р. А., Ширинов К. Ф. К исследованию зависимости входного импеданса сферического вибратора от его размеров и парамет-ров окружающей среды, № 2, стр. 77.

Акилов Ж. А., Касимов А. Ф. К расчету движения песка в стволе скважины, № 1, стр. 107.

Алиев Г. Г. Устойчивость цилиндрического кольца армированного гибкой связью, № 4, стр. 35.

Алиев М. И., Сафаралиев Г. И. Теплопроводность и термоэдс антимолида галлия легированного Zn и Fe, № 2, стр. 87.

Алиев Г. Г. Устойчивость цилиндрической оболочки при натяжении связей, № 6, стр. 6.

Ализаде А. С., Кулиев Д. А., Калантаров В. А. О параметрах молнии, № 5, стр. 93.

Алиханова Р. И. Смешанная задача для одного функционального уравнения, № 1, стр. 28.

Антонов В. Б., Насиров Я. Н. Термоэлектрические свойства твердого ра-створа  $\text{GeFe}-\text{CuSbFe}_2$ , № 1, стр. 90.

Антонов В. Б., Насиров Я. Н. Исследование термоэлектрических свойств твердого раствора,  $\text{GeFe}-\text{GeSe}$ , № 4, стр. 76.

Аскеров Н. К. Граничная задача для обыкновенного дифференциального урав-нения с параметром в граничном условии, № 6, стр. 6.

Ахмедов Б. А. Осесимметричное течение жидкости в анизотропном пласте с проницаемой кровлей, № 4, стр. 104.

Ахмедов Б. А. Течение жидкости в анизотропном пласте с проницаемой кров-лей, № 6, стр. 56.

Бабаева А. А. Смешанная задача для вырождающегося гиперболического урав-нения второго порядка с разрывными коэффициентами, № 3, стр. 17.

Бабаев М. А. Исследование на ЭЦВМ переходных процессов при динамическом торможении и синхронного электропривода с учетом переменной скорости ротора, № 3, стр. 92.



Бабаев А. Х. О порядке приближения непрерывных функций суммами Фейера по многочленам Эрмита, № 2, стр. 3.

Багдасарян С. С. К модельной теории строения жидкостей, № 2, стр. 116.

Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. Исследование влияния электрического разряда в воздухе на диэлектрические потери полимерных пленок, № 5, стр. 65.

Багиров М. А. Температурное поле в нефтеносном пласте при движущемся очаге горения, № 6, стр. 17.

Бахышев Ш. М. Определение температурного поля в конечной цилиндрической оболочке, № 4, стр. 28.

**Боровик Е. С.** Мамедов М. Ш., Волоцкая В. Г. Исследование долговечности меди при импульсных условиях нагружения, № 2, стр. 107.

Волевич Л. Р. и Панейх Б. П. Новый подход к теоремам вложения, № 1, стр. 5.

Гаджиев А. Д. О близости к нулю семейства нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна, № 2, стр. 32.

Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я., Нагдалиева Ю. Р., Азизов Т. Х., Чеботарев В. Н., Намазов Ф. А. Физико-химическое исследование кремнийорганических соединений, № 3, стр. 57.

Гаджиев В. Д. Некоторые задачи устойчивости упруго-пластических систем при наличии начальных напряжений, № 6, стр. 44.

Гаджиев С. Н. Колонка для ректификации влажочувствительных веществ, № 6, стр. 93.

Гасанов Г. М. О порядке приближения на всей оси непрерывных функций интерполяционными многочленами Эрмита-Фейера, № 4, стр. 9.

Гейдаров Т. Г. Разложение  $n$ -мерных законов распределения в ряд типа Эджворта, стр. 54.

Геозалов Я. И. Достаточное условие устойчивости некоторых систем, № 5, стр. 36.

Городецкий В. П., Романовский С. Г. Термическая обработка бетона в электромагнитном поле с применением промышленной частоты, № 4, стр. 107.

Гулиев Н., Рустамова А. Слабая аннигиляция электронно-позитронной пары, № 2, стр. 98.

Гусейнов Р. Э. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 21 августа 1959 г., № 2, стр. 129.

Гусейнов Р. Э. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 21 августа 1959 г., II, № 3, стр. 75.

Гусейнов Р. Э. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 25 июня 1960 г., I, № 3, стр. 83.

Гусейнов Р. Э. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 25 июня 1960 г., II, № 4, стр. 96.

Дадашев А. Ш. Упруго-пластическое равновесие и приспособляемость поллой сферы с внутренним покрытием под действием температурного поля, № 2, стр. 34.

Джалилов Н. З., Азизов Т. С., Алиев Г. М. Влияние электронного облучения на электропроводность гексагонального монокристалла селена, № 4, стр. 87.

Джафаров А. С. О порядке наилучшего приближения функций на многообразиях посредством алгебраических полиномов, № 5, стр. 17.

Джафаров А. С. О порядке приближения функции средними арифметическими суммами ее ряда Фурье—Штурма—Лиувилля, № 5, стр. 11.

Джафарли Г. М. Системы сходимости, связанные с мультипликативными ортонормированными системами функций, № 2, стр. 55.

Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. Исследование на модели повышения напряжения на нейтрали трансформаторов, вызванного атмосферными воздействиями, № 1, стр. 130.

Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Чальян К. М. Уравнения узла сети для расчета переходных электромагнитных процессов с использованием ЭЦВМ, № 1, стр. 136.

Джуварлы Ч. М., Миронов Г. А. Феррорезонансные перенапряжения на нейтрали разземленного трансформатора в сети 110 кВ при неополнофазных режимах, № 2, стр. 147.

Джуварлы Ч. М., Вечхайзер Г. В., Горин Ю. В., Леонов П. В. Вольтамперные характеристики электрического разряда в газовой полости, ограниченной диэлектриком, № 2, стр. 139.

Джуварлы Ч. М., Мурадов А. М. Расчет переходного процесса включения на синусоидальную ЭДС линии, закороченной на конце через индуктивность с применением дискретного преобразования Лапласа, № 3, стр. 122.

Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Эпштейн Л. Э. Магматическая модель электрической дуги в выключателе, № 5, стр. 79.

Джуварлы Ч. М., Вечхайзер Г. В., Горин Ю. В., Леонов П. В. Разряд в газовой полости, ограниченной диэлектриком, № 6, стр. 87.

Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Ализаде Э. М. Метод характеристик для решения телеграфного уравнения, № 4, стр. 118.

Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. Защита изоляции нейтрали трансформаторов 110 кВ от грозových перенапряжений, № 4, стр. 121.

Железнов М. И. Об определении полного внутреннего сопротивления токопровода с учетом эффекта близости, № 5, стр. 71.

Зульфугарзаде Э. Э. Майоров Ф. В. О совместимости машин цифрового вычислительного комплекса одного типа, № 2, стр. 71.

Ибрагимов И. Ш. Нахождение состоятельных оценок параметров распределения, № 4, стр. 67.

Исаев К., Халилов А. Х. Экспериментальное исследование оптического разрушения F-центров в некоторых щелочно-галогенидных фосфорах со смешанным осеванием, № 4, стр. 72.

Исмаиляде И. Г., Азизов Т. С., Нестеренко В. Н., Шамилзаде З. М. Исследование действия ускоренных электронов на структуру поликристаллического титаната бария, № 3, стр. 68.

Кадыров Н. К., Гасимова Ф. А., Габиев А. Б. О применении уравнения Марона—Торбулла для вычисления коэффициента Джоуля—Томсона углеводородных газов, № 3, стр. 101.

Казиев Э. А. Односторонние оценки при решении дифференциальных уравнений методом ломаных Эйлера, № 1, стр. 112.

Касимов Б. О. О сравнении надежных систем телемеханики и законе распределения числа запросов для систем телемеханики с рассредоточенными объектами, № 1, стр. 63.

Касимов Б. О. К вопросу определения числа структур информационных статей без избыточности, № 3, стр. 126.

Касимова С. С. Квазинеевклидовы пространства над алгеброй вещественных матриц, № 4, стр. 16.

Кафаров Ш. М. О некоторых связях между поведением коэффициентов Фурье—Бесселя и структурными свойствами функций, № 2, стр. 60.

Керимова Д. Н. Применение метода конечных разностей к одной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, № 2, стр. 157.

Керимов Р. Ю. Распространение пластических зон возле кругового отверстия в пластине при чистом сдвиге, № 2, стр. 66.

Кулиев К. М. Напряжения в плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий при упруго-пластических деформациях, № 2, стр. 25.

Кулиев Р. Ш., Аббасзаде А. К., Гаджиев Ш. С. Формула для температурной зависимости вязкости нефтяных масел, № 2, стр. 111.

Куликовский К. Л., Рустамзаде О. П. Гальванометрический компенсатор с емкостным преобразователем, № 6, стр. 11.

Лабскер Л. Г. Сумматорный аналог интегрального оператора Фейера—Валле—Пуссена, № 6, стр. 11.

Мальсагов А. У., Нани Р. Х., Насиров Я. Н. Исследование электропроводности и термоэдс  $\text{CuSbFe}_2$  в твердом и жидком состояниях, № 2, стр. 84.

Мамедкулиев Ш. Ф., Амензаде Ю. А. Кручение эллиптического бруса, в соосную, круговую полость которого впаина труба из другого материала, № 5, стр. 26.

Мамедов М. А. Окончательная орбита кометы 1941 I Кеннингема, № 4, стр. 128.

Мамедли Э. М. Контроль и диагностика неисправностей избыточной ЦВМ, построенной по мажоритарному принципу, № 1, стр. 56.

Мамедов (Хайями) К. М. О жизни и алгебраическом наследии известного восточного математика Омара Хайяма, № 3, стр. 48.

Мамедов Р. Г., Османов Г. И. Некоторые свойства преобразований Фурье и свойство коэффициентов ряда Фурье, № 2, стр. 15.

Мамедов А. М. Приближенное решение интегральных уравнений в классе  $\Omega(\delta, \rho, \sigma)$ , № 1, стр. 37.

Мамедов М. А. Определение орбиты кометы 1965 Секи-Икейя, № 1, стр. 96.

Мамедов Ш. Н., Нуруллаев Т. К. К определению некоторых величин буровзрывных работ при выемке тонких жил (на примере рудников Ингичка, Койташ Узбекской ССР), № 1, стр. 120.

Манюров Д. М. Об одном классе задач параметрического линейного программирования, № 4, стр. 62.

Манюров Д. М. Об одной задаче квадратичного параметрического программирования, № 6, стр. 11.

Марон В. И., Сафаров Г. Г. Движение пластинки в двухкомпонентной гетерогенной смеси, № 4, стр. 43.

Мехтиев И. Г. О рядах квазиполиномов, № 3, стр. 10.

Мехтиев А. К. О сжатии ударом цилиндрического образца, № 3, стр. 42.

Михлич С. Г. Об устойчивости вариационных методов, № 1, стр. 3.

Мугалов А. Г. Об интегрировании и дифференцировании под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа, № 6(стр. 22).

Мурадалиев Ф. Г. Исследование вертикального профиля ветра и его влияния на ветроколесо, № 4, стр. 113.

Мусаев М. А. Течение жидкости в пластах, разделяющихся частично перемычками, № 2, стр. 124.



Мустафаев Л. Г. Об идеальных эквивалентностях полугруд, № 6, стр. 30.

Мухтаров И. А., Мухтаров И. А. Об эффекте Штарка в молекулах типа асимметричного волчка с квадрупольным ядром, № 6, стр. 176.

Мышкин А. Д. О характерных чертах прикладной математики, № 5, стр. 24.

Наджафов Ю. Б., Шаулов Ю. Х. Энтальпия образования двуокиси кремния, № 2, стр. 81.

Намазов Г. К., Габеева А. А. Об одной задаче для выражающихся уравнений с разрывными коэффициентами, № 6, стр. 91.

Новрузов О. Н. Измерение температуропроводности полупроводников импульсным методом, № 2, стр. 91.

Пашаев А. М. К исследованию физических свойств полупроводников бесконтактными СВЧ методами, № 5, стр. 42.

Пашаев А. М., Иглицын М. И., Туркия И. Н. Приборы для измерения удельного сопротивления сильнолегированных полупроводников, № 1, стр. 85.

Рахманов П. А. Исследование отражения упруго-пластических волн в гибких пластинках, находящихся в сопротивляющей среде, № 3, стр. 25.

Самидов Х. С. Динамика торможения привода макета стола сверлильного станка с программным управлением, № 3, стр. 109.

Сафаров Г. Г. Отсасывание пограничного слоя при обтекании тел двухкомпонентной жидкостью, № 1, стр. 14.

Семенов В. С., Криман Р. И. Исследование влияния внутреннего испарительного охлаждения на температурное состояние цилиндрико-поршневой группы двигателя 4 ДВ=224, № 6, стр. 4.

Сулейманов Н. М. О корректной постановке краевых задач в полупространстве для дифференциального операторного уравнения с правой частью, № 3, стр. 3.

Тагиев И. Г. Решение краевых задач теории произвольных пологих цилиндрических оболочек методом малого параметра, № 6, стр. 3.

Тагиев М. А. Измерение поглощения и скорости распространения ультразвуковых волн в  $n$ -ксилоле,  $n$ -дихлорбензоле, бензоле и бензофеноне в области фазового перехода первого рода, № 3, стр. 62.

Тагиев Ф. А. Решение задачи трикомми с общим условием склеивания методом сеток, № 4, стр. 48.

Талиби М. А., Вердиева Т. М. и Крутенюк Е. Г. Влияние кристаллизации и состояния поверхности Se на формирование  $\text{Se}-\text{CdSe}$  и  $\text{Se}-\text{CdS}$ , № 2, стр. 101.

Талиби М. А., Лунев П. А., Кадымов Г. Г. Селеновые стабилитроны, № 4, стр. 91.

Талиби М. А., Азизов Г. С., Алиев М. М. Применение  $p-n$ -переходов для индикации ускоренных электронов с энергией 1—5 Мэв, № 5, стр. 47.

Теймуров Ф. Д. Задача перехода продольной волны через блок, № 4, стр. 37.

Халилов Х. М., Рзаев К. И. Температурная зависимость скорости распространения ультразвука в селене, № 3, стр. 71.

Халилов Х. М., Агаев А. И. Установка для измерения коэффициента поглощения и скорости распространения ультразвука в твердых телах в диапазоне частот 4—100 мГц, № 2, стр. 166.

Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Исследование влияния аннонов основания на неизомерические релаксационные свойства некоторых смешанных щелочно-галогенидных фосфоров, активированных серебром и медью, № 1, стр. 71.

Халилов Х. М., Рзаев К. И. Температурная зависимость скорости ультразвука в монокристалле  $\text{TiSe}$ , № 5, стр. 53.

Халилов Х. М., Агаев А. И. Поглощение ультразвука в монокристалле  $\text{KCl}$  в мегагерцном диапазоне частот, № 4, стр. 82.

Халилов А. Х., Алиева Т. Д. Исследование влияния термической обработки на спектры термостимулированной люминесценции  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров, № 5, стр. 53.

Хасмамедов Ф. И. Уравнения динамики двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками, № 6, стр. 3.

Чалъян К. М. Распределение напряженности магнитного поля и плотности тока в трубчатом токопроводе круглого сечения, № 3, стр. 116.

Шамиев Ф. Г. О проектировании кольцевой эллиптической пластинки минимального веса, № 4, стр. 23.

Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А., Курдюков Ю. М. К расчету переходных режимов в однофазном инвентаре, № 1, стр. 102.

Эфендизаде А. А., Сеидов Ю. М. К вопросу определения момента электромагнитного тормоза с применением теории векторного потенциала, № 5, стр. 86.

Якубов С. Я. Дифференциальные уравнения высших порядков с переменными неограниченными операторами в банаховом пространстве, № 1, стр. 20.

Якубов С. Я. Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа в банаховом пространстве, № 4, стр. 3.

## МҮНДЭРИЧАТ

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Н. К. Эскеров. Сәрһәд шәртиндә параметр олан ади дифференциал тәнлик үчүн сәрһәд мәсәләси . . . . .                                                   | 3   |
| Ариф Чәфәров. Функциянын Фурје-Штурм-Лиувил сырасынын орта әдәди чәмләри васитәсилә јахынлашдырылмасынын тәртиби һаггында . . . . .                   | 11  |
| Л. Г. Лабскер. Фејер-Валле-Пуссен интеграл операторунун чәмләмә аналогу . . . . .                                                                     | 16  |
| А. һ. Муғалов. Чезаро-Данижуа мәһнада интегралын интегралланмасы вә дифференциалланмасы һаггында . . . . .                                            | 22  |
| Л. Г. Мустафајев. Јарымгрудларын идеал еквивалентликләри һаггында                                                                                     | 30  |
| Г. К. Намазов, А. А. Бабајева. Кәсилән әмсаллы чырлашан тәнликләр үчүн гојулмуш бир мәсәлә һаггында . . . . .                                         | 36  |
| В. Д. һачыев. Башлангыч кәркиклик заманы өздү пластик системләрдә давамлылығын бәзи мәсәләләри . . . . .                                              | 36  |
| Г. Г. Әлијев. Дахили рабитәләрин кәрилмәси заманы цилиндрик өртүјүн мувзиннәти . . . . .                                                              | 51  |
| Б. Ә. Әһмәдов. Таваны кечиричи олан анизотроп лајда мәјенин ахыны                                                                                     | 56  |
| И. һ. Тағыјев. Ихтијари азгабарыглы цилиндрик өртүкләрин сәрһәд мәсәләләринин кичик параметр үсулу илә һәлли . . . . .                                | 60  |
| Д. М. Манјуров. Параметрик квадратик програмлашдырманын бир мәсәләси һаггында . . . . .                                                               | 66  |
| Һ. Б. Абдуллајев, М. И. Әлијев, Г. И. Сәфәрәлијев. Лекирәләнмиш $\text{GaSb}$ -дә кечиричилик вә фононларын сәпилмә механизмләри һаггында             | 69  |
| Һ. А. Мухтаров, Р. һ. Мухтаров. Квадрупол нүвәси олан асимметрик фырфыра типли молекуллардакы Штрак эффекти һаггында . . . . .                        | 76  |
| А' А. Әбдүррәһманов, Р. Ә. Рәһимова, Л. М. Иманов. $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ молекулунун микродалгадакы фырланма спектри . . . . . | 82  |
| Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхәјзер, У. В. Горин' П. В. Леонов. Диелектриклә һүдудлашмыш газ аралыгында бошалма . . . . .                                  | 87  |
| С. Н. һачыјев. Нәмәһәссас маддәләрин ректификасијасы үчүн колонка                                                                                     | 93  |
| К. Л. Куликовски, О. П. Рүстәмзәдә. Тутум чевричили галванометрик компенсатор . . . . .                                                               | 97  |
| Ф. И. Хасмәммәдов. Јаначаг ики ахынла верилән аки ахынлы гыздырычы радиант типли борулусу собаларын (радиант камерләрин) динамик тәнликләри . . . . . | 100 |
| В. С. Семенов, Р. И. Криман. Дахили бухарланма илә сојутманын температур вәзијјәтинә тәсиринин өјрәнилмәси . . . . .                                  | 113 |
| М. Ә. Бағыров. Нәрәкәтдә олан јангы зонасы шәраитиндә нефтли лајда температур саһәси . . . . .                                                        | 120 |



# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Н. К. Аскеров. Граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром в граничном условии . . . . .                                                       | 3   |
| Ариф Джафаров. О порядке приближения функции средними арифметическими суммами ее ряда Фурье—Штурма—Лиувилля . . . . .                                                          | 11  |
| Л. Г. Лабскер. Сумматорный аналог интегрального оператора Фейера—Валле—Пуссена . . . . .                                                                                       | 16  |
| А. Г. Мугалов. Об интегрировании и дифференцировании под знаком интеграла в смысле Чезаро—Данжуа . . . . .                                                                     | 22  |
| Л. Г. Мустафаев. Об идеальных эквивалентностях полугруд . . . . .                                                                                                              | 30  |
| Г. К. Намазов, А. А. Бабаева. Об одной задаче для вырождающихся уравнений с разрывными коэффициентами . . . . .                                                                | 36  |
| В. Д. Гаджиев. Некоторые задачи устойчивости упруго-пластических систем при наличии начальных напряжений . . . . .                                                             | 44  |
| Г. Г. Алиев. Устойчивость цилиндрической оболочки при натяжении связей . . . . .                                                                                               | 51  |
| Б. А. Ахмедов. Течение жидкости в анизотропном пласте с проницаемой кровлей . . . . .                                                                                          | 56  |
| И. Г. Тагиев. Решение краевых задач теории произвольных пологих цилиндрических оболочек методом малого параметра . . . . .                                                     | 60  |
| Д. М. Манюров. Об одной задаче квадратичного параметрического программирования . . . . .                                                                                       | 66  |
| Г. Б. Абдуллаев, М. И. Алиев, Г. И. Сафаралиев. О механизме проводимости и рассеяния фононов в легированном . . . . .                                                          | 69  |
| И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров. Об эффекте Штарка в молекулах типа асимметричного волчка с квадрупольным ядром . . . . .                                                       | 76  |
| А. А. Абдурахманов, Р. А. Рагимова, Л. М. Иманов. Микроволновой спектр $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$ . . . . .                                                  | 82  |
| Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, Ю. В. Горин, П. В. Леонов. Разряд в газовой полости ограниченной диэлектриком . . . . .                                                       | 87  |
| С. Н. Гаджиев. Колонка для ректификации влагочувствительных веществ . . . . .                                                                                                  | 93  |
| К. Л. Куликовский, О. П. Рустам-заде. Гальванометрический компенсатор с емкостным преобразователем . . . . .                                                                   | 97  |
| Ф. И. Хасмамедов. Уравнения динамики двухпоточных нагревательных трубчатых печей радиантного типа (радиантных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками . . . . . | 100 |
| В. С. Семенов, Р. И. Криман. Исследование влияния внутреннего испарительного охлаждения на температурное состояние цилиндрической группы двигателя 4 DV-224 . . . . .          | 113 |
| М. А. Багиров. Температурное поле в нефтеносном пласте при движущемся очаге горения . . . . .                                                                                  | 120 |
| Указатель . . . . .                                                                                                                                                            | 131 |

Подписано к печати 6/III 1967 г. Формат бумаги 70 × 108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. лист. 4,25.  
Печ. лист. 11,65. Уч.-изд. лист. 11,24. ФГ 10053. Заказ 536.  
Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Комитета по печати  
при Совете Министров Азербайджанской ССР.  
Баку, ул. Ази Асланова, 80.