

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1966

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
БАКЫ — БАКУ



Р. А. АББАСОВ

# О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть  $Q_n$  — класс равномерных почти-периодических функций  $n$  переменных, показатели Фурье которых по каждой переменной не имеют предельных точек на конечном расстоянии. Будем считать, что ряд Фурье почти-периодической функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$  записан следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim \sum_{m_1, \dots, m_n} A_{m_1, \dots, m_n} e^{i(\lambda_{m_1} x_1 + \dots + \lambda_{m_n} x_n)} \quad (1)$$

$$(\lambda_{m_j} = 0 \text{ при } m_j = 0, \lambda_{-m_j} = -\lambda_{m_j}, \lambda_{m_j} < \lambda_{m_j+1} \text{ при } m_j \leq 0;$$

$$\lim_{m_j \rightarrow \infty} \lambda_{m_j} = \infty, j = 1, 2, \dots, n).$$

Положим

$$\sup_{x_1, \dots, x_n} |f(x_1, \dots, x_n)| = \|f(x_1, \dots, x_n)\|,$$

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) = \inf_{C_{m_1, \dots, m_n}} \|f(x_1, \dots, x_n) -$$

$$- \sum \dots \sum_{|\lambda_{m_1}| < \mu_1, |\lambda_{m_n}| < \mu_n} C_{m_1, \dots, m_n} e^{i(\lambda_{m_1} x_1 + \dots + \lambda_{m_n} x_n)}\|,$$

$$\omega_{kj}(f; 0, \dots, \delta, \dots, 0) = \sup_{x_j} \left\{ \sup_{|h_j| < \delta} \left| \sum_{\nu_j=0}^{k_j} \right. \right.$$

$$\times (-1)^{\nu_j} \binom{k_j}{\nu_j} f(x_1, \dots, x_j + \nu_j h_j, \dots, x_n) \left. \right\},$$

$$(j = 1, 2, \dots, n).$$

В данной работе доказываются теоремы о наилучшем приближении почти-периодических функций многих переменных, частный случай которых является распространением соответствующих результатов Е. А. Бредихиной [3]. Пусть

$$\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n \varphi_{\mu_j}(t_j),$$

п 48773  
Центральная научная  
БИБЛИОТЕКА  
Академии наук Иргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор), Г. Б. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес редакции: Баку, Коммунистическая 10. «Известия Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».



где каждый множитель обладает следующими свойствами:

$$\varphi_{\mu_j}(0) = 1, \quad (2)$$

$$\varphi_{\mu_j}(t_j) = 0 \text{ при } |t_j| \geq \nu_j, \quad (3)$$

$$\psi_{\mu_j}(u_j) \in L(-\infty, \infty), \quad (4)$$

где

$$\psi_{\mu_j}(u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\mu_j}(t_j) e^{iu_j t_j} dt_j,$$

$$\psi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^n \psi_{\mu_j}(u_j).$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. Если  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ , то

$$\begin{aligned} & f_{[\mu_1, \dots, \mu_n]}^{[K_1, \dots, K_n]}(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \dots \sum_{\nu_n=1}^{K_n} (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \binom{K_1}{\nu_1} \dots \binom{K_n}{\nu_n} f(x_1 + \\ &+ \nu_1 u_1, \dots, x_n + \nu_n u_n) \psi_{\mu_1}(u_1) \times \psi_{\mu_2}(u_2) \dots \psi_{\mu_n}(u_n) du_1 \dots du_n = \\ &= \sum_{\lambda_{m_1} | < \mu_1 | \lambda_{m_1}} \dots \sum_{\lambda_{m_n} | < \mu_n | \lambda_{m_n}} A_{m_1, \dots, m_n} \times \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \dots \sum_{\nu_n=1}^{K_n} \times \\ &\times (-1)^{\nu_1 + \dots + \nu_n} \binom{K_2}{\nu_1} \dots \binom{K_n}{\nu_n} \varphi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(\nu_1 \lambda_{m_1}, \dots, \nu_n \lambda_{m_n}) \times \\ &\times e^{i(\lambda_{m_1} x_1 + \dots + \lambda_{m_n} x_n)} \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство приведем при  $n=2$ , так как количество переменных в изложении принципиального значения не имеет. В силу условий (4) непрерывность и почти-периодичность функции  $f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]} \times (x_1, x_2)$  следует из оценки

$$\begin{aligned} & |f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1 + \tau, x_2 + \eta) - f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1, x_2)| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} |f(x_1 + \nu_1 u_1 + \tau, x_2 + \\ &+ \nu_2 u_2 + \eta) - f(x_1 + \nu_1 u_1, x_2 + \nu_2 u_2)| du_1 du_2 \leq \sup_{x_1, x_2} |f(x_1 + \tau, x_2 + \eta) - \\ &- f(x_1, x_2)| \times \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| du_1 du_2. \end{aligned}$$

Вычислим коэффициент Фурье функции  $f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1, x_2)$ . Пусть  $B_{L, s}$  — коэффициент Фурье функции  $f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1, x_2)$ , соответствующий показателям  $\lambda_e, \lambda_s$ . Имеем

$$\frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1, x_2) e^{-i(\lambda_l x_1 + \lambda_s x_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) e^{i(\lambda_l \nu_1 u_1 + \lambda_s \nu_2 u_2)} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{4T^2} \int_{-T+\nu_1 u_1}^{T+\nu_1 u_1} \int_{-T+\nu_2 u_2}^{T+\nu_2 u_2} f(x_1, x_2) e^{-i(\lambda_l x_1 + \lambda_s x_2)} dx_1 dx_2 \right] du_1 du_2; \end{aligned}$$

применяя теорему о среднем ([1], стр. 399) и принимая во внимание, что по формуле обращения Фурье ([2], стр. 261, 267)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) e^{i(\lambda_l \nu_1 u_1 + \lambda_s \nu_2 u_2)} du_1 du_2 = \varphi_{\mu_1, \mu_2}(\nu_1 \lambda_l, \nu_2 \lambda_s), \quad (6)$$

получим

$$B_{L, s} = A_{L, s} \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} \varphi_{\mu_1, \mu_2}(\nu_1 \lambda_l, \nu_2 \lambda_s), \quad (7)$$

где  $A_{L, s}$  — коэффициент Фурье функции  $f(x_1, x_2)$ , соответствующий показателям  $\lambda_l, \lambda_s$ .

Из (7), (1) и (3) следует равенство (5).

Теорема 1. Если при  $k_j \geq 1$

$$u_j^{k_j} \psi_{\mu_j}(u_j) \in L(-\infty, \infty) \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

то для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) \leq \sum_{j=1}^n C_j^{k_1, \dots, k_n}(\nu_1, \dots, \nu_n) \omega_{k_j} \left( f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0 \right), \quad (9)$$

где  $C_j^{k_1, \dots, k_n}(\nu_1, \dots, \nu_n)$  — постоянная, зависящая только от  $n, k_1, \dots, k_n$  и  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .

Доказательство проведем для случая  $n=2$ . Из равенств (6) и (2) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 = 1. \quad (10)$$

В силу (10) и (5) имеем

$$\begin{aligned} & E_{\mu_1, \mu_2}(f) \leq \|f_{[\mu_1, \mu_2]}^{[K_1, K_2]}(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)\| \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} f(x_1 + \nu_1 u_1, x_2 + \nu_2 u_2) - \right. \\ & \quad \left. - f(x_1, x_2) \right| |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| du_1 du_2 \leq \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\nu_1=1}^{K_1} \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_1 + \nu_2} \binom{K_1}{\nu_1} \binom{K_2}{\nu_2} f(x_1 + \nu_1 u_1, x_2 + \nu_2 u_2) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_2-1} \binom{K_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + \nu_2 u_2) \right| |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| du_1 du_2 + \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\nu_2=1}^{K_2} (-1)^{\nu_2-1} \binom{K_2}{\nu_2} f(x_1, x_2 + \nu_2 u_2) - \right. \\ & \quad \left. - f(x_1, x_2) \right| |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| du_1 du_2 \leq \\ & \leq 2^{K_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| \omega_{K_1}(f; u_1, 0) du_1 du_2 + \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| \omega_{K_2}(f; 0, u_2) du_1 du_2. \end{aligned}$$



Пользуясь свойствами частных модулей гладкости, получим

$$E_{\mu_1, \mu_2}(f) \leq C_1^{K_1, K_2}(\mu_1, \mu_2) \omega_{K_1}\left(f; \frac{1}{\mu_1}, 0\right) + C_2^{K_1, K_2}(\mu_1, \mu_2) \omega_{K_2}\left(f; 0, \frac{1}{\mu_2}\right),$$

$$\text{где } C_1^{K_1, K_2}(\mu_1, \mu_2) = 2^{K_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| (1 + \mu_1 u_1)^{K_1} du_1 du_2,$$

$$C_2^{K_1, K_2}(\mu_1, \mu_2) = 2^{K_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_1, \mu_2}(u_1, u_2)| (1 + \mu_2 u_2)^{K_2} du_1 du_2,$$

т. е. доказываемое неравенство (9) для рассматриваемого нами случая функций двух переменных.

Следствие. Если  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$ ,  $u_j^{K_j} \psi_{\mu_j}(u_j) \in L(-\infty, \infty)$

$$(j = 1, 2, \dots, n), \quad \lim_{\mu_1, \dots, \mu_n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n C_j^{K_1, \dots, K_n}(\mu_1, \dots, \mu_n) \omega_{K_j} \times \\ \times \left(f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right) = 0,$$

то равномерно

$$\lim_{\mu_1, \dots, \mu_n \rightarrow \infty} f_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{[K_1, \dots, K_n]}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Следствие 2. Если при  $\mu_1, \dots, \mu_n \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_j}(u_j)| du_j = O(1), \quad \mu_j^{K_j} \int_{-\infty}^{\infty} |u_j^{K_j} \psi_{\mu_j}(u_j)| du_j = O(1) \\ (j = 1, 2, \dots, n),$$

то для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) \leq C_n^{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \omega_{K_j}\left(f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right), \quad (11)$$

где  $C_n^{K_1, \dots, K_n}$  — постоянная, зависящая только от  $n$  и  $K_1, \dots, K_n$ .

Рассмотрим следующий пример. Пусть  $j = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\mu_j(t) = \begin{cases} \frac{r_0^{2r_0-1}}{2^{r_0-1} \sum_{r=1}^{r_0} \frac{(-1)^r r^{2r_0-1}}{(r_0+r)! (r_0-r)!}} \left\{ \frac{|t_j|^{2r_0-1}}{(r_0!)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{r_0} \frac{(-1)^r \left[ \left( \frac{\mu_j r}{r_0} + |t_j| \right)^{2r_0-1} + \left( \left| \frac{\mu_j r}{r_0} - |t_j| \right| \right)^{2r_0-1} \right]}{(r_0+r)! (r_0-r)!} \right\} \\ 0 \quad \text{при } |t_j| < \mu_j, \\ \quad \text{при } |t_j| \geq \mu_j. \end{cases}$$

тогда

$$\psi_{\mu_j}(u_j) = \frac{(-1)^{r_0} (2^{r_0})^{-2}}{\pi \mu_j^{2r_0-1} \sum_{r=1}^{r_0} \frac{(-1)^r r^{2r_0-1}}{(r_0+r)! (r_0-r)!}} \left( \frac{\sin \frac{\mu_j u_j}{2r_0}}{u_j} \right)^{2r_0}.$$

Пусть  $2r_0 \geq K_j + 2$ , тогда равномерно относительно  $\mu_j$  имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\mu_j}(u_j)| du_j = O(1),$$

$$\mu_j^{K_j} \int_{-\infty}^{\infty} |u_j^{K_j} \psi_{\mu_j}(u_j)| du_j = O(1).$$

По следствию 2 теоремы 1 для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n$  имеем

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) \leq C_n^{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \omega_{K_j}\left(f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right). \quad (12)$$

Будем считать, что функция  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n^{(p_1, \dots, p_n)}$ , если  $f(x_1, \dots, x_n) \times \times \in Q_n$  и  $f(x_1, \dots, x_n)$  имеет равномерно непрерывную частную производную  $\frac{\partial p_j f}{\partial x_j^{p_j}} (j = 1, 2, \dots, n)$ . При этом считаем  $Q_n^{(p_1, \dots, p_n)} = Q_n$ .

Теорема 2. Для любой функции  $f(x_1, \dots, x_n) \in Q_n^{(p_1, \dots, p_n)}$  справедлива оценка

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) \leq C_n^{K_1+p_1, \dots, K_n+p_n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\mu_j^{p_j}} \omega_{K_j}\left(\frac{\partial p_j f}{\partial x_j^{p_j}}; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right). \quad (13)$$

Доказательство. Из (12) следует, что для функции  $f \in Q_n$  имеет место оценка

$$E_{\mu_1, \dots, \mu_n}(f) \leq C_n^{K_1+p_1, \dots, K_n+p_n} \sum_{j=1}^n \omega_{K_j+p_j}\left(f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right).$$

Отсюда в силу свойств частных модулей гладкости, т. е.

$$\omega_{K_j+p_j}\left(f; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right) \leq \frac{1}{\mu_j^{p_j}} \omega_{K_j}\left(\frac{\partial p_j f}{\partial x_j^{p_j}}; 0, \dots, \frac{1}{\mu_j}, \dots, 0\right)$$

следует доказываемое неравенство (13). Отметим, что теоремы 1 и 2 содержат в себе соответствующие теоремы о наилучших приближениях  $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими полиномами (см. [4], стр. 288).

В самом деле, пусть функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  задана во всем пространстве переменных  $x_1, \dots, x_n$  и имеет по каждой из этих переменных период  $2\pi$ .  $\bar{E}_{m_1, \dots, m_n}(f)$  — наилучшее приближение этой функции тригонометрическими полиномами порядка не выше  $m_1, \dots, m_n$ , тогда  $E_{m_1, \dots, m_n}(f) = \bar{E}_{m_1, \dots, m_n}(f)$ . Полагая  $\mu_j = m_j$ ,  $\lambda_{m_j} = m_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получим

$$\bar{E}_{m_1, \dots, m_n}(f) \leq C_n^{K_1, \dots, K_n} \sum_{j=1}^n \omega_{K_j}\left(f; 0, \dots, \frac{1}{m_j}, \dots, 0\right).$$

Аналогичные результаты справедливы и в пространстве  $S^p (p \geq 1)$  почти-периодических функций Степанова.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность моему руководителю доц. А. С. Джафарову за постановку задачи и руководство.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bochner S. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen; II Teil; Funktionen mehrerer Variablen, Math. Annalen, Bd. 93, 1927.
2. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз, М. 1962.
3. Бредихина Е. А. УМН, т. 15, вып. 5 (95), 19.0.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М. 1960.



# Чохдәјишәнли санки-периодик функцијаларын Фурје сырларынын чәмләнмәси һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә  $Q_n$  вә  $Q_n^{(p_1, \dots, p_n)}$  фәзаларына дахил олан функцијаларын гурулуш хусусијәтләри һаггында теоремләр исбат олунмушдур.

Г. Н. АГАЕВ

## К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА<sup>\*</sup>

М. И. Вишик [3, 4] в 1960—1963 годах широко исследовал разрешимость первой краевой задачи для выделенного им класса квазилинейных сильно эллиптических и параболических систем дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму, некоторыми аналогами метода Галеркина. Затем эти исследования Ф. Браудером [1, 2] были перенесены на более общие, так называемые монотонные дифференциальные уравнения. В 1965 году Ю. А. Дубинский [5, 6] дал простое доказательство теоремы существования М. И. Вишика и Ф. Браудера и получил ряд новых результатов для параболических уравнений, имеющих недивергентную форму, и вырождающихся квазилинейных эллиптических и параболических уравнений.

Целью настоящей работы являлось установление разрешимости нелинейных операторных уравнений в пространстве Гильберта и применение полученных общих результатов к краевым задачам для «эллиптических» дифференциальных уравнений. Пусть  $X$ ,  $Y$  суть гильбертово пространство, причем,  $X$  сепарабельно. Пространства линейных непрерывных функционалов, определенных на  $X$  и  $Y$ , обозначим через  $X^*$  и  $Y^*$ , соответственно. Рассмотрим операторы  $K_1, K_2, K_3$ , определяемые следующим образом:

1°. Оператор  $K_1$  линейный, действует из  $Y$  в  $X^*$ . Тогда его сопряженный  $K_1^*$  действует из  $X$  в  $Y^*$ . Пусть область определения оператора  $K_1^*$  всюду плотна в  $X$ , т. е.  $D(K_1^*) = X$ . Далее положим, что  $K_1^*$  полунепрерывен в смысле Ф. Браудера [2], т. е. всякую сильно сходящуюся к  $u \in D(K_1^*)$  последовательность он переводит в последовательность слабо сходящуюся к  $K_1^* u \in Y^*$ .

2°. Оператор  $K_2$ , вообще говоря, нелинейный, действует из  $X$  в  $Y$  и слабо непрерывен, т. е. всякую последовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу  $u \in X$ , он переводит в последовательность, слабо сходящуюся к  $K_2(u)$ .

3°. Оператор  $K_3$  также слабо непрерывен и действует из  $X$  в  $X^*$ .

4°. Кроме того, для некоторых  $\gamma > 0$ ,  $\alpha > 0$ , не зависящих от  $u \in X$ , выполняется неравенство

$$(K_2(u), K_1^* u) + (K_3(u), u) \geq \gamma \|u\|_X^2 - \alpha \quad (1)$$

<sup>\*</sup> Основные результаты работы доложены на Всесоюзной конференции по нелинейному функциональному анализу (г. Баку, октябрь, 1965 г.).



для всех  $u \in D(K_1^*)$ . Здесь  $(x, u)$  — значение функционала  $u$  в точке  $x$ .

Укажем одно из достаточных условий, при котором будет иметь место неравенство (1). Пусть:

$$а) (K_2(u), K_1^* u) \geq \gamma_0 \|u\|_X^2 - x_0$$

для любого  $u \in L(K_1^*)$ ,

$$б) \|K_3(u)\|_{X^*} \leq \eta \|u\|_X,$$

где  $\eta \geq 0$  — достаточно малое число.

Условия а) и б) выполняются, например, для эллиптических дифференциальных операторов в достаточно малых по диаметру областях, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим операторное уравнение вида

$$K_1 K_2(u) + K_3(u) = h, \quad (2)$$

где  $h \in X^*$  произвольно задан. Под слабым решением уравнения (2) в  $X$  понимается всякий элемент  $u \in X$ , для которого выполняется соотношение

$$(K_2(u), K_1^* v) + (K_3(u), v) = (h, v) \quad (3)$$

при любом  $v \in D(K_1^*)$ . Существование слабого решения уравнения (2) будем устанавливать методом Галеркина. Пусть система элементов  $\{v_\nu\}$ ,  $v_\nu \in D(K_1^*)$  является полной ортонормированной в пространстве  $X$ ;  $V^k$  — подпространство, натянутое на первые  $k$  элементов  $\{v_\nu\}$ , причем их объединение  $\bigcup_{k=1}^{\infty} V^k$  всюду плотно в  $D(K_1^*)$ . Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде

$$u_k = \sum_{\nu=1}^k C_{k\nu} v_\nu,$$

где  $C_{k\nu}$  определяются из системы

$$(K_2(u_k), K_1^* v_\nu) + (K_3(u_k), v_\nu) = (h, v_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots, k. \quad (4)$$

Разрешимость системы (4) относительно  $C_{k\nu}$  устанавливается на основании следующей леммы М. И. Визика [4].

**Лемма.** Пусть дана конечная система нелинейных уравнений

$$A_j(\vec{C}) \equiv A_j(C_1, C_2, \dots, C_k) = h_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (5)$$

или в векторной форме  $\vec{A}(\vec{C}) = \vec{h}$ ,

где  $A_j$  — непрерывные функции своих аргументов, определенные для

$$-\infty < C_i < +\infty. \text{ Если } (\vec{A}(\vec{C}), \vec{C}) = \sum_{j=1}^k A_j(\vec{C}) C_j \geq \gamma |\vec{C}|^p - K,$$

где  $p > 1$ , то система (5) имеет, по крайней мере, одно решение для любых правых частей  $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ .

Положим для нашего случая

$$A(C_1, C_2, \dots, C_k) = (K_2(u_k), K_1^* v_j) + (K_3(u_k), v_j), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

тогда ясно, что будет выполняться условие указанной леммы:

$$\begin{aligned} (\vec{A}(\vec{C}), \vec{C}) &= (K_2(u_k), K_1^* u_k) + (K_3(u_k), u_k) \geq \\ &\geq \gamma \|u_k\|^2 - x = \gamma \sum_{j=1}^k C_{kj}^2 - x = \gamma |\vec{C}|^2 - x. \end{aligned}$$

Следовательно, система (4) имеет хотя бы одно решение

$(C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{kn})$  при любом  $h \in X^*$ .

Умножая обе части (4) на найденные  $C_{kj}$  и просуммировав по  $i$  от единицы до  $k$ , затем к полученному применив неравенство (1), получаем

$$\begin{aligned} \gamma \|u_k\|_X^2 - x &\leq (h, u_k) \leq \|h\|_{X^*} \|u_k\|_X \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_k\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|h\|_{X^*}^2. \end{aligned}$$

Отсюда, взяв  $\varepsilon$  достаточно малым, мы получаем равномерно ограниченность всех галеркинских приближений

$$\|u_k\|_X \leq M,$$

где  $M > 0$  — некоторое число, которое не зависит от  $k$ .

В силу слабой компактности сферы в гильбертовом пространстве из последовательности  $\{u_k\}$  можно выделить слабо сходящуюся к некоторому  $u \in X$  подпоследовательность  $\{u_m\}$ .

Записав систему (4) для  $u_m$  и зафиксировав  $\nu$ , затем перейдя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , в силу слабой непрерывности  $K_2$  и  $K_3$  получаем

$$\begin{aligned} (K_2(u), K_1^* v_\nu) + (K_3(u), v_\nu) &= (h, v_\nu), \\ \nu &= 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $K_1^*$  полунепрерывен, то для каждого  $v \in D(K_1^*)$  можно найти такую последовательность из линейных оболочек, натянутых на элементы системы  $\{v_\nu\}$ , которая будет сходиться к  $v$ . Тогда очевидно, что соотношение (6) будет иметь место также для любого  $v \in D(K_1^*)$ :

$$(K_2(u), K_1^* v) + (K_3(u), v) = (h, v).$$

Итак доказана

**Теорема 1.** Если операторы  $K_1, K_2, K_3$  удовлетворяют условиям  $I^\circ - 4^\circ$ , то операторное уравнение (2) допускает слабое решение в  $X$ , которое может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

Далее отметим, что если помимо неравенства (1) предположить, что для операторов  $K_1^*, K_2$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} (K_2(u) - K_2(v), K_1^*(u - v)) + \\ + (K_3(u) - K_3(v), u - v) \geq \gamma \|u - v\|_X^2, \end{aligned} \quad (7)$$

то легко может быть доказана

**Теорема 2.** При выполнении условий  $I^\circ - 4^\circ$  и неравенств (1), (7) оператор  $K_1 K_2 + K_3$  осуществляет гомеоморфизм между пространствами  $X$  и  $X^*$ .

Для иллюстрации теории рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть дано квазилинейное уравнение

$$\begin{aligned} \Delta \left( 1 + f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \Delta u + g \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta u + \\ + g_1 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) = h, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\frac{\partial u}{\partial x}$  означает совокупность вида  $\left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ , а  $\Delta$  — оператор Лапласа. Для простоты положим, что  $f(x, \xi, \eta)$  неотрицательна, измерима по  $x \in \Omega$ , где  $\Omega$  — некоторая ограниченная область в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, непрерывная по  $\xi, \eta$  в  $\Pi = (-\infty < \xi < \infty, -\infty < \eta < \infty)$  и ограничена в топологическом произведении  $\Omega \times \Pi$  числом  $M$ . Условия же, наложенные на функцию  $g$  и  $g_1$  при-



водятся ниже. Требуется найти решение уравнения (8) в области  $\Omega$ , удовлетворяющее краевым условиям на ее границе  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Задачу (8) и (9) будем исследовать в вещественном пространстве  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ . Для простоты предположим, что для младших членов уравнения (8) выполняются условия:

$$a) \left| \left( g \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta u, u \right) \right| \leq \varepsilon \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2 + K(\varepsilon),$$

$$б) |g_1(x, \xi, \eta)| \leq M,$$

где  $\varepsilon$  может быть как угодно мало,  $K(\varepsilon)$  — функция от  $\varepsilon$ .

Неравенство а) выполняется, например, в следующих двух случаях:

$$1) |g(x, \xi, \eta)| \leq \varepsilon;$$

$$2) \text{ уравнение (8) рассматривается в достаточно малой области } \Omega \text{ и } |g(x, \xi, \eta)| \leq M_2.$$

Покажем, что во втором случае неравенства а) выполняется. Пусть  $d$  — диаметр области  $\Omega$ . Мы имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \left( g \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta u, u \right) \right| dx &\leq M_2 \int_{\Omega} |\Delta u| \cdot |u| dx \leq \\ &\leq M_2 \left[ \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx + K_1(\varepsilon) \int_{\Omega} |u|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C(d) \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2,$$

где  $C(d) \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ . Очевидно, также

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \leq C_1 \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2$$

$C_1 \geq 0$  — константа.

Итак, окончательно мы получаем

$$\int_{\Omega} \left| \left( g \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta u, u \right) \right| dx \leq m(\varepsilon) \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2,$$

$$\text{где } m(\varepsilon) = M_2(\varepsilon C_1 + K_1(\varepsilon) C(d)).$$

Ясно, что при достаточной малости  $\varepsilon$  и  $d$  требуемое неравенство выполняется.

Далее для функций  $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  имеет место также неравенство (см. работу [9] В. И. Юдовича)

$$\|\Delta u\|_{L_2(\Omega)} \geq a \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}, \quad \text{где } a \geq 0 \text{ — константа. Слабое решение задачи}$$

(8) и (9) будем понимать в смысле (3). Проверим выполнение условий, наложенных нами на операторы  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Проверим сначала неравенство (1):

$$\begin{aligned} (K_2(u), K_1^* u) + (K_3(u), u) = \\ \left( \left( 1 + f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \Delta u, \Delta u \right) + \left( g \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta u, u \right) + \\ \left( g_1 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), u \right). \end{aligned}$$

Обозначим два последних слагаемых через  $I_1, I_2$ , а левую часть целиком — через  $I$ . Тогда

$$I \geq \|\Delta u\|^2 - |I_1| - |I_2| \geq a \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2 - \varepsilon \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2 - K(\varepsilon) - |I_2|.$$

Имея в виду, что

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \left( g_1 \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right), u \right) \right| \leq M_1 |(1, u)| \leq \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + K_1(\varepsilon) \leq \varepsilon_1 \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2 + K_1(\varepsilon), \end{aligned}$$

будем иметь

$$(K_2(u), K_1^* u) + (K_3(u), u) \geq (a - \varepsilon - \varepsilon_1) \|u\|_{\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)}^2 - K_2(\varepsilon).$$

Подобрав  $\varepsilon$  и, следовательно,  $\varepsilon_1$  достаточно малыми, мы можем получить  $\gamma^2 = a - \varepsilon - \varepsilon_1 > 0$ , что указывает на выполнение неравенства (1).

Легко проверить, что  $K_2(u)$  слабо непрерывен. Действительно, пусть  $u_n$  слабо сходится в  $\dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$  к  $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2}$ , а следовательно и  $\Delta u$  будет слабо сходиться в  $L_2(\Omega)$ . При этом на основании теорем вложения С. Л. Соболева [8] последовательность  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  будет

сильно сходиться к  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  в  $L_2(\Omega)$ . На основании же известной теоремы из последовательности можно выделить почти всюду сходящуюся  $\{u_m\}$  подпоследовательность, причем  $\left\{ \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\}$  тоже будет почти

всюду сходиться к  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ . Так как  $\left| f \left( x, u, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right| \leq M$ , то по теореме Лебега [7]

$$\int_{\Omega} \left| f \left( x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) - f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 dx \rightarrow 0$$

при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $1 + f \left( x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right)$  сильно сходится в  $L_2(\Omega)$ , в этом случае последовательность

$$K_2(u_m) = \left( 1 + f \left( x, u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x} \right) \right) \Delta u_m$$

слабо сходится к  $K_2(u)$  при  $m \rightarrow \infty$ .

Аналогичный результат получается, если вместо ограниченности допустить линейный рост у функции  $f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ :

$$\left| f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right| \leq M_3 \left( 1 + |u| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right). \quad \text{Тогда ясно, что для любой}$$

функции  $u \in \dot{W}_2^{(2)}(\Omega)$ ,  $f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \in L_2(\Omega)$ . Кроме того, из сильной сходимости выделенных последовательностей

$$\{u_n\}, \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right\} \text{ в } L_2(\Omega)$$



вытекает их сходимость по мере, а отсюда легко получается сильная сходимость  $f\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right)$  в  $L_2(\mathcal{O})$ . Оператор же  $K_1 = K_1^* = \Delta$  действует из  $\dot{W}_2^{(2)}(\mathcal{O})$  в  $L_2(\mathcal{O})$  и слабо непрерывен, следовательно, полунепрерывен. Итак, имеет место

Теорема 3. Задача (8), (9) разрешима в слабом смысле и ее решение может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

Можно привести также некоторые примеры из теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с нелинейным оператором типа Немыцкого, разрешимость которого устанавливается на основании теоремы 1. В теореме 1 операторы  $K_2, K_3$  подчинены условиям слабой непрерывности  $1^\circ - 4^\circ$ . Теперь подчиним их более общим условиям, а именно: пусть операторы  $K_2, K_3$  полунепрерывны. При этом для разрешимости уравнения (2), помимо неравенства (1), требуется еще условие монотонности, а именно: пусть для любых пар  $u, \tau \in X$  выполняется неравенство

$$(K_2(u) - K_2(\tau), K_1^*(u - \tau)) + (K_1(u) - K_3(\tau), u - \tau) \geq 0. \quad (10)$$

Кроме того, предположим ограниченность операторов  $K_2, K_3$ , т. е. они любое ограниченное множество из  $X$  переводят в ограниченное множество в  $Y$ . Далее для простоты пусть  $L(K_1^*) = X$ .

Под слабым решением уравнения (2) будем понимать любой  $u \in X$ , для которого выполняется условие (3) при любом  $\tau \in X$ . Существование слабого решения уравнения (2) при новых предположениях будем также доказывать методом Галеркина. Пусть  $\{v_k\}$  — полная система в  $X$ . По-прежнему обозначим через  $V^k$  линейное подпространство, натянутое на первые  $k$  элементы системы. Приближенное решение  $u_k \in V^k$  уравнения (2) определим из соотношения (4), где  $\tau = v_k$  — любой элемент  $V^k$ . Существование такого решения также вытекает из вышеуказанной леммы. Для найденного  $u_k$  имеем

$$(K_2(u_k), K_1^* u_k) + (K_3(u_k), u_k) = (h, u_k),$$

откуда, применяя неравенство (1), можем получить равномерную ограниченность последовательности  $\{u_k\}$ :

$$\|u_k\|_X \leq M.$$

В силу слабой компактности сферы в пространстве Гильберта из  $\{u_k\}$  можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность  $\{u_m\}$ . Ее предел обозначим через  $u_0$ . Так как операторы  $K_2, K_3$  ограничены, то последовательности

$$\|K_2(u_m)\|_Y, \|K_3(u_m)\|_X \leq M_1.$$

Следовательно, мы можем выделить из них некоторые подпоследовательности  $\{K_2(u_r)\}, \{K_3(u_r)\}$ , сходящиеся к определенным элементам  $w_0 \in Y, w_0 \in X^*$ , соответственно.

Докажем, что для любого  $v \in X$

$$(w_0, K_1^* v) + (w_0, v) = (K_2(u_0), K_1^* v) + (K_3(u_0), v).$$

Пусть  $r \geq l$ , тогда в силу (4) имеем

$$(K_2(u_r), K_1^* v) + (K_3(u_r), v) = (h, v), \quad v \in V_l. \quad (4')$$

Здесь, зафиксировав  $l$  и при  $r \rightarrow \infty$  перейдя к пределу, получим

$$(w_0, K_1^* v) + (w_0, v) = (h, v), \quad v \in V^l. \quad (11)$$

Так как  $\bigcup_{l=1}^{\infty} V^l$  всюду плотно в  $X$ , то соотношение (11) остается справедливым для любого  $v \in X$ .

Далее в силу условий монотонности для любого  $w \in V^l$  имеет место неравенство

$$(K_2(u_r) - K_2(w), K_1^*(u_r - w)) + (K_3(u_r) - K_3(w), u_r - w) \geq 0. \quad (12)$$

Или, учитывая (4'), для  $v = u_r - w, w \in V^l$ , освобождаясь от нелинейности операторов  $K_2, K_3$ , неравенство (12) можем записать в виде

$$(h, u_r - w) - (K_2(w), K_1^*(u_r - w)) - (K_3(w), u_r - w) \geq 0.$$

Основываясь на свойстве полунепрерывности оператора  $K_1^*$  и перейдя в последнем неравенстве к пределу  $r \rightarrow \infty$ , получаем

$$(h, u_0 - w) - (K_2(w), K_1^*(u_0 - w)) - (K_3(w), u_0 - w) \geq 0. \quad (13)$$

Замыкая неравенство (13) по  $w \in \bigcup_{l=1}^{\infty} V^l$  в норме  $X$ , получаем

что оно верно и для любого  $w \in X$ .

Отсюда в силу (11) получаем

$$(w_0, K_1^*(u_0 - w)) + (w_0, u_0 - w) - (K_2(w), K_1^*(u_0 - w)) - (K_3(w), u_0 - w) \geq 0.$$

Следуя Ф. Браудеру, в этом неравенстве положим  $w = u_0 - \xi z, \xi > 0, z \in X$  и, сократив на  $\xi$ , получаем

$$(w_0 - K_2(u_0 - \xi z), K_1^* z) + (w_0 - K_3(u_0 - \xi z), z) \geq 0.$$

Переходя к пределу при  $\xi \rightarrow 0$ , в силу полунепрерывности  $K_2, K_3$  получаем

$$(w_0 - K_2(u_0), K_1^* z) + (w_0 - K_3(u_0), z) \geq 0.$$

Заменив здесь  $z$  на  $-z$ , получаем требуемый результат. Учитывая соотношение (11), получаем, что  $u_0$  является слабым решением уравнения (2). Итак, доказана

Теорема 4. Пусть  $X, Y$  суть два гильбертовых пространства, причем  $X$  сепарабельно. Пусть оператор  $K_1^*$  линейный, полунепрерывный и действует из  $X$  в  $Y^*$ , операторы же  $K_2, K_3$ , вообще говоря, нелинейные, ограничены и полунепрерывны, причем  $K_2$  действует из  $X$  в  $Y$ , а  $K_3$  из  $X$  в  $X^*$ , и такие, что для них выполняются неравенства (1), (10). Тогда операторное уравнение (2) имеет хотя бы одно слабое решение и это решение может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

Заметим, что решение широкого класса краевых задач сводится к решению рассмотренного операторного уравнения типа (2). В том числе к уравнению (2) сводятся краевые задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, вариации которых не обладают свойством сильной эллиптичности и монотонности. Например, простой дифференциальный оператор вида

$$L(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (1 + a_i(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

в пространстве  $\dot{W}_2^{(1)}(\mathcal{O})$  при произвольном  $a_i(u)$  не сильно эллиптически и не монотонен, но удовлетворяет условиям теоремы 1, если ввести следующие вектор-операторы:

$$K_2(u) = (K_{21}(u), K_{22}(u), \dots, K_{2n}(u)), \\ K_1^* = (K_{11}^*, K_{12}^*, \dots, K_{1n}^*),$$



с их действием

$$K_{2j}(u) = (1 + a_j(u)) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad K_{1j}^* = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$(K_2(u), K_1^*v) = \sum_{i=1}^n (K_{2i}(u), K_1^*v).$$

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Браудер Ф. Е. Нелинейные эллиптические граничные задачи. Материалы к совещанию советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными. Новосибирск, август, 1963.
- 2 Browder F. E. Non-linear elliptic boundary value problems. Bull. Amer. math. soc. v. 69, № 6, (1963).
- 3 Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений. Матем. сб., 57(10), 1962.
- 4 Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму. Тр. Москов. матем. об-ва, т. 12 (1963).
- 5 Дубинский Ю. А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях. Матем. сб., т. 67 (109), вып. 4, 1965.
- 6 Дубинский Ю. А. Некогого бы результаты теории разрешимости нелинейных эллиптических и параболических уравнений любого порядка. Докл. научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964—1965 г., МЭИ, 1965.
- 7 Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.
- 8 Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
- 9 Юдович В. И. Некоторые оценки решений эллиптических уравнений. Матем. сб., т. 59 (101), 1962.

## h. H. Afajev

## Гилберт фазасында геҗри-хәтти оператор тәнликләрин нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә (2) тәнлијинин һәлл едилә билмәси һаллары арашдырылмышдыр. Бурада  $K_1$  оператору верилмиш  $X$ —һилберт фәзасындан  $U$  фәзасына тә'сир едир. Бу операторун гошмасы  $K_1^*$  илә көстәрилик вә  $X$ -дән  $U^*$ -ә тә'сир едир.  $K_2$  оператору үмумијәтлә гејрихәтти олмагла,  $X$ -дән  $U$ -ә тә'сир едир вә јарымкәсилмәздир, јәни  $\{u_n\}$  ардычыллығы  $u$ -ја зәиф јығыларса,  $\{K_2(u_n)\}$  дә  $K(u)$ -ја зәиф јығылар.  $K_3$  дә јарымкәсилмәздир,  $X$ -дән  $X^*$ -ә тә'сир едир вә (1) бәрабәрсизлији тә'мин едилир.

Һәм мин шәртләр дахилиндә Галеркин үсулу илә (3) мә'насында (2) оператор тәнлији зәиф һәллинин варлығы исбат едилир. Бунунла јанашы, (7) бәрабәрсизлији тә'мин едилдикдә һәллин јеканәлији дә тә'мин олунур, беләиклә дә  $X$  вә  $X^*$  фәзалары арасында изоморфизм дүзәлдилмиш олур.

Даһа сонра мөгаләдә  $K_2$  оператору үзәринә голулан шәрт бир гәдәр азалдылыр, я'ни һәмнин операторун һәр бир күчлү жығылан ардычыллыгы эәиф жығылан ардычыллыға кечиртдији фәрз едиләрәк, (9) монотонлуг шәрти дахилиндә (2) тәнлији арашдырылмышдыр. Мөгаләдәки мисалдан ајдын олур ки, һәмнин схем әдәбијјатда мә'лум олмајан һаллары да әһатә едир.

АЗЭРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ  
Физика-техника və рижатификат елмлери серијасы, 1966, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 5

А. С. ДЖАФАРОВ

# О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ ПОСРЕДСТВОМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В настоящее время вопросы приближения функций на отрезке и на оси исследован достаточно полно. Но этого нельзя сказать о многообразиях, находящихся в евклидовом пространстве. В настоящей работе делается некоторая попытка в этом направлении. Рассмотрим функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ , принадлежащие классам  $H_{rn}^{(r)}$ , которые введены С. М. Никольским [1],  $m$ -мерное многообразие  $S$ , определяемое при соответствующей нумерации осей координат уравнениями:

$$x_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1, \dots, x_m);$$

$$x_n = c_n(x_1, \dots, x_n),$$

когда точка  $(x_1, \dots, x_m)$  пробегает некоторую ограниченную  $m$ -мерную область  $G$ . При этом функции  $\varphi_k (k = m+1, \dots, n)$  на  $G$  имеют непрерывные частные производные порядков по меньшей мере  $r+1$ , а  $r$  определяется так:  $r = \bar{r} + \alpha$ ;  $\bar{r}$  — неотрицательное целое число,  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Кроме этого, предполагается, что с каждой точкой  $P \in S$  можно связать  $n-m$  единичных векторов:

$$\vec{N}_{m+1}, \dots, \vec{N}_n,$$

ортогональных между собой и таких, что каждый из них ортогонален линейному касательному в точке  $P$  к  $S$  многообразию. При этом проекции указанных векторов

$$\bar{N}_j(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_j^{(n)}) \quad (j = m+1, \dots, n)$$

суть функции от  $x_1, \dots, x_m$ , имеющие непрерывные частные производные порядков до  $r+1$  включительно.

Так как мы будем рассматривать функцию  $f \in H_{rn}^{(n)}$  на  $S$ , то должны себе представить, что мы понимаем под значением функции  $f$  на  $S$ . Если функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  непрерывна, то ясно, что значение ее на  $S$  есть функция

$$F(x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n)$$

от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , определенная на  $m$ -мерной области  $G$ . В общем случае, когда функция  $f$  необязательно непрерывна, она определена на  $E$  только с точностью до меры нуль, и поэтому



значение функции  $f$  на  $S$  остается неопределенным. Будем определять его, следуя С. М. Никольскому, следующим образом.

Зададим произвольные вещественные числа

$$h_{m+1}, \dots, h_n$$

и определим на  $G$  функцию

$$f\left(x_1 + \sum_{j=m+1}^n \alpha_1^{(j)} h_j, \dots, x_m + \sum_{j=m+1}^n \alpha_m^{(j)} h_j, \varphi_{m+1} + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{m+1}^{(j)} h_j, \dots, \varphi_n + \sum_{j=m+1}^n \alpha_n^{(j)} h_j\right) = F(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) = \bar{F}_h$$

от переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Под значением функции  $f$  на  $S$  будем понимать такую функцию  $F$  от  $x_1, \dots, x_m$ , для которой имеет место соотношение

$$\lim_{\sum_{k=m+1}^n |h_k| \rightarrow 0} \int \dots \int |F_h - F|^p dx_1 \dots dx_m = 0,$$

какова бы ни была область  $G_1$ , замыкание которой принадлежит  $G$ .

С. М. Никольский показал, что всегда функция  $f$  имеет значение  $F$  на  $S$ , в вышеуказанном смысле, если выполняется неравенство

$$\rho = r - \frac{n-m}{p} > 0$$

и, кроме того, функция  $F$  не зависит от выбора нормальных векторов  $\bar{N}_{m+1}, \dots, \bar{N}_n$ .

Зададим произвольную область  $Q_1$  такую, что  $G_1 \subset G$  и пусть  $S'$  — часть  $S$ , соответствующая области  $G_1$ .

Рассмотрим следующие равенства:

$$u_i = x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_i^{(j)} h_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

$$u_k = \varphi_k + \sum_{j=m+1}^n \alpha_k^{(j)} h_j \quad (k=m+1, \dots, n);$$

(1) определяет преобразование точек  $(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n)$  некоторого пространства  $R_n^*$  в точки  $(u_1, \dots, u_n)$  пространства  $R_n$ . Если обозначить через  $D$  Якобиан этого преобразования в точке  $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , то, как показал С. М. Никольский [2], в наших условиях  $|D| \geq 1$ . Поэтому каждую точку  $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  можно окружить шаром  $v \in E_n^*$  с центром в этой точке, настолько малого радиуса, что он преобразуется при помощи преобразований (1) взаимно однозначно в некоторую область  $\Delta \subset E_n$ , содержащую точку  $u_1 = x_1, \dots, u_m = x_m, u_{m+1} = \varphi_{m+1}, \dots, u_n = \varphi_n$ . Обозначим через  $w^{(e)}$  область, состоящую из точек  $R_n^*$ , находящихся от  $\bar{G}_1$  на расстоянии меньшем, чем  $\epsilon$ , при этом  $\bar{G}_1$  —  $n$ -мерная область, состоящая из точек  $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , у которых  $(x_1, \dots, x_m) \in \bar{G}_1$ .

Как показал С. М. Никольский, при достаточно малом  $\epsilon$  вся область  $W^{(e)}$  отображается при помощи преобразований в некоторую область  $R_n$  взаимно однозначно и при этом можно считать, что на  $W^{(e)}$  Якобиан преобразования (1) больше по абсолютной величине некоторой положительной постоянной.

С другой стороны, так как  $f \in H_{pn}^{(r)}$ , в силу одной нашей теоремы [3] существует целая функция  $Q_\nu(x_1, \dots, x_n)$  степени  $\nu$  относи-

тельно переменных  $x_1, \dots, x_n$  такая, что

$$\|D^\gamma f - D^\gamma Q_\nu\|_p \leq \frac{c(\|f\|_p + M)}{\sqrt[r]{r-\gamma}}; \quad \nu = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где  $c$  не зависит от  $f$  и  $\nu$ ,  $0 < \gamma < r$ ,  $D^\gamma$  — оператор дифференцирования порядка  $\gamma$ . Предположим теперь, что выполняется неравенство

$$\left[ \frac{n-m}{p} \right] + 1 < r,$$

где  $[a]$  означает целую часть числа  $a$ .

Тогда в силу (2)  $f - Q_\nu$  принадлежит классу

$$H_{pn}^{\left(\left(\frac{n-m}{p}\right)+1\right)} \left( \frac{2c(\|f\|_p + M)}{\sqrt[r]{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} \right).$$

Поэтому в силу того, что функции  $u_j$  ( $j=1, \dots, n$ ), определяющие преобразование (1), имеют непрерывные частные производные порядка  $r+1$ , функции  $u_j$  осуществляют взаимно однозначное отображение области  $W^{(e)}$  на некоторую область  $E_n$  и при этом на  $W^{(e)}$  Якобиан преобразования (1) больше по абсолютной величине некоторой положительной постоянной на основании леммы 2.4 работы [2] С. М. Никольского мы можем сказать, что функция

$$\begin{aligned} \bar{F}_h = f & \left( x_1 + \sum_{j=m+1}^n \alpha_1^{(j)} h_j, \dots, x_m + \sum_{j=m+1}^n \alpha_m^{(j)} h_j, \varphi_{m+1} + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{m+1}^{(j)} h_j, \dots, \varphi_n + \sum_{j=m+1}^n \alpha_n^{(j)} h_j \right) - \\ & - Q_\nu \left( x_1 + \sum_{j=m+1}^n \alpha_1^{(j)} h_j, \dots, x_m + \sum_{j=m+1}^n \alpha_m^{(j)} h_j, \varphi_{m+1} + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{m+1}^{(j)} h_j, \dots, \varphi_n + \sum_{j=m+1}^n \alpha_n^{(j)} h_j \right) \end{aligned}$$

принадлежит классу  $H_p^{\left(\left[\frac{n-m}{p}\right]+1\right)} \left( W^{(e)}; \frac{c(\|f\|_p + M)}{\sqrt[r]{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} \right)$ , причем

$\|\bar{F}_h\|_{L_p(W^{(e')})} \leq \frac{c_1 M}{\sqrt[r]{r}}$ , где  $0 < \epsilon' < \epsilon$  и  $c_1$  не зависит от  $f$  и  $\nu$ . Функцию

$\bar{F}_h$  мы можем продолжить на основании теоремы 2.2 работы [2] С. М. Никольского за пределы  $W^{(e')}$ , где  $0 < \epsilon'' < \epsilon' < \epsilon$ , так что продолженная функция  $\bar{F}_h = \bar{F}(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n)$  будет принадлежать классу

$$H_p^{\left(\left[\frac{n-m}{p}\right]+1\right)} \left( \frac{c_2(\|f\|_p + M)}{\sqrt[r]{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} \right)$$

и не норма будет не больше  $\frac{c_2 M}{\sqrt[r]{r}}$ , где  $c_2$  не зависит от  $f$  и  $\nu$ . По-

этому на основании теорем вложения С. М. Никольского [1] для  $h_{m+1} = 0, \dots, h_n = 0$  существует значение функции  $\bar{F}_h$ , которая обозначается через  $\bar{F}_{(0)} = \bar{F}(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ , т. е.

$$\lim_{\sum_{j=m+1}^n |h_j| \rightarrow 0} \|\bar{F}_h - \bar{F}_{(0)}\|_p^{(m)} = 0, \quad (3)$$



и для этого значения справедлива оценка

$$\|\bar{F}_{(0)}\|_p^{(m)} \leq \frac{c_2(\|f\|_p + M)}{v^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}}, \quad (4)$$

где  $c_2$  не зависит от  $f$  и  $v$ .

Но в силу того, что на  $W^{(s)}$  выполняется равенство  $\bar{F}_{(h)} = \bar{F}_{(h)}$ , из (3) получим

$$\lim_{\sum_{k=m+1}^n |h_k| \rightarrow 0} \|\bar{F}_{(h)} - \bar{F}_{(0)}\|_{L_p^{(m)}(G_1)} = 0. \quad (5)$$

Выше, исходя из данной функции  $f(u_1, \dots, u_n)$ , пользуясь преобразованием (1), мы ввели функцию  $F_{(h)} = F(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n)$ . Теперь аналогичную функцию определим исходя из функции  $Q(u_1, \dots, u_n)$ , т. е. положим

$$R_{(h)} = R(x_1, \dots, x_m, h_{m+1}, \dots, h_n) = Q\left(x_1 + \sum_{j=m+1}^n c_1^{(j)} h_j, \dots, x_m + \sum_{j=m+1}^n c_m^{(j)} h_j, \varphi_m + \sum_{j=m+1}^n c_{m+1}^{(j)} h_j, \dots, \varphi_n + \sum_{j=m+1}^n c_n^{(j)} h_j\right).$$

Таким образом,  $F_{(h)} = \bar{F}_{(h)} + R_{(h)}$ . Так как  $Q(u_1, \dots, u_n)$  является целой функцией своих аргументов и по нашему условию  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n$  непрерывны в  $G$ , то  $R_{(h)}$  является непрерывной функцией своих аргументов на  $W^{(s)}$ .

Поэтому существует предел

$$\lim_{\sum_{j=m+1}^n |h_j| \rightarrow 0} \|R_{(h)} - R_{(0)}\|_{L_p^{(m)}(G_1)} = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$\|F_{(h)} - (\bar{F}_{(0)} + F_{(0)})\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq \|F_{(h)} - R_{(h)} - \bar{F}_{(0)}\|_{L_p^{(m)}(G_1)} + \|R_{(h)} - R_{(0)}\|_{L_p^{(m)}(G_1)}.$$

Из (5) и (6) получаем, что

$$\lim_{\sum_{j=m+1}^n |h_j| \rightarrow 0} \|F_{(h)} - (\bar{F}_{(0)} + R_{(0)})\|_{L_p^{(m)}(G_1)} = 0.$$

Отсюда в силу определения значения функции  $f$  на  $S$  заключаем, что  $\bar{F}_{(0)} + R_{(0)}$  является значением функции  $f$  на  $S$ , которую обозначим через  $f|_S$ , т. е.  $f|_S = \bar{F}_{(0)} + R_{(0)}$ .

Аналогично

$$Q|_S = R_{(0)} = Q(x_1, \dots, x_m, \varphi_{m+1}, \dots, \varphi_n),$$

Таким образом,  $\bar{F}_{(0)} = f|_S - Q|_S$  и поэтому на основании (4) имеем

$$\|f|_S - Q|_S(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq \frac{c_3(\|f\|_p + M)}{v^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}}, \quad (7)$$

где  $c_3$  не зависит от  $f$  и  $v$ , а  $G_2$  — произвольная область, для которой  $\bar{G}_1 \subset G$ .

Для простоты дальнейшего рассуждения предположим, что  $n=2$ ,  $m=1$ . При  $\gamma=0$  из (2) имеем, что

$$\|Q\|_p^{(n)} \leq c_4(\|f\|_p + M),$$

где  $c_4$  не зависит от  $f$  и  $v$ .

Отсюда в силу неравенства С. М. Никольского и С. Н. Бернштейна

$$|D^k Q| \leq c_5 v^{k+\frac{n}{p}},$$

где  $c_5$  не зависит от  $v$ . Далее обозначим через  $P_l(x_1, \varphi_2)$  многочлен вида

$$P_l(x_1, \varphi_2) = \sum_{k_1=0}^l \sum_{k_2=0}^l \frac{1}{k_1! k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2} Q(0, 0)}{\partial x_1^{k_1} \partial \varphi_2^{k_2}} x_1^{k_1} \varphi_2^{k_2}.$$

Тогда из (7) и (8) будем иметь

$$\|f|_S - P_l(x_1, \varphi_2)\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq \|f|_S - Q|_S\|_{L_p^{(m)}(G_1)} + \|Q|_S - P_l(x_1, \varphi_2)\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq \frac{c_3(\|f\|_p + M)}{v^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} +$$

$$+ \left\| \sum_{k_1=l+1}^{\infty} \frac{1}{k_1!} \cdot \frac{\partial^{k_1} Q(0, \varphi_2)}{\partial x_1^{k_1}} x_1^{k_1} + \sum_{k_2=l+1}^{\infty} \frac{1}{k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_2} Q(x_1, 0)}{\partial \varphi_2^{k_2}} \varphi_2^{k_2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k_1=l+1}^{\infty} \sum_{k_2=l+1}^{\infty} \frac{1}{k_1! k_2!} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2} Q(0, 0)}{\partial x_1^{k_1} \partial \varphi_2^{k_2}} x_1^{k_1} \varphi_2^{k_2} \right\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq$$

$$\leq \frac{c_3(\|f\|_p + M)}{v^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} + \left\| \sum_{k_1=l+1}^{\infty} \frac{c_5 v^{k_1+\frac{n}{p}} |x_1|^{k_1}}{k_1!} \right\|_{L_p^{(m)}(G_1)} +$$

$$+ \left\| \sum_{k_2=l+1}^{\infty} \frac{c_5 v^{k_2+\frac{n}{p}} |\varphi_2|^{k_2}}{k_2!} \right\|_{L_p^{(m)}(G_1)} + \left\| \sum_{k_1=l+1}^{\infty} \sum_{k_2=l+1}^{\infty} \frac{c_5 v^{k_1+k_2+\frac{n}{p}} |x_1|^{k_1} |\varphi_2|^{k_2}}{k_1! k_2!} \right\|_{L_p^{(m)}(G_1)} \leq$$

$$\leq \frac{c_3(\|f\|_p + M)}{v^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} + \frac{c_6 v^{l+1+\frac{n}{p}} A_1^l e^{\Lambda_1}}{(l+1)!} +$$

$$+ c_7 \frac{v^{l+1+\frac{n}{p}} A_2^l e^{\Lambda_2}}{(l+1)!} + c_8 \frac{v^{l+1+\frac{n}{p}} A_2^l e^{\Lambda_2}}{(l+1)!} \cdot \frac{v^{l+1+\frac{n}{p}} A_2^l e^{\Lambda_2}}{(l+1)!},$$

где  $c_6, c_7, c_8$  не зависят от  $v$  и  $l$ , и

$$A_1 = \max |x_1|, \quad A_2 = \max |\varphi_2|$$

при этом  $\max$  берутся по всем координатам, когда точка находится в  $G_1$ .

Пусть теперь  $v = [\gamma e]$ , где  $\gamma$  — достаточно малая величина. Пользуясь формулой Стирлинга:

$$k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-(k+1)},$$

где  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_k = 0$ , легко показать, что последовательность

$$I_k = \frac{\gamma^k k^{k+1+\frac{n}{p}} c^k e^{\gamma k c}}{(k+1)!} \quad (c > 0),$$

стремится к нулю как некоторая геомет-



рическая прогрессия. Поэтому, если в оценке пользоваться заменой  $v = [r, l]$ , мы получим, что при  $l \rightarrow \infty$

$$\|f|_s - P_l\|_{L_{p(G_1)}^{(m)}} \leq \frac{C_3 (\|f\|_p + M)}{l^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} + \theta_1^l + \theta_2^l,$$

где  $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ .

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** Если  $f \in H_{pn}^{(r)}$ , где  $r, n, p$  такие что,

$$r - 1 - \left[ \frac{n-m}{p} \right] > 0, \quad 1 \leq m < n,$$

$S$  удовлетворяют вышеуказанным условиям, то для достаточно больших  $k$  существует алгебраический полином  $P_k(u_1, \dots, u_n)$  степени  $k$  относительно каждого из переменных и такой, что выполняется неравенство

$$\|f|_s - P_k|_s\|_{L_{p(G_1)}^{(m)}} \leq \frac{d (\|f\|_p + M)}{k^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}},$$

где  $d$  не зависит от  $k$  и  $f$ , а  $C_1$  — произвольная область в  $E^{(m)}$ , для которой  $\bar{G}_2 \subset G$ .

Далее рассмотрим следующий более общий класс функций. Пусть  $f \in L_p^{(n)}$  и имеет несмешанные частные производные  $\frac{\partial^s f}{\partial x_i^s} \in L_p^{(n)}$  и для всех вещественных  $h$  имеем

$$\left\| \Delta_{x_i h_i}^2 \frac{\partial^s f}{\partial x_i^s} \right\| \leq \psi(|h|), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Совокупность всех таких функций  $f(x_1, \dots, x_n)$  обозначим через  $H_{pn}^{(s, \psi)}$ , если  $\psi(\delta)$  удовлетворяют  $(L_2)$  условию С. М. Лозинского (см., например, [4]).

Аналогичным рассуждением можно доказать следующую теорему. При этом ряд фактов, на которые мы ссылались при доказательстве предыдущей теоремы, либо имеют аналог для класса  $H_p^{(r, \psi)}$  в наших работах, либо доказывается совершенно аналогично соответствующему факту, установленному С. М. Никольским.

**Теорема.** Если  $f \in H_{pn}^{(s, \psi)}$ ,  $s, n, p$  такие, что функция

$$\delta^{s-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]} \psi(\delta)$$

удовлетворяет  $(L_1)$  условию С. М. Лозинского, а  $1 \leq m < n$ ,  $S$  удовлетворяет вышеуказанным условиям, то для достаточно больших  $k$  существует алгебраический полином  $P_k(u_1, \dots, u_n)$  степени  $k$  относительно каждого из переменных и такой, что

$$\|f|_s - P_k|_s\|_{L_{p(G_1)}^{(m)}} \leq d \cdot \frac{1}{k^{r-1-\left[\frac{n-m}{p}\right]}} \psi\left(\frac{1}{k}\right),$$

где  $d$  не зависит от  $k$ , а  $G_1$  — произвольная область в  $E^{(m)}$  для которой  $\bar{G} \subset G$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38, 1951.
2. Никольский С. М. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. Матем. сб. (новая серия), т. 33, вып. 2, 1953.
3. Джафаров А. С. ДАН Азерб. ССР\*, 1964.
4. Барн Н. К. и Стечкин С. Б. Тр. Московского матем. об-ва, т. 5, 1956.

Ә. С. Чәфәров

**Функцијаларын чоҳобразлы үзәриндә чоҳһәдлиләр  
васитәсилә ән јахшы јахынлашмасынын тәртиби һаггында**

ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда С. М. Николскинин  $H_{pn}^{(r)}$  синфиндән олан функцијаларын  $m$  өлчүлү чоҳобразлы үзәриндә  $m$  дәјишәнли вә һәр бир дәјишәнә нәзәрән  $k$  дәрәчәли чоҳһәдлиләр васитәсилә јахынлашмасынын орта сүр'әти өјрәнилмишидир.



А. Д. МЫШКИС

## О ХАРАКТЕРНЫХ ЧЕРТАХ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ\*

Развитие математики определяется двумя основными движущими силами: „внешней“, связанной с необходимостью решения математическими средствами задач естествознания, техники и народного хозяйства, и „внутренней“, вытекающей из необходимости систематизации найденных фактов и выяснения их взаимосвязей. Эти два направления часто трудно разграничить, однако в историческом процессе то одно, то другое выдвигается на передний план; им отвечают два направления в математике, которые можно условно назвать „прикладным“ и „теоретическим“.

В настоящее время преобладающим направлением, по-видимому, является теоретическое, причем современный стиль теоретической математики происходит из известных работ второй половины XIX века по аксиоматике, теории множеств и теории функций. Эти работы, глубоко прогрессивные для своего времени, превратили значительную часть математики в единую науку, с едиными требованиями к определениям, утверждениям и доказательствам, с единым понятием строгости. Сейчас этими нормами пользуется почти вся теоретическая математика, за исключением, пожалуй, лишь математической логики. Но новый стиль имеет органические недостатки: задерживается развитие исследований, не удовлетворяющих поставленным нормам строгости, затрудняется оценка актуальности результатов, значительные усилия затрачиваются на изучение объектов, являющихся лишь логическими следствиями из принятой системы аксиом.

В последние годы в связи с проникновением математики во все отрасли науки и хозяйства значительно усилилось прикладное направление. Можно ожидать, что в ближайшие десятилетия именно оно выдвинется на передний план, если не произойдет синтеза обоих направлений. Если теоретическая математика ставит во главу логическую цельность и полное логическое обоснование на установившемся (относительно не абсолютном!) уровне строгости, то основной задачей прикладной математики является своевременное и экономное по затраченным усилиям решение поставленной задачи: правильное качественное описание фактов, доведение решения до числа и т. п.

Теоретическая и прикладная математика отличаются по характеру применяемой логики: если первая безраздельно опирается на дедуктивную логику и закон исключенного третьего, то вторая столь же широко применяет индуктивную логику и „правдоподобные“ рас-

суждения. Логика прикладной математики, хотя и не является настолько канонизированной, как логика теоретической, все же имеет ряд стихийно установившихся черт: способов вывода, критериев обоснованности и достоверности и т. д. При этом аналогичные способы и критерии, известные в теоретической математике, в приложениях зачастую оказываются излишними или даже отказываются.

Типичное различие в обоих подходах проявляется при применении бесконечных процессов. Пусть, например, решение какой-либо задачи получается с помощью метода итераций. С точки зрения теоретической математики метод считается обоснованным, если доказана его сходимость. Однако в подавляющем большинстве случаев этот результат, строго говоря, не имеет отношения к практическому применению метода, так как обычно не изучаются вопросы о том, на какой итерации нужно остановиться; выполняются ли все условия, которые предположены при доказательстве сходимости (например, можно ли считать заданные параметры малыми); как влияют ошибки округления, если итерации практически совпали, и т. п. Если и имеются теоретические результаты в этих направлениях, то практически они используются крайне редко (мы уже не говорим о том, что законность применения математики ко многим реальным задачам нельзя обосновать с позиций теоретической математики). Тем не менее бесконечные процессы широко и успешно применяются на основе „нестрогости“ с точки зрения теоретической математики понятия „практической сходимости“, являющегося доказательным для прикладной математики (при этом современная вычислительная техника значительно повышает эту практическую доказательность, хотя с позиций теоретической математики значение техники пока ничтожно). Основным критерием достоверности результата является совпадение по многим пунктам приближенных представлений решения, полученных с помощью априори не скоррелированных методов. Применяются сравнения в „типичных“ предположениях решений, полученных по различным приближенным или численным методам, сравнение с экспериментом и т. п.

Такие „нестрогие“ рассуждения применяются не только в вычислениях, но и при качественном исследовании фактов. Среди приемов рассуждений, типичных для прикладной математики, можно отметить: доказательство на частном случае или на модели; рассуждение по аналогии; применение актуальной бесконечности; игнорирование формально логических следствий, неадекватных изучаемому кругу вопросов; применение понятий вне рамок их первоначального определения и т. д. Эти приемы дают возможность более гибко приспособить рассуждения к решению указанных выше основных задач прикладной математики. Имеются средства повышения степени правдоподобия рассуждений (аналог осреднения, отсечение неверных выводов). В то же время из правдоподобных утверждений логически можно получить и заведомо ошибочные результаты; каждый такой случай обогащает наши знания о правилах применения правдоподобных рассуждений.

По-видимому, надо признать объективное существование логики прикладной математики и попытаться развить ее. Сочетание дедукции и индукции, „точных“ и правдоподобных рассуждений, логических выводов и численных и физических экспериментов значительно расширит арсенал используемых математических методов. При этом чисто дедуктивные выводы сохраняют не только теоретическое, но и прикладное значение в качестве одного из доводов в обоснование достоверности применяемых методов.

В заключение отметим важность систематического обучения стилю современной прикладной математики как физиков, инженеров и т. д., так и математиков.

\* Тезисы доклада, прочитанного на заседании Азерб. матем. об-ва 15 июня 1966 г.



Ю. А. АМЕНЗАДЕ, Ш. Ф. МАМЕДУЛИЕВ

# КРУЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БРУСА, В СООСНУЮ, КРУГОВУЮ ПОЛОСТЬ КОТОРОГО ВПАЯНА ТРУБА ИЗ ДРУГОГО МАТЕРИАЛА

1. Рассмотрим кручение эллиптического бруса, в продольную круговую полость которого вставлена труба из другого материала, спаянная с брусом вдоль общей боковой поверхности. Ось трубы совпадает с осью эллиптического бруса. За плоскость  $z = x + iy$  возьмем

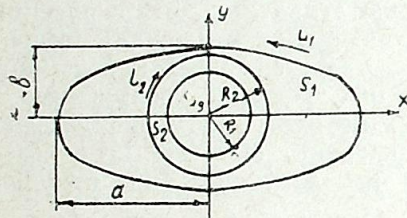


Рис. 1

какое-нибудь сечение составного бруса; поместим начало координат в его центре и направим оси координат  $x$  и  $y$  по осям симметрии сечения (рис. 1). Обозначим через  $S_1$  двусвязную область, ограниченную извне эллипсом  $L_1$  с полуосями  $a$  и  $b$ , а изнутри окружностью  $L_2$  радиуса  $R_2$ ; через  $S_2$  — двусвязную область, ограниченную извне окружностью  $L_2$  и изнутри  $L_3$  радиуса  $R_1$ . Области  $S_j$  ( $j = 1, 2$ )

заполнены материалом с различными модулями упругости и одинаковыми коэффициентами Пуассона.

Как известно [2], определение возникающего при кручении напряженного состояния составного бруса сводится к нахождению двух функций:  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  от одного комплексного переменного, регулярных соответственно в областях  $S_1$  и  $S_2$  и удовлетворяющих крайним условиям:

$$F_1(t) + \overline{F_1(t)} = t \cdot \bar{t} + C_1 \quad \text{на } L_1, \quad (1, 1)$$

$$\mu_1 [F_1(t) + \overline{F_1(t)}] - \mu_2 [F_2(t) + \overline{F_2(t)}] = (\mu_1 - \mu_2) t \bar{t} \quad \text{на } L_2, \quad (1, 2)$$

$$[F_1(t) - \overline{F_1(t)}] - [F_2(t) - \overline{F_2(t)}] = 0 \quad \text{на } L_2, \quad (1, 3)$$

$$F_2(t) + \overline{F_2(t)} = t \bar{t} + C_2 \quad \text{на } L_3, \quad (1, 4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — неизвестные вещественные постоянные, одну из них можно выбрать произвольно, например, возьмем

$$C_2 = -t \bar{t} = -R_1^2;$$

$\mu_j$  — соответственно, модуль сквида среды  $S_j$  ( $j = 1, 2$ ).

Следуя работе [3], вводим на  $L_1$  чисто мнимую функцию, удовлетворяющую равенству

$$F_1(t) - \overline{F_1(t)} = 2\omega(t) \quad \text{на } L_1. \quad (1, 5)$$

Сложив почленно (1, 1) и (1, 5), на  $L_1$  будем иметь

$$F_1(t) = \omega(t) + \frac{1}{2} t \bar{t} + C_1. \quad (1, 6)$$

На основании свойств интеграла типа Коши соотношение (1, 6) может быть записано в форме

$$\begin{aligned} F_1(t_0) - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{изнутри } L_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{изнутри } L_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t \bar{t}}{t - z} dt + C_1 = \\ = - \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{извне } L_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ \text{извне } L_1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t \bar{t}}{t - z} dt. \end{aligned} \quad (1, 7)$$

Введем в области  $S_1$  новую, регулярную в ней функцию

$$F(z) = F_1(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t \bar{t}}{t - z} dt + C_1; \quad (1, 8)$$

$F(z)$  регулярна вне  $L_2$  и обращается в нуль на бесконечности. Функцию  $F(z)$  возьмем в виде бесконечного ряда

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left( \frac{R_2}{z} \right)^k. \quad (1, 9)$$

Разложим первый интеграл в равенстве (1, 8) внутри круга, вписанного в эллипс:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t - z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \left( \frac{z}{A} \right)^k, \quad (1, 10)$$

где 
$$\eta_k = \frac{A^k}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t^{k+1}} dt.$$

С помощью функции

$$z = A \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad 2A = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \rho = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (1, 11)$$

отобразим внешность эллипса на внешность окружности  $\gamma$  радиуса  $\rho > 1$  в плоскости  $\xi$ . Обратив (1, 11) получим

$$\xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - 4A^2}}{2A}.$$

Здесь выбрано то значение  $\xi$ , в которое радикал входит со знаком плюс, так как при отображении бесконечно удаленная точка в плоскости  $\xi$  должна перейти в бесконечно удаленную точку плоскости  $z$ . На окружности  $\gamma$  функцию  $\omega(t) = \omega^*(\tau)$  возьмем в виде ряда Фурье

$$\omega(\tau) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[ \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^k - \left( \frac{\rho}{\tau} \right)^k \right]. \quad (1, 12)$$

Учитывая (1, 12) и (1, 11) и используя разложение бинома для первого интеграла в равенстве (1, 8), находим



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(2A\rho)^k} \sum_{v=0}^k C_k^v \sum_{k_1=0}^v (2A)^{2k_1} D_{k_1}^{(v)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t^{k-2k_1}}{t-z} dt, \quad (1, 13)$$

где введены обозначения

$$D_0^{(v)} = a_0^*, D_{k_1}^v = \frac{1}{k_1 a_0} \sum_{m=1}^{k_1} [m(v+1) - k_1] a_m^* D_{k_1-m}^{(v)}, a_{k_1}^* = (-1)^{k_1} C_{k_1}^{k_1}.$$

Интегралы  $I_{-k} = \dots = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^{-k}}{t-z} dt$  в равенстве (1, 13) приняты равными нулю, так как подынтегральная функция регулярна вне  $L_1$  и обращается в нуль на бесконечности и точка  $z$  лежит внутри  $L_1$ . Следовательно, для точек  $z$ , лежащих внутри  $L_1$ , имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(2A\rho)^k} \sum_{v=0}^k C_k^v \sum_{k_1=0}^{E(k_2)} D_{k_1}^{(v)} (2A)^{2k_1} z^{k-2k_1}. \quad (1, 14)$$

Здесь  $E(k_2)$  означает любое целое число. Вводим новый индекс  $n = k - 2k_1$ , отсюда  $k_1 = \frac{k-n}{2}$ ,

$$n_{\min} = E_1(k) = k - 2E(k_2), n_{\max} = k.$$

Изменяя порядок суммирования в тройных суммах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\omega(t)}{t-z} dt = \sum_{n=-1}^{\infty} d_n z^n + d_0 + c_0, \quad (1, 15)$$

где

$$d_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{(2A)^n \rho^k} \sum_{v=0}^k C_k^v D_{k/2}^{(v)},$$

$$d_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\rho^k} \sum_{v=0}^k C_k^v D_{k/2}^{(v)}, \quad H_0 = d_0 + a_0.$$

Звездочка над знаком суммы указывает, что индекс при переходе к смежному значению увеличивается на 2.

Вычисляя второй интеграл, в (1, 8) имеем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{t\bar{t}}{t-z} dt = \frac{z^2}{2\rho^2} + \frac{A^2}{2} \left( \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right). \quad (1, 16)$$

Учитывая формулы (1, 9) (1, 14), (1, 16) в (1, 8), найдем

$$F_1(z) = H_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{z} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n + \frac{z^2}{2\rho^2} + \frac{A^2}{2} \left( \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + C_1.$$

Выражение для функции  $F_1(z)$  подставим в уравнение (1, 5), тогда на  $L_1$  будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{t} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n + \frac{1}{2\rho^2} (t^2 - \bar{t}^2) + H_0 - \bar{H}_0 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{\bar{t}} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} d_n \bar{t}^n = 2\omega(t). \quad (1, 17)$$

В уравнении (1, 17) при помощи (1, 11) переходим от переменной  $t$  к  $\tau$ . Вычислим все члены в отдельности:

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{A} \right)^n \sum_{v_1=0}^{\infty} C_{-n}^{v_1} \tau^{-n-2v_1},$$

вместо  $v_1$  возьмем индекс  $v_2 = n + 2v_1$ , отсюда  $v_1 = \frac{v_2 - n}{2}$ ,

$$v_{2\min} = n, \quad v_{2\max} = \infty.$$

Тогда

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{A} \right)^n \sum_{v_2=n}^{\infty} C_{-n}^{v_2} \tau^{-v_2}.$$

Меняя порядок суммирования в двойной сумме, получим

$$F(t) = \sum_{v_2=1}^{\infty} \tau^{-v_2} \sum_{n=v_2-2E(v_2/2)}^{v_2} a_n \left( \frac{R_2}{A} \right)^n C_{-n}^{v_2} \tau^{-v_2}. \quad (1, 18)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n A^n \sum_{v_1=0}^n C_n^{v_1} \tau^{n-2v_1}.$$

Вместо  $v_1$  возьмем  $v_3 = -n + 2v_1$ , отсюда  $v_1 = \frac{v_3 + n}{2}$ ,

$$v_{3\min} = -n, \quad v_{3\max} = n.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} d_n A^n \sum_{v_3=-n}^n C_n^{v_3} \tau^{-v_3}.$$

Изменим порядок суммирования

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n = \sum_{v_3=0}^{\infty} \tau^{-v_3} \sum_{n=v_3}^{\infty} d_n A^n C_n^{v_3} + \sum_{v_3=1}^{\infty} \tau^{-v_3} \sum_{n=v_3}^{\infty} d_n A^n C_n^{v_3} \tau^{-v_3}. \quad (1, 19)$$

Учитывая (1, 18), (1, 19) в уравнении (1, 17), получим

$$\sum_{v=1}^{\infty} P_v \left[ \frac{\rho^v}{\tau^v} - \frac{\tau^v}{\rho^v} \right] + \sum_{v=0}^{\infty} q_v \left[ \frac{\rho^v}{\tau^v} - \frac{\tau^v}{\rho^v} \right] - \sum_{v=1}^{\infty} r_v \left[ \frac{\rho^v}{\tau^v} - \frac{\tau^v}{\rho^v} \right] +$$

$$+ H_0 - \bar{H}_0 + \frac{A^2}{2\rho^2} \left[ \frac{\rho^2}{\tau^2} - \frac{\tau^2}{\rho^2} \right] \left( \frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right) = 2a_0 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} a_v \left[ \frac{\rho^v}{\tau^v} - \frac{\tau^v}{\rho^v} \right], \quad (1, 20)$$



где

$$p_v = \frac{1}{\rho^v} \sum_{n=v-2E(v/2)}^v a_n \left( \frac{R_2}{A} \right)^n C_{-n}^{\frac{v-n}{2}}$$

$$q_v = \frac{1}{\rho^v} \sum_{n=v}^{\infty} d_n A^n C_n^{\frac{v+n}{2}}, \quad r_v = \rho^v \sum_{n=v}^{\infty} d_n A^n C_n^{\frac{n-v}{2}}.$$

Приравнявая в обеих частях равенства (1, 20) коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$  и  $\frac{1}{\tau}$ , будем иметь

$$p_v + q_v - r_v + \varepsilon_v \left[ \frac{A^2}{2\rho^2} \left( \frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right) \right] = -2a_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots), \quad (1, 21)$$

где

$$\varepsilon_v = \begin{cases} 1 & \text{при } v = 2 \\ 0 & \text{при } v \neq 2. \end{cases}$$

2. Функцию  $F_2(z)$  в областях  $S_2$  ищем в виде ряда Лорана:

$$F_2(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ b_n \left( \frac{z}{R_1} \right)^n + b_{-n} \left( \frac{R_1}{z} \right)^n \right]. \quad (2, 1)$$

значение  $F_2(z)$  из (2, 1) подставим в условие (1, 4);

$$b_0 + \bar{b}_0 = 0, \quad b_n + b_{-n} = 0,$$

тогда

$$F_2(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \left( \frac{z}{R_1} \right)^n - \left( \frac{R_1}{z} \right)^n \right]. \quad (2, 2)$$

Умножив равенство (1, 3) на  $\rho^v$  и сложив с равенством (1, 2), в полученное условие подставляем выражения  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$ , тогда

$$(\mu_1 - \mu_2) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{R_2}{t} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n t^n + \frac{t^2}{2\rho^2} + \frac{A^2}{2} \left( \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + H_0 \right] +$$

$$+ (\mu_1 - \mu_2) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{t}{R_2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \left( \frac{R_2^2}{t} \right)^n + \frac{R_2^4}{t^2} \cdot \frac{1}{2\rho^2} + \frac{A^2}{2} \left( \rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) + \bar{H}_0 \right] -$$

$$- 2\mu_2 \left[ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[ \left( \frac{t}{R_1} \right)^n - \left( \frac{R_1}{t} \right)^n \right] \right] = (\mu_1 - \mu_2) R_2^2 \quad \text{на } L_2. \quad (2, 3)$$

Отсюда найдем

$$a_n = B_n d_n + \varepsilon_n E_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = B_n^* d_n + \varepsilon_n E_n^*$$

где

$$B_n = - \frac{(\mu_1 + \mu_2) R_1^{2n} + (\mu_1 - \mu_2) R_2^{2n}}{(\mu_1 + \mu_2) R_2^n + (\mu_1 - \mu_2) \frac{R_1^{2n}}{R_2^n}},$$

$$B_n^* = - \frac{-2\mu_1 R_2^{2n}}{(\mu_1 + \mu_2) \frac{R_2^{2n}}{R_1^n} + (\mu_1 - \mu_2) R_1^n};$$

$$E_n = - \frac{(\mu_1 + \mu_2) R_1^{2n} + (\mu_1 - \mu_2) R_2^4}{(\mu_1 + \mu_2) R_2^n + (\mu_1 - \mu_2) \frac{R_1^{2n}}{R_2^n}} \cdot \frac{1}{2\rho^2},$$

$$E_n^* = - \frac{(\mu_1 + \mu_2)^2 R_2^{2n} - (\mu_1 - \mu_2)^2 R_2^4}{2\mu_2 \left[ (\mu_1 + \mu_2) \frac{R_2^{2n}}{R_1^n} + (\mu_1 - \mu_2) R_1^n \right]} \cdot \frac{1}{2\rho^2};$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq 2, \\ 1 & \text{при } n = 2. \end{cases}$$

Вычисление значений  $d_n$  показывает, что они в точности совпадают со значением  $\gamma_n/A^n$  (коэффициенты (1, 10)). Поскольку выражения для  $d_n$  немного сложнее, заменяем его более простым:

$$\gamma_n = A^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot \frac{\alpha_k}{\rho^k} \cdot \frac{1}{A^n} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В формулах (2, 3) для  $a_n$  и  $b_n$  заменяем  $d_n$  на  $\gamma_n/A^n$ :

$$a_n = \frac{\gamma_n}{A^n} \cdot B_n + \varepsilon_n E_n,$$

$$b_n = \frac{\gamma_n}{A^n} \cdot B_n^* + \varepsilon_n E_n^*$$

Учитывая  $a_n$  в уравнении (1, 20), получим

$$\frac{1}{\rho^v} \sum_{n=1}^v \left( \frac{R_2}{A} \right)^n C_{-n}^{\frac{v-n}{2}} B_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot \frac{\alpha_k}{\rho^k} \cdot \frac{1}{A^n} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^v} \sum_{n=v}^{\infty} C_n^{\frac{n+v}{2}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot \frac{\alpha_k}{\rho^k} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} - \rho^v \sum_{n=v}^{\infty} C_n^{\frac{n-v}{2}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{n} \cdot \frac{\alpha_k}{\rho^k} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^v} \sum_{n=1}^v \varepsilon_n E_n C_{-n}^{\frac{v-n}{2}} \left( \frac{R_2}{A} \right)^n + \frac{A^2}{2\rho^2} \varepsilon_v \left( \frac{1}{\rho^2} - \rho^2 \right) = -2a_v, \quad (v = 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$\varepsilon_n = \varepsilon_v = \begin{cases} 0 & \text{при } n = v \neq 2, \\ 1 & \text{при } n = v = 2. \end{cases}$$

Изменяя порядок суммирования и учитывая, что свободный член существует только при  $n = 2$ , будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_k \left\{ \frac{k}{\rho^k} \left[ \sum_{n=2}^{E(k,v)} \left( \frac{R_2}{A} \right)^n C_{-n}^{\frac{v+n}{2}} B_n \cdot \frac{1}{n \cdot A^n} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \varepsilon_v \sum_{n=v}^k \frac{1}{n} C_{-n}^{\frac{k-n}{2}} \left( C_n^{\frac{v+n}{2}} - \rho^{2v} C_n^{\frac{n-v}{2}} \right) \right] \right\} + 2a_v \rho^v =$$







Для этого примера из (2, 4) берем первые восемь уравнений. Значения коэффициентов  $a_k, b_k, \gamma_k, \epsilon_k$  приведены в табл. 1, а коэффициентов  $C_{k,v}$  и свободных членов  $f_v$  — в табл. 2. Чтобы выяснить, насколько точно найденная при помощи решения укороченной системы (2, 4) функция  $F_1(\cdot)$  удовлетворяет граничному условию (1, 1) возьмем для рассматриваемого примера в наиболее характерных точках  $t=a, t=ib$  величины

$$\Delta\% = \frac{F_1(t) + \overline{F_1(t)} - \bar{t}\bar{t}}{t\bar{t}} \cdot 100\%.$$

Значения  $\Delta\%$ , характеризующие степень точности, с которой найденная функция  $F_1(\cdot)$  удовлетворяет граничным условиям в указанных точках, соответственно равны 0,09 и 3,4%.

При известных функциях  $F_j(\cdot)$  ( $j=1, 2$ ) составляющие касательного напряжения в сечениях бруса находятся из формулы

$$X_z^{(j)} - iY_z^{(j)} = i\mu_j \frac{M}{D} \left[ \frac{dF_j}{dz} - \bar{z} \right] \quad (2, 5)$$

в области  $S_j$  ( $j=1, 2$ ), где  $M$  — величина приложенного к брусу крутящего момента,  $D$  — жесткость кручения рассматриваемой среды. Во всех точках контура  $L_1$  полные касательные напряжения.

$$\tau_z = \sqrt{X_z^2 + Y_z^2}. \quad (2, 6)$$

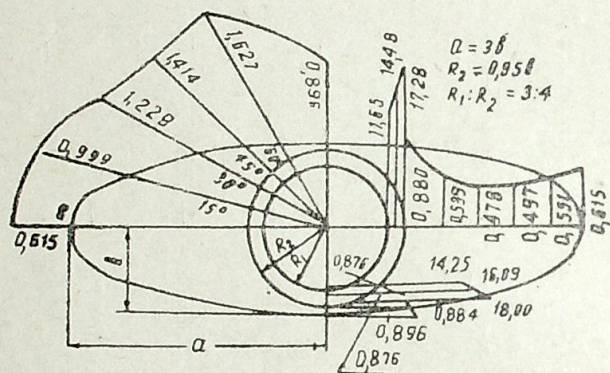


Рис. 2

Значения  $X_z, Y_z, \tau_z$ , подсчитанные по формулам (2, 5), (2, 6), сведены в табл. 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Ю. А. Кручение призматического бруса с квадратным сечением армированного круговым стержнем. Сообщ. АН Груз. ССР, т. XIII, № 3, 1957; "Изв. АН Азерб. ССР", № 2, 1958.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
3. Шерман Д. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инженерный сб. Ин-та механики АН СССР, т. X, 1951.
4. Шерман Д. И., Народецкий М. З. О кручении некоторых призматических полых тел. Инженерный сб. Ин-та механики АН СССР, т. IV, 1950.

Л. Э. Эмензаде, Ш. Ф. Маммадгулиев

#### Ен кәсији еллипс олан, мұхтәлиф материаллардан һазырланмыш призматик брусун бурулмасы

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә охлары бир-биринин үзәринә дүшмәк шәрти илә кејдириләрәк јан сәһләри бојунча бирләшдирилмиш мұхтәлиф бирчинсли, изотроп материаллардан һазырланмыш призматик брусун бурулмасы мәсәләсинә бахылмышдыр. Брусун кәсији ичәрисиндән һәр һансы радиуслу мәркәзи даирәви һиссә чыхарылмыш, һәмин һиссәјә галынлығы  $R_2 - R_1$  олан бору мөһкәмләдилмишдир (1-чи шәклә бах). Бурулмада кәркинликләрин тапылмасы үчүн лазым олан  $F_1(z), F_2(z)$  регулјар вә (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) шәртини өдәјән функцијалар тапылмышдыр.

Кәсијин характерик нөгтәләриндә тохунан кәркинлик епүрләри гурулмушдур (2-чи шәкил).



Я. И. ГЕОЗАЛОВ

# ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости тривиального решения системы третьего порядка вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$i = 1, 2, 3$$

где  $X_i$  — квадратные функции относительно своих аргументов.

Классическая теория устойчивости Ляпунова состоит в формулировке условий, при которых вопрос об устойчивости произвольных систем

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

сводится к вопросу об устойчивости линеаризованной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = P_{i1}x_1 + \dots + P_{in}x_n = f_i(x_1, \dots, x_n),$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

где  $f_i$  — линейные члены в разложении функции  $X_i$  в степенной ряд,  $P_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) — постоянные коэффициенты. Критерий устойчивости для системы (2) формулируется чисто алгебраически, т. е. все корни характеристического уравнения для системы (2) должны лежать в левой полуплоскости. Кроме этого общего результата, были исследованы некоторые критические случаи.

А. М. Ляпунов [1] исследовал случай системы второго порядка с нулевыми собственными значениями, а позже [2] — случай системы  $(n+2)$  порядка: когда имеется два нулевых корня, а все остальные корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части.

Однако эта задача исследована в случае, когда линейные члены, соответствующие нулевым корням, не полностью исчезают (Жорданова клетка второго порядка). Задача для случая диагональной матрицы с двумя нулевыми корнями была исследована независимо от Каменкова [3]. Более общее исследование для таких систем, только в другом направлении, проведено Малкиным [5].

## Понятие инвариантного луча

В работе А. М. Молчанова [5] показано, что на однородные системы можно перенести важное понятие линейных систем — понятие собственного направления. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(x), \quad (3)$$

где  $x$  — вектор,  $A(x)$  вектор-функция  $x$ , компоненты которой однородные (относительно  $x$ ) многочислены. Будем искать решение системы (3) в виде

$$x(t) = \varphi(t)\xi. \quad (4)$$

При подстановке (4) в (3) переменные разделяются и получаем (аналогично методу Фурье)

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = E\varphi^n(t), \quad (5)$$

$$A(\xi) = E\xi.$$

Уравнение (6) в случае линейности  $A(\xi)$  есть характеристическое уравнение системы (3). В общем случае, при  $n \neq 1$ , решая уравнение (5), получаем

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{\sqrt[n-1]{1 - (n-1)\varphi_0^{n-1}(t-t_0)E}}. \quad (7)$$

С другой стороны, в системе (6)  $\xi$  определяется как функция параметра  $E$ .

Сделаем в (6) замену

$$\xi = \alpha\eta, \quad (8)$$

$$A(\alpha\eta) = E\alpha\eta. \quad (9)$$

В силу однородности  $A(\xi)$  относительно своих аргументов (допустим порядок  $m$ ) получаем, что

$$A(\alpha\eta) = \alpha^m A(\eta).$$

Тогда (9) дает

$$\alpha^m A(\eta) = E\alpha\eta,$$

$$\alpha^{m-1} A(\eta) = E\eta. \quad (10)$$

Выберем  $\alpha$  таким, чтобы

$$\alpha^{m-1} = E, \quad (11)$$

тогда из (10) имеем,

$$A(\eta) = \eta, \quad (14)$$

Если уравнение (12) имеет решение, то из (8) и (11) получаем

$$\xi = E^{\frac{1}{m-1}}\eta. \quad (13)$$

Из (13) вытекает, что при  $m$  четном ( $m = 2k, k \geq 1$ ) изменение параметра  $E$  от минус до плюс бесконечности порождает в пространстве  $\{\xi\}$  прямую, проходящую через начало координат. Если же  $m = 2k + 1$ , тогда  $E$  может принимать только положительные значения и получается луч при изменении  $E$  от нуля до плюс бесконечности. Именно эти лучи назовем инвариантными.

Исследуем инвариантный луч, соответствующий  $\varphi_0 > 0$ , согласно (7) на устойчивость. Из (7) непосредственно имеем, что при  $n = 2$  возможны три случая:

1.  $E$  — отрицательно, тогда  $\varphi(t)$  стремится к нулю со скоростью  $t^{-1}$  при  $t \rightarrow \infty$ ;



2.  $E$  — положительно, решение имеет полюс\* в точке  $t_k$  и  $\varphi(t) \rightarrow \infty$ , когда  $t \rightarrow t_k$ , т. е.

$$t_k - t_0 = \frac{1}{(n-1)\varphi_0^{n-1}E};$$

3.  $E = 0$ , получаем  $\varphi(t) = \varphi_0$ , т. е. инвариантная прямая распадается на стационарные точки.

Если для четных  $n$  инвариантный луч  $\varphi_0 > 0$  (или  $\varphi_0 < 0$ ) устойчив, то противоположный ему луч  $\varphi_0 < 0$  (или  $\varphi_0 > 0$ ) будет неустойчив. Для нечетных  $n$  оба луча одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы. В линейных системах отыскание инвариантных лучей (т. е. решение уравнения (6)) сводится к отысканию корней характеристического многочлена.

### Исследование системы второго порядка

Нашей целью являлось изучение систем трех уравнений. Целесообразно разобрать сначала случай двух уравнений, который исследован до конца в работе Малкина, где найдено необходимое и достаточное условие неустойчивости системы второго порядка. Однако метод Малкина не обобщается уже на случай системы трех уравнений. Предложенный в настоящей работе метод дает только достаточное условие неустойчивости систем второго порядка, но зато он обобщается на случай системы трех уравнений.

Рассмотрим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Ниже будет показано, что для тех систем в пространстве коэффициентов существует две алгебраические поверхности, на которых вопрос об устойчивости требует особого исследования. Далее будут найдены уравнения этих двух поверхностей в пространстве коэффициентов. Если точка, изображающая систему, не лежит ни на одной из этих поверхностей, то вопрос об устойчивости решает следующая теорема.

**Теорема 1.** Если точка, изображающая систему не лежит ни на одной из двух алгебраических поверхностей

$$\begin{aligned} p_0(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}) &= 0, \\ p_3(a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{22}) &= 0, \end{aligned}$$

то система имеет неустойчивый луч.

**Доказательство.** Найдем условия, при которых система (14) имеет неустойчивый луч. Пусть

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 &= x, \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 &= y. \end{aligned} \quad (15)$$

Напишем систему (15) в виде

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy - x + a_{22}y^2 = 0, \\ f_2 &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy - y + b_{22}y^2 = 0. \end{aligned} \quad (15')$$

Исключим  $x$  из системы (15), что приводит, как известно\*, к следующему результату:

$$R(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12}y - 1 & a_{22}y^2 & 0 \\ 0 & a_{11} & 2a_{12}y - 1 & a_{22}y^2 \\ b_{11} & 2b_{12}y & b_{22}y^2 - y & 0 \\ 0 & b_{11} & 2b_{12}y & b_{22}y^2 - y \end{vmatrix} = 0$$

\* Это означает, конечно, что в полной системе уже незаконно оставлять только главные члены, так как они главные лишь при  $x \rightarrow 0$ .

Раскрывая детерминант, получаем

$$y(p_0y^3 + p_1y^2 + p_2y + p_3) = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} p_0 &= (a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})^2 + 4(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12})(b_{12}a_{22} - b_{22}a_{12}), \\ p_1 &= 2[(b_{22} + 2a_{12})(a_{11}b_{12} - b_{11}a_{12}) + a_{11}(b_{11}a_{22} - a_{11}b_{22}) + \\ &\quad + b_{11}(b_{12}a_{22} - a_{12}b_{22})], \\ p_2 &= a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) + b_{11}(b_{22} + 4a_{12}), \\ p_3 &= -b_{11}. \end{aligned}$$

Так как нас интересует нетривиальное решение, то из уравнения (16) получаем, что

$$p_0y^3 + p_1y^2 + p_2y + p_3 = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) нечетного (третьего) порядка, поэтому оно всегда имеет действительное решение, если нет вырождения, т. е. если коэффициенты  $p_0$  и  $p_3$  отличны от нуля.

Следовательно, система (15) имеет действительное решение. Тем самым доказано существование неустойчивого инвариантного луча. Величины  $p_0$  и  $p_3$  как функции коэффициентов системы не обращаются в нуль тождественно. Это видно из того, что для конкретной точки:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, a_{12} = 0, a_{22} = 1, \\ b_{11} &= 1, b_{12} = 0, b_{22} = 2 \end{aligned}$$

оба эти числа отличны от нуля. А именно:  $p_0 = 1, p_3 = 1$ .

### Система третьего порядка

Пусть рассматриваемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Множество систем вида (18) образует 18-мерное пространство по числу коэффициентов. Будем изображать систему (18) точкой в пространстве коэффициентов, то есть имеет место теорема.

**Теорема 2.** Если система (18) не лежит ни на одной из двух алгебраических поверхностей:

$$\begin{aligned} p_0(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}; b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{13}, b_{23}, b_{33}; \\ c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{23}, c_{33}) &= 0; \\ p_{15}(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, b_{11}, b_{12}, b_{22}, b_{13}, b_{23}, b_{33}; \\ c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_{13}, c_{22}, c_{33}) &= 0, \end{aligned}$$

то система имеет неустойчивый луч.

**Доказательство.** Пусть

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 &= x, \\ b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 &= y, \\ c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 &= z. \end{aligned} \quad (19)$$

Найдем условия существования действительного решения системы (19). Из первых двух уравнений системы (19) исключаем  $x^2$  и находим  $x$  через остальные неизвестные:

$$x = \frac{(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22})y^2 + 2(a_{11}b_{23} - b_{11}a_{23})yz + (a_{11}b_{33} - b_{11}a_{33})z^2 - a_{11}y}{2(a_{11}a_{12} - a_{11}b_{12})y + 2(a_{11}a_{13} - a_{11}b_{13})z - b_{11}}$$



Подставляя выражение для  $x$  во второе и третье уравнения, после несложных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} A_0 y^4 + (A_1 + A_2 z) y^3 + (A_3 + A_4 z + A_5 z^2) y^2 + (A_6 + A_7 z + A_8 z^2 + \\ + A_9 z^3) y + A_{10} z^4 + A_{11} z^3 + A_{12} z^2 = 0; \quad (20) \\ B_0 y^4 + (B_1 + B_2 z) y^3 + (B_3 + B_4 z + B_5 z^2) y^2 + (B_6 z + B_7 z^2 + B_8 z^3) y + \\ + B_9 z^4 + B_{10} z^3 + B_{11} z^2 + B_{12} z = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, A_{12}$  и  $B_0, B_1, \dots, B_{12}$  выражаются коэффициентами исходного уравнения.

Для облегчения вычисления результатов системы (20) введем обозначения

$$\begin{aligned} p &= A_0 \\ p_1 &= A_1 + A_2 z \\ p_2 &= A_3 + A_4 z + A_5 z^2 \\ p_3 &= A_6 + A_7 z + A_8 z^2 + A_9 z^3 \\ p_4 &= A_{10} z^4 + A_{11} z^3 + A_{12} z^2 \\ q_0 &= B_0 \\ q_1 &= B_1 + B_2 z \\ q_2 &= B_3 + B_4 z + B_5 z^2 \\ q_3 &= B_6 z + B_7 z^2 + B_8 z^3 \\ q_4 &= B_9 z^4 + B_{10} z^3 + B_{11} z^2 + B_{12} z. \end{aligned}$$

После этого система (20) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_1 &= p_0 y^4 + p_1 y^3 + p_2 y^2 + p_3 y + p_4 = 0, \\ f_2 &= q_0 y^4 + q_1 y^3 + q_2 y^2 + q_3 y + q_4 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Исключим из уравнения (21), что приведет к результату

$$R(f_1; f_2) = \begin{vmatrix} p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 0 0 0 \\ 0 f_0 p_1 p_2 p_3 p_4 0 0 \\ 0 0 p_0 p_1 p_2 p_3 p_4 0 \\ 0 0 0 f_0 p_1 p_2 p_3 p_4 \\ q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 0 0 0 \\ 0 f_0 q_1 q_2 q_3 q_4 0 0 \\ 0 0 q_0 q_1 q_2 q_3 q_4 0 \\ 0 0 0 f_0 q_1 q_2 q_3 q_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Из уравнения  $R(f_1; f_2) = 0$  получаем, что

$$y(p_0 y^{15} + \dots + p_{14} y + p_{15}) = 0, \quad (22)$$

из коэффициенты  $f_0, p_1, \dots, p_{15}$  зависят от коэффициента исходного уравнения. Из уравнения (22) получаем, что

$$f_0 y^{15} + \dots + p_{14} y + p_{15} = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) нечетного порядка, поэтому оно всегда имеет действительное решение; если  $f_0$  и  $p_{15}$  не обращаются в нуль. Следовательно, система (21) имеет действительное решение, а это доказывает существование инвариантного луча.

Заметим, что и здесь величины  $P_0, P_{15}$  не тождественны нулю. Это видно из того, что для конкретной точки:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1, a_{12} = 0, a_{13} = 0, a_{22} = 1, a_{23} = 0, a_{33} = 1; \\ b_{11} &= 1, b_{12} = 0, b_{13} = 0, b_{22} = 2, b_{23} = 0, b_{33} = 0. \\ c_{11} &= 1, c_{12} = 0, c_{13} = 0, c_{22} = 1, c_{23} = 0, c_{33} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, оба числа отличны от нуля, т. е.  $p_0 = -4, P_{15} = 1$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ, 1925.
2. Ляпунов А. М. Исследование одного из особых случаев задачи об устойчивости движения. Изд-во ЛГУ, 1963.
3. Каменков Г. В. Об устойчивости движения. Сб. Трудов Казанского авиац. ин-та, № 9. 1939.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1966.
5. Молчанов А. М. ДАН СССР т. 141, 1961, № 1.

Л. И. Көзәлов

Бә'зи системләр дајаныгсызлығынын кафи шәртләри

## ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 2-чи вә 3-чү тәртиб бә'зи гејри-хәтти дифференциал тәнликләр системи үчүн дајаныгсызлығын әмсалларла ифадә олунмуш кафи шәртләри верилмишдир.



А. М. ПАШАЕВ

# К ИССЛЕДОВАНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОЛУПРОВОДНИКОВ СВЧ МЕТОДАМИ

В последние годы все большее развитие получают бесконтактные методы измерения электрических характеристик полупроводников, основанные на применении токов высокой и сверхвысокой частоты [1—5]. Эти методы весьма необходимы как с точки зрения изучения влияния частоты поля на механизмы переноса в полупроводниках, так и с точки зрения обеспечения стерильности условий измерения при технологических процессах в производстве

того или иного материала. Отсутствие прямых контактов образец-измерительная схема делает эти методы оперативными и перспективными в промышленных условиях.

В настоящей статье дана оценка методов измерения на СВЧ, описана одна из установок разработанных автором для измерения электропроводности полупроводниковых материалов. При исследовании электрических свойств полупроводников волновыми методами задача в общем случае сводится к следующему. Рассматривается распространение электромагнитной волны в неоднородной среде. Эта неоднородность обусловлена наличием в системе полупроводникового образца. При всех измерениях на СВЧ фиксируемой величиной является мощность электромагнитной системы.

Следует связать проходящую мощность электромагнитной волны с параметрами полупроводникового образца. Сделаем это для волн трехсантиметрового диапазона: для волны  $H_{10}$  ( $TE_{10}$ ) в прямоугольном волноводе. Эпюра и структура электрической и магнитной составляющих такой волны представлены на рис. 1. Пусть ось  $y$  направлена здесь вдоль стороны  $b$  волновода, ось  $x$  по  $a$ , а  $z$  есть направление распространения электромагнитной волны. Среда обладает диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$  и проводимостью  $\sigma$ .

Из уравнений Максвелла можно получить следующее уравнение:

$$\nabla^2 E = \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Для нашей системы координат при волне  $H_{10}$  это уравнение примет вид

$$\nabla^2 E_y = \mu \sigma \left( \frac{\partial E_y}{\partial t} \right) + \mu \epsilon \left( \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right); \quad (2)$$

$E$  и  $H$  не являются функциями напряженности поля и координат, а поле меняется по гармоническому закону  $E = E_m e^{j\omega t}$ . Потери в самой системе (в стенках волновода) не учитываются. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$E_y = \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} e^{j\omega t}; \quad (3)$$

$\omega$  — круговая частота,

$\gamma$  — комплексная постоянная распространения. В общем виде записывается как

$$\gamma = \alpha + j\beta; \quad (4)$$

$\alpha$  — постоянная затухания,

$\beta$  — фазовая постоянная среды.

Выразим  $\gamma$  через параметры образца:

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}.$$

В нашем случае  $\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0$ .

Произведем ряд операций:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} j\omega e^{j\omega t},$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} \omega^2 e^{j\omega t},$$

$$\nabla^2 E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) \frac{\pi^2}{b^2} e^{-\gamma z} e^{j\omega t},$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{j\omega t} \gamma^2 e^{-\gamma z}.$$

Все это подставим в исходное уравнение

$$\begin{aligned} \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{j\omega t} \gamma^2 e^{-\gamma z} - \frac{\pi^2}{b^2} \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = \\ = \mu \sigma \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} j\omega e^{j\omega t} - \mu \epsilon \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{-\gamma z} \omega^2 e^{j\omega t}, \\ \sin \left( \frac{\pi x}{b} \right) e^{j\omega t} e^{-\gamma z} \left[ \gamma^2 - \frac{\pi^2}{b^2} - \mu \sigma j\omega + \mu \omega^2 \epsilon \right] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда постоянная распространения будет

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{b^2} + \mu \sigma j\omega - \mu \omega^2 \epsilon}. \quad (5)$$

Сравним  $\left( \frac{\pi}{b} \right)^2$  с величиной  $\mu \omega^2 \epsilon$ . Если волновод работает далеко

от своей критической частоты, то величиной  $\left( \frac{\pi}{b} \right)^2$  можно пренеб-

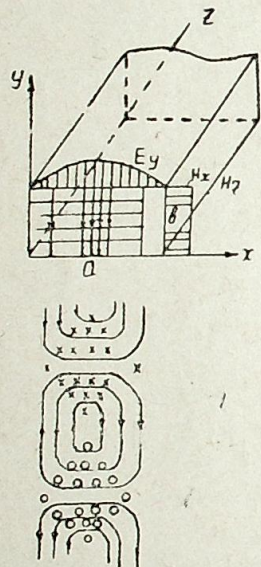


Рис. 1



речь по сравнению с  $\mu\omega^2\epsilon$ . Выражение для  $\gamma$  преобразуется:

$$\gamma = \pm [-\mu\epsilon\omega^2 + j\mu\sigma\omega]^{1/2} = \pm \left[ \mu\epsilon\omega^2 \left( -1 + j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= \pm (-\mu\epsilon\omega^2)^{1/2} \left[ 1 - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right]^{1/2} = \pm (-\mu\epsilon\omega^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} j \frac{\sigma}{\omega\epsilon} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \right] = \pm \left[ j\omega(\mu\epsilon)^{1/2} + \frac{\omega\mu^{1/2}\epsilon^{1/2}\sigma}{2\omega\epsilon} + j\omega(\mu\epsilon)^{1/2} \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2} \right].$$

Окончательно

$$\gamma = \pm \left[ \left( \frac{\sigma}{2} \right) \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} + j\omega(\mu\epsilon)^{1/2} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right) \right]. \quad (6)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

$$\beta = \omega(\mu\epsilon)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right], \quad (8)$$

Таким образом, для среды с  $\epsilon$  и  $\mu$ , не зависящими от  $E$  получим, что постоянная затухания  $\alpha$  прямо пропорциональна  $\sigma$ , т. е.  $\alpha = \text{const} \cdot \sigma$ .

Причем  $\text{const} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2}$ .

Оценим количественно, как изменяется фаза сигнала из-за конечной проводимости образца  $\sigma$  (сравним единицу величины  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ ) в случае германия и кремния для частоты  $f = 10^{10}$  гц,  $\epsilon = 12 \div 16$ . Если  $\rho = 0,001 \div 60$  для Ge и  $0,001 \div 1000$  для Si, то  $\sigma$  соответственно равна  $1000 \div 0,016$  и  $1000 \div 0,001$ . Для самого худшего случая ( $\sigma = 1000$ )  $\frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} = 0,12 \cdot 10^{-6}$ . Следовательно,  $\frac{\sigma^2}{\omega\epsilon} \ll 1$  и можно считать в этом  $\beta = \omega(\mu\epsilon)^{1/2}$  не зависящим от величины электропроводности полупроводникового образца.

Теперь покажем связь мощности сигнала с коэффициентом затухания  $\alpha$ . Поле в волноводной линии можно представить как

$$E = E_m e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}. \quad (9)$$

Согласно этому уравнению при длине волновода, равной единице, напряженность поля уменьшается в  $e^\alpha$  раз, а мощность, пропорциональная квадрату напряженности, в  $e^{2\alpha}$  раз. Следовательно, поглощаемая мощность по линии меняется по закону

$$P = P_0 (1 - e^{-2\alpha}), \quad (10)$$

где  $P_0$  — мощность, поступающая на вход системы. Это выражение можно преобразовать:

$$e^{-2\alpha} = 1 - \frac{P}{P_0}. \quad (11)$$

При малых  $\frac{P}{P_0} \ll 1$   $\alpha = \frac{1}{2} \frac{P}{P_0}, \quad (12)$

При фиксированном  $P_0 = \text{const}$   $\alpha = A \cdot P$ , т. е. мощность, поглощаемая при прохождении через волноводный тракт с образцом, прямо пропорциональна постоянной затухания  $\alpha$ , связанной с проводимостью образца следующим соотношением:

$$\alpha = \text{const} \cdot \sigma.$$

Таким образом, поглощаемая мощность прямо пропорциональна проводимости образца, т. е. концентрации носителей тока, и будет изменяться по такому же закону, что и проводимость образца. Отсюда можно сделать следующие практические выводы.

1. Можно измерять проводимость полупроводниковых материалов косвенным методом. Для этого при  $l = \text{const}$  можно снять зависимость  $\frac{P_{\text{внх}}}{P_{\text{вх}}} = f(\sigma)$ .

2. Можно измерять время жизни носителей тока по изменению выходной мощности при модуляции проводимости образца внешним воздействием — свет, электрическое поле, облучение и т. д.

3. Возможны исследования фотоэлектрических явлений в полупроводниковых материалах.

Ниже приводится описание системы для бесконтактного измерения проводимости образцов на СВЧ с применением в качестве измерительного элемента прямоугольного резонатора. Блок-схема установки представлена на рис. 2 (а, б).

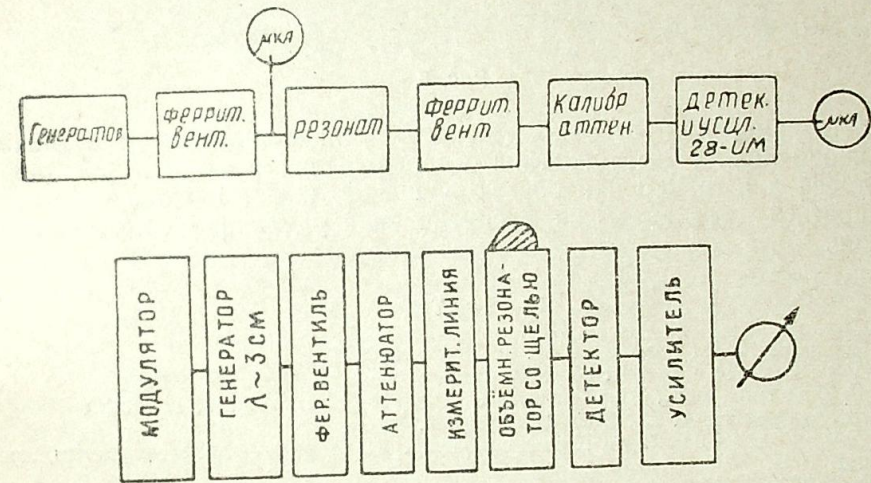


Рис. 2.

Измерительная установка состоит из следующих элементов:

1. Генератора сверхвысокой частоты.  
2. Ферритового вентиль для развязки измерительного тракта от генератора.

3. Аттенюатора.

4. Измерительного элемента — резонатора со щелью.

5. Согласующего трансформатора.

6. Детектора и индикатора 23 ИМ.

Резонатор — прямоугольный (рис. 3), возбуждается на волне  $H_{101}$ , работает на частоте 9200 Мгц. В узкой стенке на максимуме магнитной составляющей поля прорезана щель шириной 1 мм, длиной 5 мм.

Образец прижимается к щели, фиксируемая индикатором. Индикатор образца меняется мощностью, согласуемая индикатором. Индикатор согласован с резонатором посредством согласующего трансформатора. Градуируется показание выхода системы в функции от удельного сопротивления образцов  $P_{\text{внх}} = f(\rho)$ .

Для исключения зависимости показаний индикатора от нестабильности характеристики детектора можно отградуировать систему для



постоянной выходной мощности, меняя с помощью аттенюатора мощность, поступающую на детектор. При этом выбирается рабочая точка на характеристике аттенюатора в линейной ее части. Для повышения

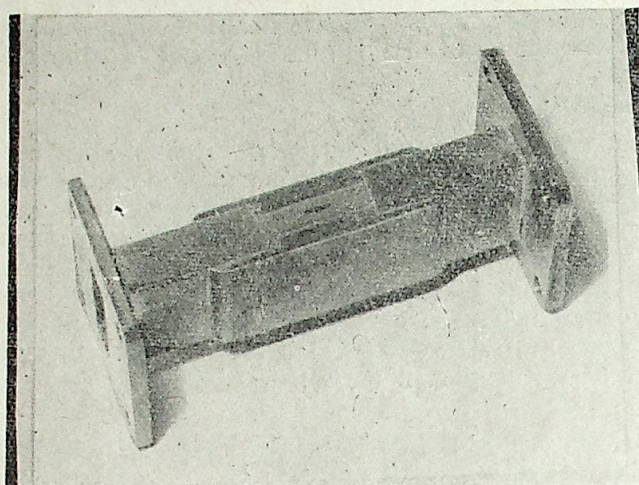


Рис. 3

точности измерений мы механически связали аттенюатор с индикатором перемещений часового типа с ценою деления в 0,01 мм. Установка удобна для измерения образцов в виде шайб, таблеток и может применяться для изучения распределения удельного сопротивления слитков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гашка Н. Н., Пожела Ю. К. ФГТ, № 9, 1959.
2. Гуса В., Квасил Б. „Радиотехника и электроника“, № 5, 1960.
3. Allerton G. L., Seifert J. K. JRE Transac. Instrum., 9, 176, 1960.
4. Atwater H. A. J. appl. phys., 31, 938, 1960.
5. Вылегжанин В. И., Концевой Ю. А. Вопросы радиоэлектроники, серия II, вып. 1, 1964.

А. М. Пашаев

Жарымкечиричи маддэлэрин физики хассэлэринин  
ифрат жүксак тезликли үсуллар илэ тэдгиги

#### ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә жарымкечиричи маддэлэрин физики хассэлэринин тэдгиги үчүн жарадымыш јени үсуллардан бәһс едилир. Бу үсуллар ифрат жүксак тезликләрдә тәтбиг олунур вә она көрә дә контакт тәләб етмир.

Мәлум едилмишдир ки, һәмин үсуллар илэ жарымкечиричилэрин електрик вә фотоелектрик хассэлэринин өјрәнмәк мүмкүндүр.

М. А. ТАЛИБИ, Т. С. АЗИЗОВ, М. М. АЛИЕВ

#### ПРИМЕНЕНИЕ $P-n$ -ПЕРЕХОДОВ ДЛЯ ИНДИКАЦИИ УСКОРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 1—5 Мэв

В литературе главным образом описаны датчики ионизирующих излучений на  $p-n$ -переходах монокристаллов Ge, Si, GaAs [1—3,8]. В  $p-n$ -переходах Se—CdSe и Se—CdS в процессе воздействия света, рентгеновского и гамма-излучений [4—5], а также пучка электронов с энергией 40—75 кэв в вакууме [6] создаются наведенная э. д. с.  $U_{xx}$  и ток короткого замыкания  $I_{кз}$ , исчезающие вслед за прекращением облучения.

В настоящей статье рассматриваются результаты исследований влияния моноэнергетических электронов на указанные переходы, сравнением результатов для германиевых, кремниевых и купроксных приборов. Источником ускоренных электронов служил линейный электронный ускоритель. В табл. 1 представлены значения  $j_{кз}$  и эффективного коэффициента усиления различных вентилях при облучении их электронным пучком плотностью тока 1,5 мка/см<sup>2</sup> и энергией 1 Мэв. По чувствительности германиевые и кремниевые приборы превосходят селеновые и купроксные.

Таблица 1

| Тип элемента                     | Se—CdSe | Se—CdS | Купрокс-<br>ный венти-<br>ль | Диод Д—7Б | Si<br>диод | Транзистор П-14  |                         |
|----------------------------------|---------|--------|------------------------------|-----------|------------|------------------|-------------------------|
|                                  |         |        |                              |           |            | база—<br>эммитер | база—<br>коллек-<br>тор |
| $j_{кз}$ , мка/см <sup>2</sup>   | 35      | 20     | 1                            | 100       | 300        | 250              | 175                     |
| Эффективный коэффициент усиления | 23      | 14     | 0,7                          | 67        | 200        | 166              | 117                     |

Увеличение энергии от 1 до 5 Мэв при данном потоке показало сравнительно большую радиационную стойкость переходов Se—CdSe и Se—CdS, выразившуюся в воспроизводимости величин  $U_{xx}$  и  $I_{кз}$  в процессе облучения и при повторных облучениях. Так, например, при энергии ускоренных электронов 5 Мэв (плотность тока электронного пучка 1,5 мка/см<sup>2</sup>) в процессе пятиминутного облучения значения  $U_{xx}$  и  $I_{кз}$  для кремниевых и германиевых вентилях уменьшались по сравнению с первоначальными в 3—5 раз. При тех же условиях для селеновых вентилях потеря чувствительности находилась в пределах



20—30%. Причем спустя 24 часа после облучения, радиационная чувствительность селеновых вентилях восстанавливалась полностью, чего не наблюдалось для кремниевых и германиевых приборов.

Пороговая энергия образования структурных дефектов в Ge и Si составляет 25 эв, что соответствует энергии бомбардирующих электронов около 0,6 Мэв [1—3]. Видимо, потеря чувствительности исследованных нами германиевых и кремниевых приборов является следствием образования структурных дефектов. Исследования показали, что элементы Se—CdSe и Se—CdS, содержащие примесь галоида, имея по сравнению с безгалогидными элементами в 1,5—2 раза меньшую чувствительность, обладают большей радиационной стойкостью. Так, например, при 5 Мэв (1,5 мка/см<sup>2</sup>) в процессе пятиминутного облучения потеря радиационной чувствительности безгалогидных элементов составляет 20—30%, а элементов, содержащих примесь Cl, 10—20%.

Примесь галоида уменьшает толщину слоя области объемного заряда селеновых элементов [9], с чем, по-видимому, связана их сравнительно низкая радиационная чувствительность. Примеси галоидов способствуют разрыву и укорачиванию молекулярных цепочек Se [10]. В основном действие бомбардирующих частиц на структуру гексагонального селена будет выражаться также в разрыве и укорачивании его цепочек. Следовательно, сравнительно большая радиационная стойкость элементов, содержащих галоидную примесь, может быть обусловлена тем, что цепочки Se разорваны и укорочены до облучения.

Величина массового коэффициента поглощения  $\frac{\mu}{\rho}$  для Вг на 20%

выше, чем у Se [11]. Можно было бы ожидать повышения интегральной чувствительности селеновых *p-n*-переходов к воздействию облучения при введении примеси Вг за счет увеличения поглощения при условии нахождения галоидной примеси в несвязанном состоянии. Однако это ожидание на опыте не оправдывается, что, по-видимому, подтверждает мнение [9,12] о нахождении галоидных примесей в Se в связанном состоянии.

Зависимость  $I_{кз}$  от расстояния  $1/l^2$  в интервале 1—4 м от выходного окошка ускорителя линейна.

Таблица 2

|                |    |      |      |      |      |
|----------------|----|------|------|------|------|
| $l, м$         | 1  | 1,5  | 2    | 3    | 4    |
| $1/l^2 м^{-2}$ | 1  | 0,45 | 0,25 | 0,11 | 0,06 |
| $J_{кз}, мка$  | 35 | 15   | 7    | 2,6  | 1    |

В интервале от 10 см до 1 м эта зависимость сублинейна, что обусловлено, видимо, большой интенсивностью облучения. Согласно Бете и Гайглеру отношение потерь на излучение к ионизационным потерям для быстрых электронов имеет вид

$$A = \frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{излущ.}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{иониз.}} \approx \frac{E_0 Z}{1600 мс^2},$$

где  $E_0$ —начальная энергия частицы,  $Z$ —заряд ядра. Отсюда следует,

что критическое значение  $E_{кр}$ , соответствующее  $A=1$  и равное  $1600 мс^2$ , составляет для Se около 10 Мэв.

$Z$

При  $E=1 Мэв$  в Se лишь 4% общей поглощенной энергии тратится на образование тормозного излучения. При  $E>1-2 Мэв$  в создании вентильной э. д. с. в Se—CdSe и Se—CdS будет заметная доля и собственного тормозного излучения [4, 5], что затрудняет количественную оценку к. п. д. преобразования. К. п. д. при  $E=1 Мэв$  по энергии, поглощенной в области объемного заряда, для наших элементов по приближенной оценке около 0,1%. Для селеновых фотоэлементов к. п. д. преобразования энергии  $\beta$ -лучей с максимумами  $E=0,17$  и  $0,40 Мэв$  составляет  $\sim 0,26\%$  [14].

На рис. 1 представлены статистические вольтамперные характеристики одного из образцов Se—CdSe до облучения и в процессе облучения для  $E=1 Мэв$ . Радиационная чувствительность прямой ветви обусловлена изменением удельного сопротивления Se и CdSe. При воздействии облучения на элемент, при наличии обратного смещения, изменение проводимости  $\Delta\sigma$  будет обусловлено тремя факторами:

- изменение  $\Delta\sigma_1$  Se и CdSe;
- $\Delta\sigma_2$ —добавочным диффузионным потоком неосновных носителей;
- $\Delta\sigma_3$ —генерацией носителей в области объемного заряда.

Как видно из рис. 1,  $\Delta\sigma_1$  незначительна. При облучении обратно смещенных *p-n*-переходов пары, образованные на расстоянии от перехода не более длины диффузионного смещения  $L$ , разделяясь контактным полем, увеличивают проводимость на  $\Delta\sigma_2$ . Указанные пары за время жизни  $\tau$  диффундируют на расстояние  $L=\sqrt{D\tau}$ . Из-за малых

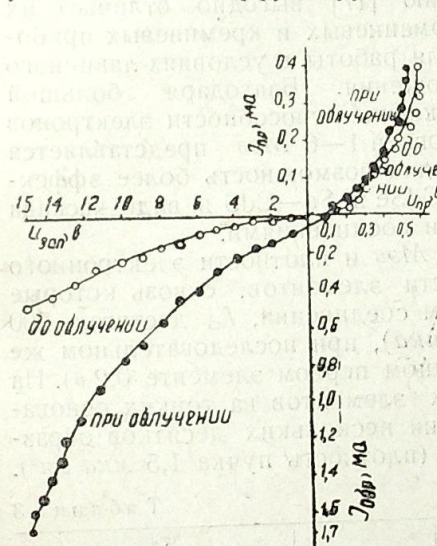


Рис. 1

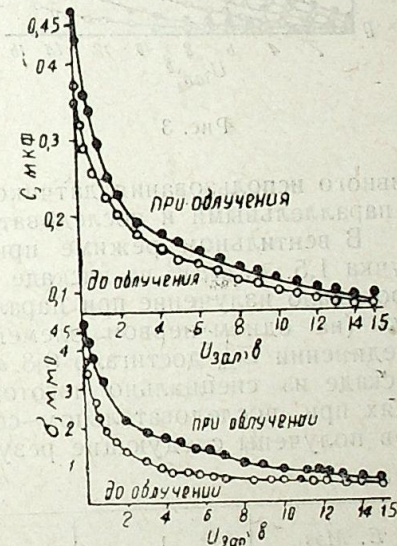


Рис. 2

$\tau$  селена  $\Delta\sigma_2$  будет мала. Из анализа вольтамперной характеристики рис. 1 по теории [19] установлено, что обратный ток при облучении главным образом имеет генерационный характер. Радиационная проводимость  $\Delta I$  для наших систем обусловлена в основном образованием электронно-дырочных пар в области *p-n*-перехода. При облучении повышаются емкость  $C$  и активная проводимость  $\sigma$  (рис. 2), что обусловлено увеличением плотности объемного заряда от  $N=2,5 \cdot 10^{16}$  до  $N=3,8 \cdot 10^{16} см^{-3}$ .



Таким образом, одним из путей повышения чувствительности переходов Se—CdSe и Se—CdS к действию излучения является увеличение  $W_0$  и  $W$ —толщин слоя области объемного заряда, соответственно, без смещающего напряжения и при наличии заданного запорного смещающего напряжения. Вводя примеси с определенными ионизационными потенциалами, можно управлять величиной  $W_0$  и  $W$  [15]. Наряду с этим для элементов Se—CdSe на базе селена 99,99999% при повышении температуры выше 80°C  $W$  повышается от 1 до 15 мк [16].

Таким образом, для повышения чувствительность Se—CdSe и Se—CdS в качестве датчиков ускоренных электронов путем увеличения  $W$  имеются две возможности:

а) управление величиной  $W_0$  и  $W$  путем введения определенных примесей в Se и б) работа с образцами Se—CdSe или Se—CdS на базе Se высокой чистоты при высоких температурах [18]. Ударная ионизация на  $p$ — $n$ -переходе представляет возможности для создания более чувствительных индикаторов для первоначальной качественной регистрации ядерных излучений. Механизм предпробойного размножения носителей

в селеновых  $p$ — $n$ -переходах в зависимости от примесей обусловлен зинеровским эффектом или ударной ионизацией [16].

Измерения показали, что на Se—CdSe и Se—CdS  $\Delta I$  в предпробойных обратных напряжениях действительно в несколько раз больше, чем при  $U=0,1-2$  в. Способность селеновых элементов к мгновенному самозалечиванию [17] выгодно отличает их от германиевых и кремниевых приборов для работы в условиях лавинного размножения. Благодаря большой проникающей способности электронов с энергией 1—6 Мэв представляется еще одна возможность более эффек-

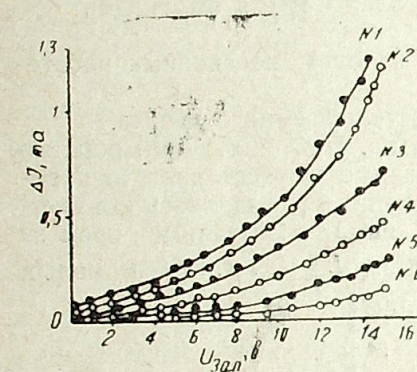


Рис. 3

тивного использования датчиков Se—CdSe и Se—CdS в виде каскада с параллельными и последовательными соединениями.

В вентильном режиме при  $E=1$  Мэв и плотности электронного пучка 1,5 мка/см<sup>2</sup> на каскаде из шести элементов, сквозь которые проникло излучение при параллельном соединении,  $I_{кз}$  достигал 200 мка (на одном первом элементе 90 мка), при последовательном же соединении  $U_{xx}$  достигало 0,8 в (на одном первом элементе 0,2 в). На каскаде из специально изготовленных элементов на тонких основаниях при последовательном соединении нескольких десятков образцов получены следующие результаты (плотность пучка 1,5 мка/см<sup>2</sup>).

Таблица 3

| $E, \text{Мэв}$    | 1   | 2 | 3 | 4   | 5 |
|--------------------|-----|---|---|-----|---|
| $U_{xx}, \text{в}$ | 1,2 | 2 | 3 | 4,5 | 5 |

Весьма интересна для дозиметрии почти линейная зависимость  $U_{xx}$  от  $E$ . Из-за малых площадей элементов на тонком основании  $U_{xx}$  получены лишь при частичном охвате сечения пучка. Следует отметить, что  $U_{xx}$  удается повысить больше, чем на порядок, охватывая каскадом элементов все сечение электронного пучка. На рис. 3 пред-

ставлена зависимость  $\Delta I$  от  $U$  для каждого из шести последовательных элементов.

При приложении общего  $U$  на весь каскад  $\Delta I$  при данной интенсивности облучения для каскада получается в 2—3 раза больше по сравнению с  $\Delta I$  одного элемента. Следовательно, каскад последовательных элементов Se—CdSe и Se—CdS с запорным  $U$  также является эффективным датчиком.

Отметим, что элементы Se—CdSe и Se—CdS можно готовить различных площадей вплоть до нескольких сот см<sup>2</sup>. Возможно создание элементов различных геометрий (цилиндрических, конических, дугообразных и т. д.). Эти особенности по сравнению с германиевыми и кремниевыми приборами также выгодно отличают Se—CdSe и Se—CdS для охвата широких пучков излучения, для определения углового распределения излучения и других измерений.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву за обсуждение результатов и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Динс Дж., Винярд Дж. Радиационные эффекты в твердых телах. ИЛ. М., 1960.
2. Влияние ядерных излучений на материалы. Судпромгиз, Л., 1961.
3. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники. Физматгиз, М., 1963.
4. Абдуллаев Г. Б., Талиби М. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1956, 1956, № 7.
5. Талиби М. А., Абдуллаев Г. Б. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат., тем. и техн. наук“, 1959, № 4.
6. Талиби М. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук“, 1960, № 4.
7. Stech B. Zs. Naturf., 7a, 175—185, 1952.
8. Стародубцев С. В., Усманова М. М., Михаэлян В. М. Сб. „Действие ядерных излучений на материалы“. Изд-во АН СССР, М., 1962.
9. Талиби М. А., Алиев М. М. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.
10. Krebs H. von Morsch W. Zs. anorg. Chem., 263, № 5—6, 1950.
11. Баранов В. И. Радиометрия. Изд-во АН СССР, М., 1956.
12. Тагнев К. К., Талиби М. А. Сб., посвященный 20-летию АН Азерб. ССР, Баку, 1966.
13. Штейнбок Н. И. Применение радиоактивных излучений в измерительной технике. Машгиз, М.—Л., 1960.
14. Пасынков В. В. ЖТФ, т. 25, вып. 8, 1955.
15. Манафли Э. И., Талиби М. А. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.
16. Абдуллаев Г. Б., Манафли Э. И., Талиби М. А. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.
17. Абдуллаев Г. Б., Марголин С. М. Талиби М. А. Тр. IV всесоюзной научно-технической конференции по применению полупроводниковых элементов в приборостроении. М., 1966.
18. Абдуллаев Г. Б., Бекиров М. А., Талиби М. А., Гасымов Р. Б. Сб. „Селен, теллур и их применение“. Изд-во АН Азерб. ССР, 1965.
19. Laukner H. Zs. angew. Phys., 1960, № 4.

М. Э. Талиби, Т. С. Эзизов, М. М. Элиjev

Енержиси 1—5 Мев олан сүр'әтлэндирилмиш электронларын гејдә алынмасында  $P$ - $n$  кечидләрин тәтбиғи

#### ХҮЛАСӘ

Тәдгигатда енержиси  $E=1-5$  Мев олан сүр'әтлэндирилмиш электронлар селини Se—CdSe вә Se—CdS поликристаллик кечидләринә тәсири тәдгиг едилмишдир. Бу кечидләр ишығын, гамма вә рентген шүаларынын, енержиси 40—75 кев олан электронларын тәсириңә һәссас олмагла јанашы, 1—5 Мев енержили электронларын тәсириңә дә һәссасдыр. Енержиси  $E=1$  Мев вә сыхлығы 1,5 мка/см<sup>2</sup> олан һиссәчикләр сели тәдгиг олуан кечидләрдә 0,2 волта јахын



ачыг дөврә кәркинлији вә сыхлыгы  $20-35 \text{ мка/см}^2$  олан гыса гапанма чәрәяны жаратыр.  $\text{Se}-\text{CdSe}$  вә  $\text{Se}-\text{CdS}$ -ин хусуси һәссаслыгы  $\text{Ge}$  вә  $\text{Si}$  монокристалларындакы  $P-n$  кечидләрә нисбәтән хејли аздыр. Лакин селенин молекулјар зәнчирләринин ғырымасында рол ојнајан һаллонд ашгарлары дахил едилмиш  $\text{Se}-\text{CdSe}$  вә  $\text{Se}-\text{CdS}$  кечидләри шүаланмаја чох давамлыдыр.

Сүрәтләндиричинин пәнчәрәсиндән  $1-4 \text{ м}$  мәсәфәдә  $\text{Se}-\text{CdSe}$  вә  $\text{Se}-\text{CdS}$  элементләрини  $1 \text{ Мев}$  енержили электронларла шүаландырдыгда јаранан гыса гапанма чәрәяны мәсәфәнин квадраты илә тәрс мүтәнасиб олараг дәјишир.

Ачыг дөврә кәркинлији енержи илә  $1-5 \text{ Мев}$  интервалда хәтти олараг артыр. Электрон шүаланмасынын тәсири алтында һәчми јүкләрин сыхлыгынын  $2,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ -дән  $3,8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ -ә дөнән дәјишмәси мүшәһидә олунур.

Һәчми јүкләр областынын ени бөјүк олан кечидләрдән истифадә етдикдә, әкс истигамәтдә кәркинлик тәтбиг етдикдә, һәмчинин ардычыл, јахуд паралел бирләшдирилмиш элементләр сырасындан ибарәт каскады шүаландырдыгда  $\text{Se}-\text{CdSe}$  вә  $\text{Se}-\text{CdS}$  гетерокечидләринин электронлар селенин тәсирина гаршы һәссаслыгы артыр.

Зәрбә илә ионлашма областына ујғун әкс кәркинликләрдә јүксәк һәссаслыг мүшәһидә олунур.

А. Х. ХАЛИЛОВ, Т. Д. АЛИЕВА

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА СПЕКТРЫ ТЕРМОСТИМУЛИРОВАННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ $\text{KCl}-\text{Cu}$ -ФОСФОРОВ

Спектры термостимулированной люминесценции (ТСЛ) щелочно-галоидных кристаллофосфоров являются богатым источником сведений для выяснения механизма передачи энергии рекомбинации электронов и дырок различным центрам свечения и участия этих центров в формировании отдельных пиков на кривых термостимулированной люминесценции. В литературе имеется всего лишь несколько работ, посвященных исследованию термостимулированной люминесценции щелочно-галоидных фосфоров [1-6].

В настоящей статье приводятся результаты исследования влияния процессов старения и закалки на кривые и спектры термостимулированной люминесценции  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров с концентрацией  $\text{CuCl}$  0,05; 0,1; 0,35; 2 мол. % в расплаве и  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров, содержащих неактивирующие ионы  $\text{Mg}^{++}$  и  $\text{Ba}^{++}$ . Как известно, если процесс старения щелочно-галоидных фосфоров приводит к ассоциации точечных дефектов между собой или с примесными дефектами, то процесс закалки действует в противоположном направлении. Поэтому целью настоящей работы являлось также выяснение влияния указанного перераспределения микродефектов на кривые и спектры ТСЛ вышеуказанных фосфоров.

Исследования проводились на монокристаллах, выращенных по методу Киропулоса из соли марки „спектрально чистая“. В качестве спектрального прибора использовали монохроматор СФ-4. Свечение регистрировали с помощью ФЭУ-18, усилителя постоянного тока и потенциометра ЭПП-09. Установка давала возможность одновременно со спектрами записывать кривые ТСЛ.

### Спектры термостимулированной люминесценции фосфоров $\text{KCl}-\text{Cu}$

Как видно из рис. 1 и 2, на которых показаны кривые ТСЛ и спектры ТСЛ вышеуказанных фосфоров после их старения в течение одного года и после их закалки от  $873^\circ \text{K}$ , на кривых ТСЛ состарившихся фосфоров в отличие от свежеприготовленных [4] наблюдается резкое усиление высокотемпературного и ослабление низкотемпературного пика. При этом с ростом концентрации  $\text{Cu}^+$  у состарившихся и закаленных фосфоров интенсивность I и III пиков ТСЛ стремится к нулю. Процесс закалки очень сильно ослабляет III пик ТСЛ



при всех концентрациях  $\text{Cu}^+$ . Однако по сравнению со свежеприготовленными  $\text{KCl-Cu}$ -фосфорами у закаленных этот пик имеет несколько повышенную интенсивность. Процесс закалки влияет также на положение отдельных пиков ТСЛ, приводя к понижению температур их максимумов.

Рассмотрим влияние старения и закалки на спектры термостимулированной люминесценции. Как видно из сравнения спектров ТСЛ (рис. 1 и 2), в возникновении I, II, III пиков состарившихся и закаленных  $\text{KCl-Cu}$ -фосфоров с разными концентрациями  $\text{Cu}^+$  принимают

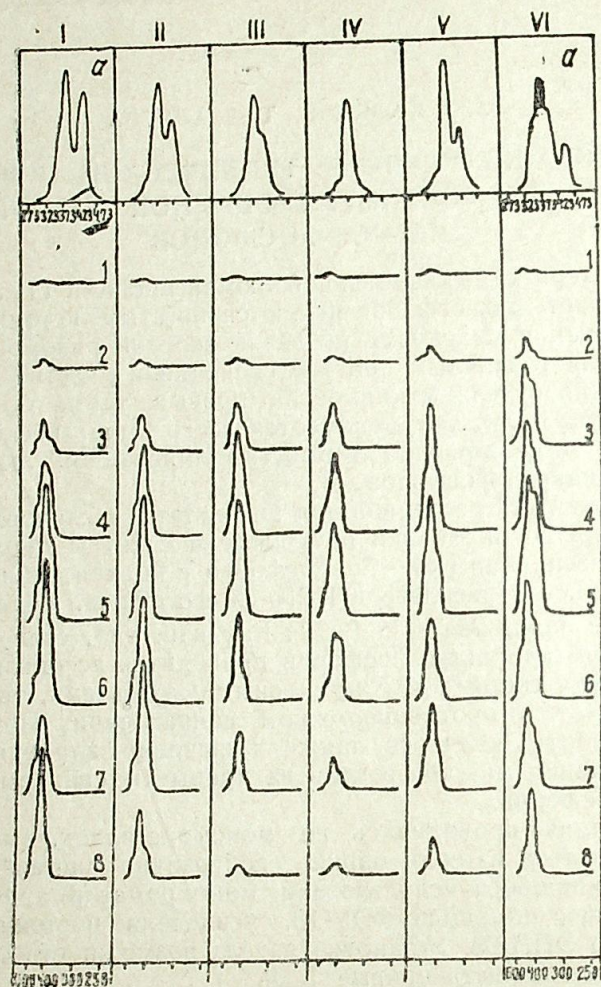


Рис. 1. Кривые (а) и спектры (1—8) термостимулированной люминесценции состарившихся фосфоров  $\text{KCl-CuCl}$  (0,05%)—I;  $\text{KCl-CuCl}$  (0,1%)—II;  $\text{KCl-CuCl}$  (0,35%)—III;  $\text{KCl-CuCl}$  (2%)—IV;  $\text{KCl-CuCl-MgCl}_2$ —V;  $\text{KCl-CuClBaJ}_2$ —VI.

участие центры люминесценции с максимумами полос свечения при 395,450 и 520  $m\mu$ . Однако после закалки фосфоров максимальное разгорание и затухание этих полос сдвигается из области одного в область другого пика ТСЛ. Действительно, если у состарившегося фосфора  $\text{KCl-CuCl}$  (0,5 мол%) в составе первого пика ТСЛ интенсивность полосы 450  $m\mu$  значительно превышает интенсивность остальных полос свечения, то после закалки фосфора этого не наблюдается.

Еще большее влияние оказывает закалка на спектральный состав второго и третьего пиков ТСЛ. Из сравнения кривых 1—8 рис. 1 и 2 видно, что если у состарившихся фосфоров в составе второго пика доминирует полоса 450  $m\mu$ , то после закалки в указанном пике доминирует полоса 395  $m\mu$ , обусловленная свечением ионов  $\text{Cu}^+$ , расположенных в регулярных узлах решетки. Максимальное разгорание полосы 395  $m\mu$  только в области второго пика ТСЛ, по-видимому,

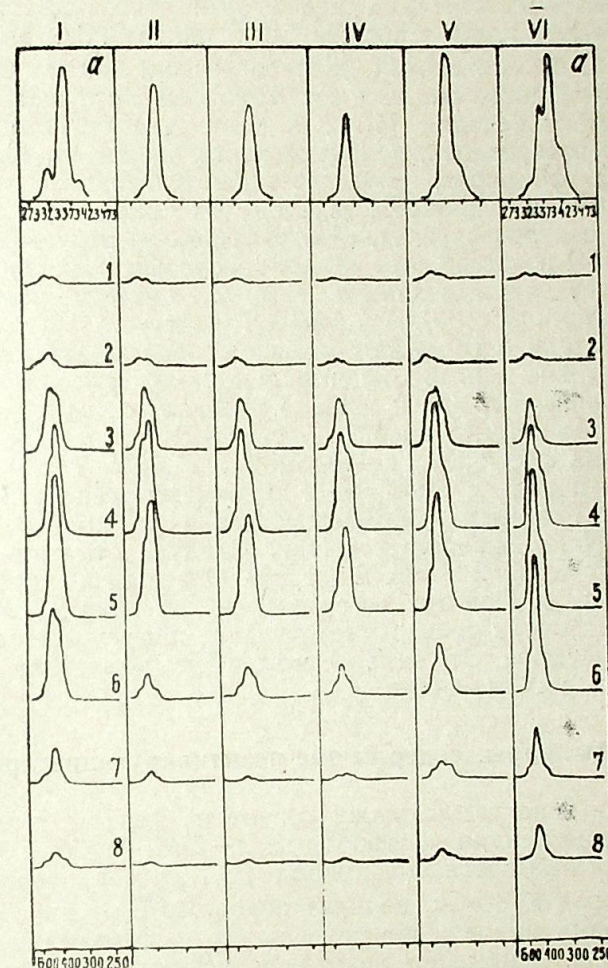


Рис. 2. Кривые (а) и спектры (1—8) термостимулированной люминесценции закаленных фосфоров  $\text{KCl-CuCl}$  (0,05%)—I;  $\text{KCl-CuCl}$  (0,1%)—II;  $\text{KCl-CuCl}$  (0,35%)—III;  $\text{KCl-CuCl}$  (2%)—IV;  $\text{KCl-CuCl-MgCl}_2$ —V;  $\text{KCl-CuClBaJ}_2$ —VI.

свидетельствует об очень близком расположении центров окраски, ответственных за второй пик, и центров, обуславливающих полосу 395  $m\mu$ . Весьма интересным является тот факт, что в спектральном составе третьего пика ТСЛ наблюдается такое же распределение интенсивности между полосами свечения, что и у первого пика, т. е. как у состарившихся, так и у закаленных фосфоров в области первого и третьего пиков ТСЛ доминирует полоса свечения 450  $m\mu$ . Такое распределение интенсивности в составе I и III пиков наблюдается при всех концентрациях меди.



Сравнение спектров ТСЛ закаленных и состарившихся фосфоров показывает также, что при всех концентрациях  $\text{Cu}^{+}$  после закалки интенсивность полосы 520  $m\mu$ , обусловленной более сложными центрами свечения, сильно уменьшается в составе всех пиков. Этот факт свидетельствует о том, что в процессе закалки происходит сильное уменьшение числа сложных центров свечения, возникших в результате ассоциации ионов  $\text{Cu}^{+}$  с точечными дефектами решетки. Процесс закалки за счет разрушения таких ассоциаций генерирует большое число изолированных точечных дефектов и ионов  $\text{Cu}^{+}$ . Это подтверждается сильным ростом в составе всех пиков ТСЛ интенсивности полосы 395  $m\mu$ , обусловленной изолированными ионами  $\text{Cu}^{+}$ . Об этом свидетельствует также сильный рост F-полосы поглощения фосфоров  $\text{KCl}-\text{Cu}$  после их закалки [5]. Как было указано выше, закалка резко меняет распределение интенсивности пиков на кривых ТСЛ состарившихся фосфоров, что, по-видимому, также обусловлено сильной генерацией в процессе закалки точечных дефектов, входящих в состав центров окраски, ответственных за отдельные пики.

В работе [4] показано, что в возникновении всех пиков термостимулированной люминесценции  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров определенную роль играет термическое разрушение F-центров. Поэтому процесс закалки, создающий в решетке большое число изолированных вакансий, должен сильно менять концентрацию различных центров окраски, в том числе F-центров, что и должно проявляться на кривых термо-высвечивания. Аномально высокая интенсивность третьего пика ТСЛ у состарившихся фосфоров, по-видимому, связана с тем, что в его возникновении наряду с F-центрами принимают участие также более сложные центры окраски, образовавшиеся в результате ассоциации точечных и других дефектов решетки. Следует отметить, что масштабы по оси ординат на рис. 2 (строка 1) в 2 раза уменьшены по сравнению с рис. 1. Поэтому из сравнения рис. 1 и 2 следует, что процесс закалки очень сильно увеличивает общую светосумму, накопленную в фосфоре. Это явление может быть объяснено аналогично вышеописанным соображениям.

#### **KCl—Cu-фосфоры, содержащие неактивирующие примеси**

На рис. 1 и 2 показаны также кривые и спектры термостимулированной люминесценции фосфоров  $\text{KCl}-\text{CuCl}\cdot\text{MgCl}_2$  и  $\text{KCl}-\text{CuCl}\cdot\text{BaJ}_2$ . Как видно из сравнения кривых ТСЛ этих фосфоров с кривыми ТСЛ фосфоров  $\text{KCl}-\text{Cu}$ , наличие ионов  $\text{Mg}^{++}$ , не приводя к возникновению новых пиков и почти не влияя на положение пиков ТСЛ  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфора, вызывает некоторое усиление второго пика. В спектральном составе всех пиков наблюдается сильный рост полосы свечения 530  $m\mu$  и некоторое усиление полосы 450  $m\mu$ , обусловленных ионами  $\text{Cu}^{+}$ , ассоциированными с точечными дефектами решетки. Сильное возрастание интенсивности полосы 530  $m\mu$  в составе всех пиков ТСЛ фосфора  $\text{KCl}-\text{Cu}\cdot\text{Mg}$ , по сравнению с  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфором, свидетельствует об участии ионов  $\text{Mg}^{++}$  в возникновении соответствующих центров свечения II рода.

Закалка фосфора  $\text{KCl}-\text{Cu}\cdot\text{Mg}$  от 873° К приводит к значительному ослаблению III пика ТСЛ, в то время как второй пик при этом сильно возрастает. В спектральном составе всех пиков после закалки наблюдается некоторое ослабление полос 450 и 530  $m\mu$ . Однако сравнение указанных спектров этого фосфора и закаленных  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров показывает, что при наличии в решетке  $\text{KCl}-\text{Cu}$  ионов  $\text{Mg}^{++}$

процесс закалки резко не влияет на интенсивность полос, обусловленных сложными центрами свечения, что может быть обусловлено наложением двух процессов, происходящих при участии ионов  $\text{Mg}^{++}$  и без них. Сравнение кривых ТСЛ фосфоров  $\text{KCl}-\text{Cu}$  и  $\text{KCl}-\text{Cu}\cdot\text{Mg}$  показывает, что если после закалки у фосфора  $\text{KCl}-\text{CuCl}$  наблюдается лишь один пик при 373° К, то у  $\text{KCl}-\text{Cu}\cdot\text{Mg}$  фосфора, кроме этого значительно усиленного пика, наблюдаются интенсивные пики при 343 и 415° К. Аналогичные результаты получаются при наличии в решетке  $\text{KCl}-\text{Cu}$  ионов  $\text{Ba}^{++}$ .

С целью выяснения влияния чужеродных анионов в решетке  $\text{KCl}$  на кривые и спектры ТСЛ, нами были изучены также фосфоры  $\text{KCl}-\text{Cu}\cdot\text{Ba}$ , содержащие 0,5% анионов  $\text{J}^{-}$ . Результаты исследований приведены на рис. 1 и 2.

Как видно из рисунков, анионы  $\text{J}^{-}$  обуславливают возникновение нового пика ТСЛ при 398° К, отсутствующего у  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров. Кроме того, в присутствии  $\text{J}^{-}$  сильно растет низкотемпературный пик при 353° К и происходит высокотемпературное смещение III пика до 448° К. После закалки наблюдается несколько большее, по сравнению с другими исследованными фосфорами, низкотемпературное смещение I, II и IV пиков. Сравнение спектрального состава пиков ТСЛ фосфоров  $\text{KCl}-\text{CuCl}\cdot\text{BaJ}_2$  и  $\text{KCl}-\text{CuCl}$  как до, так и после их закалки показывает, что при наличии в решетке  $\text{KCl}-\text{Cu}$  ионов  $\text{J}^{-}$  возникает новая полоса свечения при 420  $m\mu$ , обусловленная, по-видимому, ионами  $\text{Cu}^{+}$ , расположенными по соседству с анионами  $\text{J}^{-}$ . Процесс закалки вызывает некоторое перераспределение интенсивности полос свечения 395, 420, 450 и 530  $m\mu$ . Однако интенсивность полос 450 и 530  $m\mu$  как у состарившихся, так и у закаленных фосфоров заметно больше, чем у  $\text{KCl}-\text{Cu}$ -фосфоров, не содержащих  $\text{BaJ}_2$ . Следует отметить, что после закалки в составе III и IV пиков ТСЛ не наблюдается полосы свечения 420  $m\mu$ . По-видимому, при закалке соответствующие центры в этом фосфоре становятся термически малоустойчивыми и нагрев фосфора до 393° К приводит к их распаду. Процесс закалки приводит также к значительному ослаблению полосы свечения 530  $m\mu$ , в то время как полоса 450  $m\mu$  при этом почти не ослабляется. Эти изменения обусловлены перераспределением микродефектов в процессе старения и закалки.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Витол И. К. „Оптика и спектроскопия“, 9, 535, 1960.
2. Яэк И. В., Окк М. Ф. Тр. ИФА АН ЭССР, 21, 96, 1962.
3. Яэк И. В., Окк М. Ф. Тр. ИФА АН ЭССР, 23, 1955, 1963.
4. Алиева Т. Д. Дисс., 1963.
5. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР“ (в печати).
6. Халилов А. Х. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1965. № 1, 2, 3, 5, 6.

Ә. Х. Хәлилов, Т. Ч. Әлијева

#### **KCl—Cu фосфорларынын термостимулланмыш лүминесценсия спектрләринә термик ишләнмәнин тәсиринин тәдгиги**

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә  $\text{KClCu}$  фосфорларынын термошуаланма әјриләринә вә спектрләринә термик ишләнмәнин тәсири әдһнлашдырылмышдыр. Алынмыш нәтичәләр мухтәлиф ишыгвермә мәркәзләринин термошуаланма әјриләринин әјры-әјры пикләринин јаранмасындакы ролуну мүәјјән етмәјә имкан верир.



Х. М. ХАЛИЛОВ, К. И. РЗАЕВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ МОНОКРИСТАЛЛА $\text{TiSe}$ \* ПОСРЕДСТВОМ УЛЬТРАЗВУКА

За последние годы все чаще и чаще начали появляться в печати результаты исследования физических свойств  $\text{TiSe}$ , являющегося наиболее устойчивым и характерным полупроводниковым веществом [1]. Однако скорость распространения в нем ультразвука до сих пор никак не была изучена. Поэтому представляет определенный интерес

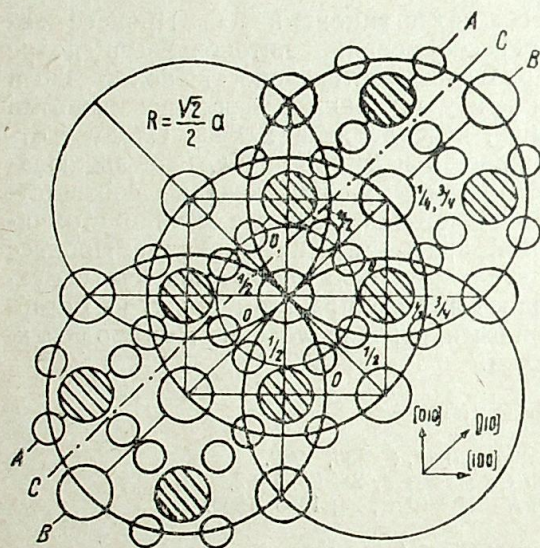


Рис. 1. Проекция элементарной ячейки  $\text{TiSe}$  на плоскость базиса.  $C-C$ —плоскость раскола. Цифрами обозначено расстояние от этой плоскости до атома.

измерение скорости ультразвука в монокристалле  $\text{TiSe}$  в зависимости от температуры и кристаллографических направлений.  $\text{TiSe}$  кристаллизуется в тетрагональной решетке пространственной группы  $D_{4h}^{18}$  с параметрами:  $a = b = 8,02 \text{ \AA}$  и  $c = 7,00 \text{ \AA}$  [2]. Число упругих постоянных данного монокристалла равно 6.

Тетрагональность структуры монокристалла  $\text{TiSe}$  обусловлено наличием двух различных положений атомов теллура, в одном из которых они одновалентны, а в другом—трехвалентны. На боковых гранях элементарной ячейки трехвалентные атомы  $\text{Ti}_{III}$  (рис. 1) окружены тетраэдрически атомами селена, образующими пояс

\* Результаты работы доложены на II симпозиуме по комплексному исследованию жидкого состояния вещества (Москва, 2—5 февраля 1965 г.).

вдоль кристаллографической оси  $c$ . По направлению этой же оси одновалентными атомами  $\text{Ti}_{I}$  также образуются цепи  $\text{Ti}_{I}-\text{Se}$ , соответствующие звенья которых проходят как через центры, так и через вершины элементарной ячейки, причем расстояние  $\text{Ti}_{I}-\text{Se}$  равно  $3,42 \text{ \AA}$  а  $\text{Ti}_{III}-\text{Se}$ — $2,68 \text{ \AA}$ .

Из полученных нами монокристаллов были приготовлены цилиндрические образцы с плоскопараллельными торцами. Диаметр их имел значение порядка  $15 \text{ мм}$ , а длина  $15-18 \text{ мм}$ . В монокристаллах  $\text{TiSe}$  измерения скорости продольных и поперечных ультразвуковых волн производили с помощью импульсного метода [3], с точностью до  $0,5\%$ . Кварцедержатель помещали под стеклянным колпаком, и из системы откачивали воздух. Это исключало возможность теплообмена, окислительных процессов и образования влаги в системе во время ведения опытов при низких температурах. Более подробно об этом изложено в работе [4]. При опытах в интервале от  $20$  до  $300^\circ\text{C}$  образец приклеивали к акустическим линиям задержки клеем БФ-2. А при температурах от  $20$  до  $-150^\circ\text{C}$  применяли другой клей,  $2/3$  которого составляла канифоль, а  $1/3$ —вакуумная смазка.

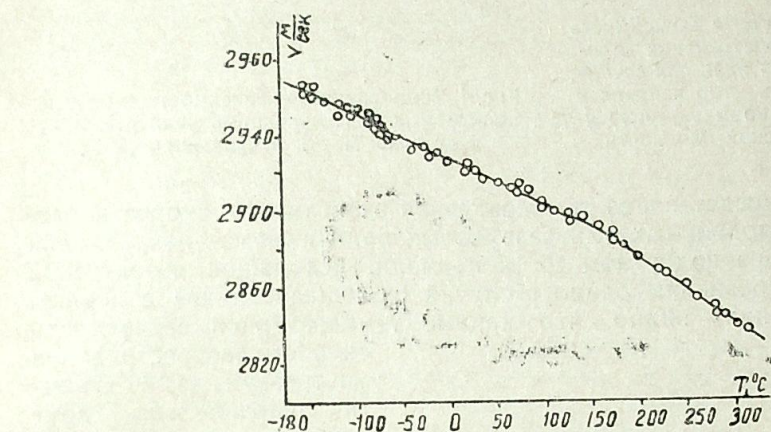


Рис. 2. Температурная зависимость скорости продольных ультразвуковых волн в монокристалле  $\text{TiSe}$  в направлении  $(001)$ .

при каждом повышении температуры на  $1^\circ\text{C}$  скорость ультразвука уменьшается на  $0,234 \text{ м/сек}$ , а в интервале  $160-310^\circ\text{C}$ —на  $0,346 \text{ м/сек}$ . По-видимому, выше  $160^\circ\text{C}$  здесь имеет место более резкое уменьшение времени релаксации. Наличие излома на кривой температурной зависимости скорости ультразвуковых волн можно объяснить следующим образом.

Удельные сопротивления данных образцов при  $20^\circ\text{C}$  составляли около  $3,3 \text{ ом}\cdot\text{см}$ . В работе [5] показано, что с повышением температуры электропроводность низкоомных образцов (при  $20^\circ\text{C}$  удельные сопротивления достигают  $1,3-3,5 \text{ ом}\cdot\text{см}$ ) сначала уменьшается, а затем, проходя через минимум, растет. Чем больше удельное сопротивление образца, тем ниже температура перехода от металлической к полупроводниковой проводимости. Для образцов удельное сопротивление которых  $1; 3,2; 3,5$  и  $49 \text{ ом}\cdot\text{см}$ , минимум электропроводности наблюдался, соответственно, при  $195, 165$  и  $120^\circ\text{C}$ . В образцах, удельные сопротивления которых были около  $3,3 \text{ ом}\cdot\text{см}$ , с повышением температуры наблюдалось резкое уменьшение подвижности носителей тока. Особенно резкое уменьшение начинается со  $160^\circ\text{C}$ .

При нагревании образца до температуры указанного выше пере-



хода уменьшение проводимости объясняется убыванием подвижности, так как значение концентрации носителей тока в этом интервале температур остается почти постоянным. Начиная с температуры перехода от металлической к полупроводниковой проводимости, последняя возрастает уже за счет резкого роста концентрации дырок и имеет место возрастание взаимодействия между упругими волнами и носителями тока.

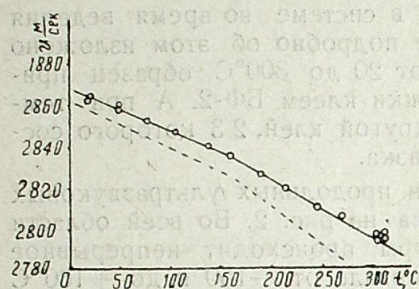


Рис. 3. Температурная зависимость скорости распространения продольных упругих волн для случая, когда волновой вектор направлен под углом  $16^\circ$  к нормали, исходящей из базисной плоскости.

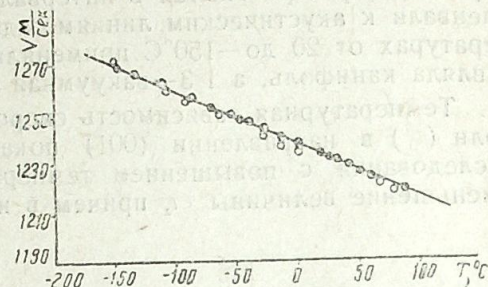


Рис. 4. Температурная зависимость скорости поперечных ультразвуковых волн в монокристалле TlSe в направлении (001).

На рис. 3 представлена температурная зависимость скорости распространения продольных ультразвуковых волн в случае направления волнового вектора под углом  $16^\circ$  к нормали, исходящей из базисной плоскости. Из сравнения данного случая (сплошная линия) с первым (пунктирная линия) видно, что кривые температурной зависимости

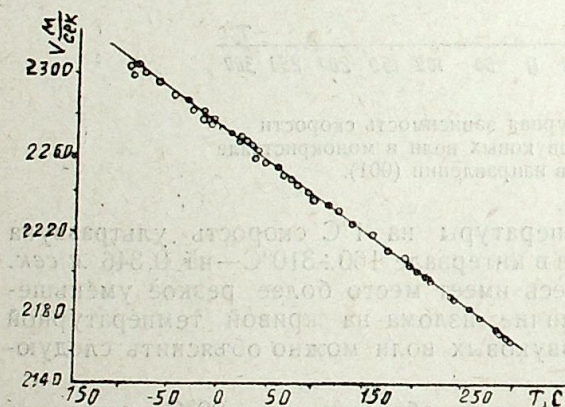


Рис. 5. Температурная зависимость скорости продольных ультразвуковых волн в монокристалле TlSe в направлении (110).

ультразвуковых волн к скорости продольных упругих волн в направлении (110) представлена на рис. 5 и 6. В этом случае отношение скорости поперечных ультразвуковых волн к скорости продольных составляет 0,60 и при каждом повышении температуры на  $1^\circ\text{C}$  скорость продольных ультразвуковых волн уменьшается на  $0,40 \text{ м/сек}$ , а поперечных — на  $0,27 \text{ м/сек}$ .

Изменение скорости как поперечных, так и продольных ультразвуковых волн в зависимости от температуры вдоль направления (110) больше, чем вдоль (001). Причина этого заключается в том, что в направлении (001) силы сцепления между атомами гораздо больше, чем в (110). Из сопоставления рис. 2 и 5 видно, что при комнатной

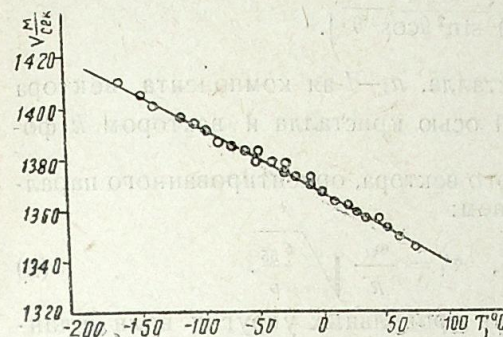


Рис. 6. Температурная зависимость скорости поперечных ультразвуковых волн в монокристалле TlSe в направлении (110).

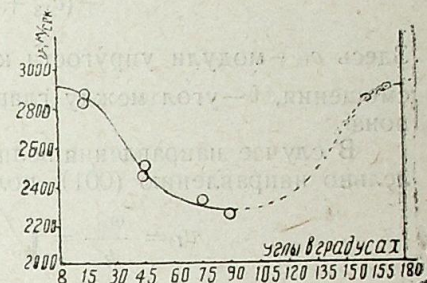


Рис. 7. Зависимость скорости распространения продольных упругих волн от угла между волновым вектором и нормалью к базисной плоскости.

температуре скорость продольной упругой волны, распространяющейся в направлении (001), на  $656 \text{ м/сек}$  больше, чем скорость таких же волн в направлении (110). Это обусловлено тем, что в направлении (001) расстояние между атомами значительно меньше, чем в направлении (110). Нами измерена также угловая зависимость скорости распространения продольных колебаний при изменении угла между волновым вектором и нормалью к базисной плоскости от  $0$  до  $90^\circ$ . Полученные результаты представлены на рис. 7.

В выражении упругой энергии тетрагонального кристалла при пренебрежении ангармоническими членами можно получить спектр упругих колебаний [6]. Секулярный определитель, из которого определяется спектр упругих колебаний, имеет вид

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho \omega^2) u_1 + a_{12} u_2 + a_{13} u_3 = 0, \\ a_{21} u_1 + (a_{22} - \rho \omega^2) u_2 + a_{23} u_3 = 0, \\ a_{31} u_1 + a_{32} u_2 + (a_{33} - \rho \omega^2) u_3 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= c_{11} k_x^2 + c_{66} k_y^2 + c_{55} k_z^2, & a_{12} &= a_{21} = (c_{12} + c_{66}) k_x k_y, \\ a_{22} &= c_{66} k_x^2 + c_{11} k_y^2 + c_{55} k_z^2, & a_{13} &= a_{31} = (c_{13} + c_{55}) k_x k_z, \\ a_{33} &= c_{55} (k_x^2 + k_y^2) + c_{33} k_z^2, & a_{23} &= a_{32} = (c_{13} + c_{55}) k_y k_z. \end{aligned}$$

Уравнение (1) удается решить только на плоскостях  $k_x = 0$  ( $k_y = 0$ ) и  $k_x = k_y$  ( $k_x = -k_y$ ). Соответствующие решения его имеют вид: на плоскости  $k_x = 0$

$$\omega_1^2 = \frac{k^2}{\rho} (c_{55} \cos^2 \theta + c_{66} \sin^2 \theta),$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{k^2}{\rho} \left( \frac{c_{55} + c_{33}}{2} \cos^2 \theta + \frac{c_{11} + c_{55}}{2} \sin^2 \theta \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{\left( \frac{c_{55} - c_{33}}{2} \cos^2 \theta + \frac{c_{11} - c_{55}}{2} \sin^2 \theta \right)^2 + (c_{13} + c_{55})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right);$$

на плоскости  $k_x = k_y$

$$\omega_1^2 = \frac{k^2}{\rho} \left( \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \sin^2 \theta + c_{55} \cos^2 \theta \right);$$



$$\omega_{2,3}^2 = \frac{k^2}{\rho} \left( \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66}}{4} \sin^2 \theta + \frac{c_{55}}{2} + \frac{c_{33}}{2} \cos^2 \theta \pm \sqrt{\left( \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66} - 2c_{55}}{4} \sin^2 \theta + \frac{c_{55} - c_{33}}{2} \cos^2 \theta \right)^2 + (c_{13} + c_{55})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right).$$

Здесь  $c_{ik}$  — модули упругости кристалла,  $u_l$  —  $l$ -ая компонента вектора смещения,  $\theta$  — угол между главной осью кристалла и вектором  $\vec{k}$  фоновна.

В случае направления волнового вектора, ориентированного параллельно направлению (001), получаем:

$$v_l = \frac{\omega_l}{k} = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}}, \quad v_t = \frac{\omega_t}{k} = \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь  $v_l$  — скорость распространения продольных упругих волн в данном направлении, а  $v_t$  — скорость поперечных волн. Отметим, что в направлении (001) скорости обеих поперечных волн равны между собой. Когда волновой вектор параллелен направлению (110) или  $(\bar{1}\bar{1}0)$  имеем:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega_l}{k} = \sqrt{\frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66}}{2\rho}}, \\ v_{01t} &= \frac{\omega_t}{k} = \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}, \\ v_{02t} &= \frac{\omega_t}{k} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Наконец, в третьем случае, когда направление волнового вектора параллельно направлению (100) или (010), оказалось, что

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{\omega_l}{k} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}, \\ v_{01t} &= \frac{\omega_t}{k} = \sqrt{\frac{c_{66}}{\rho}}, \\ v_{02t} &= \frac{\omega_t}{k} = \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для вычисления упругих параметров TlSe необходимо иметь данные о его плотности. Поэтому посредством гидростатического взвешивания измерялась плотность этого объекта. При 20°C она оказалась равной 8,398 г/см<sup>3</sup>. На основе полученных нами экспериментальных данных и соотношений, приведенных выше, при 20°C были вычислены значения упругих констант монокристалла TlSe и получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} c_{33} &= \rho v_l^2 = 7,17 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ c_{55} &= \rho v_t^2 = 1,28 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ c_{11} + c_{12} + 2c_{66} &= 2\rho v^2 = 8,62 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ c_{11} - c_{12} &= 2\rho v_{02t}^2 = 3,12 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ c_{11} &= \rho v_l^2 = 3,55 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \\ c_{12} &= c_{11} - 2\rho v_{02t}^2 = 0,76 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2, \end{aligned}$$

Упругий модуль  $c_{13}$  остается пока неизмеренным.

В монокристаллах различных симметрий существуют так называемые особенные направления, вдоль которых распространяются только „чистые“ волны [7]. Но при отклонении на малые углы от особенных направлений можно приблизительно считать волны „чистыми“. Тогда для продольной волны, волновой вектор которой составляет угол 15° по отношению к нормали базисной плоскости, получаем следующее соотношение:

$$v_3^2 = \frac{\omega_3^2}{k^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{c_{55} + c_{33}}{2} - \sqrt{\frac{c_{55} - c_{33}}{2} \pm (c_{13} + c_{55})^2 \cdot \frac{\pi^2}{144}} \right\}, \quad (5)$$

а в случае, когда волновой вектор составляет угол 15° с плоскостью (110), имеем

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66} + 2c_{55}}{4} + \sqrt{\left( \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66} - 2c_{55}}{4} \right)^2 + \frac{c_{13} + c_{55}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{144}} \right\}. \quad (6)$$

Результаты, полученные на основе одного из этих уравнений, позволяют контролировать степень точности данных, полученных путем применения другого. Такая необходимость неизбежна прежде всего при нахождении  $c_{13}$ .

Из (5) и (6) приближенно можно получить, соответственно:

$$v_3^2 = \frac{\omega_3^2}{k^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ c_{33} - \frac{(c_{13} + c_{55})}{|c_{55} - c_{33}|} \cdot \frac{\pi^2}{144} \right\}, \quad (7)$$

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{66}}{2} + \frac{(c_{13} + c_{55})^2}{|c_{11} + c_{12} + 2c_{66} - 2c_{55}|} \cdot \frac{\pi^2}{144} \right\}. \quad (8)$$

Подставляя численные значения известных компонент в соотношения (7) и (8), соответственно получим:  $c_{13} = 3,16 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup> и  $c_{13} = 3,07 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>. Вычисленные из разных соотношений значения  $c_{13}$  близки друг к другу. Таким образом, находим, что для монокристалла TlSe упругий модуль  $c_{13}$  равен  $3,12 \cdot 10^{11}$  дин/см<sup>2</sup>.

В заключение мы считаем своим приятным долгом выразить благодарность канд. физ.-матем. наук Ф. М. Гашимзаде за оказанную нам помощь и внимание при выполнении настоящей работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mooser E. and Pearson W. B. Phys. rev., v. 101, № 1, 1956.
2. Ketelaar A., Hart W. H., Moerel M. and Polder D. Zs. für Kristallogr., 101, 5, 1939.
3. Александров К. С., Носиков О. В. „Акустический журнал“, т. 2, вып. 3, 1956.
4. Халилов Х. М., Рзаев К. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 1966.
5. Ахундов Г. А., Абдуллаев Г. Б., Гусейнов Г. Д. ФТТ, т. 2, вып. 7, 1960.
6. Гашимзаде Ф. М. ФТТ, т. 5, вып. 3, 1963.
7. Меркулов Л. Г. Применение ультразвука и исследованию вещества, в. XVII, 1963.

Х. М. Халилов, К. И. Рзаев

#### Ултрасэс васитэсилэ TlSe монокристаллынын эластик параметрлэринин тэ'јини

##### ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ мұхтәлиф температур вә кристаллографик истигамәт-ләрден, далға вектору илә базис мұстәвисинин нормал хәтти арасындакы буцаглардан асылы олараг енинә ( $v_t$ ) вә узунуна ( $v_l$ ) ултрасэс далғаларынын јајылма сүр'әти верилмишдир.



Узунуна ултрасэс далгаларынын сүр'эти [001] кристаллографик истигамэтдә,  $-150-310^{\circ}\text{C}$  температур интервалында өлчүлмүшдүр.  $160^{\circ}\text{C}$ -дә ултрасэс далгалары сүр'этинин температурдан асылылыг эјрисиндә хәтти асылылыгын кәскин позулмасы мүшәһидә олунур. Бунун сәбәби  $160^{\circ}\text{C}$  температурдан јухары эластик далгалар вә чәрә-јандашыјычылар арасында элагәнин даһа кәскин артмасы вә релаксасија мүддәтинин азалмасыдыр. [001] кристаллографик истигамэтдә  $\epsilon_1$ -нин  $\epsilon_1$ -ә нисбәти 0,42-јә, [110] истигамәтиндә исә  $-0,60$ -а ујғун кәлир. [001] истигамәтинә нисбәтән [110] истигамәтиндә  $\epsilon_1$  вә  $\epsilon_1$  кәмијјәтләринин гијмәти даһа чох олур. Чүнки 1-чи истигамәтдә атомлар арасындакы гаршылыглы элагә гүввәси икинчијә нисбәтән даһа чохдур.

Мәгаләдә көстәрилмиш формуллар вә тәчрүбәдән алынмыш нәти-чәләр васитәсилә TiSe монокристалынын эластик сабитләри һесаблин-мыш вә бунун нәтичәсиндә ашағыдакы параметрләр алынмышдыр:

$$C_{33} = 7,16 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2}; \quad C_{55} = 1,28 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2};$$

$$C_{11} + C_{12} + 2C_{66} = 8,62 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2};$$

$$C_{11} - C_{12} = 3,12 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2}; \quad C_{11} = 3,55 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2};$$

$$C_{12} = 0,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2}; \quad C_{13} = 3,12 \cdot 10^{11} \frac{\text{дина}}{\text{см}^2}.$$

М. А. БАГИРОВ, Н. В. КЛИМОВА, В. П. МАЛИН

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ВОЗДУХЕ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК

Полимерные пленки благодаря своим диэлектрическим свойствам широко используются в конденсаторостроении. Со временем эксплуатации диэлектрические свойства пленок ухудшаются, поэтому представляет интерес выяснить изменение диэлектрических потерь пленок под влиянием электрического разряда. Ранее в [1] описывались изменения диэлектрических потерь полистирольной (ПС) пленки под действием электрического разряда в воздухе при комнатной температуре. При действии разряда на ПС пленку наблюдается появление новой области диэлектрических потерь при  $25-40^{\circ}\text{C}$ , а также увеличение дипольно-эластических потерь (ДЭП). Сдвиг максимума ДЭП в пленке, подвергнутой действию разряда, в сторону более высоких температур свидетельствует об уменьшении подвижности кинетических сегментов главной цепи, т. е. о сшивании. На сшивание указывает также появление у ПС пленки, подвергнутой действию разряда, нерастворимого осадка—геля.

В данной статье описывается изменение диэлектрических потерь ПС пленки под действием электрического разряда в воздухе при повышенных температурах, а также изменение диэлектрических потерь под действием разряда в полиэтилентерефталатной (ПЭТФ) пленке, которая в отличие от ПС пленки является полярным полимером.

### Методика эксперимента

В качестве объекта исследований брались промышленные полистирольная и полиэтилентерефталатная пленки толщиной в 20 мк, которые подвергались воздействию электрического разряда в плоскостной ячейке, где высоковольтный электрод отделялся от пленки стеклянным и воздушным барьерами. Испытательная ячейка подробно описана в [1]. Для изучения действия электрического разряда при повышенных температурах ячейку помещали в специальное нагревательное устройство, позволяющее поддерживать заданную температуру. Во время опыта пленка старилась в течение 5 часов при приложенных к ячейке напряжениях  $U_{\text{ст}} = 2, 4, 6, 7, 8, 9 \text{ кВ}$  и различных температурах старения  $t_{\text{ст}}$ . Напряжение, при котором возникал разряд в воздушном промежутке ячейки, определялось по вольт-амперной характеристике ячейки способом, описанным в [2], а также по осциллограмме и, было равным примерно 5,5—6 кВ.



После действия электрического разряда пленку промывали спиртом, чтобы удалить с ее поверхности низкомолекулярные продукты, появившиеся в результате действия разряда, затем пленку сушили над  $\text{CaCl}_2$  до достижения постоянного веса. Таким образом, нами фиксировались лишь необратимые изменения  $\text{tg } \delta$  самой пленки. Для определения изменения диэлектрических потерь на мосте МЛЕ-1 снимали температурно-частотные зависимости  $\text{tg } \delta = \varphi(t^\circ)$  в диапазоне  $20-170^\circ\text{C}$  и частот  $0,4-10 \text{ кгц}$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

### Изменение диэлектрических потерь ПС пленки под действием электрического разряда при повышенных температурах

В таблице сопоставлены изменения пленки, вызванные разрядом при  $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$  и  $70^\circ\text{C}$ . В качестве критериев изменения  $\text{tg } \delta$  выбраны два параметра:  $\text{tg } \delta_{\text{max}}$  низкотемпературной области потерь, обозначаемый НТП, и  $\text{tg } \delta_{\text{max}}$  области дипольно-эластических потерь—ДЭП. Из таблицы видно:

- 1) один лишь прогрев ПС пленки до  $70^\circ\text{C}$  (электрическое напряжение к ячейке не прикладывалось) не вызывает изменений  $\text{tg } \delta$ ;
- 2) при значениях напряжения, меньших напряжения, необходимого для зажигания воздушного промежутка ячейки, изменений  $\text{tg } \delta$  не наблюдалось как при  $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$ , так и при  $70^\circ\text{C}$ ;

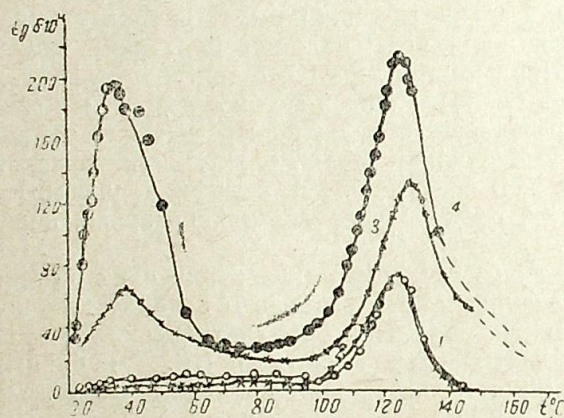


Рис. 1. Зависимость  $\text{tg } \delta$  ПС пленки от температуры измерения при различных напряжениях воздействия электрического разряда ( $\text{tg } \delta = \varphi(t^\circ)$  при  $f_{\text{изм.}} = 0,4 \text{ кгц}$ ): 1— $u_{\text{ст}} = 4 \text{ кв}$ ,  $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$ ; 2— $u_{\text{ст}} = 4 \text{ кв}$ ,  $t_{\text{ст}} = 70^\circ\text{C}$ ; 3— $u_{\text{ст}} = 7 \text{ кв}$ ,  $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$ ; 4— $u_{\text{ст}} = 7 \text{ кв}$ ,  $t_{\text{ст}} = 70^\circ\text{C}$ .

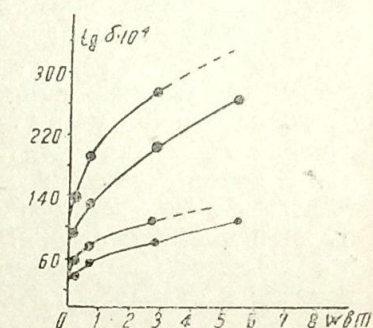


Рис. 2. Зависимость  $\text{tg } \delta$  ДЭП ПС пленки от мощности разряда, выделяющейся в воздушном зазоре ячейки ( $\text{tg } \delta = \varphi(W_{\text{вт}})$ ): 1— $70^\circ\text{C}$ ,  $0,4 \text{ кгц}$ ; 2— $80^\circ\text{C}$ ,  $0,4 \text{ кгц}$ ; 3— $70^\circ\text{C}$ ,  $1 \text{ кгц}$ ; 4— $30^\circ\text{C}$ ,  $1 \text{ кгц}$ .

- 3) при напряжениях на ячейке, достаточных для зажигания разряда, наблюдается появление низкотемпературной области потерь—НТП и увеличение ДЭП, причем с повышением напряжения, вызывающего старение, этот рост происходит для  $t_{\text{ст}} = 70^\circ\text{C}$  быстрее, чем при  $30^\circ\text{C}$ ;
- 4) абсолютное увеличение ДЭП и НТП тем больше, чем меньше частота измерения.

На рис. 1 показаны зависимости  $\text{tg } \delta = \varphi(t^\circ)$  для  $u_{\text{ст}} = 4$  и  $7 \text{ кв}$  при  $t_{\text{ст}} = 30$  и  $70^\circ\text{C}$ . Для  $u_{\text{ст}} = 4 \text{ кв}$  (разряд в воздушном промежутке отсутствует) кривые  $\text{tg } \delta = \varphi(t^\circ)$  для  $t_{\text{ст}} = 30$  и  $70^\circ\text{C}$  и исходной пленки

практически совпадают. Для  $u_{\text{ст}} = 7 \text{ кв}$  кривая  $t_{\text{ст}} = 70^\circ\text{C}$  лежит значительно выше, чем для  $t_{\text{ст}} = 30^\circ\text{C}$ .

Следует отметить, что величина  $\text{tg } \delta_{\text{max}}$  НТП не может служить достаточно надежным критерием изменения  $\text{tg } \delta$ , так как она довольно сильно зависит от качества промывки пленки. Отсутствие зависимости температуры  $\text{tg } \delta$  НТП от частоты указывает на то, что эта область потерь не имеет релаксационного характера. Вероятно, ее появление обусловлено возникновением низкомолекулярных соединений в результате воздействия электрического разряда в воздухе на ПС пленку. Увеличение области ДЭП можно объяснить появлением окисленных групп, тесно связанных с основными цепями макромолекул. Так как окислению полимеров способствует повышение температуры [3], то естественно, что увеличение температуры, при которой производится воздействие электрического разряда в воздухе на ПС пленку, приводит к более сильному росту диэлектрических потерь.

На рис. 2 представлена зависимость  $\text{tg } \delta$  ДЭП ПС пленки от мощности, выделяющейся в воздушном зазоре ячейки при разряде. Мощность определялась с помощью вольт-амперных характеристик ячейки по методу, описанному в [2]. Из рис. 2 видно, что с увеличением мощности разряда рост  $\text{tg } \delta$  ДЭП уменьшается, т. е.  $\text{tg } \delta$  ДЭП стремится к насыщению. Это, вероятно, можно объяснить тем, что окисление происходит только в поверхностном слое пленки.

Подсчет энергии активации ДЭП полистирольной пленки, как исходной, так и подвергнутой воздействию разряда, производился по широко известной формуле:

$$\lg f_m = \lg f_0 - \frac{\Delta U}{2,303 RT_m}$$

где  $T_m$ ,  $f_m$ —соответственно, абсолютная температура и частота максимума ДЭП. Подсчет показал, что энергия активации после воздействия электрического разряда практически не изменяется и остается равной  $\approx 90 \text{ ккал/моль}$ . Это означает, что воздействие электрического разряда в воздухе на ПС пленку существенно не изменяет химической структуры пленки. Это может косвенно указывать на то, что основные изменения происходят в поверхностном слое.

### Исследование влияния электрического разряда на диэлектрические потери полиэтилентерефталатной (ПЭТФ) пленки

Согласно [2] в ПЭТФ имеется три области диэлектрических потерь:

- 1) низкотемпературная, лежащая для данного диапазона частота в области отрицательных температур. Эта область обусловлена движением диполей  $\text{OH}$ ;
- 2) среднетемпературная область, лежащая выше температуры стеклования (температура стеклования ПЭТФ порядка  $80-100^\circ\text{C}$ ). Она относится к дипольно-эластическим потерям и обусловлена движением сегментов молекул;
- 3) высокотемпературная область, представляющая собой потери на проводимость и обусловленная движением ионов примесей.

В исследуемую нами область температур попадали участок спада низкотемпературного максимума потерь, среднетемпературная область и начало высокотемпературной области. В результате исследований установлено, что при напряжении, недостаточном для зажигания разряда в воздушном промежутке ячейки, изменений диэлектрических потерь практически не наблюдается.



На рис. 3 показаны температурные зависимости  $\operatorname{tg} \delta$  при  $f_{\text{изм}} = 0,4 \text{ кгц}$  пленки ПЭТФ, старившейся при напряжении от 5 до 9 кВ, при 30°C в течение 5 часов. Аналитическая картина наблюдается и при других частотах измерения. Из рис. 3 видно, что при напряжении 6 кВ начинается рост  $\operatorname{tg} \delta$  в области температур 20–60°C. Следует отметить, что температура максимума  $\operatorname{tg} \delta$  этой области потерь не проявляет зависимости от частоты измерений, а максимум  $\operatorname{tg} \delta$  сильно уменьшается после промывки пленки, подвергнутой воздействию разряда. Это позволяет предположить, что данная область потерь также, как и в состарившейся ПС пленке, обусловлена полярными группами, присутствующими в низкомолекулярных продуктах распада и остающимися в поверхностном слое пленки даже после ее промывки.

При напряжениях выше 7 кВ наблюдается интенсивный рост области потерь при 80–100°C, сопровождающийся общим увеличением  $\operatorname{tg} \delta$ . Близость данной области потерь к температуре стеклования позволяет предположить, что при высоких напряжениях старения (т. е. при больших мощностях разряда) происходит деструкция полимера на крупные блоки, которые и обуславливают эту область потерь. Инфракрасный спектр пленки ПЭТФ, подвергнутой воздействию электрического разряда в воздухе, показывает лишь небольшое расширение полосы С=О групп. Таким образом можно предположить, что ПЭТФ под действием электрического разряда претерпевает лишь небольшое окисление, а его поверхностный слой деструктурируется; изменения диэлектрических потерь ПЭТФ обуславливаются полярными продуктами деструкции.

Максимум  $\operatorname{tg} \delta$  дипольно-эластических потерь ПЭТФ обнаруживается при одной и той же температуре для разных значений напряжения; это указывает на то, что в главных цепях полимеров не происходит изменений, уменьшающих подвижность их сегментов, т. е. не наблюдается сшивания молекул. Это подтверждается еще и тем, что ПЭТФ пленки не дает нерастворимого осадка при любой степени воздействия электрического разряда, что совпадает с данными, полученными при облучении ПЭТФ ядерными излучениями. Согласно [5] ПЭТФ относится к деструктурирующимся, а не к сшивающимся полимерам.

### Выводы

1. При воздействии электрического разряда в воздухе на пленки ПС и ПЭТФ наблюдаются необратимые изменения в диэлектрических потерях,  $\operatorname{tg} \delta$  увеличивается. Его увеличение происходит неодинаково для различных частот и температур измерения.

2. Характер изменений температурной зависимости диэлектрических потерь для ПС пленки несколько отличается от характера изменений  $\operatorname{tg} \delta = \varphi(t^\circ)$  для ПЭТФ пленки. Хотя в обоих полимерах отмечается возникновение низкотемпературной области потерь в диапазоне

Зависимость  $\operatorname{tg} \delta \cdot 10^4$  ПС пленки от температуры старения

| $f_{\text{изм.}}, \text{ кгц}$ |        |      | $U_{\text{ст.}}, \text{ кВ}$ |       |      |      |      |
|--------------------------------|--------|------|------------------------------|-------|------|------|------|
|                                |        |      | 0,4                          | 1     | 5    | 8    | 10   |
| 0                              | Н.Т.П. | 30°C | 6                            | 2     | 0,6  | 0,6  | 0,6  |
|                                |        | 70°C | 6,4                          | 2,9   | 0,8  | 0,6  | 0,5  |
|                                | ДЭП    | 30°C | 73,6                         | 87    | 6,1  | 4,4  | 3,6  |
|                                |        | 70°C | 71,0                         | 28,3  | 6,2  | 4,2  | 3,7  |
| 4                              | Н.Т.П. | 30°C | 2,08                         | 1,4   | 0,8  | 0,4  | 0,4  |
|                                |        | 70°C | 4,9                          | 2,1   | 2,1  | 1,0  | 1,0  |
|                                | ДЭП    | 30°C | 74,9                         | 30,0  | 6,5  | 4,6  | 3,6  |
|                                |        | 70°C | 73,1                         | 28,7  | 7,6  | 4,5  | 4,2  |
| 6                              | Н.Т.П. | 30°C | 7,44                         | 2,13  | 1,2  | 1,0  | 1,0  |
|                                |        | 70°C | 72,4                         | 19,7  | 2,9  | 1,3  | 0,7  |
|                                | ДЭП    | 30°C | 97,0                         | 38,5  | 7,9  | 6,1  | 4,5  |
|                                |        | 70°C | 141,4                        | 56,2  | 11,0 | 7,0  | 5,8  |
| 7                              | Н.Т.П. | 30°C | 65,7                         | 17,4  | 2,7  | 1,8  | 1,8  |
|                                |        | 70°C | 215,8                        | 58,3  | 7,0  | 4,3  | 3,8  |
|                                | ДЭП    | 30°C | 132,1                        | 53,8  | 13,1 | 7,7  | 7,0  |
|                                |        | 70°C | 182,5                        | 77,6  | 16,9 | 10,2 | 8,7  |
| 8                              | Н.Т.П. | 30°C | 74,1                         | 17,3  | 2,4  | 1,3  | 1,30 |
|                                |        | 70°C | 103,9                        | 27,2  | 3,6  | 2,2  | 1,6  |
|                                | ДЭП    | 30°C | 193,7                        | 79,9  | 16,3 | 10,0 | 8,4  |
|                                |        | 70°C | 276,3                        | 108,7 | 21,8 | 14,2 | 11,5 |



25—60°C, обусловленной, по всей вероятности, низкомолекулярными продуктами деструкции, в ПЭТФ пленке не наблюдается ни увеличения  $\lg \delta$  ДЭП, ни смещения его в сторону более высоких температур. Отсутствие смещения ДЭП в сторону более высоких температур может свидетельствовать об отсутствии сшивания в ПЭТФ пленке под действием электрического разряда.

3. Повышение температуры при воздействии электрического разряда на ПС пленку вызывает увеличение диэлектрических потерь.

4. Величина энергии активации ДЭП ПС пленки после воздействия электрического разряда в воздухе не меняется.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов С. А., Багиров М. А., Климова Н. В., Малин В. П. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, № 3, 1965.
2. Гмельянов Ю. М., Филипов Ю. В. ЖФХ, 33, № 5, 1959.
3. Тагер А. А. Физико-химия полимеров. Гостехиздат, М., 1963.
4. Reddish W. Trans. Farad. soc. 43, № 330, 1950.
5. Чарлзби А. Ядерные излучения и полимеры. ИЛ, 1962.

М. И. ЖЕЛЕЗНОВ

#### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТОКОПРОВОДА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА БЛИЗОСТИ

В работе определялось внутреннее электрическое сопротивление длинного цилиндрического токопровода круглого сечения с учетом эффекта близости, когда этот токопровод составляет с еще одним, параллельным токопроводом замкнутую петлю тока. В данной работе использованы результаты из [1]. Для определения полного внутреннего электрического сопротивления применялся способ вектора Умова—Пойнтинга.

Задача. Рассмотрим два круговых цилиндрических, параллельных проводника (нулевой и первый), по которым текут токи  $J_0$ ,  $J_1$  (рис. 1);

$$J_1 = -J_0 = -J. \quad (1)$$

Радиусы проводников пусть одинаковы:

$$R_0 = R_1 \quad (2)$$

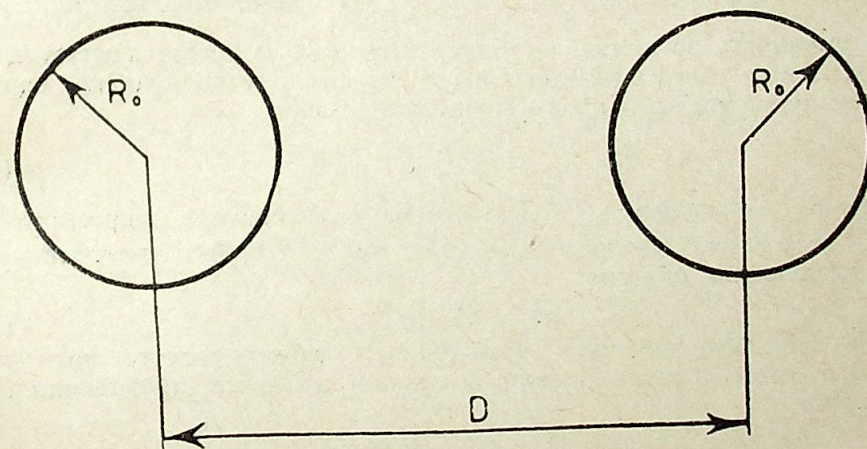


Рис. 1

и  $D$ —расстояние между геометрическими осями проводников (рис. 1).  
Полное внутреннее электрическое сопротивление равно

$$\dot{Z} = R + j\omega L. \quad (3)$$

Вектор Умова—Пойнтинга. Мощность, поступающая в проводник для покрытия потерь, равна



$$\dot{P} = \oint \vec{S} d\vec{A} \quad (4)$$

или

$$\dot{P} = \oint (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A}, \quad (5)$$

где верхний знак над  $\vec{H}$  обозначает, что берется сопряженное комплексное значение  $\vec{H}$ ;  $\vec{S}$  — вектор Умова—Пойнтинга;  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  — комплексы соответствующих напряженностей электрического и магнитного полей, зависящие только от координат;  $d\vec{A}$  — вектор элемента плоскости. В случае длинного проводника достаточно интегрировать по границе проводника, потому что скалярное произведение по сечению проводника (здесь векторы  $\vec{S}$ ,  $d\vec{A}$  перпендикулярны друг другу) равно нулю.

На границе проводника вектор напряженности электрического поля состоит только из одной составляющей  $\vec{E}_z$ , а вектор напряженности магнитного поля составляют радиальная и касательная составляющие —  $\vec{H}_r$ ,  $\vec{H}_\varphi$ . Вектор Умова—Пойнтинга есть

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{1}_r & \vec{1}_\varphi & \vec{1}_z \\ 0 & 0 & \vec{E}_z \\ \vec{H}_r & \vec{H}_\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\vec{1}_r \vec{E}_z \vec{H}_\varphi + \vec{1}_\varphi \vec{E}_z \vec{H}_r, \quad (6)$$

где  $\vec{1}_r$ ,  $\vec{1}_\varphi$ ,  $\vec{1}_z$  — единичные векторы. Отсюда следует, что произведение

$$\vec{S} d\vec{A} = -\vec{E}_z \vec{H}_\varphi R_0 d\varphi dz \quad (7)$$

при

$$d\vec{A} = \vec{1}_r R_0 d\varphi dz.$$

Для определения полного внутреннего электрического сопротивления

надо принимать во внимание только касательную составляющую  $\vec{H}_\varphi$ .

Полное внутреннее сопротивление проводника определяем через вектор Умова—Пойнтинга в виде

$$\dot{Z} = \frac{\dot{P}}{j^2} = \frac{1}{j^2} \oint \vec{S} d\vec{A}. \quad (8)$$

Мы будем использовать только первое приближение, полученное в [1]. В этом случае уравнение для  $\vec{E}_z^0$  в нулевом проводнике составляется следующим образом:

$$\vec{E}_z^0 = \vec{E}_{z0}^0 + \vec{E}_{z1}^0, \quad (9)$$

где  $\vec{E}_z^0$  — комплексная сумма напряженности электрического поля нулевого и первого приближений на границе нулевого проводника. По [1] имеем

$$\vec{E}_{z0}^0 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{j k}{2\pi R_0} \cdot \frac{I_0(k R_0)}{I_1(k R_0)} \quad (10)$$

и

$$\vec{E}_{z1}^0 = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{j k}{\pi R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^n \cdot \frac{I_n(k R_0)}{I_{n-1}(k R_0)} \cdot \cos n \varphi, \quad (11)$$

где  $k^2 = j \omega \mu \sigma$ ;  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, характеризующая временную зависимость;  $\omega$  — угловая частота;  $\mu$  — магнитная проницаемость проводника;  $\sigma$  — удельная проводимость проводника.

Напряженность магнитного поля  $\vec{H}_\varphi^0$  на границе нулевого проводника также определяется в виде

$$\vec{H}_\varphi^0 = \vec{H}_{\varphi 0}^0 + \vec{H}_{\varphi 1}^0. \quad (12)$$

Согласно [1]

$$\vec{H}_{\varphi 0}^0 = \frac{j}{2\pi R_0} \quad (13)$$

и

$$\vec{H}_{\varphi 1}^0 = \frac{j}{\pi R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^n \cdot \cos n \varphi - \frac{j}{\pi k R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^n \cdot \frac{I_n(k R_0)}{I_{n-1}(k R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi. \quad (14)$$

мощность  $\dot{P}$  будет

$$\dot{P} = \iint \vec{S} d\vec{A} = - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} (\vec{E}_{z0}^0 + \vec{E}_{z1}^0) (\vec{H}_{\varphi 0}^0 + \vec{H}_{\varphi 1}^0) R_0 d\varphi dz. \quad (15)$$

Используя найденные значения для  $\vec{E}_{z0}^0$ ,  $\vec{E}_{z1}^0$ ,  $\vec{H}_{\varphi 0}^0$ ,  $\vec{H}_{\varphi 1}^0$ , по формулам (10), (11), (13), (14) получаем (см. приложение)

$$\dot{P} = - \frac{j^2 k l}{\pi \sigma R_0} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0(k R_0)}{I_1(k R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{L}\right)^{2n} \cdot \frac{I_n(k R_0)}{I_{n-1}(k R_0)} - \frac{1}{k R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^{2n} \cdot n \cdot \frac{|I_n(k R_0)|^2}{|I_{n-1}(k R_0)|^2} \right]. \quad (16)$$

При этом

$$k^2 = j \omega \mu \sigma \quad (17)$$

и

$$k = \sqrt{j} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) \sqrt{\omega \mu \sigma} \quad \text{при } \alpha = \sqrt{\omega \mu \sigma}, \quad (18)$$

тогда

$$I_m(k R_0) = \text{ber}_m(\alpha R_0) + j \text{bei}_m(\alpha R_0). \quad (19)$$

Используя уравнения (8), (19), (8), для полного внутреннего электрического сопротивления получаем

$$\dot{Z} = - \frac{l V \omega \mu \sigma}{V^2 \pi R_0 \sigma} (1 + j) \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ber}_0(\alpha R_0) + j \text{bei}_0(\alpha R_0)}{\text{ber}_1(\alpha R_0) + j \text{bei}_1(\alpha R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^{2n} \frac{\text{ber}_n(\alpha R_0) + j \text{bei}_n(\alpha R_0)}{\text{ber}_{n-1}(\alpha R_0) + j \text{bei}_{n-1}(\alpha R_0)} - \frac{1 + j}{V^2 R_0 V \omega \mu \sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{D}\right)^{2n} \cdot n \cdot \frac{\text{ber}_n^2(\alpha R_0) + \text{bei}_n^2(\alpha R_0)}{\text{ber}_{n-1}^2(\alpha R_0) + \text{bei}_{n-1}^2(\alpha R_0)} \right]. \quad (20)$$

Таким образом мы получили выражение для полного сопротивления нулевого проводника, принимая только первое приближение. Действительная часть выражения (20) обозначает омическое сопротивление  $R$ , а мнимая равна внутреннему индуктивному сопротивлению  $\omega L$  — уравнение (3).



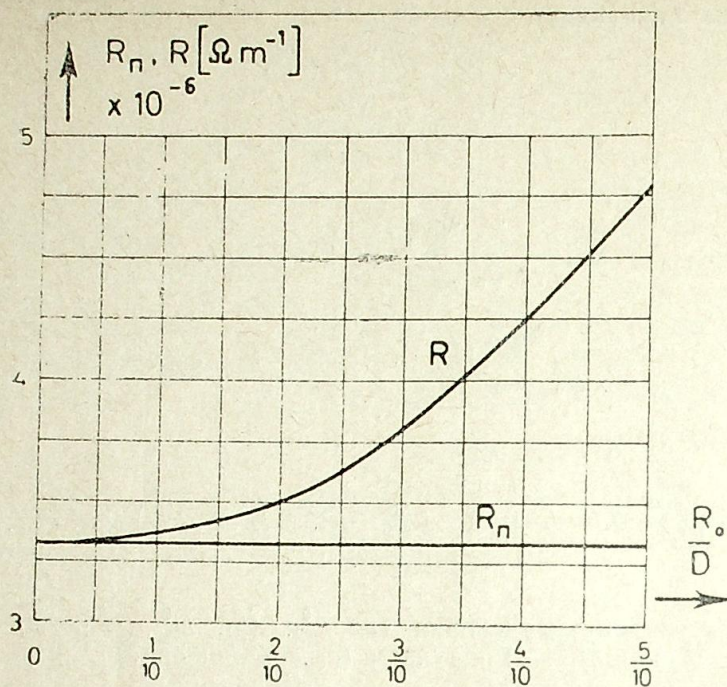


Рис. 2

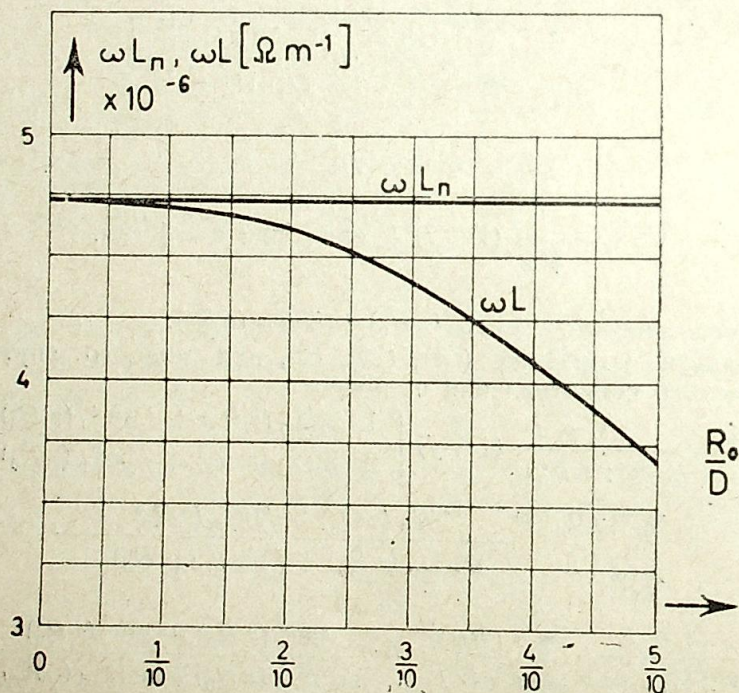


Рис. 3

Сравнивая уравнение (20) с хорошо известным выражением для полного внутреннего сопротивления изолированного цилиндрического проводника круглого сечения (поверхностный эффект):

$$\dot{Z}_n = -\frac{l \sqrt{\omega \mu \sigma}}{\pi \sqrt{2} R_0 \sigma} (1+j) \frac{\text{ber}_0(\alpha R_0) + j \text{bei}_0(\alpha R_0)}{\text{ber}_1(\alpha R_0) + j \text{bei}_1(\alpha R_0)}, \quad (21)$$

видим, что уравнение (21) представляет первый член выражения (20). В (20) мы получили еще два члена, посредством которых находим расстояние  $D$  между геометрическими осями проводников.

Пример. Рассмотрим цифровой пример. Пусть будут  $R_0 = 0,0693 \text{ м}$ ;  $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \text{ с}^{-1}$ ;  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ В с А}^{-1} \text{ м}^{-1}$ ;  $\rho = 0,01892 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ м}$ . Прежде всего вычислим полное сопротивление  $\dot{Z}_n$  изолированного проводника по формуле (21):

$$\dot{Z}_n = (3,3221 + j 4,7320) \cdot 10^{-6} \Omega \text{ м}^{-1}.$$

Полное сопротивление  $\dot{Z}$  проводника с учетом первого приближения по формуле (20) для разных значений  $R_0/D$  есть

$$\frac{R_0}{D} = \frac{1}{2}; \quad \dot{Z} = (4,7885 + j 3,6961) \cdot 10^{-6} \Omega \text{ м}^{-1},$$

$$\frac{R_0}{D} = \frac{1}{4}; \quad \dot{Z} = (3,6160 + j 4,5163) \cdot 10^{-6} \Omega \text{ м}^{-1},$$

$$\frac{R_0}{D} = \frac{1}{10}; \quad \dot{Z} = (3,3665 + j 4,6994) \cdot 10^{-6} \Omega \text{ м}^{-1}.$$

|                                           | Поверхн. эффект        | %   | $R_0/D$ | Эффект близости        | %      |
|-------------------------------------------|------------------------|-----|---------|------------------------|--------|
| $R$<br>[ $\Omega \text{ м}^{-1}$ ]        | $3,3221 \cdot 10^{-6}$ | 100 | 1/2     | $4,7885 \cdot 10^{-6}$ | 144,15 |
|                                           |                        |     | 1/4     | $3,6160 \cdot 10^{-6}$ | 108,85 |
|                                           |                        |     | 1/10    | $3,3665 \cdot 10^{-6}$ | 101,34 |
| $\omega L$<br>[ $\Omega \text{ м}^{-1}$ ] | $4,7320 \cdot 10^{-6}$ | 100 | 1/2     | $3,6961 \cdot 10^{-6}$ | 78,11  |
|                                           |                        |     | 1/4     | $4,5163 \cdot 10^{-6}$ | 95,44  |
|                                           |                        |     | 1/10    | $4,6994 \cdot 10^{-6}$ | 99,31  |

На рис. 2 и 3 представлены графики зависимостей омического и внутреннего индуктивного сопротивлений для различных отношений  $R_0/D$ . Интересна таблица результатов.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты совпадают с физическими фактами: чем больше расстояние между проводниками, тем меньше влияние эффекта близости. Определить сопротивление  $\dot{Z}_n$  не значит только решить нулевое приближение, оно является действительным значением сопротивления, когда расстояние  $D$  довольно велико.



Выражение (16) получаем следующим образом:

$$\bar{S} d \bar{A} = - (\dot{E}_{z0}^0 + \dot{E}_{z1}^0) (\hat{H}_{\varphi 0}^0 + \hat{H}_{\varphi 1}^0) R_0 d \varphi dz.$$

По формулам (10), (11), (13), (14)

$$-\bar{S} d \bar{A} = \frac{j \dot{k}}{\pi R_0} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] \times \\ \times \frac{j}{\pi R_0} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cos n \varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{\dot{k} R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi \right] \hat{R}_0 d \varphi dz,$$

где верхний знак  $\wedge$  обозначает, что берется сопряженное комплексное значение. Далее имеем

$$-\bar{S} d \bar{A} = \frac{J^2 \dot{k}}{\pi^2 R_0 \sigma} \cdot d \varphi dz \times \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] \times \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \cos n \varphi - \right. \\ \left. - \frac{1}{\dot{k} R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi \right] \wedge. \quad (1)$$

Мощность

$$\dot{P} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \bar{S} d \bar{A}.$$

Прежде всего надо вычислить произведение (1):

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \cos n \varphi + \\ + \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \cos n \varphi \right] \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\dot{k} R_0} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{\hat{I}_n(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi - \\ - \frac{1}{\dot{k} R_0} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{\hat{I}_n(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi \right]. \quad (II)$$

Члены с  $\cos n \varphi$  после интегрирования по  $\varphi$  в границах от 0 до  $2\pi$  будут равны нулю:

$$\int_0^{2\pi} \cos n \varphi d \varphi = \frac{1}{n} \sin n \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Это относится ко второму, третьему и пятому членам выражения (II). Рассмотрим отдельно четвертый член:

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \cos n \varphi \right] \cdot \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] = \\ = \left[ \left( \frac{R_0}{D} \right) \cdot \cos \varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \cos 2\varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \cos 3\varphi + \dots \right] \times \\ \times \left[ \left( \frac{R_0}{D} \right) \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 2\varphi + \right. \\ \left. + \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 3\varphi + \dots \right] = \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos^2 \varphi + \\ + \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 3\varphi + \dots \\ \dots + \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cos^2 2\varphi + \\ + \left( \frac{R_0}{D} \right)^5 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 3\varphi + \dots + \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi \cdot \cos 3\varphi + \\ + \left( \frac{R_0}{D} \right)^5 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 3\varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^6 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos^2 3\varphi + \dots$$

После умножения мы получаем ряд с членами  $\cos^2 a \varphi$  и  $\cos a \varphi \cdot \cos b \varphi$ . Интегралы суть

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 a \varphi d \varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4a} \sin 2a \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

и

$$\int_0^{2\pi} \cos a \varphi \cdot \cos b \varphi d \varphi = \frac{\sin(a-b)\varphi}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)\varphi}{2(a+b)} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Четвертый член после интегрирования принимает вид

$$\left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \pi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \pi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^6 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \pi + \dots = \\ = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^{2n} \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)}.$$



Рассмотрим отдельно еще шестой член:

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot \cos n \varphi \right] \cdot \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^n \cdot \frac{\hat{I}_n(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_{n-1}(\dot{k} R_0)} \cdot n \cdot \cos n \varphi \right] =$$

$$= \left[ \left( \frac{R_0}{D} \right) \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi + \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 2\varphi + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \frac{I_3(\dot{k} R_0)}{I_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 3\varphi + \dots \right] \times \left( 1 \cdot \left( \frac{R_0}{D} \right) \cdot \frac{\hat{I}_1(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_0(\dot{k} R_0)} \cdot \cos \varphi + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{\hat{I}_2(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_1(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 2\varphi + 3 \cdot \left( \frac{R_0}{D} \right)^3 \cdot \frac{\hat{I}_3(\dot{k} R_0)}{\hat{I}_2(\dot{k} R_0)} \cdot \cos 3\varphi + \dots \right).$$

В этом случае члены с  $\cos a \varphi \cdot \cos b \varphi$  после интегрирования по  $\varphi$  также будут равны нулю, останутся только члены с  $\cos^2 a \varphi$ . После интегрирования получаем

$$\pi \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{I_1(\dot{k} R_0) \cdot \hat{I}_1(\dot{k} R_0)}{I_0(\dot{k} R_0) \cdot \hat{I}_0(\dot{k} R_0)} + 2\pi \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{I_2(\dot{k} R_0) \cdot \hat{I}_2(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0) \cdot \hat{I}_1(\dot{k} R_0)} + \dots$$

Отсюда находим произведение

$$I_m(\dot{k} R_0) \cdot \hat{I}_m(\dot{k} R_0) = |I_m(\dot{k} R_0)|^2, \quad \text{тогда}$$

шестым членом будет

$$\pi \left( \frac{R_0}{D} \right)^2 \cdot \frac{|I_1(\dot{k} R_0)|^2}{|I_0(\dot{k} R_0)|^2} + 2\pi \left( \frac{R_0}{D} \right)^4 \cdot \frac{|I_2(\dot{k} R_0)|^2}{|I_1(\dot{k} R_0)|^2} + \dots =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^{2n} \cdot n \cdot \frac{|I_n(\dot{k} R_0)|^2}{|I_{n-1}(\dot{k} R_0)|^2}.$$

Теперь можно написать напряжение для мощности:

$$\dot{P} = - \frac{I^2 k l}{\pi R_0 \sigma} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{I_0(\dot{k} R_0)}{I_1(\dot{k} R_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^{2n} \cdot \frac{I_n(\dot{k} R_0)}{I_{n-1}(\dot{k} R_0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{k R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_0}{D} \right)^{2n} \cdot n \cdot \frac{|I_n(\dot{k} R_0)|^2}{|I_{n-1}(\dot{k} R_0)|^2} \right). \quad (16)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меерович Э. А., Чальян К. М. Изв. АН СССР, ОТН, М., 1963, № 3

#### Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Е. В. ДМИТРИЕВ, Л. Э. ЭПШТЕЙН МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГИ В ВЫКЛЮЧАТЕЛЕ

Характер переходного процесса в сети существенно зависит от процесса дугогашения в выключателях. При этом определяющее значение имеют величина тока среза, фаза среза и наличие повторных зажигания. При расчетах различных видов переходных процессов для сложной сети целесообразно моделировать выключатель с помощью нелинейного активного сопротивления [1]. Последнее должно иметь вольт-амперную характеристику, аналогичную известной характеристике электрической дуги [2].

В соответствии двум состояниям дугового промежутка выключателя—горению и распаду дуги—динамическая вольт-амперная характеристика может быть представлена двумя частями. При этом действительная характеристика дуги приближенно может быть заменена усредненной, так как на участке до тока среза части характеристики, соответствующие возрастанию и спаданию тока, приблизительно совпадают.

Зависимость между током в выключателе и напряжением между его контактами на участке, соответствующем горячей дуге, может быть определена выражением

$$u_d = K \exp(-\alpha |i_d|). \quad (1)$$

Здесь  $u_d$ ,  $i_d$ —напряжение и ток дуги,  $K$ —коэффициент, зависящий от расстояния между контактами выключателя,  $\alpha$ —постоянная, характеризующая среду, в которой происходит гашение дуги. Коэффициент  $K$  может быть представлен в виде

$$K = \eta (1 + B), \quad (2)$$

где  $\eta$ —коэффициент пропорциональности,  $B$  моделирует расхождение контактов выключателя:

$$B = \begin{cases} \varphi(t - t_1), & t_1 \leq t < t_1 + \Delta t, \\ \xi_2, & t \geq t_1 + \Delta t. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\varphi(t - t_1)$ —функция, характеризующая расхождение контактов выключателя. При постоянной скорости расхождения контактов эта функция может быть представлена как  $\xi_1(t - t_1)$ , при этом  $t_1$ —время начала расхождения контактов,  $\Delta t$ —время полного расхождения контактов,  $t$ —текущее время,  $\xi_2$ —характеризует полностью разошедшиеся контакты выключателя.

Сопротивление между контактами выключателя можно найти используя (1):

$$r_d = K |i_d|^{-1} \exp(-\alpha |i_d|). \quad (4)$$



По мере распада остаточного столба дуги происходит рост сопротивления между контактами выключателя. Результаты многих исследований показывают, что это сопротивление растет по экспоненциальному закону и может быть представлено в виде

$$r_d = r_0 \exp[(t - t_1) \cdot \theta^{-1}]. \quad (5)$$

Здесь  $r_0$  — начальное сопротивление дуги, соответствующее моменту среза тока,  $\theta^{-1}$  — постоянная времени дуги. При вычислении  $r_d$  на ЦВМ необходимо, чтобы при  $i_d = 0$   $r_d \neq \infty$ , так как иначе последует останов машины. Для этого в (4) вводится постоянная  $a$ , с учетом которой (5) приобретает вид

$$r_d = K(|i_d| + a)^{-1} \exp[-\alpha|i_d| + (t - t_1) \cdot \theta^{-1}]. \quad (6)$$

При работе выключателя его ток может быть срезан еще до полного расхождения контактов выключателя, поэтому при использовании для счета  $r_d$  выражения (4) необходимо учесть зависимость  $i_{cp}$  от расстояния между контактами. Последнее может быть осуществлено, если переходить на счет  $r_d$  по (6) после выполнения условия  $|i_d| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \gamma B$ ,  $\gamma$  — постоянная, определяющая максимально возможную величину тока среза при полностью разошедшихся контактах.

После среза тока происходит интенсивная деионизация остаточного столба дуги, рост электрической прочности промежутка с одновременным ростом между контактами выключателя восстанавливающегося напряжения. В зависимости от того, какой из этих факторов превалирует, происходит либо отключение, либо повторное зажигание дуги. Погасанию дуги выключателя соответствует расчет  $r_d$  по (6): когда  $r_d$  достигает достаточно большой величины ( $r_{max}$ ), его расчет прекращается и  $r_d$  принимается равным этой величине. При повторном зажигании дуги расчет  $r_d$  производится по (4). Напряжение между контактами выключателя равно  $u_d = r_d \cdot i_d$ . Электрическая прочность промежутка определяется по формуле [3]:

$$u_{эп} = A [1 - 0,9 \exp(-\beta t)], \quad (7)$$

где  $A$  — постоянная, зависящая от типа выключателя,  
 $\beta$  — постоянная времени дуги.

Результаты испытаний выключателя на отключение различных токов показали, что вторичный пробой контактных промежутков при постоянном расстоянии между контактами происходит при различных значениях напряжения в некотором интервале  $u_{min} \div u_{max}$  [4]. Отсюда следует, что величина коэффициента  $A$  должна носить вероятностный характер, чтобы можно было учесть предысторию среды, действующей на дуговой промежуток. Изучение этого вопроса позволит в дальнейшем составить вероятностную формулу для определения  $A$ . В настоящее время для расчета  $u_{эп}$  с некоторым приближением можно принять, что коэффициент  $A$  изменяется в зависимости от расстояния между контактами выключателя по линейному закону.

В соответствии с изложенным сопротивление между контактами выключателя при полном цикле его работы может быть описано следующим образом:

$$r_d = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ K(|i_d| + a)^{-1} \exp(-\alpha|i_d|), & t_1 \leq t < t_2, |i_d| \geq \varepsilon \text{ или } |i_d| < \varepsilon, \text{ но } |u_{дн}| \geq |u_{эп}| \\ K(|i_d| + a)^{-1} \exp[-\alpha|i_d| + (t - t_1) \cdot \theta^{-1}], & t_1 \leq t < t_2, |i_d| < \varepsilon, |u_{дн}| < |u_{эп}|, r_d < r_{max} \\ r_{max}, & t_1 \leq t < t_2, r_d \geq r_{max} \\ 0, & t \geq t_2; \end{cases}$$

$$K = \eta(1 + B),$$

$$B = \begin{cases} \xi_1(t - t_1), \\ \xi_2 \end{cases}$$

$$\varepsilon = \gamma B$$

$$u_d = r_d \cdot i_d$$

$$u_{эп} = 0, \quad t < t_1$$

$$A \{1 - 0,9 \exp[-\beta(t - t_1)]\}, \quad t \geq t_1$$

$$A = \delta(1 + \kappa B).$$

$$\begin{cases} t_1 \leq t < t_1 + \Delta t \\ t \geq t_1 + \Delta t \end{cases} \quad (8)$$

Здесь  $t_2$  — время АПВ,  $t_1$  — время, когда  $|i_d|$  становится меньше  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  — коэффициент пропорциональности,  $\delta$  — коэффициент, учитывающий скачок электрической прочности дугового промежутка после выполнения условия  $t \geq t_1$ .

Правильно составленная математическая модель выключателя должна дать известную качественную картину исследуемого процесса,

а при правильно выбранных коэффициентах можно быть уверенным в получении достоверных результатов. Для оценки качественных возможностей модели выключателя приведем примеры расчета часто встречающихся на практике переходных процессов: отключение малого индуктивного, малого емкостного и рабочего токов. Схема замещения электрической сети, обычно используемая при расчетах этих процессов, представлена на рис. 1. Электромагнитные процессы в схеме описываются следующими уравнениями:

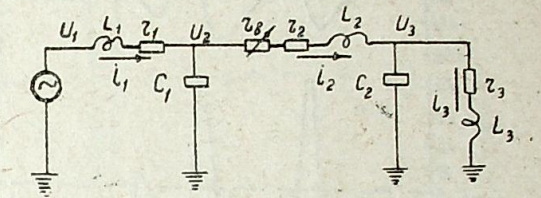


Рис. 1

Схема замещения электрической сети, обычно используемая при расчетах этих процессов, представлена на рис. 1. Электромагнитные процессы в схеме описываются следующими уравнениями:

$$u_1 = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{du_1}{dt} = L_1^{-1}(u_1 - u_2 - r_1 i_1),$$

$$\frac{du_2}{dt} = C_1^{-1}(i_1 - i_2),$$

$$\frac{di_2}{dt} = L_2^{-1}[u_2 - u_3 - (r_2 + r_v) i_2], \quad (9)$$

$$\frac{du_3}{dt} = C_2^{-1}(i_2 - i_3),$$

$$\frac{di_3}{dt} = L_3^{-1}(u_3 - r_3 i_3).$$

Расчет  $r_v$  осуществляется по (8). Для расчета процесса отключения малых индуктивных токов коэффициенты уравнений (9) имеют следующие значения:

$$r_1 = 5 \text{ ом}; L_2 = 10^{-3} \text{ гн}; C_1 = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ ф}; r_2 = 2 \text{ ом}; L_2 = 0,1 \text{ гн}; C_2 = 0,1 \cdot 10^{-7} \text{ ф}; r_3 = 15 \text{ ом}; L_3 = 15 \text{ гн}.$$

Параметры модели\*:

$$\eta = 0,01 \text{ кВ}; \xi_1 = 0,75 \cdot 10^6; \xi_2 = 0,75 \cdot 10^4; \alpha = 40; \beta = 0,2 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1};$$

\* Параметры модели принимались по опытным характеристикам и осциллограммам, полученным при отключении различных токов [2, 3, 4, 5].



$$r_{\max} = 10^6 \text{ ом}; a = 0,04 \text{ ка}; \chi = 0,1332; \delta = 0,2 \text{ кв};$$

$$\gamma = 0,267 \cdot 10^{-5} \text{ ка}; \theta = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{ сек}; \Delta t = 0,01 \text{ сек}.$$

Для расчета процесса отключения рабочего тока эти коэффициенты равны:

$$r_1 = 5 \text{ ом}; L_1 = 10^{-3} \text{ гн}; C_1 = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ ф}; r_2 = 2 \text{ ом}; L_2 = 0,1 \text{ гн};$$

$$C_2 = 0,1 \cdot 10^{-7} \text{ ф}; r_3 = 550 \text{ ом}; L_3 = 0,75 \text{ гн}.$$

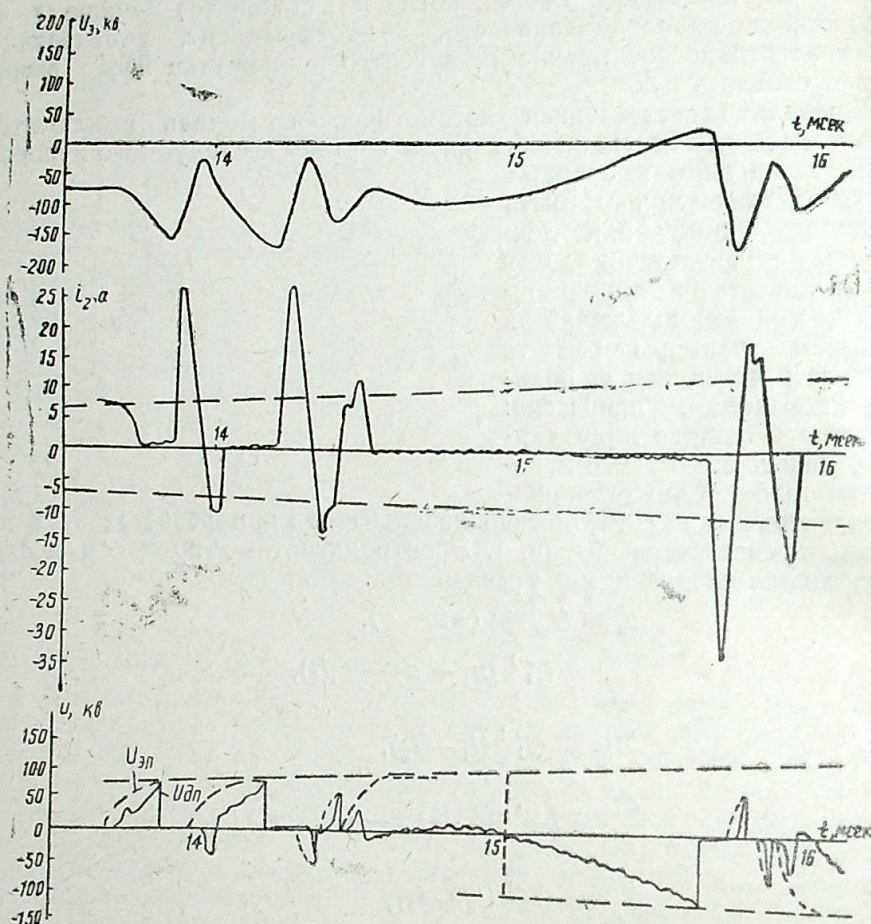


Рис. 2

При отключении малого емкостного тока коэффициенты уравнений принимались следующие:

$$r_1 = 5 \text{ ом}; L_1 = 0,1 \text{ гн}; C_1 = 0,1 \cdot 10^{-8} \text{ ф}; r_2 = 2 \text{ ом}; L_2 = 0,05 \text{ гн};$$

$$C_2 = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ ф}; r_3 = 0; L_3 = 10^6 \text{ гн}.$$

Результаты расчета в виде графиков представлены на рис. 2—5. На рис. 2, 3 показан переходный процесс отключения малого индуктивного тока (на рис. 2 изображено начало процесса, а на рис. 3—его окончание). На рис. 4 представлен процесс отключения рабочего тока, а на рис. 5—процесс отключения малого емкостного тока.

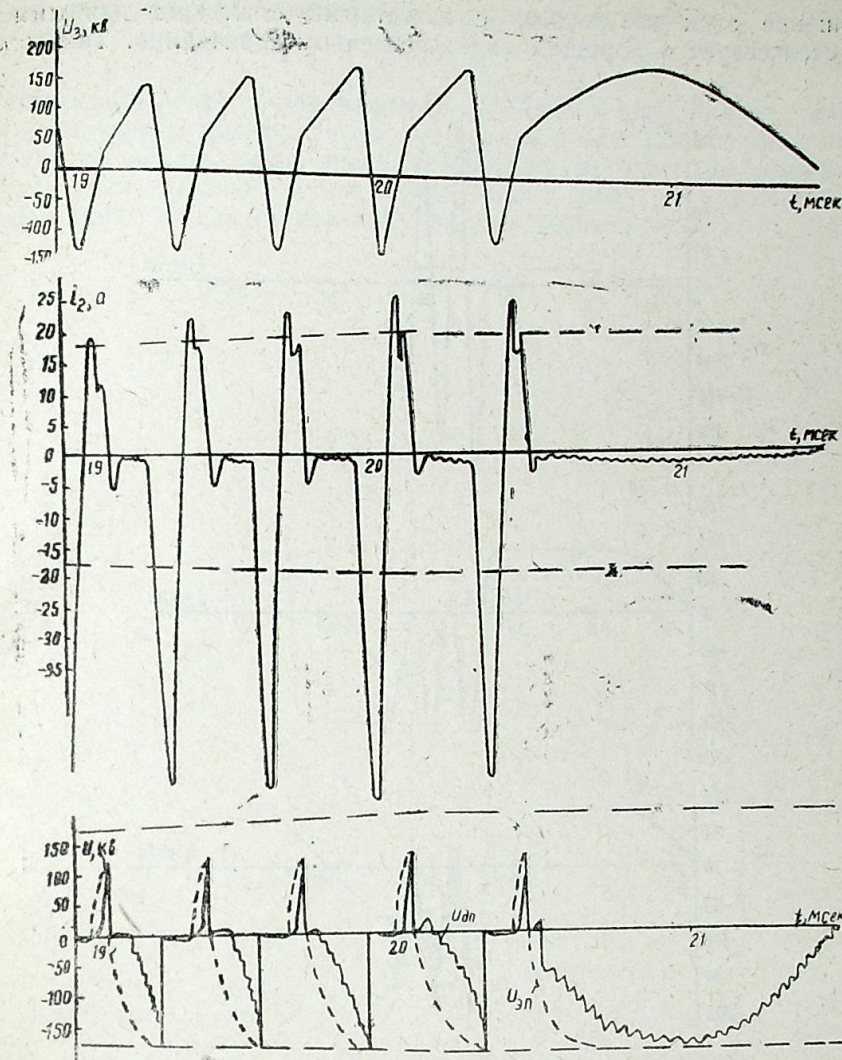


Рис. 3

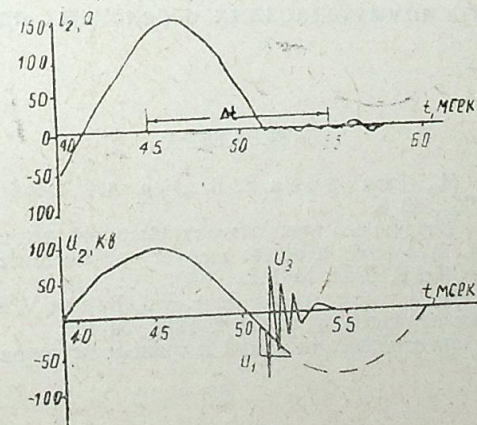


Рис. 4



Сравнение этих результатов с известными опытными данными [5] свидетельствует о хорошем их качественном совпадении. Таким об-

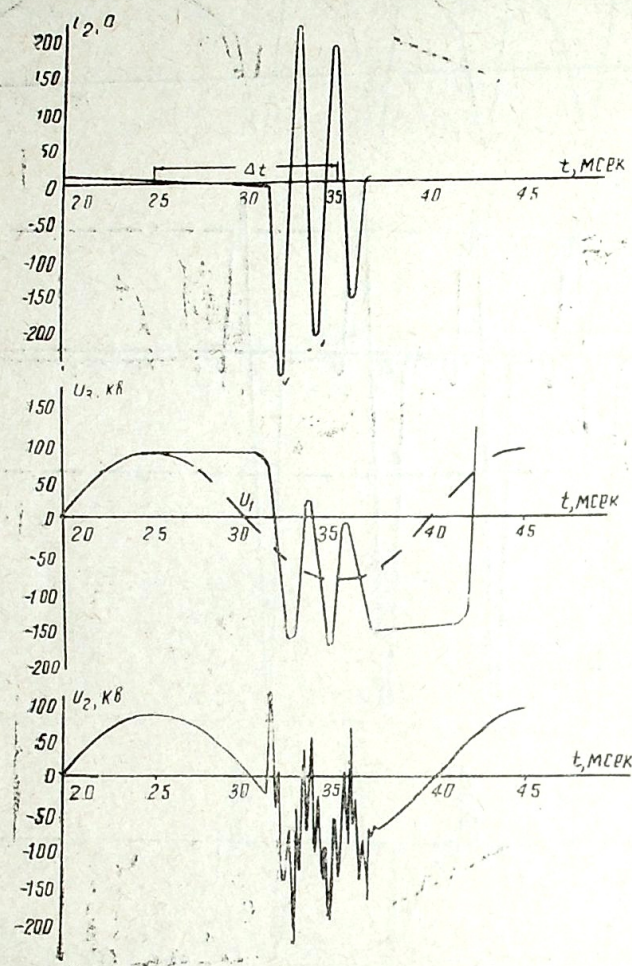


Рис. 5

разом, составленная математическая модель выключателя позволяет производить расчеты коммутационных переходных процессов в электрической сети.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, № 4.
2. Шейров Е. М. Воздушные выключатели высокого напряжения. ГЭИ, 1957.
3. Hochrainer A. Investigation of the recovery of dielectric strength in alternating current breakers. CIGRE, 1954, № 112.
4. terHors D. Th. J., Rutgers G. A. W., Bisht V. K. High-current arc interruption and post-arc conductivity, CIGRE, 1960, № 105.
5. Перенапряжения при отключении линий и трансформаторов, под ред. Разевига Д. В. ГЭИ, 1957.

Ч. М. Чуварлы, J. В. Дмитриев, Л. Е. Епштейн

Ачарда електрик гөвс/нүн ријази модели

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гөвс бошалмасынын чәрәян шиддәтиндән, ачарын контактларарасы мәсафәдән вә контактлар арасындакы аралығын вә зијәтиндән асылы олан актив гејри-хәтли мугавимәтин көмәји илә ачар модели тәклиф олунмушдур. Тәкрар јанма вә чәрәянын вах-тындан габаг кәсилмәси һаллары нәзәрә алынмамышдыр.



А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Ю. М. СЕИДОВ

## К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ТОРМОЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

Электромагнитный тормоз (ЭМТ) применяется для электроприводов исполнительных механизмов. В нефтяной промышленности им пользуются для торможения буровой лебедки. Обычно его вал имеет непосредственное механическое соединение с валом лебедки. Электромагнитный тормоз (ЭМТ) как необратимая электрическая машина может работать только в режиме генераторов.

ЭМТ состоит из неподвижной части массивного якоря без обмотки и вращающейся части индуктора полюсной системы, имеющей обмотку возбуждения постоянного тока. Принцип работы ЭМТ основан на взаимодействии магнитного поля, созданного током, проходящим через обмотку возбуждения вращающегося индуктора, с вихревыми токами, протекающими в теле сплошного стального якоря [1]. Таким образом, сплошной стальной якорь, являясь частью магнитопровода машины, одновременно выполняет роль распределенной многофазной обмотки. Следовательно, с точки зрения принципа работы ЭМТ аналогичен синхронной машине, разница лишь в том, что затрачиваемая энергия в синхронной машине превращается в механическую, а в ЭМТ она переходит в тепловую.

Существующие методы расчета магнитного поля и момента ЭМТ из-за сложности электромагнитных явлений в массивном ферромагнитном якорь и невозможности полного их учета являются мало приемлемыми и характеризуются высокой погрешностью. Поэтому представляется целесообразным определение момента на валу ЭМТ производить по более точной методике, основанной на применении теории векторного потенциала.

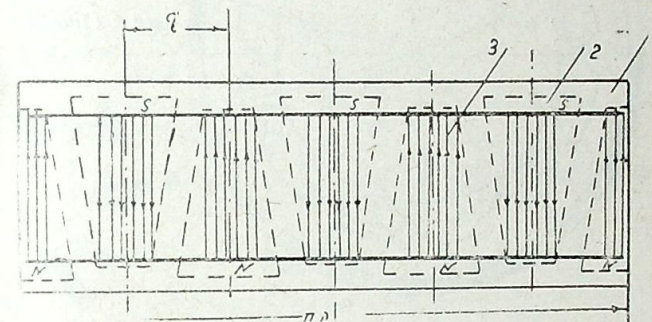
В последние 10—15 лет рядом авторов [2, 3] проведены теоретические исследования по созданию теории электромагнитной муфты и тормоза, основанные на вихревых токах. Однако указанные работы базируются на применении уравнения Максвелла. В существующей литературе [4] метод векторного потенциала применяется для определения момента трехфазной синхронной машины. Вместе с тем, теория векторного потенциала может применяться также для определения момента на валу ЭМТ. В таком случае мы можем рассматривать ЭМТ как электрическую машину с многофазной обмоткой. При этом принимаются следующие допущения:

1. Сплошной стальной якорь ЭМТ принимается как многофазная обмотка, равномерно распределенная по всей окружности якоря;

2. Индуктор полюсной системы панцирного типа приравняется к ротору неявнополюсной синхронной машины.

Предыдущие рассуждения и принятые допущения позволяют считать ЭМТ как многофазную синхронную машину. Цель настоящей работы заключалась в том, чтобы, основываясь на предположении о многофазности обмотки сплошного якоря ЭМТ и ее равномерном распределении по всей окружности, получить выражение для момента на валу ЭМТ. Анализ проводится в следующей последовательности: определяется энергия магнитных полей якоря и индуктора в отдельности; далее рассматривается взаимодействие этих полей и выводится выражение для момента ЭМТ.

Рассмотрим определение энергии магнитного поля на поверхности якоря ЭМТ. Допустим, что характер распределения вихревых токов на сплошном стальном якорь имеет вид, показанный на рис. 1, тогда каждый элементарный вихревой ток представляет собой единичный провод равномерно распределенной обмотки, уложенной в паз. Под каждой парой полюсов расположено несколько пазов; поэтому витки обмотки под одним полюсом следует рассматривать как распределенные витки ( $q > 1$ ) меньшего размера, расположенные в  $(q)$  рядом лежащих пазах [5].



Характер распределения вихревых токов в сплошном теле якоря ЭМТ: 1—сплошное тело якоря; 2—полюса; 3—вихревые токи.

Если на поверхности якоря ЭМТ имеется непрерывное распределение многофазного тока, вызванного магнитным полем вращающегося индуктора и этот ток имеет синусоидальный характер, как показано на рис. 2, то значение этого многофазного тока можно определить из выражения

$$j_{n(t)} = \tilde{I} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{m} n \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m-1), \quad (1)$$

где  $m$ —число фаз.

Обозначим через  $N$  число витков на полюс и фазу. При этом в произвольный момент времени  $t$  в части фазы ( $n$ ), лежащей в интервале от  $\beta_n$  до  $\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{\pi}{m}$ , направление тока совпадает с направлением

положительной оси  $z$  (т. е. выходит из плоскости чертежа), тогда как в тот же момент времени в части обмотки между  $\beta_n + \pi$  и  $\beta_{n+1} = \beta_n + \pi + \frac{\pi}{m}$  ток направлен в противоположную сторону. Кроме



того, введем плотность распределенного тока, рассчитанную на единицу дуги окружности, тогда

$$j_{n(t)} = j_{n(t)} \frac{N}{\pi/m} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, m-1). \quad (2)$$

Такое представление основано на равномерной распределенности многофазной обмотки по всей окружности, на этом основании можно также предположить, что ампервитки, приходящиеся на полюс и фазу, также распределены равномерно вдоль окружности. Тогда в точке, определяемой углом  $\varphi_n$  при  $\beta_n \leq \varphi_n \leq \beta_{n+1} + \frac{\pi}{m}$ , сосредоточен ток  $j_n d\varphi_n$ .

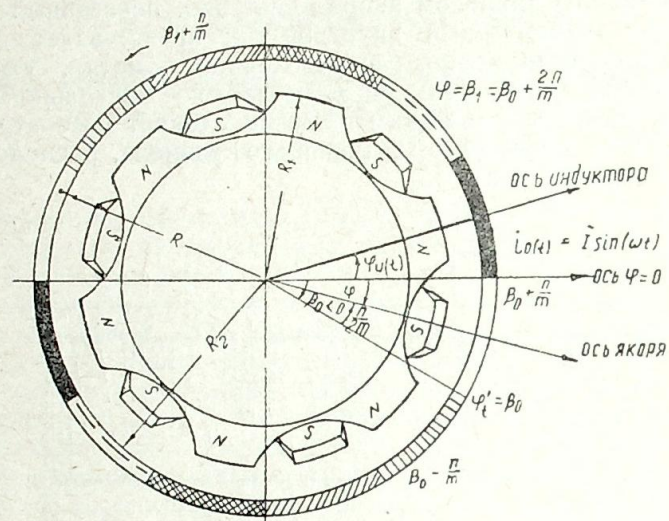


Рис. 2.  
Модель электромагнитного тормоза.

Если применить формулу комплексного потенциала [4] к отдельной паре проводников многофазной обмотки якоря ЭМТ, расположенной на  $\varphi_+ = \varphi_n$ , и вместо  $I$  поставить его значение  $j_n d\varphi_n$ , а также произвести соответствующее интегрирование, то получим значение векторного потенциала для нашего случая:

$$A_{(R, \varphi)} = \frac{6\mu_0 N m}{\pi^2} \tilde{I} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\pi}{2m} \left( \frac{4m}{l+1} + 1 \right)}{\left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right)} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{\sin \left[ \omega t + \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right) \left( \varphi - \beta_0 - \frac{\pi}{2m} \right) \right] \operatorname{ch} \ln \frac{R_1}{R} \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right)}{\operatorname{sh} \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right) \alpha} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{\pi}{2m} \left( \frac{4m}{l+1} + 1 \right) \sin \left[ \omega t - \left( \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right) \left( \varphi - \beta_0 - \frac{\pi}{2m} \right) \right]}{\left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right]^2} \right\} \times$$

$$\times \frac{\operatorname{ch} \frac{R_1}{R} \left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right]}{\operatorname{sh} \left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right] \alpha}. \quad (3)$$

На основании общей формулы [6], зная вектор потенциала  $A_{(R, \varphi)}$ , можно вычислить энергию магнитного поля на поверхности якоря ЭМТ по формуле

$$W_{M(t, R_{1,2})} = \frac{m N \tilde{I}}{\pi} \sum_{n=0}^{l-1} \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{m} n \right) \times \\ \times \left[ \int_{\alpha_0 + \frac{2\pi}{m} n}^{\alpha_0 + \frac{2\pi}{m} n + \frac{\pi}{m}} A_z(R_2, \varphi, R_{1,2}) d\varphi - \int_{\alpha_0 + \frac{2\pi}{m} n + \frac{\pi}{m}}^{\alpha_0 + \frac{2\pi}{m} n + \frac{\pi}{m} + \pi} A_z(R_2, \varphi, R_{1,2}) d\varphi \right]. \quad (4)$$

Мгновенное значение энергии магнитного поля на единицу длины, применительно к многофазной обмотке, получим после некоторого преобразования и интегрирования выражения (4):

$$W_{M(t, R_{1,2})} = (2l+1) \left[ 12 \Gamma_0 \left( \frac{mN}{\pi} \right) \sin^2 \frac{\pi}{2m} \right] \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \frac{R_1}{R} \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right)}{\left[ \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right)^3 \operatorname{sh} \left( \frac{4m}{l+1} k + 1 \right) \alpha \right]} - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \frac{R_1}{R} \left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right]}{\left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right]^3 \operatorname{sh} \left[ \frac{4m}{l+1} (k+1) - 1 \right] \alpha} \right\}. \quad (4a)$$

Имея выражения (4), перейдем к определению энергии магнитного поля индуктора ЭМТ. Для применения методики определения энергии магнитного поля ротора многофазной машины — ЭМТ к предыдущим допущениям добавим еще следующие условия для индуктора ЭМТ:

1. Каждый полюс многополюсной системы индуктора ЭМТ представляет собой один виток, по которому протекает ток возбуждения.

2. На поверхности индуктора распределен слой тока, изменяющегося с азимутом по синусоидальному закону, хотя в действительности витки обмотки возбуждения расположены в канавке, т. е. в окне под катушку возбуждения индуктора.

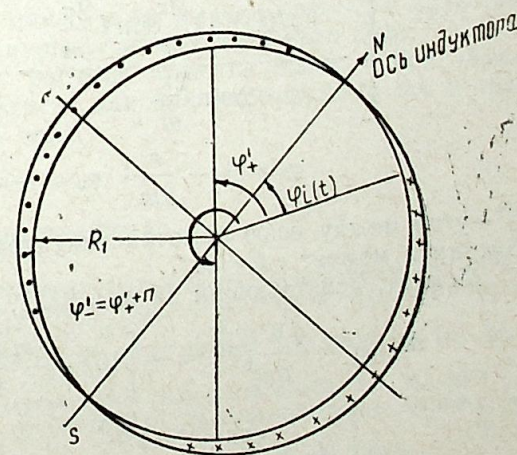


Рис. 3  
Распределение поверхностного тока.



Распределение поверхностного тока по закону

$j_{\text{инд.}(\varphi_+)} = \frac{2I_{\text{инд.}}N_{\text{инд.}}}{\pi} \sin(\varphi_+ - \varphi_{\text{инд}})$  на поверхности индуктора ЭМТ показано на рис. 3. Тогда энергия магнитного поля [2] будет иметь следующий вид:

$$W_{M(R_{1,2})}^{(u)} = \frac{2\mu_0^2 I_{\text{инд.}}^2 N_{\text{инд.}}^2}{\pi} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (5)$$

После того как установлены выражения для энергии полей якоря и индуктора ЭМТ, можно перейти к вычислению взаимодействия этих полей.

Предположим, что якорь и индуктора ЭМТ возбуждаются одновременно. При этих условиях оба поля в воздушной зазоре будут складываться аддитивно. Поэтому в выражение для энергии магнитного поля входят два дополнительных члена, которые соответствуют энергии связи магнитных полей [4]:

$$W_{M(R_{1,2})}^{(u, \text{я})} = W_{M(R_{1,2})}^{(u)} + W_{M(t, R_{1,2})}^{(\text{я})} = \frac{1}{2} \sum_{n=-l}^l \int_0^{2\pi} A_{(R, \varphi)}^{(u)} j_{n(t)} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} A_{(R, \varphi, R_{1,2})}^{(\text{я})} j_{\text{инд.}(\varphi)} d\varphi, \quad (6)$$

где  $W_{M(R_{1,2})}^{(u)}$  и  $W_{M(R_{1,2})}^{(\text{я})}$  — энергия магнитных полей индуктора и якоря.

Подставляя значение плотности распределенного тока  $j_n = \frac{mN}{\pi} \tilde{I} \sin(\omega t + \frac{2\pi}{m}n)$  в выражение (6), учитывая равномерности двух членов в сумме и пропуская соответствующие вычисления, получим окончательное выражение энергии связей магнитных полей для многофазного якоря ЭМТ:

$$W_{M(R_{1,2})}^{(u, \text{я})} = 16\mu_0 \frac{mN\tilde{I}N_{\text{инд.}}I_{\text{инд.}}}{\pi^2 \text{sh} \alpha} \sin \frac{\pi}{2m} \left\{ \frac{2l+1}{4} \cos(\varphi_{\text{я}} + \varphi_u^{(0)}) + \left[ -\frac{\cos(l+1)\frac{2\pi}{m} \sin l \frac{2\pi}{m}}{2 \sin \frac{2\pi}{m}} - \frac{1}{4} \right] \cos(\varphi_{\text{я}} - \varphi_u^{(0)}) \right\}; \quad (7)$$

$\varphi_{\text{я}} = \beta_0 + \frac{\pi}{2m}; \quad \varphi_u = -\omega t + \varphi_u^{(0)};$

$\varphi_u^{(0)}$  — угол между осью обмотки индуктора ЭМТ и общей многофазной обмотки в момент  $\omega t = 0$ .

Момент, действующий на вал ЭМТ, будет

$$M_{n(\varphi_u)} = \frac{dW_{M(R_{1,2})}^{(u, \text{я})}}{d\varphi_u^{(0)}} = - \left[ 16\mu_0 \frac{Nm\tilde{I}N_{\text{инд.}}I_{\text{инд.}}}{\pi^2 \text{sh} \alpha} \sin \frac{\pi}{2m} \right] \times \left[ \frac{l}{2} - \frac{\cos(l+1)\frac{2\pi}{m}}{2 \sin \frac{2\pi}{m}} \sin l \frac{2\pi}{m} \right] \sin(\varphi_u^{(n)} - \varphi_{\text{я}}), \quad (8)$$

где  $\tilde{I}$  — вихревой ток в сплошном якоре;  
 $\mu_0$  — магнитная проницаемость воздуха;  
 $N_{\text{инд.}}$  — число витков обмотки возбуждения на полюс;  
 $I_{\text{инд.}}$  — ток возбуждения;  
 $l$  — целое число;  
 $\text{sh}$  — гиперболический синус, аргумент которого имеет  $\alpha = \ln R_2/R_1$ ;  
 $R_2$  — радиус проводника, заложенного в паз;  
 $R_1$  — радиус индуктора.  
 Если принять ( $Nm = w$  и  $m = 2\tau$ , то выражение для момента; будет иметь вид

$$M_{n(\varphi_u)} = - \left[ 16\mu_0 \frac{wIN_uI_u}{\pi^2 \text{sh} \alpha} \sin \frac{\pi}{4\tau} \right] \left[ \frac{l}{2} - \frac{\cos(l+1)\frac{\pi}{\tau}}{2 \sin \frac{\pi}{\tau}} \sin l \frac{\pi}{\tau} \right] \sin(\varphi_u^{(n)} - \varphi_{\text{я}}). \quad (9)$$

Здесь  $w$  — число витков на полюс.

Формула (8) для определения момента ЭМТ со сплошным якоре-м как многофазной синхронной машины является обобщенной. Пользуясь уравнением (8), можно получить решение задачи для частного случая трехфазной синхронной машины. Не трудно показать, что при значении  $l=1$  и  $m=3$  выражение (8) позволяет получить уравнение момента трехфазной синхронной машины, приведенной в (4):

$$M_{(\varphi)} = -18 \frac{NN_l\tilde{I}I_l}{\pi^2 \text{sh} \beta} \sin(\varphi^{(0)} - \varphi).$$

При определении величины действующего момента на валу ЭМТ в уравнении (8) необходимо принять  $l = (2\tau - 1)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выведена более точная формула для определения момента на валу ЭМТ с применением теории векторного потенциала.

Характерной особенностью рассмотренной методики является факт тот, что она применима для определения значения момента многофазной синхронной машины, и ее можно отнести к категории обобщающей моментной формулы машин переменного тока.

Рассмотренная методика расчета момента носит более общий характер и может быть применена как для многофазной, так и трехфазной машины переменного тока.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Азимов Б. А. Вопросы нефтебурового электропривода. Азерб. электротехн. журн., 1952.
2. Kosenberg E. Massive eisenleiter und wirbelstrombremsen. Elektrotechnische zeitschrift, Braunschweig, Vol. 49, Dec. 1923.
3. Gibbs W. J. Theory and design of eddy current slip coupling. The Beama Journal, London, vol. 53, Apr., May, June 1946.
4. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. ИЛ, М., 1931.
5. Костенко М. П. и Пиотровский Л. М. Электрические машины. ч. 2. Госиздат, М.—Л., 1916.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. ОГИЗ; М.—Л., 1946.
7. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.



# Електромагнит тормоз валындакы моментин тэ'јини мәсәләсиндә вектор потенсиалы нәзәријјәсинин тәтбиги

## ХҮЛАСӘ

Мәгалә бүтөв јакорлу електромагнит тормоз (ЕМТ) валындакы моментин тә'јининдә вектор потенсиалы нәзәријјәсинин тәтбиги мәсәләсинә һәср едилмишдир.

Бүтөв ферромагнит јакорунда кедән електромагнит һадисәләринин мүрәккәблији вә онлары нәзәрә алмаг чәтинлији һесабат заманы бөјүк хәталар верир. Буна кәрә индијә гәдәр мөвчуд олан һесабат методлары електромагнит тормозун магнит саһәсинин вә моментинин арашдырылмасында аз истифадә олунур.

Јухарыда көстәрилән чәһәтләри нәзәрә алараг, електромагнит тормозун валындакы моментин тә'јини үчүн векториал потенциал нәзәријјәсинә әсасланан вә нисбәтән дәгиг олан бу метод мәгсәдә ујғун һесаб едилир.

Мөвчуд әдәбијјатда векториал потенциаллар методу үчфазлы синхрон мүһәррикләрдә моментин тә'јини үчүн истифадә олунур.

Векториал потенциал нәзәријјәсинин ЕМТ-а тәтбигиндә бүтөв полад јакора чеврә бојунча бәрәбәр пәланан чоһфазлы долаг, пансыршәкилли гүтб системи олан индуктора исә гүтбләри ашкар олмајан синхрон мүһәррикләрин ротору кими бахылыр. Бу һалда арашдырма ашағыдакы арзычыллыгла апарылыр:

а) јакор вә индукторун магнит саһәләринин енерјиси ајрыча олараг тә'јин едилир;

б) бу саһәләрин гаршылыгыла әлагәсиндән електромагнит тормозда әмәлә кәлән моментин тә'јин дүстуру чыхарылыр.

А. С. АЛИЗАДЕ, Д. А. КУЛИЕВ, В. А. КАЛАНТАРОВ

## О ПАРАМЕТРАХ МОЛНИИ

В статье излагается результат экспериментальных исследований параметров ударов молнии в землю в горных условиях (~1500 м) Азербайджана методом осциллографирования изменений потенциала горизонтальной антенны (за 1960-65 гг.) и совместного измерения крутизны и амплитуды тока прямых ударов молнии на ЛЭП (равнина, местами предгорье <500 м) Азгавэнерго методом магнитозаписи (за 1964-65 гг.).

На рис. 1 изображена схема замещения приемного конца антенны. С целью обеспечения минимального искажения исходного сигнала  $RC$  цепи приемного конца антенны согласованы с длительностью импульса молнии.

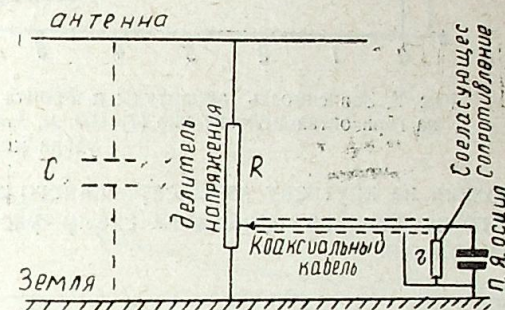


Рис. 1. Схема замещения приемного конца антенны.

Кривые рис. 2 показывают зависимость амплитуды и фронта волны индуктируемого напряжения на антенне от расстояния между антенной и местом удара молнии (по данным 749 молний). В подавляющем большинстве случаев амплитуда индуктируемого напряжения на горизонтальной антенне длиной 100 м и высотой подвеса 16 м при ударах молнии в землю в окрестности  $0,4 < R < 10$  км не превышает 20 кВ. При двух ударах молнии в землю на расстоянии ~110 и 300 м амплитуда индуктируемого напряжения соответственно составила 155 и 75 кВ. Кроме того, при тех близких разрядах (~200, 260, 330 м) не удалось определить амплитуду индуктированных напряжений, так как срабатывал защитный искровой промежуток. Анализ осциллограмм показал, что срез происходил на фронте волны при напряжении ~170 кВ. Длина импульса индуктированных напряжений уменьшается с расстоянием от места удара молнии. Общая длина импульса уменьшается с уменьшением расстояния и, как правило, при близких разрядах ( $R < 1$  км) составляет менее 10 мксек.

Влияние расстояния на фронт волны индуктированного напряжения иллюстрируется кривой  $t_f(R)$  (рис. 2) и обусловливается тем, что излучаемые каналом молнии электромагнитные сигналы с течением времени „расплываются“, так как отдельные гармоники, на которые



эти сигналы можно разложить, поглощаются воздушной средой по-разному. Ввиду недостаточности в настоящий момент данных для рекомендации по численному определению влияния удаленности удара

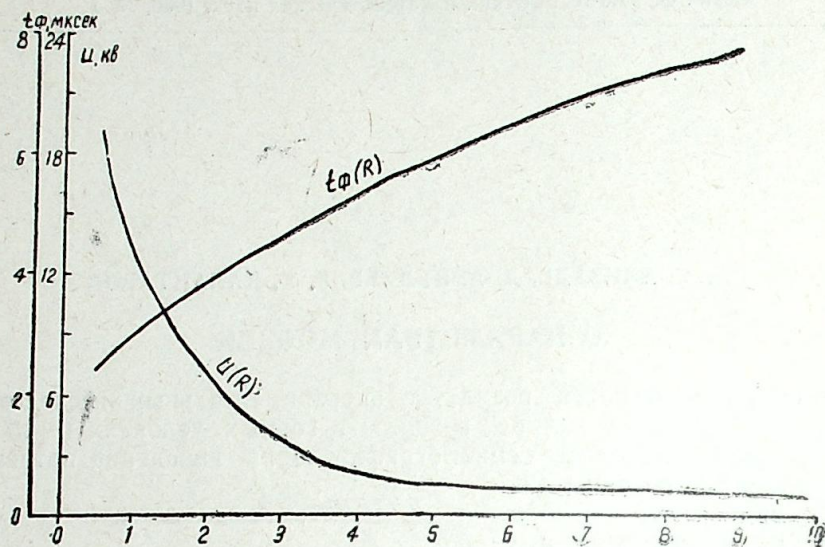


Рис. 2. Зависимость амплитуды и фронта индуцируемого напряжения на горизонтальной антенне ( $l=100$  м,  $h=16$  м) от удаленности места удара молнии.

молнии на крутизну зафиксированного антенной волны индуцированного напряжения принимаем схему расчета крутизны тока без учета расстояния.

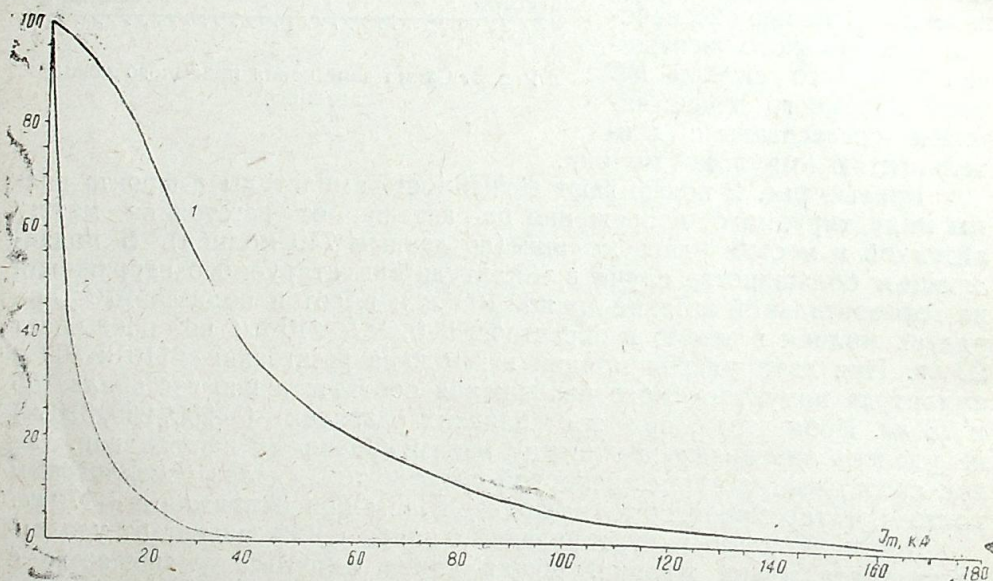


Рис. 3. Кривые вероятности токов молнии: 1—ЛЭП (равнина, местами предгорье < 500 м); 2—горная местность ~ 1500 м.

В предположении, что волна тока в канале молнии подобна волне индуцированного напряжения, из осциллограмм последних определялись крутизна и длина фронта, а амплитуда тока вычислялась согласно [1]. При этом надо иметь в виду, что из-за влияния расстояния

на фронт волны индуцированного напряжения фронт волны тока получается несколько преувеличенным, а крутизна тока соответственно преуменьшенной. Таким образом были оценены амплитуда, крутизна и длина фронта волны тока у 749 молний, ударивших в землю в условиях горной местности. Из расшифровки совместной магнито-

записи определены амплитуда, крутизна и длина фронта ( $t_\phi$  вычислялась как  $J \int \frac{di}{dt}$ ) у 88 прямых ударов молнии на ЛЭП 110, 220, 330 кВ общей протяженностью приблизительно 600 км, проходящих в основном через низменные районы. Метод регистрации и расшифровки изложен в [2].

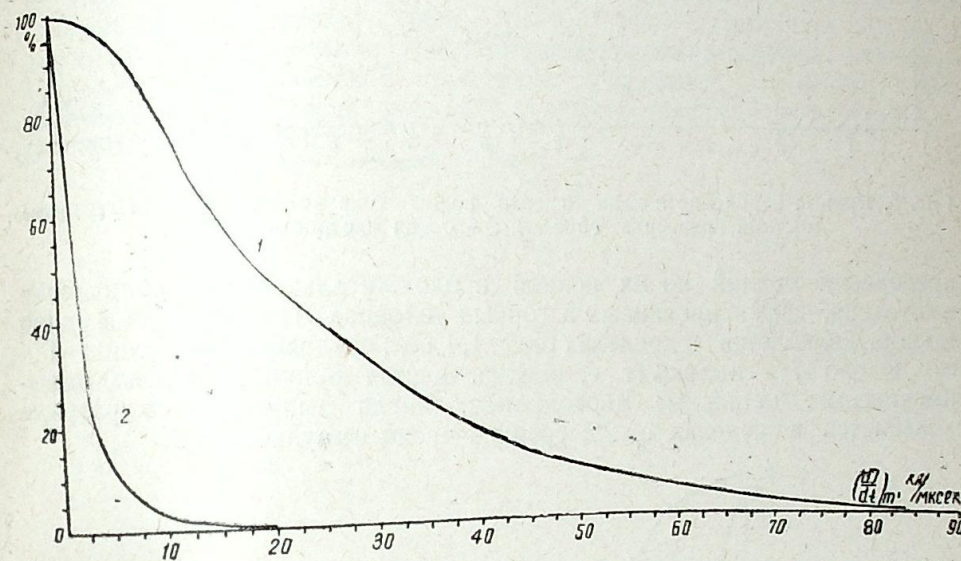


Рис. 4. Кривые вероятности крутизны тока молнии: 1—ЛЭП (равнина, местами предгорье < 500 м); 2—горная местность ~ 1500 м.

С целью сопоставления значений амплитуды, крутизны и длины фронта волны ток на землю в горной местности в естественных условиях и прямых ударов молнии на ЛЭП в низменных условиях на рис. 3, 4, 5 приводятся кривые их процентного распределения. Минимальное, максимальное и среднеквадратичные значения амплитуды крутизны и фронта волны тока молнии на землю в горной местности и на ЛЭП в низменных условиях сведены в табл. 1.

Таблица 1

| Параметр молнии     | Горная местность |         |                   | ЛЭП (равнина) |         |                   |
|---------------------|------------------|---------|-------------------|---------------|---------|-------------------|
|                     | миним.           | максим. | средне-квадратич. | миним.        | максим. | средне-квадратич. |
| Амплитуда, кА       | 1                | 40      | 10                | 5             | 166     | 45                |
| Крутизна, кА/мксек  | 0,5              | 28      | 4,5               | 2             | 83      | 27                |
| Длина фронта, мксек | 0,4              | 27      | 3,3               | 0,            | 15,3    | 2,2               |

Как видно, у молний, ударивших в землю в условиях горной местности, наблюдаются значительно заниженные значения тока и крутизны, чем у молний, поразивших ЛЭП, сооруженные в низменных районах, хотя частично эти расхождения обусловлены различием методов исследования. На рис. 6 показаны кривые процентного рас-



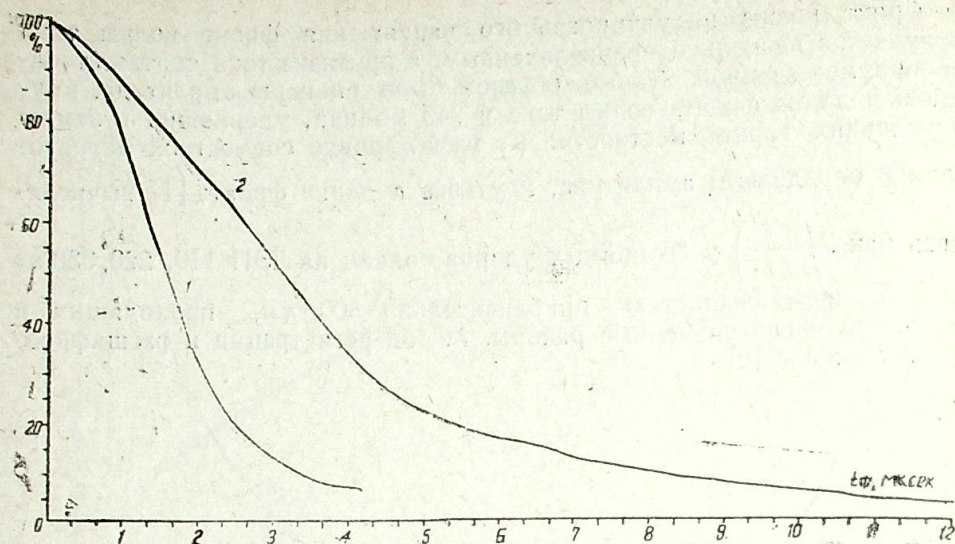


Рис. 5. Кривые вероятности длин фронта волны тока молнии: 1—ЛЭП (равнина, местами предгорье <500 м); 2—горная местность ~1500 м.

пределения молний по их полной продолжительности и количеству импульсов, зафиксированных в горных условиях. Полное время удара молнии колеблется в пределах  $0,05 \div 1,4$  сек, среднее время удара ~0,4 сек. Около 17% молний (т. е. каждая шестая молния на землю) одноимпульсные, остальные многократны. Число импульсов в разряде колеблется в пределах  $1 \div 25$ ; среднее число импульсов ~5.

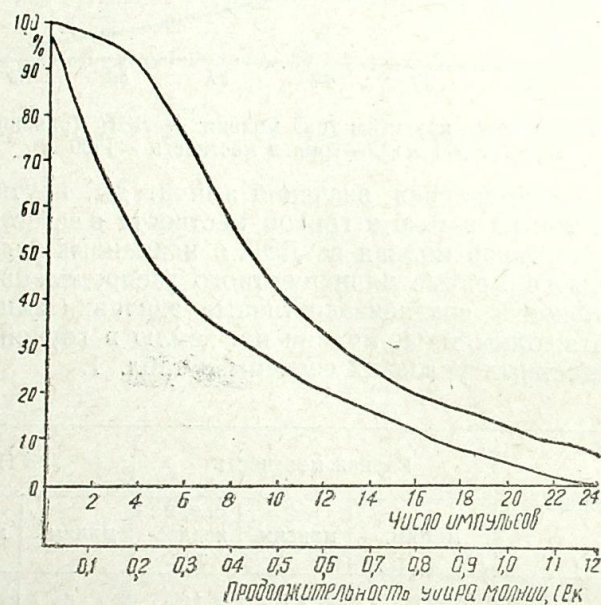


Рис. 6. Процентное распределение числа импульсов и продолжительности удара молнии.

По данным 88 молний, поразивших ЛЭП, у которых одновременно зафиксированы крутизна и амплитуда тока, построена картина статистической зависимости крутизны от амплитуды тока (рис. 7) и составлена табл. 2, в которую сведены средние значения тока и кру-

Таблица 2

| Токи молнии, ка | Число молний в группе | Среднее значение в группе |                    |
|-----------------|-----------------------|---------------------------|--------------------|
|                 |                       | тока, ка                  | крутизны, ка/мксек |
| 5 ÷ 20          | 18                    | 10                        | 16                 |
| 20 ÷ 40         | 32                    | 30                        | 23                 |
| 40 ÷ 60         | 20                    | 50                        | 29                 |
| 60 ÷ 100        | 12                    | 81                        | 34                 |
| 100 ÷ 170       | 6                     | 136                       | 64                 |

тизны в группах (общий объем замеров по величине тока разбит на пять групп). Крутизна и амплитуда тока молнии статистически достаточно сильно связаны между собой, т. е. с ростом амплитуд растет и крутизна токов молнии. Обработка экспериментального материала методами математической статистики показывает, что между этими величинами существует реальная и положительная связь с коэффициентом корреляции ~0,7.

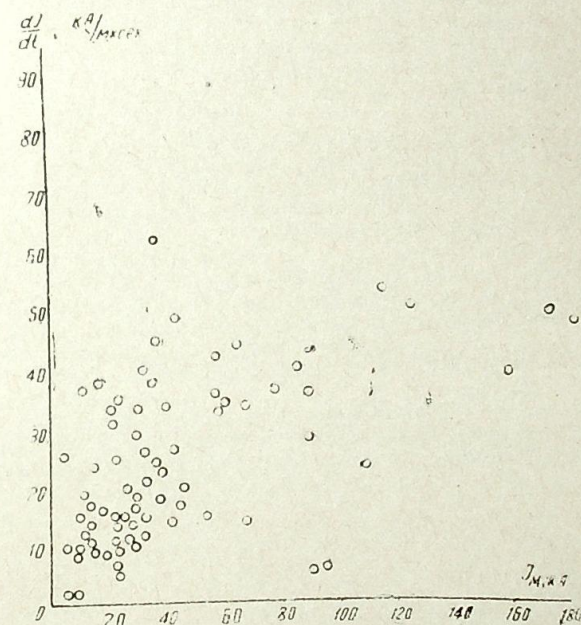


Рис. 7. Статистическая зависимость крутизны тока молнии от амплитуды тока.

Следует отметить, что почти во всех случаях большие значения крутизны наблюдались у молний с большим значением амплитуды тока. Так, например, у молний, поразивших опоры типа „портал“ ЛЭП 220 кв Баку—Мингечаур № 22, 427, 424, 503, 517 и опору типа „рюмка“ ЛЭП 330 кв Мингечаур—Актафа № 342 амплитуды (ка) и крутизна (ка/мксек) соответственно составили: 142 и 83; 112 и 53; 136 и 79; 120 и 56; 152 и 69; 166 и 41. В общем объеме число молний с амплитудой тока свыше 100 ка и крутизной более 50 ка/мксек составляет ~6%.



## Выводы

1. В горных условиях, на линиях с высотой подвеса 16 м при ударе молнии в землю в окрестности  $0,1 < R < 10$  км амплитуда индуктированных напряжений может доходить до 170 кВ и больше.
2. Волна индуктируемых напряжений сильно искажается в зависимости от удаленности места удара молний, в частности фронт волны удлиняется в 2÷3 раза при изменении расстояния от 0,4 до 10 км.
3. Подтверждается ранее сделанный вывод о том, что в горных условиях по сравнению с низменностью наблюдается значительное снижение величины токов молнии.
4. Крутизна и ток молнии коррелируют между собой с коэффициентом  $\approx + 0,7$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Разевиг Д. В. Атмосферные перенапряжения на линиях электропередачи. Госэнергоиздат, 1959.
2. Ализаде А. С., Кулиев Д. А., Нагиев В. А. „За технический прогресс,“ 1965, № 4.

## МҮНДЭРИЧАТ

|                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Р. Э. Аббасов. Чохдэжишэнли санки-периодик функцијаларын Фурје сыраларынын чэмлэмэси хаггында . . . . .                                            | 3  |
| Н. Н. Агајев. Гилберт фэзасында гејри-хэtti оператор тэнликлэрин нэзэријјэсинэ даир . . . . .                                                      | 9  |
| Э. С. Чэфэров. Функцијаларын чохообразлы үзэриндэ чоххэддилэр васитэсилэ эн јахшы јахынлашмасынын тэртиби хаггында . . . . .                       | 17 |
| А. Д. Мышкис. Тэтбиги ријазиијатын характер чизкилэри хаггында . . . . .                                                                           | 24 |
| Ј. Э. Эмэнзадэ. Ш. Ф. Мэммэдгулијев. Эн кэсији еллипс олан, мүхтэлиф материаллардан хазырланмыш призматик брусун бурулмасы . . . . .               | 26 |
| Ј. И. Көзэлов. Бэзи системлэр дајаныгсызлыгынын кафи шэртлэри . . . . .                                                                            | 36 |
| А. М. Пашајев. Јарымкечиричи маддэлэрин физики хассэлэринин ифрат јүксэк тезликли үсуллар илэ тэдгиги . . . . .                                    | 42 |
| М. Э. Талиби, Т. С. Эзизов, М. М. Элијев. Енержиси 1—5 Мев олан сүр'этлэндирилмиш электронларын гејдэ алынмасында Р-п кечидлэрин тэтбиги . . . . . | 47 |
| Э. Х. Хэлилов, Т. Ч. Элијева. КСl—Си фосфорларынын термостимулјаланмыш лүминесценсија спектрлэринэ термик ишлэнмэнин тэ'сиринин тэдгиги . . . . .  | 53 |
| Х. М. Хэлилов, К. И. Рзајев. Ултрасэс васитэсилэ ТlSe монокристалынын еластик параметрлэринин тэ'јини . . . . .                                    | 58 |
| М. Э. Багыров, Н. В. Климова, В. П. Малин. Хавадакы електрик чэрэјанынын полимер өртүклэрини диелектрик иткисинэ тэ'сиринин тэдгиги . . . . .      | 63 |
| М. И. Железијов. Јахынлыг ефектгини нэзэрэ алмагла електрик кечиричинин там дахили мүгавимэтинин тэ'јини хаггында . . . . .                        | 71 |
| Ч. М. Чуварлы, Ј. В. Дмитријев, Л. Е. Епштејн. Ачарда електрик герсүнүн ријазии модели . . . . .                                                   | 79 |
| А. А. Эфэндизадэ, Ј. М. Сејидов. Електромагнит тормоз валындакы моментин тэ'јини мәсэлэсиндэ вектор потенциалы нэзэријјэсинин тэтбиги . . . . .    | 86 |
| Э. С. Элизадэ, Д. А. Гулијев, В. А. Кэлэнтэров. Илдырымын параметрлэри хаггында . . . . .                                                          | 93 |



## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Р. А. Аббасов. О наилучшем приближении почти-периодических функций многих переменных                                                         | 3  |
| Г. Н. Агаев. К теории нелинейных операторных уравнений в пространстве Гильберта                                                              | 9  |
| А. С. Джафаров. О порядке наилучшего приближения функций на многообразных посредством алгебраических полиномов                               | 17 |
| А. Д. Мышкис. О характерных чертах прикладной математики                                                                                     | 24 |
| Ю. А. Амензаде, Ш. Ф. Мамедкулиев. Кручение эллиптического бруса, в соосную, круговую полость которого впаива труба из дуготого материала    | 26 |
| Я. Н. Геозалов. Достаточное условие устойчивости некоторых систем                                                                            | 36 |
| А. М. Пашаев. К исследованию физических свойств полупроводников СВЧ методами                                                                 | 42 |
| М. А. Талиби, Т. С. Азизов, М. М. Алиев. Применение $p$ - $n$ -переходов для индикации ускоренных электронов с энергией 1—5 Мэв              | 47 |
| А. Х. Халилов, Т. Д. Алиева. Исследование влияния термической обработки на спектры термостимулированной люминесценции KCl—Cu-фосфоров        | 53 |
| Х. М. Халилов, К. И. Рзаев. Определение упругих параметров монокристалла TlSe посредством ультразвука                                        | 58 |
| М. А. Багиров, Н. В. Климова, В. П. Малин. Исследование влияния электрического разряда в воздухе на диэлектрические потери полимерных пленок | 65 |
| М. И. Железнов. Об определении полного внутреннего сопротивления токопровода с учетом эффекта близости                                       | 71 |
| Ч. М. Джуварлы, Е. В. Дмитриев, Л. Э. Эпштейн. Математическая модель электрической дуги в выключателе                                        | 79 |
| А. А. Эфендизаде, Ю. М. Сеидов. К вопросу определения момента электромагнитного тормоза с применением теории векторного потенциала           | 86 |
| А. С. Ализаде, Д. А. Кулиев, В. А. Калантаров. О параметрах модели                                                                           | 93 |

Подписано к печати 13/II 1967 г. Формат бумаги  $70 \times 108 \frac{1}{16}$ . Бум. лист. 3,13.  
Печ. лист. 8,56. Уч-изд. лист. 7,8. ФГ 10522. Заказ 516. Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров  
Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, 80.