

77-169

АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ

★

СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

4

1966

~~~~~  
АЗƏРБАЙЧАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
БАКЫ — БАКУ



С. Я. ЯКУБОВ

### ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача Коши для дифференциальных уравнений первого порядка параболического типа в банаховом пространстве исследована во многих работах советских и зарубежных авторов. Изучалась также задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве [1—6]. В двух работах из указанных [2, 3] изучаются такие уравнения второго порядка, которые по некоторым причинам естественно называть параболическими. Настоящая статья посвящена изучению уравнений этого типа более общего вида.

Рассмотрим задачу

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A \frac{du(t)}{dt} + Bu(t) = f \left( t, u(t), \frac{du(t)}{dt} \right);$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (1)$$

в банаховом пространстве  $E$ . Решением задачи (1) будем называть дважды непрерывно дифференцируемую на  $[0, T]$  функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую при каждом  $t \in [0, T]$  уравнению (1) и обладающую, кроме того, тем свойством, что функции  $Au'(t)$  и  $Bu(t)$  непрерывны на  $[0, T]$ .

Всюду на оператор  $A$  налагается следующее условие ( $\alpha$ ).

Замкнутый линейный оператор  $A$  имеет всюду плотную область определения  $L(A)$ , причем при некотором  $\alpha \in (0, 1]$  выполняется неравенство

$$\|R(\sigma + i\tau, -A)\| \leq C(\sigma + 1 + |\tau|^\alpha)^{-1}$$

в полуплоскости  $\sigma > -1$ .

Если оператор  $A$  удовлетворяет условию ( $\sigma$ ), то  $-A$  порождает [7] бесконечно дифференцируемую полугруппу  $T(t)$  класса  $(A)$ . Этот класс полугрупп принято обозначать  $(A)_\infty$ . Если  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ , то  $T(t)$

принадлежит классу  $(1, A)_\infty$ , если же  $\alpha = 1$ , то  $T(t)$  — аналитическая полугруппа. Для операторов, удовлетворяющих условию ( $\alpha$ ), определены дробные степени [8]. В [2, 3] разрешимости задачи (1) исследована при  $\alpha = 1$ . Используя результаты и метод статьи [5], нами исследована

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор) Г. А. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“



дуются разрешимость задачи (1) при всех  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ , причем при  $\alpha = 1$  полученные результаты совпадают с некоторыми результатами статей [2, 3].

**Л е м м а.** Пусть оператор  $A$  удовлетворяет условию (а). Если линейный оператор  $B$  таков, что при некотором  $\beta < \alpha$  оператор  $BA^{-\beta}$  ограничен, то при достаточно больших  $\kappa$  в полуплоскости  $\sigma > -1$  имеет место неравенство

$$\|R(\sigma + i\tau, -A + B - \kappa I)\| \leq C(\sigma + 1 + |\tau|^\alpha)^{-1}.$$

**Доказательство.** Из [8] следует, что операторы  $A$ , удовлетворяющие (а), имеют дробные степени и для них справедливо неравенство моментов

$$\|A^\gamma u\| \leq C \|A u\|^\gamma \|u\|^{1-\gamma} \quad (u \in D(A), \gamma \in [0, 1]).$$

В частности, отсюда получается неравенство

$$\|A^\beta R(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| \leq C \|AR(\sigma + \kappa + i\tau, -A)\|^\beta \times \\ \times \|R(\sigma + \kappa + i\tau, -A)\|^{1-\beta}.$$

С другой стороны, так как  $AR(\sigma + \kappa + i\tau, -A) = -I - (\sigma + \kappa + i\tau)R(\sigma + \kappa + i\tau, -A)$ , то  $\|AR(\sigma + \kappa + i\tau, -A)\| \leq 1 + C \frac{(|\sigma| + \kappa + |\tau|)^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha}$

и

$$\|A^\beta R(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| \leq \frac{C}{(\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha)^{1-\beta}} + B \frac{(|\sigma| + \kappa + |\tau|)^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha}.$$

Очевидно, величина  $\sup_{\sigma, \tau} \frac{C}{(\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha)^{1-\beta}}$  может быть сколь угодно

малой при достаточно большом  $\kappa$ . С другой стороны, так как  $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$ , то в полуплоскости  $\sigma > -1$  имеем

$$f(\sigma, \tau) = \frac{(|\sigma| + \kappa + |\tau|)^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha} \leq \frac{|\sigma|^\beta + \kappa^\beta + |\tau|^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha} \leq \frac{|\sigma|^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha} + \\ + \frac{\kappa^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha} + \frac{|\tau|^\beta}{\sigma + \kappa + 1 + |\tau|^\alpha} \leq \frac{|\sigma|^\beta}{|\sigma| + \kappa - 1} + \frac{1}{\kappa^{1-\beta}} + \frac{|\tau|^\beta}{\kappa + |\tau|^\alpha}.$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{x^\alpha}{N + x^\alpha}$  при  $x \geq 0$ . В точке  $x =$

$$= \left(\frac{\beta N}{\alpha - \beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \text{ она достигает максимума, причем } \max_{x \geq 0} f(x) = \frac{1}{N^{\frac{1+\beta}{\alpha}}} \times$$

$\times \frac{1}{\alpha} \cdot \beta^{\frac{\beta}{\alpha}} (\alpha - \beta)^{1 - \frac{\beta}{\alpha}}$ . Отсюда следует, что при достаточно больших  $N$  величина  $\max_{x \geq 0} f(x)$  может стать сколь угодно малой.

Таким образом, при достаточно больших  $\kappa$  в полуплоскости  $\sigma > -1$  имеет место неравенство

$$\|A^\beta R(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| < \frac{1}{2\|BA^{-\beta}\|}.$$

Тогда для таких  $\kappa$  ввиду известного равенства

$$R(\lambda, -A + B - \kappa I) = R(\lambda, -A - \kappa I) \sum_{j=0}^{\infty} [-BR(\lambda, -A - \kappa I)]^j,$$

верного во всех тех точках  $\lambda = \sigma + i\tau$ , где ряд сходится, используя оценку

$$\|BR(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| \leq \|BA^{-\beta}\| \cdot \|A^\beta R(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| \leq \frac{1}{2},$$

получаем утверждение леммы.

**Т е о р е м а 1.** Пусть выполнены следующие условия: 1°. Оператор  $A$  удовлетворяет условию (а) для некоторого  $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ;

2°. Оператор  $BA^{-1-\beta}$  ограничен для некоторого  $\beta < \alpha$ ; оператор  $BA^{-1}$  замкнут и для некоторого  $\omega_0$  выполняется неравенство

$$\|R(\lambda, -BA^{-1})\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1} \quad (2)$$

при всех  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq \omega_0$ ; 3°.  $u_0 \in D(B) \cap D(AB)$ ,  $u_1 \in D(A^2) \cap D(ABA^{-1})$ ;

4°. Для некоторого  $R > 0$  оператор  $f(t, A^{-1}v_1, v_2)$  на  $[0, T] \times S(Au_0, R) \times S(u_1, R)$  имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные  $f'_i(t, A^{-1}v_1, v_2)$  и  $f'_{v_i}(t, A^{-1}v_1, v_2)$ ,  $i = 1, 2$  (последние в смысле Фреше), удовлетворяющие по  $\tau_i$  условию Липшица ( $f'_i(t, A^{-1}v_1, v_2)$  — по норме пространства  $E$ ,  $f'_{v_i}(t, A^{-1}v_1, v_2)$  — по норме пространства линейных операторов над  $E$ ). Тогда задача (1) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке  $[0, t_0] \subset [0, T]$ , которое может быть найдено методом последовательных приближений.

**Доказательство.** Заменой  $v_1(t) = Au(t) + u'(t)$ ,  $v_2(t) = u'(t)$  задача (1) сводится к эквивалентной задаче

$$v'(t) + Av(t) = F(t, v(t)); v(0) = v_0, \quad (3)$$

где

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, F(t, v) = \begin{pmatrix} f(t, A^{-1}(v_1 - v_2), v_2) \\ f(t, A^{-1}(v_1 - v_2), v_2) \end{pmatrix}, \tau_0 = \begin{pmatrix} Au_0 + u' \\ u'_1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} BA^{-1} & -BA^{-1} \\ BA^{-1} & A - BA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA^{-1} + \omega + 1 & \\ & BA^{-1} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\omega - 1 & -BA^{-1} \\ 0 & -BA^{-1} \end{pmatrix} = A_1 + A_2,$$

где  $\omega = \max\{0, \omega_0\}$ .

Нетрудно проверить, что  $R(\lambda, -A_1)$  определяется формулой

$$R(\lambda, -A_1) = \begin{pmatrix} R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) & 0 \\ R(\lambda, -A) & BA^{-1}R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) \end{pmatrix} R(\lambda, -A). \quad (4)$$

Так как  $BA^{-1}R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) = BA^{-1}R(\lambda + \omega + 1, -BA^{-1}) = -I - (\lambda + \omega + 1)R(\lambda + \omega + 1, -BA^{-1})$ , то в силу (2) имеем оценку  $\|BA^{-1}R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1)\| \leq 1 + C|\lambda + \omega + 1|(|\lambda + \omega + 1| + 1)^{-1} \leq C$  (5)

при всех  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq -1$ . Тогда в силу 1°, (2) и (4) получаем оценку

$$\|R(\lambda, -A_1)\| \leq C(\sigma + 1 + |\tau|^\alpha)^{-1}.$$



Покажем, что при всех  $\alpha_0 > \beta$  оператор  $A_2 A_1^{-\alpha_0}$  ограничен.

$$\begin{aligned} A_2 A_1^{-\alpha_0} &= \begin{pmatrix} -\omega - 1 - BA^{-1} & \sin \pi \alpha_0 \\ 0 & -BA^1 \end{pmatrix} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha_0} (A_1 + \lambda)^{-1} d\lambda = \\ &= \frac{\sin \pi \alpha_0}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha_0} \begin{pmatrix} \omega + 1 & BA^{-1} \\ 0 & BA^{-1} \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) & 0 \\ R(\lambda, -A)BA^{-1}R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) & R(\lambda, -A) \end{pmatrix} d\lambda = \frac{\sin \pi \alpha_0}{\pi} \\ &\int_0^\infty \lambda^{-\alpha_0} \begin{pmatrix} (\omega + 1 + BA^{-1}R(\lambda, -A)BA^{-1})R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) \\ BA^{-1}R(\lambda, -A)BA^{-1}R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) \\ BA^{-1}R(\lambda, -A) \\ BA^{-1}R(\lambda, -A) \end{pmatrix} d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\begin{aligned} \|BA^{-1}R(\lambda, -A)\| &\leq \|BA^{-1-\beta}\| \cdot \|A^\beta R(\lambda, -A)\| \leq \\ &\leq C \|AR(\lambda, -A)\|^\beta \cdot \|R(\lambda, -A)\|^{1-\beta} \leq \frac{C}{(\lambda+1)^{1-\beta}}, \end{aligned}$$

то, учитывая (5) и (6), получаем

$$\|A_2 A_1^{-\alpha_0}\| \leq C \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha_0} (\lambda+1)^{1-\beta}},$$

откуда следует, что при  $\alpha_0 > \beta$  интеграл сходится. Тогда, выбирая  $\alpha_0$  на интервале  $(\beta, \alpha)$  и применяя лемму, получаем при некотором  $\kappa > 0$  оценку

$$\|R(\sigma + i\tau, -A - \kappa I)\| \leq C(\sigma + 1 + |\tau|^\alpha)^{-1}$$

для всех  $\sigma > -1$ . Значит оператор  $-A - \kappa I$  в пространстве  $E \times E$  порождает полугруппу класса  $(1, A)_\infty$  и тем самым оператор  $-A$  также порождает полугруппу класса  $(1, A)_\infty$ . С другой стороны, в силу 4° можно подобрать  $R_1 > 0$  так, чтобы оператор  $F(t, v)$  на  $[0, T] \times S(v_0, R_1)$  имел непрерывные по совокупности переменных частные производные  $F_t(t, v)$  и  $F_v(t, v)$ , удовлетворяющие по условию Липшица в  $E \times E$ . Далее, применяя результаты статьи [5] к задаче (3), доказываем теорему.

Теперь рассмотрим уравнение с параметром  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A \frac{du(t)}{dt} + Bu(t) = f\left(f, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right); \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (7)$$

В теореме 1 предполагается, что оператор  $BA^{-1-\beta}$  при некотором  $\beta < \alpha$  ограничен. В следующей теореме при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  это условие заменяется более слабым условием ограниченности оператора  $BA^{-1-\alpha}$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия 1°, 3° и 4° теоремы 1. Пусть далее оператор  $BA^{-1-\alpha}$  ограничен, оператор  $BA^{-1}$  замкнут, и выполняется неравенство (2). Тогда при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  задача (7) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке  $[0, t_0] \subset [0, T]$ .

**Доказательство.** Заменой  $v_1(t) = Au(t) + \varepsilon u'(t)$ ,  $v_2(t) = \varepsilon u'(t)$  задача (7) сводится к эквивалентной задаче

$$v'(t) + A(\varepsilon)v(t) = F(\varepsilon, t, v(t)), \quad v(0) = v_0(\varepsilon), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad F(\varepsilon, t, v) = \\ &= \begin{pmatrix} f\left(t, A^{-1}(v_1 - v_2), \frac{v_2}{\varepsilon}\right) \\ f\left(t, A^{-1}(v_1 - v_2), \frac{v_2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} Au_0 + \varepsilon u_1 \\ \varepsilon u_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} BA^{-1} & -BA^{-1} \\ BA^{-1} & \frac{A}{\varepsilon} - BA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA^{-1} + \omega + 1 & 0 \\ BA^{-1} & \frac{A}{\varepsilon} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -\omega - 1 & -BA^{-1} \\ 0 & -BA^{-1} \end{pmatrix} = A_1(\varepsilon) + A_2. \end{aligned}$$

Используя известную формулу:

$$R(\lambda, -A(\varepsilon)) = R(\lambda, -A_1(\varepsilon)) \sum_{k=0}^{\infty} [A_2 R(\lambda, -A_1(\varepsilon))]^k, \quad (9)$$

оценим норму оператора  $R(\lambda, -A(\varepsilon))$ . В силу (4) имеем

$$\begin{aligned} A_2 R(\lambda, -A_1(\varepsilon)) &= \\ &= \begin{pmatrix} -(\omega + 1 + BA^{-1-\alpha} A^\alpha R(\lambda, -\frac{A}{\varepsilon}) BA^{-1}) R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) \\ -BA^{-1-\alpha} A^\alpha R(\lambda, -\frac{A}{\varepsilon}) BA^{-1} R(\lambda, -BA^{-1} - \omega - 1) \\ -BA^{-1-\alpha} A^\alpha R(\lambda, -\frac{A}{\varepsilon}) \\ -BA^{-1-\alpha} A^\alpha R(\lambda, -\frac{A}{\varepsilon}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

С другой стороны, так как для всех  $\sigma > -1$  имеем

$$\begin{aligned} \|A^\alpha R(\sigma + i\tau, -\frac{A}{\varepsilon})\| &= \varepsilon \|A^\alpha R(\varepsilon\sigma + i\varepsilon\tau, -A)\| \leq \\ &\leq C \varepsilon \|AR(\varepsilon\sigma + i\varepsilon\tau, -A)\|^\alpha \cdot \|R(\varepsilon\sigma + i\varepsilon\tau, -A)\|^{1-\alpha} \leq \\ &\leq C \varepsilon \left[ 1 + C \frac{\varepsilon(|\sigma| + |\tau|)}{\varepsilon\sigma + 1 + \varepsilon^\alpha |\tau|^\alpha} \right]^\alpha \left[ \frac{C}{\varepsilon\sigma + 1 + \varepsilon^\alpha |\tau|^\alpha} \right]^{1-\alpha} \leq \\ &\leq C \varepsilon \left[ \frac{C}{(\varepsilon\sigma + 1 + \varepsilon^\alpha |\tau|^\alpha)^{1-\alpha}} + \frac{C \varepsilon^\alpha (|\sigma|^\alpha + |\tau|^\alpha)}{\varepsilon\sigma + 1 + \varepsilon^\alpha |\tau|^\alpha} \right] \leq C \varepsilon, \end{aligned}$$

то при достаточно малых  $\varepsilon$  получаем, что  $\|A_2 R(\lambda, -A_1(\varepsilon))\| < \frac{1}{2}$ . Тогда

в силу формулы (9) устанавливаем, что при достаточно малых  $\varepsilon$  оператор  $A(\varepsilon)$  удовлетворяет условию (α) (для оператора  $A_1(\varepsilon)$  выполнены условия (α) устанавливается также, как для оператора  $A_1$  в теореме 1).



реме 1). Далее легко заметить, что к задаче (8) также применимы результаты статьи [5]. Этим доказывается теорема.

Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + A \frac{du(t)}{dt} + Bu(t) = f(t); u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \quad (10)$$

Если дать более слабое определение решения, то разрешимость задачи (10) можно доказать для более широких классов начальных данных. Решением задачи (10) будем называть непрерывно дифференцируемую на  $(0, T]$ , дважды непрерывно дифференцируемую на  $(0, T)$  функцию  $u(t)$ , удовлетворяющую при каждом  $t \in (0, T]$  уравнению (10) и обладающую, кроме того, тем свойством, что функции  $Au'(t)$  и  $Bu(t)$  непрерывны на  $(0, T]$ .

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1°, 2° теоремы 1. Далее пусть: 3°.  $u_0 \in D(A) \cap D(B)$ ,  $u_1 \in D(A)$ ; 4°.  $f(t)$  — непрерывно дифференцируемая вектор-функция на  $[0, T]$ . Тогда задача (10) имеет единственное решение на  $[0, T]$ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При этом к полученному уравнению первого порядка следует применять теорему 1 статьи [5].

Аналогичную теорему можно доказать для линейного уравнения с параметром.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Митягин Б. С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук\* 1961, № 1.
2. Соболевский П. Е. ДАН СССР\*, 1962, № 4.
3. Соболевский П. Е. УМН, XIX, 6 (120), 1964.
4. Соболевский П. Е. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем\*. 1962, № 3.
5. Якубов С. Я. ДАН СССР\*, 156, 1964, № 5.
6. Якубов С. Я. ДАН Азерб. ССР\*, т. XX, 1964, № 2.
7. Хилле Э. и Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ 1962.
8. Красносельский М. А., Соболевский П. Е. ДАН СССР\*, 129 1959, № 3.

С. Я. Якубов

#### Банах фəзасында икинчи тəртиб параболик тип дифференциал тəнликлэр үчүн Коши мəсələси

#### ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə (1) Коши мəсələсинин həллинин варлыгы вə јеканəли-ји өјрəнилир. Икинчи тəртиб дифференциал тəнлик онунла эквивалент олан биринчи тəртиб параболик тип тəнлијə кəтирилдијиндэн парабо-лик тип адланыр вə параболик тип тəнликлəрин малик олдуғу хүс-сијјəтлэрə малик олур.

Г. М. ГАСАНОВ

#### О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ВСЕЙ ОСИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ ЭРМИТА—ФЕЙЕРА

1°. Для вещественной функции  $f(t)$ , заданной на  $(-\infty, \infty)$ , Л. Ц. Хсу [4] вводит интерполяционные многочлены Эрмита—Фейера следующим образом:

$$F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \left( 1 - \frac{a_{jn} x}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{jn}} \right]^2 f(\lambda_n a_{jn}), \quad (1)$$

где

$$a_{jn} = \cos \frac{2j-1}{2n} \pi \quad (j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$$

— корни многочленов Чебышева,  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$  — последовательность положительных чисел, для которой  $\lambda_n \rightarrow \infty (\lambda_n \uparrow \infty)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

В работе [4] доказываются некоторые теоремы сходимости при специальном выборе последовательности  $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ . В данной работе изучался порядок приближения непрерывных функций интерполяционными многочленами Эрмита—Фейера вида (1). Отметим, что когда  $a_{jn} (j = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots)$  являются корнями многочленов Якоби, аналогичные результаты получены совместно с А. С. Джафаровым.

$\omega(\delta, f)_\varphi (0 \leq \delta < \infty)$  будем называть модулем непрерывности функции  $f(x) \in C(-\infty, \infty)$ , если

$$\omega(\delta, f)_\varphi = \sup_{\substack{|h| < \delta \\ -\infty < x < \infty}} \frac{1}{\alpha(\delta)} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{\varphi(x)},$$

где  $\alpha(t) = \sup_{|\xi| < t} \frac{\varphi(x+\xi)}{\varphi(x)} (-\infty < x < \infty)$ ,  $\varphi(x)$  непрерывна в  $(-\infty, \infty)$  и  $\varphi(x) \geq 1$  (см. напр. [1]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства модуля непрерывности и функции  $\alpha(t)$  [1]:

$$\omega(\eta, f)_\varphi \leq (\eta \delta^{-1} + 1) \alpha^2(\delta) \omega(\delta, f)_\varphi (\eta > 0, \delta > 0), \quad (2)$$

$$\alpha(|x \pm y|) \leq \alpha(2|x|), \text{ если } |y| \leq |x|.$$

Нам также нужна будет следующая [2]



**Теорема.** (С. Н. Бернштейн. Пусть  $a_{vn} (v=1, 2, \dots, n; n=1, 2, \dots)$  — корни многочленов Чебышева, тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \left| \frac{T_n(x)}{x - a_{vn}} \right| \sqrt{1 - a_{vn}^2} \leq 8 + \frac{4}{\pi} \ln n \quad (|x| \leq 1). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Если  $f(x)$  — непрерывная на  $(-\infty, \infty)$  функция такая, что отношение  $\frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$  ограничено на всей оси и  $\omega(\delta)_\varphi$  — ее модуль непрерывности с весом на всей оси, и  $\lambda_n$  такая, что  $\frac{\lambda_n \ln n}{n} \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то на любом конечном отрезке  $[-A, A]$  ( $A > 0$ ) для  $\lambda_n > A$  и  $n \geq 2$  имеет место неравенство

$$\left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \varphi^{-1}(x) \leq C \alpha(2\lambda_n) a^2 \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right), \quad (4)$$

где  $C$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\lambda_n > A$ . Тогда, если  $|x| \leq A$ , то

$$\frac{|x|}{\lambda_n} < 1.$$

Отметим, что

$$\frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{vn}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 \equiv 1. \quad (5)$$

Пользуясь этой формулой, находим

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \varphi^{-1}(x) \leq \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{vn}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 \frac{|f(\lambda_n a_{vn}) - f(x)|}{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Но в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{|f(\lambda_n a_{vn}) - f(x)|}{\varphi(x)} &\leq \omega(|\lambda_n a_{vn} - x|)_\varphi \alpha(|\lambda_n a_{vn} - x|) \leq \\ &\leq \left( |\lambda_n a_{vn} - x| \frac{n}{\lambda_n \ln n} + 1 \right) a^2 \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) \alpha(2\lambda_n). \end{aligned}$$

Стало быть, на основании тождества (5)

$$\begin{aligned} \Delta_n &\leq \alpha(2\lambda_n) a^2 \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) \varphi \left\{ 1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n \ln n} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{a_{vn} x}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 \left| a_{vn} - \frac{x}{\lambda_n} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Благодаря (3),  $\left| T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right) \right| \leq 1$  ( $|x| \leq A$ ) и  $1 - a_{vn}^2 < \sqrt{1 - a_{vn}^2}$

имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n \ln n} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{vn}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 \left| a_{vn} - \frac{x}{\lambda_n} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{n \ln n} \sum_{v=1}^n (1 - a_{vn}^2) \left| \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right| + \\ &\quad + \frac{1}{n \ln n} \sum_{v=1}^n \left| a_{vn}^2 - \frac{x a_{vn}}{\lambda_n} \right| \left| \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\ln n} \left( 8 + \frac{4}{\pi} \ln n \right) + \frac{1}{\ln n} \leq C_1 \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Из (6) и (7) и следует (4).

Как отмечают Л. С. Сюй и Ж. К. Ван [3], из результатов Бермана известно, что скорость сходимости полиномов Фейера имеет порядок  $O(1) \omega_f \left( \frac{\ln n}{n} \right)$ , если  $f(x)$  непрерывна на  $[-1, 1]$ .

2°. Введем обозначения:

$$\exp^1(|x|) = e^{|x|}, \quad \exp^{m+1}(|x|) = \exp(\exp^m(|x|)),$$

$$\ln^1(n) = \ln n, \quad \ln^{m+1}(n) = \ln(\ln^m(n)),$$

где  $m$  — фиксированное натуральное число,  
 $\omega(\delta)_A = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} |f(x') - f(x'')|$  — модуль непрерывности

$$x', x'' \in [-A, A]$$

функции  $f(x)$  на  $[-A, A]$ .

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, \infty)$  и удовлетворяет условию

$$f(x) = O(\exp^m(|x|)) \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

то на любом конечном отрезке  $[-A, A]$  ( $A > 0$ ) для  $\lambda_n > A$  имеет место неравенство

$$\left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n \delta_n} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

где

$$\lambda_n = \ln^{m+1}(n), \quad 0 \leq \delta_n < 2A.$$

**Доказательство.** Ясно, что

$$\left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{vn}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 |f(\lambda_n a_{vn}) - f(x)|.$$

Разобьем последнюю сумму на две:  $\sum_v$  и  $\sum_v'$ , относя к  $\sum_v'$  те слага-



емые, для которых  $|\lambda_n a_{v_n} - x| \leq \delta_n$ , а к  $\sum_v$  все остальные. Далее отметим, что порядок роста  $f(x)$  включает в себя существование положительной постоянной  $K$ , не зависящей от  $x$  ( $-A \leq x \leq A$ ), такой, что для любого большего  $n$

$$|f(\lambda_n a_{v_n}) - f(x)| \leq K \exp^m(\lambda_n) = K \ln n.$$

Итак, учитывая (3), (5) и  $1 - a_{v_n}^2 \leq \sqrt{1 - a_{v_n}^2}$ , для больших  $n$  мы можем утверждать, что

$$\begin{aligned} & \left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \omega(\delta_n)_A + \\ & + \frac{K \lambda_n \ln n}{n^2 \delta_n} \sum_v \left( 1 - \frac{x a_{v_n}}{\lambda_n} \right) \left| \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right| \leq \\ & \leq \omega(\delta_n)_A + \frac{K \lambda_n \ln n}{n^2 \delta_n} \sum_{v=1}^n \left( 1 - a_{v_n}^2 \right) \left| \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right| + \\ & + \frac{K \lambda_n \ln n}{n^2 \delta_n} \sum_{v=1}^n \left| a_{v_n}^2 - \frac{x a_{v_n}}{\lambda_n} \right| \left| \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right| = \\ & = \omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n \delta_n} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть  $\omega(t) = O(\varphi(t))$  и пусть  $\varphi(t)$  такая, что  $t^2 \varphi'(t)$  имеет обратную функцию. Обозначим через  $\psi$  обратную функцию к  $t^2 \varphi(t)$ . Тогда сможем показать, что правая часть (8) достигает своего минимума при

$$\delta_n = \psi \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n} \right).$$

Следствие 1. При дополнительном ограничении на функцию  $f(x)$ , т. е. если  $f(x) \in \text{Lip}_m^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ , при условиях теоремы 2 имеем

$$\left| F_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| = O \left( \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Если  $f(x)$  непрерывна на  $(-\infty, \infty)$  и удовлетворяет условию

$$f(x) = O(|x|^m) \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

то на любом конечном отрезке  $[-A, A]$  ( $A > 0$ ) для  $\lambda_n > A$  имеет место неравенство

$$\left| F_n \left[ f(n^0 t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{n^{(m+1)\theta} \ln n}{n \delta_n} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (9)$$

где  $0 < \theta < \frac{1}{m+2}$ ,  $m$  — фиксированное положительное число.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2. Как и в теореме 2, легко можем показать, что правая часть (10) достигает своего минимума при

$$\delta_n = \psi(n^{(m+1)\theta-1} \ln n).$$

Следствие 2. При дополнительном ограничении на функцию  $f(x)$ , т. е. если  $f(x) \in \text{Lip}_m^\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ , то при условиях теоремы 3 имеем

$$\left| F_n \left[ f(n^0 t); \frac{x}{n^0} \right] - f(x) \right| = O \left\{ \left( \frac{\ln n}{n^{1-(m+1)\theta}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \right\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где  $0 < \theta \leq \frac{1}{m+2}$ .

3°. Теперь рассмотрим интерполяционный полином  $H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right]$  степени  $(2n-1)$ , построенный согласно условиям:

$$H_n[f(\lambda_n t); a_{v_n}] = f(\lambda_n a_{v_n}), \quad H_n'[f(\lambda_n t); a_{v_n}] = d_{v_n}, \quad (10)$$

причем  $|d_{v_n}| \leq \frac{M_n}{\sqrt{1-a_{v_n}^2}}$ ,

где  $M_n$  может неограниченно расти при  $n \rightarrow \infty$ . Этот полином задается формулой

$$\begin{aligned} H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] &= \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{v_n}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right]^2 f(\lambda_n a_{v_n}) + \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - a_{v_n}^2 \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right]^2 \left( \frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n} \right) d_{v_n}. \end{aligned}$$

Теорема 4. Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условия теоремы 1 при  $\varphi(x) \equiv 1$ , то на любом конечном отрезке  $[-A, A]$  ( $A > 0$ ) для  $\lambda_n > A$  и  $n \geq 2$  имеет место неравенство

$$\left| H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq C \left[ \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right) + \frac{M_n \ln n}{n} \right].$$

Доказательство. Пользуясь формулой (4), в силу (10) находим

$$\begin{aligned} & \left| H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^n \left( 1 - \frac{x a_{v_n}}{\lambda_n} \right) \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right]^2 |f(\lambda_n a_{v_n}) - f(x)| + \\ & + \frac{M_n}{n^2} \sum_{v=1}^n \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n}} \right]^2 \left| \frac{x}{\lambda_n} - a_{v_n} \right| \sqrt{1 - a_{v_n}^2}. \quad (11) \end{aligned}$$



Но в силу теоремы 1 первая сумма (11) не превышает

$$C \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right).$$

С другой стороны, благодаря (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{M_n}{n^2} \sum_{v=1}^n \left[ \frac{T_n \left( \frac{x}{\lambda_n} \right)}{\frac{x}{\lambda_n} - a_{vn}} \right]^2 \left| \frac{x}{\lambda_n} - a_{vn} \right| \sqrt{1 - a_{vn}^2} &\leq \\ &\leq \frac{M_n}{n} \left( 8 + \frac{\pi}{4} \ln n \right) \leq C \frac{M_n \ln n}{n}, \quad (n \geq 2). \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема доказана.

Отметим, что если при доказательстве теоремы 4 предполагать, что

$$M_n = \frac{n}{\ln n} \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right),$$

то получим

$$\left| H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| = C \omega \left( \frac{\lambda_n \ln n}{n} \right), \quad (n \geq 2).$$

**Теорема 5.** Если функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы 2, то на любом конечном отрезке  $[-A, A]$  ( $A > 0$ ) для  $\lambda_n > A$  имеет место

$$\left| H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n \delta_n} \right) + C \frac{M_n \ln n}{n},$$

где  $\lambda_n = \ln^{m+1}(n)$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 2 первая сумма (11) не превышает  $\omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n \delta_n} \right)$ . Вторая сумма (12) оценивается как и в теореме 4. Если при доказательстве теоремы 5 предполагать, что

$$M_n = \frac{\lambda_n \ln n}{\delta_n},$$

то получим

$$\left| H_n \left[ f(\lambda_n t); \frac{x}{\lambda_n} \right] - f(x) \right| \leq \omega(\delta_n)_A + O \left( \frac{\lambda_n \ln^2 n}{n \delta_n} \right).$$

Аналогично теореме 5 можно сформулировать теорему для функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.

Все эти результаты получены также для функций двух переменных, определенных во всей плоскости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джафаров А. С. Тр. ИММ АН Азерб. ССР, 11 (X), 1963.
2. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., 1949.
3. Сюй Л. С., Ван Ж. Х. ДАН СССР, 156 (2), 1964.
4. Hsu L. S. Acta Math. Acad. Sci. Hung., XV (3—4), 1964.

И. М. Насанов

Бүтүн охда кэсилмэжэн функцијанын Ермит—Фејер интерполјасија  
чоххэддилери васитэси илэ јахынлашма тэртиби наггында

ХҮЛАСЭ

1, 2 вэ 3 теоремлэриндэ бүтүн охда кэсилмэжэн функцијаларын Ермит—Фејер чоххэддилери, 4 вэ 5 теоремлэриндэ исэ (10) шэртлэрини өдэјэн чоххэддилэр васитэсилэ јахынлашмасы тэртиби өјрөнилик.



С. С. КАСЫМОВА

## КВАЗИНЕЕКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА НАД АЛГЕБРОЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ МАТРИЦ

В работе определяются квазинеевклидовы пространства над алгеброй вещественных матриц  $m$ -го порядка, получающиеся предельными переходами из неевклидовых пространств над этой алгеброй, определенных М. А. Джавадовым [1]. Эти пространства являются обобщениями вещественных квазинеевклидовых пространств  ${}^{l_0}S_n^p(M^m)$  [2].

### § 1. Определение квазинеевклидова пространства

Будем называть  $n$ -мерным квазинеевклидовым пространством  ${}^{l_0}S_n^p(M^m)$  над алгеброй  $M^m$  вещественных матриц  $m$ -го порядка  $n$ -мерное проективное пространство  $P_n(M^m)$ , определенное М. А. Джавадовым [3], в котором определен эрмитов конус второго порядка индекса  $l_0$  с уравнением

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a = 0, \quad (1)$$

где  $a, b, \dots = 0, 1, \dots, l_0, \dots, p$ ,  $\varepsilon_a = -1$ , где  $0 \leq a < l_0$ ,  $\varepsilon_a = 1$ , где  $l_0 \leq a \leq p$ .

Все касательные гиперплоскости которого проходят через  $(n-p-1)$ -мерную плоскость  $x^a = 0$  и эрмитова квадрика индекса  $l_1$  на этой плоскости с уравнением

$$\sum_u \varepsilon_u \bar{x}^u x^u = 0, \quad (2)$$

где  $u, v, \dots = p+1, p+2, \dots, l_1, \dots, n$ ,  $\varepsilon_u = -1$  при  $p+1 \leq u < l_1$ ,  $\varepsilon_u = 1$  при  $l_1 \leq u \leq n$ .

Совокупность поверхностей (1) и (2) будем называть абсолютном этого пространства. Плоскость  $x^a = 0$  будем называть абсолютной плоскостью пространства  ${}^{l_0}S_n^p(M^m)$ , эрмитов конус (1)—абсолютным конусом этого пространства, а эрмитову квадрику (2)—абсолютной квадрикой этого пространства. Уравнения (1) и (2) можно переписать в матричной форме в виде

$$\bar{X}_0 E_0 X_0 = 0 \quad (1')$$

$$\text{и} \quad \bar{X}_1 E_1 X_1 = 0, \quad (2')$$

где  $X_0$ —матрица с  $m$  столбцами и  $(p+1)m$  строками,  $X_1$ —с  $m$  столбцами и  $(n-p)m$  строками,  $E_0$ —диагональная матрица  $(p+1)m$ -го порядка, диагональные элементы  $e_{ii}$  которой при  $i = am + 1, am + 2, \dots, am + m$  равны числу  $\varepsilon_a$ , а  $E_1$ —диагональная матрица  $(n-p)m$ -го порядка, диагональные элементы  $e_{ii}$  которой при  $i = um + 1, um + 2, \dots, um + m$  равны числу  $\varepsilon_u$ . Пространство  ${}^{l_0}S_n^p(M^m)$ , совпадает с евклидовым пространством  ${}^lR_n(M^m)$ , рассмотренным в нашей работе [4].

В пространстве  ${}^{l_0}S_n^{p-1}(M^m)$  плоскость  $x^a = 0$  является точкой, квадрика (2) вырождается в пару точек, совпадающих с этой точкой, а конус (1) определяет метрику пространства, соответствующего пространству  ${}^lR_n(M^m)$  по принципу двойственности. Пространство  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$  совпадает с неевклидовым пространством  ${}^lS_n(M^m)$ , определенным М. А. Джавадовым [1], ( $L = l_0$ ,  $l_1$  в этом случае равно нулю). Если прямая, соединяющая две точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$ , не пересекается с абсолютной плоскостью, на этой прямой имеет место такая же геометрия, что и на прямых неевклидова пространства  ${}^lS_n(M^m)$ , поэтому будем называть такие прямые неевклидовыми.

Если прямая, соединяющая точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$ , пересекается с абсолютной плоскостью в одной точке, на этой прямой имеет место такая же геометрия, что и на прямых евклидова пространства  ${}^lR_n(M^m)$  [4], поэтому будем называть эти прямые евклидовыми. Так как в пространстве  $P_n(M^m)$  проективные координаты точек  $x^i$  определены с точностью до преобразования  $x^i \rightarrow x^i t$ , координаты  $x^i$  точек пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$ , не лежащих на абсолютном конусе, можно нормировать требованием, чтобы произведение  $\sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a = A$  имело бы наиболее простой вид. Так как матрица  $A$

симметрична ( $\bar{A} = A$ ), при преобразовании  $x^i \rightarrow x^i t$  матрица  $A$  преобразуется по закону  $A \rightarrow t A t$ . Так как всякую симметричную матрицу  $A$  таким преобразованием можно привести к диагональному виду ( $\eta_a \delta_a^a = \eta$ , где числа  $\eta_a$  равны  $\pm 1$ , мы можем нормировать координаты  $x^i$  точек пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$ , не лежащие на абсолютном конусе, условием

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a = \eta, \quad (3)$$

где  $\eta$ —диагональная матрица  $m$ -го порядка, диагональные элементы которой равны  $\pm 1$ . Условие (3) можно переписать в матричной форме в виде

$$\bar{X}_0 E_0 X_0 = \eta. \quad (3')$$

Если координаты  $x^i$  и  $x^i t$  нормированы условием (3), то матрица  $t$  должна удовлетворять условию  $\bar{t} \eta t = \eta$ , т. е. Матрица  $t$  является ортогональной матрицей индекса 0 в случае, когда  $\eta$ —единичная матрица и ненулевого индекса  $l$  в общем случае. Можно показать, что квазинеевклидовы пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$  можно получить предельным переходом из неевклидовых пространств  ${}^lS_n(M^m)$ . Для этого достаточно показать, что абсолют пространства  ${}^{l_1}S_n^p(M^m)$  можно получить предельным переходом из абсолют пространства  ${}^lS_n(M^m)$ .



## § 2. Метрические инварианты

Полярной гиперплоскостью точки  $x(x^i)$  относительно абсолютного конуса (1) является гиперплоскость с тангенциальными координатами

$$u_a = \varepsilon_a \bar{x}^a, \quad u_u = 0.$$

Если точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$  лежат на неевклидовых прямых, для этих точек и их полярных гиперплоскостей можно определить двойное отношение:

$$M_0 = \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{y}^a y^a \right)^{-1} \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{y}^a x^a \right) \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a x^a \right)^{-1} \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a y^a \right) = \\ = (\bar{Y}_0 E_0 Y_0)^{-1} (Y_0 E_0 X_0) (X_0 E_0 X_0)^{-1} (\bar{X}_0 E_0 Y_0), \quad (4)$$

где матрицы  $X_0$  и  $E_0$  имеют тот же смысл, что и в формуле (1').

Двойное отношение (4) двух точек, координаты которых нормированы условием (3), и их полярных гиперплоскостей является матрицей

$$M_0 = \eta \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{y}^a x^a \right) \eta \left( \sum_a \varepsilon_a \bar{x}^a y^a \right) = \eta (\bar{Y}_0 E_0 X_0) \eta (\bar{X}_0 E_0 Y_0). \quad (5)$$

Матрица (4) определяется с точностью до подобия

$$M_0' = t^{-1} M_0 t.$$

Если прямая, проходящая через точки  $x(x^i)$  и  $y(y^i)$ , произвольная, точка которой координаты  $z^i = x^i + y^i t$ , пересекается с абсолютной плоскостью, то полагая  $z^i = 0$ , мы матрицу  $t$  всегда можем выбирать таким образом, чтобы имело место равенство  $x^a = y^a$ . В этом случае матрица  $M_0$  является единичной, поэтому составим матрицу

$$M_1 = \sum_u \varepsilon_u (\bar{x}^u - \bar{y}^u)(x^u - y^u) = (\bar{X}_1 - \bar{Y}_1) E_1 (X_1 - Y_1), \quad (6)$$

где матрицы  $X_1$  и  $E_1$  имеют тот же смысл, что в формуле (2').

При умножении координаты  $x^i$  справа на матрицу  $t$  матрица  $M_1$  преобразуется по закону

$$M_1' = \bar{t} M_1 t. \quad (7)$$

Так как матрицы  $\eta M_0$  и  $M_1$  симметричны, их можно привести к диагональному виду. Собственные числа матрицы  $\eta M_0$  будем называть метрическими инвариантами двух точек, лежащих на неевклидовой прямой, а собственные числа матрицы  $M_1$  будем называть метрическими инвариантами двух точек, лежащих на эвклидовой прямой. Кроме этих двух случаев возможен случай, когда матрица  $\eta M_0$  имеет  $m - q$  собственных чисел, отличных от 1 и  $q$  собственных чисел, равных 1. В этом случае собственные числа матрицы  $\eta M_0$ , отличные от 1, являются неевклидовыми метрическими инвариантами данных точек и для этих точек можно определить также  $q$  эвклидовых метрических инвариантов.

## § 3. Вещественная интерпретация квазиевклидова пространства

В работе [3] М. А. Джавадов доказал, что проективное пространство  $P_n(M^m)$  допускает вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(m - 1)$ -мерных плоскостей пространства  $P_{nm+m-1}$ , причем  $x(x^i)$  пространства  $P_n(M^m)$  с координатами  $x^i = x_{\beta}^{ai}$  изображается  $(m - 1)$ -

мерной плоскостью пространства  $P_{nm+m-1}$ , определяемой точками  $X_{\beta}$  с координатами  $X_{\beta}^{ai} = x_{\beta}^{ai}$ .

Полярное преобразование относительно эрмитова конуса (1) пространства  $P_n(M^m)$ , имеющее вид

$$u_a = \varepsilon_a x^a, \quad u_u = 0,$$

изображается в пространстве  $P_{nm+m-1}$  полярным преобразованием

$$U_{aa} = \varepsilon_{aa} X^{aa}, \quad U_{au} = 0 \quad (8)$$

относительно вещественного конуса индекса  $ml_0$ :

$$\sum_{aa} \varepsilon_{aa} (X^{aa})^2 = 0; \quad (9)$$

$$\varepsilon_{aa} = -1, \quad \text{где } 0 \leq aa < ml_0,$$

$$\varepsilon_{aa} = 1, \quad \text{где } ml_0 \leq aa \leq mp + m - 1,$$

а полярное преобразование абсолютной плоскости  $x^a = 0$  пространства  $P_n(M^m)$  относительно абсолютной квадрики (2), имеющее вид

$$u_u = \varepsilon_u \bar{x}^u,$$

изображается в пространстве  $P_{nm+m-1}$  полярным преобразованием

$$U_{au} = \varepsilon_{au} X^{au} \quad (10)$$

относительно вещественной квадрики индекса  $ml_1$ :

$$\sum_{au} \varepsilon_{au} (X^{au})^2 = 0; \quad (11)$$

$$\varepsilon_{au} = -1, \quad \text{где } mp + m - 1 \leq au < ml_1,$$

$$\varepsilon_{au} = 1, \quad \text{где } ml_1 \leq au \leq nm + m - 1,$$

на плоскости  $X^{aa} = 0$ .

Вещественный конус (9) и вещественная квадрика (11) составляют абсолют вещественного квазиевклидова пространства  ${}^{ml_0 ml_1} S_{nm+m-1}^{pm+q-1}$ . Тем самым мы показали, что квазиевклидово пространство  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  допускает вещественную интерпретацию в виде многообразия  $(m - 1)$ -мерных плоскостей квазиевклидова пространства  ${}^{ml_0 ml_1} S_{nm+m-1}^{pm+q-1}$  [5], не пересекающихся его абсолютной плоскостью.

Можно доказать, что неевклидовы и эвклидовы метрические инварианты двух точек пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  совпадают с неевклидовыми и эвклидовыми инвариантами, изображающими их  $(m - 1)$ -мерные плоскости пространства  ${}^{ml_0 ml_1} S_{nm+m-1}^{pm+q-1}$ , и две точки пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$ , лежащие на квазиевклидовой прямой, обладают  $m$ -метрическими инвариантами, из которых  $(k - m + 2)$  неевклидовых и  $(2m - k - 2)$  эвклидовых.

## § 4. Движения

Будем называть движениями квазиевклидова пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  коллинеации этого пространства, сохраняющие метрические инварианты его точек. Очевидно, что эти коллинеации должны переводить в себя абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$ .

Если коллинеация

$$x^i = \sum_j A_j^i x^j \quad (12)$$

пространства  $P_n(M^m)$  переводит в себя абсолют пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$ , то из того, что эта коллинеация переводит в себя абсолютную плос-



кость  $x_a = 0$ , следует, что  $x^a = 0$ , т. е.  $A_j^a x^j = 0$  при  $j \geq p+1$ . Поэтому  $A_u^a = 0$ , т. е. все элементы матрицы  $(A_j^i)$ , находящиеся на пересечении первых  $p+1$  строк и последних  $n-p$  столбцов, равны нулю. Обозначая матрицы  $(A_u^a) = U_1$ ,  $(A_a^u) = T$ ,  $(A_v^u) = U_2$ , мы можем записать коллинеацию (12), переводящую плоскость  $x^a = 0$  в себя, в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= U_1 X_1, \\ X_2 &= T X_1 + U_2 X_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Из того, что при изображении точки пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$   $(m-1)$ -мерными плоскостями пространства  ${}^{m l_0 m l_1} S_{nm+m-1}^{pm+m-1}$  метрические инварианты точек первого пространства изображаются метрическими инвариантами  $(m-1)$ -мерных плоскостей второго пространства, следует, что группы движений этих пространств изоморфны. Так как движения пространства  ${}^{m l_0 m l_1} S_{nm+m-1}^{pm+m-1}$  можно записать в виде

$$X^{aa} = \sum_{\gamma b} U_{\gamma b}^{aa} X^{\gamma b}, \quad (14)$$

$$X^{au} = \sum_{\gamma b} T_{\gamma u}^{au} X^{\gamma b} + \sum_{\gamma v} U_{\gamma v}^{au} X^{\gamma v},$$

о, если точка пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  с координатами  $x^i$  изображается  $(m-1)$ -мерной плоскостью пространства  ${}^{m l_0 m l_1} S_{nm+m-1}^{pm+m-1}$  с базисными точками  $X_1, \dots, X_m$ , движения (14) точек  $X_\beta$  имеют вид:

$$X_\beta^{aa} = \sum_{\gamma b} U_{\gamma b}^{aa} X_\beta^{\gamma b},$$

$$X_\beta^{au} = \sum_{\gamma v} T_{\gamma v}^{au} X_\beta^{\gamma b} + \sum_{\gamma v} U_{\gamma v}^{au} X_\beta^{\gamma v}. \quad (15)$$

Если мы обозначим матрицы  $m$ -го порядка  $(X_\beta^{aa})$  и  $(X_\beta^{au})$  при фиксированных  $a$  и  $u$  через  $x^a$  и  $x^u$ , матрицу  $m$ -го порядка  $(U_{\beta a}^{aa})$  при фиксированных  $a$  и  $b$  через  $U_b^a$ , матрицу  $m$ -го порядка  $(U_{\beta v}^{au})$  при фиксированных  $u$  и  $v$  через  $U_v^u$ , матрицу  $m$ -го порядка  $(T_{\beta a}^{au})$  при фиксированных  $u$  и  $a$  через  $T_a^u$  то формулы (15) можно переписать в виде:

$$x^a = \sum_b U_b^a x^b,$$

$$x^u = \sum_b T_b^u x^b + \sum_v U_v^u x^v. \quad (16)$$

Условие ортогональности индекса  $ml_0$  матрицы  $(U_{\beta b}^{aa})$ :

$$\sum_a \sum_b \varepsilon_{ab} U_{\beta a}^{aa} U_{\gamma c}^{aa} = \varepsilon_{\beta\gamma} \delta_{ab}, \quad c, \gamma \quad (17)$$

может быть записано в виде

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{U}_b^a U_c^a = \varepsilon_b \delta_{bc}, \quad c, \quad (18)$$

условия унитарности индекса  $l_0$  матрицы  $(U_b^a)$ , а условие ортогональности индекса  $ml_1$  матрицы  $(U_{\beta v}^{au})$ :

$$\sum_a \sum_u \varepsilon_{au} U_{\beta v}^{au} U_{\gamma w}^{au} = \varepsilon_{\beta\gamma} \delta_{vw}, \quad \gamma w \quad (19)$$

может быть записано в виде

$$\sum_u \varepsilon_u \bar{U}_v^u U_w^u = \varepsilon_v \delta_{vw}, \quad (20)$$

условия унитарности индекса  $l_1$  матрицы  $(U_v^u)$ , так как матрица  $(T_{\beta a}^{au})$  не связана никаким условием и  $(T_a^u)$  также не связана никаким условием.

Движения пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  образуют группу. Унитарная матрица  $U_1$  удовлетворяет условию (18), при  $b=c$  мы получаем  $p+1$  условие:

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{U}_b^a U_b^a = \varepsilon_b I. \quad (21)$$

Так как  $\bar{U}_b^a U_c^a$  — симметрическая матрица, зависящая от  $\frac{m(m+1)}{2}$

параметров, условие (21) равносильно  $\frac{(p+1)[m(m+1)]}{2}$  веществен-

ным условиям. При  $b \neq c$  мы получаем  $\frac{p(p+1)}{2}$  условия:

$$\sum_a \varepsilon_a \bar{U}_b^a U_c^a = 0. \quad (22)$$

Так как  $\bar{U}_b^a U_c^a$  — матрицы  $m$ -го порядка общего вида, условие (22) равносильно  $\frac{p(p+1)}{2} m^2$  вещественному условию. Поэтому матрица

$U_1$  зависит от  $\frac{(mp+m)(mp+m-1)}{2}$  параметров, что совпадает с

числом параметров вещественной ортогональной матрицы  $(U_{\beta a}^{aa})$   $(mp+m)$ -го порядка. Унитарная матрица  $U_2$  также зависит от  $\frac{(mn-pm)(nm-pm-1)}{2}$  параметров, что совпадает с числом пара-

метров вещественной ортогональной матрицы  $(U_{\beta v}^{au})$   $(nm-pm)$ -го порядка. С другой стороны, матрица  $T$  зависит от  $m^2(p+1)(n-p)$  параметров, поэтому группа движений пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$  зависит от  $\frac{(nm+m)(nm+m-1)}{2}$  параметров, что совпадает с числом парамет-

ров группы движений пространства  ${}^{m l_0 m l_1} S_{nm+m-1}^{pm+m-1}$ .

Можно показать, что движения (16) сохраняют метрические инварианты точек пространства  ${}^{l_0 l_1} S_n^p(M^m)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Джавадов М. А. „Уч. зап. АГУ“, 1957, № 4.
2. Яглом И. М., Розенфельд Б. А. и Ясинская Е. У. „Успехи матем. наук“, 1964, № 5.
3. Джавадов М. А. „Уч. зап. АГУ“, 1957, № 2.
4. Касимова С. С. „Уч. зап. АГУ“, 1966, № 2.
5. Розенфельд Б. А., Карпова Л. М. и Андреева Л. П. Метрические инварианты и коварианты пар плоскостей в квазиэллиптическом пространстве. Литовский матем. сборник, т. 4, № 2, 1964.
6. Розенфельд Б. А. „Успехи матем. наук“, т. 13, вып. 6 (34), 1958.







$\kappa_1$  и  $\kappa_2$  подчиняются ассоциированному закону течения и в криволинейных координатах выражаются через скорости прогиба  $w$  следующим образом [1]:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial S_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial w}{\partial S_2}, \\ \kappa_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial S_2^2} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial S_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В этих уравнениях  $S_1$  и  $S_2$  суть расстояния вдоль линий главных направлений 1 и 2, а  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — радиусы кривизны этих направлений:

$$\rho_1^{-1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial S_1}; \quad \rho_2^{-1} = \frac{\partial \varphi}{\partial S_2}, \quad (2)$$

где  $\varphi$  — угол между первым главным направлением (рис. 3) и осью  $x$ .

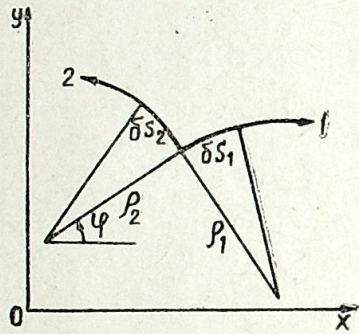


Рис. 3

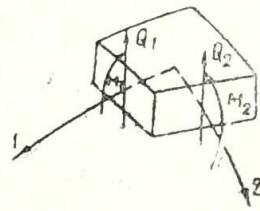


Рис. 4

Радиусы кривизны  $\rho_1$  и  $\rho_2$  удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \left( \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial S_2} \left( \frac{1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = 0,$$

а также

$$\frac{\partial^2}{\partial S_1 \partial S_2} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial S_1} = \frac{\partial^2}{\partial S_2 \partial S_1} - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial S_2}.$$

Так как  $S_1$  и  $S_2$  являются главными направлениями, то скорости кривизны  $\kappa_{1,2}$  обращаются в нуль, так что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial S_1 \partial S_2} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial w}{\partial S_1}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial S_2 \partial S_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial S_2}.$$

Учитывая эти выражения, из уравнений (1) находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \kappa_1}{\partial S_2} &= \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\rho_1}, \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial S_1} &= \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\rho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

На рис. 4 показаны положительные направления изгибающих моментов  $M_1$ ,  $M_2$  и перерезывающих сил  $Q_1$ ,  $Q_2$ , действующие на единицу длины элемента пластинки, образованного путем проведения нормальных поверхностей к главным направлениям. Для скорости прогиба  $w$  направление вверх будем считать положительным.  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial S_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial S_2} + \frac{Q_1}{\rho_2} + \frac{Q_2}{\rho_1} = p; \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial S_1} + \frac{M_1 - M_2}{\rho_2} + Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial S_2} + \frac{M_2 - M_1}{\rho_1} + Q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Критерий минимального веса [1] принимает вид

$$\frac{D}{h} = \frac{M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2}{h} = \text{const.} \quad (6)$$

Для удобства вычислений примем постоянную в (6) равной  $\kappa_0 H$  ( $\kappa$  — положительная постоянная). По аналогии с круглой пластинкой [2] предположим, что напряженное состояние пластинки характеризуется точкой  $C$  шестиугольника Треска.

Для точки  $C$   $M_2 = 0$ ,  $M_1 = -M_0$ . Скорости кривизны должны удовлетворять неравенству

$$-\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq 0. \quad (7)$$

Из условия (6) находим, что

$$\kappa_1 = -\kappa. \quad (8)$$

Из (3) и (8) следует, что

$$\frac{\kappa_2 + \kappa}{\rho_1} = 0. \quad (9)$$

Так как  $\kappa_2$  положительная величина, а  $\kappa$  — положительная постоянная по определению, то последнее уравнение показывает, что  $\rho_1 = \infty$  и линии главных моментов в направлении  $S_1$  суть прямые.

Как указывалось в работе [1], ортогональная сетка траекторий главных моментов для точки  $C$  состоит из семейств прямых линий и параллельных кривых. Для этой точки возьмем новую систему координат (рис. 5). Одну из кривых линий главных моментов возьмем за основную и расстояние от этой линии вдоль семейства прямых обозначим через  $\alpha$ . В качестве координат используем отклонение  $\varphi$  и расстояние  $\alpha$ . Как видно из рис. 5,

$$dS_1 = d\alpha, \quad dS_2 = \rho_2 d\varphi, \quad \rho_2 = \rho + \alpha, \quad (10)$$

где  $\rho = \rho(\varphi)$  — радиус кривизны основной кривой  $\alpha = 0$ . Используя эти соотношения, а также (1) и (2), получаем простое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = -\kappa, \quad (11)$$

откуда

$$w = -\frac{1}{2} \kappa \alpha^2 + \alpha f_1(\varphi) + f_2(\varphi). \quad (12)$$

Так как скорость прогиба и ее нормальная производная равны нулю на внешнем контуре, то последний является линией главной (нуле-

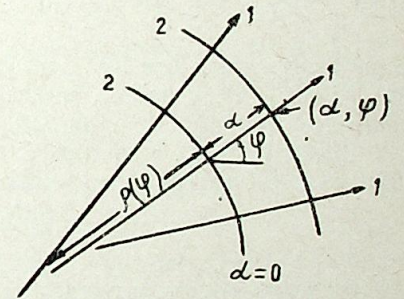


Рис. 5



вой) скорости кривизны [1]. Пусть внешний контур пластинки  $\Gamma$  будет линией  $\alpha = 0$ . Тогда, учитывая граничные условия:

$$w \Big|_{\Gamma} = \frac{dw}{d\alpha} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (13)$$

из (12) получим

$$w = -\frac{1}{2} \kappa \alpha^2. \quad (14)$$

Условие (7) удовлетворяется при  $-\frac{\alpha}{\rho_2} \leq 1$ . Таким образом, радиус кривизны внешнего контура не должен быть меньше чем вдвое расстояния  $(-\alpha)$  между точками  $(x, y)$  внутреннего и  $(X, Y)$  внешнего контуров. Пусть уравнение внешнего контура  $\Gamma$  будет

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1, \quad (15)$$

а уравнение внутреннего контура  $\gamma$ , который подобен внешнему,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (16)$$

Тогда в любой точке  $(\xi, \eta)$  пластинки

$$w = -\frac{1}{2} \kappa [(X - \xi)^2 + (Y - \eta)^2]. \quad (17)$$

Так как линия, соединяющая точку  $(x, y)$  с точкой  $(X, Y)$  нормальна к  $\Gamma$ , то

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{YA^2}{XB^2}. \quad (18)$$

Таким образом, для заданного  $(x, y)$   $X$  и  $Y$  могут быть определены из (15) и (18), а затем, подставляя эти значения в (16), можно найти скорость прогиба  $w$  в любой точке.

Имея в виду, что для  $C$   $M_1 = -M_0$ ,  $M_2 = 0$ , где  $M_0 = \sigma_0 hH$  есть полный пластический изгибающий момент, из (5) находим

$$Q_1 = \frac{\partial M_0}{\partial \alpha} + \frac{M_0}{\rho_2}, \quad Q_2 = 0. \quad (19)$$

Подставляя эти выражения в (4), получим

$$M_0 = C(\varphi) + \frac{D(\varphi)}{\rho_2} + \int \rho_2 p d\alpha - \frac{1}{\rho_2} \int \rho_2^2 p d\alpha. \quad (20)$$

На внутреннем контуре пластинки  $M_1 = 0$ . Тогда

$$M_0 = \frac{1}{6} \rho (\rho_2^2 - \rho_3^2) + D(\varphi) \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_3} \right), \quad (21)$$

где  $\rho_3 = \rho + \alpha_\gamma$  есть значение  $\rho_2$  на внутреннем контуре.

Для удобства возьмем

$$X = A \cos \theta, \quad Y = B \sin \theta. \quad (22)$$

Тогда угол наклона нормали  $\varphi$  в точке  $X, Y$  будет

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \theta. \quad (23)$$

Радиус кривизны  $\rho(\varphi)$  внешнего контура  $\Gamma$  будет

$$\rho = \frac{A^2 B^2}{(A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (24)$$

Значение  $\alpha$  на внутреннем контуре  $\gamma$  будет

$$\alpha_\gamma = -\frac{A(A-a)}{(A^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \quad (25)$$

Пусть  $\theta_n$ —угол наклона нормали на внутреннем контуре. Так как  $Q_1$  и  $Q_2$  удовлетворяют уравнениям (19), то

$$Q_n = Q_1 \cos(\theta_n - \varphi) = \frac{\partial M_0}{\partial \alpha} \cos(\theta_n - \varphi). \quad (26)$$

На внутреннем контуре  $Q_n = 0$ . Тогда из (21) находим

$$h = \frac{M_0}{\sigma_0 H} = \frac{p}{6 \sigma_0 H} \frac{\rho_2^3 + 2\rho_3^3 - 3\rho_2 \rho_3^2}{\rho_2}. \quad (27)$$

В частности, если внешний и внутренний контуры пластинки являются круглыми ( $A = B$ ,  $a = b = \rho_3$ ), то

$$w = -\frac{1}{2} \kappa (B - \rho_2)^2, \\ h = \frac{p}{6 \sigma_0 H} \frac{\rho_2^3 + 2a^3 - 3a^2 \rho_2}{\rho_2}.$$

Эти результаты совпадают с соответствующими результатами для круглой кольцевой пластинки, зажатой по внешнему контуру [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shield R. T. Plate design for minimum weight. Quart. Appl. Math., 1960, 18, 131–144.
2. Шамисв Ф. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1963, № 2.

Ф. Н. Шамиев

#### Минимум чэкили хэлгэви эллиптик лөвхэлэр лэжнэ етмэк хаггында

Мэгалэдэ оха нэзэрэн симметрик олмажан минимум чэкили мұх-тәлиф ләлэ лөвхэлэр ләжнэ етмэк мәсәләси ашдырылып. Лөвхәнин материалынын идеал-пластик, Тресканын пластикли шәртинә вә онунла әләгәдар олан пластик ахма гануна табе олдуғу гәбул едилір.

Даирәви хэлгәви лөвхэлэр үчүн мұәллиф тәрәфиндән габаглар алынмыш хәлл [2] бу мәсәләнин хәллиндән хусуси хал кими алыныр.



Ш. М. БАХЫШЕВ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В настоящей статье дается приближенное решение задачи о температурном поле, возникающем в тонкой цилиндрической оболочке длиной  $2L$  вследствие неравномерного нагрева, в предположении, что оболочка изотропна, температуры окружающих сред  $T_1$  и  $T_2$  изменяются вдоль оси цилиндра, причем могут также изменяться и во времени. Нахождение температуры  $T(r, z, t)$  цилиндрической оболочки сводится к решению уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1, 1)$$

при граничных условиях:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -h_1(t) [T_1(z, t) - T(r, z, t)], \quad r = a; \quad (1, 2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = h_2(t) [T_2(z, t) - T(r, z, t)], \quad r = b,$$

$$a < b$$

и начальном условии

$$T(r, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1, 3)$$

На торцах в случае симметричного нагрева относительно плоскости  $z = 0$  примем условия:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \pm h_3(t) [T_3(r, t) - T(r, z, t)], \quad (1, 4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (1, 4')$$

которые можно удовлетворить лишь в интегральной форме. В силу симметрии относительно плоскости  $z = 0$  будем рассматривать только часть оболочки  $0 \leq z \leq L$ .

Решение уравнения (1, 1) будем искать в виде квадратичного трехчлена по степеням  $r - a$ , т. е.

$$T(r, z, t) = \varphi_0(z, t) + \varphi_1(z, t)(r - a) + \varphi_2(z, t)(r - a)^2, \quad (1, 5)$$

где функции  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  подлежат определению. Представление (1, 5) дает хорошее совпадение с опытом для тонких оболочек. Так как

оболочка тонкая, то  $r$  мало изменяется по толщине, поэтому осредним в уравнении (1, 1) множитель  $\frac{1}{r}$  по толщине оболочки:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \varepsilon.$$

В результате (1, 1) перейдем в следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (1, 1')$$

Подставляя (1, 5) в (1, 1) и сравнивая коэффициенты при свободных членах, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + 2\varphi_2 + \varepsilon\varphi_1 = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}. \quad (1, 6)$$

Уравнение (1, 6) можно рассматривать как уравнение теплопроводности для тонкой стенки. Для определения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  подставим (1, 5) в граничные условия (1, 2).

Тогда функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  выразятся через  $\varphi_0$  в виде:

$$\varphi_1 = h_1(\varphi_0 - T_1); \quad \varphi_2 = -\alpha\varphi_0 + \beta, \quad (1, 7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{h_1[1 + h_2(b-a)] + h_2}{(b-a)[2 + h_2(b-a)]}; \quad \beta = \frac{h_1 T_1[1 + h_2(b-a)] + h_2 T}{(b-a)[2 + h_2(b-a)]}. \quad (1, 8)$$

Подставляя (1, 7) в (1, 6) получим

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \alpha\varphi_0 + \gamma = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad (1, 9)$$

$$\text{где} \quad \alpha = 2\alpha - \varepsilon h_1, \quad \gamma = 2\beta - \varepsilon h_1 T_1. \quad (1, 10)$$

Таким образом, решение поставленной нами задачи свелось к решению уравнения (1, 9). Из (1, 3), (1, 5) видно, что начальное условие для функции  $\varphi_0(z, \varepsilon)$  будет иметь вид

$$\varphi_0(z, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1, 3')$$

Из (1, 5) и (1, 7) получим следующую формулу:

$$T(r, z, t) = \varphi_0(z, t)[1 + h_1(t)(r-a) - \alpha(t)(r-a)^2] - h_1(t)T_1(z, t)(r-a) + \beta(z, t)(r-a)^2. \quad (1, 11)$$

Таким образом, зная функцию  $\varphi_0(z, t)$ , мы можем вычислить температуру по формуле (1, 11). А функция  $\varphi_0$  определяется из уравнения (1, 9) при помощи условий (1, 3'), (1, 4) и (1, 4').

2. Стационарный нагрев оболочки.

А. Возьмем частный случай симметричного нагрева бесконечной цилиндрической оболочки, приняв  $h_1, h_2 = \text{const}, T_1 = 0$ ;

$$T_2(z) = A \left( \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right), \quad (2, 1)$$

где  $A, q, p$  — постоянные, которые определяют вид температуры. Чтобы  $T_2(z)$  была положительной величиной, должно выполняться неравенство  $p > q$ . Кроме этого, предположим  $q \neq \sqrt{\kappa}, p \neq \sqrt{\kappa}$ .

В этом случае уравнение (1, 9) имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} - \alpha\varphi_0 + \gamma = 0. \quad (2, 2)$$



Из (2, 1), (1, 11) и (1, 4) видно, что условие симметрии для  $T(r, z)$  приводит к условию для функции  $\varphi_0(z)$ :

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (2, 3)$$

Из (1, 10) и (2, 1) будет

$$\gamma(z) = A\lambda \left( \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right), \quad \text{где } \lambda = \frac{2h_2}{(b-a)[2+h_2(b-a)]}.$$

Подставляя это значение  $\gamma(z)$  в (2, 2), получим

$$\frac{d^2\varphi_0}{dz^2} - \kappa\varphi_0 = -A\lambda \left( \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right). \quad (2, 4)$$

Частным решением этого уравнения является

$$\tilde{\varphi}_0(z) = A\lambda \left( \frac{1}{\kappa - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{\kappa - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} \right),$$

а общим, с учетом ограниченности функции  $\varphi_0(z)$  на бесконечности и в силу условий симметрии (2, 3), будет

$$\varphi_0(z) = A\lambda \left[ \frac{p^2 - q^2}{(\kappa - p^2)(\kappa - q^2)} \frac{e^{-\sqrt{\kappa}z}}{\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{\kappa - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{\kappa - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} \right]. \quad (2, 5)$$

Подставляя (2, 5) в (1, 11), получим искомую температуру:

$$T(r, z) = A\lambda \left[ \frac{p^2 - q^2}{(\kappa - q^2)(\kappa - p^2)} \frac{e^{-\sqrt{\kappa}z}}{\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{\kappa - q^2} \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{1}{\kappa - p^2} \frac{e^{-pz}}{p} \right] \cdot [1 + h_1(r-a) - \alpha(r-a)^2] + \frac{Ah_2(r-a)^2}{(b-a)[2+h_2(b-a)]} \left( \frac{e^{-qz}}{q} - \frac{e^{-pz}}{p} \right).$$

В. Теперь рассмотрим конечную оболочку длиной  $2L$ , симметрично нагреваемую относительно плоскости  $z=0$  при граничных условиях:  $h_1, h_2 = \text{const}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r} &= h_1 T, & 0 \leq z \leq L, & \quad r = a, \\ T_l &= T_0 = \text{const}, & 0 \leq z \leq l, & \quad r = b, \\ \frac{\partial T_l}{\partial r} &= -h_2 T_L, & l \leq z \leq L, & \quad r = b, \\ \frac{\partial T_L}{\partial z} &= 0, & z &= L, \end{aligned} \quad (2, 6)$$

где через  $T_l$  и  $T_L$  обозначены температуры на участках  $0 \leq z \leq l$  и  $l \leq z \leq L$ , соответственно. Кроме условий (2, 6), при  $z=l$  должны выполняться условия равенства температур и тепловых потоков:

$$\begin{aligned} T_l &= T_L & \text{при } z=l, \\ \frac{\partial T_L}{\partial z} &= \frac{\partial T_l}{\partial z} & \text{при } z=l. \end{aligned} \quad (2, 7)$$

Ищем решение для  $T_l$  и  $T_L$  в виде

$$T_l = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)(r-a) + \varphi_2(z)(r-a)^2, \quad (2, 8)$$

$$T_L = \psi_0(z) + \psi_1(z)(r-a) + \psi_2(z)(r-a)^2. \quad (2, 9)$$

Нетрудно видеть, что для определения  $T_l$  и  $T_L$  мы приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} - \kappa_l \varphi_0 + \gamma = 0, \quad (2, 10)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \kappa_L \psi_0 = 0. \quad (2, 11)$$

Здесь  $\kappa_l = 2\alpha_l - \varepsilon h_1$ ,

$$\alpha_l = \frac{1 + h_1(b-a)}{(b-a)^2}, \quad \gamma = \frac{2T_0}{(b-a)^2}. \quad (2, 12)$$

Как видно из (1, 4), (1, 4'), (1, 5) и (2, 6), условие симметрии для температуры  $T$  приводит к условию для функции  $\varphi_0(z)$ :

$$\frac{d\varphi_0}{dz} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (2, 13)$$

Аналогичное рассуждение приводит к условию для функции  $\varphi_0(z)$ .

$$\frac{d\psi_0}{dz} = 0 \quad \text{при } z = L. \quad (2, 14)$$

Решением уравнения (2, 10) при условии (2, 13) будет

$$\varphi_0(z) = 2D \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_l} z + \frac{\gamma}{\kappa_l}, \quad (2, 15)$$

а уравнения (2, 11) при условии (2, 14)

$$\psi_0(z) = C \left[ e^{-\sqrt{\kappa_L} z} + e^{-\sqrt{\kappa_L}(2L-z)} \right], \quad (2, 16)$$

где  $D$  и  $C$  — произвольные постоянные. Температуры, соответственно, на участках  $0 \leq z \leq l$  и  $l \leq z \leq L$  будут:

$$T_l(r, z) = \left( 2D \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_l} z + \frac{\gamma}{\kappa_l} \right) [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] + \beta_l(r-a)^2, \quad (2, 17)$$

$$T_L(r, z) = C \left[ e^{-\sqrt{\kappa_L} z} + e^{-\sqrt{\kappa_L}(2L-z)} \right] [1 + h_1(r-a) - \alpha_L(r-a)^2].$$

Чтобы определить постоянные  $D$  и  $C$ , мы имеем условия (2, 7). Причем эти условия можно выполнить лишь в интегральной форме. Осредняя эти условия по площади поперечного сечения, получим:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^{2\pi} C \left[ e^{-\sqrt{\kappa_L} l} + e^{-\sqrt{\kappa_L}(2L-l)} \right] [1 + h_1(r-a) - \alpha_L(r-a)^2] r dr d\theta = \\ = \int_a^b \int_0^{2\pi} \left\{ \left( 2D \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_l} l + \frac{\gamma}{\kappa_l} \right) [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] + \right. \\ \left. + \beta_l(r-a)^2 \right\} r dr d\theta - \int_a^b \int_0^{2\pi} C \sqrt{\kappa_L} \left[ e^{-\sqrt{\kappa_L} l} - e^{-\sqrt{\kappa_L}(2L-l)} \right] [1 + \\ + h_1(r-a) - \alpha_L(r-a)^2] r dr d\theta = \\ = \int_a^b \int_0^{2\pi} 2D \sqrt{\kappa_l} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa_l} l [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] r dr d\theta. \end{aligned}$$



Отсюда определяются  $D$  и  $C$ :

$$D = -\frac{T_0}{2z_l(b-a)^2} \frac{n(2\mu - \omega \varepsilon h_1)}{\left(n \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)};$$

$$C = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l}{(\mu - \alpha_L \omega) \left(n \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)},$$

где введены обозначения:

$$\mu = \frac{b^2 - a^2}{2} + h_1 \left[ \frac{a^3}{6} + b^2 \left( \frac{b}{3} - \frac{a}{2} \right) \right],$$

$$\omega = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{12} - ab^2 \left( \frac{2b}{3} - \frac{a}{2} \right),$$

$$m = e^{-\sqrt{z_l} l} + e^{-\sqrt{z_l} (2L-l)}, \quad n = e^{-\sqrt{z_l} l} - e^{-\sqrt{z_l} (2L-l)}.$$

Подставляя  $D$  и  $C$  в (2, 15) и (2, 16), соответственно, определяем функции  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$ :

$$\varphi_0(z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \left[ 2 - \frac{n(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(n \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right];$$

$$\psi_0(z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l \left[ e^{-\sqrt{z_l} z} + e^{-\sqrt{z_l} (2L-z)} \right]}{(\mu - \alpha_L \omega) \left(n \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)}.$$

Таким образом, температура оболочки на участках  $0 \leq z \leq l$  и  $l \leq z \leq L$  соответственно будет:

$$T_l(r, z) = \frac{T_0}{(b-a)^2} \left\{ \frac{1}{z_l} \left[ 2 - \frac{n(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(n \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] + \beta_l(r-a)^2 \right\};$$

$$T_L(r, z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l \left[ e^{-\sqrt{z_l} z} + e^{-\sqrt{z_l} (2L-z)} \right]}{(\mu - \alpha_L \omega) \left(n \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + m \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \times$$

$$\times [1 + h_1(r-a) - \alpha_L(r-a)^2].$$

Если принять условие:  $T_L = 0$  при  $z = L$ , то аналогичным путем получим

$$\varphi_0(z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \left[ 2 - \frac{m(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(m \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + n \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right];$$

$$\psi_0(z) = \frac{T_0}{\alpha_l(b-a)^2} \frac{(2\eta - \varepsilon \omega h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l \left[ e^{-\sqrt{z_l} z} - e^{-\sqrt{z_l} (2L-z)} \right]}{(\mu - \alpha_L \omega) \left(m \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + n \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)},$$

а соответствующие температуры будут:

$$T_l(r, z) = \frac{T_0}{(b-a)^2} \left\{ \frac{1}{z_l} \left[ 2 - \frac{m(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(m \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + n \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] + \beta_l(r-a)^2 \right\};$$

$$T_L(r, z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l \left[ e^{-\sqrt{z_l} z} - e^{-\sqrt{z_l} (2L-z)} \right]}{(\mu - \alpha_L \omega) \left(m \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + n \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \times$$

$$\times [1 + h_1(r-a) - \alpha_L(r-a)^2].$$

Для бесконечной цилиндрической тонкой оболочки эти функции будут:

$$\varphi_0(z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \left[ 2 - \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(\operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right];$$

$$\psi_0(z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l \cdot e^{-\sqrt{z_l} z}}{(\mu - \alpha \omega) \left(\sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)}.$$

Величины  $\alpha, z$  с опущенным индексом  $L$  соответствуют бесконечности оболочки. Таким образом, температуры на конечном и бесконечном участках соответственно будут:

$$T_l(r, z) = \frac{T_0}{(b-a)^2} \left\{ \frac{1}{z_l} \left[ 2 - \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{ch} \sqrt{z_l} z}{(\mu - \alpha_l \omega) \left(\operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + \sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \right] \times \right.$$

$$\left. \times [1 + h_1(r-a) - \alpha_l(r-a)^2] + \beta_l(r-a)^2 \right\};$$

$$T_L(r, z) = \frac{T_0}{z_l(b-a)^2} \frac{(2\mu - \omega \varepsilon h_1) \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l e^{-\sqrt{z_l} z}}{(\mu - \alpha \omega) \left(\sqrt{\frac{z_l}{z_l}} \operatorname{ch} \sqrt{z_l} l + \operatorname{sh} \sqrt{z_l} l\right)} \times$$

$$\times [1 + h_1(r-a) - \alpha(z-a)^2].$$

Рассмотренный стационарный случай показывает, что метод, изложенный в п. 1, может быть использован для вычисления температуры в цилиндрических оболочках. Надо отметить, что чем тоньше оболочка, тем точнее будет полученный результат. Решение такого класса можно использовать при расчетах температурных напряжений, возникающих в процессе сварки двух цилиндрических оболочек по торцам, при разработке режимов снятия остаточных напряжений, возникающих в оболочках в процессе сварки и т. д.

Полученные решения приближенно удовлетворяют уравнению теплопроводности, точно — граничным условиям на боковых поверхностях и на торцах, в интегральной форме — на участках сопряжения.

В заключение выражаю благодарность проф. В. И. Даниловской за постановку задачи и ценные советы.



## Сонлу цилиндрик өртүкдө температурун тә'јини

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә цилиндрик өртүкдә температурун тә'јини верилир. Өртүк изотроп вә назик көтүрүлүр. Температур функцијасы  $r - a$ -ја нәзәрән үчһәдлн полином шәклиндә ахтарылыр.

$$T(r_1, z_1, t) = \varphi_0(z_1, t) + \varphi_1(z_1, t)(r - a) + \varphi_2(z_1, t)(r - a)^2$$

Бурада  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  вә  $\varphi_2$  функцијалары ахтарылыр.

Гојулмуш мәсәләнин һәлли  $\varphi_0(z_1, t)$  функцијасына нәзәрән алынмыш икитәркибли хусуси төрәмәли дифференциал тәнлијин һәллине (назик тәбәгәнин истиликкечирмә тәнлијинә) кәтирилир. Хусуси һал олараг өртүјүн стационар ғыздырылмасына хусуси диггәт јетирилмишдир.

Г. Г. АЛИЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОЛЬЦА  
АРМИРОВАННОГО ГИБКОЙ СВЯЗЬЮ

В статье дается решение задачи об устойчивости кольца при натяжении армирующего троса, причем предполагается, что сила трения между тросом и оболочкой отсутствует.

Постановка задачи. Рассмотрим однородную изотропную цилиндрическую оболочку единичной длины, которая в цилиндрическом слое, расположенном на расстоянии  $z_0$  от срединной поверхности, армирована гибким тросом (рис.). Предполагаем, что трос взаимодействует с оболочкой без трения. Пусть трос натянут силой  $P$ . Начальное усилие в кольце (до потери устойчивости) от действия натяжения троса будет

$$N_0 = P, \quad (1)$$

причем оси  $y$ ,  $z$  направлены по окружности и по радиусу, соответственно.

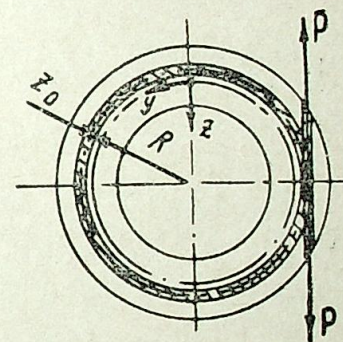
Вариационные уравнения устойчивости цилиндрического кольца примут вид (1):

$$\begin{cases} \frac{\delta Q}{R} = \frac{d(\delta N)}{dy}, \\ \frac{d(\delta Q)}{dy} + \frac{\delta N}{R} + N_0 z - \delta q_z = 0, \\ \frac{d(\delta M)}{dy} = R \frac{d(\delta N)}{dy}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\delta N$ ,  $\delta Q$  — приращения осевого и перерезывающего усилий, а  $\delta M$  — приращение момента относительно центра,  $R$  — радиус кривизны срединной поверхности,  $z = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$  — изменение кривизны срединного слоя,

$v$  — перемещение по окружности,

$w$  — прогиб,





$a \delta q_z$  — нормальная составляющая давления троса на кольцо в деформированном состоянии.

Зависимость между  $\delta q_z$  и силой натяжения  $P$  будет иметь вид

$$\delta q_z = P \cdot \frac{1}{1 - \frac{2z_0}{R}}. \quad (3)$$

Систему (2) с учетом (1) и (3) можно свести к одному разрешающему уравнению относительно прогиба  $w$ . Он примет вид

$$R^2 \frac{d^5 w}{dy^5} + 2 \frac{d^3 w}{dy^3} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{dw}{dy} = \frac{1}{D} P \frac{2z_0}{R - 2z_0} \left[ R^2 \frac{d^3 w}{dy^3} + \frac{dw}{dy} \right]. \quad (4)$$

Примем для  $w$  выражение

$$w = f \sin \frac{ny}{R}, \quad (5)$$

где  $n$  — число полных волн, образующихся по окружности. При  $n = 1$  получим перемещение кольца как твердого тела. Исключая этот случай, примем  $n \geq 2$ . Подставляя (5) в (4) и считая  $f \neq 0$ , приходим к следующей зависимости:

$$P = - \frac{D}{R^2} \cdot \frac{R - 2z_0}{2z_0} (n^2 - 1). \quad (6)$$

Минимальное критическое натяжение троса  $P_{кр.}$  соответствует двум волнам по окружности ( $n = 2$ ):

$$P_{кр.} = - \frac{3D}{R^2} \cdot \frac{R - 2z_0}{2z_0}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что для всех  $z_0 > 0$  (оболочка армируется в цилиндрическом слое расположенном ниже срединной поверхности) кольцо всегда устойчиво, а для всех  $z_0 < 0$  (оболочка армируется в цилиндрическом слое, расположенном выше срединной поверхности) неустойчиво.

В случае армирования кольца с внешней поверхности (тогда  $2z_0 = h$ ) минимальное критическое натяжение равно

$$P_{кр.} = \frac{3D}{R^2} \cdot \frac{R - h}{h}. \quad (8)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. М., 1948.

Г. Г. Элијев

Еластики элагэ илэ бэркидилмиш  
силиндрик халганын дајанацаглыгы

#### ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ трос кэсијиндэ дүз јерлэшдирилмэмиш силиндрик халганын вэзијјетинин итмэси халганын данышылыр.

Ф. Д. ТЕЙМУРОВ

#### ЗАДАЧА ПЕРЕХОДА ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ БЛОК

Теория сопротивления твердых тел деформированию и разрушению при импульсных кратковременных нагрузках типа удара и взрыва за последние годы привлекает все большее внимание как у нас, так и за рубежом. В работе [1] Х. А. Рахматулиным даны основы динамической теории поперечного удара. Была поставлена и решена задача о косом ударе по гибкой нити с постоянной скоростью при наличии трения, когда диаграмма растяжения не имеет точки перегиба. А. Л. Павленко [2] рассмотрел случай произвольной зависимости „натяжение—деформация“.

В данной статье рассматривается нормальный удар по бесконечной нити, проходящий через неподвижные и подвижные блоки. При решении задачи было использовано точное решение, полученное в работе [1]. Найдены аналитическое и численное решения задачи.

**Постановка задачи.** Пусть на недеформированную бесконечную нить, проходящую через абсолютно гладкие невращающиеся блоки с неподвижными и подвижными центрами, производится нормальный удар с постоянной скоростью  $v_0$  (рис. 1). Задача считается симметричной относительно точки удара, поэтому будет рассмотрена одна половина нити (например, правая часть).  $A, B, D$  — блоки с неподвижными центрами,  $C$  — блок с подвижным центром, закрепленный на конце пружины (жесткость пружины равна  $c$ ). Точку удара обозначим через  $O$ . Ось  $x$  направим вдоль первоначального положения нити в направлении  $OA$ . Расстояние между точкой удара и подвижным блоком в направлении оси  $x$  обозначим через  $l$ , а первоначальную длину части нити  $BCD$  — через  $l_0$ .

При ударе вдоль нити распространяется продольная волна со скоростью  $a_0$  и поперечная волна со скоростью  $b$ . Предполагается, что величина  $a_0$  намного больше скорости распространения поперечной волны. Продольная волна в нити вызывает натяжение  $T_0$ , деформацию  $\varepsilon_0$ , скорость частицы вдоль нити  $w_0$ , которые считаются известными [1].

Подвижный блок за счет возникновения натяжения в нити приобретает определенную скорость  $u$ ; налево и направо от нее распространяются продольные волны, которые вызывают изменение натяжения деформации и скорости частицы в нити. Натяжение и деформация на участке  $BCD$  считаются одинаковыми, так как этот участок гораздо меньше  $l$  и блоки абсолютно гладкие. Скорость частицы нити в точке



В обозначим через  $w_1$ , в точке D—через  $w_2$ . Уравнения фронтов продольных волн, распространяющихся вдоль нити налево и направо от подвижного блока, в плоскости  $(x; t)$  соответственно будут (рис. 2):

$$\begin{aligned} x - l &= -a_0 t, \\ x - l &= a_0 t. \end{aligned}$$

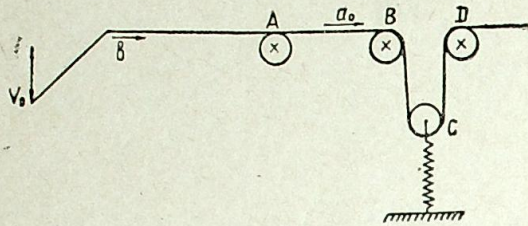


Рис. 1

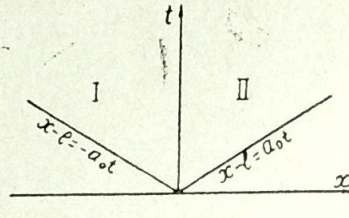


Рис. 2

**Основные уравнения.** Уравнения движения нити в областях I и II соответственно будут (рис. 2):

$$\rho_0 F_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\rho_0 F_0 \frac{\partial w_2}{\partial t} = \frac{\partial T_2}{\partial x}, \quad (2)$$

где  $\rho_0$ —плотность нити,

$T_1, T_2$ —натяжения в областях I и II,

$F_0$ —поперечное сечение нити, которое считается постоянным.

В областях I и II деформации и скорости частицы связаны соотношениями:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \quad (4)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ —деформации, соответственно, в областях I и II.

Так как натяжение  $T$  на участке BCD одинаково, то уравнение движения подвижного блока будет

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 2T - cy, \quad (5)$$

где  $m$ —масса блока,

$c$ —жесткость пружины,

$y$ —перемещение блока в направлении, перпендикулярном оси.

При линейной зависимости между натяжением и деформацией уравнения (1), (2) и (5) соответственно примут вид:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x}, \quad (7)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -cy, \quad (8)$$

где  $a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ — скорость распространения продольных волн.

$E$ —модуль упругости,

$\varepsilon$ —деформация на участке BCD.

Учитывая (3) и (4) в (6) и (7), соответственно получим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Изменение деформации  $\varepsilon$  в области BCD за время  $dt$  определяется формулой:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{w_2(l; t) - w_1(l; t) - 2\dot{y}}{l_0 - 2y}. \quad (13)$$

На самом деле длина нити в области BCD для времени  $t$  равна  $l_0 - 2y$ , а при  $t + dt$  ее длина будет

$$l_0 - 2y + [w_2(l; t) - w_1(l; t) - 2\dot{y}] dt.$$

Тогда по определению деформации получаем выражение (13).

**Граничные условия.** На волне  $x - l = -a_0 t$  имеем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, \quad w_1 = w_0. \quad (14)$$

На волне  $x - l = a_0 t$  имеем

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0, \quad w_2 = w_0, \quad (15)$$

при  $x = l$

$$\varepsilon_1(l; t) = \varepsilon_2(l; t) = \varepsilon(l; t). \quad (16)$$

Кроме того, при  $x = l$  имеют место уравнения (8) и (13).

**Решение задачи.** Общее решение уравнений (9)–(12) имеет вид:

$$\varepsilon_1 = f_1(x + a_0 t) + f_2(x - a_0 t), \quad (17)$$

$$w_1 = f_3(x + a_0 t) + f_4(x - a_0 t); \quad (18)$$

$$\varepsilon_2 = f_5(x + a_0 t) + f_6(x - a_0 t), \quad (19)$$

$$w_2 = f_7(x + a_0 t) + f_8(x - a_0 t), \quad (20)$$

где  $f_1, \dots, f_8$ —произвольные функции.

На основании граничных условий (14) и (15) решения (17)–(20) примут вид:

$$\varepsilon_1 = f_1(x + a_0 t), \quad (21)$$

$$w_1 = f_3(x + a_0 t); \quad (22)$$

$$\varepsilon_2 = f_6(x - a_0 t), \quad (23)$$

$$w_2 = f_8(x - a_0 t). \quad (24)$$

Принимая во внимание условия (3) и (4), из (21)–(24) будем иметь:

$$a_0 f_1'(x + a_0 t) = f_3'(x + a_0 t),$$

$$-a_0 f_6'(x - a_0 t) = f_8'(x - a_0 t).$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$a_0 f_1(x + a_0 t) = f_3(x + a_0 t) + c_1; \quad (25)$$

$$-a_0 f_6(x - a_0 t) = f_8(x - a_0 t) + c_2, \quad (26)$$

где  $c_1, c_2$ —произвольные постоянные.

Условия (16) дают

$$f_1(l + a_0 t) = f_6(l - a_0 t). \quad (27)$$



Таким образом, при  $x = l$  имеем:

$$\varepsilon_1 = f_1 (l + a_0 t), \quad (28)$$

$$w_1 = a_0 f_1 (l + a_0 t) - c_1; \quad (29)$$

$$\varepsilon_2 = f_1 (l + a_0 t), \quad (30)$$

$$w_2 = -a_0 f_1 (l + a_0 t) - c_2, \quad (31)$$

так как при  $x = l, t = 0$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0, w_1 = w_0, \varepsilon_2 = \varepsilon_0, w_2 = w_0.$$

с другой стороны, известно [1], что

$$w_0 = -a_0 \varepsilon_0, \text{ поэтому } c_1 = -2 w_0, c_2 = 0.$$

Подставляя значения  $c_1$  и  $c_2$  в (29) и (31), получим:

$$w_1 = a_0 f_1 (l + a_0 t) + 2 w_0, \quad (32)$$

$$w_2 = -a_0 f_1 (l + a_0 t). \quad (33)$$

Следовательно, решение поставленной задачи сводится к определению функции  $f_1 (l + a_0 t)$ .

Дифференцируя (8) один раз по  $t$ , с учетом (8), (13) и (16), получим квазилинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$(l - 2y) m \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 a_0 m \frac{d^2 y}{dt^2} + [4 E F_0 + (l - 2y) c] \frac{dy}{dt} + 2 a_0 c y = 4 E F_0 a_0 \varepsilon_0. \quad (34)$$

Решая это уравнение со следующими начальными условиями:

$$y = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2 E F_0}{m} \varepsilon_0 \text{ при } t = 0, \quad (35)$$

найдем  $y(t)$ , из (8)  $\varepsilon(l; t)$  определяем по формуле

$$\varepsilon(l; t) = \frac{1}{2 E F_0} \left( m \frac{d^2 y}{dt^2} + c y \right).$$

Далее, учитывая условие (16), находим  $\varepsilon_1(l; t)$ ,  $w_1(l; t)$ ,  $\varepsilon_2(l; t)$ ,  $w_2(l; t)$ . Затем последовательно определяем  $\varepsilon_1(x; t)$ ,  $w_1(x; t)$ ,  $\varepsilon_2(x; t)$  и  $w_2(x; t)$  для всех  $(x; t)$ . Однако следует отметить, что получение аналитического решения уравнения (34) связано с математическими трудностями, поэтому уравнение (34) мы решаем методом Рунге—Кутты на электронноцифровой машине „Стрела“.

**Численное решение.** На машине „Стрела“ мы провели расчет для отношения  $\tau_0/a_0$  при жесткости пружины  $c = 100000 \text{ кг/м}$ . Значения  $\varepsilon_0$  и  $w_0$  определяем по формулам из [1]. В таблице приведены значения параметров  $y/y_m$ ,  $\dot{y}/\dot{y}_m$  и  $\varepsilon/\varepsilon_m$ , где  $y_m$ ,  $\dot{y}_m$  и  $\varepsilon_m$ , соответственно, перемещение и скорость блока и деформация нити на участке BCD в момент времени  $t_m$ , когда скорость блока достигает максимального значения.

На рис. 3 и 4 построены графики изменений скорости  $\dot{y}/\dot{y}_m$  и деформации  $\varepsilon/\varepsilon_m$  от времени  $t/t_m$ . Следует отметить, что рассматриваемая выше волновая картина справедлива до тех пор, пока фронт продольной волны, отраженный от подвижного блока, не встретится с фронтом поперечной волны, распространяющейся от точки удара вдоль нити. Начиная с этого момента времени, происходит взаимодействие продольной и поперечной волн.

При  $C = 100000 \text{ кг/м}$

| Численные решения |         |                     |                             | Приближенное аналитическое решение |                     |                             |
|-------------------|---------|---------------------|-----------------------------|------------------------------------|---------------------|-----------------------------|
| $t/t_m$           | $y/y_m$ | $\dot{y}/\dot{y}_m$ | $\varepsilon/\varepsilon_m$ | $y/y_m$                            | $\dot{y}/\dot{y}_m$ | $\varepsilon/\varepsilon_m$ |
| 0,00              | 0,0000  | 0,0000              | 3,418                       | 0,0000                             | 0,0000              | 3,418                       |
| 0,05              | 0,0041  | 0,1146              | 3,165                       | 0,0041                             | 0,1173              | 3,239                       |
| 0,10              | 0,0166  | 0,2217              | 2,918                       | 0,0162                             | 0,2238              | 3,000                       |
| 0,15              | 0,0359  | 0,3190              | 2,666                       | 0,0365                             | 0,3229              | 2,750                       |
| 0,20              | 0,0621  | 0,4075              | 2,416                       | 0,0622                             | 0,4122              | 2,489                       |
| 0,25              | 0,0953  | 0,4876              | 2,250                       | 0,0960                             | 0,4939              | 2,333                       |
| 0,30              | 0,1324  | 0,5604              | 2,084                       | 0,1337                             | 0,5662              | 2,167                       |
| 0,35              | 0,1754  | 0,6260              | 1,917                       | 0,1770                             | 0,6325              | 1,988                       |
| 0,40              | 0,2238  | 0,6849              | 1,833                       | 0,2244                             | 0,5921              | 1,833                       |
| 0,50              | 0,3301  | 0,7842              | 1,583                       | 0,3351                             | 0,7909              | 1,667                       |
| 0,60              | 0,4505  | 0,8313              | 1,333                       | 0,4512                             | 0,8664              | 1,415                       |
| 0,80              | 0,7125  | 0,9598              | 1,084                       | 0,7162                             | 0,9623              | 1,084                       |
| 1,00              | 1,0000  | 1,0000              | 1,000                       | 1,0000                             | 1,0000              | 1,000                       |
| 1,20              | 1,2910  | 0,9971              | 1,000                       | 1,2878                             | 0,9940              | 1,000                       |
| 1,40              | 1,5739  | 0,9639              | 1,084                       | 1,5703                             | 0,9584              | 1,084                       |
| 1,50              | 1,7160  | 0,9390              | 1,137                       | 1,7054                             | 0,9320              | 1,137                       |
| 1,75              | 2,0401  | 0,8702              | 1,333                       | 2,0878                             | 0,8415              | 1,142                       |
| 2,00              | 2,3380  | 0,7879              | 1,509                       | 2,3162                             | 0,7564              | 1,575                       |
| 2,25              | 2,5967  | 0,6726              | 1,750                       | 2,5703                             | 0,6585              | 1,789                       |
| 2,50              | 2,8204  | 0,5779              | 2,000                       | 2,7905                             | 0,5563              | 2,000                       |
| 2,75              | 3,0165  | 0,4887              | 2,250                       | 2,9772                             | 0,4727              | 2,250                       |
| 3,00              | 3,1781  | 0,4075              | 2,416                       | 3,1324                             | 0,3933              | 2,416                       |

**Приближенное аналитическое решение.** Ограничиваясь интервалом  $[0; t]$  таким, что  $y(t)$  при принадлежащем  $[0; t]$  значительно меньше  $l_0$ , уравнение (34) можно заменить уравнением

$$l_0 m \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 a_0 m \frac{d^2 y}{dt^2} + (4 E F_0 + l_0 c) \frac{dy}{dt} + 2 a_0 c y = 4 E F_0 a_0 \varepsilon_0. \quad (36)$$

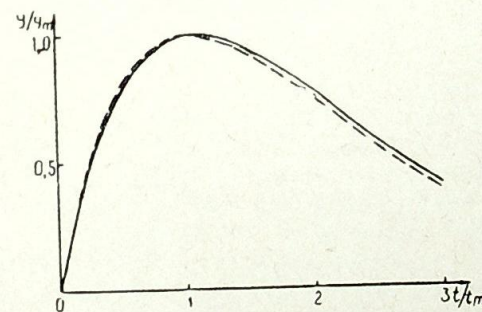


Рис. 3

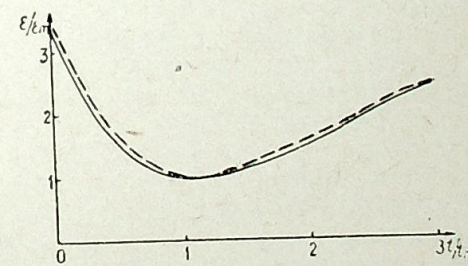


Рис. 4

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = \frac{2 E F_0}{c} \varepsilon_0 + c_1^* e^{\kappa_1 t} + c_2^* e^{\kappa_2 t} + c_3^* e^{\kappa_3 t}, \quad (37)$$

где  $\frac{2 E F_0}{c} \varepsilon_0$  — частное решение уравнения (36).

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  — корни характеристического уравнения,  $c_1, c_2, c_3$  — произвольные константы, которые определяются из начальных условий (35).



Наряду с численными решениями уравнения (34) в таблице приведены аналитические решения (36). Сравнивая эти значения, видим, что они совпадают с достаточной точностью (5%), поэтому при решении поставленной задачи целесообразно использовать уравнение (36).

Пунктирные линии рис. 3 и 4 соответствуют решению (37). Из полученных результатов видно, что подвижный блок существенно снижает деформацию нити, возникающую при ударе. Влияние этого блока распространяется со скоростью звука вправо и влево от него. Дополнительные расчеты показывают, что падение деформации, обусловленное подвижным блоком, тем интенсивнее, чем меньше жесткость пружины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, т. 9, вып. 6, 1945.
2. Павленко А. Л. "Изв. АН СССР, механика и машиностроение", 1960, № 2.

Ф. Д. Тејмуров

#### Узунуна далғанын блокдан кечмәси мәсәләси

##### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә тәрпәнмәз вә тәрпәнән мәркәзи һамар блоклардан кечән телә енинә зәрбә мәсәләсиндән данышылыр. Бурада һәмчинин зәрбә заманы телдә јаранан узунуна далғанын тәрпәнән мәркәзи вә блокдан кечәркән телдә јаранан кәркинлик һалы арашдырылыр.

Һаггында данышылан мәсәләнин үмуми шәкилдә һәлли үчүнчү тәртиб квази-хәтли ади дифференциал тәнлијин һәллинә кәтирилир.

Мәгаләдә электрон һесаблама машинында алынмыш һәлл илә тәгриби аналитик һәллин мүгајисәси верилир.

Мүәјјән едилир ки, узунуна далға тәрпәнән мәркәзли блокдан кечәркән телдәки кәркинлик азалыр вә азалма јерли сәс сүр'әти илә блокдан һәр ики тәрәфә јайылыр.

В. И. МАРОН, Г. Г. САФАРОВ

#### ДВИЖЕНИЕ ПЛАСТИНКИ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СМЕСИ

Совместное движение жидкостей обычно сопровождается их перемешиванием. При этом поверхность раздела между жидкостями приобретает очень сложную форму. Изучать такое движение без дополнительных гипотез становится невозможным. При исследовании движения смеси Х. А. Рахматулин, Я. З. Клейман, Н. А. Слезкин и др. вводили скорость, плотность и другие параметры для каждого компонента смеси отдельно. Движение смеси рассматривается как взаимопроникающее движение нескольких сплошных сред. Уравнения движения пишутся для каждого компонента отдельно, при этом действие других компонентов учитывается введением сил взаимодействия, которые являются для каждого компонента внешними объемными силами. При таком подходе можно не заботиться об удовлетворении кинематическим и динамическим условиям на поверхностях раздела жидкостей, что значительно облегчает изучение явления.

В данной статье содержатся результаты исследования асимптотического пограничного слоя на плоской пластинке, движущейся в двухкомпонентной гетерогенной смеси. Взаимопроникающее движение жидкостей описывается системой уравнений, предложенной в работе [2]. Решение ищется в виде ряда, коэффициенты которого удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Используемый в статье метод может явиться основой для расчетов пограничного слоя при таком течении смеси.

Рассматривается задача о нахождении поля скоростей в гетерогенной смеси двух несжимаемых жидкостей, индуцированного тонкой полубесконечной плоской пластинкой, движущейся с постоянной скоростью. В основу исследования движения жидкостей положим уравнения, предложенные в работе [2]. Тогда в системе координат, связанной с передней кромкой пластинки, движение смеси описывается следующей системой уравнений:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = v_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\kappa_{ij}}{\rho_i} (u_j - u_i); \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{01}} + \frac{\rho_2}{\rho_{02}} = 1; \quad i, j = 1, 2 \dots, i \neq j, \quad (3)$$



где  $x$ —расстояние вдоль пластинки от передней кромки;  
 $u$ —расстояние по нормали к поверхности пластинки;  
 $\nu_i$ —кинематическая вязкость жидкости, составляющей  $i$ -ый компонент смеси;

$u_i$  и  $v_i$  — составляющие скорости  $i$ -ого компонента смеси; соответственно, вдоль пластинки и оси  $OY$ ;

 $\kappa_{ji}(u_j - u_i)$  — сила взаимодействия  $i$ -ого компонента смеси с  $j$ -ым [1].

$\rho_i$ —масса  $i$ -ого компонента в единице объема смеси;

$\rho_{oi}$  — плотность жидкости, составляющей  $i$ -ый компонент смеси.

В этих уравнениях отсутствуют производные от давления, так как из оценок пограничного слоя следует, что общее давление, равное сумме парциальных давлений каждого компонента, постоянно в области течения смеси, т. е.

$$p_1 + p_2 = p = p_\infty = \text{const}, \quad (4)$$

где  $p$ —общее давление в смеси.

Парциальные давления  $p_1$  и  $p_2$  принимаются соответственно равными:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} p \text{ и } p_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{02}} p. \quad (5)$$

Вопрос об изменении парциальных давлений в области течения смеси не может быть решен в данной постановке, так как число уравнений меньше числа неизвестных. Чтобы замкнуть систему, необходимо написать еще одно уравнение, например, для величины  $\rho_1$  или  $\rho_2$ . В дальнейших исследованиях ограничимся простейшим предположением о постоянстве величины  $\rho_1$  и, следовательно,  $\rho_2$ .

Краевые условия задачи имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u_i = v_i = 0 & \quad \text{при } y = 0, 0 < x < \infty; \\ u_i = U_\infty & \quad \text{при } y = \infty, 0 < x < \infty, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $U_{\infty}$ —скорость движения пластинки.

Введем новые независимые переменные:

$$\xi = \frac{U_\infty}{v_1} x \text{ и } \eta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{v_1 x}} y. \quad (7)$$

Функцию тока в этих переменных представим следующим образом:

$$\Psi_i = v_1 \sqrt{\xi} g_i(\xi, \eta); \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Система уравнений (1), (2) и краевые условия для функции  $\varphi_i(\xi; \eta)$  имеют вид:

$$2\xi \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} \right) - \varphi_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} = \frac{v_i}{v_1} \frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial \eta^3} + \kappa_i \xi \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = 0; \quad V\xi \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{1}{V\xi} \varphi_i = 0 \text{ при } \eta = 0, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = 2 \text{ при } \eta = \infty, 0 < \xi < \infty; ij = 1, 2, i \neq j, \quad (10)$$

где  $\kappa_i = 4 \kappa_{ij} \nu_1 / \rho_i U_\infty^2$ .

Решение задачи (9), (10) ищем в виде ряда

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \xi^n f_{in}(\eta), \quad (11)$$

в котором функции  $f_{in}(\eta)$  являются неизвестными. Для их определения подставляем ряд (11) в уравнения (9) и краевые условия (10). В результате подстановки и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $\xi$  в правой и левой частях получающихся равенств будем иметь следующие уравнения и краевые условия для определения функций  $f_{in}$ :

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_1} f_{i0}''' + f_{i0} f_{i0}'' = 0,$$

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_1} f_{i1}'' + f_{i0} f_{i1}'' - 2f_{i0}' f_{i1}' + 3f_{i0}'' f + \kappa_i (f_{j0}' - f_{i0}') \neq 0, \quad (12)$$

$$\frac{v_i}{v_1} f_{i2}''' + f_{i0} f_{i2}'' - 4f_{i0}' f_{i2}' + 5f_{i0}'' f_{i2} + 2\kappa_i (f_{j,1}' - f_{i,1}') - 6f_{i1} f_{i,1}' + 4f_{i1}^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{y_i}{y_1} f_{i n}^{\prime \prime \prime} + f_{i 0} f_{i n}^{\prime \prime} - 2 n f_{i 0}^{\prime} f_{i n}^{\prime} + (2 n + 1) f_{i 0}^{\prime \prime} f_{i n} + n \kappa_i (f_{i, n-\kappa}^{\prime} - f_{i, n-1}^{\prime}) = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{2 n (n - \kappa) + n}{\kappa! (n - \kappa)!} f_{i, n-\kappa} f_{i \kappa} - \frac{n}{(\kappa - 1)! (n - \kappa)!} f_{i, n-\kappa}^{\prime} f_{i, \kappa}^{\prime} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{in} = 0, \quad f'_{in} = 0; \quad n = 0, 1, 2 \dots \text{ при } \eta = 0, \quad 0 < \xi < \infty; \\ f_{i0} = 2, \quad f'_{in} = 0; \quad n = 1, 2 \dots \text{ при } \eta = \infty, \quad 0 < \xi < \infty; \\ i, j = 1, 2 \dots, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (13)$$

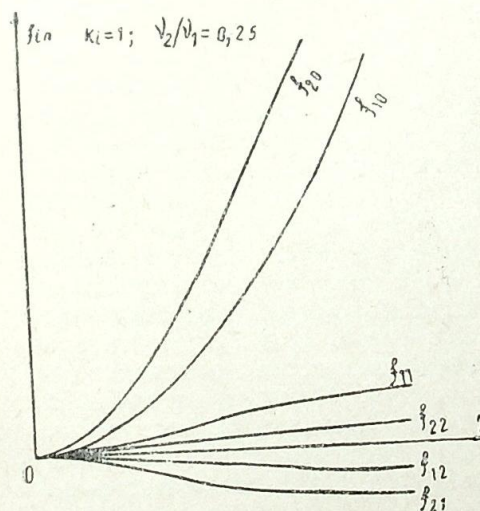


Рис. 1

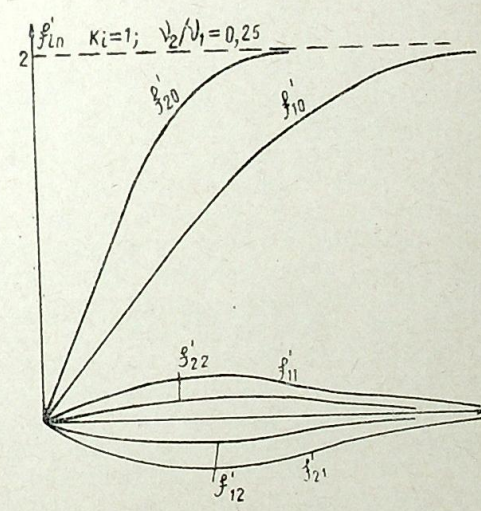


Рис. 2

Первое уравнение для определения функции  $f_{i0}$  нелинейное и при  $i=1$  совпадает с уравнением Блазиуса. Краевые условия для него аналогичны условиям Хоурта для уравнения Блазиуса. Нетрудно проверить, что если  $z(\eta)$  — решение Хоурта, то функция  $f_0(\eta) = (v_1/v_1)^{\frac{1}{2}} \cdot z \left[ (v_1/v_1)^{\frac{1}{2}} \cdot \xi \right]$  удовлетворяет первому уравнению системы и соответствующим краевым условиям. Значения функции  $z(\eta)$  могут быть взяты из таблиц в работе [3].



Уравнения для остальных функций  $f_{11}, f_{12}, \dots$  и т. д. линейные и в них коэффициентами при неизвестных функциях являются  $f_{10}(\eta)$ . В эти уравнения входят слагаемые, обусловленные введением сил взаимодействия в исходную систему. Такие уравнения могут быть численно проинтегрированы. Результаты численного интегрирования для  $n=0$ ,  $n=1$  и  $n=2$  графически представлены на рис. 1, 2.

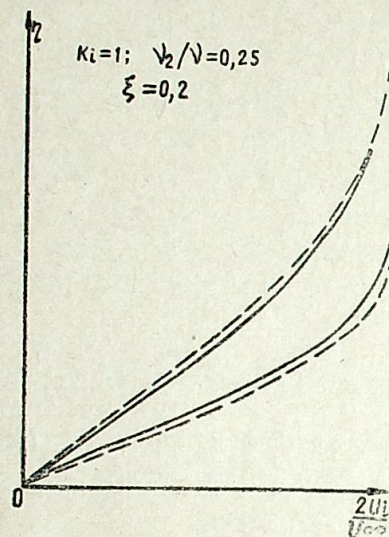


Рис. 3.

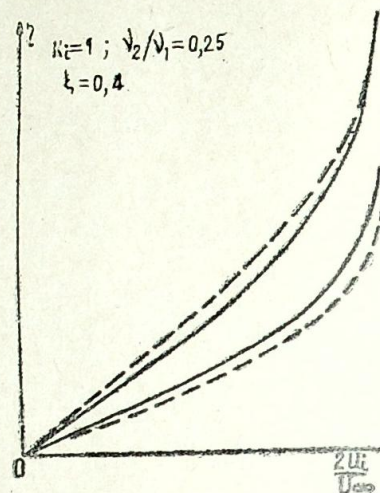


Рис. 4.

На рис. 3, 4, 5 (показаны) профили безразмерных продольных скоростей в различных точках пластинки. Пунктирными линиями (отмечены) профили Блазиуса, по которым можно проследить деформацию скоростей вдоль пластинки. Из этих рисунков следует, что вблизи передней кромки пластинки продольные скорости развиваются независимо друг от друга, следуя профилям Блазиуса. Однако с ростом величины  $\xi$  происходит выравнивание скоростей, которое можно объяснить динамическим взаимодействием компонентов, отсутствием перепада давления и уменьшением касательного напряжения вдоль пластинки. Расчеты проводились при значениях  $K_1$  и  $K_2$ , равных единице. Следует ожидать, что выравнивание скоростей происходит тем быстрее, чем больше коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$ . Основанием для этого является то, что функции  $f_{11}(\eta)$  для произвольных  $K_1$  могут быть получены из тех же функций для  $K_1=1$  умножением на величину  $K_1 \neq 1$ . Это свойство линейности не имеет места для остальных функций при  $n \neq 1$ .

Быстрое выравнивание скоростей при рассматриваемом течении смеси дает основание в аналогичных случаях строить более простые односкоростные модели течения.

Местное касательное напряжение на пластинке равняется:

$$\tau = \frac{U_\infty^2}{4\nu_1 V \xi} \left[ S_1 \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \xi^n f'_{1n}(\eta) + S_2 \mu_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \xi^n f'_{2n}(\eta) \right]_{\eta=0}, \quad (14)$$

где  $S_i$  — часть площади, занятая  $i$ -ым компонентом;  $S_i = \rho_i/\rho_{0i}$ . На рис. 6 изображен график изменения величины  $\tau^* = \tau/\rho_{01} U_\infty^2$  вдоль пластинки.

Для сравнения здесь же приведены графики  $\tau^*$  в случае обтекания пластинки однородной жидкостью с вязкостью  $\mu_1$  и  $\mu_2$  (пунктирные линии). Из рис. 6 следует, что касательное напряжение на пластинке

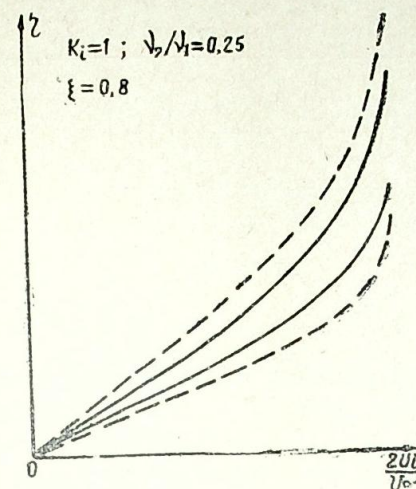


Рис. 5.

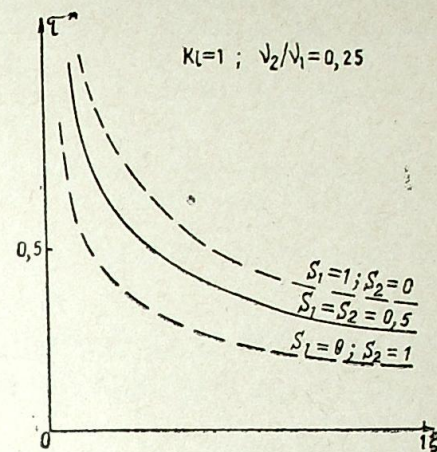


Рис. 6.

в рассматриваемом движении меньше, чем  $\tau^*$  для жидкости с большей вязкостью, и больше, чем  $\tau^*$  для жидкости с меньшей вязкостью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. Grenzschichttheorie der homogenen und Zweikomponentenflüssigkeit mit zwei Geschwindigkeiten. Internat. Symposium Freiburg/Br., 1957.
2. Рахматуллин Х. А. Основы газовой динамики взаимнопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, вып. 2, т. 20, 1956.
3. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя (таблицы). Гостехиздат, 1941.

В. И. Марон, Н. Н. Сәфәров

#### Мүстәви лөвһәнин икикомпонентли мүнһәтә һәрәкәти

#### ХҮЛАСӘ

Мәгалә икикомпонентли, бир-бириндә һәлл олмајан гарышыг мәједә һәрәкәт едән мүстәви лөвһә үзәриндәки асимптотик сәрһәд лајынын тәдгигинә һәср олунмушдур.

Мајенин һәрәкәти бир-биринә гаршылыглы нүфуз едән бир нечә мүнһитин һәрәкәт нәзәријјәсинә әсасән өјрәнилир. Көстәрилир ки, һәр ики мајенин сүр'әтинин сәрһәд лајында пајланмасы Блазиус пајланмасындан башлајараг, мүстәви бојунча кет-кедә үст-үстә дүшүр. Бу, гаршылыглы тә'сир гүввәсинин тә'сири, тәзјиг градиентинин олмасы вә лөвһә бојунча тохунан кәркилијин азалмасы илә изаһ едилир.



Ф. А. ТАГИЕВ

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ С ОБЩИМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ МЕТОДОМ СЕТОК

В настоящей статье мы рассматриваем приближенное решение одной краевой задачи для уравнения

$$Tu \equiv y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

являющегося обобщением задачи Т, поставленной и исследованной в работах Трикоми [1], А. В. Бицадзе [2], Г. Каратопраклиева [3].

Пусть  $D$  — односвязная конечная область плоскости  $xOy$ , ограниченная линией Жордана  $\sigma$  с концами в точках  $A(0, 0)$  и  $B(1, 0)$ , расположенной в верхней полуплоскости  $y > 0$ , и отрезками  $AC$  и  $BC$  характеристик  $x - \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 0$ ,  $x + \frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} = 1$  уравнения (1),

выходящих из точки  $\left[\frac{1}{2}, -\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]$ . Обозначим через  $D_1$  и  $D_2$ , соответственно, эллиптическую и гиперболическую части [смешанной области  $D$ ].

В работе Г. Каратопраклиева [3] наряду с другими доказана теорема (задача Т):

Каковы бы ни были достаточно гладкие функции  $\varphi$  и  $\psi$ , заданные, соответственно, на достаточно гладких линиях  $\sigma$  и  $AC$ , всегда существует одно и только одно решение  $u$  уравнения (1) в области  $D$  при  $y \neq 0$ , непрерывное в  $D$  при  $y \neq 0$ , имеющее частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , непрерывное в  $D$  при  $y \neq 0$ , причем на

отрезке  $AB$  действительной оси  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  удовлетворяют условиям склеивания.

$$u(x, -0) = \alpha(x)u(x, +0) + \delta(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, -0) = \beta(x) \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) + \mu(x), \quad 0 < x < 1,$$

где  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$ ,  $\delta(x)$  и  $\mu(x)$  — заданные функции, причем  $\beta$  и  $\delta(x)$  дифференцируемы,  $\beta'(x)$ ,  $\delta'(x)$  удовлетворяют условию Гельдера при

$0 \leq x \leq 1$ ,  $\mu(x)$  и  $\alpha(x)$ , соответственно, дважды и трижды непрерывно дифференцируемы при  $0 \leq x \leq 1$ . Кроме этого, предположим, что  $\alpha(x)$  имеет неотрицательную производную при  $0 \leq x \leq 1$  и представимо в виде  $\alpha(x) = x(x) \cdot x^p(1-x)^q$  в точках  $A$  и  $B$ , в которых  $x(x)$  не имеет особенности, а  $q \geq 2$ ,  $p \geq 2$ ,  $\alpha(x) > 0$ ,  $\beta(x) > 0$  при  $0 < x < 1$  (при

этих предположениях  $\alpha \cdot \beta > 0$  и  $\beta \cdot \int_0^x \frac{\alpha'}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt \geq 0$ ). Кроме того,

$\varphi$  и  $\psi$  — дважды непрерывно дифференцируемые функции;  $\psi''$  удовлетворяет условию Гельдера при  $0 \leq x \leq 1$ ;  $\psi(A) = \varphi(A) = \delta(A) = 0$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  вблизи точек  $A$  и  $B$  могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.

Мы будем решать упомянутую задачу методом сеток (в эллиптической части области  $D$ ). В силу условий (2) и  $u|_{AC} = \psi$  на линию вырождения из гиперболической части смешанной области переносится условие:

$$\beta(x) \frac{\partial u}{\partial y}(x, +0) + \mu(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} x^{\frac{1}{6}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right) dt}{(x-t)^{\frac{5}{6}}} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\alpha\tau + \delta}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt.$$

Отсюда, принимая во внимание предположения относительно  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$ , заключаем, что если  $\psi = \delta = \mu = 0$ , то решение задачи  $Tu(x, y)$  принимает положительный максимум и отрицательный минимум в  $D_1$  на  $\sigma$ .

Для определения  $u(x, y)$  в  $D_1$  имеем условия:

$$Tu \equiv y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$\beta \frac{\partial u}{\partial y} + \mu = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} x^{\frac{1}{6}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\psi\left(\frac{t}{2}\right) dt}{(x-t)^{\frac{5}{6}}} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2\pi\gamma} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\alpha(t)\tau(t) + \delta(t)}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} dt, \quad (3)$$

$$u|_{\sigma} = \varphi. \quad (4)$$

Если решить (1), (3), (4), то можно найти  $u$  в  $D_1$ , тогда по значениям  $u(x, 0)$  найдем  $u$  в  $D_2$  по формуле Дарбу. Итак, вся задача сводится к определению  $u$  с учетом условий (1), (3), (4). Для ее решения применим метод сеток. Разобьем  $D_1$  прямыми  $x_k = kh$ ,  $y_j = jh$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, h = \frac{1}{N}$ , на квадраты со

стороной  $h > 0$ . Совокупность всех квадратов, принадлежащих  $D_1$ , обозначим через  $D_{1h}$ . Граница  $D_{1h}$  состоит из двух частей:  $\Gamma_h$ , принадлежащей отрезку  $[A, B]$  и  $\sigma_h$  — остальной части.



Продолжим  $\varphi$  с  $\sigma$  внутрь  $D_1$  с сохранением непрерывности и положим

$$U|_{\sigma_h} = \varphi_h, \quad (5)$$

где  $U$  — приближенное значение  $u$ . Аппроксимируя (1), имеем:

$$T_h U(x_k, y_j) \equiv y_j U_{x_k} + U_{y_j} = 0. \quad (6)$$

Из (3), интегрируя по частям, дифференцируя и заменяя полученные интегралы через сумму, после применения теоремы о среднем для несобственного интеграла имеем

$$l_h u \equiv \frac{\partial u}{\partial y}(x_k, 0) - \frac{3 A_1}{\beta} \sum_{i=1}^k [\alpha \tau]_{x_i}^* \left[ (x_k - x_{i-1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_i)^{\frac{1}{3}} \right] = f(x_k), \quad (7)$$

где  $\tau(x) = u(x, +0)$ ,  $f(x_k)$  — известная функция, зависящая от  $\psi$ ,  $\beta$  и  $\delta$ . Аппроксимируя (6), имеем

$$l_h U(x_k, 0) = U_x - \frac{3 A_1}{\beta} \sum_{i=1}^k \frac{\alpha(x_i) \tau(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \tau(x_{i-1})}{h} \times \left[ (x_k - x_{i-1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_i)^{\frac{1}{3}} \right] = f_h. \quad (8)$$

Теперь докажем следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $u \in C^{(3)}(\bar{D}_1)$ . Тогда  $T_h u \rightarrow Tu$ ,  $l_h u \rightarrow lu$  равномерно при  $h \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Разлагая функции  $u(x_{k+1}, y_j)$ ,  $u(x_{k-1}, y_j)$ ,  $u(x_k, y_{j+1})$  и  $u(x_k, y_{j-1})$  в окрестности  $(x_k, y_j) \in D_{1h}$ , по формуле Тейлора имеем

$$\left| T_h u - Tu \right| \leq \frac{h y_j}{3!} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| + \frac{h y_j}{3!} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| + \frac{h}{3!} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right| + \frac{h}{3!} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right|,$$

отсюда при достаточно малом  $h$   $T_h u \rightarrow Tu$ .

Из (8) по формуле Тейлора имеем

$$|l_h u - lu| \leq \frac{h}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| + \frac{3 M_{1h}}{2 \beta} \sum_{i=1}^k \left| (x_k - x_{i-1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_i)^{\frac{1}{3}} \right|.$$

Следовательно,  $l_h u \rightarrow lu$  при достаточно малом  $h$ .

**Теорема 2.** Пусть  $T_h U \geq 0$  в  $D_{1h}$ ,  $l_h U \geq 0$  на  $\Gamma_h$ . Тогда в  $\bar{D}_{1h}$  положительный максимум от  $U$  достигается на  $\sigma_h$ .

**Доказательство.** Пусть  $M \geq 0$  обозначает максимальное значение  $U$  в  $\bar{D}_{1h}$ , предположим, что  $M$  больше максимума на  $\sigma_h$ . Тогда существует такая точка  $(x_k, y_j) \in D_{1h}$ , в которой  $U(x_k, y_j) = M$  и по крайней мере в одной из соседних точек  $U(x_{k+1}, y_j) < M$ . Тогда из (6) получим  $T_h U < 0$ . Это противоречит условию теоремы. Следовательно, положительного максимума от  $U$  во внутренних точках не достигается.

Предположим, что  $U$  свой положительный максимум достигает в  $(x_k, 0) \in \Gamma_h$ . Из (7) после преобразования получим

$$l_h U = \frac{1}{h} (U(x_k, h) - U(x_k, 0)) +$$

$$+ \frac{A_1}{\beta} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha(x_i) U(x_i, 0) - \alpha(x_{i-1}) U(x_{i-1}, 0)}{h} \times \left[ 2(x_k - x_i)^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_{i-1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_{i+1})^{\frac{1}{3}} \right] + \frac{A_1}{\beta} \cdot \frac{\alpha(x_k) U(x_k, 0) - \alpha(x_{0,1}) U(x_{0,0})}{h} \times \sum_{i=1}^{k-1} \left[ 2(x_k - x_i)^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_{i-1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_{i+1})^{\frac{1}{3}} - (x_k - x_{k-1})^{\frac{1}{3}} \right].$$

Учитывая предположения относительно  $\alpha$ ,  $\beta$  и, кроме того, положительность и отрицательность выражений в квадратных скобках, имеем  $l_h U < 0$ . Следовательно, положительный максимум от  $U$  достигается на  $\sigma_h$ .

**Теорема 3.** Система разностных уравнений (5), (6), (8) имеет единственное решение.

**Доказательство.** Для доказательства единственности решения системы (5), (6), (8) достаточно доказать, что соответствующая однородная система

$$v|_{\sigma_h} = 0, T_h v = 0, l_h v = 0$$

имеет только нулевое решение. Доказательство вытекает из теоремы 2.

**Теорема 4.** При  $m \rightarrow \infty$  и при достаточно малом  $h$  и произвольном  $U_i^{(0)}$ , где  $i = 1, 2, \dots, p$ , а  $p$  — количество неизвестных  $U_i^{(m)} \rightarrow U_i$ .

**Доказательство.** Обозначим ошибку для  $m$ -го приближения через  $\tau_i^{(m)} = U_i - U_i^{(m)}$ . Очевидно, что значение  $\tau_i^{(m)}$  в граничных узлах (на  $\sigma_h$ ) равно нулю. Обозначим

$$\max \{ |\tau_1^{(0)}|, |\tau_2^{(0)}|, \dots, |\tau_p^{(0)}| \} = A.$$

Очевидно, что

$$|\tau_i^{(0)}| \leq A.$$

Из (6) по формуле Гаусса—Зейделя в силу (9) имеем

$$\tau_{k,j}^{(1)} \leq \frac{y_j A + y_j A + A}{2 y_j + 2} = \left( 1 - \frac{1}{2 y_j + 2} \right) A = (1 - \rho) A,$$

где  $0 < \rho < 1$ ,  $\kappa_1 = 1, 2, \dots, m_1$  узлов, находящихся на первой строке.

Методом индукции для  $(r-1)$ -ой строки получаем

$$\tau_{r-1,j}^{(1)} \leq (1 - \rho^{r-1}) A, \text{ где } \kappa_{r-1} = m_{r-2} + 1, \dots, m_{r-1}. \quad (10)$$

Отсюда в силу (8), (9), (10) для узлов на  $\Gamma_h$  имеем

$$\tau_{\kappa_r,0}^{(1)} \leq (1 - \rho_1) A, \text{ где } 0 < \rho_1 < 1. \quad (11)$$

Методом индукции можно убедиться, что (11) имеет для всех узлов, находящихся на  $\Gamma_h$ . Аналогично для всех узлов и для всех  $m$  имеем

$$|\tau_{\kappa,j}^{(m)}| \leq (1 - \rho^x)^m \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Следовательно,  $\tau_{\kappa,j}^{(m)} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

**Лемма.** Если  $g(x, y)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция со свойствами:

$$a) -T_h g \geq \max_{D_{1h}} |T_h U|; \quad б) -l_h g \geq \max_{\Gamma_h} |l_h U|; \quad в) g \geq \max_{\sigma_h} |U|,$$

то для любой функции  $U$  справедлива оценка  $|U| \leq g$ .

Доказательство очевидно.



Теорема 5. Пусть  $U(x, y)$  — любая функция, определенная в  $\bar{D}_{1h}$ , такая, что

$$A = \max_{D_{1h}} |T_h U|, \quad B = \max_{\Gamma_h} |l_h U|, \quad C = \max_{\sigma_h} |U|, \quad D = \max_{\sigma_h} \left| x_k^2 \frac{\Delta U}{\Delta y} \right|$$

есть определенные величины, тогда для достаточно малых  $h$   $|U| \leq (A + B)K + C + D$ , где  $K$  постоянное.

Доказательство. Возьмем функции  $g(x, y) = (A + B)(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) + C + D$ . Очевидно, что  $g(x, y)$  удовлетворяют свойства а), б), в) выбором  $\lambda$ . Следовательно,

$$|U| \leq (\max_{D_{1h}} |T_h U| + \max_{\Gamma_h} |l_h U|) K + \max_{\sigma_h} |U| + \max_{\sigma_h} \left| x_k^2 \frac{\Delta U}{\Delta y} \right|,$$

где  $K = e^{\lambda y} - 1$ ,  $Y = \sup_{D_1} y$ .

Теорема 6. Предположим, что решение задачи (1), (3), (4),  $u \in C^3(x_1)$  и  $U$  есть решение системы разностных уравнений (5), (6), (8) в области  $L_{h1} U \Gamma_h$ . Тогда  $U \rightarrow u$  при  $h \rightarrow 0$ .

Доказательство. В силу теоремы 1 и (6), (8) имеем:

$$|T_h(U - u)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad |l_h(U - u)| < \frac{\varepsilon}{4K} \quad \text{при } h \leq h_0. \quad (12)$$

Более того, так как  $\varphi$  равномерно непрерывно, то

$$|U - u| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{на } \sigma_h. \quad (13)$$

В силу теоремы (5) и (12), (13) имеем

$$|U - u| < \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е. Будем предполагать, что куски дуги АОС в окрестностях точек А и В таковы, что имеют с каждой из кривых  $x - x_0 = cy^{\alpha}$  не более одной общей точки. Для выполнения этого условия достаточно, чтобы куски дуги АОВ в окрестностях точек А и В могли быть заданы уравнениями  $x = f_1(y)$  вблизи А,  $x = f_2(y)$  — вблизи В, где  $f_1(y) \geq -M > -\infty$ ,  $f_2(y) \leq M < +\infty$  (ограничения на производных нужны только в том случае, если эти куски не являются выпуклыми).

Предположим, что при заданных  $\varphi$  и  $\psi$  существует непрерывное в  $\bar{D}$  при  $y \neq 0$  решение задачи Т, имеющее внутри  $D$  непрерывные производные  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , так что  $\frac{\partial u}{\partial y} + f_1'(y) \frac{\partial u}{\partial x}$  также непрерывна на АО, кроме, может быть, точки А (в окрестности точки А при  $0 < x < \delta$  имеем  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 (x^{-\alpha})$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 (x^{-\beta})$ ;  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ ).

Теорема 7. Если существует решение задачи (1), (3), (4) в области  $D_1$ , обладающее свойствами, указанными в замечании, то решение разностного уравнения, (5), (6), (8) сходится к нему.

Доказательство. В силу предположений об области  $D$  и решения  $u$  функция  $u_t = u(t^3(x - x_0) + x_0, t^2 y)$ , где  $0 < t < 1$ , опре-

едлены в  $\bar{D}_1$ , имеет в  $\bar{D}_1$  непрерывные производные  $\frac{\partial^2 u_t}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_t}{\partial y^2}$  и удовлетворяет уравнению (1). При  $t \rightarrow 1$  сходимость доказывается в силу теоремы 5.

В гиперболической части решение находится по формуле Дарбу\*.

В заключение приношу благодарность член-корр. АН СССР А. В. Бицадзе и доценту А. Ф. Филиппову за внимание к работе и ценные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. ОГИЗ, 1947.
2. Бицадзе А. В. Итоги науки. Уравнение смешанного типа. М., 1959.
3. Каратопраклиев Г. «ДАН СССР», т. 158, № 2, 1964.
4. Филиппов А. Ф. «Изв. АН СССР», 21, 1957.
5. Тагиров Ф. А. «Изв. АН СССР, серия физ.-техн. и матем. наук» 1965, № 3.

Ф. Ә. Тағыјев

Трикоми мәсәләсинин үмуми җапышдырма шәрти дахилиндә шәбәкә методу илә һәлли

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Трикоми мәсәләси үмуми җапышдырма шәрти дахилиндә шәбәкә методу илә һәлл едилмишдир.

(1), (3), (4) мәсәләсинин һәлли тәғриби оларак, (5), (6), (8) сонлу артымлы тәнликләр системинин һәллине кәтирилир. Бурада тәғриби һәллин варлығы, јеканәлији вә дәгиг һәллә јығылмасы исбат едилир. (5), (6), (8) сонлу артымлы тәнликләр системинин һәлли үчүн Гаусс-Зейдел методунун тәтбиги әсасландырылыр.

\* Эта часть будет напечатана в Трудах Института кибернетики АН Азерб. ССР.



Т. Г. ГЕЙДАРОВ

# РАЗЛОЖЕНИЕ $n$ -МЕРНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В РЯД ТИПА ЭДЖВОРТА

Целью настоящей работы являлось построение разложения произвольной  $n$ -мерной функции плотности по полиномам Эрмита, порожденным многомерным нормальным распределением с единичной матрицей, умноженным на нормальную функцию плотности и на семинварианты исходного распределения. Благодаря этому разложению появляется возможность приближения распределения суммы  $n$  одинаково распределенных независимых  $n$ -мерных случайных  $n$ -мерными нормальными законами распределений с единичной матрицей (с поправочными членами).

Допустим, в  $n$ -мерном пространстве  $R_n$  дана характеристическая функция  $\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  некоторого закона распределения с функцией плотности  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  случайной величины  $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ :

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{(n)-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n)} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

или в векторных обозначениях

$$\varphi(t) = \int_{R_n} e^{it'x} f(x) dx. \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{t\} &= \{t_1, \dots, t_n\}, \\ \{x\} &= \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{и} \quad \{t'\} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \\ \{dx\} &= \{dx_1, \dots, dx_n\} \end{aligned}$$

Обе стороны (1) умножим на

$$\exp\left(\frac{1}{2} t' K_1 t\right);$$

$$e^{\frac{1}{2} t' K_1 t} \varphi(t) = \int_{(R_n)} e^{it'x + \frac{1}{2} t' K_1 t} f(x) dx, \quad (2)$$

где  $K_1$  — матрица коэффициентов корреляции;

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$n$ -мерного нормального распределения.

Используя разложения

$$e^{t'x - \frac{1}{2} t' K_1 t} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{H_{m_1 \dots m_n}}{m_1! \dots m_n!} t_1^{m_1} \dots t_n^{m_n},$$

можно (2) привести к виду

$$\varphi(t) \exp\left\{\frac{1}{2} t' K_1 t\right\} = \sum_{M=0}^{\infty} \frac{C_{m_1 \dots m_n}}{m_1! \dots m_n!} (-1)^M (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}, \quad (3)$$

где

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\text{и} \quad C_{m_1 \dots m_n} = (-1)^M \int_{(R_n)} H_{m_1 \dots m_n}(x) f(x) dx. \quad (3')$$

Здесь  $H_{m_1 \dots m_n}(x)$  — многомерные полиномы Эрмита, порожденные нормальным распределением с матрицей  $K_1$ . В этом случае вычисление многомерных полиномов Эрмита можно привести к вычислению произведений одномерных полиномов Эрмита:

$$H_{m_1 \dots m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n H_{m_i}(x_i). \quad (4)$$

Принимая во внимание (3'), из (3) получим

$$\varphi(t) \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2\right\} = \sum_{M=0}^{\infty} \left[ \int_{(R_n)} H_{m_1 \dots m_n}(x) f(x) dx \right] \frac{(it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}. \quad (4')$$

С другой стороны известно, что характеристическую функцию можно выразить через семинварианты (или кумулянты) распределения:

$$\ln[\varphi(t)] = \sum_{M=1}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \exp\left\{ \sum_{M=1}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} \right\}. \quad (5)$$

Если случайная величина  $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  имеет среднее значение, равное нулю, и дисперсию, равную единице, а также матрицу коэффициентов корреляций  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & \rho_{nn} \end{pmatrix},$$



то из (5) получим

$$\varphi(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} \right\}. \quad (5')$$

Из (3) и (5') видно, что

$$\sum_{M=0}^{\infty} \frac{C_{m_1 \dots m_n}}{m_1! \dots m_n!} (-1)^M (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} = \exp \left\{ -\sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} \right\}.$$

После разложения в ряд правой части получим

$$1 + \sum_{M=2}^{\infty} \frac{C_{m_1 \dots m_n}}{m_1! \dots m_n!} (-1)^M (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} = 1 - \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} + \frac{1}{2!} \left[ -\sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} \right]^2 + \dots$$

Сравнивая по степеням  $(it_1) \dots (it_n)$ , получим:

$$\begin{aligned} C_{m_i}^{(2)} &= 0 \text{ для всех } i = \overline{1, n}; \\ C_{m_i m_j}^{(2)} &= \rho_{ij} \text{ для всех } i \neq j = \overline{1, n}; \\ C_{m_i m_j m_k}^{(3)} &= -\lambda_{m_i m_j m_k}^{(3)} \text{ для всех } i, j, k = \overline{1, n} \text{ для которых} \\ &\quad m_i + m_j + m_k = 3; \\ C_{m_i m_j}^{(4)} &= (\rho_{ij})^2 + \lambda_{m_i m_j}^{(4)} \text{ для всех } i, j = \overline{1, n} \text{ для которых } m_i = 2, m_j = 2; \\ C_{m_i m_j m_k m_p}^{(4)} &= \lambda_{m_i m_j m_k m_p}^{(4)} \end{aligned}$$

и т. д.

Известно, что для любой функции плотности можно построить ряд Грама—Шарлье типа А таким образом:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_0 f^*(x_1, \dots, x_n) + \sum_{M=1}^{\infty} \frac{C_{m_1 \dots m_n}}{m_1! \dots m_n!} (-1)^M H_{m_1 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) f^*(x_1, \dots, x_n).$$

Выражая  $C$  через  $\rho_{ij}$  и  $\lambda$ , получим

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left[ 1 + \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} x_i x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i, j, k=0 \\ m_i + m_j + m_k = 3}}^n \frac{\lambda_{m_i m_j m_k}}{m_i! m_j! m_k!} H_{m_i \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) \right] f^*(x_1, \dots, x_n).$$

Здесь  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\}$  — функции плотно-

сти нормального распределения с матрицей  $K_1$ .

В практических приложениях для любой функции плотности ряд Грама—Шарлье типа А не дает хорошей оценки скорости сближения. Указанный вопрос приобретает особенное значение, когда рассматривается  $n$ -мерная случайная величина  $\xi(\xi'_1, \dots, \xi'_n)$  в виде

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad (6)$$

здесь  $\xi_1, \dots, \xi_n$  —  $n$ -мерные независимые случайные величины. В этом случае мы сталкиваемся с вопросом, относящимся к асимптотическим свойствам наших разложений при больших значениях  $n$ . Для упрощения рассмотрим случай равных компонент, когда  $\xi_1, \dots, \xi_n$  в (6) имеют одно и то же распределение со средним значением  $a_1 \{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$  и стандартным отклонением  $\sigma_1 \{\sigma_1^{(1)}, \dots, \sigma_1^{(n)}\}$ , так что  $a = na_1$ ,  $\sigma = \sigma_1 \sqrt{n}$ .

Пусть  $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$  — характеристическая функция нормированной величины  $\frac{\xi - a}{\sigma}$ , а  $\varphi_1(t) = \varphi_1(t_1, \dots, t_n)$  — характеристическая функция отклонения  $\xi_1 - a_1$ . Тогда по свойствам характеристических функций

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \left[ \varphi_1 \left( \frac{t_1}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \frac{t_2}{\sigma_1 \sqrt{n}}, \dots, \frac{t_n}{\sigma_1 \sqrt{n}} \right) \right]^n. \quad (7)$$

Обозначим через  $\lambda_{m_1 \dots m_n}$  семиинварианты величины  $\xi - a = \sum_{i=1}^n (\xi_i - a_1)$ ,

а через  $\lambda'_{m_1 \dots m_n}$  — семиинварианты  $\xi_1 - a_1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) и положим

$$\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)} = \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{\sigma^M}; \quad \lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)} = \frac{\lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)}}{\sigma_1^M}; \quad (7')$$

$$\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)} = n \lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)};$$

$$\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)} = \frac{n \lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)}}{\sigma^M} = \frac{\lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)}}{\frac{\sigma^{M-2}}{n}}. \quad (7'')$$

Как и выше, выразим характеристическую функцию отклонения случайных величин  $\xi_1 - a_1$  через семиинварианты тех же величин:

$$\varphi_1(t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ \sum_{M=1}^{\infty} \frac{\lambda'_{m_1 \dots m_n}{}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} (it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n} \right\}.$$



Учитывая (7) и (7'), можно написать

$$\varphi(t_1, \dots, t_n) = \exp \left\{ n \sum_{M=1}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \left( \frac{it_1}{\sqrt{n}} \right)^{m_1} \dots \left( \frac{it_n}{\sqrt{n}} \right)^{m_n} \right\}. \quad (8)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lambda_{m_i}^{(1)} &= 0 \quad (i = \overline{1, n}); \\ \lambda_{m_i}^{(2)} &= \sigma_1^2 \quad (i = \overline{1, n}); \\ \lambda_{m_i m_j}^{(2)} &= \rho_{ij} \quad (i \neq j = \overline{1, n}), \end{aligned}$$

то при условиях (8) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} &= \exp \left\{ - \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \right. \\ &\left. + n \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \left( \frac{it_1}{\sqrt{n}} \right)^{m_1} \dots \left( \frac{it_n}{\sqrt{n}} \right)^{m_n} \right\} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} &= \exp \left\{ - \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \right. \\ &\left. + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \frac{(it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}}{n^{\frac{M-2}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Правую часть разложим в ряд:

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n t_i^2 \right\} &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \left[ - \sum_{i \neq j=1}^n \rho_{ij} t_i t_j + \right. \\ &\left. + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \frac{(it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}}{n^{\frac{M-2}{2}}} \right]^{\kappa} = \\ &= 1 + \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk} (it_j) (it_k) + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \frac{(it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}}{n^{\frac{M-2}{2}}} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk} (it_j) (it_k) + \sum_{M=3}^{\infty} \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \frac{(it_1)^{m_1} \dots (it_n)^{m_n}}{n^{\frac{M-2}{2}}} \right]^2 + \dots \end{aligned}$$

Для искомой функции плотности получим выражения:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f^*(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk} \frac{\partial^2 f^*}{\partial x_j \partial x_k} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk}^2 \frac{\partial^4 f^*}{\partial x_j^2 \partial x_k^2} + 2 \rho_{12} \rho_{13} \frac{\partial^4 f^*}{\partial x_1^2 \partial x_2 \partial x_3} + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 2 \rho_{1n} \rho_{n, n-1} \frac{\partial^4 f^*}{\partial x_1 \partial x_{n-1} \partial x_n^2} - \frac{1}{n^{1/2}} \sum_3^3 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \left( \frac{\partial^3 f^*}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \right. \\ &+ \rho_{12} \frac{\partial^5 f^*}{\partial x_1^{m_1+1} \partial x_2^{m_2+1} \partial x_3^{m_3} \dots \partial x_n^{m_n}} + \rho_{13} \frac{\partial^5 f^*}{\partial x_1^{m_1+1} \partial x_2^{m_2} \partial x_3^{m_3+1} \partial x_4^{m_4} \dots \partial x_n^{m_n}} + \dots + \\ &+ \rho_{n, n-1} \frac{\partial^5 f^*}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_{n-1}^{m_{n-1}+1} \partial x_n^{m_n+1}} + \frac{1}{n} \sum_4^4 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(M)}}{m_1! \dots m_n!} \left( \frac{\partial^4 f^*}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} + \right. \\ &\left. + \rho_{12} \frac{\partial^6 f^*}{\partial x_1^{m_1+1} \partial x_2^{m_2+1} \partial x_3^{m_3} + \dots + \partial x_n^{m_n}} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

В этом разложении

$$\frac{\partial^M f^*(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}} = (-1)^M H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) f^*(x_1, \dots, x_n),$$

где  $H_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$  — полиномы Эрмита, порожденные функцией  $f^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\}$  — плотностью нормального распределения с единичной матрицей  $K_1$ .

Символ  $\sum_{n_1}^n \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(n_1)}}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^M f^*}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}$  означает, что сумма берется для всех значений  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ;  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = n_1$ .

Учитывая (7') и (7''), разложение (9) можно написать в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f^*(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk} H(x_j, x_k) f^*(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{f^*(x_1, \dots, x_n)}{2!} \left[ \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk}^2 H_{22}(x_j, x_k) + 2 \rho_{12} \rho_{13} H_{211}(x_1, x_2, x_3) + \dots + \right. \\ &+ 2 \rho_{1n} \rho_{n, n-1} H_{10 \dots 012}(x_1 \dots x_n) \left. - \sum_3^3 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(3)}}{m_1! \dots m_n!} \sigma^3 [H_{m_1 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) + \right. \\ &+ \rho_{12} H_{m_1+1, m_1+1, m_2 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) + \dots + \rho_{n, n-1} H_{m_1 \dots m_{n-1}+1, m_n+1}(x_1, \dots, \\ &\dots, x_n)] f^*(x_1, \dots, x_n) + \sum_4^4 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(4)}}{\sigma^4 m_1! \dots m_n!} [H_{m_1 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) + \\ &\left. + \rho_{12} H_{m_1+1, m_2+1, m_3 \dots m_n}(x_1 \dots x_n)] f^*(x_1, \dots, x_n) + \dots \right. \end{aligned}$$

или

$$f(x_1, \dots, x_n) = f^*(x_1, \dots, x_n) \left\{ 1 + \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk} (x_j, x_k) + \frac{1}{2!} \left[ \sum_{j \neq k=1}^n \rho_{jk}^2 H_{22}(x_j, x_k) + \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& + 2\rho_{12}\rho_{13}H_{211}(x_1, x_2, x_3 + \dots + 2\rho_{1n}\rho_{n, n-1}H_{10\dots 12}(x_1, \dots, x_n) \Big] - \\
& - \sum_3^3 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(3)}}{m_1! \dots m_n!} (H_{m_1 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) + \rho_{12}H_{m_1+1, m_2+1, m_3 \dots m_n}(x_1 \dots x_n) + \\
& + \rho_{n, n-1}H_{m_1 \dots m_{n-1}+1, m_n+1}(x_1 \dots x_n) + \dots) + \sum_4^4 \frac{\lambda_{m_1 \dots m_n}^{(4)}}{m_1! \dots m_n!} (H_{m_1 \dots m_n} + \\
& + \rho_{12}H_{m_1+1, m_2+1, m_3 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots) + \dots \Big\}.
\end{aligned}$$

В частном случае, когда  $n = 3$ , получим

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = & \{1 + \rho_{12}x_1x_2 + \rho_{13}x_1x_3 + \rho_{23}x_2x_3 + \rho_{21}\rho_{31}x_2x_3(x_1^2 - 1) + \\
& + \rho_{12}\rho_{23}x_1x_3(x_2^2 - 1) + \rho_{13}\rho_{23}x_1x_2(x_3^2 - 1) + \frac{\rho_{12}^2}{2}(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) + \\
& + \frac{\rho_{13}^2}{2}(x_1^2 - 1)(x_3^2 - 1) + \frac{\rho_{23}^2}{2}(x_2^2 - 1)(x_3^2 - 1) - \\
& - \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_3^3 \frac{\lambda_{m_1 m_2 m_3}^{(3)}}{m_1! m_2! m_3!} (H_{m_1 m_2 m_3} + \rho_{12}H_{m_1+1, m_2+1, m_3} + \dots) + \\
& + \frac{1}{3} \sum_4^4 \frac{\lambda_{m_1 m_2 m_3}^{(4)}}{m_1! m_2! m_3!} (H_{m_1 m_2 m_3} + \rho_{12}H_{m_1+1, m_2+1, m_3} + \dots) + \dots \} f^*(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем разложение произвольной  $n$ -мерной функции плотности по полиномам Эрмита, порожденным многомерным нормальным распределением с единичной матрицей  $K_1$ , умноженным на нормальную функцию плотности и на семиинварианты исходного распределения.

Из разложения (9) видно, что сумма первых членов не зависит от  $n$ . Обозначим ее через  $K(\rho, x)$ . Очевидно, что при  $x_i > 0$ ,  $\rho_{j,k} < 1$

$$K(\rho, x) = 1 + O[(\rho x)^k] N,$$

где  $N$  — число членов.

Если существует такое число  $A$ , не зависящее от  $\rho$  и  $x$ , что

$$|K(\rho_1 x) - 1| \leq A(\rho x)^k < \frac{\varepsilon}{N} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то в этом случае можно пренебречь  $K(\rho, x) - 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Математические методы статистики. ГИТЛ, 1948.
2. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи, т. I. "Советское радио", 1961.
3. Сираждинов С. Х. К теории многомерных полиномов Эрмита. Канд. Дисс. Ташкентский университет, 1949.
4. Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. ГИТЛ, 1949.

Т. Г. Ҳејдаров

#### Өлчүлү ганунларын Ечворт типли сыралаара ажрылмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ихтијари  $n$  өлчүлү сыхлыг функцијасынын Ермит чоҳ-һәддиләринә көрә ажрылма ғајдасы тәклиф едилир.

Һәммин ажрылма ғајдасына әсасән, ваһид матрисли  $n$ -өлчүлү нормал пајланма ғајдалары васитәсилә  $n$ -дәнә ејни чүр пајланмыш асылы олмајан  $n$ -өлчүлү тәсадүфи кәмијјәтин һәллинин пајланмасына јахынлашма имканы јараныр.

Алыннан нәтичәләр пајланманын јығылма тезлији вә нормаллығыны гиймәтләндирмәјә имкан верир.



Д. М. МАНИУРОВ

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В данной работе исследовалась задача параметрического линейного программирования, когда только коэффициенты функции цели зависят от параметра, а ограничения представляют собой частную модель линейного программирования, осложненную рядом дополнительных условий общего вида [1].

Задача 1. Требуется найти для каждого  $\lambda$  в интервале  $[\alpha, \beta]$ , где  $\alpha$  и  $\beta$ —действительные числа, вектор  $x$ , максимизирующий

$$(c' + \lambda c'')x \quad (1)$$

при ограничениях

$$Ax = a, \quad (2)$$

$$x \geq 0, \quad (3)$$

и дополнительных условиях

$$Bx = b, \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$ —матрицы размеров  $m \times n$  и  $l \times n$ , соответственно;  $a$  и  $b$ —векторы соответственно с  $m$  и  $l$  компонентами;  $c'$  и  $c''$ — $n$ -мерные векторы и  $x$ —переменный  $n$ -мерный вектор. Предполагается, что матрица  $A$  имеет простую структуру, что позволяет сравнительно просто решать задачу (1)—(3) методом улучшения плана при любой линейной форме (1), а число условий  $l$  не слишком велико.

Рассмотрим случай, часто встречающийся на практике, когда множество  $G$ , определяемое условиями (2) и (3), представляет собой выпуклый многогранник. Примером может служить модель транспортной задачи. Задачу 1 сформулируем в следующей эквивалентной форме, предложенной в [2].

Задача 2. Требуется найти для каждого  $\lambda$  в интервале  $[\alpha, \beta]$  числа  $y_k$ , максимизирующие

$$\sum_{k=1}^N (c_{1k} + \lambda c_{2k}) y_k \quad (5)$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^N P_k y_k = b,$$

$$\sum_{k=1}^N y_k = 1, \quad (6)$$

$$y_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$P_k = Bx_k, \quad (c_{1k} + \lambda c_{2k}) = (c' + \lambda c'')x_k \quad (7)$$

при  $k = 1, \dots, N$ , а  $x_1, x_2, \dots, x_N$ —полный набор вершин множества  $G$ , которое, по предположению, является выпуклым многогранником.

Связь между оптимальными планами задач 1 и 2 устанавливается следующей леммой, аналогичной лемме в [2].

Лемма. Если числа  $\{y_k\}$  решают задачу 2, то вектор

$$x = \sum_{k=1}^N x_k y_k \quad (8)$$

решает задачу 1.

В нашем случае для справедливости леммы достаточно показать совпадение значений (1) и (5). Действительно, учитывая (7) и (8), имеем

$$(c' + \lambda c'')x = \sum_{k=1}^N (c' + \lambda c'')x_k y_k = \sum_{k=1}^N (c_{1k} + \lambda c_{2k}) y_k.$$

Теперь рассмотрим процесс, который позволяет для различных интервалов  $\lambda$  определить соответствующие оптимальные планы. Приводимый нами вычислительный алгоритм является видоизменением принципа разложения для задач линейного программирования, предложенного Данцигом и Вульфом [2].

Допустим, что задача 2 не вырождена и мы имеем некоторый опорный план. Используя метод разложения Данцига—Вульфа, найдем решение задачи при  $\lambda = \alpha$ . Окончательный базис состоит из  $l+1$  векторов вида  $(P_k; 1)$ . Так как коэффициенты линейной формы задачи 2 равны  $c_{1k} + \lambda c_{2k}$ , то для базисных векторов „оценки“ ( $\pi$ ;  $\pi_{l+1}$ ) удовлетворяют соотношению

$$\pi P_k + \pi_{l+1} = c_{1k} + \lambda c_{2k}.$$

Отсюда следует, что компоненты „оценок“ ( $\pi$ ;  $\pi_{l+1}$ ) должны быть линейными функциями параметра  $\lambda$ , то есть

$$(\pi; \pi_{l+1}) = (\pi' + \lambda \pi''; \pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}).$$

Тогда вектор „приведенной стоимости“ примет вид

$$c' + \lambda c'' - (\pi' + \lambda \pi'')B = (c' - \pi'B) + \lambda(c'' - \pi''B). \quad (9)$$

Для определения вектора, вводимого в базис, в [2] формировались вспомогательные задачи линейного программирования. В данном случае из (9) следует, что каждая вспомогательная задача уже представляет собой частный случай задачи параметрического линейного программирования.

Найти вектор  $x$ , который максимизирует линейную форму

$$[(c' - \pi'B) + \lambda(c'' - \pi''B)]x$$

и удовлетворяет ограничениям

$$Ax = a, \\ x \geq 0.$$

Эту вспомогательную задачу параметрического линейного программирования условимся называть задачей  $H$ . Предположим, что она не вырождена. Поскольку коэффициенты линейной формы задачи  $H$  равны компонентам вектора  $c = (c' - \pi'B) + \lambda(c'' - \pi''B)$ , то разность  $z_j - c_j$  от-



носителю любого базиса можно представить в виде линейной функции от  $\lambda$ :

$$z_j - c_j = q'_j + \lambda q''_j,$$

а число  $cx - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1})$  следующим образом:

$$cx - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) = [(c' - \pi'B)x - \pi'_{l+1}] + \lambda [c'' - \pi''B)x - \pi''_{l+1}] = p' + \lambda p'', \quad (10)$$

где  $p', p'', q'_j$  и  $q''_j$  при  $j = 1, 2, \dots, n$  действительные числа,  $x \in G$ . Тогда, так как задача 2 имеет решение при  $\lambda = \alpha$ , то

$$q'_j + \alpha q''_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \text{и} \quad p' + \alpha p'' \leq 0,$$

отсюда следует, что система неравенств

$$q'_j + \lambda q''_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

$$p' + \lambda p'' \leq 0 \quad (12)$$

совместна.

Учитывая (11), выберем

$$\underline{\lambda}_1 = \begin{cases} \max \left( -\frac{q'_j}{q''_j} \right) \\ q''_j > 0 \\ -\infty, \text{ если все } q''_j \leq 0, \end{cases} \quad \bar{\lambda}_1 = \begin{cases} \min \left( -\frac{q'_j}{q''_j} \right) \\ q''_j < 0 \\ +\infty, \text{ если все } q''_j \geq 0. \end{cases}$$

Далее из (12) имеем

$$\underline{\lambda}_2 = \begin{cases} -\frac{p'}{p''} \text{ при } p'' < 0 \\ -\infty, \text{ если } p'' \geq 0, \end{cases} \quad \bar{\lambda}_2 = \begin{cases} -\frac{p'}{p''} \text{ при } p'' > 0 \\ +\infty, \text{ если } p'' \leq 0. \end{cases}$$

И, наконец,

$$\lambda_1 = \max(\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2) \quad \text{и} \quad \bar{\lambda} = \min(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2).$$

Могут встретиться следующие случаи.

**С л у ч а й 1.** Пусть  $\bar{\lambda}_2 \leq \bar{\lambda}_1$ . В этом случае решение задачи 2 при  $\lambda = \alpha$  будет совпадать с оптимальным планом для всех  $\lambda$ , удовлетворяющих условию  $\alpha \leq \lambda \leq \bar{\lambda}_2$ . Если  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = +\infty$ , процесс решения закончен.

Предположим, что  $\bar{\lambda}_2$  конечно и  $\bar{\lambda}_2 = -\frac{p'}{p''}$  при  $p'' > 0$ , или, что то же самое,

$$[(c' - \pi'B)\bar{x} - \pi'_{l+1}] + \bar{\lambda}_2[(c'' - \pi''B)\bar{x} - \pi''_{l+1}] = 0,$$

где  $\bar{x}$  является решением задачи  $H$  при  $\lambda \in [\alpha, \bar{\lambda}_1]$ . Учитывая это, возьмем новый вектор и соответствующую ему стоимость следующим образом:

$$P_{k_0} = (B\bar{x}; 1) \quad \text{и} \quad (c_{1k_0} + \lambda c_{2k_0}) = (c' + \lambda c'')\bar{x}. \quad (13)$$

Далее в базис задачи 2 добавим вектор  $P_{k_0}$ , сформулируем новый базис по правилам второго алгоритма метода последовательного улучшения плана и определим новые „оценки“. Таким образом, мы имеем всю информацию, необходимую для продолжения процесса решения задачи 2.

**С л у ч а й 2.** Пусть  $\bar{\lambda}_2 = \alpha \leq \bar{\lambda}_1$ , тогда аналогично случаю 1 вычисляем всю необходимую информацию для следующего шага. Из [3]

известно, что такая ситуация не может сохраняться неограниченно долго в силу непрерывности чередования базисов.

**С л у ч а й 3.** Пусть  $\bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_1$ , тогда для задачи  $H$  определим следующий интервал изменения  $\lambda \in [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1]$  и соответствующий оптимальный план  $\bar{x}$ .

а) допустим  $\bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_1$ . Учитывая это, можем доказать, что условия оптимальности задачи 2 не будут нарушаться при  $\lambda \in [\alpha, \bar{\lambda}_2]$ .

Для оптимального плана  $\bar{x}$  задачи  $H$  при  $\lambda \in [\alpha, \bar{\lambda}_1]$  имеет место соотношение

$$[(c' - \pi'B) + \lambda(c'' - \pi''B)] \bar{x} = c \bar{x} \geq cx \quad (14)$$

для всех  $x \in G$ , равенство соблюдается только для  $\bar{x}$  при  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и в этой точке  $\bar{\lambda}$  условие оптимальности имеет вид

$$c \bar{x} - (\pi'_{l+1} + \bar{\lambda}_1 \pi''_{l+1}) = c \bar{x} - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) < 0. \quad (15)$$

Из (15) и (14) следует, что в интервале  $[\alpha, \bar{\lambda}_1]$

$$cx - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) < 0 \quad (16)$$

для всех  $x \in G$  и в том числе для  $\bar{x} \in G$ , поэтому оптимальный план задачи 2 остается тем же самым не только для  $\lambda \in [\alpha, \bar{\lambda}_1]$ , но и для некоторого интервала при  $\lambda > \bar{\lambda}_1$ . Ввиду того, что  $\bar{x}$  является оптимальным планом задачи  $H$  в интервале  $[\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1]$ , то

$$c \bar{x} \geq cx \quad (17)$$

для всех  $x \in G$ , тогда

$$c \bar{x} - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) \geq cx - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) \quad (18)$$

для  $\lambda \in [\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1]$ . Учитывая (16), найдем интервал изменения  $\lambda$ , в котором

$$c \bar{x} - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) \leq 0. \quad (19)$$

Из (15), (18) и (19) следует, что правый конец интервала меньше, чем  $\bar{\lambda}_2$ , то есть  $\bar{\lambda}_2 < \bar{\lambda}_2$ . Далее, учитывая (18) и (19), можем сказать, что при  $\lambda \in [\alpha, \bar{\lambda}_2]$  имеет место соотношение

$$cx - (\pi'_{l+1} + \lambda \pi''_{l+1}) \leq 0 \quad (20)$$

для всех  $x \in G$ . Таким образом, пришли к случаю 1.

б) если  $\bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_1 \geq \bar{\lambda}_2$ , то аналогичные рассуждения пункта а) также приводят к случаю 1.

Результаты пунктов а) и б) легко переносятся на случай с)  $\bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_1$ . Для этого достаточно решать задачу  $H$  до тех пор, пока один из интервалов изменения  $\lambda$  не будет включать точку  $\lambda$ , в которой совместно с соответствующим оптимальным планом (20) удовлетворяется как строгое равенство. Таким образом, приходим к а) или б) и далее к случаю 1.

В результате исследования этих трех случаев мы определяем интервал изменения  $\lambda$ , которому соответствует некоторый оптимальный план задачи 2. Аналогичным образом определяется следующий интервал изменения  $\lambda$  и соответствующий оптимальный план. Этот процесс продолжается до тех пор, пока один из интервалов не включит  $\lambda = \beta$ .



# ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г. Планирование и экономико-математические методы. Изд-во „Наука“, 1964.
2. Dantzig G. B., Wolfe P. Oper. Res., 8, № 1, 1960.
3. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз, 1961.
2. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. С. Задачи и методы линейного программирования. Изд-во „Советское радио“, 1961.

Д. М. Манжуров

## Параметрик хэтти програмлашдырманын бир синиф мäsäläси һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (2) вә (3) шәртләри илә тә'јин олуһан чоһлугдан вә габарыг чоһүзлүләрден бәһс едилір.

Шәртләрин матриси, мүәјјән гурулуша малик олан (1)–(4) мäsäläсинин әдәди һәлли үсулу верилір.

АЗӘРБАЈҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийәт елмләри сәријасы, 1966, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 4

И. Ш. ИБРАМХАЛИЛОВ

## НАХОЖДЕНИЕ СОСТОЯТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Возьмем последовательность  $\xi_i$  независимых, одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения  $\pi(x, \theta) \in \{\pi(x, \theta)\}$ , где  $\theta$  — неизвестный числовой параметр. Всякую симметричную функцию величин  $\xi_i$  можно рассматривать как функционал от эмпирической функции распределения  $\pi_n^*(x)$  величин  $\xi_i$ . Каждая конкретная выборка представляется определенной точкой  $z_n = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  в пространстве выборок переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Обозначим  $\hat{\theta}(z_n) = \hat{\theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , а истинное значение параметра —  $\theta$ .

Определение. Случайная функция  $g(\bar{\xi}, \theta)$ ,  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\theta \in \Theta$ , принадлежит пространству  $L_2^{(k)}(\pi)$ , если  $M |g(\bar{\xi}, \theta)|^2 < \infty$  для любого  $\theta \in \Theta$ .

Теорема 1. Симметричная по  $x_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ , функция  $\varphi(\bar{x}) \in L_2^{(k)}(\pi)$  — несмешанная оценка параметра  $\theta$ , тогда

$$n^{-k} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}) = \hat{\theta}(z_n) \quad (1)$$

будет состоятельной и асимптотически нормальной оценкой  $\theta$ .

Доказательство. Обозначим  $f(\bar{x}, \theta) = \varphi(\bar{x}) - \theta$ . Докажем, что  $\hat{\theta}(z_n) - \theta$  сходится по вероятности к нулю. Очевидно, что

$$\begin{aligned} n^{-k} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n f(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}, \theta) = \\ = (-1)^{k+1} \int \dots \int f(\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^k d\pi(x_i, \theta) + \int \dots \int f(\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^k dK_n(x_i) - \\ - \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j C_k^j \int \dots \int f(\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^{k-j} d\pi_n^*(x_i) \prod_{\gamma=1}^j d\pi_\gamma, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \pi_\gamma = \pi(x_{k-\gamma+1}), \quad \gamma = \overline{1, k}, \quad C_k^j = \text{const}, \quad j = \overline{0, k}, \\ K_n(x) = \pi_n^*(x) - \pi(x, \theta). \end{aligned}$$



При  $n \rightarrow \infty$  функционал

$$\Phi(\pi_n^*) = n^{\frac{\kappa}{2}} \int \dots \int (\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^{\kappa} dK_n(x_i) \quad (2)$$

ограничен по вероятности [4]. Проверка каждого члена показывает, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\kappa-1} (-1)^j C_{\kappa}^j \int \dots \int f(\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^{\kappa-1} d\pi_n^*(x_i) \prod_{i=1}^{\kappa-1} d\pi_i = \\ = A_1 n^{-1} \sum_{i=1}^{\kappa-1} [l(\xi_i) - M l(\xi_i)] + \sum_{i=2}^{\kappa-1} 0 \left( n^{-\frac{i}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $0 \left( n^{-\frac{i}{2}} \right) \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$   $i = \overline{2, \kappa-1}$  (сходимость по вероятности);

$$A_1 = \sum_{j=1}^{\kappa-1} (-1)^j C_{\kappa}^j (\kappa - j) = \kappa; \quad l(x) = \int \dots \int f(\bar{x}, x, \theta) \prod_{i=1}^{\kappa-1} d\pi(x_i, \theta).$$

Тогда (2) можно записать в виде

$$\hat{\theta}(\bar{z}_n) - \theta = \kappa n^{-1} \sum_{i=1}^{\kappa-1} [l(\xi_i) - M l(\xi_i)] + \sum_{i=2}^{\kappa-1} 0 \left( n^{-\frac{i}{2}} \right) + n^{-\frac{\kappa}{2}} \Phi(\pi_n^*). \quad (4)$$

Очевидно, что для

$$\begin{aligned} \zeta_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{\kappa-1} [l(\xi_i) - M l(\xi_i)] \\ M \zeta_n = 0 \quad \text{и} \\ D^2 \zeta_n = n^{-1} \int \left[ \int (\kappa - 1) \int f(\bar{x}, x, \theta) \prod_{i=1}^{\kappa-1} d\pi(x_i, \theta) - \right. \\ \left. - \int (\kappa) \int f(\bar{x}, \theta) \prod_{i=1}^{\kappa} d\pi(x_i, \theta) \right]^2 d\pi(x, \theta). \end{aligned}$$

Из теоремы Хинчина (см. [3], § 20.5) следует, что  $\zeta_n$  сходится по вероятности к нулю. Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  из (4) получим, что  $\hat{\theta}(\bar{z}_n) - \theta$  сходится по вероятности к нулю.

В силу теоремы Линдберга — Леви (см. [3], § 17.4)  $\sum_{i=1}^{\kappa-1} [l(\xi_i) - M l(\xi_i)]$  асимптотически  $N(0, \sqrt{n} D \zeta_n)$ . Тогда величина

$$(\sqrt{n} D \zeta_n)^{-1} \sum_{i=1}^{\kappa-1} [l(\xi_i) - M l(\xi_i)]$$

асимптотически  $M(0, 1)$ . Наконец, из теоремы сходимости (см. [3], § 20.6) следует, что величина  $\sqrt{n} (\kappa D \zeta_n)^{-1} (\hat{\theta}(\bar{z}_n) - \theta)$  асимптотически  $N(0, 1)$ , следовательно,  $\hat{\theta}(\bar{z}_n)$  асимптотически  $N\left(0, n^{-\frac{1}{2}} \kappa D \zeta_n\right)$ .

Теорема 2. Симметричная по  $x_i, i = \overline{1, \kappa}$ , функция  $\varphi_{\varepsilon}(\bar{x}) \in L_2^{(\kappa)}(\pi)$  есть  $\varepsilon$ -смещенная оценка параметра  $\theta$ . Тогда существует последовательность функций  $\{\varphi_n(\bar{x})\} \in L_2^{(\kappa)}(\pi)$  такая что

$$n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}})$$

будет состоятельной оценкой  $\theta$ .

Доказательство. Выберем  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\varphi_n(\bar{x})\}$  следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\bar{x}, \varepsilon_n) = \varphi(\bar{x}).$$

Рассмотрим статистику

$$n^{-\kappa} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{\kappa}=1}^{n, \dots, n} \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) = b_n.$$

Из теоремы 1 следует, что при  $n \rightarrow \infty$

$$n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) \rightarrow M \varphi_m(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}})$$

(сходимость по вероятности). Тогда для любого  $\eta_i^{(1)} > 0$  и  $\eta_i^{(2)} > 0$  существует такое число  $l(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)})$ , что при всех  $l > l(\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)})$

$$P \left\{ \left| l^{-\kappa} \sum \dots \sum \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) - M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) \right| > \eta_i^{(1)} \right\} < \eta_i^{(2)}.$$

Положим  $\varphi_n(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}, \varepsilon_j)$  при  $n_j \leq n < n_{j+1}$ . Возьмем бесконечно малое  $\delta > 0$  и обозначим:

$$G_1 = \left| n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) - \theta \right| > \delta,$$

$$\begin{aligned} G_2 = \left| n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) - M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) + \right. \\ \left. + M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) - \theta \right| > \delta, \end{aligned}$$

$$G_3 = \left| n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) - M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) - \right. \\ \left. - M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j) - \theta \right| > \delta -$$

Очевидно, что  $P(G_1) = P(G_2) \leq P(G_3)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_n) = M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}})$ .

Тогда при  $n > n_j$  будет

$$|\theta - M \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}, \varepsilon_j)| \leq \varepsilon_j.$$

Если  $j$  достаточно велико, то сначала  $\delta$  можно выбрать так, чтобы была (возьмем  $\eta_j^{(1)} = \eta_j^{(2)} = 2^{-j}$ )  $\delta > \varepsilon_j + 2^{-j}$ .

Тогда  $P(G_1) \leq 2^{-j}$ . При  $j \rightarrow \infty$  получим требуемое.

Теорема 3. Функция  $\varphi(\bar{x}, \varepsilon)$  симметрична по  $x_i, i = \overline{1, \kappa}$ , и есть  $\varepsilon$ -смещенная оценка  $G(\theta)$ , где  $G(\theta)$  — монотонна и непрерывна на некотором конечном интервале. Кроме этого,  $\varphi(\bar{x}, \varepsilon) \in L_2^{(\kappa)}(\pi)$ . Тогда существует последовательность функций  $\{\varphi_n(\bar{x})\} \in L_2^{(\kappa)}(\pi)$  такая, что статистика

$$G^{-1} \left( n^{-\kappa} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_{\kappa}=1}^n \varphi_n(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{\kappa}}) \right)$$

будет состоятельной оценкой  $\theta$ .



Доказательство. Последовательности  $\{\varepsilon_n\}$  и  $\{\varphi_n(\bar{x})\}$  выбираем таким же образом, как в теореме 2. Тогда из предыдущих теорем следует, что при  $N \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \left| N^{-k} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \varphi_N(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}) - G(\theta) \right| > \alpha \right\} \rightarrow 0,$$

где  $\alpha > 0$  — сколь угодно малое число.

Обозначим

$$L_N(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = N^{-k} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \varphi_N(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}). \quad (5)$$

Из сходимости последовательности (5) по вероятности  $G(\theta)$  вытекает (см. [1], теорема 4, § 3, гл. II), что любая подпоследовательность

$$\{L_{m_N}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_N})\} \quad (6)$$

последовательности (5) содержит другую последовательность

$$\{L_{m_N}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_N}^{(1)})\} \quad (7)$$

такую, что

$$P \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} L_{m_N}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_N}^{(1)}) = G(\theta) \right\} = 1.$$

При  $k \rightarrow \infty$  будет  $m_N^{(1)} \rightarrow \infty$ , тогда

$$P \left\{ G^{-1} \left( \lim_{N \rightarrow \infty} L_{m_N}^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m_N}^{(1)}) \right) = \theta \right\} = 1. \quad (8)$$

Это показывает, что из каждой подпоследовательности (6) всегда можно выбрать другую подпоследовательность (7) такую, что для всех этих с вероятностью 1 соотношение (8) верно, то за  $m_N^{(1)}$  можно принимать  $n$ .

Следствие. Если в теореме 3 взять  $\varepsilon = 0$ , то из теорем 1 и 3 вытекает, что  $G^{-1} \left( n^{-k} \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}) \right)$  будет состоятельной оценкой параметра  $\theta$ . Эффективность полученных оценок можно повысить следующим образом. Предположим, что для функции  $\varphi(\bar{x}, \theta)$  выполнены следующие условия:

1. При любом  $\theta \in \Theta M \psi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}, \theta) = 0$ .
2. При любом  $\theta$  и почти для всех  $x$  существуют ограниченные производные

$$\frac{\partial \psi(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \psi(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 \psi(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta^3} \text{ и } \frac{\partial^i \psi(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta^i} \neq 0; i = 1, 2; \frac{\partial^i \psi(\bar{x}, \theta)}{\partial \theta^i} \in L_2^{(k)}(\pi), i = 1, 2, 3.$$

3.  $\psi(\bar{x}, \theta)$  — симметрична относительно аргументов  $x_i, i = 1, k$  и  $\psi(\bar{x}, \theta) \in L_2^{(k)}(\pi)$ .

Пусть  $\hat{\theta} = \theta_0 + n^{-\frac{1}{2}} \eta_n$  — некоторая оценка параметра  $\theta$ , где  $\eta_n$  асимптотически  $N(0, \sigma)$ . Используем эту оценку для нахождения лучшей оценки из уравнения

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \psi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}, \theta) = 0. \quad (9)$$

Так как уравнение (9) трудно разрешимо, пользуются приближенными решениями. Таким образом, полученные оценки обладают высокими асимптотическими эффективностями. Метод доказательства почти совпадает с методом, изложенным в работе [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов, М., 1965.
2. Ибраһимов И. Ш. ДАН Азерб. ССР, 1964, № 6.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Изд-во ИЛ, 1948.
4. Филиппова А. А. Теория вероятностей и ее применение, т. 7. вып. 1, 1962,

И. Ш. Ибраһимов

#### Пајлама параметрләр үчүн дэјанэтли гијмәтләр тапылмасы

#### ХҮЛАСӘ

Тутаг ки, тәсадүфи дэјишән  $\xi_i, i = 1, n$  кәмијәтләри бир-бириндән асылы дэјилдир вә һәр бири  $\pi(x, \theta) \in \{\pi(x, \theta)\}$  гануну илә пајланыб, һарадакы  $\theta$  мәлум олмајан параметрдир.

$L_2^{(k)}(\pi)$  фәзанын функцијаларындан истифадә едиб, параметр үчүн дэјанэтли гијмәтләр верилир вә бәзи һалларда бу гијмәтләр чох бөјүк  $n$ -ләр үчүн нормал гануна табә олдуғу көстәрилир.



Ф. К. ИСАЕВ, А. Х. ХАЛИЛОВ

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ F-ЦЕНТРОВ В НЕКОТОРЫХ ЩЕЛОЧНО- ГАЛОИДНЫХ ФОСФОРАХ СО СМЕШАННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Рядом авторов были получены зависимости, характеризующие процесс обесцвечивания F-центров как в чистых, так и в активированных примесями ионов одно- и двухвалентных металлов щелочно-галлоидных кристаллах, окрашенных при комнатной и более низкой температурах [1—13]. Изучению влияния анионных примесей на процесс обесцвечивания F-центров окраски уделялось недостаточное внимание и поэтому соответствующих данных мало [14—15]. В то же время детальное исследование указанного вопроса представляет научный и практический интерес.

В данной работе исследовалась зависимость оптической устойчивости F-центров окраски от соотношения компонентов, отличающихся своими анионами в основании смешанных монокристаллических KClKBr фосфоров, активированных серебром и медью. Последние были выращены нами из расплава по методу Киропулоса с вращающимся холодильником. Во всех исследованных нами смешанных кристаллофосфорах концентрация хлорида серебра и меди была взята по 0,5 мол % в расплаве. Фосфоры возбуждались излучением от рентгеновской трубки с вольфрамовым антикатодом (45 кВ, 10 мА).

Для исследования оптической устойчивости F-центров окраски в указанных выше смешанных кристаллофосфорах в зависимости от содержания компонентов с разными анионами в основании фосфора были проделаны следующие операции.

1. Кристаллофосфоры рентгенизовались при комнатной температуре, записывались их поглощения в F-полосе на спектрофотометре СФ-2М. После измерения поглощения в F-полосе производилось облучение рентгенизованных кристаллофосфоров светом от лампы накаливания через интерференционные светофильтры с максимумами пропускания при длинах волн, соответствующих максимумам F-полос поглощения исследуемых образцов, затем снова промерялось их поглощение в F-полосе. При этом число световых квантов с разными частотами, попадавших на исследуемые рентгенизованные кристаллофосфоры во время облучения, было приблизительно одинаково.

2. Те же измерения производились для указанных смешанных кристаллофосфоров, рентгенизованных при 363°К.

В таблице приведены относительные уменьшения коэффициента поглощения в F-полосе после облучения рентгенизованных смешанных кристаллофосфоров F-светом. Здесь  $\chi_m$ ,  $\chi'_m$ ,  $\chi_{1m}$  и  $\chi'_{1m}$  — коэффициенты, поглощения в максимуме F-полосы поглощения фосфоров, соответственно, рентгенизованных и облученных в F-полосах поглощения, рентгенизованных при 363°К и рентгенизованных при 363°К и облученных в F-полосах, а  $\frac{\chi_m - \chi'_m}{\chi_m}$  и  $\frac{\chi_{1m} - \chi'_{1m}}{\chi_{1m}}$  — относительные уменьшения коэффициента поглощения рентгенизованных фосфоров после их облучения в F-полосах, соответственно, при комнатной и повышенной температурах.

Относительные уменьшения коэффициента поглощения в F-полосе

| Фосфоры KClKBr + CuCl    |     |                               |     | При комнатной температуре |                            |                                                 | При 363°К                    |                               |                                                          |
|--------------------------|-----|-------------------------------|-----|---------------------------|----------------------------|-------------------------------------------------|------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Конц. в расплаве (мол %) |     | Конц. в монокристалле (мол %) |     | $\chi_m$ мм <sup>-1</sup> | $\chi'_m$ мм <sup>-1</sup> | $\frac{\chi_m - \chi'_m}{\chi_m} \cdot 100, \%$ | $\chi_{1m}$ мм <sup>-1</sup> | $\chi'_{1m}$ мм <sup>-1</sup> | $\frac{\chi_{1m} - \chi'_{1m}}{\chi_{1m}} \cdot 100, \%$ |
|                          |     |                               |     |                           |                            |                                                 |                              |                               |                                                          |
| KCl                      | KBr | KCl                           | KBr |                           |                            |                                                 |                              |                               |                                                          |
| 100                      | —   | 100                           | —   | 0,26                      | 0,17                       | 35                                              | 0,17                         | 0,13                          | 23                                                       |
| 90                       | 10  | 89                            | 11  | 0,27                      | 0,16                       | 41                                              | 0,18                         | 0,125                         | 30                                                       |
| 70                       | 30  | 69                            | 31  | 0,25                      | 0,14                       | 44                                              | 0,17                         | 0,11                          | 35                                                       |
| 50                       | 50  | 47                            | 53  | 0,23                      | 0,13                       | 50                                              | 0,19                         | 0,11                          | 42                                                       |
| 30                       | 70  | 29                            | 71  | 0,24                      | 0,11                       | 54                                              | 0,16                         | 0,085                         | 47                                                       |
| 10                       | 90  | 8                             | 92  | 0,25                      | 0,10                       | 60                                              | 0,16                         | 0,075                         | 53                                                       |
| —                        | 100 | —                             | 100 | 0,23                      | 0,08                       | 65                                              | 0,15                         | 0,075                         | 57                                                       |

Как видно из таблицы, в KCl + CuCl фосфоре при комнатной температуре относительное уменьшение коэффициента поглощения в максимуме F-полосы меньше, чем у KBr + CuCl фосфора. Аналогичная картина наблюдается и в случае рентгенизации тех же фосфоров при повышенной температуре, лишь с той разницей, что с повышением температуры рентгенизации распад F-центров под действием света, длины волн которого соответствуют максимумам F-полос поглощения, идет с меньшей скоростью, чем в рентгенизованных при комнатной температуре фосфорах.

В работе [16] показано, что в кристаллах с большей энергией решетки труднее образуются центры окраски, под действием излучения медленнее изменяются их свойства, но образовавшиеся центры окраски распадаются также медленнее, чем в кристаллах с меньшей энергией решетки. Следуя работе [16], малую оптическую устойчивость F-центров в KBr + CuCl фосфоре по сравнению с таковой у KCl + CuCl фосфора можно объяснить различием энергий кристаллических решеток их оснований (энергия кристаллической решетки уменьшается в ряду KCl, KBr, KJ и составляет, соответственно, 7,23; 6,93 и 6,55 eV [17]).

Уменьшение скорости распада F-центров под действием света, длины волн которого соответствуют максимумам F-полос поглощения, при повышенной температуре рентгенизации фосфоров обусловлено, по-видимому, тем, что при повышенной температуре рентгенизации фосфоров стабильность активаторных центров захвата и большинства



дырочных центров захвата, образованных с участием активаторных ионов, уменьшается. Тем самым улучшаются условия для повторного захвата электронов на анионных вакансиях.

Как следует из таблицы, при переходе от фосфора  $KCl+CuCl$  к  $KClKBr+CuCl$  и при дальнейшем увеличении содержания  $KBr$ , т. е. число ионов  $Br^-$  в основании, относительная скорость распада  $F$ -центров плавно увеличивается. Кроме того, оптическая устойчивость  $F$ -центров окраски в фосфорах со смешанным основанием с повышением температуры рентгенизации возрастает, причем чем больше количество ионов  $Br^-$  в основании смешанного фосфора, тем больше относительная скорость распада  $F$ -центров. Аналогичные результаты относительно оптической стабильности  $F$ -центров получены нами и для смешанных  $KClKBr+AgCl$  фосфоров, рентгенизованных при комнатной и повышенной температурах.

Указанные выше факты могут быть объяснены, по-видимому, наличием различных изоструктур  $F$ -центров ( $F$ -центры с разными анионными окружениями) в  $KClKBr+CuCl$  и  $KClKBr+AgCl$  фосфорах со смешанным основанием [18—20]. С повышением содержания  $KBr$  в основании таких фосфоров увеличивается количество ионов  $Br^-$  в ближайшем окружении  $F$ -центров. При этом в смешанных  $KClKBr+CuCl$  и  $KClKBr+AgCl$  фосфорах наряду с симметричными конфигурациями  $Cl-F-Cl$ ,  $Br-F-Br$  образуются также асимметричные ионные конфигурации  $F$ -центров в виде  $Cl-F-Br$ . Так как энергия связи  $F$ -центров уменьшается в ряду конфигураций  $Cl-F-Cl$ ,  $Cl-F-Br$  и  $Br-F-Br$ , то естественно предполагать, что с увеличением количества ионов  $Br^-$  вокруг  $F$ -центра энергия связи его с ближайшими окружающими ионами должна аддитивно уменьшаться. Вероятно, поэтому распад  $F$ -центров при оптическом обесцвечивании их плавно увеличивается в смешанных  $KClKBr+CuCl$  и  $KClKBr+AgCl$  фосфорах по мере повышения содержания  $KBr$ , при прочих одинаковых условиях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oberley J. Phys. rev., 84, 1257, 1951.
2. Кац М. Л. ЖЭТФ, 23, 720, 1952.
3. Markham J. Phys. rev., 86, 433, 1952; J. chem. phys., 57, 762, 1953.
4. Madar I. L., Wallis R. F., Williams M. C. and Herman R. C. Phys. rev., 96, 617, 1954.
5. Шуралева Е. И. „Оптика и спектроскопия“, 2, 396, 1957.
6. Заитов Ф. Н. Канд. дисс. ТГУ, 1957.
7. Парфианович И. А. „Оптика и спектроскопия“, 4, 253, 1958.
8. Парфианович И. А., Шуралева Е. И. „Оптика и спектроскопия“, 7, 518, 1959.
9. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „ДАН Азерб. ССР“, 1959, № 1, 3.
10. Вгон W. E. Phys. rev., 119, 1853, 1960.
11. Парфианович И. А., Шуралева Е. И. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 25, 1961, № 3.
12. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1962, № 6, 63.
13. Сидляренко, В. И., Заитов Ф. Н., Луканцев Ю. Л. „Изв. вузов, физика“, 1963, № 5.
14. Завадовская Е. К., Франгульян Т. С. Тезисы докладов XII совещания по люминесценции. Физика люминесцирующих ионных кристаллов. Львов, 1964.
15. Уськов Е. М. Тезисы докладов XII совещания по люминесценции. Физика люминесцирующих ионных кристаллов. Львов, 1964.
16. Воробьев А. А. Тр. II Всесоюзного совещания, Рига, 1962.
17. Воробьев А. А. „Изв. вузов, физика“, 1962, № 1, 118.

18. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 4.
19. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 25, 28, 1961.
20. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. Тр. ИФА АН ЭССР, № 14, 76, 1961.

Ф. К. Исаев, Э. Х. Халилов

#### Ба'зи гарышыг эсаслы гэлэви-халокен фосфорларында $F$ -мэркэзлэрин оптик дағылмасынын тэчрүби тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә күмүш вә мислә активләшдирилмиш гарышыг эсаслы монокристаллик  $KClKBr$  фосфорларында мұхтәлиф анионлу эсас компонентләринин нисби мигдарындан асылы олараг  $F$  рәнкләнмә мэркэзлэринин оптик дағылмасы тэдгиги едилмишдир. Көстәрилмишдир ки,  $(KClKBr) AgCl$ ,  $CuCl$  фосфорларында  $KBr$  компонентинин мигдары артдыгча онларда  $F$  рәнкләнмә мэркэзлэринин оптик дағылма сүр'әти фасиләсиз артыр.



В. Б. АНТОНОВ, Я. Н. НАСИРОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТВЕРДОГО РАСТВОРА GeTe—GeSe

Как известно, для обеспечения максимальной термоэлектрической эффективности полупроводниковый материал должен отвечать сложному комплексу требований, зачастую взаимно исключающих друг друга. Однако, как показали исследования, в некоторых случаях удается получить благоприятное сочетание параметров, приводящее к высокой термоэлектрической эффективности. Обычно этого удается достигнуть в многокомпонентных полупроводниковых соединениях и твердых растворах, обладающих сложной структурой энергетических зон.

В настоящее время наиболее эффективным путем создания термоэлектрических материалов с высокими характеристиками, предложенным А. В. и А. Ф. Иоффе, является использование для этих целей твердых растворов. При образовании твердого раствора появляются некоторые сверхструктуры, служащие дополнительными центрами рассеяния для электронов и фононов, причем рассеяние их происходит по-разному ввиду различия в де-бройлевских длинах волн. В большинстве случаев теплопроводность кристаллической решетки падает сильнее, чем подвижность носителей тока, что приводит к повышению термоэлектрической эффективности материала.

Одним из наиболее перспективных материалов для термоэлектрических преобразователей на интервал рабочих температур (600—900°K) являются твердые растворы на основе теллурида германия. Однако имеющиеся в литературе работы посвящены исследованию частичного замещения атомов германия в соединении GeTe—твердые растворы GeTe—Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> [1] и др. Работы же по исследованию влияния частичного замещения атомов теллура на термоэлектрические свойства GeTe в литературе отсутствуют. Поэтому представляло интерес исследовать систему GeTe—GeSe, в которой частичному замещению подвергаются атомы теллура.

Проведенные исследования микроструктуры и термический анализ сплавов по разрезу GeTe—GeSe позволяют предположить, что предел растворимости GeSe в GeTe составляет примерно 15 мол. %.

Исследование термоэлектрических свойств проводилось на твердых растворах 95% GeTe—5% GeSe, 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe.

## Термоэлектрические свойства твердого раствора GeTe—GeSe при комнатной температуре

Основные термоэлектрические свойства твердых растворов системы GeTe—GeSe—термоэдс  $\alpha$ , электропроводность  $\sigma$ , теплопроводность  $\chi$  и концентрация носителей тока  $n$  при комнатной температуре приведены в табл. 1.

Таблица 1

| Состав                | $\alpha$<br>мкВ/г | $\sigma$<br>ом <sup>-1</sup> см <sup>-1</sup> | $\chi$             | $10^{20} n$<br>см <sup>-3</sup> |
|-----------------------|-------------------|-----------------------------------------------|--------------------|---------------------------------|
|                       |                   |                                               | кал<br>см·сек·град |                                 |
| 95 % Ge Te—5 % Ge Se  | +44               | 6000                                          | 14,8               | 5,4                             |
| 90 % Ge Te—10 % Ge Se | +47               | 5300                                          | 12,7               | 5,3                             |
| 85 % Ge Te—15 % Ge Se | +50               | 4200                                          | 10,4               | 5,8                             |

Как видно из таблицы при образовании твердого раствора концентрация носителей тока при комнатной температуре изменяется весьма слабо. Термоэдс же меняется более значительно, это указывает, по-видимому, на то, что при образовании твердого раствора GeTe—GeSe происходит некоторое изменение эффективной массы плотности состояний. На рис. 1 показана зависимость эффективной массы плотности состояний от состава твердого раствора, которая подтверждает это предположение. Эффективная масса плотности состояний вычислялась из измерений термоэдс и концентрации носителей тока.

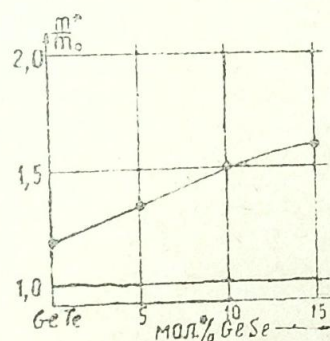


Рис. 1. Зависимость эффективной массы плотности состояний от состава

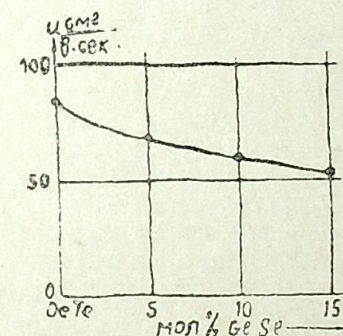


Рис. 2. Зависимость холловой подвижности от состава

Таким образом, при образовании твердого раствора GeTe—GeSe происходит, по-видимому, некоторое изменение зонной структуры теллурида германия.

Поскольку все составы твердого раствора имеют близкие значения концентрации носителей тока, то можно проследить изменение подвижности носителей при изменении состава твердого раствора. Зависимость подвижности носителей тока от состава твердого раствора GeTe—GeSe показана на рис. 2.

Как видно из рисунка, при образовании твердого раствора подвижность носителей тока падает по сравнению с чистым теллуридом германия. Падение подвижности обусловлено появлением дополнительных центров рассеяния, роль которых играют атомы селена. Поскольку селен и теллур имеют одинаковую валентность, то эти дополнительные центры рассеяния можно рассматривать как нейтральные примеси.



Изменение теплопроводности кристаллической решетки при образовании твердого раствора GeTe—GeSe приведено в табл. 2.

Таблица 2

| Состав            | $\kappa \cdot 10^3 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$ |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| GeTe              | 6,4                                                                                 |
| 95% GeTe—5% GeSe  | 5,1                                                                                 |
| 90% GeTe—10% GeSe | 4,3                                                                                 |
| 85% GeTe—15% GeSe | 3,7                                                                                 |

Величина решеточной теплопроводности получалась вычитанием электронной составляющей рассчитанной по закону Видемана-Франца с учетом вырождения электронного газа в предположении  $r=0$ , из полной теплопроводности. Тепловое сопротивление кристаллической решетки

$k = \frac{1}{\chi_p}$  линейно растет с увеличением содержания GeSe, что является

характерным для твердых растворов.

Как известно из теории, повышение термоэлектрической эффективности при образовании твердого раствора может быть вызвано как увеличением эффективной массы носителей, так и увеличением отношения

$\frac{U}{\chi_p}$ . Как было показано выше, в случае твердого раствора

GeTe—GeSe наблюдается увеличение эффективной массы плотности состояний. Отношение подвижности носителей к теплопроводности кристаллической решетки также растет, как это видно из рис. 3, однако ввиду того, что все составы твердого раствора имеют весьма высокую концентрацию носителей тока электронная составляющая в них значительно превышает решеточную. Поэтому отношение подвижности к полной теплопроводности для твердого раствора GeTe—GeSe с увеличением содержания GeSe при комнатной температуре остается практически постоянным. Таким образом, некоторое увеличение термоэлектрической эффективности  $z$  при образовании твердого раствора GeTe—GeSe, показанное на рис. 3, обусловлено, по-видимому, ростом эффективной массы плотности состояний.

#### Температурные зависимости термоэлектрических свойств твердого раствора GeTe—GeSe

На твердых растворах 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe проводились измерения температурных зависимостей термоэдс, электропроводности, подвижности носителей тока и теплопроводности. Коэффициент термоэдс измерялся в интервале 300—800°K (рис. 4). Как видно из рисунка, термоэдс с температурой растет, достигая максимума при ~700 и 760°K для 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe, соответственно. С дальнейшим ростом температуры термоэдс начинает падать, что связано с появлением носителей другого знака, вызванным наступлением собственной проводимости. Причем область наступления собственной проводимости с увеличением содержания GeSe несколько смещается в сторону более низких температур.

Сравнение экспериментальных температурных зависимостей термоэдс для двух составов твердого раствора в области 300—650°K, соответствующей примесной проводимости, с теоретическими, рассчитанными в предположении  $r=0$  для соответствующей концентрации

носителей тока (последняя в области чисто примесной проводимости не зависит от температуры), показывает, что так же, как и в случае теллурида германия [2], термоэдс более сильно зависит от температуры, чем это вытекает из теории для случаев простой однозонной модели.

Расчет температурной зависимости эффективной массы плотности состояний на основе измерений термоэдс и концентрации носителей

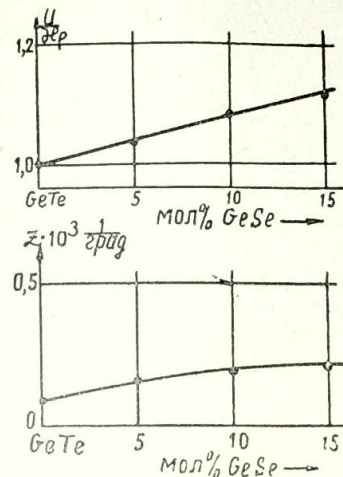


Рис. 3. Зависимость  $\frac{U}{\chi_p}$  и  $z$  от состава

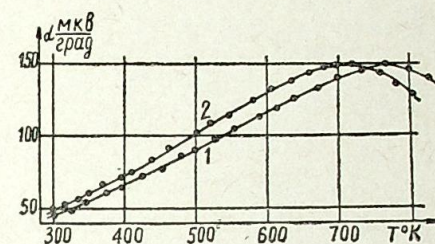


Рис. 4. Температурная зависимость термоэдс для твердых растворов в 90% GeTe—10% GeSe (1) и 85% GeTe—15% GeSe (2)

тока показывает, что для обоих составов твердого раствора в интервале температур от комнатной до, примерно, 350—370°K эффективная масса плотности состояний остается постоянной и равна  $\sim 1,5m_0$  и  $\sim 1,58 m_0$  для 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe, соответственно. С дальнейшим ростом температуры эффективная масса плотности состояний растет, причем  $\frac{m^*}{m} \sim T^{0,8}$  для 85% GeTe—15% GeSe

и  $\frac{m^*}{m} \sim T^{0,7}$  для 90% GeTe—10% GeSe. Подобный сложный характер

зависимости эффективной массы плотности состояний от температуры наблюдался ранее и на теллуриде германия [2].

Все это позволяет предположить, что при образовании твердого раствора GeTe—GeSe сохраняется сложная структура валентной зоны, характерная для теллурида германия, но при этом изменяются ее параметры.

Измерение постоянной Холла в интервале 300—600°K показывает, что в пределах ошибки эксперимента концентрация носителей тока в твердых растворах GeTe—GeSe не зависит от температуры, что обусловлено сильным вырождением электронного газа в этих материалах. На рис. 5 представлены температурные зависимости подвижности носителей тока для обоих составов твердого раствора GeTe—GeSe, приведенные к одинаковой степени вырождения. Как видно из рисунка, зависимость подвижности от температуры выражается как  $U \sim T^{-1,9}$  и  $U \sim T^{-2}$  для твердых растворов 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe, соответственно. Более резкая зависимость подвижности



носителей тока от температуры, чем дает теория для случая рассеяния на акустических колебаниях решетки ( $U \sim T^{-3,2}$ ), обусловлена, по-видимому, наличием двух сортов носителей тока — „тяжелых“ и „легких“ дырок.

Электропроводность обоих составов твердого раствора во всем исследованном интервале температур имеет „металлический“ ход. Это обусловлено тем, что поскольку концентрация носителей тока остается постоянной в широком интервале температур, то температурная зависимость электропроводности определяется температурной зависимостью подвижности.

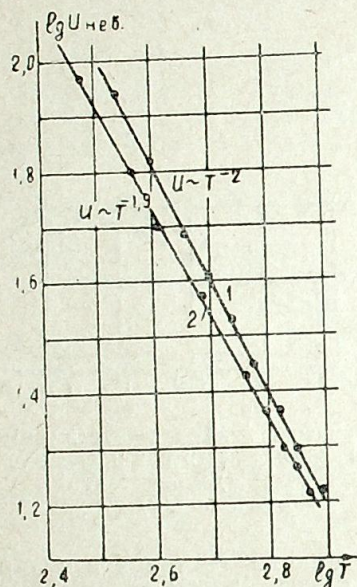


Рис. 5. Температурные зависимости холловской подвижности твердых растворов 90% GeTe—10% GeSe (1) и 85% GeTe—15% GeSe (2).

Температурная зависимость теплопроводности для твердых растворов 90% GeTe—10% GeSe и 85% GeTe—15% GeSe показана на рис. 6. Как видно из рисунка, в области 300—650°K теплопроводность с ростом температуры уменьшается. С дальнейшим ростом температуры наблюдается увеличение теплопроводности, вызванное, по-видимому, тем, что в этой области температур начинается дополнительная теплопроводность, обусловленная биполярной диффузией. Аналогичная картина наблюдается и при рассмотрении теплового сопротивления кристаллической решетки, которое для указанных твердых растворов в интервале 300—640°K линейно растет, а затем уменьшается ввиду появления дополнительной теплопроводности, связанной с переносом тепла парами электрон-дырка.

На основании измерения температурных зависимостей электропроводности, теплопроводности и термоэдс рассчитывались температурные зависимости термоэлектрической эффективности  $z$ , которые представлены на рис. 7. С ростом температуры величина термоэлектрической эффективности достигает максимума при  $T=740^\circ\text{K}$  для 90% GeTe—10% GeSe и при  $T=680^\circ\text{K}$  для 85% GeTe—15% GeSe. Максимальное

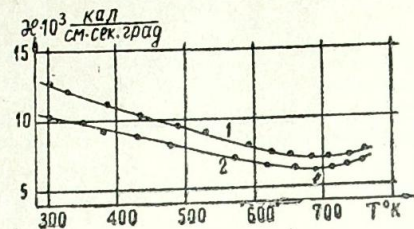


Рис. 6. Температурная зависимость теплопроводности твердых растворов 90% GeTe—10% GeSe (1) и 85% GeTe—15% GeSe (2)

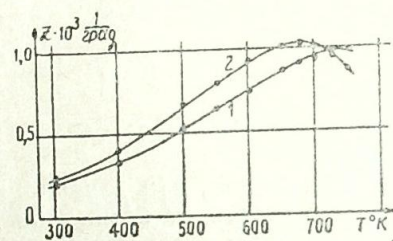


Рис. 7. Температурная зависимость  $z$  твердых растворов 90% GeTe—10% GeSe (1) и 85% GeTe—15% GeSe (2)

значение термоэлектрической эффективности  $z$  при этом составляет, соответственно,  $z=0,95 \cdot 10^{-3}$  и  $1,05 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ . С дальнейшим ростом температур величина  $z$  начинает падать, что объясняется появлением эффектов, связанных с наступлением собственной проводимости.

Таким образом, исследование термоэлектрических свойств твердых растворов GeTe—GeSe показывает наличие аномалий, свидетельствующих о сложности структуры энергетических зон, характерной для теллурида германия. На исследованных материалах получена термоэлектрическая эффективность, несколько превышающая термоэлектрическую эффективность теллурида германия, причем максимум эффективности сдвинут в сторону более низких температур (680—740°K), чем у теллурида германия.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву за интерес к работе и ценные советы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ure R. W., Miller R. C. „Thermoelectricity, 436, 1961.
2. Колomoec Н. В., Лев Е. Я., Сысоева Л. М. ФТТ, т. 6, вып. 3, 1964.

В. Б. Антонов, J. H. Насиров

#### GeTe—GeSe бэрк мэхлулунда термоэлектрик хассэлэрин тэдгиги

#### ХҮЛАСЭ

Мэхлүм олдуғу кими, GeTe эсасында һазырланмыш бэрк мэхлуллар 600—900°K температур интервалында эффектив маддэ кими мэхшурдур.

Эдэбијјатда GeTe бирлэшмэсиндэ Ge эвэз едилмиш мэхлулларына һэср олунмуш мэгалэлэр вардыр. Бурада Te маддэсини Se эвэз едилмэси һалы арашдырылыр.

Термик анализлэр вэ микрогурулушун тэдгиги көстэрир ки, GeSe бирлэшмэсинин GeTe-дэ һэлл олунма сэрһэдди тэхминэн 15%-э јахындыр.

Тэдгигатлар тэркиби 90% GeTe, 10% GeSe, 85% GeTe вэ 15% GeSe олан бэрк мэхлуллар үзэриндэ апарылмышдыр.

Термоэлектрик хассэлэрин тэркибдэн асылылығы көстэрир ки, бэрк мэхлул һалында GeTe бирлэшмэсиндэ золағын гурулушу вэ она ујғун олараг эффектив күтлэ дэјишир. Јүрүклүлүк азалыр ки, бу да Se атомунун һесабына эләвэ сәпики мэркэзлэрин јаранмасы илә эләгәдардыр. Јүрүклүлүјүн истиликкечирмәјә нисбәти артдығындан мэхлулун эффективлији дэ артмыш олур. Термо эһг температурла артыр вэ 700°K-дан башлајараг азалыр ки, бу да мэхсуси кечиричилик областынын башланмасы илә эләгәдардыр. Бэрк мэхлулун јаранмасы илә GeTe-дэ олан мүрәккәб валент золағынын гурулушуна тәсир көстэрилир вэ анчаг золағын параметрлэри дэјишир. Јүрүклүлүк 90% GeTe—10% GeSe мэхлулунда  $u \sim T^{-2}$ , 85% GeTe—15% GeSe мэхлулунда исә  $u \sim T^{-1,9}$  ганунуна табедир.

Өјрәнилмиш бэрк мэхлулларда термоэлектрик ефекти артыр вэ 680°K сонра азалмаға башлајыр ки, бу да мэхсуси кечиричилик областынын башланмасы илә эләгәдардыр.



Х. М. ХАЛИЛОВ, А. И. АГАЕВ

# ПОГЛОЩЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКА В МОНОКРИСТАЛЛЕ КСИ В МЕГАГЕРЦНОМ ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ\*

Акустические методы, основанные на измерении скорости распространения и коэффициента поглощения ультразвуковых волн, за последние годы получили довольно широкое распространение при изучении физических свойств и строения твердых тел. В этой связи большой интерес представляет исследование механизмов взаимодействия акустических волн с несовершенствами кристаллической решетки (дислокациями, точечными дефектами, вакансиями). Поэтому в данной работе нас интересовал с одной стороны характер влияния деформаций на коэффициент поглощения ультразвука в монокристалле КСИ и с другой—степень применимости в этом случае существующих теорий.

Монокристаллы выращивались по методу Кироплуса. Исходным материалом был химически чистый КСИ. Перед отжигом рабочие поверхности кристаллов, имеющих форму параллелепипеда длиной  $50 \pm 70$  мм и сечением  $25 \times 25$  мм, полученных при раскалывании, подвергались шлифовке и затем полировке с точностью до одного микрона. Образцы отжигались в течение 15 часов при  $600^\circ\text{C}$ . Для предотвращения пластических деформаций, возникающих за счет термических напряжений, а также для сохранения концентрации точечных дефектов кристаллы охлаждались со скоростью  $10^\circ\text{C}/\text{час}$  [2, 5], после чего образцы подвергались пластической деформации посредством грузов (порядка  $70 \div 90$  кг), накладываемых на вертикально ориентированный измерительный стержень ИЗВ-2. Это исключало возможность образования перекося рабочих поверхностей монокристаллов.

Деформация оценивалась по формуле  $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{l_1}$ , где  $l_1$ ,  $l_2$ —длины

недеформированного и деформированного образца, соответственно. Поглощение ультразвука в монокристаллах КСИ измерялось при  $25^\circ\text{C}$  на экспериментальной установке, описанной ранее [3].

Из рис. 1, на котором представлена зависимость коэффициента поглощения от деформации, видно, что до значения деформаций  $0,07\%$  коэффициент поглощения почти не изменяется, но затем резко увеличивается (начало кривой показано на рис. 1 а). Видимо, при малых

значениях деформации плотность дислокаций остается неизменной. Частотная зависимость коэффициента поглощения в направлении [100] для деформированных кристаллов (кривые 1, 2, 3) показана на рис. 2.

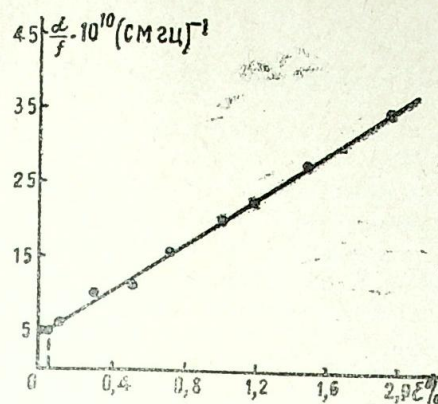


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения от деформации

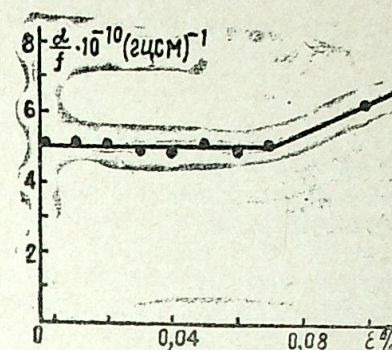


Рис. 1 а. Начальный участок кривой зависимости коэффициента поглощения от степени деформации

Здесь на кривых имеются ярко выраженные максимумы, которые со временем уменьшаются и смещаются в сторону более высоких частот. По-видимому, это объясняется уменьшением плотности дислокаций за счет старения, а также закреплением дислокационных линий со временем.

Резонансный характер указанных кривых достаточно хорошо объясняется с помощью теории Гранато и Люкке [6].

В основу этой теории положена идея Келлера об аналогии колебания дислокационной линии, закрепленной на концах примесными атомами, с вынужденными колебаниями струны. Внутреннее трение обусловленное колебаниями дислокаций, может быть двух типов. Первый из них представляет собой динамическое внутреннее трение, обусловленное движением дислокаций, которому препятствует некоторая демпфирующая сила, пропорциональная скорости движения дислокаций. Второй тип внутреннего трения обусловлен отрывом дислокационной петли от точек ее закрепления. Рассеянная при этом энергия пропорциональна площади петли гистерезиса на диаграмме напряжение—дислокационная деформация. Нами были изучены потери первого типа.

Согласно теории Гранато и Люкке [6] коэффициент поглощения выражается следующим образом:

$$\alpha = \frac{\omega}{f} \cdot \frac{G \Lambda}{\pi} \cdot \left[ \frac{\omega d}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega d)^2} \right], \quad (1)$$

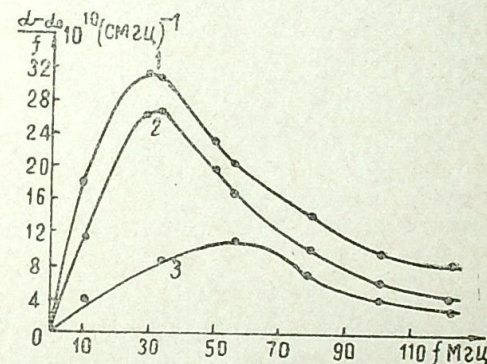


Рис. 2. Частотная зависимость коэффициента поглощения; деформация  $\epsilon = 1\%$ : 1—измерения проводились через 10 мин после деформации; 2—через 2 часа после деформации; 3—через 72 часа после деформации

\* Доложено на XII межвузовской научной конференции по применению ультразвука к исследованию вещества (Москва, 1—5 февраля 1966 г.).



где  $\Lambda$ —плотность дислокаций,  $\Omega$ —ориентационный фактор,  $G$ —модуль сдвига действующей системы скольжения,  $\omega$ —частота ультразвука,  $v$ —его скорость,  $\omega_0$ —резонансная частота, причем

$$\omega_0^2 = \omega d = \frac{\eta^2}{L^2}; \quad (2)$$

$L$ —длина дислокационной петли,  $d$ —демпфирующая постоянная, равная

$$d = \frac{B}{\pi \rho a_1^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$ —плотность вещества,  $B$ —демпфирующая сила на единицу длины дислокационной петли,  $a_1$ —вектор Бюргерса. Для кубических кристаллов плоскостью скольжения является  $[110]$ , поэтому  $a_1 = a\sqrt{2}$ , где  $a$ —постоянная решетки. Величина  $\Lambda$  определялась путем подсчета числа ямок травления с помощью микроскопа МИМ-7. Кристаллы подвергались травлению по методу, предложенному в работе [8]. Полученные при этом микрофотографии представлены на рис. 3а, б, в.

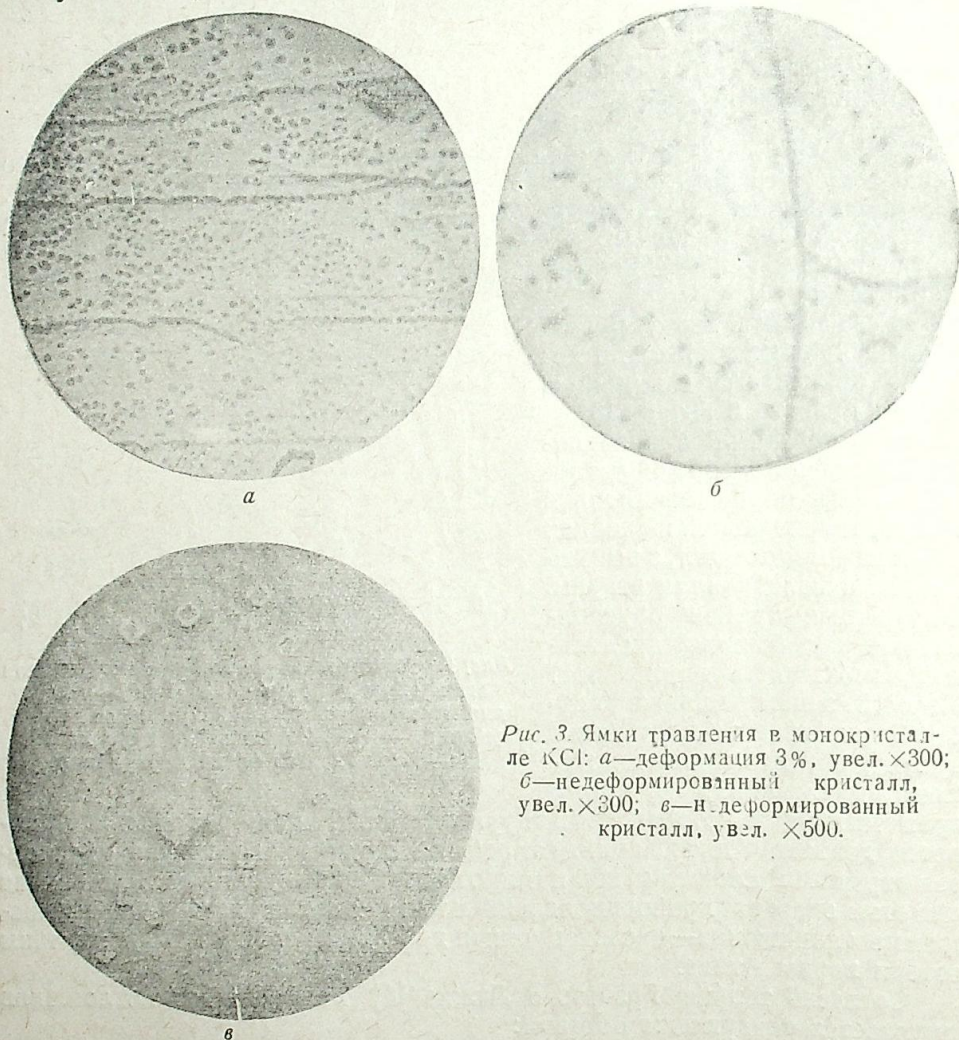


Рис. 3. Ямки травления в монокристалле КСІ: а—деформация 3%, увел.  $\times 300$ ; б—недеформированный кристалл, увел.  $\times 300$ ; в—недеформированный кристалл, увел.  $\times 500$ .

Для расчета демпфирующей силы различными исследователями было предложено три механизма. Одним из них является механизм термоупругих потерь [4]. Суть его заключается в том, что при дви-

жении дислокаций имеет место отдача тепла их от передней стороны к задней, вследствие чего происходят термоупругие потери. В случае краевых дислокаций демпфирующая сила (по Эшелби) имеет следующее выражение:

$$B = \frac{Ga^2}{2\pi} \cdot \frac{9\beta^2 T \kappa}{10\kappa} \ln \frac{\kappa}{\rho C_p \omega l^2}, \quad (4)$$

где  $\kappa$ —модуль объемной упругости,  $\beta$ —коэффициент теплового расширения,  $T$ —температура,  $C_p$ —удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\kappa$ —коэффициент теплопроводности,  $l$ —длина отрыва ( $l \approx 10^{-7}$  см).

Второй механизм, рассмотренный Лейбфридом [8], представляет собой рассеяние фононов при движении дислокации через кристалл. В данном случае коэффициент торможения выражается формулой:

$$B = \frac{a}{10 v_t} \cdot 3kT \frac{z}{a^3}, \quad (5)$$

где  $z$ —число атомов на ячейку,  $k$ —постоянная Больцмана,  $v_t$ —скорость поперечных звуковых волн.

Согласно третьему механизму, предложенному Мэзоном [9], демпфирование обусловлено фононной вязкостью и для винтовой дислокации вычисляется по формуле:

$$B = 1,43 \eta, \quad (6)$$

а для краевой дислокации

$$B = 1,12 \eta,$$

где  $\eta$ —фононная вязкость, определяемая из выражения

$$\eta = \frac{E_0 \kappa}{C_v \cdot v^2}. \quad (7)$$

Здесь  $C_v$ —удельная теплоемкость единицы объема,  $E_0$ —полная тепловая энергия этого объема,  $\bar{v}$ —средневзвешенное значение скорости поперечных и продольных волн.

Зная характеристическую температуру Дебая  $\theta$ , можно найти  $C_v$  и  $E_0$  [11] и по формуле (7) вычислить  $\eta$ . Используя экспериментальные величины ( $\Lambda = 10^6 \text{ см}^{-2}$ ;  $f = 30 \cdot 10^6 \text{ гц}$ ;  $\frac{a}{f} = 31 \cdot 10^{-10} \text{ см}^{-1} \cdot \text{гц}^{-1}$ ),

а также  $\Omega = 0,5$  [1], по формулам (1)–(3) были определены:  $d = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_0 = 3,1 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$  и  $B = 6,6 \cdot 10^{-4} \text{ дн} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^{-2}$ . Вычисленные по формулам (4)–(7) и найденные нами величины  $B$  для КСІ приведены в таблице\*.

| Механизмы           | $10^4 \text{ дн} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}$ |
|---------------------|---------------------------------------------------------|
| Термоупр. механизм  | 5,16                                                    |
| Фононное рассеяние  | 0,86                                                    |
| Фононная вязкость   | 23,6                                                    |
| Измеренные значения | 6,6                                                     |

Как видно из таблицы, измеренное нами значение демпфирующей силы хорошо согласуется с вычисленным по формуле Эшелби значением. Видимо, в кристаллах КСІ имеет место механизм термоупругих потерь. Следует отметить, что в деформированных монокристаллах нами обнаружено наличие эффекта резонансного поглощения.

\* Данные, необходимые для ведения расчетов по формулам (4)–(7), были заимствованы из работ [2, 10, 11, 12].



Авторами же работы [13] наличие подобного эффекта не обнаружено. Это, по-видимому, объясняется тем, что исследованные нами объекты были более чистыми.

В заключение мы выражаем благодарность Л. А. Яковлеву за ценные советы, В. М. Зуеву и В. К. Жеретненко В. К. — за техническую помощь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меркулов Л. Г., Яковлев Л. А. „Акустический журнал“, т. V, вып. 1960.
2. Меркулов Л. Г. „Акустический журнал“, т. V, вып. 4, 1959.
3. Халилов Х. М., Агаев А. И. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. матем. наук“, 1966, № 2.
4. Eshelby J. D. Proc. Roy. soc., A. 197, 396, (1949).
5. Судзуки Т. Дислокация и механические свойства кристаллов (сб. статей) М., 1960.
6. Гранато А. и Люкке К. Сб. „Ультразвуковые методы исследования дислокаций“. М., 1960.
7. Лубенец С. В. и Костин Н. Ф. „Кристаллография“, т. 2, вып. 2, 1962.
8. Leiffrid G. Zs. Phys., 127, 344, 1950.
9. Мэзон У. Сб. „Ультразвуковые методы исследования дислокаций“. М. 1963.
10. Кей Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. М. 1962.
11. Landolt-Bornstein. Physikalisch Chemische tabellen. Erster Erczungs Band. Berlin, 1927.
12. Справочник химика, т. I. Гостехиздат, 1963.
13. Вережкина Л. В. Тр. I межвузовской научной конференции по применению молекулярной акустики к исследованию вещества и в народном хозяйстве. Ташкент, 1964.

Х. М. Халилов, А. И. Агаев

#### Мегагерс тезлик диапазонунда KCl монокристалында ултрасэсин удулмасы

##### ХҮЛАСЭ

Параллел үзлэри олан KCl монокристалы термике'мала гојулмуш, сонра исэ деформасијаја уғрадылмышдыр. Белэ нүмунэлэрдэ апарылан өлчүлэр көстэрмишди ки, 0,07% -э гэдэр деформасија нэтичэсиндэ ултрасэс удулма эмсалы демэк олар ки, сабит галыр, деформасијаны даһа чох артырдыгда исэ бу эмсал кэскин артыр.

Тезлик асылылығына аид олан әјрилэрдэ удулма эмсалы максимумлар верир. Бу максимумларын гијмэти тәдричән гијмэтчэ азалыр вә јүксәк тезлијә доғру сүрүшүр. Бу әјрилэрин резонанс характери Гранато-Лјукке нэзәријјәси илә изаһ олунур.

Ешелби, Лејффрид вә Мэзон формулалары илә һесаблинмыш тор-мозлама эмсалы көстәри ки, KCl монокристалында истилик вә еластик удулма механизми әсас рол ојнајыр.

Әдәбијатда олан мә'луматын әксинә олараг деформасија олунмуш KCl монокристалында резонанс удулма тапылмышдыр. Бунун сәбәби KCl маддәсинин даһа тәмиз олмасы илә изаһ олунур,

Н. З. ДЖАЛИЛОВ, Т. С. АЗИЗОВ, Г. М. АЛИЕВ

#### ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ НА ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО МОНОКРИСТАЛЛА СЕЛЕНА

В настоящее время накоплено много экспериментальных данных по исследованию влияния облучения частицами высокой энергии на физические свойства полупроводников [1,3]. Чувствительным „индикатором“ наличия радиационных нарушений кристаллической структуры полупроводника является изменение электропроводности. Нарушение порядка в кристаллической решетке в результате облучения полупроводника приводит к изменению подвижности и равновесной концентрации носителей тока в нем.

В работе [4] установлено, что при облучении германия *n*-типа электропроводность убывает, проходит через минимум и снова возрастает; при этом в точке минимума происходит переход германия *n*-типа в германий *p*-типа. При облучении германия *p*-типа сравнительно слабая начальная электропроводность монотонно возрастает.

В работе [5] приводятся данные об изменении электропроводности гексагонального монокристалла селена при облучении нейтронами атомного реактора. Было показано, что при постоянном увеличении мощности атомного реактора электропроводность монокристалла селена возрастает от 1,1 до 5  $\text{мОм}^{-1}$ , а с уменьшением возвращается к своей первоначальной величине.

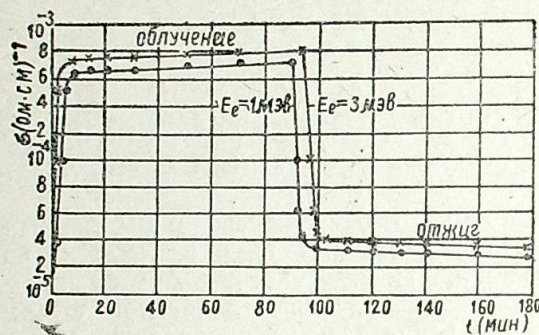
В работе [6] приведены данные об изменении электропроводности германия и теллура под действием ускоренных электронов с энергией 20  $\text{мэВ}$ . Однако в литературе нет данных о влиянии облучения ускоренных электронов на электропроводность монокристаллов селена. Ввиду того, что селен широко применяется в технике, исследование влияния электронного облучения на электропроводность последнего представляет определенный научный и практический интерес.

В данной статье приводятся результаты исследования влияния электронного облучения на электропроводность ( $\sigma$ ) монокристаллов селена. Монокристаллы гексагонального селена были выращены из паровой фазы и из расплава. Чистота исходного селена 99,99999%. Рентгенограмма вращения показала, что полученные монокристаллы были совершенными [7]. Исследованные образцы представляли собой пластинки размерами  $15 \times 2 \times 0,8 \text{ мм}^3$ . Для получения омического контакта на торцовые стороны образцов методом испарения в вакууме наносились никелевые контакты, которые не дают переходных сопротивлений.



Для измерений сопротивления был использован мост постоянного тока типа Т-В-Д и зеркальный гальванометр типа М-17. Электропроводность селена была исследована непосредственно в процессе облучения при 300°К в специальной установке, в которой заметного нагревания образцов не наблюдалось, так как во время измерения образец охлаждался проточной водой. Ввиду того, что на проводимость селена сильно действует освещение, для получения устойчивых значений темновой проводимости до измерения образцы некоторое время выдерживали в темноте.

Источником ускоренных электронов с максимальной энергией 5 мэв служил электронный ускоритель лаборатории радиационной физики Института физики АН Азербайджанской ССР, работающий в импульсном режиме с числом посылок 400 сек<sup>-1</sup> и длительностью импульса 3 мксек.



Зависимость  $\sigma$  от времени облучения ускоренными электронами с энергией 1 и 3 мэв при плотности потока  $10^{15}$  частиц  $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$  и отжиг радиационных дефектов

Результаты исследования показывают, что до облучения темновая проводимость образца составляла  $4 \cdot 10^{-5}$  (ом·см)<sup>-1</sup>, после начала облучения ускоренными электронами с энергией 1 мэв в течение нескольких минут  $\sigma$  возросла до  $6,8 \cdot 10^{-4}$  (ом·см)<sup>-1</sup>, а затем медленно за 90 мин до  $8 \cdot 10^{-4}$  (ом·см)<sup>-1</sup>. Зависимость  $\sigma$  от времени облучения ускоренными электронами с энергией 1 и 3 мэв при постоянной плотности потока  $10^{15}$  частиц  $\text{см}^2 \cdot \text{сек}$  представлена на рисунке. Как видно,  $\sigma$  в зависимости от времени облучения сначала быстро возрастает, а затем приближается почти к насыщению.

Кривая  $\sigma$  при облучении ускоренными электронами с энергией 3 мэв лежит несколько выше, чем при облучении с энергией 1 мэв.

Рост  $\sigma$  кристалла при облучении ускоренными электронами обусловлен дефектами в структуре и ионизирующим действием облучения на примесные атомы.

В начальный момент облучения, кроме ионизации примесных атомов, под действием ускоренных электронов над валентной зоной создаются акцепторные уровни, соответствующие вакансиям, образованным в результате смещения атомов селена от узлов кристаллической решетки, которые, захватывая электроны из валентной зоны, увеличивают концентрацию носителей тока (дырки), а следовательно  $\sigma$ . При дальнейшем облучении, по-видимому, все примесные атомы находятся в ионизированном состоянии, поэтому с течением времени  $\sigma$  остается постоянной.

Пороговая энергия смещения атомов ( $E_d$ ) от узлов кристаллической решетки для селена согласно [2] составляет приблизительно 30 эв, что соответствует энергии бомбардирующих электронов около 0,65 мэв. Поэтому при облучении ускоренными электронами с энергией 1 и 3 мэв число смещенных атомов на одно первичное смещение и общее число смещенных атомов в единице объема будет больше, чем при энергии 0,65 мэв. Максимальная энергия, передаваемая бомбардируемому атому селена при облучении ускоренными электронами с энергией 1 мэв, составляет 82 эв, а при энергии 3 мэв — 729 эв.

По величине максимальной энергии, передаваемой бомбардируемому атому селена ( $E_{\text{max}}$ ), с помощью формулы [6] можно определить число смещенных атомов на одно первичное смещение ( $\bar{N}_d$ ):

$$\bar{N}_d = \frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{max}} - E_d} \left( 0,766 + 0,352 \ln \frac{E_{\text{max}}}{4E_d} \right).$$

При бомбардировке монокристалла селена ускоренными электронами с энергией 1 мэв получается одно смещение на одно первичное смещение атома селена, а при энергии ускоренных электронов 3 мэв 1,5 смещения.

Полученные расчетные данные в первом приближении согласуются с экспериментальными, так как при бомбардировке ускоренными электронами с энергией 3 мэв величина  $\sigma$ , как видно из рисунка, отличается незначительно от величин, полученных при бомбардировке ускоренными электронами с энергией 1 мэв. Непосредственно после облучения в течение 90 мин была исследована  $\sigma$  в процессе отжига радиационных дефектов при 300°К в зависимости от времени. Изменение  $\sigma$  от времени отжига также представлено на рисунке, откуда видно, что с увеличением времени отжига  $\sigma$  сначала в течение нескольких минут быстро падает, а затем приближается к насыщению. Отжиг радиационных дефектов представляет собой истинную картину рекомбинации созданных точечных дефектов, вместе с которыми исчезают их энергетические уровни в запрещенной полосе.

Отжиг радиационных дефектов имеет место и в процессе облучения, однако в начальный момент скорость создания дефектов во много раз превышает скорость рекомбинации точечных дефектов, а в дальнейшем в результате равновесия наступает насыщение в ходе электропроводности монокристалла селена.

Ход электропроводности селена в зависимости от плотности потока ускоренных электронов совпадает с ходом электропроводности германия *n*-типа, после перевода последнего в *p*-тип [2]. Однако поведение монокристаллов селена после их бомбардировки ускоренными электронами в корне отличается от таких полупроводников, как германий и кремний, в кристаллической структуре которых происходят сильные нарушения, являющиеся стабильными даже при комнатной температуре. Для монокристаллов селена после их облучения в отличие от монокристаллов германия и кремния не требуется специального отжига радиационных дефектов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вавилов В. С. Действие излучений на полупроводники Физматгиз, 1963.
2. Динс Дж. и Виньярд Дж. Радиационные эффекты в твердых телах ИЛ, 1960.
3. Фен Г. и Ларк-Горовец К. Проблемы современной физики, 8, 1957.
4. Fan H. Y., Lark-Horovitz K. Report of the Bristol Conference of Defects in Crystalline solids. London, 1955, pp. 232—245.
5. Tuomi T. O. Phys. Letters, vol. 14, №4, 1965.
6. Victor A. J., Van Zind and Roth Harold. J. appl. phys., vol. 30, №8, 1235, 1959.
7. Алиев Г. М., Ларионкина Л. С., Джабилов Н. З. Селен, теллур и их применения. АН Азерб. ССР, 1965.



# Электрон шұасынын гексагонал монокристал селенин электриккечиризмәсинә тә'сири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә электрон шұасынын бухар вә маје фазаларындан алынмыш гексагонал монокристал селенин электриккечиричилијинә тә'сири өјрәнилмишдир.

Тәчрүбә кестәрир ки, шұаланмадан әввәл селенин хұсуси электриккечиричилији отаг температурунда  $4 \cdot 10^{-5} \text{ (ом/см)}^{-1}$ -ә бәрабәрдир; һәммин нүмунәјә енержиси 1 вә 3 мев олан электрон шұасы илә тә'сир етдикдән үч санијә сонра  $6,8 \cdot 10^{-4} \text{ (ом/см)}^{-1}$ -ә гәдәр артыр. Сонрадан дојма һалы башлајыр.

Күман етмәк олар ки, сүр'әтләндирилмиш электронларын тә'сири алтында аксептор сәвијјәләри јараныр вә бу сәвијјәләр валент зонасындан электронлары алараг чәрәјандашыјычыларынын (дешикләрин) мигдарыны вә беләликлә селенин электриккечиричилијини артырыр.

Сонрақы шұаланмада, јәгин ки, аксептор сәвијјәләринин активлији азалыр вә бүтүн ашгар атомлары ионлашмыш вәзијјәтдә олур. Одур ки, вахт кечдикчә селенин электриккечиричилији сабит галыр.

Селен монокристалыны сүр'әтләндирилмиш электронларла шұаландырдыгдан сонра өзүнү апармасы керманиум вә силисиум кими јарымкечиричиләрдән әсаслы сурәтдә фәргләнир. Белә ки, селен монокристалыны илк вәзијјәтинә гајтармаг үчүн хұсуси отжиг лазым олмур.

М. А. ТАЛИБИ, П. А. ЛУНЕВ, Г. Г. КАДЫМОВ

## СЕЛЕНОВЫЕ СТАБИЛИТРОНЫ

В качестве стабилитронов наряду с опорными диодами используются и полупроводниковые диоды с крутой вольтамперной характеристикой в прямом направлении [1—3]. Селеновые стабилитроны рассмотрены в [4,5], однако в этих работах, за исключением напряжения стабилизации, другие параметры не приводятся.

В настоящей работе изучались основные параметры селеновых параметрических стабилитронов. Статическое сопротивление стабилитрона постоянному току  $R_{ст} = \frac{U}{I}$  определяется напряжением и током

стабилизации в данной точке вольтамперной характеристики, а динамическое  $R_g = \frac{du}{dI}$  характеризует крутизну вольтамперной характеристики. В идеальном случае, когда изменение тока через диод не приводит к изменению напряжения на диоде,  $R_g = 0$ .

Коэффициент качества  $Q = \frac{R_g}{R_{ст}} = \frac{\partial U}{U_{ст}} \frac{\partial I}{I_{ст}}$  является отношением относительного изменения напряжения на стабилитроне к вызвавшему его относительному изменению тока. Чем меньше  $Q$ , тем выше качество стабилитрона. Температурный коэффициент напряжения (ТКН) определяется относительным изменением напряжения стабилизации с температурой  $\text{ТКН} = \frac{dU_{ст}}{dT} \frac{1}{U_{ст}} 100\%$ . Таким образом, стабилизированное выходное напряжение является функцией трех независимых переменных—входного напряжения  $U_{вх}$ , тока нагрузки  $I_n$  и температуры  $T$ :

$$U_{вых} = f(U_{вх}, I_n, T).$$

Выражая малые приращения через частные производные, получим

$$dU_{вых} = \frac{\partial U_{вых}}{\partial U_{вх}} dU_{вх} + \frac{\partial U_{вых}}{\partial I_n} dI_n + \frac{\partial U_{вых}}{\partial T} dT; \quad (1)$$

$\frac{\partial U_{вых}}{\partial U_{вх}}$  — обратная величина коэффициента стабилизации  $K_n$ :

$$K_n = \frac{\Delta U_{вх}}{\Delta U_{вых}} \frac{U_{вых}}{U_{вх}}; \quad (2)$$



$\frac{\partial U_{\text{вых}}}{\partial I_{\text{ст}}}$  — представляет собой  $R_g$ ,  $\frac{\partial U_{\text{вых}}}{\partial T}$  — температурный коэффициент напряжения (ТКН). При замене в (1) дифференциалов приращениями формула изменения выходного напряжения будет иметь вид

$$\Delta U_{\text{вых}} = \frac{1}{K} \Delta U_{\text{вх}} + R_g \Delta I_{\text{н}} + \theta \Delta T.$$

Наиболее простая и самая распространенная схема параметрического стабилизатора напряжения представляет собой делитель напряжения, одно из сопротивлений которого является нелинейным (рис. 1 а). При изменении тока через цепь из этих двух последовательно соединенных сопротивлений напряжение на нелинейном сопротивлении практически не меняется за счет соответствующего изменения самой величины этого сопротивления и перераспределения напряжения. Сопротивление  $R_1$ , на которое перераспределяется изменение входного напряжения, называют балластным. Для установившегося значения выходного напряжения можно писать:

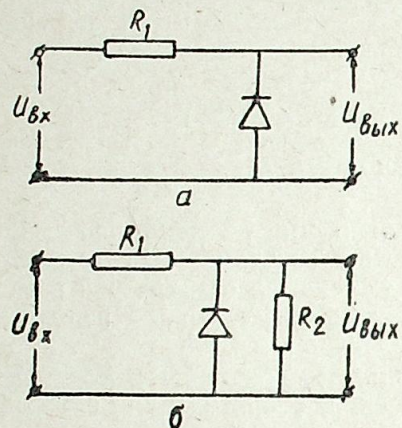


Рис. 1

$$U_{\text{вх}} = U_{\text{вых}} + I_{\text{вх}} R_1 = I_{\text{вх}} (R_{\text{ст}} + R_1). \quad (3)$$

Соответственно для некоторого приращения входного напряжения  $\Delta U_{\text{вх}}$  будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U_{\text{вых}} &= \Delta I_{\text{вх}} R_g, \\ \Delta U_{\text{вх}} &= \Delta I_{\text{вх}} (R_g + R_1) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Согласно (2), (3) и (4) имеем

$$K_u = \frac{R_{\text{ст}}}{R_g} \frac{R_g + R_1}{R_{\text{ст}} + R_1}.$$

Таким образом, коэффициент стабилизации зависит не только от параметров самого стабилизатора ( $R_{\text{ст}}$  и  $R_g$ ), но и от величины балластного сопротивления  $R_1$ . При  $R_1 \gg R_{\text{ст}}$  (соответственно  $R_1 \gg R_g$ )  $K_u = \frac{R_{\text{ст}}}{R_g}$  всецело определяется свойствами диода. При  $R_1 \ll R_g$  (соответственно  $R_1 \ll R_{\text{ст}}$ )  $K_u = 1$ , т. е. независимо от степени нелинейности сопротивления элемента стабилизация напряжения отсутствует.

На рис. 2 для одного из исследованных стабилизаторов представлена зависимость  $U_{\text{вых}}$  от  $U_{\text{вх}}$  для нагрузочного сопротивления  $R_2 = 10 \text{ ком}$ . При  $R_1 = 0,5 \text{ ком}$   $K_u = 3,4$ , а при  $R_1 = 10 \text{ ком}$   $K_u = 6,3$ . Соответствующие значения  $Q = \frac{1}{K_u}$  будут 0,3 и 0,1. Видно, что при

$R_1 < 1 \text{ ком}$  качество стабилизации резко ухудшается.

Результаты, представленные на рис. 2, получены с учетом работы стабилизатора при большом  $R_2$ . Подобный режим имеет место, например, при питании сеточных цепей электронных ламп. Однако чаще всего встречаются случаи, когда величиной сопротивления нагрузки пренебрегать нельзя. В таком случае параллельно соединенное сопро-

тивление и стабилитрон можно рассмотреть как одно нелинейное сопротивление  $R_g$  (рис. 16).

При  $R_2 \ll R_g$  стабилитрон шунтируется сопротивлением нагрузки и стабилизация отсутствует. Если  $R_2 \gg R_g$ , то  $R_g = R_g$  и  $K_u = K_u$ , т. е.

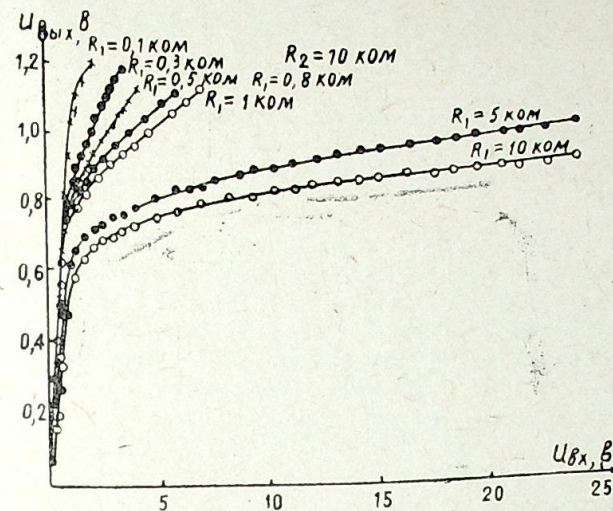


Рис. 2

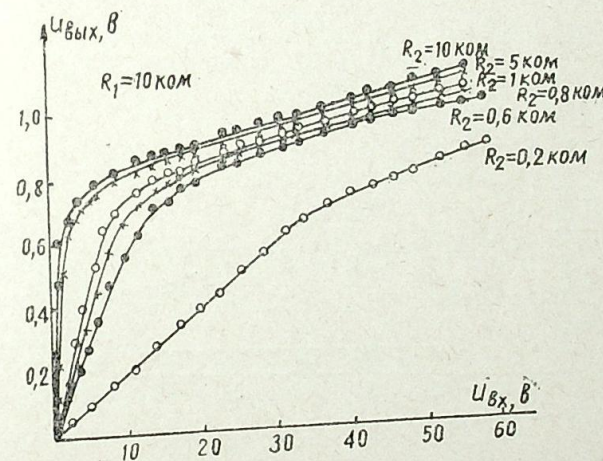


Рис. 3

Разгрузочное сопротивление не должно влиять на качество стабилизации. Зависимость  $K_u$  от  $R_2$  исследовалась при номинальном значении  $R_1 = 10^4 \text{ ом}$  (рис. 3). В диапазоне  $R_2 = 0,2 - 10 \text{ ком}$  зависимость  $K_u$  от  $R_2$  очень слабая. Увеличение  $R_2$  в этом диапазоне смещает начало стабилизации напряжения в область меньших  $U_{\text{вх}}$ . В интервале  $20 \div 60 \text{ в}$   $Q = 0,1$ . В этом же интервале  $U_{\text{вх}}$  для  $R_2 = 200 \text{ ом}$   $Q = 1,1$ , т. е. качество стабилизации в 11 раз хуже номинального. Таким образом, для исследованных селеновых стабилитронов нижний предел  $R_2 \sim 0,6 \text{ ком}$ .

Наряду с одиночными элементами исследовались стабилизирующие свойства 10 параллельно и десяти последовательно соединенных эле-



ментов (рис. 4). Сравнительные параметры, полученные при  $R_1 = R_2 = 10 \text{ ком}$ , представлены ниже.

| Число элементов              | Значение $U_{вх}$ , при котором начинается стабилизация | $U_{ст}$ при $U_{вх} = 20 \text{ в}$ | $Q$  |
|------------------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------|------|
| 1                            | 1 в                                                     | 0,8 в                                | 0,1  |
| 10 соединены последовательно | 8 в                                                     | 7 в                                  | 0,35 |
| 10 соединены параллельно     | 5 в                                                     | 0,65 в                               | 0,16 |

На рис. 4 показана также зависимость  $R_g$  от  $I_{см}$ . В интервале 0,3—6 ма динамическое сопротивление уменьшается от 10 до 4 ом. Изменение  $R_g$  нелинейно. Значение статистического сопротивления, вычисленное по вольтамперной характеристике,  $R_{ст} = 225 \text{ ом}$ . На этом же рисунке представлена зависимость ТКН от тока смещения. При увеличении  $I_{см}$  от 1 до 6 ма ТКН уменьшается почти в 2 раза. Характерным для прямых ветвей вольтамперных характеристик полупроводниковых диодов является отрицательный знак ТКН, что имеет место и для селеновых диодов, исследованных в настоящей работе.

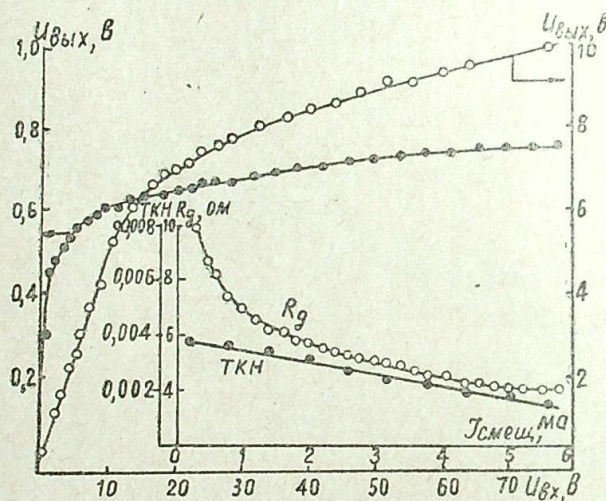


Рис. 4

Резюмируя изложенное, можно заключить, что одиночные селеновые стабилитроны пригодны для стабилизации малых напряжений —  $< 1 \text{ в}$ . Они допускают параллельное, последовательное и смешенное соединение, что позволяет соответственно подбирать каскады с определенными напряжением и током стабилизации.

Коэффициент качества селеновых стабилитронов на 1—2 порядка хуже, чем у кремниевых. Преимущество селеновых стабилитронов перед кремниевыми заключается в их устойчивости к пробоям и способности многократного самозалечивания при локальных пробоях в случае перенапряжений. Селеновые стабилитроны обладают большей радиационной стойкостью.

Благодаря отрицательному ТКН селеновые стабилитроны можно использовать для термокомпенсации в схемах совместно с другими стабилитронами с положительным знаком ТКН.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Додик С. Д. Полупроводниковые стабилизаторы постоянного напряжения и тока. Изд. „Советское радио“ М., 1962.
2. Scidmore A. Electronics, 38, №18, 1965.
3. Веденеев Г. М., Вершинин В. Е. Кремниевые стабилитроны. Госэнергоиздат. М.—Л., 1961.
4. Брейверман. Radio and Telev News, 1953, 50, № 4.
5. Фосберг Хоссе. Electron, 1953, 248—255, № 8.

М. Э. Талиби, П. А. Лунгов, Г. Б. Гадимов

## Селен стабилитронлары

### ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә селен стабилитронларынын әсас параметрләри өйрәнилмиш, жүк мугавимәтинин  $R_n = 10 \text{ ком}$  гиймәтиндә чыхыш кәркинлијинин ( $U_{вых}$ ) кириш кәркинлијиндән ( $U_{вх}$ ) асылылығы арашдырылмышдыр. Балласт мугавимәтинин  $R_1 = 0,5 \text{ ком}$  гиймәтиндә стабилизасија әмсалы  $K_n = 3,4$ -ә вә  $R_1 = 10 \text{ ком}$  гиймәтиндә исә  $K_n = 6,3$ -ә бәрәбәр олмушдур. Мүвафиг олараг кејфијјәт әмсалы  $(Q = \frac{1}{K})$  0,3 вә 0,1-ә бәрәбәр олмушдур.

$R_1 = 10 \text{ ком}$  гиймәтиндә вә  $R_n = 0,2 \div 10 \text{ ком}$  гиймәти үчүн кириш кәркинлијинин чыхыш кәркинлијиндән асылылығы арашдырылмышдыр. Нәһәјәт, мүүјјән олунмушдур ки, селен стабилитронлары үчүн  $R_n$ -ин гиймәти 0,6 ком-дан јухарыда јерләшир.

Елементдән кечән чәрәјанын 0,3 ма-дән 6 ма гиймәтинә гәдәр дәјишмәсиндән динамик мугавимәтин ( $R_g$ ) 10 ом-дан 4 ома гәдәр дәјишмәси мүшәһидә олунмушдур.  $R_g$ -нын  $I_{см}$ -дән асылылығы гејри-хәттидир.

Бу өлчүләрлә јанашы, кәркинлијин температур әмсалынын (ТКН) элементдән кечән чәрәјандан ( $I_{см}$ ) асылылығы өйрәнилмиш вә тәјин олунмушдур ки,  $I_{см}$  0,3 ма-дән 6 ма-ә гәдәр дәјишәндә ТКН 0,004  $\frac{1}{\text{дәр}}$ -дән 0,002  $\frac{1}{\text{дәр}}$ -јә гәдәр дәјишир. ТКН-ин ишарәси волтампер характеристикасынын дүзүнә будағы үчүн характерик олараг мәнфи олмушдур.  $U_{вх} = 20 \text{ в}$  гиймәтиндә тәк элементләр үчүн стабилизасија кәркинлији 0,8 в, 10 әдәд паралел бирләшмиш элемент үчүн 0,65 в вә 10 әдәд ардычыл бирләшмиш элемент үчүн исә 7 в-а јахын олур.



Р. Э. ГУСЕЙНОВ

# О РЕЗУЛЬТАТАХ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХРОМОСФЕРНОЙ ВСПЫШКИ 25 ИЮНЯ 1960 г., II

В первой части статьи [1] мы излагали результаты спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 25 июня 1960 г. по контурам балмеровских линий водорода. В данной статье будут изложены результаты спектрофотометрического исследования рассматриваемой вспышки по контурам линий  $H$  и  $K$ , а также в общих чертах по линиям гелия. В конце статьи дается заключение, являющееся результатом суммирования основных выводов, полученных как по водородным линиям, так и по линиям, исследуемым в этой статье.

Путем соответствующих вычислений, производимых аналогично [2], прежде всего мы определили  $\Delta\lambda_D$ ,  $\tau_0$  и  $\bar{B}$  (функция источника), обеспечивающие вполне удовлетворительное совпадение теоретических контуров с наблюдениями. Ниже, в табл. 1 и 2 приводятся результаты этих вычислений.

Таблица 1

| Кадры и сгустки   | 1(—)     | 1(+)     | 2(—)  | 2(+)  | 3(—)    | 3(+)    | 10(—)    | 10(+)    | 10(II—)  | 10(II+)  |           |           |
|-------------------|----------|----------|-------|-------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| $\Delta\lambda_D$ | 0,160    | 0,269    | 0,180 | 0,240 | 0,200   | 0,329   | 0,768    | 0,470    | 0,260    | 0,200    |           |           |
| Кадры и сгустки   | 10(III+) | 10(III+) | 11(—) | 11(+) | 11(II—) | 11(II+) | 11(III—) | 11(III+) | 11(II*—) | 11(II*+) | 11(III*—) | 11(III*+) |
| $\Delta\lambda_D$ | 0,165    | 0,165    | 0,200 | 0,270 | 0,170   | 0,170   | 0,189    | 0,250    | 0,200    | 0,200    | 0,160     | 0,130     |

В этой таблице знак минус обозначает „синее“, а плюс — „красное“ крыло контура. Римские цифры в скобках обозначают номера сгустков и разрезов в кадрах 10 и 11; поскольку в кадре 3 поток мелких сгустков обладает градиентом скорости, то для этого кадра  $\Delta\lambda_D$  представ-

ляет собой некоторое „усредненное“ значение величин  $\Delta\lambda_D$ , определяемых для разных расстояний  $\Delta\lambda$  от центра каждого из контуров  $H$  и  $K$  до определенных точек их „красного“ крыла, согласно ходу зависимости скорости потока мелких сгустков  $V$  от этого расстояния  $\Delta\lambda$  [3].

Таблица 2

| Кадры и сгустки | 1    | 2    | 3    | 10(I) | 10(II) | 10(III) | 11(I) | 11(II) | 11(III) | 11(IV) | 11(V) |
|-----------------|------|------|------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|--------|-------|
| $\tau_0$        | 4,52 | 2,20 | 4,40 | 1,18  | 0,10   | 0,81    | 4,20  | 0,76   | 1,36    | 1,81   | 3,60  |
| $\bar{B}$       | 1,64 | 1,60 | 1,40 | 0,60  | 4,00   | 1,56    | 1,33  | 1,29   | 1,00    | 0,92   | 0,59  |

В табл. 1 наше внимание привлекает изменение характера асимметрии в исследуемый период существования вспышки. Контур сгустков I и II кадра 10 и разрез III\* одного из сгустков кадра 11 обладают „синей“ асимметрией. Из схематического расположения сгустков кадра 11 следует, что разрез III\*,

а также I и II\* относятся к разным местам одного и того же сгустка этого кадра [3]. С другой стороны, в то время как разрез III\* кадра 11 обладает „синей“ асимметрией, разрез I характеризуется „красной“, а разрез II\* ею не обладает. Среди сгустков кадра 10, как мы отметили выше, сгустки I и II обладают „синей“ асимметрией, причем турбулентная скорость внутри сгустка I по сравнению с другими кадрами и даже сгустками самого кадра 10 несравненно большая. На рис. 1—2 изображены контуры  $H$  и  $K$  сгустков I и III кадра 10, из которых отчетливо видна роль турбулентной скорости. На этих рисунках привлекают внимание геометрические особенности указанных контуров, сгустка I кадра 10, которые связаны с большой скоростью потока мелких сгустков, проходящего через область того же сгустка.

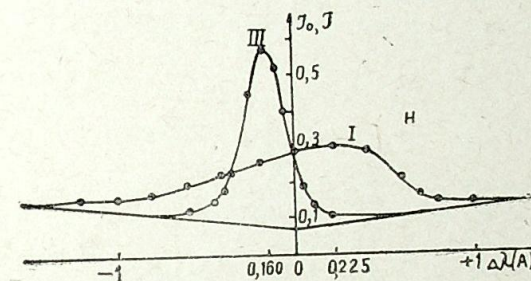


Рис. 1

В связи с приведенными в табл. 1 и 2 данными о  $\Delta\lambda_D$ ,  $\tau_0$  и  $\bar{B}$  следует подчеркнуть, что эти величины удивительно хорошо обеспечивают совпадение теоретических контуров с наблюдаемыми; это видно из рис. 1 и 2, где точки в кружках показывают ход теоретических контуров.

Из табл. 2 видно, что так же, как в случае [2], оптическая толщина вспышки в  $H$  и  $K$  небольшая. Однако значение оптической толщи довольно заметно изменяется при переходе от кадра к кадру, от сгустка к сгустку одного и того же кадра и даже от одного места к другому одного и того же сгустка. Все это и замечания относительно данных табл. 1 еще раз подтверждает, что солнечная атмосфера действительно крайне неоднородна и эта неоднородность проявляет себя в микромасштабах. Благодаря такой неоднородности возбуждающий фактор во взаимодействии с солнечной плазмой проявляет себя по-разному в разных областях вспышки и, кроме того, благодаря разли-



цию структуры самого возбуждающего фактора в разных участках вспышки картина эмиссий становится крайне разнообразной и сложной.

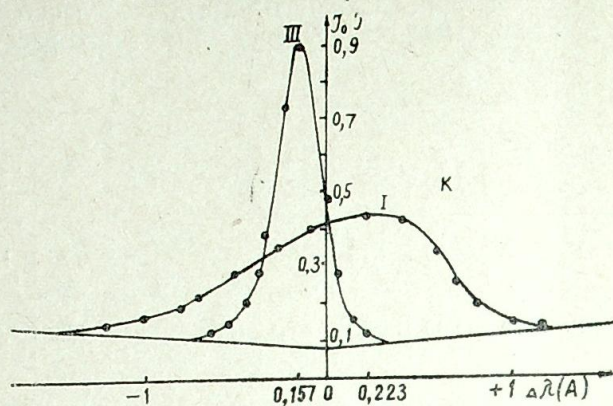


Рис. 2

В табл. 3 (приведены результаты вычислений коэффициента поглощения в центре линии  $H$ , обозначенного через  $(K_{\lambda})_H$ , число  $\text{Ca}^+$  в состоянии  $4S$  в столбе с сечением в  $1 \text{ см}^2$  по всей толщине вспышки  $-N_1$ , а также число  $\text{Ca}^+$  в состоянии  $4P$  в таком же столбе  $-N_3$ , вычисленное по формуле:

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{g_3}{g_1} \cdot \frac{i_0^5}{2hc_2} I_{\lambda}^c(0) \bar{B}_{\lambda},$$

с учетом соотношения  $N_3 = \frac{3}{2} (N_3)_K = 3 (N_3)_H$ .

Из сопоставления данных табл. 1 и 3 явно видно, что различия в  $N_3$ , определяемые по „красному“ и „синему“ крылу контуров  $H$  и  $K$ , согласуются с характером асимметрии. При „красной“ асимметрии  $N_3$ , определяемое из „красного“ крыла контуров, больше, чем  $N_3$ , определяемое из „синего“ крыла, а при „синей“ асимметрии наоборот.

В табл. 4 проведены значения  $n_e$  и  $T_e$ , определенные по методу, подробно изложенному нами в [2]. Следует отметить, что для всех кадров и сгустков для концентрации атомов водорода во всех состояниях получается величина  $10^{16} \text{ см}^{-3}$ . В работе [2]

эта величина была  $10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Такое различие в концентрации атомов водорода можно объяснить резким различием в мощности исследуемых в [2] и в данной статье вспышек. Если исходить из той точки зрения, что вспышки являются результатом распространения ударных волн, то мы должны ожидать, что мощность вспышки зависит от мощности ударных волн, приводящих к уплотнению плазмы.

Таблица 3

| Кады и сгустки                   | 1(—)     | 1(+)   | 2(—)   | 2(+)    | 3(—)     | (3+)     | 10(I—)   | 10(I+)    | 10(II—)   | 10(II+) |
|----------------------------------|----------|--------|--------|---------|----------|----------|----------|-----------|-----------|---------|
| $(K_{\lambda})_H \times 10^{13}$ | 1,64     | 0,971  | 1,45   | 1,09    | 1,31     | 0,740    | 0,342    | 0,558     | 1,01      | 1,31    |
| $N_1 \times 10^{-13}$            | 1,41     | 2,38   | 0,750  | 1,00    | 1,88     | 3,00     | 1,72     | 1,05      | 0,05      | 0,038   |
| $N_3 \times 10^{-11}$            | 2,52     | 4,25   | 1,31   | 1,74    | 2,56     | 4,58     | 1,12     | 0,687     | 0,218     | 0,165   |
| Кады и сгустки                   | 10(III±) | 11(I—) | 11(I+) | 11(II±) | 11(III—) | 11(III+) | 11(II*±) | 11(III*—) | 11(III*+) |         |
| $(K_{\lambda})_H \times 10^{13}$ | 1,59     | 1,31   | 0,972  | 1,54    | 1,39     | 1,05     | 1,31     | 1,64      | 2,02      |         |
| $N_1 \times 10^{-13}$            | 0,251    | 1,60   | 2,17   | 0,247   | 0,468    | 0,619    | 0,690    | 1,10      | 0,89      |         |
| $N_3 \times 10^{-11}$            | 0,427    | 2,32   | 3,15   | 0,347   | 0,510    | 0,675    | 0,692    | 0,707     | 0,572     |         |

Таблица 4

| Кады и сгустки        | 1    | 2    | 3    | 10(I) | 10(II) | 10(III) | 11(I) | 11(II) | 11(III) | 11(III*) |
|-----------------------|------|------|------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|----------|
| $T_e$                 | 8300 | 8300 | 8200 | 7750  | 9150   | 8250    | 8150  | 8000   | 7950    | 7750     |
| $n_e \times 10^{-13}$ | 6,96 | 6,96 | 6,32 | 3,45  | 12,8   | 6,64    | 6,10  | 4,90   | 4,60    | 3,45     |



Зависимость  $n_e(T_e)$  и точки, лежащие на соответствующих кривых  $n_e(T_e)$  и однозначно определяющие  $n_e, T_e$  показаны на рис. 3. Найденные нами точки лежат на одной прямой  $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$ , т. е. получа-

ется результат, подтверждающий аналогичный результат [2], с той только разницей, что в данном случае наклон прямой к оси абсцисс  $T_e$  больше, чем в [2]. Разность наклонов в [2] и в данном случае прежде всего должна объясняться тем, что вспышки разные. Но тот факт, что наклон прямой в случае мощной вспышки больше, чем слабой, говорит о более важном обстоятельстве. Действительно, можно ожидать, что в мощных вспышках электронная плотность  $n_e$  более чувствительна к изменению электронной температуры  $T_e$ . С другой стороны, плотность, по-видимому, является самым характерным физическим параметром во вспышках. Подобное обстоятельство и вообще факт наличия соотношения  $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$  в условиях вспышек говорит

о том, что в этих условиях действуют процессы, приводящие к одновременному (синхронному) изменению  $T_e$  и  $n_e$ ; такими процессами могут являться ударные волны.

### О линиях гелия

Как было отмечено в первой части статьи [1], из линий гелия в спектре исследуемой вспышки имеется  $D_3$  в абсорбции и линия  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  в эмиссии. Для  $D_3$  характерна большая отрицательная лучевая скорость. В кадрах 1, 2, 3 лучевые скорости соответственно составляют  $-107, -105$  и  $-107 \text{ км/сек}$ . В кадрах 10 и 11 лучевые скорости по линии  $D_3$  еще больше ( $-135$  и  $-141 \text{ км/сек}$ ). По линиям водорода в кадре 11 и по линиям  $H$  и  $K$  в кадрах 10 и 11 мы обнаружили довольно заметные лучевые скорости, а в первых трех кадрах ни по водородным линиям, ни по линиям  $H$  и  $K$  лучевая скорость незаметна. Исходя из различия в значениях турбулентных скоростей, можно сказать, что различие областей возбуждения эмиссий (и абсорции в  $D_3$ ) действительно является фактом. Можно предположить, что в сгустке, где возбуждается  $D_3$  в абсорбции концентрация свободных электронов мала, а температура высокая. При таких условиях водород из-за довольно сильной ионизации может и не проявлять себя в эмиссии. Кроме того, при высокой температуре и низкой электронной плотности абсорбция в  $D_3$  может проявлять себя настолько сильно, что  $D_3$  в эмиссии может замываться до степени неразличимости. В контурах  $D_3$  в абсорбции мы видим, что она действительно сильна — интенсивность соседнего непрерывного спектра в два раза больше, чем интенсивность в центре контура  $D_3$ .

Предварительное изучение линии  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  привело нас к следующему. Турбулентная скорость движения внутри области эмиссии в этой линии в среднем составляет  $45 \text{ км/сек}$ , что в 1,5 раза больше, чем внутри водородной эмиссии (а турбулентная скорость в сгустке в  $D_3$  составила  $\sim 20 \text{ км/сек}$ ). В кадре 3 по линии  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  мы также обнаружили градиент скорости потока мелких сгустков с показателем  $m = 1,0$ , входящим в выражение  $\tau = \tau_0 e^{-x^m}$ , где  $x = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}$ , в то время как в случае водородных линий и линий  $H$  и  $K$  этот показатель равнялся 1,5. Этот факт и факт различия турбулентных скоростей в областях эмиссии  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  и эмиссий других линий

говорит о том, что область свечения линии гелия другая. Это так и должно быть еще по той причине, что для возбуждения эмиссии в  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  требуются условия, отличные от условий для интенсивного свечения линий водорода и тем более  $H$  и  $K$ . Для интенсивного свечения линии  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  помимо высокой температуры требуется и высокая электронная концентрация, ибо как показывают лабораторные опыты, эта линия весьма чувствительна к электронному удару; с другой стороны, в области эмиссии в линии  $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$  помимо электронных ударов, существенно и фотосферное излучение, которое ослабляет эмиссию в этой линии. Обнаружение довольно интенсивной эмиссии в исследуемой серии спектрограмм (в кадре 3 интенсивность этой линии в центре контура составляет  $\sim 0,48$  монохроматической интенсивности непрерывного спектра центра солнечного диска) говорит о наличии ударного возбуждения, что возможно при высокой температуре и электронной концентрации.

### Выводы

1. Атомы и ионы различных элементов возбуждаются в равных областях вспышки и, более того, максимумы свечения в линиях разных атомов и ионов наступают одновременно. Максимум свечения в линиях гелия и водорода, в областях эмиссий которых турбулентные скорости больше, чем в других областях вспышки, наступает раньше всех остальных, а максимум свечения в линиях  $\text{MgI}$ ,  $\text{AlI}$ ,  $\text{FeI}$ ,  $\text{TiI}$  и других атомов металлов, с наименьшей турбулентной скоростью в области эмиссии, наступает с некоторым запозданием.

2. Оптическая толща  $\tau_0$  даже в центральной части линии  $H_\alpha$  мала, что прежде всего связано с малым числом атомов водорода во втором квантовом состоянии и важной ролью турбулентности. Это обстоятельство вместе с выводом 1 свидетельствует о том, что вспышка действительно является структурным образованием, в различных элементах которого возбуждающий фактор действует с разной силой. Таким возбуждающим фактором может являться ударная волна.

3. Значения  $N_2$ , а также  $N_k$ , определяемые по „синему“ и „красному“ крыльям, неодинаковы — значения, определяемые по „красному“ крылу больше, причем чем сильнее „красная“ асимметрия, тем больше соответствующая разность между данными, полученными по „красному“ и „синему“ крылу. Такой факт является количественным доказательством того, что асимметрия контуров эмиссионных линий в спектре вспышки действительно является результатом дополнительного излучения, налагаемого на одно крыло (в нашем случае на „красное“ крыло), причиной которого является поток мелких сгустков, проходящий через область вспышки (при „красной“ асимметрии по направлению к поверхности Солнца).

4. Как по данным  $N_k$ , по „красному“ и „синему“ крылу, так и по данным функции источника для разных кадров можно сделать вывод о реальности наличия на определенных стадиях развития вспышки градиента скорости потока мелких сгустков, проходящего через область вспышки.

5. Имеет место перенаселенность верхних энергетических уровней атома водорода, которая не может объясняться только ростом статистических весов этих уровней. Такая перенаселенность является следствием малой оптической толщи вспышки в соответствующих линиях.

6. Оптическая толща вспышки в линиях  $H$  и  $K$  небольшая и она заметно изменяется при переходе от кадра к кадру, от сгустка к сгу-



стку одного и того же кадра и даже от одного места к другому одного и того же сгустка. Все это, а также данные о характере ассиметрии в линиях  $H$  и  $K$  еще раз подтверждает то, что солнечная атмосфера действительно крайне неоднородна и такая неоднородность вместе с различием структуры самого возбуждающего фактора в разных участках вспышки приводит к крайне разнообразной и сложной картине эмиссий.

7. Концентрация атомов водорода во всех состояниях на один порядок больше, чем в случае [2], где вспышка была значительно слабее. Если исходить из той точки зрения, что вспышки являются результатом распространения определенных ударных волн, то мы действительно должны ожидать, что мощность вспышки зависит от мощности ударных волн, приводящих к уплотнению плазмы.

8. Так же, как в [2], имеет место соотношение  $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$  с той

разницей, что значение константы в данном случае гораздо больше, чем в [2]. Поскольку данная вспышка довольно мощная, а плотность, по-видимому, является самым характерным физическим параметром во вспышках, то при мощной вспышке наклон прямой к оси  $T_e$  должен увеличиваться, т. е. электронная концентрация должна быть более чувствительной к изменению электронной температуры. Подобное

обстоятельство и вообще факт наличия соотношения  $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$  в ус-

ловиях вспышек говорит о том, что в этих условиях действуют процессы, приводящие к синхронному изменению  $n_e$  и  $T_e$ , а такими процессами могут являться ударные волны.

9. Факты, обнаруженные по линиям гелия, а также результаты, полученные по водородным линиям и линиям  $H$  и  $K$ , свидетельствуют о том, что для вспышек действительно характерно явление взрыва, в результате которого отдельные сгустки—облака покидают область взрыва с довольно большой скоростью и взаимодействуют с неоднородной плазмой солнечной атмосферы; такое взаимодействие, в частности, может сводиться к явлениям на фронтах ударных волн, образующихся впереди этих сгустков.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 3.
2. Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 3.
3. Гусейнов Р. Э. „Астрономический журнал“, 43, вып. 5, 1966.

Р. Э. Гусейнов

1960-чы ил 25 ијун хромосфер алышмасынын  
спектрофотометрик тэдгигинин нәтичәләри һаггында

#### ХҮЛАСӘ

Электрон сыхлығы вә электрон температуру арасында хәтти асылылығын бу алышмада да олдуғу ашкар едилмишдир. ( $n_e T_e$ ) нөгтәләрини бирләшдирән дүз хәттин абсис охуна мејлинин алышманын

күчүндән асылы олдуғу мүәјјәнләшдирилмишдир. Алышма нә гәдәр күчлү олса  $n_e T_e$ -јә бир о гәдәр чох һәссас олур; алышма нә гәдәр күчлүдүрсә, гидроген атомларынын бүтүн һаллардакы консентрасијасы да бир о гәдәр бөјүкдүр.

Јухарыда мүәјјән едилән амилләр көстәрир ки, алышма һәгигәтән зәрбә далғасынын Күнәш атмосфериндә јажылмасынын нәтичәсидир.

Ионлашмыш калсиум гәлпәләринин, һабелә һелиум атомларынын һәјәчанланмасында ашкара чыхарылан хүсусијәтләр, о чүмләдән онларын бөјүк шүа сүр'әтинә малик олмасы көстәрир ки, алышмалар һәгигәтән Күнәш атмосфериндә баш верән күчлү партлајыша бәнзәр просесләрин нәтичәсидир.



Б. А. АХМЕДОВ

# ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В АНИЗОТРОПНОМ ПЛАСТЕ С ПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ

Рассмотрим задачу о течении жидкости к скважине (или от скважины) в пласте, проницаемость которого в вертикальном и горизонтальном направлениях различна. Кровлю пласта считаем слабопроницаемой.

## § 1. Установившееся течение

При изучении установившегося течения необходимо найти решение уравнения

$$\kappa_r \left( \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \kappa_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям:

$$P|_{r=R_c} = P_c; \quad P|_{r=R_n} = P_n; \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\alpha^2 (P - P_0) \text{ при } z = b, \text{ где } \alpha^2 = \frac{\kappa_r}{\kappa_z b_r};$$

$\kappa_r$  и  $b_r$  — коэффициент проницаемости и мощность перемычки над пластом.

Введя  $\rho = P - P_0$ , из (1) получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} + \kappa^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

при условиях:

$$\rho|_{r=R_c} = \rho_c = P - P_c;$$

$$\rho|_{r=R_c} = \rho_n = P_n - P_0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \alpha^2 \rho = 0 \text{ при } z = b, \text{ где } \kappa^2 = \frac{\kappa_z}{\kappa_r}.$$

Умножая (2) на  $M_n \cos \lambda_n z dz$ , интегрируя от 0 до  $b$  и обозначая

$$\rho_n = M_n \int_0^b \rho \cos \lambda_n z dz,$$

получим

$$\frac{d^2 \rho_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho_n}{dr} - \kappa^2 \lambda_n^2 \rho_n = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda_n$  суть корни уравнения  $-\lambda_n \sin \lambda_n b + \alpha^2 \cos \lambda_n b = 0$ , а  $M_n$  определяется из условия нормировки.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\rho_n = A_n I_0(\kappa \lambda_n r) + B_n K_0(\kappa \lambda_n r), \quad (4)$$

где  $I_0$  и  $K_0$  — функции Бесселя I и II рода нулевого порядка мнимого аргумента, а  $A_n$  и  $B_n$  определяются из граничных условий и имеют вид:

$$A_n = \frac{\bar{\rho}_c K_0(\kappa \lambda_n R_n) - \bar{\rho}_n K_0(\kappa \lambda_n R_c)}{K_0(\kappa \lambda_n R_n) I_0(\kappa \lambda_n R_c) - I_0(\kappa \lambda_n R_n) K_0(\kappa \lambda_n R_c)};$$

$$B_n = \frac{\bar{\rho}_n I_0(\kappa \lambda_n R_c) - \bar{\rho}_c I_0(\kappa \lambda_n R_n)}{K_0(\kappa \lambda_n R_n) I_0(\kappa \lambda_n R_c) - I_0(\kappa \lambda_n R_n) K_0(\kappa \lambda_n R_c)},$$

$$\text{где } \bar{\rho}_c = \rho_c M_n \frac{\sin \lambda_n b}{\lambda_n},$$

$$\bar{\rho}_n = \rho_n M_n \frac{\sin \lambda_n b}{\lambda_n}.$$

Таким образом, решение задачи дается формулой

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \cos \lambda_n z, \quad (5)$$

где  $\rho_n$  определяется из формулы (4). Для получения решения задачи в изотропном пласте достаточно в наших формулах (4) и (5) подставить  $\kappa = 1$ . Так же, если кровля пласта непроницаема, то для получения решения достаточно в наших формулах перейти к пределу при  $\kappa_r \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow 0$ ).

## § 2. Неустановившееся течение

Рассмотрим работу скважины в бесконечном анизотропном пласте с проницаемой кровлей. Для решения задачи необходимо решить дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) = \kappa^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa_r} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6)$$

при условиях:  $P|_{t=0} = 0$ ;  $r \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=0} = A = \text{const};$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \text{ и } \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha^2 P = 0 \text{ при } z = b.$$

Для решения уравнения (6) умножим его на  $I_0(\beta, r) r dr$ , где  $I_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и проинтегрируем от 0 до  $\infty$ . С учетом граничных условий из (6) получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - \frac{\beta^2}{\kappa} \rho - \frac{A}{\kappa} = \frac{1}{\kappa \chi_r} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (7)$$

где

$$\rho(z, \beta, t) = \int_0^{\infty} P(z, r, t) I_0(\beta, r) r dr.$$



Для решения уравнения (7) при условиях:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} + \alpha^2 \rho = 0 \text{ при } z=b \text{ и } \left. \rho \right|_{t=0} = 0$$

Умножим его на  $M_n \cos \lambda_n z dz$  и проинтегрируем от 0 до  $b$ , где  $\lambda_n$  — корни уравнения

$$-\lambda_n \sin \lambda_n b + \alpha^2 \cos \lambda_n b = 0.$$

Таким образом, из уравнения (7) получим

$$\frac{d \rho_n}{dt} + B_n \rho_n = A_n, \quad (8)$$

$$\text{где} \quad B_n = \lambda_n^2 + \frac{\beta^2}{\kappa},$$

$$A_n = -\frac{A}{\kappa} M_n \frac{\sin \lambda_n b}{\lambda_n}.$$

Решение уравнения (8) при условии  $\rho_n|_{t=0} = 0$  имеет

$$\text{вид} \quad \rho_n = \frac{A_n}{B_n} (e^{-B_n t} - 1) \quad (9)$$

и тогда

$$P(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{A_n}{B_n} (e^{-B_n t} - 1) \cos \lambda_n z I_0(\beta, r) \beta d\beta \quad (10)$$

Формула (10) дает решение поставленной задачи. Из нее, в частности, при  $K=1$  можно получить решение задачи для изотропного пласта [1]. Так же при  $\kappa_r = 0$  ( $\alpha = 0$ ) получим решение задачи для пласта с непроницаемой кровлей и подошвой.

Примечание. Заметим, что для получения количества перетока  $Q_y$  через кровлю пласта в этом случае будем иметь формулу

$$Q_y = \int_0^{\infty} \frac{\kappa P|_{z=b}}{\rho b_r} 2 \pi r dr \quad (11)$$

При получении формулы (11) учтено, что давление над перемычкой  $P_0 = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. Изд. "Недра", М., 1965.
2. Джалилов К. Н. Тр. Ин-та разработки Н и ГМ АН Азерб. ССР, 1962.
3. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Изд. ТТЛ, М.—Л., 1951

Б. Э. Әһмәдов

#### Таваны кечиричи олан анизотроп лајда мајенин охасимметрик ахыны

##### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кечиричилији мұхтәлиф олан лајда гујуја (вә ја гују-дан) шагули вә үфги истигәмәтләрдә маје ахыны мәсәләсиндән бәһс едилір. Лајын таваны эифкечиричи гәбул олунур.

Бурада ејни заманда интеграл чевирмәләрини тәтбиг едәрәк мајенин гәрарлашмыш вә гәрарлашмамыш ахыны тәдгиг олунур. Лајда тәзјигин пајланмасы вә ахан мајенин мигдары үчүн ујғун дүстурлар алыныр.

В. П. ГОРЕЦКИЙ, С. Г. РОМАНОВСКИЙ

#### ТЕРМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА БЕТОНА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОМЫШЛЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Наиболее распространенным способом тепловой обработки железобетонных строительных конструкций является тепловлажностная обработка при конвективном теплоподводе, на которую тратится 85—90% всего технологического времени, потребного для производства конструкций. При этом в толще изделия происходит неодновременное и неравномерное распределение температур. В силу этого реакции гидратации цемента также протекают неравномерно, что приводит к неоднородности структуры бетона и отрицательно сказывается на физико-механических свойствах.

В течение последних лет в Институте тепло- и массообмена АН БССР нами проводились исследования нового способа ускоренного твердения бетона и железобетона при кондуктивном и кондуктивно-конвективном способе теплоподвода в переменном электромагнитном поле с применением тока промышленной частоты [1]. Характерной особенностью этого способа является то, что нагрев бетона и железобетона осуществляется от внутренних источников тепла; получаемых в результате индукции ферромагнитных тепловыделяющих элементов [2, 3] без непосредственного контакта с токоведущими частями электроустройства (рис. 1).

При данном способе процесс тепловлажностной обработки железобетона протекает при наличии внутренних и внешних источников тепла и характеризуется относительно равномерным распределением температуры, влагосодержания и давления в теле бетона. Кинетика процесса определяется закономерностями переноса тепла и массы связанного вещества, химическими и фазовыми превращениями, а также параметрами режима и условиями внешнего тепло- и массообмена [2, 4]. В процессе твердения бетона имеет место равномерное структурообразование. Этому способствует то обстоятельство, что образование гидрата кальция (новообразование) происходит в весьма благоприятных влажностных и температурных условиях, где не образуется аномальных градиентов давления, температуры и влажности.

Исследования показали, что поле температур в толще твердеющего бетона имеет относительно одинаковый характер (рис. 2). Температура арматуры на протяжении всего процесса на 5—8° ниже температуры бетона, что объясняется выделением дополнительного



тепла за счет реакции гидратации цемента. Температура окружающего воздуха, как правило, на 5–7°C ниже температуры бетона. Относительная влажность воздуха в течение всего процесса находится в пределах 78–89%. Процесс твердения бетона происходит при невысоких температурах (60–70°C). В период подъема температур не происходит резкого выделения влаги с поверхностных слоев бетона и температурного расширения. Это обстоятельство крайне важно для формирования структуры бетона, особенно в начальный период процесса твердения. Характерно, что испарение влаги из бетона в большей мере происходит во второй период процесса—в период установившихся температур.

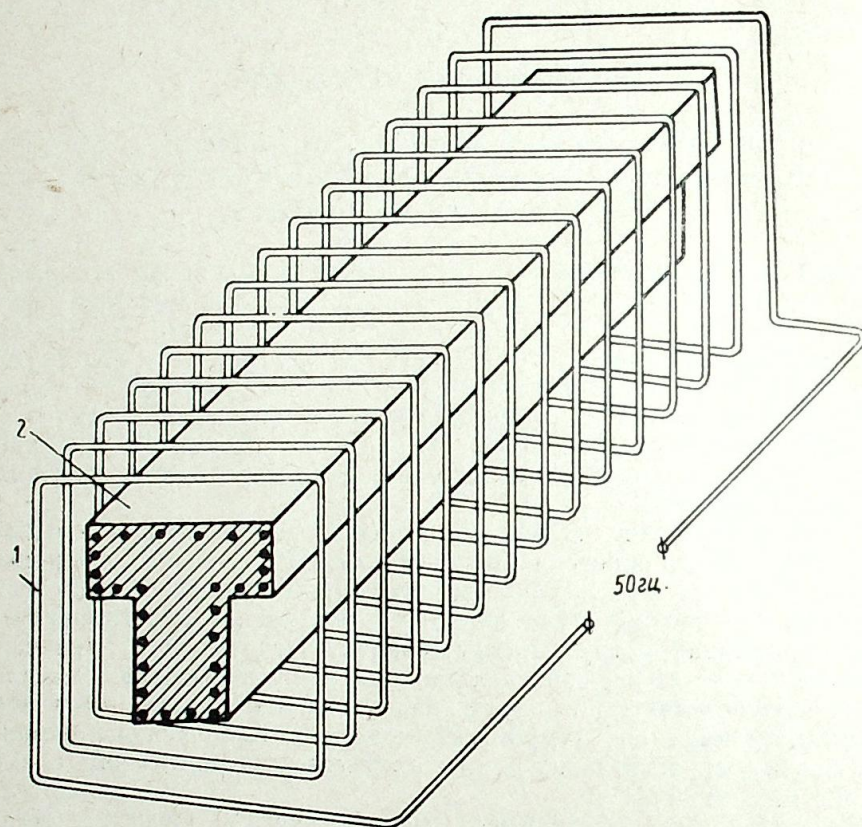


Рис. 1. Нагрев железобетона в электромагнитном поле:  
1—электромагнитная обмотка; 2—армированная железобетонная конструкция

Как установлено нашими исследованиями, на скорость протекания химических реакций в твердеющей массе бетона оказывает влияние внешнее переменное электромагнитное поле, приводящее в частности к изменению физико-химических свойств затворенной воды (величина поверхностного натяжения, вязкость, плотность, электропроводность и др.), а также подвижной фазы—твердеющей массы бетона. Кроме того, на плотность структуры и ее образование оказывают влияние микроколебательные движения ферромагнитных тепловыделяющих элементов под воздействием переменного электромагнитного поля.

В результате проведенных исследований в лабораторных условиях и испытаний технологии ускоренного твердения бетона в производственных условиях на опытно-промышленной установке нами разработан

проект промышленной установки термической обработки железобетонных конструкций энергетического строительства производительностью 50–75 тыс. м³ бетона в год, осуществленных в Камгэсэнергострое.

В основу разработки конструктивно-технологической схемы установки для ускоренного твердения бетона положена номенклатура изделий универсального проекта тепловой электростанции мощностью 2400 тыс. кВт, разработанного Государственным ордена Ленина проектным институтом „Теплоэлектропроект“ с учетом необходимых требований к структурным и физико-механическим свойствам бетонов для этих конструкций.

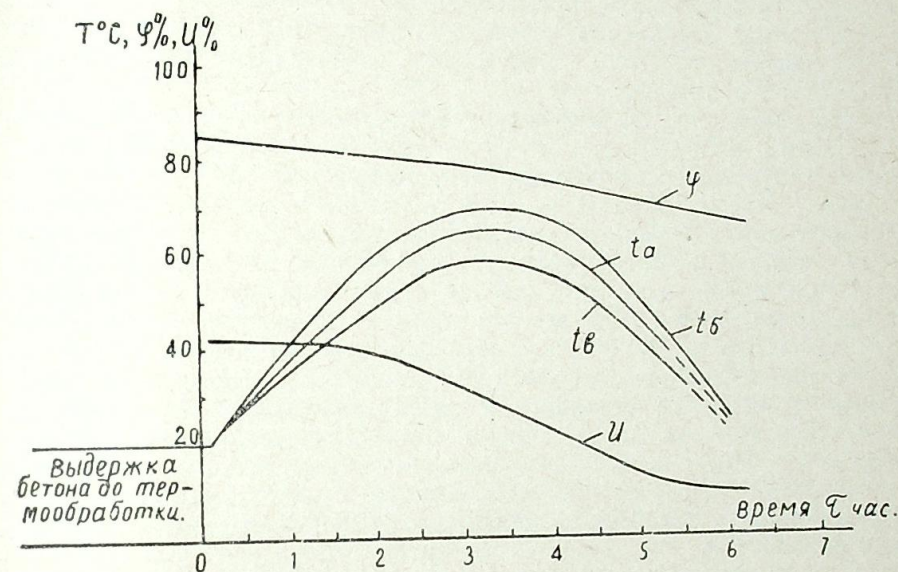


Рис. 2. Кривые кинетики процесса термообработки:  
 $t_b$  — температура бетона;  $t_v$  — температура воздуха;  $t_{арм}$  — температура арматуры;  $U$  — текущее влагосостояние;  $\varphi$  — относительная влажность отражающей среды.

В связи с этим конструктивно-технологическая схема способа ускоренного твердения сборных элементов железобетонных конструкций предусматривает создание технологических условий, позволяющих вести термическую обработку изделий в переменном электромагнитном поле.

Технологическая схема предусматривает создание различных режимов термической обработки с широким и плавным регулированием диапазона температур, напряженности магнитного поля и создание необходимых параметров окружающей среды. Основными конструктивными и технологическими элементами способа являются: теплоизолированная камера с рабочими отсеками; электромагнитная обмотка по периметру и длине рабочих отсеков; устройство для поддержания заданных параметров окружающей среды (увлажнительное устройство); транспортные средства; средства технологического контроля и автоматизации процесса термообработки; электрические устройства регулирования напряженности магнитного поля.



Конструктивная часть теплоизолированной тоннельной камеры с рабочими отсеками предусматривает непрерывно-поточную и циклично-поточную технологию термообработки. Поточная или циклично-поточная технология выбирается из условий требований к физико-механическим и структурным свойствам и, в свою очередь, определяется конкретным режимом. Ограждающие конструкции тоннельной камеры целесообразно выполнять из неэлектропроводных материалов (кирпич, бетонные блоки, газобетон и др.). Оптимальный периметр и геометрические размеры камеры (тоннеля) определяются с учетом размеров термообрабатываемых конструкций, производительности установки и принятыми режимами. В свою очередь, геометрические размеры обмотки определяются из условий расчета оптимальных электрических и магнитных параметров обмотки (эффективное значение напряженности магнитного поля, предельное значение фактора рассеивания магнитного поля и др.).

Например, для обеспечения годовой производительности тоннельной камеры в 50—75 тыс. м<sup>3</sup> железобетонных конструкций энергетического строительства при циклично-поточной технологии может быть принято восемь рабочих отсеков, из которых четыре оборудованы электромагнитными обмотками, а остальные четыре являются остывочными помещениями. Исходя из максимально возможных кратных размеров обрабатываемых изделий, длина каждого рабочего отсека принимается равной семи метрам (в расчет принято наиболее массовое изделие). Ширина рабочего отсека принимается по ширине наибольшего изделия и равна трем метрам. Высота определяется из условий производительности и массы ферромагнитных элементов (опалубка, арматура и металлические тележки). Намагничивающая обмотка выполняется на основании расчета напряженности магнитного поля и мощности установки. Принципиально обмотка может быть выполнена из проводникового материала различных профилей (квадратный, круглый, прямоугольный).

Для лучшего настила тока и создания более равномерного магнитного поля предпочтительными являются обмотки из алюминиевых или медных шин прямоугольного сечения. Из условий симметрии нагрузки питающего трансформатора целесообразно предусматривать трехфазные обмотки с включением их по схеме „звезда“ или „звезда—звезда“. Минимальное расстояние между витками обмотки выбирается из условий минимального пробойного промежутка и гарантийного расстояния от виткового замыкания. Монтаж обмотки целесообразно выполнять из голых алюминиевых шин на опорных диэлектрических основаниях или изоляторах. Регулирование напряженности магнитного поля и мощности установки может осуществляться за счет включения соответствующего количества ампервитков обмотки, либо изменением напряженности магнитного поля за счет изменения напряжения подводимого к обмоткам.

Поддержание необходимых влажностных условий на протяжении всего процесса твердения бетона обеспечивается, как правило, за счет выделения испаряющейся влаги из массы бетонных изделий, находящихся в рабочих отсеках. Расчет показывает, что даже при коэффициенте загрузки камеры бетонными изделиями, равным  $0,45 \div 0,55$ , испарение только  $3 \div 4\%$  влаги от затворенной уже обеспечивает поддержание относительной влажности воздуха порядка 75—85%. Не исключаются случаи, когда коэффициент загрузки может быть значительно ниже 0,45, например, при термообработке отдельных конструкций, которые из-за негабаритности не могут быть помещены в камеры в количестве, обеспечивающем номинальный коэффициент

загрузки камеры. При этом может оказаться, что количество влаги, выделяемое из изделий в процессе их термообработки, не будет достаточным для обеспечения относительной влажности воздуха по заданному режиму. Для этого необходимо в камере предусматривать дополнительное увлажнительное устройство. Таким устройством является испарительный лоток. Регулирование необходимого количества влаги, поступающей из испарительного лотка, осуществляется за счет нагрева его ферромагнитной массы под воздействием электромагнитного поля обмотки. Расход воды в увлажнительном устройстве в течение процесса контролируется водомерными приборами.

Свежеотформованные изделия в опалубке укладываются кранами на транспортные тележки и подаются в камеры. Для перемещения транспортных средств в камере уложены рельсы узкой колеи. Схема перемещения тележек в тоннельной камере и их возраст осуществляются исходя из конкретных условий производства. Контроль процесса термической обработки бетона ведется с помощью приборов, определяющих параметры окружающей среды ( $t$ ,  $\varphi$ ). Прочность и качество бетона контролируются в соответствии с общепринятой методикой ГОСТа.

Регулирование температур и процесса термообработок в рабочих отсеках осуществляются изменением напряженности магнитного поля. Электрическая схема установки позволяет полностью автоматизировать процесс термообработки с помощью простейшего программного устройства. В основу программного управления и автоматизации могут быть положены параметры окружающей среды в камере ( $t$ ,  $\varphi$ ) с учетом технологического времени по режимам. Управление процессом во всех случаях может осуществляться дистанционно с пульта управления установкой или диспетчерского пункта. Регулирование напряженности магнитного поля установки и, соответственно, управление режимом нагрева и термообработки также ведется с пульта управления. В цепях главного тока предусматриваются устройства защиты и блокировки, а также сигнальная аппаратура.

Для доведения коэффициента мощности установки  $\cos \varphi$  до его планового значения (0,92—0,95) необходимо предусматривать компенсацию реактивной энергии за счет установки статических конденсаторов как непосредственно в помещении пульта установки, так и на питающей подстанции.

Результаты натурных испытаний промышленной установки и технологии ускоренного твердения бетона в электромагнитном поле с применением тока промышленной частоты показали следующее (табл. 1)

Анализ данных проектов заводов по производству сборного железобетона, а также наружный обмер цехов показывают, что камеры пропаривания, расположенные внутри цехов, занимают от 15 до 45% полезной площади, в то время как при электромагнитном способе термообработки установки сооружаются вне цеха и являются продолжением технологической линии. Это позволяет, с одной стороны, сократить производственную площадь вновь сооружаемых заводов сборного железобетона, а с другой стороны дает возможность увеличить производственную мощность предприятия на тех же площадях при условии соответствующего увеличения производительности смежных технологических переделов. Внедрение электромагнитного способа позволяет увеличивать оборачиваемость форм, повысить качество железобетонных конструкций, автоматизировать процесс термообработки и улучшить санитарно-технические условия в производственных цехах.

На основании экспериментальных и аналитических исследований,



| Наименование                                                                              | Единица измерения   | Показатели |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------|
| Годовая производительность установки                                                      | тыс. м <sup>3</sup> | 50 ÷ 75    |
| Установленная мощность                                                                    | квт                 | 640        |
| Коэффициент мощности установки со статическими конденсаторами                             | —                   | 0,92       |
| Расход электроэнергии на 1 м <sup>3</sup> железобетона                                    | квт·ч               | 60 ÷ 70    |
| Напряженность магнитного поля                                                             | эрсед               | 150 ÷ 400  |
| Напряжение питающей сети                                                                  | в                   | 380        |
| Продолжительность термообработки железобетонных конструкций энергетического строительства | час                 | 4 ÷ 6      |
| Капиталовложения на 1 м <sup>3</sup> железобетона                                         | руб                 | 1,6        |
| Эксплуатационные расходы на 1 м <sup>3</sup> железобетона                                 | руб                 | 0,99       |
| Прочность бетона после термообработки в процентах от марочной                             | %                   | 70 и более |

а также испытания промышленной установки по термообработке бетона в электромагнитном поле можно сделать следующие выводы:

1. На протекание химических реакций в процессе твердения бетона существенное влияние оказывает внешнее электромагнитное поле.

2. Успешное протекание процесса химических реакций и термодинамических процессов происходит при напряженности магнитного поля в пределах 150—400 эрсед и температуре твердеющей массы бетона 50—60°C.

3. Независимо от способа теплопередачи при наличии внешнего электромагнитного поля, действующего на твердеющую массу бетона, температура имеет относительно равномерный характер [4].

4. Для большинства строительных конструкций экономически целесообразными являются режимы термообработки без стадии изотермического прогрева, так как по условиям строительства и монтажа конструкции не подвергаются эксплуатационным нагрузкам ранее чем через 28 суток.

При указанном режиме после термообработки достигается распалубочная прочность. В возрасте 28 суток прочность бетона, как правило, превышает марочную на 20—30%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В., Романовский С. Г. „Изв. АН БССР“, 1966, № 2.
2. Романовский С. Г. Тепло- и массообмен в капиллярно-пористых материалах при сушке в электромагнитном поле. ИФЖ, т. IX, 1965, № 4.
3. Романовский С. Г. Кинетика сушки капиллярно-пористых материалов при кондуктивно-конвективном подводе тепла в электромагнитном поле.
4. Романовский С. Г., Волосян Л. Н. Тепло- и массообмен в процессе термической обработки высокопрочного бетона в электромагнитном поле током промышленной частоты. Сб. „Строительная теплофизика, энергия“, 1966.

В. П. Горстски, С. Г. Романовски

Сәнаје тезликли дәјишән чәрәжанын электромагнит сәһәсинин истифадә олунмасы илә бетонун термики ишләнмәси

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә сәнаје тезликли дәјишән чәрәжанын электромагнит сәһәсинин истифадә олунмасы илә бетон вә дәмир-бетонун јени үсулла сүр'әтләндирилмиш бәркидилмәси тәдгиг олунур.

Апарылан тәдгигатлара эсасән енергетика тикинтисинин дәмир-бетон конструкцјасынын термики ишләнмәси. сәнаје аваданлығынын пројекти һазырланмышдыр.

Мәгаләдә аваданлығын сынаг нәтичәләри тәдгиг олунур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ  
Физика-техника вә ријазийат елмләри серијасы, 1966, № 4.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР  
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 4

Ф. Г. МУРАДАЛИЕВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ВЕТРА И ЕГО ВЛИЯНИЯ НА ВЕТРОКОЛЕСО

Изучение изменения скорости ветра с высотой представляет большой теоретический и практический интерес. Последнее особенно важно для целей ветроиспользования, если учесть, что  $N_{\text{ветродвигателя}} \propto v^3$ . Кроме того, с этим вопросом связано довольно много конкретных задач по прочности тех или иных узлов ветродвигателей и в особенности ветроколес. Приемная часть ветродвигателя, имеющая диаметр в лучшем случае несколько метров (а у больших ветродвигателей диаметры ветроколес достигают даже десятков метров), будет встречать ветровой поток, скорость которого отличается в ее нижних и верхних точках соответственно профилю ветра в данном приземном слое атмосферы. Понятно, что ветроколесо, принимая такой разносторонний ветровой поток, будет испытывать аэродинамические неуравновешенности, механические удары различного характера на те или иные узлы, с которыми ветроколесо непосредственно связано, и т. д. Все это ухудшает условия работы ветродвигателя, способствует быстрому износу конструктивных элементов.

В ветроэнергетике и ветротехнике наибольшее практическое применение получила формула, по которой скорость ветра с высотой изменяется так:

$$v = v_0 \cdot \left( \frac{h}{h_0} \right)^{0,2}, \quad (1)$$

где  $v$  — скорость ветра на высоте  $h$ ;

$v_0$  — скорость ветра на высоте  $h_0$  [1].

Кроме того, в ветроэнергетических расчетах применяется ряд других формул, дающих линейную и степенную зависимости между скоростью ветра и высотой [2,3].

Все эти зависимости, хотя и просты в практической работе, однако несут в себе существенный недостаток — в них не учитывается влияние подстилающей поверхности земли, температурная стратификация и т. д. В метеорологии и в физике атмосферы Земли давно уже принято считать вертикальный профиль ветра в приземном слое логарифмическим [4, 5, 6, 7, 8, 9], подчиняющимся следующему выражению:

$$v = v_1 \cdot \frac{\ln \frac{h}{z_0}}{\ln \frac{h_1}{z_0}}, \quad (2)$$



где  $z_0$  — шероховатость подстилающей поверхности. Из вышеуказанных работ вытекает, что логарифмический профиль ветра зависит и от состояния атмосферы. В общем профиль ветра находится в зависимости от следующих параметров:

$$\frac{v}{v_*} = f(Re, Ri, z_0), \quad (3)$$

где  $Re$  — число Рейнольдса,  
 $Ri$  — число Ричардсона,  
 $v_*$  — скорость сдвига.

В нашем случае, когда наблюдения велись над одной и той же поверхностью,  $z_0 = \text{const}$ . Кроме того, известно, что в приземном слое  $Re$  изменяется очень мало, поэтому можно допустить  $Re = \text{const}$ . Значит первостепенное влияние на характер профиля ветра имеет число Ричардсона. Действительно, при адиабатической стратификации атмосферы  $Ri = 0$  и характер движения определяется лишь числом  $Re$ . В этом случае мы имеем точный логарифмический профиль ветра. Если температурный градиент сверхадиабатический, то  $Ri < 0$  и градиент ветра становится меньше, нежели градиент ветра при логарифмическом законе. При инверсии  $Ri > 0$  и градиент ветра становится больше, чем во всех остальных случаях (состояниях атмосферы).

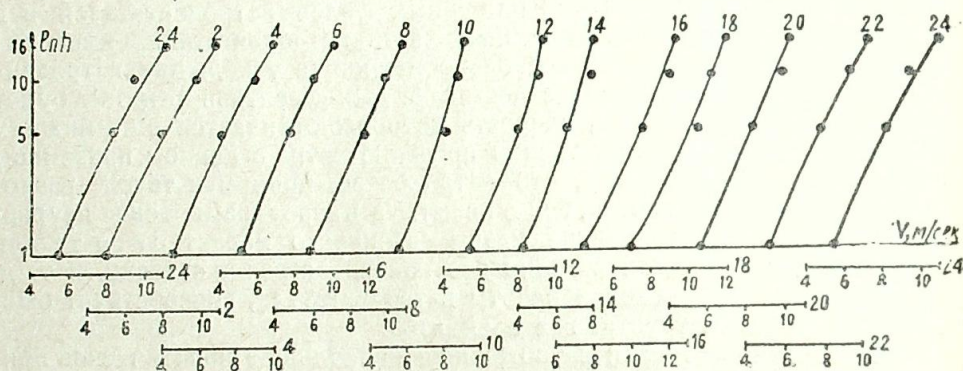


Рис. 1. Вертикальные профили ветра в различное время суток

С целью практического использования всех этих факторов в ветроэнергетике и ветротехнике мы наблюдали характер изменения профиля ветра на полигоне ЛЭВИС для четырех точек приземного слоя атмосферы — на высотах 1, 5, 10 и 16 м. Материал наблюдений за период апрель — август обработан и графически интерпретируется на рис. 1, из которого видно, что в 8 утра и в 20 часов вечера профиль ветра достаточно хорошо согласуется с логарифмическим законом. В эти часы наблюдается  $Ri > 0$ . После 20 часов, когда имеет место условие  $Ri = 0$ , вертикальный профиль ветра отклоняется от профиля, подчиняющегося логарифмическому закону, вправо и это отклонение растет примерно до двух часов ночи, затем до 8 утра идет обратный процесс. После 8 часов, когда имеет место условие  $Ri < 0$ , вертикальный профиль ветра отклоняется от профиля, подчиняющегося логарифмическому закону, влево и это отклонение растет примерно до 12 дня, затем до 20 часов вечера идет обратный процесс. Из сказанного видно, что максимальная величина вертикального градиента ветра наблюдается в 2 часа ночи, а минимальная — в 12 часов дня. Ясно, что условия работы ветроколеса, действия сис-

темы регулирования (в особенности для крупных ветромашин) будут самыми тяжелыми при максимальной величине градиента ветра. Во время испытаний на полигоне лаборатории ЛЭВИС новых конструкций ветродвигателей ВЭС-1,5-6Т, созданных ФВНИИЭМ, нами были проведены эксперименты по определению разности ветровых нагрузок на двухлопастное колесо ВЭС-1,5-6Т в зависимости от вертикального профиля ветра. Обычно ветровая нагрузка на элементарную площадку лопасти равна

$$dP = c_y \cdot b \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (\omega^2 \cdot r^2 + v^2), \quad (4)$$

где  $c_y$  — коэффициент подъемной силы крыла,  
 $b$  — ширина конца лопасти по хорде,  
 $dr$  — длина площадки, выделенной нами на конце лопасти,  
 $\rho$  — массовая плотность воздуха,  
 $\omega r$  — окружная скорость элемента лопасти,  
 $v$  — скорость ветра.

Разность ветровых нагрузок, приходящихся на элементарные площадки на концах лопастей ВЭС-1,5-6Т, будет

$$T = dP_v - dP_n, \quad (5)$$

где  $dP_v$  — ветровая нагрузка на площадку верхней лопасти,  
 $dP_n$  — ветровая нагрузка на площадку нижней лопасти.  
 Подставим значения  $dP_v$  и  $dP_n$ :

$$T = c_y \cdot b \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (\omega^2 \cdot r^2 + v_v^2) - c_y \cdot b \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (\omega^2 \cdot r^2 + v_n^2). \quad (6)$$

Так как для верхней и нижней лопастей величины  $c_y$ ,  $b$ ,  $dr$  и  $\rho$  одинаковы, то (6) преобразуется и при этом получим

$$T = c_y \cdot b \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (v_v^2 - v_n^2). \quad (7)$$

Обозначим  $c_y \cdot b \cdot dr \cdot \frac{\rho}{2} = \kappa$ . По конструктивным данным ВЭС-1,5-6Т

на конце лопасти  $b = 0,08$  м (по хорде), принимаем  $dr = 0,10$  м. Величина  $\kappa$  во всех случаях остается почти постоянной. В (7) будет изменяться лишь скорость ветра на элементарных площадках нижней и верхней лопастей:

$$T = \kappa \cdot (v_v^2 - v_n^2), \quad (8)$$

где  $v_v$  — скорость ветра, приходящаяся на площадку верхней лопасти на высоте  $H = h + R = 9$  м;  $h = 6$  м высота башни ВЭС-1,5-6Т;  
 $R = 3$  м — радиус ветроколеса;  
 $v_n$  — скорость ветра, приходящаяся на площадку нижней лопасти на высоте  $H = h - R = 3$  м.

Находим величину  $T$  для различных вертикальных профилей ветра, которые наблюдаются в течение суток. На рис. 2. представлены значения  $T$  при различных профилях ветра. Как и следовало ожидать, наибольшая величина  $T$  приходится на ночное время, когда  $Ri > 0$ , а наименьшая на полдень, когда  $Ri < 0$ . Для более четкого представления изменения хода изменения  $T$  в течение суток мы взяли его относительные величины  $T/T$  при  $Ri = 0$ . Естественно, с увеличением  $T$  ветроколеса более ощутимо испытывают механические удары, что непосредственно влияет на их прочность. Это явление еще значительнее для ветродвигателей со колес с большим диаметром, в особенности для ветродвигателей со стабилизаторным регулированием. Дело в том, что стабилизаторы, крепящиеся к концам лопастей, испытывают разноскоростные потоки



ветра, в результате чего появляющиеся на стабилизаторах моменты поворота лопастей отличаются по величине. В целом ветроколесо действует в режиме неуравновешенного регулирования, что ухудшает механическую прочность всего ветроагрегата.

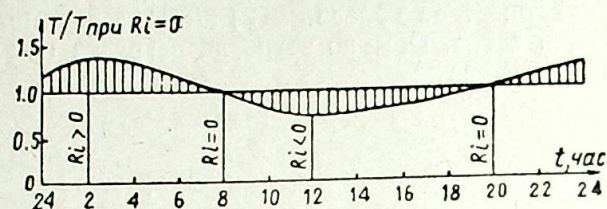


Рис. 2. Разности ветровых нагрузок на элементарные площадки верхней и нижней лопастей ВЭС-1,5-6Т в различное время суток

Таким образом, для получения более надежных и устойчивых данных о новом ветродвигателе целесообразнее испытания проводить во время максимума градиента ветра. Для каждого конкретного пункта это время можно определить на основании наблюдений за профилем ветра в течение вечернего и ночного периода суток.

Резюмируя все вышеизложенное, считаем практически приемлемым принять в ветротехнике и ветроэнергетике вертикальный профиль ветра изменяющимся по логарифмическому закону. Для более точных ветротехнических расчетов по прочности и надежности новых конструкций ветроагрегатов необходимо принимать во внимание отклонения профиля ветра от логарифмического закона, которые связаны с изменениями состояния атмосферы в течение суток. А для ветроэнергетических расчетов эти отклонения несут существенные, поэтому их учет может привести лишь к неоправданному увеличению объема расчетных работ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фатеев Е. М. Ветродвигатели и ветроустановки. Сельхозгиз, М., 1957.
2. Тажиев И. Т. Энергия ветра—база электрификации сельского хозяйства. Госэнергиздат, М.—Л., 1952.
3. Научных отчет ЭНИН АН Азерб. ССР. Баку, 1347.
4. Обухов А. М. „Изв. АН СССР, серия геофизическая“, 1931, № 3.
5. Пристли С. Х. Б. Турбулентный перенос в приземном слое атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1904.
6. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.
7. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
8. Сеттон О. Г. Микрометеорология. Гидрометеоиздат, Л., 1953.
9. Белинский В. А. Динамическая метеорология. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.

Ф. Г. Мурадэлиев

Күләјин шагули профилинин вә онун күләк мүһәррикләринә тәсиринин тәдгиги

#### ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә атмосферин јерүстү гаты үчүн күләјин профили тәдгиг едилир. Бунун үчүн ККЕИЛ-ин полигонунда күнүн мүхтәлиф вахтларында күләјин сүрәти ејни вахтда дөрд һүндүрлүкдә (1, 5, 10 вә 16 м) гејдә алыныр.

Ричардсон әдәди  $Ri = 0$  оlanda, јә'ни сәһәр саат 8-дә вә ахшам саат 20-дә күләјин профили логарифмик гануна табе олур. Күнүн башга вахтларында исә бу ганунун позулмасы мүшаһидә олунур: ахшам саатларында сол тәрәфә мејл едир.

Бурадан белә нәтичә чыхыр ки, күләк мүһәррикләринин вә о чүмләдән күләк чархларынын ән ағыр иш шәраити кечә саатларына (саат 2), јә'ни күләк градијентинин максимал гијмәти олан вахта дүшүр.

Бу экспериментләрин нәтичәләри ВЕС—1,5—6Т күләк чархынын ишиндә јохланылмыш вә ајдын олмушдур ки, јухары вә ашағы ганадларын учларынын элементар сәһәләринә дүшән күләк јүкләринин фәргги максимум гијмәтини кечә саат 2-дә, минимум гијмәтини күндүз саат 12-дә алыр. Буна көрә дә јени күләк мүһәррикләринин сынанмасындан јахшы нәтичәләр алмаг үчүн кечә саатларында әлдә едилмиш материаллардан истифадә етмәк лазымдыр.



Ч. М. ДЖУВАРЛЫ. Е. В. ДМИТРИЕВ, Э. М. АЛИЗАДЕ

### МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

Состояние электрической сети в различных ситуациях описывается системой уравнений, состоящей из нелинейных алгебраических, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, соответствующими различным элементам электрической сети. В настоящей статье рассматривается решение уравнения линии электропередачи как элемента сети, к решению которого, рассматриваемого в общем случае, применен метод характеристик, предложенный Массо в 1900 г. [1] и получивший в настоящее время в электротехнике большое распространение в применении к частным случаям.

Применим метод характеристик для решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Lc \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (Lg + cr) \frac{\partial u}{\partial t} - rgu = 0. \quad (1)$$

В соответствии с [2] можно получить систему уравнений, решение которой эквивалентно решению уравнения (1):

$$\frac{dt}{dx} = \alpha_1, \quad (2)$$

$$\frac{dt}{dx} = \alpha_2, \quad (3)$$

$$d \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 d \frac{\partial u}{\partial t} = -P dx, \quad (4)$$

$$d \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1 d \frac{\partial u}{\partial t} = -P dx. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \sqrt{Lc}$ ,  $P = -(Lg + cr) \frac{\partial u}{\partial t} - rgu$ , (2), (3) — уравнения первого и второго семейства характеристик, (4) и (5) — дифференциальные соотношения на них.

Непосредственно применить систему уравнений (2) ÷ (5) для решения электротехнических задач нельзя, так как при решении таких задач должны быть известны токи в линии. С этой целью перепишем (4) и (5) с учетом уравнения:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} - ri, \quad (6)$$

тогда получим:

$$-L d \frac{di}{dt} + \alpha_2 d \frac{du}{dt} = -P dx + r di, \quad (7)$$

$$-L d \frac{di}{dt} + \alpha_1 d \frac{du}{dt} = -P dx + r di, \quad (8)$$

которые дают возможность получить напряжения и токи в различных точках линии электропередачи.

При расчете устанавливающего процесса в сложной электрической сети возникает необходимость решения следующих элементарных задач:

1. Расчет напряжения и тока в некоторой точке  $x$  линии;
  2. Расчет напряжения и тока в узловой точке электрической сети.
- Записывая дифференциальные уравнения (2), (3), (7), (8) в конечных разностях, получим:

$$t_x - t_y = \alpha_1 (x_x - x_y), \quad (9)$$

$$t_x - t_z = \alpha_2 (x_x - x_z), \quad (10)$$

$$L \left[ \left( \frac{di}{dt} \right)_y - \left( \frac{di}{dt} \right)_x \right] + r(i_y - i_x) + \alpha_2 \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_x - \left( \frac{du}{dt} \right)_y \right] = \\ = \left[ (Lg + cr) \left( \frac{du}{dt} \right)_y + rgu_y \right] (x_x - x_y), \quad (11)$$

$$L \left[ \left( \frac{di}{dt} \right)_z - \left( \frac{di}{dt} \right)_x \right] + r(i_z - i_x) + \alpha_1 \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_x - \left( \frac{du}{dt} \right)_z \right] = \\ = \left[ (Lg + cr) \left( \frac{du}{dt} \right)_z + rgu_z \right] (x_x - x_z). \quad (12)$$

Решая эти уравнения одним из численных методов, можно найти значения напряжения и тока в некоторой точке  $x$ . Результаты решения отладочных задач на ЭЦВМ показали, что для решения уравнений (11), (12) удобнее применить явный разностный метод, дающий хорошие результаты с минимальной затратой времени, если использовать нижеприведенные аппроксимации:

$$\left( \frac{di}{dt} \right)_x \approx \frac{i_{x,t+0,5\Delta t} - i_{x,t-0,5\Delta t}}{\Delta t}; \quad \left( \frac{du}{dt} \right)_x \approx \frac{u_{x,t+0,5\Delta t} - u_{x,t-0,5\Delta t}}{\Delta t}, \\ \left( \frac{di}{dt} \right)_y \approx \frac{i_{y,t} - i_{y,t-\Delta t}}{\Delta t}; \quad \left( \frac{du}{dt} \right)_y \approx \frac{u_{y,t} - u_{y,t-\Delta t}}{\Delta t}; \\ \left( \frac{di}{dt} \right)_z \approx \frac{i_{z,t} - i_{z,t-\Delta t}}{\Delta t}; \quad \left( \frac{du}{dt} \right)_z \approx \frac{u_{z,t} - u_{z,t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (13)$$

и использовать вместо

$$r(i_y - i_x), rgu_y, \\ r(i_z - i_x), rgu_z$$

выражения

$$0,5r(i_{y,t} + i_{y,t-\Delta t} - i_{x,t+0,5\Delta t} - i_{x,t-0,5\Delta t}), \\ 0,5rg(u_{y,t} + u_{y,t-\Delta t}), \\ 0,5r(i_{z,t} + i_{z,t-\Delta t} - i_{x,t+0,5\Delta t} - i_{x,t-0,5\Delta t}), \\ 0,5rg(u_{z,t} + u_{z,t-\Delta t}).$$

Для однородной среды с постоянной скоростью распространения электромагнитной волны при постоянном шаге  $\Delta t = t_x - t_y = t_x - t_z$ , шаг по  $x$ , равный  $h = x_x - x_y = -x_x + x_z$ , также постоянен. При шаге расчета  $\Delta t = \sqrt{Lc}h$  уравнения (11), (12), разрешенные относительно



$u_{x,t+0,5\Delta t}$ ;  $i_{x,t+0,5\Delta t}$  в разностной форме, для решения задачи 1 имеют вид:

$$u_{x,t+0,5\Delta t} = u_{x,t-0,5\Delta t} + 0,5 \{ (z + 0,5 r h) [(i_{y,t} - i_{z,t}) - (i_{y,t-\Delta t} - i_{z,t-\Delta t})] + A [(u_{y,t} + u_{z,t}) - (u_{y,t-\Delta t} + u_{z,t-\Delta t})] \}, \quad (14)$$

$$i_{x,t+0,5\Delta t} = \frac{C}{B} \cdot i_{x,t-0,5\Delta t} + 0,5 \left\{ [(i_{y,t} + i_{z,t}) - (i_{y,t-\Delta t} + i_{z,t-\Delta t})] + \frac{A}{z B} [(u_{y,t} - u_{z,t}) - (u_{y,t-\Delta t} - u_{z,t-\Delta t})] \right\}. \quad (15)$$

Здесь:

$$A = 1 - r z^{-1} h + g z h - 0,5 r g h^2,$$

$$B = 1 + 0,5 r z^{-1} h,$$

$$C = 1 - 0,5 r z^{-1} h,$$

$$z = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Напряжение и токи в узловой точке электрической сети находятся совместным решением уравнений элементов сети, относящихся к рассматриваемому узлу, и разностных соотношений на характеристиках, соответствующих данному узлу. Разностные соотношения на прямых характеристиках имеют вид

$$B \cdot i_{x,t+0,5\Delta t} + z^{-1} u_{x,t+0,5\Delta t} = c (i_{x,t-0,5\Delta t} - i_{y,t-\Delta t}) + B i_{y,t} - z^{-1} u_{x,t-0,5\Delta t} - (g h + z^{-2} r h + 0,5 z^{-1} r g h^2) u_{y,t} + (g h + z^2 r h - 0,5 z^{-1} r g h^2) u_{y,t-\Delta t}.$$

На обратных характеристиках

$$B \cdot i_{x,t+0,5\Delta t} - z^{-1} u_{x,t+0,5\Delta t} = c (i_{x,t-\Delta t} - i_{z,t-\Delta t}) + z^{-1} u_{x,t-0,5\Delta t} + B i_{y,t} + (g h + z^{-2} r h + 0,5 z^{-1} r g h^2) u_{z,t} - (g h + z^2 r h - 0,5 z^{-1} r g h^2) u_{y,t-\Delta t}. \quad (17)$$

Получены разностные уравнения (14) ÷ (17), позволяющие рассчитывать на ЭЦВМ переходный процесс в линиях электропередач с учетом потерь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Massau. Mém. Sur. l'iteration graphique des équations aux dérivées partielles. 1900—1903.
2. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин, ИЛ, 1962.
3. Кареев Р. И. „Электричество“, 1954, № 10.
4. Кареев Р. И. Переходные процессы в длинных линиях электропередач. ГЭИ, 1963.
5. Базуткин В. В. Тр. МЭИ, ТВН, вып. 64, 1965.
6. Кадомская К. П., Левинштейн М. Л., Штеренберг Г. П. „Изв. АН СССР, энергетика и транспорт“, 1963, № 4.

Ч. М. Чуварлы, Л. В. Дмитриев, Е. М. Элизадэ

Телеграф тэнликлэринин һәлли үчүн характеристика үсулу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә характеристика үсулу илә електрик верилмиш хәтләр-дәки иткини дә нәзәрә алмагла һесаблама үсулу тәклиф едилір. Дифференциал тәнликләрин характеристика үсулу илә алынған һәлли-н фәргләндримә үсулу илә апарылмасы ирәли сүрүлүр.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. МУСЛИМОВ

#### ЗАЩИТА ИЗОЛЯЦИИ НЕЙТРАЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ 110 кВ ОТ ГРОЗОВЫХ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЙ

Разземление нейтралей части трансформаторов энергосистем широко практикуется для уменьшения токов однофазного короткого замыкания. При этом повышение потенциала от различного вида перенапряжений может привести к электрической перегрузке изоляции нейтрали разземленных трансформаторов. Согласно действующим руководящим указаниям по защите от перенапряжений изоляция нейтрали трансформатора защищается вентильным разрядником с номинальным напряжением, соответствующим уровню изоляции нейтрали трансформатора. При этом, как показывает опыт эксплуатации, нейтрали трансформаторов с нормальным уровнем изоляции надежно защищаются от различных видов перенапряжений.

Длительное воздействие внутренних перенапряжений на разрядник, защищающий ослабленную изоляцию нейтрали, часто приводит к его разрушению. С 1962 года в энергосистемы поступают трансформаторы только с ослабленной изоляцией нейтрали, поэтому актуальность защиты последней становится очевидной и этому вопросу уделяется большое внимание. Естественно, что в большинстве опубликованных работ считается целесообразным использование для защиты ослабленной изоляции нейтрали вентильных разрядников, но с различными компоновками (РВС-35, РВС—20×2, РВМГ-32), а в некоторых работах предлагается применение вентильных разрядников со специальными характеристиками. Однако эти защитные мероприятия пригодны лишь в частных случаях и в общем не обеспечивают работу изоляции нейтрали.

Для защиты ослабленной изоляции нейтрали с успехом может быть использовано защитное устройство, предложенное в [1]. Такое устройство при соответствующих параметрах защищает ослабленную изоляцию нейтрали от всех видов перенапряжений, в том числе и от грозových. В последнем случае искровой промежуток не срабатывает и в ограничении действия грозových перенапряжений на ослабленную изоляцию нейтрали участвует полное сопротивление этого устройства.

Наличие активного сопротивления в нейтрали трансформатора увеличивает затухание колебания и смещает кривую конечного распределения напряжений, приближая ее к кривой начального распределения, что и приводит к уменьшению амплитуды свободных колебаний по сравнению с трансформаторами, имеющими изолированную нейтраль.



Настоящая статья посвящена определению этого сопротивления физической модели подстанции [2].

**Определение параметров волн перенапряжений на входе трансформатора.** Напряжение переходного процесса состоит из апериодической и колебательной составляющих. Напряжение на изолированной нейтрали пропорционально напряжению апериодической волны на входе трансформатора и возрастает с увеличением ее длительности  $\tau_b$ . Зависимость отношения максимальных значений напряжения на нейтрали к  $U_{\text{вх. макс}}$  напряжению на входе  $\left(\frac{U_{\text{н. макс}}}{U_{\text{вх. макс}}}\right)$  трансформатора типа ТДНГ-40500/120 от длины волны  $\tau_b$ , при постоянной длине фронта волны  $\tau_{\text{ф}} = 1,5 \text{ мсек}$  представлена в табл. 1.

Таблица 1

| Тип трансформатора                                 | ТДНГ-40500; $\tau_{\text{ф}} = 1,5 \text{ мсек}$ |      |     |     |      |      |      |      |      |  |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|------|-----|-----|------|------|------|------|------|--|
| $\tau_b$                                           | 10                                               | 15   | 20  | 30  | 40   | 50   | 70   | 90   | 120  |  |
| $\frac{U_{\text{н. макс.}}}{U_{\text{вх. макс.}}}$ | 1,25                                             | 1,49 | 1,6 | 1,7 | 1,81 | 1,88 | 1,94 | 1,96 | 2,00 |  |

Отметим, что изменение фронта апериодической волны в пределах  $\tau_{\text{ф}} = (1 \div 2) \text{ мсек}$  на максимальную величину повышения напряжения на нейтрали практически не влияет. Для определения наиболее

опасных параметров апериодической волны, а также для оценки влияния колебательной составляющей волны на повышение напряжения изолированной нейтрали нами исследовалось изменение напряжения нейтрали при приходе с ЛЭП апериодической волны (рис. 1 а). Это исследование проводилось для тупиковой подстанции (рис. 1 б) с тем же трансформатором ТДНГ-40500/211, где расстояние между трансформатором и разрядником  $l$  варьировалось от 0 до 105 м. Результаты исследований на входе трансформатора (рис. 1 б, точка 4) представлены на рис. 1 (а-в).

Амплитуда и форма апериодической составляющей волны не зависят от  $l$  (т. е. остаются постоянными). Амплитуда колебательной составляющей зависит от  $l$  и возрастает с его увеличением. Ее максимальное значение при  $l = 105 \text{ м}$  равно амплитуде апериодической составляющей, а период изменяется в пределах  $(2,1 \div 2,4) \text{ мсек}$ .

При увеличении амплитуды колебательной составляющей от 0 до 330 кВ напряжение на нейтрали растет от 660 до 715 кВ (осцил. 2-е). Исследования, проведенные с трансформаторами различной мощности

(5600 ÷ 120000 кВА), показали, что наложение колебательной составляющей на апериодическую приводит к дополнительному повышению потенциала на нейтрали.

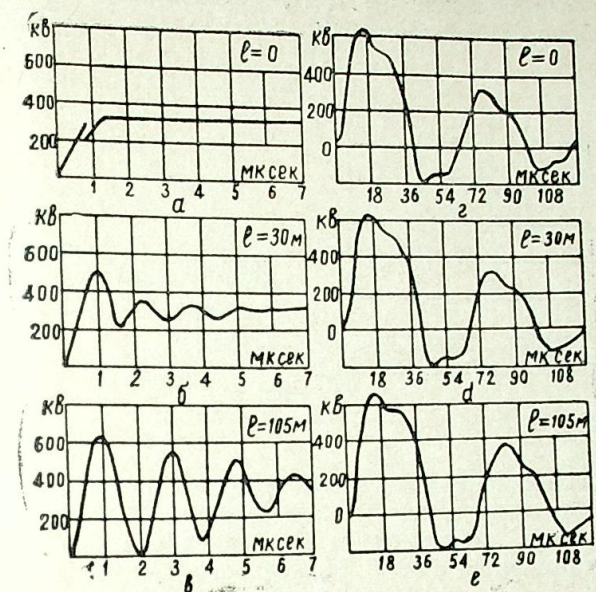


Рис. 2

В настоящих схемах грозозащиты подстанции отношение  $\frac{U_{\text{кол. макс}}}{U_{\text{ап. макс}}} \times 100 \leq 60\%$ , при этом дополнительное повышение напряжения на

нейтрали составляет не более 10%, что может быть учтено повышением амплитуды апериодической составляющей на 5%.

Таким образом, основную роль в повышении напряжения на изолированной нейтрали играет апериодическая составляющая воздействующей волны. В табл. 2 представлена зависимость изменения параметров апериодической волны на входе трансформатора в зависимости от числа линий подключенных к шинам подстанции (рис. 1 б, точка 2), для наличия на подстанции одного комплекта РВС-110 кВ.

Таблица 2

| Параметр волны                    | Число включенных линий |     |     |     |     |                          |     |     |     |     |
|-----------------------------------|------------------------|-----|-----|-----|-----|--------------------------|-----|-----|-----|-----|
|                                   | 1                      | 2   | 3   | 4   | 5   | 6                        | 7   | 8   | 9   | 10  |
|                                   | разрядник срабатывает  |     |     |     |     | разрядник не срабатывает |     |     |     |     |
| $U_{\text{вх. макс}} (\text{кВ})$ | 330                    | 330 | 295 | 267 | 250 | 285                      | 225 | 190 | 140 | 125 |
| $\tau_{\text{ф}} (\text{мксек})$  | 110                    | 80  | 60  | 54  | 50  | 1,5                      | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,5 |
| $\tau_b (\text{мксек})$           |                        |     |     |     |     | 40                       | 40  | 40  | 40  | 40  |

Наиболее опасные параметры, волны, как отмечалось и выше, имеют место при одной включенной на подстанции линии. Если к шинам подстанции присоединена не одна, а несколько линий, то напряжение апериодической волны снижается, так как волновое сопротивление отходящих линий шунтирует разрядник, отсасывая часть тока от последнего, при этом ток разрядника уменьшается, что при-



водит к уменьшению остаточного напряжения разрядника. Однако это уменьшение, связанное с нелинейной вольтамперной характеристикой разрядника, как это показывают и эксперимент, и соответствующие графо-аналитические расчеты, незначительно, хотя существует противоположное утверждение [3].

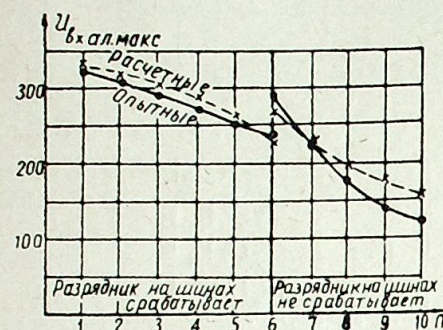


Рис. 3

Зависимость максимального значения аperiodической составляющей волны напряжения на входе трансформатора от числа включенных к шинам подстанции линий, полученная экспериментально и расчетным путем, представлена на рис. 3, из которого следует удовлетворительное совпадение опытных и расчетных величин.

Из сопоставления табл. 1 и 2 следует, что практически при любом количестве отходящих от шин подстанции линий на ослабленной изоляции нейтрали трансформатора при воздействии грозовых перенапряжений (на ЛЭП) возможно появление опасного повышения напряжений.

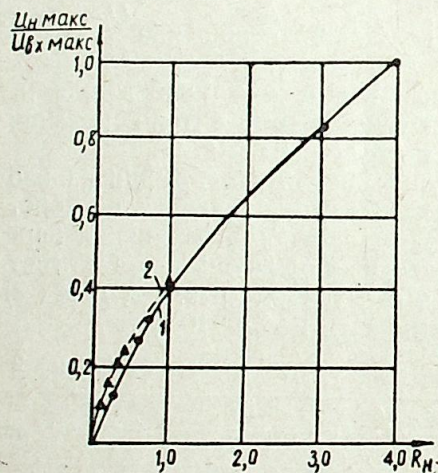


Рис. 5

Определение величины активного сопротивления для защиты нейтрали трансформаторов. Исследовано девятнадцать трансформаторов мощностью 5600—12000 ква. Для каждого трансформатора при конкретных параметрах аperiodической волны (табл. 2) строилась зависимость отношения максимального значения напряжения на нейтрали  $U_{н. макс}$  при сопротивлении  $R_n$  к максимальному значению напряжения на входе  $U_{в. макс}$  от величины сопротивления  $R_n$ , т. е.  $\frac{U_{н. макс}}{U_{в. макс}} = f(R_n)$ . Эта зависимость для трансформатора ТФТП-31500 представлена на рис. 5 (кривая 1). Эта же зависимость представлена здесь по

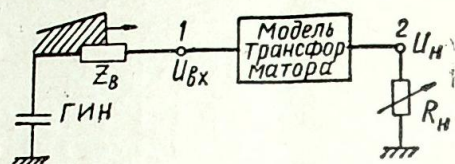


Рис. 4

Все вышесказанное позволяет для установления величины повышения напряжения на нейтрали при грозовых перенапряжениях пользоваться эквивалентной схемой, представленной на рис. 3. Задаваясь параметрами аperiodической составляющей волны на входе трансформатора (точка 1), по табл. 2 можно получить значение напряжения нейтрали (точка 2). На рис. 4 также показано сопротивление  $R_n$ , необходимое для защиты изоляции нейтрали трансформатора.

Таблица 3

| Режим работы разрядника | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Число отходящих линий   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    |
| ТМТГ-5600               | 1320 | 1440 | 1600 | 1800 | 1    | 1    | 1    |
| ТМТГ-7500               | 1200 | 1400 | 1420 | 1680 | 1740 | 1520 | 1    |
| ТЛГ-10000               | 1120 | 1240 | 1340 | 1560 | 1640 | 1490 | 1    |
| ТЛГ-10000               | 1120 | 1240 | 1340 | 1560 | 1640 | 1490 | 1    |
| ТЛГ-15000               | 1120 | 1240 | 1340 | 1560 | 1640 | 1490 | 1    |
| ТЛНГ-20000              | 730  | 840  | 920  | 1070 | 1120 | 9040 | 1960 |
| ТЛТГ-20000              | 680  | 760  | 810  | 1000 | 1040 | 920  | 1840 |
| ТЛГ-2000                | 1000 | 1100 | 1130 | 1320 | 1400 | 1260 | 2200 |
| ТЛГ-20000               | 1100 | 1200 | 1200 | 1440 | 1520 | 1380 | 1    |
| ТФП-3150                | 620  | 680  | 740  | 840  | 900  | 800  | 1180 |
| ТЛНГ-40500              | 620  | 630  | 720  | 820  | 860  | 790  | 1140 |
| ТЛГ-40500               | 620  | 630  | 720  | 820  | 860  | 790  | 1140 |
| ТЛГ-60000               | 460  | 500  | 540  | 620  | 660  | 580  | 1200 |
| ТЛГ-630000              | 460  | 500  | 540  | 620  | 660  | 580  | 1200 |
| ТЛГ-70000               | 300  | 380  | 420  | 500  | 520  | 480  | 1120 |
| ОЛГ-50000               | 460  | 533  | 565  | 650  | 670  | 620  | 1200 |
| ТЛНГ-80000              | 320  | 400  | 440  | 480  | 540  | 460  | 960  |
| ТЛПГ-120000             | 300  | 322  | 400  | 460  | 480  | 440  | 500  |



данным Запорожского трансформаторного завода для реального трансформатора в виде кривой 2. Хорошее совпадение кривых 1 и 2 указывает на достоверность результатов, полученных на модели.

Полученная зависимость позволяет установить величину сопротивления  $R_n$  для данного трансформатора при уровне изоляции для ослабленной нейтрали  $U_{н. доп} = 180 \text{ кВ}$  и при известном  $U_{вх. макс}$  из табл. 2. Полученные таким образом значения  $R_n$  для различных трансформаторов приведены в табл. 3.

Обработка ряда осциллограмм, полученных на Запорожском трансформаторном заводе, показывает, что при приложении волны напряжения одновременно на три фазы трехфазного трансформатора ток через сопротивление, включенное в нейтраль, в  $2 \div 2,5$  раза больше, чем при приложении такой же волны напряжений на одну фазу, а при трех однофазных трансформаторах он становится в три раза больше.

Нами исследование проводилось для однофазной схемы замещения и поэтому полученные значения активного сопротивления следует уменьшить в 2,5 и 3 раза, соответственно, для трехфазного и группы однофазных трансформаторов.

Из табл. 3 видно, что с увеличением мощности трансформаторов величина защитного сопротивления в основном уменьшается вследствие уменьшения волнового сопротивления трансформаторов с увеличением его мощности. Однако эта закономерность иногда нарушается из-за конструктивных особенностей отдельных трансформаторов.

### Выводы

1. При определении максимального напряжения на нейтрали трансформатора реальная схема подстанций может быть заменена весьма упрощенной эквивалентной схемой (рис. 4), при этом параметры апериодической составляющей волны, воздействующей на обмотку трансформатора, должны быть соответствующим образом изменены (табл. 2).

2. Минимальное сопротивление, необходимое для защиты ослабленной изоляции нейтрали трансформаторов 110 кВ, оценивается величиной порядка 300 Ом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. „Изв. АН. Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, № 6.

2. Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем.“, 1966.

3. Коген-Далин В. В., Соколова М. В. Тр. МЭИ, вып. LXIV, Техника высоких напряжений, 1965.

Ч. М. Чуварлы, М. М. Муслүмов

Илдырым ифрат кәркинликлериндән 110 кВ-луг трансформаторларын торпагланмамыш нејтралынын мұһафизәси

### ХУЛАСӘ

Мәгаләдә енергетика системләриндә бирфазалы јерлә гыса гапан-ма чәрәјанларыны азалтмағ үчүн бир һиссә трансформаторун нејтралынын јердән изолә едилмәсиндән кениш истифадә олунмасындан данышылыр. Мүхтәлиф ифрат кәркинликлерин тәсириндән изолә едилмиш нејтралын изолјасијасында кәркинлик тәһлүкәли һәддә гәдәр

јүксәлә биләр. Мәгалә һәмин тәһлүкәли кәркинлији азалтмағ үчүн тәклиф олунан [1] гурғунун актив мұғавимәтинин тәјин олунмасы үсулуна һәср едилир.

Апарылан тәдгигатлар көстәрир ки, изолә олунмуш нејтралда кәркинлијин артмасы просесиндә трансформаторун киришиндәки илдырым ифрат кәркинлијинин апериодик вә рәгси тәшкиледичиләриндән биринчиси һәлледији рол ојнајыр. Буна көрә дә апериодик тәшкиледичинин ән тәһлүкәли параметрләри тәјин олунур. һәмин һал үчүн нејтралын кәркинлијини тәһлүкәсиз һәддә сахламағ үчүн мұһафизә гурғусунун актив мұғавимәтинин гијмәти 19 трансформатор үчүн тәјин олунур.



М. А. МАМЕЛОВ

# ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ОРБИТА КОМЕТЫ 1941 I КЕННИНГЕМА

Окончательная орбита неперидической кометы 1941 I Кеннингема определена на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2 с использованием всех известных наблюдений и учетом возмущений от пяти больших планет (Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн).

Комета открыта Кеннингом (обсерватория Ок Ридж) на пластинке, полученной 5 сентября 1940 г. После этого она была обнаружена и на других гарвардских пластинках, полученных в Ок Ридже и Кембридже с 25 августа по 15 сентября. Комета получила предварительное обозначение 1940с. Окончательное ее обозначение 1941 I.

Комета наблюдалась более чем в 30 обсерваториях, в частности в Киеве, Ташкенте, Львове, Укле, Токио, Симеизе, на Ликской и других обсерваториях. Последний раз комета Кеннингема наблюдалась 17 июня 1941 г. обсерваторией в Иоганнесбурге.

В момент открытия комета была 13-звездной величины. Яркость ее быстро увеличивалась и достигла (третьей) звездной величины. Таким образом, в начале декабря она стала видна невооруженным глазом. В это время комета имела вид туманного образования с резко обозначенным ядром и хвостом сложного строения, длина которого, по данным некоторых наблюдений, достигала 6—7°. Комета быстро двигалась по небу. Ниже дается ее приближенная эфемерида на время, охваченное наблюдениями.

Изучение физических свойств кометы производилось многими авторами. Их сводки можно найти в работе Балде (Baldet, 1941). Первая орбита по трем наблюдениям, полученная после открытия кометы, была вычислена Кеннингом (UAI Circ. 820). В дальнейшем, по мере накопления наблюдений, орбиты по трем наблюдениям были вычислены следующими авторами: Килиным (Keelin, 1940), Максвеллом (Maxwell, 1940), Максвеллом, Моллером (Maxwell, Moller, 1940), Фреса, Вергнано, Миссана—Рудари (Fresa, Wergnano, Missana—Rudari, 1940) мисс Квирк, Хофманом (Miss Quirck, Hoffman, 1940).

При обработке наблюдений для улучшения орбиты нами была принята система элементов, вычисленных по трем наблюдениям мисс Квик и Хофманом (Quirck, Heffmann), так как эта система основана на достаточно длинной дуге, пройденной кометой (наблюдения: сен-

тябрь 19, ноябрь 5, декабрь 11). Выбранные для улучшения исходные элементы приведены ниже:

$$\begin{aligned} T &= 1941 \text{ январь } 16.23136 \\ \omega &= 199.57952 \\ \Omega &= 295.87596 \\ i &= 49.87311 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} T \\ \omega \\ \Omega \\ i \end{aligned}} \right\} 1950.0 \quad \begin{aligned} q &= 0.3680426 \\ e &= 1.0000000 \end{aligned}$$

Эфемерида кометы 1941 I Кеннингема с 8 сентября 1940 г. до 5 июня 1931 г. с интервалом 10 дней

|    | И. Т.         | $\alpha$ 1950.0 | $\delta$ 1950. 0                   | $\rho$   | $r$   |       |
|----|---------------|-----------------|------------------------------------|----------|-------|-------|
| 1  | 1940 сентябрь | 8               | 21 <sup>h</sup> 07. <sup>m</sup> 5 | + 54°34' | 1.916 | 2.511 |
| 2  |               | 18              | 20 38.3                            | +53 54   | 1.794 | 2.367 |
| 3  |               | 28              | 20 11.3                            | +52 11   | 1.688 | 2.220 |
| 4  | октябрь       | 8               | 19 48.9                            | +49 34   | 1.597 | 2.069 |
| 5  |               | 18              | 19 32.4                            | +46 19   | 1.515 | 1.913 |
| 6  |               | 28              | 19 21.6                            | +42 42   | 1.438 | 1.752 |
| 7  | ноябрь        | 7               | 19 13.1                            | +38 57   | 1.360 | 1.586 |
| 8  |               | 17              | 19 14.8                            | +35 11   | 1.276 | 1.414 |
| 9  |               | 27              | 19 17.1                            | +31 21   | 1.179 | 1.244 |
| 10 | декабрь       | 7               | 19 21.9                            | +27 16   | 1.064 | 1.045 |
| 11 |               | 17              | 19 28.3                            | +22 13   | 0.923 | 0.851 |
| 12 |               | 27              | 19 34.2                            | +14 13   | .766  | .651  |
| 13 | 1941 январь   | 6               | 19 34.7                            | —02 20   | .619  | .465  |
| 14 |               | 16              | 19 26.5                            | —29 51   | .645  | .368  |
| 15 |               | 26              | 19 34.9                            | —43 38   | .900  | .457  |
| 16 | февраль       | 5               | 19 58.0                            | —45 47   | 1.158 | .642  |
| 17 |               | 15              | 20 19.9                            | —45 15   | 1.361 | .842  |
| 18 |               | 25              | 20 37.9                            | —43 16   | 1.517 | 1.038 |
| 19 | март          | 7               | 20 52.2                            | —44 22   | 1.634 | 1.225 |
| 20 |               | 17              | 21 02.9                            | —42 43   | 1.717 | 1.405 |
| 21 |               | 27              | 21 10.6                            | —42 23   | 1.774 | 1.578 |
| 22 | апрель        | 6               | 21 15.0                            | —42 22   | 1.807 | 1.745 |
| 23 |               | 16              | 21 15.9                            | —42 42   | 1.822 | 1.906 |
| 24 |               | 3               | 21 13.0                            | —43 21   | 1.825 | 2.062 |
| 25 | 1941 май      | 26              | 21 05.8                            | —44 19   | 1.822 | 2.213 |
| 26 |               | 16              | 20 53.9                            | —45 19   | 1.820 | 2.360 |
| 27 |               | 26              | 20 36.9                            | —46 21   | 1.827 | 2.504 |
| 28 | июнь          | 5               | 20 15.5                            | —47 09   | 1.852 | 2.544 |

За эпоху оскуляции был принят момент 1941, январь 6,0 эфемеридного времени.

Вычисления, связанные с определением окончательной орбиты, производились на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2, с помощью двух специально составленных программ. Первая из этих программ была предназначена для численного интегрирования по способу Энке, с учетом возмущений от пяти больших планет (Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн), а также для сравнения с наблюдениями. При сравнении с наблюдениями учитывались поправки за параллакс и абerrационное время, а также за процессию, в случаях, когда наблюдения кометы были отнесены к нестандартным экватору и равноденствия 1950.0 года. Координаты больших планет, использованные при вычислениях, были взяты из таблиц „Planetary Coordinates 1940—1960“. Невозмущенные прямоугольные координаты кометы по нашей программе могут быть вычислены для случая любого эксцентриситета, близкого к единице. При этом применялась формула Херрика (Herrick,



1960) для связи истинной аномалии со временем. Эта формула имеет следующий вид:

$$\frac{k(1+e)^2 t}{2p^{3/2}} = \frac{\sigma}{1+\lambda \sigma^2} + \frac{\sigma^3}{1+e} \left( \frac{\lambda}{1+\lambda \sigma^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\sigma^3}{1+e} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\lambda \sigma)^n}{2n+3},$$

где

$$\sigma = \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad \lambda = \frac{1-e}{1+e}$$

### § 1. Представление и обработка наблюдений

Всего было собрано 400 наблюдений, из которых 35 приближенных и 365 точных. Эти наблюдения охватывают период с 25 августа 1940 года по 17 июня 1941 года. Все наблюдения кометы отнесены к экватору и равноденствию 1940.0 или 1941.0 года. Все моменты наблюдений кометы приведены к эфемеридному времени, которое отличается от всемирного на  $\Delta t = 0^d.00028$ . Список обсерваторий, наблю-

Таблица 1

Обсерватории, в которых проводились наблюдения

| № пп | Обсерватория            | Кол-во набл. | Литературный источник                   |
|------|-------------------------|--------------|-----------------------------------------|
| 1    | Athens                  | 3            | UAI Circ. 829                           |
| 2    | Barcelona               | 6            | UAI Circ. 843                           |
| 3    | Belgrade                | 3            | UAI Circ. 853                           |
| 4    | Budapest                | 13           | BZ 22, 69, 94, 75; UAI Circ. 829        |
| 5    | Washington (Naval obs.) | 64           | UAI Circ. 830, Harv. Card. 542, AJ 50   |
| 6    | Wien                    | 24           | 112, AJ 52, 77, 78. UAI Circ. 831, 832  |
| 7    | Ok Ridge                | 3            | AN 271, 237; 272, 91                    |
| 8    | Danzig                  | 2            | UAI Circ. 839                           |
| 9    | Cape                    | 27           | BZ 23, 12. UAI Circ. 846                |
| 10   | Copenhagen              | 1            | MN 101, 336                             |
| 11   | Kyoto (Kwasan)          | 34           | UAI Circ. 832                           |
|      |                         |              | Publ. Astr. Sos. Japan 1, 48            |
| 12   | La Plata                | 9            | Kwasan obs. Circ. 5, 10.                |
| 13   | Lick                    | 9            | Obs. Astr. La Plata 6, 134              |
| 14   | McDonald                | 19           | LB 506, 19, 115 (1939—1948)             |
| 15   | Milan                   | 4            | Al. 50 30                               |
| 16   | Konigsberg              | 7            | AN 271, 285                             |
| 17   | Padua                   | 7            | AN 275, 267                             |
| 18   | Turin (Pino Torinese)   | 11           | AN 271, 287                             |
|      |                         |              | BZ 23, 12, 1. UAI Circ. 830, AN 271     |
| 19   | Ponghkeepsie            | 1            | 286, 831835, 837, BZ 22, 72, 80, 90, 97 |
| 20   | Tashkent                | 3            | Harv. Card. 550                         |
| 21   | Toulouse                | 5            | Цирк Ташкентск. обл. 121, 1,2           |
| 22   | Nice                    | 23           | UAI Circ. 842, JO 24, 105               |
| 23   | Würzburg                | 13           | JO 23, 112—113                          |
| 24   | Uccle                   | 21           | BZ 22, 24; 23, 21                       |
|      |                         |              | BAV 3,92; BZ 22, 77, 80, 83, 90, 97;    |
| 25   | Johannesburg            | 10           | UAI Circ. 829, 831, 832, 834, 837       |
| 26   | Posen                   | 7            | UC 104, 72                              |
| 27   | Charlottesville         | 5            | BZ 22, 80, 94; AN 273, 198—200          |
| 28   | Riverview               | 1            | MN 103, 228                             |
| 29   | Yerkes                  | 30           | AJ 49, 135                              |
|      |                         |              | UAI Circ. 830, 831; AJ 50, 29, 30.      |
|      |                         |              | Harv. Card. 543                         |

давших комету, дан в табл. 1. Там же указаны первоисточники, в которых эти наблюдения опубликованы. В случае, если на какой-либо

Таблица 2

Список наблюдений

| №  | Эфемеридное время | $\alpha_{\text{набл.}}$                             | $\delta_{\text{набл.}}$ | O—C $\Delta z$      | O—C $\Delta \delta$ | Равноденствие | № обсерватории |
|----|-------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------|----------------|
| 1  | 1940 сентябрь     | 20 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 01 <sup>s</sup> .77 | +53°44'36".1            | —0 <sup>s</sup> .10 | 0 <sup>s</sup> .0   | 1940.0        | 5              |
| 2  |                   | 20 29 26.46                                         | +53 27 45.2             | —0.02               | +0.7                | "             | 5              |
| 3  |                   | 20 21 32.59                                         | +52 58 47.6             | +0.29               | +0.9                | "             | 4              |
| 4  |                   | 20 18 29.68                                         | +52 45 57.6             | +0.23               | +1.4                | "             | 29             |
| 5  |                   | 20 15 48.24                                         | +52 33 45.3             | +0.25               | +2.4                | "             | 29             |
| 6  |                   | 20 15 36.03                                         | +52 32 46.2             | +0.46               | +1.2                | "             | 5              |
| 7  |                   | 20 13 18.85                                         | +52 21 38.7             | +0.53               | +1.4                | "             | 29             |
| 8  |                   | 20 13 14.89                                         | +52 21 20.3             | +0.34               | +0.9                | "             | 14             |
| 9  |                   | 20 13 10.35                                         | +52 20 59.6             | +0.24               | +1.0                | "             | 5              |
| 10 |                   | 20 11 20.30                                         | +52 11 35.5             | [+0.78]             | [+5.3]              | "             | 1              |
| 11 |                   | 20 10 42.59                                         | +52 08 13.4             | +0.30               | +0.2                | "             | 5              |
| 12 |                   | 20 10 40.68                                         | +52 08 04.3             | +0.40               | +1.2                | "             | 14             |
| 13 |                   | 20 10 22.28                                         | +52 06 26.2             | +0.43               | +1.7                | "             | 13             |
| 14 |                   | 20 08 14.72                                         | +51 54 43.3             | +0.47               | +1.5                | "             | 14             |
| 15 |                   | 20 04 14.70                                         | +51 29 57.1             | [+12.02]            | [+10.8]             | "             | 1              |
| 16 | октябрь           | 20 03 42.17                                         | +51 27 35.9             | +0.22               | +0.9                | "             | 7              |
| 17 |                   | 20 03 30.12                                         | +51 26 19.8             | +0.52               | +1.1                | "             | 14             |
| 18 |                   | 20 01 51.42                                         | +51 15 43.1             | +0.89               | +4.5                | "             | 1              |
| 19 |                   | 20 01 14.66                                         | +51 11 38.4             | +0.50               | +2.0                | "             | 14             |
| 20 |                   | 20 00 38.47                                         | +51 07 34.6             | +0.61               | +5.3                | "             | 13             |
| 21 |                   | 19 57 12.00                                         | +50 43 18.4             | +0.57               | +1.7                | "             | 6              |
| 22 |                   | 19 56 46.73                                         | +50 40 05.7             | +0.46               | +1.3                | "             | 5              |
| 23 |                   | 19 56 39.14                                         | +50 39 10.5             | +0.39               | +0.7                | "             | 11             |
| 24 |                   | 19 55 51.74                                         | +50 33 12.8             | +1.06               | +1.8                | "             | 5              |
| 25 |                   | 19 54 35.10                                         | +50 23 14.0             | +0.64               | +0.9                | "             | 14             |
| 26 |                   | 19 54 01.85                                         | +50 18 54.2             | +0.72               | +2.0                | "             | 4              |
| 27 |                   | 19 52 08.66                                         | +50 09 03.3             | +1.28               | +2.1                | "             | 14             |
| 28 |                   | 19 52 08.66                                         | +50 03 31.7             | [+1.70]             | [+1.9]              | "             | 11             |
| 29 |                   | 19 51 40.48                                         | +49 59 28.5             | +0.78               | +2.4                | "             | 14             |
| 30 |                   | 10 50 27.65                                         | +49 48 57.3             |                     |                     | "             | 7              |
| 31 |                   | 19 48 31.15                                         | +49 31 38.6             |                     |                     | "             |                |



| 1  | 2        | 3                                      | 4            | 5       | 6       | 7      | 8  |
|----|----------|----------------------------------------|--------------|---------|---------|--------|----|
| 32 | 8.25465  | 19 48 <sup>m</sup> 08 <sup>s</sup> .71 | +49 28 16" 7 | +0.77   | +2.8    | 1940.0 | 14 |
| 33 | 9.05764  | 19 46 35.65                            | +49 13 31.0  | +0.70   | +0.2    | "      | 29 |
| 34 | 10.15223 | 19 44 34.78                            | +48 53 32.7  | +0.92   | +4.6    | "      | 5  |
| 35 | 10.85875 | 19 43 18.15                            | +48 40 12.9  | +0.63   | +0.7    | "      | 5  |
| 36 | 10.08684 | 19 42 53.92                            | +48 35 36.9  | +0.84   | +2.5    | "      | 5  |
| 37 | 12.96435 | 19 39 41.09                            | +47 59 45.6  | +0.84   | +2.9    | "      | 24 |
| 38 | 13.16166 | 19 39 21.73                            | +47 55 55.7  | +1.08   | +3.5    | "      | 5  |
| 39 | 15.09800 | 19 36 17.10                            | +47 17 28.4  | +0.76   | +3.5    | "      | 5  |
| 40 | 17.58160 | 19 32 40.23                            | +46 26 38.4  | +1.9    | +1.4    | 1940.0 | 11 |
| 41 | 19.11761 | 19 30 36.94                            | +45 54 44.5  | +1.08   | +9.8    | "      | 5  |
| 42 | 19.76590 | 19 29 47.33                            | +45 40 57.3  | +1.21   | +3.3    | "      | 4  |
| 43 | 19.80746 | 19 29 44.26                            | +45 40 05.1  | +0.96   | +4.1    | "      | 24 |
| 44 | 19.82154 | 19 29 43.21                            | +45 39 43.6  | +1.08   | +1.2    | "      | 6  |
| 45 | 19.86338 | 19 29 40.96                            | +45 38 47.2  | +1.19   | +2.4    | "      | 18 |
| 46 | 20.81592 | 19 28 29.70                            | +45 18 33.9  | +0.57   | +0.1    | "      | 6  |
| 47 | 20.85023 | 19 28 27.41                            | +45 17 52.1  | +0.88   | +2.1    | "      | 18 |
| 48 | 21.81428 | 19 27 19.81                            | +44 57 10.7  | +0.81   | +1.3    | "      | 6  |
| 49 | 22.03429 | 19 27 02.29                            | +44 51 02.9  | +0.25   | +4.1    | "      | 29 |
| 50 | 22.42178 | 19 26 39.00                            | +44 44 07.5  | +0.89   | +2.4    | "      | 11 |
| 51 | 22.92390 | 19 26 07.22                            | +44 33 35.8  | [+2.22] | [+26.3] | "      | 18 |
| 52 | 23.09199 | 19 25 55.06                            | +44 29 35.7  | +0.87   | +3.4    | "      | 5  |
| 53 | 23.20099 | 19 25 48.20                            | +44 27 12.3  | +0.98   | +2.1    | "      | 13 |
| 54 | 23.92916 | 19 25 02.59                            | +44 11 28.8  | [+0.94] | [+12.3] | "      | 24 |
| 55 | 24.03606 | 19 24 56.22                            | +44 09 00.4  | +1.03   | +1.2    | "      | 5  |
| 56 | 24.14820 | 19 24 49.18                            | +44 06 33.5  | +0.93   | +2.9    | "      | 29 |
| 57 | 25.10540 | 19 23 52.62                            | +43 45 36.1  | +0.86   | +2.1    | "      | 14 |
| 58 | 25.15766 | 19 23 49.38                            | +43 44 25.0  | +0.76   | +2.9    | "      | 5  |
| 59 | 26.15305 | 19 22 54.04                            | +43 22 31.7  | +0.89   | +3.7    | "      | 14 |
| 60 | 26.64120 | 19 22 28.12                            | +43 11 40.3  | +1.06   | +3.6    | "      | 5  |
| 61 | 27.11473 | 19 22 3.51                             | +43 01 11.0  | +0.98   | +2.2    | "      | 5  |
| 62 | 27.16360 | 19 22 00.88                            | +43 00 08.5  | +0.85   | +3.6    | "      | 14 |
| 63 | 27.46306 | 19 21 46.11                            | +42 53 27.7  | +1.12   | +1.5    | "      | 14 |
| 64 | 27.78798 | 19 21 30.43                            | +42 46 14.2  | [+1.42] | [+2.03] | "      | 18 |
| 65 | 28.06167 | 19 21 16.58                            | +42 40 12.0  | +0.81   | +3.5    | "      | 14 |
| 65 | 28.13628 | 19 20 23.50                            | +42 16 11.2  | +0.82   | +2.6    | "      | 14 |

| 1   | 2      | 3           | 4            | 5       | 6       | 7      | 8  |
|-----|--------|-------------|--------------|---------|---------|--------|----|
| 67  | ноябрь | 19 19 54.01 | +41 59 57" 8 | +0.77   | +5.4    | 1940.0 | 18 |
| 68  |        | 19 19 42.26 | +41 53 19.4  | +0.68   | +0.7    | "      | 14 |
| 69  |        | 19 19 26.26 | +41 44 24.0  | +1.11   | +3.9    | "      | 11 |
| 70  |        | 19 19 16.22 | +41 38 56.3  | [-0.62] | [-24.1] | "      | 24 |
| 71  |        | 19 19 04.83 | +41 32 22.0  | +0.83   | +3.1    | "      | 14 |
| 72  | ноябрь | 19 18 28.14 | +41 10 29.1  | +0.57   | +3.4    | "      | 15 |
| 73  |        | 19 18 25.78 | +41 09 42.0  | [-0.27] | [+13.1] | "      | 14 |
| 74  |        | 19 18 15.07 | +41 01 55.1  | +0.89   | +0.2    | "      | 11 |
| 75  |        | 19 17 53.01 | +40 47 23.2  | +0.78   | +2.7    | "      | 14 |
| 76  |        | 19 17 29.79 | +40 31 09.3  | +0.57   | +4.2    | "      | 5  |
| 77  |        | 19 17 29.56 | +40 30 50.9  | +0.81   | +5.7    | "      | 18 |
| 78  |        | 19 17 10.09 | +40 16 23.3  | +0.52   | +0.4    | "      | 11 |
| 79  |        | 19 16 52.34 | +40 02 11.9  | +0.59   | +2.9    | "      | 5  |
| 80  |        | 19 16 39.99 | +39 51 34.0  | +0.87   | +3.6    | "      | 11 |
| 81  |        | 19 16 32.53 | +39 45 02.3  | +0.72   | +1.2    | "      | 23 |
| 82  |        | 19 16 23.44 | +39 37 03.3  | +0.49   | +3.1    | "      | 13 |
| 83  |        | 19 16 08.63 | +39 2 16.7   | +0.97   | +1.8    | "      | 22 |
| 84  |        | 19 15 47.52 | +39 00 03.5  | +0.93   | +2.5    | "      | 22 |
| 85  |        | 19 15 46.36 | +38 58 47.5  | +0.77   | +1.1    | "      | 18 |
| 86  |        | 19 15 28.89 | +38 37 53.6  | +0.55   | +4.2    | "      | 24 |
| 87  |        | 19 15 16.04 | +38 20 44.3  | +0.39   | +1.3    | "      | 11 |
| 88  |        | 19 15 12.19 | +38 14 48.9  | +0.46   | +1.5    | "      | 6  |
| 89  |        | 19 15 12.14 | +38 14 14.8  | [+1.16] | [+32.4] | "      | 18 |
| 90  |        | 19 15 08.62 | +38 09 07.9  | +0.66   | +3.6    | "      | 5  |
| 91  |        | 19 14 59.20 | +37 53 03.9  | +0.69   | +0.1    | "      | 6  |
| 92  |        | 19 14 48.02 | +37 31 32.5  | [+0.33] | [-6.3]  | "      | 26 |
| 93  |        | 19 14 31.66 | +36 45 08.4  | +0.30   | +0.8    | "      | 26 |
| 94  |        | 19 14 30.36 | +36 38 34.0  | +0.50   | +3.0    | "      | 29 |
| 95  |        | 19 14 25.23 | +36 14 48.8  | +0.43   | +2.3    | "      | 29 |
| 96  |        | 19 14 25.03 | +35 58 52.7  | +0.41   | +0.6    | "      | 4  |
| 97  |        | 19 14 28.08 | +35 10 16.7  | +0.60   | -3.7    | "      | 28 |
| 98  |        | 19 14 28.07 | +35 09 37.3  | +0.47   | +1.2    | "      | 29 |
| 99  |        | 19 14 31.67 | +34 50 48.1  | +0.43   | +1.7    | "      | 24 |
| 100 |        | 19 14 32.30 | +34 47 09.6  | +0.18   | +4.0    | "      | 28 |



| 1   | 2           | 3        | 4           | 5        | 6       | 7      | 8  |
|-----|-------------|----------|-------------|----------|---------|--------|----|
| 101 | 1940 ноябрь | 18 00755 | +34 46 53.3 | +0.24    | +0.2    | 1940.0 | 29 |
| 102 |             | 18 78428 | +34 29 08.5 | +0.36    | +3.7    | "      | 26 |
| 103 |             | 19 00858 | +34 24 07.9 | +0.30    | -0.3    | "      | 29 |
| 104 |             | 19 04561 | +34 23 16.7 | +0.30    | -0.2    | "      | 5  |
| 105 |             | 19 79588 | +34 05 59.0 | [-0.33]  | [-12.6] | "      | 5  |
| 106 |             | 20 05130 | +34 00 24.3 | +0.24    | +0.9    | "      | 5  |
| 107 |             | 20 70113 | +33 45 35.5 | +0.16    | +0.8    | "      | 26 |
| 108 |             | 20 73573 | +33 44 49.4 | +0.57    | +1.3    | "      | 22 |
| 109 |             | 20 78502 | +33 43 35.8 | +0.49    | +2.7    | "      | 10 |
| 110 |             | 20 78928 | +33 43 35.2 | +1.19    | +2.1    | "      | 24 |
| 111 |             | 21 09136 | +33 35 40.5 | +0.19    | +0.3    | "      | 29 |
| 112 |             | 21 70811 | +33 22 30.3 | +0.94    | +4.0    | "      | 6  |
| 113 |             | 21 72653 | +33 22 09.1 | +0.20    | -1.6    | "      | 22 |
| 114 |             | 21 73851 | +33 21 52.0 | +0.18    | -1.4    | "      | 23 |
| 115 |             | 21 77250 | +33 21 08.0 | +0.41    | +0.5    | "      | 2  |
| 116 |             | 21 85873 | +33 19 06.1 | +0.15    | +0.1    | "      | 26 |
| 117 |             | 22 51056 | +33 04 14.1 | +0.48    | +1.6    | "      | 11 |
| 118 |             | 22 59974 | +33 02 09.4 | +0.13    | +1.6    | "      | 20 |
| 119 |             | 22 70364 | +32 59 47.7 | +0.08    | +0.2    | "      | 26 |
| 120 |             | 23 04768 | +32 51 52.0 | +0.19    | -2.1    | "      | 5  |
| 121 |             | 23 80461 | +32 34 44.9 | [+0.13]  | [+15.0] | "      | 18 |
| 122 |             | 23 84348 | +32 33 38.5 | +0.17    | +2.1    | "      | 22 |
| 123 |             | 23 87141 | +32 32 56.1 | +0.26    | +0.2    | "      | 24 |
| 124 |             | 24 59313 | +32 16 19.0 | +0.10    | +1.4    | "      | 20 |
| 125 |             | 24 71931 | +32 13 25.5 | +0.28    | -0.5    | "      | 22 |
| 126 |             | 25 01351 | +32 05 35.6 | +0.18    | -2.2    | "      | 29 |
| 127 |             | 25 04059 | +32 52 07.0 | [-33.41] | [+52.4] | "      | 19 |
| 128 |             | 25 72336 | +31 50 09.8 | +0.38    | -1.4    | "      | 22 |
| 129 |             | 25 72591 | +31 50 02.7 | +0.48    | -4.8    | "      | 18 |
| 130 |             | 25 81633 | +31 47 54.8 | +0.04    | -4.7    | "      | 6  |
| 131 |             | 26 03942 | +31 42 48.6 | +0.13    | -1.6    | "      | 5  |
| 132 |             | 26 44343 | +31 33 22.2 | +0.22    | -4.2    | "      | 11 |
| 133 |             | 26 86298 | +31 23 38.2 | +0.37    | +0.9    | "      | 22 |
| 134 |             | 27 40081 | +31 11 02.3 | -0.09    | +2.9    | "      | 11 |
| 135 |             | 27 59193 | +31 04 10.7 | -0.10    | -3.5    | "      | 26 |

| 1   | 2        | 3           | 4           | 5     | 6     | 7      | 8  |
|-----|----------|-------------|-------------|-------|-------|--------|----|
| 136 | 27.71436 | 19 15 56.35 | +31 03 32.1 | +0.12 | -0.7  | 1940.0 | 6  |
| 137 | 27.72006 | 19 16 56.45 | +31 03 33.8 | +0.08 | -1.1  | "      | 22 |
| 138 | 27.74136 | 19 16 56.92 | +31 03 02.9 | +0.10 | -1.5  | "      | 6  |
| 139 | 27.77528 | 19 16 57.61 | +31 02 13.2 | +0.19 | -3.0  | "      | 23 |
| 140 | 27.77479 | 19 16 57.09 | +31 02 52.3 | +0.15 | -3.3  | "      | 4  |
| 141 | 28.40840 | 19 17 12.65 | +30 41 22.1 | +0.03 | -1.7  | "      | 11 |
| 142 | 28.76578 | 19 17 21.60 | +30 38 55.8 | +0.08 | +0.2  | "      | 24 |
| 143 | 29.03344 | 19 17 28.12 | +30 32 36.0 | +0.01 | +0.2  | "      | 5  |
| 144 | 30.00276 | 19 17 53.39 | +30 09 30.5 | +0.06 | -1.4  | "      | 5  |
| 145 | 30.38586 | 19 18 03.74 | +30 00 20.9 | +0.07 | -1.6  | "      | 11 |
| 146 | 1.43167  | 19 18 33.11 | +29 35 02.5 | +0.26 | -6.1  | "      | 11 |
| 147 | 1.73002  | 19 18 41.88 | +29 27 50.9 | +0.30 | -2.1  | "      | 6  |
| 148 | 1.74407  | 19 18 41.77 | +29 27 32.6 | -0.27 | +0.2  | "      | 24 |
| 149 | 1.74690  | 19 18 42.10 | +29 27 17.9 | +0.01 | -3.3  | "      | 23 |
| 150 | 1.77223  | 19 18 42.72 | +29 35 02.5 | -0.05 | -0.9  | "      | 18 |
| 151 | 2.01615  | 19 18 49.95 | +29 20 52.0 | +0.02 | -3.4  | "      | 29 |
| 152 | 2.70880  | 19 19 10.79 | +29 03 58.7 | +0.11 | -0.4  | "      | 6  |
| 153 | 2.75562  | 19 19 12.09 | +29 02 43.0 | -0.03 | -2.3  | "      | 23 |
| 154 | 2.75526  | 19 19 12.08 | +29 02 43.5 | +0.02 | -4.0  | "      | 28 |
| 155 | 2.00398  | 19 19 19.24 | +28 56 37.8 | -0.30 | -2.8  | "      | 29 |
| 156 | 3.03194  | 19 19 20.45 | +28 55 57.6 | -0.02 | -1.1  | "      | 5  |
| 157 | 4.01763  | 19 19 51.39 | +28 31 26.8 | +0.06 | -0.7  | "      | 22 |
| 158 | 4.71761  | 91 20 14.17 | +28 13 49.1 | +0.09 | -1.5  | "      | 13 |
| 159 | 5.15464  | 19 20 28.42 | +28 02 40.6 | +0.07 | -3.4  | "      | 11 |
| 160 | 5.41027  | 19 20 37.12 | +27 56 05.6 | +0.24 | -0.7  | "      | 5  |
| 161 | 6.99317  | 19 21 31.07 | +27 15 05.9 | -0.13 | -1.5  | "      | 29 |
| 162 | 8.00084  | 19 22 07.08 | +26 48 15.2 | -0.14 | -4.5  | "      | 11 |
| 163 | 8.40134  | 19 22 21.33 | +26 37 32.5 | -0.00 | +0.44 | "      | 29 |
| 164 | 9.98540  | 19 23 20.09 | +25 53 38.9 | +0.30 | -0.7  | "      | 5  |
| 165 | 10.00194 | 19 23 20.32 | +25 53 08.9 | -0.11 | +1.5  | "      | 16 |
| 166 | 10.67719 | 19 23 46.19 | +25 33 56.0 | -0.03 | +0.5  | "      | 5  |
| 167 | 10.69252 | 19 23 46.79 | +25 33 28.3 | 0     | -0.1  | "      | 13 |
| 168 | 11.13475 | 19 24 03.53 | +25 20 41.5 | -0.09 | +0.5  | "      | 5  |
| 169 | 11.98554 | 19 24 35.21 | +24 55 37.1 | -0.02 | +2.7  | "      | 11 |
| 170 | 12.38505 | 19 24 51.69 | +24 43 38.0 |       |       |        |    |



| 1   | 2        | 3           | 4           | 5       | 6      | 7      | 8  |
|-----|----------|-------------|-------------|---------|--------|--------|----|
| 171 | 12.71016 | 19 25 04.51 | +24 33 45.3 | -0.04   | + 19   | 1940.0 | 22 |
| 172 | 12.73905 | 19 25 05.77 | +24 32 51.9 | +0.13   | + 22   | "      | 15 |
| 173 | 13.73435 | 19 25 44.74 | +24 01 56.4 | +0.08   | + 39   | "      | 15 |
| 174 | 13.98326 | 19 25 54.40 | +23 54 01.0 | -0.08   | + 24   | "      | 29 |
| 175 | 14.72126 | 19 26 23.38 | +23 30 04.2 | -0.25   | + 13   | "      | 15 |
| 176 | 14.98921 | 19 26 34.07 | +23 21 18.8 | -0.15   | - 29   | "      | 29 |
| 177 | 15.38542 | 19 26 49.27 | +23 08 06.8 | -0.47   | + 41   | "      | 11 |
| 178 | 15.71522 | 19 27 02.99 | +22 56 55.4 | -0.06   | + 47   | "      | 23 |
| 179 | 15.73931 | 19 27 04.23 | +22 56 08.3 | +0.31   | + 53   | "      | 17 |
| 180 | 16.41569 | 19 27 30.43 | +22 32 45.5 | -0.22   | + 72   | "      | 11 |
| 181 | 16.58847 | 19 27 41.72 | +22 22 59.7 | +0.07   | + 22   | "      | 16 |
| 182 | 16.69494 | 19 27 41.77 | +22 22 45.5 | -0.09   | + 20   | "      | 6  |
| 183 | 16.73805 | 19 27 43.48 | +22 21 16.8 | -0.07   | + 48   | "      | 23 |
| 184 | 16.74694 | 19 27 43.77 | +22 20 55.2 | -0.13   | + 29   | "      | 26 |
| 185 | 17.69123 | 19 28 21.19 | +21 46 35.5 | -0.07   | + 44   | "      | 16 |
| 186 | 17.69413 | 19 28 21.46 | +21 46 33.9 | +0.10   | + 70   | "      | 26 |
| 187 | 17.73650 | 19 28 22.88 | +21 44 53.8 | -0.09   | + 57   | "      | 23 |
| 188 | 17.75718 | 19 28 23.64 | +21 44 09.3 | -0.10   | + 43   | "      | 21 |
| 189 | 17.98088 | 19 28 32.32 | +21 35 48.6 | -0.17   | + 61   | "      | 5  |
| 190 | 18.57667 | 19 28 59.89 | +21 09 07.5 | +0.01   | + 61   | "      | 16 |
| 191 | 18.68625 | 19 29 00.10 | +21 08 51.4 | -0.14   | + 12.1 | "      | 26 |
| 192 | 18.69031 | 19 29 00.55 | +21 08 36.2 | +0.19   | + 60   | "      | 6  |
| 193 | 18.71631 | 19 29 01.65 | +21 07 40.1 | +0.32   | + 10.5 | "      | 15 |
| 194 | 18.72346 | 19 29 02.04 | +21 05 54.5 | +0.42   | + 82   | "      | 18 |
| 195 | 18.72630 | 19 29 01.68 | +21 07 13.0 | -0.02   | + 66   | "      | 22 |
| 196 | 18.74072 | 19 29 01.18 | +21 05 42.4 | [-1.07] | + 10.4 | "      | 17 |
| 197 | 18.97733 | 19 29 11.32 | +20 57 21.8 | -0.09   | + 39   | "      | 9  |
| 198 | 18.99428 | 19 29 11.96 | +20 56 41.2 | -0.08   | + 68   | "      | 28 |
| 199 | 19.38744 | 19 29 27.84 | +20 40 41.4 | [+0.59] | + 74   | "      | 11 |
| 200 | 19.70775 | 19 29 39.75 | +20 27 54.9 | +0.07   | + 10.6 | "      | 5  |
| 201 | 20.97328 | 19 30 27.54 | +20 24 12.2 | +0.12   | + 10.4 | "      | 5  |
| 202 | 21.05587 | 19 30 30.58 | +19 20 29.4 | 0.0     | + 74   | "      | 29 |
| 203 | 21.69177 | 19 30 54.31 | +19 01 57.5 | +0.16   | + 12.0 | "      | 6  |
| 204 | 21.72178 | 19 30 55.52 | +19 00 36.3 | +0.26   | + 14.5 | "      | 24 |
| 205 | 21.74179 | 19 30 55.90 | +18 59 39.3 | +0.11   | + 12.5 | "      |    |

| 1   | 2            | 3           | 4           | 5       | 6        | 7      | 8  |
|-----|--------------|-------------|-------------|---------|----------|--------|----|
| 206 | 1940 декабрь | 19 31 04.41 | +18 48 55.4 | +0.12   | +12.1    | 1940.0 | 5  |
| 207 |              | 19 31 04.27 | +18 48 49.7 | -0.06   | + 9.5    | "      | 28 |
| 208 |              | 19 31 07.94 | +18 50 01.2 | [+3.11] | [+116.4] | "      | 29 |
| 209 |              | 19 32 04.43 | +17 24 58.6 | +0.29   | + 80     | "      | 16 |
| 210 |              | 19 32 13.78 | +17 10 08.3 | +0.18   | + 18.0   | "      | 5  |
| 211 |              | 19 32 27.37 | +16 48 34.4 | [+0.34] | [+47.3]  | "      | 11 |
| 212 |              | 19 32 38.05 | +16 30 08.0 | +0.44   | + 18.6   | "      | 22 |
| 213 |              | 19 32 38.22 | +16 29 49.5 | +0.37   | + 19.3   | "      | 24 |
| 214 |              | 19 32 38.92 | +16 28 16.3 | +0.28   | + 18.1   | "      | 21 |
| 215 |              | 19 32 46.77 | +16 14 50.9 | +0.58   | + 22.0   | "      | 29 |
| 216 |              | 19 33 11.14 | +15 52 17.9 | [+2.77] | [+21.4]  | "      | 22 |
| 217 |              | 19 33 27.50 | +14 52 20.4 | +0.44   | + 27.4   | "      | 11 |
| 218 |              | 9 33 33.49  | +14 38 53.5 | +0.60   | + 22.2   | "      | 20 |
| 219 |              | 19 33 37.74 | +14 28 38.4 | +0.60   | + 28.3   | "      | 16 |
| 220 |              | 19 34 01.81 | +13 25 47.2 | +0.33   | + 27.5   | "      | 17 |
| 221 |              | 19 34 02.17 | +13 23 39.2 | +0.44   | + 27.9   | "      | 21 |
| 222 |              | 19 34 02.44 | +12 37 44.3 | [+0.23] | [+30.2]  | "      | 11 |
| 223 |              | 19 34 16.57 | +12 37 44.3 | +0.78   | + 40.5   | "      | 17 |
| 224 |              | 19 34 24.29 | +12 12 43.0 | +0.62   | + 38.3   | "      | 11 |
| 225 |              | 19 34 42.09 | +10 55 20.5 | +0.81   | + 42.7   | "      | 22 |
| 226 |              | 19 34 55.93 | +09 31 19.5 | +1.12   | + 43.8   | "      | 3  |
| 227 | 1941 январь  | 19 35 04.81 | +08 02 43.5 | +1.29   | + 50.7   | 1941.0 | 26 |
| 228 |              | 19 35 08.48 | +06 25 58.2 | +1.40   | + 63.4   | 1940.0 | 29 |
| 229 |              | 19 35 06.92 | +04 05 25.4 | +1.46   | + 70.8   | 1941.0 | 3  |
| 230 |              | 19 34 41.08 | +00 39 04.6 | +1.59   | + 75.9   | "      | 29 |
| 231 |              | 19 34 38.43 | +00 02 53.5 | +1.46   | + 69.2   | "      | 29 |
| 232 |              | 19 34 37.87 | -00 01 13.8 | +1.59   | + 76.6   | "      | 29 |
| 233 |              | 19 34 12.55 | -43 07 14.2 | +3.43   | + 34.7   | "      | 9  |
| 234 |              | 19 34 28.78 | -43 42 50.4 | +3.45   | + 33.2   | "      | 9  |
| 235 |              | 19 34 34.76 | -44 36 34.4 | [+3.91] | [+36.8]  | "      | 9  |
| 236 |              | 19 38 45.71 | -45 05 29.0 | +3.62   | + 32.8   | "      | 9  |
| 237 |              | 19 42 32.71 | -45 43 43.0 | +3.55   | + 32.8   | "      | 9  |
| 238 | февраль      | 19 52 57.18 | -45 39 29.8 |         |          |        |    |
| 239 |              | 20 09 07.26 |             |         |          |        |    |



| 1   | 2         | 3        | 4              | 5       | 6        | 7      | 8  |
|-----|-----------|----------|----------------|---------|----------|--------|----|
| 240 | 1941 март | 15.12443 | -45° 16' 19".0 | +3° 23  | + 30".4  | 1940.0 | 25 |
| 241 |           | 22.13679 | -44 34 58.8    | +3.08   | + 28.7   | 1941.0 | 9  |
| 242 |           | 25.10614 | -44 17 30.8    | [+4.11] | [+ 25.8] | 1940.0 | 25 |
| 243 |           | 1.12526  | -43 54 21.1    | +2.74   | + 24.4   | 1941.0 | 9  |
| 244 |           | 7.13130  | -43 23 35.4    | +2.60   | + 23.1   | "      | 9  |
| 245 |           | 9.04459  | -43 14 52.8    | [+7.78] | [+38.0]  | 1940.0 | 25 |
| 246 |           | 29.25020 | -42 23 06.9    | +1.80   | +17.5    | 1941.0 | 12 |
| 247 |           | 30.24926 | -42 22 54.7    | +1.85   | + 1.3    | "      | 12 |
| 248 | апрель    | 1.09714  | -42 22 40.5    | +1.91   | + 9.2    | 1940.0 | 25 |
| 249 |           | 1.15509  | -42 22 27.0    | +1.80   | + 7.7    | 1941.0 | 9  |
| 250 |           | 4.27890  | -42 23 24.5    | +1.63   | + 8.0    | "      | 12 |
| 251 |           | 5.12569  | -42 24 19.0    | +1.72   | + 7.0    | 1940.0 | 25 |
| 252 |           | 5.24513  | -42 24 09.6    | +1.60   | + 4.7    | 1941.0 | 12 |
| 253 |           | 25.21884 | -43 19 46.0    | +1.36   | - 2.9    | "      | 12 |
| 254 |           | 28.21125 | -43 34 18.0    | +1.31   | - 4.9    | "      | 12 |
| 255 |           | 29.21785 | -43 39 31.5    | +0.82   | - 7.4    | "      | 12 |
| 256 |           | 30.19863 | -43 44 41.1    | +0.99   | - 6.1    | "      | 12 |
| 257 | май       | 2.05889  | -43 55 09.5    | +1.34   | - 6.2    | 1940.0 | 25 |
| 258 |           | 4.06625  | -44 06 37.5    | +1.42   | - 6.1    | "      | 25 |
| 259 |           | 28.02734 | -46 35 14.4    | [-9.30] | [-16.5]  | "      | 25 |
| 260 | июнь      | 4.07233  | -47 08 32.5    | +2.57   | -16.9    | "      | 25 |
| 261 |           | 17.95550 | -47 32 58.5    | +3.04   | -27.8    | "      | 25 |

обсерватории производилось несколько наблюдений кометы в один вечер, то бралось среднее. В табл. 2 представлены наблюдения кометы, а также результаты сравнения наблюдаемых и вычисленных координат ( $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ ). Из общего числа точных наблюдений (261) пришлось исключить 24 явно ошибочных, которые заключены в квадратные скобки.

## § 2. Образование нормальных мест

Все наблюдения были объединены в 12 нормальных мест. В табл. 2 наблюдения, объединенные в одно нормальное место, разделены чертой. В табл. 3 даны прямое восхождение и склонение для момента нормального места, отнесенного к равноденствию 1950.0 года, а также величины  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ ,  $\rho$  и число наблюдений для каждого нормального места. Величины  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\delta$  для каждого нормального места были рассчитаны вручную в связи с необходимостью отбрасывания ряда ошибочных наблюдений.

## § 3. Исправление элементов орбиты

При исправлении орбиты использовался способ Эккерта-Брауера, видоизмененный А. Д. Дубяго (1949) для вычисления орбит, близких к параболе. Программа дает непосредственно поправки следующих элементов:  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $i$  (отнесенных к эклиптике 1950.0), выраженных в долях градуса, величины  $T$  (момента прохождения через перигелий), выраженной в долях суток, перигельного расстояния  $q$  и эксцентриситета орбиты  $e$ .

При решении на электронной машине системы нормальных уравнений и определении весовых коэффициентов применялся способ матриц, рекомендованный С. Г. Маковым (1955). Были получены следующие поправки к исходной системе элементов:

$$\begin{aligned}dT &= +0^d.00335 \\d\omega &= -0^\circ.00288 \\d\Omega &= +0^\circ.01080 \\di &= +0^\circ.01717 \\dq &= -0.00028004 \\de &= +0.0004692\end{aligned}$$

Окончательная орбита кометы 1941 I Кеннингема оказалась гиперболической. Поскольку программа интегрирования и сравнения с наблюдениями годится для любого эксцентриситета, близкого к единице, нам было нетрудно получить  $\alpha$  и  $\delta$  с новыми элементами для каждого нормального места и получить невязки.

В табл. 4 приведены невязки по условным уравнениям и по новым элементам. Хорошая сходимость отклонений по двум независимым друг от друга методам служит надежным контролем всех вычислений. Средняя ошибка единицы веса

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{2n} v_j^2}{2n - m}} = \pm 1''18,$$

где  $n$  — число условных уравнений, а  $m$  — число неизвестных. Прибавляя поправки элементов к исходной системе, находим следующую систему элементов и их средние ошибки:



Таблица 3

| Нормальные места |                   |                                                     |                   |                      |                |        |                   |
|------------------|-------------------|-----------------------------------------------------|-------------------|----------------------|----------------|--------|-------------------|
| № п/п            | Эфемеридное время | $\alpha_{1950.0}$                                   | $\delta_{1950.0}$ | $\Delta\alpha$       | $\Delta\delta$ | $\rho$ | Кол-во наблюдений |
| 1                | 1940 сент. 26.0   | 20 <sup>h</sup> 16 <sup>m</sup> 22 <sup>s</sup> .31 | +52°36'58".1      | +0 <sup>s</sup> .266 | +0".95         | 1.7081 | 13                |
| 2                | окт. 7.0          | 19 50 54.39                                         | +49 52 04.9       | +0.682               | + 2.30         | 1.6053 | 23                |
| 3                | 24.0              | 19 25 17.19                                         | +44 11 02.1       | +0.899               | + 2.83         | 1.4685 | 27                |
| 4                | нояб. 7.0         | 19 16 04.95                                         | +38 57 26.9       | +0.635               | + 2.28         | 1.3603 | 22                |
| 5                | 24.0              | 19 13 04.37                                         | +32 31 07.5       | +0.236               | - 1.11         | 1.2096 | 45                |
| 6                | дек. 10.0         | 19 23 45.66                                         | +25 54 28.8       | -0.027               | + 0.65         | 1.0248 | 44                |
| 7                | 25.0              | 19 33 14.93                                         | +16 15 14.9       | +0.485               | +25.24         | 0.7990 | 37                |
| 8                | 1941 янв. 31.0    | 19 46 07.69                                         | -45 20 27.2       | +3.496               | +33.34         | 1.0351 | 5                 |
| 9                | февр. 25.0        | 20 38 02.32                                         | -44 13 03.0       | +2.912               | +26.35         | 1.5135 | 4                 |
| 10               | апр. 2.0          | 21 13 42.58                                         | -42 20 16.8       | +1.763               | + 7.77         | 1.7958 | 7                 |
| 11               | 30.0              | 21 10 45.41                                         | -43 41 25.5       | +1.217               | - 5.60         | 1.8238 | 6                 |
| 12               | июнь 11.0         | 20 01 04.16                                         | -47 26 57.2       | +2.810               | -22.35         | 1.8774 | 2                 |

Таблица 4

## Представление нормальных мест

| № п/п | После улучшения            |                |                            |                |
|-------|----------------------------|----------------|----------------------------|----------------|
|       | По условным уравнениям     |                | По новым элементам         |                |
|       | $\Delta\alpha \cos \delta$ | $\Delta\delta$ | $\Delta\alpha \cos \delta$ | $\Delta\delta$ |
| 1     | +0".8                      | +1".2          | +1".3                      | +1".4          |
| 2     | -0.1                       | +1.1           | -0.1                       | +1.2           |
| 3     | +0.6                       | -0.5           | +0.7                       | -0.5           |
| 4     | -0.2                       | -0.9           | -0.2                       | -0.9           |
| 5     | -0.7                       | -2.1           | -0.8                       | -2.1           |
| 6     | -1.6                       | -1.2           | -1.8                       | -1.2           |
| 7     | 0.0                        | +2.7           | 0.0                        | +2.6           |
| 8     | -1.2                       | +0.7           | -1.2                       | +0.7           |
| 9     | -0.4                       | -0.4           | -0.6                       | -0.5           |
| 10    | +1.0                       | 0.0            | +1.2                       | 0.0            |
| 11    | -0.7                       | +0.3           | -0.7                       | +0.3           |
| 12    | -0.5                       | 0.0            | -0.6                       | 0.0            |

Оскуляция 1941, январь 6.0 эфемеридного времени

$$T = 1941 \text{ январь } 16.23471 \pm 0.00021$$

$$\omega = 199^\circ.57664 \pm 0^\circ.00018$$

$$\Omega = 295^\circ.88676 \pm 0^\circ.00025$$

$$i = 49^\circ.89028 \pm 0^\circ.00034$$

$$q = 0.3677626 \pm 0.0000060$$

$$e = 1.0004690 \pm 0.0000103$$

Как уже было указано выше, все вычисления, связанные с получением окончательной орбиты кометы, производились с помощью машины БЭСМ-2. В связи с этим интересно отметить количество машинного времени, затраченного на выполнение этих вычислений. Оказывается, что вычисления по программе интегрирования по способу

Энке и сравнения с 300 наблюдениями потребовали 15 мин машинного времени. Вычисления по программе улучшения кометных орбит потребовали не более 1,5 мин.

В заключение считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность моему руководителю С. Г. Макову за ценные советы при выполнении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беловс Л. М. Окончательная орбита кометы Баппу-Бок-Ньюкирка (1949 IV). Бюлл. ИТА, 9, 8 (111), 1964.
2. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. 1964.
3. Всехсвятский С. К. Физические характеристики комет. Физматгиз, 1958.
4. Галибина И. В. и Бартенева О. Н. Определение окончательной орбиты кометы 1950 I Джонсона. Бюлл. ИТА, 10, 3(116), 1965.
5. Дубяго А. Д. Определение орбит. 1949.
6. Маков С. Г. Тр. ИТА, 4, 1955.
7. Сакк В. В. и Куликов Д. К. Определение окончательной орбиты кометы 1925 VII (Шайн-Комас-Соля). Бюлл. ИТА, 4, 9(62), 1951.
8. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. 2, Л.—М., 1937.
9. Baldet. L. Astronomic, 55, 97, 1941.
10. Fresa, Vergnano, Missano—Rudari. Publ. R. Oss. Astr. Torino, № 43, 1940.
11. Keelin. BZ 22, 101, 1940.
12. Herrick C. E. "Details of Computational Methods". Space Trajectories, 1960.
13. Maxwell Pop. Astr. 48, 488, 1940.
14. Maxwell, Bendier. Harv. Card. 534, 1940.
15. Moller. UAI Circ. 830, 832, 1940.
16. Miss Quirck, Hoffman. UAI Circ. 851. Planetary Coordinates for the years 1940—1960. London, 1939.

М. А. Маммадов

## 1941. I Кеннингем кометинин сон орбитинин тэ'јини

## ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә 1941 I Кеннингем кометинин сон орбитинин тэ'јининдән бәһс едилир. Орбит БЭСМ-2 электрон машинында, хусуси һазырланмыш ики програмын көмәји илә һесапланмышдыр. Бу ики програм үмуми програм олдуғуна көрә, бүтүн кометләрин орбитини бунлар вәситәсилә һесабламағ олар. Програмда беш бөјүк планетин кометин орбитинә тә'сири нәзәрә алынмышдыр. Програмлар ихтијари интервалла ирәли вә кери ишләјә биләр.



# МҮНДЭРИЧАТ

|                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| С. Я. Якубов. Банах фэзасында икинчи тэртиб параболитик тип дифференциал тэндиклэр үчүн Коши мөсөлөсү                                       | 3   |
| Н. М. Насанов. Бүтүн охда кэсилмэжэн функцианын Ермит-Фейер интерполациа чөххөддилэри васитэси илэ жахынлашма тэртиби хаггында              | 9   |
| С. С. Касымова. Хагиги матрислэр чөбри үзэриндэ гурулан квзигејри-еквлив фэзалары                                                           | 16  |
| Ф. Н. Шамијев. Минимум чэкиди хэлгэви еллиптик лөвхөлэр лэјинэ етмэк хаггында                                                               | 23  |
| Ш. М. Бахышов. Силу цилиндритк өртүкдэ температурун тэјини                                                                                  | 28  |
| Г. Г. Әлијев. Еластики элагэ илэ бэркидилмиш цилиндритк халганын дајана чаглыгы                                                             | 35  |
| Ф. Ч. Тејмуров. Узунуна далганын блокдан кечмэси мөсөлөсү                                                                                   | 37  |
| В. И. Марон, Н. Н. Сәфәров. Мүстәви лөвхәнин икикомпонентли мүһитдә хәрәкәти                                                                | 43  |
| Ф. Ә. Тағыјев. Трикоми мөсөлөсинин үмүми жапышдырма шәрти дахилиндә шөбөкә методу илэ хәлли                                                 | 48  |
| Т. Г. Нейдәров. Ечүлү ганунарын Ечворт типли сыралара әјрылмасы                                                                             | 54  |
| Д. М. Манјуров. Параметрик хәтти програмлашдырманын бир синиф мөсөлөсү хаггында                                                             | 62  |
| И. Ш. Ибраһимов. Пајлама параметрләр үчүн дөјанәтди гијмәтләрин тапылмасы                                                                   | 67  |
| Ф. К. Исајев, Ә. Х. Хәлилов. Бәзи гарыштыг әсаслы гәләви-хадокен фосфорларында —мәркәзләрин оптик дагылмасынын тәчрүби тәдгиги              | 72  |
| В. Б. Антонов, Ј. Н. Нәсиров. GeTe—GeSe бәрк мәһлулулда термо-электрик хәссәләрин тәдгиги                                                   | 76  |
| Х. М. Хәлилов, А. И. Агајев. Мегагерс тезлик диапазонунда KCl монокристалында ултрасәсин удулмасы                                           | 82  |
| Н. З. Чәлилов, Т. С. Әзизов, Г. М. Әлијев. Електрон шүәсынын гексагонал монокристал селенин електриккечирмәсинә тәсир                       | 87  |
| М. Ә. Талиби, П. А. Лунјов, Г. Н. Гәдимов. Селен стабилизаторлары                                                                           | 91  |
| Р. Ә. Гусейнов. 1960-чы ил 25 ијун хромосфер адышмасынын спектрофотометрик тәдгигинин нәтичәлери хаггында                                   | 96  |
| Б. Ә. Әһмәдов. Таваны кечиричи олан анизотроп ләјда мајенин охасиметрик ахыны                                                               | 104 |
| В. П. Горетски, С. Г. Романовски. Сәнаје тезликди дәјишән чәрәјанын електромагнит сәһәсинин истифадә олунмасы илэ бегонун термики ишләнмәси | 107 |
| Ф. Г. Мурадәлијев. Күләјин шагули профиленин вә онун күләк мүһәрикдәринә тәсиринин тәдгиги                                                  | 113 |
| Ч. М. Чуварлы, Ј. В. Дмитријев, Е. М. Әлизадә. Телеграф тәндикләринин хәлли үчүн характеристика үсүлү                                       | 118 |
| Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов. Илдырым ифрат кәркинликләриндән 110 кв-луг трансформаторларын торпагламалыш нейтралынын муһафизәси           | 121 |
| М. А. Мәмәдов. 1941. 1 Кеннингем кометинин сон орбитинин тәјини                                                                             | 128 |

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| С. Я. Якубов. Задача Коши для дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа в банаховом пространстве                                         | 3   |
| Г. М. Гасанов. О порядке приближения на всей оси непрерывных функций интерполяционными многочленами эрмита-фейера                                              | 9   |
| С. С. Касымова. Квазинеевклидовы пространства над алгеброй вещественных матриц                                                                                 | 16  |
| Ф. Г. Шамиев. О проектировании кольцевой эллиптической пластинки минимального веса                                                                             | 23  |
| Ш. М. Бахышев. Определение температурного поля в конечной цилиндрической оболочке                                                                              | 28  |
| Г. Г. Алиев. Устойчивость цилиндрического кольца армированного гибкой связью                                                                                   | 35  |
| Ф. Д. Теймуров. Задача перехода продольной волны через блок                                                                                                    | 37  |
| В. И. Марон, Г. Г. Сафаров. Движение пластинки в двухкомпонентной гетерогенной смеси                                                                           | 43  |
| Ф. А. Тагиев. Решение задачи трикомии с общим условием склеивания методом сеток                                                                                | 48  |
| Т. Г. Гейдаров. Разложение $n$ -мерных законов распределения в ряд типа Эджворта                                                                               | 54  |
| Д. М. Манюров. Об одном классе задач параметрического линейного программирования                                                                               | 62  |
| И. Ш. Ибраһимов. Нахождение состоятельных оценок параметров распределения                                                                                      | 67  |
| Ф. К. Исаев, А. Х. Халилов. Экспериментальное исследование оптического разрушения $F$ -центров в некоторых щелочно-галогидных фосфорах со смешанным основанием | 72  |
| В. Б. Антонов, Я. Н. Насиров. Исследование термоэлектрических свойств твердого раствора $GeTe-GeSe$                                                            | 76  |
| Х. М. Халилов, А. И. Агаев. Поглощение ультразвука в монокристалле $KCl$ в мегагерцном диапазоне частот                                                        | 82  |
| Н. З. Джалилов, Т. С. Азизов, Г. М. Алиев. Влияние электронного облучения на электропроводность гексагонального монокристалла селена                           | 87  |
| М. А. Талиби, П. А. Лунев, Г. Г. Кадымов. Селеновые стабилизаторы                                                                                              | 91  |
| Р. Ә. Гусейнов. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 25 июня 1960 г., II                                                    | 96  |
| Б. А. Ахмедов. Осесимметричное течение жидкости в анизотропном пласте с проницаемой кровлей                                                                    | 104 |
| В. П. Горетский, С. Г. Романовский. Термическая обработка бетона в электромагнитном поле с применением промышленной частоты                                    | 107 |
| Ф. Г. Мурадалиев. Исследование вертикального профиля ветра и его влияния на ветроколесо                                                                        | 113 |
| Ч. М. Джуварлы, Е. В. Дмитриев, Э. М. Ализаде. Метод характеристики для решения телеграфного уравнения                                                         | 118 |
| Ч. М. Джуварлы, М. М. Муслимов. Защита изоляции нейтралитрансформаторов 110 кв от грозовых перенапряжений                                                      | 121 |
| М. А. Мамедов. Окончательная орбита кометы 1941 I Кеннингема                                                                                                   | 128 |

42



---

Подписано к печати 3/XI 1966 г. Формат бумаги  $70 \times 108 \frac{1}{16}$ . Бум. лист. 4,50.  
Печ. лист. 12,33. Уч.-изд. лист. 11,54. ФГ 07372. Заказ 387.  
Тираж 660. Цена 80 коп.

---

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров  
Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, 80.