

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

3

1966

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Н. М. СУЛЕЙМАНОВ

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

1. Пусть R^n — n -мерное евклидово пространство переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, H — произвольное гильбертово пространство. Обозначим через $L_2(R^n, H)$ совокупность всех измеримых вектор-функций $f(x)$, определенных на R^n , со значениями в H и таких, что сходится интеграл (по R^n):

$$\int \|f(x)\|_H^2 dx.$$

Обозначим через E пространство, каждый элемент которого является производной некоторого порядка от элементов $f(x)$ из $L_2(R^n, H)$. При этом производная понимается в смысле обобщенных вектор-функций. Обозначим через $\Phi(H)$ совокупность бесконечно дифференцируемых вектор-функций $\varphi(x)$, определенных на R^n , со значениями в H и таких, что при любых q

$$\int \|D^q \varphi(x)\|_H^2 dx < +\infty.$$

Можно проверить, что все элементы $f(x)$ из пространства L_2 определяют линейные непрерывные функционалы над $\Phi(H)$ по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} \langle f(x), \varphi(x) \rangle dx,$$

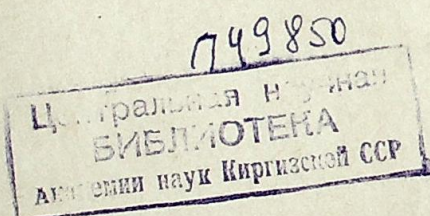
где знак $\langle \rangle$ означает скалярное произведение в H . Этим же свойством обладает и пространство E . Обозначим через $\tilde{E}$ совокупность преобразований Фурье всех элементов из E . Нетрудно убедиться в том, что пространство $\tilde{E}$ характеризует следующая

Теорема 1. Для того, чтобы элемент $v(\sigma)$ принадлежал пространству $\tilde{E}$, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде произведения

$$P_q(\sigma) g(\sigma),$$

где $g(\sigma) \in L_2(R^n, H)$, $P_q(\sigma)$ — некоторый многочлен от σ степени $\leq q$.

В работе [5] были приведены условия для корректности постановки краевых задач в полупространстве $t \geq 0$ для уравнений без правых частей. В данной статье мы даем некоторые соотношения, которым должны удовлетворять начальные данные, чтобы краевая задача в полупространстве $t \geq 0$ была поставлена корректно.



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор) Г. А. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Баясанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)»

2. Рассмотрим в E задачу Коши:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - Au(t, x) = f(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (2)$$

где $u(t, x) \in E$ при каждом $t \geq 0$. A — некоторый оператор из E в E , вообще говоря, неограниченный. На $j(t, x)$ налагаются условия с помощью преобразования Фурье.

Задача (1) — (2) называется корректно поставленной, если решение (существует, единственно в E и непрерывно зависит от начальных данных) возрастает в E при $t \rightarrow \infty$ не быстрее экспоненты с минимальным типом. нас будет интересовать следующий вопрос. Каким условиям должен удовлетворять начальный вектор $u_0(x)$, чтобы задача (1) — (2) была корректной в E , или, что можно сказать о росте решения $u(t, x)$ задачи (1) — (2) $t \rightarrow \infty$ в зависимости от начального вектора $u_0(x)$? В настоящей статье мы попытаемся ответить на эти вопросы.

3. В работе [6] для любого ограниченного оператора $\tilde{A}$ в H было доказано соотношение

$$\|e^{t\tilde{A}}\| \leq M\varepsilon(1 + \|\tilde{A}\|^h)e^{t(\lambda+\varepsilon)},$$

где $\lambda = \sup \operatorname{Re} S(\tilde{A})$, $S(\tilde{A})$ — спектр от $\tilde{A}$, h — некоторое число, $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

Рассмотрим следующий класс B операторов $\tilde{A}$, выделяемый определением.

Определение. Оператор $\tilde{A}$ в H назовем близким к простому, если его резольвента R_λ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ удовлетворяет соотношению

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda)^m}, \quad (B)$$

где M и m — некоторые числа. Можно показать, что класс таких операторов достаточно богат в том смысле, что он содержит несамосогласованные ограниченные бесконечномерные операторы.

Теорема 2. Для любого оператора $A \in B$ имеет место соотношение

$$\|e^{tA}\| \leq C_\varepsilon(1 + \|A\|)e^{st}, \quad (*)$$

где C_ε от A не зависит.

Доказательство. Рассмотрим контур Γ , состоящий из полуокружности E, ABC (которую обозначим через C_2) с центром в нуле и радиусом $r = \|A\| + \varepsilon$ и прямой $\sigma = \varepsilon$, которую обозначим через C_1 (рис.) На части C_2 контура Γ имеем следующее:

$$\begin{aligned} \|R_\lambda\| &= \|(\lambda E - A)^{-1}\| = \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(1 - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left(1 + \frac{\|A\|}{|\lambda|} + \frac{\|A\|^2}{|\lambda|^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{|\lambda|} (1 + \theta + \theta^2 + \dots) = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \theta}, \end{aligned}$$

где

$$\theta = \frac{\|A\|}{|\lambda|} = \frac{\|A\|}{r} = \frac{\|A\|}{\|A\| + \varepsilon} < 1.$$

Тогда

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Отсюда

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} e^{t\lambda} R_\lambda d\lambda \right\| \leq e^{st} (\|A\| + \varepsilon) \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \quad (1^\circ)$$

На части C_1 контура Γ мы имеем $\operatorname{Re} \lambda = \varepsilon > 0$. В силу того, что A — близкий к простому оператор, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} e^{t\lambda} R_\lambda d\lambda \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} e^{st} \int_{C_1} \|R_\lambda\| d\lambda \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} e^{st} \cdot \frac{C}{\varepsilon^m} d(C_1), \end{aligned}$$

где $d(C_1)$ — длина прямой C_1 ; ее можно оценить так:

$$d(C_1) \leq 2\pi r = 2\pi(\|A\| + \varepsilon).$$

Следовательно, окончательно получаем

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} R_\lambda d\lambda \right\| \leq \frac{C}{\varepsilon^m} (\varepsilon + \|A\|) e^{st}. \quad (2^\circ)$$

Представив интеграл

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} R_\lambda d\lambda$$

в виде суммы аналогичных интегралов по C_1 и C_2 и учитывая (1°), (2°), имеем следующее соотношение:

$$\|e^{tA}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} r e^{st} + \frac{C}{\varepsilon^m} r e^{st} = \frac{1}{\varepsilon} e^{st} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon^{m-1}} \right)$$

или

$$\|e^{tA}\| \leq M'_\varepsilon (\|A\| + \varepsilon) e^{st},$$

где

$$M'_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{C}{\varepsilon^m}.$$

Не нарушая общности (для удобства), эту оценку будем использовать в дальнейшем в виде

$$\|e^{tA}\| \leq C_\varepsilon (1 + \|A\|)^h e^{st}, \quad (*)$$

где h — некоторое число, $0 < C_\varepsilon = \cos t$, не зависящая от A .

4. После применения преобразования Фурье (по x) из (1) — (2) получаем

$$\frac{V(t, \sigma)}{dt} = \tilde{A}(\sigma) V(t, \sigma) = g(t, \sigma), \quad (3)$$

$$V(0, \sigma) = V_0(\sigma), \quad (4)$$

где операторы $\tilde{A}(\sigma)$ и A подобны, т. е. связаны между собой с помощью оператора Фурье. В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что $|\tilde{A}(\sigma)|$ растет при $|\sigma| \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени $|\sigma|$. Рассмотрим задачу (3)–(4) (сперва без всякого параметра σ) в H :

$$\frac{dV(t)}{dt} - \tilde{A}V(t) = g(t), \quad (5)$$

$$V(0) = V_0. \quad (6)$$

Пусть $\|g(t)\| \leq e^{-1}(1+t^2)^h$.

Мы скажем, что ограниченный оператор $\tilde{A}$ удовлетворяет условию (A) если: 1) $\tilde{A} \in B$;

2) его спектр $S(\tilde{A})$ обладает свойством отделимости [3–4]. Это свойство, в частности, выражается в том, что если $S(A)$ представить в виде суммы

$$S^- + S^+,$$

где S^- находится в левой замкнутой полуплоскости, а S^+ в правой, то этим же частям спектра отвечают инвариантные относительно оператора $\tilde{A}$ подпространства H^- и H^+ , соответственно.

Теорема 3. Пусть $\tilde{A}$ в (5) удовлетворяет условию (A). Тогда, если $V_0 \in H^-$, то задача (5)–(6) поставлена корректно; решение возрастает не быстрее экспоненты с минимальным типом.

Доказательство следует из явного вида решения задачи (5)–(6):

$$V(t) = e^{t\tilde{A}}V_0 + \int_0^t e^{(t-\theta)\tilde{A}}g(\theta)d\theta \quad (7)$$

и из леммы, приведенной в статье [5].

Мы говорим, что оператор $\tilde{A}$ обладает I -свойством (и пишем $\tilde{A} \in I$), если

$$\inf S(Re \tilde{A}) = \inf Re S(\tilde{A}). \quad (J)$$

Можно показать, что существуют операторы, не обладающие I -свойством. Покажем, что существует оператор с I -свойством.

Рассмотрим оператор $A = T_0 + T$, где — несамосопряженный оператор, T_0 — диагональная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \alpha & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad Re A = \begin{pmatrix} Re \lambda_1 & \frac{\sigma}{2} & & \\ & \frac{\sigma}{2} & & \\ & & Re \lambda_3 & 0 \\ 0 & & & Re \lambda_4 \end{pmatrix},$$

$$Re \lambda_4 \leq Re \lambda_3 \leq Re \lambda_2 \leq Re \lambda_1,$$

$$\det(\tilde{\lambda}E - B) = \left[(\tilde{\lambda} - Re \lambda_1)(\tilde{\lambda} - Re \lambda_2) - \frac{\alpha^2}{4} \right] \left[(\tilde{\lambda} - Re \lambda_3)(\tilde{\lambda} - Re \lambda_4) \right] = 0.$$

$\tilde{\lambda}_3 = Re \lambda_2$, $\tilde{\lambda}_4 = Re \lambda_1$, а $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ находятся из уравнения

$$\tilde{\lambda}^2 - b\tilde{\lambda} + C(\epsilon) = 0,$$

где $b = Re \lambda_1 + Re \lambda_2$, $C(\epsilon) = Re \lambda_1 Re \lambda_2 - \frac{\epsilon^2}{4}$.

Из этого уравнения находим, что $\tilde{\lambda}_1(\sigma), \tilde{\lambda}_2(\sigma)$ есть непрерывные функции от σ , причем при $\sigma = 0$ имеем

$$\tilde{\lambda}_{1,2}(0) = Re \lambda_{1,2}.$$

Так как по условию $Re \lambda_4 < \tilde{\lambda}_1(0), \tilde{\lambda}_2(0)$, то это соотношение сохраняется и для некоторой окрестности $U(0)$ нуля, т. е. существует $\sigma = \sigma_0$ такое, что

$$\tilde{\lambda}_1(\sigma_0), \tilde{\lambda}_2(\sigma_0) > Re \lambda_4. \quad (8')$$

Следовательно, если взять только те значения σ , при которых сохраняется условие (8'), то этим построение искомого оператора A с требуемым свойством завершается.

Таким образом, собственные значения оператора B есть

$$Re \lambda_4, Re \lambda_3, \tilde{\lambda}_1(\sigma_0), \tilde{\lambda}_2(\sigma_0)$$

и для них

$$Re \lambda_4 = \inf \{ Re \lambda_4, Re \lambda_3, \tilde{\lambda}_2(\sigma_0), \tilde{\lambda}_1(\sigma_0) \} = \inf Re \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \},$$

т. е. оператор A удовлетворяет условию (I).

Теорема 4. Пусть оператор $\tilde{A}$ в (5) ограниченный, $\tilde{A} \in B$ и $\tilde{A} \in I$. Тогда для того, чтобы задача (5)–(6) была корректно поставлена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$V_0^+ + \int_0^\infty e^{-\theta \tilde{A}} g(\theta) d\theta = 0, \quad (8)$$

где V_0^+ и g^+ — соответственно, компоненты векторов V_0 и g в H^+ .

В случае задачи (3)–(4) соответствующее условие (8) является только необходимым для корректности постановки задачи (1)–(2).

Доказательство теоремы. Так как операторы $\tilde{A}$ и $e^{t\tilde{A}}$ инвариантны в H^- и H^+ , то можно писать

$$V^-(t) = e^{t\tilde{A}}V_0 + \int_0^t e^{(t-\theta)\tilde{A}}g^+(\theta)d\theta = 0, \quad (9)$$

$$V^+(t) = e^{t\tilde{A}}V_0^+ + \int_0^t e^{(t-\theta)\tilde{A}}g^+(\theta)d\theta. \quad (10)$$

Если $V_0 \in H^-$, то в силу соотношения (*) и ограничения на $g(t)$ имеем

$$\|V(t)\| \leq M(t) C e^{ct},$$

где $M(t)$ имеет при $t \rightarrow \infty$ рост не выше некоторой степени t .

Пусть теперь $Re S(\tilde{A}) > 0$. Запишем выражение $V^+(t)$ из (10) в виде

$$V^+(t) = e^{t\tilde{A}} \left[V_0^+ + \int_0^t e^{-\theta \tilde{A}} g^+(\theta) d\theta \right] = e^{t\tilde{A}} \left[V_0^+ + \int_0^\infty e^{-\theta \tilde{A}} g^+(\theta) d\theta - \int_t^\infty e^{-\theta \tilde{A}} g^+(\theta) d\theta \right]. \quad (11)$$

Обозначим

$$I_t = \int_t^\infty e^{(t-\theta)\tilde{A}} g^+(\theta) d\theta. \quad (12)$$

Показано, что этот интеграл сходится. Запишем выражение $v^+(t)$ из (11) через J_0 и J_1 в следующем виде:

$$v^+(t) = e^{t\tilde{A}} [\tau_0^+ + J_0] - J_1. \quad (13)$$

Легко проверить, что J_1 ограничен по t . Поэтому возрастание $v^+(t)$ экспоненциально по t может быть лишь за счет первого слагаемого в (13). Следовательно, при $\tau_0^+ + J_0 = 0$ решение $v^+(t)$ ограничено. Но если $J_0 + \tau_0^+ \neq 0$, то $v^+(t)$ и, следовательно, все решение $v(t)$ задачи (5)–(6) возрастает экспоненциально (это следует, если принять во внимание лемму из [5]), это означает, что выполнение условия (8) есть необходимое условие возрастания решения $v^+(t)$ не быстрее $C_e e^{st}$ при $t \rightarrow \infty$. С другой стороны, при условии (7) решение задачи (5)–(6), возрастающее не быстрее $C_e e^{st}$, представляется в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= v^-(t) + v^+(t) = e^{t\tilde{A}} \left[\tau_0^- - \int_0^t e^{-\theta\tilde{A}} g^-(\theta) d\theta \right] - J_1 = \\ &= e^{t\tilde{A}} \left[\tau_0^- + \int_0^t e^{-\theta\tilde{A}} g^-(\theta) d\theta \right] - \int_0^\infty e^{(t-\theta)\tilde{A}} g^+(\theta) d\theta = \\ &= e^{t\tilde{A}} \left[v^- + \int_0^t e^{-\theta\tilde{A}} g^-(\theta) d\theta - \int_0^\infty e^{-\theta\tilde{A}} g^+(\theta) d\theta \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, решение $v(t)$ однозначно определяется составляющей τ_0^- начального вектора τ_0 , которую можно задать в H^- произвольным образом, тогда другая компонента τ_0^+ для корректности постановки данной задачи должна определяться из условия (8) по $g(t)$.

Замечание. Пусть S —оператор умножения на независимое переменное— в гильбертовом пространстве $L_2(0, 1)$. P —оператор ортогонального проектирования на единичный вектор $e(\cdot) \equiv 1$ в $L_2(0, 1)$. Если рассматривать оператор $\tilde{A} = S + \frac{i}{\pi} P$, то можно проверить, что

- 1°. $\tilde{A}$ —ограниченный, несамосопряженный,
- 2°. $\tilde{A} \in B$,
- 3°. $\tilde{A} \in I$.

Таким образом, класс операторов, приведенных в наших теоремах достаточно широк.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дикополов Г. В. и Шилов Г. Е. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 24, 1960.
2. Дикополов Г. В. и Шилов Г. Е. „Сиб. матем. ж. АН СССР“, т. I, 1966, № 1.
3. Любич Ю. И. и Мацаев В. И. „ДАН СССР“, т. 131, 1960, № 1.
4. Любич Ю. И. и Мацаев В. И. „Сб. „Об операторах с отделимым спектром“, т. 56, № 4, 1962.
5. Сулейманов Н. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1963, № 1.
6. Сулейманов Н. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-тех. и матем. наук“, 1960, № 4.

Н. М. Сулейманов

Сағ тәрәfli дифференциал оператор тәнликләр үчүн
жарымфәзада коррект сәrhәд мәсәләләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гејри-бирчинс еволјусион тәнликләр үчүн $0 \leq t < \infty$ жарымфәзасында коррект сәrhәд мәсәләләри тәдгиг едилмишдир.

Мүәjjән едилмишдир ки, (A) шәртини өдәjән операторлар синфи үчүн башланғыч вектор һәммин операторларын спектрләринин сол жарыммүстәвидә jерләшән һиссәләринә уjғун инвариант алт фәзалара дахил олдугда, гоjулан сәrhәд мәсәләси коррект олур. Әкс һалда ја мәсәләнин һәлли олмур, јахуд $t \rightarrow \infty$ олдугда һәлл экспоненциал сурәтдә артыр.

И. Г. МЕХТИЕВ

О РЯДАХ КРАЗИПОЛИНОМОВ

Класс целых функций, растущих не быстрее, чем функция порядка ρ и типа меньшего, чем b , будем обозначать через $[\rho, b)$, а через $[b, \rho]$ — класс целых функций, растущих не быстрее, чем функция порядка ρ и типа b . Предположим, что $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел: $|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, $\{p_n\}$ — последовательность целых положительных чисел, m — наименьшее целое

число, превосходящее ρ , $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$.

Г. П. Лапин [3] доказал следующую теорему:

Для того, чтобы при любой системе чисел $\{a_{niq}\}$ ($i=1, 2, \dots, p_n$, $q=0, 1, 2, \dots, m-1$), удовлетворяющей условию

1° $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} \ln b_n < \infty$, где $b_n = \max_{i, q} \left| \frac{a_{niq}}{(i-1)!} \right|$, существовала хотя бы одна целая функция $\omega(z) \in [\rho, \infty)$ со свойством

2° $\omega^{(i-1)}(\varepsilon^q \lambda_n) = a_{niq}$ ($n=1, 2, \dots, p_n$; $q=0, 1, 2, \dots, m-1$) необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{\lambda_n\}$ и $\{p_n\}$ удовлетворяли условиям:

$$3^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{|\lambda_n|^p} = \beta < \infty \text{ и}$$

$$4^\circ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} \ln \max_{j!} \left| \frac{\gamma_{nj}}{j!} \right| = \delta < \infty, \text{ где}$$

$$\gamma_{nj} = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z - \lambda_n)^{p_n}}{F(z)} \right]_{z=\lambda_n}; \quad F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m} \right)^{p_n}.$$

Доказывая достаточность условий, Г. П. Лапин строит целую функцию, удовлетворяющую условию 2° и имеющую порядок, не превышающий $\tau + \gamma^+$, где $\tau = \pi\beta$, $\gamma^+ = \max(\gamma, 0)$,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} \ln M_n; \quad M_n = \max_{l} \left| \frac{\gamma_{n, p_n-i-l+1}}{(p_n-i-l)!} \cdot \frac{a_{n, l+1, q}}{l!} \right| \quad (1)$$

($i=1, 2, \dots, p_n$; $l=0, 1, 2, \dots, p_n-i$, $q=0, 1, 2, \dots, m-1$).

Оценка построенной Г. П. Лапиным функции основана на оценке роста функций

$$\frac{F(z)}{(z - \lambda_n)^i}, \text{ где } F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m} \right)^{p_n} \quad (i=1, 2, \dots, p_n).$$

В рассматриваемых в этой статье вопросах нас будет интересовать только тот случай, когда $\rho=1$ ($m=2$), λ_n — действительные положительные числа:

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, а p_n — целые положительные числа. В дальнейшем будем обозначать

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right)^{p_k}.$$

Оценку роста функций $\frac{L(z)}{(z - \lambda_n)^i}$ ($i=1, 2, \dots, p_n$) можно уточнить, пользуясь результатами А. А. Гольдберга [5].

Если α и β — нижняя и верхняя плотности последовательности $\{\lambda_n\}$, каждому члену которой приписывается кратность p_n ,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{\lambda_n}; \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{\lambda_n} < \infty, \quad \text{то из}$$

результата А. А. Гольдберга можно получить, что индикатриса $h(\theta)$ функции $L(z)$ удовлетворяет неравенству $h(0) \leq H(\alpha, \beta)$, где

$$H(\alpha, \beta) = \begin{cases} -(\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - (\beta - \alpha) \ln(\beta - \alpha) + 2\beta \ln \beta + \beta \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} & \text{при } \beta \geq \alpha \sqrt{2} \\ 2[\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha - (\beta - \alpha) \ln(\beta - \alpha)] & \text{при } \beta \leq \alpha \sqrt{2} \end{cases}$$

и $h(0) \leq \pi\beta \sin \theta \quad \text{при } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2)$

Отсюда, исходя из свойства тригонометрической выпуклости, легко получим, что при $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ (см. [7])

$$h(\theta) \leq \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) H(\alpha, \beta) + \pi\beta \sin \theta. \quad (3)$$

Так как функция $L(z)$ четная, то тем самым имеем оценку $h(\theta)$ при любом θ .

Докажем следующее утверждение. Если $h(\theta)$ — индикатриса функции $L(z)$, то для любого $\varepsilon > 0$ и при $|z| = r > r_0(\varepsilon)$

$$\left| \frac{L(re^{i\theta})}{(re^{i\theta} - \lambda_n)^i} \right| < e^{[h(\theta) + \varepsilon]r} \quad \text{для всех } n=1, 2, \dots, i \leq p_n. \quad (4)$$

Доказательство. Для всех $|re^{i\theta} - \lambda_n| \geq 1$ неравенство (4) очевидно, поэтому оно справедливо для всякого $\theta \neq 0, \pi$, а из свойства непрерывности индикатрисы $h(\theta)$ получим, что неравенство (4) верно

и при $\theta = 0, \pi$ см. [7]. Г. П. Лапин при построении функции $\omega(z)$ класса $[p, \tau + \gamma^+]$ пользуется грубой оценкой:

$$\left| \frac{L(z)}{(z - \lambda_n)^i} \right| < e^{[\pi\beta + \varepsilon]r}, \text{ где } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n p_k}{\lambda_n} = \beta < \infty$$

($z = re^{i\theta}$, $\varepsilon > 0$ и r достаточно велико). Поэтому из доказанного выше следует, что в случае $p = 1$ ($m = 2$) справедлива.

Теорема 1. Для любых заданных последовательностей положительных чисел $\{\lambda_n\}$, натуральных чисел $\{p_n\}$ и комплексных чисел $\{a_{n,i,q}\}$ ($n = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots, p_n$, $q = 0, 1$) удовлетворяющих условиям 1°, 3°, 4° теоремы Г. П. Лапина при $p = 1$, можно построить целую функцию экспоненциального типа $\omega(z)$, для которой

$$\omega^{(i-1)}[(-1)^q \lambda_n] = a_{niq}, \quad (5)$$

причем индикатриса $h^*(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$h^*(\theta) \leq h(\theta) + \gamma^+, \quad (6)$$

где $h(\theta)$ — индикатриса функций $L(z)$, а γ^+ определена равенствами (1).

Пусть имеется ряд квазиполиномов

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) e^{-\lambda_n z}, \quad (7)$$

где $p_n(z) = \sum_{j=0}^{m_n} c_{nj} z^j$, m_n — натуральные числа или нули, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Используя метод доказательства Г. Л. Лунца [1],

покажем, что для ряда квазиполиномов (7) имеет место теорема Крамера:

Теорема 2. Если G — область равномерной сходимости ряда квазиполиномов (7), G^* — область голоморфности функции $f(z)$, $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа, J — область, внутри которой находится сопряженная диаграмма функции $\varphi(z)$, то сумма ряда

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{c_{10} \varphi(\lambda_n) + c_{n1} [z \varphi(\lambda_n) - \varphi'(\lambda_n)] + c_{n2} [z^2 \varphi(\lambda_n) - 2z \varphi'(\lambda_n) + \varphi''(\lambda_n)] + \dots + c_{n,m_n} [z^{m_n} \varphi(\lambda_n) - (1^{m_n}) z^{m_n-1} \varphi'(\lambda_n) + \dots + (-1)^{m_n} \varphi^{(m_n)}(\lambda_n)]\} e^{-\lambda_n z} \quad (8)$$

сходится равномерно во всякой области Δ такой, что $\Delta \cap J \subset G$ ($\Delta \cap J$ — множество точек вида $z_1 - z_2$, где $z_1 \in G$; $z_2 \in J$), и голоморфна во всякой области Δ^* такой, что $\Delta^* \cap J \subset G^*$.

Замечание. Множество точек z_1 , для которых $z_2 \in J$, а $z_1 - z_2 \in G^*$, может быть несвязным, поэтому может иметься несколько областей Δ^* , о которых идет речь в теореме. Также обстоит дело и с областями Δ .

Доказательство. Известно, что функция $\varphi(z)$ имеет следующее представление: $f(z) = \int_C e^{zu} \Phi(u) du$, где $\Phi(u)$ — голоморфная функция вне области J и C — некоторая кривая, содержащая область J . Покажем, что если $z \in G$ и $u \in C$, то

$$F(z) = \int_C f(z - n) \Phi(u) du. \quad (9)$$

Действительно, если $z \in C$ и $u \in C$, то ряд $f(z - u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z - u) e^{-\lambda_n(z-u)}$ сходится равномерно на C . Умножая последнее равенство на $\Phi(u)$, интегрируя почленно по C и учитывая, что

$$\int_C u^k e^{\lambda_n u} \Phi(u) du = \varphi^{(k)}(\lambda_n) \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

легко получим равенство (9). Теперь покажем, что ряд (8) сходится равномерно в любой конечной части области Δ . Так как ряд $f(z - u) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z - u) e^{-\lambda_n(z-u)}$ сходится равномерно для любого $z \in \Delta$ и $u \in C$, то для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, то при $z \in \Delta$, $u \in C$, $n > N(\varepsilon)$ и для всех k

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+k} p_j(z - u) e^{-\lambda_j(z-u)} \right| < \varepsilon.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_C p_n(z - u) e^{-\lambda_n(z-u)} \Phi(u) du$$

сходится равномерно в области Δ . Действительно, при $\varepsilon > 0$, $z \in \Delta$, $u \in C$, $n > N(\varepsilon)$ и любом k имеем:

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+k} \int_C p_j(z - u) e^{-\lambda_j(z-u)} \Phi(u) du \right| \leq \int_C \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} p_j(z - u) e^{-\lambda_j(z-u)} \right| \times \\ \times |\Phi(u)| |du| \leq \varepsilon \int_C |\Phi(u)| |du| \leq \varepsilon \cdot M \cdot S,$$

где $M = \max_C |\Phi(u)|$, S — длина кривой C . Из равенства (9) следует, что если G^* — область голоморфности функции $f(z)$, то $F(z)$ голоморфна в области Δ^* такой, что $\Delta^* \cap J \subset G^*$. Теорема доказана.

Предположим, что для последовательностей $\{\lambda_n\}$, $\{p_n\}$ ($p_n = m_n + 1$) и для системы чисел $\{a_{niq}\}$ ($q = 0, 1$), где $\begin{cases} a_{ni1} = 0; \\ a_{nio} = \end{cases}$

$$= \frac{(-1)^{i-1} c_{n,m_n-i+1}}{\binom{m_n}{i-1}}, \text{ выполнены условия теоремы Г. П. Лапина 1°, 3°, 4°, т. е. пусть}$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln b_n < \infty, \text{ где } b_n = \max_i \frac{c_{n, m_n - i + 1}}{\binom{m_n}{i-1} (i-1)!}, \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (m_k + 1)}{\lambda_n} = \beta < \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (m_k + 1)}{\lambda_n} = \alpha \text{ и} \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \max_j \left| \frac{\gamma_{nj}}{j!} \right| = \delta < \infty, \text{ где} \\ \gamma_{nj} = \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} \left[\frac{(z - \lambda_n)^{m_n - 1}}{L(z)} \right]_{z=\lambda_n}; L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right)^{m_n + 1}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Тогда по теореме 1 можно построить целую функцию $\varphi(z)$ экспоненциального типа, для которой

$$\varphi^{(i-1)}(\lambda_n) = \frac{(-1)^{i-1} c_{n, m_n - i + 1}}{\binom{m_n}{i-1}} (n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots, m_n + 1), \quad (11)$$

причем ее индикатриса $h_{\varphi}(\theta)$ будет удовлетворять неравенству

$$\left. \begin{aligned} h_{\varphi}(\theta) \leq h(\theta) + \gamma^+, \text{ где } \gamma^+ = \max(\gamma, 0), \\ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln M_n = \gamma; M_n = \max_l \left| \frac{\gamma_{n, m_n - l + 1}}{(m_n - l + 1)!} \frac{c_{n, m_n - l}}{\binom{m_n}{l}} \right| \\ (i = 1, 2, \dots, m_n + 1, l = 0, 1, 2, \dots, m_n + 1 - i), \end{aligned} \right\} (12)$$

а $h(\theta)$ оценивается с помощью неравенства (3). Если пользоваться только верхней плотностью β , то в оценке (3) для $h(\theta)$ следует положить $\alpha = 0$, так как $H(\alpha, \beta)$ принимает при заданном β наибольшее значение при $\alpha = 0$.

Рассмотрим ряд Тейлора—Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} z^{m_n} e^{-\lambda_n z}$, имеющий непустую область абсолютной сходимости G и область голоморфности G^* . Применяя теорему Крамера к ряду Тейлора—Дирихле и учитывая условие (11), получим;

Теорема 3. Ряд квазиполиномов (7) сходится равномерно в области Δ такой, что $\Delta \subset G$ и его сумма голоморфна в области Δ^* такой, что $\Delta^* \subset G^*$.

Предположим, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (m_k + 1)}{\lambda_n} = \beta < \infty$. Очевидно, что можно построить целую функцию экспоненциального типа, для которой

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_n) = \varphi'(\lambda_n) = \dots = \varphi^{(m_n - 1)}(\lambda_n) = 0, \\ \varphi^{(m_n)}(\lambda_n) = (-1)^{m_n}, \end{aligned} \quad (13)$$

причем индикатриса $h_{\varphi}(\theta)$ удовлетворяет неравенству $h_{\varphi}(\theta) \leq h(\theta) + \gamma^+$, где $\gamma^+ = \max(\gamma, 0)$ и, как показал Г. Л. Лунц [2], в этом случае $\gamma = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L^{(m_n + 1)}(\lambda_n)} \right|$.

Из теоремы 1 следует, что если G^* —область голоморфности функции $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) e^{-\lambda_n z}$; $p_n(z) = \sum_{j=0}^{m_n} c_{nj} z^j$, $\varphi(z)$ —целая функция экспоненциального типа, то функция

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ c_{10} \varphi(\lambda_n) + c_{n1} [z \varphi(\lambda_n) - \varphi'(\lambda_n)] + \\ + c_{n2} [z^2 \varphi(\lambda_n) - 2z \varphi'(\lambda_n) + \varphi''(\lambda_n)] + \dots + \\ + c_{n, m_n} [z^{m_n} \varphi(\lambda_n) - \binom{m_n}{1} z^{m_n - 1} \varphi'(\lambda_n) + \dots + (-1)^{m_n} \varphi^{(m_n)}(\lambda_n)] \} e^{-\lambda_n z} \end{aligned}$$

голоморфна в области Δ^* такой, что $\Delta^* \subset G^*$.

Из условия (13) получим, что

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n, m_n} e^{-\lambda_n z}. \quad (14)$$

А. Ф. Леонтьев [4] доказал, что если

$$D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n}, \delta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{L_1(\lambda_n)} \right|, \text{ где } L_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2} \right),$$

то в замкнутом круге радиуса $\pi D + \delta^+$, где $\delta^+ = \max(\delta, 0)$ с центром в любой точке оси сходимости ряда Дирихле (14) имеется по крайней мере одна особая точка функции $F(z)$. Таким образом, получаем теорему более точную, чем теорема, доказанная Г. Л. Лунцем [2]:

Теорема 4. Если z_0 —точка на оси сходимости ряда Дирихле (14), то в области

$$|z - z_0| < \pi D + \delta^+ + \gamma^+ + h(\theta) \quad (z = re^{i\theta})$$

имеется по крайней мере одна особая точка для каждой из функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n0} + c_{n1} z + \dots + c_{n, m_n - 1} z^{m_n - 1} + c_{n, m_n}) z^{m_n} e^{-\lambda_n z}$$

(коэффициенты c_{nj} при $j < m_n$ произвольны).

Доказанная теорема связывает таким образом распределение особых точек функций, определяемых рядами квазиполиномов с некоторым рядом Дирихле, который строится с помощью коэффициентов одних только главных членов этих квазиполиномов (то есть коэффициентов при $z^{m_n} e^{-\lambda_n z}$). Теперь предположим, что в ряде квазиполиномов (7) все старшие коэффициенты $c_{n, m_n} > 0$, тогда для суммы ряда (14), как известно [6], действительная точка на границе полуплоскости сходимости является особой точкой. Таким образом, имеет место следующая теорема типа Ландау—Прингсхайма для рядов квазиполиномов (7).

Теорема 5. Если в ряде квазиполиномов (7) все старшие коэффициенты $c_{n, m_n} > 0$, z_0 —действительная точка на оси сходи-

мости ряда Дирихле (14), то в области

$$|z - z_0| < |\gamma^+ + h(0)| e^{i0} \quad (z = re^{i0})$$

имеется по крайней мере одна особая точка для каждой из функций

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n0} + c_{n1} z + \dots + c_{n, m_n-1} z^{m_n-1} + c_{n, m_n} z^{m_n}) e^{-\lambda_n z}$$

(коэффициенты c_{nj} при $j < m_n$ произвольны).

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Г. Л. Лунцу за постановку задачи и оказанную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунц Г. Л. "Изв. АН Арм. ССР, физ.-матем. серия", т. XIV, 1961, № 5.
2. Лунц Г. Л. "ДАН СССР", т. 154, 1964, № 1.
3. Лапин Г. П. Матем. сб., т. 29 (71), вып. 3, 1951.
4. Леонтьев А. Ф. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.
5. Гольдберг А. А. Матем. сб., т. 66 (103), 3, 19.
6. Bernstein V. Lecons sur les progres recents de la theorie des series de Dirichlet. Paris, 1933.
7. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 19

И. Г. Мехди́ев

Квазиполиномлар сырасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) e^{-\lambda_n z}$, $p_n(z) = \sum_{j=0}^{m_n} c_{nj} z^j$ сырасынын жыгылмасы вә $f(z)$ функцијасынын мәхсуси нөгтәләринин јерләшмәси һаггында бир сыра теоремләр исбат олуңмушдур.

А. А. БАБАЕВА

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работах [1—5] и других исследованы смешанные задачи с разрывными коэффициентами. Краевая задача для вырождающихся гиперболических уравнений рассмотрена в работах [6, 7] и др. Целью настоящей работы является доказательство существования и единственности смешанной задачи для гиперболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами вырождающихся на начальной плоскости.

Рассмотрим уравнение вида

$$\varphi(t) \frac{\partial U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} \right) + b(x, t) \frac{\partial U}{\partial x} + c(x, t) U + f(x, t), \quad (1)$$

где коэффициент $a(x, t)$ непрерывен в прямоугольнике

$$R = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}; \quad b(x, t), c(x, t), f(x, t)$$

могут терпеть разрыв первого рода $x = l_1$, $0 < l_1 < l$. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} P_1 t^\alpha &\leq \varphi(t) \leq P_2 t^\alpha, \\ P_3 t^{\alpha-1} &\leq \varphi'(t) \leq P_4 t^{\alpha-1} \\ (0 &\leq \alpha < 1, \varphi(0) = 0), \end{aligned} \quad (*)$$

где P_1, P_2, P_3, P_4 — некоторые положительные постоянные.

Постановка задачи: найти функцию $U(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в $R_1 = \{0 < x < l_1, 0 < t < T\}$, $R^2 = \{l_1 < x < l, 0 < t < T\}$, начальным условиям:

$$U \Big|_{t=0} = \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

краевым условиям:

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения:

$$U|_{x=l_1-0} = U|_{x=l_1+0}, \quad (4)$$

$$K_1(x) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=l_1-0} - K_2(x) \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=l_1+0} + K_3 U|_{x=l_1} = 0 \text{ на линии } x = l_1.$$

Здесь K_3 — положительная постоянная; $K_1(x)$, $K_2(x)$ — некоторые заданные гладкие положительные функции в $[0, l_1]$, $[l_1, l]$. Такое решение задачи (1)–(4) будем называть обычным.

Через $\dot{\mathcal{O}}$ обозначим замыкание по норме $W_2^{(1)}(R)$ совокупности всех непрерывных в R и непрерывно дифференцируемых в R_1 и R_2 функций, равных нулю вблизи границы R , исключая верхнее основание ($t = T$), и принимающих в среднем нулевые начальные условия.

Обобщенным решением задачи (1)–(4) назовем функцию $U(x, t) \in \dot{\mathcal{O}}$, удовлетворяющую интегральному тождеству:

$$\int_0^T \int_0^l \left[\varphi(t) K(x) \frac{\partial U^2}{\partial t^2} \omega(x, t) + a K(x) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + a \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} \omega(x, t) - b K(x) \frac{\partial U}{\partial x} \omega(x, t) - K(x) c U \omega(x, t) - K(x) f(x, t) \right] dx dt + \int_0^T K_3 a(l_1, t) U(l_1, t) \omega(l_1, t) dt = 0 \quad (5)$$

для любой функции $\omega(x, t) \in \dot{\mathcal{O}}$, а функция $K(x)$ определяется следующим образом:

$$K(x) = \begin{cases} K_1(x) & \text{при } 0 < x < l_1, \\ K_2(x) & \text{при } l_1 < x < l. \end{cases}$$

Легко проверить, что обычное решение задачи (1)–(4) является и обобщенным.

Теорема Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям:

1) $\varphi(t)$ — непрерывная функция вместе со своей производной и удовлетворяет условию (*);

2) a, b, c, f имеют непрерывные производные:

$$\frac{\partial a}{\partial t}, \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial c}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \text{ в } R_1 \text{ и } R_2;$$

3) $f(x, 0) = f'_i(x, 0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial t}$ непрерывна в R_1, R_2 .

Тогда, если $0 < \alpha < 1$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

Доказательство. Для доказательства существования обобщенного решения применим аналог метода Галеркина. Пусть $v_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) — линейно независимая система функций, удовлетворяющая условию (4), полная с весом $K(x)$ в метрике $W_2^{(1)}[(0, l)]$. Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) v_i(x).$$

Коэффициенты $C_i(t)$ определяем следующим образом: после умножения (1) на функцию $K(x)$, подстановки в полученное уравнение вместо $U(x, t)$ функций $U_n(x, t)$ и скалярного умножения обеих частей на $v_s(x)$ ($s = 1, 2, \dots, n$) левая и правая части совпадают для всех $0 \leq t \leq T$.

$$\sum_{i=1}^n \varphi(t) C_i'(t) \int_0^l K(x) v_i(x) v_s(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) K(x) \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \times \\ \times v_s dx + \sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l K(x) b(x, t) \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s dx + \\ + \sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l c(x, t) K(x) v_i(x) v_s(x) dx + \int_0^l f(x, t) K(x) v_s dx - \\ - \sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l \frac{\partial K}{\partial x} (a, x) \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s(x) dx \quad (s = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Преобразуем первый член левой части последнего равенства, учитывая условие сопряжения (4):

$$\sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(a K \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) v_s dx = \sum_{i=1}^n C_i(t) \left[\int_0^{l_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(K a \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) v_s dx + \right. \\ \left. + \int_{l_1}^l \frac{\partial}{\partial x} \left(K a \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) v_s dx \right] = \sum_{i=1}^n C_i(t) \left[K a \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s \Big|_0^{l_1=0} - \right. \\ \left. - \int_0^{l_1} K a \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_s}{\partial x} dx + K a \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s \Big|_{l_1+0}^{l_1} - \int_{l_1}^l K a \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_s}{\partial x} dx \right] = \\ = - \sum_{i=1}^n C_i(t) K_3 a v_i v_s \Big|_{x=l_1} - \sum_{i=1}^n C_i(t) \int_0^l K(x) a \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_s}{\partial x} dx.$$

Тогда (6) перепишется:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(t) C_i \int_0^l K v_i v_s dx + \sum_{i=1}^n C_i \int_0^l K a \frac{\partial v_i}{\partial x} \frac{\partial v_s}{\partial x} dx + \\ + \sum_{i=1}^n C_i K_3 a v_i v_s \Big|_{x=l_1} = \sum_{i=1}^n C_i \int_0^l b K \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s dx + \sum_{i=1}^n C_i \int_0^l c K v_i v_s dx + \\ + \int_0^l f K v_s dx - \sum_{i=1}^n C_i \int_0^l \frac{\partial K}{\partial x} a \frac{\partial v_i}{\partial x} v_s dx \quad (s = \overline{1, n}). \quad (7)$$

Таким образом получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Начальные значения $C_i(0)$, $C_i'(0)$ возьмем равными нулю в соответствии с начальными данными смешанной задачи. Однозначная разрешимость системы (7) с однородными начальными данными следует из результатов работы В. А. Чечика [8]. Следовательно, приближенное решение $U(x, t)$ определяется единственным образом.

Теперь докажем, что $U_n(x, t)$ равномерно относительно сходится с некоторой функцией $U(x, t)$, которая является обобщенным решением. Для этого приведем некоторые интегральные оценки построен-

ного приближенного решения. Умножим обе части равенства (7) на $C_s(t) \frac{|\ln t|}{\varphi(t)}$, просуммируем по s от 1 до n и проинтегрируем по t от 0 до некоторого $T_1 \leq T$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} \int_0^l K \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \frac{\partial U_n}{\partial t} |\ln t| dx dt + \int_0^{T_1} \int_0^l a K \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial^2 U_n}{\partial x \partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^{T_1} a K_3 \frac{\partial U_n}{\partial t} U_n \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{x=l_1} dt = \int_0^{T_1} \int_0^l K b \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^l K c \frac{\partial U_n}{\partial t} U_n \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^{T_1} \int_0^l K f \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt - \\ & - \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{\partial K}{\partial x} a \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя по частям слагаемые левой части по t , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{T_1} K \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 |\ln t| \Big|_{t=T_1} dx + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} K a \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{t=T_1} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l K \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l K a \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi' \cdot |\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} a K_3 U_n^2 \frac{\varphi' \cdot |\ln t|}{\varphi^2(t)} \Big|_{x=l_1} dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} a K_3 U_n^2 \frac{1}{t \cdot \varphi(t)} \Big|_{x=l_1} dt + \\ & + \frac{1}{2} a K_3 U_n^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{x=l_1, t=T_1} = \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l K \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^l K b \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \int_0^{T_1} \int_0^l K c \frac{\partial U_n}{\partial t} U_n \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^l K f \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \frac{\partial a}{\partial t} K_3 U_n \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{x=l_1} dt - \\ & - \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{\partial K}{\partial x} a \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем все постоянные, не зависящие от n , обозначим через M_1 .

Оценим правую часть последнего соотношения, используя неравенство Буняковского и алгебраическое неравенство

$$|pq| \leq \frac{\varepsilon}{2} p^2 + \frac{1}{2\varepsilon} q^2, \varepsilon > 0$$

для любых p и q .

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_1} \int_0^l K \frac{\partial a}{\partial t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt \right| \leq M_1 \int_0^{T_1} \int_0^l \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt; \\ & \left| \int_0^{T_1} \int_0^l \left(bK - \frac{\partial K}{\partial x} a \right) \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{\partial U_n}{\partial x} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt \right| \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \varepsilon M_1 \int_0^{T_1} \int_0^l \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{t \cdot (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} dx dt; \\ & \left| \int_0^{T_1} \int_0^l cK \frac{\partial U_n}{\partial t} U_n \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\ & + \frac{M_1}{2\varepsilon} \int_0^{T_1} \int_0^l U_n^2 \frac{t (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая

$$U_n^2 = \left(\int_0^t \frac{\partial U_n}{\partial t} dt \right)^2 \leq \int_0^t t dt \int_0^t \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dt = \frac{t^2}{2} \int_0^t \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dt,$$

легко получить оценку

$$\int_0^{T_1} \int_0^l U_n^2 \frac{t (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{t^3 (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} \left(\int_0^t \frac{1}{\tau} \left(\frac{\partial U_n}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \right) dx dt.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{T_1} \int_0^l K f \frac{\partial U_n}{\partial t} \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dx dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 dx dt + \\ & + \frac{M_1}{2\varepsilon} \int_0^{T_1} \int_0^l f^2 \frac{t (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} dx dt. \\ & \left| \frac{1}{2} \int_0^{T_1} \frac{\partial a}{\partial t} K_3 U_n^2 \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} \Big|_{x=l_1} dt \right| \leq \frac{M_1}{2} \int_0^{T_1} U_n^2(l_1, t) \frac{|\ln t|}{\varphi(t)} dt. \end{aligned}$$

Подставляя эти оценки в (9), получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} \int_0^l \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U_n}{\partial t} \right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{3 \cdot \varepsilon}{2} - \frac{M}{2\varepsilon} \int_0^t \frac{t^3 (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} \right] dx dt + \\ & + \int_0^{T_1} \int_0^l \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \left[\frac{\lambda}{2t \cdot \varphi(t)} - \frac{M |\ln t|}{2\varphi(t)} - \frac{M t \cdot (\ln t)^2}{2\varepsilon \cdot \varphi^2(t)} \right] dx dt + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_0^l \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right)^2 \frac{\varphi \cdot |\ln t|}{\varphi^2(t)} dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^{T_1} U_n^2(l, t) \frac{\varphi' |\ln t|}{\varphi^2(t)} dt +$$

$$+ \int_0^{T_1} U_n^2(l, t) \left[\frac{\lambda}{2t\varphi(t)} - \frac{M |\ln t|}{2\varphi(t)} \right] dt \leq \frac{M}{2\varepsilon} \int_0^l \int_0^{T_1} f^2 \frac{t (\ln t)^2}{\varphi^2(t)} dx dt.$$

Подбираем λ достаточно большим, ε и T_1 так, чтобы квадратные скобки были положительны. Получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) dx dt &< M_2, \\ \int_0^l \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} \right) dx dt &< M_2, \\ \int_0^{T_1} U_n^2(l, t) dt &< M_2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Далее продифференцируем (7) по t , умножим на $C_s \frac{|\ln t|}{\varphi(t)}$, суммируем по s от 1 до n , интегрируем по t от 0 до T_1 и сделаем те же выкладки, что и при получении оценок (10). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \right)^2 dx dt &< M_3, \\ \int_0^l \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial t \partial x} \right)^2 dx dt &< M_3, \\ \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial U_n(l, t)}{\partial t} \right)^2 dt &< M_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из полученных оценок (10) и (11) следует, что $\{U_n\}$, $\left\{\frac{\partial U_n}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial U_n}{\partial t}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 U_n}{\partial t \partial x}\right\}$ ограничены по норме. Тогда по теореме о слабой компактности подпоследовательности U_{n_k} , $\frac{\partial U_{n_k}}{\partial x}$, $\frac{\partial U_{n_k}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 U_{n_k}}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 U_{n_k}}{\partial t \partial x}$ сходятся слабо. Но по теореме вложения С. Л. Соболева U_{n_k} , $\frac{\partial U_{n_k}}{\partial x}$ сходятся сильно, а производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}$ предельной функции $U(x, t)$ есть слабые пределы $\left\{\frac{\partial U_{n_k}}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 U_{n_k}}{\partial t^2}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 U_{n_k}}{\partial t \partial x}\right\}$ [9].

Теперь покажем, что полученное решение действительно является обобщенным, т. е. выполняется тождество (5). Умножим равенство (7) на произвольные дифференцируемые функции $u_s(t)$, равные нулю

при $t = T$, просуммируем по s от 1 до n и интегрируем по t от 0 до T . В полученном равенстве U_n заменяем через U_k и переходим к пределу при $k \rightarrow \infty$. В силу сходимости $\{U_{n_k}\}$, $\left\{\frac{\partial U_{n_k}}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2 U_{n_k}}{\partial t \partial x}\right\}$ получим:

$$\int_0^l \int_0^T \left[\varphi \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} w_n K + a K \frac{\partial U}{\partial x} w_n + \frac{\partial K}{\partial x} a \frac{\partial U}{\partial x} w_n - K b \frac{\partial U}{\partial x} w_n - K c U w_n - K f w_n \right] dx dt + \int_0^T K_3 a w_n \Big|_{x=l_1} dt, \quad (12)$$

$$\text{где } w_n(x, t) = \sum_{s=1}^n u_s(t) \tau_s(x).$$

Равенство (12) справедливо для функции $w_n(x, t)$ но такими функциями можно аппроксимировать любую функцию $w \in \mathcal{Q}$, следовательно, (12) справедливо и для любой функции $w \in \mathcal{Q}$, т. е. получаем тождество (5).

Учитывая оценки (10), (11); легко показать выполнение начальных условий в среднем. Единственность обобщенного решения доказывается с помощью тождества (5). Чтобы показать, что функция $U(x, t)$ имеет производные $\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x}$, суммируемые с квадратом, диф-

ференцируем соотношение (7) по два раза, умножим на $C_s^{(1)}(t) \frac{|\ln t|}{\varphi(t)}$, суммируем по s от 1 до n , интегрируем по t от 0 до T . Далее производим преобразования, аналогичные тем, которые проводили для оценки первых производных. Получим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \int_0^{T_1} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)^2 dx dt &< M_5, \\ \int_0^l \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^2 \partial x} \right) dx dt &< M_5, \\ \int_0^{T_1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{x=l_1} dt &< M_5. \end{aligned} \right\}$$

Применяя вспомогательные функции С. Н. Бернштейна, как это делается в работе [5], можно доказать, что уравнение (1) удовлетворяется в R_1 , R_2 и выполняется второе условие сопряжения для обычного решения $U(x, t)$. Итак, при некоторых дополнительных условиях на коэффициенты уравнения (1) обобщенное решение является обычным.

Замечание 1. Если коэффициент a зависит только от x , то рассуждения остаются в силе, когда $a(x)$ может терпеть разрыв первого рода при $x = l_1$.

Замечание 2. Применяя способы работ [1, 5], может установить разрешимость смешанной задачи, когда κ_1 и κ_2 зависят от времени, а лания разрыва непостоянна и условие сопряжения содержит производные по времени.

Считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. К. Т. Ахмедову и канд. физ.-матем. наук Г. К. Намазову за внимание к работе и ценные совет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 25 (1961), 3—20.
5. Ладыженская О. А. „ДАН СССР“, т. 9, 1954, 2.
3. Расулов М. Л. „ДАН СССР“, т. 131, 1960, 1.
4. Ильин В. И. Шишмарев И. А. „Сиб. матем. ж.“, т. 2, 1961, № 4.
5. Намазов Г. К., Ахмедова А. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, т. 2, 1961.
6. Краснов М. Л. Математический сборник, т. 49 (91) 1?
7. Барановский Р. Т. „Уч. зап. Ленинградского гос. пед. ин-та“, т. 183, 1958.
8. Чечик В. А. „ДАН СССР“, т. 108, 1956, 5.
9. Соболев С. Л. Некоторые приемы функционального анализа в математической физике. Изд. Сиб. отд. АН СССР, 1962.

А. А. Бабаева

Кәсилән әмсаллы икинчи тәртіб чырлашан гиперболик
тәнлик үчүн гарышыг мәсәлә

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кәсилән әмсаллы чырлашан гиперболик типли тәнлик үчүн гоҗулмуш сәрһәд мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јекәнәлији исбат олуңмушдур.

П. А. РАХМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ГИБКИХ ПЛАСТИНАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В ССПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

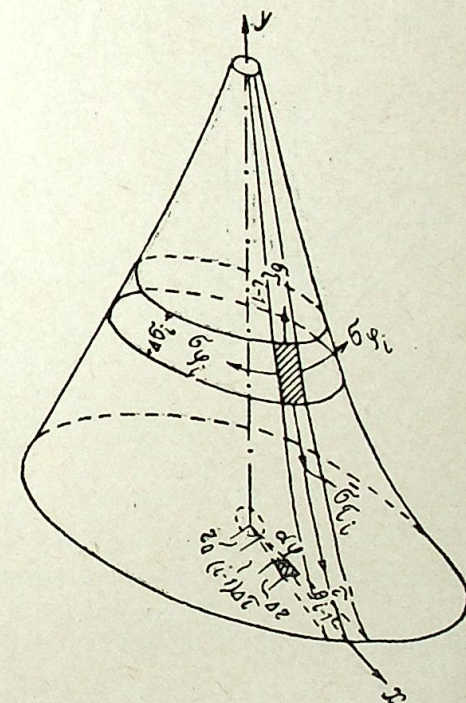
Предположим, что первоначально конечная круглая гибкая пластина находится в покое, занимая в плоскости $хоу$ область внешнюю к окружности радиуса r_0 , и пусть в момент времени $t = 0$ к контуру жестко окантованного круглого отверстия пластины в направлении оси ou приложена равномерно распределенная ударная нагрузка, вызывающая начальный скачок v_0 скорости контура. Со временем этот контур начинает двигаться поступательно по некоторому заданному закону [1]. При такой постановке задача будет обладать симметрией относительно оси ou , что позволяет рассматривать движение пластины только в меридиональном сечении $хоу$ (рис. 1).

За независимые переменные примем время t и лагранжеву координату r —расстояние точки пластины от оси ou в момент времени $t = 0$. Для независимых переменных введем обозначения:

x, y —координаты рассматриваемой точки пластины;

θ —угол между касательной в этой точке и осью $ох$.

Составим уравнения движения элемента гибкой пластины, вырезанного двумя меридиональными сечениями и i сферами, центры которых лежат на оси ou и совпадают с вершинами конусов, касающихся указанных элементов. При этом каждый элемент рассматривается как дискретная масса и задача сводится к i системе обыкновенных диф-



Фиг. 1

дифференциальных уравнений, т. е.

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{d^2 x_i}{dt^2} = & -\frac{\sigma_{\tau i-1}}{\Delta r} \cos \theta_{i-1} + \frac{r_0 + (i+1) \Delta r}{(r_0 + i \Delta r) \Delta r} \sigma_{\tau i} \cos \theta_i - \\ & - \frac{\sigma_{\varphi i}}{r_0 + i \Delta r} - R_{\tau i} \cos \theta_i - R_{n i} \sin \theta_i, \\ \rho_0 \frac{d^2 y_i}{dt^2} = & \frac{\sigma_{\tau i-1}}{\Delta r} \sin \theta_{i-1} - \frac{r_0 + (i+1) \Delta r}{(r_0 + i \Delta r) \Delta r} \sigma_{\tau i} \sin \theta_i + \\ & + R_{\tau i} \sin \theta_i - R_{n i} \cos \theta_i \quad (i = 1, 2 \dots 9). \end{aligned} \quad (1, 1)$$

Здесь σ_{τ} , σ_{φ} — компоненты тензоров условного напряжения в направлении касательной (меридиональном) и направления, перпендикулярном плоскости xoy (кольцевом); R_{τ} и R_n — касательная и нормальная проекции вектора условной силы сопротивления среды; ρ_0 — масса единицы площади недеформированной пластины.

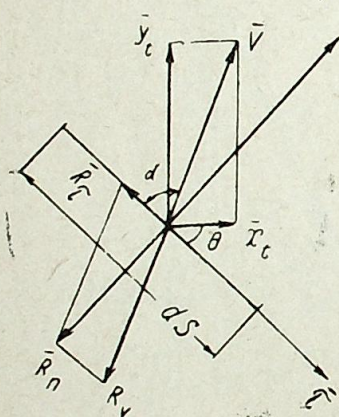
Для i -го компонента тензора деформаций имеют место соотношения:

$$\varepsilon_{\tau i-1} = \frac{\Delta s_i}{\Delta r} - 1 = \frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} - 1, \quad (1, 2)$$

$$\varepsilon_{\varphi i-1} = \frac{x_{i-1}}{r_0 + (i-1) \Delta r} - 1 \quad (i = 1, 2 \dots 10). \quad (1, 3)$$

Геометрически

$$\begin{aligned} \cos \theta_{i-1} = & \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}; \quad \sin \theta_{i-1} = \\ = & \frac{y_i - y_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}. \end{aligned} \quad (1, 4)$$



Фиг. 2

Связь между компонентами тензоров деформации и условным напряжением прием согласно закону Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{\tau i-1} = & \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{\tau i-1} + \nu \varepsilon_{\varphi i-1}); \\ \sigma_{\varphi i-1} = & \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{\varphi i-1} + \nu \varepsilon_{\tau i-1}), \end{aligned} \quad (1, 5)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Зависимость между нормальной гидродинамической нагрузкой и углом атаки α берется в следующем виде:

$$R_n = c \rho_c \frac{v^2}{2} \sin^2 \alpha. \quad (1, 6)$$

Разложим нормальную силу сопротивления на направление вектора скорости и направление касательной нити (рис. 2):

$$R_{\tau} = R_n \cos \alpha, \quad R_n = R_{\tau} \sin \alpha = R_n \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1, 7)$$

Из рис. 2 имеем:

$$\cos(\alpha + \theta) = -\frac{x_t}{v}, \quad \sin(\alpha + \theta) = \frac{y_t}{v}$$

или

$$\cos \alpha = \frac{-x_t \cos \theta + v_t \sin \theta}{v}, \quad \sin \alpha = \frac{x_t \sin \theta + y_t \cos \theta}{v}. \quad (1, 8)$$

§ 2. Расчетные уравнения для определения параметров гибкой пластины

В дальнейшем изложении используются безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{t} = \frac{a_0 t}{r_0}, \quad \bar{\Delta r} = \frac{\Delta r}{r_0}, \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{r_0}, \quad \bar{y}_i = \frac{y_i}{r_0}, \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{a_0}, \\ \bar{\sigma}_{\tau i-1} = \frac{\sigma_{\tau i-1}}{\rho_0 a_0^2}, \quad \bar{\sigma}_{\varphi i-1} = \frac{\sigma_{\varphi i-1}}{\rho_0 a_0^2}, \quad \bar{R}_{n i} = \frac{r_0 R_{n i}}{\rho_0 a_0^2}, \end{aligned}$$

Подставляя значения этих величин в уравнения движения (1, 1), получим (опуская знак черты над безразмерными величинами):

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & -\frac{1}{\Delta r} \left[\frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_i)^2} - 1 + \right. \\ & + \nu \left(\frac{x_{i-1}}{1 + (i-1) \Delta r} - 1 \right) \left. \right] \times \frac{x_i - x_{i-1}}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}} + \\ & + \frac{1 + (i+1) \Delta r}{(1 + i \Delta r) \Delta r} \left[\frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2} - 1 + \right. \\ & + \nu \left(\frac{x_i}{1 + i \Delta r} - 1 \right) \left. \right] \frac{x_{i+1} - x_i}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2}} - \\ & - \frac{1}{1 + i \Delta r} \left[\frac{x_i}{1 + i \Delta r} - 1 + \nu \left(\frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2} - 1 \right) \right] - \\ & - C_1 \frac{x_i}{\Delta r} u_i [u_i (y_i - y_{i+1}) + v_i (x_{i+1} - x_i)]; \end{aligned} \quad (2, 1)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i; \quad (2, 2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} = & \frac{1}{\Delta r} \left[\frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - y_i)^2} - \right. \\ & - 1 + \nu \left(\frac{x_i}{1 + (i-1) \Delta r} - 1 \right) \left. \right] \frac{y_{i-1} - y_i}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}} - \\ & - \frac{1 + (i+1) \Delta r}{(1 + i \Delta r) \Delta r} \left[\frac{1}{\Delta r} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2} - \right. \\ & - 1 + \nu \left(\frac{x}{1 + i \Delta r} - 1 \right) \left. \right] \frac{y_i - y_{i+1}}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_i - y_{i+1})^2}} - \\ & - C_1 \frac{x_i}{\Delta r} v_i [u_i (y_i - y_{i+1}) + v_i (x_{i+1} - x_i)]; \end{aligned} \quad (2, 3)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = v_i. \quad (2, 4)$$

Полученные уравнения решаются на БЭСМ-2 при следующих начальных и граничных условиях.

$$\begin{aligned} \text{При } t = 0 \quad x_i = 1 + i \Delta r \\ u_i = 0 \\ y_i = 0 \\ u_i = 0,25, \quad i = 0, \quad v_i = 0 \quad (i = 1, 2 \dots 9). \end{aligned}$$

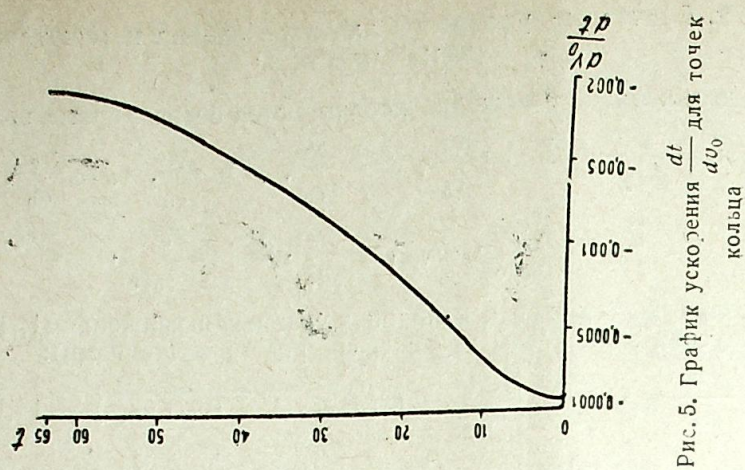


Рис. 5. График ускорения $\frac{d^2 \rho}{dt^2}$ для точек кольца

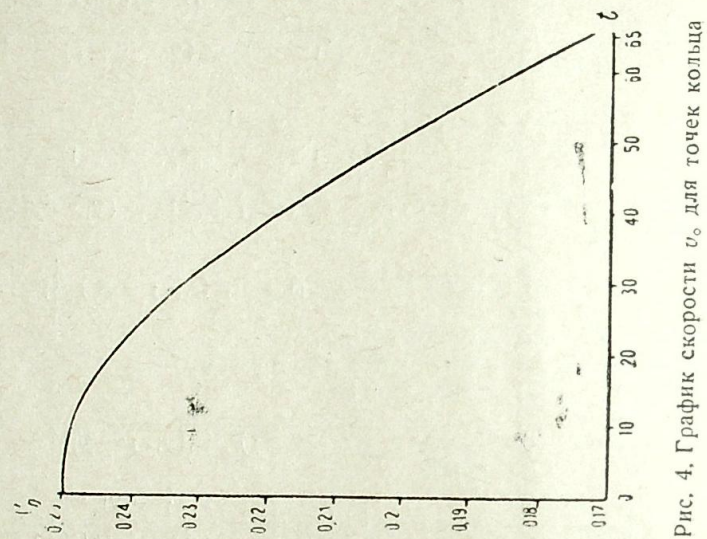


Рис. 4. График скорости v_0 для точек кольца

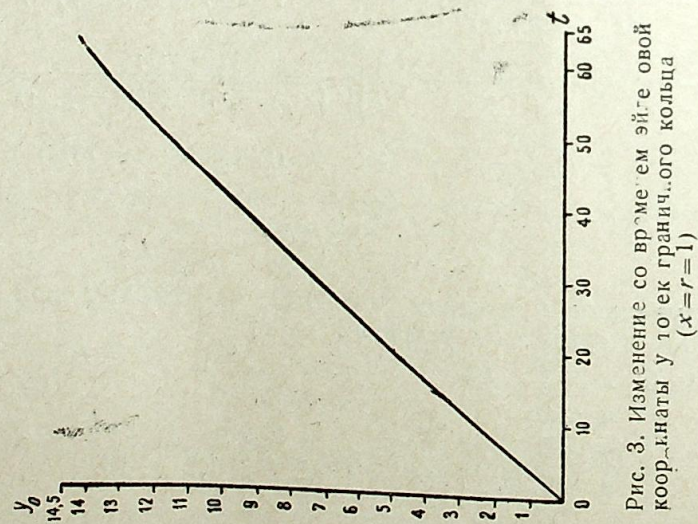


Рис. 3. Изменение со временем эйлеовой координаты y_0 на экваторе кольца ($x=r=1$)

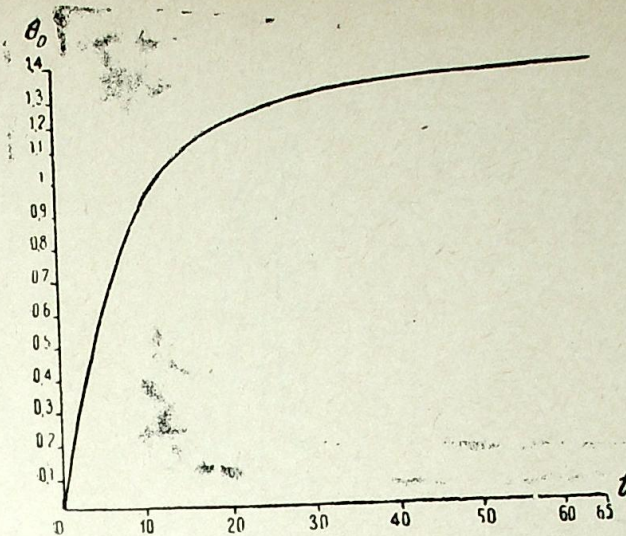


Рис. 6. Изменение со временем угла θ в точках кольца

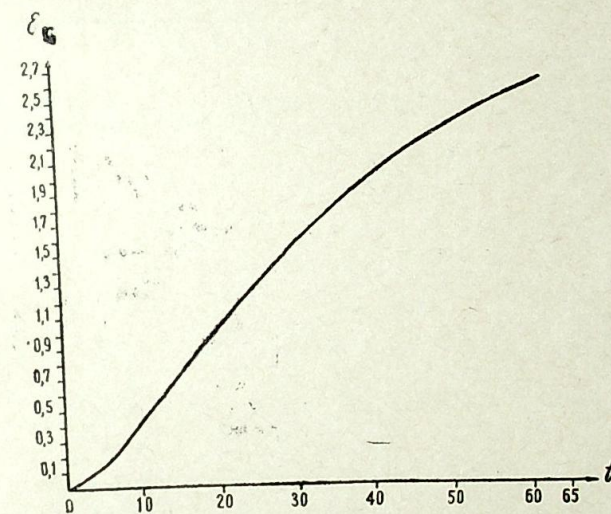


Рис. 7. График деформации ϵ_t для точек кольца

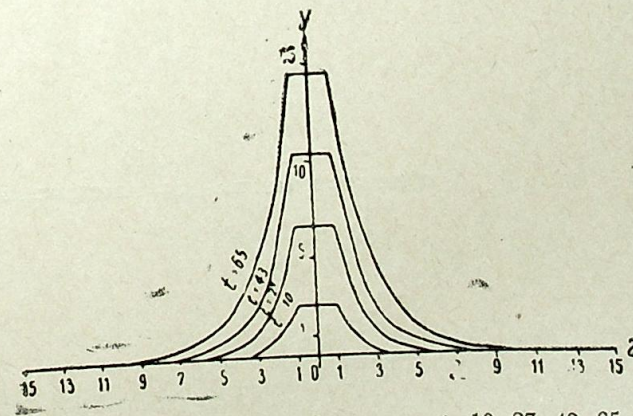


Рис. 8. Положение мембраны для $t=10, 27, 43, 65$

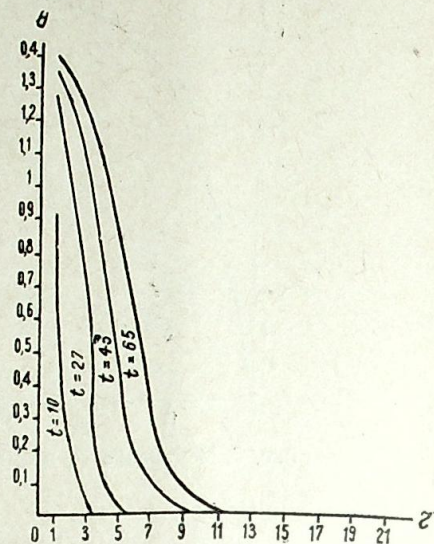


Рис. 9.
График угла θ для разных значений t

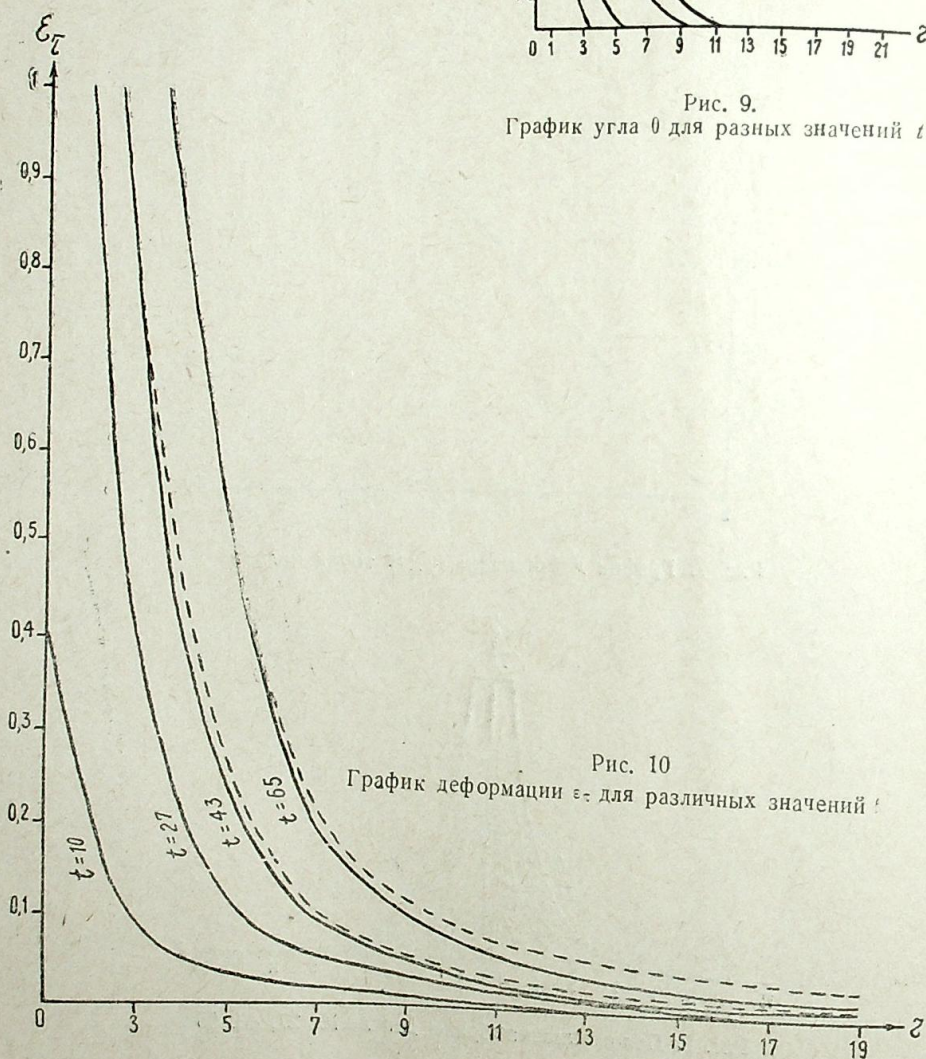


Рис. 10
График деформации ε_z для различных значений t

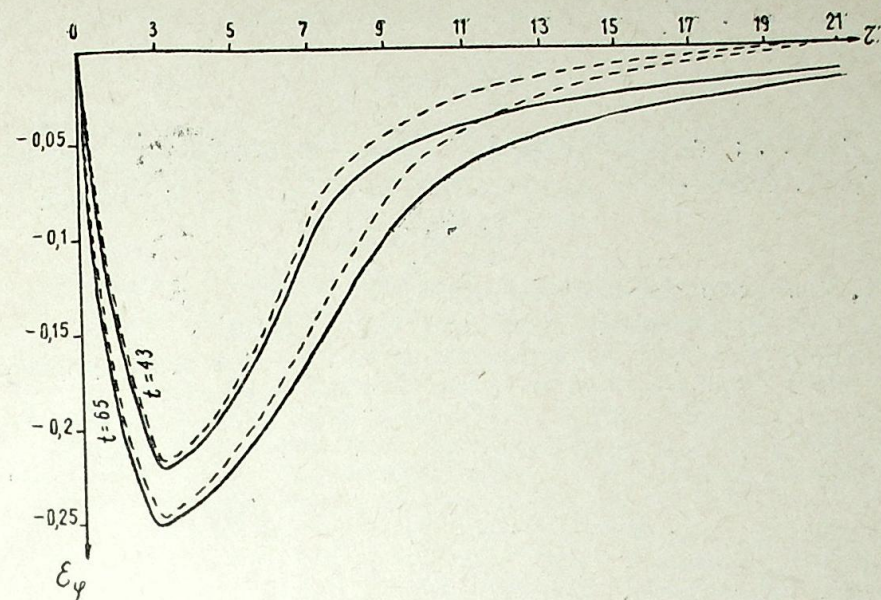


Рис. 11. График деформации ε_φ для разных значений t

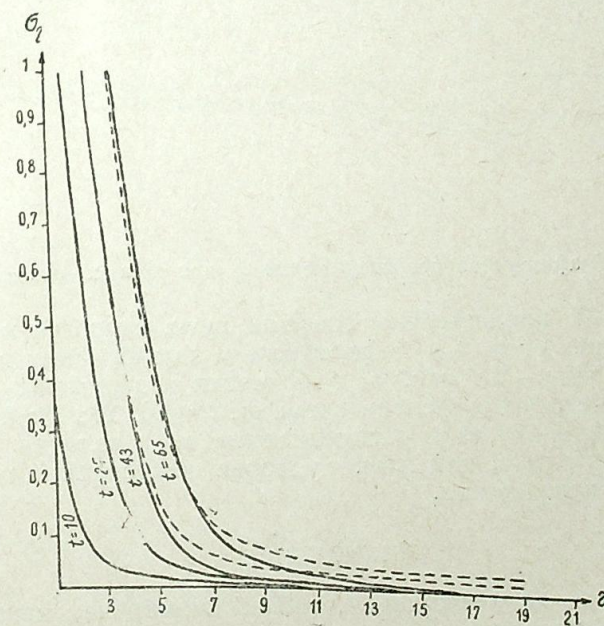


Рис. 12. График узлового напряжения σ_z для разных значений t

При $t > 0$, следуя работе [1] на границе, т. е. при $r = 1$

$$\frac{d\tau_0}{dt} = c_2 + C_3 v_0 + c_{11} v_0^2 + c_5 \varepsilon_0 \sin \theta_0,$$

$$\frac{dy_0}{dt} = v_0,$$

где $c_1 = 12,5$; $c_2 = 0,1501605 \cdot 10^{-3}$; $c_3 = -0,2574179 \cdot 10^{-3}$;
 $c_4 = 0,2402567 \cdot 10^{-2}$; $c_5 = -0,8078778 \cdot 10^{-3}$; $\Delta r = 2$; $\nu = 0,5$;
 $t = 0,001; 0,02 \dots, 65$;
 $R = 21$.

1. Для свободной пластины при $t > 0$ $R = 21$, $\sigma_{r10} = 0$.

2) Для закрепленной пластины $x_{10} = 21$, $y_{10} = 0$.

Результаты счета представлены на рис. 3—13 в виде графиков.

Штриховые линии соответствуют закрепленной мембране.

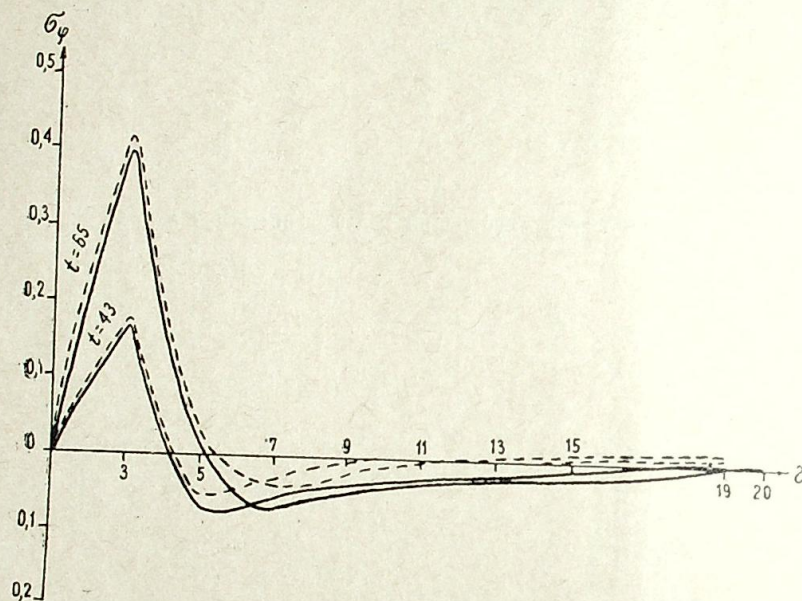


Рис. 13. График условного напряжения σ_φ для разных значений t

На рис. 3—7 представлены графики пути, скорости и ускорения, а также значения угла θ и деформации ε_r как функции времени для граничного кольца. На рис. 8 графически изображены положения мембраны для четырех моментов времени: $t = 10; 27; 43; 65$. Для этих значений на рис. 9—13 дано распределение по r величин θ , ε_r , ε_φ , σ_r , σ_φ . Из графиков видно, как влияет условие закрепления на величину деформации и напряжения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача удара по бесконечно гибкой мембране, находящейся в сопротивляющейся среде [1], решена методом характеристик на ЭВЦМ. Решение задачи таким методом требует много машинного времени. Предлагаемый в настоящей работе приближенный метод является наиболее эффективным при решении нелинейных задач на ЭВЦМ таким методом требует меньше машинного времени.

Сравнение полученных результатов, приведенных на графиках настоящей работы, и [1] показывает расхождение порядка 20%, что вполне приемлемо при инженерных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоносов С. М., Павленко А. Л., Павлов Б. М., Росляков Г. С. Поперечный удар по мембране с круглым отверстием. Вычислительные методы и программирование. МГУ, 1962.

П. Э. Рəһманов

Мүгавимəтли мүнһитдə јерлəшəн лəвһədə еластик-пластик далғаларын əкс олунмасынын арашдырылмасы

ХҮЛАСƏ

Мəгалədə еластики даирəви лəвһəјə V_0 сүр'əти илə зəрбə нəтичə-синдə лəвһədə далғаларын əкс олунмасы арашдырылмышдыр. Мəсəлə тəғриби јолла һəлл едилмишдир. Лəвһə $t = 0$ һалында концентрик чеврэлəрлə i һиссəјə бөлүнмүш вə һəр һиссəјə мадди нөгтə кими бахыларағ, лəвһəнин һəрəкəт тəнликлəри i системли икинчи тəртибли ади дифференциал тəнликлəр системинə кəғирилмишдир. Алынмыш тəнликлəр системи ачығ вə бағлы лəвһəлəр һалы үчүн һəлл едилмишдир.

Бу мəсəлə Азəрбајҗан ССР ЕА һесаблама мəркəзиндə һəлл едилмиш вə мəсəлəнин һəлли сонсуз лəвһə һалы үчүн характеристик методун һəлли илə тутушдурулмушдур. Алынған фəргин практикаја тəтбиғ едилмəsi тамамилə мəғсədə ујғундур.

Тəклиф едилмиш метод далғаларын сəрһəддэн бир нечə дəфə əкс олунмасы мəсəлəлəринин һəлли үчүн еффeктив методдур вə електрон һесаблајычы машинында аз вахт тəлəб едир.

А. Ш. ДАДАШЕВ

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ И ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТЬ ПОЛОЙ СФЕРЫ С ВНУТРЕННИМ ПОКРЫТИЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Рассматривается действие радиального перепада температур на двухслойную сферу, состоящую из относительно толстого основного слоя и тонкостенного внутреннего покрытия. Предполагается, что основной слой и покрытие изготовлены из различных материалов (идеально упруго-пластических). Предполагая, что температура и напряжения равномерно распределены по толщине слоя, построены решения

в случаях, когда пластическое течение начинается либо в покрытии, либо в основном слое.

Далее исследуется приспособляемость конструкции при повторных воздействиях температурного поля.

1. Пусть двухслойный полый шар (рис. 1) подвергается действию радиального температурного перепада. Поскольку покрытие тонкое, будем предполагать, что температура покрытия равна температуре внутренней поверхности основного слоя. Давление слоя на шар обозначим через p^* .

Пределы текучести σ и коэффициенты температурного расширения α основного слоя и покрытия считаем неодинаковыми. Пусть A и B — внутренний и внешний радиусы основного слоя, t — толщина покрытия. Параметры основного слоя обозначаются индексом s , а параметры покрытия индексом c . Предполагается, что коэффициент термического расширения покрытия больше, чем коэффициент термического расширения основного слоя.

2. Под действием симметричного температурного поля $T(r)$ в полой сфере возникают перемещения и напряжения, выражающиеся формулами [1]:

$$U = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha}{r^2} \cdot \int_a^r T \cdot r^2 dr + c_1 r + \frac{c_2}{r^2};$$

$$\sigma_r = -\frac{2E\alpha}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \int_a^r T \cdot r^2 dr + \frac{Ec_1}{1-2\nu} - \frac{2Ec_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3}; \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \int_a^r T r^2 dr + \frac{Ec_1}{1-2\nu} + \frac{Ec_2}{1+\nu} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{E\alpha T(r)}{1-\nu},$$

где c_1 и c_2 — постоянные, и определяются из условий

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_1 \quad \text{при} \quad r=a, \\ \sigma_r &= -p_0 \quad \text{при} \quad r=b. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p_1 и p_0 — внутреннее и внешнее давление.

Применим общие решения в двух частных случаях:

а) полый шар с внутренним радиусом A и внешним B подвергается воздействию внутреннего давления p^* и температуры $T(r)$.

Используя формулы (1) и (2), получим решение в следующем виде:

$$\frac{E_s U_s}{r} = \frac{1+\nu_s}{1-\nu_s} \cdot \alpha_s E_s \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \int_A^r T \cdot r^2 dr + \frac{E_s c_s}{(1-\nu_s)(B^3-A^3)} \left[2(1-2\nu_s) + \right.$$

$$\left. + (1+\nu_s) \cdot \frac{A^3}{r^3} \int_A^B T r^2 dr + p^* \cdot \frac{A^3}{B^3-A^3} \cdot \left[(1-2\nu) + \frac{1+\nu_s}{2} \cdot (B A^3) \right] \right]; \quad (3)$$

$$\sigma_r = -\frac{2E_s \alpha_s}{(1-\nu_s) r^3} \cdot \int_A^r T r^2 dr + \frac{2E_s \alpha_s}{(1-\nu_s)(B^3-A^3)} \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) \int_A^B T r^2 dr +$$

$$+ p^* \cdot \frac{A^3}{B^3-A^3} \left(1 - \frac{B^3}{r^3} \right);$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_s E_s}{(1-\nu_s) r^3} \cdot \int_A^r T r^2 dr + \frac{E_s \alpha_s}{(1-\nu_s)(B^3-A^3)} \left(2 + \frac{A^3}{r^3} \right) \int_A^B T r^2 dr +$$

$$+ p^* \cdot \frac{A^3}{B^3-A^3} \left(1 + \frac{B^3}{2r^3} \right) - \frac{E_s \alpha_s T(r)}{1-\nu_s};$$

б) во втором случае полый шар толщиной t и внешним радиусом A (рис. 2) подвергается действию равномерно распределенной температуры T_0 и внешнего давления p^* .

Используя общие решения (1) и (2), решения для тонкостенного полого шара запишем в виде:

$$\frac{E_c}{r} U_c = E_c \alpha_c T_0 - \frac{p^*}{3 \cdot \frac{t}{A} \left(1 - \frac{t}{A} \right)} \left[(1-2\nu_c) + \frac{1+\nu_c}{2} \left(\frac{A-t}{r} \right)^3 \right],$$

$$\sigma_r = -\frac{p^*}{3 \cdot \frac{t}{A} \left(1 - \frac{t}{A} \right)} \left[1 \times \left(\frac{A-t}{r} \right)^3 \right], \quad (4)$$

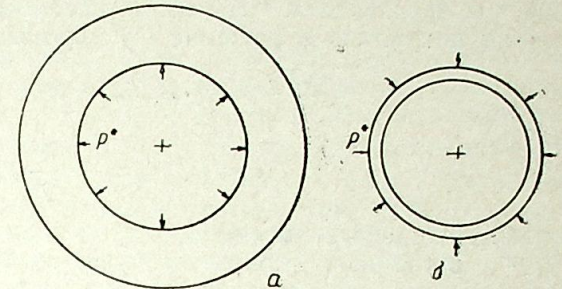


Рис. 2

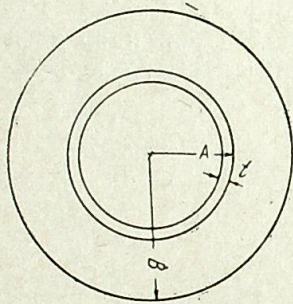


Рис. 1

$$\sigma_0 = - \frac{p^*}{3 \cdot \frac{t}{A} \left(1 - \frac{t}{A}\right)} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A-t}{r}\right)^3\right].$$

Так как r меняется в пределах

$$1 - \frac{t}{A} \leq r \leq 1, \text{ то} \quad (5)$$

при $r \rightarrow A$ значением t/A можно пренебречь по сравнению с 1 (для тонких покрытий) и решение (4) упрощается:

$$\frac{E_c U_c}{A} = E_c \cdot U_c T_0 - p^* (1 - \nu_c) \cdot \frac{A}{2t}, \quad (6)$$

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_0 = - \frac{1}{2} p^* \cdot \frac{A}{t}.$$

3. Под действием симметричной температуры свободное температурное расширение покрытия будет отличаться от температурного расширения основного слоя, так как материалы и температура слоев разные. На поверхности контакта значения радиального перемещения должны быть равны. Вследствие этого на поверхности контакта развивается равномерное давление p^* .

В формулах (3) и (6) содержится неизвестное p^* , которое можно определить, используя непрерывность радиального перемещения на поверхности контакта $r = A$. Вследствие этого имеем

$$[c_c T_0 - \alpha_s T_{cp}] = p^* \left[\frac{1 - \nu_s}{2} \cdot \frac{A}{t} \cdot \frac{1}{E_c} + \frac{(1 - 2\nu_s) + \frac{1 + \nu_s}{2} \cdot (B/A)^3}{[(B/A)^3 - 1] E_s} \right]. \quad (7)$$

Здесь

$$T_{cp} = \frac{3}{B^3 - A^3} \cdot \int_A^B T r^2 dr. \quad (8)$$

Для очень тонких покрытий, когда второй член квадратной скобки очень мал, по сравнению с отношением (A/t) , им можно пренебречь, и формула (7) упрощается:

$$p^* = \frac{2 E_c \cdot t}{(1 - \nu_c) A} [c_c T_0 - \alpha_s T_{cp}]. \quad (9)$$

Подставляя выражение p^* в формулу (3), для напряжений в основном слое получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{c_s E_s}{1 - \nu_s} \left[- \frac{2}{r^3} \cdot \int_A^r T r^2 dr + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{A^3}{r^3}\right) T_{cp} \right] + \\ &+ \frac{2 E_c [c_c T_0 - \alpha_s T_{cp}]}{[1 - \nu_c] (B^3/A^3 - 1)} \left(1 - \frac{B^3}{r^3}\right) \frac{t}{A}, \\ \sigma_0 &= \frac{E_s c_s}{1 - \nu_s} \left[\frac{1}{r^3} \cdot \int_A^r T r^2 dr + \frac{1}{3} \left(2 + \frac{A^3}{r^3}\right) T_{cp} - T(r) + \right. \\ &+ \left. \frac{2 E_c (c_c T_0 - \alpha_s T_{cp})}{(1 - \nu_c) (B^3/A^3 - 1)} \left(1 + \frac{B^3}{2r^3}\right) \frac{t}{A} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Напряжение в покрытии будет

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_0 = - \frac{E_c}{1 - \nu_c} [c_c T_0 - \alpha_s T_{cp}] = - \frac{1}{2} p^* \cdot \frac{A}{t}. \quad (11)$$

4. Упругое решение предыдущей части справедливо, когда значение $(c_c T_0 - \alpha_s T_{cp})$ мало, или же если пластическое течение нигде не имеет места. По условию текучести течение начинается, когда

$$f = \max (|\sigma_0 - \sigma_r|) = Y, \quad (12)$$

где Y — предел текучести материала при одноосном растяжении. Течение может возникать впервые либо в покрытии, либо в основном слое. Для выяснения последнего вопроса будем сравнивать значение p_c^* с соответствующим значением p^* , полученным в предположении, что пластическое течение начинается в основном слое. Здесь p_c^* — критическое давление, соответствующее началу текучести в покрытии. Поскольку в покрытии $\sigma_r = 0$, из (11) и (12) следует, что текучесть в покрытии возникает, когда

$$c_c T_0 - \alpha_s T_{cp} = \frac{1 - \nu_c}{E_c} \cdot Y_c^* \quad (13)$$

или же на основании (9), когда

$$p^* = p_c^* = \frac{2t}{A} Y_c^*. \quad (14)$$

В основном слое текучесть возникает при давлении $p^* = p_s^*$, которое можно определить из выражения:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{(B/r)^3}{(B/A)^3 - 1} \cdot p_s^* = \pm Y_s - \frac{E_s \alpha_s}{1 - \nu_s} \left[\frac{3}{r^2} \int_A^r T r^2 dr + (A/r)^3 T_{cp} - T(r) \right] \quad (15)$$

Рассмотрим отношение $\frac{p_s^*}{p_c^*}$:

$$\begin{aligned} \frac{p_s^*}{p_c^*} &= \frac{\left\{ \pm Y_s - \frac{E_s \alpha_s}{1 - \nu_s} \left[\frac{3}{r^2} \int_A^r T r^2 dr + (A/r)^3 T_{cp} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - T(r) \right] \right\} \cdot \frac{2}{3} \cdot [(B/A)^3 - 1] (r/A)^3}{Y_c^* \cdot \frac{2t}{A}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Минимум p_s^* существенно зависит от распределения $T(r)$. Рассмотрим частный случай, когда максимум температуры имеет место при $r = A$.

Тогда отношение $\frac{p_s^*}{p_c^*} < 1$,

$$\text{если } \left| \pm Y_s - \frac{\alpha_s E_s}{1 - \nu_s} [T_{cp} - T_0] \right| \leq \frac{t}{A} \cdot \frac{3 Y_c^*}{1 - (NB)^3}. \quad (17)$$

Следовательно, пластическое течение в основном слое возникает раньше, чем в покрытии.

$$\text{Если же } \left| \pm Y_s - \frac{E_0 \alpha_s}{1-\nu_s} (T_{cp} - T_0) \right| \geq \frac{t}{A} \cdot \frac{3 Y_c^*}{1 - (A/B)^3}, \quad (18)$$

то течение впервые начинается в покрытии.

5. Соответственно формулам (11) и (14) пластическое течение в покрытии начинается, когда удовлетворяется (13). Компоненты напряжений с ростом $(\alpha_c T_0 - \alpha_s T_{cp})$ увеличиваются и в пластической области становятся равными:

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = -Y_c^*. \quad (19)$$

Пластические скорости деформации определяются из ассоциированного закона течения:

$$\dot{\epsilon}_\theta = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_\theta} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_\theta}; \quad (20)$$

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_\varphi} + \beta \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_\varphi};$$

где λ, β — произвольные положительные параметры;

$$f_1 = \sigma_r - \sigma_\theta \text{ и } f_2 = \sigma_r - \sigma_\varphi. \quad (21)$$

Таким образом, получим

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\lambda; \quad \dot{\epsilon}_\varphi = -\beta. \quad (22)$$

Компоненты полной деформации можно представить в виде

$$\epsilon_r = \epsilon_r' + \epsilon_r'' + \sigma_c T_0, \quad (23)$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_\varphi = \epsilon_\theta' + \epsilon_\theta'' + \sigma_c T_0.$$

Используя условия сжимаемости:

$$\epsilon_r + 2\epsilon_\theta = \frac{du}{dr} + 2 \frac{U}{r} = \frac{1-2\nu_c}{E_c} (\sigma_r + 2\sigma_\theta) + 3\sigma_c T_0 \quad (24)$$

и учитывая (19), для радиального перемещения в пластической области получим

$$U_c = \alpha_c T_0 r - \frac{2}{3} (1-2\nu_c) \frac{Y_c^*}{E_c} + \frac{c_3}{r^2}. \quad (25)$$

Здесь c_3 — постоянная. Она определяется из условия непрерывности перемещения на поверхности раздела $r = A$.

Таким образом получим

$$\frac{U_c}{A} = \alpha_c T_{cp} + p_c^* \cdot \frac{1}{E_s (B^3/A^3 - 1)} \left[(1-2\nu_s) + \frac{1+\nu_s}{2} (B/A)^3 \right]. \quad (26)$$

Согласно (23) и (26) пластическая деформация будет

$$\epsilon_\varphi = \epsilon_\theta = -(\alpha_c T_0 - \alpha_s T_{cp}) + Y_c^* \left[\frac{1-\nu_c}{E_c} + \frac{2t}{A} \cdot \frac{1}{E_s (B^3/A^3 - 1)} \left(1-2\nu_s + \frac{1+\nu_s}{2} \cdot \frac{B^3}{A^3} \right) \right]. \quad (27)$$

Пластическую скорость деформации можно вычислить, дифференцируя (27) относительно монотонно возрастающей функции как $(\alpha_c T_0 - \alpha_s T_{cp})$.

Дифференцируя (27), получим равенство

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_\theta = -1, \quad (28)$$

которое не противоречит предположению (20), что λ и β — положительные.

Таким образом, упруго-пластическое состояние покрытия описывается формулами (19), а радиальное перемещение выражением (26).

Радиальное перемещение и компоненты напряжения в основном слое полый сферы можно определить, пользуясь формулами (3) и (4):

$$\begin{aligned} \frac{U_s}{r} + \left[\frac{1+\nu_s}{1-\nu_s} \right] \cdot \frac{\sigma_s}{r^3} \cdot \int_A^r T(r) r^2 dr + \left[(1-2\nu_s) \cdot 2 + (1+\nu_s) \frac{A^3}{r^3} \right] \frac{T_{cp}}{3(1-\nu_s)} + \\ + \frac{Y_c^* \cdot 2t}{E_s (B^3/A^3 - 1)} \cdot \left[1-2\nu_s + \frac{1+\nu_s}{2} (B/A)^3 \right], \\ \sigma_r = \frac{E_s \sigma_s}{1-\nu_s} \left[-2/r^2 \int_A^r T(r) r^2 dr + \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{2T_{cp}}{3} \right] + \\ + \frac{Y_c^* \cdot 2t}{(B^3/A^3 - 1)} \cdot \left(1 - \frac{B^3}{r^3} \right), \\ \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{E_s \sigma_s}{1-\nu_s} \cdot \left[\int_A^r T(r) \cdot r^2 dr + \left(2 + \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{T_{cp}}{3} - T(r) \right] + \\ + \frac{Y_c^* \cdot 2t}{(B^3/A^3 - 1)} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (B/r)^3 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

6. Теперь рассмотрим случай, когда $\frac{p_s^*}{p_c^*} < 1$. При этом пластическое течение начинается в основном слое. Если пластическое течение начинается на внутренней поверхности, решение в пластической области будет:

$$\sigma_r = -2 L_s \ln \frac{r}{A} - p^*, \quad (30)$$

$$\sigma_\theta = -L_s \left(2 \ln \frac{r}{A} + 1 \right) - p^*.$$

Из условий сжимаемости (24) с учетом (30) для перемещения в пластической области получим

$$\begin{aligned} U = 3\alpha_s \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \int_A^r T(r) \cdot r^2 dr - \\ - \frac{1-2\nu_s}{E_s r^2} \cdot \left[Y_s \int_A^r r^2 \left(6 \ln \frac{r}{A} + 2 \right) dr + p^* \cdot r^3 \right] + \frac{1}{r^2} \cdot c_3. \end{aligned} \quad (31)$$

Для упругой области остается справедливой формула (1). Постоянные c_1, c_2, c_3 и граница пластической области определяются из граничных условий и из непрерывности σ_r, σ_θ и U на упруго-пластической границе.

7. После начального периода пластической деформации в шаре возникнут остаточные напряжения. Может оказаться, что вследствие приобретенных остаточных напряжений последующие циклы нагружения той же интенсивности, как начальные, не приведут к пластической деформации т. е. возникает приспособляемость.

Пусть система остаточных напряжений пропорциональна параметру m и распределена по закону:

$$\sigma_r^{oc} = -m \left[-\frac{2}{r^3} \int_A^r \frac{1}{T_0} \cdot T(r) \cdot r^2 dr + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{T_{cp}}{T_0} \right], \quad (32)$$

$$\sigma_\theta^{oc} = -m \left[\frac{1}{r^3} \int_A^r \frac{1}{T_0} T(r) r^2 dr + \frac{1}{3} \left(2 + \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{T_{cp}}{T_0} - \frac{T(r)}{T_0} \right],$$

тогда согласно (10) суммарные напряжения в основном слое будут:

$$\sigma_r = (q-m) \left[-\frac{2}{r^3} \int_A^r \frac{T(r)}{T_0} r^2 dr + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{T_{cp}}{T_0} \right] +$$

$$+ 2q \frac{E_c \left(1 - \frac{B^3}{r^3} \right)}{(B^3/r^3 - 1) E_s} \cdot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_s} - \frac{T_{cp}}{T_0} \right) \cdot \frac{1-\nu_s}{1-\nu_c} \cdot \frac{t}{A}, \quad (33)$$

$$\sigma_\theta = (q-m) \left[\frac{1}{r^3} \int_A^r \frac{T(r)}{T_0} \cdot r^2 dr + \frac{1}{3} \left(2 + \frac{A^3}{r^3} \right) \frac{T_{cp}}{T_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{T(r)}{T_0} \right] + 2q \frac{\left(1 + \frac{B^3}{2r^3} \right)}{(B^3/r^3 - 1) E_s} \cdot \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_s} - \frac{T_{cp}}{T_0} \right) \frac{t}{A} \cdot \frac{1-\nu_s}{1-\nu_c}.$$

Здесь $q = \frac{E_s \sigma_s T_0}{1-\nu_s}$ — параметр температурного поля.

Условием текучести в безразмерных координатах будет:

$$\left| (q-m) \left[\frac{3}{r^3} \int_A^r \frac{T(r)}{T_0} \cdot r^2 dr + \left(\frac{A}{r} \right)^3 \cdot \frac{T_{cp}}{T_0} - \frac{T(r)}{T_0} \right] + \right.$$

$$\left. + 3q \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_c} - \frac{T_{cp}}{T_0} \right) \frac{E_c (B/r)^3}{(B^3/r^3 - 1) E_s} \cdot \frac{1-\nu_s}{1-\nu_c} \cdot \frac{t}{A} \right| \leq 1. \quad (34)$$

Заменив неравенство (34) равенством, получим уравнение, связывающее между собой предельные значения параметров q и m :

$$q \left[\frac{3}{r^3} \int_A^r \frac{1}{T_0} \cdot T(r) r^2 dr + \left(\frac{A}{r} \right)^2 \frac{T_{cp}}{T_0} - \frac{T(r)}{T_0} + 3 \left(\sigma_s/\sigma_c - \right. \right.$$

$$\left. - T_{cp}/T_0 \right) \frac{E_c (B/r)^3 (1-\nu_s) \cdot t}{(B^3/A^3 - 1) E_s (1-\nu_c) A} \left. \right] - m \left[\frac{3}{r^3} \int_A^r \frac{T(r)}{T_0} \cdot r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{A}{r} \right)^3 \frac{T_{cp}}{T_0} - \frac{T(r)}{T_0} \right] = \pm 1. \quad (35)$$

Уравнение (35) определяет семейства предельных поверхностей, соответствующих различным значениям текущего радиуса основного слоя сферы. При значениях $r=A$ и $r=B$ из уравнения (35) получим две пары плоскостей:

$$q \cdot \left[\frac{T_{cp}}{T_0} - 1 + 3 \left(\sigma_c/\sigma_s - T_{cp}/T_0 \right) \cdot \frac{E_c}{E_s} \cdot \frac{(B/A)^3}{(B/A)^3 - 1} \cdot \frac{t}{A} \right] +$$

$$+ m \left(1 - \frac{T_{cp}}{T_0} \right) = \pm 1, \quad (36)$$

$$q \left[\frac{1}{T_0} \cdot T_{cp} + 3 \left(\sigma_c/\sigma_s - T_{cp}/T_0 \right) \cdot \frac{E_c}{E_s} \cdot \frac{1}{B/A^3 - 1} \cdot \frac{t}{A} - \right.$$

$$\left. - m (T_{cp}/T_0) \right] = \pm 1.$$

Графическая зависимость между значениями q и m показана на рис. 3 (где принято: $B/A = 2$, $E_c/E_s = 2$, $\sigma_c/\sigma_s = 2$, $t/A = 0,05$). На основании рис. 3 для температуры приспособляемости получим

$$q = \frac{1 + \frac{\delta}{1-\delta}}{\delta + 3 \left(\sigma_c/\sigma_s - \delta \right) \cdot \frac{E_c}{E_s} \cdot \frac{1}{B^3/A^3 - 1} \cdot \frac{t}{A}}, \quad (37)$$

где $\frac{T_{cp}}{T_0} = \delta$.

Если максимальная температура цикла превышает температуру приспособляемости (37), то повторные циклы будут приводить к пластическому растяжению на внешней поверхности при нагреве и на внутренней поверхности при охлаждении. Таким образом, с каждым циклом происходит нарастание пластических деформаций. В отличие от этого, в случае отсутствия покрытия циклические нагревы и охлаждения приводят к знакопеременной пластической деформации на внутренней поверхности (сжатие при нагреве, растяжение при охлаждении).

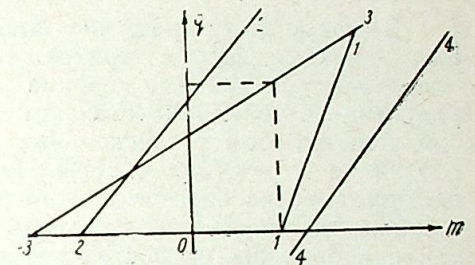


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б. и Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Изд-во „Мир“, 1964.

Э. Ш. Дадашов

Температур мејданы тэ'сири алтында олан дахилдэн өртүклү ичибош күрэнин еластик-пластик таразлыгы вэ „ујғушлашмасы“

ХҮЛАСӘ

Бу тэдгигатда радиус истигамәтиндә тэ'сир едән температурун 2. тәбәгәдән ибарәт галынлығы олан ичибош күрәдә јаратдыгы кәркинлик вәзијјәти өјрәнилмишдир.

Дахили өртүјүн галынлығы әсас өртүјә нисбәтән чох кичик көтүрүлүр. Мүәјјән едилмишдир ки, материалларын хассәсиндән вә температурун пајланма ганунундан асылы олараг, пластик ахма илк дәфә ја әсас өртүкдә, јахуд дахили өртүкдә јарана биләр.

Тәкратр температур тә'сирләриндә конструксиянын еластик деформасијаја „ујғушлаша“ билән температуру (37) дүстуру илә тә'јин олу- нур.

Мүәјјән едилмишдир ки, јүксәк температурларда һәр тә'сирдән сонра јаранан пластик деформасија күрэнин дағылмасына сәбәб олу- р.

А. К. МЕХТИЕВ

О СЖАТИИ УДАРОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В статье дается решение задачи об ударном сжатии образца из вязко-пластического материала. Предполагается, что образец имеет постоянные поперечные сечения и его масса намного меньше массы ударяющего тела, так что силами инерции образца можно пренебречь. Учитывается геометрическое изменение в процессе деформирования. В отличие от решения А. А. Ильюшина [1] предполагается, что законы деформирования образца при нагружении и разгрузке различны. Показано, что линейная зависимость напряжения от скорости деформации при больших скоростях последней дает значительно заниженные результаты.

Как подчеркнул Г. С. Шапиро, уравнения деформирования вязко-пластических тел можно трактовать различным образом.

а) В одном случае, следуя Шведову и Бингому, можно трактовать зависимости

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\kappa + 3\mu\dot{\epsilon}(t) \quad (\sigma \geq 2\kappa), \\ \dot{\epsilon}(t) &= 0 \quad (\sigma < 2\kappa) \end{aligned} \quad (1)$$

как простую связь между скоростью деформации и действующим напряжением, не делая различия между нагружением и разгрузкой. Такая интерпретация закона (1), по-видимому, относится ко многим реологическим средам — битумам, краскам, суспензиям и т. д.

б) Для твердых тел, в частности для металлов, значение σ в (1) правильнее трактовать как предел текучести. В таком случае (1) выражает повышение предела текучести при динамическом деформировании. Еще в опытах Гопкинсона, проведенных в конце прошлого века, было убедительно показано, что при динамических испытаниях предел текучести стали может возрасти почти на 100%.

Закон (1) предполагает, что при $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$ $\sigma \rightarrow \infty$. Более правдоподобно допущено, что при $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$ динамический предел текучести стремится к некоторому пределу. Соответствующий закон зададим в виде (рис. 1)

$$\sigma = a \tanh b\dot{\epsilon}(t), \quad (2)$$

где a, b — постоянные величины.

Эффект повышения предела текучести с ростом скоростей деформаций был подтвержден многими исследователями, в частности классическими экспериментами Людвиг и его ученика Прандтля Дейт-

лера [2]. Теоретическое обоснование этого эффекта было дано Прандтлем [3]. Если трактовать (1) как закон упрочнения, связанного с повышением скоростей деформаций, то существенное значение должен иметь знак скорости изменения напряжений. При $\ddot{\epsilon} > 0$ мы будем иметь нагружения. Если в процессе деформирования $\ddot{\epsilon} = 0$, но $\dot{\epsilon} > 0$, то будем иметь пластическое течение при постоянном напряжении. Наконец, при $\ddot{\epsilon} < 0$ имеем разгрузку. Переходим к решению поставленной задачи, воспользовавшись обозначениями работы [1].

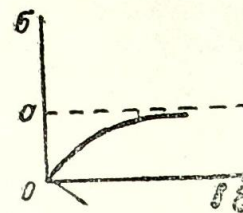


Рис. 1

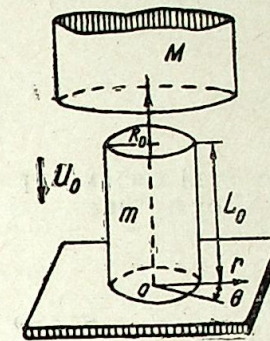


Рис. 2

Абсолютно твердое тело, имеющее массу M , движется поступательно, в отрицательном направлении оси x в момент $t = 0$ оно ударяется со скоростью U_0 о цилиндрический образец, ось которого совпадает с осью x (рис. 2). Требуется найти дальнейшее движение тела и деформацию образца, предполагая, что торцевые сечения последнего так же, как и неподвижная плоскость его опоры и ударяющая плоскость тела, являются абсолютно гладкими. Пусть L_0, R_0 обозначают начальную длину и начальный радиус цилиндра. Массу образца m будем считать весьма малой сравнительно с массой M ударяющего тела. В таком случае деформация образца будет однородной и поверхность его все время будет оставаться цилиндрической.

Выберем в качестве системы отсчета цилиндрическую систему координат (x, r, θ) . Пусть u, v — компоненты скорости в некоторой точке в направлении осей x, r . В силу неизменяемости объема условия несжимаемости материала запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0. \quad (2')$$

В рассматриваемом случае $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta$ являются главными напряжениями, причем в силу симметрии и однородности можно заранее положить

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0, \text{ откуда } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r} \text{ и из условий несжимаемости (2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2v}{r}. \quad (3)$$

Считая скорость деформации сжатия функцией только времени:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\dot{\epsilon}(t). \quad (4)$$

и принимая зависимость напряжения от скорости деформации в виде (2), можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -a \operatorname{th} b \dot{\varepsilon}(t), \\ u &= -x \dot{\varepsilon}(t), \\ v &= \frac{1}{2} r \dot{\varepsilon}(t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Последние два уравнения в системе (5) в применении к точкам, лежащим на верхнем торцевом сечении $x=h$ и на боковой поверхности $r=R$, дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -L \dot{\varepsilon}(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{1}{2} R \dot{\varepsilon}(t). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Решение этой системы уравнений при начальных условиях $L|_{t=0} = L_0$, $R|_{t=0} = R_0$ будет иметь следующий вид:

$$L = L_0 e^{-\int_0^t \dot{\varepsilon}(t) dt}, \quad R = R_0 e^{\int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{2} dt}. \quad (7)$$

Пренебрегая силами инерции образца, так как масса его считается малой сравнительно с массой ударяющего тела, дифференциальное уравнение движения тела массой M для рассматриваемого случая имеет следующий вид:

$$M \frac{d^2 L}{dt^2} = -\pi R^2 \sigma_x. \quad (8)$$

На основании (2) и (7) уравнение (8) можно переписать в виде

$$L \frac{d^2 L}{dt^2} = \frac{\pi R_0^2 L_0}{M} a \operatorname{th} b \dot{\varepsilon}(t) \quad (9)$$

или, принимая для скоростей деформации вместо точного соотношения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt}, \\ \dot{\varepsilon}(t) &= -\frac{1}{L_0} \frac{dL}{dt} \end{aligned} \right\}$$

и, учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 L}{dt^2} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dL} \left(\frac{dL}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{d\dot{L}^2}{dL}, \\ L &= L_0 (1 - \varepsilon), \quad \frac{dL}{dt} = \dot{L} = -L_0 \dot{\varepsilon}, \end{aligned} \right\}$$

имеем

$$-(1 - \varepsilon) \frac{d^2 \varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{2\pi R_0^2}{ML_0} a \operatorname{th} b \dot{\varepsilon}(t). \quad (10)$$

Если ввести новую переменную $b^2 \varepsilon^2(t) = y$ и обозначить через

$$\lambda = \frac{2\pi R_0^2}{ML_0} ab^2,$$

то окончательно уравнение движения запишется так:

$$-(1 - \varepsilon) \frac{dy}{d\varepsilon} = \lambda \operatorname{th} \sqrt{y}. \quad (11)$$

Начальные условия

$$t = 0 \left\{ \begin{aligned} L &= L_0, \\ \frac{dL}{dt} &= -u_0 \end{aligned} \right.$$

в новых переменных переписутся в виде

$$t = 0 \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= 0, \\ y_0 &= b^2 \dot{\varepsilon}(0)^2 = b^2 \frac{u_0^2}{L_0^2} = b^2 \omega_0^2, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где $\omega_0^2 = \frac{u_0^2}{L_0^2}$.

Решение дифференциального уравнения (11) при начальных условиях (12) имеет вид

$$\varepsilon = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{y}}} \quad (13)$$

На основании формулы (13) текущая длина сжимаемого образца запишется так:

$$L = L_0 e^{-\frac{1}{\lambda} \int_{y_0}^y \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{y}}} \quad (14)$$

Наибольшее укорочение образца до длины L_1 произойдет в момент, когда скорость ударяющего тела будет полностью потеряна, то есть при $y = y_1 = 0$. Тогда длина образца после удара определится формулой:

$$L_1 = L_0 e^{\frac{1}{\lambda} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{y}}} \quad (15)$$

и, следовательно, максимальное относительное сжатие образца будет определяться следующим выражением:

$$\varepsilon_1 = \frac{L_0 - L_1}{L_0} = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{y}}} \quad (16)$$

Для определения неизвестных постоянных a и b , входящих в выражение (16), можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= L_0 e^{\frac{1}{\lambda} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{b}}} \\ \sigma_s &= a \operatorname{th} b \dot{\varepsilon}_{cr} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $\dot{\varepsilon}_{cr}$ — скорость деформации, полученная при статических испытаниях образца из того же материала, во время которых получаем σ_s

(предел текучести). Для этого логарифмируем первое уравнение (17):

$$\ln \frac{L_1}{L_0} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{y_0} \frac{dy}{\operatorname{th} \sqrt{y}}.$$

Подставляя в последнее значение a из (17), получим

$$\ln \frac{L_1}{L_0} = \frac{ML_0}{2\pi R_0^2} \frac{1}{b^2} \frac{\operatorname{th} b \epsilon_{\text{ст}}}{\sigma_s} \int_0^{y_0} \operatorname{cth} \sqrt{y} dy. \quad (18)$$

Используя разложение $\operatorname{cth} \sqrt{y}$ в степенной ряд, интегральной член в (18) можно представить в виде

$$\int_0^{y_0} \operatorname{cth} \sqrt{y} dy = 2\sqrt{y_0} + \frac{2}{9} y_0 \sqrt{y_0} - \frac{1}{45} \cdot \frac{2}{5} y_0^2 \sqrt{y_0} + \dots \quad (19)$$

Если ограничиться первыми двумя членами и ввести обозначения:

$$\frac{2\pi R_0^2}{ML_0} = A, \quad C = \ln \frac{L_1}{L_0}, \quad (20)$$

то для неизвестных постоянных a и b получим следующие выражения:

$$b^2 = \frac{\frac{AC \sigma_s}{\epsilon_{\text{ст}}} + 2\omega_0}{\frac{2}{9} \omega_0^3 + \frac{AC \sigma_s}{3} \epsilon_{\text{ст}}}, \quad a = \sigma_s \cdot \frac{3 + b^2 \epsilon_{\text{ст}}^2}{3b \epsilon_{\text{ст}}}. \quad (21)$$

После того как постоянные a и b найдены на основании (16) можно определить теоретическое значение относительных укорочений. Ниже приведено сравнение значения относительных укорочений, полученных в настоящей работе и вычисленных по формулам, приведенным в работе [1].

Величины $\epsilon_{\text{теор.}}$ и подсчитаны по формулам А. А. Ильюшина, а значения ϵ_1 вычислены по формулам, полученным в настоящей работе.

$\sigma_s = 4100 \text{ кг/см}^2, \quad \epsilon_{\text{ст}} = 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$				
A	$\omega_0 \left(\frac{1}{\text{сек}} \right)$	$\epsilon_{\text{экспер.}}$	$\epsilon_{\text{теор. и.}}$	ϵ_1
111,094	318	0,145	0,1460	0,15
111,952	328	0,1400	0,1460	0,14
111,04	818	0,5175	0,6090	0,59
110,46	691	0,4775	—	0,48
112,64	1018	0,7170	0,6470	0,72

Из таблицы видно, что линейная зависимость напряжения от скорости деформации при больших значениях скоростей последней дает заниженные деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. „Уч. зап. МГУ. Механика“, вып. 39, 1940.
2. Deutler H. Experimentelle Untersuchungen über die Abhängigkeit der Zugspannungen von der Verformungsgeschwindigkeit. Physikalische Zeitschrift, 633. 1932, S. 247.
3. Prandtl L. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. ZAMM, 8. 1928, S. 85.

Э. Г. Мефдижев

Силиндрик нүмүнэнин зэрбэдэн сыхылмасы хаггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ өзлү пластик материалдан хазырланмыш цилиндрик нүмүнэнин зэрбэдэн сыхылмасы мөсэлэсиндэн бөһс едилир.

Нүмүнэнин күтлэси зэрбэ ендирэнин күтлэсинэ нисбэтэн кифажэт гэдэр кичик көтүрүлүр ки, эталэт гүввэсини нээрэ алмамаг мүмкүн олсун.

Кәркинлик деформасија сүр'этиндэн гиперболик танкенс гануну илэ асылдыр; бурада жүкләмэ вэ жүкдэн азадолма фэргли һесаб олу-нур.

Нисби гысалма нээрэ олараг тапылмыш вэ (1) дүстур илэ мүга-јисэси чэдвэлдэ верилмишдир.

Г. М. МЭММЭДОВ

ШЭРГИН КӨРКЭМЛИ РИЈАЗИЈАТЧЫСЫ ӨМЭР ХӘЈЖАМЫН (1048—1131) ҺӘЈАТЫ ВӘ ЧӘБРӘ АИД ИШЛӘРИ ҺАГГЫНДА

Өмәр Хәјжам әсасән рүбаи јазан шаир кими мәшһурдур. Онун өл-мәз рүбаиләри Шәргин бир чох өлкәләриндә дилләр әзбәри олмуш вә мүхтәлиф дилләрә тәрчүмә олунараг, дүнјанын мүхтәлиф јерләринә јайылмышдыр. Лакин Хәјжам тәк шаир кими дејил, ејни заманда, бөјүк алим кими дә мәшһурдур. Елмин тарихиндә Хәјжамын ријазии практи-калары мүһүм јер тутур.

Хәјжамын вәтәни Ираннын Хорасан вилајәтинин вахтилә чичәклән-миш олан Нејшабур шәһәридир.

Хәјжам тарихдә ашағыдакы кими шөһрәтләндирилмишдир:

حكيم غياث الدين ابو الفتح عمر ابن ابراهيم الخيام النيشابوري.

Һәким Гијасәддин Әбүлфәтһ Өмәр ибн-Ибраһим әл-Хәјжам әл-Нејшабури.

Гијасәддин—динин сығынағы, алимләрә верилән фәхри ләгәбдир. Әбүлфәтһ әрәбчә фәтһин атасы демәкдир (Хәјжамын күнјәсидир). Өмәр ибн-Ибраһим Хәјжамын хүсуси адыдыр. Нејшабури исә онун Хораса-нын Нејшабур шәһәриндән олмасыны көстәрир. Хәјжам—чадыр тикән мәһнасында атасынын пешәсини билдирир. Хәјжамын рүбаиләриндән бири онун адынын әһәмијәтинә ишарәдир.

خیام که خیمهای حکمت، میدوخت در آتش شمع قنار ناگه بسوخت

مقراض اجل طناب عمرش ببرد دلال اجل براگانش بفروخت

Фәлсәфә чадьолары тикән Хәјжам

Гәм одуна дүшүб һакәтгән јанды.

Әчәл гағасы нун өмрүнүн ипләрини кәсди

Өлүм дәлалы ону мү-тә сатды.

Хәјжам һаггында мәһүматын бир һиссәсинә онун әсәрләриндә, ди-кәр һиссәсинә исә башга мүәллифләрин әсәрләриндә раст кәлмәк олар. Хәјжамын әсәрләри ичәрисиндә ән чох онун рүбаиләри горунуб сахла-нылмышдыр.

Хәјжамын рүбаиләри мүхтәлиф өлкәләрдә дәфәләрлә чап едилмиш-дир. Бунларын сырасында һисбәтән мүкәммәл оланы мүасир Иран тәд-гигатчысы Әббас-Игбал тәрәфиндән 1946-чы илдә нәшр едилән „Јади-кар“—„یادگار“ журналында чап едилмишдир.

1897-чи илдә мәшһур рус шәргшүнасы Жуковски бир сыра дәгиг дәлиләр әсасында Өмәр Хәјжамын мәһз өзүнә мәнсуб олан рүбаилә-

рини ајырмаға чалышмышдыр. Жуковскијә көрә, 252 рүбаи мүбаһисә-сиз Хәјжамын өзүнә мәхсусдур.

Хәјжамын 10 елми әсәри мәһүмдур. Бунлардан I-си ријазият аиддир:

1. Чәбр вә мүгабилә мәсәләләринин исбатына аид трактат—رساله في البراهين على مسائل الجبر المقابلة

2. Евклидин китабындакы чәтин постулатларын изаһы—شرح ما اشكل من مصادرات كتاب اقليدس

II. Физикаја аид әсәрләри:

1. Һикмәт ме'јары—ميزان الحكمة

III. Фәлсәфи әсәрләри:

1. Варлыг вә вәзифәләр һаггында трактат—رسالة الكون والتكليف

2. Үч мәсәлә һаггында чаваб—الجواب عن ثلاث مسائل

3. Универсал елм мөвзусуна аид аглабатан изаһ—ايضا العقلي في موضوع العلم الكلي

4. Варлыг һаггында трактат—رسالة في الوجود

IV. Тарихә аид әсәрләри:

1. Новруз бајрамы һаггында—نوروزنامه

V. Астрономијаја аид әсәрләри:

1. Мәликшаһ адына астрономија чәдвәли китабы—كتاب الزيج الالهكشاھی

VI. Әдәбијјата аид әсәрләри:

1. Рүбаиләр—رباعيات

Бу әсәрләрдән 7-си әрәб дилиндә, 3 сонунчу әсәр фарс дилиндә-дир. Рүбаиләрдән башга, галан әсәрләрин тәрчүмәси ријазият тари-хи мүтәхәссиси проф. Б. А. Розенфелд, кириш мәгаләси вә тәфсир исә јенә һәмин алим вә А. П. Јушкевич тәрәфиндән 1961-чи илдә Москва-да „Өмәр Хәјжамын трактатлары“ ады илә чап едилмишдир.

Көркәмли тарихчи Рәшидәддин Фәзлүллаһ һәмәдани (1247—1318) „Чамеүл тәварих“ әсәриндә Хәјжамын ушаглыг дөврү һаггында белә бир әфсанә гејд едир:

Вәзир Низамүлмүлк, һәсән-Сәббаһ вә Хәјжам ушаглыгда Нејша-бурда бир јердә охујурдулар. Ушаглыг адәти үзрә мөһкәм достлуг едирдиләр. Онлар анд ичирләр ки, онлардан бири јүксәк вәзифәјә чат-са, галанлара көмәк етсин. Белә олур ки, Низамүлмүлк Сәлчуг дөвлә-ти заманы вәзир олур. Өмәр Хәјжам онун јанына кәлир вә ушаглыг әһдини онун јадына салыр. Низамүлмүлк дејир ки, Нејшабурун һаки-мијјәтини сәнә тапшырырам. Хәјжам бөјүк алим кими дејир ки, мән һакимијјәт һаггында дүшүнмүрәм, јахшысы будур ки, әмр ет һәр ил мәнә мүәјјән мигдарда мааш версинләр. Она көрә дә Низамүлмүлк она Нејшабурун кәлириндән илдә 10.000 динар верилмәсини әмр етди.

Рәшидәддиндән фәргли олараг, XV әсрдә јашамыш Әһмәд Тәбризи өзүнүн „طربخانه“ (Шәнлик еви) әсәриндә јазыр ки, Хәјжам илк чаван-лыг дөврүнү Бәлхдә јашамыш, анчаг өмрүнүн ахырларында Нејшабур-да олмушдур. Тәбризи көстәрир ки, Хәјжам илк тәһсилени тәдгигат-чыларын, алимләрин башчысы Шејх Мәһәммәд Мәнсурун јанында алмыш вә 17 јашында икән фәлсәфәнин бүтүн саһәсиндә дәрин мәһу-мата малик олмушдур.

Әлбихаки Өмәр Хәјжамы фәлсәфә елминин мүхтәлиф саһәсиндә Әбу-Әли Синанын давамчысы кими көстәрир. Әбу-Әли мәшһур Әбу Әли ибн-Синадыр (980—1037) ки, буна Авропада Авессена дејирдиләр.

Орта эсрләрде фәлсәфәнин мұхтәлиф сәһәләри дедикдә мұхтәлиф елмлар баһша дүшүлүрдү. Фәлсәфә елми дедикдә „Лүксәк елм“, јә’ни дөврүн фәлсәфәси, „Орта елм“ ријазийјат, „Ашағы елм“ физика, „Әмә-ли елм“ исә сијаси, һүғуги, әхлағи елм баша дүшүлүрдү.

Зәкәрийјә Әл-Гәзвини өзүнүн каината аид „Космографија“ китабында көстәрир ки, Хәјјам тәһсилни гуртардыгдан сонра бөјүк бәдбәхтликләр кечирмишдир. О дөврдә алимләрин мүгәддәраты һакимләрин онлара олан мүнәсибәтиндән, еләчә дә алимни сарајда олан чәкишмәләрә мүнәсибәтиндән вә дөвләт дәјишликјиндәки хидмәтиндән чох асылы иди. Хүсусән, о дөврдә тез-тез баш верән, шәһәр вә кәндләри харабазара чевирән мүнәрибәләр дә алимләрин һәјәт вә мәишәтләринә кәскин тә’сир едирди. Хәјјамын бәдбәхтлији ајдын сөзләрлә өзүнүн кәскин тә’сир едирди. Хәјјамын бәдбәхтликдә верилмишдир. Хәјјам шика-јәт едир ки, о, пис шәраит үзүндән узун илләр чәбр илә мәшғул ола билмәмишдир.

Хәјјам көстәрир ки, биз алимләрин мәһв олмасынын шаһиди олмушуг, онлардан аз бир һиссә вә бөјүк әзаблар чәкән әһали галыр. Бу шәраитдә алим кими көрүнәнләрин чоху һәгигәтә јалан кејдириб, елмдән бихәбәр олдуғлары һалда, өзләрини билән кими көстәрирдиләр. Бу јаланчылар елм илә јох, анчаг өзләринин рәзил мәгсәдләри илә марағланырдылар. Онлар елмлә мәшғул олан, һәгигәти севән, јаландан вә икиүзлүкдән гачан адамлара истәһза вә пахыллыг едирдиләр.

Хәјјамын бәдбәхтлији ондадыр ки, онун чаванлыг дөврү Сәлчуг истиласы дөврүнүн илк илләринә дүшмүшдүр. Бунунла әлагәдар олараг о, Хорасаны тәрк етмишдир. Сонра Хәјјам Гараханиләр дөвләти тәрәфиндән идарә олуна Мавәраун-Неһрдә (Орта Асијада) олмушдур.

Хәјјам чәбр әсәринин киришиндә өз бәдбәхтлијиндән данышдыгдан сонра јазыр: О бу әсәри Сәмәргәндин баш газиси шанлы вә мисилсиз газиләр газиси чәнаб Әбү Таһирин (1039—1091) көмәји илә јазмаға имкан тапмышдыр. Хәјјам сөзүнә давам едәрәк јазыр: Она јахын олмағым сајәсиндә бүтүн итирдикләрим вә мәһрумијәтләрим бәрпа етмәјә имкан тапдым. Сүмүјүмә вә илијимә гәдәр өјрәндијим фәлсәфи мәсәләләри ихтисар јаздым. Ријазийјат елми даһа артыг үстүнлүјә малик олдуғундан бу чәбри тәклифләри көстәрмәјә башладым (сәһ. 70).

Хәјјамын сөзләриндән көрүнүр ки, онун елми фәалијјәти дөврүн һакиминдән чох асылы олмушдур. Чүнки анчаг бөјүк нүғуз саһиб Хәјјамын ишләмәсинә шәраит јарада биләрди. Хәјјамын чәбр әсәринин киришиндән мә’лум олур ки, бу әсәрин мүнһум һиссәси Сәмәргәнддә јазылмышдыр.

Хәјјам 1074-чү илдә Мәлик шаһын сарајына дә’вәт едилер, бу дөврдә Солтан Мәлик шаһ вә Низамүлмүлк ән көркәмли мүнәччимләри дә бураја дә’вәт едиләр. Онлар Новруз бајрамыны, јә’ни тәзә илин башландығы күнү јаз кирән күнә кәтириләр. Беләликлә, Солтан тәғвими мејдана кәлир.

Хәјјамын рәһбәрлик етдији рәсәдхананын тикилмәси һағгында Әл-Гәзвини көстәрир ки, Мәлик шаһ Хәјјам улдузлары тәдгиг етмәк үчүн вә нүчум әләтләри алмаға күлли мигдарда пул бурахмышды. Әмәр Хәјјамын рәһбәрлик етдији рәсәдхана Мәлик шаһ дөвләтинин пајтахты Исфәһан шәһәриндә јерләширди. Бу рәсәдхананын фәалијјәти нәтичәсиндә, јухарыда көстәрилдији кими, тәғвим ислаһ едилди.

1077-чи илдә Хәјјам „Евклидин китабынын киришиндәки чәтинләрә аид шәрһ“ елми әсәрини гуртарыр. Бу дөврдә Әмәр Хәјјам тәрәфиндән ибн-Синанын „Хүтбә“ әсәри әрәбчәдән фарс дилинә тәрчүмә едилер. Әмәр Хәјјам тәрчүмәнин киришиндә јазыр: „1079-чу илдә мән бир чох исфәһанлы достларым хаһиш етдиләр ки, философ Шеј-

хүл рәис Әбу-әли ибн-Сина тәрәфиндән јазылмыш „Хүтбә“ әсәрини әрәбчәдән фарсчаја тәрчүмә едим. Мән бу тәклифи һәвәслә гәбул етдим“.

Хәјјамын дүшмәнләри она чохлу иттиһам атырдылар. Дејирдиләр ки, куја Хәјјам аллаһын варлығыны инкар едир вә дини ајинләрин ичрасынын зәрурилијини гәбул етмир. Она көрә 1080-чы илдә фарс әјаләтинин газиси Әбу-Нәср Әннәсәвинин мәктубунун чавабында Хәјјам رسالة الكون والتكليف — варлыг вә вәзифә һағгында трактатыны јазыр ки, шүбһәләри өз үзәриндән көтүрсүн. Хәјјамын чаваблары көрүнүр кафи һесаб олунуб. Лакин Хәјјамын мүсәлман руһаниләри илә мүнәсибәти кәркин иди. Әл-Гәзвини белә бир һадисә һағгында јазыр, бу һадисә Хәјјамын Нејшабурда олдуғу дөврә аиддир. Белә нәгл едир ки, бир нәфәр дин хадими һәр күн күнчыхмамыш Әмәр Хәјјамын јанына кәлир вә онун рәһбәрлији илә фәлсәфә елмини өјрәнир, чамаат арасында исә ону писләјирди. Онда Хәјјам өз јанына бүтүн тәбилчи вә зурначылары чағырырды, дин хадими адәти үзрә онун јанына кәлдикдә Әмәр әмр едир ки, тәбилләри дөјүб зурналары чалсынлар. Һәр тәрәфдән чамаат ора јығышыр. Әмәр Хәјјам онлара дејир:

„Нејшабурлулар, будур сизин дин хадиминиз, о һәр күн бу вахт мәним јаныма елм өјрәнмәјә кәлир. Сизин јанынызда исә сиз билән сөзләри данышыр. Һәркаһ, доғрудан да мән о дејән адам кими варамса нә үчүн о, мәнән билик алыр, һәркаһ белә дејилсә нә үчүн о, мүәллиминин абырыны төкүр“ (Гәзвини, сәһ 318).

Хәјјам бә’зи руһаниләриндә дин хадимләринә истәһза едир:

ای مفتی شهر از تو پرکار نریم بالین همه مستی ز تو هوشیار تریم
تو خون کسان خوری و ماخون رزان انصاف بدہ کدام يك خونخار تریم

Еј шәһрин мүфтиси сәндән ишкүзарыг
Бу гәдәр мәстликмизә бахмајараг сәндән ајығыг.
Сән адамларын ганыны, биз исә үзүмүн ганыны ичирик.
Инсаф илә де һансымыз даһа ган ичәник.

Ајдындыр ки, дин хадимләри буна чаваб олараг бә’зән ачыг, бә’зән кизли дүшмәнчилик едирдиләр.

1092-чи илдә Мәлик шаһ өлдүкдән сонра Хәјјам Сәлчуг султанлары илә әлагә сахлајыр.

Низамүлмүлк вә Мәлик шаһ өлдүкдән сонра, рәсәдхана фәалијјәтдән дүшдүјү дөврдә, „Новрузнамә“ һазырланыб гуртарды. Бу, хүсуси тарихә аид трактат, јени Сәлчуг һакими адына бурахылды. Бу мәгсәдлә ки, күнәш тәғвими илә әлагәләндирилмиш ил бајрамы-Новруз һакими марағландырсын вә рәсәдхананын мадди еһтијачыны өдесин.

Лакин 1092—1094-чү илләрдә дөвләт башчысы Туркан Хатун Хәјјама һөрмәт етмирди. Чүнки Хәјјамла гәдим дүшмәнчиликләри варды.

Өмрүнүн ахырларында Хәјјамын јүксәк руһани тәбәғәси илә мүнәсибәти кәскин сурәтдә писләшир. Тарихчи Чәмәләддин Әл-Көфти (1172—1231) „Тарихүл-һүкәма“ әсәриндә көстәрир ки, Хәјјам һәччә кетмәјә мәчбур олур. Мәккәјә аллаһын горхусундан јох, анчаг өз чанынын горхусундан кедир.

Бағдадда оlanda јахын адамлары онун јанына кәлир. Лакин Хәјјам онларла көрүшмүр вә Мәккәдән гајыдандан сонра јашадығы јердә сәһәр-ахшам ибадәтлә мәшғул олур. Бу шәраитин јаранмасыны бә’зән белә изаһ едиләр ки, Хәјјам өмрүнүн ахырларында, Әлбихакинин сөзләринә көрә, пис хасийјәтли вә јазмагда, дәрс вермәкдә хәсис олмушдур. Ејни заманда, бунун әкси олан фикирләр дә вардыр.

Шәһрузи көстәрир ки, Хәјјам тәләбәләрә вә она гулаг асанлара гаршы чох мөһрибан олмушдур.

ХЭЈЖАМЫН ВЭФАТЫ

Хэјжамын вэфаты Низами Сэмэргэндинин сөзлэринэ эсасэн мүэјжэн едилмишдир. О, Хэјжамын өлүмүндэн 4 ил сонра онун гэбринин зијарэ-тинэ кедир (ничри 506, милади 1112-чи илдэ). Хэјжам вэ Хачэ Мүзэф-фэр Исфэрази Бэлхдэ Әмир Әбу Сә'дин сарајында идилэр. Мән онун-ла бирликдэ фэрәһли јығынчагда иштирак едирдим. Орада ешитдим ки, Хэјжам бир һәгигәти исбат едэн кими дејир: „Мәним гәбирим елә бир јердә олачаг ки, һәр ил баһарда шимал күләји мәним үстүмә күл-ләр төкөчәк“. Бу сөзләр мәнә гејри-мүмкүн кими көрүнүрдү. Лакин мән билирдим ки, белә адам эсассыз сөз демәз.

1135-чи илдэ мән Нејшабура кетмишдим. Артыг 4 ил иди ки, о бөјүк адам бу дүнјаны јетим гојуб кетмишди. О, мәним мүәллимим олмушду. Чүмә күнү мән онун гәбиринин үстүнә кетдим вэ бир адам көтүрдүм ки, гәбири мәнә көстәрсин. О мәни гәбристана апарды. Мән сола чеврилдикдә онун гәбирини бағын дивары јанында көрдүм. Онун архасында гајсы ағачларынын чичәкли будаглары көрүнүрдү. Онлар өз чичәкләрини бу гәбрин үстүнә елә сәхавәтлә төкмүшдүләр ки, гәбир бу чичәкләриналтында тамамилә өртүлмүшдү. Бэлхдә ондан ешитдијим сөзләр јадыма дүшдү вэ ағладым. (Низами Сэмэргән-ди, сәһ. 71—72).

Демәк, Сэмэргэндинин дедијинә көрә, Хэјжам 1135-чи илдән 4 ил габаг, јә'ни 1131-чи илдә вэфат етмишдир. Онун өмрү 83 күнәш или гәдәр олмушдур.

Әлбихаки гејд едир ки, Хэјжамын бачанағы Мәһәммәд Әлбәғдади мәнә белә нәгл едир: „Бир дэфә о, дишләрини гызылдиш тәмизләјән илә тәмизләјирди вэ диггәтлә Ибн-Синанын метафизикаја аид китабы-ны охујурду. О, китабын тәк вэ чәм башланғычына чатдыгда диштә-мизләјәни ики вәрәгин арасына гојду вэ деди: „Пак адам чағырын мән вәсијјәтими јаздырым“. Сонра о, галхыб дуа етди, бундан сонра һеч бир шеј јемәди вэ ичмәди. Ахырынчы кечә намазыны гылыб јерә гә-дәр сәчдә етди вэ деди: Еј илаһи, сән билирсән, мәним имканым гә-дәри сәни таныјырам. Мәни бағышла, бу мәним сәнә тәрәф олан јолумдур. Буну дејиб өлдү“ (32, 33-чү сәһи фәләр арасына јапышдырылмышдыр).

Гејд етмәк лазымдыр ки, Мәһәммәд Бағдади XII әсрдә јашамыш бир ријазийјатчынын адыдыр. О, Хэјжамын Евклидин башланғычлар ки-табына аид јаздығы коментаријә јакын проблем үзәриндә ишләмишдир. О, Евклидин 10-чу китабына коментари назырламышдыр. Еһтимал ки, бу ријазийјатчы Хэјжамын бачанағы Мәһәммәд Бағдадидир. Тәбризинин „Шәнлик еви“ әсәриндә көстәрилир ки, Хэјжамын аилә һәјатына тәма-јүлү олмадығына көрә нәсли галмамышдыр. Хэјжамын гәбири Нејша-бурда, Имам Мәһрунун гәбири јанындадыр.

1934-чү илдә мүхтәлиф өлкәләрдә јашајан вэ Хэјжамын рүбаиләри-ни севән адамларын вердикләри вәсаит эсасында мәгбәрә дүзәлдил-мишдир. Гәбирин үстүндә јазылмышдыр:

Һәким Өмәр Хэјжам.

516-чы ил гәмәри тарихдә вэфат етмишдир. Милади тарихлә 1122-1123-чү илә бәрабәрдир. Гәбирин үзәриндә јазылмыш рүбаинин ахы-рынчы мисралары ашағыда верилмишдир:

بر تربت خيام نشين کام طلب يك احظه فراغ از عها ايام طاب
تاريخ بنای بقه اش گر خواسی رازو دل و دين ز قير خيام طاب

Шәрг адәтинә көрә, әдәд көстәрән һәрфләрин чәми ничри 1313-чү ил вэ шәмси (1934-чү ил, милади тарихә ујғун) тарихи көстәрир ки, бу да мәгбәрәнин тикилмә тарихидир.

Өмәр Хэјжамын чәбри илк дэфә 1742-чи илдә Жерар Мер-ман (Gerard Merman) адлы ријазийјатчынын диггәтини чәлб етмишдир. О, өзүнүн һесаб флуksiјонуна (ријазийјатда флуksiон (Fluxion) сөзү дедикдә һәрәкәт, кәсимләз ахындан алынған кәмијјәт баша дүшүлүр. Мәсәлән, хәтт нөгтәнин флуksiјону вэ сәth хәттин флуksiјонудур. Бу, һәрәкәтин һәндәсәјә тәтбигидир вэ Нјутонун кәшфинә аиддир) аид әсәринин мүгәддимәсиндә һесабын инкишафында мүсәлман алимләри-нин хидмәтләриндән данышдыгда Варнер (Warner) тәрәфиндән Лејден шәһәринин китабханасына бағышланмыш Хэјжамын чәбр нүсхәсинин адыны чәкмишдир. О белә күман едир ки, бу нүсхә III дәрәчәли тән-ликләрин чәбри һәллине аиддир.

XVIII әсрдә ријазийјат тарихиндә хүсуси мөвге тутан Мүнткола Хэјжамын чәбриндән данышмышдыр. Бундан сонра доктор Картез (Gartz) Евклидин әсәрләрини тәрчүмә едәнләр вэ јајанлар һағында апардығы мүфәссәл тәһгигатда тәдгигатчыларын диггәтини бу китабын мүталиә-синә чәлб етмишдир.

1824-чү илин мајында мәшһур франсыз шәргшүнасы Седилло (Se-dillot, 1777—1832) „Јени Асија“ журналында дәрч етдирдији мәгалә-синдә јазыр ки, Хэјжамын чәбринә аид бир нүсхә әлјазмасы шаһ сара-јы китабханасында вардыр. Бунун мөвзусу Лејден китабханасындакы нүсхәјә чох охшардыр. Бир аз сонра Шал өзүнүн „Һәндәси методла-рын инкишафына аид тарихи нәзәр“ адлы әсәриндә Седиллонун мәга-ләләринә истинад едәрәк көстәрир ки, Хэјжамын чәбр китабы ријазий-јат елминә тарихи чәһәтдән олдуғча әһәмијјәтлидир.

1938-чи илдә Иран ријазийјатчысы Гулам Һүсејн Мүсаһибин Тәһ-ранда бурахылмыш جبر خيام „Хэјжамын чәбри“ адлы китабынын әрәбчә мәтнини, өзүнүн дедијинә көрә, Бинке чап етдирмиш вэ онун мүгәд-димәсиндә изаһаты белә вермишдир: әрәб мәтни тәртиб едилдикдә 3 нүсхәдән истифадә олунмушдур.

1-чи китаб Парис Милли китабханасынын әрәбчә нүсхәсидир. Бу-нун хәтти чох көзәл вэ диқәр ики нүсхәдән даһа дүзкүндүр. Лакин чох һиссәси нөгтәсиздир. Бурада олан шәкилләр дә нисбәтән ајдын-дыр. Бурада конус кәсиқләри әвәзинә даирә гөвсләри чәкилиб вэ бу гөвсләр тәпәдә кәсишдикләри јердә сиври бучаглар әмәлә кәтирир. Анчаг Евклид вэ Абалонусун китабларында теоремләр дејилән јерләр-дән башга һәр јердә әдәлләр рәгәмлә јазылмышдыр. Бурада әбчәд һесабы ишләнмишдир. Охунан кәлмәдә шүбһә оlanda һәр јердә бу нүсхәни әсас көтүрүрдүм.

2-чи китаб 1104 нөмрә илә Иран милли китабханасында сахланы-лыр. Бу нүсхәнин хәтти 1-чидән јакшы дејилдир. Лакин нөгтәләр вар-дыр. Бә'зи һиссәләрдә китабын кушәләри рүтубәтдән позулдуғуна көрә охумаг мүмкүн дејилдир.

3-чү китаб Лејден китабханасынын нүсхәсидир, Варнерин 14 чилд-лик китабынын бир һиссәсидир.

Хэјжамын чәбрини инкилис дилинә тәрчүмә едән мүтәрчим јазыр ки, Хэјжамын чәбри мүкәммәл бир әлјазмасы нүсхәсиндән тәрчүмә едилмишдир. Бу, Колумбија профессору Симитин тәрчүмә етдији ки-табдыр. Бу китабы Симит (Dabid Eugene Smith) бир нечә ил габаг Лаһор шәһәриндә бир иранлы тачирдән әлә кәтирмишдир. Онун 99 сәһифәси вардыр. Охунан нәсх хәтти илә јазылмышдыр. Бә'зи јерләр-дә нөгтәсиздир. Мүтәрчимә көрә, бу нүсхә Лејдендәки әрәб мәтни илә ујғун кәлир. Лакин китаб үнвансыздыр. Бу ики нүсхә ахырда тә-фавүтлүдүр. Китабын ады Орду дилиндәдир. Бу тәрчүмә 1931-чи илдә Нју-Йоркда чап олунмушдур.

Нəһајəт, Өмəр Хəјжамын əсəрлəри (рубаилəрдəн башга), јухарыда дејилдији кими, əн мукəммəл шəкилдə 1961-чи илдə Москва шəһəриндə „Өмəр Хəјжамын трактатлары“ ады илə Б. А. Розенфелд вə А. П. Јуш-кевич тərəфиндəн бурахылмышдыр. Китабын кириш һиссəсиндə кəстə-рилир ки, бу китабын чəбр һиссəsi Парис милли китабханасынын əлжəзмасы əсасында вə һəндəsi трактаты Лейден университетинин кита-ханасында олан əлжəзмасына əсасən тəртиб олунмушдур.

Хәјҗам китабын 1-чи һиссәсиндә чәбр вә мугабилә елмини әдәди, һәндәси мәчһуллары тапмаг елми һесабы едир вә һәр тәнлик үчүн ики чәһәтдән һәллин исбатыны лазым билир. I мәчһулун әдәд, II мәчһулун һәндәси мигдар (узунлуг, сәтһ, һәчм) олмасы ганунуну Хәјҗам һәмишә әсас тутур вә бу ганунун бирини диқәринин әвәзедичиси кими көтүрмүр (әрәб мәтни, 10 сәһ.)

Хэјјам кэмијјэтлэри хэтт, сэтх, чисим, замана тэгсим едир вэ кес-
тэрир ки, адэтэн, заман чэбри мäsэлэлэрэ дахил олмур. Сонра гејд
едир ки, X , X^2 , X^3 узунлуг, сэтх вэ һэчм кэмијјэтлэринэ охшардыр.
Бундан јүксэк дэрэчэ исэ өлчүнүн 3 истигамэтлэ мөһдуд олмасы сә-
бэбинэ керә һагиги кэмијјэтлэрэ дахил олмур вэ көтүрүлмүр, онла-
рын ишләнмәси мөчазидир. Элбәттә, бу фикир Декартдан габаг гәбул
олунмушду. Лакин Декарт тәрәфиндән рәдд едилди.

Хәјжам илк дәфә олараг бир, ики вә үч дәрәчәли тәнликләри мүн-
тәзәм сурәтдә синифләрә аяырыр. Хәјжам әввәлләр үч дәрәчәли тән-
ликләри икиһәдлиләрә аяырыб, бунлара мүфрәдат مفردات дејир. Сон-
ра да үч вә дөрдһәдлиләрә аяырыр вә мүгтәринат مقترنات адланды-
рыр. Бүтүн бу тәнликләр әрәб дилиндә сөзләрлә верилир. Бунлары
мүасир дилдә ашағыдакы кими вермәк олар:

Икиһәдлиләр: $a = x^*$ $a = x^{2*}$ $a = x^3$
 $ax = x^{2*}$ $ax^2 = x^3$ $ax = x^3$

Үчхэдлэлэр 12 синифдир. Бунлардан үч синиф X вэ X^2 эдэдлэри арасындадыр.

$$x^2 + ax = b^*, \quad x^2 + b = ax^*, \quad x^2 = ax + b^*.$$

$$x^3 + ax^2 = bx^* \quad x^3 + bx = ax^{2*} \quad x^3 = ax^2 + bx^*.$$

$$x^3 + ax^2 = bx^* \quad x^3 + bx = ax^{2*} \quad x^3 = ax^2 + bx^*.$$

$$x^3 + Bx = C \qquad x^3 + Ax^2 = C$$

$$x^3 + Bx = C \qquad x^3 + Ax^2 = C$$

$$x^3 + C = Bx \qquad x^3 + C = Ax^2^*$$

$$x^3 = Bx + C \quad x^3 = Ax^2 + C.$$

Дөрдүдүлүлэр 7 синифдир. Бунлардан 4 синиф:

$$x^3 + Ax^2 + Bx = C \qquad x^3 + Ax^2 + C = Bx^*$$

$$x^3 + Bx + C = Ax^2 \qquad x^3 = Ax^2 + Bx + C$$

вѣ 3 синиф:

$$x^3 + Ax^2 = Bx + C \quad x^3 + Bx = Ax^2 + C \quad x^3 + C = Ax^2 + Bx$$

шэклиндэдир.

Улдузлу тэнликлэр Хэјјамдан эввэл өјрэнилмиш вэ һэлл едил-
миш тэнликлэрдир.

Икиһэдли тэнликлэр, Хэјјам жаздыгы кими, бу тэнликлэрдэн анчаг үч эввэлинчи дэрэчэдэн, j -ни X вэ X^2 эдэдлэриндэн ибарэт оланлар Хэјјамдан габаг хэлл едилмишдир. Хэјјам икиһэдлилэрин нэр бирини эдэди вэ хэндэси үсулла хэлл етмишдир. Хэјјам тэрэфиндэн икидэрэчэли үчхэдли тэнликлэр вэ бунлара кэтирилэ билэн тэнликлэрин хэллинин женилији жохдур.

Бограт, Евклид və başgə јунан алимләри ики дәрәчәли тән-
ликләрин бә'зи һалларыны һәлл етмишләр.

Мүсәлман алимләрindən Харәзми—*خوارزمی* икидәрәчәли тәнлик-
ләрин бә'зи һалларыны һәлл етмишдир. Ирәлидә дејилдији кими, тән-
лијин мүсбәт чавабы олмадыгда ону Харәзми дә гејри-мүмкүн һеса-
б едирди. Хәјјам бу ишдә өзүндән габаг кәләнләрин ишинә бир шеј
әләвә етмишдир. Лакин онун үсулу Харәзминин үсулундан даһа мү-
кәммәлдир.

Икідэрэчэли тэнлижэ кэтирилэ билэн $x^2 + ax = bx$ кими тэнлик-
лэрдэ X сыфыр көтүрүлмүр. Һэндэси жолла исбат едилир ки, бу тэнлик
 $x^2 + ax = b$ тэнлији илэ мүадилдир.

Үч дәрәжәли тәнликләр Хәйямның китабының ән әһәмиyyətли һис-сәсидир.

Јунанлар үч дәрәчәли тәнликләрин бә'зи шәкилләринә Архимед мәсәләсиндә раст кәлмишләр. Јунан елми мүсәлманларын әлиנә дүш-
дүкдә онлар хүсусилә Архимед мәсәләси илә мәшғул олмушлар. Бу сәһдә Маһани мүвәффәғијјәтли иш көрмүшдүр. Бу мәсәләнин
һәлли $x^3 + c = ax^2$ һәллинә кәтирилмишдир. Она көрә дә бу тәнли-
ји бә'зән Маһани тәнлији адландырырлар.

Сабит ибн-Гәрә, Куһи, ибн-Һејсәм үч дәрәчәли тәнликләрин бә'зи шәкилләринин һәлли илә мәшғул олмушлар. Бунларын бә'зисини конус кәсікләри вәситәсилә һәлл етмәјә чалышмышлар. Лакин онлардан һеч бири Хәјжамын әлдә етдији көркәмли нәтичәләри алмамышдыр. Хәјжам биринчи олараг бу тәнликләрин бүтүн мүхтәлиф шәкилләрини һәлл етмишдир.

ЭДЭБИЈАТ

1. Омар Хайям. Трактаты. Изд-во Восточной литературы. М., 1961.
2. Гулам Нусейн Муслим ибн Хаџамын чабр ва мугабилеси (фарс дилиндэ). Тегран, 1939.
3. В. Ф. Каган. Основания геометрии, т. I, М.-Л., 1949.
4. З. И. Халилов. Насирэддин Tusинин ри'ази эсерлери наггында, Баку 1956.
5. Г. М. Меммедов. Э. Хаџам, IX—XV эслерде Јакын ве Орта Шартријазијате наггында. „Азербайжан ССР ЕА Хабарлари“ (физика-техника саријасы) № 6, 1960.
6. Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Математика стран Ближнего и Среднего Востока в средние века. „Советское востоковедение“, № 6, 1958,
7. Г. Д. Мамадзели. Мухаммед Насираддин Tуси. О теории параллельных линий и теории отношений. Баку, 1959.

О жизни и алгебраическом наследии известного
восточного математика Омара Хайяма

РЕЗЮМЕ

В статье освещены жизнь и творчество великого иранского математика Омара Хайяма при Мелик-шахском дворе, а также период его деятельности в Исфаханской обсерватории. В статье приводятся высказывания о Хайяме известных восточных историков: Рашид-эд-дина Хамадани, Ахмеда Тавризи, Закария Ал-Гезвини, Ал-Бихаки и др., а также заметка Низами Самарганди о смерти Хайяма.

Кроме того, сокращенно рассматривается алгебра Хайяма, в которой он разделяет уравнения I, II, III степеней на классы. Указываются типы уравнений III степени, которые были решены Хайямом.

С. Н. ГАДЖИЕВ, М. Я. АГАРУНОВ, Ю. Р. НАГДАЛИЕВА,
Т. Х. АЗИЗОВ, В. Н. ЧЕБОТАРЕВ, Ф. А. НАМАЗОВ

ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
КРЕМНИЙОРГАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

I. Энтальпия образования некоторых метилхлорсиланов

В [1] указано на невозможность калориметрического сжигания хлорпроизводных кремнийорганических соединений и предложен новый метод, позволяющий достигнуть полного сгорания этих веществ в калориметрической бомбе. Настоящая статья содержит результаты определения теплоты сгорания и стандартных энтальпий образования трех метилхлорсиланов по упомянутому методу. Работа проводилась на калориметре с изотермической оболочкой марки В-04 (рис. 1), сконструированном и изготовленном во Всесоюзном Институте метрологии им. Д. И. Менделеева Б. Н. Олейником с сотрудниками.

Прежде всего следует отметить, что этот калориметр превосходит существующие отечественные калориметры по постоянству константы охлаждения (отклонения от средней величины при каждом опыте не более 1% вместо 2—2,5%, имеющих у существующих калориметров), что является одним из основных критериев их оценки. Давать подробное описание установки считаем излишним, так как она лишь конструктивно отличается от известного калориметра ВНИИМ [2, 3], а по принципу работы идентична с ним. Перечислим лишь те изменения, которые введены нами совместно с ВНИИМ для улучшения работы установки.

1. В сосуде 7 (рис. 1) перемешивание усилено путем замены пропеллеров мешалки более наклонными и широкими лопастями 3.

2. Ртутный термометр заменен термистором и поэтому с установки удалены осветитель и стукалка.

3. Мотор мешалки сосуда, работающий на постоянном токе, заменен на синхронный „СД-09М“; число оборотов последнего (3000) при помощи редуктора уменьшено до оптимального—350 об/мин. Вследствие этой замены отпала необходимость в реостате, выпрямителе и в вольтметре постоянного тока, установленных на пульте.

4. Для предотвращения возможного трения, могущего привести к ошибкам, в отверстие сосуда калориметра, через которое проходит ось мешалки, поставлена тефлоновая втулка.

5. Приспособлена к сосуду, помимо собственной бомбы калориметра, и бомба 1 конструкции МГУ, в которой и проводилась данная работа.

6. Для улучшения интенсивности перемешивания в оболочке расширены окна на трубках винтовых мешалок 12 (направления движения воды на рисунке показаны стрелками); улучшена подгонка конусов на тех же трубках.

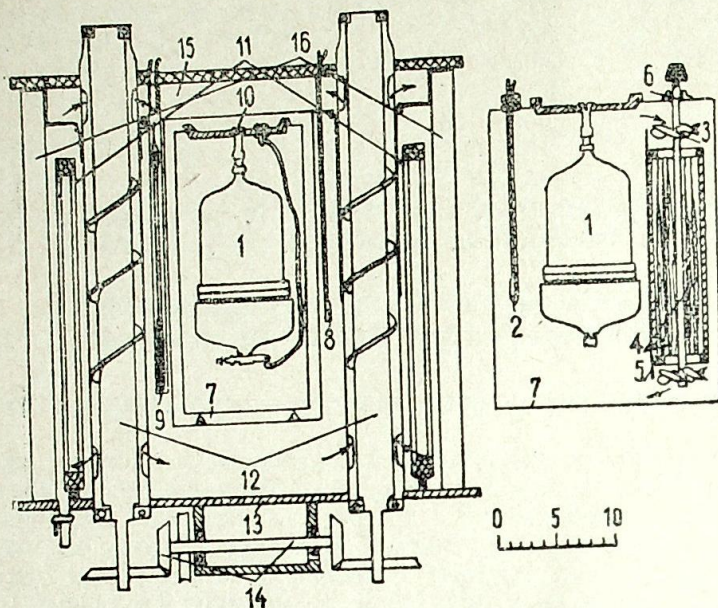


Рис. 1

Схема калориметра В-04; 1—бомба; 2—термистор; 3, 4, 5—соответственно, пропеллерная мешалка, нагреватель и ширма калориметрического сосуда; 6—теплоизоляционная втулка; 7—сосуд; 8—термистор оболочки; 9—контактный термометр; 10—штепсельные включения бомбы; 11—нагреватель оболочки; 12—винтовые мешалки оболочки; 13—оболочка; 14—зубчатая передача вращения винтовых мешалок; 15—крышка оболочки с циркуляцией воды; 16—теплоизоляционный кожух калориметра

7. Увеличено число оборотов червячных мешалок (с 800 до 1100), для чего их передача из гибкого валика была заменена ременной; заменен и мотор на более мощный.

8. Для тонкого регулирования силы тока в цепи нагревателя оболочки поставлено дополнительное регулировочное сопротивление в 100 ом.

9. Имеющееся на пульте устройство для подачи звуковых сигналов приспособлено также к переполюсовке и подаче световых сигналов, необходимых при работе с термистором [4] и т. д.

После указанных изменений воспроизводимость результатов при определении теплового значения по бензойной кислоте составляла $\pm 0,025\%$, постоянство константы охлаждения $\pm 1\%$, совпадение полученных данных по сжиганию контрольного вещества α -нафтола с литературными—в интервале $\pm 0,06\%$. Таким образом установлено, что калориметр В-04 сконструирован правильно и удовлетворяет требованиям точной калориметрии. Электрическая схема установки изображена на рис. 2. Измерения производились по методике, описанной в [5]. Тепловое значение калориметра, определенное по бензойной кислоте из ВНИИМ, равно $3176,9 \pm 0,7$ кал/град. Постоянство

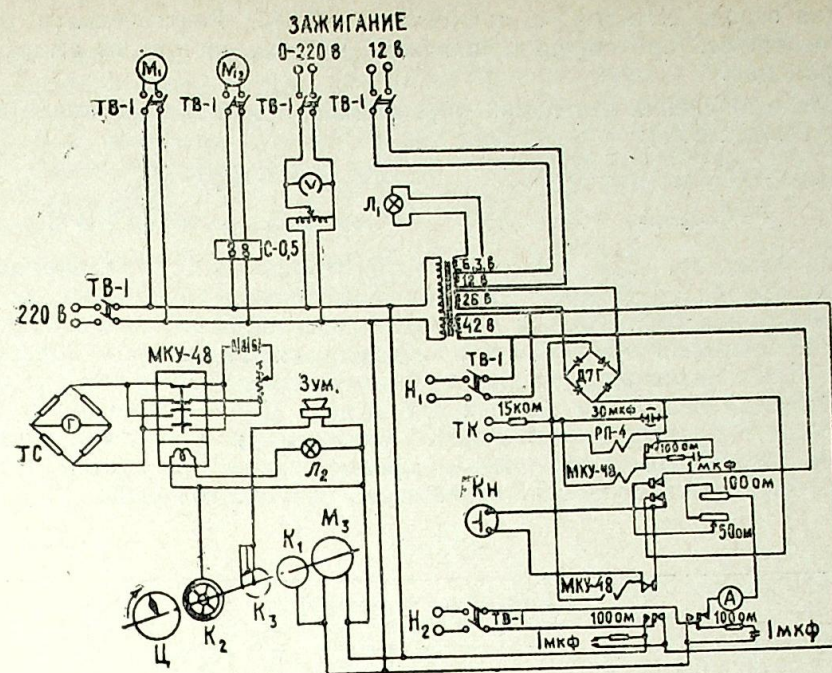


Рис. 2

Электрическая схема калориметрической системы: M_1, M_2 —двигатели для вращения мешалок; L_1 —сигнальная лампа; H_1 и H_2 —нагреватели; $ТК$ —контактный термометр; по измерительной схеме; TC —термистор; K_1 —скользящий токоподвод; K_2, K_3 —контакты реле и звукового мотора; L_2 —сигнальная лампа; M_3 —двигатель устройства переполюсовки и сигналов.

температуры оболочки поддерживалось автоматически при помощи контактного термометра особой конструкции с точностью $\pm 0,002^\circ$.

Таблица 1

Вещество	Темп. кип., $^\circ C$	d_4^{20}	n_D^{20}	Содержание хлора, вес. %
Триметилхлорсилан	57,6	0,8590	1,3890	32,7
Диметилдихлорсилан	70,1	1,0666	1,4008	55,1
Метилтрихлорсилан	65,8	1,2761	1,4123	71,3

В табл. 1 приведены параметры исследованных веществ, очищенных последовательно на ректификационных колонках с эффективностью в 19,5 и 48,5 теоретических тарелок.

Сжигание образцов производилось в бомбе с серебряной футеровкой по ранее описанному [1] методу. Отметим только то, что величина шарика испарителя (диаметр 36—40 мм) и расстояние от его дна до платинового воспламенителя (18—28 мм) изменялись в зависимости от характера вещества (они возрастали с увеличением содержания хлора). Полнота сгорания контролировалась визуально, как в [6, 7, 8], и в образовавшейся при реакции в бомбе снежно-белой SiO_2 продуктов неполного сгорания—частиц темного цвета—не наблюдалось даже в самом ничтожном количестве. Работа тока, подаваемого в бомбу на нагреватель, измерялась образцовым счетчиком

выпуска завода „Эталон“ с точностью $\pm 0,3\%$. Рентгенанализ SiO_2 , образовавшейся при горении, показал, что она состоит из аморфной модификации.

Для вычисления энтальпии образования приняты следующие значения (ккал/моль):

$$\Delta H_{\text{H}_2\text{O}(\text{ж})}^0 = -68,32; \quad \Delta H_{\text{CO}_2(\text{г})}^0 = -94,05 [9];$$

$$\Delta H_{\text{кварц (тв.)}}^0 = 217,75 [10]; \quad \Delta H_{\text{кварц аморф. SiO}_2}^0 = 2,12 [13].$$

Как известно, при сжигании хлорорганических соединений в калориметрической бомбе часть образовавшегося Cl_2 в ходе опыта превращается в HCl . Точный учет теплового эффекта этого превращения невозможен при обычной методике сжигания в стационарной бомбе. Для избежания этого нами было принято, что в момент сгорания образца весь хлор выделяется в виде Cl_2 и тепловой эффект постепенного превращения Cl_2 в HCl учитывается в поправке на теплообмен [12]. По-видимому, такое предположение не совсем точно, чем и объясняется большая погрешность результатов (табл. 2).

Таблица 2

Вещество	Навеска, г	Водное число, W	ΔT , исправленное	Количество теплоты Q, кал			ΔU сгорания, ккал/моль	$-\Delta n RT$ ккал/моль	ΔH сгорания, ккал/моль	Сумма теплообразования прод. реакции, ккал/моль	ΔH_{298}^0 , ккал/моль
				общее	электронагрева	сгорания образца					
Триметилхлорсилан	0,72036	3186,3	1,5708	5005,14	178,75	4826,39	727,91				
	0,91075	3186,3	1,9872	6331,88	275,79	6056,09	722,44				
	0,70979	3186,3	1,5482	4932,90	225,19	4707,71	720,59				
					Среднее: $723,64 \pm 4,4$			1,63	725,27	805,22	79,95
Диметилдихлорсилан	0,54058	3186,3	0,8333	2655,08	556,75	2098,33	500,97				
	0,81112	3180,8	1,0808	3237,84	199,89	3237,95	515,21				
	1,22737	3185,2	1,8703	5957,25	1196,14	4761,11	500,65				
	1,14988	3185,8	1,4593	4648,94	211,99	4436,95	498,00				
	0,78631	3186,1	1,1511	3667,66	637,26	3030,40	497,40				
	0,92481	3185,7	1,1919	3796,93	149,76	3647,17	508,98				
					Среднее: $503,00 \pm 5,0$			0,90	503,90	608,69	104,79
Метилтрихлорсилан	1,56748	3186,0	1,2018	3328,78	1054,69	2774,10	264,55				
	1,83213	3185,7	1,1678	3720,39	635,48	3084,91	251,69				
	1,63518	3186,0	1,1225	3576,27	632,20	2938,07	268,42				
					Среднее: $261,55 \pm 10,1$			0,15	261,70	412,16	150,46

Следует отметить, что по методу взрывного сжигания [1] в калориметрической бомбе образуется намного больше Cl_2 , чем это наблюдается другими авторами. Так, по данным Смита и Хаббарда [13] при сжигании хлорорганических соединений отношение Cl_2 к HCl рав-

няется 1:4. У нас же это соотношение, по данным анализа*, заканчивающегося через 40—50 мин после момента сгорания образца (сократить это время не представляется возможным), равно 2:1 и уменьшается со временем. Отсюда можно предположить, что при горении со взрывом хлор в основном, если не полностью, выделяется в виде Cl_2 .

Таким образом, получены следующие значения стандартных энтальпий образования в ккал/моль:

$$\text{Для триметилхлорсилана } \Delta H_{1,93}^0 = -80,0 + 4,5;$$

$$\text{„ диметилдихлорсилана } \Delta H_{298}^0 = -104,8 \pm 5,0;$$

$$\text{„ метилтрихлорсилана } \Delta H_{298}^0 = -150,5 \pm 10,0.$$

Наши термохимические исследования ([1] и настоящее) хлорпроизводных кремнийорганических соединений являются первыми, если не считать краткого сообщения Мортимера и сотрудников [15], где лишь для одного соединения—триметилхлорсилана дана величина, равная $-88,3 \pm 3,5$ ккал/моль и не приведено подробного описания хода экспериментов и методики измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я. „Ж. физ. химии“, 39, 239, 1965.
2. Попов М. М. Термометрия и калориметрия М., 1954.
3. Козина М. П. Дисс. МГУ, 1955.
4. Гаджиев С. Н., Агарунов М. Я., Шарифов К. А. „Ж. физ. химии“, 36, 897, 1962; 37, 2368, 1963.
5. Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук“, 1962, № 1.
6. Thompson R. T. Chem. soc., 1908, 1953.
7. Tanaka T. Wathase T. Bull. Chem. soc. Japan, 28, 258, 1955.
8. Tannenbaum S. Kaye S., Lewenz G. I. Chem. soc; 75, 3753, 1963.
9. Rossini F. и др. Selected Values of chemical Thermodynamic Properties, N BS, Circ. 500, Washington, 1952.
10. Wise S., Margrave E., Feder H., Hubbard W. I. Phys. Chem., 66, 381, 1962.
11. King E. J. Amer. chem. soc., 73, 656, 1951.
12. Воробьев А. Ф. „Ж. физ. химии“, 33, 2802, 1959.
13. Smith L. a. Hubbard W. Experimental Thermochemistry, F. D. Rossini, Ed. Interscience Publishers, Ins., New York, 1956, chapter 8, pp. 181—203.
14. Кольтгоф И. М. и Сэндел Е. Б. Количественный анализ. Госхимиздат, М.—Л., 1948.
15. Mortimer C., Clauson A. R., Fowell P. A. Bull. Chem. Termodyn., № 3, 16, 1960.

С. Н. Гаджиев, М. Я. Агарунов, Ж. Р. Нәгдәлијева, Т. Х. Әзизов,
В. Н. Чеботарјов, Ф. А. Намазов

Силисум үзвн бирләшмәләри сәһәсиндә физики-кимјәви тәдгигат
1. Бә'зи метилхлорсиланларын әмәләкәлмә энталпијасы

ХҮЛАСӘ

Мүәллифләрин бир сыра дәјишиклик әләвәетдикләри калориметрик гурғуда партлајышла јандырма үсулу илә метилхлорсиланларын үч нүмәјәндәси јандырылмыш вә онларын стандарт әмәләкәлмәэнталпијасынын ашағыдакы гијмәтләри алынмышдыр:

$$\Delta H_{298}^0 \text{ (триметилхлорсилан)} = -80,0 + 4,5 \text{ ккал/мол}$$

$$\Delta H_{298}^0 \text{ (диметилхлорсилан)} = -104,8 + 5,0 \text{ „ „}$$

$$\Delta H_{298}^0 \text{ (метилтрихлорсилан)} = -150,5 + 10,0 \text{ „ „}$$

* Анализ на Cl_2 производился путем пропускания газообразных продуктов сгорания через кислый раствор KI и последуюшего титрования выделившегося при этом йода по видоизмененному нами методу [14].

М. А. ТАГИЕВ

ИЗМЕРЕНИЕ ПОГЛОЩЕНИЯ И СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В П-КСИЛОЛЕ, П-ДИХЛОРБЕНЗОЛЕ, БЕНЗОЛЕ И БЕНЗОФЕНОНЕ В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА ПЕРВОГО РОДА

Исследование кристаллического, жидкого и переохлажденного состояния вещества имеет большое значение для развития теории плавления и кристаллизации, а также для решения ряда прикладных задач. Однако имеющихся в литературе сведений об ультразвуковых свойствах этих веществ не достаточно. В связи с этим перед нами стояла задача — исследовать акустические свойства п-ксилола, п-дихлорбензола, бензола и бензофенона в жидком, переохлажденном, поли-и монокристаллическом состоянии. Для этой цели была разработана импульсная установка, блок-схема которой представлена на рис. 1. Принцип ее работы заключается в следующем: генератор видеоимпульсов 1 (МГИ-1) с одной стороны своим отрицательным прямоугольным импульсом модулирует генератор радиоимпульсов 2, с другой стороны запускает генератор задержки импульсов 8 (МГИ-2). Генератор радиоимпульсов 2 выдает радиоимпульсы с определенной несущей частотой. Эти импульсы подаются на пьезоизлучатель C_1 , где они преобразуются в ультразвуковые импульсы.

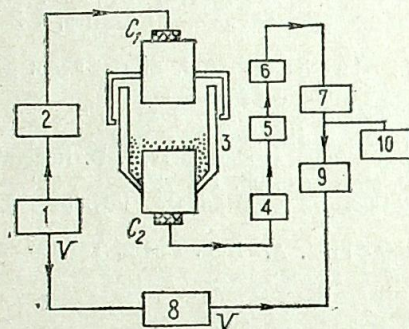


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки:

1 — генератор видеоимпульсов; 2 — генератор радиоимпульсов; 3 — измерительная камера (C_1 и C_2 — излучающий и приемный кварцы); 4 — согласование импульсов; 5 — катодный повторитель; 6 — генератор; 7 — широкополосный гетеродинный приемник; 8 — генератор задержки импульсов; 9 — осциллограф; 10 — импульсный вольтметр.

Ультразвуковые колебания распространяются в исследуемой среде 3 и принимаются пьезоприемником C_2 , где они преобразуются в электрические импульсы. Последние подаются на приемное устройство 4—7. Эти импульсы после усиления детектируются и подаются на вход осциллографа 9. Сигнал одновременно контролируется импульсным вольтметром 10.

Исследуемый кристалл выращивали в измерительной камере (рис. 2) методом градиента температуры [1, 2]. При измерении поглощения ультразвуковых волн в кристаллах в основном использовалась

описанная в работах [3, 4] методика с некоторым упрощением. В присутствии исследуемой жидкости предварительно строго плоско-параллельно устанавливались акустические линии: задержки. Затем методом градиента температуры выращивались кристаллы. Измерение высоты образца X_1 производилось при помощи ИЗВ-1, а затухание

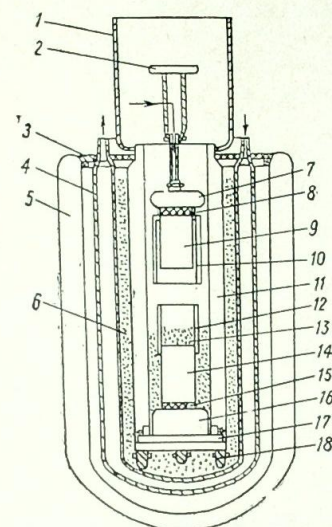


Рис. 2. Измерительная камера:

1 — устройство для крепления корпуса к меры к п. и о. у. ИЗВ-1; 2 — приспособление для счета расстояния при измерении с помощью прибора; ИЗВ-1; 3 — крышка для герметизации; 4 — термостатическая рубашка; 5 — сосуд дьюара; 6 — трансформаторное масло; 7 — латунная чашечка для закрепления кварца; 8 — излучающий кварц; 9 — плавильный кварц; 10 — стальной колпак; 11 — ойки; 12 — акан; 13 — исследуемое вещество; 14 — плавильный кварц; 15 — приемный кварц; 16, 17, 18 — приводные механизмы.

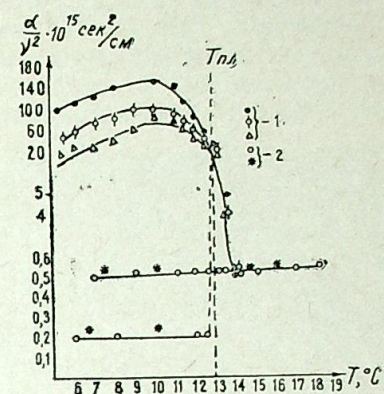


Рис. 3. 1 — данные Д. В. Шелопута при 6; 9; 14 МГц; 2 — наши данные при 7,78 и 5 МГц; $d = 10$ мм.

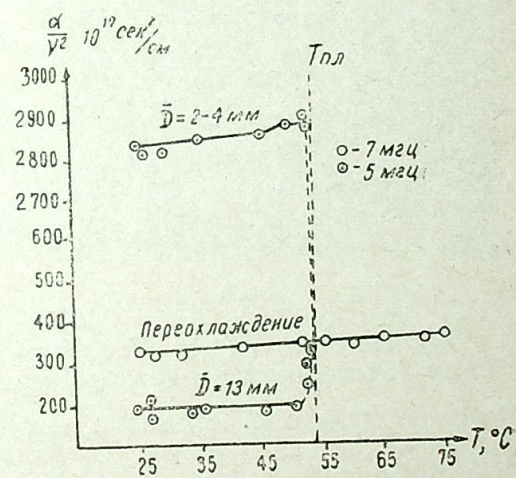


Рис. 4

амплитуды A_1 — при помощи аттенюатора. Далее, слегка оплавляя верхнюю часть кристалла, опускали шток ИЗВ-1 на расстояние X_2 и измеряли затухание A_2 . Разность амплитуды $A_2 - A_1$ нам дает абсолютное значение затухания ΔA . Зная и абсолютное значение расстояния $\Delta x = x_2 - x_1$, по известной формуле определяем коэффициент поглощения:

$$\alpha = \frac{\Delta A}{8,68 \cdot \Delta x}$$

При этих измерениях максимальная относительная ошибка не превышала 6—12%.

На частотах 5 и 7,78 МГц проводились измерения поглощения ультразвука в чистом п-ксилоле в жидком, переохлажденном и поли-

кристаллическом состоянии. При этом средние размеры—диаметра—зерен $\bar{D}$ имели значение ~ 10 мм. На рис. 3 показаны полученные результаты в значениях

$$\frac{\alpha}{v^2} \cdot 10^{15} \frac{\text{сек}^2}{\text{см}}$$

Там же нанесены данные других авторов [5], относящиеся к более мелкозернистым кристаллам. Как видно из рисунка, при переходе из жидкого состояния в переохлажденное поглощение ультразвука линейно уменьшается. В крупнозернистом кристалле оно, примерно, в два раза меньше, чем в жидком веществе.

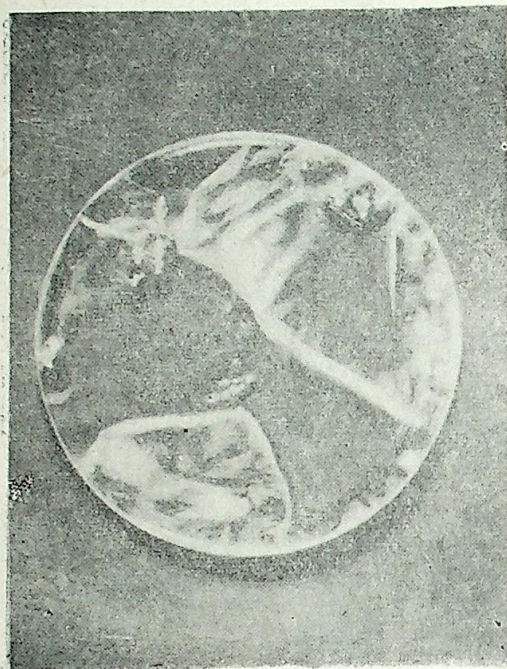


Рис. 5

На частотах 5, 7, 15 Мгц исследовалось поглощение ультразвуковых волн в чистом п-дихлорбензоле. Полученные результаты представлены на рис. 4. Как видно, величина $\frac{\alpha}{v^2}$ сильно зависит от размеров зерен.

На рис. 5 изображен кристалл п-дихлорбензола. Здесь $\bar{D} = 13$ мм. Снимки получены с помощью репродукционной установки при увеличении в 2 раза. А в полукристаллах с произвольной ориентацией зерен $\bar{D} = 2-4$ мм поглощение примерно на порядок больше, чем в жидкости. Кроме того, наблюдается более резкое изменение температурной зависимости при подходе к точке плавления.

Измерения коэффициента поглощения ультразвуковых волн в чистом монокристалле п-дихлорбензола производились на частоте 15 Мгц в интервале от -20 до $+50^\circ\text{C}$. При этом

$$\left(\frac{\alpha}{v^2}\right)_{t_1} = 100 \cdot 10^{-17} \frac{\text{сек}^2}{\text{см}}, \quad \left(\frac{\alpha}{v^2}\right)_{t_2} = 130 \cdot 10^{-17} \frac{\text{сек}^2}{\text{см}},$$

где $t_1 = -20^\circ\text{C}$, $t_2 = +50^\circ\text{C}$.

При переходе из жидкого состояния в переохлажденное охлаждение производилось со скоростью 0,3 град/час с тем, чтобы температура успевала выравниваться во всем объеме исследуемого вещества. Благодаря этому удалось значительно (до $+25^\circ\text{C}$) переохлаждать исследуемые жидкости. Значительного влияния охлаждения на поглощение не обнаружено. При переходе из жидкого состояния в переохлажденное поглощение линейно уменьшается.

Как видно из полученных данных, в п-ксилоле и п-дихлорбензоле поглощение ультразвуковых волн сильно зависит от размеров зерен и границ между ними. Следует отметить, что вопрос о структуре межкристаллитной области до настоящего времени остается дискуссионным. Во многих работах, появившихся в последнее время, границы между зернами рассматриваются как аморфные области [6, 7].

В наших исследованиях

сильное изменение значения поглощения ультразвуковых волн вблизи температуры плавления, видимо, связано с дислокационной моделью границы зерен. При измерении поглощения ультразвуковых волн в п-ксилоле экспериментальные точки снимались через каждые $1-2^\circ\text{C}$, а в п-дихлорбензоле через $5-10^\circ\text{C}$. Перед снятием каждой точки исследуемая среда выдерживалась при определенной температуре в течение 4-5 часов, а вблизи температуры затвердевания и плавления—в течение $5 \div 6$ часов. При термостатировании использовались камера холода, электропечь, термостат U-8. Температура измерялась медноконстантановой термопарой с точностью $0,1^\circ\text{C}$. Изменение акустического пути определялось прибором ИЗВ-1 с точностью 0,001 мм.

Скорость распространения ультразвука в кристаллах измерялась методом временной задержки импульса с точностью 2% и вычислялась по формуле

$$V_{\text{кр}} = \frac{d}{\frac{d}{V_{\text{ж}}} - \Delta\tau}$$

Здесь d —абсолютное значение акустического пути в кристалле; $V_{\text{кр}}$ и $V_{\text{ж}}$ —скорость распространения ультразвуковых волн в кристалле и жидкости; $\Delta\tau$ —перемещение фронта импульса при переходе кристалл-жидкость. Скорость ультразвука в жидкости определялась методом интерференции с точностью до 0,1% по формуле $V_{\text{ж}} = \frac{2\Delta x v}{m}$,

где Δx —абсолютное значение расстояния, измеренное с помощью ИЗВ-1; v —частота генератора, измеренная с помощью волномера типа—527; $\Delta\tau$ —измерялось генератором задержки импульсов МГИ-2; m —число интерференции импульсов.

На частотах 7; 7,78 Мгц исследовались поликристаллические структуры бензола с зернами $\bar{D} = 1-2$ мм, $\bar{D} = 6-7$ мм и структуры,

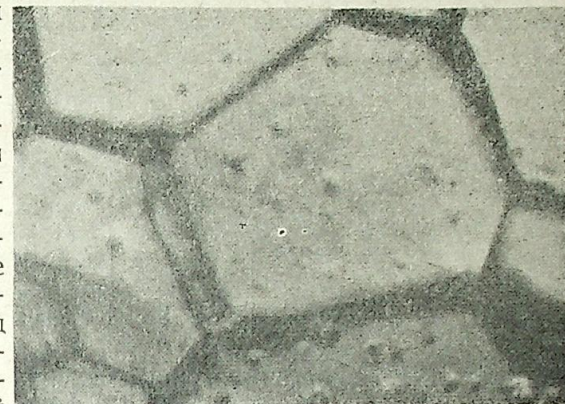


Рис. 7

близкие к монокристаллу ($\bar{D} = 15$ мм). Полученные результаты по скорости ультразвука представлены на рис. 6. Структура кристалла при $\bar{D} = 6-7$ мм показана на рис. 7. Снимки получены в отраженном свете через поляризационный микроскоп МП-7. Экспериментальные точки снимались через каждые $3-4^\circ\text{C}$, а вблизи температуры затвердевания и плавления — через $0,5-2^\circ\text{C}$. На рис. 6 нанесены также результаты измерения других авторов [5,8]. Измерения скорости ультразвука в чистом бензофеноне, а также в жидком, переохлажденном и поликристаллическом его состояниях производились на частоте $7,78$ Мгц в лабильной молификации. В стабильной молификации $T_{\text{пл}} = 48^\circ\text{C}$ и $T_{\text{кип}} = 305^\circ\text{C}$, а в лабильной — $T_{\text{пл}} = 26^\circ\text{C}$.

При 62°C скорость $V = 1440$ м/сек, а при 55°C $V = 1465$ м/сек, при дальнейшем понижении температуры скорости ультразвука линейно возрастает и при 20°C она составляет 1560 м/сек. Для поликристаллического состояния полученные нами данные приведены ниже.

$t^\circ\text{C}$,	$\bar{D}$ мм	$\lambda \cdot 10^4$ м.	$V \cdot \text{м/сек.}$
20	2—3	2,544	1980
43	2—3	2,504	1950
20	4	2,557	1990
20	8—9	2,994	2330

Как видно, скорость распространения ультразвука сильно зависит от размеров зерен; с увеличением размеров зерен скорость возрастает так как структура становится более однородной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. статей под ред. Шефтеля „Процессы роста и выращивания монокристаллов“, ИЛ, 1966.
2. Stober F. Z. Kristallogr., 61, 299, 1925.
3. Горбунов М. А., Кошкин Н. И., Ноздрев В. Ф., Шелопут Д. В. „Украинский физический журнал“, т. 7, 1962, № 8.
4. Горбунов М. А., Кошкин Н. И. „Изв. вузов (химия и химическая технология)“ 1958, № 4.
5. Шелопут Д. В. Канд. дисс. МОПИ, 1962.
6. Постников В. С. „ДАН СССР“, 79, 1953.
7. Nott N. F. Proc. phys. soc. 60, 391, 1948.
8. Liberman L. „Acous. soc. Amer“, vol. 31, № 8, 1073, 1959.

М. А. Тагыјев

1-чи нөв кечид фазасында *n*-ксилолда, *n*-дихлорбензолда, бензолда, бензофенонда ултрасэсин удулмасынын вэ жајылма сүр'этинин өлчүлмэси

ХҮЛАСӘ

Тэдгигат апармаг үчүн тэчрүбэ гургусу жыгылмыш вэ өлчү камерасы назырланмышдыр. 5; 7, 78 жүксэк герс тезликдэ *n*-ксилолда, 5, 7, 15 герс тезликдэ *n*-дихлорбензолда мүхтәлиф фазаларда ултрасэсин удулмасы өлчүлмүшдүр.

Мүөјјән едилмишдир ки, *n*-ксилолда вэ *n*-дихлорбензолда маје вэ сојудулмуш маје кечидиндэ удулма температур азалдыгча хәтти азалыр. Ејни заманда, $\frac{\alpha}{V^2}$ тәркиби монокристалла јахын олан гурулушда 1,5—2 дэфэ аздыр, поликристалда исэ маје фазаја нисбәтән тәхминән 10 дэфэ чохдур.

Тәмиз бирчинсли монокристал *n*-дихлорбензолда 15 жүксэк герс тезлијиндэ $\left(\frac{\alpha}{V^2}\right)_{t_1=-20^\circ\text{C}} = 100 \cdot 10^{-17} \frac{\text{сан}^2}{\text{см}}$; $\left(\frac{\alpha}{V^2}\right)_{t_2=+50^\circ\text{C}} = 130 \cdot 10^{-17} \frac{\text{сан}^2}{\text{см}}$ -дир.

Тэчрүбәдән алынмыш нәтичәләрә әсасән демәк олар ки, *n*-ксилол вэ *n*-дихлорбензолда ултрасэсин удулмасы дәнәләрин өлчүсүндән вэ дәнә сәрһәдләриндән, әримә температурауна јахын исэ удулманын әсаслы дәјишилмәси дәнә сәрһәдләринин јердәјишмәси илә әлагәдардыр. 7; 7,78 жүксэк герс тезлијиндә бензолда $\bar{D} = 1-2$ мм, $\bar{D} = 6-7$ мм вэ $\bar{D} = 15$ мм-дә ултрасэсин сүр'әти өлчүлмүшдүр. 7,78 жүксэк герс тезлијиндә исэ бензофенонда маје, сојудулмуш маје вэ поликристаллик һалда сүр'әт өлчүлмүшдүр.

Мүөјјәнләшдирилмишдир ки, ултрасэсин сүр'әти кристалын дәнәләринин өлчүсүндән асылыдыр. Кристалын өлчүсү бирчинслијә јахынлашдыгча ултрасэсин сүр'әти артыр.

И. Г. ИСМАИЛЗАДЕ, Т. С. АЗИЗОВ, В. И. НЕСТЕРЕНКО, З. М. ШАМИЛЗАДЕ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕЙСТВИЯ УСКОРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ НА СТРУКТУРУ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ТИТАНАТА БАРИЯ

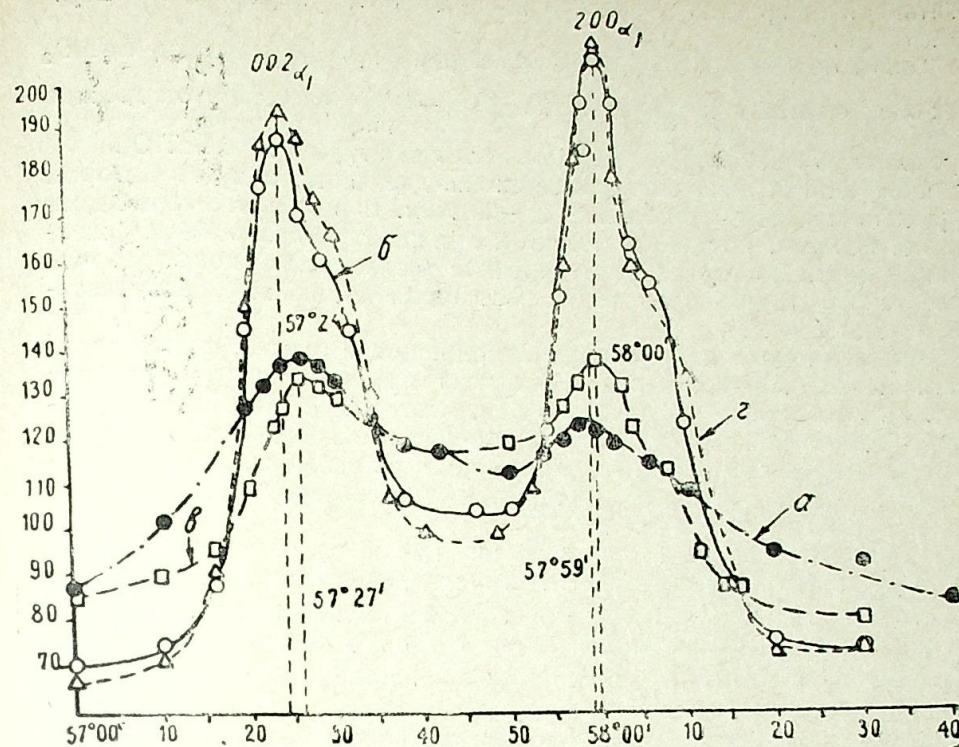
Исследование радиационных эффектов в структуре поликристаллического титаната бария под действием частиц высокой энергии имеет не только принципиально научное значение, но и определяет решение важных задач, связанных с практическим их применением. Длительное действие излучения ядерного реактора (нейтронов и гамма-излучения) на диэлектрические свойства керамического титаната бария было изучено Рогерсом [1]. Уиттельс и Шеррилл [2] обнаружили, что в результате воздействия нейтронов на монокристалл титаната бария происходит переход из тетрагональной фазы в кубическую. В работе [3] исследованы действия нейтронов ядерного излучения на поликристаллические образцы BaTiO_3 . Позднее в работе [4] было исследовано действие гамма-излучения на электрические свойства BaTiO_3 . Гельзер [5, 6] подвергал бомбардировке керамический образец BaTiO_3 потоком нейтронов от ядерного реактора и изучал температурную зависимость диэлектрической проницаемости и петли гистерезиса.

Однако, как видно из периодической литературы, до настоящего времени действия ускоренных электронов на структуру поликристаллического BaTiO_3 не изучены. В качестве источника ускоренных электронов был использован линейный электронный ускоритель (10) лаборатории радиационной физики Института физики АН Азербайджанской ССР, который работает в импульсном режиме с числом посылок 400 сек^{-1} , длительностью импульса 3 м/сек и диаметром пучка 10 мм .

Керамический образец поликристаллического титаната бария в виде диска толщиной 3 мм и диаметром 10 мм был синтезирован по обычной керамической технологии из стехиометрически взятых BaCO_3 и TiO_2 (рга). Предварительный обжиг производился при $\sim 900^\circ\text{C}$, с выдержкой при максимальной температуре в течение двух часов, окончательный — при 1250°C (1 час).

Изучение структурных изменений производилось на рентгенодифрактометре УРС-50 ИМ методом ионизационной регистрации выбранных расчетных максимумов 002 и 200, которые построены на железном излучении просчетом рентгенимпульсов по точкам. Как было показано в ряде работ (10–12), эта методика обладает высокой разрешающей силой и позволяет фиксировать смещение положений дифракционных максимумов до величины $\Delta 2\theta = 1'$.

До облучения указанным выше путем были определены положе-



а—до облучения; б—после облучения; в—после отжига 350°C облученного образца; г—облученный образец через 6 месяцев.

ния и интенсивности максимумов 002 и 200 (рис., а), по которым вычислялись периоды ячейки BaTiO_3 (табл.). После этого образец подвергали бомбардировке ускоренными электронами с энергией 4 мэв при погоне частиц $3,6 \cdot 10^{14} \text{ сек}^{-1}$ в течение 5 мин при охлаждении сухим льдом. После облучения образец приобретал сероватый цвет, тогда как необлученный BaTiO_3 был желтого цвета. Максимумы 002 и 200, построенные для облученного образца, показаны на рис. (б) и вычислены периоды $a = b$ и c (табл.).

Периоды ячейки	$a = b$ (Å)	c (Å)	$\frac{c}{a}$	(Å ³)
До облучения (а)	3,997	4,031	1,0035	64,40
После облучения (б)	3,996	4,034	1,0095	64,42
После отжига при 350°C облученного образца (в)	3,997	4,031	1,0035	64,40
Облученный образец через 6 месяцев (г)	3,996	4,034	1,0095	64,42

Как видно из рисунка, в результате бомбардировки ускоренными электронами сильно увеличивается интенсивность максимумов 002 и 200; максимум 002 несколько смещается в сторону меньших углов θ , а 200—наоборот, незначительно смещается в противоположную сторону. Эти смещения связаны с увеличением периода c (направление

спонтанной поляризации) и несколько медленным укорачиванием периодов $a = b$.

Таким образом, в результате электронной бомбардировки BaTiO_3 величина спонтанной деформации решетки $\frac{c}{a}$ растет, что должно

обуславливать некоторое повышение температуры Кюри BaTiO_3 .

Облученный диск был разделен на две части, одну из которых нагревали при 350°C в течение 15—20 мин. В результате серый цвет образца исчезал, появлялся обычный для необлученного BaTiO_3 желтый цвет. Повторное рентгеновское исследование показало, что после такого отжига происходит восстановление прежней элементарной ячейки (рис. в).

Дифракционная картина облученной половины диска, снятая после шести месяцев, практически полностью повторяет первоначальную (рис., г). Это вполне убедительно указывает на стабильность структурных изменений в ячейке, происходящих во время бомбардировки ускоренными электронами и, как видно из таблицы, отжиг радиационных дефектов происходит только после соответствующей термической обработки образца.

В настоящее время мы не задаемся целью объяснить обнаруженные при экспериментах факты. Но на данном этапе мы склонны допустить возможность изменения зарядности ионов Ba^{2+} , Ti^{4+} , O^{2-} , обусловленного, скажем, ионизацией атомов и захватом электронов некоторыми из ионов Ba^{2+} и локализацией выбитых электронов на ионах, созданных облучением дефектов. Этим, вероятно, и объясняется изменение цвета образца после его бомбардировки. При изменении зарядности ионов, безусловно, изменится и их поляризуемость, с чем и связана величина спонтанной поляризации и спонтанной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rogers F. T., I. appl. Phys., 27, 1066, 1956.
2. Wittels N. C. and Sherrill I. A. I. appl. Phys., 28, 606, 1957.
3. J. Jekourtg I. phys. chem. solids, 16, 169, 1951.
4. Hayakawa Shigeru, Okushina Hiroshis, I. phys. soc. Japan, 17, 118—119, 1952.
5. Helsing B. phys status solidi, 2, № 4, 447—455, 1952.
6. Helsing B. Bull. acad. polon sci ser sci math astrou et phys., 10, № 6, 353—355, 1952.
7. Исмаилзаде И. Г. „Кристаллография“, 7, 363, 1963.
8. Исмаилзаде И. Г. „Изв. АН СССР, серия физич.“ 28, 4, 675, 1964.
9. Исмаилзаде И. Г. „Изв. АН СССР, серия физич.“ 29, 6, 1032, 1965.
10. Азизов Т. С. Материалы научной конференции преподавателей и студентов Московского инженерно-физического ин-та. Май, 1965.

Х. М. ХАЛИЛОВ, К. И. РЗАЕВ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКА В СЕЛЕНЕ*

В статье приведены результаты исследования температурной зависимости скорости продольных ультразвуковых волн в аморфной и кристаллической модификациях селена. Измерения скорости ультразвука производились при помощи импульсного относительного метода с точностью до 0,5% в интервале от -95 до $+75^\circ\text{C}$. При проведении подобных исследований главное внимание приходится уделять сохранению постоянства характеристик примененных акустических линий задержки и особенно термостатированию самого исследуемого образца.

Измерительная камера

Один из основных узлов примененной нами экспериментальной установки представлен на рис. 1. Исследуемый образец 1 помещали между двумя акустическими линиями задержки 2 и 3, изготовленными из нержавеющей стали. Как образец, так и кварцевые пластинки 4 и 4' приклеивали к деталям 2 и 3 при помощи клея, 1/3 часть которого состоит из вакуумной смазки, а 2/3 — из канифоли. Кварцевый резонатор 4 возбуждали ламповым генератором типа УЗИС-7. Во время опытов акустические линии задержки 2 и 3 поддерживали при постоянной температуре. Для этого были предусмотрены специальные холодильники 5 и 6, через которые циркулировала термостатирующая жидкость, поступающая из ультратермостата.

Почти всю боковую поверхность образца окутывали медной фольгой 7, к которой в трех точках путем сварки присоединяли константановые проволоки. Полученные таким путем термопары позволяли контролировать равномерность распределения температуры по длине образца. Поверхность фольги 7 покрывали электроизоляцией — тонким слоем клея БФ-2. Вокруг образца 1 располагали змеевик 8, к которому с внутренней стороны припаивали медный цилиндрок 9, предназначенный для выравнивания температуры. Зазор между деталями 7 и 9 уплотняли алюминиевой фольгой. Удлиненные концы змеевика имели балансирующие участки, позволяющие при необходимости совершать детали 2 возвратно-поступательное движение вдоль стойки 10.

* Доложено на II симпозиуме по комплексному исследованию жидкого состояния вещества (Москва, 2—5 февраля 1965 г.).

Через металлическую подставку 11 проходили: латунные трубки 13, термопары 12, провода 15, идущие к электронагревателю, кабель 16, по которому к кварцевому резонатору поступают электрические импульсы, и трубки, исходящие из холодильников 5 и 6. Все провода были снабжены электроизоляционными уплотнениями.

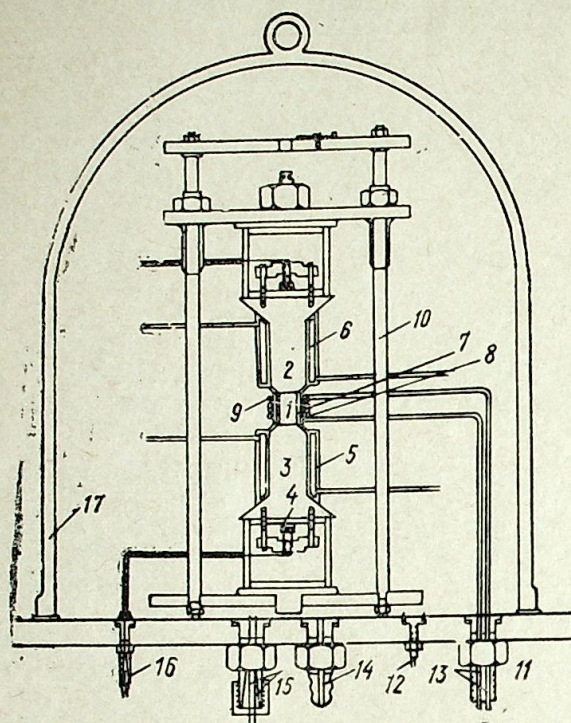


Рис. 1—Измерительная камера

Такое устройство позволяет производить измерения при температурах от -150 до $+300^\circ\text{C}$.

При работе в интервале от 20 до 95°C через змеевик 8 пропускается термостатирующая жидкость из ультратермостата. При ведении же опытов выше этой температуры змеевик 8 заменяется спиральным электронагревателем, изготовленным из вольфрамовой проволоки.

О подготовке образцов селена к исследованию

Наличие больших расхождений между результатами исследований физических свойств селена, полученными различными авторами, объясняется различием в пористости примененных образцов, влиянием на них кислорода, а также большими трудностями получения качественных образцов чисто кристаллического или аморфного селена.

Дело в том, что вследствие переплетения полимерных цепей и их искривленной формы (рис. 2) кристаллиты могут образовываться не во всем объеме, а только лишь в местах благоприятной ориентации отдельных участков различных соседних макромолекул. При этом длинные цепи не могут полностью вытянуться во время процесса кристаллизации. Для этого потребовалась бы очень большая работа против сил теплового движения. Этим в основном и объясняется невозможность получения вполне однородных образцов кристаллического селена.

Для получения образцов аморфного селена последний подогревали до 300°C и подвергали мгновенному охлаждению погружением ампулы в воду с тающим льдом. Для получения же образцов кристаллической модификации предварительно расплавленный селен подвергали отжигу при 180°C в течение 24 часов.

Полученные результаты

Температурная зависимость скорости ультразвука в аморфном селене изучалась при частоте 5 Мгц . Полученные результаты представлены на рис. 3, где по оси абсцисс отложена температура в градусах Цельсия, а по оси ординат—скорость ультразвука в м/сек . Точка T_c соответствует температуре стеклования селена, которая оказалась равной 32°C .

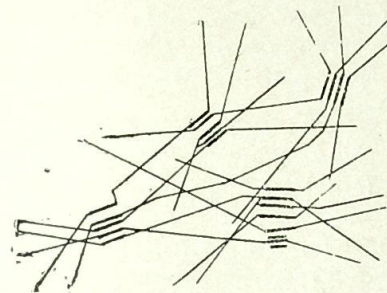


Рис. 2. Кристаллиты, образованные отдельными участками макромолекул полимерных веществ

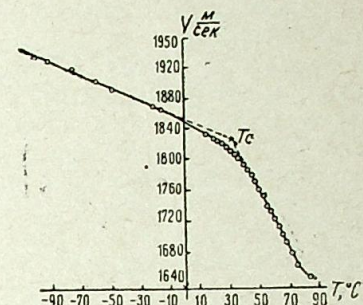


Рис. 3. Температурная зависимость скорости продольных ультразвуковых волн в аморфном селене

В области стеклования высокополимерные вещества при понижении температуры переходят из высокоэластического в твердое стеклообразное состояние. Этот процесс связан с уменьшением подвижности и гибкости отдельных звеньев полимерных молекул, ведущим к возрастанию времени релаксации. Поэтому выше точки стеклования аморфного селена уменьшение в нем скорости ультразвука с температурой происходит значительно быстрее, чем это имеет место в области, расположенной ниже точки стеклования. Следовательно, чем меньше подвижность и эластичность отдельных звеньев макромолекулы, ведущих к возрастанию времени релаксации, тем больше скорость распространения в нем ультразвука.

Из рис. 3 видно, что область стеклования селена простирается в довольно широком интервале температур ($19-36^\circ\text{C}$). На рис. 4 приведены данные, характеризующие температурную зависимость скорости распространения ультразвука в кристаллическом селене. В этом случае ниже -20°C наблюдаются более заметные изменения скорости продольных ультразвуковых волн с температурой. С повышением температуры во всей области исследования имело место снижение значения скорости ультразвука. Выше 0° температурное изменение этой величины носит линейный характер.

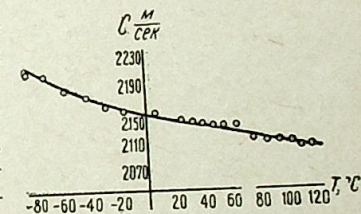


Рис. 4. Температурная зависимость скорости продольных ультразвуковых волн в кристаллическом селене

Итак, в работе показано, что область стеклования простирается в довольно широком интервале температур. В аморфном селене выше температуры стеклования происходит более резкое снижение скорости ультразвука с ростом температуры, чем до нее.

Х. М. Халилов, К. И. Рзаев

Селендә ултрасәс сүр'әтинин јајылмасынын температурдан асылылығы

ХҮЛАСӘ

Импульс методу васитәсилә 0,5% дәгигликлә аморф вә кристаллик һалында олан селендә $-95 \div +75^\circ\text{C}$ температур интервалында узунуна вә енинә ултрасәс далғаларынын сүр'әти өлчүлмүшдүр. Тәчрүбә апарылмыш системдә $\sim 10^{-3}$ мм чивә сүтунуна бәрабәр бошлуг јаарадылмышдыр.

Бу тәдбир системдә гарын, оксидләшмә просесинин, нүмунә вә харичи мүнхит арасында истилик мубадиләсинин мејдана кәлмәсинә јол вермир. Бундан башга, тәчрүбә апарылан заман акустик кечикдирмә хәтти сабит температурда сахланылмышдыр.

Ејни заманда, аморф селенин шүшәләшмә саһәсинин мүүјјән температур интервалыны тутмасы тәјин едилмишдир. Селенин шүшәләшмә температурундан (32°C) јухары (ашағыја нисбәтән) температур артдыгча ултрасәсин сүр'әти даһа кәскин азалыр.

0°C -дән јухары, температурдан асылы олараг, ултрасәс сүр'әтинин дәјишмәси кристаллик селендә дүз хәтт асылылығы үзрә кедир.

Р. Э. ГУСЕЙНОВ

О РЕЗУЛЬТАТАХ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХРОМОСФЕРНОЙ ВСПЫШКИ 21 АВГУСТА 1959 г., II

В первой части [1] изложены результаты спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 21 августа 1959 года по контурам водородных линий бальмеровской серии. В настоящей статье излагаются результаты спектрофотометрического исследования рассматриваемой вспышки по контурам линий H и K , а в конце статьи дается заключение, являющееся результатом суммирования основных выводов, полученных как по водородным линиям, так и по линиям H и K .

В [2] на базе исследуемой вспышки было установлено, что для линий H и K уравнение вида

$$\lg(I_K - I_H) = \lg\left(\bar{B}_K - \frac{1}{2}\bar{B}_H\right)\tau_0 - \frac{\lg e}{(\Delta\lambda_d)^2}(\Delta\lambda)^2 \quad (1)$$

действительно изображает прямую в системе координат

$$[(\Delta\lambda)^2, \lg(I_K - I_H)].$$

Следует заметить, что недалеко от центра $\lg(I_K - I_H)$ обычно получаются меньше, чем их расчетные значения по прямой, представленной уравнением (1). Такое отклонение должно быть при наличии самопоглощения. Найденные τ_0 , $\Delta\lambda_d$ подтверждают, что при $\tau_0 > 1$ такое отклонение имеет место и оно тем дальше простирается от центра, чем больше $\Delta\lambda_d$.

Для спектрофотометрических исследований по контурам линий H и K будем исходить из того факта, что механизмом уширения этих линий является эффект Доплера. Запишем уравнения вида (1) для линий H и K в отдельности, с учетом

$$I_{0,K} = I_{0,H} = I_0; \int_0^\tau B(t)e^{-t} dt = \bar{B}(1 - e^{-\tau}); \tau_{0,K} = 2\tau_{0,H} = \tau_0.$$

Тогда мы получим следующую систему уравнений для центра линий H и K :

$$\left. \begin{aligned} I_K &= I_0 e^{-\tau_0} + \bar{B}_K (1 - e^{-\tau_0}), \\ I_H &= I_0 e^{-\frac{1}{2}\tau_0} + \bar{B}_H \left(1 - e^{-\frac{1}{2}\tau_0}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Как первое приближение, при предположении $\bar{B}_k = \bar{B}_n = \bar{B}$ из системы (2) можно найти $\bar{B}$ и τ_0 . Вообще говоря, условие $\bar{B}_k = \bar{B}_n$ может с большой степенью точности удовлетворяться, если $\tau_0 \leq 1$. При $\tau_0 > 1$ может иметь место $\bar{B}_k \neq \bar{B}_n$, ибо тогда существенную роль в увеличении коэффициента эмиссии может играть многократное рассеяние света [3]. Кроме того, поскольку $\bar{B}$ и τ_0 определяются из (2), соответствующей центрам H и K , при $\tau_0 > 1$ из-за самопоглощения в центральных частях контура результаты могут быть искажены. Поэтому в рассматриваемом случае лучшим критерием является сравнение теоретических контуров с наблюдениями при найденных значениях $\Delta\lambda_d$, τ_0 и $\bar{B}$. Поскольку $\Delta\lambda_d$ определяется из наблюдений, правильность их значений не вызывает сомнений; из-за возможной неточности предположения $\bar{B}_k = \bar{B}_n$ и влияния самопоглощения τ_0 и $\bar{B}$, найденные из системы уравнений (2), могут быть несколько отличными от их истинных значений. Поэтому τ_0 и $\bar{B}$ определялись и по другим точкам контуров, при помощи системы вида (2), записанной только для соответствующих точек. Таким образом уточнялись величины τ_0 и $\bar{B}$.

Таблица 1

Кадры	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_d$	τ_0	$\bar{B}$	$\Delta\lambda_d$	τ_0	$\bar{B}$	$\Delta\lambda_d$	τ_0	$\bar{B}$
1	0,174	2,46	0,87	0,170	3,77	0,46	0,175	3,06	0,78
2	0,175	3,71	0,83	0,185	2,38	0,66	0,190	2,06	0,96
3	0,170	4,02	0,84	0,175	3,22	0,51	0,213	0,852	1,48
4	0,199	2,40	0,90	0,180	2,63	0,60	0,135	2,42	0,89
5	0,150	6,40	0,84	0,160	2,63	0,60	0,170	3,41	0,68

Вычисления произведены для тридцати контуров H и K . В табл. 1 даны найденные нами значения $\Delta\lambda_d$, $\bar{B}$ и τ_0 , наилучшим образом удовлетворяющие условию совпадения теоретических контуров с наблюдениями. Из таблицы видно, что τ_0 небольшая (всего несколько единиц и нередко < 3 , а в одном случае даже < 1). Сравнение характера совпадения теоретического и наблюдаемого контуров для разных центров и кадров показывает, что чем меньше τ_0 , тем лучше это совпадение. Такое обстоятельство как раз объясняется увеличением точности определения τ_0 и $\bar{B}$ с уменьшением τ_0 , ибо, как мы отмечали выше, чем меньше τ_0 , тем больше точность предположения $\bar{B}_k = \bar{B}_n$ и меньше искажающее влияние самопоглощения при определении τ_0 и $\bar{B}$ из системы (2). При $\tau_0 \gg 1$ систематически обнаруживается занижение теоретического контура в крыльях, которое усиливается с увеличением τ_0 . Оно может быть вызвано ростом функции источника с глубиной благодаря накоплению квантов в центральных частях сгустка из-за многократного рассеяния света [3]. На рис. 1—2 показаны контуры H и K первого центра кадра I, где точки в кружках изображают теоретический контур. Аналогичный результат в смысле вполне удовлетворительного совпадения теоретического контура с наблюдениями получен, как отмечалось выше, для остальных 28 контуров.

Дальнейшее исследование контуров H и K позволило определить основные физические параметры n_e и T_e совместно с другими величинами, характеризующими особенности вспышки в области эмиссии в H и K . Для определения n_e и T_e прежде всего следует обратиться к уравнению стационарности. Поскольку вспышка является край-

не нестационарным образованием, такое уравнение, вообще говоря, должно составляться с осторожностью. Для Sa^+ можно значительно упростить схему уравнений. Например, можно рассматривать упрощенную схему, состоящую из уравнений $4S$, $3D$, $4P$. Очевидно, что такое упрощение не должно вносить заметной ошибки, так как каскадные переходы по порядку величины не сильно отличаются от прямых рекомбинаций; с другой стороны, прямые рекомбинации играют гораздо меньшую роль, чем возбуждение электронным ударом и излучением; следовательно, можно не учитывать каскадные переходы на уровни, определяющие упрощенную схему; что касается ионизации с более высоких уровней, то эти процессы несущественны из-за малой населенности таких уровней. Обозначим уровни $4S$, $3D$, $4P$, индексами 1, 2, 3, соответственно.

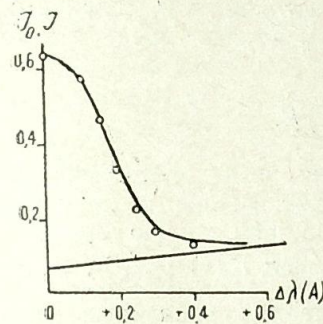


Рис. 1

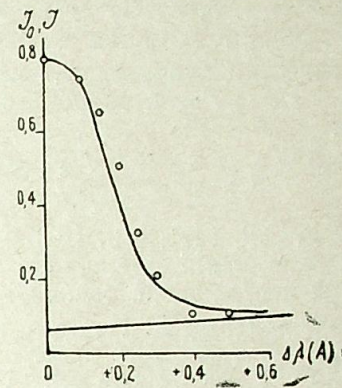


Рис. 2

Уровень $4P$ населяется двумя путями [4]: путем непосредственных переходов с уровня $4S$ под действием радиации с коэффициентом A_{13} и ударов первого рода с коэффициентом Z_{13} и путем ударных переходов с коэффициентом Z_{23} и радиационных переходов с коэффициентом A_{23} , поскольку уровень $3D$ является метастабильным. Число радиационных переходов $n_2 A_{23}$ при допустимом превосходстве поля излучения вспышки над излучением на границе фотосферы должно быть значительно меньше, чем число радиационных переходов с основного уровня $n_1 A_{13}$, поэтому с $n_2 A_{23}$ можно не считаться. Таким образом, процессами, ведущими к пополнению уровня $4P$ будут: $n_1 A_{13}$, $n_1 n_e Z_{13}$, $n_2 n_e Z_{23}$. Процессами, ведущими к опустошению уровня $4P$ будут: спонтанные переходы $3 \rightarrow 2$ и $3 \rightarrow 1$, т. е. $n_3 A_{32}$ и $n_3 A_{31}$ и тушащие столкновения—удары второго рода $n_e n_3 Z_{32}$, $n_e n_3 Z_{31}$. Исходя из сказанного выше, будем иметь следующее уравнение стационарности:

$$n_1 A_{13} + n_e (n_1 Z_{13} + n_2 Z_{23}) = n_3 (A_{31} + A_{32}) + n_3 n_e (Z_{32} + Z_{31}). \quad (3)$$

Можно показать, что в пределах допустимых погрешностей в левой части (3) можно пренебречь $n_1 A_{13}$ по сравнению с $n_e (n_1 Z_{13} + n_2 Z_{23})$, а в правой части— $n_3 n_e (Z_{32} + Z_{31})$ по сравнению с $n_3 (A_{31} + A_{32})$; кроме того, можно предположить, что $n_1 Z_{31} \approx n_2 Z_{23}$. Другими словами, следует показать, что (3) может быть заменено следующим, более упрощенным уравнением:

$$2 n_1 n_e Z_{13} \approx n_3 (A_{31} + A_{32}). \quad (4)$$

В (4) фактически можно пренебречь и A_{32} по сравнению с A_{31} .

Для того, чтобы показать правильность (4), мы поступим следующим образом. Допустим, что уравнение (4) верно. Для нахождения n_e из (4) необходимо знать n_1 , n_3 и Z_{13} (коэффициенты спонтанных переходов A_{31} и A_{32} известны). Нахождение n_1 и n_3 не представляет трудности. Поскольку механизмом расширения линий H и K является эффект Доплера, из выражения для коэффициента поглощения

$$(\kappa_{\lambda_0})_H = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{\pi} e^2}{m_e c^2} \frac{i_0^2}{\Delta \lambda_D} \quad (5)$$

по известной доплеровской ширине $\Delta \lambda_D$ (табл. 1) можно найти $(\kappa_{\lambda_0})_H$. Тогда, зная τ_0 ,

$$\text{по } N_1 = \frac{1}{2} \frac{\tau_0}{(\kappa_{\lambda_0})_H} \quad (6)$$

найдем N_1 —число Ca^+ в состоянии $4S$ в столбе с сечением 1 см^2 по всей толщине вспышки в области эмиссии в H и K . Ввиду того, что нам известны значения $\bar{B}$, число Ca^+ в состоянии $4P$ в столбе с сечением 1 см^2 по всей толщине вспышки— N_3 можно определить по формуле:

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{g_3}{g_1} \frac{i_0^5}{2 h c^2} I_{\lambda}^c(\theta) \bar{B}. \quad (7)$$

Здесь $g_1 = 2$, $(g_3)_H = 2$, $(g_3)_K = 4$; поскольку везде интенсивности выражены в единицах монохроматической интенсивности непрерывного спектра центра диска Солнца, эффект потемнения к краю заранее учтен при определении $\bar{B}$. Поэтому в нашем случае $I_{\lambda}^c(\theta) = I_{\lambda}^c(0)$. Очевидно, что $N_3 = (N_3)_K + (N_3)_H = \frac{3}{2} (N_3)_K$. Подставляя численные значения

известных величин в (6), получим $N_3 = 1,09 \cdot 10^{-2} N_1 \bar{B}$ (7).

Ниже в табл. 2 даны результаты вычислений $(\kappa_{\lambda_0})_H$ по (5), N_1 по (6) и N_3 по (7).

Таблица 2

Кадры	I центр			II центр			III центр		
	$\kappa_{\lambda_0} \cdot 10^{13}$	$N_1 \cdot 10^{-11}$	$N_3 \cdot 10^{-11}$	$\kappa_{\lambda_0} \cdot 10^{13}$	$N_1 \cdot 10^{-11}$	$N_3 \cdot 10^{-11}$	$\kappa_{\lambda_0} \cdot 10^{13}$	$N_1 \cdot 10^{-11}$	$N_3 \cdot 10^{-11}$
1	1,43	0,89	0,84	1,55	1,22	0,61	1,50	1,02	0,87
2	1,50	1,24	1,12	1,42	0,84	0,60	1,38	0,75	0,79
3	1,54	1,30	1,19	1,50	1,07	0,60	1,23	0,35	0,56
4	1,32	0,91	0,89	1,46	0,90	0,59	1,42	0,84	0,82
5	1,70	1,88	1,15	1,46	0,90	0,59	1,55	1,10	0,82

Что касается других параметров, в частности Z_{13} вместе с коэффициентами ударов первого рода Z_{ik} ($i < k$) и ударов второго рода Z_{ki} , а также коэффициентов радиационных переходов $A_{13} = \rho_{13} B_{13}$ и $A_{23} = \rho_{23} B_{23}$ при электронных температурах от 5000 до 15000° и при поле излучения в три раза более высоком, чем на границе фотосферы, то они определены В. А. Кратом в [4]. Зная N_1 , N_3 и при разных температурах Z_{13} , из (4) можно найти n_e при соответствующей температуре T_e . В данном случае толщина вспышки нас не интересует, ибо в (4) она входит в качестве множителя как в левую, так и в правую часть.

Для определения n_e и T_e (а также n_0 —концентрации атомов нейтрального водорода в нормальном состоянии) мы пользовались графическим методом, суть которого заключается в следующем. Согласно [4] и уравнению (4) можно построить графическую зависимость n_e от T_e . Наряду с другими табличными данными в [5] В. М. Соболевым приведена таблица, в которой дано отношение концентрации ионизованных атомов водорода к концентрации атомов в нормальном состоянии при разных значениях n_0 (в таблице [5] она обозначена через n_1), электронной температуры и температуры излучения (мы будем считать, что эти температуры равны). Очевидно, что существует не одна пара параметров (n_0 , T_e), при которой n_e найденная из [5], совпадает с n_e , определяемой из (4). Другими словами, существует много точек, лежащих на кривой зависимости n_e (T_e) и соответствующих разным парам (n_0 , T_e), следовательно, и разным n_e . Для однозначного определения n_e , T_e , n_0 следует ввести в задачу дополнительное условие. Оно заключается в следующем. Известно, что

степень ионизации водорода определяется по $x = \frac{n_H^+}{n_{0,H} + n_H^+}$, где $n_{0,H}$ концентрация атомов нейтрального водорода в нормальном и во всех состояниях возбуждения, n_H^+ —концентрация протонов. Считая, что $n_{0,H} \approx n_0$, $n_e \approx n_H^+ = x n_H$ и $n_H = n_{0,H} + n_H^+ \approx n_0 + n_H^+ \approx n_0$ получим

$$n_0 \approx n_e \left(1 + \frac{n_0}{n_e} \right), \quad (8)$$

С другой стороны, по данным [6], $\frac{n_H}{n_{Ca}^+} = 5,25 \cdot 10^5$. В условиях вспышек полное число атомов и ионов кальция должно быть равно числу Ca^{++} , т. е. $\frac{n_H}{n_{Ca}^+} = 5,25 \cdot 10^5$. Среди точек, лежащих на кривой зависимости n_e (T_e) нужно выбрать ту, которая удовлетворяет условию $\frac{n_0}{5,25 \cdot 10^5} \approx \frac{n_0 + n_e}{5,25 \cdot 10^5}$ с точностью второго знака после запятой. n_e , T_e (и n_0), соответствующие такой точке на кривой n_e (T_e), будут искомыми параметрами.

Теперь можно приступить к проверке правильности уравнения (4). По найденным вышеизложенным методом n_e и T_e для двух соседних кадров, для этих же кадров составляем систему из двух уравнений вида (3). Из такой системы можно найти n_2 и A_{13} , а затем оценить численное значение каждого слагаемого (3). Такой анализ показывает, что упрощения, приводящие (3) к (4), вполне допустимы и, следовательно, (4) верно. В качестве примера ниже приводятся численные значения слагаемых (3) по кадру 3 второго центра серии; по кадрам 2 и 3 этого центра найдено $n_1 A_{13} = 1,40 \cdot 10^9$; $n_e n_1 Z_{13} = 1,80 \cdot 10^{10}$; $n_e n_2 Z_{23} = 2,00 \cdot 10^{10}$; $n_3 (A_{32} + A_{31}) = 0,95 \cdot 10^{11}$; $n_e n_3 (Z_{32} + Z_{31}) = 0,91 \cdot 10^{10}$. Из этих данных видно, что $n_1 A_{13}$ по сравнению с $n_e (n_1 Z_{13} + n_2 Z_{23})$ и $n_e n_3 (Z_{32} + Z_{31})$ по сравнению с $n_3 (A_{31} + A_{32})$ по меньшей мере на целый порядок меньше, кроме того, с точностью до 10% верно и равенство $n_1 Z_{13} \approx n_2 Z_{23}$. Таким образом, принимая во внимание, что уравнение (4) является исходным, по методу, изложенному выше, мы произвели соответствующие вычисления и определили n_e , T_e (и n_0) для всех исследуемых центров.

Ниже в табл. 3 приведены значения $n_e Z_{13}$, определяемые из соотношения (4), а также результаты вычислений T_e и n_e , причем во

всех случаях оказалось, что $n_0 = 10^{15}$. По данным таблицы видно, что найденные нами значения n_e и T_e находятся во вполне допустимых пределах в той части вспышки, где возбуждается эмиссия в линиях

Таблица 3

Кадры	I центр			II центр			III центр		
	$n_e \cdot 10^{-15}$	T_e	$n_e \cdot 10^{-13}$	$n_e \cdot 10^{-15}$	T_e	$n_e \cdot 10^{-13}$	$n_e \cdot 10^{-15}$	T_e	$n_e \cdot 10^{-13}$
1	7,55	9350	2,65	4,00	8650	1,78	6,82	9200	2,46
2	7,22	9300	2,55	5,71	9000	2,20	8,43	9500	2,85
3	7,32	9325	2,60	4,49	8750	1,90	12,8	10150	3,70
4	7,82	9400	2,70	5,24	8900	2,08	7,81	9400	2,70
5	4,84	8850	2,00	5,24	8900	2,08	6,00	9050	2,27

Н и К. Далее мы замечаем, что каждый центр в области эмиссии Н и К (также, по всей вероятности, в области эмиссии водорода) в данный момент характеризуется своей электронной концентрацией и электронной температурой, которые изменяются со временем также по-разному в различных центрах.

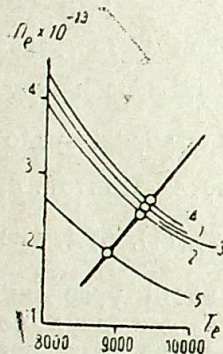


Рис. 3

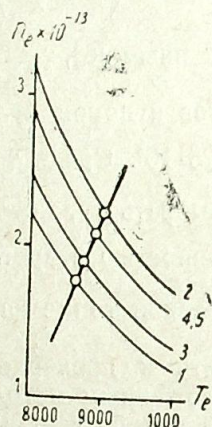


Рис. 4

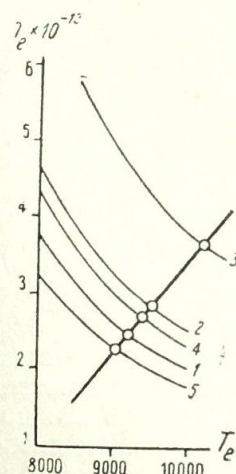


Рис. 5

На рис. 3--5 показаны кривые $n_e(T_e)$, для каждого центра первых пяти кадров. Точки в кружках на этих кривых соответствуют тем значениям (T_e, n_e) , которые удовлетворяют условию, определяющему однозначность искомых параметров. Цифра на каждой кривой показывает номер кадра, а последовательность рисунков соответствует номеру центра. Из рис. 3--5 отчетливо видно, что на каждом рисунке найденные нами точки (T_e, n_e) лежат на одной прямой. Таким образом, в исследуемой серии вспышки для каждого центра мы имеем соотношение $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$, причем, как можно заметить, наклон прямых, проходящих через соответствующие точки (T_e, n_e) , одинаковы, поэтому численное значение постоянной для всех центров одно и то же.

Таким образом, хотя каждый центр в каждый момент имеет свою электронную концентрацию и электронную температуру и эти параметры изменяются со временем также по-разному в различных центрах, все же отношение $\frac{dn_e}{dT_e}$ остается постоянным для всех центров.

Различие электронной концентрации и электронной температуры в центрах является результатом крайней неоднородности солнечной атмосферы в области образования вспышки, а $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$ с одним и тем же значением постоянной для всех центров говорит о более важной особенности последней. Действительно известно, что n_e и T_e , вообще говоря, являются независимыми величинами, в то время как в исследуемой серии (как мы увидим в следующей статье, и не только в одной этой вспышке) эти параметры становятся линейно зависимыми. Такое обстоятельство может являться результатом процесса, приводящего к одновременному (синхронному) изменению n_e и T_e . Один из таких процессов может быть связан с распространением ударных волн, являющихся причиной вспышек.

Выводы

1. Оптическая толщина τ_0 , даже в центре линии H_α мала. Это прежде всего говорит о том, что число атомов водорода во втором квантовом состоянии N_2 мало и турбулентность играет важную роль. Делается вывод о том, что вспышка является структурным образованием и наблюдаемые эмиссии, имеющие место в многочисленных тонких структурах, есть результат „непосредственного“ выхода энергии в виде излучения вследствие прямого нагрева плазмы; источником такого механизма нагревания могут являться ударные волны.

2. Для эмиссий в Н и К также характерна малая оптическая толщина в центральной части линии К.

3. Установлено, что для всех трех центров вспышки, между электронной концентрацией n_e и электронной температурой T_e есть линейная зависимость $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$, причем каждый центр в каждый момент характеризуется своими n_e и T_e , но значение постоянной одно и то же для всех центров; первый факт связан с крайней неоднородностью солнечной атмосферы, а второй может являться результатом действия механизма, приводящего к одновременному (синхронному) изменению T_e и n_e ; один из таких механизмов может быть связан с распространением ударных волн, являющихся причиной вспышек.

В заключение выражаю свою признательность проф. В. А. Крату за его весьма ценные замечания и советы во время обсуждения вопросов, изложенных в настоящей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Р. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1966, № 2.
2. Гусейнов Р. Э. „Солнечные данные“, № 5, 1965.
3. Крат В. А. „Изв. ГАО АН СССР“, № 178, 1965.
4. Крат В. А. „Изв. ГАО АН СССР“, № 177, 1964.
5. Соболев В. М. „Изв. ГАО АН СССР“, № 167, 1961.
6. Greenstein I. Z. Mem. Soc. Roy. sci. Liege, 14 1954.

Р. Ә. Һүсейнов

21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын
спектрофотометрик тэдгигинин нәтичәләри һаггында

ХҮЛАСӘ

H вә K хәтләриндәки емиссия үчүн оптик дәринлијин кичик ол-
масы (һәтта K хәттинин мәркәзиндә) сәчијјәви чәһәтдир.

График үсулла 5 анда 3 мәркәз үчүн электрон консентрасиясы
(n_e) вә электрон температура (T_e) тапылмышдыр.

Гејд етмәк лазымдыр ки, $\frac{dn_e}{dT_e} = \text{const}$ вә һәр һансы мәркәзин һәр

бир анда өз n_e вә T_e -си илә характеризә олунмасына бахмајараг,
сабитин гијмәти ејнидир. Биринчи дәлил көстәрир ки, Күнәш атмос-
фери олдугча гејри-бирчинслидир. Икинчи дәлил исә n_e вә T_e -нин
ејни вахтда синхрон сурәтдә дәјишмәсинә сәбәб олан просесин нә-
тичәсидир. Бу прссесләрдән бири алышма һадисәсинә сәбәб олан
зәрбә далғаларынын јайылмасы илә әләгәдар ола биләр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри сериясы, 1966, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 3

Р. Э. ГУСЕЙНОВ

О РЕЗУЛЬТАТАХ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХРОМОСФЕРНОЙ ВСПЫШКИ

25 июня 1960 г., I

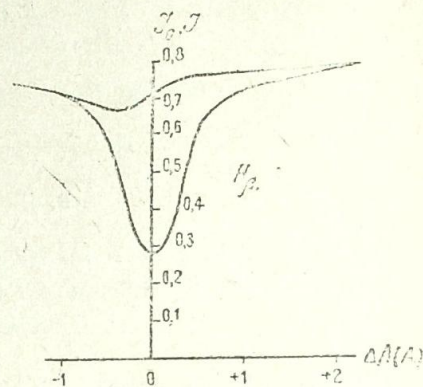
Исследуемая в данной статье вспышка (балла 3) наблюдалась астрономами Онджейовской обсерватории Чехословацкой Академии наук 25 июня 1950 г. в интервале $12^{\text{h}}08^{\text{m}}55^{\text{s}} - 12^{\text{h}}59^{\text{m}}50^{\text{s}}$ всемирного времени; вспышка имела гелиографические координаты: 24° северной широты и 5° восточной долготы. Сначала появились яркие узлы с довольно большой общей площадью. Линия H_{α} вспышки не имела протяженных крыльев (по спектрогелиоскопическим данным в максимуме в $12^{\text{h}}10^{\text{m}}$ ширина H_{α} составила всего 3,83А), но она имела эмиссию в высоких членах бальмеровской серии водорода, вплоть до H_{14} . Спектрограммы вспышки снимались в линиях H_{α} , H_{β} , H_{γ} , H_{δ} , H_{ϵ} (и $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$), H_{11} , H_{12} , H_{13} , H_{14} , а также в линиях H и K , D_3 (в абсорбции) и во многих металлических линиях. В нашей статье излагаются результаты спектрофотометрического исследования вспышки по бальмеровским линиям водорода, по линиям H и K и в общих чертах по линиям гелия. Для изучения развития вспышки мы исследовали спектрограммы, охватывающие разные фазы свечения. Запись контуров исследуемых линий производилась при помощи фотоэлектрического микрофотометра Пулковской обсерватории. Спектрофотометрическое исследование вспышки базируется на изучении 90 контуров эмиссионных линий невозмущенной атмосферы вблизи вспышки.

Спектрофотометрическое исследование по контурам водородных линий

Контуров эмиссионных линий вспышки обладают „красной“ асимметрией, т. е. „красные“ крылья линий водорода шире и интенсивнее „синих“. В качестве примера на рисунке показаны контуры эмиссионных линий и так называемой невозмущенной атмосферы вблизи вспышки в линии H_{β} по кадру 3.

Исследование вопроса об асимметрии контуров эмиссионных линий в другой работе [1] привело нас к определенным заключениям. Мы показали, что от гипотезы Эллисона о возможности возникновения асимметрии в контурах линий в спектре вспышки в результате поглощения ее излучения в движущихся облаках над вспышкой следует отказаться. Причину асимметрии нужно искать в наличии потока сравнительно мелких сгустков в области вспышки со средней скоро-

стью, направленной либо к поверхности Солнца, либо в противоположную сторону. Поскольку контуры эмиссионных линий исследуемой нами вспышки обладают „красной“ асимметрией, то это может быть объяснено наличием потока мелких сгустков со средней скоростью, направленной к поверхности Солнца, который должен привести к дополнительному излучению в „красном“ крыле контуров эмиссионных линий. К такому же выводу, но несколько иначе и качественно недавно пришел В. Г. Банин [2]. Далее в [1] мы показали, что чем больше так называемая относительная скорость потока, тем больше асимметрия; кроме того, на некоторых фазах развития вспышки поток сгустков имеет градиент скорости (рост скорости) в зависимости от глубины (это выявлено по кадру 3).



Приведенное выше весьма краткое резюме из нашей предшествующей работы понадобится в данной статье, ибо мы изучали оба крыла каждого контура эмиссионных линий в спектре вспышки, а в таком случае для интерпретации некоторых спектрофотометрических фактов необходимо будет обратиться к вопросу об асимметрии контуров эмиссионных линий. Кроме сказанного выше, в [1] мы убедились, что также, как в случае других вспышек, рассматриваемых в частности в [3, 4], механизмом расширения эмиссионных линий бальмеровской серии водорода ($H_{\alpha} - H_{\delta}$, а в некоторых случаях $H_{\alpha} - H_{\beta}$) в спектре исследуемой в данной статье вспышки является эффект Допплера, вызванный макроскопическим движением внутри области водородной эмиссии вспышки. Что касается высоких членов бальмеровской серии водорода, то в этих эмиссионных линиях расширение вызвано комбинационным действием Штарк, и Допплер-эффектов. Причем доля влияния каждого из этих эффектов (разумеется, с учетом того естественного обстоятельства, что с ростом номера линии преобладает роль эффекта Штарка) зависит от скорости турбулентного движения — чем больше эта скорость, тем больше доля эффекта Допплера.

Как и в ранее исследованных нами вспышках, в данном случае механизмом уширения неводородных эмиссионных линий является эффект Допплера, также вызванный макроскопическим движением в областях соответствующих эмиссий. В рассматриваемой серии вспышек наибольшей скоростью турбулентного движения обладает область с эмиссией в линии $\lambda 3888,6 \text{ HeI}$, а затем область водородной эмиссии; наименьшей скоростью турбулентного движения обладает область, где возбуждаются эмиссии в линиях металлов, а зона свечения ионов кальция, а также и атомов гелия, ответственных за D_3 , в абсорбции занимают промежуточное положение. Это еще раз подтверждает наши предыдущие выводы о том, что во вспышках атомы и ионы разных элементов (имеются в виду гелий, водород, кальций и другие металлы) возбуждаются в разных областях вспышки.

Любопытно отметить, что рассмотрение развития эмиссионных линий со временем в изучаемой в данной статье серии, так же как в другой серии исследований [5], показывает, что максимумы металлических эмиссий наступают с некоторым запозданием по сравнению с максимумом водородных эмиссий. Разумеется, что здесь речь идет

о тех металлических линиях, которые снимались на Ондражейковском многокамерном спектрографе одновременно с водородными линиями $H_{\alpha} - H_{\delta}$. К аналогичному выводу пришла и Н. Н. Степанян [6] при изучении вопроса свечения металлических линий по спектрам вспышек, полученным на башенном солнечном телескопе спектрографом с эшелле. Ею обнаружено, что в первой фазе развития вспышек наблюдается свечение водорода, гелия и некоторых сильных линий металлов (по-видимому, здесь имеется в виду наблюдение максимума свечения). Для большинства же других металлических линий максимум свечения наступает с некоторым запозданием.

В связи с обнаруженными фактами в [6] делается оговорка о том, что подобная картина может объясняться распространением ударной волны из области начала вспышки и возбуждением хромосферы за ее фронтом. Следовательно, явление хромосферной вспышки, наблюдаемой спектроскопически, не является единым процессом, все наблюдаемые многочисленные линии в спектре вспышки принадлежат разным областям хромосферы и начинают светиться в разное время (и здесь следует иметь в виду максимум свечения, ибо, как показывают Ондражейковские спектрограммы, в фазе максимума водородных эмиссий имеется свечение многочисленных металлических линий).

Из водородных линий детально спектрофотометрическому исследованию подверглись H_{α} , H_{β} , H_{γ} , H_{δ} , H_{ϵ} в кадрах 1 и 3, соответствующих моментам времени $12^{\text{h}}03^{\text{m}}55^{\text{s}}$ и $12^{\text{h}}10^{\text{m}}20^{\text{s}}$, и вместе с перечисленными линиями H_{11} , H_{12} , H_{13} , H_{14} в кадре 2, соответствующем моменту $12^{\text{h}}09^{\text{m}}30^{\text{s}}$; этот кадр, по всей вероятности, относится к отличию от других кадров месту вспышки и поэтому данные о нем имеют самостоятельный характер, причем линии на нем не обладают асимметрией.

В кадре 10 заметны эмиссионные сгустки в линиях H_{α} , H_{β} и H_{γ} . В кадре 11 такие водородные сгустки заметны только в линиях H_{α} и H_{β} с довольно большой отрицательной лучевой скоростью (-60 км/сек). Эмиссионные сгустки в кадрах 10 и 11 еще с большей отчетливостью заметны в линиях H и K . Здесь наблюдается по несколько сгустков разных размеров, яркостей, лучевых скоростей и, как мы увидим дальше, разных физических параметров.

Производя вычисления по методу, изложенному в частности в [8], пользуясь наблюдаемыми контурами и нашими данными о $\Delta\lambda_D$ (доплеровская ширина), как по „синим“, так и по „красным“ крыльям контуров водородных линий прежде всего были определены: оптическая толщина в центре линий $-\tau_0$, доплеровский коэффициент поглощения в центре линии H_{α} или H_{β} , обозначенный через $(\kappa_0)_{H_{\alpha}}$ или $(\kappa_0)_{H_{\beta}}$, число атомов водорода во втором квантовом состоянии в столбе с сечением 1 см^2 по всей толщине вспышки — N_2 . Эти величины вместе с $\Delta\lambda_D$ приведены в табл. 1—4. Причем, поскольку для кадра 3 характерен градиент скорости потока мелких сгустков, в табл. 4, соответствующей „красному“ крылу контуров водородных линий этого кадра, значения $\Delta\lambda_D$ приведены иначе. А именно: в виду наличия градиента скорости потока мелких сгустков фактически для каждой определенной глубины мы будем иметь определенный коэффициент поглощения, соответствующий $\Delta\lambda_D$ на этой глубине; в таких случаях, а также в случае нахождения данных табл. 4 $\Delta\lambda_D$ определялось из найденной нами в работе [1] графической зависимости скорости потока сгустков V от расстояния от центра контура $\Delta\lambda$ по кадру 3.

В табл. 1—3 обращает на себя внимание малое значение оптической толщи даже в центральной части линии H_{α} . К такому же ре-

результату мы пришли ранее при исследовании других вспышек, отличающихся по своим мощностям и многим другим особенностям [7]. Поэтому сделанное нами в [7] заключение о том, что, по-видимому,

Таблица 1

Кадр 1

Линии	„Синее“ крыло	„Красное“ крыло	τ_0
	$\Delta\lambda_d$	$\Delta\lambda_d$	
H_α	0,604	0,823	4,52
H_β	0,417	0,575	0,628
H_γ	0,355	0,456	0,209
H_ϵ	0,310	0,435	0,0541
H_δ	0,313	0,425	0,0332

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,28 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\beta} = 1,67 \cdot 10^{-13};$$

$$N_2 = 1,98 \cdot 10^{13}; \quad N_2 = 2,71 \cdot 10^{13}.$$

Таблица 2

Кадр 2

Линии	$\Delta\lambda_d$	τ_0
H_α	0,697	2,75
H_β	0,475	0,378
H_γ	0,466	0,127
H_ϵ	0,427	0,5330
H_δ	0,460	0,0182
H_{11}	0,501	0,0066
H_{12}	0,538	0,0050
H_{13}	0,589	0,0034

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,20 \cdot 10^{-13};$$

$$N_2 = 1,25 \cdot 10^{13}.$$

Таблица 3

Кадр 3 („синее“ крыло)

Линии	$\Delta\lambda_d$	τ_0
H_α	0,488	4,62
H_β	0,421	0,642
H_γ	0,375	0,214
H_ϵ	0,345	0,0553
H_δ	0,324	0,0340

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,03 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 1,52 \cdot 10^{13}.$$

для вспышки характерна малая центральная оптическая толща даже в линии H_α , получает дальнейшее обоснование. Как мы отметили в [7], малое значение $(\tau_0)_{H_\alpha}$ говорит о том, что N_2 мало и турбулентность во вспышках играет важную роль. Сравнение найденных нами значений N_2 с результатами других авторов показывает, что N_2 в нашем случае на два или три порядка меньше. Нам кажется, это характерно для всех хромосферных вспышек. Дело в том, что вообще очень трудно себе представить механизм, приводящий к увеличению плотности во вспышках в 10^2 — 10^4 раз по сравнению с соседними об-

ластями солнечной атмосферы, если считать, что такой почти мгновенный и резкий рост плотности охватывает всю спектроскопически наблюдаемую обширную область вспышки. Если же для вспышек характерно малое значение N_2 , то оно должно привести нас к предположению о структурном образовании, спектроскопически занимающем довольно большой объем, т. е. вспышку мы должны представить

Таблица

Кадр 3

(„красное“ крыло)

$\Delta\lambda$	$\Delta\lambda_d$		
	H_β	H_γ	H
0,2	0,599	0,572	0,5 3
0,4	0,713	0,636	0,5 5
0,6	0,794	0,715	0,6 8
0,8	0,858	0,770	0,695
1,0	0,9 2	0,870	0,741
1,2	0,956	0,855	

$$(\overline{\Delta\lambda_d})_{H_\beta} = 0,729; \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\beta} = 1,94 \cdot 10^{-14};$$

$$\overline{N_2} = 3,34 \cdot 10^{13}.$$

себе как образование, состоящее из многочисленных тонких структур, распределяемых по всему объему наблюдаемой вспышки и в которых имеют место эмиссии. Каждый такой элемент будет характеризоваться своей высокой плотностью и оптимальными температурными условиями для возбуждения той или иной эмиссии.

Вообще наличие особой тонкой структуры в эмиссионном спектре активных образований, в частности вспышек, впервые было обнаружено и исследовано А. Б. Северным (см. например, [8]). С разными подходами к проблеме тонкой структуры вспышек подошли авторы. Волокнистая структура вспышек предложена В. А. Кратом и В. М. Солевым [9], а затем несколькими другими авторами [10—12].

Поскольку рост свечения водородной эмиссии во вспышках носит почти мгновенный характер, то это может объясняться очень быстрым изменением физических параметров в отдельных элементах. Это обстоятельство вместе с другими свидетелемствует о том, что наблюдаемые эмиссии вспышки являются результатом непосредственного выхода энергии в виде излучения вследствие крайне быстро действующего дискретного механизма, каким может являться ударная волна.

В табл. 5—7 представлены значения $\bar{V}$ на разных расстояниях от центра каждого контура как для „синего“ крыла, так и для „красного“. В нижних строчках таблиц даны значения $\bar{V}$, соответствующие условию $\bar{V} \approx \text{const}$ с точностью не менее 5%.

В связи с вычислениями, приводящими к данным табл. 7, отметим, что по аналогии с данными табл. 4 ввиду наличия градиента скорости потока мелких сгустков при расчетах для каждого расстояния $\Delta\lambda$ от центра контура до определенной точки „красного“ крыла мы брали $\Delta\lambda_r$, соответствующую скорости на глубине, определяемой этим же расстоянием $\Delta\lambda$. Любопытно отметить, что если взять „среднее“ значение скорости, т. е. если не учесть градиента скорости, то замечается значительное отклонение от данных табл. 7 (по данным „красного“ крыла), что равносильно значительному отклонению от наблю-

дений. Это хорошо видно из сравнения данных по „красному“ крылу в табл. 7 с табл. 8, где $\bar{V}$ вычислена по „среднему“ значению $\Delta\lambda_D$. Этот факт также подтверждает наличие градиента средней скорости потока мелких сгустков, проходящего через область вспышки по направлению к поверхности Солнца.

Таблица 5

Кадр 1

$\Delta\lambda$	„синее“ крыло					„красное“ крыло				
	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_δ	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_δ
0,0	1,06	1,79	4,0	7,4	9,5	1,06	1,79	4,0	7,4	9,5
0,2	1,06	1,79	4,0	7,4	9,5	1,06	1,79	4,0	7,4	9,5
0,4	1,06	1,81	4,0	7,4	9,5	1,06	1,78	4,0	7,4	9,5
0,6	1,10	1,80	4,0			1,11	1,80	4,0		
0,8	1,12	1,80				1,13	1,80	4,0		
1,0	1,13					1,12				
1,2	1,13					1,13				
1,4	1,13					1,13				
$\bar{V}$	1,10	1,80	4,0	7,4	9,5	1,10	1,80	4,0	7,4	9,5

Таблица 6

Кадр 2

$\Delta\lambda$	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_δ	H_{11}	H_{12}	H_{13}
0,0	0,76	1,71	3,70	5,60	6,1	8,4	8,0	7,4
0,2	0,85	1,73	3,73	5,63	6,1	8,4	8,0	7,4
0,4	0,94	1,6	3,77	5,67	6,1	8,4	8,0	7,4
0,6	0,95	1,79	3,81					
0,8	0,97	1,81						
1,0	0,96							
1,2	0,96							
$\bar{V}$	0,96	1,76	3,75	5,63	6,1	8,4	8,0	7,4

Таблица 7

Кадр 3

$\Delta\lambda$	„синее“ крыло					„красное“ крыло		
	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_δ	H_β	H_γ	H_ϵ
0,0	0,95	1,20	2,19	4,7	5,8	1,20	2,19	4,7
0,2	0,94	1,19	2,19	4,7	5,8	1,18	2,00	4,5
0,4	0,92	1,17	2,18	4,7	5,8	1,15	1,83	4,1
0,6	0,94	1,17	2,19	4,7		1,02	1,81	4,1
0,8	0,95	1,17				0,99	1,79	
1,0	0,95					0,93	1,70	
1,2	0,95					0,93		
$\bar{V}$	0,95	1,17	2,19	4,7	5,8	0,98	1,77	4,3

Уменьшение $\bar{V}$ с глубиной, которое видно по „красному“ крылу контуров кадра 3 в табл. 7, также связано с наличием градиента (роста) скорости потока с глубиной. Действительно, рост турбулентности означает увеличение $\Delta\lambda_D$ или $\tau = \tau_0 \cdot e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2}$, а увеличение τ на данном расстоянии $\Delta\lambda$ от центра контура, т. е. на данной глубине должно привести к уменьшению функции источника.

По данным табл. 1, 3, 4 замечаем, что для кадров, в которых контуры водородных линий обладают асимметрией, характерно различие числа атомов водорода во втором квантовом состоянии N_2 , определяемом отдельно по „синему“ и „красному“ крыльям контуров этих линий. Благодаря „красной“ асимметрии N_2 , определяемое по

Таблица 8

$\Delta\lambda$	H_β	H_γ
0,6	1,20	2,26
0,8	1,26	2,33
1,0	1,30	2,44
1,2	1,35	

„красному“ крылу, несколько больше N_2 , определяемого по „синему“ крылу. N_2 , приведенные в табл. 4, получены из „среднего“ значения коэффициента поглощения в центре линии H_β , что связано с наличием градиента скорости потока в случае кадра 3. Из этих же таблиц видно, что разница в N_2 в случае кадра 3 больше, чем в случае кадра 1. Это связано с тем, что асимметрия в случае кадра 3 сильнее, чем в случае кадра 1. Именно по этой же причине разница в N_k , определяемых по формуле:

$$\frac{N_k}{N_2} = \frac{g_k}{g_2} \frac{i_0^5}{2hc^2} J_k^c(0) \bar{B}_\lambda$$

для „красного“ и „синего“ крыльев контуров кадра 3 больше, чем для контуров кадра 1, несмотря на то, что в первом случае имеет место уменьшение $\bar{V}$ с глубиной; при этом мы учитываем, что в случае кадра 3, N_2 тоже обладает градиентом (ростом) с глубиной. Ниже в табл. 9 приведены значения N_k , определенные по „синему“ и „красному“ крыльям контуров кадра 1. Из этой таблицы видно заметное различие при сравнении „красного“ и „синего“ крыльев. N_k , соответствующее „красному“ крылу, больше, чем N_k , соответствующее „синему“ крылу. Как отмечалось выше, такое различие усиливается в случае кадра 3, что объясняется усилением асимметрии.

Таблица 9

k	„синее“ крыло	„красное“ крыло
	N_k	N_k
3	$1,44 \cdot 10^{12}$	$1,97 \cdot 10^{12}$
4	$1,39 \cdot 10^{12}$	$1,90 \cdot 10^{12}$
5	$2,91 \cdot 10^{12}$	$3,98 \cdot 10^{12}$
7	$6,83 \cdot 10^{12}$	$9,34 \cdot 10^{12}$
8	$1,03 \cdot 10^{13}$	$1,41 \cdot 10^{13}$

С точки зрения физики увеличение N_k по „красному“ крылу при „красной“ асимметрии означает, что асимметрия контуров эмиссионных линий в спектре вспышки действительно является результатом дополнительного излучения; причем, если асимметрия „красная“, то дополнительное излучение будет налагаться на „красное“ крыло контура и наоборот. Причиной этого дополнительного излучения может являться поток мелких сгустков, проходящий через область вспышки.

При этом либо самостоятельно, либо во взаимодействии с плазмой вспышки этот поток может создать дополнительное возбуждение, т. е. привести к росту населенности квантовых уровней. Причем, поскольку поток мелких сгустков направлен к поверхности Солнца, этот рост будет заметным именно при анализе "красного" крыла контуров.

Из табл. 5—7 замечаем, что в разные моменты времени и в разных участках вспышки функция источника с глубиной ведет себя следующим образом. В момент времени, соответствующий кадру 1, функция источника не изменяется. В момент времени, соответствующий кадру 3, функция источника уменьшается, что мы объясняем наличием градиента скорости потока мелких сгустков с глубиной. Что касается кадра 2, то, как видно из табл. 6, функция источника увеличивается с глубиной. Такое различие в ходе функции источника может объясняться либо тем, что кадр 2 относится к другому участку вспышки, либо наличием градиента скорости потока в момент, соответствующий кадру 1. Но этот градиент может быть настолько мал, что его трудно заметить; в то же время даже незначительный рост $\Delta\lambda_D$ с глубиной привел бы к такому уменьшению $\bar{B}$, что это могло бы компенсировать рост $\bar{B}$ с глубиной, т. е. за счет усиления возбуждения атомов из-за изменения физических условий $\bar{B}$ осталось бы без изменения. В случае кадра 3 (из-за довольно заметного градиента скорости потока с глубиной) уменьшение $\bar{B}$ с глубиной сильнее, чем его рост, который имел бы место при полном отсутствии градиента.

По данным приведенных выше таблиц и при помощи формулы для определения N_k/N_2 по известной функции источника нетрудно рассчитать N_k . Наши вычисления показывают, что имеет место перенаселенность верхних энергетических уровней атомов водорода, которая не может объясняться только ростом статистических весов этих уровней. Очевидно, что при малых оптических толщах должна быть именно перенаселенность верхних энергетических уровней, чтобы объяснить эмиссии в высших членах балмеровской серии водорода. Причем чем сильнее эмиссия в этих линиях, тем сильнее должна быть перенаселенность, что можно заметить из сравнения N_k/V_2 в данном случае и в случае [7]; поскольку в данном случае вспышка балла 3 излучает довольно интенсивные эмиссии в высоких членах балмеровской серии, перенаселенность соответствующих уровней в несколько раз сильнее (но $\frac{N_k}{N_2} < 1$), чем в случае [7].

Можно ожидать, что в особо мощных вспышках может иметь место даже инверсия ($\frac{N_k}{N_2} > 1$) населенности верхних энергетических уровней атомов водорода, в которой мы убедились ранее [5] при исследовании одной серии спектрограмм особо мощной вспышки балла 3⁺ и показали, что такая инверсия объясняется заметным ростом вынужденных рекомбинаций на верхние уровни атомов водорода и что подобный механизм сходен с механизмом газовых лазеров, с источником оптической накачки синхротронного излучения [5].

Результаты по линиям H и K и линиям гелия, а также общие выводы будут опубликованы во второй части статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Р. Э. "Астроном. ж.", 43, вып. 4, 1966.
2. Банин В. Г. "Изв. Крымской астрофиз. обсерватории", 33, 118, 1965.

3. Гусейнов Р. Э. "Солнечные данные", № 3, 1965.
4. Гусейнов Р. Э. "Солнечные данные", № 5, 1965.
5. Гусейнов Р. Э. "Астроном. ж.", 43, вып. 5, 1966.
6. Степанян Н. Н. "Изв. Крымской астрофиз. обсерватории", 29, 68, 1963.
7. Гусейнов Р. Э. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1966, № 2.
8. Северный А. Б. "Изв. Крымской астрофиз. обсерватории", 17, 129, 1957.
9. Крат В. А. и Соболев В. М. "Изв. ГАО", № 160, 1957.
10. Suemoto Z., Hiei E. Publ. Astr. Soc. Japan, 11, 185, 1959.
11. Hirayama T. Publ. Astr. Soc. Japan, 13, 152, 1961.
12. Z. Svestka BAC, 14, N. 6, 1963.

Р. Э. Гусейнов

25 июн 1960-чы ил хромосфер алышмасынын спектрофотометрик тэдгигинин нәтичәләри һаггында (1-чи мә'лумат)

ХҮЛАСӘ

Мүхтәлиф элементләрин атом вә ионлары алышманын мүхтәлиф сәһәләриндә һәҗәчәнләнир, лакин бу һәҗәчәнләнмаларын максимумлары ејни агда саш вермир. Һәтта H_α хәттинин мәркәзиндә оптик дәринлик кичик олур. Бу ики дәлил бир даһа көстәрир ки, алышма һәгигәтән структурлу үзвдүр вә бу үзвүн мүхтәлиф элементләриндә һәҗәчәнләндирычы амил мүхтәлиф гүввә илә тә'сир көстәрир. Белә һәҗәчәнләндирычы амил зәрбә далғасы ола биләр.

Һидроген вә ионлашмыш калсиум хәтләринин асимметрик контурларынын кәмијјәтчә тэдгиги көстәрир ки, атомларын сајы хәтләрин "бәнөвшәји" вә "гырмызы" ганадларына көрә бәрәбәр дејилдир. "Гырмызы" асимметрија заманы бу сај "гырмызы" ганад үзрә "бәнөвшәји" ганада нибәтән чоһдур. Асимметрија "бәнөвшәји" дирсә, әксинә, атомларын сајы "бәнөвшәји" гана үзрә чоһалыр. Бу көстәрир ки, асимметрија һәгигәтән әләвә шүәләнманын нәтичәсидир вә бу шүәләнманын сәбәби кичик гәлпәләр—плазма булудчуғлары селинин алышма сәһәсиндән кечмәсидир. "Гырмызы" асимметрија селин Күнәш сәтһинә тәрәф, "бәнөвшәји" асимметрија исә селин әкс тәрәфә јөнәлмәсинин нәтичәсидир.

М. А. БАБАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НА ЭЦМ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ТОРМОЖЕНИИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОПРИВОДА С УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ РОТОРА

В малоинерционных приводах, характерных для современных автоматических устройств, возникающие при торможении переходные электромагнитные моменты оказывают заметное влияние на скорость и точность остановки исполнительного органа. Поэтому исследование поведения электропривода в тормозных режимах необходимо для выявления его соответствия заданным технологическим требованиям.

В основу расчета переходных электромагнитных процессов короткозамкнутого асинхронного двигателя могут быть положены известные уравнения падения напряжения в неподвижной относительно статора прямоугольной системе координат [1]:

$$\begin{cases} u_{as} = r_s i_{as} + X_s \frac{di_{as}}{d\tau} + X_m \frac{di_{ar}}{d\tau}, \\ u_{\beta s} = r_s i_{\beta s} + X_s \frac{di_{\beta s}}{d\tau} + X_m \frac{di_{\beta r}}{d\tau}, \\ 0 = r_r i_{ar} + x_r \frac{di_{ar}}{d\tau} + x_m \frac{di_{as}}{d\tau} + \omega (x_m i_{\beta s} + x_r i_{\beta r}), \\ 0 = r_r i_{\beta r} + x_r \frac{di_{\beta r}}{d\tau} + x_m \frac{di_{\beta s}}{d\tau} - \omega (x_m i_{as} + x_r i_{ar}), \end{cases} \quad (1)$$

где u_{as} , $u_{\beta s}$, i_{as} , $i_{\beta s}$, i_{ar} , $i_{\beta r}$ — проекции напряжений и токов статора и ротора на оси α и β ;

r_s , r_r — активные сопротивления статора и ротора;
 $x_s = x_{sl} + x_m$ — индуктивное сопротивление статора;
 $x_r = x_{rl} + x_m$ — индуктивное сопротивление ротора;
 x_{sl} и x_{rl} — сопротивления рассеяния статора и ротора;
 x_m — сопротивление взаимной индукции;
 ω — скорость вращения ротора.

В уравнениях (1) все величины, в том числе и время τ , выражены в общепринятых относительных единицах.

Одним из способов торможения асинхронных двигателей, получивших широкое распространение в практике, является динамическое торможение. Уравнения, описывающие процесс динамического торможения асинхронного короткозамкнутого двигателя, можно получить из системы (1), как это сделано в [2]. Однако при этом необходимо

принять ряд допущений, которые, на наш взгляд, не являются достаточно строгими.

Анализ физической сущности процесса динамического торможения показывает, что для этого режима должны быть пригодны уравнения двух реакций явнополюсной синхронной машины. С учетом того, что успокоительная обмотка отсутствует, а также полагая $u_a = 0$ и $u_q = 0$, эти уравнения можно записать в виде (все обозначения взяты из [3]):

$$\begin{cases} u_d = r_i i_d + x_i \frac{di_d}{d\tau} + x_{ad} \frac{di_d}{d\tau}, \\ 0 = r_s i_d + x_d \frac{di_d}{d\tau} + x_{ad} \frac{di_d}{d\tau} - \omega x_q i_q, \\ 0 = r_s i_q + x_q \frac{di_q}{d\tau} + \omega (x_d i_d + x_{ad} i_d). \end{cases} \quad (2)$$

Учитывая одинаковый физический смысл соответствующих параметров синхронной машины в осях $\bar{d}$ и $\bar{q}$ и асинхронной машины в осях α и β , уравнения (2) можно представить в виде

$$\begin{cases} u_{as} = r_s i_{as} + x_s \frac{di_{as}}{d\tau} + x_m \frac{di_{ar}}{d\tau}, \\ 0 = r_r i_{ar} + x_r \frac{di_{ar}}{d\tau} + x_m \frac{di_{as}}{d\tau} - \omega x_r i_{\beta r}, \\ 0 = r_r i_{\beta r} + x_r \frac{di_{\beta r}}{d\tau} + \omega (x_m i_{as} + x_r i_{ar}). \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения (3) отличаются от уравнений, полученных в [2], только знаками членов, содержащих коэффициент ω , что связано с направлением вращения координатных осей и не имеет принципиального значения. Решение системы (3) при $\omega = \text{const}$ дает значения переходных токов, которые позволяют найти электромагнитный момент для той же скорости по известной формуле:

$$M = x_m (i_{ar} i_{\beta s} - i_{\beta r} i_{as}). \quad (4)$$

При анализе электромагнитных переходных процессов вследствие их быстрого затухания и ходят, как правило, из предположения постоянства скорости вращения. Но существуют случаи, когда пренебрежение влиянием изменения скорости недопустимо.

Для выявления полной картины переходного электромеханического процесса наиболее правильным является совместное решение уравнений, охватывающих как электромагнитные процессы в двигателе, так и динамику механической системы. Для случая динамического торможения эта система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} u_{as} = r_s i_{as} + x_s \frac{di_{as}}{d\tau} + x_m \frac{di_{ar}}{d\tau}, \\ 0 = r_r i_{ar} + x_r \frac{di_{ar}}{d\tau} + x_m \frac{di_{as}}{d\tau} - \omega x_r i_{\beta r}, \\ 0 = r_r i_{\beta r} + x_r \frac{di_{\beta r}}{d\tau} + \omega (x_m i_{as} + x_r i_{ar}), \\ x_m i_{as} i_{\beta r} = M_c + T \frac{d\omega}{d\tau}, \end{cases} \quad (5)$$

где M_c —момент сопротивления системы,
 T —электрохимическая постоянная времени системы в электрических радианах:

$$T = 8620 \frac{f}{50} \frac{GD^2}{P} \left(\frac{n_s}{100} \right)^2, \quad (6)$$

где f —частота сети статора, Гц;
 GD^2 —маховой момент привода, кгм²;
 P —мощность машины, ватт;
 n_s —синхронная скорость, об/мин.

Система нелинейных уравнений (5) может быть проинтегрирована одним из численных методов либо аналитически, либо графически. Однако ввиду большой трудоемкости этой работы целесообразно воспользоваться вычислительной машиной дискретного действия.

Для численного решения уравнений (5) в качестве примера были использованы параметры системы привода стола сверлильного станка с асинхронным двигателем, разработанного во ВНИИПТнефтемаше. Параметры двигателя АОЛ-12-4, входящие в уравнения, были определены по методике, предложенной в [4]:

$$r_s = 0,144; \quad r_r = 0,098; \quad x_m = 0,91; \\ x_s = 1,00; \quad x_r = 1,02; \quad a_r = 0,096.$$

Значение момента сопротивления M_c было найдено экспериментально ($M_c = 0,17$), а величина T рассчитана по формуле (6) для $GD^2 = 0,0044$ кгм² ($T = 37,3$ эл. рад). Существенным при составлении уравнений является правильное определение напряжения, действующего в статорной цепи.

При динамическом торможении асинхронных двигателей с применением быстродействующей контактной аппаратуры магнитное поле ротора к моменту подключения статорной цепи к источнику постоянного тока не успевает затухнуть. Это поле наводит на зажимах статора остаточное напряжение, затухающее с коэффициентом затухания роторной обмотки при разомкнутой статорной a_r . Величина этого напряжения определяется следующим выражением [5]:

$$u_{ост} = u_{max} e^{-a_r t} \sin[(1-s)\omega_1 t + \varphi], \quad (7)$$

где u_{max} —амплитуда напряжения в момент отключения статора;

$$a_r = \frac{r_r}{x_r} \text{—коэффициент затухания;}$$

s —скольжение;

ω_1 —синхронная частота;

φ —начальная фаза наведенного напряжения.

Наряду с напряжением $u_{ост}$ на статорную обмотку действует также постоянное напряжение динамического торможения $u_{пост}$. Таким образом, левая часть уравнения статорной цепи в системе (5) при незатухшем поле ротора имеет вид

$$u_{ас} = u_{пост} + u_{max} e^{-a_r t} \sin[\omega_1 t + \varphi]. \quad (8)$$

Если принять время срабатывания аппаратуры при коммутации равным 0,01 сек (π относительных единиц), а напряжение динамического торможения $u_{пост} = 2r_s \cdot 2,5 I_{xx} \approx 150$ в, то уравнение (8) в относительных единицах запишется так:

$$u_{ас} = 0,7 + 0,73 e^{-0,096t} \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (8')$$

Обозначим в системе (5) токи $i_{ас}$, $i_{ар}$, $i_{\beta r}$ соответственно через y_1 , y_2 и y_3 , скорость вращения ω —через y_4 и подставим численные зна-

чения всех параметров. Решив полученные уравнения относительно производных, получим следующую исходную систему для решения на машине:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -0,76 y_1 + 0,458 y_2 + 5,25 y_4 \sin(y_4 \tau + \varphi) e^{-0,096\tau} - 4,8 y_3 y_4 + 3,68; \\ \dot{y}_2 = -0,675 y_1 - 0,505 y_2 - 4,68 y_4 \sin(y_4 \tau + \varphi) e^{-0,096\tau} + 5,27 y_3 y_4 - 3,29; \\ \dot{y}_3 = -0,096 y_3 - 0,89 y_1 y_4 - y_2 y_4; \\ \dot{y}_4 = -0,0046 + 0,024 y_1 y_3. \end{cases} \quad (9)$$

Начальные условия, т. е. значения переменных $y_1 \div y_4$ через $t = 0,01$ сек после отключения двигателя от сети, следующие (определение начальных условий здесь не приводится):

$$y_1(0) = y_2(0) = 0; \quad y_3(0) = 0,45; \quad y_4(0) = 0,93.$$

Для определения влияния начальной фазы остаточного напряжения на характер переходных токов и моментов система (9) решалась при разных значениях угла φ , равных 0, $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3}{2}\pi$. Наряду с этим

изменялось также значение суммарного махового момента GD^2 , которое принималось соответственно равным $1,76 GD_{дв}^2$ и $5 GD_{дв}^2$. Помимо этого система была решена для случая, когда магнитное поле ротора успело затухнуть и остаточное напряжение статора практически равнялось нулю.

При решении системы, помимо переменных $y_1 \div y_4$, определялись также значения электромагнитного момента $M(\tau) = 0,91 y_1(\tau) y_3(\tau)$ и тормозного пути $a = \int_0^{\tau} y_4 d\tau$. Решение систем уравнений, описывающих

электрохимический переходный процесс при динамическом торможении асинхронного привода для всех перечисленных вариантов, производилось на ЭЦВМ БЭСМ-2 сотрудницей Института кибернетики АН Азербайджанской ССР Амировой Н. Т. совместно с автором. Графики переходных токов, моментов и скорости вращения, построенные по полученным результатам, представлены на рис. 1. Зависимость максимального тормозного момента M_m и тормозного пути L от фазы напряжения φ показана на рис. 2. Анализ кривых, полученных в результате решения уравнений процесса торможения, позволяет сделать следующие выводы:

1. При наличии остаточного магнитного поля ротора в процессе динамического торможения переходный электромагнитный тормозной момент носит резко выраженный пульсирующий характер. В зависимости от угла сдвига вектора затухающего магнитного поля ротора относительно вектора приложенного напряжения в момент начала торможения переходные моменты, а также скорость вращения и время торможения могут резко изменяться, а именно:

а) максимальные переходные моменты достигают 3-12-кратного значения номинального момента двигателя в начальной фазе торможения, что способствует более интенсивному торможению при высоких скоростях; особенно резко отличаются максимумы моментов для значений $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ($M_m = 2,77$) и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($M_m = 12,66$);

б) так как переходные моменты зависят от начальной фазы остаточного напряжения, наведенного на зажимах статора, то кривая спадания скорости вращения имеет различный характер: в случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$

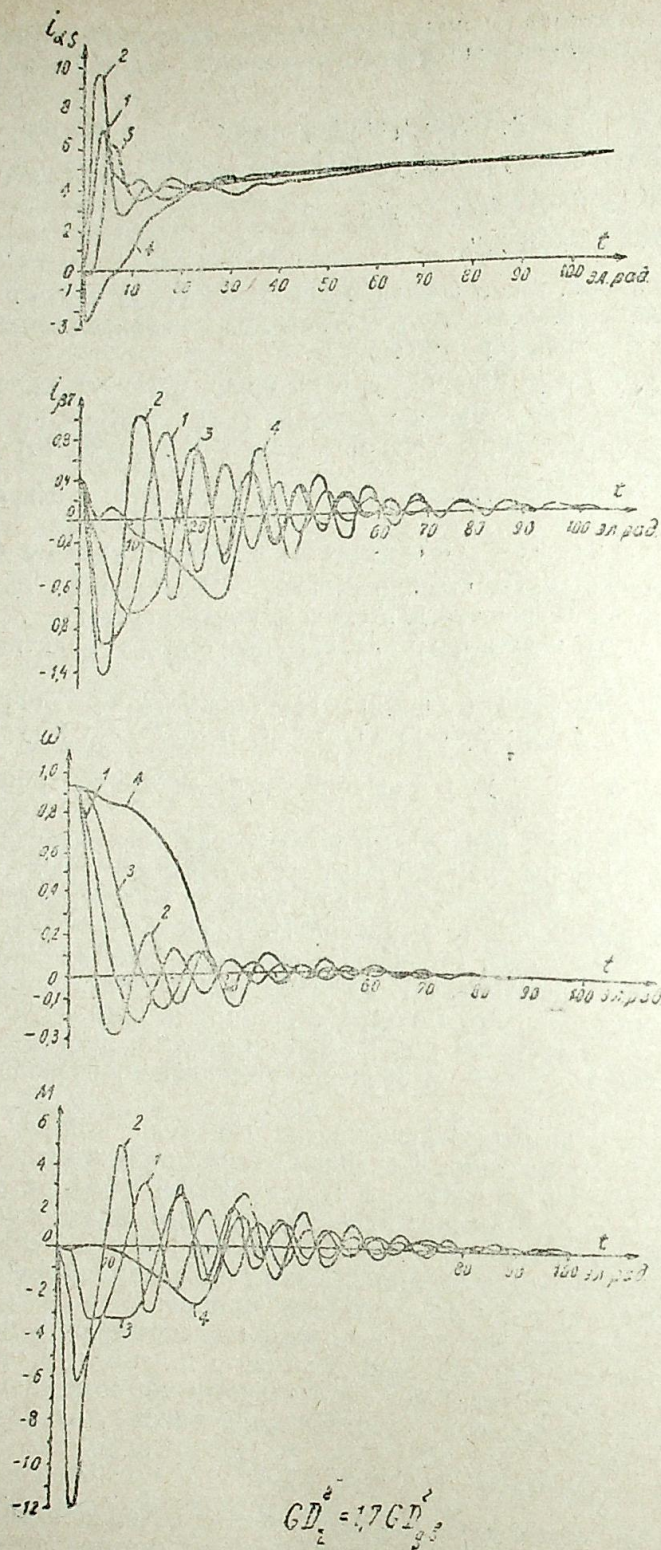
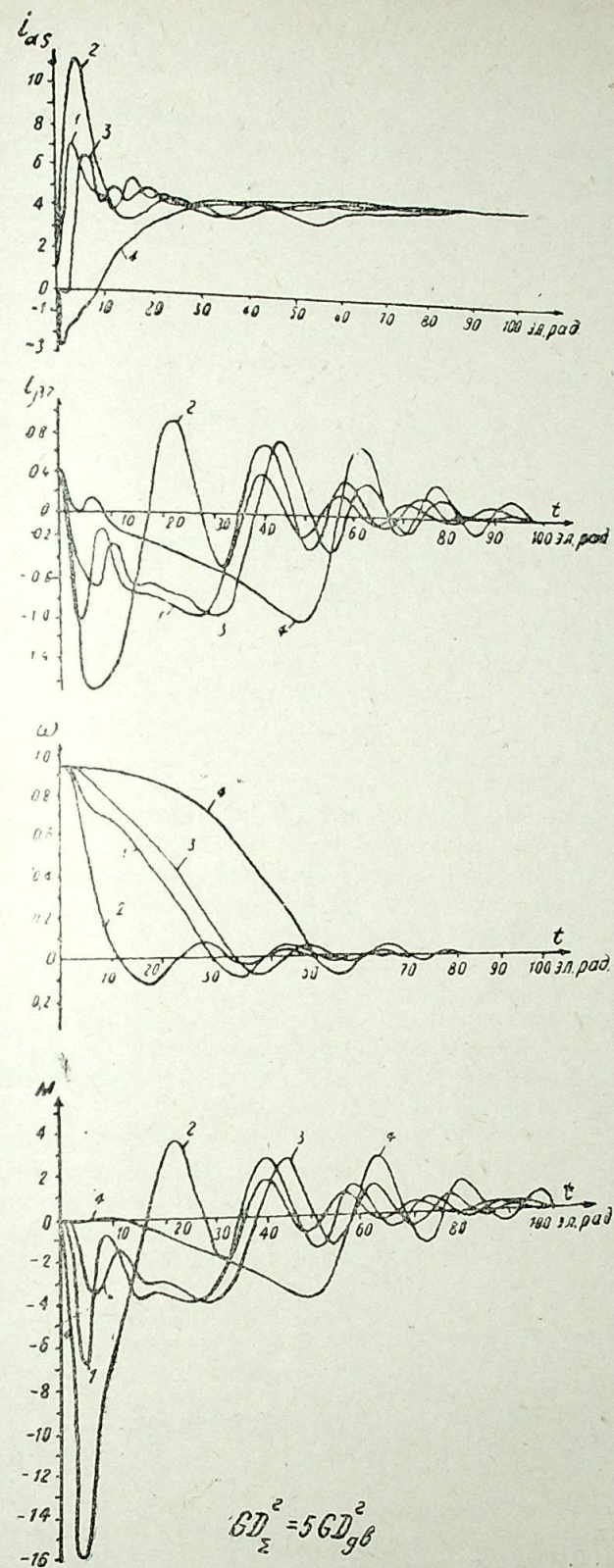


Рис. 1. Графики переходных токов, скорости и момента при неза-



тукшем поле ротора: 1— $\varphi=0$; 2— $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 3— $\varphi=\pi$; 4— $\varphi=\frac{3}{2}\pi$.

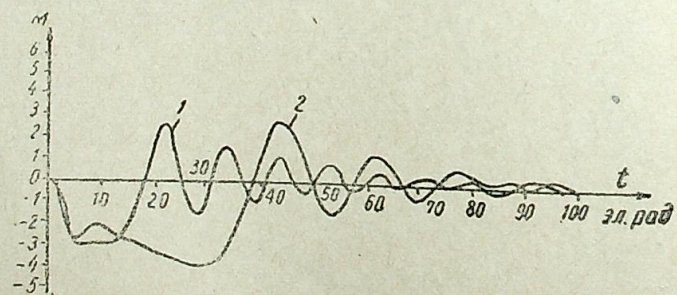
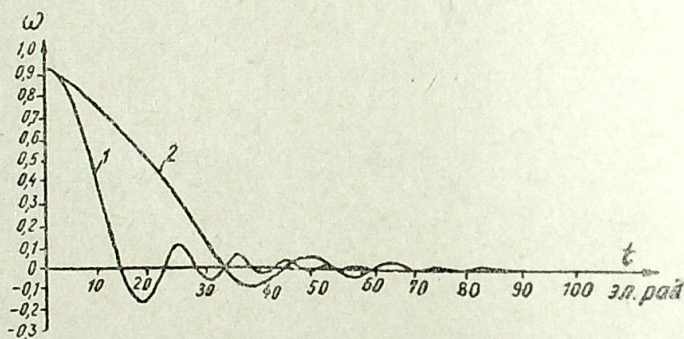
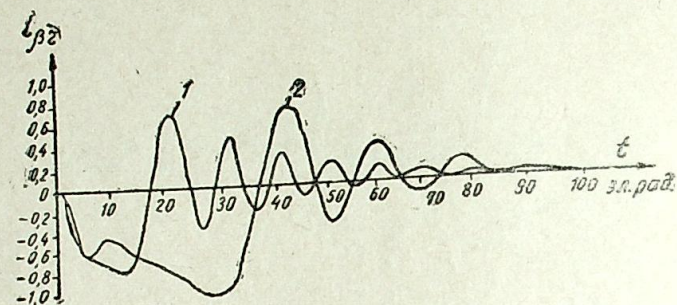
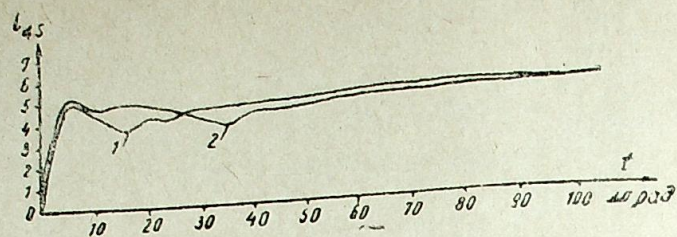


Рис. 2. Графики переходных токов, скорости и момента при затухшем поле ротора: 1— $GD^2 = 1,7 GD_{дв}^2$; 2— $GD^2 = 5 GL_{дв}^2$.

скорость резко падает и достигает нулевого значения за время $\tau = 5 \text{ эл. рад}$, а в случае $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ изменение скорости происходит бо-

лее плавно, и время торможения составляет уже 28 эл. рад ;

в) тормозной путь, рассчитанный по полученным при решении характеристикам $\omega = f(\tau)$, принимает резко отличающиеся значения и может превышать в 2—3 раза минимальный, соответствующий фазе

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

2. Из-за периодического характера тормозного момента процесс торможения во всех случаях сопровождается возникновением пульсирующей скорости, т. е. колебаний ротора, что вызывает вибрацию проводимого механизма.

3. Скорость затухания переходных токов и моментов практически не зависит от величины φ .

Сравнение кривых и расчетных данных, полученных для значений $GD_{\Sigma}^2 = 1,76 GD_{дв}^2$ и $GD_{\Sigma}^2 = 5 GL_{дв}^2$, показывает, что при увеличении махового момента частота пульсаций токов, моментов и скорости уменьшается, а время затухания переходного процесса возрастает. Нестабильность тормозного пути в относительных величинах не меняется. Это доказывает, что распространенное в литературе мнение о том, что при $GD_{\Sigma}^2 > 3 GD_{дв}^2$ электромагнитные переходные процессы не влияют на процесс торможения, является ошибочным.

Наряду с рассмотренными вариантами на машине были также решены уравнения, соответствующие динамическому торможению при затухшем поле ротора. В этом случае в уравнении статорной цепи в системе (9) отсутствовала периодическая составляющая, а начальные значения токов ротора принимались нулевыми.

Для всех рассмотренных случаев были построены механические характеристики, которые здесь не приводятся. Характер кривых отличается от общеизвестных статических характеристик, что объясняется влиянием электромагнитных переходных процессов. Так как действительные процессы при торможении с незатухшим полем ротора значительно отличаются от процессов, рассчитанных по статическим характеристикам, фактический тормозной путь оказывается в 1,5—2 раза меньше, чем полученный по расчетам без учета переходных процессов. Поэтому при решении практических задач необходимо пользоваться только динамическими характеристиками.

Сравнение результатов решения, представленных графически на рис. 2, с кривыми рис. 1 показывает, что при торможении как с наличием затухающего магнитного поля ротора, так и без него в системе действует знакопеременный результирующий момент. Пиковые значения моментов в начальный период торможения во втором случае значительно меньше, чем в первом: если при наличии остаточного поля ротора максимальный момент достигает значения $M_r = 12 M_n$, то без поля—только $M_r = 3 M_n$. Статорный ток не имеет таких значительных пиков, как на рис. 1. Сильно отличаются также и время торможения, и величина тормозного пути, которые, соответственно, в 3 и 2,3 раза больше, чем минимальные значения при незатухшем поле ротора.

Предложенная методика расчета электромеханических переходных процессов при торможении асинхронного электропривода с использованием уравнений синхронной машины позволяет исследовать на ЭЦВМ влияние различных факторов на характер процесса. Резуль-

таты решения показали возможность анализа действия остаточного поля ротора на характер переходного процесса с учетом изменения скорости ротора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янко-Триницкий А. А. "Электричество", 1951, № 3.
2. Шубенко В. А., Карочкин В. А. "Электромеханика", 1958, № 4.
3. Грузов Л. Н. Методы математического исследования электрических машин, ГЭИ, 1953.
4. Бабаев М. А. "За технический прогресс", 1965, № 2.
5. Ковач К. П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока ГЭИ, 1963.

М. А. Бабаев

Асинхрон електрик интигалынын динамик тормозланмасы
заманы кечид процеслэринин электрэн рэгэмһесаблајычы
машында тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә асинхрон електрик интигалынын динамик тормозланмасы заманы электромеханики кечид процеслэринин тәһлили верилмишдир. Тэдгигат электромагнит вә механики кечид процеслэри тәнлик лэринин "БЕСМ 2" электрон-рэгәм һесаблајычы машинында биркә һәлли јолу илә апарылмышдыр.

Тәкляф олунан үсул ғырланма сүр'әтинин дәјишмәсини нәзәр алмагла, роторун ғалычы саһәсинин тормозланма параметрлэринин стабиллијинә тәсирина ашкар етмәјә имкан верир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийат елмлэри серијасы, 1966, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 3

Н. К. КАДЫРОВ, Ф. А. ГАСИМОВА, А. Б. ГАБИБОВ

О ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ МАРОНА-ТОРНБУЛЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА УГЛЕВОДОРОДНЫХ ГАЗОВ

Мароном-Торнбуллом [7, 8, 9, 10, 11] было получено уравнение для зависимости $z = f(\pi, \tau)$ в форме

$$z = 1 + 2,303 \left(\frac{0,06477}{\tau} - \frac{0,1706}{\tau^2} - \frac{0,04334}{\tau^4} \right) \pi + 4,606 \left(\frac{0,002715}{\tau^2} + \frac{0,005165}{\tau^3} - \frac{0,0003231}{\tau^5} \right) \pi^2 - 6,909 \left(\frac{0,00002669}{\tau^6} \right) \pi^3, \quad (1)$$

устанавливающее связь между коэффициентом сжимаемости (z), приведенным давлением (π) и приведенной температурой (τ). Но это уравнение в представленном виде, как отмечают авторы не было подвергнуто проверке [9]. Поэтому в настоящей работе сделана попытка произвести возможную проверку уравнения (1) на углеводородах алканового ряда и применить его для вычисления дроссель-эффекта этих газов. Проверка по графикам, имеющимся в опубликованных работах, была произведена нами по источникам [1, 2, 5, 6, 11, 12].

Убедившись в удовлетворительном выражении уравнением (1) почти всех существующих обобщенных графиков, можно перейти к решению основной задачи, т. е. применимости уравнения Марона-Торнбулла для вычисления коэффициента Джоуля-Томсона углеводородов алканового ряда. Известно, что дифференциальный дроссель-эффект Джоуля-Томсона можно вычислить следующей формулой:

$$\mu = \frac{ART^2 \left(\frac{\partial \tau}{\partial T} \right)_p}{p C_p}, \quad (2)$$

где μ — коэффициент Джоуля-Томсона, °K/at;

$A = \frac{1}{427} \frac{\text{ккал}}{\text{кгм}}$ — термический эквивалент тепла;

$R = 848 \frac{\text{кгм}}{\text{моль}^\circ\text{К}}$ — универсальная газовая постоянная;

T — абсолютная температура, °K;

p — давление, ат;

C_p —мольная теплоемкость при постоянном давлении,
 $\frac{\text{ккал}}{\text{моль}^\circ \text{К}}$;

Размерность— $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{^\circ \text{К}}$.

Как видно из формулы (2), для вычисления дифференциального дроссель-эффекта необходимо располагать аналитическим выражением функциональной зависимости $z = f(p, \tau)$ в явной форме и численным значением C_p .

Первая из этих величин легко получается из уравнения (1):

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p = -A_0 \frac{p}{T^2} + 2B_0 \frac{p}{T^3} + 4C_0 \frac{p}{T^5} - 2D_0 \frac{p^2}{T^3} -$$

$$-3E_0 \frac{p^2}{T^4} + 5F_0 \frac{p^2}{T^6} + 6G_0 \frac{p^3}{T^7}, \quad \text{где} \quad (3)$$

$$A_0 = \frac{A_0' T_{кр}}{p_{кр}}; B_0 = \frac{B T_{кр}^2}{p_{кр}}; C_0 = \frac{C T_{кр}^4}{p_{кр}}; D_0 = \frac{D T_{кр}^2}{p_{кр}};$$

$$E_0 = \frac{E T_{кр}^3}{p_{кр}}; F_0 = \frac{F T_{кр}^5}{p_{кр}}; G_0 = \frac{G T_{кр}^6}{p_{кр}^3}; \quad (4)$$

$$A_0' = 0,1491650; B = 0,3928910; C = 0,0998120; D = 0,0125050;$$

$$E = 0,0237899; F = 0,0014880; G = 0,00018657;$$

$p_{кр}, T_{кр}$ —соответственно, критическое давление и температура углеводорода.

Для вычисления второй величины, т. е. мольной теплоемкости при постоянном давлении C_p , воспользуемся следующим дифференциальным уравнением термодинамики:

$$C_p = -ART \left[2 \int \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{p} + T \int \left(\frac{\partial^2 z}{\partial T^2}\right)_p \frac{dp}{p} \right] + C_p^0, \quad (5)$$

где C_p^0 —мольная теплоемкость при постоянном давлении, отнесенная к идеальному газовому состоянию. Для раскрытия интегралов мы должны располагать еще и второй производной от z по T , что, очевидно, получится из (3):

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial T^2}\right)_p = \frac{2A_0 p}{T^3} - \frac{6B_0 p}{T^4} - \frac{20C_0 p}{T^6} + \frac{6D_0 p^2}{T^4} +$$

$$+ \frac{12E_0 p^2}{T^5} - \frac{30F_0 p^2}{T^7} - \frac{42G_0 p^3}{T^8}. \quad (6)$$

Интегрирование (5) с учетом (3) и (6) дает

$$C_p = \frac{AR}{T^2} \left[\left(2B_0 + \frac{12C_0}{T^2} \right) p - \right.$$

$$\left. - \left(D_0 + \frac{3E_0}{T} - \frac{10F_0}{T^3} \right) p^2 + \frac{10G_0 p^3}{T^4} \right] + C_p^0 \quad (7)$$

или, имея в виду (4)

$$C_p = AR \left(\frac{T_{кр}}{T} \right)^2 \frac{p}{p_{кр}} \left[\left(B_1 + \frac{C_1 T_{кр}^2}{T^2} \right) - \left(D_1 + E_1 \frac{T_{кр}}{T} - F_1 \frac{T_{кр}^3}{T^3} \right) \frac{p}{p_{кр}} + \right.$$

$$\left. + G_1 \frac{T_{кр}^4}{T^4} \cdot \frac{p^2}{p_{кр}^2} \right] + C_p^0. \quad (8)$$

В приведенных параметрах

$$C_p = \frac{\pi AR}{\tau^2} \left[\left(B_1 + \frac{C_1}{\tau^2} \right) - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau} - \frac{F_1}{\tau^3} \right) \pi + \frac{\pi^2 G_1}{\tau^4} \right] + C_p^0, \quad (9)$$

где $B_1 = 2B_0 = 0,7857820$;

$$C_1 = 12C_0 = 1,1977440; D_1 = D_0 = 0,0125050; E_1 = 3E_0 = 0,0713697;$$

$$F_1 = 10F_0 = 0,0148800; G_1 = 10G_0 = 0,0018400.$$

Общие выражения для дифференциального дроссель-эффекта с учетом полученных формул для C_p будут:

$$\mu = \frac{ART_{кр} \left[\left(-A_1' + \frac{B_1' T_{кр}}{T} + \frac{C_1' T_{кр}^3}{T^3} \right) - \right.$$

$$p_{кр} \left\{ AR \left(\frac{T_{кр}}{T} \right)^2 \frac{p}{p_{кр}} \left[\left(B_1 + \frac{C_1 T_{кр}^2}{T^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3} \right) \frac{p}{p_{кр}} + \frac{G_1 T_{кр}^4 p^2}{T^4 p_{кр}^2} \right] + C_p^0 \right\} -$$

$$\left. - \left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3} \right) \frac{p}{p_{кр}} + \frac{G_1 T_{кр}^4 p^2}{T^4 p_{кр}^2} \right] + C_p^0 \Bigg\} \quad (10)$$

в безразмерных параметрах:

$$\mu = \frac{ART_{кр} \left[\left(-A_1' + \frac{B_1'}{\tau} + \frac{C_1'}{\tau^3} \right) - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau} - \frac{F_1}{\tau^3} \right) \frac{\pi}{\tau^3} + \frac{G_1 \pi^2}{\tau^5} \right] +$$

$$p_{кр} \left\{ \frac{\pi AR}{\tau^2} \left[\left(B_1 + \frac{C_1}{\tau^2} \right) - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau} - \frac{F_1}{\tau^3} \right) \pi + \frac{\pi^2 G_1}{\tau^4} \right] + C_p^0 \right\} \Bigg\} \quad (11)$$

$$A_1' = 0,149165; B_1' = 0,7857820; C_1' = 0,3992480; D_1 = 0,0250100;$$

$$E_1 = 0,0713697; F_1 = 0,0074400; G_1 = 0,0011040.$$

Интегральный дроссель-эффект, выражаемый

$$T_2 - T_1 = \Delta T = \int_{p_1}^{p_2} \mu dp, \quad (12)$$

можно вычислить, исходя из полученных формул (10) или (11):

$$T_2 - T_1 = \Delta T = \int_{p_1}^{p_2} ART_{кр} \left[-A_1' + \frac{B_1' T_{кр}}{T} + \frac{C_1' T_{кр}^3}{T^3} \right] -$$

$$p_{кр} \left\{ AR \left(\frac{T_{кр}}{T} \right)^2 \frac{p}{p_{кр}} \left[\left(B_1 + \frac{C_1 T_{кр}^2}{T^2} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3} \right) \frac{p}{p_{кр}} + \frac{G_1 T_{кр}^4 p^2}{T^4 p_{кр}^2} \right] dp -$$

$$\left. - \left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3} \right) \frac{p}{p_{кр}} + \frac{G_1 T_{кр}^4 p^2}{T^4 p_{кр}^2} \right] + C_p^0 \Bigg\} \quad (13)$$

Произведя соответствующие замены, приводим подынтегральное выражение к виду, удобному для интегрирования:

$$\Delta T = \omega \int_{p_1}^{p_2} \frac{(p^2 - \alpha_0 p + \beta_0) dp}{(p^3 - \gamma_0 p^2 + \tau p + \varepsilon_0)} \quad (14)$$

$$\text{где } \omega = \frac{ART_{кр}^6 G_1}{p_{кр}^2 T^5 C_p^0} = \frac{ART_{кр} G_1}{p_{кр}^2 \tau^5 C_p^0};$$

$$\alpha_0 = \frac{\left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3}\right) T^4 p_{кр}^3}{G_1} = \frac{\left(D_1 + \frac{E_1}{\tau} - \frac{F_1}{\tau^3}\right) \tau^4 p_{кр}}{G_1};$$

$$\beta_0 = \frac{\left(-A_1 + \frac{B_1 T_{кр}}{T} + \frac{C_1 T_{кр}^3}{T^3}\right) T^5 p_{кр}^2}{G_1 T_{кр}^5} = \frac{\left(-A_1 + \frac{B_1}{\tau} + \frac{C_1}{\tau^3}\right) \tau^5 p_{кр}^2}{G_1};$$

$$\gamma_0 = \frac{\left(D_1 + \frac{E_1 T_{кр}}{T} - \frac{F_1 T_{кр}^3}{T^3}\right) T^4 p_{кр}}{G_1 T_{кр}^2} = \frac{\left(D_1 + \frac{E_1}{\tau} - \frac{F_1}{\tau^3}\right) \tau^4 p_{кр} T_{кр}^2}{G_1};$$

$$\tau = \frac{\left(B_1 + \frac{C_1 T_{кр}^2}{T^2}\right) T^5 p_{кр}^2}{G_1 T_{кр}^2} = \frac{\left(B_1 + \frac{C_1}{\tau^2}\right) \tau^4 T_{кр}^2 p_{кр}^2}{G_1};$$

$$\varepsilon_0 = \frac{C_p^0 T_{кр}^3 p_{кр}}{ART_{кр}^3 G_1} = \frac{C_p^0 \tau^5 T_{кр}^2}{AR G_1}.$$

Интеграл (14) раскрывается при постоянной температуре как правильная рациональная дробь, знаменатель которой является полным кубическим уравнением:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \omega \int_{p_1}^{p_2} \frac{(p^2 - r_0 p + \beta_0) dp}{p^3 - \gamma_0 p^2 + \tau p + \varepsilon_0} = A \ln \frac{p_2 - x}{p_1 - x} +$$

$$+ B \ln \frac{p_2 - y}{p_1 - y} + C \ln \frac{p_2 - z}{p_1 - z}, \quad (15)$$

где A, B, C — постоянные, зависящие от температуры и вычисляемые по методу неопределенных коэффициентов:

$$A = \frac{x^2 - r_0 x + \beta_0}{(x - y)(x - z)}; \quad B = \frac{y^2 - r_0 y + \beta_0}{(y - z)(y - x)}; \quad C = \frac{z^2 - r_0 z + \beta_0}{(z - x)(z - y)};$$

x, y, z — вещественные корни кубического уравнения, решенного в тригонометрической форме:

$$x = 2 \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{\gamma_0}{3}; \quad y = 2 \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\varphi + 2\pi}{3} + \frac{\gamma_0}{3};$$

$$z = 2 \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\varphi + 4\pi}{3} + \frac{\gamma_0}{3}; \quad r = \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{\gamma_0}{3} - \tau\right)^3}{27}};$$

$$\cos \varphi = \frac{\left(\frac{2\gamma_0^3}{27} - \frac{\tau\gamma_0}{3} - \varepsilon_0\right)}{2 \sqrt[3]{\left(\frac{\gamma_0}{3} - \tau\right)}}.$$

Вследствие непрерывного изменения температуры в интервале от p_1 до p_2 значения T в форме (13) определяются способом последовательных приближений исходя из начальной температуры системы. Формулы для вычисления C_p через $(C_p - C_p^0)$ были проверены на базе обобщенного графика зависимости теплоемкости от приведенных параметров [5].

Последней величиной, подлежащей определению, является молярная теплоемкость при постоянном давлении C_p^0 , для которой существуют многочисленные эмпирические формулы полиномиального типа:

$$C_p^0 = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (15')$$

с соответствующими постоянными a, b, c, d для каждого индивидуального углеводорода.

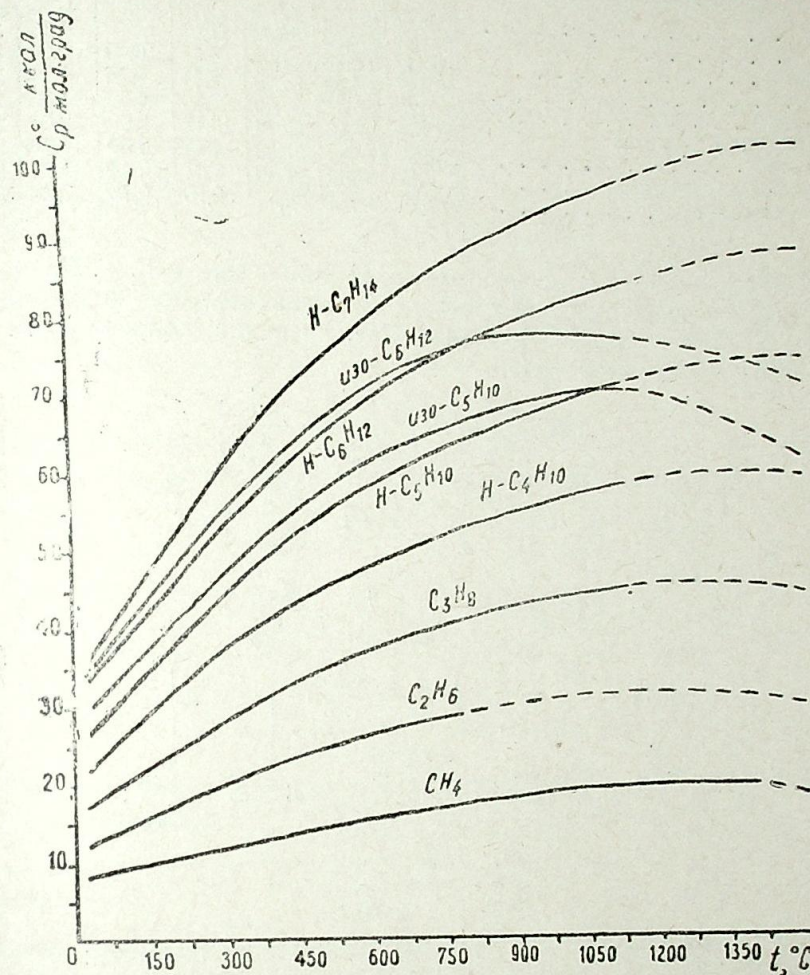


Рис. 1.

При вычислении C_p^0 эти формулы, за исключением формулы метана, привели к значительно большим ошибкам в сторону завышения относительно табличных данных [3]. Поэтому пришлось воспользоваться имеющимися в литературе экспериментальными (спектроскопическими) и подсчитанными табличными значениями C_p^0 (или C_p^1)* для построения общего графика (рис. 1) $C_p^0 - t$ для всех углеводородов, приведенных в табл. 1. Имея необходимые величины, нетрудно вычислить коэффициенты Джоуля-Томсона его гомолога метана (табл. 1). Наблюдается уменьшение ρ по мере роста π при постоянной τ .

* C_p^1 — теплоемкость при одной атмосфере.

Таблица 1

Компоненты	Мольная доля X_i	Темп. $T_{кр}$	Критич. давление, $P_{кр}$	Мольная доля X_i , $T_{кр}$	Мольная доля X_i , $P_{кр}$	Мольная доля X_i , мол. вес.	Мол. вес.
Медан	0,8058	190,94	45,79	153,86	36,90	12,89	16,04
Этан	0,0386	304,83	48,44	11,87	1,870	1,16	30,1
Пропан	0,0117	369,83	41,98	4,33	0,49	0,51	43,6
н-Бутан	0,0197	425,38	3,49	8,39	0,74	1,14	58,0
Изо-пентан	0,0170	460,38	32,86	7,83	0,56	1,22	71,9
(2-метилбутан) н-Пентан	0,0200	469,3	32,10	13,16	0,90	2,01	71,9
Изо-гексан	0,0123	499,83	30,69	6,15	0,38	1,06	86,4
(2-метилгексан) н-Гексан	0,0148	507,60	29,60	7,51	0,44	1,27	86,4
Гептан + тяжелые	0,0521	628,72	24,49	32,76	0,13	7,24	139

Сопоставление $\mu_{см}$ с данными В. К. Эдмистера и Г. Т. Левченко [4] показало хорошую сходимость и незначительное отклонение. Применительно к смесям уравнение (11), очевидно, должно быть переписано в следующем виде:

$$\mu_{см} = \frac{ART_{кр} \left[\left(-A'_1 + \frac{B'_1}{\tau_{ппр}} - \frac{C'_1}{\tau_{ппр}^3} \right) - \frac{p_{пкр}}{AR \tau_{ппр}^2} \left[\left(B_1 + \frac{C_1}{\tau_{ппр}^2} - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau_{ппр}} - \frac{F_1}{\tau_{ппр}^3} \right) \frac{\tau_{ппр}}{\tau_{пкр}} + \frac{\tau_{ппр}^2 G_1}{\tau_{пкр}^5} - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau_{ппр}} - \frac{F_1}{\tau_{ппр}^3} \right) \tau_{ппр} + \frac{\tau_{ппр}^2 G_1}{\tau_{пкр}^4} \right] + C_{исм}^0 \right]}{p_{пкр} \left\{ \frac{AR \tau_{ппр}}{\tau_{ппр}^2} \left[\left(B_1 + \frac{C_1}{\tau_{ппр}^2} - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau_{ппр}} - \frac{F_1}{\tau_{ппр}^3} \right) \frac{\tau_{ппр}}{\tau_{пкр}} + \frac{\tau_{ппр}^2 G_1}{\tau_{пкр}^5} - \left(D_1 + \frac{E_1}{\tau_{ппр}} - \frac{F_1}{\tau_{ппр}^3} \right) \tau_{ппр} + \frac{\tau_{ппр}^2 G_1}{\tau_{пкр}^4} \right] + C_{исм}^0 \right\}} \right.} \quad (16)$$

где $T_{пкр} = \sum_{i=1}^n x_i T_{кри}$; $p_{пкр} = \sum_{i=1}^n x_i p_{кри}$; $\tau_{ппр} = \frac{T_{см}}{T_{пкр}}$;

$$\tau_{ппр} = \frac{p_{см}}{p_{пкр}}; C_{исм}^0 = \sum_{i=1}^n x_i C_{ри}^0;$$

$T_{пкр}$, $p_{пкр}$ — псевдокритические температура и давление смеси;
 $T_{кри}$, $p_{кри}$ — критические температура и давление i -го компонента;
 x_i — мольная доля i -го компонента;
 $\tau_{ппр}$, $\pi_{ппр}$ — псевдоприведенные температура и давление;
 $p_{см}$, $T_{см}$ — давление и температура смеси;
 $C_{исм}^0$, $C_{ри}^0$ — мольные теплоемкости смеси и i -го компонента в идеальном газовом состоянии и при температуре $\tau_{ппр}$.

По формуле (16) подсчитан коэффициент Джоуля-Томсона смеси для двух приведенных температур (табл. 2):

$$\tau_{ппр}^1 = 2 \text{ и } \tau_{ппр}^2 = 2,5.$$

Сопоставление коэффициентов Джоуля-Томсона смеси $\mu_{см}$ и чистого метана $\mu_{см}$ показывает, что с практической точки зрения между ними имеется сравнительно малое расхождение, если принять во внимание состав смеси, содержащей около 20% гомологов и ~80% метана.

Все изложенное позволяет сделать следующие выводы:

1. Уравнение Марона-Торнбулла в интервалах $\tau = 1,4 \div 4$ и $\pi = 2 \div 8$ удовлетворяет также и имеющимся обобщенным графикам и графикам природных газов на метановой основе (свыше 80% CH_4).

Таблица 2

Приведенное давление	Для смеси			Коэффициент Джоуля-Томсона, μ		Погрешность $(\mu_{см} - \mu_{сн}) \cdot 100\%$
	$C_{рсм}$	$T_{пкр}$	$P_{пкр}$	$\mu_{сн1}$	$\mu_{см}$	$\mu_{сн1}$
$\tau_{ппр}^1 = 2 (t' = 103,72^\circ C)$						
3	13,972	245,55	43,55	0,184651	0,175240	5,40
4	"	"	"	0,156937	0,150092	4,46
6	"	"	"	0,127673	0,123900	3,22
7	"	"	"	0,102734	0,100589	1,92
8	"	"	"	0,079543	0,078498	1,26
	"	"	"	0,057788	0,057419	0,69
	"	"	"	0,037214	0,037204	0,03

$$\tau_{ппр}^2 = 2,5 (t' = 204,19^\circ C)$$

2	19,546	245,55	43,55	0,091803	0,082604	10,02
3	"	"	"	0,077140	0,069345	9,47
4	"	"	"	0,633800	0,057686	8,99
5	"	"	"	0,050045	0,045575	8,40
6	"	"	"	0,03150	0,034088	8,33
7	"	"	"	0,024621	0,022677	7,72
8	"	"	"	0,012381	0,011434	7,32

Таблица 3

Компоненты	Мольная доля, X_i	$\tau_{ппр}^1 = 2 (t' = 103,66^\circ C)$		$\tau_{ппр}^2 = 2,5 (t' = 204,19^\circ C)$	
		$C_{ри}^0$ ккал/мол·град	$X_i C_{ри}^0$	$C_{ри}^0$ ккал/мол·град	$X_i C_{ри}^0$
Метан	0,8058	9,5	7,6551	12,6	10,31420
Этан	0,0386	15,0	0,5790	21,5	0,82990
Пропан	0,0117	20,8	0,2433	30,5	0,35685
н-Бутан	0,0197	27,2	0,5358	40,0	0,78000
Изо-пентан (2-метилбутан)	0,0170	32,4	0,5508	48,0	0,81600
н-Пентан	0,0280	35,5	0,9940	51,0	1,4280
Изо-гексан (2-метилпентан)	0,0123	40,0	0,4920	57,0	0,87110
н-Гексан	0,0148	41,5	0,6142	59,0	0,87320
Гептан + тяжелые	0,0521	44,3	2,3080	66,0	3,43860
		$C_{рсм}^0 = \sum X_i C_{ри}^0 = 13,972$		$C_{рсм}^0 = \sum X_i C_{ри}^0 = 19,545$	

2. Выведенные на базе уравнения Марона-Торнбулла выражения для μ и C_p применительно к основным гомологам алканового ряда могут быть рекомендованы в пределах $\pi = 2 \div 8$ и $\tau = 1,5 \div 4$ для точных, а вышеуказанных параметров для оценочных, приближенных и прогнозных расчетов.

3. Предложен график зависимости $C_p^0 - t$ для применения в практических расчетах.

4. Вычислены коэффициенты Джоуля-Томсона метана и одной углеводородной смеси в области высоких температур ($\tau_{\text{нпр}} = 2$ и $\tau_{\text{нпр}} = 2,5$).

5. Доказано, что для подсчета коэффициента Джоуля-Томсона углеводородных смесей известного состава, содержащих свыше 80% СН₄ и его гомологов, в исследованных нами пределах давлений и температур ($\pi = 2 \div 8$ и $\tau \geq 2$) могут быть использованы уравнения состояний метана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown G. G., oil weekly 1940, 39/XII, vol. 100, № 4, pp. 30.
2. Додж Б. Ф. Химическая термодинамика. Госхимиздат, 1950.
3. Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов, вып. I. Госстехиздат, 1945.
4. Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов, вып. II, Госстехиздат, 1947.
5. Герш С. Я. Глубокое охлаждение, ч. I. Госэнергоиздат, 1957.
6. Hougden O. A. Watson K. M. Chemical Process Principles part I, 1948.
7. Maron S. H., Turnbull D. Industrial and Engineering chemistry, vol. 33, № 2, February 1941, pp. 246—248.
8. Maron S. H., Turnbull D. Industrial and Engineering chemistry, vol. 33, № 3, March 1941, pp. 408—410.
9. Maron S. H., Turnbull D. Industrial and Engineering chemistry, vol. 34, № 5, May 1942, pp. 544—551; 510—602.
10. Maron S. H. and Turnbull D., J. of the American chemical society, 64, 2195—98 (1942).
11. Rev Inst. Français du Pétrole, VIII, vol. 7, № 8, 1952, pp. 280—282.
12. Standing M. B. and Katz D. Z. AIME Petroleum Technology, Tech. Publications, № 1328, 1948.

Н. Г. Гадиров, Ф. А. Гасимова, А. Б. Габиев

Карбогидроген газларынын Джоуль-Томсон эмсалынын hesablanmasy үчүн Марон-Торнбулл барабарлигинин татбигине dair

ХҮЛАСӘ

Бу мәгаләдә Марон-Торнбулл тәрәфиндән азотун тәчрүби гijмәтләри әсасында, уйғун һаллар принципини тәтбиг етмәклә, алынмыш һал тәнлијинин карбогидроген газларынын дросселләnmә эмсалынын hesablanmasyна aid тәнликләр верилмишдир.

Мәлифтер сүбүт егмишәр ки, Марон-Торнбулл тәнлији фәрди газларла барабәр, тәбии газ гарышыглары үчүн тәртиб едилмиш диаграмлары да өдәјир.

Бундан башга, мүүллифләр сабит һәчмдә, ејни тәнлик әсасында истилик тутумуну hesabламаға имкан верән даһа бир тәнлик, идеал газ һалында температурдан асылы оларағ вә спектроскопик гijмәтләрдән истифадә едәрәк тәјин едилмиш $C_p^0 - t$ графикини дә гурмушлар.

Аналитик усулларла исбат олунмушдур ки, тәркибиндә 80% метан вә 20% онун һомологлары олан газ гарышыглары дросселләnmә эмсалыны hesabламағ үчүн метанын һал тәнлијиндән истифадә етмәк олар.

Х. С. САМИДОВ

ДИНАМИКА ТОРМОЖЕНИЯ ПРИВОДА МАКЕТА СТОЛА СВЕРЛИЛЬНОГО СТАНКА С ПРОГРАММНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

При сверлении изделий с большим числом отверстий одной из важнейших и трудных задач является обеспечение точного межосевого расстояния. При обработке ответственных деталей требуется точность межосевых расстояний до 1—2 мм для легких деталей и до 5 мм для крупных [2].

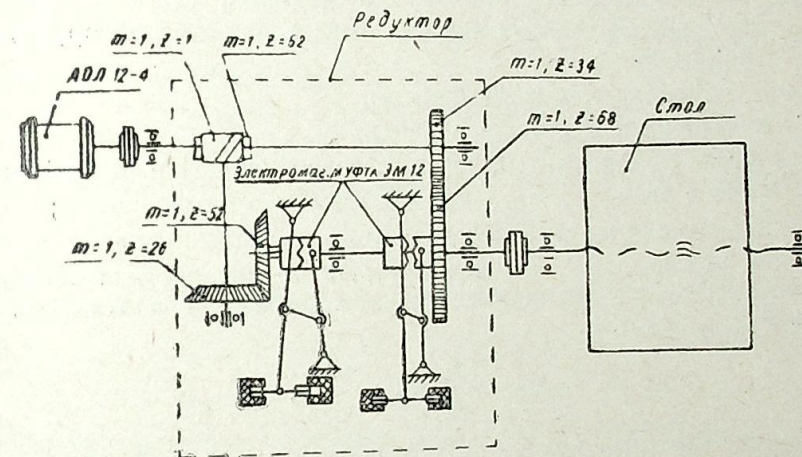


Рис. 1. Кинематическая схема привода макета стола сверлильного станка

При обработке отверстий в сверлильных станках с программным управлением точность межосевого расстояния достигается методом точной координатной перестановки стола (изделия) относительно инструмента или наоборот. Точность перестановки стола из одной позиции в другую зависит главным образом от динамического свойства привода и от характера движущего момента. В частности, она зависит от упругости системы привода, моментов инерции движущихся масс, величины трения в направляющих, скорости перемещения исполнительного органа (стола), станка, механической характеристики двигателя, тормозных моментов, системы управления и т. п.

В настоящей работе, учитывая вышеизложенные факты, аналитически изучена динамика торможения привода макета стола сверлильного станка с программным управлением, выявлены характер влия-

ния этих факторов на точность установки стола и определена величина динамической ошибки между движением задающего устройства (электродвигателя) и исполнительного органа станка.

На рис. 1 изображен привод макета стола сверлильного станка с программным управлением*. Стол приводится в движение от асинхронного двигателя типа АОЛ 12-4. Редуктор, состоящий из червячной, конической и цилиндрической передач и двух электромагнитных муфт, служит для сообщения ходовому валу стола

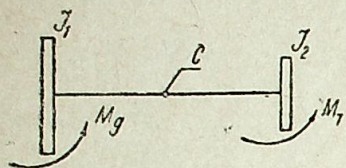


Рис. 2

ускоренного или замедленного вращения. В схеме показано положение включения медленного вращения. Передаточное отношение редуктора 2 и 104.

Для изучения динамики торможения привода макета стола представим его в виде некоторой упрощенной расчетной системы, приведенной к двухмассовой системе (рис. 2) Остановка стола осуществляется путем динамического торможения электро-

двигателя. К началу совместного торможения массы с моментом инерции J_1 и J_2 (рис. 2) уравнения движения могут быть записаны [3] в виде

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + \beta (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + C (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_d, \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - \beta (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - C (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_t, \end{cases} \quad (1)$$

где I_1 —момент инерции ротора электродвигателя;

I_2 —приведенный момент инерции масс привода к ротору электродвигателя;

β —коэффициент затухания привода;

C —приведенная жесткость привода;

φ_1 и φ_2 —угловые координаты, соответственно, первой и второй масс;

M_t —момент трения, приведенный к валу электродвигателя;

M_d —тормозящий момент, создаваемый электродвигателем.

Будем предполагать, что механическая характеристика электродвигателя АОЛ-12-4 при динамическом торможении изменяется по линейному закону т. е.

$$M_d = \frac{M_n}{S_n} \left(1 - \frac{\varphi_1}{\omega_0} \right), \quad (2)$$

где M_n —номинальный момент электродвигателя;

S_n —номинальное скольжение;

φ_1 —текущая угловая скорость ротора электродвигателя при торможении;

ω_0 —синхронная угловая скорость электродвигателя.

Учитывая выражение (2) и принимая обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\beta}{I_1}, \quad d = \frac{C}{I_1}, \quad \kappa = \frac{C}{I_2}, \quad M_2 = \frac{M_t}{I_2}, \\ b &= \frac{M_n}{S_n \omega_0 I_1}, \quad \delta = \frac{\beta}{I_2}, \quad M_1 = \frac{M_n}{S_n \cdot I_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

* Макет был спроектирован и изготовлен в институте ВНИИПТ «Нефтемаш» г. Баку на основе координатно-сверлильного станка с программным управлением типа С-8-Пу-1 (НИИТМаш, г. Ленинград) с участием автора статьи.

уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + a (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - b \varphi_1 + d (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_1, \\ \ddot{\varphi}_2 - \delta (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \kappa (\varphi_1 - \varphi_2) = -M_2. \end{cases} \quad (4)$$

Общее решение этой системы есть сумма частного ее решения и общего решения с соответствующей системы без правой части т. е.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + a (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - b \varphi_1 + d (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ \ddot{\varphi}_2 - \delta (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \kappa (\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) можно принять в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = A e^{st}, \\ \varphi_2 = B e^{st}, \end{cases} \quad (6)$$

где A и B —произвольные постоянные.

Подставляя решения (6) в уравнение (5), получим:

$$\begin{cases} A (s^2 + as - bs + d) - B (as + d) = 0, \\ -A (\delta s + \kappa) + B (s^2 + \delta s + \kappa) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнение (7) может дать отличные от нуля значения A и B только в том случае, если равен нулю определитель системы, т. е.

$$\begin{vmatrix} (s^2 + as - bs + d) & -(as + d) \\ -(\delta s + \kappa) & (s^2 + \delta s + \kappa) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим следующее характеристическое уравнение:

$$s^4 + (a - b + \delta) s^3 + (d - b \delta + \kappa) s^2 - b \kappa s = 0. \quad (8)$$

Решая уравнение (8), найдем:

$$\begin{aligned} s_1 &= 0, \quad s_3 = -1632 + i \cdot 793 = -n + ip, \\ s_2 &= 150, \quad s_4 = -1632 - i \cdot 793 = -n - ip. \end{aligned}$$

Подставляя значение s в уравнение (6) и принимая обозначения*:

$$\frac{A_2}{B_2} = \gamma_2; \quad \frac{A_3}{B_3} = \gamma_3; \quad \frac{A_4}{B_4} = \gamma_4,$$

получим общее решение однородного уравнения (5) в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = B_1 + \gamma_2 B_2 e^{s_2 t} + \gamma_3 B_3 e^{-nt} \cos pt + \gamma_4 B_4 e^{-nt} \sin pt, \\ \varphi_2 = B_1 + B_2 e^{s_2 t} + B_3 e^{-nt} \cos pt + B_4 e^{-nt} \sin pt. \end{cases} \quad (9)$$

Частное решение уравнения (4) будем искать в виде

$$\begin{cases} \varphi_1 = c_1 t + \beta_1, \\ \varphi_2 = \alpha_2 t + \beta_2. \end{cases} \quad (10)$$

Подстановка выражения (10) в уравнение (4) приводит к равенству.

$$\begin{aligned} a (c_1 - c_2) - b c_1 + d [(c_1 - c_2) t + \beta_1 - \beta_2] &= -M_1, \\ -\delta (\alpha_1 - \alpha_2) - \kappa [(c_1 - c_2) t + \beta_1 - \beta_2] &= -M_2, \end{aligned}$$

отождествляя, получаем для определения c_1 , c_2 , β_1 и β_2 уравнения

$$\begin{cases} d (c_1 - c_2) = 0, \\ -b a + d (\beta_1 - \beta_2) = -M_1, \\ -\kappa (\beta_1 - \beta_2) = -M_2. \end{cases} \quad (11)$$

* Соотношение между коэффициентами A и B находится из уравнения (7).

Из этих уравнений, считая, что β_2 — произвольный коэффициент и в частном случае равен нулю, получаем:

$$\sigma_1 = \alpha_2 = \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa),$$

$$\beta_1 = \frac{M_2}{\kappa}.$$

Таким образом, частным решением уравнения (4) будет

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa)t + \frac{M_2}{\kappa}, \\ \psi_2 &= \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa)t. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Следовательно, общим решением уравнения (4) $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1 + \psi_1$ и $\varphi_2 = \bar{\varphi}_2 + \psi_2$ будет:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 + \gamma_2 B_2 e^{s_1 t} + \gamma_3 B_3 e^{-nt} \cos pt + \gamma_4 B_4 e^{-nt} \sin pt + \\ &\quad + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa)t + \frac{M_2}{\kappa}, \\ \varphi_2 &= B_1 + B_2 e^{s_1 t} + B_3 e^{-nt} \cos pt + B_4 e^{-nt} \sin pt + \\ &\quad + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa)t, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Составим выражение скорости:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= s_2 \gamma_2 e^{s_1 t} + e^{-nt} \cos pt (p \gamma_4 B_4 - n \gamma_3 B_3) - \\ &\quad - e^{-nt} \sin pt (n \gamma_4 B_4 + p \gamma_3 B_3) + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa), \\ \dot{\varphi}_2 &= s_2 B_2 e^{s_1 t} + e^{-nt} \cos pt (p B_4 + n B_3) - \\ &\quad - e^{-nt} \sin pt (n B_4 + p B_3) + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Начальные условия должны соответствовать установившемуся движению перед началом торможения, т. е. могут быть записаны в виде:

$$t=0; \varphi_1 = \varphi; \varphi_2 = 0; \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega, \quad (15)$$

Используя начальные условия торможения (15), из уравнений (13) и (14) найдем выражение произвольных постоянных B_1, B_2, B_3 и B_4 :

$$\left. \begin{aligned} B_1 + \gamma_2 B_2 + \gamma_3 B_3 + \frac{M_2}{\kappa} &= \varphi; \quad B_1 + B_2 + B_3 = 0, \\ s_2 \gamma_2 B_2 + p \gamma_4 B_4 - n \gamma_3 B_3 + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa) &= \omega, \\ s_2 B_2 + p B_4 - n B_3 + \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa) &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Решая системы уравнений (16), получим:

$$B_2 = \frac{(1 - \gamma_4)(1 - \gamma_3) \left[\frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa) - \omega \right] + n(\gamma_4 - \gamma_3) \left(\frac{M_2}{\kappa} - \varphi \right)}{s_2(\gamma_2 - \gamma_4)(\gamma_3 - 1) + n(\gamma_3 - \gamma_4)(\gamma_2 - 1)};$$

$$B_3 = \frac{B_2(1 - \gamma_2) - \frac{M_2}{\kappa} + \varphi}{\gamma_3 - 1};$$

$$B_4 = \frac{\omega + n B_3 - s_2 B_2 - \frac{1}{b\kappa} (dM_2 + M_1\kappa)}{p},$$

$$B_1 = -B_2 - B_3.$$

Как видно из выражений (13), процесс торможения является результатом сложения периодических и непериодических движений, т. е. апериодическим движением. Третьи и четвертые члены представляют собой затухающие свободные колебания, имеющие различные амплитуды, различные фазы, но одинаковые частоты. Эти члены содержат

периодическую функцию с периодом $\tau = \frac{2\pi}{p}$,

где p — частота свободных колебаний системы:

$$p = \sqrt{\frac{C}{I_1}}.$$

Множитель e^{-nt} в этих членах постепенно убывает и, таким образом, вызванные в начале колебания будут затухать. Темп затухания зави-

сит от величины постоянной n ; $n = \beta \frac{I_1 + I_2}{2 I_1 I_2}$. На рис. 3 показан тре-

тий член первого уравнения выражения (13). Как видно, амплитуда колебания уменьшается после каждого цикла в отношении $e^{-n\tau} : 1$ т. е. убывание следует закону геометрической прогрессии.

Численные решения (13) и (14) представлены на рис. 4. При построении этого графика были приняты следующие начальные условия движения: $t=0$; $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \omega$.

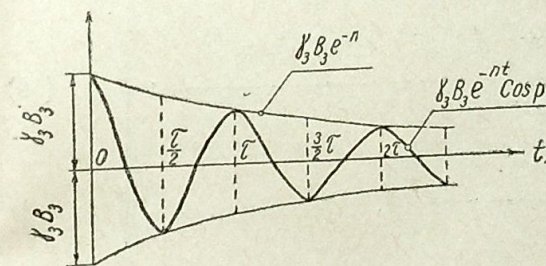


Рис. 3

В отличие от начальных условий (15) тут принято $\varphi_1 = 0$, что дает возможность более наглядно увидеть процесс торможения.

Как видно из рис. 4, имеется разница между углами поворота и угловыми скоростями массы с моментом инерции I_1 и I_2 . Эта разница постепенно увеличивается и достигает своего максимального значения в

конце торможения. Найдя разницу между значениями углов φ_1 и φ_2 в точках D и D_1 (в конце торможения), можно определить величину рассогласования в приводе.

Если коэффициент затухания $\beta = 0-0,04$ при одинаковых остальных величинах привода, то характеристическое уравнение (7) имеет два комплексных корня и общее решение уравнения (1) имеет вид (13). При $\beta > 0,04$ все корни характеристического уравнения (7) вещественные и решение уравнения таково:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= B_1 + \gamma_2 B_2 e^{-s_2 t} + \gamma_3 B_3 e^{s_3 t} + \frac{1}{b\kappa} (d M_2 + M_1 \kappa) t + \frac{M_2}{\kappa} + \\ &\quad + \gamma_4 B_4 e^{-s_4 t}, \\ \varphi_2 &= B_1 + B_2 e^{-s_2 t} + B_3 e^{s_3 t} + B_4 e^{-s_4 t} + \frac{1}{b\kappa} (d M_2 + M_1 \kappa) t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

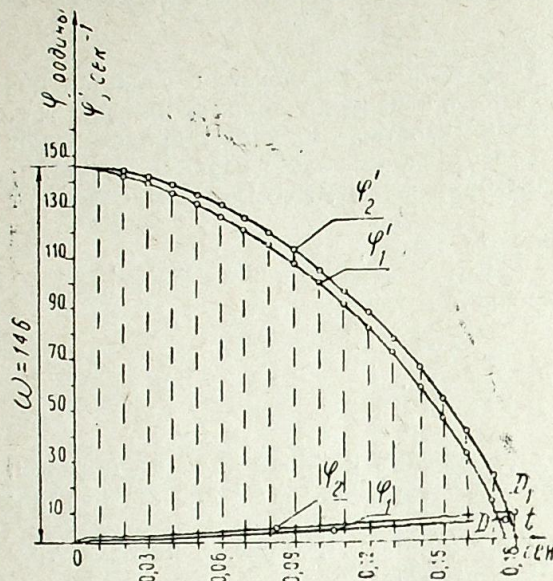


Рис. 4

где постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 , при начальных условиях (15) определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} B_4 &= \frac{\omega (1 - \gamma_2) (\gamma_3 - 1) (s_2 + s_3) - \varphi s_2 s_3 (\gamma_3 - \gamma_2)}{L + M}, \\ B_3 &= \frac{\omega (1 - \gamma_2) - B_4 s_4 (\gamma_2 - \gamma_1) - \frac{1}{b\kappa} (d M_2 + M_1 \kappa) (1 - \gamma_2)}{s_3 (\gamma_3 - \gamma_2)}; \\ B_2 &= \frac{s_3 B_3 - s_4 B_4 + \frac{1}{b\kappa} (d M_2 + M_1 \kappa) - \omega}{s_2}, \\ B_1 &= -B_2 - B_3 - B_4, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где

$$L = [(\gamma_2 \gamma_4 s_3 + \gamma_3 s_3) (s_2 - s_4) - \gamma_3 \gamma_4 s_2 (s_4 + s_3) + \gamma_2 \gamma_3 s_4 (s_2 + s_3) + s_2 s_4 (\gamma_4 - \gamma_2) + s_3 (\gamma_4 s_4 - \gamma_2 s_2)],$$

$$M_2 = \frac{1}{b\kappa} (d M_2 + M_1 \kappa) (1 - \gamma_2) (\gamma_3 - 1) (s_2 + s_3) - \frac{M_2}{\kappa} s_2 s_3 (\gamma_3 - \gamma_2).$$

Коэффициент затухания β зависит от величины сопротивления в приводе. Как видно из рис. 5, она сильно влияет на процесс торможения.

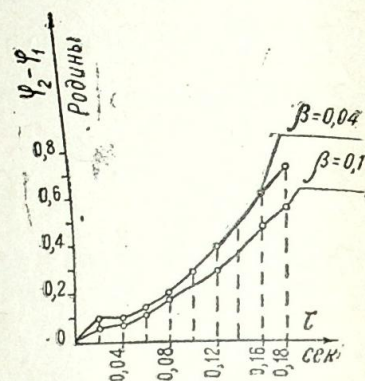


Рис. 5

Теоретический анализ приводит к следующим выводам:

1. Непостоянство силы трения при различных скоростях, негнущая механическая характеристика электродвигателя, а также упругие деформации привода подачи приводят к рассогласованию торможения; возникающие при этом динамические ошибки необходимо учитывать наряду с кинематическими погрешностями, источником которых служат первичные ошибки звеньев механизма привода.
2. Чем больше величина трения в кинематических парах исполнительного механизма, тем больше рассогласования между входом и выходом системы в момент остановки.
3. Теоретический анализ, выполненный в работе, можно использовать при анализе динамики упругих систем, приводимых двигателем с прямолинейной механической характеристикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. Физматгиз, 1962.
2. Самидов Х. С. „За технический прогресс“, 1964, № 4.
3. Самидов Х. С. Доклад на IV съезде по основным проблемам теории машин и механизмов в Кисе, 1964.
4. Тимошенко Н. П. Колебания в инженерном деле. М., 1959.

Х. С. Самидов

Програм илэ идарэ олуан автоматик бургу дэжаһы столу макетинин өтүрүчү механизмнин дајандырылма динамикасы

ХҮЛАСЭ

Мүхтәлиф сүр'әтләрде сүртүнмә гүввәсинин мүхтәлифлији, електрик мүһәррикинин механики характеристикасынын сабит олмамасы, өтүрүчү механизм деформасијасы столун дајандырылмасы вахты һәрәкәтвәричи вә ичраедици механизмләрде һәрәкәт фәрғинә сәбәб олур. Бу вахт әмәлә кәлән динамики сәһфләри кинематик сәһфләрлә јанашы нәзәрә алмаг лазымдыр.

Ичраедици механизмнин кинематик чүтләриндә сүртүнмә чох олдуға системин дајандырылмасы вахт онун кириш вә чыхыш һиссәләриндәки һәрәкәт фәрғи дә бәјүк олур.

Бу тәдгигатда апарылмыш нәзәри һесабламалар механики характеристикалары дүз хәтт гануну илэ дәјишән мүһәррикләрлә һәрәкәтә кәтирилән системләрин динамикасыны өјрәнмәкдә тәтбиг едилә биләр.

К. М. ЧАЛБЯН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПЛОТНОСТИ ТОКА В ТРУБЧАТОМ ТОКОПРОВОДЕ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Ранее нами был изложен общий метод расчета распределения переменного тока по сечениям цилиндрических параллельных токопроводов, имеющих произвольные значения J_q . Эта физическая задача математически сводилась к решению краевой задачи для составной области. Поставленная задача решалась методом последовательных приближений, причем граничные условия каждого приближения находились с помощью другого вспомогательного процесса последовательных приближений [1, 2].

В настоящей статье рассматривается метод расчета распределения переменного тока по сечению трубчатого токопровода круглого сечения при заданных граничных условиях. Внутренняя задача Дирихле в данном случае будет формулироваться следующим образом: внутри круглого трубчатого токопровода напряженность магнитного поля $H(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 H = \kappa^2 H \quad (1)$$

$$\left(\kappa^2 = j \frac{4\pi}{c} \omega \sigma \right),$$

а на границах ($a_1 > a_2$)

$$\left. \begin{aligned} H(a_1, \varphi) &= F_1(\varphi), \\ H(a_2, \varphi) &= F_2(\varphi) \end{aligned} \right\} 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2)$$

Определить $H(r, \varphi)$ внутри кольца.

Представляет интерес рассмотрение таких краевых задач, у которых $F_1(\varphi)$, $F_2(\varphi)$ принимают значения на вспомогательной комплексной плоскости, мнимую единицу которой мы будем обозначать через i , чтобы отличить ее от временной мнимой единицы j [3].

Разложим эти функции в ряд Фурье в комплексной форме;

$$F_1(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(1)} v_n(\varphi), \quad \text{где } C_n^{(1)} = \int_{-\pi}^{\pi} F_1(\varphi) v_{-n}(\varphi) d\varphi;$$

$$F_2(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(2)} v_n(\varphi), \quad \text{где } C_n^{(2)} = \int_{-\pi}^{\pi} F_2(\varphi) v_{-n}(\varphi) d\varphi$$

$$\text{и } v_n(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}$$

Уравнение (1) в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} - \kappa^2 H = 0. \quad (3)$$

Будем искать решение уравнения (3) в виде ряда Фурье:

$$H(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_n(r) v_n(\varphi). \quad (4)$$

Для определения коэффициентов $S_n(r)$ подставим (4) в уравнение (3), умножим обе части этого уравнения на $\tilde{v}_n(\varphi)$ и проинтегрируем от 0 до 2π . Преобразуя полученное выражение, используя при этом интегрирование по частям и равенства

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |v_n|^2 d\varphi} = 1; \quad \int_0^{2\pi} v_n \tilde{v}_\kappa d\varphi = \begin{cases} 0 & n \neq \kappa, \\ 1 & n = \kappa; \end{cases}$$

$$S_n(r) = \int_0^{2\pi} H(r, \varphi) \tilde{v}_n(\varphi) d\varphi,$$

получаем [4]

$$\frac{d^2 S_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dS_n}{dr} - \left(\kappa^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) S_n = 0. \quad (5)$$

Умножив (5) на $\frac{1}{\kappa^2}$ и обозначая $\kappa r = \alpha$, получим

$$\frac{d^2 S_n}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{dS_n}{d\alpha} \left(1 + \frac{l^2}{\alpha^2} \right) S_n = 0. \quad (6)$$

Как известно, за линейно независимые решения этого уравнения удобно брать функцию

$$I_n(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{2} \right)^{1+2\nu}}{\nu! (l+\nu)!}$$

и функцию Макдональда

$$K_n(\alpha) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi n i}{2}} H_n^{(1)}(i\alpha),$$

где $H_n^{(1)}(i\alpha)$ — функция Ганкеля.

Общий интеграл уравнения (6) имеет вид

$$S_n(r) = A_n I_n(\kappa r) + B_n K_n(\kappa r) \quad (\text{при } -\infty < n < \infty),$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Тогда решение (4) принимает вид

$$H(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} [A_n I_n(\kappa r) + B_n K_n(\kappa r)] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\varphi}. \quad (7)$$

Определим постоянные A_n и B_n из краевых условий (2), тогда решение задачи будет

$$H(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-C_n^{(1)} K_n(\kappa a_2) + C_n^{(2)} K_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} I_n(\kappa r) + \right. \\ \left. + \frac{C_n^{(1)} I_n(\kappa a_2) - C_n^{(2)} I_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} K_n(\kappa r) \right] e^{in\varphi}. \quad (8)$$

Перейдем теперь к распределению плотности тока $\hat{h}(r, \varphi)$ по сечению токопровода, воспользовавшись для этого первым уравнением Максвелла в цилиндрической системе координат:

$$\delta(r, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} H_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} \right]. \quad (9)$$

Определим нормальную $H_r(r, \varphi)$ и тангенциальную $H_\varphi(r, \varphi)$ составляющие напряженности поля $H(r, \varphi)$. Для этого представим граничные функции в виде

$$F_m(\varphi) = F_m^{(Re)}(\varphi) + i F_m^{(Im)}(\varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{m(Re)} v_n(\varphi) + i \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{m(Im)} v_n(\varphi),$$

$$\text{где } C_n^{m(Re)} = \int_{-\pi}^{\pi} F_m^{(Re)}(\varphi) v_n(\varphi) d\varphi; \quad C_n^{m(Im)} = \int_{-\pi}^{\pi} F_m^{(Im)}(\varphi) v_n(\varphi) d\varphi,$$

где $m = 1, 2; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Тогда

$$H(r, \varphi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{-C_n^{1(Re)} K_n(\kappa a_2) + C_n^{2(Re)} K_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} I_n(\kappa r) + \right. \\ \left. + \frac{C_n^{1(Re)} I_n(\kappa a_2) - C_n^{2(Re)} I_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} K_n(\kappa r) \right] e^{in\varphi} + \\ + \left[\frac{-C_n^{1(Im)} K_n(\kappa a_2) + C_n^{2(Im)} K_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} I_n(\kappa r) + \right. \\ \left. + \frac{C_n^{1(Im)} I_n(\kappa a_2) - C_n^{2(Im)} I_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} K_n(\kappa r) \right] i e^{in\varphi}.$$

Учитывая, что в показательной форме вектор изображается в виде $x = |x| e^{i\varphi}$, замечаем, что вектор $e^{i\varphi}$ представляет собой единичный орт, совпадающий с нормалью к окружности проведенной из начала координат радиусом $r = r_1$. Вектор $i e^{i\varphi}$ повернут относительно вектора $e^{i\varphi}$ на $\pi/2$, его, следовательно, можно рассматривать как единичный орт 1_φ , совпадающий по направлению с касательной к окружности, проведенной из начала координат радиусом r . Таким образом, получив орты $1_r = e^{i\varphi}$ и $1_\varphi = i e^{i\varphi}$, разложим по составляющим выражения $e^{in\varphi} = \cos(n-1)\varphi 1_r + \sin(n-1)\varphi 1_\varphi$ и $i e^{in\varphi} = -\sin(n-1)\varphi 1_r + \cos(n-1)\varphi 1_\varphi$ и представим вектор $H(r, \varphi)$ в виде $H(r, \varphi) = H_r 1_r + H_\varphi 1_\varphi$.

Вычисляя $\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}$ и $\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}$ и подставляя в (9), определяем

$$\delta(r, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \frac{\kappa}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-C_n^{1(Re)} K_n(\kappa a_2) + C_n^{2(Re)} K_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} I_{n-1}(\kappa r) - \right. \right. \\ \left. - \frac{C_n^{1(Re)} I_n(\kappa a_2) - C_n^{2(Re)} I_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} K_{n-1}(\kappa r) \right] \sin(n-1)\varphi + \\ + \left[\frac{-C_n^{1(Im)} K_n(\kappa a_2) + C_n^{2(Im)} K_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} I_{n-1}(\kappa r) - \right. \\ \left. - \frac{C_n^{1(Im)} I_n(\kappa a_2) - C_n^{2(Im)} I_n(\kappa a_1)}{K_n(\kappa a_1) I_n(\kappa a_2) - K_n(\kappa a_2) I_n(\kappa a_1)} K_{n-1}(\kappa r) \right] \cos(n-1)\varphi \right\}.$$

Таким образом, получены выражения для определения напряженности магнитного поля (8) и плотности тока (10) по сечению трубчатого круглого токопровода. Эти результаты имеют важное практическое значение. Они позволяют при известных граничных условиях исследовать распределение магнитного поля и плотности тока в токопроводах.

Рассчитаем с помощью полученной формулы скин-эффект в трубчатом проводнике круглого сечения. Очевидно, что на внутреннем контуре напряженность поля можно считать равной нулю, а граничные условия на внешнем контуре будут те же, что и в случае линейного тока [1], расположенного по оси трубы:

$$F_1(\varphi) + i F_1^{(Im)}(\varphi) = i \frac{2}{c} \frac{I}{a_1} e^{i\varphi},$$

$$F_2(\varphi) = 0.$$

Из (10) получаем формулу скин-эффекта для трубчатого проводника;

$$\delta(r, \varphi) = - \frac{I \kappa}{2\pi a_1} \frac{I_0(\kappa r) K_1(\kappa a_2) + K_0(\kappa r) I_1(\kappa a_2)}{I_1(\kappa a_2) K_1(\kappa a_1) - I_1(\kappa a_1) K_1(\kappa a_2)}. \quad (11)$$

Определим теперь сопротивление трубчатого проводника с учетом скин-эффекта, пользуясь методикой изложенной в [2]:

$$R_\sim = \operatorname{Re} \frac{a_1 c^2}{I^2 4\pi \sigma j \omega} \int_0^{2\pi} \hat{\delta}(a_1, \theta) \frac{\partial \delta}{\partial r} \bigg|_{r=a_1} d\theta,$$

где $\hat{\delta}$ — комплексно сопряженное значение по j .

Для этого вычисляем значение

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} = \frac{I \kappa^2}{2\pi a_1} \frac{I_1(\kappa a_2) K_1(\kappa a_1) - I_1(\kappa a_1) K_1(\kappa a_2)}{I_1(\kappa a_2) K_1(\kappa a_1) - I_1(\kappa a_1) K_1(\kappa a_2)},$$

отсюда

$$\frac{\partial \delta}{\partial r} \bigg|_{r=a_1} = \frac{I \kappa^2}{2\pi a_1}.$$

Записав (11) в виде

$$\delta(r, \varphi) = \frac{I \kappa}{2\pi a_1} \frac{I_0(\kappa r) K'_0(\kappa a_2) - K_0(\kappa r) I'_0(\kappa a_2)}{I'_0(\kappa a_1) K'_0(\kappa a_2) - I'_0(\kappa a_2) K'_0(\kappa a_1)},$$

получаем

$$R_\sim = \operatorname{Re} \frac{a_1 c^2}{I^2 4\pi} \frac{1}{\sigma^2 j \omega} \left(\frac{I \kappa}{2\pi a_1} \right)^2 2\pi \kappa \frac{I_0(\kappa a_1) K'_0(\kappa a_2) - K_0(\kappa a_1) I'_0(\kappa a_2)}{I'_0(\kappa a_1) K'_0(\kappa a_2) - I'_0(\kappa a_2) K'_0(\kappa a_1)}.$$

Умножив числитель и знаменатель на $(\pi a_1^2 - \pi a_2^2)$ и учитывая, что

$$R_0 = \frac{1}{\sigma(\pi a_1^2 - \pi a_2^2)}, \text{ получаем}$$

$$K_\sim = \frac{R_\sim}{R_0} = \operatorname{Re} \frac{\kappa t (a_1 + a_2)}{2a_1} \frac{I_0(\kappa a_1) K'_0(\kappa a_2) - K_0(\kappa a_1) I'_0(\kappa a_2)}{I'_0(\kappa a_1) K'_0(\kappa a_2) - I'_0(\kappa a_2) K'_0(\kappa a_2)}, \quad (12)$$

где $t = a_1 - a_2$ — толщина трубы.

Формула (12) совпадает с результатом, приведенным в [5]. Из (11) простым предельным переходом получаем формулу поверхностного эффекта для круга. Так как

$$I_1(\kappa a_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\kappa a_2}{2} \right)^{2n+1}}{n! (n+1)!}$$

и

$$K_1(ka_2) = (-1)^2 I_1(ka_2) \ln \frac{ka_2}{2} + \\ + \frac{1}{2} (-1) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{ka_2}{2}\right)^{1+2l}}{l!(1+l)!} \left(\sum_{n=1}^l \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{1+l} \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{ka_2}{2}\right)^{-1}$$

то

$$\lim_{a_2 \rightarrow 0} \delta = - \frac{I_0 I_1(ka_2) \left[\frac{1}{4ka_2} + \dots \right] + K_0(ka_2) \left[\frac{ka_2}{2} + \dots \right]}{2\pi a_1 K_1(ka_1) \left[\frac{ka_2}{2} + \dots \right] - I_1(ka_1) \left[\frac{1}{4ka_2} + \dots \right]} = \\ = \frac{I_0(ka_2)}{2\pi a_1 I_1(ka_1)}$$

На электрических станциях с блоками 300 Мвт и выше для соединения генераторов с трансформаторами широкое применение находят трубчатые токопроводы круглого сечения. Одной из конструкций таких токопроводов являются токопроводы с отдельно изолированными фазами, рассчитанными на большие токи — комплектные экранированные токопроводы типа КЭТ. Для определения потерь в токопроводе и в элементах его конструкции (главным образом в кожухе) необходимо знать распределение поля в них [6]. Определив граничные значения в сложных системах токопроводов экспериментально, с помощью датчиков Холла можно определить распределение напряженности магнитного поля по полученной формуле (8) и распределение плотности тока соответственно по формуле (10). В этом случае коэффициенты Фурье находятся методами приближенного интегрирования [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Меерович Э. А. и Чальян К. М. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1953 № 3.
2. Чальян К. М. „Изв. АН СССР, энергетика и транспорт“ 1954, № 4.
3. Каден Г. Электромагнитные экраны, 1957.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, 1948.
5. Dwight H. B. Electrical coils and conductors. New-York—London, 1945.
6. Mankoff L. L., Swerdlow N., Wilson W. R. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems (USA) №67, 1963.
7. Толстов Г. П. Ряды Фурье, 1951.

К. М. Чальян

**Чэрэжан сыхлыгынын вэ магнит саһэси
кэркинлијинин даирэви ен кэскили борунун чэрэжан
кечиричисиндэ пајланмасы**

ХҮЛАСЭ

300 мвт вэ даһа күчлү блоклары олан мүасир електрик стансийаларында генераторлары трансформаторларла бирлешдирмэк үчүн ајрыча изолэ олунмуш, фазалы, јүксэк чэрэжанла һесабыланмыш, экранлашдырылмыш комплект чэрэжан кечиричилэри—КЭТ кениш инкишаф етдирилир. Белэ чэрэжан кечиричилэриндэки иткини тапмаг үчүн онун

һәр бир эсас элементиндэ (габыг вэ кечиричи) саһэнин пајланмасыны билмэк лазымдыр.

Мәгаләдэ кәнар шәртләрэ эсасән, дәјишән чэрэјанын даирэви ен кәскили, борувары цилиндрик чэрэјан кечиричисиндэ пајланмасынын үмуми һесабат методу верилмишдир.

Кәнар шәртлэри тәјин едәрэк, мүрәккәб системли чэрэјан кечиричисиндэ магнит саһэси кәркинлијинин пајланмасыны (8), чэрэјан сыхлыгынын пајланмасыны исә (10) дүстуруна эсасән тапмаг олар.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, А. М. МУРАДОВ

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ВКЛЮЧЕНИЯ НА СИНУСОИДАЛЬНУЮ Э. Д. С. ЛИНИИ ЗАКОРОЧЕННОЙ НА КОНЦЕ ЧЕРЕЗ ИНДУКТИВНОСТЬ С ПРИМЕНЕНИЕМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

В [1] к расчету переходных процессов в цепях с распределенными параметрами и с учетом потерь в линии применен метод характеристики. При этом для упрощения расчета активное сопротивление линии $r_{\lambda} = r_0 l$ сосредоточено в ее начале и конце. Для сопоставления используемого нами метода с методом примененным в [1], рассмотрим аналогичную задачу (рис. 1).

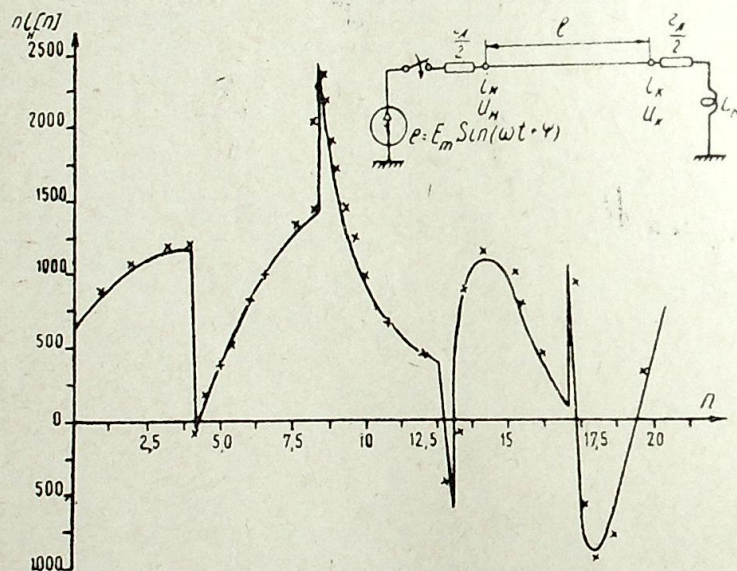


Рис. 1

Параметры линии:

$$r_0 = 0,022 \text{ ом/км}; L_0 = 0,00093313 \text{ гн/км};$$

$$C_0 = 0,0092 \cdot 10^{-6} \text{ ф/км}; g = 0;$$

волновое сопротивление $Z = 273 \text{ ом}$; длина линии 650 км.

Реактивная нагрузка линии $L_n = 0,5 \text{ гн}$. Внутренним сопротивлением источника пренебрегаем.

Запишем уравнение линии в операторной форме:

$$U_n(p) = U_k(p) \operatorname{ch} \gamma l + I_k(p) Z \operatorname{sh} \gamma l, \quad (1)$$

$$I_n(p) = I_k(p) \operatorname{ch} \gamma l + \frac{U_k(p)}{Z} \operatorname{sh} \gamma l. \quad (2)$$

Граничные условия задачи:

$$\text{при } x=0 \quad e(t) = \frac{r_{\lambda}}{2} i_n + u_n, \quad (3)$$

$$\text{при } x=l \quad u_k = \frac{r_{\lambda}}{2} i_k + L_n \frac{di_k}{dt}. \quad (4)$$

Запишем краевые условия (3), (4) в конечных разностях. Для этого последовательность точек, делящих ось t на отрезки длиной T , занумеруем слева направо так, чтобы

$$t_{n+1} = t_n + T,$$

и обозначим $e(t_n) = e[n]$, $i(t_n) = i[n]$, $u(t_n) = u[n]$.

$$\text{Получим:} \quad e(n) = \frac{r_{\lambda}}{2} i_n[n] + u_n[n], \quad (3a)$$

$$u_k[n] = \frac{r_{\lambda}}{2} i_k[n] + \frac{L_n}{T} (i_k[n+1] - i_k[n]), \quad (4a)$$

где $e[n] = E_{\max} \sin \left(\bar{\omega} n + \frac{\pi}{6} \right)$ и $\bar{\omega} = \frac{\omega T}{\lambda}$, $\frac{\pi}{6} = \psi$.

Далее, поддерживая связь между оператором обычного p и дискретного q преобразования Лапласа $q = pT$ и выражая шаг интегрирования через время пробега волны в виде

$$T = 2t_0 \frac{1}{\lambda},$$

где $t_0 = \sqrt{Lc}l$ — время пробега волны в один конец;
 λ — коэффициент для укорочения шага интегрирования,
для линии без потерь, получим

$$\gamma l = p \sqrt{Lc}l = \frac{q\lambda}{2},$$

Уравнения (1) и (2) при этом приводятся к следующему виду:

$$U_n[q] = U_k[q] \operatorname{ch} \frac{q\lambda}{2} + Z I_k[q] \operatorname{sh} \frac{q\lambda}{2}, \quad (5)$$

$$I_n[q] = I_k[q] \operatorname{ch} \frac{q\lambda}{2} + \frac{1}{Z} U_k[q] \operatorname{sh} \frac{q\lambda}{2}. \quad (6)$$

Подвергая уравнения (3a), (4a), (5) и (6) дискретному преобразованию Лапласа [2], при нулевых начальных условиях получим:

$$U_n^*[q] = U_k^*[q] \operatorname{ch} \frac{q\lambda}{2} + Z I_k^*[q] \operatorname{sh} \frac{q\lambda}{2} \quad (7)$$

$$I_n[q] = I_k^*[q] \operatorname{ch} \frac{q\lambda}{2} + \frac{1}{Z} U_k[q] \operatorname{sh} \frac{q\lambda}{2}, \quad (8)$$

$$E^*[q] = \frac{r_L}{2} I_n^*[q] + U_n^*[q], \quad (9)$$

$$U_n^*[q] = \frac{r_L}{2} I_n^*[q] + \frac{L_n \lambda}{T} (e^q - 1) I_n^*[q]. \quad (10)$$

Решая уравнения (7—10) совместно, можно определить $U_n^*[q]$, $I_n^*[q]$, $U_k^*[q]$ и $I_k^*[q]$ на линии в переходном режиме.

Для сопоставления результатов с [1] решим уравнения (7—10) относительно тока в начале линии, переходя при этом от гиперболических функций к показательным и раскладывая числитель и знаменатель по отрицательным степеням e^{-q} , для сокращенной записи обозначим коэффициенты при e^{-q} в числителе через B_{l_2-k} а в знаменателе A_{l_1-k} , тогда в общем виде получим:

$$I_n^*[q] = \frac{B_{l_2} + B_{l_2-1}e^{-q} + \dots + B_0e^{-ql_2}}{A_{l_1} + A_{l_1-1}e^{-q} + \dots + A_0e^{-ql_1}} E^*[q] \quad (11)$$

или

$$I_n^*[q] = \frac{\sum_{k=0}^{l_2} B_{(l_2-k)} e^{-q l_2}}{\sum_{k=0}^{l_1} A_{(l_1-k)} e^{-q l_1}} E^*[q],$$

где l_1 и l_2 — наивысшие степени числителя и знаменателя. Значения коэффициентов A_{l_1-k} , B_{l_2-k} приведены в таблице.

k	0	1	λ	$\lambda+1$
A_{l_1-k}	$\frac{r_L - Z - \left(1 - \frac{r_L}{2Z}\right)}{\frac{L_n \lambda}{T} - \frac{r_L^2}{4Z}} = -2503, 8468$	$\left(1 - \frac{r_L}{2Z}\right) \frac{L_n \lambda}{T} = 2244, 6447$	$\frac{r_L + Z - \left(1 + \frac{r_L}{2Z}\right)}{\frac{L_n Z}{T}} = 2077, 8205$	$\left(1 + \frac{r_L}{2Z}\right) \frac{L_n \lambda}{T} = 2363, 2281$
B_{l_2-k}	$1 - \frac{r_L}{2Z} + \frac{L_n \lambda}{ZT} = 9,414459$	$\frac{L_n \lambda}{ZT} = 8,4401$	$1 + \frac{r_L}{2Z} - \frac{L_n \lambda}{ZT} = -7,414459$	$\frac{L_n \lambda}{ZT} = 8,4401$

Для сокращения вычислений приведем уравнение (11) к виду

$$\sum_{k=0}^{l_1} A_{e_1-k} e^{-qk} I_n^*[q] = \sum_{k=0}^{l_2} B_{l_2-k} e^{-qk} E^*[q].$$

Переходя от изображений к оригиналам, согласно теореме сдвига имеем

$$\sum_{k=0}^{l_1} A_{l_1-k} i_n[n-k] = \sum_{k=0}^{l_2} B_{l_2-k} e[n-k]$$

или

$$i_n[n] = \frac{1}{A_{l_1}} \left(\sum_{k=0}^{l_2} B_{l_2-k} e[n-k] - \sum_{k=1}^{l_1} A_{l_1-k} i_n[n-k] \right). \quad (12)$$

Расчет тока в начале линии произведен на ЭЦВМ по рекуррентному соотношению (12) согласно блок-схеме (рис. 2). Полученные результаты представлены в виде крестиков на кривой, рис. 1, построенной по методу характеристик [1]. Сопоставление полученных данных показывает, что применение метода дискретного преобразования Лапласа к исследованию переходных процессов в линиях дает такие же результаты, как и использование метода характеристик. Однако использование этого метода по сравнению с методом дискретного преобразования Лапласа выглядит гораздо сложнее.

Таким образом, метод дискретного преобразования может найти широкое применение при исследовании сложных электромагнитных переходных процессов в линиях электропередач.

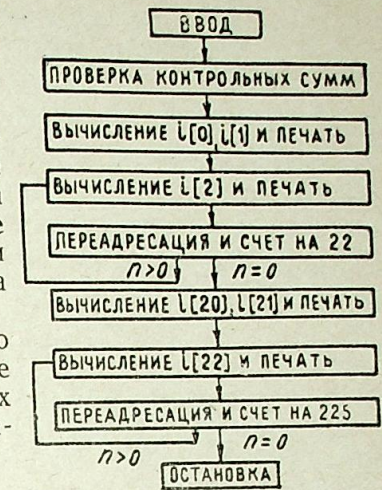


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Караев Р. И. Переходные процессы в линиях протяженности. Госэнергоиздат, 1953.
2. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.

Ч. М. Чуварлы, А. М. Мурадов

Нәһајәти индуктивликдән сонра гыса бағланмыш
хәттин синусоидал кәркинлијә гошулмасы

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә Лапласын дискрет чевирмәсинин узун хәтләрдә кечид һадисәсинин һесабына тәтбиги верилмишдир.

Бу методун дәгиглијини јохламағ үчүн әдәбијјатда [Л—1] көстәрилмиш мәсәлә һәлл олунмуш вә 1-чи шәкилдә көстәрилмиш әјри үзәриндә нөгтәләрлә гејд едилмишдир.

Әјриләрин мүгајисәсиндән ајдын көрүнүр ки, көстәрдилјимиз мәсәләнин һәлли һәм әдәбијјатда [Л—1] көстәрилмиш сетка методу илә, һәм дә тәклиф етдијимиз Лапласын дискрет чевирмәси методу илә ејни нәтичә верир. Анчағ мәсәләни сетка методу илә һәлл етдикдә мәсәләнин һәлли мүрәккәб вә чоғ вахт апарыр. Бу һал Лапласын дискрет чевирмәсиндә арадан галдырылыр. Әкәр мәсәләнин гојулушунда гејри-хәтти элемент олмаса, онда мәсәләнин үмуми шәкилдә һәллини алмағ олар ки, бу да телеграф тәнликләринин һәлли үчүн ән јахшы методдур.

Б. О. КАСИМОВ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА СТРУКТУР ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЕЙ БЕЗ ИЗБЫТОЧНОСТИ

Постановка задачи. Дается n рассредоточенных объектов системы телемеханики. Необходимо для этих n источников информации найти число возможных информационных сетей без избыточности (под информационной сетью для n объектов подразумевается совокупность каналов связи), устанавливающих информационную связь между всеми этими объектами.

Решение задачи. Будем считать, что каналы связи полного графа пронумерованы от 1 до $\binom{n}{2}$ как, например, на рис. 1. Из такого графа путем исключения соответствующих $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ каналов мож-

но получить информационную сеть без избыточности любой возможной структуры. Так как последняя не зависит от длины ее каналов связи, то, очевидно, структуры информационных сетей, которые при наложении совпадут со всеми точками, должны считаться одинаковыми.

Информационные сети, имеющие одну и ту же структуру, но разные сочетания из числа пронумерованных каналов связи, будем называть разновидностями этой структуры. Число разновидностей информационной сети любой структуры обозначим через $B_{n\delta}^p$, где δ — порядковый номер структуры информационной сети при n объектах и p каналов связи. Объекты информационной сети, перестановка которых не меняет каналов связи, т. е. не дает новых разновидностей рассматриваемой структуры, будем считать одинаковыми или симметричными. Тогда нетрудно видеть, что

$$B_{n\delta}^p = \frac{n!}{a_{i_1}! \cdots a_{i_k}! \cdots a_{j_1}! \cdots a_{j_m}! \cdots a_{e_z}!},$$

где $a_i, \dots, a_j, \dots, a_e$ — число одинаковых по структуре „ветвей“ $1 \div k, \dots, 1 \div m, \dots, 1 \div z$ — видов, непосредственно отходящих соответственно от $i, \dots, j, \dots, e$ действительных (или воображаемых) объектов рассматриваемой информационной сети. Под „ветвью“ подразумевается часть информационной сети, связанной с объектом (из числа n или воображаемым), от которого она принимается отходящей, только одним каналом связи. При этом число одинаковых объектов

отождествляется с числом ветвей одинаковой структуры, так как одинаковые объекты, согласно определению, расположены по одному по одинаковым по структуре ветвям.

В самом деле, пусть $(a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} + \dots + a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_m} + \dots + a_{e_z})$ будет числом объектов, из числа n отличных как друг от друга, так и от других объектов, входящих в перестановку из n объектов. За $B_{n\delta}^p$ нами было взято число всех перестановок из n объектов без учета перестановок, получаемых путем перестановок одинаковых объектов. Очевидно, в каждой перестановке $B_{n\delta}^p$ можно теперь переставить и перечисленные объекты, перестановка которых ранее как одинаковых не меняла перестановку, т. е. будем иметь $B_{n\delta}^p \cdot a_{i_1}! \cdots a_{i_k}! \cdots a_{j_1}! \cdots a_{j_m}! \cdots a_{e_z}! = n!$ Поэтому

$$B_{n\delta}^p = \frac{n!}{a_{i_1}! \cdots a_{i_k}! \cdots a_{j_1}! \cdots a_{j_m}! \cdots a_{e_z}!}.$$

Теперь, в частности, найдем B_n^n для n -угольника. Очевидно, данные на рис. 2 однофидерные линии с n объектами представляют собой одну и ту же информационную сеть. А это значит (так как каждая перестановка из $n!$ имеет свою пару), что однофидерная линия имеет $\frac{n!}{2}$

разновидностей, как и по формуле для $B_{n\delta}^p$. Если же концы однофидерной линии замкнуть как на рис. 3, то каждой разновидности такой сети будет соответствовать n разновидностей или n перестановок (по числу объектов) из $\frac{n!}{2}$. Отсюда число всех разновидностей таких сетей будет равно $B_n^n = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$. Для каждого n число возможных информационных сетей с числом каналов от $n-1$ до $\left(\frac{n}{2}\right)$ обозначим через

$$M_n = \sum_{p=n-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)} M_n^p,$$

где M_n^p — число всех информационных сетей с k_n^p возможными отличными друг от друга структурами при n объектах и p каналов связи, т. е.

$$M_n^p = \sum_{\delta=1}^{k_n^p} B_{n\delta}^p = B_{n1}^p + \dots + B_{n1}^p + \dots + B_{n_{k_n^p}}^p; \quad M_n = \sum_{p=n-1}^{\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{\delta=1}^{k_n^p} B_{n\delta}^p.$$

Найдем величину M_n^{n-1} . Если взять полный n -граф, то из всех возможных размещений из этих n элементов (объектов) по k можно получить только $A_k = \frac{A_n^k}{2k}$ разных k -угольников. Действительно, так

как на каждое сочетание из $\binom{n}{k}$ приходится $B_k^k = \frac{k!}{2k}$ разновидностей каждого k -угольника, то число возможных k -угольников (A_k), которые можно получить из n объектов, комбинируя связи полного n -графа, будет

$$A_k = \frac{k!}{2k} \cdot \binom{n}{k} = \frac{k!}{2k \cdot k!} A_n^k = \frac{A_n^k}{2k}.$$

Для нахождения M_n^{n-1} рассмотрим ряд полных графов:

$$1) n_1 = 3. \quad \binom{n_1}{2} = \binom{3}{2} = 3. \quad M_{n_1}^{n_1-1} = \left(\binom{n_1}{2} \right)_{n_1-1} = \binom{3}{2} = \binom{n_1}{2} =$$

$$= n_1 = n_1^{n_1-2};$$

$$2) n_2 = 4. \quad \binom{n_2}{2} = \frac{n_2(n_2-1)}{2}.$$

$$M_{n_2}^{n_2-1} = \left(\binom{n_2}{2} \right)_{n_2-1} - \frac{A_{n_2}^3}{6} = \left(\binom{n_2}{2} \right)_{n_2-1} - \frac{A_{n_2}^3}{6} =$$

$$= \frac{n_2(n_2-1)}{2} \left[\frac{n_2(n_2-1)}{2} - 1 \right] \left[\frac{n_2(n_2-1)}{2} - 2 \right] - n_2(n_2-1)(n_2-2) =$$

$$= 4n_2 = n_2^2 = n_2^{n_2-2};$$

$$3) n_3 = 5. \quad \binom{n_3}{2} = \frac{n_3(n_3-1)}{2}; \quad M_{n_3}^{n_3-1} = \left(\binom{n_3}{2} \right)_{n_3-1} -$$

$$- \left[\frac{A_{n_3}^3}{6} \left(\binom{n_3}{2} - 3 \right) + \frac{A_{n_3}^4}{8} \right] = \frac{n_3(n_3-1)}{2} \cdot \frac{n_3^2}{2} = n_3^3 = n_3^{n_3-2};$$

$$4) n_4 = 6. \quad \binom{n_4}{2} = \frac{n_4(n_4-1)}{2}. \quad M_{n_4}^{n_4-1} = \left(\binom{n_4}{2} \right)_{n_4-1} -$$

$$- \left\{ \frac{A_{n_4}^3}{6} \left[\left(\binom{n_4}{2} - 3 \right) - 3 \binom{n_4-3}{1} \right] + \frac{A_{n_4}^4}{8} \left(\binom{n_4}{2} - 4 \right) + \frac{A_{n_4}^5}{10} \right\} =$$

$$= n_4^4 = n_4^{n_4-2}$$

(выражение $\frac{3A_{n_4}^3}{6} \binom{n_4-3}{1}$ вычитается, так как каждый треугольник дополняется до 3 $\binom{n_4-3}{1}$ четырехугольников) и т. д. Таким образом,

налицо последовательность: $M_{n_1}^{n_1-1}, M_{n_2}^{n_2-1}, M_{n_3}^{n_3-1}, M_{n_4}^{n_4-1}, \dots = n_1^{n_1-2}, n_2^{n_2-2}, n_3^{n_3-2}, n_4^{n_4-2}, \dots$, общим членом которой, как видно, является выражение $M_n^{n-1} = n^{n-2}$. Очевидно, изображение всех этих сетей можно

будет очень легко найти, если, выписав сочетания $\binom{n}{2}$ пронумерованных каналов (например, рис. 1), мы свяжем найденными каналами соответствующие объекты.

Пример 1

$$n = 7$$

$$B_{7_1}^6 = \frac{7!}{2!} \quad (\text{рис. 4})$$

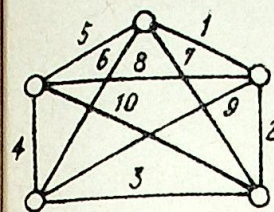


Рис. 1

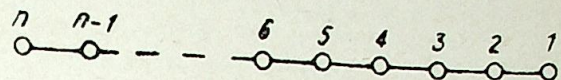
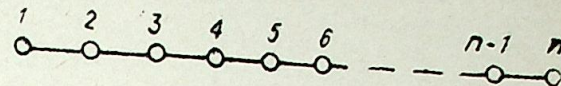


Рис. 2

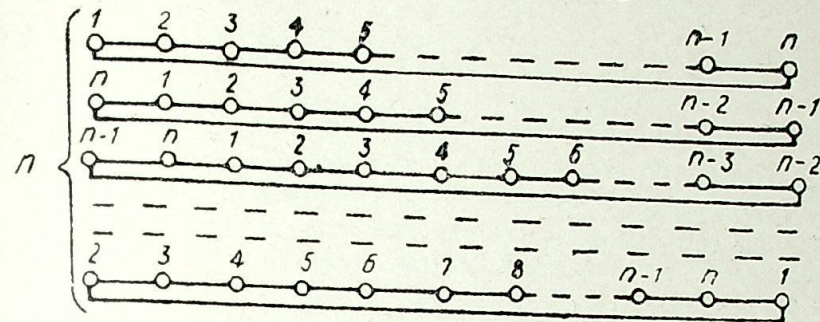


Рис. 3

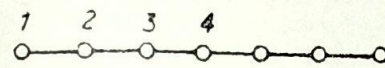


Рис. 4

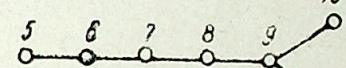


Рис. 5

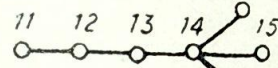


Рис. 6

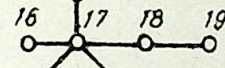


Рис. 7

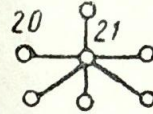


Рис. 8

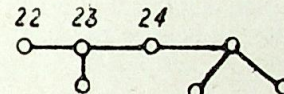


Рис. 9

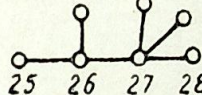


Рис. 10

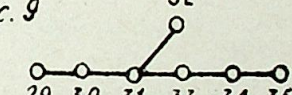


Рис. 11

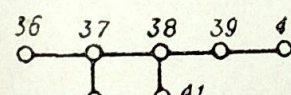


Рис. 12

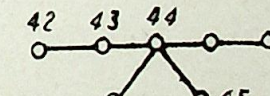


Рис. 13

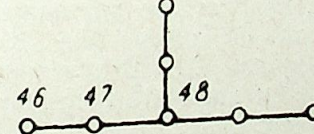


Рис. 14

$$B_{7_2}^6 = \frac{7!}{2!} \quad (\text{рис. 5}) \quad B_{7_7}^6 = \frac{7!}{2!3!} \quad (\text{рис. 10})$$

$$B_{7_3}^6 = \frac{7!}{3!} \quad (\text{рис. 6}) \quad B_{7_8}^6 = 7! \quad (\text{рис. 11})$$

$$B_{7_4}^6 = \frac{7!}{4!} \quad (\text{рис. 7}) \quad B_{7_9}^6 = \frac{7!}{2!} \quad (\text{рис. 12})$$

$$B_{7_5}^6 = \frac{7!}{6!} \quad (\text{рис. 8}) \quad B_{7_{10}}^6 = \frac{7!}{2!2!} \quad (\text{рис. 13})$$

$$B_{7_6}^6 = \frac{7!}{2!2!2!} \quad (\text{рис. 9}) \quad B_{7_{11}}^6 = \frac{7!}{3!} \quad (\text{рис. 14})$$

$$M_7^6 = 7^{7-2} = 7^5 = B_{7_1}^6 + B_{7_2}^6 + B_{7_3}^6 + B_{7_4}^6 + B_{7_5}^6 + B_{7_6}^6 + B_{7_7}^6 + B_{7_8}^6 + B_{7_9}^6 + B_{7_{10}}^6 + B_{7_{11}}^6 = 2520 + 2520 + 840 + 210 + 7 + 630 + 420 + 5040 + 2520 + 1260 + 840 = 16807.$$

Теперь найдем $k_n^p = k_n^{n-1}$. Так как симметрично расположенные объекты информационной сети (имеются в виду объекты, которые ранее нами были приняты за одинаковые), принимаемые за диспетчерский пункт (ДП), порождают одни и те же структуры с $n-1$ объектами, то, очевидно, с точки зрения структуры не у каждой информационной сети все объекты можно рассматривать в качестве ДП. В примере 1 объекты, которые можно принять за ДП, пронумерованы.

Число возможных ДП для всех структур при заданном n найдем из следующих соображений. Ветвь, отходящую от ДП, назовем магистралью. За $\sigma_n(j)$ примем число ДП, от каждого из которых отходит j магистралей. Если через t_j обозначим число возможных разных размещений $n-1$ объектов по j магистралям, которое равно числу возможных разбиений числа $n-1$ на j слагаемых, а через Δ_{z_j} — число разных структур информационных сетей с диспетчерским пунктом при z_j по счету размещений $n-1$ объектов по j магистралям, то, очевидно,

$$\sigma_n(j) = \sum_{z_j=1}^{t_j} \Delta_{z_j} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{t_j}.$$

Так как каждая структура информационной сети содержит ДП с тем или иным числом j (не больше $n-1$), то число всех ДП, которые мы обозначим через σ_n , будет

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_n(j) = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{z_j=1}^{t_j} \Delta_{z_j}.$$

Каждая магистраль, если не брать во внимание канал, непосредственно связанный с ДП, является также информационной сетью с определенной структурой и числом ДП. В отличие от указанных связывающий магистрали ДП будем называть центральным. Таким образом, можно считать, что каждая магистраль, в зависимости от числа объектов, которые она связывает с центральным ДП, содержит то или иное число ДП. Обозначим это число ДП через σ_α , где $\alpha = 1 \div (n-1)$ — число объектов рассматриваемой магистрали. Так как число возможных структур каждой магистрали равно числу ее ДП (каждое ДП магистрали, непосредственно связываясь с центральным ДП, дает от-

личную от других структуру), то магистрали с одинаковым числом объектов в каждом конкретном случае будут одинаковой или разной структуры. Стало быть, магистрали с разным числом объектов образуют информационные сети разной структуры, а с равным числом объектов или магистрали, среди которых есть магистрали с равным числом объектов, в зависимости от того, какие из ДП магистралей с равным числом объектов связываются с центральным ДП, образуют информационные сети либо одинаковой, либо разной структуры.

Теперь нетрудно видеть, что если среди j имеется группа из φ_α магистралей с α числом объектов, то число разных сочетаний по φ_α структур, набранных по одной структуре из числа возможных структур каждой этой магистрали, согласно формуле сочетаний с повторениями, будет $\binom{\sigma_\alpha + \varphi_\alpha - 1}{\varphi_\alpha}$, что можно сказать и о других магистра-

лях из j с равным числом объектов. В соответствии с этим j для каждого z_j разобьем на группы, каждая из которых будет иметь магистрали с равным числом объектов, что позволяет j разбить на группы со своими сочетаниями структур. Так как Δ_{z_j} равно сочетаниям, набранным по сочетанию структур от каждой группы, то, очевидно, Δ_{z_j} будет равно произведению, сомножителями которого будут

выражения, подобные $\binom{\sigma_\alpha + \varphi_\alpha - 1}{\varphi_\alpha}$, а именно:

$$\Delta_{z_j} = \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} \dots \binom{\sigma_{n-1} + \varphi_{n-1} - 1}{\varphi_{n-1}}.$$

Отсюда

$$\sigma_n(j) = \sum_{z_j=1}^{t_j} \Delta_{z_j} = \sum_{z_j=1}^{t_j} \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} \dots \binom{\sigma_{n-1} + \varphi_{n-1} - 1}{\varphi_{n-1}},$$

где

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1} = j, \\ 1 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 3 \cdot \varphi_3 + \dots + (n-1) \cdot \varphi_{n-1} = n-1.$$

Эти суммы нужно понимать условно, так как в зависимости от конкретного разбиения $n-1$ на j слагаемых те или иные слагаемые указанных сумм будут отсутствовать. Наконец, σ_n как сумма $\sigma_n(j)$ для всех возможных значений j будет

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{z_j=1}^{t_j} \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} \dots \binom{\sigma_{n-1} + \varphi_{n-1} - 1}{\varphi_{n-1}}.$$

Пример 2

$$1) \quad n-1 = 1$$

$$a) \quad j = 1 \quad \varphi_1 = 1 \quad \sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = ? \\ \sigma_2 = \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = \binom{1 + 1 - 1}{1} = 1$$

$$2) \quad n-1 = 2$$

$$a) \quad j = 1 \quad \varphi_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1 \\ b) \quad j = 2 \quad \varphi_1 = 2 \quad \sigma_1 = 1 \quad \sigma_3 = ?$$

$$\sigma_3 = \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} + \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} = \binom{1 + 2 - 1}{2} + \binom{1 + 1 - 1}{1} = 2$$

$$3) \quad n-1 = 3$$

$$a) \quad j = 1 \quad \varphi_3 = 1 \quad \sigma_3 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{б) } j=2 & \quad \varphi_1=1 \quad \sigma_1=1 \quad \varphi_2=1 \quad \sigma_2=1 \\ \text{в) } j=3 & \quad \varphi_1=3 \quad \sigma_1=1 \quad \varphi_4=? \\ \sigma_4 &= \binom{\sigma_3 + \varphi_3 - 1}{\varphi_3} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = \\ &= \binom{2+1-1}{1} + \binom{1+1-1}{1} \binom{1+1-1}{1} + \binom{1+3-1}{3} = \\ &= 2+1+1=4 \end{aligned}$$

$$4) n-1=4$$

$$\text{а) } j=1 \quad \varphi_4=1 \quad \sigma_4=4$$

$$\text{б) } j=2 \quad \begin{cases} \varphi_1=1 & \sigma_1=1 & \varphi_3=1 & \sigma_3=2 \\ \varphi_2=2 & \sigma_2=1 \end{cases}$$

$$\text{в) } j=3 \quad \varphi_1=2 \quad \sigma_1=1 \quad \varphi_2=1 \quad \sigma_2=1$$

$$\text{г) } j=4 \quad \varphi_1=4 \quad \sigma_1=1 \quad \sigma_5=?$$

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \binom{\sigma_4 + \varphi_4 - 1}{\varphi_4} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_3 + \varphi_3 - 1}{\varphi_3} + \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} + \\ &+ \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = \binom{4+1-1}{1} + \\ &+ \binom{1+1-1}{1} \binom{2+1-1}{1} + \binom{1+2-1}{2} + \binom{1+2-1}{2} \binom{1+1-1}{1} + \\ &+ \binom{1+4-1}{4} = 4+2+1+1+1=9. \end{aligned}$$

$$5) n-1=5$$

$$\text{а) } j=1 \quad \varphi_5=1 \quad \sigma_5=9$$

$$\text{б) } j=2 \quad \begin{cases} \varphi_1=1 & \sigma_1=1 & \varphi_4=1 & \sigma_4=4 \\ \varphi_2=1 & \sigma_2=1 & \varphi_3=1 & \sigma_3=2 \end{cases}$$

$$\text{в) } j=3 \quad \begin{cases} \varphi_1=2 & \sigma_1=1 & \varphi_3=1 & \sigma_3=2 \\ \varphi_1=1 & \sigma_1=1 & \varphi_2=2 & \sigma_2=1 \end{cases}$$

$$\text{г) } j=4 \quad \varphi_1=3 \quad \sigma_1=1 \quad \varphi_2=1 \quad \sigma_2=1$$

$$\text{д) } j=5 \quad \varphi_1=5 \quad \sigma_1=1 \quad \sigma_6=?$$

$$\begin{aligned} \sigma_6 &= \binom{\sigma_5 + \varphi_5 - 1}{\varphi_5} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_4 + \varphi_4 - 1}{\varphi_4} + \\ &+ \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} \binom{\sigma_3 + \varphi_3 - 1}{\varphi_3} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_3 + \varphi_3 - 1}{\varphi_3} + \\ &+ \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} + \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} \binom{\sigma_2 + \varphi_2 - 1}{\varphi_2} + \\ &+ \binom{\sigma_1 + \varphi_1 - 1}{\varphi_1} = \binom{9+1-1}{1} + \binom{1+1-1}{1} \binom{4+1-1}{1} + \\ &+ \binom{1+1-1}{1} \binom{2+1-1}{1} + \binom{1+2-1}{2} \binom{2+1-1}{1} + \\ &+ \binom{1+1-1}{1} \binom{1+2-1}{2} + \binom{1+3-1}{3} \binom{1+1-1}{1} + \\ &+ \binom{1+5-1}{5} = 9+4+2+2+1+1+1=20 \end{aligned}$$

и т. д., аналогично для любого n .

А теперь, зная значение σ_n , мы легко сможем найти $k_n^0 = k_n^{n-1}$

Для четных n

$$k_n^{n-1} = \sigma_n - \sigma_{n-1} \sigma_1 - \sigma_{n-2} \sigma_2 - \dots - \sigma_{\frac{n+2}{2}} \cdot \sigma_{\frac{n-2}{2}} - \frac{\sigma_{n/2}^2}{2} + \frac{\sigma_{n/2}}{2}$$

Для нечетных n

$$k_n^{n-1} = \sigma_n - \sigma_{n-1} \sigma_1 - \sigma_{n-2} \sigma_2 - \dots - \sigma_{\frac{n+1}{2}} \cdot \sigma_{\frac{n-1}{2}}$$

Пример 3

$$\begin{aligned} 1) k_1^0 &= \sigma_1 = 1; & 2) k_2^1 &= \sigma_2 - \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_1}{2} = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 1; \\ 3) k_3^2 &= \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_1 = 2 - 1 = 1; & 4) k_4^3 &= \sigma_4 - \sigma_3 \sigma_1 - \frac{\sigma_2^2}{2} + \frac{\sigma_2}{2} = 4 - 2 - \\ & - \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 2; \\ 5) k_5^4 &= \sigma_5 - \sigma_4 \sigma_1 - \sigma_3 \sigma_2 = 9 - 4 - 2 = 3; \\ 6) k_6^5 &= \sigma_6 - \sigma_5 \sigma_1 - \sigma_4 \sigma_2 - \frac{\sigma_3^2}{2} + \frac{\sigma_3}{2} = 20 - 9 - 4 - \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 6; \\ 7) k_7^6 &= \sigma_7 - \sigma_6 \sigma_1 - \sigma_5 \sigma_2 - \sigma_4 \sigma_3 = 48 - 20 - 9 - 8 = 11; \\ 8) k_8^7 &= \sigma_8 - \sigma_7 \sigma_1 - \sigma_6 \sigma_2 - \sigma_5 \sigma_3 - \frac{\sigma_4^2}{2} + \frac{\sigma_4}{2} = 115 - 48 - 20 - 18 - \\ & - \frac{16}{2} + \frac{4}{2} = 23; \\ 9) k_9^8 &= \sigma_9 - \sigma_8 \sigma_1 - \sigma_7 \sigma_2 - \sigma_6 \sigma_3 - \sigma_5 \sigma_4 = 286 - 115 - 48 - 40 - 36 = 47; \\ 10) k_{10}^9 &= \sigma_{10} - \sigma_9 \sigma_1 - \sigma_8 \sigma_2 - \sigma_7 \sigma_3 - \sigma_6 \sigma_4 - \frac{\sigma_5^2}{2} + \frac{\sigma_5}{2} = 719 - 286 - \\ & - 115 - 96 - 80 - \frac{81}{2} + \frac{9}{2} = 106 \end{aligned}$$

и т. д., аналогично для любого n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Riordan John. An Introduction to combinatorial analysis. New York, 1958.

Б. О. Гасымов

Артыг олмајан информасија шэбэкэлэринин структурлары
сајынын тэ'јини мәсэлэсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә „ n “ объектли сәпәләнмиш телемеханика системи үчүн
артыг олмајан мүмкүн информасија шэбэкэлэринин тэ'јини мәсэләси
верилмишдир.

МҮНДЭРИЧАТ

Н. М. Сүлейманов. Саг тэрэfli дифференциал оператор тэнликлэр үчүн жарымфазада коррект сэрхэд мөсэлэлэри хаггында	3
И. Г. Мехдиев. Квазиполиномлар сырасы хаггында	10
А. А. Бабаева. Кэсилэн эмсаллы икинчи тэртиб чырлашан гиперболик тэнлик үчүн гарышыг мөсэлэ	17
П. Э. Рәһманов. Мүгавимэтли мүнхтдэ јерлэшэн лөвхэдэ еластик-пластик далгаларын экс олунмасынын арашдырылмасы	25
Э. Ш. Дадашов. Температур мејданы тэ'сири алтында олан дахилдэн ор-түклу ичибош күрэннин еластик-пластик таразлыгы вэ „у'гуллашмасы“	34
Э. Г. Мехдиев. Силиндрик нүмүнэнин зэрбэдэн сыхылмасы хаггында	42
Г. М. Мәммедов. Шәргин көркәмли ријазиијатчысы Әмәр Чајжамын (1048—1131) һәјаты вэ чәбрә аид ишләри хаггында	48
С. Н. һачыјев, М. Ј. Ағарунов, Ј. Р. Нәғдәлијев, Т. Х. Әзи-зов, В. Н. Чеботарјов, Ф. А. Намазов. Силисум үзки бирләшмәләри саһәсиндә физики-кимјәви тәдгигат. I. Бә'зи метилхлорсиланларын әмәләкәлмә енталпијасы	57
М. А. Тағыјев. I-чи нөв кечид фазасында <i>n</i> -ксилолда, <i>n</i> -дихлорбензолда, бензолда, бензофенонда ултрасәсин удумасынын вэ јайылма сүр'әтинин өлчүл-мәси	62
И. Г. Исмајылзаде, Т. С. Әзизов, В. И. Нестеренко, З. М. Ша-милзаде. Сүр'әтли электронларын поликристаллик бари титанатын структура на тә'сиринин тәдгили	68
Х. М. Хәлилов, К. И. Рзајев. Селендә ултрасәс сүр'әтинин јайылмасы-нын температурдан асылылыгы	71
Р. Ә. Һүсейнов. 21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын спектро-фотометрик тәдгигинин нәтичәләри хаггында	75
Р. Ә. Һүсейнов. 25 июн 1960-чы ил хромосфер алышмасынын спектрофо-мометрик тәдгигинин нәтичәләри хаггында (I-чи мә'лумат)	83
М. А. Бабајев. Асинхрон електрик интигалынын динамик тормозланмасы аманы кечид просесләринин электрон рәгәмһесаблајычы машында тәдгиги	92
Н. Г. Гәдилов, Ф. А. Гасымова, А. Б. Һәбибов. Карбиһидроген газ-ларынын Чоул-Томсон әмсалынын һесабланмасы үчүн Марон-Торнбули бәрабәр-лијинин тәтбигинә даир	101
Х. С. Самидов. Програм илә идарә олунан автоматия бургу дэзкаһы столу макетинин өтүрүчү механизминин дајандырылма динамикасы	109
К. М. Чалјан. Чәрәјан сыхлыгынын вэ магнит саһәси кәркинлијинин даир-рәви ен кәсикли борунун чәрәјан кечиричисиндә пајланмасы	116
Ч. М. Чуварлы, А. М. Мурадов. Нәһајәти индуктивликдән сонра гыса бағланмыш хәттин синусоидал кәркинлијә гошулмасы	122
Б. О. Гасымов. Артыг олмајан информасија шәбәкәләринин структурлары сајынын тә'јини мөсәләсинә даир	126

СОДЕРЖАНИЕ

Н. М. Сулейманов. О корректной постановке краевых задач в полупро-странстве для дифференциального операторного уравнения с правой частью	3
И. Г. Мехтиев. О рядах квазиполиномов	10
А. А. Бабаева. Смешанная задача для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами	17
П. А. Рахманов. Исследование отражения упруго-пластических волн в гибких пластинах, находящихся в сопротивляющейся среде	25
А. Ш. Дадашев. Упруго-пластическое равновесие и приспособляемость полой сферы с внутренним покрытием под действием температурного поля	34
А. К. Мехтиев. О сжатии ударом цилиндрического образца	42
К. М. Мамедов (Хайяма). О жизни и алгебраическом наследии известного восточного математика Омара Хайяма	48
С. Н. Гаджиев, М. Я. Агарунов, Ю. Р. Нағдалиева, Т. Х. Ази-зов, В. Н. Чеботарев, Ф. А. Намазов. Физико-химическое исследование кремнийорганических соединений	57
М. А. Тагиев. Измерение поглощения и скорости распространения ультра-звуковых волн в <i>n</i> -ксилоле, <i>n</i> -дихлорбензоле, бензоле и бензофеноне в области фазового перехода первого рода	62
И. Г. Исмаилзаде, Т. С. Азизов, В. Н. Нестеренко, З. М. Ша-милзаде. Исследование действия ускоренных электронов на структуру поли-кристаллического титаната бария	68
Х. М. Халилов, К. И. Рзаев. Температурная зависимость скорости рас-пространения ультразвука в селене	71
Р. Э. Гусейнов. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 21 августа 1959 г., II	75
Р. Э. Гусейнов. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 25 июня 1960 г., I	83
М. А. Бабаев. Исследование на ЭЦВМ переходных процессов при динами-ческом торможении асинхронного электропривода с учетом переменной скоро-сти ротора	92
Н. К. Кадыров, Ф. А. Гасимова, А. Б. Габибов. О применении уравнения Марона-Торнбулла для вычисления коэффициента Джоуля-Томсона углеродородных газов	101
Х. С. Самидов. Динамика торможения привода макета стола сверлиль-ного станка с программным управлением	109
К. М. Чалъян. Распределение напряженности магнитного поля и плотно-сти тока в трубчатом токопроводе круглого сечения	116
Ч. М. Джуварлы, А. М. Мурадов. Расчет переходного процесса вклю-чения на синусоидальную Э. Д. С. линии, закороченной на конце через индук-тивность с применением дискретного преобразования Лапласа	122
Б. О. Касимов. К вопросу определения числа структур информационных сетей без избыточности	126



Подписано к печати 22/IX-1966 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,25.
Печ. лист. 11,65. Уч.-изд. лист. 10,73. ФГ 05330. Заказ 342.
Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография „Красный Восток“ Комитета по печати при Совете Министров
Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, № 80.