

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

2

1966

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

А. Х. БАБАЕВ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФЕЙЕРА ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЭРМИТА

§ 1. Пусть $\omega(\delta)$ — заданный модуль непрерывности, т. е. заданная на $[0, \infty)$ непрерывная положительная функция, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0) = 0$$

и

$$0 \leq \omega(\delta_2) - \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_2 - \delta_1) \quad \text{при } 0 \leq \delta_1 < \delta_2.$$

Через H_ω обозначим класс функций, абсолютно интегрируемых по Лебегу на $(-\infty, \infty)$, модуль непрерывности которых

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|z| < \delta} \max_x |f(x+z) - f(x)|$$

удовлетворяет неравенству

$$\omega(f, \delta) \leq \omega(\delta).$$

Рассмотрим полиномы Эрмита [см. [1], стр. 470 — 473], определяемые формулой

$$H_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$H_n(x)$ при каждом фиксированном n является полиномом степени n со старшим коэффициентом $(-2)^n$. Совокупности этих полиномов образуют на $(-\infty, \infty)$ ортогональную систему с весом

$$P(x) = e^{-x^2}.$$

Каждой функции $f(x) \in H_\omega$ можно поставить в соответствие ряд Фурье—Эрмита

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} C_i H_i(x), \quad (1, 1)$$

где

$$C_i = \frac{1}{V\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} H_i(t) dt$$

являются коэффициентами Фурье—Эрмита.

п 49850
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор), Г. Б. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Байсанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес редакции: Баку, Коммунистическая 10 «Известия Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)».

Подписано к печати 18/VIII-1966 г. Формат бумаги 70 × 108¹/₁₆. Бум. лист. 5,73.
Печ. лист 14,73. Уч.-изд. лист. 14,11. ФГ 07316. Заказ 229.
Тираж 670. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Государственного Комитета
Совета Министров Азербайджанской ССР по печати.
Баку, ул. Ази Асланова, 80.

Через $S_k(f, x)$ обозначим частичную сумму ряда (1, 1), т. е.

$$S_k(f, x) = \sum_{i=0}^k C_i H_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} \sum_{i=0}^k H_i(x) H_i(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} D_k(t, x) dt,$$

где

$$D_k(t, x) = \sum_{i=0}^k H_i(x) H_i(t) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

—ядро Дирихле. Арифметические средние ряды (1, 1), т. е. суммы

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f, x) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

будем называть, по аналогии с тригонометрическим случаем, суммами Фейера ряда Фурье—Эрмита функции $f(x)$. Суммы $\sigma_n(f, x)$ можно представить в виде

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} \sum_{k=0}^n D_k(t, x) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-t^2} F_n(t, x) dt,$$

где выражение

$$F_n(t, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t, x) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) H_k(t) H_k(x)$$

будем называть ядром Фейера.

В настоящей работе нами получены оценки сверху для порядка приближения функции $f(x) \in H_\omega$ с помощью арифметических средних ее ряда Фурье—Эрмита (1, 1), т. е. оценки для порядка величины

$$\sigma_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{(n+1)\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} \sum_{k=0}^n D_k(t, x) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} F_n(t, x) dt. \quad (1, 2)$$

Докажем, что справедлива следующая

Теорема. Пусть $f(x) \in H_\omega$. Тогда при каждом фиксированном $x \in (-\infty, \infty)$ для уклонения функции $f(x)$ от ее сумм Фейера по многочленам Эрмита справедлива оценка

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad (1, 3)$$

где $O(1) = O_x(1)$ —ограниченная величина, зависящая только от x . Оценка (1, 3) будет равномерной на каждом конечном отрезке $[c, d] \in (-\infty, \infty)$.

§ 2. Вспомогательные оценки. Для доказательства теоремы установим прежде всего несколько лемм. Применяя формулу Кристоффеля—Дарбу (см. [2], стр. 56 и 114), для ядра Фейера $F_n(t, x)$ получим следующее выражение:

$$F_n(t, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t, x) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{k+1}{2}} \frac{H_{k+1}(t) H_k(x) - H_{k+1}(x) H_k(t)}{t-x}. \quad (2, 1)$$

Лемма 1. Справедливо асимптотическое равенство

$$F_n(t, x) = \frac{e^{\frac{x^2+t^2}{2}}}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \sqrt{2k}(t-x)}{t-x} + O\left(\frac{|t|+1}{|t-x|\sqrt{n}} e^{\frac{x^2+t^2}{2}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Используя асимптотическую формулу для многочленов Эрмита (см. [2], стр. 207)

$$H_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi^2 k}} e^{\frac{x^2}{2}} \left[\cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \right] \quad (2, 2)$$

и оценку

$$O\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = O(\sqrt{n+1}),$$

из (2, 1) находим

$$F_n(t, x) = \frac{1}{(n+1)(t-x)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [H_0(x) H_1(t) - H_1(x) H_0(t)] + \right.$$

$$+ \frac{e^{\frac{x^2+t^2}{2}}}{\pi} \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} \sqrt{\frac{1}{k(k+1)}} \times$$

$$\times \left[\cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \cos\left(t\sqrt{2(k+1)} - \frac{\pi(k+1)}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \cdot \cos\left(x\sqrt{2(k+1)} - \frac{\pi(k+1)}{2} \right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \right] \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(t-x)} \left\{ \frac{2}{\sqrt{2}}(t-x) + \frac{e^{\frac{x^2+t^2}{2}}}{\pi} \sum_{k=1}^n \times \right.$$

$$\times \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \left[A_k(t, x) + O\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \right] \Bigg\}.$$

Преобразуем разность произведений косинусов. Учитывая, что

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = O\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),$$

имеем

$$\begin{aligned}
 A_k(t, x) &= \cos\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi(k+1)}{2}\right) \cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) - \\
 &\quad - \cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi(k+1)}{2}\right) \cdot \cos\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) - \\
 &\quad - 2 \cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \cdot \sin \frac{t\sqrt{2(k+1)} - \pi(k+1) + t\sqrt{2k}}{2} \times \\
 &\quad \times \sin \frac{t(\sqrt{2(k+1)} - \sqrt{2k})}{2} + 2 \cos\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \times \\
 &\quad \times \sin \frac{x\sqrt{2(k+1)} - \pi(k+1) + x\sqrt{2k}}{2} \cdot \sin \frac{x\sqrt{2(k+1)} - \sqrt{2k}}{2} = \\
 &= \sin\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \cdot \cos\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) - \\
 &\quad - \sin\left(x\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) \cos\left(t\sqrt{2k} - \frac{\pi k}{2}\right) + O\left(\frac{|t|+1}{\sqrt{k+1}}\right).
 \end{aligned}$$

т. е.

$$A_k(t, x) = \sin \sqrt{2k}(t-x) + O\left(\frac{|t|+1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 F_n(t, x) &= \frac{2}{\sqrt{2(n+1)}} + \frac{e^{\frac{x^2+t^2}{2}}}{(n+1)(t-x)\pi} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \right\} \left[\sin \sqrt{2k}(t-x) + \right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{|t|+1}{\sqrt{k+1}}\right) + O\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \right] = \\
 &= \frac{e^{\frac{x^2+t^2}{2}}}{(n+1)(t-x)\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \sqrt{2k}(t-x)}{t-x} + O\left(\frac{|t|+1}{|t-x|\sqrt{n}} e^{\frac{x^2+t^2}{2}}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),
 \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 2. Пусть $F(u)$ — непрерывная функция на $[a, b]$ и $F(0) = 0$. Тогда при конечных a и b справедлива оценка

$$\int_a^b F(u) \sin mu \, du = O\left(\omega\left(\frac{1}{m}, F\right)\right),$$

где $O(1)$ зависит от a и b .

Доказательство. Пусть (см. [3], стр. 77)

$$I = \int_a^b F(u) \sin mu \, du, \quad I = - \int_{a+\frac{\pi}{m}}^{b+\frac{\pi}{m}} F\left(u + \frac{\pi}{m}\right) \sin mu \, du$$

Далее

$$\begin{aligned}
 2I &= \int_a^{a+\frac{\pi}{m}} F(u) \sin mu \, du + \\
 &\quad + \int_{b+\frac{\pi}{m}}^b \left[F(u) - F\left(u + \frac{\pi}{m}\right) \right] \sin mu \, du - \int_b^{b+\frac{\pi}{m}} F(u) \sin mu \, du.
 \end{aligned}$$

Используя свойства модулей непрерывности, для непрерывных функций $F(x)$ при $F(0) = 0$ находим

$$|F(x)| = |F(x) - F(0)| \leq \omega(|x|, F) \leq (m|x| + 1) \omega\left(\frac{1}{m}, F\right). \quad (2, 3)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 2J &\leq \frac{\pi}{m} \max_{a < x < a+\frac{\pi}{m}} F(x) + (b-a) \omega\left(\frac{\pi}{m}, F\right) + \frac{\pi}{m} \max_{b < x < b+\frac{\pi}{m}} F(x) \leq \\
 &\leq \left[\frac{\pi}{m} + \pi \left(a + \frac{\pi}{m}\right) \right] \omega\left(\frac{1}{m}, F\right) + (b-a) \omega\left(\frac{\pi}{m}, F\right) + \\
 &\quad + \left[\frac{\pi}{m} + \pi \left(b + \frac{\pi}{m}\right) \right] \omega\left(\frac{1}{m}, F\right),
 \end{aligned}$$

т. е.

$$I = O\left(\omega\left(\frac{1}{m}, F\right)\right)$$

и лемма установлена.

Лемма 3. Справедливо асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u \right] &= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin \sqrt{2(n+1)} u}{u^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2(n+2)} \frac{\cos \sqrt{2(n+1)} u}{u} \right] + O\left(\frac{|u|}{\sqrt{n}}\right).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что разность

$$\frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u - \int_1^{n+1} \sin \sqrt{2z} u \, dz \right]$$

имеет тот же порядок, что и остаточный член. В самом деле

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u - \int_1^{n+1} \sin \sqrt{2z} u \, dz \right] &= \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_k^{k+1} [\sin \sqrt{2k} u - \sin \sqrt{2z} u] \, dz \right\} = \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n O\left(\frac{|u|}{\sqrt{k}}\right) = O\left(\frac{|u|}{\sqrt{n}}\right). \quad (2, 4)
 \end{aligned}$$

Но так как

$$\frac{1}{n+1} \int_1^{n+1} \sin \sqrt{2k} u \, dk = \frac{1}{n+1} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2(n+1)}} r \sin ru \, dr = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sqrt{2} \cos \sqrt{2} u}{u} - \right.$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin \sqrt{2(n+1)} u}{u^2} - \sqrt{2(n+1)} \frac{\cos \sqrt{2(n+1)} u}{u} \right] + O\left(\frac{|u|}{n+1}\right),$$

то, подставив это в (2, 4), получаем утверждение леммы.

§ 3. Доказательство теоремы. Разобьем интеграл (1, 2) по схеме:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, x) - f(x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} + \int_{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} + \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} \right\} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} F_n(t, x) dt = \\ &= \sum_{p=1}^3 I_p. \end{aligned} \quad (3, 1)$$

Для определенности будем считать, что $x > 0$.

Используя асимптотическую формулу (2, 2), заключаем, что

$$H_k(t) H_k(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),$$

а потому

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) H_k(t) H_k(x) dt = \\ &= \int_{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} |f(t) - f(x)| \sum_{k=0}^n O\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) dt = \\ &= \int_{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} \omega\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}\right) O(\sqrt{n}) dt = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_2 = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Оценим интеграл I_3 . Используя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} F_n(t, x) dt = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} e^{\frac{x^2-t^2}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k}(t-x) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \right| e^{\frac{x^2-t^2}{2}} O\left(\frac{|t|+1}{\sqrt{n}}\right) dt + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} [f(t) - f(x)] e^{-t^2} O\left(\frac{1}{n}\right) dt = L_1 + L_2 + L_3. \end{aligned}$$

Оценим эти интегралы. Так как

$$\int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} (t-x) e^{-t^2} dt < \infty,$$

то, используя неравенство

$$\omega(\Lambda\delta) \leq (\Lambda+1)\omega(\delta) \quad (\Lambda > 0),$$

имеем:

$$\begin{aligned} L_3 &= O\left(\frac{1}{n}\right) \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} [f(x+u) - f(x)] e^{-(x+u)^2} du = \\ &= O\left(\frac{1}{n}\right) \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} (u\sqrt{n}+1)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{-(x+u)^2} du = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right); \\ L_2 &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left\{ \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 + \int_1^{\infty} \right\} \frac{\omega(u)}{u} e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} (x+u+1) du = K_1 + K_2. \end{aligned}$$

Так как для модуля непрерывности отношение $\frac{\omega|\delta|}{\delta}$ почти не убывает (см. [4], стр. 111), т. е. при $u > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ имеем

$$\frac{\omega(u)}{u} \leq 2 \frac{\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}, \quad (3, 2)$$

то

$$K_1 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_{x + \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 \frac{\omega(u)}{u} du = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Далее, так как при $u < 1$

$$\frac{\omega(u)}{u} \leq 2 \frac{\omega(1)}{1} \leq C\sqrt{n+1} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (3, 3)$$

то

$$K_2 = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_1^{\infty} \frac{\omega(u)}{u} (x+u+1) e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} du = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом,

$$L_2 = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Перейдем к оценке L_1 . Имеем

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 + \int_1^{\infty} \right\} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du = \\ &= L_4 + L_5. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3 и учитывая, что

$$\frac{\sin \sqrt{2(n+1)} u}{u^2} - \sqrt{2(n+1)} \frac{\cos \sqrt{2(n+1)} u}{u} = O\left(\frac{\sqrt{n}}{u}\right),$$

находим

$$\begin{aligned} L_5 &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} \frac{f(x+u)-f(x)}{u} e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} \left\{ \frac{\sin \sqrt{2(n+1)} u}{(n+1)u^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2(n+1)} \cos \sqrt{2(n+1)} u}{(n+1)u} \right\} + O\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) du = \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \int_1^{\infty} \frac{\omega(u)}{u} e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} du. \end{aligned}$$

Тогда, в силу (3, 3) получим

$$L_5 = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Интеграл L_4 представим в виде

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 \frac{f(x+u)-f(x)}{u} \times \\ &\quad \times \left[1 + \left(e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} - 1 \right) \right] \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du. \end{aligned}$$

Полагая

$$F(u) = \frac{f(x+u)-f(x)}{u} \left(e^{-\frac{2xu+u^2}{2}} - 1 \right)$$

и используя доказанное Г. И. Натансоном (см. [5], стр. 1244) соотношение

$$\omega(\delta, F) = O(1)\omega(\delta), \quad (3, 4)$$

после применения леммы 2 и неравенства (3, 2), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 F(u) \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^n \left[\int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 F(u) \sin \sqrt{2k} u du \right] = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}, F\right)\right) \leq \frac{C_1}{n+1} \int_1^{n+1} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \leq \\ &\leq \frac{C_2}{n+1} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \frac{\omega(u)}{u} \frac{du}{u^2} \leq \frac{C_3}{n+1} \int_{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}^1 \frac{\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{du}{u^2} = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I_3 = L_1 + O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = L_4 + O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Используя лемму 3 и применяя (3, 2) получим

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 \frac{f(x+u)-f(x)}{u} \left[\frac{\sin \sqrt{2(n+1)} u}{(n+1)u^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{2(n+1)} \cos \sqrt{2(n+1)} u}{\sqrt{n+1} u} + O\left(\frac{|u|}{\sqrt{n}}\right) \right] du = \\ &= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2(n+1)}} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz + \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 \frac{\omega(u)}{u} du\right) = L_6 + O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Положим

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dz}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right],$$

и обозначим через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ корни уравнения [6].

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{dz}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] = A. \quad (3, 5)$$

Так как для корней интеграла (3, 5) имеет место неравенство (см. [7], стр. 134—135)

$$|\beta_{j+1} - \beta_j| \leq C \quad C_4 j \leq \beta_j \leq C_5 j, \quad (3, 6)$$

то можем выбрать m_n так, чтобы

$$\beta_{m(n)} \leq \sqrt{2(n+1)} < \beta_{m(n)+1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

а потому, учитывая равенство

$$\int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{dz}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} L_6 &= \frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta_1} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz + \\ &+ \frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{m(n)} \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f\left(x + \frac{\beta_j}{\sqrt{2(n+1)}}\right)}{z^2} \times \\ &\times \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz + \frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{\beta_{m(n)}}^{\sqrt{2(n+1)}} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \times \\ &\times \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz = L_7 + L_8 + L_9. \end{aligned}$$

Известно, что

$$\frac{\sin z}{z} - \cos z = O(1),$$

а потому, учитывая (3, 6), находим

$$\begin{aligned} L_7 &= \frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta_1} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz = \\ &= O(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\beta_1} \frac{(z+1) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right)}{z^2} dz = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} L_8 &= O(1) \sum_{j=1}^{m(n)} \int_{\beta_j}^{\beta_{j+1}} \frac{(z - \beta_j + 1) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right)}{z^2} dz = \\ &= O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sum_{j=1}^{m(n)} \frac{1}{\beta_j^2} = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sum_{j=1}^{m(n)} \frac{1}{j^2} = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Наконец, так как

$$\beta_{m(n)} - \sqrt{2(n+1)} \leq C$$

и при $z \in [\beta_{m(n)}, \sqrt{2(n+1)}]$

$$\frac{z+1}{z^2} \leq C_6,$$

то

$$\begin{aligned} L_9 &= \frac{2}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{\beta_{m(n)}}^{\sqrt{2(n+1)}} \frac{f\left(x + \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz = \\ &= O(1) \int_{\beta_{m(n)}}^{\sqrt{2(n+1)}} \frac{(z+1) \omega\left(\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\right)}{z^2} dz = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_3 = L_4 + O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = L_7 + L_8 + L_9 + O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Интеграл I_1 оценивается аналогично I_3 .

В самом деле,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x - \frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}} [f(t) - f(n)] e^{-t^2} F_n(t, x) dt = \\ &= -\frac{1}{(n+1)\pi \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\infty} \frac{f(x-u) - f(x)}{u} e^{\frac{2xu-u^2}{2}} \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du = \\ &= \frac{1}{(n+1)\pi \sqrt{\pi}} \left\{ \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 + \int_1^{\infty} \right\} \frac{f(x) - f(x-u)}{u} e^{\frac{2xu-u^2}{2}} \times \\ &\times \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du = M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Интеграл M_2 оценивается аналогично L_5 , т. е.

$$M_2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \int_1^{\infty} \frac{\omega(u)}{u} e^{\frac{2xu-u^2}{2}} du = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Если теперь положим

$$\Phi(u) = \frac{f(x-u) - f(x)}{-u} \left(e^{\frac{2xu-u^2}{2}} - 1 \right),$$

то

$$\Phi(-v) = \frac{f(x+v) - f(x)}{v} \left(e^{\frac{2xv-v^2}{2}} - 1 \right) = F(v),$$

а потому в силу (3, 4)

$$\omega(\delta, \Phi) = \omega(\delta, F) = O(1) \omega(\delta).$$

Интеграл M_1 оценивается аналогично L_4 , т. е.

$$M_1 = \frac{1}{(n+1)\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^1 \frac{f(x-u) - f(x)}{u} \sum_{k=1}^n \sin \sqrt{2k} u du =$$

$$= \frac{2}{\pi\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\pi}{2\sqrt{2(n+1)}}}^{\sqrt{2(n+1)}} \frac{f\left(x - \frac{z}{\sqrt{2(n+1)}}\right) - f(x)}{z^2} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right] dz =$$

$$= O\left(\omega\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Следовательно,

$$I_1 = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Таким образом, учитывая оценки интегралов I_1 , I_2 и I_3 , для равенств (3, 1) находим

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| = O\left(\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, 1949.
2. Сега Г. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
3. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
4. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М. 1960.
5. Натансон Г. И. Изв. АН СССР, серия матем., 25 (1964).
6. Ефимов А. В. Изв. АН СССР, серия матем., 22 (1953).
7. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, т. II, Физматгиз, 1960.

А. Х. Бабаев

Кәсілмәжән функцијаларын Фејер чәминин Ермит чоһәдлиси илә јаһынлашма тәртиби

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә бир сыра леммаларын көмәји илә

$$|\sigma_n(f, x) - f(x)| \leq C_x \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

исбат едилір. $\sigma_n(f, x)$ — Фејер чәминин Ермит чоһәдлисидир, $\omega(\delta, f)$ — $f(x)$ функцијанын кәсілмәзлик модулу.

Р. Г. МАМЕДОВ и Г. И. ОСМАНОВ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И СВОЙСТВО КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ

§ 1. Известно, что если $f(x) \in \text{Lip}(\alpha, p)$ на всей вещественной оси при $1 < p \leq 2$ и $0 < \alpha \leq 1$, то ее преобразование Фурье $F(x)$ такое, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx < \infty$$

при $\gamma > \frac{p}{p + (p-1)}$ (теорема Титчмарша [1], стр. 148—150), т. е.

$$F(x) \in L_{\gamma}(-\infty, \infty).$$

В настоящей статье доказано более общее утверждение, содержащее эту теорему, и, кроме того, указана оценка сверху для

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\alpha} dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} |x|^{\beta} dx$$

в зависимости от обобщенного модуля гладкости m -го порядка заданной функции $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$. Наконец, получен результат об абсолютной сходимости двойного ряда Фурье функции $f(x, y) \in L_2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ в зависимости от ее полного и частного наилучшего приближения

Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) и $\Delta_s^{(m)} f(x, h) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(x + (m-2k)h)$ ее симметрическая разность m -го порядка с шагом h . Положим

$$\omega_p^{(m)}(\delta) = \omega_p^{(m)}(f; \delta) = \sup_{0 < h < \delta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_s^{(m)} f(x, h)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Известно [2], что преобразование Фурье функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ определяется следующим образом:

$$F(x) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$), то функция

$$F_R(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(t) e^{-ixt} dt$$

при $R \rightarrow \infty$ сходится в метрике пространства $L_1(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $F(x) = \hat{f}(x)$, называемой преобразованием Фурье функции $f(x)$, где $p + q = pq$. Эта функция $f(x)$ удовлетворяет известному неравенству Титчмарша [2].

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$ и положительная неубывающая функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(u) \downarrow 0$ при $u \downarrow 0$ и $\varphi(u^k) = O[\varphi(u)]$. Если при $h \rightarrow 0$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_s^{(m)} f(x, h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = O[\varphi(h)], \text{ то сходится интеграл}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^r dx < \infty$$

при

$$\frac{p}{p - p \log_2 \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - 1} < \beta \leq \frac{p}{p-1}.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что преобразование Фурье функции $\Delta_s^{(m)} f(x, h)$, рассматриваемой как функция от x , равно $(-i)^m 2^m \sin^m x h F(x)$. В силу теоремы Титчмарша ([2], стр. 128) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(-i)^m 2^m \sin^m x h F(x)|^{p'} dx < \kappa(p) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_s^{(m)} f(x, h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Далее очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin^m x h F(x)|^{p'} dx < C_1 [\varphi(h)]^{p'}.$$

Полагая $h = \frac{\pi}{2N}$, из последнего утверждаем, что

$$\int_0^N \left| \sin^m \frac{\kappa\pi}{2N} F(x) \right|^{p'} dx < C_1 \left[\varphi\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right]^{p'}$$

или

$$\int_{\frac{N}{2}}^N \left| \sin^m \frac{x\pi}{2N} F(x) \right|^{p'} dx < C_1 \left[\varphi\left(\frac{2}{N}\right) \right]^{p'}. \quad (1)$$

Так как

$$\sin \frac{x\pi}{2N} > \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ при } \frac{\pi}{4} \leq \frac{x\pi}{2N} \leq \frac{\pi}{2},$$

то из (1) находим

$$\int_{\frac{N}{2}}^N |F(x)|^{p'} dx < C_2 \left[\varphi\left(\frac{2}{N}\right) \right]^{p'}. \quad (2)$$

Полагая $N = 2^v$, $v = 1, 2, 3, \dots$, из (2) получим

$$\int_{2^{v-1}}^{2^v} |F(x)|^{p'} dx < C_2 \left[\varphi\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right) \right]^{p'}.$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера при $0 < \gamma \leq p'$ и используя (3), находим

$$\int_{2^{v-1}}^{2^v} |F(x)|^r dx \leq \left(\int_{2^{v-1}}^{2^v} |F(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{r}{p'}} \left(\int_{2^{v-1}}^{2^v} dx \right)^{1 - \frac{r}{p'}} \leq$$

$$\leq C_3 2^{(v-1)(1 - \frac{r}{p'})} \left[\varphi\left(\frac{1}{2^{v-1}}\right) \right]^r.$$

Следовательно, в силу свойства функций $\varphi(u)$ из последнего имеем

$$\int_{2^{v-1}}^{2^v} |F(x)|^r dx \leq C_4 \left\{ 2^{1 - \frac{r}{p'}} \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right]^r \right\}^{v-1}.$$

Суммируя обе стороны последнего неравенства по v ($v = 1, 2, 3, \dots$), получим

$$\int_1^{\infty} |F(x)|^r dx \leq C_4 \sum_{v=1}^{\infty} \left\{ 2^{1 - \frac{r}{p'}} \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right]^r \right\}^{v-1}.$$

Далее

$$\int_1^{\infty} |F(x)|^r dx < \infty, \text{ если}$$

$$2^{1 - \frac{r}{p'}} \left[\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \right]^r < 1, \text{ т. е. если}$$

$$r > \frac{p}{p - p \log_2 \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - 1}.$$

Аналогично обстоит дело и с интегралом по интервалу $(-\infty, -1)$. Относительно конечного интервала $(-1; 1)$ вопрос ясен.

Следствие. В частности, если $\varphi(h) = h^a$, $0 < a < 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^a dx < \infty \text{ при } r > \frac{p}{p + ap - 1}.$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, $pp' = p + p'$, $0 < \gamma \leq p'$.

Тогда, если сходится

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^r dx < \infty, \quad (4)$$

то сходится и следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^r dx < \infty.$$

Доказательство. Преобразование Фурье функции $\Delta_s^{(m)} f(x, h)$, рассматриваемой как функция от x , равно $(-i)^m 2^m \sin^m x h F(x)$.

В силу теоремы Титчмарша ([2], стр. 128) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(-i)^m 2^m \sin^m x h F(x)|^{p'} dx < \kappa(p) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_s^{(m)} f(x, h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Далее очевидно, что

$$\int_0^{\frac{1}{h}} |\sin^m x h F(x)|^{p'} dx < C_1 [\omega_p^{(m)}(h)]^{p'}.$$

Так как $|\sin x h| > A x h$ при $0 < x \leq \frac{1}{h}$, то

$$\int_0^{\frac{1}{h}} x^{mp'} |F(x)|^{p'} dx < C_2 \{h^{-mp'} [\omega_p^{(m)}(h)]^{p'}\}.$$

Положим

$$\varphi(\xi) = \int_1^{\xi} |x^m F(x)|^{\gamma} dx.$$

Применяя неравенство Гельдера при $0 < \gamma \leq p'$ и пользуясь неравенством (5), получим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &\leq \left(\int_1^{\xi} |x^m F(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\gamma}{p'}} \left(\int_1^{\xi} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p'}} \leq \\ &\leq C_3 \xi^{1+m\gamma-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma}, \end{aligned}$$

где C_3 — постоянная.

Далее, пользуясь неравенством (6), находим

$$\begin{aligned} \int_1^{\xi} |F(x)|^{\gamma} dx &= \int_1^{\xi} \frac{\varphi'(x)}{x^{\gamma m}} dx = \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\gamma m}} + \gamma m \int_1^{\xi} \frac{\varphi(x)}{x^{\gamma m+1}} dx \leq \\ &\leq C_3 \xi^{1-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma} + C_4 \int_1^{\xi} x^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{\gamma} dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как

$$\int_1^{\infty} x^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{\gamma} dx \geq \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma} \left(\xi^{1-\frac{\gamma}{p'}} - 1 \right),$$

при $0 < \gamma \leq p'$, то

$$\xi^{1-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma} \leq \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma} + \int_1^{\xi} x^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{\gamma} dx. \quad (8)$$

Учитывая оценки (7) и (8), находим

$$\int_1^{\xi} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C_3 \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right) \right]^{\gamma} + (C_3 + C_4) \int_1^{\xi} x^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{\gamma} dx \quad (9)$$

при всех $0 < \gamma \leq p'$.

В силу условия (4) и монотонности $\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ из (9) при $\xi \rightarrow \infty$ следует, что $\int_1^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx < \infty$ при всех $0 < \gamma \leq p'$.

Аналогично обстоит дело и с интегралом по интервалу $(-\infty, -1)$. Остальное ясно.

Теорема 3. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$. Тогда справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} |x|^{\beta} dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

при $\beta \geq 0$ и $0 < \gamma \leq p'$.

Доказательство. Как и в теореме 1, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin^m x h F(x)|^{p'} dx < C_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_s^{(m)} f(x, h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Отсюда при $h = \frac{\pi}{2N}$ находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin^m \frac{x\pi}{2N} F(x) \right|^{p'} dx < C_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_s^{(m)} f(x, \frac{\pi}{2N}) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Следовательно,

$$\int_0^N \left| \sin^m \frac{x\pi}{2N} F(x) \right|^{p'} dx < C_1 \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right]^{p'}. \quad (10)$$

Полагая $N = 2^{\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$ из (10) находим

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} \left| \sin^m \frac{x\pi}{2^{\nu+1}} F(x) \right|^{p'} dx < C_1 \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\right) \right]^{p'}. \quad (11)$$

Так как

$$\left| \sin \frac{x\pi}{2^{\nu+1}} \right| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ при } 2^{\nu-1} \leq x \leq 2^{\nu}, \text{ то из (11)}$$

получим

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} |F(x)|^{p'} dx \leq C_2 \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\right) \right]^{p'}. \quad (12)$$

Теперь, применяя неравенство Гельдера при $0 < \gamma \leq p'$ и используя (12), находим

$$\begin{aligned} \int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} |F(x)|^{\gamma} dx &\leq \left(\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} |F(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{\gamma}{p'}} \left(\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} dx \right)^{1-\frac{\gamma}{p'}} \leq \\ &\leq C_3 2^{(\nu-1)(1-\frac{\gamma}{p'})} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\right) \right]^{\gamma}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} |F(x)|^{\gamma} |x|^{\beta} dx \leq C_3 2^{\nu-1(1-\frac{\gamma}{p'})} 2^{\nu\beta} \left[\omega_p^{(m)}\left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\right) \right]^{\gamma}. \quad (13)$$

при $\beta \geq 0$. Далее, учитывая что

$$2^{(\nu-1)(1-\frac{1}{p'})} 2^{\nu\beta} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{\pi}{2^{\nu+1}} \right) \right]^{\gamma} \leq C' \sum_{n=2^{\nu+1}}^{2^{\nu}} n^{\beta-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma},$$

из (13) находим

$$\int_{2^{\nu-1}}^{2^{\nu}} |F(x)|^{\gamma} |x|^{\beta} dx \leq C_4 \sum_{n=2^{\nu+1}}^{2^{\nu}} n^{\beta-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}. \quad (14)$$

Наконец, суммируя (14) по ν ($\nu=1, 2, 3, \dots$), получим, что

$$\int_1^{\infty} |F(x)|^{\gamma} |x|^{\beta} dx \leq C_4 \sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}.$$

Аналогично обстоит дело и с интегралом по интервалу $(-\infty; -1)$. Относительно конечного интервала $(-1; 1)$ вопрос ясен. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p \leq 2$, то справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}$$

при $0 < \gamma \leq p'$.

Это следствие фактически эквивалентно теореме 1. При этом нужно учитывать, что сходимость интеграла (4) и ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n} \right) \right]^{\gamma}$$

равносильна. Учитывая связь между модуля-

ми гладкости и наилучшими приближениями данной функции, приведем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и $A_{\nu}(f)_{L_p}$ ее наилучшее приближение в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ при помощи целых функций степени $\leq \nu$. Тогда справедливы неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C' \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}}{\nu^{\frac{\gamma}{p'}}$$

$$(1 \leq \gamma \leq p', pp' \leq p + p')$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C'' \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}}{\nu^{\frac{\gamma}{p'} - 1}}$$

$$\left(\frac{p'}{2p'+1} < \gamma < 1, pp' = p + p' \right),$$

где c', c'' — постоянные.

Доказательство. По теореме 3 справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\gamma}{p'}} \left[\omega_p^{(m)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \right]^{\gamma} \quad (15)$$

при $0 < \gamma \leq p'$.

Кроме того, А. Ф. и М. Ф. Тиманы [3] доказали, что

$$\omega_p^{(2)} \left(\frac{1}{n}, f \right) \leq \frac{C^*}{n^2} \sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(f)_{L_p} \quad (16)$$

при $1 \leq p \leq \infty$. Тогда, учитывая (15), из (16) находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{p'} + 1}} \left[\sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(f)_{L_p} \right]^{\gamma}.$$

Если $\gamma \geq 1$, то

$$\left[\sum_{\nu=1}^n A_{\nu}(f)_{L_p} \right]^{\gamma} \leq \sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma} [A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma} \cdot n^{\gamma-1}$$

и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx \leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{p'} + 1}} \sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma} [A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx &\leq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\gamma} [A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\gamma}{p'} + 1}} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}}{\nu^{\frac{\gamma}{p'}}}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $\frac{p'}{2p'+1} < \gamma < 1$. При этом

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu A_{\nu}(f)_{L_p} \right\}^{\gamma} \leq \sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma} [A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx &\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\left(\frac{\gamma}{p'} + 1\right)^{\gamma}}} \sum_{\nu=1}^n \nu^{\gamma} [A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma} < \\ &\leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[A_{\nu}(f)_{L_p}]^{\gamma}}{\nu^{\frac{\gamma}{p'} - 1}}, \end{aligned}$$

если $\frac{p'}{2p'+1} < \gamma < 1$. Титчмаршем доказано, что если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x-h)|^p dx = O(h^{2p}),$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $1 < p \leq 2$,

то преобразование Фурье функции $f(x)$ принадлежит классу $L_p(-\infty, \infty)$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^p dx < \infty$ при $p' \geq \beta > \frac{p}{p+\alpha p-1}$.

Как показал сам Титчмарш, утверждение этой теоремы перестает быть верным при $\beta = \frac{p}{p+\alpha p-1}$. Возникает естественный вопрос: каким дополнительным условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы имело место (17) и при $\beta = \frac{p}{p+\alpha p-1}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. Пусть

$$I_1(h) = \log(e + h^{-1}) \quad (h < 0),$$

$$I_2(h) = \log \log(e^p + h^{-1}) \quad (h > 0),$$

$$1 < p \leq 2, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Если $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x-h)|^p dx \leq \frac{Ch^{\alpha p}}{[I_2(h) I_2^{1+\varepsilon}(h)]^{(p+\alpha p-1)}},$$

где C — некоторая постоянная, то трансформация Фурье $F(x)$ функции $f(x)$ принадлежит к $L_p(-\infty, \infty)$ при $\beta = \frac{p}{p+\alpha p-1}$.

§ 2. Вышеприведенные результаты справедливы и для коэффициентов Фурье 2π -периодических функций. Часть этих результатов содержится в работах О. Саса [4], А. А. Конюшкова [5] и других авторов.

Пусть $f(x, y)$ — периодическая функция периода 2π относительно каждой из переменных и принадлежит $L_2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$. Двойным рядом Фурье функции $f(x, y)$ называется ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} A_{mn}(x, y),$$

где

$$A_{mn}(x, y) = a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny.$$

Числа a_{mn} , b_{mn} , c_{mn} , d_{mn} являются коэффициентами Фурье функции $f(x, y)$ и

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } m = n = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } m=0, n>0 \text{ или } m>0, n=0, \\ & \text{при } m>0, n>0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что для функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dy$$

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dx$$

справедливы следующие выражения:

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n0} \cos nx + b_{n0} \sin nx)$$

$$\psi(y) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{0n} \cos ny + c_{0n} \sin ny).$$

Введем следующие обозначения:

$$E_{m,n}(f)_{L_2} = \inf_{S_{mn}(x,y)} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x,y) - S_{mn}(x,y)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{m,0}^*(f)_{L_2} = \inf_{H_m(x)} \left\{ \int_0^{2\pi} [\varphi(x) - H_m(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$E_{0,n}^*(f)_{L_2} = \inf_{P_n(y)} \left\{ \int_0^{2\pi} [\psi(y) - P_n(y)]^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$S_{m-1, n-1}(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} A'_{ik}(x, y)$$

$$H_{m-1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m-1} (a'_{i0} \cos ix + b'_{i0} \sin ix),$$

$$P_{n-1}(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (a'_{0k} \cos ky + c'_{0k} \sin ky)$$

$$A'_{ik}(x, y) = a'_{ik} \cos ix \cos ky + b'_{ik} \sin ix \cos ky + c'_{ik} \cos ix \sin ky + d'_{ik} \sin ix \sin ky.$$

Теорема 7. Если $f(x, y) \in L_2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$, то

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{mn}|^2 + |b_{mn}|^2 + |c_{mn}|^2 + |d_{mn}|^2) (m+1)^{\beta} (n+1)^{\beta} \leq$$

$$\leq C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_{m,n}(f)]_{L_1}^{\gamma}}{m^{\frac{\gamma}{2}-\beta} n^{\frac{\gamma}{2}-\beta}} + C_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[E_{m,0}^*(f)]_{L_2}^{\gamma}}{m^{\frac{\gamma}{2}-\beta}} +$$

$$+ C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[E_{0,n}^*(f)]_{L_2}^{\gamma}}{n^{\frac{\gamma}{2}-\beta}}$$

при $0 < \gamma \leq 2$, $\beta \geq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е. С. A note on fourier transforms. J. London Math. soc., 2, 7 (1927), 148—150.
2. Титчмарш Е. С. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., 1948.
3. Тиман А. Ф. и Тиман М. Ф. „ДАН СССР“, 113 (1957), 995—907.
4. Сас О. Fourier series and mean moduli of continuity. Trans. Amer. Math. soc., 42 (1937), 366—395.
5. Конюшков А. А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициентами Фурье. Матем. сб. 44 (86); № 1 (1938), 52—34.

Р. Н. Маммадов, Н. И. Османов

Фурје чевирмәсинин вә Фурје сырасы әмсалларынын бә'зи хассәләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$) синфиндән олан функцијаларын Фурје чевирмәсинин хассәләри верилмишдир. Икинчи теоремдә исбат едилир ки, (4) шәрти өдәнилисә, онда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\gamma} dx < \infty$$

јығыландыр.

Бундан башга, $L_p(-\infty, \infty)$ фәзасындан көтүрүлмүш функцијанын Фурје чевирмәсинин мүтләг јығылмасы онун там функцијаларла ән јахшы јахынлашмасы илә әлагәдар олараг өјрәнилмишдир. Ахырынчы теоремдә $L_2[0, 2\pi; 0, 2\pi]$ синфиндән олан функцијаларын Фурје әмсалларынын хассәси өјрәнилмишдир.

К. М. КУЛИЕВ

НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ БЕСКОНЕЧНЫМ РЯДОМ ОДИНАКОВЫХ КРУГОВЫХ ОТВЕРСТИЙ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В работе [1, 2] решена задача о напряженном состоянии пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий и растягиваемой силой P , действующей под углом α к оси симметрии пластинки. Решение произведено „методом малого параметра“.

Если в этом решении положить $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $m = 0$, получится

решение задачи о концентрации напряжений в пластинке, ослабленной круговыми отверстиями и растягиваемой силой P : а) в направлении оси x ($\alpha = 0$) и б) в направлении оси y ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), рис. 1, 2.

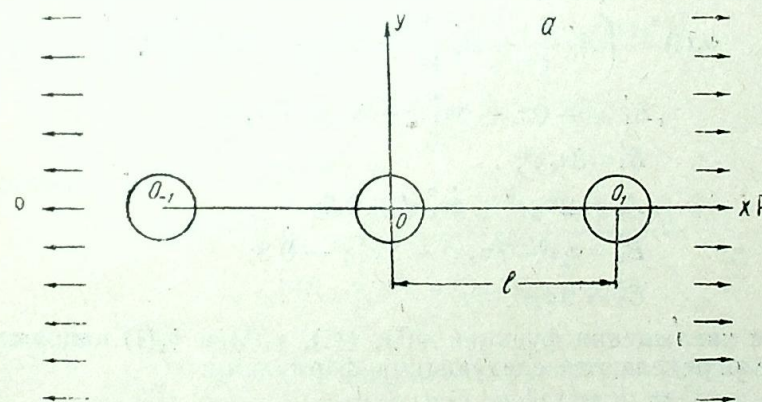


Рис. 1

Функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$, определяющие напряженное состояние в пластинке с круговыми отверстиями в случае а), находят с помощью формул:

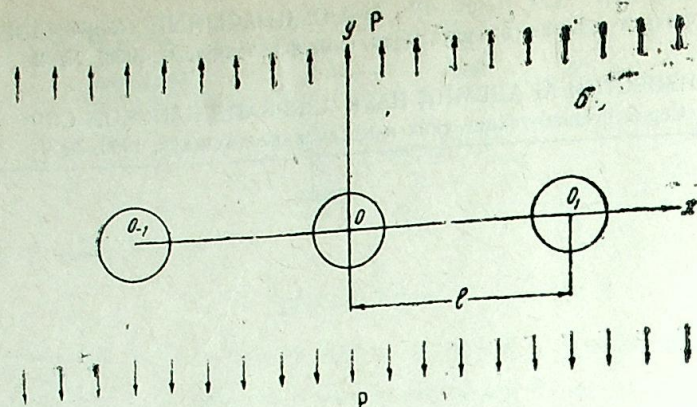


Рис. 2

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \left(A_1 \frac{1}{\xi} + B_1 \frac{1}{\xi^3} + 0,25\xi \right) P; \\ \psi(\xi) &= \left(A_2 \frac{1}{\xi} + B_2 \frac{1}{\xi^3} + C_2 \frac{1}{\xi^5} - 0,5\xi \right) P, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$A_1 = 0,5 - 3\alpha_2 \varepsilon^2 + 16\alpha_2^2 \varepsilon^4 + 6\alpha_4 \varepsilon^4;$$

$$B_1 = -5\alpha_4 \varepsilon^4;$$

$$A_2 = 2\alpha_2 \varepsilon^2 - 12\alpha_2^2 \varepsilon^4 - 0,5;$$

$$C_2 = -15\alpha_4 \varepsilon^4;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{e} = 0,15; \quad \alpha_2 = \frac{\pi^2}{6}; \quad \alpha_4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Функции напряжений в случае б) определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \left(A'_1 \frac{1}{\xi} - B'_1 \frac{1}{\xi^3} + 0,25\xi \right) P; \\ \psi_1(\xi) &= \left(A'_2 \frac{1}{\xi} + B'_2 \frac{1}{\xi^3} + C'_2 \frac{1}{\xi^5} + 0,25\xi \right) P, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$A'_1 = -0,5 - 8\alpha_2^2 \varepsilon^4 - 6\alpha_4 \varepsilon^4 + \alpha_2 \varepsilon^2;$$

$$B'_1 = 3\alpha_4 \varepsilon^4;$$

$$A'_2 = 2\alpha_2 \varepsilon^2 + 4\alpha_2^2 \varepsilon^4 - 0,5;$$

$$B'_2 = \alpha_2 \varepsilon^2 - 7\alpha_4 \varepsilon^4 - 8\alpha_2^2 \varepsilon^4 - 0,5;$$

$$C'_2 = 9\alpha_4 \varepsilon^4.$$

После нахождения функции $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\varphi_1(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ напряжения в пластинке определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} X_x + Y_y &= 4Re\varphi'(\xi), \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2[\bar{\xi}\varphi''(\xi) + \psi'(\xi)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Наибольший интерес представляет распределение напряжений на площадках, перпендикулярных в оси x , т. е. распределение напряжений по оси y . Тогда в случае а) из предыдущих формул (1), (3) получим выражений на этой площадке:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \left[-A_2 \frac{1}{y^2} + (6B_1 + 3B_2) \frac{1}{y^4} - 5C_2 \frac{1}{y^6} + 1 \right] P, \\ Y_y &= \left[(4A_1 + A_2) \frac{1}{y^2} - (18B_1 + 3B_2) \frac{1}{y^4} + 5C_2 \frac{1}{y^6} \right] P, \\ X_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В случае б) напряжения (σ_x , σ_y) в точках, лежащих между отверстиями, т. е. в точках оси, определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left[(4A'_2 - 4A'_1) \frac{1}{x^2} + (18B'_1 + 3B'_2) \frac{1}{x^4} + 5C'_2 \frac{1}{x^6} \right] P, \\ \sigma_y &= \left[-A'_2 \frac{1}{x^2} - (6B'_1 - 3B'_2) \frac{1}{x^4} - 5C'_2 \frac{1}{x^6} + 1 \right] P, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Построение решения задач концентрации напряжения при упруго-пластических деформациях

Как известно, задача о концентрации напряжения при упруго-пластических деформациях „методом упругих напряжений“ решена в общем виде [3] и основные формулы, которыми в дальнейшем будем пользоваться в виде:

$$X_x^{(k+1)} = X_x^{(k)} + \omega^{(k)} (X_x^{(k)} - \sigma^{(k)}) + (-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}) \cos^2 \theta + X_x^{*(k+1)};$$

$$Y_y^{(k+1)} = Y_y^{(k)} + \omega^{(k)} (Y_y^{(k)} - \sigma^{(k)}) + (-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}) \sin^2 \theta + Y_y^{*(k+1)};$$

$$Y_y^{(k+1)} = X_y^{(k+1)} + \omega^{(k)} X_y^{(k)} + (-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}) \sin \theta \cdot \cos \theta + X_y^{*(k+1)}, \quad (6)$$

где $\beta_1 = 2 + \nu$ (ν — коэффициент Пуассона), $\beta_2 = 1 + \nu$;

$\varphi_{ок}$ — решение дифференциального уравнения

$$\nabla^2 \varphi_{ок} = \frac{\partial^2 [\omega^{(k)} X_x^{(k)}]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [\omega^{(k)} Y_y^{(k)}]}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 [\omega^{(k)} X_x^{(k)}]}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

На границе, которая обращается в нуль, $\varphi_{ок} = 0$, $\alpha X_x^{*(k+1)}$, $Y_y^{*(k+1)}$ являются решением дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_x^{*(k+1)} &= - \frac{\partial^2 [-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}] \cos^2 \theta}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{\partial^2 [-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}] \sin^2 \theta}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (8)$$

на границе $X_x^{*(k+1)} + Y_y^{*(k+1)} = 0$;

$$\begin{aligned} \nabla^2 X_y^{*(k+1)} &= - \frac{\partial^2 [(-\beta_1 \omega^{(k)} \sigma^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок})]}{\partial x \partial y} - \\ &- \Delta^2 [(-\beta_1 \omega^{(k)} + \beta_2 \varphi_{ок}) \sin \theta \cos \theta] \end{aligned} \quad (9)$$

на границе $X_y^{*(k+1)} = 0$;

$X_x^{*(k+1)}$, $Y_y^{*(k+1)}$ и $X_y^{*(k+1)}$, входящие в уравнение (6), являются упругим решением, определяемым под действием внешних сил $P + \Delta P^{(k+1)}$.

$\Delta P^{(k+1)}$ — поправка силе, которая ускоряет сходимость решений и вычисляется формулами

$$\Delta P^{(k+1)} = \int_{-a_0}^{a_0} [X_x^{(k+1)} - X_x^{(l)}] dy. \quad (10)$$

Напряжение при упруго-пластических деформациях определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} X^{[k+1]} &= X_x^{(k+1)} - \omega^{(k+1)} (X^{(k+1)} - \sigma^{(k+1)}); \\ Y_y^{[k+1]} &= Y_y^{(k+1)} - \omega^{(k+1)} (Y_y^{(k+1)} - \sigma^{(k+1)}); \\ X_y^{[k+1]} &= X_y^{(k+1)} - \omega^{(k+1)} X_y^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Согласно методу упругих напряжений [3] за первое приближение берется упругое решение задачи концентрации ($X_x = X_x^{(1)}$, $Y_y = Y_y^{(1)}$, $X_y = X_y^{(1)}$) при заданном равномерном напряженном состоянии вдали от отверстий.

Второе приближение для упругих напряжений $X_x^{(2)}$, $Y_y^{(2)}$ и $X_y^{(2)}$ дается формулой:

$$\begin{aligned} X_x^{(2)} &= X_x^{(2)} + \omega^{(1)} [X_x^{(1)} - \sigma^{(1)}] + (-\beta_1 \omega^{(1)} \sigma^{(1)} + \beta_2 \varphi_{01}) \cos^2 \theta + X_x^{*(2)}; \\ Y_y^{(2)} &= Y_y^{(2)} + \omega^{(1)} [Y_y^{(1)} - \sigma^{(1)}] + (-\beta_1 \omega^{(1)} \sigma^{(1)} + \beta_2 \varphi_{01}) \sin^2 \theta + Y_y^{*(2)}; \\ X_y^{(2)} &= X_y^{(2)} + \omega^{(1)} X_y^{(1)} + (-\beta_1 \omega^{(1)} \sigma^{(1)} + \beta_2 \varphi_{01}) \sin \theta \cdot \cos \theta + X_y^{*(2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Второе приближение для напряжений при упруго-пластических деформациях $X_x^{(2)}$, $X_y^{(2)}$ и $Y_y^{(2)}$ выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} X_x^{(2)} &= X_x^{(2)} - \omega^{(2)} (X_x^{(2)} - \sigma^{(2)}); \\ Y_y^{(2)} &= Y_y^{(2)} - \omega^{(2)} (Y_y^{(2)} - \sigma^{(2)}); \\ X_y^{(2)} &= X_y^{(2)} - \omega^{(2)} X_y^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

По формулам (4) получаем значение компонента напряжений для точек оси симметрии y по минимальному сечению (при $\alpha=0$). Значения напряжений для точек, лежащих между отверстиями при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, вычисляем по формулам (5). Значения напряжений для случая а) представлены в табл. 1, а для случая б) в табл. 2. Все значения отнесены к пределу упругости $\sigma_s = 43 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$.

Таблица 1

y	$\bar{X}_x^{(1)}$	$\bar{\omega}^{(1)}$	$\bar{\delta}^{(1)}$	$\bar{X}_x^{(2)}$	$\bar{X}_{x_1}^{(2)}$	$\kappa \bar{X}_{x_1}^{(1)}$	$\bar{\omega}^{(2)}$	$\bar{\delta}^{(2)}$	$\bar{X}_x^{(2)}$	$\bar{\omega}^{(2)}$	$\bar{\delta}^{(2)}$	$\bar{X}_x^{(2)}$
1	1,751	0,3505	0,583	2,06	1,252	1,842	0,382	0,614	2,211	0,56	0,77	1,302
1,1	1,458	0,2265	0,486	1,678	1,397	1,533	0,264	0,511	1,803	0,368	0,601	1,391
1,2	1,289	0,142	0,422	1,412	1,2204	1,356	0,176	0,452	1,515	0,257	0,505	1,346
1,4	1,26	0,0605	0,375	1,171	1,106	1,184	0,091	0,394	1,256	0,116	0,418	1,159
1,6	1,027	0,011	0,341	1,034	1,024	1,08	0,047	0,36	1,112	0,054	0,371	1,07
1,8	0,917	0	0,305	0,917	0,964	0	0	0,321	0,964	0	0,321	0,964
2	0,84	0	0,28	0,84	0,84	0,883	0	0,294	0,883	0	0,394	0,883
2,2	0,774	0	0,258	0,774	0,774	0,814	0	0,271	0,814	0	0,271	0,814
2,4	0,709	0	0,236	0,709	0,709	0,746	0	0,248	0,746	0	0,248	0,746
2,6	0,657	0	0,219	0,657	0,657	0,691	0	0,23	0,691	0	0,23	0,691
2,8	0,621	0	0,207	0,621	0,621	0,653	0	0,217	0,653	0	0,217	0,653
3	0,606	0	0,202	0,606	0,606	0,637	0	0,212	0,637	0	0,212	0,637

Таблица 2

X	$\bar{Y}_y^{(1)}$	$\bar{\omega}^{(1)}$	$\bar{\delta}^{(1)}$	$\bar{Y}_y^{(2)}$	$\bar{Y}_{y_1}^{(2)}$	$\kappa_1 \bar{Y}_y^{(1)}$	$\bar{\omega}^{(2)}$	$\bar{\delta}^{(2)}$	$\bar{Y}_y^{(2)}$	$\bar{\omega}^{(2)}$	$\bar{\delta}^{(2)}$	$\bar{Y}_y^{(2)}$
1	1,973	0,421	0,659	2,523	1,598	2,138	0,456	0,712	2,788	0,576	0,929	1,659
1,1	1,61	0,201	0,54	1,932	1,645	1,745	0,357	0,551	2,172	0,35	0,714	1,701
1,2	1,372	0,183	0,457	1,533	1,36	1,487	0,241	0,495	1,726	0,29	0,575	1,498
1,3	1,234	0,1145	0,328	1,145	1,185	1,337	0,166	0,445	1,485	0,14	0,495	1,348
1,4	1,103	0,0505	0,368	1,143	1,091	1,198	0,096	0,396	1,25	0,105	0,421	1,25
1,5	0,993	0	0,332	0,998	0,998	1,081	0,038	0,36	1,108	0,052	0,39	1,07
2	0,793	0	0,24	0,793	0,793	0,859	0	0,286	0,59	0	0,286	0,859
3	0,693	0	0,232	0,696	0,696	0,754	0	0,251	0,754	0	0,251	0,754
3,3	0,672	0	0,224	0,672	0,672	0,738	0	0,246	0,738	0	0,246	0,738
-2	1,973	0,421	0,659	2,523	1,598	2,138	0,456	0,712	2,788	0,576	0,929	1,659
-1,1	1,61	0,201	0,54	1,932	1,645	1,745	0,367	0,581	2,12	0,35	0,714	1,701
-1,2	1,372	0,183	0,457	1,589	1,36	1,487	0,241	0,495	1,72	0,29	0,575	1,498
-1,4	1,103	0,0505	0,368	1,143	1,091	1,198	0,096	0,396	1,275	0,105	0,421	1,25
-1,3	1,234	0,1145	0,411	1,323	1,185	1,337	0,166	0,445	1,485	0,14	0,495	1,348
2	0,793	0	0,24	0,793	0,798	0,859	0	0,286	0,59	0	0,286	0,859
-1,5	0,998	0	0,32	0,998	0,998	1,081	0,038	0,36	1,108	0,052	0,369	1,07
-3	0,696	0	0,232	0,696	0,696	0,754	0	0,251	0,754	0	0,251	0,754
-3,3	0,672	0	0,224	0,672	0,672	0,738	0	0,246	0,738	0	0,246	0,738

Было доказано [4], что если области пластических деформаций малы, то дополнительные члены малы и не оказывают влияние на значения искомых напряжений при упруго-пластических деформациях. В этом случае при вычислении напряжений в точках минимального сечения можно ограничиться вторым приближением без учета дополнительных членов $X_x^{*(2)}$, $Y_y^{*(2)}$ и φ_{01} в уравнениях (12) и (13).

По значениям упругих напряжений первого приближения определяем интенсивность деформации $\bar{e}_i^{(1)}$ и функцию $\omega^{(1)} = \omega(\bar{e}_i^{(1)})$. Для определения функции ω использована аппроксимация, приведенная в работе [3]:

$$\begin{aligned} \omega &= 0,5(\bar{e}_i - 1,005) && \text{для } 1,005 \leq \bar{e}_i \leq 1,5; \\ \omega &= 0,2475 + 0,22(\bar{e}_i - 1,5)^3 - 0,414(\bar{e}_i - 1,5)^2 + 0,5(\bar{e}_i - 1,5) && \text{для } 1,5 \leq \bar{e}_i \leq 2,116; \\ \omega &= 0,96 \left(1 - \frac{1,214}{\bar{e}_i}\right) && \text{для } \bar{e}_i \geq 2,116. \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что $\bar{\sigma}_i = \bar{e}_i$, т. е. в безразмерных единицах в упругой области интенсивность напряжений равна интенсивности деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= 3Ge_i; \quad \sigma_s = 3Ge_s; \\ \bar{\sigma}_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_s} = \frac{3Ge_i}{3Ge_s} = \bar{e}_i, \quad \bar{e}_i = \bar{\sigma}_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Используя формулы (4), (5), (14) и (15), найдем значения $\bar{e}_i^{(1)}$, $\omega(\bar{e}_i^{(1)})$ и $\bar{\sigma}^{(1)}$. Искомые напряжения для нашей задачи находим по формулам (13) и (12). В этих формулах $\bar{X}_x^{(2)}$, $\bar{Y}_y^{(2)}$ — известное упругое решение задачи концентрации с измененной внешней силой $P + \Delta P^{(2)}$. В нашей задаче вычисления проведены для полосы, ширина которой $h = 6R$, где $R = 1$. Тогда формула (10) принимает вид

$$\Delta P^{(2)} = -2 \int_1^3 [\bar{X}_x^{(2)} - \bar{X}_x^{(1)}] dy. \quad (16)$$

Здесь $\bar{X}_x^{(2)}$ определяется через $\bar{X}_x^{(2)}$ по формулам (13), а $\bar{X}_x^{(2)}$ находят

по формулам (12), если в них вместо $\bar{X}_x^{(2)}$ взять $\bar{X}_x^{(1)}$. В формуле (16) для каждой точки минимального сечения значения $\bar{X}_x^{(2)}$ и $\bar{X}_x^{(1)}$ известны. Тогда, вычисляя этот интеграл, найдем значения $\Delta P^{(2)}$:

$$\Delta P^{(2)} = \sigma_s \cdot \Delta \bar{P}^{(2)} = 1,462 \frac{\kappa z}{\text{мм}^2}; \quad \kappa = \frac{P + \Delta P^{(2)}}{P} = 1,052; \quad P = 28 \frac{\kappa z}{\text{мм}^2}.$$

Для того, чтобы определить $\bar{X}_x^{(2)}$, достаточно умножить коэффициент κ на значения напряжений, полученные для первого приближения: $\kappa \cdot \bar{X}_x^{(1)} = \bar{X}_x^{(2)}$. Затем решаем задачу с новыми значениями упругих напряжений $\kappa X_x^{(1)} = X_x^{(2)}$, вычисляем $\bar{e}_1$, ω и $\bar{\sigma}$, после чего по формуле (12), вычисляем значения для нашего сечения ($X=0$). После этого по значениям $\bar{X}_x^{(2)}$ вычисляем $\omega^{(2)}$, $\bar{e}^{(2)}$, $\bar{\sigma}^{(2)}$, которые позволяют нам вычислить искомое решение $\bar{X}_x^{(2)}$ для минимального сечения ($X=0$). Основные результаты вычислений приведены в табл. 1. Распределение напряжений по минимальному сечению показано на рис. 3.

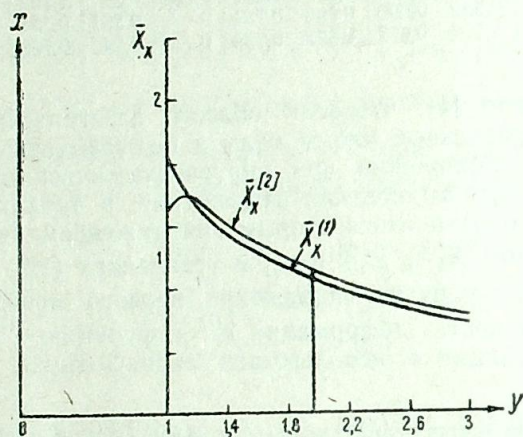


Рис. 3

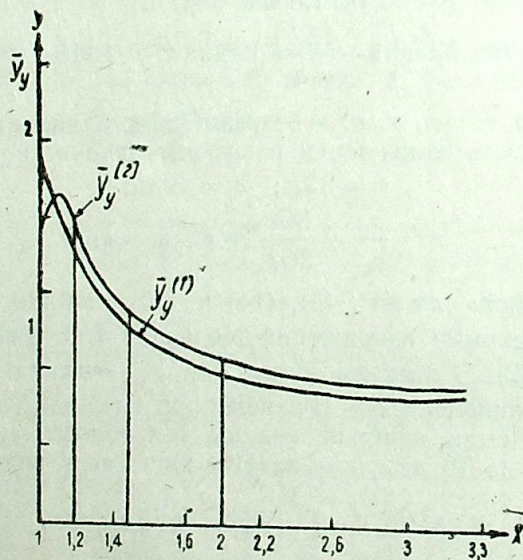


Рис. 4

В случае б) поправка силе $\Delta P_1^{(2)} = 2,37 \frac{\kappa z}{\text{мм}^2}$, $\kappa_1 = \frac{P + \Delta P_1^{(2)}}{P} = 1,084$. Эта задача решается аналогично, как в случае а). Основные результаты вычислений приведены в табл. 2. Распределение напряжений показано на рис. 4. Необходимо отметить, что, как и следовало ожидать, напряжения при упруго-пластических деформациях достигают своего максимального значения в точке, находящейся на некотором удалении от контура отверстий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А. С. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений. Докт. дисс. Киев, 1933.
2. Космодамианский А. С., Воробич И. И. "Изв. АН СССР, ОТН", 1959, № 2.
3. Панферов В. М. "Изв. АН СССР, ОТН", 1954, № 4.
4. Кишкин Б. П. Концентрация напряжений при плоской деформации и разрушении в бруске с глубокими вырезами. Дисс., МГУ, 1956.

К. М. Гулиjev

Сонсуз сајда ејни радиуслу даирэви дешиклэ зэйфлэмиш
сонсуз мүстэвидэ еласти и-плас ики деформасија халында
кэркинлик

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә сонсуз сајда ејни радиуслу даирэви дешиклэ зэйфлэмиш сонсуз мүстэвидэ еластики-пластики деформасија халында кэркинлијин тапылмасындан данышылар.

Мәсәләнүн һәллиндә ејни адлы мәсәләнүн "кичик параметр" методу илә һәлл олунмуш еластики деформасија халында һәллиндән истифадә олунмушдур. В. М. Панферов тәрәфиндән тәклиф едилмиш "еластики кэркинлик" методу әсасында сонсуз дешикли мүстэвидә кэркинлијин дешик әтрафында пәјланмасы өјрәнилмишдир.

А. Д. ГАДЖИЕВ

О БЛИЗОСТИ К НУЛЮ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГАММЕРШТЕЙНА

Путь G — некоторое конечное или бесконечное множество вещественной оси, включающее нулевую точку, Λ — множество вещественных чисел с точкой сгущения λ_0 . Пусть $x, t \in G$ и на G задана функция $f(t)$, область значений которой заполняет всю ось $(-\infty < f(t) < \infty)$.

Рассмотрим, в зависимости от параметра $\lambda \in \Lambda$, семейство нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна [1]:

$$A_\lambda(f; x) = \int_G K_\lambda(t, x) F(t, f(t)) dt, \quad (1)$$

где $K_\lambda(t, x)$ — неотрицательная функция двух переменных t и x .

Будем предполагать, что $F(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u , т. е.

$$|F(t, u_1) - F(t, u_2)| \leq M(t) |u_1 - u_2| \quad (2)$$

$(n+1)$ раз дифференцируема по u , причем $\frac{\partial^{n+1} F(t, u)}{\partial u^{n+1}}$ ограниче-

но по совокупности переменных и $F(t, 0) = F'(t, 0) = \dots = F^{(n-1)}(t, 0) = 0$.

Кроме того, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ и пусть существует положительная

функция $\varphi_{f,n}(t)$, связанная с функцией $f(t)$ следующим образом:

$$\varphi_{f,n}(t) \sim f^n(t) \text{ при } f(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow 0),$$

$\varphi_{f,n}(t) \geq b_\delta$ при $|f(t)| \geq \delta$, где b_δ — некоторая постоянная, зависящая от $\delta > 0$.

При вышеуказанных условиях справедлива следующая

Теорема. Если при фиксированном значении x и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\int \varphi_{f,n}(t) g(t) K_\lambda(t, x) dt = 0 \quad (\Delta_\lambda),$$

$$E_\delta [t \in G: |f(t)| \geq \delta],$$

$$\text{где } g(t) = \max \{ |f(t)| M(t); |F_u^{(n)}(t, 0)| \}, \quad a$$

$$\Delta_\lambda = \int_G \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0) K_\lambda(t, x) dt \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

то при этом же значении x справедливо соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\Delta_\lambda} A_\lambda(f; x) = \frac{1}{n!}$$

Доказательство. В силу наложенных выше условий

$$F(t, f(t)) = \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0) f^n(t) + \frac{1}{n!} \Psi(t, f(t)) f^n(t),$$

$$\text{где } \Psi(t, f(t)) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\partial^{n+1} F(t, u)}{\partial u^{n+1}} f^n(t) \text{ и}$$

ясно, что $\Psi(t, f(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Введем функцию [2]

$$\sigma(t) = \frac{\frac{1}{n!} f^n(t) [F_u^{(n)}(t, 0) + \Psi(t, f(t))]}{\varphi_{f,n}(t)} - \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0). \quad (3)$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t, f(t)) = 0,$$

т. е. для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t| < \delta$

$$|\sigma(t)| < \varepsilon. \quad (4)$$

С другой стороны, из (2) видно, что

$$\sigma(t) = \frac{F(t, f(t))}{\varphi_{f,n}(t)} - \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0).$$

Следовательно, при $|f(t)| \geq \delta$

$$\begin{aligned} |\sigma(t)| &\leq \frac{|F(t, f(t)) - F(t, 0)|}{\varphi_{f,n}(t)} + \frac{1}{n!} |F_u^{(n)}(t, 0)| \leq \\ &\leq \frac{M(t) |f(t)|}{b_\delta} + \frac{1}{n!} |F_u^{(n)}(t, 0)| \leq C \cdot g(t), \end{aligned}$$

где $C = \frac{1}{b_\delta} + \frac{1}{n!}$, а $g(t) = g \max \{ M(t) |g(t)|; |F_u^{(n)}(t, 0)| \}$.

Таким образом, при $|f(t)| \geq \delta$

$$|\sigma(t)| \leq C \cdot g(t). \quad (5)$$

Обозначим через $B(t)$ правую часть (2) и найдем ее из (3). Имеем

$$B(t) = \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) + \frac{1}{n!} \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_\lambda(f; x) &= \int_G B(t) K_\lambda(t, x) dt = \int_G \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_G \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0) K_\lambda(t, x) dt. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы второй интеграл справа есть Δ_λ , и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к нулю. Рассмотрим первый интеграл:

$$I_1 = \int_G \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt = \int_{E_\delta [t \in G: |f(t)| \geq \delta]} \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt +$$

$$+ \int_{G - E_\delta} \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt.$$

А. Д. ГАДЖИЕВ

О БЛИЗОСТИ К НУЛЮ СЕМЕЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ГАММЕРШТЕЙНА

Путь G — некоторое конечное или бесконечное множество вещественной оси, включающее нулевую точку, Λ — множество вещественных чисел с точкой сгущения λ_0 . Пусть $x, t \in G$ и на G задана функция $f(t)$, область значений которой заполняет всю ось $(-\infty < f(t) < \infty)$.

Рассмотрим, в зависимости от параметра $\lambda \in \Lambda$, семейство нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна [1]:

$$A_\lambda(f; x) = \int_G K_\lambda(t, x) F(t, f(t)) dt, \quad (1)$$

где $K_\lambda(t, x)$ — неотрицательная функция двух переменных t и x .

Будем предполагать, что $F(t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по u , т. е.

$$|F(t, u_1) - F(t, u_2)| \leq M(t) |u_1 - u_2| \quad (2)$$

$(n+1)$ раз дифференцируема по u , причем $\frac{\partial^{n+1} F(t, u)}{\partial u^{n+1}}$ ограниче-

но по совокупности переменных и $F(t, 0) = F'(t, 0) = \dots = F^{(n-1)}(t, 0) = 0$. Кроме того, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 0$ и пусть существует положительная

функция $\varphi_{f,n}(t)$, связанная с функцией $f(t)$ следующим образом:

$$\varphi_{f,n}(t) \sim f^n(t) \text{ при } f(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow 0),$$

$\varphi_{f,n}(t) \geq b_\delta$ при $|f(t)| \geq \delta$, где b_δ — некоторая постоянная, зависящая от $\delta > 0$.

При вышеуказанных условиях справедлива следующая

Теорема. Если при фиксированном значении x и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\int \varphi_{f,n}(t) g(t) K_\lambda(t, x) dt = 0 \quad (\Delta_\lambda),$$

$$E_\delta [t \in G: |f(t)| \geq \delta],$$

$$\text{где } g(t) = \max \{ |f(t)| M(t); |F_u^{(n)}(t, 0)| \}, \quad a$$

$$\Delta_\lambda = \int_G \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0) K_\lambda(t, x) dt \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

то при этом же значении x справедливо соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{1}{\Delta_\lambda} A_\lambda(f; x) = \frac{1}{n!}$$

Доказательство. В силу наложенных выше условий

$$F(t, f(t)) = \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0) f^n(t) + \frac{1}{n!} \Psi(t, f(t)) f^n(t),$$

$$\text{где } \Psi(t, f(t)) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\partial^{n+1} F(t, u)}{\partial u^{n+1}} f^n(t) \text{ и}$$

ясно, что $\Psi(t, f(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Введем функцию [2]

$$\sigma(t) = \frac{\frac{1}{n!} f^n(t) [F_u^{(n)}(t, 0) + \Psi(t, f(t))]}{\varphi_{f,n}(t)} - \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0). \quad (3)$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \Psi(t, f(t)) = 0,$$

т. е. для $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t| < \delta$

$$|\sigma(t)| < \varepsilon. \quad (4)$$

С другой стороны, из (2) видно, что

$$\sigma(t) = \frac{F(t, f(t))}{\varphi_{f,n}(t)} - \frac{1}{n!} F_u^{(n)}(t, 0).$$

Следовательно, при $|f(t)| \geq \delta$

$$\begin{aligned} |\sigma(t)| &\leq \frac{|F(t, f(t)) - F(t, 0)|}{\varphi_{f,n}(t)} + \frac{1}{n!} |F_u^{(n)}(t, 0)| \leq \\ &\leq \frac{M(t) |f(t)|}{b_\delta} + \frac{1}{n!} |F_u^{(n)}(t, 0)| \leq C \cdot g(t), \end{aligned}$$

где $C = \frac{1}{b_\delta} + \frac{1}{n!}$, а $g(t) = g \max \{ M(t) | g(t) |; |F_u^{(n)}(t, 0)| \}$.

Таким образом, при $|f(t)| \geq \delta$

$$|\sigma(t)| \leq C \cdot g(t). \quad (5)$$

Обозначим через $B(t)$ правую часть (2) и найдем ее из (3). Имеем

$$B(t) = \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) + \frac{1}{n!} \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A_\lambda(f; x) &= \int_G B(t) K_\lambda(t, x) dt = \int_G \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt + \\ &+ \frac{1}{n!} \int_G \varphi_{f,n}(t) F_u^{(n)}(t, 0) K_\lambda(t, x) dt. \end{aligned}$$

В силу условия теоремы второй интеграл справа есть Δ_λ , и при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ стремится к нулю. Рассмотрим первый интеграл:

$$I_1 = \int_G \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt = \int_{E_\delta [t \in G: |f(t)| \geq \delta]} \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt +$$

$$+ \int_{G-E_\delta} \sigma(t) \varphi_{f,n}(t) K_\lambda(t, x) dt.$$

Применяя оценки (4) и (5), получим
 $|I_1| \leq \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + O(\Delta_\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \lambda_0).$

Таким образом, окончательно имеем

$$A_\lambda(f; x) = \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + \frac{1}{n!} \Delta_\lambda + O(\Delta_\lambda) \quad (\lambda \rightarrow \lambda_0).$$

Деля обе части на Δ_λ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, в силу произвольности ε получим требуемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., 1959.
2. Гаджиев А. Д., Джафаров А. С., Лабскер Л. Г., Изв. АН Азерб. ССР, 1962, № 3.

А. Ч. Начыјев

Гејри-хэтти Гаммерштејн интеграл операторлар аилэсинин сыфра
 јахынлығы һаггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә (1) типли гејри-хэтти операторлар аилэсинин λ параметри λ_0 -а јахынлашанда асимптотик гијмәти һаггында теорем исбат олунур.

Л. Ш. АБДУЛКЕРИМОВ, С. Я. ЯКУБОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Многие задачи для дифференциальных уравнений высших порядков в банаховом пространстве с помощью специальной замены приводятся к задаче Коши для параболических уравнений первого порядка [1]. Поэтому такие уравнения естественно называть уравнениями параболического типа. В настоящей работе изучались задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений параболического типа первого и второго порядка. Полученные результаты применялись к смешанной задаче для одного класса квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Сначала рассматривается уравнение первого порядка
 $u'(t) + A(t, u(t))u(t) = f(t, u(t)); u(0) = u_0, \quad (1)$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями из комплексного банахова пространства E . Под $u'(t)$ понимается сильная производная вектор-функции $u(t)$ [2].

Под решением на $[0, T]$ задачи (1) будем понимать функцию $u(t)$, непрерывную на $[0, T]$, непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$, удовлетворяющую уравнению (1) на $[0, T]$ и начальному условию, для которой имеет место неравенство

$$\|A_0^\alpha u(t) - A_0^\alpha u(s)\| \leq K|t - s|^\eta, \quad (2)$$

где $A_0 = A(0, u_0)$, $\alpha \in [0, 1]$, $\eta \in (0, 1]$, A_0^α — дробная степень от оператора A_0 [3].

Теорема 1. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1°. При любом $t \in [0, T]$, $v \in E$ оператор $A(t, A_0^{-\alpha} v)$ имеет не зависящую от t, v , всюду плотную область определения $D(A)$ и для любого комплексного числа λ с $\text{Re } \lambda \geq 0$ удовлетворяется оценка

$$\|[A(t, A_0^{-\alpha} v - \lambda I)^{-1}]\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1};$$

2°. При любом $t, s \in [0, T]$, $v, w \in E$ с $\|v\|, \|w\| \leq R$ имеет место неравенство

$$\|[A(t, A_0^{-\alpha} v) - A(s, A_0^{-\alpha} w)] A_0^{-1}\| \leq C(R)[|t - s| + \|v - w\|];$$

3°. При таких же $t, s \in [0, T], v, w \in E$ имеет место неравенство

$$\|f(t, A_0^{-\alpha} v) - f(s, A_0^{-\alpha} w)\| \leq C(R) (|t - s|^\epsilon \|v - w\|,$$

4°. При любом $t \in [0, T], v \in E$ удовлетворяется оценка

$$\|f(t, A_0^{-\alpha} v)\| \leq C(1 + \|v\|);$$

5°. $u_0 \in D(A_0^\beta)$ при некотором $\beta > \alpha$.

Тогда задача (1) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Доказательство. В работе [2] доказано, что при условиях 1°, 2°, 3° 6° задача (1) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = U_u(t, 0)u_0 + \int_0^t U_u(t, s)f_u(s)ds, \quad (3)$$

где $U_u(t, s)$ — функция Като оператора $A(t, A_0^{-\alpha} u(t))$, $f_u(t) = f(t, A_0^{-\alpha} u(t))$. Кроме того, уравнение (3) на некотором промежутке $[0, t_0]$, где $t_0 \in (0, T]$, имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Пусть $u(t)$ — любое решение (3). Тогда

$$\|u(t)\| \leq \|U_u(t, 0)\| \|u_0\| + \int_0^t \|U_u(t, s)\| \|f_u(s)\| ds. \quad (4)$$

Так как $\|U_u(t, s)\| \leq C$ и

$$\|f_u(s)\| = \|f(s, A_0^{-\alpha} u(s))\| \leq C(1 + \|u(s)\|), \quad (5)$$

то из (4) и (5) получаем $\|u(t)\| \leq C\|u_0\| + \int_0^t C(1 + \|u(s)\|)ds \leq C +$

$+ C \int_0^t \|u(s)\| ds$. Отсюда по теореме об интегральных неравенствах

[5] получаем априорную оценку $\|u(t)\| \leq C$ любого решения. Теперь, действуя оператором $A^\beta(t, A_0^{-\alpha} v(t))$, в (3) получаем

$$A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) u(t) = A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) U_u(t, 0) u_0 + \int_0^t A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) U_u(t, s) f_u(s) ds.$$

Известна следующая оценка [4]: $\|A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) U_u(t, s)\| \leq C(\beta) |t - s|^{-\beta}$. Кроме того, в силу условия 1° и неравенства моментов для дробных степеней операторов [3], при любом $v \in E$ с $\|v\| \leq R$, имеет место неравенство $\|A^{-\beta}(t, A_0^{-\alpha} v)\| \leq C(R)$. Тогда в силу 4° и (5), учитывая априорную оценку $\|u(t)\| \leq C$, получаем $\|A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) u(t)\| \leq$

$$\|A^\beta(t, A_0^{-\alpha} u(t)) U_u(t, 0) A_0^{-\beta}\| \|A_0^\beta u_0\| + \int_0^t \frac{C(\beta)}{|t - s|^\beta} \|A^\beta(s, A_0^{-\alpha} u(s)) u(s)\| ds,$$

По теореме об интегральных неравенствах снова имеем

$$\|A^\beta(t, A_0^{-\alpha} v(t)) v(t)\| \leq C(\beta) E \leq C.$$

Значит в силу [4] теорема полностью доказана,

Замечание. Если $u(t)$ — решение задачи (1), то при условиях теоремы $A(t, u(t)) u(t)$ будет непрерывна на $(0, T]$. Действительно, по условию 3° и по неравенству (2) получаем $\|f(t, u(t)) - f(s, u(s))\| \leq C(|t - s|^\epsilon + \|A_0^\alpha(u(t) - u(s))\|) \leq C|t - s|^{\eta_1}$, где $\eta_1 = \min\{\epsilon, \delta\}$. Это показывает, что вектор-функция $f(t, u(t))$ непрерывна на $[0, T]$. Но так как по определению $u'(t)$ непрерывна на $(0, T]$, то из уравнения (1) получается непрерывность $A(t, u(t)) u(t)$ на $(0, T]$.

2. Теперь перейдем к задаче для уравнения второго порядка: $u''(t) + A(t, u(t), u'(t)) u'(t) = f(t, u(t), u'(t)); u(0) = u_0, u'(0) = u_1. \quad (6)$

Под решением на $[0, T]$ задачи (6) — (7) будем понимать функцию $u(t)$, непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$, дважды непрерывно дифференцируемую на $(0, T]$, удовлетворяющую уравнению (6) на $(0, T]$ и начальным условиям, для которой имеет место

$$\|A_0^\alpha u'(t) - A_0^\alpha u'(s)\| \leq K|t - s|^\gamma,$$

где $A_0 = A(0, u_0, u_1)$, γ — некоторое число из $(0, 1]$.

Теорема 2. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1°. A_0 — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения и для любого $\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq 0$ $\|(A_0 + \lambda I)^{-1}\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1}$;

2°. Для любого $t \in [0, T], \tau_1, \tau_2 \in E$ с $\|\tau_1\| + \|\tau_2\| \leq R$, где R — некоторое положительное число, оператор $A(t, A_0^{-\alpha} \tau_1, A_0^{-\alpha} \tau_2)$ определен на D и для любого $t, s \in [0, T], \tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2 \in E$ с $\|\tau_1\| + \|\tau_2\| \leq R, \|\tau'_1\| + \|\tau'_2\| \leq R$ имеет место неравенство

$$\| [A(t, A_0^{-\alpha} \tau_1, A_0^{-\alpha} \tau_2) - A(s, A_0^{-\alpha} \tau'_1, A_0^{-\alpha} \tau'_2)] A_0^{-1} \| \leq C[|t - s|^\epsilon + \|\tau_1 - \tau'_1\| + \|\tau_2 - \tau'_2\|].$$

3°. Для таких же $t, s \in [0, T], v_1, v_2, v'_1, v'_2 \in E$ имеет место

$$\|f(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) - f(s, A_0^{-\alpha} v'_1, A_0^{-\alpha} v'_2)\| \leq C[|t - s|^\epsilon + \|v_1 - v'_1\| + \|v_2 - v'_2\|].$$

4°. $u_0 \in D(A_0^\alpha), u_1 \in D(A_0^\beta)$ при некотором $\beta > \alpha$.

Тогда на некотором отрезке $[0, t_0]$, где $t_0 \in (0, T]$, существует единственное решение задачи (6).

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение задачи (1). Тогда функция $u(t)$ и оператор A_0^α удовлетворяют условиям леммы 23.9.1 [2]. Следовательно, по утверждению леммы имеет место соотношение

$$(A_0^\alpha u(t))' = A_0^\alpha u'(t).$$

Делаем следующую замену:

$$u_1(t) = A_0^\alpha u(t), u_2(t) = u'(t). \quad (7)$$

Функции $u_1(t), u_2(t)$ непрерывны на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемы на $(0, T)$, так как этими свойствами обладают функции $A_0^\alpha u(t)$ и $u'(t)$. Тогда, дифференцируя на $(0, T]$ каждое соотношение (7) и учитывая, что $u(t)$ удовлетворяет задаче (6) на $(0, T]$, получаем, что функция $v(t) = (u_1(t), u_2(t))$ в банаховом пространстве $E \times E$ удовлетворяет задаче

$$v'(t) + B(t, v(t)) v(t) = F(t, v(t)); v(0) = v_0. \quad (8)$$

где

$$B(t, v) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A(t, A_0^{-\alpha} v_1, v_2) \end{pmatrix}, F(t, v) = \begin{pmatrix} v_1 + A_0^\alpha v_2 \\ f(t, A_0^{-\alpha} v_1, v_2) \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} A_0^\alpha u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Непосредственно вычисляя, находим

$$(\lambda I + B)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^{-1} I & 0 \\ 0 & (\lambda I + A_0)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отсюда по формуле $B_0^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^t t^{-\alpha} (tI + B_0)^{-1} dt$ получаем $B^{-\alpha} =$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A_0^{-\alpha} \end{pmatrix}. \text{ Теперь докажем, что функция } v(t) \text{ удовлетворяет не-}$$

равенству $|B_0^\alpha v(t) - B_0^\alpha v(s)| \leq K|t - s|^\eta$. Так как $B_0^\alpha v(t) - B_0^\alpha v(s) = (A_0^\alpha u(t) - A_0^\alpha u(s), A_0^\alpha u'(t) - A_0^\alpha u'(s))$, то отсюда $\|B_0^\alpha v(t) - B_0^\alpha v(s)\| \leq \|A_0^\alpha u(t) - A_0^\alpha u(s)\| + \|A_0^\alpha u'(t) - A_0^\alpha u'(s)\| \leq K|t - s|^\eta$. Мы показали, что если $u(t)$ — решение задачи (6), то функция $v(t) = (A_0^\alpha u(t), u'(t))$ будет решением задачи (1). Легко доказывается и обратное утверждение. Таким образом, задачи (1) и (6) эквивалентны.

Теперь докажем, что при условиях последней теоремы удовлетворяются условия 1°, 2°, 3°, 6° теоремы 1. Оператор B_0 имеет плотную в пространстве $E \times E$ область определения $D(B_0) = E \times D(A)$. Кроме того, из (9) ясно, что при любом комплексном λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ имеет место

$$\|\lambda I + B_0\|^{-1} \leq C(|\lambda| + 1)^{-1}. \quad (10)$$

Пусть теперь $v = (v_1, v_2)$, где $v_1, v_2 \in E$. Тогда легко можем получить

$$B(t, B_0^{-\alpha} v) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) \end{pmatrix}.$$

По условию 2° $B(t, B_0^{-\alpha} v)$ определен $D(B_0)$, Кроме того, для любых $v = (v_1, v_2)$, $v' = (v'_1, v'_2)$ с $\|v\|, \|v'\| \leq R$ имеем

$$[B(t, B_0^{-\alpha} v) - B(s, B_0^{-\alpha} v')] B_0^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & [A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) - A(s, A_0^{-\alpha} v'_1, A_0^{-\alpha} v'_2, A_0^{-1})] \end{pmatrix}.$$

Отсюда в силу условия 2° получаем $\|[B(t, B_0^{-\alpha} v) - B(s, B_0^{-\alpha} v')] B_0^{-1}\| \leq C[|t - s|^\alpha + \|v - v'\|]$. Кроме того, поскольку, $F(t, B_0^{-\alpha} v) = (v_1 + v_2, f(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2))$, то для любых $t, s \in [0, T]$, $v = (v_1, v_2)$, $v' = (v'_1, v'_2)$ с $\|v\|, \|v'\| \leq R$ получаем

$$F(t, B_0^{-\alpha} v) - F(s, B_0^{-\alpha} v') = (v_1 - v'_1 + v_2 - v'_2, f(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) - f(s, A_0^{-\alpha} v'_1, A_0^{-\alpha} v'_2)).$$

Следовательно, по условию 3° имеем $\|F(t, B_0^{-\alpha} v) - F(s, B_0^{-\alpha} v')\| \leq C(R)[|t - s|^\alpha + \|v - v'\|]$. Наконец, так как $B_0^\beta v_0 = \begin{pmatrix} A_0^\beta u_0 \\ A_0^\beta u_1 \end{pmatrix}$, то из условия 4° получается, что $v_0 \in D(B_0^\beta)$.

Таким образом, имеют место условия 1°, 2°, 3°, 6° теоремы 1. Тогда в силу [4] существует единственное решение задачи (1) на $[0, t_e]$. Тем самым доказано существование единственного решения задачи (6) на $[0, t_0]$, где $t_0 \in (0, T]$.

Теорема 3. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1°. При любом $t \in [0, T]$, $v_1, v_2 \in E$ оператор $A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2)$ имеет не зависящую от t, v_1, v_2 всюду плотную область определения $D(A)$ и для любого комплексного λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ удовлетворяется оценка

$$\|[A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) + \lambda I]^{-1}\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1};$$

2°. При любом $t, s \in [0, T]$, $v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$ с $\|v_1\| + \|v_2\| \leq R$, $\|w_1\| + \|w_2\| \leq R$ имеет место неравенство

$$\|[A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) - A(s, A_0^{-\alpha} w_1, A_0^{-\alpha} w_2)] A_0^{-1}\| \leq C(R)[|t - s|^\alpha + \|v_1 - w_1\| + \|v_2 - w_2\|].$$

3°. При таких же $t, s \in [0, T]$, $v_1, v_2, w_1, w_2 \in E$ имеет место неравенство

$$\|f(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) - f(s, A_0^{-\alpha} w_1, A_0^{-\alpha} w_2)\| \leq C(R)[|t - s|^\alpha + \|v_1 - w_1\| + \|v_2 - w_2\|];$$

4°. При любом $t \in [0, T]$, $v_1, v_2 \in E$ удовлетворяется оценка

$$\|f(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2)\| \leq C(1 + \|v_1\| + \|v_2\|); \quad (11)$$

5°. $u_0 \in D(A_0^\alpha)$, $u_1 \in D(A_0^\beta)$ при некотором $\beta > \alpha$.

Тогда задача (6) имеет единственное решение на $[0, T]$.

Доказательство. Докажем, что в данном случае удовлетворяются все условия теоремы 1. Условия 2°, 3°, 5° проверены по теореме 2. Чтобы проверить условие 1° теоремы 1, достаточно заметить, что для любого $t \in [0, T]$.

$$[B(t, B_0^{-\alpha} v) + \lambda I]^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda + 1)^{-1} I & 0 \\ 0 & [A(t, A_0^{-\alpha} v_1, A_0^{-\alpha} v_2) + \lambda I]^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что для любого λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $v \in E \times E$ $\|[B(t, B_0^{-\alpha} v) + \lambda I]^{-1}\| \leq C(|\lambda| + 1)^{-1}$.

Теперь проверим условие 4°. Пусть $v = (v_1, v_2)$, где $v_1, v_2 \in E$.

Тогда в силу (8) и (11) имеем $\|F(t, B_0^{-\alpha} v)\| = \|v_1 + v_2\| + \|f(t, A_0^{-\alpha} v_1, v_2, A_0^{-\alpha})\| \leq C(1 + \|v\|)$. Значит на основании теоремы 1 задача (8) имеет единственное решение на $[0, T]$. Тем самым доказано, что задача (6) также имеет единственное решение на $[0, T]$.

3. Пусть Ω — ограниченная открытая область n -мерного евклидова пространства с достаточно гладкой границей Γ . Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial t} \right) \times$$

$$\times \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_n \partial t} = f(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial t}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial t}) \times$$

$$\times (x \in \Omega, 0 < t \leq T); \quad (12)$$

$$u(t, x)|_{\Gamma} = 0, u(0, x) = u_0(x), u'_1(0, x) = u_1(x) \quad (x \in \bar{\Omega}). \quad (13)$$

Под решением на $[0, T] \times \Omega$ задачи (12)–(13) будем понимать функцию $u(t, x)$, определенную на $[0, T] \times \Omega$, имеющую производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial x_i}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$ ($i = \overline{1, n}$), непрерывные по совокупности переменных, и обобщенные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_k \partial t}$ на $[0, T] \times \Omega$, удовлетворяющие уравнению (12) при фиксированном t почти всюду по x .

Теорема 4. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1°. Функции $a_{ik}(t, x, y, z)$ ($i, k = \overline{1, n}$) непрерывны по совокупности переменных в области $t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}, |y_i| < R, |z_i| < R$, и удовлетворяют по t условию Гельдера с показателем $\varepsilon > 0$, а по y, z — условию Липшица с константой, зависящей от R . Кроме того,

$$\text{функции } a_{ik}^0(x) = a_{ik}\left(0, x, u_0(x), \dots, \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_n}, u_1(x), \dots, \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n}\right)$$

непрерывно дифференцируемы по x ;

$$2^\circ. a_{ik}^0(x) = \overline{a_{ki}^0(x)} \text{ и } \sum_{i,k=1}^m a_{ik}^0(x) \gamma_i \gamma_k \geq \alpha \sum_{i=1}^m |\gamma_i|^2, \alpha > 0 \text{ для любых } \gamma_1, \dots, \gamma_n.$$

3°. Функция $f(t, x, y, z)$ в области $t \in [0, T], x \in \bar{\Omega}, |y_i| \leq R, |z_i| \leq R$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет по t условию Гельдера с показателем $\varepsilon > 0$, а по y, z — условию Липшица с константой, зависящей лишь от R ;

4°. $u_0(x), u_1(x) \in \mathcal{W}_p^2(\Omega)$ при некотором $p > n$.

При этих условиях в некотором промежутке $[0, t_0]$, где $t_0 \in (0, T]$, существует единственное решение задачи (12)–(13).

Доказательство. Замыкание множества дважды непрерывно дифференцируемых на $\bar{\Omega}$ функций, обращающихся на Γ в нуль по норме пространства $\mathcal{W}_p^2(\Omega)$, обозначим через $\mathcal{W}_{p,0}^2(\Omega)$. По теореме С. Л. Соболева при $p > n$ пространство $\mathcal{W}_p^2(\Omega)$ топологически включается в пространство $C^1(\bar{\Omega})$. При фиксированном $v_1(x), v_2(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ в банаховом пространстве $L_p(\Omega)$ рассмотрим линейный эллиптический оператор

$$A(t, u_1(x), u_2(x))u(x) = - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\left(t, x, u_1(x), \dots, \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_n}, u_2(x), \dots, \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_n}\right) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_k} + Ku(x), \quad (14)$$

область определения которого есть $\mathcal{W}_{p,0}^2(\Omega)$, где $K > 0$.

При условиях 1° и 2° М. З. Соломяком [6] доказано, что для достаточно большого K и для комплексного λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ оператор

$$\| [A(0, u_0(x), u_1(x)) + \lambda I]^{-1} \|_{G(L_p)} \leq C_p [|\lambda| + 1]^{-1}.$$

Из результатов В. П. Глушко и С. Г. Крейна [7] и П. Е. Соболевского [4] вытекает, что для достаточно больших p можно выбрать такое α , что оператор $A_0^{-\alpha} = A^{-\alpha}(0, u_0(x), u_1(x))$ действовал из $L_p(\Omega)$ в $C^1(\bar{\Omega})$. Пусть $\tau_1(x), \tau_2(x) \in L_p(\bar{\Omega})$. Тогда функции $[A_0^{-\alpha} \tau_1](x)$ и $[A_0^{-\alpha} \tau_2](x)$ принадлежат $C^1(\bar{\Omega})$. Следовательно, из (14) получается, что оператор

$$A(t, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\left(t, x, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)\right) \times \\ \times \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + Kv(x)$$

определен на $D(A_0)$.

Известно, что

$$\| [A(t, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)) - A(s, [A_0^{-\alpha} w_1](x), [A_0^{-\alpha} w_2](x))] A_0^{-1} \| \leq \\ \leq C \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ i,k=\overline{1,n}}} |a_{ik}(t, x, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), \dots, [A_0^{-\alpha} \tau_2](x), \dots)| - \\ - a_{i,k}(s, x, [A_0^{-\alpha} w_1](x), \dots, [A_0^{-\alpha} w_2](x), \dots)|.$$

Отсюда в силу наложенных ограничений на коэффициенты получаем, что для всех $\tau_1, \tau_2, w_1, w_2 \in L_p$ с $\|v_1\| + \|v_2\| \leq R, \|w_1\| + \|w_2\| \leq R$, где R — любое положительное число, имеет место неравенство

$$\| [A(t, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)) - A(s, [A_0^{-\alpha} w_1](x), [A_0^{-\alpha} w_2](x))] A_0^{-1} \|_{G(L_p)} \leq \\ \leq C(R) [|t-s| + \max_x |[A_0^{-\alpha} \tau_1](x) - [A_0^{-\alpha} w_1](x)| + \dots + \\ + \max_x |\frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} \tau_1](x) - \frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} w_1](x)| + \max_x |[A_0^{-\alpha} \tau_2](x) - \\ - [A_0^{-\alpha} w_2](x)| + \dots + \max_x |\frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} \tau_2](x) - \frac{\partial}{\partial x_n} [A_0^{-\alpha} w_2](x)|].$$

С другой стороны, так как $A_0^{-\alpha}$ действует из L_p в C^1 и ограничен, то

$$\| [A(t, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)) - A(s, [A_0^{-\alpha} w_1](x), [A_0^{-\alpha} w_2](x))] \times \\ \times A^{-1} \|_{G(L_p)} \leq C(R) [|t-s| + \|v_1 - w_1\| + \|v_2 - w_2\|].$$

Значит условие 2° теоремы 2 также удовлетворяется. Теперь рассмотрим нелинейный оператор

$$f(t, v_1(x), v_2(x)) = f(t, x, v_1(x), \dots, \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_n}, v_2(x), \dots, \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_n}) + \\ + Kv_2(x). \text{ Для всех } t, s \in [0, T], v_1, v_2, w_1, w_2 \in L_p \text{ с } \|v_1\| + \|v_2\| \leq R, \\ \times \|w_1\| + \|w_2\| \leq R \text{ имеет место неравенство}$$

$$\| f(t, [A_0^{-\alpha} \tau_1](x), [A_0^{-\alpha} \tau_2](x)) - f(s, [A_0^{-\alpha} w_1](x), [A_0^{-\alpha} w_2](x)) \| \leq \\ \leq C(R) [|t-s| + \|v_1 - w_1\| + \|v_2 - w_2\|].$$

Наконец, условие 4° последней теоремы обеспечивает выполнение условия 4° теоремы 2. Итак, на основании теоремы 2 задача (6) в пространстве $L_p(\Omega)$ имеет единственное решение на некотором промежутке $[0, t_0] \subset [0, T]$.

Для задачи (8) в работе [4] доказано, что вектор-функция $E_0^\beta u(t)$, где $\beta \in [0, 1)$, непрерывно дифференцируема при $t > 0$. Значит, если $u(t)$ — решение задачи (6), то вектор-функция $A_0^\beta u''(t)$ непрерывна при $t > 0$. С другой стороны, так как оператор $A_0^{-\alpha}$ действует из L_p в C^1 и ограничен, то для любого $w \in D(A_0^\alpha)$ имеет место неравенство $\|w\|_{C^1} \leq C \|A_0^\alpha w\|_p$. Но в силу того, что функции $u(t), u'(t), u''(t)$ принадлежат $D(A_0^\alpha)$, то $\|u(t)\|_{C^1} \leq C \|A_0^\alpha u(t)\|_p$, $\|u'(t)\|_{C^1} \leq C \|A_0^\alpha u'(t)\|_p$ и $\|u''(t)\|_{C^1} \leq C \|A_0^\alpha u''(t)\|_p$. Отсюда легко заключить, что функция $u(t) = u(t, x)$ является решением смешанной задачи (12) (13).

Аналогично, применяя результаты [6, 8], можно рассмотреть нелинейные системы с сильно эллиптическим в смысле Вишика оператором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. „ДАН СССР“, т. 156, 1964, № 5.
2. Хилле Е., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.
3. Красносельский И. А., Соболевский П. Е. „ДАН СССР“, т. 129, 1959, № 3.
4. Соболевский П. Е. Тр. Московского матем. об-ва, т. 10, 1931.
5. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений ИЛ, 1954.
6. Соломяк М. З. УМН, 1960, 15, № 6.
7. Глушко В. П., Крейн С. Г. „ДАН СССР“, т. 122, 1958, № 6.
8. Agmon S., Nirenberg L. Comm. on Pure and appl. Math., 16, № 2 (1933)

Л. Ш. Абдулкаримов, С. Я. Якубов

Банах фэзасында параболик типли квазихэтти дифференциал тэнликлэр үчүн Коши мәсэләсинин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә комплекс Банах фэзасында [1] Коши мәсэләси верилмишдир. Исбат олунмушдур ки, $A_0 = A(0, u_0, u_1)$ оператору аналитик жарымгруп ярадырса вә $A(t, A_0^{-\alpha} u_1, A_0^{-\alpha} u_2) A_0^{-1} f(t, A_0^{-\alpha} u_1, A_0^{-\alpha} u_2)$ операторлары t дәјишәнинә көрә һелдәр шәргини, u_1, u_2 дәјишәнләринә көрә исә Липшиц шәртини өдәирсә (1) мәсэләсинин јеканә һәлли вардыр. Һәллин варлығы һәм „кичик“, һәм дә „бөјүк“ парчада $[(0, t)]$ исбат олунур.

Алынған нәтичәләрдән истифадә едәрәк (12) — (13) гарышыг мәсәләси тәдгиги едилмишдир.

М. А. АЗИМОВ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ СОСТАВНОЙ СРЕДЫ

Задача 1. Найти $u(x)$ при $(x_2 > 0)$ и $(x_2 < 0)$ так, чтобы удовлетворялись условия:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u(x) = f(x), \quad (1)$$

$$u|_{x_3=+0} = u|_{x_3=-0}, \quad (2)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0}, \quad (3)$$

и, такие, чтобы, когда $x_3 \rightarrow \infty$, решение задачи стремилось бы к нулю. Эту задачу будем решать по методу Фурье.

Введем обозначения: $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2)$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$;

$$\bar{u}(\alpha', x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\alpha', x')} \tilde{u}(x) dx_1 dx_2, \quad (4)$$

тогда

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x', x')} \bar{u}(\alpha', x_3) d\alpha'. \quad (5)$$

Из (1) и (5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha' e^{i(\alpha', x')} \left[(i\alpha_1)^2 \bar{n} + (i\alpha_2)^2 \bar{u} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_3^2} \right] = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\alpha', x')} \tilde{f}(\alpha', x_3) d\alpha' \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx_3^2} - |\alpha'|^2 \bar{u} = \tilde{f}(\alpha', x_3). \quad (7)$$

Уравнение (7) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Общими решениями соответствующего однородного уравнения будут

$$\tilde{v} = C_1 e^{|\alpha'|x_3} + C_2 e^{-|\alpha'|x_3}, \quad (8)$$

а частное решение выражается через

$$\tilde{w} = \int_{-\infty}^{x_3} \frac{e^{|\alpha'|x_3 - y_3} - e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3,$$

тогда общим решением (7), стремящимся к нулю при $x_3 \rightarrow \pm \infty$, будет:

$$u = C_2 e^{-|\alpha'|x_3} + \int_{+\infty}^{x_3} \frac{e^{|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \int_0^{x_3} \frac{e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 > 0), \quad (9)$$

$$\bar{u} = C_1 e^{|\alpha'|x_3} + \int_0^{x_3} \frac{e^{\alpha'(x_3 - y_3)}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \int_{-\infty}^{x_3} \frac{e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 < 0); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} = -|\alpha'| C_2 e^{-|\alpha'|x_3} + \int_{+\infty}^{x_3} \frac{e^{|\alpha'|x_3 - y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 + \int_0^{x_3} \frac{e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 > 0), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} = |\alpha'| C_1 e^{|\alpha'|x_3} + \int_0^{x_3} \frac{e^{\alpha'(x_3 - y_3)}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 + \int_{-\infty}^{x_3} \frac{e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 < 0). \quad (12)$$

Из условий (2) и (3) имеем:

$$\bar{u}|_{x_3=+0} = C_2 + \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-|\alpha'|y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3; \quad (13)$$

$$\bar{u}|_{x_3=-0} = C_1 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{|\alpha'|y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3; \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right|_{x_3=+0} = -|\alpha'| C_2 + \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-|\alpha'|y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3; \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_3} \right|_{x_3=-0} = |\alpha'| C_1 + \int_{-\infty}^0 \frac{e^{|\alpha'|y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3. \quad (16)$$

Из (2), (13) и (14) получим:

$$C_2 - \int_0^{\infty} \frac{e^{-|\alpha'|y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 = C_1 - \int_{-\infty}^0 \frac{e^{|\alpha'|y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3, \quad (17)$$

а из (3), (15), и (16) находим

$$-|\alpha'| C_2 \sigma_1 + \sigma_1 \int_{+\infty}^0 \frac{e^{-|\alpha'|y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 = \sigma_2 |\alpha'| C_1 + \sigma_2 \int_{-\infty}^0 \frac{e^{|\alpha'|y_3}}{2} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3. \quad (18)$$

Решая равенства (17) и (18) совместно, получим:

$$C_1 = -\frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_0^{\infty} e^{-|\alpha'|y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_{-\infty}^0 e^{|\alpha'|y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3;$$

$$C_2 = -\frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_{-\infty}^0 e^{|\alpha'|y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_0^{\infty} e^{-|\alpha'|y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3,$$

тогда

$$\bar{u} = -\frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_{-\infty}^0 e^{|\alpha'|x_3 - y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2) |\alpha'|} \int_0^{\infty} e^{-|\alpha'|x_3 - y_3} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 +$$

$$+ \int_{+\infty}^{x_3} \frac{e^{|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \int_0^{x_3} \frac{e^{-|\alpha'|x_3 - y_3}}{2|\alpha'|} \tilde{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 > 0) \quad (19)$$

или

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint d\alpha' e^{i(\alpha', x')} \bar{u}(\alpha', x) =$$

$$= -\frac{\sigma_2}{(2\pi^2)(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_{-\infty}^0 f(y) dy_3 \iint \frac{e^{i(\alpha', x') - |\alpha'|x_3 - y_3 - i(\alpha', y')}}{|\alpha'|} d\alpha' +$$

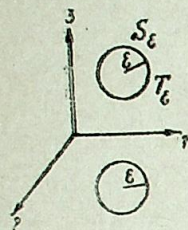
$$+ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2)(2\pi)^2} \iint dy' \int_0^{\infty} f(y) dy_3 \iint \frac{1}{|\alpha'|} e^{i(\alpha', x) - |\alpha'|x_3 - y_3 - i(\alpha', y')} d\alpha' -$$

$$-\frac{1}{2(2\pi)^2} \iint_{\infty} dy' \int_{x_1}^{+\infty} f(y) dy_3 \iint_{\infty} \frac{1}{|a'|} e^{i(a', x') + |a'| (x_3 - y_3) - i(a', y)} da' -$$

$$-\frac{1}{2(2\pi)^2} \iint_{\infty} dy' \int_0^{x_1} f(y) dy_3 \iint_{\infty} \frac{1}{|a'|} e^{i(a', x') - |a'| (x_3 - y_3) - i(a', y)} da' \quad (x_3 > 0). \quad (20)$$

Для того, чтобы вычислить интегралы по x_1 и x_2 , рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \iint_{(z_3 > 0)} \frac{1}{|a'|} e^{i(z', a') - |a'| z_3} da'.$$



Для вычисления этого интеграла перейдем к полярным координатам, беря за полярную ось вектор z' (рис. 1). Тогда имеем:

$$da' = \rho d\rho d\theta, \quad |a'| = \rho, \quad (z', a') = \rho |z'| \cos \theta.$$

Следовательно,

$$\Phi(z) = \iint_{(z_3 > 0)} \frac{1}{|a'|} e^{i(z', a') - |a'| z_3} da' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{1}{\rho} e^{i|z'| \rho \cos \theta - \rho z_3} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\rho(z_3 - i|z'| \cos \theta)} d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \left. \frac{e^{-(z_3 - i|z'| \cos \theta) \rho}}{-(z_3 - i|z'| \cos \theta)} \right|_{\rho=0}^{\rho=\infty} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{z_3 - i|z'| \cos \theta} d\theta.$$

Чтобы раскрыть последний интеграл, введем замену:

$$e^{i\theta} = \zeta, \quad d\zeta = ie^{i\theta} d\theta; \quad d\theta = \frac{d\zeta}{i\zeta}; \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\zeta + \frac{1}{\zeta}}{2},$$

тогда

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z_3 - i|z'| \cos \theta} = \frac{2}{i} \int_C \frac{d\zeta}{2z_3 \zeta - i|z'| (\zeta^2 + 1)},$$

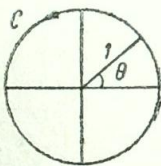


Рис. 2

где C — положительно ориентированная единичная окружность. Для вычисления этого интеграла применим методы вычета (рис. 2). Для этого рассмотрим:

$$2z_3 \zeta - i|z'| (\zeta^2 + 1) = 0 \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{z_3 \pm \sqrt{z_3^2 + |z'|^2}}{i|z'|};$$

$$\zeta_1 = \frac{z_3 - \sqrt{z_3^2 + |z'|^2}}{i|z'|} = \frac{|z'|}{i(z_3 + \sqrt{z_3^2 + |z'|^2})};$$

значит $|\zeta_1| < 1$, второй корень лежит вне окружности C . Окончатель-

$$\Phi(z) = \frac{2}{i} \int_C \frac{d\zeta}{2z_3 \zeta - i|z'| (\zeta^2 + 1)} = \frac{2}{i} 2\pi i \frac{1}{2z_3 - 2i|z'| \zeta_1} =$$

$$= \frac{2\pi}{z_3 - i|z'| \zeta_1} = \frac{2\pi}{z_3 - i|z'| \frac{z_3 - \sqrt{z_3^2 + |z'|^2}}{i|z'|}} = \frac{2\pi}{|z'|},$$

где $z = (z', z_3) = (z_1, z_2, z_3)$.

Таким образом, учитывая выражение $\Phi(z)$, формула (20) примет вид:

$$u(x) = -\frac{\sigma_2}{(2\pi)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{\infty} dy' \int_{-\infty}^0 f(y) \Phi(x' - y', x_3 - y_3) dy_3 +$$

$$+ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(2\pi)^2 (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{\infty} dy' \int_0^{\infty} f(y) \Phi(x' - y', x_3 + y_3) dy_3 -$$

$$- \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint_{\infty} dy' \int_{x_1}^{\infty} f(y) \Phi(x' - y', -x_3 + y_3) dy_3 -$$

$$- \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint_{\infty} dy' \int_0^{x_1} f(y) \Phi(x' - y', x_3 - y_3) dy_3 \quad (x_3 > 0)$$

или

$$u(x) = -\frac{\sigma_2}{2\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{\infty} dy' \int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 +$$

$$+ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{\infty} dy' \int_0^{\infty} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_{\infty} dy' \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 - \frac{1}{4\pi} \iint_{\infty} dy' \int_0^{x_1} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 \quad (x_3 > 0). \quad (21)$$

Положим

$$\iint_{\infty} dy' \int_0^{\infty} dy_3 = \iint_{y_3=0}^{\infty} dy; \quad \iint_{\infty} dy' \int_{-\infty}^0 dy_3 = \iint_{y_3=0}^{\infty} dy; \quad \bar{y} = (y_1, y_2, -y_3) \quad (22)$$

(точка, симметричная с y относительно плоскости $y_3 = 0$).

Принимая во внимание (22), имеем

$$u(x) = -\frac{\sigma_2}{2\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{y_3=0}^{\infty} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy +$$

$$+ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \iint_{y_3=0}^{\infty} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_{y_3 < 0}^{\infty} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy \quad (x_3 > 0). \quad (23)$$

Аналогичным образом вычисляется $u(x)$ ($x_3 < 0$).
Действительно:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) = & -\frac{\sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_2)|\alpha'|} \int_0^\infty e^{-|\alpha'| (y_3 - x_3)} \bar{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \\ & -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2)|\alpha'|} \int_{-\infty}^0 e^{|\alpha'| (x_3 - y_3)} \bar{f}(\alpha', y_3) dy_3 + \\ & + \int_0^{x_3} \frac{1}{2|\alpha'|} e^{|\alpha'| (x_3 - y_3)} \bar{f}(\alpha', y_3) dy_3 - \\ & - \int_{-\infty}^{x_3} \frac{1}{2|\alpha'|} e^{-|\alpha'| (x_3 - y_3)} \bar{f}(\alpha', y_3) dy_3 \quad (x_3 < 0); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{1}{2(\pi')^2} \iint e^{i(\alpha', x')} \bar{u}(\alpha', x_3) d\alpha' = - \\ & -\frac{\sigma_1}{(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_0^\infty f(y) dy_3 \iint \frac{1}{|\alpha'|} e^{i(\alpha', x') - |\alpha'| (y_3 - x_3) - i(\alpha', y')} d\alpha' - \\ & -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_{-\infty}^0 f(y) dy_3 \iint \frac{1}{|\alpha'|} e^{i(\alpha', x') + |\alpha'| (x_3 + y_3) - i(\alpha', y')} d\alpha' + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dy' \int_0^{x_3} f(y) dy_3 \iint \frac{1}{2|\alpha'|} e^{i(\alpha', x') + (x_3 - y_3)|\alpha'| - i(\alpha', y')} d\alpha' - \\ & - \frac{1}{(2\pi)^2} \iint dy' \int_{-\infty}^{x_3} f(y) dy_3 \iint \frac{1}{2|\alpha'|} e^{i(\alpha', x') - |\alpha'| (x_3 - y_3) - i(\alpha', y')} d\alpha' \quad (x_3 < 0) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{\sigma_1}{(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_0^\infty f(y) dy_3 \Phi(x' - y', y_3 - x_3) - \\ & -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_{-\infty}^0 \Phi(x' - y', x_3 + y_3) f(y) dy_3 + \\ & + \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint dy' \int_0^{x_3} \Phi(x' - y, x_3 - y_3) f(y) dy_3 - \\ & - \frac{1}{2(2\pi)^2} \iint dy' \int_{-\infty}^{x_3} \Phi(x' - y', x_3 - y_3) f(y) dy_3 \quad (x_3 < 0). \end{aligned}$$

либо:

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{\sigma_1}{(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_0^\infty \frac{2\pi}{|x - y|} f(y) dy_3 - \\ & -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(2\pi)^2(\sigma_1 + \sigma_2)} \iint dy' \int_{-\infty}^0 \frac{2\pi}{|x - y|} f(y) dy_3 + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint dy' \int_0^{x_3} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint dy' \int_{-\infty}^{x_3} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy_3 \quad (x_3 < 0). \end{aligned} \quad (25^*)$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} u(x) = & -\frac{\sigma_1}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \iiint \frac{1}{|x - y|} f(y) dy - \\ & -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \iiint \frac{1}{|x - y|} f(y) dy - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{1}{|x - y|} f(y) dy \quad (x_3 < 0). \end{aligned} \quad (25)$$

Или, вводя обозначение

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & (x_3 > 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_1}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} & (x_3 < 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_2}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} & (x_3 > 0, y_3 < 0), \\ -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} & x_3 < 0, y_3 < 0, \end{cases}$$

формулы (23) и (25) можно писать в виде $u(x) = \int_{-\infty}^\infty \theta(x, y) f(y) dy$.

Задача 2. Рассмотрим задачу Дирихле для составной в полу-пространстве. Найти u , удовлетворяющее условиям:

$$\Delta u = f(x) \quad (x_2 > 0), \quad (1)$$

$$u|_{x_2=+0} = u|_{x_2=-0} \quad (x_2 > 0), \quad (2)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \quad (x_2 > 0), \quad (3)$$

$$u|_{x_2=0} = \varphi(x_1, x_3). \quad (4)$$

Для решения этой задачи используем решение первой задачи и построим функцию Грина для рассматриваемой составной среды. Для этого положим:

$$G(x, y) = \theta(x, y) - H(x, y).$$

Необходимо, чтобы функция $H(x, y)$, рассматриваемая как функция x_1 (при постоянном y), обладала следующими свойствами: а) чтобы $H(x, y)$ не имела особенностей; в) $\Delta H = 0$;

$$\text{с) } H = \theta \Big|_{x_3=0} \quad \text{д) } H \Big|_{x_3=+0} = H \Big|_{x_3=-0}; \quad \sigma_1 \frac{\partial H}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} = \sigma_2 \frac{\partial H}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \quad (5)$$

Из условия (с) и выражения θ находим:

$$H \Big|_{x_3=0} = \begin{cases} \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \right] \Big|_{x_2=0} & (x_3 > 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_1}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} \Big|_{x_2=0} & (x_3 < 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_2}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} \Big|_{x_2=0} & (x_3 > 0, y_3 < 0), \\ \left[-\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \right] \Big|_{x_2=0} & (x_3 < 0, y_3 < 0). \end{cases}$$

По условию H не имеет особенностей при $x_2 > 0$ (в то время как $\theta(x, y)$ имеет особенности при $x = y$). Для того, чтобы освободиться от особенностей и не меняя граничных значений найти H , воспользуемся методом отражения. Для этой цели положим

$$\tilde{y} = (y_1, y_2, -y_3); \quad \bar{y} = (y_1, -y_2, y_3); \quad \bar{\bar{y}} = (y_1, -y_2, -y_3).$$

Легко проверить, что: $\bar{y} = \bar{\bar{y}}$.

Таким образом,

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - \bar{y}|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \bar{\bar{y}}|} & (x_3 > 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_1}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - \bar{y}|} & (x_3 < 0, y_3 > 0), \\ -\frac{\sigma_2}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - \bar{y}|} & (x_3 > 0, y_3 < 0), \\ -\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{1}{|x - \bar{\bar{y}}|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \bar{y}|} & (x_3 < 0, y_3 < 0). \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда видно, что $\dot{H}(x, y) = \theta(x, \bar{y})$.

Так как $\theta(x, y)$ удовлетворяет условию (д) при всяких y , то $H(x, y) = \theta(x, \bar{y})$ также удовлетворяет этому условию. Итак,

$$G(x, y) = \theta(x, y) - \theta(x, \bar{y}). \quad (7)$$

Чтобы получить формулу для u , применим формулу Грина к функциям u и $G(x, y)$ для областей T_+ ($x_2 > 0, x_3 > 0$) и T_- ($x_2 > 0, x_3 < 0$) в отдельности. Части границ T_+ и T_- будем обозначать:

$$S_+ (x_2 = 0, x_3 > 0); \quad S_- (x_2 = 0, x_3 < 0); \quad S (x_2 > 0, x_3 = 0).$$

Обозначим также сферу с центром y и радиусом ε через S_ε . При этом будем рассматривать отдельно случаи $y_3 > 0$ и $y_3 < 0$.

Рассмотрим первый случай: $y_3 > 0$ (рис. 3). Для этого напомним вторую формулу Грина:

$$\begin{aligned} \iint_{T_+/T_-} [u(x) \Delta G(x, y) - G(x, y) \Delta u(x)] dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \iint_{S_- S_+} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \\ + \iint_{S_\varepsilon} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $\Delta G(x, y) = 0$ и $\Delta u(x) = f(x)$,

$$\begin{aligned} \text{имеем } \iint_{T_+/T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \\ = \iint_{S_- S_+} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \\ + \iint_{S_\varepsilon} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S. \end{aligned} \quad (9)$$

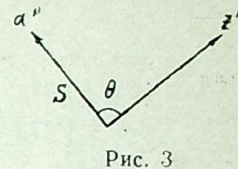


Рис. 3

Вычислим в отдельности:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} u(x) \frac{d\theta(x, y)}{dn_x} d_x S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{S_\varepsilon} [u(x) - u(y)] \frac{d\theta(x, y)}{dn_x} d_x S + \right. \\ \left. + \iint_{S_\varepsilon} u(y) \frac{d\theta}{dn_x} d_x S \right\} = u(y) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \frac{d\theta}{dn_x} d_x S, \\ \text{так как } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \frac{d\theta}{dn_x} d_x S = 1; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} u \frac{dH}{dn_x} d_x S \rightarrow 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} G(x, y) \frac{du}{dn_x} d_x S \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $G(x, y)$ имеет особенности при $x = y$, то $G(x, y) = 0$ при $x_2 = 0$.

Учитывая все изложенное выше и переходя к пределу (9), получим

$$\begin{aligned} - \iint_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - \right. \\ \left. - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \iint_{S_+} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - \right. \\ \left. - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + u(y) \quad (y_3 > 0) \end{aligned} \quad (10^*)$$

$$\text{или} \quad - \int \int \int_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_S \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \int \int_S u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} d_x S + u(y) (y_3 > 0). \quad (10)$$

Точно так же получим

$$- \int \int \int_{T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{S \cup \bar{S}} \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} - \int \int \int_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \int \int_{S_+} \varphi(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} d_x S + u(y), \quad (12) \\ - \int \int \int_{T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S \left[u(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} - G(x, y) \frac{du(x)}{dn_x} \right] d_x S + \int \int_{S_-} \varphi(x) \frac{dG(x, y)}{dn_x} d_x S. \quad (13) \end{aligned}$$

Учитывая, что производные по нормали в данном случае выражаются через производные по x_1, x_2 и x_3 и умножая (12) на σ_1 и (13) на σ_2 , складывая и учитывая условие (3), получим

$$\begin{aligned} - \left(\sigma_1 \int \int \int_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 + \sigma_2 \int \int \int_{T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 \right) &= \\ = \sigma_1 u(y) - \left(\sigma_1 \int \int_{S_+} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S + \sigma_2 \int \int_{S_-} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S \right) &\quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или} \quad u(y) &= \int \int_{S_+} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \int \int_{S_-} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S - \\ &\quad - \int \int \int_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 - \\ &\quad - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \int \int \int_{T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (y_3 > 0) \quad (15) \end{aligned}$$

Точно так же получим

$$u(y) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int \int_{S_+} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S + \int \int_{S_-} \varphi(x) \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} d_x S -$$

$$\begin{aligned} - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int \int \int_{T_+} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 - \\ - \int \int \int_{T_-} G(x, y) f(x) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (y_3 < 0). \quad (16) \end{aligned}$$

Легко проверить по формулам $G(x, y) = \theta(x, \bar{y}) - \theta(x, \check{y})$ и формулам (7) на основании выражения θ , что эти две формулы можно заменить одной:

$$u(y) = \int \int_S \frac{\partial G(x, y)}{\partial x_2} \varphi(x) d_x S - \int \int_{x_3=0} G(y, x) f(x) dx, \quad (17)$$

где $G(y, x) = \theta(y, x) - \theta(y, \check{x})$.

Подобным же путем можно получить явные формулы для задачи Дирихле составного двугранного угла для составной среды с разными характеристиками: σ_1 (при $x_3 > 0$) и σ_2 (при $x_3 < 0$), ограниченными двумя плоскостями, перпендикулярными к плоскости $x_3 = 0$ и образующими двугранный угол вида $\frac{\pi}{n}$. Эти задачи решаются методом

отражения. Методом инверсии из формулы (17) можно получить явную формулу, решение задачи Дирихле для составного шара $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$, разделяющегося на две разнородные среды плоскостью $x_3 = 0$. В качестве примера приведем выражение функции Грина задачи Дирихле для прямого двугранного угла, образованного плоскостями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ и разделенного на две разные среды плоскостью $x_3 = 0$. Если обозначать для всякой точки

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3); \quad \check{x} = (x_1, -x_2, x_3); \quad \ddot{x} = (-x_1, x_2, x_3); \\ \bar{\bar{x}} &= (-x_1, -x_2, x_3), \end{aligned}$$

то

$$G(x, y) = \theta(x, y) - \theta(x, \check{y}) - \theta(x, \ddot{y}) + \theta(x, \bar{\bar{y}}).$$

М. Э. Эзимов

Мүрәккәб мүнһит үчүн фәзада Лаплас тәнлијинә аид бә'зи мәсәләләр

Мүрәккәб мүнһит үчүн фәзада ашағыдакы мәсәләләр һәлл едил-мишдир:

$$1. \Delta u(x) = f(x) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u \Big|_{x_3=+0} &= u \Big|_{x_3=-0} \quad (2) \\ \sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} &= \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \end{aligned}$$

шәртләрини өдәјән елә $u(x)$ ($x_2 > 0$) вә $u(x)$ ($x_2 < 0$) һәлләри ахтарылыр ки, $x_3 \rightarrow \infty$ јахынлашдыгда һәмин һәлләр дә сыфра јахынлашсын.

$$\begin{aligned}
2. \Delta u(x) &= f(x) \quad (x_2 > 0) & (1) \\
u \Big|_{x_3=+0} &= u \Big|_{x_3=-0} \quad (x_2 > 0) & (2) \\
\sigma_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=+0} &= \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} \Big|_{x_3=-0} \quad (x_2 > 0) & (3) \\
u(x) \Big|_{x_2=0} &= \varphi(x_1, x_3)
\end{aligned}$$

Мәгаләдә еңи заманда, јухарыдакы шәртләри өдәјән мүрәккәб јарымфәзада Дирихле мәсәләсинин һәлли верилмишдир.

Г. М. ДЖАФАРЛИ

СИСТЕМЫ СХОДИМОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ОРТОНОРМИРОВАННЫМИ СИСТЕМАМИ ФУНКЦИЙ

В теории ортогональных систем известны так называемые системы функций А. Хаара, являющиеся системой сходимости [1], которая связана с системой Уолша (функции Хаара являются линейными комбинациями функций Уолша). В работах [2, 3, 4] рассмотрен один класс мультипликативных ортогональных систем функций, напоминающих систему Уолша.

В настоящей работе рассматривались система сходимости, связанные с указанными мультипликативными системами функций.

Каждой функции $\varphi_n(x)$ (определение $\varphi_n(x)$ см. в [2]) сопоставим $p^n - p^{n-1}$ функций, обозначаемых $x_{n\kappa, \gamma}(x)$, где $0 \leq \kappa \leq p^{n-1} - 1$, $1 \leq \gamma \leq p - 1$. Эти функции определяются следующим образом: положим $x_{01}(x) = 1$. Далее функция $x_{n\kappa, \gamma}(x)$ отлична от нуля лишь на отрезке вида $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}} \right]$ и совпадает на этом отрезке с функцией $\sqrt[p^{n-1}]{\varphi_n(x)} \cdot \left[\varphi_n(x) \right]^\gamma$.

Докажем, что эта система функций ортогональна, нормирована, полна и является системой сходимости.

1. **Ортогональность.** Пусть $n > m$, тогда функция $x_{mj, s}(x)$ постоянна на отрезке $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}} \right]$, на котором отлична от нуля функция $x_{n\kappa, \gamma}(x)$.

Поэтому

$$\int_0^1 x_{n\kappa, \gamma}(x) \overline{x_{mj, s}(x)} dx = C \cdot \int_0^1 \left[\varphi_n(x) \right]^\gamma dx.$$

Разобьем отрезок $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}} \right]$ на отрезки вида $\left[\frac{\kappa p + l}{p^n}, \frac{\kappa p + l + 1}{p^n} \right]$, где $0 \leq l \leq p - 1$. На этих отрезках функция $\varphi(x)$ принимает значение $C_1 \cdot e^{\frac{2\pi i l}{p}}$, где C_1 не зависит от l . Поэтому

$$\int_0^1 x_{n\kappa, \gamma}(x) \overline{x_{mj, s}(x)} dx = C \cdot \frac{C_1}{p^n} \sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i l \gamma}{p}} = 0.$$

Пусть теперь $n = m$, но $\kappa \neq j$. В этом случае функции $x_{n\kappa, r}(x)$ и $x_{mj, s}(x)$ отличны от нуля на не пересекающихся отрезках $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}}\right]$ и $\left[\frac{j}{p^{n-1}}, \frac{j+1}{p^{n-1}}\right]$, а потому

$$\int_0^1 x_{n\kappa, r}(x) \cdot \overline{x_{mj, s}(x)} dx = 0.$$

Наконец, пусть $n = m$, $\kappa = j$, $r \neq s$. Тогда

$$\int_0^1 x_{n\kappa, r}(x) \overline{x_{mj, s}(x)} dx = p^{n-1} \int_{\frac{\kappa}{p^{n-1}}}^{\frac{\kappa+1}{p^{n-1}}} [\varphi_n(x)]^{r-s} dx,$$

Разбивая отрезок $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}}\right]$ на отрезки вида $\left[\frac{\kappa p + l}{p^n}, \frac{\kappa p + l + 1}{p^n}\right]$ убеждаемся, что этот интеграл равен нулю.

2. Нормированность. Возьмем две функции $x_{n\kappa, r}(x)$ и $x_{mj, s}(x)$ и рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 x_{n\kappa, r}(x) \overline{x_{mj, s}(x)} dx.$$

Если $n = m$, $\kappa = j$, $r = s$, то

$$\int_0^1 x_{n\kappa, r}(x) \overline{x_{mj, s}(x)} dx = p^{n-1} \int_{\frac{\kappa}{p^{n-1}}}^{\frac{\kappa+1}{p^{n-1}}} |\varphi_n(x)|^{2r} dx = 1, \text{ так как } |\varphi_n(x)| = 1.$$

3. Полнота. Полнота системы вытекает из того, что любая функция системы $\{\psi_n(x)\}$ может быть представлена в виде конечной линейной комбинации функции $x_{n\kappa, r}(x)$. В самом деле,

$$[\varphi_n(x)]^r = \frac{1}{\sqrt{p^{n-1}}} \sum_{\kappa=0}^{p^{n-1}-1} x_{n\kappa, r}(x).$$

Так как

$$\psi_q(x) = \varphi_1^{a_0}(x) \varphi_2^{a_1}(x) \dots \varphi_n^{a_{n-1}}(x),$$

то

$$\psi_q(x) = \frac{1}{\sqrt{p^{n-1}}} \sum_{\kappa=0}^{p^{n-1}-1} C_n x_{n\kappa, a_{n-1}},$$

где C — значение функции $\varphi_1^{a_0}(x) \varphi_2^{a_1}(x) \dots \varphi_{n-1}^{a_{n-2}}(x)$ на отрезках вида $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}}\right]$

Так как система $\{\psi_n(x)\}$ полна, то полна и система $x_{n\kappa, r}(x)$.

4. Докажем теперь, что построенная система функций является сис-

темой сходимости. Для этого составим ядро Дирихле этой системы, которое имеет вид

$$K_{n\kappa, r}(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^{m-1}-1} \sum_{s=1}^{p-1} x_{mj, s}(x) \overline{x_{mj, s}(t)} + \sum_{j=0}^{\kappa-1} \sum_{s=1}^{p-1} x_{nj, s}(x) \cdot \overline{x_{nj, s}(t)} + \sum_{s=1}^r x_{n\kappa, s}(x) \overline{x_{n\kappa, s}(t)}. \quad (1)$$

Докажем, что это ядро квазиположительно, т. е. что оно обладает следующими свойствами:

1) $\int_0^1 |K_{n\kappa, r}(x, t)| dt < C$, где постоянная C не зависит ни от x , ни от n , κ и r ;

$$2) \int_0^1 |K_{n\kappa, r}(x, t)| dt = 1;$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|x-t| \geq \delta} |K_{n\kappa, r}(x, t)| = 0$$

для любого сколь угодно малого, но фиксированного $\delta > 0$.

Доказательство. Свойство 2 непосредственно вытекает из ортогональности системы функций $\{x_{n\kappa, r}(t)\}$, так как интегралы всех членов суммы (1) равны нулю, кроме интеграла от первого члена, который равен единице.

Чтобы доказать свойства 1) и 3), вычислим значения $K_{n\kappa, r}(x, t)$. Рассмотрим сначала сумму

$$\sum_{s=1}^{p-1} x_{mj, s}(x) \overline{x_{mj, s}(t)}.$$

Из определения функций $x_{mj, s}(x)$ вытекает, что эта сумма отлична от нуля лишь в том случае, если $\frac{j}{p^{m-1}} \leq x, t \leq \frac{j+1}{p^{m-1}}$. При этом, если

$$\frac{jp+l}{p^m} \leq x \leq \frac{jp+l+1}{p^m} \text{ и } \frac{jp+q}{p^m} \leq t \leq \frac{jp+q+1}{p^m}, \text{ то } \sum_{s=1}^{p-1} x_{mj, s}(x) \times$$

$$\times \overline{x_{mj, s}(t)} = p^{m-1} \sum_{s=1}^{p-1} \varphi_m^s(x) \overline{\varphi_m^s(t)} = p^{m-1} \sum_{s=1}^{p-1} e^{\frac{r \pi i (l-q)s}{p}}.$$

Эта сумма равна $p^{m-1}(p-1)$, если $l = q$, и $-p^{m-1}$, если $l \neq q$.

Отсюда вытекает, что сумма

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^{m-1}-1} \sum_{s=1}^{p-1} x_{mj, s}(x) \overline{x_{mj, s}(t)} = 0, \text{ если точки } x \text{ и } t \text{ не лежат}$$

на одном отрезке вида $\left[\frac{j}{p^{n-1}}, \frac{j+1}{p^{n-1}}\right]$. Если же точки x и t лежат

на одном отрезке вида $\left[\frac{t}{p^{n-1}}, \frac{j+1}{p^{n-1}}\right]$, то сумма

$$1 + \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{p^{m-1}-1} \sum_{s=1}^{p-1} x_{mj, s}(x) \overline{x_{mj, s}(t)} = [1 + (p-1) + p(p-1) + \dots + p^{n-2}(p-1)] = p^{n-1}.$$

Аналогично вычисляются остальные слагаемые в сумме (1):

$$\sum_{j=0}^{\kappa-1} \sum_{s=1}^{p-1} x_{nj,s}(x) \overline{x_{nj,s}(t)} = 0, \quad (2)$$

если точки x и t не лежат на одном отрезке вида $\left[\frac{j}{p^{n-1}}, \frac{j+1}{p^{n-1}} \right]$, где $j \leq \kappa-1$. Если же точки x и t лежат на таком отрезке, причем

$$\frac{jp+l}{p^n} \leq x \leq \frac{jp+l+1}{p^n} \text{ и } \frac{jp+q}{p^n} \leq t \leq \frac{jp+q+1}{p^n},$$

то сумма (2) равна $p^{n-1}(p-1)$, если $l=q$, и $-p^{n-1}$, если $l \neq q$.

Наконец, $\sum_{s=1}^r x_{\kappa\kappa,s}(x) \overline{x_{\kappa\kappa,s}(t)} = 0$, если точки x и t не лежат на отрезке $\left[\frac{\kappa}{p^{n-1}}, \frac{\kappa+1}{p^{n-1}} \right]$. А если они лежат на указанном отрезке, то эта сумма не превосходит p^n .

Итак, мы доказали, что ядро $K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)$ отлично от нуля лишь в случае, если точки x и t лежат на одном отрезке вида

$$\left[\frac{t}{p^{n-1}}, \frac{j+1}{p^{n-1}} \right].$$

При этом, если $j > \kappa$, то ядро $K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t) = p^{n-1}$. Если же $j < \kappa$, то при $\frac{jp+l}{p^n} \leq x \leq \frac{jp+l+1}{p^n}$ и $\frac{jp+l}{p^n} \leq t \leq \frac{jp+l+1}{p^n}$

$$K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t) = \begin{cases} p^n, & \text{если } l = q, \\ 0, & \text{если } l \neq q. \end{cases}$$

Наконец, если $j = \kappa$, то $|K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)| < 2p^n$.

Мы можем теперь доказать свойства 1) и 3) ядра $K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)$:

$$\int_0^1 |K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)| dt = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\frac{j}{p^{n-1}}}^{\frac{j+1}{p^{n-1}}} |K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)| dt \leq 2p^n \cdot \frac{1}{p^{n-1}} \cdot 2p.$$

Первое свойство доказано.

Таким образом, $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|x-t| > \delta} |K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)| = 0$ вытекает из того, что ядро $K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t) = 0$, если $|x-t| > \frac{1}{p^{n-1}}$. Тем самым доказано, что ядро $K_{\kappa\kappa,\gamma}(x, t)$ квазиположительно. Следовательно, система $x_{\kappa\kappa,\gamma}(x)$ является системой сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
2. Джафарли Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук" 1961, № 6.
3. Джафарли Г. М. Уч. зап. МГЗПИ, вып. 8, 1962.
4. Джафарли Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук", 1962, № 4.

Г. М. Чәфәрли

Мультипликатив ортонормал функцијалар системи илэ элагәдар јығылма системләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мүүллиф тәрәфиндән әввәлләрдә өјрәнилмиш мультипликатив ортогонал функцијалар системи илэ элагәдар олараг, ортонормал јығылма системләри верилмишдир. Онларын ортонормаллығы, тамлығы вә јығылма системләри олмасы факты исбат едилмишдир.

Ш. М. КАФАРОВ

О НЕКОТОРЫХ СВЯЗЯХ МЕЖДУ ПОВЕДЕНИЕМ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ И СТРУКТУРНЫМИ СВОЙСТВАМИ ФУНКЦИЙ

В своей работе [1] Р. Таберский исследовал зависимость между порядком стремления к нулю коэффициентов Фурье—Бесселя и структурными свойствами данной функции. В настоящей статье приводится результат, который обобщает соответствующие результаты Р. Таберского. Предварительно отметим следующие известные сведения.

Пусть $J_\nu(t)$ —Бесселева функция порядка $\nu > -1$ с положительными нулями.

$$j_1 < j_2 < \dots, \text{ и пусть } t > 0, \varphi_\nu(t) = \sqrt{t} J_\nu(t), \\ \varphi_\nu(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_\nu(t).$$

На основании определения и асимптотической формулы для функции $J_\nu(x)$ существует такая функция $\lambda_\nu(x)$, определенная в $[a, \infty)$, что

$$\varphi_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{\pi}{4}\right) + \psi_\nu(x) \text{ для } x > 0, \quad (1)$$

где

$$\psi_\nu(x) = \begin{cases} x^{\nu+\frac{1}{2}} \lambda_\nu(x) - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{\pi}{4}\right), & \text{если } 0 < x \leq 1; \\ x^{-1} \lambda_\nu(x), & \text{если } x > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, существует асимптотическая формула для корней функции $J_\nu(t)$, которая имеет вид

$$jm = \left(m + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right) \pi + o(m^{-1}). \quad (3)$$

Теперь предположим, что $t^{\nu+\frac{1}{2}} f(t)$ есть функция из класса $L[0,1]$ и напомним

$$d_m^{(\nu)} = d_m^{(\nu)}(j) = 2 \varphi_{\nu+1}^{-2}(j_m) \int_0^1 j(t) \varphi_\nu(j_m t) dt,$$

тогда

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(\nu)} \varphi_\nu(j_m x)$$

называется рядом Фурье—Бесселя для функции f (относительно системы $\{\varphi_\nu\}$, а $d_m^{(\nu)}$ —коэффициентами Фурье—Бесселя этой функции. Докажем следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $j(x)$ —непрерывная в $[0,1]$ функция. Тогда при любой фиксированной $\nu > -1$

$$d_m^{(\nu)}(j) = O\left[\omega\left(f; \frac{1}{m}\right)\right] + O\left(\frac{\ln m}{m}\right).$$

Доказательство. Допустим сначала, что $f(0) = f(1) = 0$.

$$\text{Оценим } \int_0^1 f(t) \varphi_\nu(j_m t) dt.$$

Взяв $j_m > 1$ и учитывая (1), получим

$$\int_0^1 f(t) \varphi_\nu(j_m t) dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 f(t) \sin\left(j_m t - \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{1}{4}\pi\right) dt + \\ + \int_0^1 f(t) \psi_\nu(j_m t) dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} I_m + \int_0^1 f(t) \psi_\nu(j_m t) dt. \quad (4)$$

Из (2)

$$\int_0^1 f(t) \psi_\nu(j_m t) dt = \int_0^{1/j_m} f(t) \psi_\nu(j_m t) dt + \int_{1/j_m}^1 f(t) \psi_\nu(j_m t) dt = \\ = G\left(\frac{\ln j_m}{j_m}\right) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Оценим теперь I_m :

$$I_m = \int_0^1 f(t) \sin\left(j_m t - \frac{1}{2}\pi\nu + \frac{\pi}{4}\right) dt = \int_0^1 f(t) \sin\left[\left(m + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi t + \left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi\right] dt + 2 \int_0^1 f(t) \sin \frac{1}{2}\left[j_m - \left(m + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi\right] t \cdot \cos \frac{1}{2}\left[j_m t + \left(m + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi t - \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\pi\right] dt = \\ = I_m^{(1)} + I_m^{(2)}. \quad (6)$$

Для оценки $I_m^{(1)}$ построим следующие функции:

$$f_i(t) = f(t) \cdot \psi_i(t) \quad (i = 1, 2) \text{ при } 0 \leq t \leq 1,$$

где

$$\psi_1(t) = \cos\left[\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi t - \left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi\right], \\ \psi_2(t) = \sin\left[\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi t - \left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi\right],$$

а для $-1 \leq t < 0$ полагаем, что

$$f_1(t) = -f(-t), \quad f_2(t) = f(-t).$$

Полученные функции продолжим на всю ось с периодом 2. При этом можно записать

$$I_m^{(1)} = \int_0^1 f_1(t) \sin m \pi t dt + \int_0^1 f_2(t) \cos m \pi t dt = I_m^{(1,1)} + I_m^{(1,2)}. \quad (7)$$

Тогда в силу периодичности $f_1(t)$

$$I_m^{(1,1)} = O \left[\omega \left(f_1; \frac{1}{m} \right) \right]. \quad (8)$$

Аналогичную оценку получаем для $I_m^{(1,2)}$:

$$I_m^{(1,2)} = O \left[\omega \left(f_2; \frac{1}{m} \right) \right]. \quad (9)$$

Но

$$\omega(f; \delta) = O[\omega(f, \gamma)] + O(\delta). \quad (10)$$

Тогда из (8), (9) и (10) получим

$$I_m^{(1)} = O \left[\omega \left(f; \frac{1}{m} \right) \right] + O \left(\frac{1}{m} \right). \quad (11)$$

Оценка $I_m^{(2)}$ получается из (3):

$$I_m^{(2)} = O \left(\frac{1}{m} \right). \quad (12)$$

Из (8), (9) и (12) получаем доказательство теоремы в случае $f(0) = f(1) = 0$.

В общем случае имеем

$$f(t) = g_1(t) + g_2(t),$$

где

$$g_1(t) = t f(1) + (1-t) f(0) \quad (13)$$

и

$$g_2(t) = f(t) - t f(1) - (1-t) f(0).$$

На основании хорошо известной теоремы Шепперда [2]

$$d_m^{(v)}(g_1) = O \left(\frac{1}{m} \right).$$

Как видно из (13), $g_2(0) = g_2(1) = 0$.

Тогда по доказанному случаю

$$d_m^{(v)}(g_2) = O \left[\omega \left(g_2; \frac{1}{m} \right) \right] + O \left(\frac{\ln m}{m} \right),$$

но

$$g_2(t) = f(t) - g_1(t)$$

и поэтому

$$\omega \left(g_2; \frac{1}{m} \right) \leq \omega \left(f; \frac{1}{m} \right) + \omega \left(g_1; \frac{1}{m} \right) = \omega \left(f; \frac{1}{m} \right) + C \frac{1}{m}.$$

Таким образом,

$$d_m^{(v)}(f) = d_m^{(v)}(g_1) + d_m^{(v)}(g_2) = O \left[\omega \left(f; \frac{1}{m} \right) \right] + O \left(\frac{\ln m}{m} \right).$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(v)} \varphi_v(j_m x) \text{ для } a \leq x < 1,$$

и пусть

$$\sum_{m=m}^{\infty} |d_m^{(v)}| = O \left[\varphi \left(\frac{1}{n} \right) \right], \quad (14)$$

где

$\varphi(t) \in \Phi$ и $\varphi(2\delta) \leq C \varphi(\delta)$ для любой $\delta > 0$. Тогда, если $v > -1$, $a > 0$, то

$$\omega(f, \delta)_{[a,1]} \leq C \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \varphi \left(\frac{1}{v} \right) + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{v} \varphi \left(\frac{1}{v} \right) \right\},$$

где $n-1 \leq \frac{1}{\delta} < n$.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n и определим натуральное число p из условия $2^{p-1} \leq n < 2^p$.

Построим последовательность номеров $\{n_i\}$ ($i=0, 1, \dots, p$), положив

$$n_0 = 0, n_i = 2^i \quad (i=1, 2, \dots, p-1), n_p = n.$$

Пусть $0 < a < 1$ и x_1, x_2 — произвольные точки $[a, 1]$, для которых $|x_2 - x_1| < \delta$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} d_m^{(v)} [\varphi_v(j_m x_1) - \varphi_v(j_m x_2)] + \\ &+ \sum_{s=p}^{\infty} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} d_m^{(v)} \varphi_v(j_m x_1) - \sum_{s=p}^{\infty} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} d_m^{(v)} \varphi_v(j_m x_2) = S_p^{(1)} + S_p^{(2)} - S_p^{(3)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим $S_p^{(1)}$. На основании теоремы о среднем числе

$$S_p^{(1)}(x_1 - x_2) \sum_{s=v}^{p-1} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} d_m^{(v)} \cdot j_m \cdot \varphi_v^1(\xi_m), \quad (16)$$

где

$$j_m x_1 < \xi_m < j_m x_2.$$

Пусть $v > -1$, $0 < a \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Так как функция

$$\varphi_v^1(x) = \frac{(2v+1) J_v(x) - 2x J_{v+1}(x)}{2\sqrt{x}}$$

ограничена в $[j_1 a, \infty)$, то из (16) следует

$$\begin{aligned} |S_p^{(1)}| &\leq K_1 \cdot |x_1 - x_2| \cdot \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} |d_m^{(v)}| \cdot j_m \leq C(v) \cdot K_1 \times \\ &\times |x_1 - x_2| \sum_{s=0}^{p-1} \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} |d_m^{(v)}| \cdot m \end{aligned} \quad (17)$$

так как

$$j_m = \left(m + \frac{1}{2} v - \frac{1}{4} \pi \right) + O \left(\frac{1}{m} \right).$$

Из (17) имеем

$$|S_p^{(1)}| \leq C(v) K_1 \cdot |x_1 - x_2| \cdot \sum_{s=0}^{p-1} (2^{s+1} - 1) \sum_{m=2^s}^{2^{s+1}-1} |d_m^{(v)}| \leq$$

$$\leq C(\nu) \cdot K_1 \cdot |x_1 - x_2| \cdot \sum_{s=0}^{p-1} 2^{s+1} \sum_{m=2^s}^{\infty} |a_m^{(1)}| \leq C(\nu) \times \\ \times K_1 |x_1 - x_2| \sum_{s=0}^{p-1} 2^{s+1} \varphi\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)$$

в силу условия (14). Таким образом,

$$|S_p^{(1)}| \leq C(\nu) \cdot K_1 \cdot |x_1 - x_2| \cdot \sum_{s=0}^p 2^s \varphi\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right).$$

Так как $\frac{1}{2^{s-1}+1} < \frac{1}{2^{s-1}}$, то в силу условия

$$\varphi(2\delta) < C \varphi(\delta)$$

теоремы

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right) \leq C_1 \varphi\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right),$$

поэтому

$$|S_p^{(1)}| \leq C_2(\nu) \cdot K_1 \cdot |x_1 - x_2| \cdot \sum_{s=1}^p 2^s \cdot \varphi\left(\frac{1}{2^{s-1}+1}\right) = \\ = C_2(\nu) K_2 |x_1 - x_2| \cdot \sum_{i=1}^p n_i \varphi\left(\frac{1}{n_{i-1}+1}\right). \quad (18)$$

В силу определения последовательности $\{n_i\}$ заметим, что $n_i \leq 4(n_{i-2}+1)$ и $n_i \leq 4(n_{i-1}-n_{i-2})$ $2 \leq i \leq p$,

поэтому, пользуясь еще монотонностью $\varphi(t)$, находим, что для $2 \leq i \leq p$

$$n_i \varphi\left(\frac{1}{n_{i-1}+1}\right) \leq 4(n_{i-1}-n_{i-2}) \cdot \varphi\left(\frac{1}{n_{i-1}+1}\right) \leq 4 \sum_{j=n_{i-2}+1}^{n_{i-1}} \varphi\left(\frac{1}{j}\right). \quad (19)$$

Из (18) и (19) находим

$$|S_p^{(1)}| \leq C \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varphi\left(\frac{1}{j}\right), \quad (20)$$

где C зависит от ν .

Оценим теперь $S_p^{(2)}$:

$$|S_p^{(2)}| \leq \sum_{k=p}^{\infty} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}} |a_m^{(2)}| \cdot |\varphi_\nu(j_m x_1)| \leq C_1 \varphi\left(\frac{1}{2^p}\right) + C_1 \sum_{k=p}^{\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \quad (21)$$

в силу условия (14) и ограниченности $\varphi_\nu(j_m x_1)$.

В силу того, что для $\varphi(t)$ имеем

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{2^{k+1}-1}\right) \leq 2 \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}\right), \quad (22)$$

то из (21) и (22) получим

$$|S_p^{(2)}| \leq C_1 \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + 2 C_1 \sum_{k=p}^{\infty} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}\right) = C_1 \varphi\left(\frac{1}{2^p}\right) + \\ + 2 C_1 \sum_{j=2^p}^{\infty} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}\right) \leq C_1 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + 2 C_1 K_2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (23)$$

Такая же оценка верна для $S_n^{(3)}$, т. е.

$$|S_p^{(3)}| \leq C_2 \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + C_3 K_3 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j} \varphi\left(\frac{1}{j}\right). \quad (24)$$

Из (20), (23) и (24) окончательно получаем

$$\omega(f, \delta) \leq C \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\}.$$

Если $\varphi(\delta) \in \Phi$ и удовлетворяет одновременно условиям B_1 и B [3], то в условиях теоремы $\omega_{[a,1]}(\delta) \leq C \varphi(\delta)$. Отсюда, в частности если $\varphi(\delta) = \delta^\alpha$ при $0 < \alpha < 1$, получается соответствующий результат Р. Таберского. Если в условиях теоремы $\varphi(\delta) = \delta$, то получаем, что

$$\omega_{[a,1]}(\delta) \leq C \delta |\ln \delta| + \delta \leq C_1 \delta |\ln \delta|,$$

а это совпадает с другим результатом Р. Таберского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taberski R. Some properties of Fourier-Bessel series. Bull. Acad. polon. Sci. Ser. Sci. math. astron. et phys. 1934, 12, № 3, 151-156.

2. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций, ч. I, 1949.

3. Бари Н. К. и Стечкин С. Б. Тр. Московского матем. об-ва, т. 5, 1956.

Ш. М. Гафаров

Функцияларын үмуми хассэлэри илэ онун Фурје-Бессел
эмсаллары арасындакы бэ'зи элагэлэр наггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ Фурје-Бессел эмсалларынын азалма тэртиби илэ функциянын гурулуш хассэлэри арасындакы элагэдэн бэ'хс едилир.

Исбат олунмуш теоремлардэн биринчисиндэ, $\nu > -1$ олан халда, $[0,1]$ интервалында кэсилмэз олан $f(x)$ функциясынын Фурје-Бессел эмсаллары ги'мэтлэндирилир.

Икинчи теоремдэ исэ $f(x)$ функциясынын Фурје-Бессел эмсаллары $\sum_{m=p}^{\infty} |a_m^{(\nu)}| = O\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ шэртини өлэдикдэ, бурада $\varphi(t) \in \Phi$

вэ истэнилэн $\delta > 0$ үчүн $\varphi(2\delta) \leq C \varphi(\delta)$ шэртини өдэјир, $[0,1]$ парчасында $f(t)$ -нин кэсилмэзлик модулу $\varphi(t)$ васитэсилэ ги'мэтлэндирилир.

Р. Ю. КЕРИМОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ВОЗЛЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНЕ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

В работе [5] рассмотрено приближенное определение упруго-пластического напряженного состояния пластинки с круговым отверстием. Выведены основные уравнения для плоского напряженного состояния и предложен способ их решения.

В настоящей работе изучалось напряженное состояние и развитие пластических зон возле кругового отверстия при чистом сдвиге. Для материала пластинки принимается закон степенного упрочнения. В основу исследования положена теория малых упруго-пластических деформаций [2]. Предполагается, что по всей области происходит нагружение, так как зависимости напряжения—деформации неодинаковы при нагружении и разгрузке.

В случае плоского напряженного состояния зависимость напряжения—деформации можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{jk} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{\varphi(\sigma_i)}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right); \quad (1)$$

(i, j = 1, 2)

K—модуль объемного сжатия, μ —модуль сдвига. Вид функции $\varphi(\sigma_i)$ определяется на основе экспериментальной кривой напряжения—деформации материала с упрочнением. С целью сокращения вычислений удобно выбрать аналитическое выражение для $\varphi(\sigma_i)$, принимаемое в теории физически нелинейных материалов [4]:

$$\varphi(\sigma_i) = g \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_i \right)^{n-1}. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться, что в зависимости (2), полагая $n=3; 5$, можно охватить большой класс металлов, встречающихся в инженерной практике. Если подставить (1) в уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

и ввести функцию напряжений F [7], то придем к квазилинейному бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta F = - \frac{3K}{2(3K+\mu)} \left\{ 2\varphi \Delta \Delta F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \times \right. \\ \times \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \Delta \varphi \Delta F + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\Delta F)}{\partial x} + \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\Delta F)}{\partial y} \right) \right\}. \quad (4)$$

В полярных координатах выражение (4) будет иметь следующий вид:

$$\Delta \Delta F = - \frac{3K}{2(3K+\mu)} \left\{ 2\varphi \Delta \Delta F + \frac{1}{3} \left[\sigma_0 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \sigma_r \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] = 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial (\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial (\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial \theta} \right) \right] - 2 \tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \quad (5)$$

Приближенное решение поставленной задачи удобно строить путем приведения уравнения (5) к обыкновенным дифференциальным уравнениям [3].

Так как отверстие в плоскости круглое, а напряженное состояние в данном случае будем рассматривать двухосным, то функцию напряжений F представим в виде

$$F(r, \theta) = F_0(r) + F_2(r) \cos 2\theta. \quad (6)$$

Функция F в виде (6) выбрана по аналогии с решением, соответствующим упругой задаче. Тогда, применяя метод Галеркина [3], приведем уравнения (5) к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений [5]:

$$F_0^{IV} + \frac{2}{r} F_0^{III} - \frac{2}{r^2} F_0^{II} + \frac{1}{r^2} F_0^I = q_0; \\ F_2^{IV} + \frac{2}{r} F_2^{III} - \frac{9}{r^2} F_2^{II} + \frac{9}{r^3} F_2^I = q_2, \quad (7)$$

где q_0 и q_2 —нелинейные функции от $F_0, F_2, F_0^I, F_2^I, F_0^{II}, F_2^{II}, F_0^{III}, F_2^{III}$, выражения которых ввиду их громоздкости здесь не приводятся.

Пусть пластинка растягивается вдоль осей ox и oy усилиями

$$P_x = \lambda_1 \sigma_r, \quad P_y = \lambda_2 \sigma_r. \quad (8)$$

При $\lambda_1 = -\lambda_2$ основное напряженное состояние—чистый сдвиг и граничными условиями для $F_0(r)$ и $F_2(r)$ будут [5]:

$$\begin{aligned} \text{при } r = \infty \\ \frac{1}{r} F_0' = 0; \quad \frac{1}{r} F_2' - \frac{4}{r^2} F_2 = \lambda \sigma_r; \\ F_0'' = 0; \quad F_2'' = -\lambda \sigma_r; \\ \text{при } r = 1 \\ \frac{1}{r} F_2' - \frac{4}{r^2} F_2 = 0; \\ \frac{1}{r} F_0' = 0; \quad \frac{2}{r} F_2' - \frac{2}{r^2} F_2 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь σ_T — предел текучести материала; $\lambda_1 = \frac{P_x}{\sigma_T}$, $\lambda_2 = \frac{P_y}{\sigma_T}$ — соответственно, отношение растягивающихся усилий к пределу текучести материала.

Уравнения (7) решались методом приближений с применением ЭЦВМ. При граничных условиях (9) они упрощаются и вместо системы двух уравнений получается одно уравнение относительно $F_2(r)$:

$$F_2^{IV} + \frac{2}{r} F_2^{III} - \frac{9}{r^2} F_2^{II} + \frac{9}{r^3} F_2' = q_2, \quad (10)$$

где q_2 — нелинейная функция F_2, F_2', F_2'', F_2''' .

Для определения функции напряжения $F_2(r)$ в n -ом приближении вычислялись численные (точные) значения $q_2(F_2)$ по $(n-1)$ приближению и затем аппроксимировались полиномами.

После этого интегрирование производилось аналитически. Коэффициент аппроксимирующего полинома находили методом наименьших квадратов [1].

Для расчета были взяты механические характеристики стали У8 [6]:

Таблица 1

Рад/ансы Рад/иусы	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{36}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{9\pi}{36}$
при $\lambda_1 = 0,25$ $\lambda_2 = 0,-25$	1,025	1,025	1							
при $\lambda_1 = 0,30$ $\lambda_2 = 0,-30$	1,075	1,05	1,05	1						
при $\lambda_1 = 0,35$ $\lambda_2 = 0,-35$	1,15	1,125	1,125	1,075	1,025	1				
при $\lambda_1 = 0,40$ $\lambda_2 = 0,-40$	1,25	1,2	1,2	1,15	1,1	1,05	1			
при $\lambda_1 = 0,45$ $\lambda_2 = 0,-45$	1,3	1,275	1,275	1,25	1,25	1,075	1,05	1		

Рад/ансы Рад/иусы	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{36}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{15\pi}{36}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{36}$	$\frac{\pi}{2}$
при $\lambda_1 = 0,25$ $\lambda_2 = 0,-25$							1	1,025	1,025
при $\lambda_1 = 0,30$ $\lambda_2 = 0,-30$						1	1,05	1,05	1,075
при $\lambda_1 = 0,35$ $\lambda_2 = 0,-35$				1	1,025	1,075	1,125	1,125	1,15
при $\lambda_1 = 0,40$ $\lambda_2 = 0,-40$			1	1,05	1,1	1,15	1,2	1,2	1,25
при $\lambda_1 = 0,45$ $\lambda_2 = 0,-45$		1	1,05	1,075	1,25	1,25	1,275	1,275	1,3

Таблица 2

Рад/ансы Коеф. концентр.	0	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{36}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{36}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{9\pi}{36}$
$\lambda_1 = 0,25$ $\lambda_2 = 0,-25$	-4,01	-3,97	-3,79	-3,49	-3,09	-2,59	-2,001	-1,377	-0,7	0
$\lambda_1 = 0,30$ $\lambda_2 = 0,-30$	-4,06	-4,00	-3,82	-3,52	-3,11	-2,61	-2,003	-1,4	-0,71	0
$\lambda_1 = 0,35$ $\lambda_2 = 0,-35$	-5,082	-4,02	-3,83	-3,53	-3,127	-2,63	-2,04	-1,41	-0,71	0
$\lambda_1 = 0,40$ $\lambda_2 = 0,-40$	-4,09	-4,05	-3,84	-3,54	-3,129	-2,64	-2,05	-1,42	-0,71	0
$\lambda_1 = 0,45$ $\lambda_2 = 0,-45$	-4,11	-4,065	-3,86	-3,56	-3,148	-2,65	-2,06	-1,425	-0,71	0

Рад/ансы Коеф. концентр.	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{11\pi}{36}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{36}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{15\pi}{36}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{36}$	$\frac{\pi}{2}$
$\lambda_1 = 0,25$ $\lambda_2 = -0,25$	0,7	1,377	2,001	2,59	3,09	3,49	3,79	3,97	4,01
$\lambda_1 = 0,30$ $\lambda_2 = -0,30$	0,71	1,4	2,003	2,61	3,11	3,52	3,82	4	4,06
$\lambda_1 = 0,35$ $\lambda_2 = -0,35$	0,71	1,41	2,04	2,63	3,127	3,53	3,83	4,02	4,8
$\lambda_1 = 0,40$ $\lambda_2 = -0,40$	0,71	1,42	2,05	2,64	3,129	3,54	3,84	4,05	4,9
$\lambda_1 = 0,45$ $\lambda_2 = -0,45$	0,71	1,425	2,06	2,65	3,148	3,56	3,86	4,065	4,11

$$K = 1,126 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad \mu = 8,1 \cdot 10^5 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad \rho_T = 0,7 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

При $n = 5$ в зависимости (2) постоянная

$$g = 0,93 \cdot 10^{-15} \left(\frac{\text{см}^2}{\text{кг}} \right)^4.$$

Пластические зоны исследовались при следующих значениях:

(0,25; -0,25); (0,3; -0,3); (0,35; -0,35); (0,4; -0,4); (0,45; -0,45).

Решение задачи найдено в третьем приближении, где за первое приближение принято решение упругой задачи. Границы пластических зон определялись из условий пластичности [2].

$$\sigma_1 = \sigma_T. \quad (11)$$

С помощью ЭЦВМ найдены координаты точек, отделяющих пластическую зону от упругой (табл. 1). Процесс распространения пластических зон возле кругового отверстия в пластине показан на рис. 1.

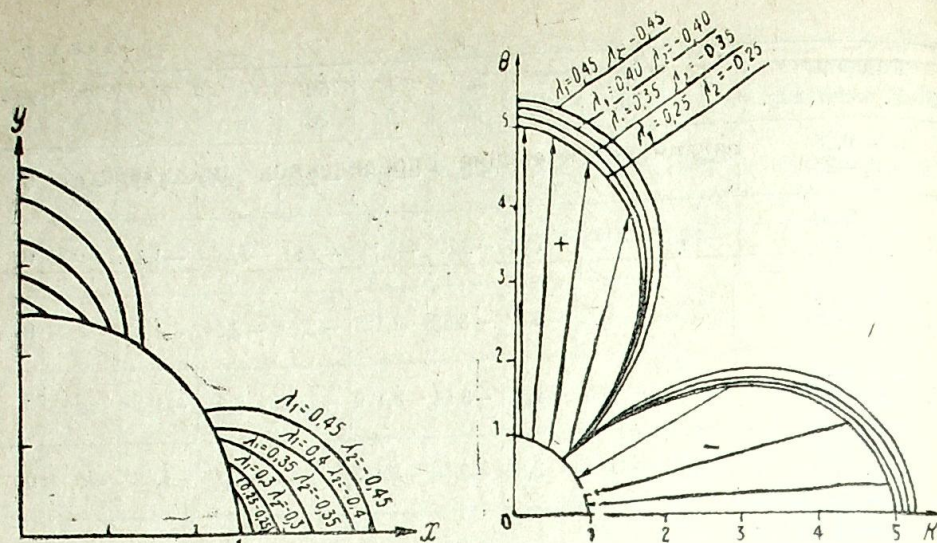


Рис. 1

Рис. 2

Зависимость коэффициента концентрации $K = \frac{\rho_0}{P} \Big|_{r=1}$ от угла θ на контуре отверстия при различных значениях λ_1 и λ_2 представлена в табл. 2 и на рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1, Физматгиз, 1962
2. Илюшин А. А. Пластичность. Госгехиздат, 1943.
3. Кантарович Л. В., Крилов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1952.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. ИЛ, 1961.
5. Керимов Р. Ю., Хорошун Л. П. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 3.
6. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II Машгиз, 1958.
7. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

Р. Я. Керимов

Саф сүрүшмәдә ләвһәнин даирәви дешији әтрафында пластики зонанын јайылмасы

ХУЛАСӘ

Мәгалә сонсуз ләвһәнин даирә шәклиндә зәифләдилмиш һиссәсиндә пластики зонанын тәдгигинә һәср олунмушдур. Мәсәләнин һәлли Голдоркин методунун көмәји илә (9) шәрғи дахилиндә (7) гејри-хәтти ади дифференциал тәнликләрин һәллиә кәтирилмишдир. Ардычыл јахынлашма үсулу илә (7) системинин тәғриби һәлли гурулмуш вә пластики зонанын харичи гүввәдән асылы оларағ, даирәви зәифләдилмә әтрафында јайылмасы тәдгиг едилмишдир.

Э. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ, Ф. В. МАЙОРОВ

О СОВМЕСТИМОСТИ МАШИН ЦИФРОВОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА ОДНОГО ТИПА

При управлении сложными производственными процессами одним из путей обеспечения скорости обработки информации в реальном масштабе времени и повышения надежности является децентрализация функций, которые раньше были прерогативой одной достаточно мощной управляющей машины. Эта тенденция приводит к созданию цифровых вычислительных комплексов (ЦВК) для управления и моделирования.

Функциональное разделение задач между машинами комплекса, работающими одновременно, или совместная работа машин над отдельными частями одной и той же задачи приводят к увеличению частоты выдачи решений. Распределение вычислительной нагрузки между машинами повышает надежность ЦВК, так как в случае выхода из строя одной из машин комплекса система не полностью теряет работоспособность. Более эффективное использование общей производительности ЦВК может быть получено подбором соответствующих характеристик индивидуальных блоков переработки информации для функциональных групп, которые они обслуживают.

ЦВК, объединяющий точность и развитые арифметические и логические возможности цифровых вычислительных машин (ПВМ) универсального типа с аналоговыми свойствами цифровых инкрементных машин (ЦИМ), часто оказывается особенно пригодным для управления и моделирования в реальном масштабе времени [1].

Одной из важных проблем, возникающих при проектировании ЦВК, является совместимость отдельных машин комплекса. Под совместимостью понимается однородность программирования и относительная легкость перекодировки программ одной машины на языки других машин комплекса. Выбор разрядных сеток отдельных машин и перекодировка слов одного формата в слова другого формата, организация обмена информацией между машинами комплекса, то есть вопросы, обусловленные взаимодействием машин ЦВК. В связи с этим частотные характеристики управляющего ЦВК существенно зависят не только от быстродействия арифметических устройств (АУ), оперативных запоминающих устройств (ОЗУ), устройств ввода и вывода (УВВ) и структуры алгоритмов функционирования, но также от внутренней организации машин комплекса в свете их эффективной сов-

местимости. Рассмотрим в этом аспекте некоторые требования, предъявляемые к машинам цифрового комплекса ЦВМ—ЦИМ.

При разработке ЦВК рассматриваемого типа желательно сохранить относительную легкость аналогового программирования, свойственного ЦИМ, для всего комплекса. Характерной особенностью аналогового программирования является построение блок-диаграмм математических уравнений, причем каждому блоку диаграммы соответствует определенный компонент управляемого объекта.

Комплект команд ЦВР в этом случае содержит общие арифметические и логические команды (базовые команды), необходимые для эффективного программирования таких операций, как интегрирование,

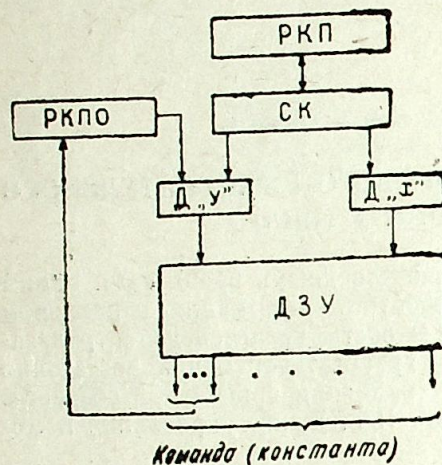


Рис. 1. Блок-схема памяти программ и констант ЦВМ комплекса (ДЗУ—долговременное запоминающее устройство; СК—счетчик команд; РКП—регистр команд программ; РКПО—регистр команд программируемых операторов; Д„х“, Д„у“—дешифраторы).

вычисление квадратного корня, образование тригонометрических функций, контроль параметров по допускам и т. д.—команды программируемых операторов (КПО).

Обычно в управляющих машинах хранение большого объема информации, неизменяющейся в процессе управления (программы, константы), осуществляется в долговременном запоминающем устройстве (ДЗУ). КПО представляют собой закомутированные в ДЗУ подпрограммы. Специальный бит команды указывает, что код операции должен интерпретироваться как программируемый оператор. Это дает возможность условно представлять соответствующую подпрограмму одной командой внешнего алфавита ЦВМ, причем адресом соответствующей подпрограммы — секции ДЗУ (рис.1)—является код операции КПО, адресная же часть команд

программируемого оператора указывает на адрес аргумента в ОЗУ.

С помощью регистра команд программируемых операторов (РКПО) выбирается необходимая секция (координата Y). Команды подпрограммы выполняются последовательно с помощью позиций счетчика команд (СК), который управляет выборкой из ДЗУ по координате X . Последняя команда подпрограммы содержит специальный бит, указывающий на окончание выполнения КПО, и устройство управления вслед за ее выполнением переходит к продолжению вычислений по основной программе, адрес необходимой команды которой хранится в регистре команд программ (РКП). Так как вход в подпрограмму КПО и выход из нее происходят почти с такой же простотой, как при использовании открытых подпрограмм, и не требуют служебных операций и связанных с ними потерь времени, применение команд программируемых операторов приводит к увеличению частоты выдачи решений ЦВМ. В случае включения в состав ЦВК нескольких ЦВМ практические преимущества использования КПО позволяют осуществить программную совместимость этих ЦВМ. Некоторые базовые команды более мощных ЦВМ комплекса благодаря специальному биту программируемого оператора могут интерпретироваться в менее мощных ЦВМ как адрес входа в соответствующую подпрограмму.

При распределении вычислительной нагрузки между машинами ЦВК обычно в задачи ЦИМ, являющихся циклическими безадресными машинами, входят оперативное управление и контроль непрерывных процессов. ЦВМ комплекса решают в основном разовые задачи, не имеющие определенной цикличности, устанавливают (по необходимости) новые начальные условия в интеграторах инкрементных машин, корректируют решения ЦИМ, выполняют временные программы и технико-экономические исследования. При этом разрядные сетки ЦВМ и ЦИМ могут в общем случае не совпадать по длине. Следовательно, необходимо предусматривать специальные меры по перекодировке информационных потоков между машинами комплекса ЦВМ—ЦИМ с целью минимизации времени обмена информацией.

Организация обмена информацией между машинами оказывает существенное влияние на структуру ЦВК. Время T , или время цикла ЦВК, состоит из времени T_m , необходимого для выполнения арифметических и логических (математических) операций, времени $T_{обр}$, затраченного на обращения к запоминающим устройствам, и времени $T_{вв}$ для операций с УВВ.

Большая часть входной информации обрабатывается специально отведенными для этой цели интеграторами ЦИМ и в случае необходимости ЦВМ выбирает эту информацию из памяти инкрементной машины. Преобразованное значение входного параметра, принадлежащего собственно ЦВМ, из УВВ вводится в память ЦВМ по мере готовности, а время отбора и преобразования следующего параметра используется в ЦВМ для других вычислений.

В общем случае время цикла ЦВК

$$T = \max (T_m, T_{обр}). \quad (1)$$

Если θ_{ri} —время выполнения r -ой операции в i -ой машине ЦВК, а K_{ri} —число r -ых операций в программе i -ой машины за время T , то

$$T = \sum_{r=1}^{S_i} K_{ri} \theta_{ri} \quad (2)$$

где S_i —общее число операций в комплекте команд i -ой машины. Пусть τ_i —время обращения к ОЗУ i -ой машины ЦВК, N_i —число обращений i -ой машины к своему ОЗУ за время T , зависящее от числа команд в программе этой машины, требующих обращения к своему ОЗУ, и адресности команд. Тогда L_i —коэффициент загрузки ОЗУ i -ой машины за время T будет

$$L_i = \frac{\tau_i N_i}{\sum_{r=1}^{S_i} K_{ri} \theta_{ri}} \quad (3)$$

Коэффициент загрузки L_i —численно равен вероятности P_i задержки при обращении к ОЗУ i -ой машины другой машины ЦВК за время T :

$$L_i = P_i. \quad (4)$$

Математическое ожидание времени задержки в работе j -ой машины комплекса в случае асинхронных во времени циклов обращения к ОЗУ i -ой машины будет

$$M_j = P_i \sum_{m=1}^{n_j} \Delta t_m, \quad (5)$$

где Δt_m — время задержки при обращении j -ой машины к ОЗУ i -ой машины:
 n_j — число обращений j -ой машины к ОЗУ i -ой машины за время T , зависящее от количества операторов обмена информации и адресности команд j -ой машины.
 Время Δt_m может принимать значения в диапазоне

$$\Delta t_m \leq \tau_i. \quad (6)$$

Считая, что Δt_m имеет равномерное распределение, найдем среднее значение

$$\Delta t_{cp} = \frac{\tau_i}{2}. \quad (7)$$

Подставляя в (5) выражения из (3), (4) и (7), получим

$$M_j = \frac{\tau_i^2 N_i n_j}{2 \sum_{r_i=1}^{s_i} K_{r_i} \theta_{r_i}}. \quad (8)$$

В случае двухмашинного ЦВК время, затраченное одной машиной на обращения к обоим ОЗУ, можно оценить как

$$T_{обр.} = N_1 \tau_1 + \frac{\tau_1^2 n_2^2}{2 \sum_{r_1=1}^{s_1} K_{r_1} \theta_{r_1}} + n_1 \tau_2 + \frac{\tau_2^2 N_2 n_1}{2 \sum_{r_2=1}^{s_2} K_{r_2} \theta_{r_2}}. \quad (9)$$

$T_{обр.}$, которое в некоторых случаях может быть больше времени решения отдельных кусков программы, как показано в (9), зависит от бытродействия ОЗУ, структуры алгоритмов функционирования, приоритета при обращении к ОЗУ и внутренней организации машин ЦВК.

Имеющаяся тенденция к увеличению производительности цифровых машин за счет повышения рабочей частоты основных элементов имеет ограничения из-за трудностей технической реализации. Довольно сложной задачей является распределение программы по машинам комплекса с учетом минимизации числа операторов обмена информацией n . В ряде случаев частотные характеристики отдельных машин комплекса могут быть улучшены приданием более высокого (по отношению к другим машинам) приоритета при обращении к запоминающим устройствам, участвующим в операциях обмена информацией.

Включение в комплект команд ЦВМ команд программируемых операторов и хранение необходимых для их реализации подпрограмм и констант в ДЗУ позволяет сократить число обращений к ОЗУ. Производительность ЦВК существенно повышается путем использования определенных регистров ОЗУ и АУ в качестве микропамяти результатов промежуточных вычислений.

При выполнении КПО, например $\sin X$, необходимо выбрать аргумент из ОЗУ, выполнить операцию и записать, если необходимо, результат в ОЗУ. Как известно, $\sin X$ можно аппроксимировать многочленом приближением вида

$$\sin X \approx \sum_{k=0}^n a_{2k+1} X^{2k+1}$$

Пусть $n = 2$. Перепишем для удобства

$$\sin X = [(a_5 X^2 + a_3) X^2 + a_1] X.$$

Программа для вычисления этого многочлена в обычной одноадресной ЦВМ потребовала бы шесть обращений к ОЗУ: для образования, запоминания и двукратного вызова X^2 , одного для вызова X и одного для записи в ОЗУ результата. С увеличением n возрастает также число обращений к ОЗУ.

Организация вычислений того же многочлена в одноадресной ЦВМ комплекса с микропамятью АУ для запоминания значений X и X^2 требует, независимо от n , двух обращений к ОЗУ: считывание аргумента и запись результата. В случае хранения в одной линейке ОЗУ двух операндов ЦВМ [в] качестве микропамяти АУ могут быть использованы регистры ОЗУ для хранения правой (Р „0“) или левой (Р „1“) половины считанной линейки (рис. 2). Решение вопроса относительно емкости микропамяти АУ ЦВМ зависит в основном от алгоритмов функционирования и структур КПО.

Для сравнения цифровых комплексов ЦВМ—ЦИМ с различными характеристиками совместности удобно пользоваться критерием эффективности, предложенным в работе [2]. Эффективностью структуры ЦВК, определяемой относительно другой структуры, принятой за основную, будем называть число, вычисляемое по формуле

$$\eta = \frac{T_0 Q_0}{T' Q'}.$$

где T_0 — время переработки определенного алгоритма в ЦВК, принятом за основной;

Q_0 — объем оборудования основного ЦВК;

T' и Q' — соответствующие параметры оцениваемого ЦВК.

При этом предполагается одинаковое бытродействие элементов оцениваемых комплексов.

Выбор определенной внутренней организации цифрового комплекса ЦВМ—ЦИМ полностью определяется предъявляемыми техническими требованиями и показателем эффективности структуры, который должен быть не менее заданного.

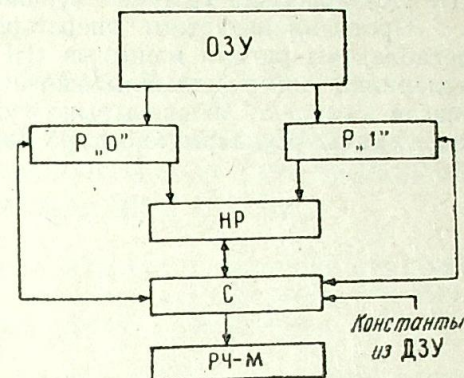


Рис. 2. Блок-схема арифметического устройства ЦВМ комплекса (ОЗУ — оперативное запоминающее устройство; С — сумматор; НР — накопительный регистр; РЧ-М — Регистр частного множителя; Р „0“ и Р „1“ — регистры считывания ОЗУ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Майоров Ф. В., Бабич Г. Х., Генис Я. Г. Комбинированная управляющая машина. Доклад на Всесоюзном совещании по автоматическому управлению и вычислительной технике в 1952 г. Сб. «Вычислительная техника для автоматизации производства» под ред. В. В. Солодовникова. Машгиз, 1964.
2. Карпов М. А. Арифметические устройства электронных цифровых машин. Физматгиз, 1958.

**Биртипли һесаблајычы рәғәмли
комплекс машинларын ујғунлуғу һаггында**

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә универсал һесаблајычы рәғәмли машин (ҺРМ) илә рәғәмли инкремент машины (ҺРИМ) бирләшдирән һесаблајычы рәғәмли комплекс машинларын (ҺРКМ) ујғунлуғуна даир мәсәләләр музакирә олунур.

Ујғунлуғ—програмлашдырманын ејнилији, ајры-ајры машинларын дәрәчә шәбәкәләринин сечилмәси һесаблајычы комплекс машинлар (ҺРКМ) арасында мә’лумат мүбадиләсинин тәшкили мә’насыны верир.

Програмлашдырычы операторлар командасындан вә универсал һесаблајычы рәғәми машинын (ҺРМ) һесаб гурғусунун аралыг нәтичәләринин микројаддашлығындан истифадә олунмасы мисалларына әсасән комплекс машинларын ујғунлуғу кәстәришләринин јахшылашдырылмасы үсуллары музакирә едилир.

С. М. АКСЕЛЬРОД, Р. А. МУСТАФАЕВ, К. Ф. ШИРИНОВ

**К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАВИСИМОСТИ ВХОДНОГО
ИМПЕДАНЦА СФЕРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА ОТ ЕГО РАЗМЕРОВ
И ПАРАМЕТРОВ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

В работе [1] рассмотрен вопрос о вкладке в величину входного импеданца сферического вибратора, введенного в безграничную однородную и изотропную проводящую среду, сферических областей, концентричных с вибратором.

Наряду с этим представляет интерес исследование зависимости входного импеданца сферического вибратора от его размеров и частоты поля f при различных значениях диэлектрической проницаемости ϵ , удельной проводимости γ и магнитной проницаемости μ , характеризующих среду, в которую он введен.

В настоящей статье приводятся результаты этого исследования, проведенного при допущениях, принятых в [1].

Исследование основано на результатах, полученных посредством вычислений выражений входных активного $R_{вх}$ и реактивного $X_{вх}$ сопротивлений для параллельной схемы замещения, выведенных из теоремы Пойнтинга [2] с учетом решений системы уравнений Максвелла в сферической системе координат при соответствующих граничных условиях, и имеющих вид:

$$R_{вх} = \frac{A \left\{ \left[\gamma \sum_{n=1}^{\infty} BC \right]^2 + \left[\omega \sum_{n=1}^{\infty} B (\mu D - \epsilon C) \right]^2 \right\}}{\gamma \sum_{n=1}^{\infty} BC}, \quad (1)$$

$$X_{вх} = \frac{A \left\{ \left[\gamma \sum_{n=1}^{\infty} BC \right]^2 + \left[\omega \sum_{n=1}^{\infty} B (\mu D - \epsilon C) \right]^2 \right\}}{\omega \sum_{n=1}^{\infty} B (\epsilon C - \mu D)} \quad (2)$$

где ω —угловая частота электромагнитного поля, а A , B , C и D имеют вид, показанный в [1].

Вычисления $R_{вх}$ и $X_{вх}$ по формулам (1) и (2) производились на электронной вычислительной машине БЭСМ-2М.

При анализе полученных результатов более естественно было рассматривать не реактивную составляющую $X_{вх}$ входного импеданса, а соответствующую ей емкость $C_{вх}$:

$$C_{вх} = -\frac{1}{\omega X_{вх}} \quad (3)$$

и, кроме того, в качестве одной из характеристик среды, в которую введен вибратор вместо удельной проводимости среды γ , взять обратную ей величину—удельное сопротивление ρ .

Результаты исследования отражены на рис. 1—3.

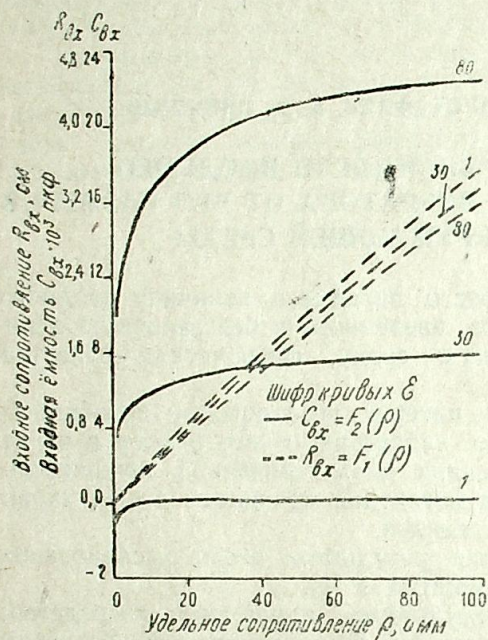


Рис. 1. Зависимость входной емкости $C_{вх}$ и входного сопротивления $R_{вх}$ от удельного сопротивления среды ρ . Шифр кривых—относительная диэлектрическая проницаемость; радиус вибратора $a = 0,09$ м, частота поля $f = 10$ МГц.

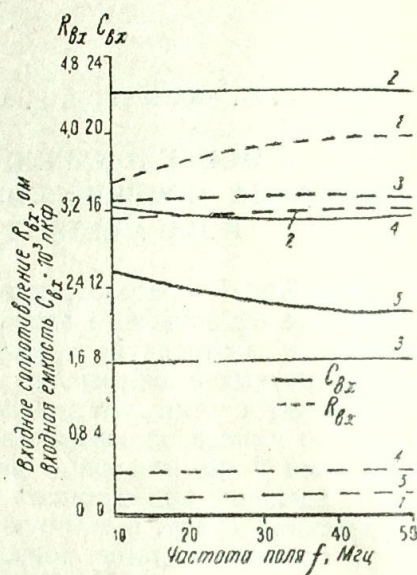


Рис. 2. Зависимость входной емкости $C_{вх}$ и входного сопротивления $R_{вх}$ от частоты поля:

- 1— $\epsilon = 1$, $\rho = 100$ Ом·м;
- 2— $\epsilon = 80$, $\rho = 100$ Ом·м;
- 3— $\epsilon = 30$, $\rho = 100$ Ом·м;
- 4— $\epsilon = 80$, $\rho = 10$ Ом·м;
- 5— $\epsilon = 80$, $\rho = 33,3$ Ом·м.

На рис. 1 представлены зависимости $R_{вх} = F_1(\rho)$ и $C_{вх} = F_2(\rho)$ для случая, когда радиус вибратора равен $0,09$ м, а частота поля 10 МГц. Как видно из приведенных кривых, при $\epsilon = 1$ входное сопротивление связано с удельным сопротивлением среды зависимостью, близкой к линейной. При $\epsilon > 1$ эта зависимость отклоняется от линейной тем больше, тем выше ϵ , причем с ростом последнего $R_{вх}$ падает.

Входная емкость $C_{вх}$ увеличивается с ростом ϵ . При $\rho > 10$ Ом·м $C_{вх}$ очень слабо зависит от последнего. Однако при $\rho < 10$ Ом·м с уменьшением ρ входная емкость уменьшается. При малом ϵ с уменьшением ρ $C_{вх}$ переходит через нуль в отрицательную область и затем, оставаясь по знаку отрицательной, резко увеличивается по абсолютной величине.

Отрицательный знак, приписываемый входной емкости, должен интерпретироваться как изменение характера входного импеданса с емкостного на индуктивный. Для этих условий, т. е. когда $C_{вх} < 0$,

индуктивность реактивной составляющей входного импеданса для параллельной схемы замещения определяется как

$$L_{вх} = \frac{1}{|C_{вх}| \omega^2}. \quad (4)$$

Таким образом, с уменьшением ρ , начиная с определенных для каждого ϵ значений последнего, входной импеданс из емкостного становится индуктивным, тем раньше, чем меньше ϵ .

Зависимости $R_{вх} = F_1(\rho)$ и $C_{вх} = F_2(\rho)$ сохраняют свой вид при различных значениях частоты поля и радиуса вибратора, хотя величины $R_{вх}$ и $C_{вх}$ с изменением этих параметров меняются.

На рис 2 изображены кривые зависимости $R_{вх}$ и $C_{вх}$ от частоты поля при радиусе вибратора $a = 0,09$ м. Как видно, изменение частоты f поля в диапазоне $10 \div 50$ МГц весьма слабо влияет на величины $R_{вх}$ и $C_{вх}$. Некоторое увеличение $R_{вх}$ с ростом частоты наблюдается при малом значении ϵ и большом ρ .

С другой стороны, входная емкость несколько снижается с ростом частоты при малых удельных сопротивлениях среды ($\rho < 10$ Ом·м).

Значительно большее влияние на величины $R_{вх}$ и $C_{вх}$ оказывает изменение радиуса вибратора. Как видно из рис. 3, с увеличением радиуса вибратора от $a = 0,09$ до $0,80$ м величина $R_{вх}$ падает одинаково интенсивно для различных значений ϵ .

В то же время увеличение радиуса вибратора приводит к возрастанию входной емкости, тем более интенсивному, чем больше ρ . Приведенные данные могут быть использованы для качественной оценки особенностей излучателя, помещенного в проводящую среду, с точки зрения реакции его на изменение параметров окружающей среды.

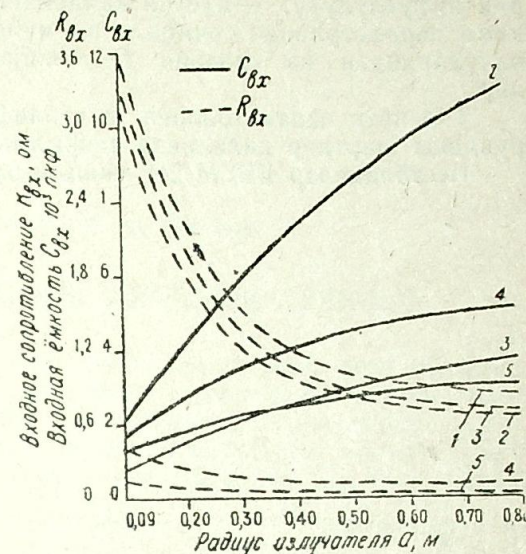


Рис. 3. Зависимость входной емкости $C_{вх}$ и входного сопротивления $R_{вх}$ от радиуса излучателя:

- 1— $\epsilon = 1$, $\rho = 100$ Ом·м; 2— $\epsilon = 80$, $\rho = 100$ Ом·м;
- 3— $\epsilon = 30$, $\rho = 100$ Ом·м; 4— $\epsilon = 80$, $\rho = 10$ Ом·м;
- 5— $\epsilon = 80$, $\rho = 33,3$ Ом·м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксельрод С. М., Мустафаев Р. А., Ширинов К. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук“, 1965, № 4.
2. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. „Советское радио“. М., 1956.

С. М. Акселрод, А. А. Мустафаев, К. Ф. Широков

**Сферик вибраторун кириш импедансынын
онун өлчүүлери вэ этраф мүнхити параметрлериндэн
асылылыгынын өрэнилмесинэ даир**

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ сферик вибраторун кириш импедансынын ϵ —диелектрик нүфузлулуғу, ν —хүсуси кечиричилији вэ μ —магнит нүфузлулуғу кими параметрлэрлэ сэчијјэлэнэн мүнхитэ дахил едилмиш вибраторун өлчүүлэриндэн вэ саһенин f —тезлијиндэн асылылыгы тэдгиг едилр.

Тэдгигат параметрлерин мүнхтэлиф гиймэтлериндэ вэ (1) дүстүрүндэки шэртлэр дахилиндэ апарылмышдыр.

Һесабламалар БЕСМ-2М машынында јеринэ јетирилмишдир.

АЗЕРБАЈҢАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ
Физика-техника вэ ријазиијат елмлэри серијасы, 1966, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 2

Ю. Б. НАДЖАФОВ, Ю. Х. ШАУЛОВ

ЭНТАЛЬПИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДВУОКИСИ КРЕМНИЯ

В изучении термохимических и термодинамических свойств кремнийорганических соединений весьма важной величиной является стандартная энтальпия образования двуокиси кремния. Эта величина определялась многими исследователями [1—8]. В результате критического анализа упомянутых работ, указанных в справочнике [9], была рекомендована величина $\Delta H_{298}^{\circ} \text{SiO}_2 = -210,26 \pm 0,27 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$, приведенная в статье [3]. В работах [6, 7, 8], появившихся в печати за последнее время, величина $\Delta H_{298}^{\circ} \text{SiO}_2$ составляет не менее $-215 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$. Данные исследования выполнены косвенными методами.

Недавно появилась публикация [10], в которой приводится величина $\Delta H_{298}^{\circ} \text{SiO}_2 = -214,5 \pm 0,5 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$.

Нами была предпринята попытка определить $\Delta H_{298}^{\circ} \text{SiO}_2$ прямым сжиганием кремния в калориметрической бомбе для проверки. Был использован аморфный кремний, в котором методом вакуумплавления [11] обнаружены примеси кислорода и водорода. Одновременно с помощью спектрального анализа было установлено также наличие металлических примесей $\sim 0,01\%$ (Mg, Al, Fe, B).

Калориметрическая установка и методика проведения сжигания кремния

Сжигание кремния осуществлялось на усовершенствованной калориметрической установке с изотермической оболочкой, о применении которой сообщалось ранее [12].

Навески кремния $0,2 \div 0,3$ г сжигали в полиэтиленовых чашечках в дырчатом тигле, подвешенном в металлическом стакане* в калориметрической бомбе конструкции МГУ им. М. В. Ломоносова. Для зажигания навески использовалась платиновая проволока, продетая через края полиэтиленовой чашечки. Бомба заполнялась кислородом до 40 ± 1 атм, предварительно очищенным от примесей. Температура

* Металлический стакан изготовлен из легированной стали.

оболочки калориметра поддерживалась постоянной терморегулятором с точностью $\pm 0,003^\circ$. Подъем температуры калориметра измерялся ртутным калориметрическим термометром с точностью 5×10^{-4} условных градуса*. На теплоту, которая выделяется вследствие накаливания платиновой проволоки при поджигании образца поправка не вводилась, так как такое же накаливание происходит и при определении теплового значения калориметра. Последнее (~ 2890 ккал/град) было определено сжиганием эталонной бензойной кислоты с точностью $\pm 0,02\%$.

Конечными продуктами сжигания кремния были: содержимое стакана—белый осадок с сероватым оттенком и ровный белый налет сконденсировавшегося пара двуокиси кремния на стенках бомбы. Полнота сгорания навески в каждом опыте контролировалась количественным определением в продуктах сгорания недогоревшего углерода и кремния [13].

При полном сгорании примеси водорода (0,28%), содержащейся во взятой для опыта навеске аморфного кремния, найденная теплота горения кремния должна быть завышена на $\sim 1,3\%$. В связи с этим вносилась поправка и на горение водорода, присутствующего в исходной навеске сжигаемого кремния.

Результаты сжигания аморфного кремния приведены в таблице.

Результаты опытов по сжиганию кремния

Навеска, г		Количество выделившегося тепла, кал			Поправка, кал			— Δ U ккал/ моль
кремний	полиэтиленовая чашечка	всего	в том числе за счет сгорания		на недогоревший кремний	на недогоревший углерод	на горение примеси водорода в навеске	
			кремния	полиэтиленовой чашечки				
0,35152	0,05164	3162,7	2564,8	573,9	12,0	—	33,5	211,1
0,20796	0,06584	2268,2	1514,8	731,7	—	—	19,8	210,8
0,23666	0,03843	2172,3	1727,4	427,1	—	6,7	22,5	211,2
0,26115	0,06446	2654,9	1911,5	716,4	—	—	24,9	211,8

Среднее $211,2 \pm 0,4$

При переходе от изотермической теплоты горения кремния в условиях бомбы к стандартной энтальпии образования SiO_2 существенной оказалась величина $\Delta nRT = -0,6 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$.

$$\text{Учитывая } \text{Si}_{(\text{крст.})} \rightarrow \text{Si}_{(\text{аморф.})} \Delta H_{298}^\circ = +1 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}} [14]$$

и

$$\text{SiO}_2 (\text{аморф.}) \rightarrow \text{SiO}_2 (\text{крст.}) \Delta H_{298}^\circ = -2,12 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}} [3],$$

$$\text{Si}_{(\text{крст.})} + \text{O}_{2(\text{газ})} = \text{SiO}_{2(\text{крст.})},$$

$$\Delta H_{298}^\circ = -212,95 \pm 0,40 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}},$$

$$\text{Si}_{(\text{крст.})} + \text{O}_{2(\text{газ})} = \text{SiO}_{2(\text{аморф.})},$$

$$\Delta H_{298}^\circ = -210,83 \pm 0,40 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}.$$

* Условный градус термометра равен $0,993^\circ\text{C}$.

Погрешность представляет собой удвоенную квадратичную ошибку среднего результата.

Полученное нами значение стандартной энтальпии образования кварца в пределах $\pm \sim 3$ ккал/моль согласуется с данными, приведенными в [3, 6 и 10].

Выводы

1. Разработана методика сжигания кремния в калориметрической бомбе.
 2. На основании измерения теплоты горения кремния рассчитана стандартная энтальпия образования двуокиси кремния.
- Авторы благодарят Я. Е. Покровского за представление образцов кремния, К. К. Попкова и А. М. Никольскую за проведение анализов и А. С. Аббасова за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roth W., Müller D. Zs. Phys. Chem. A. 144, 253, 1929.
2. Roth W., Troitzsch H. Zs. anorg. Chem. 260, 337, 1949.
3. Humphrey G., King E. J. Amer. Chem. soc. 74, 2041, 1952.
4. Голутвин Ю. М. ЖФХ, 30, 2251, 1956.
5. Воробьев А. Ф., Колесов В. П., Скуратов С. М. ЖНХ, 5, вып. 7, 1402, 1960.
6. Cochran C. N., Foster L. M. J. phys. chem. 66, № 2, 380, 1962.
7. Good W. D. J. phys. chem. 66, № 2, 380—381, 1962.
8. Wise S. S. и др. J. phys. chem. 66, № 2, 331, 1962.
9. Гурвич Л. В., Хачкурузов Г. А., Медведев В. А. и др. (справочник в двух томах). Изд-во АН СССР, М., 1962.
10. Резницкий Л. А. ЖФХ, т. 3, вып. 3, 1964, 760—762.
11. Туровцева З. М. и др. Ж. аналит. химии, 12, 208, 1957.
12. Наджафов Ю. Б., Шаулов Ю. Х. ЖФХ. 12, 1964, 2975—2979.
13. Руководство по анализу кремнийорганических соединений, под ред. А. П. Крешкова. Госхимиздат, 1962.
14. Rossini F. D. и др. Selected Values of Chemical Thermodynamic Properties, Circ., № 500, 1952.

Ж. Б. Нэчэфов, Ж. Х. Шаулов

Силисиум 4-оксидин эмэлэкэлмэ энталпијасы

ХҮЛАСЭ

Силисиумун калориметрик бомбада јандырылмасы методу ишләнмиш вә һәмин метод үзрә, аморф силисиум вә газ һалындакы оксидән силисиум оксидин эмэлэкэлмэ истилији тәјин едилмишдир. Алынмыш нәтичәјә әсасән силисиум оксидин эмэлэкэлмэ энталпијасы тәјин едилмишдир.

А. У. МАЛЬСАГОВ, Р. Х. НАНИ, Я. Н. НАСИРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОЭДС CuSbTe_2 В ТВЕРДОМ И ЖИДКОМ СОСТОЯНИЯХ

Исследование физических свойств полупроводников в области плавления и в жидком состоянии имеет научное и практическое значение. Оно позволяет получить ясную картину изменения характера связей и структурных особенностей, дает ценные сведения о природе и характере проводимости и способствует созданию единой теории, охватывающей как твердое, так и жидкое состояние [1—4].

С другой стороны, имеется возможность использования жидких материалов для создания термоэлементов с высоким к. п. д. [5].

В литературе известны исследования в жидком состоянии атомарных элементов и бинарных соединений. Работ по исследованию сложных полупроводниковых соединений и систем еще очень мало.

В данной статье приведены результаты измерений термоэдс (α) и электропроводности (σ) CuSbTe_2 . В твердом состоянии указанное соединение подробно изучено в интервале 300—800°K и установлено, что как CuSbTe_2 , так и некоторые твердые растворы на его основе являются перспективными материалами для создания термоэлементов [6—8]. Поэтому для нас представляло интерес исследовать CuSbTe_2 в твердом и жидком состояниях, включая область плавления (300—1200°K).

Синтез соединения производили методом, описанным в работе [8]. Исходные вещества имели чистоту: медь—электролитическая, сурьма—Су—00 и теллур двукратной возгонки в вакууме.

Как известно, измерение электропроводности и термоэдс в жидком состоянии осложняется трудностями подбора стойких в широком интервале температур химически устойчивых электродов. Исключающим указанные препятствия является метод измерения во вращающемся магнитном поле, разработанный А. Р. Регелем [9].

В настоящей работе измерение электропроводности производилось обычным зондовым методом на специальной установке, учитывающей специфику исследуемого соединения (легколетучесть и химическую активность).

Схема конструкции установки изображена на рис. 1. На металлическом стержне (6) закреплен держатель (7), имеющий соответствующую форму для размещения кварцевой ампулы (5) с веществом. Ампула имеет четыре отверстия с верхней стороны, в которые вставляются алюмель-хромелевые термопары с графитовыми чехлами

($\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$) и графитовые зонды ($\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$). Снятие термоэдс и подача тока при измерении электропроводности производятся через крайние графитовые стержни с помощью прижимных контактов.

Держатель с ампулой помещают в цилиндрическую печь (Π_1). Перепад температуры создается с помощью дополнительной печи (Π_2). Вся система измерения помещена под металлический колпак. Перед каждым опытом ее откачивают до 10^{-3} мм рт. ст., несколько раз промывают инертным газом (сухим азотом) и затем создают соответствующее давление. В нашем случае измерения производились в инертной среде под давлением 2—3 атм. Графитовые зонды и стержни со вставленными в них термопарами исключали химическое действие вещества на измерительные провода. Охлаждение системы осуществлялось водой с помощью змеевика вокруг колпака и через отверстия в основании системы.

Температурная зависимость термоэдс показана на рис 2. Как видно, в твердом состоянии термоэдс с повышением температуры растет от 29

до $150 \frac{\text{мкВ}}{^\circ\text{K}}$ при температуре плавления падает скачком до $110 \frac{\text{мкВ}}{^\circ\text{K}}$ и с

дальнейшим повышением температуры уменьшается до $40 \frac{\text{мкВ}}{^\circ\text{K}}$.

Данные по измерению α и σ в твердой фазе согласуются с данными работы [8]. Во всем исследованном интервале температур вещество имело p -проводимость. Температурная зависимость σ в твердом состоянии имеет металлический ход проводимости с переходом в полупроводниковый в жидком состоянии (рис. 3).

Как показывают экспериментальные данные, электропроводность в интервале температур от комнатной до температуры плавления ($T_{\text{пл}} = 530^\circ\text{C}$) падает, при $T_{\text{пл}}$ повышается с небольшим скачком и резко увеличивается с ростом температуры.

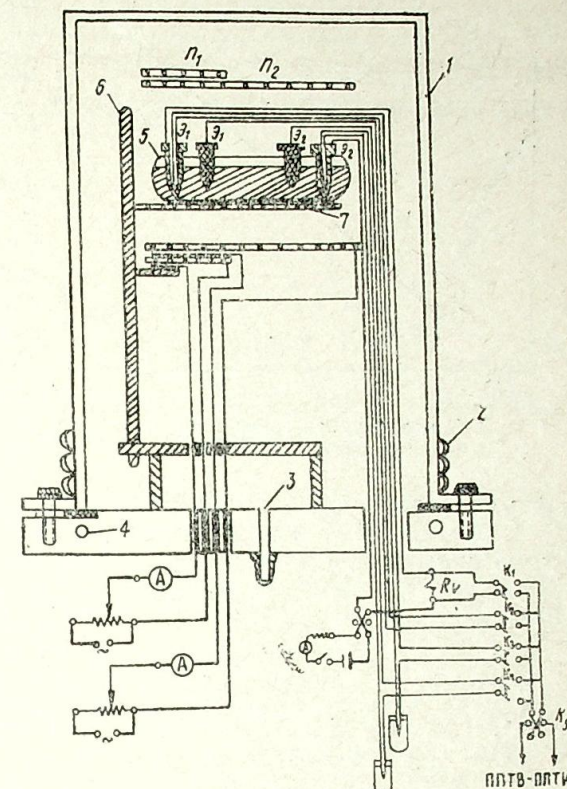


Рис. 1. Разрез и схема установки для измерения α и σ в твердом и жидком состояниях

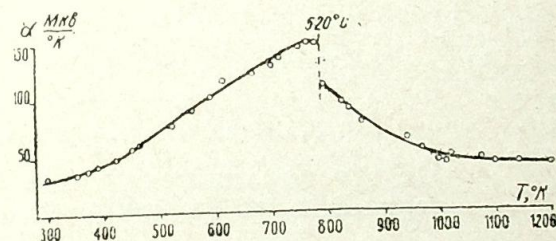


Рис. 2. Температурная зависимость термоэдс CuSbTe_2

Повышение электропроводности с незначительным скачком при плавлении по всей вероятности, можно связать с небольшим усилением металлической связи. Значение термической энергии активации носителей в жидком состоянии, вычисленное из зависимости $\ln \sigma \left(\frac{1}{T} \right)$, оценивается

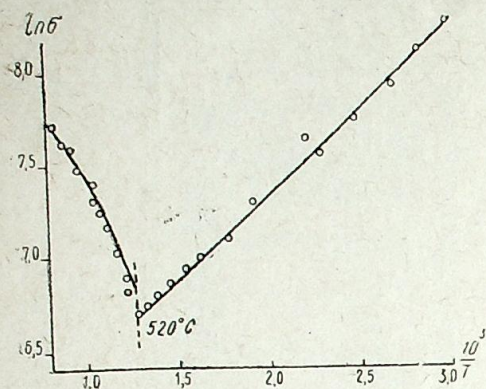


Рис. 3. Температурная зависимость электропроводности CuSbTe_2

$$\Delta E = 0,4 \text{ эв.}$$

Предварительные измерения термоэдс и электропроводности соединений CuSbS_2 и CuSbSe_2 в твердом и жидком состояниях, включая область плавления, показывают, что оба соединения как в твердом, так и в жидком состояниях являются полупроводниками. Значения термической энергии активации в жидком состоянии для обоих соединений

мало отличаются от значений их в твердом состоянии.

В заключение авторы считают приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву и Г. М. Алиеву за постоянное внимание к работе, обсуждения результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Ф. Юбилейный сб. АН СССР, ч. I, 305, 1947.
2. Блум А. И., Мокровский Н. Н., Регель А. Р. "Изв. АН СССР, серия физич.", т. 16, 1952, № 2.
3. Регель А. Р. Совещание по жидкому состоянию. Изд. Киевского госуниверситета, 1954.
4. Губанов А. И. Квантово-электронная теория аморфных проводников. "Изв. АН СССР", М.—Л., 1963.
5. Gardner J. W. "Engl. Electr. J." 1963, 18, № 4.
6. Жузе В. П., Сергеева В. М., Штрум Е. Л. ЖТФ, 1958, 28, 10.
7. Штрум Е. Л., Дисс., ИПАН СССР, Л., 1960.
8. Нани Р. Х. Дисс., ФИАН Азерб. ССР, 1964.
9. Регель А. Р. ЖТФ, т. 18, 1948, № 12.

Ә. У. Малсагов, Р. Һ. Нани, Ј. Н. Нәсиров

CuSbTe_2 бирләшмесиндә бәрк вә маје һалында термо ЕһГ-нин вә електриккечириһин тәдғиги

ХҮЛАСӘ

Маддәләрин бәрк һалдан маје һала кечид һүдудунда тәдғиги һәмин маддәдә кимјәви рабитәнин тәбиәтиндә баш верә билән дәји-шикликләр һаггында мүәјјән мәлүмат топламаға имкан верир ки, бу да маддәнин бәрк вә һәм дә маје һалыны нәзәрә ала билән нәзәријјәни јаратмағ үчүн ән вачиб амилләрдән бири ола биләр.

Тәчрүбә $300 \div 1200^\circ\text{K}$ интервалында апарылмышдыр. Тәдғигат көстәрир ки, CuSbTe_2 бирләшмәси бәрк һалда әримә температураһа јахын температурлар гәдәр өзүнү метал, маје һалда исә јарымкечиричи кими апарыр. Әримә областында јүкдашыјычыларын термик активләшмә енержиси $-\Delta E = 0,4 \text{ эв}$ тәртибиндәдир.

CuSbS_2 вә CuSbSe_2 маддәләри үзәриндә апарылмыш илкин тәдғигатлар көстәрир ки, һәр ики бирләшмә истәр бәрк вә истәрсә дә маје һалында өзүнү јарымкечиричи маддә кими апарыр.

М. И. АЛИЕВ, Г. И. САФРАЛИЕВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ТЕРМОЭДС АНТИМОНИДА ГАЛЛИЯ, ЛЕГИРОВАННОГО Zn и Te

Исследованию электрических свойств, гальвано- и термомагнитных эффектов в GaSb посвящен ряд работ, результаты которых по n-GaSb интерпретируются в основном с точки зрения модели зоны проводимости, предложенной Сагаром [1]. Теплопроводность антимонида галлия исследована недостаточно. Имеющиеся в литературе сведения разноречивы. По данным [2, 3] при комнатной температуре теплопроводность $\kappa = 0,27 \text{ вт/см} \cdot \text{град}$, а в работе [4] $\kappa = 0,44 \text{ вт/см} \cdot \text{град}$. В интервале $4 \div 300^\circ\text{K}$ теплопроводность ряда образцов GaSb исследовал Холланд [5]. При 300°K он получил $\kappa = 0,44 \text{ вт/см} \cdot \text{град}$.

Представляло интерес систематическое исследование явлений переноса в антимониде галлия легированного донорными и акцепторными примесями в широкой области их концентраций. Особый интерес, с нашей точки зрения, представляло исследование теплопроводности, которое дает возможность выяснить механизмы рассеяния носителей тока и фононов, взаимодействие фононов с примесями и другими дефектами решетки. Ранее нами была показана зависимость теплопроводности решетки GaAs и In—Sb от типа легирующих примесей [6, 7]. С этой точки зрения представляет интерес изучение указанного явления и в GaSb. Были исследованы теплопроводность, термоэдс, электропроводность, эффект Холла в антимониде галлия, легированного цинком и теллуром, в области температур $80 \div 600^\circ\text{K}$. В настоящей статье приводятся результаты исследования теплопроводности и термоэдс.

Для синтеза антимонида галлия использовали галлий и сурьму высокой частоты. После многократной зонной перекристаллизации был получен материал с концентрацией дырок $(1,4 \div 1,5) \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ при 300°K , который затем легировали цинком и теллуром. Зависимость концентрации носителей тока от атомного процента Zn и Te показана на рис. 1. Кривая 1 относится к образцам, легированным цинком, а кривая 2—к образцам, легированным теллуром. При добавлении 0,67 ат. % цинка концентрация дырок достигает $2 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$. При дальнейшем же теллура концентрация носителей тока вначале падает, что связано с компенсацией примесей, а затем происходит перемена проводимости. При 0,67 ат. % Te концентрация носителей равна $2,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

Была изготовлена серия образцов CaSb, в которых концентрация носителей при 300°K имеет значения, приведенные в таблице.

№ образца	Примесь	Концентрация носителей, см ⁻³	Тип проводимости
GaSb-1	Чистый	1,4 · 10 ¹⁷	p
4,47 Ц 17	Zn	4,47 · 10 ¹⁷	p
2,23 Ц 18	Zn	2,23 · 10 ¹⁸	p
2,08 Ц 19	Zn	2,08 · 10 ¹⁹	p
1,5 Ц 20	Zn	1,5 · 10 ²⁰	p
5,95 Т 16	Te	5,95 · 10 ¹⁶	p
6,12 Т 17	Te	6,12 · 10 ¹⁷	n
1,52 Т 18	Te	1,52 · 10 ¹⁸	n
2,18 Т 18	Te	2,2 · 10 ¹⁸	n

Измерение теплопроводности и термоэдс проводилось на монокристаллических и крупноблочных образцах. Теплопроводность была измерена абсолютным методом в стационарном тепловом режиме. Схема прибора показана на рис. 2. На том же приборе одновременно измеряли и термоэдс. В приборе создается вакуум не ниже 10⁻³ мм.рт.ст. Образец 1 ставится на блок 2, служащий в качестве приемника тепла. Градиент температур вдоль образца измеряется с помощью медь-константановых термопар.

На рис. 3 и 4 представлена температурная зависимость теплового сопротивления решетки GaSb, легированного цинком и теллуром, соответственно, а также чистого GaSb (1). Оценка электронной теплопроводности по закону Видемана—Франца показала, что во всех образцах, кроме 1,5Ц20, она незначительна. Наибольшее значение, которого она достигает в этом образце, составляет не более 15% общей теплопроводности. Фононная теплопроводность во всех образцах в интервале 250÷600°K подчиняется закону T⁻¹, что указывает на доминирующую роль трехфононных процессов.

Как видно из рис. 3 и 4, температурная зависимость теплового сопротивления становится более сильной в глубоколегированных образцах, т. е. рассеяние фононов на фононах становится более эффективным при наличии примесей. Такую закономерность мы ранее наблюдали также в GaAs и InSb. Качественно ее можно объяснить следующим образом. При наличии примесей возможно комбинированное рассеяние с участием трех фононов и примесного атома. На теоретическую возможность такого процесса указывает ряд авторов [8, 9]. Однако такие процессы маловероятны, так как они означают одновременную встречу нескольких частиц в одной точке. Поэтому эти результаты можно объяснить иначе.

Известно, что трехфононные процессы осуществляются с сохранением квазиимпульса взаимодействующих фононов (нормальные процессы) и без сохранения его (процессы переброса). Нормальные процессы сами по себе не создают теплового сопротивления, однако приводят к перераспределению импульса между фононами и косвенно могут влиять на теплопроводность. При наличии примесей роль нормальных процессов сводится к следующему. Длинноволновые фононы в результате нормальных процессов передают свой импульс коротковолновым, а последние очень эффективно рассеиваются на примесях, так как по теории Клеменса вероятность рассеяния фононов на точечных дефектах пропорциональна ω^4 . Вероятность такого комбинированного рассеяния должна быть пропорциональна числу нормальных процессов (т. е. температуре) и числу примесей, что действительно имеет место (рис., 3, 4).

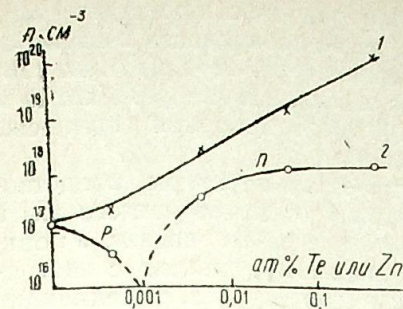


Рис. 1. Зависимость концентрации носителей тока GaSb от атомного процента цинка и теллура.

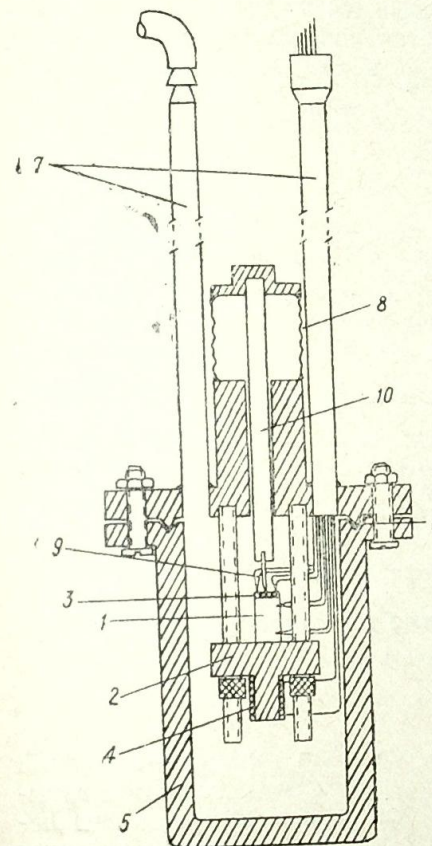


Рис. 2. Схема прибора для измерения коэффициента теплопроводности: 1 — образец; 2 — холодильник-приемник тепла (медь, латунь); 3 — нагреватель; 4 — нагреватель для создания промежуточных температур; 5 — корпус прибора (латунь); 6 — вакуумное уплотнение из алюминия или красной меди; 7 — мельхиоровые трубки для выводов проводов термопар и нагревателей и откачки воздуха; 8 — сильфон; 9 — шток из плавящего кварца с заостренным концом; 10 — шток из нержавеющей стали.

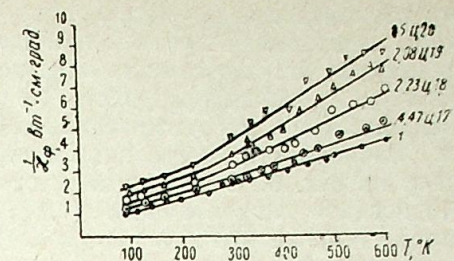


Рис. 3. Температурная зависимость теплового сопротивления GaSb, легированного цинком.

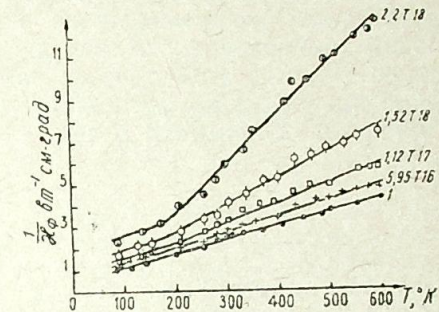


Рис. 4. Температурная зависимость теплового сопротивления GaSb, легированного теллуром.

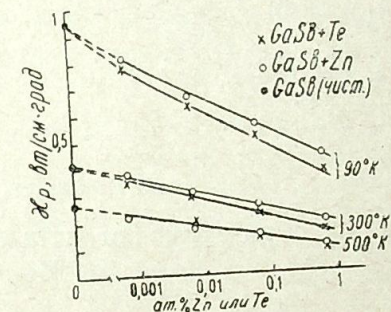


Рис. 5. Зависимость теплопроводности решетки GaSb от концентрации примесей.

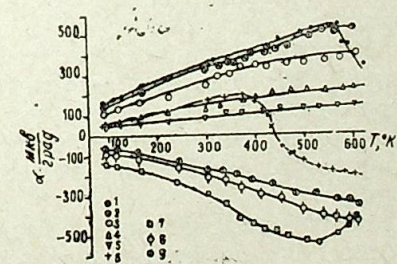


Рис. 6. Температурная зависимость термоэдс GaSb, легированного цинком и теллуром.

На рис. 5 показана зависимость теплопроводности решетки GaSb от концентрации примесей. Как видно, теплопроводность зависит от типа легирующей примеси при низкой температуре. При высоких температурах эта зависимость исчезает. Как и в случае Ge [10], GaAs и InSb [6, 7], теплопроводность при легировании донорной примесью меньше, чем при легировании акцепторной.

Зависимость коэффициента термоэдс α от температуры представлена на рис. 6. С повышением температуры α образцов чистого GaSb (1) и слабо легированного (1,12T17) растет, а затем падает. Уменьшение α после 570°K в чистом GaSb, по-видимому, связано с наступлением собственной проводимости. Как видно из рис. 6, тенденция прохождения α через максимум имеет место и в других образцах. При этом начало уменьшения термоэдс зависит от концентрации примесей. Температурная зависимость α образца 5,95T16 отличается от других тем, что уменьшение термоэдс в нем начинается при более низкой температуре, которая не наблюдалась у других. При температуре ~40°K в этом образце наблюдается инверсия знака термоэдс. Такое поведение коэффициента термоэдс, видимо, связано с сильной компенсацией примесей в нем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sagar A. Phys. rev., 117, 1, 93, 1960.
2. Иоффе А. В. и Иоффе А. Ф. „ДАН СССР“, XCVII, № 5,821, 1954.
3. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М., Башшалиев А. А., Керимов И. Г. Тр. ФИАН Азерб. ССР, т. XI, 46, 1963.
4. Weiß H. Ann. phys., 4. № 1—5, 121—131, 1959.
5. Holland M. G. Phys. rev., 2A, A471, 139, 1964.
6. Алиев М. И. и Ахмедли Г. Т. „Изв. АН СССР, СССР, серия физич.“, 28, № 6, 977, 1964.
7. Алиев М. И. и Ахмедли Г. Т. „Изв. АН Азерб. ССР, серия ФТМН“, № 4, 95, 1964.
8. Carruthers P. Phys. rev., 126, 4, 1448, 1962.
9. Abeles B., Beers D. S., Cooly G. D. and Dismukes J. P. Phys. rev., 125, 1, 44 1962.
10. Алиев М. И., Фистуль В. И. и Араслы Д. Г. ФТТ, 6, 3700, 1964.

М. И. Элиев, Г. И. Сәфәралиев

Галлиум-сүрмәнин истиккечирмә вә термоэлектрик һәрәкәт гүввәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә синк вә теллурла лекирә олунмуш галлиум—сүрмәнин истиккечирмә вә термо эһг-нин температурдан вә ашгарларын гатылыгындан асылылыгы верилмишдир. Бундан әлавә, нүмунәларин һа-зырланма вә өлчүлмә үсулу һаггында да гыса мә'лумат верилмишдир.

Истиккә мугавимәтинин температурдан асылылыгы кәстәрир ки, ашгарларын гатылыгы артдыгча истиккә мугавимәти температурун жүксәлмәси илә даһа кәскин артыр (3—4-чү шәкилләр). Башга сөзлә, фононларын фононлардан сәпилмәси ашгарларын артмасы илә даһа кәскин олур. Бу, фононларын комбинә олунмуш сәпилмәси илә изаһ едилир.

Мүәјјән едилмишдир ки, ашгарларын тә'сирилә GaSb-ун истиккә-кечирмәсинин дәјишмәси ашгарларын нөвүндән асылыдыр (5-чи шә-кил).

6-чы шәкилдә нүмунәларин термо эһг-нин температурдан асылы-лыгы кәстәрилмишдир.

О. Н. НОВРУЗОВ

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ ИМПУЛЬСНЫМ МЕТОДОМ

1. В настоящее время все больше внимания уделяется разработке нестационарных методов определения термических коэффициентов (теплопроводности и температуропроводности) твердых тел, в том числе методов, использующих мгновенные или непрерывные точечные источники тепла. Эти методы позволяют проводить измерения быстро в широком интервале температур, на малых образцах и при малых разностях температур на образце. Преимущества эти делают их весьма привлекательными.

Особенно просто определяется методами нестационарного режима температуропроводность:

$$D = \frac{\kappa}{cd}, \quad (1)$$

где κ —теплопроводность, c —удельная теплоемкость, d —плотность.

В настоящей статье мы рассмотрим один из возможных вариантов определения коэффициента температуропроводности полупроводников, отличающихся простотой, скоростью и хорошей точностью.

2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$D \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

математически описывает перенос тепла в образце, выражая связь между изменениями температуры тела во времени и объеме.

В соответствующей литературе [1,2] можно найти решения дифференциального уравнения теплопроводности для множества самых разнообразных краевых условий и некоторые из этих решений могут быть легко положены в основу экспериментальных методов определения D . В последнее время описан ряд методов, основанных на применении мгновенных или непрерывных точечных источников тепла, действующих на поверхности или в объеме тела. Простейшим случаем будет такой, когда точечный источник установлен на поверхности полуограниченного тела.

Экспериментально точечный источник осуществляется разными способами: например, пропусканием тока через металлический контакт малой площади (круглый диск или полусферический), установленный на образце, или при помощи тонких световых и электронных

пучков, направляемых на поверхность образца. Решение уравнения (2) для случая потока тепла от контакта малой площади на поверхности полуограниченного тела в отсутствие излучения с поверхности образца хорошо известно для разных краевых условий. Если контакт представляет собой не только изотермическую, но и эквипотенциальную поверхность, то тепловая задача формально идентична электрической [3, 4].

Если точечный источник тепла с постоянной мощностью Q действует в интервале времени от $t=0$ до $t=t$, то распределение температуры в полуограниченном теле описывается выражением

$$T = \frac{Q}{2\pi\kappa r} \left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right) \right]. \quad (3)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-y^2] dy$ — интеграл вероятности Гаусса. При

$t = \infty$ выражение (3) дает $T = \frac{Q}{2\pi\kappa r}$, т. е. установившееся распре-

деление температуры для случая распространения тепла в полуограниченном теле от точки (x', y', z') , к которой подводится тепло. В точке, находящейся от источника на расстоянии r , температура достигает максимального значения в момент времени $t = r^2/6D$. Это соотношение впервые использовал Кремпаский [5, 6] для определения D термоэлектрических материалов.

Решение уравнения Лапласа при излучении с поверхности было получено Бардиным [7] на примере формально аналогичной задачи о диффузии неосновных носителей тока в полупроводнике вблизи точечного контакта при наличии поверхностной рекомбинации. Детальный анализ соответствующей тепловой задачи выполнил Катлер [8], результатами которого мы будем в дальнейшем широко пользоваться.

3. Величину D можно определить, наблюдая либо переходный процесс установления температуры точечного контакта при подаче на него в течение некоторого времени постоянной мощности Q (уравнение (3)), либо изменение кривой релаксации при выключении источника тепла. Температуру контакта в процессе нагревания можно измерять по изменению сопротивления контакта $\delta R(t)$ или по величине развивающейся на контакте с образцом термоэдс $\delta V(t)$. Кривые релаксации при выключении мощности удобно измерять по изменению термоэдс. Рассмотрим этот процесс подробнее. Форма кривой релаксации будет зависеть как от D , так и от геометрии контакта. Последнее обстоятельство практически исключает возможность абсолютного определения D этим методом, однако не мешает относительному определению температуропроводности с точностью до некоторого постоянного коэффициента. При этом исключается необходимость определения размера и формы контакта малой площади.

Как показал Катлер [8], исходные уравнения для полусферического контакта малого радиуса a имеют следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \nabla^2 T; \quad (4)$$

$$T = T_0 \frac{a}{r} \quad \text{при } t = 0 \text{ и } r > a; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = a \text{ и } t > 0, \quad (6)$$

где

$$T_0 = \frac{Q}{2\pi\kappa a}. \quad (7)$$

Решение их методом преобразования Лапласа дает

$$T(t) = \frac{aT_0}{r} \left\{ 1 + \exp\left[\left(\frac{r}{a} - 1\right) + \frac{Dt}{a^2}\right] \cdot \Phi^*\left[\frac{(Dt)^{1/2}}{a} + \frac{r-a}{2(Dt)^{1/2}}\right] - \Phi\left[\frac{r-a}{2(Lt)^{1/2}}\right] \right\}. \quad (8)$$

При $r = a$ это уравнение приводится к виду

$$T(t) = \frac{Q}{2\pi\kappa a} \exp\left(\frac{Dt}{a^2}\right) \cdot \Phi^*\left(\frac{Dt}{a^2}\right); \quad (9)$$

здесь $\Phi^*(x) = 1 - \Phi(x)$.

Для $Dt \gg a^2$ уравнение (8) приводится к виду

$$T(t) = \frac{Q}{2\pi\kappa \sqrt{\pi Dt}}. \quad (10)$$

Уравнение (10) пригодно для контакта любой формы при условии, что $(Dt)^{1/2}$ велико по сравнению с радиусом контакта.

Если построить отношение $T(t)/T(0)$ (или соответственно отношение $\delta R(t)/\delta R(0)$ или $\delta V(t)/\delta V(0)$ как функцию $\lg t$, то кривые для разных температур будут параллельны друг другу и смещены по оси времени. Это смещение будет определять $D(T)$ с точностью до безразмерного параметра. Мы использовали для определения $D(T)$ другой, более удобный в практическом отношении прием, определяя осциллографически время $t_{1/2}$, при котором

$$T(t_{1/2}) = \frac{1}{2} T(0). \quad (11)$$

Из уравнения (9) следует, что

$$T(0) = \frac{Q}{2\pi\kappa a}. \quad (12)$$

Тогда, очевидно,

$$T(t_{1/2}) = \frac{1}{2} T(0) = \frac{Q}{4\pi\kappa a} \quad (13)$$

и уравнение (9) запишется в этом случае как

$$\frac{Q}{4\pi\kappa a} = \frac{Q}{2\pi\kappa a} \exp\left(\frac{Dt_{1/2}}{a^2}\right) \cdot \Phi^*\left(\frac{Dt_{1/2}}{a^2}\right), \quad (14)$$

откуда следует, что

$$\exp\left(\frac{Dt_{1/2}}{a^2}\right) \cdot \Phi^*\left(\frac{Dt_{1/2}}{a^2}\right) = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Обозначим $\left(\frac{Dt_{1/2}}{a^2}\right)^{1/2} = x$,

тогда

$$D = \frac{x^2 a^2}{t_{1/2}} = c \cdot t_{1/2}^{-1}. \quad (16)$$

Определяя осциллографически значение $t_{1/2}$ при разных температурах легко найти величину D с точностью до постоянной.

Мы рассмотрели процесс охлаждения образца во времени от некоторой начальной температуры $T(0)$, установившейся под контактом в момент прекращения нагревания. Эту задачу можно свести к задаче на нагревание путем замены переменной.

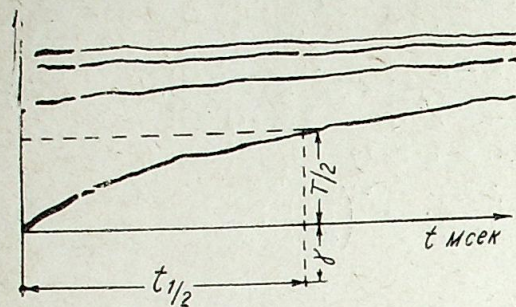


Рис. 1. Осциллограмма изменения температуры (как $\Delta R(T)$) точечного контакта при подаче на него импульса напряжения n -Ge; γ — разбаланс моста.

За процессом можно наблюдать, измеряя δV или δR . При выключении напряжения, за изменением температуры нагретой области удобно следить по изменению термоэдс.

Напряжение, возникающее в том и другом случае в диагонали моста, усиливается измерительным усилителем постоянного тока УИПП-2 и фотографически регистрируется на экране осциллографа ЭНО-1. Длительность сигналов измеряется при помощи калиброванных отметок времени от 0,02 до 200 мсек с точностью до $\pm 5\%$.

На рис. 1 изображена осциллограмма изменения температуры точечного контакта на n -Ge при подаче на него импульса напряжения. Для увеличения точности определения $t_{1/2}$ время развертки сигнала подбирается в несколько раз (3—4) меньше, чем время установления стационарного состояния. Так как нагрев точечного контакта выше

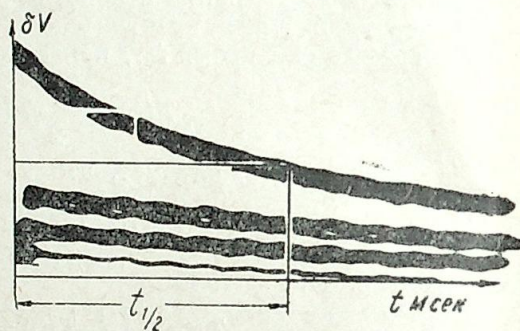


Рис. 2. Осциллограмма изменения термоэдс $\Delta V(t)$ при охлаждении точечного контакта после выключения импульса тока (n -Ge).

средней температуры образца никогда не превышает $1 \div 5^\circ\text{C}$, то можно быть уверенным, что δV или δR всегда пропорционально ΔT .

Осциллограмма рис. 2 изображает изменение термоэдс $\Delta V(t)$ при охлаждении точечного контакта после снятия импульса тока. Так как запуск развертки осциллографа ЭНО-1 от внутренней ждущей развертки происходит с запаздыванием $2 \div 3 \cdot 10^{-6}$ сек, то начальный участок переходного процесса не регистрируется. Для снятия зависимости $D(T)$ образец помещают в печь, температуру которой можно плавно регулировать. Для предотвращения окисления образцов измерения производились в вакууме или атмосфере нейтрального газа. Температура образца измерялась термопарой (хромель-алюмель).

Точечные контакты к образцам изготовлялись из W , Mo , Ta или Pt проволоки диаметром 0,1—0,2 мм. Для лучшей стабилизации контакта обычно приваривали к образцу. Контакт большой площади наносили электролитически, вжиганием серебряной пасты или иным способом. Искажение температурного поля в области точечного контакта, вносимое утечкой тепла по самому металлическому точечному контакту, согласно оценкам Катлера [8] и Кремпаского [6] мало и им практически можно пренебречь.

5. Для проверки метода и оценки его возможностей была измерена температурная зависимость коэффициента температуропроводности трех полупроводниковых материалов: монокристаллов n -Ge и n -PbSe и поликристаллических образцов $Li_xNi_{1-x}O$. Эти вещества сильно отличаются друг от друга своими электрическими и тепловыми свойствами.

На рис. 3 показана зависимость $D(T)$ для образца n -Ge (с удельным сопротивлением $\rho = 0,4$ ом·см при комнатной температуре), определенная по зависимости $t_{1/2}(T)$ в пределах -25 — 650°C . Наши данные показаны точками. Кривая 1 получена Абельсом и др. [9] для монокристаллического n -Ge с удельным сопротивлением при комнатной температуре $\rho = 0,3$ ом·см.

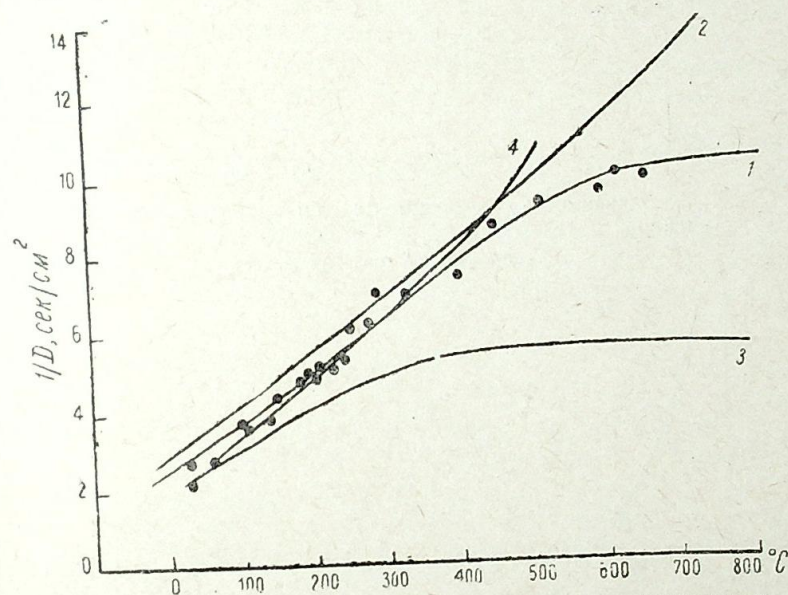


Рис. 3. Зависимость обратного коэффициента температуропроводности n -Ge от температуры: $\bullet$ — экспериментальные точки; кривые 1, 2, 3, 4 взяты из [9, 10, 11, 12].

Кривые 2, 3 и 4 построены нами путем обработки опубликованных в литературе [10, 11, 12] графиков температурной зависимости коэффициента теплопроводности образцов Ge разного удельного сопротивления. Значения удельной теплоемкости германия при разных температурах вычислялись по эмпирической формуле [13]; $C_p = 4,62 + 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ кал} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$ (в интервале 273 — 713°K). Плотность Ge при 20°C бралась $d = 5,32 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ и изменение ее с температурой не учитывалось. Поправка составила бы около 1%. В области 20 — 500°C наши данные хорошо согласуются с результатами работ [9, 10, 12]. Выше 650°C измерения неустойчивы из-за реакции металлических контактов с образцом.

На рис. 4 показана температурная зависимость коэффициента температуропроводности спеченного образца $\text{Li}_{0,03}\text{Ni}_{0,94}\text{O}$ (сплошная кривая), вычисления нами по температурной зависимости теплопроводности и удельной теплоемкости. Точками нанесены результаты определения $D(T)$ для спеченного образца $\text{Li}_{0,12}\text{Ni}_{0,88}\text{O}$ импульсным

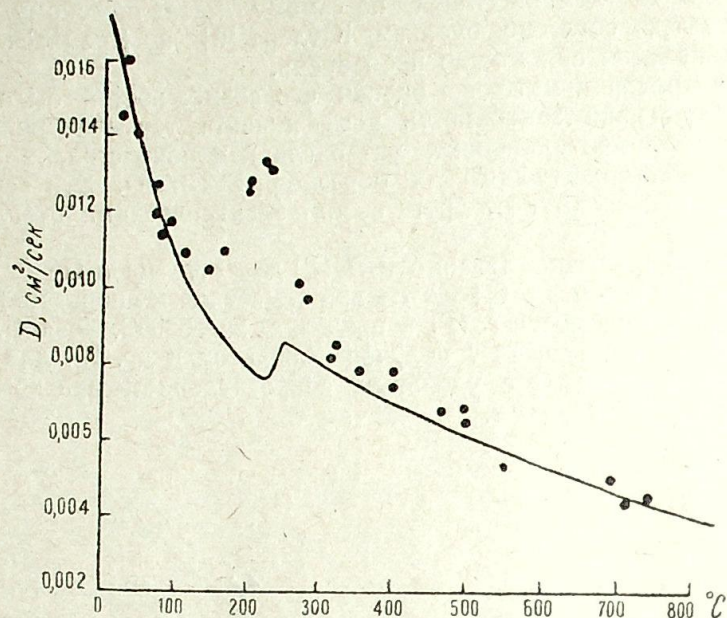


Рис. 4. Зависимость коэффициента температуропроводности спеченного образца $\text{Li}_{0,12}\text{Ni}_{0,88}\text{O}$ от температуры; ● — экспериментальные точки.

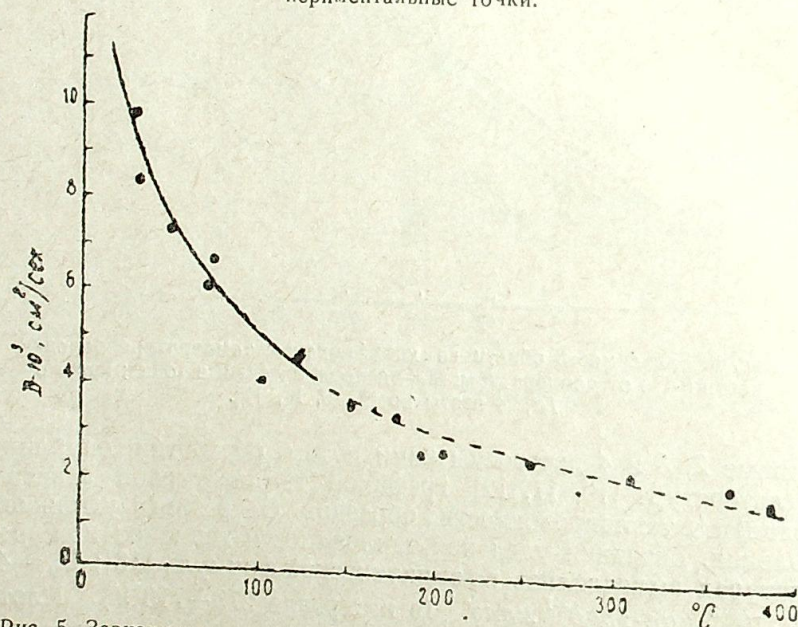


Рис. 5. Зависимость коэффициента температуропроводности монокристаллического $n\text{-PbSe}$ от температуры; ● — экспериментальные точки. Температурная зависимость теплопроводности $\text{Li}_{0,06}\text{Ni}_{0,94}\text{O}$ была определена в нашей лаборатории [14]. Значения удельной теплоемкости взяты из работы Шимомуры и Тсубокавы [15]. Плотность

образца $\text{Li}_{0,06}\text{Ni}_{0,94}\text{O}$ при 20 °C составляла $d = 5,6 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Изменение ее с температурой, как и в предыдущем случае, не учитывалось. На температурной зависимости $D(T)$ отчетливо наблюдается аномалия в области температуры Неэля. Провести измерения на чистых монокристаллах NiO нам не удалось из-за очень высокого их сопротивления.

На рис. 5 представлены результаты измерения $D(T)$ монокристалла PbSe (точки). Сплошная кривая получена расчетным путем из температурной зависимости теплопроводности PbSe , измеренной Е. Д. Девятковой и И. А. Смирновым [16], и значения удельной теплоемкости из работы [17]. В области измерений $C_p = \text{const} = 11,9 \text{ кал} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$. Плотность PbSe $d = 8,15 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Выше 150 °C значения коэффициента теплопроводности вычислены в предположении рассеяния фононов на фононах (пунктир).

Из приведенных на рис. 3, 4 и 5 данных видно, что методика работы удовлетворительна в широком диапазоне температур и значений коэффициента D . Ее можно рекомендовать для быстрого определения $D(T)$ полупроводников. Легко распространить эту методику и в область низких температур. Ограничением этого метода является трудность измерения как очень высокоомных, так и низкоомных образцов.

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить В. П. Жузе за предложение темы и руководство работой. Искренне благодарю также сотрудников лаборатории А. И. Шелых, В. З. Чуканова и Н. Ф. Шварценау за помощь и советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., 1952.
2. Карслоу Г. и Егор Д. Теплопроводность твердых тел. М., 1964.
3. Ollendorff F. Potentialfelder der Elektrotechnik. Berlin, Springer, 1932.
4. Jones L. The Physics of Electrical Contacts, London, 1957.
5. Krempasky I. Čs. Cas. Fys. 12, 353, 1962.
6. Krempasky J. Czech. J. Phys., 14, 533, 1964.
7. Bardeen J. Bell System Tech. J., 29, 469, 1950.
8. Cutler M. J. Appl. Phys., 32, 1075, 1961.
9. Abeles B., Cody G. D., Beers D. S. Appl. Phys., 31, 1585, 1960.
10. Abeles B., Beers D. S., Cody G. D., Dismukes J. P. Phys. Rev., 125, 44, 1962.
11. Kettel F. J. Phys. Chem. Solids., 10, 52, 1959.
12. Slack G., Glassbrenner C. Phys. Rev., 120, 782, 1960.
13. Кубашевский О., Эванс Э. Термехимия в металлургии. ИЛ, М., 1954.
14. Шелых А. И., Мелик-Давтян Р. Л., Шварценау Н. Ф. Неорганические материалы, 1, 1965.
15. Shimomura V., Tsubokawa I. J. Phys. Soc. Japan, 9, 1954.
16. Девяткова Е. Д., Смирнов И. А. ФТТ., 2, 1934, 1960.
17. Parkinson D. H., Quarrington J. E. Proc. Phys. Soc., A67, 569, 1954.

О. Н. Новрузов

Импульс үсүлү илэ жарымкечиричилэрин температур кечиричилијинин өлчүлмэси

ХУЛАСӘ

Жарымкечиричилэрин јүксәк температурларда температур кечиричилијини өлчмәк үчүн импульс үсүлү ишлэниб тәдгиг едилмишдир. Бу үсүллә $n\text{-Ge}$, $n\text{-PbSe}$ монокристаллары вә NiO (Li ашгарлы) поликристалынын температур кечиричилијини өлчүлмүшдүр. Алынған нәтичәләр әдәбијатда олан мәлүматларә ујғун кәлир.

Н. ГУЛИЕВ, А. РУСТАМОВА

СЛАБАЯ АННИГИЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ

Постановка экспериментов на встречных электронных и позитронных пучках делает возможным изучение ряда процессов с аннигиляцией электронно-позитронной пары. В частности, при определенных условиях может стать возможным изучение слабой аннигиляции упомянутой пары в нейтринную [1]. Наряду с рассеянием нейтрино на электроны этот процесс может быть использован для непосредственной проверки существования прямого (νe) взаимодействия. Экспериментальные возможности для осуществления аннигиляции более благоприятны, нежели возможности рассеяния.

Процесс слабой аннигиляции электронно-позитронной пары исследован рядом авторов в предположении контактного взаимодействия с определенной поляризацией участвующих в реакции частиц [2]. Однако представляет также интерес изучение слабой аннигиляции $e^+ e^- \rightarrow \nu \bar{\nu}$ через промежуточные векторные мезоны для выяснения особенностей поведения сечения процесса при больших энергиях.

Предполагается, что слабое взаимодействие переносится заряженными и нейтральными мезонами, хотя существование первых проблематично, а последних — сомнительно [3]. Аналогично ряду работ допускается наличие у нейтрино зарядового формфактора, индуцированного различными виртуальными процессами.

При этом матричный элемент процесса после „фирцевания“ примет следующий вид (соответствующие диаграммы изображены ниже):

$$M = M_W^- + M_{W^0} + M_\gamma;$$

$$M_W = 4\pi f_1^2 \bar{u}(p_2) O_\alpha u(p_1) \frac{\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_{1\alpha} q_{1\beta}}{M_1^2}}{q_1^2 - M_1^2} \bar{u}(\kappa_1) O_\beta u(\kappa_2);$$

$$M_{W^0} = -4\pi f_1^2 \bar{u}(p_2) O_\alpha u(p_1) \frac{1}{q_2^2 - M_2^2} \bar{u}(\kappa_1) O_\alpha u(\kappa_2);$$

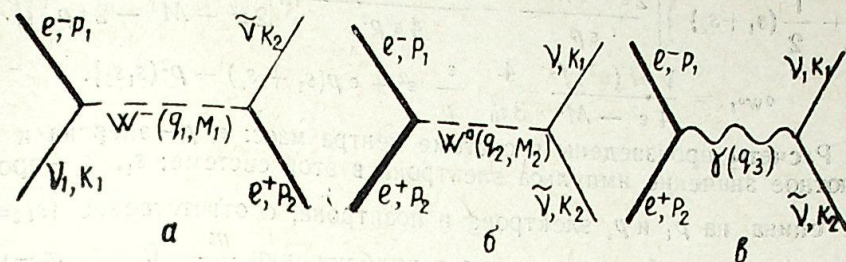
$$M_\gamma = \sqrt{\alpha} F(q^2) q_2^{-2} \bar{u}(p_2) \gamma_\alpha u(p_1) \bar{u}(\kappa_1) O_\alpha u(\kappa_2);$$

$F(q^2)$ — зарядовый формфактор нейтрино. Полагаем $f_1 = f_2 = f$, $M_1 = M_2 = M$;

$\frac{8\pi f^2}{\sqrt{2}M^2}$ — G константа слабого взаимодействия, метрика определяется

следующим выражением $p^2 = \varepsilon^2 - \vec{p}^2 = m^2$.

Остальные обозначения понятны из нижеследующей диаграммы. Вычисления сечений производятся стандартным методом с учетом поляризаций электрона и позитрона.



Ясно, что для такого процесса можно вычислить полное сечение без конкретизации вида формфактора $F(q^2)$, так как q^2 не зависит от углов.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{W^-} + \sigma_{W^0} + \sigma_\gamma + \sigma_{W^- \gamma} + \sigma_{W^0 \gamma} + \sigma_{W^- W^0}; \\ \sigma_W &= 8\pi f^4 \frac{\varepsilon}{p} \left\{ 2 \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon p (s_1 + s_2) + p^2 (s_1 s_2)}{(2\varepsilon^2 + M^2)^2 - 4\varepsilon^2 p^2} - \right. \\ &\quad - \left(1 + \frac{\varepsilon}{p} (s_1 + s_2) + s_1 s_2 \right) \left[\frac{1}{2\varepsilon p} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| - \right. \\ &\quad - \left. \frac{2(2\varepsilon^2 + M^2)}{(2\varepsilon^2 + M^2)^2 - 4\varepsilon^2 p^2} \right] - \left(\frac{p}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} (s_1 + s_2) + \right. \\ &\quad + \left. s_1 s_2 \left[\frac{2\varepsilon^2 + M^2}{\varepsilon^2 p^2} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2\varepsilon p} - \frac{(2\varepsilon^2 + M^2)^2}{\varepsilon p [2\varepsilon^2 + M^2]^2 - 4\varepsilon^2 p^2} \right] \right\}; \\ \sigma_{W^0} &= \frac{16\pi f^4}{3} \frac{\varepsilon}{p} \frac{4}{(4\varepsilon^2 - M^2)^2} [\varepsilon^2 + \varepsilon p (s_1 + s_2) + p^2 (s_1 s_2)]; \\ \sigma_\gamma &= \frac{\alpha F(q^2)}{24\pi} \frac{\varepsilon}{p} \frac{1}{\varepsilon^4} [\varepsilon^2 + p^2 (s_1 s_2)]; \\ \sigma_{W^- W^0} &= -\frac{8\pi f^4}{4\varepsilon^2 - M^2} \frac{\varepsilon}{p} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{p} + (s_1 + s_2) + \frac{p}{\varepsilon} (s_1 s_2) \right) \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| + \right. \\ &\quad + 2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{p} (s_1 + s_2) + s_1 s_2 \right) \left[\frac{2\varepsilon^2 + M^2}{4\varepsilon p} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| - 2 \right] - \\ &\quad - \left(\frac{p}{\varepsilon} + (s_1 + s_2) + \frac{\varepsilon}{p} (s_1 s_2) \right) \left[\frac{2\varepsilon^2 + M^2}{\varepsilon p} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2\varepsilon^2 + M^2)^2}{4\varepsilon^2 p^2} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| \right] \right\}; \\ \sigma_{W^- \gamma} &= -\frac{\sqrt{\alpha} F(q^2) f^2}{4\varepsilon^2} \frac{\varepsilon}{p} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{p} + (s_1 + s_2) + \right. \right. \\ &\quad + \left. \frac{p}{\varepsilon} (s_1 s_2) \right) \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| - \left(1 + \frac{\varepsilon}{p} (s_1 + s_2) + s_1 s_2 \right) \left[2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\varepsilon^2 + M^2}{2\varepsilon p} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| \right] - \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{1}{2} \frac{p}{\varepsilon} + 4 \frac{\varepsilon}{p} (s_1 s_2) + \frac{1}{2} (s_1 s_2) \frac{p}{\varepsilon} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (s_1 + s_2) \right) \left[\frac{2\varepsilon^2 + M^2}{\varepsilon p} - \frac{(2\varepsilon^2 + M^2)^2}{4\varepsilon^2 p^2} \ln \left| \frac{2\varepsilon^2 + M^2 + 2\varepsilon p}{2\varepsilon^2 + M^2 - 2\varepsilon p} \right| \right]; \\ \sigma_{W\gamma} = \frac{\sqrt{\alpha} F(q^2) f^2}{4\varepsilon^2 - M^2} \frac{4}{3\varepsilon_0^2} \frac{\varepsilon}{p} [\varepsilon^2 + \varepsilon p(s_1 + s_2) + p^2(s_1 s_2)].$$

Расчеты произведены в системе центра масс: ε , p — энергия и абсолютное значение импульса электрона в этой системе; s_1 , s_2 — проекции спина на p_1 и p_2 электрона и позитрона, соответственно ($s_{1,2} = \pm 1$). Полное сечение приведено в приближении $\frac{m}{\varepsilon} \rightarrow 0$, где m — масса электрона.

При малых энергиях диаграммы а) и б) компенсируют друг друга как это следует и из работы [4] по рассеянию нейтрино на электроны. Однако при больших энергиях суммарный вклад этих диаграмм отличен от нуля и наблюдение прямого взаимодействия ($e\nu$) будет также отличным от нуля даже при малом значении формфактора нейтрино.

Если предположить, что нейтральный мезон отсутствует, то, исходя из будущих экспериментальных данных по аннигиляции, можно будет найти вид функции $f(q^2)$. Действительно, при сделанных предположениях можем записать, предполагая член σ_γ малым ($\sigma_\gamma \sim |f(q^2)|^2$),

$$\sigma_{\text{экс}} = \sigma_{W-}^{\text{теор}} + \sigma_{W-\gamma}^{\text{теор}} = F(q^2) \sigma_0(\varepsilon) + \sigma_{W-}^{\text{теор}};$$

$$F(q^2) = \frac{\sigma_{\text{экс}} - \sigma_{W-}^{\text{теор}}}{\sigma_0(\varepsilon)} = f(\varepsilon, M).$$

Так как основной вклад в сечение этого процесса, по-видимому, вносит W^- -мезон, то можно принять, что $\sigma_{\text{экс}} - \sigma_{W-}^{\text{теор}} = \beta$; β очень малая постоянная величина. Учитывая также, что при больших энергиях

$$\sigma_0(\varepsilon) = \frac{8\sqrt{\alpha} f^2}{\varepsilon^2} \text{ можно получить}$$

$$F(q^2) = \beta \frac{1}{8\sqrt{\alpha} f^2} \cdot \varepsilon^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе Б. Л., Окунь Л. Б. и Рудик А. П. Слабые взаимодействия на встречных электронных пучках, препринт № 246, ИТЭФ, 1954.
2. Соколов А. А., Иванов Ю. П. Ядерная физика, т. 1, вып. 3, 507, 1955.
3. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие и унитарная симметрия, препринт № 287, ИТЭФ, 1964.
4. Богущ А. А., Болсун А. И. Сацункевич И. С. Ядерная физика, т. 1, вып. 2, 288, 1965.

Н. Гулијев, А. Рустэмова

Электрон-позитрон чүтүнүн энф аннигилјасијасы

ХУЛАСӘ

Электрон-позитрон чүтүнүн вектор бозон васитәсилә нейтрино-антинейтрино чүтүнә чеврилмәси өјрәнилмиш вә нейтрино электромагнит формфакторунун вардыгы гәбул едилмишдир. Јүксәк енержиләрдә формфакторун енержидән асылылыгы тапылмышдыр.

М. А. ТАЛИБИ, Т. М. ВЕРДИЕВА и Е. Г. КРУТЕНЮК

ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ И СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ Se НА ФОРМИРОВАНИЕ p - n -КОНТАКТОВ Se—CdSe и Se—CdS

Свойства полупроводниковых приборов в значительной мере определяются поверхностными явлениями [1—4]. Влияние состояния поверхности Se на свойства вентиля рассмотрено в [6—10]. Однако ни в одной из этих работ не исследованы свойства селеновых p - n -гетеропереходов в зависимости от структуры поверхности селена, что сделано в настоящей работе.

Исследовались выпрямительные элементы Se—CdSe, Se—CdS, фотоэлементы Se—CdSe, а также слои Se. За основу были взяты заготовки, представляющие собой шероховатую висмутированную алюминевую подложку с напаренным слоем Se (с содержанием Br 0,03%). Эти заготовки подвергали кристаллизации при различных режимах, после чего поверхности некоторых образцов со стороны Se травили концентрированной азотной кислотой. Выпрямительные элементы Se—CdSe готовили набрызгиванием на слой Se сплава Cd—Sn, аналогично готовили выпрямительные элементы Se—CdS, для которых поверхность Se предварительно покрывали серой. Фотоэлементы готовили напариванием в вакууме полупрозрачного слоя Cd на Se. Для изучения удельного сопротивления селена ρ на его поверхность в качестве инеинжектирующего омического электрода напаривали слой висмута.

Поверхность изучали с помощью металлмикроскопа и по диффузному стражению монохроматических лучей 420—780 мкм на двухлучевом саморегистрирующем микрофотометре. Как известно, если поверхность тела представляет собой совокупность различным образом ориентированных площадок, размеры которых велики по сравнению с длиной волны λ , распределение диффузно отраженного света целиком определяется характером статического распределения площадок по ориентациям. При наших исследованиях это условие выполнялось.

Критерием, характеризующим степень кристаллизации, был выбран диаметр сферолитов— d , ρ — удельное сопротивление Se; состояние поверхности характеризует коэффициент диффузного отражения монохроматического излучения K . Свойства изготовленных p - n -контактов контролировались измерением их электрических и фотоэлектрических параметров.

Влияние времени кристаллизации (5—90 мин) при 130° С на микроструктуру поверхности Se показано на рис. 1. Со временем диаметр

сферолитов, увеличиваясь, достигает максимума ($d = 10^{-2}$ см). При дальнейшем повышении температуры происходит постепенное разрушение сферолитов. Осциллограммы динамических вольтамперных характеристик соответствующих вентилях при 50 гц и комнатной температуре приводятся на рис. 2. Как видно, по мере роста диаметра сферолитов формируется и совершенствуется $p-n$ -контакт. Результаты

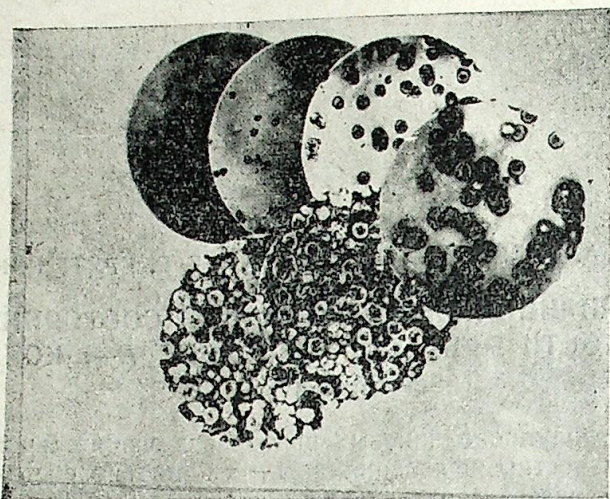


Рис. 1.

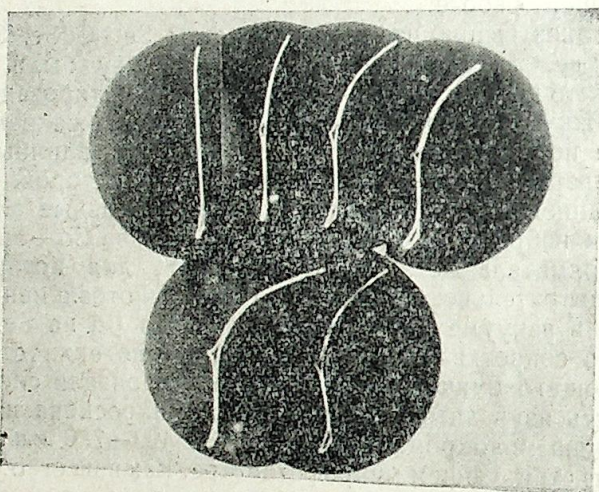


Рис. 2.

исследования K представлены на рис. 3, где нижнее семейство кривых относится к нетравленным поверхностям, верхнее — к травленным. С ростом времени кристаллизации, т. е. диаметра сферолитов d увеличивается K , что указывает на усложнение рельефа поверхности. При травлении K уменьшается примерно в 1,5 раза, что указывает на выравнивание рельефа поверхности.

Исследования барьерной емкости C для образцов $Se-CdSe$ с различным временем кристаллизации показали, что травление поверхности увеличивает C (рис. 4). Верхнее семейство кривых на этом рисунке соответствует образцам с предварительно травленной поверхно-

стью. Толщина области объемного заряда W (для травленных и нетравленных образцов) $\sim 10^{-5}$ см. В большинстве случаев зависимости $\frac{1}{C^2} = f(u)$ характерный для селеновых вентилях излом не наблюдается [13], что связано, по-видимому, с мелкодисперсностью $CdSe$.

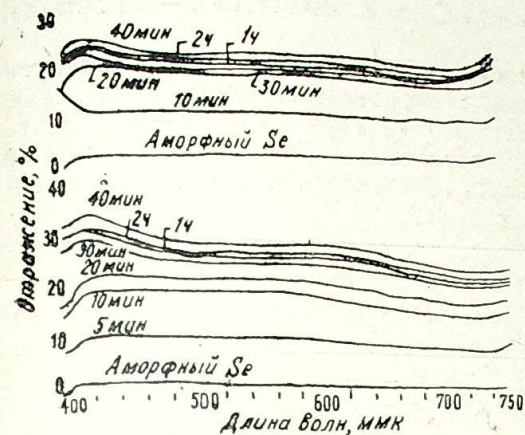


Рис. 3.

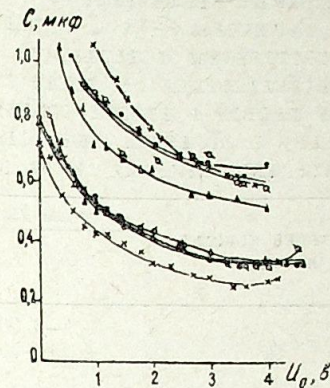


Рис. 4.

Для вычисления концентрации ионизованных примесных центров N в области объемного заряда пользовались формулой Шоттки;

$$N = \frac{8\pi}{\epsilon_{Se}} \left[\frac{d^2 u}{d \left(\frac{1}{C} \right)} \right], \text{ где}$$

ϵ — диэлектрическая постоянная, S — площадь, u — напряжение смещения в обратном направлении.

Величина N оказалась $\sim 10^{15} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Травление увеличивает N в 2–3 раза, соответственно снижая W . Емкость плоскостного вентиля определяется соотношением

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi W}.$$

Существенное изменение ϵ вследствие травления маловероятно. Следовательно, увеличение C при травлении связано либо с ростом S , либо с уменьшением W . Величина S является геометрическим фактором, связанным с рельефом поверхности, W определяется величинами r и N . Как было показано (рис. 3), травление уменьшает диффузное отражение, т. е. выравнивает поверхность, что должно привести к уменьшению S , а следовательно и C . Таким образом, рост емкости при травлении обусловлен преимущественно изменением N .

При исследовании слоев селена, напаренных на шероховатую висмутированную поверхность алюминиевых подложек, было установлено, что при 130°C преобладает рост кристаллитов как внутри (I стадия). Впоследствии наблюдается рост кристаллитов как внутри сферолитов, так и в межсферолитном пространстве [12]. При дальнейшем повышении температуры кристаллизации в результате роста кристаллитов исчезают контуры сферолитов (II стадия), т. е. происходит их дробление.

На рис. 5 для первой стадии кристаллизации проводится зависимость ρ селена и нулевого сопротивления соответствующих элементов R_0 от d и K . Как видно, R_0 и ρ монотонно убывают с ростом d и K . Таким образом, при первой стадии кристаллизации ρ и R_0 характеризуют проводимость слоя Se, а также ($p-n$) гетероперехода. По эквивалентной схеме вентиля обратные ветви вольтамперных характеристик будут определяться значениями R_0 и C , т. е. качеством $p-n$ -контакта, а прямые — величиной ρ .

Величины R_0 и C определяются как степенью кристаллизации, так и состоянием поверхности селена. ρ определяется всецело степенью кристаллизации Se. Ниже приводятся изменения ρ и R_0 $p-n$ -контакта при первой и второй стадиях кристаллизации. Причем к началу I-ой стадии в образцах уже содержались кристаллиты, образованные в процессе изготовления самих заготовок [12].

Стадия кристаллизации	ρ ом·см	R_0 ом·см	
		образцы нетравленные	образцы травленные
I	$1.6-4 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^{10}-0.9 \cdot 10^{10}$	$5 \cdot 10^9-2 \cdot 10^{10}$
II	$4 \cdot 10^5-10^4$	$0.6 \cdot 10^{10}-6.2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}-0.76 \cdot 10^{10}$

При первой стадии кристаллизации наблюдается уменьшение ρ и R_0 . Причем ρ уменьшается меньше, чем на порядок, при второй же стадии больше, чем на порядок, в целом — на два порядка. R_0 при первой стадии кристаллизации незначительно уменьшается, а при второй — увеличивается почти на порядок. Таким образом, двухстадийная кристаллизация селена способствует снижению ρ и росту R_0 для нетравленных образцов. При напаривании кадмия на слой селена I стадии кристаллизации образуемое в результате реактивной диффузии соединение CdSe, по-видимому, мелкодисперсно и обладает большим удельным сопротивлением. Для второй стадии кристаллизации удельное сопротивление CdSe снижается, что указывает на образование кристаллической структуры. Таким образом, при формировании $p-n$ -контакта в изменение ρ входит вклад и n полупроводника, связанный с переходом его из мелкодисперсного состояния в кристаллическое.

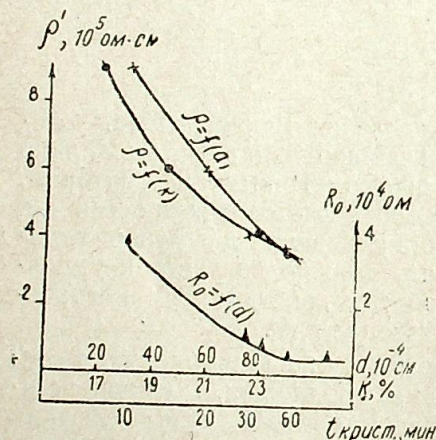


Рис. 5.

На рис. 6 представлены динамические вольтамперные характеристики Se—CdS (верхние снимки) и Se—CdSe (нижние снимки), полученные при 50 Гц, и соответствующие концу второй стадии кристаллизации (30 мин, 217°C). Характеристики с петлями соответствуют

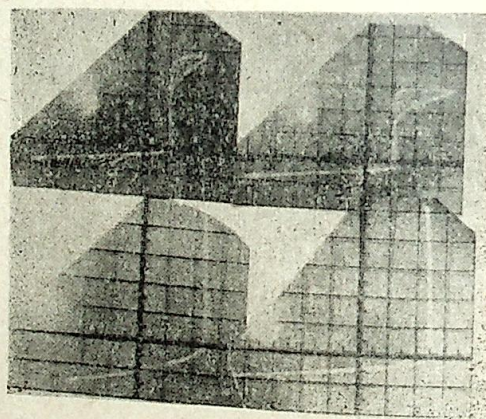


Рис. 6.

травленным образцам, что находится в согласии с данными барьерной емкости в статическом режиме. Измерения статических вольтамперных характеристик свидетельствуют о том, что, как и в динамическом режиме, химическая обработка поверхности селена уменьшает сопротивление $p-n$ -контактов Se—CdSe, Se—CdS в обоих направлениях.

Исследование фотоэлементов показало, что в зависимости от состояния поверхности селена перед нанесением кадмия интегральная а положения спектральных максимумов вентильного фототока сохраняются в пределах 5800—6000 Å. Положения максимумов соответствуют энергии активации ΔE 2 эВ, т. е. прямым межзонным переходам в селене.

Последнее может быть связано с тем, что ввиду небольшой толщины полупрозрачного верхнего электрода и n полупроводника вентильный фотоэффект в основном обусловлен решеточным поглощением в селене.

Выводы

1. Кристаллизация слоев селена, напаренных на шероховатые висмутированные алюминевые подложки, происходит в две стадии:

- а) сферолитическая кристаллизация;
- б) кристаллизация, обусловленная ростом внутрисферолитных и межсферолитных кристаллитов.

2. В первой стадии кристаллизации удельное сопротивление селена ρ и нулевые сопротивления соответствующих вентилях — R_0 монотонно убывают с ростом диаметра сферолитов и коэффициента диффузного отражения. При росте диаметра сферолитов от $2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-2} см ρ убывает от 10^6 до $4 \cdot 10^5$ ом·см, соответственно уменьшается R_0 от $4 \cdot 10^4$ до $5 \cdot 10^3$ ом.

3. Травление поверхности селена уменьшает коэффициент диффузного отражения монохроматических лучей, сглаживая его рельеф.

В результате для соответствующих вентилях увеличивается концентрация ионизованных примесных центров в области объемного заряда в 2—3 раза и образуется емкостная петля утечки обратной полуволны тока.

4. Максимумы спектральной чувствительности селеновых фотоэлементов соответствуют $\lambda = 5800-6000$ Å ($\Delta E = 2,14-2,07$ эВ), обусловлены решеточным поглощением, т. е. прямыми межзонными переходами, и их положения несущественно зависят от степени кристаллизации.

Интегральная же fotocувствительность в зависимости от степени кристаллизации селена увеличивается от 50 до 500 мкА/люмен и больше.

В заключение авторы выражают благодарность Г. А. Эфендиеву и К. П. Мамедову за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поверхностные свойства полупроводников. Сб. статей. Изд. АН СССР, 1962.
2. Файнштейн С. М. Роль состояния поверхности в производстве полупроводниковых приборов. Госэнергоиздат, М.—Л., 1961.
3. Ржанов А. В. Сб. статей "Исследование полупроводников и диэлектриков". Изд. АН СССР, М., 1963.
4. Поверхностные и контактные явления в полупроводниках. Изд. Томского ун-та, 1964.
5. Абдуллаев Г. Б. Полупроводниковые выпрямители. Изд. АН Азерб. ССР 1958.
6. Беленкова Л. Ю., Геллер И. Х., Наследов Д. Н., Тартаковская Ф. М. Радиотехника и электроника, 1956, №8.

7. Абдуллаев Г. Б., Алиев М. Г. Тр. Ин-та физики АН Азерб. ССР, т. X, 1960.
8. Бакиров М. Я., Абдуллаев Г. Б., Насиров Я. Н., Талиби М. А. Изв. АН Азерб. ССР, 1959, 5.
9. Бакиров М. Я., Талиби М. А., Абдуллаев Г. Б. Изв. АН Азерб. ССР, 1956, № 6.
10. Искендерзаде З. А., Абдуллаев Г. Б., Ахундов Г. А. Тр. Ин-та физики АН Азерб. ССР, т. XI, 1963.
11. Абдуллаев Г. Б., Башшалиев А. А. Тр. Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, т. 8, 1956.
12. Талиби М. А., Вердиева Т. М. Селен, теллур и их применение. Изд. АН Азерб. ССР, 1965.
13. Dolega. Zs. für Physik., 167, 1, 1962.

М. Ә. Талиби, Т. М. Вердиева, Ј. Г. Крутенјук

Селенин сәтһ гурулушу вә кристаллашма дәрәчә-
синин Se—CdSe вә Se—CdS $p-n$ кәчидләринин
әмәлә кәлмәсинә тәсиринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мүәјжән едилмишдир ки, висмутланмыш алүминиум әсасы үзәринә чәкилмиш селен тәбәгәсинин кристаллашмасы ики мәрһәләдә кедир:

а) сфералит шәкилли кристаллашма;

б) сфералит дахилиндә вә сфералитләр арасында олан кристаллит-
ләрин бөјүмәси нәтичәсиндә баш верән кристаллашма.

Кристаллашманын биринчи мәрһәләсиндә селенин хүсуси мугави-
мәти ρ вә ујғун вентилин сыфыр мугавимәти R_0 сфералитин вә диф-
фуз әксетмә әмсалынын артмасы илә монотон азалыр. Сфералитләрин
диаметри $2 \cdot 10^{-3}$ см-дән 10^{-2} см-ә гәдәр артдыгда ρ 10^6 ом·см-дән
 $4 \cdot 10^5$ ом·см-ә гәдәр, R_0 исә ујғун олараг $4 \cdot 10^4$ ом-дан $5 \cdot 10^4$ ом-а гә-
дәр азалыр.

Сәтһин ашындырылмасы селенин релјефини һамарлајыр. Бу исә өз
нөвбәсиндә монохроматик ишығын диффуз әксетмә әмсалынын азал-
масына сәбәб олур. Нәтичәдә белә селенә ујғун олан вентилләрдә
һәчми јүкләр областындакы ионлашмыш ашгарларын гатылыгы 2—3
дәфә артыр вә чәрәжанын әкс јарымдалғасында тутум иткиси илкәји
әмәлә кәлир.

Селен фотоэлементләри үчүн спектрал максимум— $\lambda = 5800$ —
— 6000 Å ($\Delta E = 2,14 - 2,07$ ев) гижмәтинә ујғун олуб, гәфәс удулмасы
илә, башга сөзлә, електронлар үчүн зоналарарасы кечидләрлә билава-
ситә әлагәдардыр вә максимумун јери селенин кристаллашма дәрәчә-
синдән чох аз асылдыр. Кристаллашма дәрәчәсиндән асылы олараг,
селенин интеграл фотоһәссаслығы исә $50 \frac{\text{мкА}}{\text{лүмен}}$ -дән $500 \frac{\text{мкА}}{\text{лүмен}}$ -ә гә-
дәр артыр.

АЗӘРБАЈҤАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1966, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 2

Е. С. БОРОВИК, М. Ш. МАМЕДОВ, В. Г. ВОЛОЦКАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДОЛГОВЕЧНОСТИ МЕДИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ УСЛОВИЯХ НАГРУЖЕНИЯ

При получении больших магнитных полей в катушках, охлаждае-
мых до низких температур, материал последних подвергается кратко-
временным импульсным нагрузкам. Как было показано [1], импульсная
прочность меди σ_n зависит от числа импульсов. С увеличением числа
импульсов она уменьшается. Исследования зависимости σ_n от числа
импульсов при различных нагрузках и измерения изменения сопроти-
вления при этом показали, что при длительной эксплуатации катушек
целесообразно работать в области малых нагрузок— 32 кг/мм^2 и ниже
[2]. При $\sigma = 32 \text{ кг/мм}^2$ и $T = 20,4^\circ \text{K}$ образец до разрыва выдерживает
300—400 импульсов, в то время как при $\sigma = 40 - 70 \text{ кг/мм}^2$ только
20—5 импульсов, соответственно.

Судя по изменению электросопротивления при нагрузках 32 кг/мм^2
в материале накапливается меньше дефектов, чем при более высоких
нагрузках и, по-видимому, с этим связано увеличение долговечности,
т. е. числа импульсов, которые образец выдерживает до разрыва. Мож-
но было надеяться, что часть дефектов, получившихся при импульсном
нагружении при низких температурах, может ликвидироваться при от-
жиге до более высоких температур и что такой отжиг приведет, соот-
ветственно, к увеличению долговечности меди. Поэтому решено было
исследовать изменение долговечности образцов при отогреве вначале
до комнатной температуры.

Результаты экспериментов

Эксперименты проводились на установке, описанной в работе [1].
При включенном внешнем магнитном поле через образец пропускался
импульс тока продолжительностью $\tau = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$. Величина нагруз-
ки регулировалась изменением плотности тока j . При $20,4^\circ \text{K}$ и опре-
деленной нагрузке давалось количество импульсов меньше, чем необ-
ходимо для разрушения образца.

Как правило, во всех экспериментах это количество импульсов
равнялось $n = 100$ (предварительное нагружение образца). Затем обра-
зец отогревали до комнатной температуры и выдерживали при этой
температуре около суток, после чего образец снова охлаждали до
 $20,4^\circ \text{K}$ и доводили до разрыва. Количество импульсов, которые выдер-
живает образец при данной нагрузке, характеризует долговечность
образца.

Одновременно с определением долговечности образца измерялось также его электрическое сопротивление. При нагрузке 32 кг/м^2 и $T = 20,4^\circ\text{K}$ образец без отжига выдерживает до разрыва 300—400 импульсов и сопротивление перед разрушением возрастает на 90—95% (рис. 1, кривая 1).

Сопротивление образцов измерялось после предварительного нагружения, а затем после отжига и повторного охлаждения до $20,4^\circ\text{K}$. Как видно из рис. 1 (кривая 2), после процедуры отжига сопротивление уменьшалось на 20—25% по сравнению с сопротивлением после предварительного нагружения. Это свидетельствует о том, что часть дефектов уходит в процессе отжига (или отжига). Дальнейшее испытание показало, что образец выдерживает 1000—1200 импульсов до разрыва и сопротивление его перед разрывом увеличивается на 100—115%. Таким образом, можно сказать, что предварительное нагружение при $20,4^\circ\text{K}$ и последующий отжиг до комнатной температуры приводят к увеличению долговечности образца. Для того чтобы найти наилучшие условия увеличения долговечности, исследовались свойства образцов при отжиге до различных температур и при различных предварительных нагрузках.

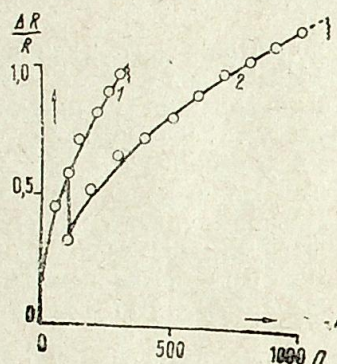


Рис. 1. Зависимость сопротивления от числа импульсов при $T = 20,4^\circ\text{K}$: кривая 1—без отжига; 2—отжиг при $T = 300^\circ\text{K}$ ($\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_n - R}{R}$, где R —сопротивление без нагрузки; R_n —сопротивление образца после n -го импульса)

Измерения показали, что при предварительном нагружении образцов (при $\sigma = 40\text{—}70 \text{ кг/мм}^2$) процедура отжига не приводит к увеличению их долговечности. Поэтому дальнейшие исследования проводились с нагрузкой $\sigma = 32 \text{ кг/мм}^2$. Отжиг образцов, кроме комнатной температуры ($T = 300^\circ\text{K}$), производили также до 330, 183 и 77°K .

Измерения при отжиге до 77°K (образец выдерживали в жидком азоте около суток) показали, что образцы в среднем выдерживают 800—1000 импульсов. За счет ухода дефектов при отжиге сопротивление уменьшается на 10—14%. Сопротивление образцов перед разрушением увеличивается на 120—130% (рис. 2, кривая 3). При отжиге до 183°K (образцы охлаждались газообразным азотом и температура контролировалась по их сопротивлению) и при последующих испытаниях при $20,4^\circ\text{K}$ образцы выдерживали в среднем 500—1000 импульсов. Сопротивление при $20,4^\circ\text{K}$ после отжига уменьшалось на 15—20%.

Отжиг до 330°K (образцы находились в течение двух часов в потоке горячего воздуха) практически не приводил к увеличению долговечности, несмотря на то, что после отжига сопротивление при $20,4^\circ\text{K}$ уменьшалось на 25—28%, т. е. уход дефектов наблюдался (рис. 2, кривая 2). Кроме отжига до более высоких температур, образец после предварительного нагружения выдерживали при $20,4^\circ\text{K}$ около суток. При этом сопротивление практически не менялось и образцы до разрыва выдерживали 300—400 импульсов, так же как и при непрерывном нагружении (рис. 2, кривая 4).

Обсуждение результатов

Как видно из экспериментальных данных, температура отжига существенным образом влияет на механические свойства меди. Самым благоприятным для увеличения долговечности является отжиг при 300°K . В этой области долговечность меди возрастает примерно в 3—3,5 раза. Наблюдается также увеличение долговечности при отжиге между комнатной и 77°K . При этом следует отметить, что повышение долговечности при отжиге 77°K несколько ниже, чем при отжиге до 300°K , а при температуре отжига 183°K наблюдается очень большой разброс данных. Наряду с малыми цифрами (400—500) наблюдался случай, когда долговечность достигла 2000 импульсов. В этом случае сопротивление перед разрывом возросло почти в 3 раза.

Отжиг при температуре выше комнатной приводит к резкому снижению долговечности по сравнению с отжигом при комнатной температуре. Долговечность при этом почти такая же, как у образцов без термообработки. Интересно отметить, что если при отжиге до 300°K сопротивление уменьшается на 20—25%, то уменьшение сопротивления при отжиге до 330°K почти такое же—25—28%, т. е. наблюдается резкое изменение в механических свойствах при относительно малом изменении сопротивления образцов.

Как известно [3], дефекты типа дислокаций существенно меньше увеличивают сопротивление, чем точечные. Поэтому можно предположить, что в области температур до 300°K , в основном при отжиге, ликвидируются точечные дефекты, сетка же дислокаций, возникновение которой, по-видимому, и приводит к увеличению упрочнения образца, сохраняются. При температуре же отжига 330°K происходит исчезновение дефектов типа дислокаций и соответственно резкое уменьшение долговечности.

Увеличению долговечности металлов при статических нагрузках посвящен ряд работ [4,5]. В работе [4] описывается низкотемпературная механикотермическая обработка, заключающаяся в том, что образцы предварительно деформируются на малую степень деформации в условиях глубокого охлаждения с последующим низкотемпературным отжигом.

Низкотемпературная деформация вызывает ряд особых структурных изменений, благоприятно влияющих на последующее поведение металлов при высоких температурах. В частности увеличивается долговечность. Но, как правило, в этом и в других известных способах употребляются очень короткие образцы, что ограничивает область их применения. Кроме того, в указанных способах приготовление образцов и сама операция обработки связаны с рядом трудностей. Предложенный нами способ повышения долговечности прост и обладает тем преимуществом, что может быть применен к готовым изделиям. Так, например, описанный способ можно применять к готовой катушке для получения импульсных магнитных полей.

Этот способ увеличения долговечности металлов оформлен Комитетом по делам изобретений и открытий в виде авторского свидетельства [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровик Е. С., Мамедов М. Ш., Волоцкая В. Г. ФММ, 1965, 19, 3 451.
2. Боровик Е. С., Мамедов М. Ш., Волоцкая В. Г. Пластическая деформация меди при импульсных нагрузках. Физика плазмы и проблемы управляемого синтеза (в печати).
3. Ван-Бюрен. Дефекты в кристаллах. Изд. ИЛ, 1962.
4. Гиндин И. А., Стародубов Н. Д., Ажажа В. М. Авт. свид. СССР, № 151690, 1962.
5. Одинг И. А., Иванова В. С., Авт. свид. СССР, № 143825, 1962.
6. Боровик Е. С., Мамедов М. Ш., Волоцкая В. Г. Способ увеличения долговечности меди. О выдаче авторского свидетельства. Решение Комитета по делам изобретений и открытий 15 июня 1965 г., № 908672/22—2.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника ва риязијјат елмләри серијасы, 1966, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 2

Р. Ш. КУЛИЕВ, А. К. АББАС-ЗАДЕ, Ш. С. ГАДЖИЕВ

ФОРМУЛА ДЛЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ НЕФТЯНЫХ МАСЕЛ

Изменение вязкости жидкостей с изменением температуры на практике имеет исключительно большое значение. Наличие формул, позволяющих с достаточной точностью определять вязкость нефтяных масел при различных температурах, является весьма интересным фактом.

В настоящее время существует несколько эмпирических и полуэмпирических формул, выражающих зависимость вязкости жидкости от температуры [1, 2, 3]. Некоторые из этих формул [4, 5, 6] имеют теоретическое обоснование и могут быть выведены. Большинство из них применяется к неассоциированным жидкостям, а для ассоциированных, какими являются, например, смазочные масла, многие дают неудовлетворительные результаты. Данная статья посвящается выводу формулы, связывающей вязкость нефтяных масел с температурой на основе экспериментально найденных нами значений вязкости.

Как известно, температурная зависимость вязкости выражается в быстром убывании ее с повышением температуры, что характерно для всех жидкостей. Учитывая сказанное, зависимость вязкости жидкости от температуры в области положительных температур можно выразить следующей показательной убывающей функцией:

$$\nu_t = \nu_{20} \cdot e^{-\alpha(t-20)}, \quad (1)$$

где t —температура, изменяющаяся в пределах:

$$20 \leq t \leq 100;$$

ν_t —кинематическая или динамическая вязкость при температуре t ;

ν_{20} —вязкость при 20° С;

α —температурный коэффициент вязкости.

На основании экспериментально найденных значений вязкости по формуле (1) может быть вычислено значение α при различных температурах. В табл. 1 указаны значения α для товарного дистиллята турбинного масла.

Таблица 1

Темп. °С	α по формуле (1)
30	0,06171
40	0,05720
50	0,05269
60	0,04923
70	0,04584
80	0,04308
90	0,04035
100	0,03737

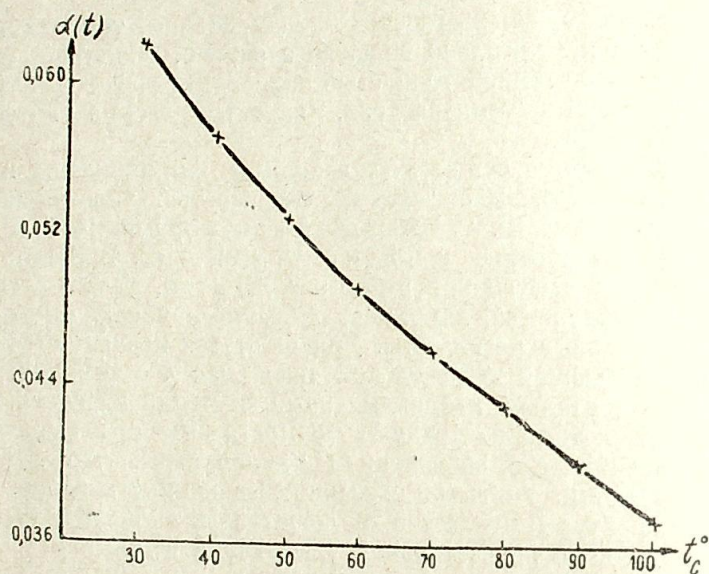
Данные табл. 1 показывают, что коэффициент α в уравнении (1) не остается постоянным, а изменяется с изменением температуры, причем с увеличением последней уменьшается. Зависимость значения $\alpha(t)$ от температуры графически изображена на рисунке.

Рассмотрение кривой показывает, что изменение величины $\alpha(t)$ в зависимости от температуры может быть представлено следующей функцией:

$$\alpha(t) = A \cdot e^{-\beta t} \quad (2)$$

В уравнении (2) A и β — константы, определяемые на основе экспериментальных значений $\alpha(t)$. Существуют различные методы [7] для определения коэффициентов A и β , но наиболее точным является метод наименьших квадратов, который и был использован нами при вычислениях. В результате получены следующие цифровые значения для A и β :

$$A = 0,07500 \text{ град}^{-1}, \quad \beta = 0,006954 \text{ град}^{-1}.$$



Зависимость $\alpha(t)$ от температуры

Подставляя значения A и β в уравнение (2), для температурной зависимости $\alpha(t)$ получаем

$$\alpha(t) = 0,07500 \cdot e^{-0,006954 \cdot t} \quad (3)$$

Значения α для дистиллята турбинного масла, вычисленные по формуле (3) и определенные на основе экспериментально найденных значений вязкости по формуле (1), представлены в табл. 2.

Темп. °C	α по формуле (1)	α по формуле (3)
30	0,06171	
40	0,05720	0,06175
50	0,05269	0,05681
60	0,04923	0,05307
70	0,04584	0,04954
80	0,04308	0,04607
90	0,04035	0,04300
100	0,03737	0,04013
		0,03742

Данные табл. 2 показывают, что вычисленные значения α по формуле (3) хорошо согласуются с вычисленными по формуле (1) при различных температурах. Таким образом можно сказать, что формула (3) хорошо выражает температурную зависимость для $\alpha(t)$ в пределах $20 \leq t \leq 100$. Подставляя уравнение (2) в (1), при логарифмировании получим:

$$\ln v_t = \ln v_{20} - A(t - 20) \cdot e^{-\beta t} \quad (4)$$

В этом уравнении A и β — постоянные коэффициенты, различные для разных жидкостей. Наши исследования показали, что формула (4) хорошо выражает температурную зависимость вязкости в области положительных температур для дистиллята турбинного масла.

Выведенная нами формула (4) проверялась на ряде образцов масляных дистиллятов (МК-8, машинное СУ, вискозин), на отдельных группах углеводородов (метано-нафтенные и ароматические), выделенных из этих дистиллятов, а также на различных смесях из этих групп углеводородов. Полученные по формуле (4) данные хорошо согласовались с экспериментально найденными значениями вязкости для исследованных продуктов в интервале $+20 \div 100^\circ \text{C}$. Коэффициенты A и β для всех исследованных нами образцов вычислены из формулы (2) с помощью метода наименьших квадратов.

В табл. 3 приведены значения постоянных, входящих в полуэмпирическую формулу одного из исследованных нами образцов дистиллята турбинного масла, отдельных групп углеводородов, выделенных из этого дистиллята, а также для смесей из этих групп углеводородов.

Таблица 3

Исследованные образцы	A	β
Дистиллят турбинный	0,03257	0,006954
Метано-нафтенные	0,02703	0,006240
Легкие ароматические	0,03386	0,006585
Средние ароматические	0,04242	0,006763
Тяжелые ароматические	0,08498	0,010220
Метано-нафтенные + легкие ароматические	0,02872	0,006677
Метано-нафтенные + легкие ароматические + средние ароматические	0,02967	0,006700
Метано-нафтенные + легкие ароматические + средние ароматические + тяжелые ароматические	0,03102	0,006769
Метано-нафтенные + легкие ароматические + средние ароматические + тяжелые ароматические + 50% смол	0,03066	0,006585

Кинематические вязкости всех продуктов, указанные в табл. 3, вычислялись по формуле (4) и сравнивались с экспериментально найденными.

В табл. 4 дано сравнение экспериментальных и вычисленных значений кинематической вязкости для отдельных групп углеводородов, выделенных из дистиллята турбинного масла, при различных температурах, а в табл. 5 сравниваются экспериментальные и вычисленные значения кинематической вязкости для смесей групп углеводородов, выделенных из дистиллята турбинного масла, при различных температурах.

Таблица 4

Температура, °C	Метано-нафтеновые			Легкие ароматические			Средние ароматические			Тяжелые ароматические		
	эксперимент.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %
20	62,70	62,70	0	149,15	149,15	0	340,0	340,0	0	2827,0	2827,0	0
30	37,10	37,43	+0,90	78,68	78,49	-0,25	155,08	153,50	-1,02	682,52	669,10	-1,97
40	23,03	27,76	+0,54	44,32	44,98	+1,50	77,06	77,65	+1,30	211,12	210,00	-0,58
50	16,09	16,00	-0,56	27,98	27,72	-0,60	41,91	42,11	+0,50	83,16	83,91	+0,90
60	11,31	11,21	-0,90	18,47	18,28	-1,03	24,98	25,31	+1,32	40,86	40,72	-0,34
70	8,50	8,40	-1,18	12,72	12,70	-0,15	16,16	16,25	+0,56	23,30	23,69	+1,70
80	6,51	6,50	-0,16	9,29	9,41	+1,30	11,31	11,24	-0,64	16,00	15,86	-0,90
90	5,18	5,23	+1,00	7,19	7,30	+1,52	8,20	8,27	-0,25	11,93	12,01	+1,09
100	4,40	4,14	+0,99	5,94	5,91	-0,50	6,50	6,41	-1,54	9,95	10,09	+1,40

Таблица 5

Темп., °C	Дистиллят турбинный			Метано-нафтеновые + легкие ароматические			Метано-легкие + сред.
	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	
20	105,31	105,31	0	70,43	70,43	0	76,21
30	56,50	57,24	+0,82	40,67	41,03	+0,90	43,29
40	33,77	33,78	+0,83	25,89	25,62	-1,04	26,76
50	21,48	21,38	-0,50	17,02	17,06	+0,94	17,74
60	14,66	14,48	-1,20	12,11	12,02	-0,75	12,40
70	10,61	10,51	-1,00	9,00	8,91	-1,00	9,07
80	7,92	7,96	+0,50	6,89	6,92	+0,44	6,88
90	6,24	6,33	+1,50	5,56	5,60	+0,71	5,65
100	5,28	5,27	-0,20	4,65	4,70	+1,09	4,70

нафтеновые + ароматические		Метано-нафтеновые + легкие ароматические + средние ароматические + тяжелые ароматические			Метано-нафтеновые + легкие ароматические + средние ароматические + тяжелые ароматические + 50 % смола		
вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %	эксперим.	вычислен.	отклонение от эксперим., %
76,21	0	85,91	85,91	0	89,28	89,28	0
43,60	+0,72	47,71	48,02	+0,64	49,67	50,00	+0,66
26,80	+0,15	28,85	28,96	+0,40	30,12	30,16	+0,13
17,60	-0,80	18,77	18,60	-0,90	19,53	19,48	-0,25
12,26	-1,17	13,00	12,80	-1,54	13,44	13,35	-0,70
9,00	-0,80	9,33	9,31	-0,22	9,57	9,64	+0,80
6,85	-0,44	7,14	7,09	-0,70	7,26	7,31	+0,70
5,67	-1,40	5,58	5,66	+1,43	5,79	5,81	+0,33
4,65	-1,06	4,75	4,67	-1,70	4,82	4,79	-0,63

Из табл. 4 и 5 видно, что величины вязкости, вычисленные по формуле (4) и найденные экспериментальным путем, хорошо согласуются. При этом максимальное отклонение не превышает 2%.

Выводы

На основе исследования образцов нефтяных масел отдельных групп углеводородов и смесей выведена формула, выражающая температурную зависимость вязкости указанных масел. Отклонение экспериментальных и вычисленных данных в среднем составляет около 1—1,5% и только в отдельных случаях доходит до 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гатчек Э. Вязкость жидкостей. М. — Л., ОНТИ, 1935.
2. Бачинский А. И. Избранные труды. Изд. АН СССР, 1950.
3. Предводителев А. С. ЖЭФ, 3, 217, 1933.
4. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Изд. АН СССР, 1945.
5. Панченков Г. М. Теория вязкости жидкостей. Гостоптехиздат, 1947.
6. Аббасзаде А. К., Багдасарян С. Введение в физику жидкостей. Баку, 1961.
7. Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. Гостехиздат, 1953.

Р. Ш. Гулијев, А. К. Аббасзаде, Ш. С. Начијев

Нефт јағлары үчүн өзлүлүүн температурдан асылылыгы дүстүрү

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә кениш температур интервалында бир нечә јағ дистиллатлары, онлардан алынган групп карбоһидрокенләр вә карбоһидрокенләр гарышыгынын тәчрүби јолла тәјин едилмиш өзлүлүкләри әсасында өзлүлүүн температур асылылыгыны ифадә едән ријази дүстүрун чыхарылышындан бәһс олунур. Мүсбәт температур областында өзлүлүүн температур асылылыгыны ифадә едән дүстүр ашағыдакы шәкилдә ифадә олунур:

$$\ln \eta_t = \ln \eta_{20} - A(t - 20^\circ) \cdot e^{-\beta t}$$

Нәһажәт, мәгаләдә көстәрилир ки, тәклиф олунан дүстүра әсасән һесаблинмыш өзлүлүкләр тәчрүби гијмәтләрә ујгун кәлир.

С. С. БАГДАСАРЯН

К МОДЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТРОЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

В настоящее время общая теория жидкого состояния вещества развивается в двух направлениях: первое—исследование физических свойств и структуры жидкостей производится исходя из общих принципов статистической физики и законов межмолекулярного взаимодействия; второе—изучение физических свойств жидкостей основано на определенной модели. Первое направление называется статистической, второе—модельной теорией жидкого состояния.

Статистической теории жидкого состояния посвящено много работ, среди которых следует отметить [1—18]. Эта теория основывается на изучении радиальной и молекулярной функций распределения на построении соответствующих уравнений для молекулярных (корреляционных) функций. Экспериментальной базой применения аппарата радиальной и молекулярной функций распределения является изучение рассеяния рентгеновских лучей [19—24] и медленных нейтронов [25, 26] в жидкостях.

Знание молекулярной функции распределения позволяет вычислить средние значения физических величин, зависящих от координат любого числа молекул исследуемой системы. Однако при определении молекулярных функций распределения мы сталкиваемся с такими математическими трудностями, которые сильно препятствуют дальнейшему развитию [6] статистической теории жидкостей. Можно сказать, что каждый новый подход к решению задач, связанных с применением молекулярных функций, порождает новые трудности при их решении. Эти трудности объясняются нашими скудными данными о характере межмолекулярных взаимодействий в жидкостях.

Современное состояние молекулярной физики, биологии и медицины, познание жизнедеятельности различных процессов в любом организме, изучение механизмов химических процессов, протекающих в жидкой фазе вещества нуждаются в помощи количественной теории жидкого состояния, основанной „не на жалком основании притяжения молекул“ [27], а исходящей из учета их коллективного (группового) взаимодействия.

В основе количественной теории жидкостей лежит модельное представление об их структуре. Модельные исследования структуры жидкостей исходят из того положения, что в жидкости следует различать два вида теплового движения молекул: трансляционное, приводящее к самодиффузии, и тепловые колебания молекул около вре-

менных центров равновесия. Это означает, что геометрическая упаковка молекул в жидкости должна отличаться от укладки атомов в кристалле. Для жидкости характерна пространственная неоднородность, несовместимая с дальним порядком в кристаллах. Иными словами, главным в исследовании структуры жидкостей является изучение пространственного распределения молекул по всему объему.

Вначале модельное представление структуры жидкостей носило примитивный характер и было предназначено для определения радиальной функции распределения. В опытах Морелля и Гильдебранда [28] моделями молекул жидкости были твердые желатиновые шарики диаметром 4 мм, находящиеся во взвешенном состоянии в растворе желатина соответствующей плотности. Принс [29] в качестве модели жидкости рассматривал семена, насыпанные в один слой на стеклянную пластинку. В опытах И. В. Радченко [30] моделью жидкости служили шарики из пластмассы, проткнутые намагниченными спицами, а также стальные шарики, размещенные на гладком столе.

Во всех этих опытах путем перемешивания или встряхиванием шариков, насыпанных в сосуды, различной формы, определяют состояние между ними и после многократной статистической обработки изображают схематический ход радиальной функции распределения. Существенный недостаток этих моделей в том, что они не могут правильно отражать природу взаимодействия частиц жидкости, но они были полезными при изучении влияния формы молекул на их распределения в идеальной жидкости [22].

Известный параллелизм в физических свойствах твердых и жидких тел, развитый Я. И. Френкелем [31], и представление об упорядоченной структуре жидкостей побудили предложить ряд моделей структуры жидкостей, игравших определенную роль в развитии теории твердо-жидкого состояния [19, 31, 32]. Однако эти модели (микрорешетчатая, квазикристаллическая, дырочная) имеют смысл только возле линии плавления—кристаллизация [5, 31, 32]. При температуре, близкой к критической, жидкое состояние вещества можно объяснить, трактуя жидкость как газ, сжатый до малого объема [32, 33].

В огромной области температур, далеко от нижней и верхней границ жидкого состояния, структура жидкостей остается неопределенной. Для устранения этой неопределенности в работе [34], исходя из теории гетерофазной флуктуации Я. И. Френкеля [31], принимается, что жидкость состоит из молекулярных групп, выражающих наличие ближнего порядка в жидкостях, и мигрирующих между ними индивидуальных молекул, которые трактуются как зародыши газа в жидкой фазе. Такое представление структуры жидкостей позволяет изучить их молекулярно-тепловые свойства в широком интервале температур [34—37], объясняет механизм фазовых переходов и устанавливает границы жидкого состояния вещества. Эта модель жидкости учитывает коллективное взаимодействие молекул. На примере температурного изменения теплоемкости жидкостей покажем роль коллективного (группового) взаимодействия молекул.

Допустим, что нагревание жидкости происходит при постоянном давлении. В этом случае тепло, полученное единицей массы жидкости, идет на увеличение скорости теплового движения молекул и на уменьшение связи между взаимодействующими молекулами—на уменьшение потенциальной энергии единицы массы жидкости, т. е.

$$dQ = C_p dT = dE + dU. \quad (1)$$

Очевидно, тепло, идущее на увеличение скорости теплового движения молекул жидкости, пропорционально росту температуры, т. е.

$$dE = adT. \quad (2)$$

Представим энергию взаимодействия между молекулами жидкости в виде

$$U = U(T), \text{ т. е. } dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим

$$C_p = a + \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p. \quad (4)$$

Очевидно, расстояние между молекулами жидкости, образующими ближний порядок, обратно пропорционально числу молекул в молекулярной группе, т. е.

$$r = \frac{c_1}{v}. \quad (5)$$

В работе [36] показано, что температурное изменение v определяется формулой

$$v = v_e e^{-\alpha}, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{T - T_e}{2T_k - T} = \frac{\theta - \theta_e}{2 - \theta}; \quad (7)$$

$$\theta = \frac{T}{T_k}, \quad \theta_e = \frac{T_e}{T_k}.$$

Подставляя (6) в (5), получим

$$r = r_e e^{\alpha}, \quad (5')$$

где

$$r_e = \frac{c_1}{v_e}.$$

Выражение (5') показывает, что с увеличением температуры расстояние между молекулами увеличивается. Это означает, что удельный объем жидкости можно принять пропорциональным множителю $\exp \alpha$, т. е.

$$v = v_e e^{\alpha}, \quad (8)$$

где v_e — объем жидкости при $T = T_e$.

Из формулы (8) находим коэффициент объемного расширения жидкости в виде

$$\beta = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} = \frac{2 - \theta_e}{(2 - \theta)^2}. \quad (9)$$

Учитывая, что энергия взаимодействия между молекулами жидкости обратно пропорциональна расстоянию между ними, можно написать

$$W = -\frac{c_2}{r} = -W_e e^{-\alpha}, \quad (10)$$

где

$$W_e = \frac{c_2}{r_e}.$$

Энергию взаимодействия молекул жидкости U определим выражением

$$U = c_3 W = -\frac{c_2 c_3}{r}. \quad (11)$$

Подставляя (5') в (11), получим

$$U = -U_e e^{-\alpha}, \quad (11')$$

где

$$U_e = \frac{c_2 c_3}{r_e}.$$

Из (11') имеем

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial T} = U_e \beta e^{-\alpha}. \quad (12)$$

Подставляя (12) и (9) в (4), получим

$$C_p = a + \frac{b e^{-\alpha}}{(2 - \theta)^2}, \quad (4')$$

где

$$b = U_e (2 - \theta_e).$$

Сравнения с экспериментальными данными [43] значений C_p , вычисленных по формуле (4'), приведены в табл. 1. Температурный ход C_p для указанных в таблице и других жидкостей изменяется по формуле (4'). Это означает, что жидкости отличаются эмпирическими константами a и b . Причем a характеризует вид упаковки молекул, а b — степень прочности (устойчивости) молекулярных групп. По модели теории жидкого состояния можно объяснить свойства вещества в критической области.

Таблица 1

Температурное изменение теплоемкости C_p жидкостей

$T, ^\circ K$	Гептан		Декан		Октан		Нонан	
	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.
203	0,479	0,482						
213	0,483	0,483						
223	0,486	0,486			0,482	0,482	0,487	—
233	0,490	0,490			0,486	0,486	0,489	0,489
243	0,494	0,495			0,490	0,491	0,491	0,491
253	0,498	0,501	0,497	0,497	0,494	0,497	0,493	0,496
263	0,502	0,508	0,503	0,503	0,498	0,504	0,495	0,502
273	0,506	0,515	0,509	0,510	0,502	0,511	0,498	0,509
283	0,510	0,523	0,515	0,516	0,507	0,519	0,499	0,517
293	0,514	0,531	0,521	0,523	0,511	0,526	0,502	0,525
303	0,518	0,540	0,527	0,531	0,515	0,535	0,504	0,533
313	0,523	0,549	0,533	0,540			0,506	0,542
323	0,526	0,560						
333	0,531	0,570						
343	0,535	0,580						
353	0,539	0,591						

$T, ^\circ K$	Метиловый спирт		Ацетон		Этиловый спирт		Бензол	
	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.
273			0,498	0,498				
283	0,590	0,590	0,505	0,505				
293	0,608	0,608	0,512	0,514	0,593	0,593	0,4158	0,4158
303	0,626	0,623	0,520	0,522				
313	0,645	0,640	0,527	0,530	0,648	0,648	0,4214	0,4215
323	0,664	0,654	0,535	0,539	0			
333	0,683	0,667			0,705	0,698	0,4275	0,4275
353					0,764	0,769	0,4333	0,4339
373					0,823	0,832	0,4392	0,4468

Как известно, характерная особенность температурного хода теплоемкости C_p и сжимаемости γ состоит в том, что вблизи критической температуры T_c и γ сильно возрастают. С точки зрения модельного представления структуры жидкостей вещество в критической области максимально неоднородно, что объясняется образованием микромолекулярных групп и наличием блуждающих между ними индивидуальных молекул. Микромолекулярные группы и индивидуальные молекулы в критической области образуют дисперсное — микрогетерогенное состояние вещества, что соответствует термодинамической теории В. К. Семенченко о критических явлениях [41, 42].

Количество молекул в каждой молекулярной группе при $T = T_c$, как это следует из формулы (6), будет

$$n_k = n_c e^{-\sigma_k} = n_c e^{-\left(1 - \frac{T_c}{T_k}\right)} \quad (13)$$

Число индивидуальных молекул при $T = T_c$ определится выражением

$$n_k = N_c - N_c e^{-\sigma_k} = N_c (1 - e^{-\sigma_k}). \quad (14)$$

Для одного моля вещества число микромолекулярных групп в критической области будет

$$g_k = \frac{N_c - n_k}{n_k} = \frac{N_c e^{-\sigma_k}}{n_c e^{-\sigma_k}} = \frac{N_c}{n_c}. \quad (15)$$

По экспериментальным данным Бабб в Дрикамер [43] в этане в окрестности критической точки обнаружено сильное возрастание интенсивности рассеянного света, что объясняется наличием молекулярных групп величиной 1000 молекулярных диаметров. Поэтому, полагая, $n_k = 1000$, для этана из выражений (13), (14) и (15) получим $n_k = 2000$,

$$g_k = 3 \cdot 10^{20}, n_k = 3 \cdot 10^{23}.$$

Таким образом, причиной резкого возрастания некоторых физических величин (теплоемкости, сжимаемости, интенсивности рассеянного света и др.) в критической области является образование микрогетерогенного (дисперсного) состояния вещества в этой области.

В литературе известны и другие модельные представления теории жидкого состояния [38—40]. В работе [38] Баркер предложил туннельную теорию жидкости, в которой рассматриваются крупные ячейки, содержащие большое число молекул. Принимая, что ячейки имеют форму узких длинных каналов, ему удалось вычисление конфигурационного интеграла свести к одному измерению. В работе [39] описание уравнения состояния и равновесия жидкость—пар производится при рассмотрении беспорядочного смещения молекул и дыр, объем которых меньше объема, занимаемого одной молекулой. Томсон и Эйринг [40] рассматривали жидкость, состоящую из твердого и газового компонентов, иными словами из твердоподобных и газоподобных молекул. Если твердоподобные молекулы характеризовать упорядоченной структурой, а газоподобные трактовать как индивидуальные, беспорядочно движущиеся между молекулярными группами, то существует определенная аналогия в моделях жидкости, изложенных в работах [34] и [40]. Модельное представление структуры жидкостей позволяет правильно расшифровать результаты экспериментальных методов исследования структуры и физических свойств жидкостей.

Исходя из модельного представления о структуре жидкостей, рассмотрим температурное изменение поверхностного натяжения однокомпонентной жидкости. Пусть поверхностная энергия молекуляр-

ной группы, приходящаяся на одну молекулу, будет W , а ее изменение

$$-dW = CdT; \quad (16)$$

знак минус означает, что уход молекулы из молекулярной группы и переход в индивидуальное состояние происходит за счет убыли поверхностной этой группы. Из (16) получим

$$W = C_1 (T_c - T) = C_2 (1 - \theta), \quad (16')$$

где $\theta = \frac{T}{T_c}$ — приведенная температура.

Молекулярная группа определяется взаимодействием ν молекул, количество которых с температурой изменяется по формуле (6). Очевидно, поверхностное натяжение жидкости пропорционально поверхностной энергии молекулярной группы, содержащей ν молекул, т. е.

$$\sigma = C_3 W \nu. \quad (17)$$

Подставляя (6) и (16') в (17), получим

$$\sigma = C_3 (1 - \theta) \nu_c e^{-\sigma} = a (1 - \theta) e^{-\sigma}. \quad (17')$$

Сравнения с экспериментальными данными [43] значений σ , вычисленных по формуле (17'), приведены в табл. 2.

Таблица 2
Температурное изменение поверхностного натяжения жидкостей

$T, ^\circ K$	Октан		Гексан		Толуол		Гептан		Бензол	
	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.
253,16	25,55	25,52								
273,16	23,70	23,22								
293,16	21,76	21,17	18,46	18,19	28,53	28,27			28,88	28,77
313,16	19,78	19,20	16,31	15,91	26,15	25,74	18,47	18,74	26,14	26,03
333,16	17,82	16,73	14,23	13,75	23,94	23,24	16,39	16,41	23,66	23,29
353,16	15,94	15,43	12,24	11,85	21,80	20,89	14,35	14,45	21,20	20,69
373,16	14,13	13,66	10,27	9,78	19,60	18,59	12,47	12,44		
393,16	12,39	11,95	8,34	7,96			10,63	10,57		
413,16	10,70	10,23	6,51	6,26			8,87	8,87		
433,16	9,07	8,76	4,74	4,69			7,19	7,09		
453,16	7,50	7,29	3,16	3,26			5,59	5,52		
473,16	5,99	5,91	1,74	1,95			4,07	4,05		
493,16	4,52	4,60	0,58	0,77			2,63	2,71		
513,16	3,10	3,39					1,29	1,48		

Таблица 3
Температурное изменение скорости звука в жидкостях

$T, ^\circ K$	Толуол		Метиловый спирт		Пропиловый спирт		Бутиловый спирт		Гексан	
	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.	выч.	эксп.
203,16	1722	1722								
223,16	1636	1636								
233,16	1593	1592								
253,16	1510	1506							1231	1231
273,16	1421	1420							1145	1145
293,16	1331	1335	1155	1155	1266	1266	1272	1272	1059	1058
313,16	1243	1251	1089	1089	1207	1207	1146	1143	970	973
333,16	1150	1172	1023	1023	1146	1147	1081	1078	790	886
353,16	1054	1094	954	956	1084	1085	1014	1011	970	799
373,16	960	1015	884	886	1020	1017	948	946	696	713
393,16	862	936	813	812	957	942	880	881	600	626
413,16	759	857	740	739	890	868	809	810	504	539
433,16	659	779	667	664	825	790	739	738	405	453
453,16			590	579	756	703	666	661		
473,16			514	483	687	612	592	580		
493,16			435	375			518	498		
513,16										

Модельное представление о структуре жидкости позволяет определить также температурное изменение скорости звука. Действительно, учитывая, что звуковые волны в жидкостях распространяются посредством колебаний частиц жидкости, можно принять, что скорость звука пропорциональна количеству молекул в единице объема жидкости, т. е.

$$U = aN = a(vg + n) = a[gv_e e^{-\alpha} + N_e(1 - e^{-\alpha})] = Ae^{-\alpha} + B, \quad (18)$$

где $A = a(gv_e - N_e)$, $B = aN_e$.

Сравнения с экспериментальными данными [44] значений U , вычисленных по (18), приведены в табл. 3.

Выводы

1. Исходя из модельного представления о жидкости, утверждается, что молекулярно-тепловые свойства жидкостей определяются групповым взаимодействием их молекул.

2. Дисперсное состояние вещества в критической области объясняется образованием микромолекулярных групп и наличием блуждающих между ними индивидуальных молекул.

3. Получены формулы, выражающие температурное изменение теплоемкости, поверхностного натяжения жидкостей, а также скорости звука в них, справедливостью которых подтверждается соответствующими экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, 1946.
2. Green H. S. *Molecular Theory of Fluids*, Amsterdam, 1952.
3. Хилл Т. Статистическая механика. М., ИЛ, 1960.
4. Гиршфельдер Дж., Кертис И. Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., ИК, 1960.
5. Green H. S. *Handbuch der Phys.* Bd. X., 1960.
6. Фишер И. З. Статистическая теория жидкостей. Физматгиз, 1961.
7. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. М., ИЛ, 1963.
8. де Бур И. УФН, 51, 1, 41 (1953).
9. Фишер И. З. УФН, 51, 1, 71 (1953).
10. Фишер И. З. УФН, 76, 3, 499 (1962).
11. Kirkwood J. G., Mann E., Alder B. J. *chem. phys.*, 18, 1040 (1950).
12. Kirkwood J. G., Levinson V., Alder B. J. *chem. phys.*, 20, 929 (1952).
13. Van Zeeenman J., Greneveld T., de Boer I. *Physica*, 25, 792 (1952).
14. Morita T., Hiroike K. *Progr. Theor. phys.*, 23, 1003 (1960).
15. Гуриков Ю. В. ЖФХ, 33, 103 (1962); Ж стр/кт. химии, 2, 402 (1961).
16. Barker J. A. *Proc. Roy. Soc., A*, 259, 442 (1961).
17. Eyring H., Rec T., Hirai N. *Proc. Nat. Acad. Sci. US*, 44, 683 (1958).
18. Kirkwood J. G. *J. Chem. phys.*, 18, 330 (1950).
19. Данилов В. И. Структура и кристаллизация жидкостей. Киев, 1966.
20. Радченко И. В. УФН, 21, 249 (1957).
21. Гингрич Н. С. Усп. химии, 15, 297 (1946).
22. Шахпаронов М. И. Введение в молекулярную теорию растворов. Гостехиздат, 1956.
23. Zernicke F., Prins J. *Zs. Phys.*, 41, 184 (1927).
24. Campbell J. A. and Hildebrand J. H. *J. chem. phys.*, 11, 330 (1943).
25. Van H., Hove. *Phys. rev.*, 95, 249 (1954).
26. Singwi K. S., Sjolander A. *Phys. rev.*, 119, 863 (1960).
27. Шахпаронов М. И. Методы исследования теплового движения молекул и строения жидкостей. МГУ, 1963.
28. Morrell W., Hildebrand J. J. *chem. phys.*, 8, 225 (1936).
29. Prins. *Naturwissenschaften*, 19, 21 (1931).
30. Радченко И. В. ЖЭТФ, 16, 881 (1940); УФН, 61, 249 (1957).
31. Френкель Я. И. Избр. Соч. Изд. АН СССР, 3, 1959.

32. Аббас-заде А. К., Багдасарян С. С. Введение в физику жидкостей, Баку, 1961.
33. Вукалович М. П., Новиков И. И. Уравнения состояния реальных газов. Госэнергоиздат, 1948.
34. Багдасарян С. С. ЖФХ, 37, 7, 1816 (1964).
35. Багдасарян С. С. ДАН Азерб. ССР, 16, 3, 223 (1960).
36. Багдасарян С. С. Тр. АПИ им. В. И. Ленина, 22, 127 (1962).
37. Багдасарян С. С. ЖФХ, 39, 7, 1685 (1965).
38. Barker J. A. *Proc. Roy. Soc. A* 259, 442 (1961).
39. Müller C. R., Stupedgia D. C. *J. chem. Soc.*, 26, 1522 (1957).
40. Thomson R., Eyring H. J. *Phys. chem.*, 67, 12, 2701 (1963).
41. Семенченко В. К. ЖФХ, 21, 1461 (1947); 25, 121 (1951); 26, 1337 (1952).
42. Семенченко В. К. ДАН ССР, 74, 335 (1950); 92, 625 (1953); 99, 1045 (1954).
43. Варгафтик Н. В. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Физматгиз, 1963.
44. Ноздрев В. Ф. Применение ультразвуки в молекулярной физике. Физматгиз, 1958.

М. А. МУСАЕВ

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТАХ, РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМОМИ ПЕРЕМОЧКАМИ

При рассмотрении задач о течении жидкости в пластах, разделяющихся слабопроницаемыми перемычками, полагают, что перемычка проницаема по всей ее протяженности [1]. В представленной статье мы считаем, что перемычка (или кровля пласта) проницаема только частично. Пусть нижний пласт I отделен от верхнего пласта II перемычкой, имеющей проницаемую зону в виде полосы шириной $b - a$, параллельной прямолинейным батареям эксплуатационных и нагнетательных батарей, заменяемых галереями. Кроме того, мы полагаем, что и кровля верхнего пласта (II) имеет проницаемую зону в виде полосы шириной $d - c$ также параллельной батареям скважин.

Подошва нижнего пласта (I) непроницаема. Задача решается методом двойного осреднения [2], суть которого поясним в § 1. Через h_1 , h_2 и κ_1 , κ_2 обозначаем мощности и коэффициенты проницаемости I и II пластов, соответственно, а через h_{r1} , κ_{r1} и h_{r2} , κ_{r2} — мощности и коэффициенты проницаемости перемычек между пластами и над верхним пластом.

§ 1. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ

Уравнениями движения в пластах I и II будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y)$ — давления в пластах I и II, соответственно. Умножим первое из уравнений (1) на $\frac{1}{h_1} dy$ и проинтегрируем от 0 до h_1 . С учетом условий на кровле и подошве получим

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} dy = \frac{1}{h_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=h_1},$$

где по закону Дарси

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\mu}{\kappa} V_y = -\frac{\mu}{\kappa} V_{ycp} = -\frac{\mu}{\kappa} \cdot \frac{1}{1(b-a)} \int_a^b V_y dx = \\ &= -\frac{\mu}{\kappa} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{\kappa_{r1}}{\mu} \frac{P_1 - P_2}{h_{r1}} dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} dy = -\beta_1 E_1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\kappa_{r1}}{(b-a) \kappa_1 h_1 h_{r1}}, \\ E_1 &= \int_a^b (P_1 - P_2) dx. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\frac{1}{h_2} \int_{h_1+h_{r1}}^{h_1+h_{r1}+h_2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx = -\beta_2 E_2 - \beta_3 E_1, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{\kappa_{r2}}{(d-c) \kappa_2 h_2 h_{r2}}, \\ \beta_3 &= -\frac{\kappa_{r1}}{(b-a) \kappa_2 h_2 h_{r2}}, \quad E_2 = \int_c^d (P_2 - P_0) dx. \end{aligned}$$

На основании (2) и (3) из (1) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 P_1}{dx^2} - \beta_1 E_1 &= 0, \\ \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \beta_2 E_2 - \beta_3 E_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где E_1 и E_2 — пока неизвестные постоянные. Решения уравнений (4) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\beta_1 E_1}{2} x^2 + A_1 x + A_2, \\ P_2 &= \frac{\beta_2 E_2 + \beta_3 E_1}{2} x^2 + B_1 x + B_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь A_1 и B_1 — неизвестные постоянные и определяются из граничных условий. Например, для условий

$$P_1|_{x=0} = P_2|_{x=0} = P_0; \quad P_2|_{x=l} = P_n \quad \text{и} \quad \frac{\partial P_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$$

будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= B_2 = P_0; \quad A_1 = -\beta_1 E_1 l; \\ B_1 &= \frac{P_n - P_0}{l} - \frac{\beta_2 E_2 + \beta_3 E_1}{2} l. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Неизвестные E_1 и E_2 определяются из (5), (6) и условий

$$E_1 = \int_a^b (P_1 - P_2) dx; \quad E_2 = \int_c^d (P_2 - P_0) dx$$

и имеют вид:

$$E_1 = \frac{a_1 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}; \quad E_2 = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{\beta_3 (d^3 - c^3)}{6} + \frac{\beta_2 (d^2 - c^2) \cdot l}{4}; \quad a_2 = \frac{\beta_3 (d^2 - c^2) l}{4} - \frac{\beta_3 (d^3 - c^3)}{6}; \\ a_3 &= \frac{(P_n - P_9) (d^2 - c^2)}{2l} + (P_9 - P_0) (d - c); \\ b_1 &= \frac{\beta_2 (b^3 - c^3)}{6} - \frac{\beta_2 (b^2 - c^2) l}{4}; \\ b_2 &= 1 - (\beta_1 + \beta_3) \frac{b^3 - a^3}{6} + (2\beta_1 - \beta_3) \frac{l (b^2 - a^2)}{4}; \\ b_3 &= - \frac{(P_n - P_9) (d^2 - c^2)}{2l}. \end{aligned}$$

Заметим, что подставляя в формулы (7), (6) и (5) $\beta_2 = 0$, получим случай, когда кровля верхнего пласта непроницаема, а при $\beta_1 = \beta_3$ получим решение задачи, когда перемычка между пластами непроницаема. Точно так же, если кровля верхнего пласта (или перемычка между пластами) проницаема по всей протяженности, то для получения решения достаточно в наших формулах подставить $c = 0$ и $d = l$ (или $a = 0$ и $b = l$).

§ 2. НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ

В этом случае предполагаем, что в пластах I и II в начальный момент времени имело место установившееся течение по закону (5), где $E_2 = \beta_2 = 0$, т. е. кровля верхнего пласта (II) непроницаема. В некоторый момент времени при изменении режима работы пласта и при $t > 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned} P_1|_{x=0} &= P_2|_{x=0} = P_9, \\ \frac{\partial P_1}{\partial x}|_{x=l} &= \frac{\partial P_2}{\partial x}|_{x=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, наша задача сводится к решению уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \beta_1 F(t) &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P_1}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - \beta_3 F(t) &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P_2}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$F(t) = \int_a^b (P_1 - P_2) dx, \quad \text{а } \beta_1 \text{ и } \beta_3 \text{ даны в §1.}$$

Для решения задачи умножим (9) на $\frac{2}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx$ и про-

интегрируем от 0 до l . Обозначая $P_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l P_1 \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx$ и имея в виду

$$\frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{(2n+1)\pi}{l^2} P_9 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2} P_{1n} \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx = \frac{4}{(2n+1)\pi}, \quad \text{из (9) получим}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{1n}}{dt} + \omega_{1n}^2 P_{1n} &= \kappa_1 \frac{(2n+1)\pi}{l^2} P_9 - \frac{4\kappa_1 \beta_1}{(2n+1)\pi} F(t), \\ \frac{dP_{2n}}{dt} + \omega_{2n}^2 P_{2n} &= \kappa_2 \frac{(2n+1)\pi}{l^2} P_9 - \frac{4\kappa_2 \beta_3}{(2n+1)\pi} F(t). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

при условии:

$$\begin{aligned} P_{1n}|_{t=0} &= P_{10} = \frac{\beta_1 E_1}{2} \cdot \frac{16l^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left[(-1)^n - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] - \\ &\quad - (-1)^n \frac{8\beta_1 E_2 l^2}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{4P_9}{(2n+1)\pi}, \\ P_{2n}|_{t=0} &= P_{20} = \frac{\beta_3 E_1}{2} \cdot \frac{16l^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left[(-1)^n - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] - \\ &\quad - (-1)^n \left(\frac{P_n - P_9}{l} - \frac{\beta_3 E_1 l}{2} \right) \frac{8l}{(2n+1)^2 \pi^2} + \frac{4P_9}{(2n+1)\pi}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{in}^2 = \frac{(2n+1)\kappa_i \pi^2}{4l^2}.$$

Решения уравнений (10) при указанных условиях имеют вид:

$$\begin{aligned} P_{1n}(t) &= \frac{(2n+1)\pi \kappa_1}{\omega_{1n}^2 l^2} P_9 (1 - e^{-\omega_{1n}^2 t}) + P_{10} e^{-\omega_{1n}^2 t} - \\ &\quad - \frac{4\kappa_1 \beta_1}{(2n+1)\pi} \int_0^t F(\tau) e^{-\omega_{1n}^2 (t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} P_{2n}(t) &= \frac{(2n+1)\pi \kappa_2}{\omega_{2n}^2 l^2} P_9 (1 - e^{-\omega_{2n}^2 t}) + P_{20} e^{-\omega_{2n}^2 t} - \\ &\quad - \frac{4\kappa_2 \beta_3}{(2n+1)\pi} \int_0^t F(\tau) e^{-\omega_{2n}^2 (t-\tau)} d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$P_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{1n}(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}; \quad P_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (13)$$

дают решение задачи. Для определения неизвестной функции $F(t)$,

исходя из (13), (12), (11) и $F(t) = \int_a^b (P_1 - P_2) dx$, получаем следующее интегральное уравнение:

$$F(t) = \Phi(t) + \int_0^t F(\tau) \kappa(t-\tau) d\tau, \quad (14)$$

где

$$\Phi(t) = \frac{P_2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\cos \frac{(2n+1)\pi a}{2l} - \cos \frac{(2n+1)\pi b}{2l} \right] \times \\ \times \left[\frac{x_1}{\omega_{2n}} \left(1 - e^{-\omega_{1n}^2 t} \right) - \frac{x_2}{\omega_{2n}} \left(1 - e^{-\omega_{2n}^2 t} \right) \right];$$

$$\kappa(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \left[x_2 \beta_2 e^{-\omega_{2n}^2(t-\tau)} - x_1 \beta_1 e^{-\omega_{1n}^2(t-\tau)} \right].$$

Заметим, что и здесь можно рассмотреть частные случаи $\beta_1 = \beta_2 = 0$ или $a=0$ и $b=l$ (см. § 1). Получение формул для этих случаев не представляет трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнзаде М. Н. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1954, № 12.
2. Другина Л. И. „Изв. вузов, нефть и газ“, 1964, № 12.
3. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Баку, 1961.

М. А. Мусажев

Кечирмэ сэдлэ ајрылан гатларда маје ахыны

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә мұәјјән јерли әлагәләри олан лајларда мајенин гәрарлашмыш вә гәрарлашмамыш ахынындан бәһс едилір. Бу ишдә тәзјигин пајланмасы вә аракәсмәнин кечирән һиссәсиндән ахан маје мигдарыны һесабламаг үчүн дүстурлар ачылмышдыр. Гәрарлашмыш ахын үчүн бу дүстурлар чоҳ садәдир. Гәрарлашмыш ахын һалында тәзјигин пајланмасыны тапмаг үчүн интеграл тәнлик алыныр ки, буна да ардычыл јахынлашма методу тәтбиг олуна биләр.

Р. Э. ГУСЕЙНОВ

О РЕЗУЛЬТАТАХ СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ХРОМОСФЕРНОЙ ВСПЫШКИ

21 АВГУСТА 1959 г., I

Настоящая статья является продолжением исследования одной серии хромосферной вспышки, наблюдаемой астрономами Ондражейовской астрофизической обсерватории Чехословацкой Академии наук при помощи многокамерного спектрографа солнечного телескопа [1]. Эта серия наблюдалась 21 августа 1959 г. в интервале $16^{\circ}42'30'' - 17^{\circ}00'00''$ всемирного времени и имела гелиографические координаты: 7° северной широты и 24° западной долготы.

В [2] одной из исследуемых нами серий вспышек являлась эта серия. Была поставлена цель — выяснить вопрос о механизме уширения эмиссионных линий. Данная статья посвящена более детальному спектрофотометрическому исследованию указанной серии, для которой характерны отчетливо различимые три центра. По своим мощностям центры вспышки имели балл 1^+ (I центр), 1^- (II), 1 (III центр). Как увидим дальше, центры вспышки отличаются не только по своим мощностям, но и по другим признакам: по значениям электронных концентраций, электронных температур и т. д. Нет сомнения, что эти центры являются результатом одного мощного процесса с различными его проявлениями, вызванными неоднородностью солнечной атмосферы.

Спектрограммы исследуемой серии получались в разные моменты в указанном выше интервале времени с выдержкой $\left(\frac{15}{50}\right)^c$ одновре-

менно на камерах спектрографа в спектральных областях, охватывающих линии H_{α} (пластинка № 648), H_{β} (пластинка № 650), H_{γ} (пластинка № 651), H_{ϵ} , H и K (пластинка № 652). Максимальная ширина H_{α} в самом ярком центре серии определялась на спектрогелиоскопе Ондражейовской обсерватории в $16^{\circ}42'$ и составила 2.3 А. Разумеется, при сравнении наблюдений на спектрогелиоскопе с наблюдениями на спектрографе надо иметь в виду, что щели этих приборов могут не совпадать относительно детали. Именно по этой причине максимальная ширина H_{α} по данным спектрогелиоскопа и максимум интенсивности на спектрограммах по времени не совпадают. Эти спектрограммы охватывают домаксимальную фазу для самого яркого центра. Поэтому можно сказать, что спектрограммы получены в те моменты, которые охватывают все характерные фазы развития вспышки, т. е. домакси-

мальную фазу, фазу максимума и последующие фазы. На спектрограммах вспышки очень размыты, однако, как явствует из журнала наблюдений, в период наблюдений исследуемой серии качество изображений было отличным и, следовательно, замеченная диффузия есть объект, связанный с самой вспышкой. Такая диффузия может являться слабым следом (между центрами) распространения фактора, приводящего к появлению вспышки.

Из 12 серий спектрограмм, то есть из спектрограмм, соответствующих 12 моментам, охватывающий выше интервал времени наблюдений, для спектрофотометрических исследований мы выбрали 6 моментов, представляющих интерес с точки зрения изменений в центре вспышки. Номера кадров и соответствующие им моменты представлены ниже.

№ кадра	1	2	3	4	5	10
Время	16 ^h 42 ^m 30 ^s	45 ^m 30 ^s	46 ^m 45 ^s	48 ^m 00 ^s	49 ^m 00 ^s	16 ^h 57 ^m 00 ^s

Запись контуров исследуемых линий производилась при помощи фотоэлектрического микрофотометра лаборатории отдела физики Солнца Пулковской обсерватории. Спектрофотометрическое исследование рассматриваемой серии базируется на изучении 136 контуров эмиссионных линий и линий невозмущенной атмосферы.

§ 1. Спектрофотометрическое исследование по контурам линий H_{α} , H_{β} , H_{γ} , H_{ε}

В [2] нами было уточнено, что причиной расширения исследуемых эмиссионных линий балмеровской серии водорода является эффект Доплера, вызванный макроскопическим движением в области наблюдаемой водородной эмиссии этой вспышки. Результат более детального спектрофотометрического исследования показывает, что не только критерий, по которому в [2] выяснилась причина расширения, но и расчеты подтверждают этот вывод. Находя значения необходимых параметров ($\Delta\lambda_D$, τ_0 , N_2) и при $10^{13} < n_e < 10^{14}$, мы вычислили штарковский коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом, и коэффициент поглощения из-за Доплер-эффекта. Сравнивая значения этих коэффициентов, мы убедились, что даже для H_{ε} коэффициент поглощения из-за эффекта Штарка действительно по меньшей мере на один порядок меньше, чем коэффициент поглощения из-за Доплер-эффекта.

Для интенсивности излучения, выходящего из вспышки имеем

$$I = I_0 e^{-\tau} + \int_0^{\tau} B(t) e^{-t} dt. \quad (1)$$

В (1) все обозначения общеизвестные. Здесь и в дальнейшем мы опускали индекс λ или ν , имея в виду, что каждый раз речь идет об определенной длине волны или об определенной точке контура.

Рассмотрим точки контура, находящиеся на расстояниях $\Delta\lambda \gg \Delta\lambda_0$ от центра линии, где $\tau \ll 1$. В качестве исходной мы рассматривали линию H_{γ} , для которой τ_0 в ~ 20 раз меньше, чем для H_{α} . Поскольку рассматривается случай $\tau \ll 1$, из (1) получим

$$I - I_0 = (\bar{B} - I_0) \tau. \quad (2)$$

Здесь $\bar{B}$, вынесенное из-под знака интеграла в (1), — усредненное значение функции источника. Зная, что $\tau = \tau_0 \cdot e^{-v^2}$, где $v = \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}$, из

системы двух уравнений вида (2) согласно данным наблюдений можно найти $\bar{B}$ и τ_0 (доплеровская ширина $\Delta\lambda_D$ определялась заранее по методу, изложенному в [2]). В целях контроля такие вычисления производились для нескольких пар точек контура H_{γ} . Убедившись, что $(\tau_0)_{H_{\gamma}} < 1$, дополнительные аналогичные вычисления производили и для линии H_{β} , ибо если $(\tau_0)_{H_{\gamma}} < 1$, то, начиная с некоторого расстояния от центра линии H_{β} , мы будем иметь $\tau \ll 1$ и поэтому для H_{β} также можно пользоваться системой уравнений вида (2). Что касается постоянства $\bar{B}$ на $\Delta\lambda \geq \Delta\lambda_0$, то это очевидно из того, что на указанных расстояниях $\tau \ll 1$, то есть вспышка как бы просматривается по всей ее глубине и $\bar{B}$ усредняется.

Результаты вычислений $\Delta\lambda_D$, τ_0 , а также коэффициента поглощения из-за Доплер-эффекта в центре линии H_{α} , обозначенного через $(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}}$, числа атомов водорода во втором квантовом состоянии в столбце с сечением в 1 см^2 по всей толщине вспышки — N_2 , центральная интенсивность, взятая из контуров линий — $I_{\text{ц}}$ представлены в табл. 1–6 (здесь и везде интенсивность выражена в единицах монохроматической интенсивности непрерывного спектра центра диска Солнца).

Кадр 1

Таблица 1

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0
H_{α}	0,618	0,653	3,68	0,484	0,460	1,16	0,502	0,510	0,269
H_{β}	0,384	0,410	0,506	0,348	0,287	0,160	0,367	0,384	0,0370
H_{γ}	0,355	0,325	0,170	0,273	0,240	0,0535	0,320	0,310	0,0124
H_{ε}	0,349	0,130	0,0441	—	—	—	0,295	0,108	0,0032

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 2,45 \cdot 10^{-13}$$

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 2,85 \cdot 10^{-13}$$

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 2,74 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 1,50 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 = 0,407 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 = 0,981 \cdot 10^{12}$$

Кадр 2

Таблица 2

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0	$\Delta\lambda_D$	$I_{\text{ц}}$	τ_0
H_{α}	0,527	0,678	3,31	0,401	0,495	0,363	0,432	0,500	0,211
H_{β}	0,367	0,460	0,455	0,302	0,275	0,0500	0,330	0,350	0,0290
H_{γ}	0,330	0,365	0,152	0,295	0,250	0,0167	0,302	0,310	0,0097
H_{ε}	0,321	0,124	0,0396	—	—	—	0,247	0,105	0,0025

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 2,88 \cdot 10^{-13}$$

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 3,44 \cdot 10^{-13}$$

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_{\alpha}} = 3,19 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 1,15 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 = 0,106 \cdot 10^{13}$$

$$N_2 = 0,662 \cdot 10^{12}$$

Таблица 3

Кадр 3

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0
H_α	0,531	0,645	1,28	0,457	0,495	0,940	0,466	0,505	0,608
H_β	0,401	0,425	0,176	0,336	0,305	0,129	0,361	0,350	0,0836
H_γ	0,364	0,335	0,0590	0,291	0,260	0,0433	0,302	0,295	0,0280
H_ϵ	0,336	0,120	0,0153	—	—	—	—	—	—

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,85 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,02 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,96 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 0,449 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,312 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,206 \cdot 10^{13}$$

Таблица 4

Кадр 4

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0
H_α	0,536	0,670	1,22	0,450	0,480	1,62	0,481	0,560	0,359
H_β	0,401	0,440	0,168	0,373	0,310	0,222	0,390	0,335	0,0494
H_γ	0,359	0,345	0,0562	0,303	0,280	0,0746	0,303	0,300	0,0165
H_ϵ	0,331	0,122	0,0146	—	—	—	—	—	—

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,82 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,06 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,86 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 0,433 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,529 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,125 \cdot 10^{13}$$

Таблица 5

Кадр 5

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0
H_α	0,520	0,635	0,310	0,446	0,460	0,292	0,435	0,385	0,423
H_β	0,381	0,407	0,0426	0,311	0,275	0,0400	0,311	0,285	0,0582
H_γ	0,330	0,365	0,0143	0,272	0,230	0,0134	0,279	0,275	0,0195
H_ϵ	0,321	0,120	0,0037	—	—	—	—	—	—

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 2,92 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,09 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,17 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 0,106 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,943 \cdot 10^{13} \quad N_2 = 0,113 \cdot 10^{13}$$

Кадр 10

Таблица 6

Линии	I центр			II центр			III центр		
	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0	$\Delta\lambda_D$	I_{II}	τ_0			
H_α	0,452	0,560	0,286	0,417	0,400	0,357	—	—	—
H_β	0,355	0,330	0,0393	0,292	0,245	0,0490	—	—	—
H_γ	0,287	0,230	0,0132	—	—	—	—	—	—

$$(\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,36 \cdot 10^{-13} \quad (\kappa_{\lambda_0})_{H_\alpha} = 3,31 \cdot 10^{-13}$$

$$N_2 = 0,851 \cdot 10^{12} \quad N_2 = 0,108 \cdot 10^{13}$$

Ниже в табл. 7—12 даны значения $\bar{B}$, соответствующие разным расстояниям $\Delta\lambda$ от центра контуров водородных линий, определяемые по формуле

$$\bar{B} = \frac{I - I_0 e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau}}, \quad (3)$$

полученной из (1). I и I_0 взяты из наблюдаемых контуров, а τ вычислена по формуле $\tau = \tau_0 e^{-\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right)^2}$, по известным τ_0 и $\Delta\lambda_D$. Внизу под каждым столбцом таблиц даны значения $\bar{B}$, соответствующие условию $\tau \ll 1$, при котором действительно $\bar{B} \approx \text{const}$, с точностью не менее 5% для всех исследуемых контуров.

Таблица 7

Кадр 1

$\Delta\lambda$	I центр				II центр			III центр			
	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ
0	0,65	0,82	1,43	1,13	0,57	1,10	2,50	1,43	3,41	12,8	8,8
0,2	0,68	0,98	1,50	1,14	0,61	1,50	2,50	1,61	3,41	12,7	8,8
0,4	0,73	0,98	1,53	1,14	0,80	1,50	2,50	2,14	3,41	12,9	8,8
0,6	0,82	0,98	1,53		1,15	1,50	2,50	2,26	3,41		
0,8	0,85				1,15			2,26			
1,0	0,86										
	0,84	0,98	1,50	1,14	1,15	1,50	2,50	2,24	3,41	12,8	8,8

Таблица 8

Кадр 2

$\Delta\lambda$	I центр				II центр			III центр			
	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ
0	0,68	1,10	1,81	1,16	1,22	3,20	8,0	1,70	5,3*	19,7	10,0
0,2	0,73	1,28	1,88	1,16	1,46	3,30	8,0	2,60	5,3	20,0	10,0
0,4	0,79	1,29	1,89	1,16	2,50	3,30	8,0	3,70	5,3	20,0	10,0
0,6	0,88	1,29	1,89		2,60	3,30		3,70			
0,8	0,91				2,60						
1,0	0,95										
	0,91	1,28	1,88	1,16	2,60	3,30	8,0	3,70	5,3	20,0	10,0

Таблица 9

Кадр 3

$\Delta \lambda$	I центр			II центр			III центр		
	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ
0	0,82	1,78	3,70	0,68	1,54	3,30	0,85	2,00	7,2
0,2	0,87	1,78	3,70	0,75	1,59	3,40	1,25	2,00	7,1
0,4	1,05	1,78	3,70	1,03	1,59	3,40	1,34	2,00	7,4
0,6	1,10	1,78	3,70	1,10	1,59		1,42	2,00	
0,8	1,15			1,10			1,44		
	1,10	1,78	3,70	1,10	1,59	3,40	1,40	2,00	7,3

Таблица 10

Кадр 4

$\Delta \lambda$	I центр			II центр			III центр		
	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β	H_γ
0	0,90	2,00	3,86	0,56	0,93	2,25	1,11	2,30	10,1
0,2	0,96	2,00	3,96	0,60	1,00	2,25	1,68	2,30	10,1
0,4	1,15	2,00	4,00	0,80	1,10	2,25	1,78	2,30	10,1
0,6	1,20	2,00	4,00	0,92	1,05		1,82	2,30	10,1
0,8	1,25			0,92					
	1,20	2,00	3,96	0,92	1,00	2,25	1,76	2,30	10,1

Таблица 11

Кадр 5

$\Delta \lambda$	I центр				II центр				III центр		
	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_α	H_β	H_γ	H_ϵ	H_α	H_β	H_γ
0	1,80	3,5	12,0	9,5	1,27	3,90	8,4		0,75	1,88	7,4
0,2	2,10	3,5	12,0	9,5	1,47	3,90	8,4		0,84	1,88	7,4
0,4	2,20	3,5	12,0	9,5	2,25	3,90	8,4		1,20	1,88	7,4
0,6	2,30	3,5	12,0		2,44	3,90			1,30		
0,8	2,20				2,44						
	2,20	3,5	12,0	9,5	2,40	3,90	8,4		1,25	1,88	7,4

Таблица 12

Кадр 10

$\Delta \lambda$	I центр			II центр	
	H_α	H_β	H_γ	H_α	H_β
0	1,66	3,8	7,8	0,88	1,98
0,2	2,70	3,8	7,8	1,44	2,20
0,4	2,80	3,8	7,8	1,54	2,10
0,6	2,80	3,8		1,56	
	2,80	3,8	7,8	1,51	2,15

Теперь легко можно найти $\frac{N_k}{N_2}$ по формуле

$$\frac{N_k}{N_2} = \frac{g_k}{g_2} \frac{\lambda_0^5}{2hc^2} I_k^c(0) \bar{B}_\lambda. \quad (4)$$

Результаты вычислений $\frac{N_k}{N_2}$ представлены в табл. 13. По данным вышеприведенных таблиц можно сделать некоторые заключения.

$$\frac{N_k}{N_2}$$

Таблица 13

Кадр	I центр				II центр			III центр			
	$\kappa=3$	$\kappa=4$	$\kappa=5$	$\kappa=7$	$\kappa=3$	$\kappa=4$	$\kappa=5$	$\kappa=3$	$\kappa=4$	$\kappa=5$	$\kappa=7$
1	0,0556	0,0382	0,0550	0,0531	0,0761	0,0585	0,0918	0,1483	0,1307	0,4698	0,4100
2	0,0602	0,0499	0,0690	0,0540	0,1721	0,1287	0,3728	0,2449	0,2060	0,7267	0,4600
3	0,0728	0,0708	0,1365	0,1216	0,0728	0,0620	0,1678	0,0927	0,0780	0,2660	—
4	0,0794	0,0780	0,1453	0,1118	0,0609	0,0390	0,1048	0,1165	0,0900	0,3707	—
5	0,1456	0,1362	0,4404	0,4429	0,1587	0,1521	0,3914	0,0828	0,0731	0,2734	—
10	0,1860	0,1482	0,2863	—	0,1059	0,0858	—	—	—	—	—

Из табл. 1—6 явствует, что интенсивность, в частности центральная интенсивность в водородных линиях бальмеровской серии, зависит от скорости турбулентного движения: большей скорости турбулентного движения соответствует большая центральная интенсивность. Такая же связь нами была обнаружена и ранее.

Другим фактом является малое значение оптических толщ даже для центральной части линии H_α (табл. 1—6). К такому же результату мы пришли ранее. Следует отметить, что к результату о почти полной прозрачности в центральной части H_α лимбовой вспышки 16 августа 1952 г. пришел А. Б. Северный [3]. По-видимому, действительно во многих вспышках оптическая толщина даже для H_α небольшая. Это прежде всего говорит о том, что N_2 во вспышках мало и турбулентность играет важную роль, а небольшое значение N_2 может быть связано с тем, что эмиссия имеет место в многочисленных тонких структурах, распределяемых по всему объему спектроскопически наблюдаемой вспышки. Тогда очевидно, что определяемые из спектрофотометрических исследований физические параметры характеризуют как бы усредненную картину вспышки. Как раз предполагая, что вспышка представляет собой структурное образование, спектроскопически занимающее довольно большой объем, мы можем попытаться решить многие задачи теории, в том числе проблему об относительно очень высокой плотности в области вспышки.

Малое значение оптических толщ даже для H_α еще может говорить о том, что наблюдаемые эмиссии во вспышках не являются простым переизлучением поглощенного собственного излучения (особенно если иметь в виду, что нередко вспышка излучает энергию в H_α , сравнимую с энергией соответствующего монохроматического непрерывного спектра Солнца [3]), а есть результат „непосредственного“ выхода энергии в виде излучения, вследствие прямого нагревания плазмы; источником такого механизма нагревания могут являться ударные волны.

В табл. 13 мы замечаем, что $\frac{N_k}{N_2}$ для H_ϵ всегда меньше, чем для линии H_γ . Из спектроскопических данных известно, что обычно, начиная от H_β или H_γ , вплоть до достаточно высоких членов серии, $\frac{N_k}{N_2}$ растет. В [4] обращается внимание на аномально низкое значение $\frac{N_k}{N_2}$ для H_ϵ и оно объясняется дополнительным поглощением H_ϵ — эмиссии вспышки красным крылом линии H Ca^+ . Однако в нашем случае невозможно связать низкое значение $\frac{N_k}{N_2}$ для H_ϵ с блендирующим

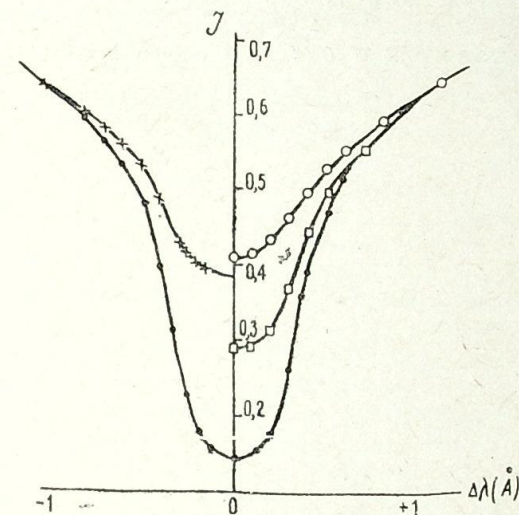
действием эмиссии H , ибо крыло линии H настолько узкое, что никак не может дойти до H_ϵ так, чтобы оказать блендирующее действие на эмиссию H_ϵ . Неравенство $\left(\frac{N_k}{N_2}\right)_{H_\epsilon} < \left(\frac{N_k}{N_2}\right)_{H_\gamma}$ должно являться реальным, ибо рассматриваемая серия не имеет эмиссии в членах бальмеровской серии выше, чем H_ϵ . Населенность уровня $k=7$ меньше, чем у $k=5$, а населенности уровней $k>7$ настолько незначительны, что вспышка не проявляет себя в соответствующих высших линиях бальмеровской серии.

При рассмотрении табл. 7—12 обращает на себя внимание рост функции источника $\bar{V}$ с глубиной (т. е. при переходе от центра к крыльям линии), с постоянным значением в крыльях линий. Разумеется, изменение функции источника с глубиной будет заметно только в линии H_α , ибо начиная от линии H_β оптическая толщина в центре линии бальмеровской серии водорода значительно меньше единицы, а в таком случае в этих линиях вспышка просматривается по всей глубине и поэтому функция источника для каждой из указанных линий усредняется. Рост $\bar{V}$ с глубиной может происходить за счет наложения на эмиссию водорода абсорбции в слое над эмиссией. В [2] мы видели, что для исследуемой серии вспышки значения турбулентных скоростей, определяемые по линиям H и K в 1,5—2 раза меньше значений турбулентных скоростей, найденных по линиям водорода. Это говорит о том, что наблюдаемые эмиссии водорода и кальция возбуждаются в разных областях вспышки. С другой стороны, мы можем предположить, что турбулентная скорость во внутренних частях вспышки больше, чем на ее периферии. Поэтому эмиссии H и K , по-видимому, возбуждаются на периферии вспышки, а здесь условия для возбуждения водородных линий в эмиссии могут быть неблагоприятными. Тогда мы можем выдвинуть предположение о том, что там, где возбуждаются линии H и K в эмиссии, водород проявляет себя только в абсорбции. Наличие такого слоя над областью, где возбуждается водород в эмиссии, должно привести к наблюдаемой картине уменьшения функции источника к наружи.

Еще один факт говорит о реальности наличия слоя с водородной абсорбцией над слоем водородной эмиссии в исследуемой серии вспышки. В табл. 13 мы замечаем, что отношение $\frac{N_k}{N_2}$ для H_β очень близко к отношению $\frac{N_k}{N_2}$ для H_α . Такая ситуация может быть вызвана как раз наложением на эмиссию водорода абсорбции в слое над эмиссией, если допустить, что оптическая толщина слоя с водородной аб-

сорбцией в линии H_α достаточно большая. В таком случае из-за сильного самопоглощения в линии H_α , $\frac{N_k}{N_2}$ для нее может быть занижено.

К сказанному выше относительно наличия слоя с водородной абсорбцией над областью эмиссии водорода в исследуемой серии вспышки добавим еще то обстоятельство, что на возможность аналогичных условий во вспышках впервые указывали В. А. Крат и В. М. Соболев [5]. В [5] говорится, что если $\Delta\lambda_D$ для абсорбций, экранирующих эмиссионные линии, меньше, чем для эмиссионных линий вспышки, то вершина эмиссионного контура будет как бы „срезаться“ абсорбцией. На рисунке изображены контуры H , I центра (точки в кружках), II центра (точки в квадратах) и III центра (крестики), кадра 1.



Из табл. 7—12 видно, что при малых τ_0 функция источника становится большей. Кроме того, из табл. 1—6 ясно, что уменьшение τ_0 нередко сопровождается и ростом центральной интенсивности водородных линий. Такой же результат мы получили раньше для другой серии. Систематический рост функции источника $\bar{V}$ и часто наблюдаемый рост центральной интенсивности I_c в линиях водорода с уменьшением оптической толщины τ_0 еще раз подтверждает сделанную нами выше оговорку относительно того, что наблюдаемые эмиссии вспышки являются результатом „непосредственного“ выхода энергии в виде излучения, в результате крайне быстро действующего механизма, каким может явиться нагрев плазмы ударными волнами.

Результаты по линиям H и K , а также общие выводы будут опубликованы во второй части статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Valnicek B., Letfus V., Blaha M., Svestka Z. and Seidl Z. ВАС, 10, 1959, № 5.
2. Гусейнов Р. Э. Солнечные данные, № 3 и 5, 1965.
3. Северный А. Б. „Изв. Крымской астрофизич. обсерватории“, 8, 103, 1955.
4. Казачевская Т. В., Северный А. Б. „Изв. Крымской астрофизич. обсерватории“, 19, 46, 1958.
5. Крат В. А., Соболев В. М. „Изв. ГАО АН СССР“, № 163, 1958.

21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын спектрофотометрик тәдгигинин нәтичәләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Бу алышма серијасы спектрофотометрик өјрәниләркән, һәм ин серијанын спектриндәки емиссия хәтләринин һидрокен вә ионлашмыш калсиум емиссия саһәләриндә турбулент сүр'әтләри мүхтәлиф олан, макроскопик һәрәкәт нәтичәсиндә төрәнән Допплер эффекти сајәсиндә кенишләндији нәзәрдә тутулмушдур.

H_α , H_β , H_γ , H_δ , H вә K хәтләринин 136 емиссия вә һәјәчанлашмамыш гоншу Күнәш атмосфери контуру һидрокен хәтләриндә 6 анда, H , K хәтләриндә 5 анда алышма серијасынын үч мәркәзи үчүн кениш сурәтдә спектрофотометрик тәдгиг едилмишдир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ю. В. ГОРИН, П. В. ЛЕОНОВ ВОЛЬТАМПЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГАЗОВОЙ ПОЛОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИКОМ

Электрический разряд в газовых полостях, ограниченных диэлектриком, имеет значительные особенности по сравнению с другими типами разряда. В изучении этого вида разряда заинтересованы две области техники: высоковольтная изоляция и газовая электрохимия. В высоковольтной изоляции разряд в газовых включениях приводит к необратимым процессам. Аппараты типа озонатора, применяемые в газовой электрохимии, представляют собой цилиндрические конденсаторы с газовой полостью; в газовых включениях в изоляции и в полости озонатора имеет место один и тот же вид разряда.

В настоящее время не существует единого мнения о принадлежности электрического разряда в газовых полостях, ограниченных диэлектриком, к тому или иному классическому типу электрического разряда. Одни авторы [1, 2] полагают, что напряжение на газовой полости во время горения разряда остается постоянным, а другие считают, что разряд носит характер отдельных пробоев и после каждого пробоя напряжение на газовой полости практически падает до нуля [3]. В работе представлен результат исследования вольтамперных характеристик разряда в газовой полости.

Описание установки. Принципиальная схема установки для исследования разряда в газовой полости представлена на рис. 1. Питание установки осуществлялось от трансформатора Tr_3 , позволяющего получить напряжения до 15 кВ. Для плавной регулировки напряжения с низкой стороны этого трансформатора включен автотрансформатор Tr_2 . Трансформатор Tr_1 использовался в качестве разделительного, позволяющего заземлить один из выводов первичной обмотки высоковольтного трансформатора. Для подавления высших гармоник сетевого напряжения включен П-образный LC-фильтр. R_1 служит защитного напряжения включен П-образный LC-фильтр. R_1 служит защитного напряжения включен П-образный LC-фильтр. R_1 служит защитного напряжения включен П-образный LC-фильтр. Испытуемая ячейка (ИЯ) помещалась в стальной корпус с сопротивлением. Испытуемая ячейка (ИЯ) помещалась в стальной корпус с сопротивлением. Испытуемая ячейка (ИЯ) помещалась в стальной корпус с сопротивлением. Для контроля давления к камере присоединены образцовые манометры, позволяющие измерять давление от 0,1 до 25 атм.

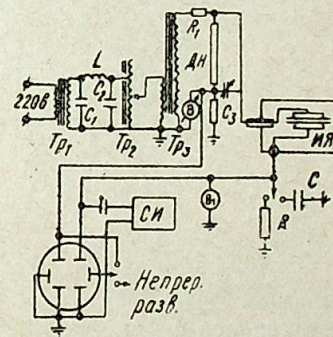


Рис. 1.

Ток разряда проходил через безиндуктивный магазин сопротивления (R) или магазин емкостей (C). Напряжение с сопротивления R подавалось на вход осциллографа с полосой пропускания до 100 кГц. Средний ток разряда измерялся по напряжению на сопротивлении R , измеряемому вольтметром средних значений Ф505 (B_1). Магазин C использовался для снятия вольт-кулоновых характеристик. Напряжение на ячейке измерялось электростатическим вольтметром, включенным через омический делитель ДН. Переменный конденсатор C_3 использовался для компенсации дополнительного фазового сдвига между током и напряжением, обусловленного собственной емкостью магазина и осциллографа. Число импульсов разряда подсчитывалось с помощью счетчика импульсов (СИ). Отдельные импульсы наблюдались на экране импульсного осциллографа. Схема дает возможность вести фотографирование осциллограмм тока и напряжения, а также циклографическое фотографирование осциллограмм $i = f(u)$ и $q = \varphi(u)$. Работа схемы при снятии циклограмм аналогична описанной в [4]. Опыты проводились на частоте 50 Гц.

Методика эксперимента. Изучение разряда проводилось на ячейке, схематически представленной на рис. 2. В качестве электродов использовались диски из латуни и нержавеющей стали. Поверхность электродов подвергалась шлифовке по 10 классу чистоты; края электродов были закруглены для ослабления влияния краевого эффекта. В некоторых опытах использовались электроды с охранным кольцом. В качестве диэлектрических барьеров применялись пленки из полиэтилена, полистирола и стеклянные пластинки толщиной 40 — 200 мк.

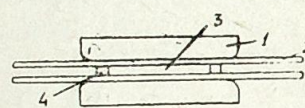


Рис. 2. 1—металлические электроды; 2—диэлектрические барьеры; 3—газовый зазор; 4—прокладка из диэлектрика

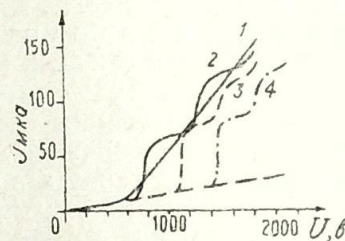


Рис. 3.

Пленки и стекла после тщательной очистки и промывки этиловым спиртом приклеивали к электродам с помощью вакуумной смазки. Толщина газовой полости между диэлектрическими барьерами устанавливалась с помощью прокладок из диэлектрика; толщина прокладок измерялась с точностью до 1 мк. Разница в толщине образцов диэлектрика не превышала во всех опытах 5%. Эксперименты проводились в атмосфере азота. Перед опытом камеру дважды эвакуировали до 10^{-1} мм рт. ст., а затем заполняли технически чистым азотом с применением дополнительной осушки.

Результаты эксперимента. На рис. 3 представлена серия вольт-амперных характеристик, полученных при разряде в ячейке с двумя барьерами из пленки полистирола толщиной 40 мк при толщине газовой полости 150 мк. На оси абсцисс отложено эффективное значение напряжения на ячейке. Характеристики 1—4 получены, соответственно, при давлениях азота в полости 0,4; 0,8; 1,0 и 1,5 атм. Кривые 2—4 имеют резко выраженный ступенчатый характер. Характеристика 1, полученная при более низком давлении, представляет собой две прямые с различным наклоном; угловой коэффициент второй прямой равен ωC_d , где C_d — емкость диэлектрических барьеров.

Данные, полученные при исследовании разряда в газовых полостях различных толщин, показывают, что вольт-амперные характеристики становятся ступенчатыми как только произведение pd (p — дав-

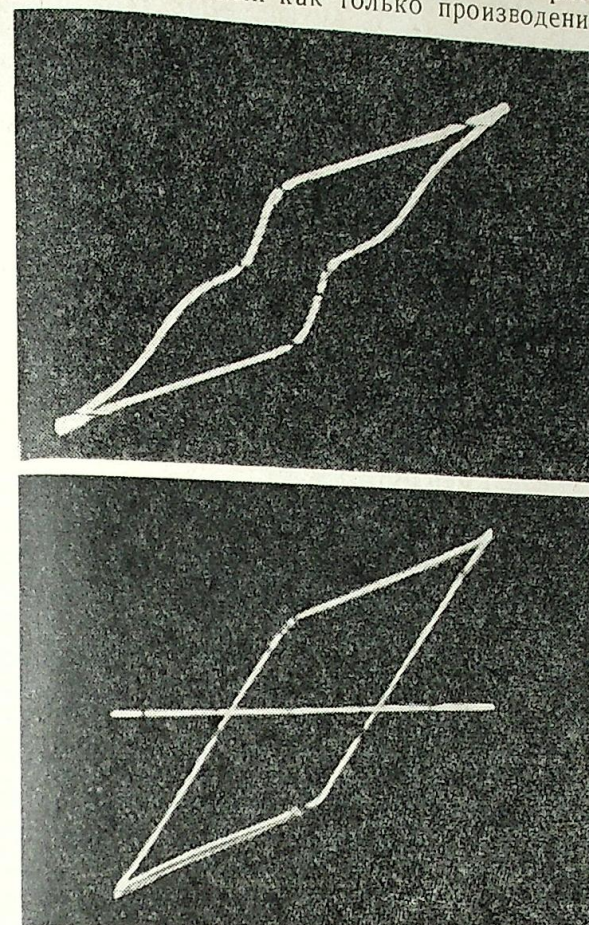


Рис. 4.

ление азота в мм рт. ст., d — толщина газовой полости в мм) превысит некоторое критическое значение. В диапазоне давлений $0,05 \div 5$ атм и расстояний $40 \div 200$ мк для ячеек с барьерами из полистирола критическое значение pd лежит вблизи 100 мм·мм рт. ст. Если для данной газовой полости произведение pd меньше, чем 100 мм·мм рт. ст., то вольт-амперные характеристики разряда имеют линейный характер.

На рис. 4 показаны циклографические зависимости $q = \varphi(u)$; циклограмма 4а получена при значениях pd ниже критического, а циклограмма 4б — выше критического. Как видно из рисунка, при значениях, больших критического, зависимость $q = \varphi(u)$ также имеет ступенчатый характер.

На рис. 5 изображена зависимость числа импульсов в разряде от напряжения. Значение pd для этой кривой превышает критическое. Рост числа импульсов происходит скачками, соответствующими ступеням ступенчатой вольт-амперной характеристики. При значениях среднего тока на вольт-амперной характеристике.

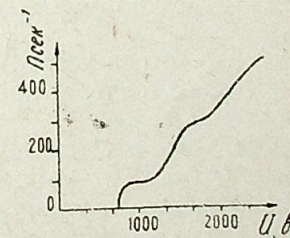


Рис. 5.

ниях pd , превышающих критическое, при изменении напряжения фаза зажигания разряда меняется скачкообразно, а при значениях ниже критического — плавно.

Обсуждение результатов. Установлено, что разряд в газовой полости, ограниченной диэлектриком, имеет импульсный характер. Измеряемый некоторыми авторами ток разряда представляет собой усредненные на измерительном сопротивлении R отдельные импульсы тока. Импульс имеет короткий фронт ($\sim 10^{-7}$ сек) и затем спадает по закону [5]

$$i(t) \approx \frac{(U_3 - U_n) C_d}{RC_0} \exp\left(-\frac{t}{RC_0}\right).$$

Здесь U_3 — напряжение на газовой полости в момент зажигания разряда;

U_n — напряжение погасания разряда;

$C_0 = \frac{C_d \times C_r}{C_d + C_r}$ — емкость ячейки;

C_d — емкость диэлектрического барьера;

C_r — емкость газового зазора;

C_d — емкость участка диэлектрика, разряжаемого одним импульсом.

При этом предполагается, что сначала напряжение на газовой полости растет пропорционально приложенному к ячейке напряжению до U_3 , после чего оно мгновенно падает до значения U_n . Далее, вместе с ростом приложенного напряжения, на газовом зазоре оно вновь возрастет, начиная от U_n . Из проведенных нами исследований вытекает неправильность постановки вопроса в работе [6], где ток разряда разделяется на электронный и ионный компоненты. Авторы [6] считают, что импульсы относятся к электронной, а так называемый квазистационарный ток к ионной составляющим тока разряда. Под квазистационарным током подразумевается ток, описанный в работе [4]. Нами установлено, что при достаточно малой постоянной времени RC_0 квазистационарная составляющая тока исчезает, а остаются лишь полностью разрешенные импульсы. При этом наблюдаемая длительность импульсов не соответствует длительности процесса разряда в полости, а определяется реакцией внешней цепи на подзарядку емкости C_0 .

Число разрядов за полупериод приложенного напряжения составляет [7]

$$n = 2 \left[\frac{\alpha U_0 - U_3}{U_3 - U_n} \right] = 2 \left[\frac{\eta - m}{1 - m} \right] = 2 [\eta_m], \quad (1)$$

где $[A]$ — целая часть A ;

U_0 — амплитуда приложенного к ячейке напряжения.

$$\eta = \alpha \frac{U}{U_3}; \quad m = \frac{U_n}{U_3}; \quad \alpha = \frac{C_d}{C_d + C_r}.$$

Величина η_m играет роль параметра перенапряжения при напряжении погасания, отличном от нуля.

Описанная закономерность следования импульсов не может быть получена в чистом виде при использовании обычно применяемых электродов из-за большого числа каналов разряда (формула (1) описывает число импульсов одного канала). Напряжения зажигания различных каналов отличаются друг от друга, что сглаживает общую картину следования импульсов.

Рассмотрим для простоты треугольную плотность распределения числа каналов по напряжениям зажигания (рис. 6). При этом распределении в области напряжений от $U_{1,1}$ до $U_{1,2}$ общее число каналов разряда

$$K = \int_{U_{1,1}}^{U_{1,2}} \kappa du = \frac{\kappa_0 (U_{1,2} - U_{1,1})}{2}. \quad (2)$$

Предполагая, что ширина распределения меньше, чем разность напряжений между последовательными зажиганиями одного и того же канала, т. е. $(U_{1,2} - U_{1,1}) < \left(U_1 - \frac{1}{\alpha} U_n\right)$, для числа импульсов в каналах, имеющих напряжение зажигания от u до $u + du$, получим

$$dn = 2 [\eta_m] \kappa du. \quad (3)$$

Отсюда для общего числа импульсов при напряжении u имеем

$$n = 2 [\eta_m] \int_{U_{1,1}}^u \kappa du. \quad (4)$$

Рассматривая функцию $n = n(u)$ в области $(N - 1) \leq \eta_m \leq N$, следует учесть, что в этой области каждый канал зажигается $2N$ раз, при этом ширина распределения увеличивается до $N(U_{1,2} - U_{1,1})$.

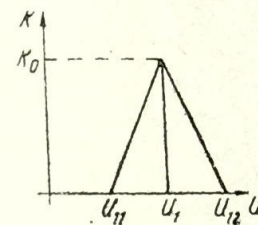


Рис. 6.

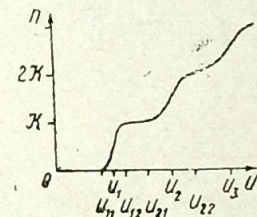


Рис. 7.

Интегрируя (4) по области разброса напряжений, получим

$$n(u) = \begin{cases} 2K [\eta_m] & \text{при } U_{N-1,2} < U < U_{N,1} \\ \frac{4K [\eta_m]}{N} \cdot \frac{(U - U_{N,1})^2}{(U_{1,2} - U_{1,1})^2} & \text{при } U_{N,1} < U < U_N; \\ 2K [\eta_m] \left\{ 1 - \frac{2}{N} \cdot \frac{(U_{N,2} - U)^2}{(U_{1,2} - U_{1,1})^2} \right\} & \text{при } U_N < U < U_{N,2}, \end{cases} \quad (5)$$

где N — номер ступени; $N = 1, 2, 3, \dots$

График функции $n = n(U)$ показан на рис. 7. Кривая $n = n(U)$ растет ступенчато из-за того, что число импульсов определяется целой частью η_m . Вместо треугольного распределения напряжений зажигания. При нормальном гауссовском распределении напряжений зажигания. При этом конечный результат будет мало отличаться от описанного, если ширина распределения меньше, чем $U_1 - \frac{1}{\alpha} U_n$.

Средние напряжения U_N каждой ступени кривой $n = n(U)$ связаны между собой соотношением:

$$\alpha U_n = \alpha (U_{N-1} + U_1) - U_n. \quad (6)$$

Это дает возможность из экспериментальной кривой $n = n(U)$ (рис. 3) получить параметр погасания.

$$m = \frac{U_n}{U_3} = \frac{1}{N-1} \left(N - \frac{U_N}{U_1} \right). \quad (7)$$

Из формулы (1) для числа разрядов за полупериод можно получить выражение фазы зажигания первого (φ_1) и последнего (φ_2) импульсов разряда в зависимости от напряжения:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arcsin \frac{1}{\eta} \{ (m-1) [\eta_m] + 1 \}; \\ \varphi_2 = \arcsin \frac{1}{\eta} \{ (1-m) [\eta_m] + m \}. \end{cases} \quad (8)$$

За $\varphi = 0$ принята точка максимума емкостного тока. Для напряжения погасания, равного нулю ($m = 0$),

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arcsin \frac{[\eta] - 1}{\eta}; \\ \varphi_2 = \arcsin \frac{[\eta]}{\eta}. \end{cases} \quad (9)$$

Если напряжение погасания близко к напряжению зажигания ($m \approx 1$), то, пренебрегая целой частью в η , в (8) получим

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arcsin \left(\frac{2}{\eta} - 1 \right), \\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (10)$$

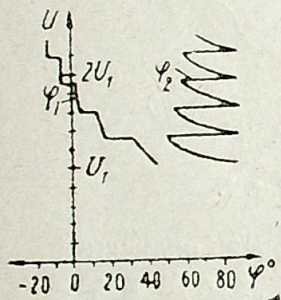


Рис. 8.

Этот случай соответствует рассмотренному ранее Филипповым [2] случаю постоянства напряжения на газовом зазоре при горении разряда. При этом фаза зажигания разряда равна нулю, когда перенапряжение η достигает двойного значения. Расчетная зависимость $\varphi(U)$ при $m = 0,7$ представлена на рис. 8.

Средний ток ячейки за полупериод при наличии разряда равен

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} i dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \left(U_0 \omega C_0 \cos \omega t + \frac{dq}{dt} \right) dt, \quad (11)$$

так как

$$\frac{dq}{dt} = \bar{q} \frac{dn}{dt} = \bar{q} \frac{dn}{du} \cdot \frac{du}{dt},$$

где $\bar{q}$ — средний заряд, переносимый одним импульсом.

Вычисляя $\frac{dn}{dt}$ из (5) и подставляя полученное значение в (11), после

интегрирования получим:

$$I_{cp}(U) = \begin{cases} \frac{2 U_0 \omega C_0}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\bar{q} K [\eta_m]}{2 U C_0} \right\} & \text{при } U_{N-1,2} < U < U_{N,1}; \\ \frac{2 U_0 \omega C_0}{\pi} \left\{ 1 + \frac{8 \bar{q} K [\eta_m]}{N C_0} \cdot \frac{U - U_{N,1}}{(U_{1,2} - U_{1,1})^2} \right\} & \text{при } U_{N,1} < U < U_N; \\ \frac{2 U_0 \omega C_0}{\pi} \left\{ 1 + \frac{8 \bar{q} K [\eta_m]}{N C_0} \cdot \frac{U - U_{N,2}}{(U_{1,2} - U_{1,1})^2} \right\} & \text{при } U_N < U < U_{N,2}, \end{cases} \quad (12)$$

где ω — круговая частота приложенного напряжения.

Первое слагаемое в этих выражениях определяет емкостный ток ячейки в отсутствие разряда, второе — усредненный ток, обусловленный импульсами. Из (12) видно, что средний ток разряда должен иметь ступенчатый характер, причем в областях $U_{N,2} \div U_{N-1,1}$ вольтамперная характеристика должна идти параллельно прямой чисто емкостного тока. Экспериментальные данные (рис. 3, 5) подтверждают наличие скачкообразного изменения числа импульсов, фазы зажигания и среднего тока в некоторой области pI .

Переход к линейным зависимостям n и I_{cp} , наблюдаемый экспериментально при снижении pI ниже критического, может быть объяснен изменением параметра погасания m . Очевидно, при pI ниже критического параметр погасания резко изменяется от 0,6 ÷ 0,7 до 1 с одновременным уменьшением среднего заряда $\bar{q}$, переносимого одним импульсом.

Выводы

В работе показано, что ток разряда в газовой полости, ограниченной с двух сторон диэлектриком, состоит из отдельных импульсов. Наблюдаемый другими авторами в аналогичных условиях квазистационарный ток представляет собой импульсы, усредненные на измерительном сопротивлении.

Экспериментально получены вольтамперные характеристики разряда в области pI 2 ÷ 750 мм·мм рт. ст. Установлено, что при определенных pI эти характеристики приобретают ступенчатый характер, объяснение этому явлению дано.

Предложен способ определения отношения напряжения погасания к напряжению зажигания разряда при наличии ступенчатой вольтамперной характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Manley I. C. Trans. Electrochem. Soc. **84**, 83, 1943.
2. Филиппов Ю. В., Емельянов Ю. М. ЖФХ, **31**, № 4, 897, 1957.
3. Сканиви Г. И. Физика диэлектриков (область сильных полей). М., 1958.
4. Дмитриев А. В. ЖТФ, **33**, 1104, 1963.
5. Veverka A., Hon A. Acta techn. CSAV, **8**, 509, 1963.
6. Gobrecht H., Meinhardt O., Hein F. Bericht. Bunsengesellschaft, **68**, № 1, 55, 1964.
7. Böning W. Arch. Elektrotechn., **48**, № 1, 7, 1963.

Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхажер, Л. В. Горин, П. В. Леонов

Диелектриклә һүдудланмыш газ аралығында електрик бошалмасынын вольт-ампер характеристикалары

ХУЛАСӘ

Мәгалә диелектриклә һүдудланмыш газ аралығында електрик бошалмасынын тәдгигинә һәср олунмушдур.

Бошалманын бу нөвүнә газ электрокимјасында истифадә олунан озонатор типли реакторларда тәсадүф едилир. Тәдгигат азот газында аралығын $40 \div 200$ мк, тәзјигин $0,05 - 5$ атм диапазонунда апарылмышдыр.

Мәгаләдә гурғунун схеми, характеристиканын гурулма методикасы тәсвир олунмуш вә газ аралығы електрик бошалмасынын импульс характери дашыдығы көстәрилмишдир. Мүәјјән олунмушдур ки, верилмиш бошалманын вольт-ампер характеристикасы $p\alpha$ -нин мүәјјән критик гијмәтиндән кичик гијмәтләрдә хәтти, бөјүк гијмәтләрдә исә пилләвары характер дашыјыр.

Мәгаләдә електрик бошалмасынын импульс характеринә әсаслана-раг, вольт-ампер характеристикасынын тәчрүбәдән алынмыш пилләвары һиссәсинин нәзәри изаһы верилмишдир.

Бундан башга, мәгаләдә тәчрүби вольт-ампер характеристикасындакы пилләләрин енинә көрә, сөнмә кәркиндијинин алышма кәркин-лијинә олан һисбәтинин тәјјини методикасы верилмишдир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийјат елмләри серијасы, 1966 № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1966, № 2

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. А. МИРОНОВ

ФЕРРОРЕЗОНАНСНЫЕ ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ НА НЕЙТРАЛИ РАЗЗЕМЛЕННОГО ТРАНСФОРМАТОРА В СЕТИ 110 кВ ПРИ НЕПОЛНОФАЗНЫХ РЕЖИМАХ

Неполнофазные режимы возникают на участках сети в результате обрыва одного или двух проводов с заземлением или без заземления их, одновременного отключения отдельных фаз выключателем. Исследованию неполнофазных режимов посвящено ряд работ, в которых рассматриваются повышения напряжения на фазах и нейтрали трансформатора при пофазных коммутациях [1—3]. Однако в них [1, 2] рассмотрены лишь отдельные частные случаи, которые не дают сведений о характерных неполнофазных режимах, имеющих место в реальных сетях.

В настоящей работе представлены результаты исследования феррорезонансных перенапряжений на нейтрали разземленного трансформатора, работающего в сети с частичным разземлением, при неполнофазных режимах, возникающих в результате обрыва проводов или несимметричного отключения фаз в начале линии.

Как известно, феррорезонансные перенапряжения возникают в сетях в случае, когда нелинейная индуктивность трансформатора соединяется последовательно с емкостью линии. При этом амплитуда возникающих колебаний зависит от величины активных потерь, поэтому наибольшую опасность представляет резонанс в сети с ненагруженными трансформаторами.

Исследуемая схема: система (питающая подстанция)—отходящая линия—ненагруженный трансформатор на понизительной подстанции (рис. 1). Трехфазная схема замещения исследуемой схемы упрощена: линия 110 кВ заменяется одной ячейкой, так как протяженность такой линии обычно не превышает 100 км; продольными сопротивлениями линии g_L , x_L , а также реактансом системы, ввиду их незначительности по сравнению с индуктивным сопротивлением трансформатора, пренебрегаем. Не учитываются также активные сопротивления обмотки трансформатора.

Расчет неполнофазных режимов в трехфазных цепях с нелинейными элементами в общем случае достаточно сложен, так как трехфазную схему не удастся свести к эквивалентной однофазной вследствие несимметрии сопротивлений линии и магнитопровода трансформатора, а также ввиду различия начальных условий для отключаемых фаз. Однако с помощью некоторого приближения удастся рассмотреть

феррорезонансные перенапряжения с качественной стороны и произвести ориентировочные расчеты для случаев резонанса на основной гармонике.

Величина возникающего напряжения на изолированной нейтрали трансформатора зависит от режима работы нейтрали системы в целом. Нормально нейтраль системы 110 кВ эффективно заземлена. При частичном разземлении сети в процессе коммутации могут выделяться участки с изолированной нейтралью. Поэтому резонанс в системе с заземленной и в системе с изолированной нейтралью следует рассмотреть отдельно.

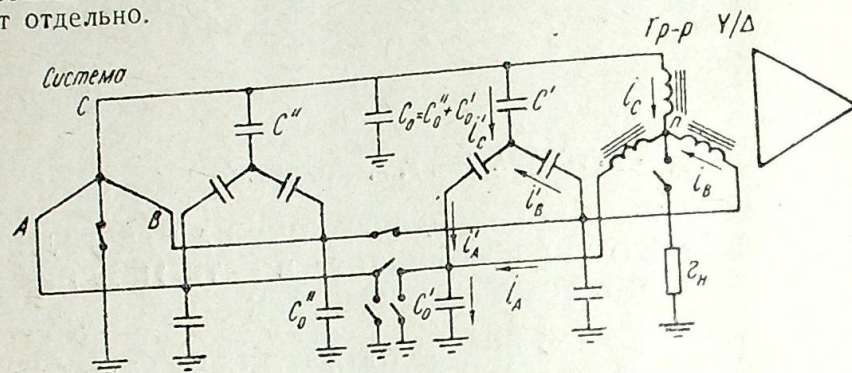


Рис. 1. Схема для исследования перенапряжения на нейтрали разземленного трансформатора при неполнофазных режимах.

Ниже рассматриваются наиболее характерные случаи неполнофазных режимов, когда нейтраль питающей системы заземлена или изолирована.

Перенапряжения в системе с заземленной нейтралью. Рассмотрим случай обрыва одного провода (фазы А) без заземления. Для установившегося процесса имеем:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{d\psi_B}{dt} + u_n; \\ u_C &= \frac{d\psi_C}{dt} + u_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_B, u_C — мгновенное напряжение для фаз В и С;
 ψ_B, ψ_C — потокосцепления обмотки фаз В и С;
 u_n — напряжение на нейтрали.
 Из системы (1) находим

$$u_n = \frac{1}{2} (u_B + u_C) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\psi_B + \psi_C). \quad (2)$$

Для схемы рис. 1 можем также записать

$$\psi_B + \psi_C = \psi_A, \quad u_B + u_C = -u_A = u'_A. \quad (3)$$

С учетом (3) уравнение (2) примет вид

$$u_n = \frac{1}{2} u'_A - \frac{1}{2} \frac{d\psi_A}{dt}.$$

Величина $\frac{d\psi_A}{dt}$ может быть найдена из системы уравнений для кон-

турных токов i_B, i_C, i'_B, i'_C :

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{d\psi_B}{dt} + \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{1}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt; \\ u_C &= \frac{d\psi_C}{dt} + \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{1}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt; \\ u_B &= \frac{1}{C'} \int i'_B dt + \frac{1}{C'} \int i'_A dt + \frac{1}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt; \\ u_C &= \frac{1}{C'} \int i'_C dt + \frac{1}{C'} \int i'_A dt + \frac{1}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где согласно рис. 1

$$i_A = i_B + i_C, \quad i'_A = i'_B + i'_C. \quad (5)$$

Суммируя первое и второе, третье и четвертое уравнения (4) и учитывая (3) и (5), получим:

$$\begin{aligned} u'_A &= 3 \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{2}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt; \\ u'_A &= 3 \cdot \frac{1}{C'} \int i'_A dt + \frac{2}{C'_0} \int (i_A + i'_A) dt. \end{aligned}$$

Исключив из последних двух уравнений i'_A , будем иметь

$$u'_A \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) = \frac{d\psi_A}{dt} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{C'_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) \int i_A dt. \quad (6)$$

Уравнение (6) нелинейно относительно $\frac{d\psi_A}{dt} = u_L$ вследствие нелинейной зависимости $u_L = f(i_A)$, которая для действующих значений U_L и I_A задается характеристикой холостого хода трансформатора:

$$U_L^* = f(I_A^*). \quad (7)$$

Учитывая только основную гармонику тока и напряжения фазы А трансформатора, для действующих значений этих величин можем записать

$$U_L = \frac{U_\Phi}{3} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\omega C'_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) I_A$$

или в относительных единицах

$$U_L^* = \frac{U_\Phi^*}{3} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\omega C'_0} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{3}{2} \frac{C'_0}{C'}} \right) I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\Phi}; \quad (8)$$

здесь I_0 — ток холостого хода трансформатора,
 U_Φ — номинальное фазное напряжение.

Имея характеристику холостого хода (7), которая в относительных единицах является гипотетической для различных трансформаторов 110 кВ, можно решить уравнение (8) относительно U_L и I_A . Решение легче всего выполнить графически [4]. Как известно, при C'_0 больше неко-

торого критического уравнение (8) имеет три решения. Одно из них соответствует неустойчивому режиму, два других — устойчивым, т. е. в контуре с нелинейной индуктивностью возможно два вида устойчивых колебаний: одно с небольшой амплитудой и отстающим по фазе индуктивным током, другое — с большой амплитудой и опережающим емкостным током. Установление колебаний того или иного вида зависит от начальных условий. Наибольшая величина напряжения на нейтрали имеет место во втором случае и равна

$$U_n^* = \frac{1}{2} U_\phi^* + \frac{1}{2} U_L^*$$

(здесь и в дальнейшем для определения наибольшего напряжения на нейтрали берем величину U_L^* , соответствующую емкостному режиму).

Из последнего выражения и связанного с ним уравнения (8) следует, что напряжение на нейтрали зависит только от места обрыва провода; что ближе место обрыва к источнику, т. е. чем дальше оно от трансформатора, тем больше напряжение на нейтрали. Кроме того, как это нетрудно видеть из уравнения (8), при одинаковых удалениях места обрыва напряжение на нейтрали больше у трансформаторов меньшей мощности.

При обрыве двух проводов без заземления аналогично предыдущему для напряжения на нейтрали можно получить выражение

$$U_n^* = U_\phi^* + U_L^* \quad (10)$$

В этом случае

$$U_L^* = \frac{2}{3} U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) + \frac{1}{3 \omega C_0'} \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi}.$$

Из сравнения выражений (9) и (10) нетрудно видеть, что при обрыве двух проводов напряжение на нейтрали трансформатора принимает большее значение, чем в случае обрыва одного провода.

Обрывы с заземлением со стороны системы приводят к короткому замыканию, отключаемому защитой, а при заземлении оборванного провода со стороны трансформатора емкость C_0' шунтируется, в результате чего возможность резонанса исключается.

Перенапряжения в системе с изолированной нейтралью. При обрыве одного провода (фазы А) с заземлением со стороны системы напряжение на нейтрали равно

$$U_n^* + 1,5 U_\phi^* + \frac{1}{2} U_L^*;$$

здесь

$$U_L^* = U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) + \frac{2}{3 \omega C_0'} \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi}.$$

При обрыве двух проводов с заземлением со стороны системы напряжение на нейтрали будет

$$U_n^* = 1,5 U_\phi^* + U_L^*,$$

где

$$U_L^* = U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) + \frac{1}{3 \omega C_0'} \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \frac{C_0'}{C'}} \right) I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi}.$$

При обрывах с заземлением напряжение на нейтрали зависит только от удаления места обрыва от трансформатора и достигает максимума при обрыве в начале ЛЭП.

Представляет интерес рассмотрение обрывов проводов с заземлением их со стороны трансформатора. Этот случай исследован Р. Вильгеймом и М. Уотерсом [3], согласно данным которых смещение изолированной нейтрали системы при обрыве одного провода достигает $(2,75 \div 3) U_\phi$, а при обрыве двух — $(3,25 \div 3,5) U_\phi$. При этом нейтраль трансформатора в конце линии смещается незначительно. Это смещение составляет примерно $0,3 U_\phi$. Перейдем к рассмотрению случая обрыва одного провода без заземления. Соответствующая схема замещения представлена на рис. 2.

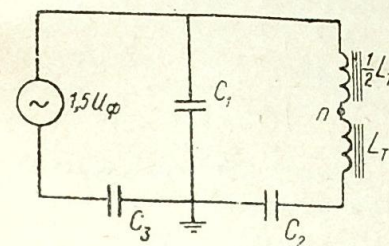


Рис. 2. Однофазная схема замещения для случая обрыва одной фазы без заземления в системе с изолированной нейтралью

Параметры схемы:

$$C_1 = 2 C_0' \left(1 + \frac{2 C'}{3 C_0'} + \frac{1 C'}{3 C_0'} \cdot \frac{C_0'}{C_0} \right);$$

$$C_2 = C_0' \left(1 + \frac{2 C'}{3 C_0'} + \frac{1 C'}{3 C_0'} \cdot \frac{C_0'}{C_0} \right);$$

$$C_3 = (C_0 - C_0') \frac{2 + 3 \frac{C_0'}{C'} + \frac{C_0'}{C_0}}{3 \left(1 + \frac{C_0'}{C'} \right)}.$$

Из схемы замещения для напряжения на нейтрали можно получить следующее выражение:

$$U_n^* = 1,5 U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) - \frac{1}{\omega C_3} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi} + \frac{1}{2} U_L^*.$$

Входящее в это выражение U_L^* и I_A^* связаны зависимостью

$$U_L^* = U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) + \frac{2}{3} \left[x_2 + x_3 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) \right] I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi},$$

где

$$x_2 = \frac{1}{\omega C_2}, \quad x_3 = \frac{1}{\omega C_3}.$$

Следует отметить, что напряжение на нейтрали зависит не только от удаления места обрыва от трансформатора, но и от всей длины ЛЭП.

В случае обрывов без заземления напряжения на нейтрали трансформатора меньше, чем при обрывах с заземлением, что объясняется увеличением емкостного сопротивления оборванной фазы и соответственно уменьшением тока через обмотку трансформатора. Очевидно, что при обрыве фазы у источника ($x_3 = \infty$) напряжение на нейтрали равно нулю.

При обрыве двух проводов без заземления напряжение на нейтрали определяется выражением

$$U_n^* = 1,5 U_\phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) - I_A^* \cdot \frac{I_0}{U_\phi} \cdot \frac{1}{\omega C_3} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) + U_L^*$$

и при этом имеет место соотношение

$$U_1^* = U_\Phi^* \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) + \frac{2}{3} \left[x_2 + x_3 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{C_3}{C_1}} \right) \right] \cdot I_A^* \cdot \frac{l_0}{U_\Phi},$$

где параметры схемы замещения соответственно равны:

$$C_1 = C_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{C'}{C_0} + \frac{2}{3} \frac{C'}{C_0} \cdot \frac{C_0}{C_0} \right);$$

$$C_2 = 2C_0 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{C'}{C_0} + \frac{2}{3} \frac{C'}{C_0} \cdot \frac{C_0}{C_0} \right);$$

$$C_3 = \frac{2}{3} (C_0 - C_0') \frac{1 + 2 \frac{C_0'}{C_0} + 3 \frac{C_0'}{C_0}}{1 + \frac{C_0'}{C_0}}.$$

Ниже в качестве примера для различных случаев неполнофазных режимов в таблице приведены значения максимально возможных кратностей перенапряжений $k = \frac{U_n}{U_\Phi}$ на нейтрали трансформатора ТДГ—31500/110, включенного в конце ЛЭП протяженностью 100 км, определенных расчетным путем.

Для сравнения здесь же даются результаты, полученные на модели:

Вид неполнофазного режима	$k = \frac{U_n}{U_\Phi}$ (расчетное)	$k = \frac{U_n}{U_\Phi}$ (опытное)
Нейтраль системы заземлена		
Обрыв одного провода в начале ЛЭП без заземления	1,1	1,1
Обрыв двух проводов в начале ЛЭП без заземления	2,4	2,4
Нейтраль системы изолирована		
Обрыв одного провода в начале ЛЭП с заземлением со стороны системы	2,15	2,2
Обрыв двух проводов в начале ЛЭП с заземлением одного из них со стороны системы	3,0	3,2
Обрыв одного провода без заземления на удалении 20 км от трансформатора	0,75	0,8
Обрыв двух проводов без заземления на удалении 20 км от трансформатора	1,55	1,6

Как видно из таблицы, имеется хорошее совпадение кратностей перенапряжений, определенных расчетным путем с результатами, полученными на модели. Незначительное превышение кратностей перенапряжений, полученных на модели для системы с изолированной нейтралью, по сравнению с расчетными объясняется меньшей нелинейностью характеристики намагничивания модели по сравнению с оригиналом. Наибольшие повышения напряжения имеют место при обрыве двух проводов с заземлением при питании от системы с изолированной нейтралью.

Как было указано выше, приведенная методика позволяет рассчитывать напряжение на нейтрали в случае резонанса на основной

гармонике. Исследование неполнофазных режимов с учетом резонанса на высших четных и нечетных гармониках дополнено экспериментами на модели.

Была собрана модель, позволяющая исследовать различные виды неполнофазных режимов в соответствии со схемой на рис. 1. На модели линия представлена сосредоточенными емкостями на землю и междуфазными (отношение $\frac{C_0}{C'} = 4$), в качестве трансформатора ис-

пользована его модель с трехстержневым сердечником. Моделировались характеристика намагничивания и активные потери трансформатора. Подобие оригинала и модели выполнялось выбором параметров модели в соответствии с выбранными масштабами, соотношением масштабных коэффициентов и т. д.

Анализ результатов, полученных на модели, также проведем отдельно для системы с заземленной и изолированной нейтралью. Как показали исследования на модели, в системе с заземленной нейтралью наибольшие напряжения возникают при резонансе на основной и второй гармонической, хотя при обрывах на небольшом удалении от трансформатора (малых C_0') происходит усиление высших нечетных гармоник (7 и 5-го порядка). Из опытов на модели получено, что высшие гармоники возникают там (если расстояние места обрыва от трансформатора в пределах $(0 \div 0,05) l_0$, где l_0 —длина моделированной линии. Эта величина зависит от типа трансформатора и с параметрами трансформатора и реальной ЛЭП связана соотношением

$$l_0 = \frac{C_m}{C_0} \cdot \frac{L_m}{L_T},$$

где C_m —емкость относительно земли одной фазы модели линии, равная 68 мкф;

C_0 —емкость относительно земли одной фазы ЛЭП, $\frac{\text{мкф}}{\text{км}}$;

L_m —индуктивность холостого хода одной фазы модели трансформатора, равная 0,37 гн;

L_T —индуктивность холостого хода реального трансформатора (Для трансформатора ТДГ—31500/110 $l_0 = 100 \text{ км}$).

Кратность повышения напряжения на нейтрали при наличии высших гармонических не превышает $1,5 U_{\Phi m}$.

Резонанс с частотой 2ω , из опытов на модели, имеет также узкую область существования и возникает при обрыве одной фазы (например В) на удалении $(0,1 \div 0,15) l_0$ от трансформатора и запаздывании на отключение той или другой фазы в начале линии. Кратность перенапряжения при этом достигает $3,5 U_{\Phi m}$ на вводе трансформатора и $2,2 U_{\Phi m}$ на его нейтрали (рис. 3 в). Следует отметить, что во всех случаях неполнофазных режимов на поврежденных фазах трансформатора также возникают значительные перенапряжения. Но в то время как перенапряжения на нейтрали почти не исследовались, повышения напряжения на вводах трансформатора в этих случаях изучены достаточно хорошо [4]. Поэтому перенапряжения, возникающие на фазах, здесь не рассматриваются. Они приведены на осциллограммах лишь для сравнения.

При обрывах на удалении $l > 0,15 l_0$ в составе напряжения в значительной степени преобладает основная гармоника. В этом случае результаты исследования на модели качественно подтверждают полу-

ченные расчетным путем. При обрыве без заземления двух фаз (рис. 3 б) напряжение на нейтрали больше, чем в случае обрыва одной фазы (рис. 3 а). При обрывах, происходящих на расстоянии $l > l_{кр}$ (в случае обрыва двух фаз $l_{кр} = 0,4 l_0$), возможны два вида устойчивых колебаний (рис. 3 г и д). Установление ее обрыва или отключения от напряжения на фазе ЛЭП в момент ее обрыва или отключения.

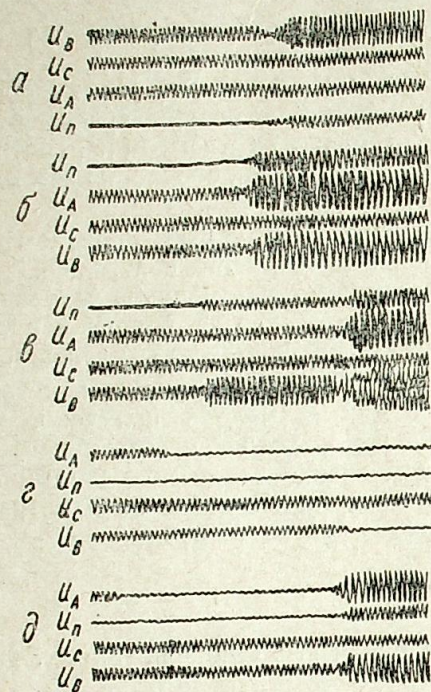


Рис. 3. Осциллограммы напряжений на фазах и нейтрали трансформатора при неполнофазных режимах в системе с заземленной нейтралью

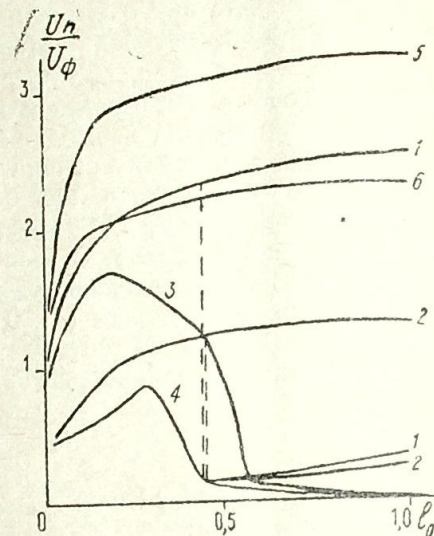


Рис. 4. Зависимость кратности перенапряжений на разземленной нейтрали от удаления места обрыва фаз от трансформатора

На основании экспериментальных данных построены кривые (1 и 2, рис. 4) зависимости напряжения на нейтрали от удаления места обрыва проводов от трансформатора. Кривая 2 дана для случая обрыва одного провода, кривая 1 — для обрыва двух проводов.

Если обрывы без заземления происходят в системе с изолированной нейтралью, то напряжение на нейтрали меньше, чем для соответствующих случаев в системе с заземленной нейтралью. Это видно из сравнения осциллограмм на рис. 3а и 5г, 3б и 5д, причем на рис. 5г осциллограммы даны для случая обрыва одного провода без заземления в системе с изолированной нейтралью, 5д — для обрыва двух проводов. На всех этих осциллограммах записаны процессы, возникающие в результате обрыва проводов на расстоянии $0,8 l_0$ от трансформатора. На рис. 4 представлены экспериментально снятые зависимости на ряжения на нейтрали трансформатора от удаления места обрыва: кривая 3 дана для обрыва двух проводов, кривая 4 — для обрыва одного провода.

Наиболее тяжелым случаем являются обрывы двух фаз с заземлением их со стороны системы, когда нейтраль системы изолирована; напряжение нейтрали при этом достигает $3 U_φ$. На рис. 5 представлены осциллограммы напряжений на нейтрали и вводах трансформатора при

обрыве на расстоянии $0,8 l_0$ одной (рис. 5а) и двух фаз (рис. 5б). Зависимость напряжения на нейтрали от удаления места обрыва показана на рис. 4: кривая 5 — обрыв одной фазы, кривая 6 — обрыв двух фаз. Смещение изолированной нейтрали трансформатора при обрыве одной фазы с заземлением со стороны трансформатора незначительно (рис. 5в).

Итак, эксперименты на модели и приближенные расчеты показывают, что при неполнофазных режимах возможны длительные повышения напряжения на нейтрали, кратность которых доходит до $3 U_φ$. Для ослабленной изоляции нейтрали трансформатора 110 кВ, при которой допустимое напряжение равно 85 кВ, эта величина опасна.

Таким образом, при частичном разземлении нейтрали современных сетей 110 кВ следует считаться с возможностью неполнофазных режимов, при которых могут возникнуть опасные для изоляции нейтрали перенапряжения. Это особенно относится к трансформаторам с классом изоляции нейтрали на 35 кВ, которые в настоящее время находят все большее применение. С этими перенапряжениями следует считаться еще и в силу того, что продолжительность их очень значительная — до нескольких десятков минут. Для защиты от этих перенапряжений должны быть разработаны соответствующие защитные устройства, учитывая, что рекомендованный в настоящее время для защиты нейтрали разрядник РВС-35 не в состоянии справиться с такими продолжительными перенапряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев Ф. А. „Электрические станции“, 1963, № 6.
2. Лихачев Ф. А. „Электрические станции“, 1965, № 5.
3. Вильгейм Р., Уотерс М. Заземление нейтрали в высоковольтных системах. 1959.
4. Сиротинский Л. И. Техника высоких напряжений, ч. III, 1959.

Ч. М. Чуварлы, К. А. Миронов

110-луг шэбэкэ трансформаторунун торпагланмамыш нејтралында гејри-тамфазлы режимлэрдэ феррорезонанс ифрат кэркинликлэр

ХҮЛАСЭ

Мэгалэ трансформаторун торпагланмамыш нејтралында феррорезонанс ифрат кэркинликлэрин гејри-тамфазлы режимлэрдэ тэдгигиндэн бэхс едир (мэфтиллэрин гырылмасы, хэттин эввэлиндэ ачар тэрэфиндэн фазларын гејри-симметрик ачылмасы халлары).

Кәркинлијин әсас һормоникасы үстүнлүк тәшкил етдикдә трансформаторун нејтралында кәркинлији һесабламаг үчүн ифадә верилмишдир. Бир тип трансформатор үчүн тәгдим олунмуш һесабат модел үзәриндә алынмыш нәтичәләрә ујгун кәлир. Гејри-тамфазлы режим-ләрдә нејтралда кәркинлијин $2,5 \div 3,0 U_{\phi}$ -ә гәдәр чатмасы, һәмчинин трансформатор нејтралы изолә едилмиш мәнбәдән дојдуруларкән, систем тәрәфдән торпагланан ики мәфтилин хәттин әввәлиндә гырылмасы заманы бу кәмијјәт ән бөјүк гијмәт алыр. Бу чүр ифрат кәркинликләр узун мүддәт тәсир етдијиндән 110 кВ-луг трансформатор нејтралынын изолјасијасы үчүн тәһлүкәлидир.

Д. Н. КЕРИМОВА

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. В настоящей работе исследуется краевая задача для системы

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= f\left(x, u, \frac{du}{dx}, v\right), \\ \frac{dv}{dx} &= g\left(x, u, \frac{du}{dx}, v\right) \end{aligned} \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a) - \alpha_1 u'(a) = \alpha \\ \beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \beta \\ v(a) = \gamma, \quad a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (2)$$

где функции f и g заданы в некоторой области G , которая будет уточнена ниже, $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие некоторым дополнительным соотношениям.

В работе для приближенного решения задачи (1) — (2) используется метод конечных разностей.

2. Для применения метода конечных разностей к решению задачи (1) — (2) системе (1) сопоставим конечно-разностную систему.

Пусть

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

обозначает множество равноотстоящих значений аргумента x , причем

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= h, \\ h &= \frac{b-a}{n}, \end{aligned}$$

где h называется шагом.

При этом точки разбиения отрезка $[a, b]$ имеют абсциссы

$$x_k = a + kh \quad (k = 0, n).$$

Значение любой функции в точке деления x_k отмечаем индексом k .

Пусть через

$$\begin{aligned} u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \\ v_0, v_1, v_2, \dots, v_n \end{aligned} \quad (3)$$

обозначены соответствующие значения функций u, v .

Тогда, пользуясь в узле x_k соотношениями

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &\sim \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &\sim \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2}, \\ \frac{dv}{dx} &\sim \frac{v_k - v_{k-1}}{h},\end{aligned}$$

краевой задаче (1)–(2) сопоставляем следующую конечно-разностную систему:

$$\begin{aligned}u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} &= h^2 f_k \quad (\kappa = \overline{1, n-1}) \\ v_l - v_{l-1} &= h g_l \quad (l = \overline{1, n}) \\ \sigma_0 u_0 - \sigma_1 \frac{u_1 - u_0}{h} &= \alpha, \\ \beta_0 u + \beta_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} &= \beta \\ v_0 &= \gamma,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}f_k &= f\left(x_k, u_k, \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}, v_k\right), \\ g_l &= g\left(x_l, u_l, \frac{u_{l+1} - u_{l-1}}{2h}, v_l\right), \\ g_n &= g\left(x_n, u_n, \frac{u_n - u_{n-1}}{h}, v_n\right).\end{aligned}$$

Таким образом, нахождения $2(n+1)$ неизвестных (3) имеем $2(n+1)$ конечных уравнений.

Для решения системы (4) рассмотрим сначала частную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1} &= h^2 b_k \quad (\kappa = \overline{1, n-1}) \\ R_0(u) &= \sigma_0 u_0 - \sigma_1 \frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha, \\ R_n(u) &= \beta_0 u_n + \beta_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} = \beta,\end{aligned} \quad (5)$$

где $u_0, u_1, \dots, u_n$ — неизвестные, а остальные величины: $b_k, \sigma_0, \sigma_1, \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta$ известны.

Очевидно, система (5) нормальна, т. е. число неизвестных и число уравнений совпадают и равны $n+1$.

Решение системы (5), следуя [1], ищем в виде суммы

$$u_k = z_k + t_k \quad (\kappa = \overline{0, n}),$$

где z_k удовлетворяют системе

$$\begin{cases} z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1} = h^2 b_k \quad (\kappa = \overline{1, n-1}), \\ R_0(z) = 0, \quad R_n(z) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

а t_k — системе

$$\begin{aligned}t_{k+1} - 2t_k + t_{k-1} &= 0 \quad (\kappa = \overline{1, n-1}) \\ R_0(t) &= \alpha, \quad R_n(t) = \beta.\end{aligned} \quad (7)$$

Нетрудно проверить, что

$$t_k = C_1 + \kappa C_2 \quad (\kappa = \overline{0, n}), \quad (8)$$

где C_1 и C_2 — постоянные, которые следует подбирать так, чтобы были выполнены граничные условия. Тогда, решая систему

$$\begin{cases} R_0(t) = \alpha \\ R_n(t) = \beta, \end{cases}$$

найдем

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1}{\Delta} \left(\sigma_0 \beta_0 n + \frac{\sigma_1 \beta_1}{h} + \frac{\sigma_1 \beta}{h} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{\Delta} (\sigma_0 \beta - \sigma_1 \beta_0),\end{aligned} \quad (9)$$

где предполагаем, что

$$\Delta = \frac{1}{h} [\sigma_0 \beta_0 (b-a) + \sigma_0 \beta_1 + \sigma_1 \beta_0] = \frac{\Delta_1}{h} \neq 0.$$

Нетрудно также проверить, что решение системы (6) имеет вид

$$z_k = h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} b_i, \quad (10)$$

где

$$g_{ik} = \begin{cases} \frac{h}{\Delta_1} \left(\sigma_0 i + \frac{\sigma_1}{h} \right) \left(\beta_0 \kappa - \beta_1 n - \frac{\beta_1}{h} \right), & \kappa \geq i \\ \frac{h}{\Delta_1} \left(\sigma_0 \kappa + \frac{\sigma_1}{h} \right) \left(\beta_0 i - \beta_0 - \frac{\beta_1}{h} \right), & \kappa \leq i. \end{cases}$$

Если сложить (8) и (10), то получим решение системы (5):

$$\begin{aligned}u_k &= \frac{h}{\Delta_1} \left(\sigma_0 \beta_0 n + \frac{\sigma_1 \beta_1}{h} + \frac{\sigma_1 \beta}{h} \right) + \frac{\kappa h}{\Delta_1} (\sigma_0 \beta - \sigma_1 \beta_0) + \\ &+ h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} b_i.\end{aligned} \quad (11)$$

Для дальнейшего нам понадобятся оценки:

$$\begin{aligned}\left| h^2 \sum_{i=k}^{n-1} g_{ik} b_i \right| &\leq n^2 h^2 \lambda_1 \max_i |b_i|, \\ \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{ik+1} - g_{ik-1}}{2} b_i \right| &\leq n h \lambda_2 \max_i |b_i|, \\ \left| h \prod_{i=1}^{n-1} (g_{in} - g_{in-1}) b_i \right| &\leq n h \lambda_3 \max_i |b_i|,\end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4 \Delta_1} \left[\sigma_0 \beta_1 + \sigma_1 \beta_0 + \frac{4 \sigma_1 \beta_1}{(b-a)} + \frac{(\sigma_0 \beta_1 - \sigma_1 \beta_0)^2}{2 \Delta_1} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2 \Delta_1} [\sigma_0 \beta_0 (b-a) + 2 \max(\sigma_0 \beta_1, \sigma_1 \beta_0)], \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2 \Delta_1} [\sigma_0 \beta_0 (b-a) + 2 \sigma_1 \beta_0].\end{aligned} \quad (13)$$

3. В настоящем пункте доказывается существование и единственность решения конечно-разностной системы, соответствующей нашей краевой задаче (1)–(2). Конечно-разностная система (4) решается методом Каччополи–Банаха (метод сжатых отображений). Систему (4) можно привести к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} z_k &= h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} f_i \quad (\kappa = \overline{0, n}), \\ y_0 &= 0, \\ y_k &= h \sum_{i=1}^k g_i \quad (\kappa = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} z_k &= u_k - \left[\frac{h}{\Delta_1} \left(\alpha_1 \beta_0 n + \frac{c \beta_1}{h} + \frac{c_1 \beta}{h} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa h}{\Delta_1} (\tau_0 \beta - c \beta_0) \right] + \\ y_k &= v_k - \gamma. \end{aligned}$$

Для решения системы (14) применим метод последовательных приближений:

$$\begin{aligned} z_k^{(r+1)} &= h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} f_i^{(r)}, \\ y_k^{(r+1)} &= h \sum_{i=1}^k g_i^{(r)} \quad (r = 0, 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} f_i^{(r)} &= f(x_i, u_i^{(r)}, w_i^{(r)}, v_i^{(r)}), \\ g_i^{(r)} &= g(x_i, u_i^{(r)}, w_i^{(r)}, v_i^{(r)}). \end{aligned}$$

$u_i^{(0)}, w_i^{(0)}, v_i^{(0)}$ суть подходящие нулевые приближения. Нам предстоит доказать сходимость последовательностей $u_i^{(r)}, w_i^{(r)}, v_i^{(r)}$ при $r \rightarrow \infty$.

Для этого применим принцип Каччополи–Банаха в следующей формулировке. Пусть R — полное метрическое пространство и пусть в $\bar{S}(\bar{x}, r)$ замкнута r -окрестность точки $\bar{x}$ (шар радиуса r с центром $\bar{x}$) тогда выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \rho(A(x), A(y)) &\leq \alpha \rho(x, y), \quad \alpha < 1, \quad x, y \in \bar{S}(\bar{x}, r), \\ \rho(\bar{x}, A(\bar{x})) &\leq (1 - \alpha) r. \end{aligned}$$

Тогда оператор A имеет в $\bar{S}(\bar{x}, r)$ единственную неподвижную точку, которая может быть получена как предел последовательности

$$x_k = A(x_{k-1}) \quad (\kappa = 1, 2, 3, \dots),$$

где x_0 — произвольный элемент из $\bar{S}(\bar{x}, r)$.

В целях применения указанного принципа введем метрическое пространство R , состоящее из всевозможных пар множеств из $n+1$ числа $v = (u_k, v_k)$, с метрикой

$$\begin{aligned} \rho(V^{(1)}, V^{(2)}) &= \max_{0 \leq k \leq n} |u_k^{(1)} - u_k^{(2)}| + \max_{0 \leq k \leq n} |v_k^{(1)} - v_k^{(2)}| + \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n} |w_k^{(1)} - w_k^{(2)}|, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} \quad (\kappa = \overline{1, n-n}), \\ w_n &= \frac{u_n - u_{n+1}}{h}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать только такие пары $V = (u_k, v_k)$, для которых

$$(x_k, u_k, w_k, v_k) \in G \quad (\kappa = \overline{1, n}). \quad (16)$$

Система (14) определяет отображение

$$V'' = A(V').$$

Предположим, что функции f и g в области G удовлетворяют условию Липшица по аргументам u, w, v :

$$\begin{aligned} |f(x, u', w', v') - f(x, u'', w'', v'')| &\leq L_1 |u' - u''| + L_2 |w' - w''| + L_3 |v' - v''|, \\ |g(x, u', w', v') - g(x, u'', w'', v'')| &\leq M_1 |u' - u''| + \\ &\quad + M_2 |w' - w''| + M_3 |v' - v''|. \end{aligned}$$

Найдем теперь расстояние

$$\begin{aligned} \rho(A(v'), A(v'')) &= \rho(\bar{v}', \bar{v}'') = \max_{0 \leq k \leq n} |z_k' - z_k''| + \\ &\quad + \max_{0 \leq k \leq n} |\bar{y}_k' - \bar{y}_k''| + \max_{1 \leq k \leq n} |\bar{w}_k' - \bar{w}_k''| = \\ &= \max_{0 \leq k \leq n} \left| h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} [f(x_i, u_i', w_i', v_i') - f(x_i, u_i'', w_i'', v_i'')] \right| + \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n} \left| h \sum_{i=1}^k [g(x_i, u_i', w_i', v_i') - g(x_i, u_i'', w_i'', v_i'')] \right| + \\ &\quad + \max_{1 \leq k \leq n-1} \left| h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{ik+1} - g_{ik-1}}{2} [f(x_i, u_i', w_i', v_i') - \right. \\ &\quad \left. - f(x_i, u_i'', w_i'', v_i'')] \right| + \\ &\quad + h \sum_{i=1}^{n-1} (g_{in} - g_{in-1}) [f(x_i, u_i', w_i', v_i') - f(x_i, u_i'', w_i'', v_i'')]. \end{aligned}$$

Согласно (12) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \rho(A(v'), A(v'')) &\leq [n^2 h^2 \gamma_1 L_1 + nh M_1 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_1] \max |u_i' - u_i''| + \\ &\quad + [n^2 h^2 \gamma_1 L_3 + nh M_3 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_3] \max |v_i' - v_i''| + \\ &\quad + [n^2 h^2 \lambda_1 L_2 + nh M_2 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_2] \max |w_i' - w_i''|. \end{aligned}$$

Тогда

$$\rho(A(v'), A(v'')) \leq \alpha \rho(v'v''),$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \max \{ n^2 h^2 \lambda_1 L_1 + nh M_1 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_1, \\ &\quad n^2 h^2 \lambda_1 L_2 + nh M_2 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_2, \\ &\quad n^2 h^2 \lambda_1 L_3 + nh M_3 + nh(\lambda_2 + \lambda_3) L_3 \}. \end{aligned}$$

Предположим, что $\alpha < 1$. Тогда отображение A сжатое.

Пусть начальное приближение $v^{(0)} = (u_k^{(0)}, v_k^{(0)})$ удовлетворяет условию (16). Рассмотрим в пространстве R шар $\bar{S}(v^{(0)}, r)$, где

$$r = \frac{\rho(V^{(0)}, V^{(1)})}{1 - \alpha}.$$

Для того, чтобы все последующие приближения не выходили из области G , достаточно, чтобы к области G принадлежали все точки (x_k, u_k, w_k, v_k) , для которых

$$\rho(v, v^{(1)}) \leq \alpha r.$$

Итак, на основании упомянутого принципа сжатых отображений наша система имеет решение, причем единственное, и оно может быть найдено методом последовательных приближений.

4. Нам остается исследовать вопрос сходимости конечно-разностного решения к точному решению краевой задачи и оценку отклонения этих решений. При этом будем дополнительно предполагать, что функция f непрерывна в области G вместе со всеми своими частными производными до второго порядка включительно, а функция g удовлетворяет условию Липшица и по первому аргументу. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= u_k - u(x_k), \\ \eta_k &= w_k - u'(x_k), \\ \delta_k &= v_k - v(x_k), \end{aligned}$$

где $u(x)$, $v(x)$ — точное решение поставленной задачи. Займемся сначала оценкой величины ε_k .

Очевидно, по формуле Тейлора

$$u(x_{k+1}) - 2u(x_k) + u(x_{k-1}) = h^2 F_k + h^4 \rho_k,$$

где

$$\begin{aligned} F_k &= f(x_k, u_k(x_k), u'(x_k), u(x_k)), \\ |\rho_k| &\leq \frac{1}{12} N_4 \quad (k = \overline{1, n-1}), \\ N_l &= \max_{a \leq x \leq b} |u^{(l)}(x)|. \end{aligned}$$

Аналогично найдем:

$$\begin{aligned} \alpha_0 u(x_0) - \alpha \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h} &= \alpha - \alpha_1 h \rho_0, \\ \beta_0 u(x_n) + \beta_1 \frac{u(x_n) - u(x_{n-1})}{h} &= \beta + \beta_1 h \rho_n, \end{aligned}$$

где

$$|\rho_0| \leq \frac{1}{2} N_2, \quad |\rho_n| \leq \frac{1}{2} N_2.$$

Так как u_k удовлетворяет системе

$$u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1} = h^2 f_k \quad (k = \overline{1, n-1}),$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \alpha_0 u_0 - \alpha_1 \frac{u_1 - u_0}{h} &= \alpha, \\ \beta_0 u_n + \beta_1 \frac{u_n - u_{n-1}}{h} &= \beta, \end{aligned}$$

то, вычитая, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} - 2\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1} &= h^2(F_k - f_k) + h^4 \rho_k \quad (k = \overline{1, n-1}), \\ \alpha_0 \varepsilon_0 - \alpha_1 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{h} &= -\alpha_1 h \rho_0, \\ \beta_0 \varepsilon_n + \beta_1 \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{h} &= \beta_1 h \rho_n. \end{aligned}$$

Решение этой системы согласно (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{h}{\Delta_1} [\alpha_1 \beta_1 \rho_n - \alpha_1 \beta_0 (b-a) \rho_0 - \alpha_1 \beta_1 \rho_0] + \frac{\kappa h^2}{\Delta_1} (\alpha_0 \beta_1 \rho_n + \alpha_1 \beta_0 \rho_0) + \\ &+ h^4 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} \rho_i + h^2 \sum_{i=1}^{n-1} g_{ik} (F_i - f_i). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее по той же формуле Тейлора имеем:

$$\begin{aligned} \eta_k &= \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} - u'(x_k) = h^2 \rho_k^* + \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}}{2h}, \\ \eta_n &= \frac{u_n - u_{n-1}}{h} - u'(x_n) = h \rho_n + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{h}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$|\rho_k^*| \leq \frac{1}{6} N_3.$$

Оценим теперь ε_k :

$$\begin{aligned} |\varepsilon_k| &\leq \frac{h N_2}{2 \Delta_1} [2 \alpha_1 \beta_1 + (b-a)(2 \alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1)] + \frac{h^2}{12} (b-a)^2 \lambda_1 (N_4 2 N_3 L_2) + \\ &+ (b-a)^2 \lambda_1 \rho(\varepsilon) + (b-a)^2 \lambda_1 L_3 \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|, \end{aligned}$$

где

$$\rho(\varepsilon) = L_1 \max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| + L_2 \max_{1 \leq i \leq n-1} \left| \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2h} \right|.$$

Пользуясь выражением для ε_k , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}}{2h} &= \frac{h}{\Delta_1} (\alpha_0 \beta_1 \rho_n + \alpha_1 \beta_0 \rho_0) + h^3 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{ik+1} - g_{ik-1}}{2} \rho_i + \\ &+ h \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{ik+1} - g_{ik-1}}{2} (F_i - f_i). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (12) имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}}{2h} \right| &\leq \frac{h N_2}{2 \Delta_1} (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) + \frac{h^2}{12} (b-a)^2 \lambda_2 (N_4 + 2 N_3 L_2) + \\ &+ (b-a) \lambda_2 \rho(\varepsilon) + (b-a) \lambda_2 L^3 \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу того, что $\lambda_2 \geq \lambda_3$, для $\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{h}$ справедлива та же самая оценка. Подставляя в выражение для $\rho(\varepsilon)$ оценки (19) и (20), получим, что при условии

$$\gamma = (b-a)^2 \lambda_1 L_1 + (b-a) \lambda_2 L_2 < 1 \quad (21)$$

$$\rho(\varepsilon) \leq \frac{h}{1-\gamma} \left\{ \frac{L_1 N_2}{2 \Delta_1} [2 \sigma_1 \beta_1 + (b-a)(2 \sigma_1 \beta_0 + \sigma_0 \beta_1)] + \right. \\ \left. + \frac{h L_1}{12} (b-a)^2 \lambda_1 (N_4 + 2 N_3 L_2) + \frac{L_2 N_2}{2 \Delta_1} (\sigma_0 \beta_1 + \sigma_1 \beta_0) + \right. \\ \left. + \frac{h \lambda_2}{12} (b-a)(N_4 + 2 N_3 L_2) \right\} + \frac{\gamma L_3}{1-\gamma} \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|. \quad (22)$$

Итак, из (19) и (22) получаем

$$|\varepsilon_k| \leq O(h) + \frac{(b-a)^2 \lambda_1 L_3}{1-\gamma} \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|. \quad (23)$$

Соотношения (18) и (20)

$$|\tau_k| \leq O(h) + \frac{(b-a) \lambda_2 L_3}{1-\gamma} \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|. \quad (24)$$

Оценим, наконец, δ_k :

$$\delta_k = \tau(x_k) - v_k = \sum_{i=x}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x, u(x), u'(x), v(x) - g_i) dx.$$

Пользуясь тем, что функция g удовлетворяет условию Липшица, получаем

$$|\delta_k| \leq \sum_{i=1}^k M_0 \frac{h^2}{2} + \sum_{i=1}^k (M_1 |\varepsilon_i| + M_2 |\tau_i| + M_3 |\delta_i| h) + \\ + M_1 \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u(x) - u(x_i)| dx + M_2 \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x) - u'(x_i)| dx + \\ + M_3 \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |v(x) - v(x_i)| dx.$$

Первые два члена оцениваются очевидным образом. Оценим последние три суммы:

$$\sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u(x) - u(x_i)| dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |u'(x)| \sum_{i=1}^k \frac{h^2}{2} \leq \frac{h(b-a)}{2} N_1,$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x) - u'(x_i)| dx \leq \max_{a \leq x \leq b} |u''(x)| \sum_{i=1}^k \frac{h^2}{2} \leq \frac{h(b-a)}{2} N_2,$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} |v(x) - v(x_i)| dx \leq$$

$$\leq \max_{a \leq x \leq b} |v'(x)| \sum_{i=1}^k \frac{h^2}{2} \leq \frac{h(b-a)}{2} N_1^*.$$

Таким образом,

$$|\delta_k| \leq \frac{h(b-a)}{2} (M_0 + M_1 N_1 + M_2 N_2 + M_3 N_1^*) + \\ + (b-a) M_1 \max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| + (b-a) M_2 \max_{1 \leq i \leq n-1} |\tau_i| + \\ + (b-a) M_3 \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|$$

или, если воспользоваться неравенствами (23) и (24),

$$|\delta_k| \leq O(h) \left\{ \frac{(b-a)^3 \lambda_1 L_3 M_1}{1-\gamma} + \frac{(b-a)^2 \lambda_2 L_3 M_2}{1-\gamma} + \right. \\ \left. + (b-a) M_3 \right\} \max_{0 \leq i \leq n} |\delta_i|. \quad (25)$$

Предположим, что

$$\frac{(b-a)^3 \lambda_1 L_3 M_1}{1-\gamma} + \frac{(b-a)^2 \lambda_2 L_3 M_2}{1-\gamma} + (b-a) M_3 < 1, \quad (26)$$

тогда из неравенства (25) следует

$$|\delta_k| = O(h).$$

Теперь из (23) и (24) видно, что $|\varepsilon_k| = O(h)$ и $|\tau_k| = O(h)$. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема. Пусть функция $f(x, u, v, \tau)$ непрерывна и ограничена вместе со всеми частными производными до второго порядка, а функция $g(x, u, v, \tau)$ удовлетворяет условию Липшица в области G . Тогда, если выполняются неравенства (21) и (26), то решение конечно-разностной системы (4) при $h \rightarrow 0$ стремится к точному решению поставленной задачи (1)–(2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II, Физматгиз, 1962.
2. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., 1953.
3. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. ГИТТЛ, ИЛ, 1953.

Д. Н. Кәримова

Ади дифференсиал тәнликләр үчүн бир сәрһәд мәсәләсинин сонлу артым үсулу илә һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә хәтти олмајан бир сәрһәд мәсәләсинин һәллине бахылмышдыр. (1)–(2) системини һәлл етмәк үчүн сонлу артым үсулундан истифадә едилмишдир.

167

частоты) дает возможность исключать зависимость показаний аттенюатора от частоты и согласовать кварц со входом приемника, что повышает чувствительность последнего. При этом преобразователи 4 и 5 не вносят нелинейных искажений.

УПЧ состоит из пятикаскадного резонансного усилителя на лампах 6ЖЗП. Один из таких каскадов показан на рис. 2. С выхода УПЧ сигнал поступает на диодный детектор 8. Детектируемый сигнал подается на осциллограф 9, на экране которого наблюдается картина многократных отражений сигналов в образце (рис. 3).

Коэффициент поглощения рассчитывается по формуле [1]

$$\alpha = \frac{\ln A_n/A_m}{2l(m-n)}, \quad (2)$$

где A_n и A_m — амплитуды n - и m -ных импульсов, а l — длина исследуемого образца. Здесь не учитываются потери на границе кварц-образец и дифракционные эффекты у излучателя, поэтому при измерениях необходимо вводить соответствующие поправки.

Учет дифракционных потерь, связанных с расхождением ультразвукового пучка, выражается по формуле [10]

$$\sigma_g = \frac{0,2}{1,05R^2/\lambda},$$

$$\sigma_g = \frac{0,28}{2,4R^2/\lambda}, \quad (3)$$

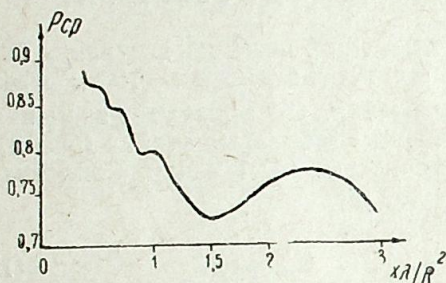


Рис. 4

Изменение значений среднего давления вдоль оси распространения ультразвуковых волн.

где R — радиус излучателя, λ — длина ультразвуковой волны в образце. Авторы статьи [10] предлагают измерять коэффициент поглощения путем сравнения первого отраженного импульса с импульсом, соответствующим одному из максимумов кривой зависимости $p_{cp} = f(x\lambda/R^2)$ представленной на рис. 4.

Коэффициент отражения на границе кварц-образец вычисляется по формуле [6]

$$\kappa_{от} = \frac{\epsilon' v^2 z_3 - 16e^2 \epsilon'' SR \frac{f_n^2}{n^2} + 16ie^2 \frac{v}{n}}{\epsilon' v^2 z_3 + 16e^2 \epsilon'' SR \frac{f_n^2}{n^2} - 16ie^2 \frac{v}{n}}, \quad (4)$$

где ϵ' — диэлектрическая проницаемость, v — скорость звука в кварце, z_3 — акустическое сопротивление нагрузки, e'' — пьезоэлектрическая константа, S — площадь пьезопластинки, f_n — частота n -ой гармоники.

Нахождение величины $\kappa_{от}$ по формуле (4) сопряжено с большими трудностями. Практически для определения потерь на границе кварц-твердое тело применяется несколько образцов. При этом измеряется амплитуда нескольких последовательных импульсов в каждом образце, а затем строится график зависимости амплитуды этих импульсов от расстояния. Разность между величинами амплитуд соседних импульсов, соответствующих одному и тому же акустическому пути, дает величину указанных потерь [12].

Окончательное выражение для коэффициента поглощения получается в виде

$$\alpha = \frac{\ln A_n/A_m}{2l(m-n)} - \frac{\ln \kappa_d + (m-n) \ln \kappa_{от}}{2l(m-n)}, \quad (5)$$

где κ_d — дифракционное ослабление звука, $\kappa_{от}$ — коэффициент отражения от пьезопластинки.

На смонтированной нами экспериментальной установке были произведены контрольные измерения по поглощению ультразвука в монокристаллах KCl.

	$\alpha/f \cdot 10^{10} \text{ см}^{-1} \text{ гц}^{-1}$						Скорость распространения $v \cdot 10^{-5} \text{ см/сек}$
	при частотах $f \text{ (Мгц)}$						
	4	11	33	55	77	99	
Меркулов	3,7	3,5	4	6	8,5	11	4,520
Авторы	4,0	3,8	4	7,1	9,2	12	4,515

Как видно из таблицы, полученные результаты хорошо совпадают с данными, приведенными в работе [6].

На этой установке измеряется скорость распространения ультразвука в твердых телах. Скорость вычисляется по формуле $v = 2l/t$, где l — длина образца, которая определяется прибором ИЗВ-2 с точностью до 0,001 мм; t — время прохождения импульсом расстояния в $2l$. Время между двумя последовательными импульсами определяется на приборе ПИВИ-2 с точностью до 0,01 мксек. Точность определения коэффициента поглощения 7÷10%, а скорости — 0,5%.

Выводы

1. Видоизменяя соответствующие узлы стандартных приборов (ГЗ—8А, ПТК), мы собрали экспериментальную установку, позволяющую исследовать распространение и поглощение ультразвука в твердых телах в диапазоне частот 4—100 Мгц.

2. Предложен новый вариант аттенюатора с большим пределом затухания и с повышенной точностью измерения.

3. Осуществлен перевод аттенюатора с входа приемника на вход УПЧ, что позволяет увеличить чувствительность приемника и устранить зависимость измерений от частотной характеристики аттенюатора.

4. При абсолютном методе измерения скорости ультразвука в твердых телах применение ПИВИ-2 позволило увеличить точность до 0,5%.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Ф. К. Исаеву за любезное предоставление монокристаллов KCl.

ЛИТЕРАТУРА

- Меркулов Л. Г. Канд. дисс., ЛЭТИ, 1954.
- Меркулов Л. Г. „Акустический журнал“, т. V, вып. 4, 1959.
- Меркулов Л. Г. ЖТФ, 26, 1956.
- Брандт А. А. Техника монтажа и налаживания радиосхем. Изд-во МГУ, 1960.
- Шакиров О., Белинский Б. А. Применение ультразвуки к исследованию вещества, вып. 18, 1963.
- Яковлев Л. А. Канд. дисс., ЛЭТИ, 1963.
- Справочник радиолюбителя. Киев, 1961.
- Мейнке Х. и Гундлах В. Радиотехнический справочник, т. II, М. — Л., 1962.
- Mc Skimin H. J. T. of appl. Phys., 24, № 8, 1953.
- Sesi H., Granato A., Truell R. JASA, 28, 230, 1956.
- Бергман Л. Ультразвук. ИЛ, 1957.
- Зипир А. Д., Яковлев В. Ф. Применение ультразвуки к исследованию вещества, вып. 11, 1960.

**4÷100 МГц интервалында ултрасәс далгаларынын бәрк
чисимләрде удулма әмсалы вә јајылма сүр'әтини өлчмәк
үчүн гурғу**

ХҮЛАСӘ

Бәрк чисимләрде ултрасәс далгаларынын удулма әмсалынын өлчүлмәсинә даир мә'луматын аз олмасына сәбәб ләзими гурғунум јығылмасы вә онда өлчү апарылмасы чәтинлијидир. Һалбуки бәрк чисимләрдин акустик хассәләринин өјрәнилмәси мүасир физиканын әсас вәзифәләриндән биридир. Буну нәзәрә алараг, бәрк чисимләрде ултрасәс далгаларынын удулма әмсалы вә јајылма сүр'әтини кениш температур вә тезлик интервалларында өлчмәк үчүн ләзым олан гурғу јарадылмышдыр.

Бәрк чисимләрде ултрасәс далгаларынын јајылма сүр'әтинин мүтләг үсулла өлчүлмәсинин дәгиглији заман интервалларыны өлчән чиназын (ПИВИ-2) тәтбиг олунмасы нәтичәсиндә 0,5%-ә гәдәр артырылмышдыр.

Бу гурғуда истифадә олунаҥ стандарт чиназларын ајры-ајры хиссәләри ләзими шәкилдә дәјишдирилмишдир. Хүсусән јени вариантлы кениш өлчү һүдудуна малик олан аттенјуаторун схеми тәкдиф едилмишдир. Бундан башга, аттенјуатору гәбуледицинин киришинтән аралыг тезлик күчләндиричисинин киришинә кечириәклә онун тезликдән асылылығы арадан галдырылмыш вә гәбуледицинин һәссаслығы артмышдыр. Бүтүн бунлар аз вә чоҳ удулмаја малик олан бүтүн бәрк чисимләрдин тәдгиг олунмасына имкан јарадыр.

МҮНДӘРИЧАТ

А. Х. Бабајев, Кәсимләјән функцијаларын Фејер чәминин Ермит чоҳәд- лиси илә јахынлашма тәртиби	3
Р. Һ. Мәмәдов, Һ. И. Османов, Фурје чевирмәсинин вә Фурје сы- расы әмсалларынын бәзи хассәләри	15
К. М. Гулијев, Сонсуз сајда ејни радиуслу даирәви дешиклә эзифләмиш сонсуз мүстәвидә еластики-пластики дефо, маси, а һалында кәркинлик	25
А. Ч. Һачыјев, Гејри-хәтти Гаммерштејн интеграл операторлар айләси- нин сыфра јахынлығы һаггында	32
Л. Ш. Абдулкәримов, С. Ј. Јагубов, Банах фәзасында парабolik типли квазихәтти диференсиал тәнликләр үчүн Коши мәсәләсинин тәдгиги	35
М. Ә. Әзимов, Мүрәккәб мүнит үчүн фәзада Лаплас тәнлијинә аид бәзи мәсәләләр	43
Г. М. Чәфәрли, Мультипликатив ортонормал функцијалар системи илә әлагәдар јығылма системи	55
Ш. М. Гафаров, Функцијаларын үмуми хассәләри илә онун Фурје-Бес- сел әмсаллары арасындагы бәзи әлагәләр һаггында	60
Р. Ј. Кәримов, Саф сүрүшмәдә ләвһәнин даирәви дешији әтрафында пластики зонанын јајылмасы	66
Е. Ә. Зүлфүгарзәдә, Ф. В. Мајоров, Биртилли һесаблајычы рә- гәмли кәмплекс машынарын үгунлуғу һаггында	71
С. М. Акселрод, А. А. Мустафајев, К. Ф. Ширинов, Сферик вибраторун кириш импедансынын онун өлчүләри вә әтраф мүнитин параметр- ләриндән асылылығынын өјрәнилмәсинә даир	77
Ј. Б. Нәчәфов, Ј. Х. Шаулов, Силициум 4-оксидин әмәләкәлмә ентал- пијасы	81
Ә. У. Малсагов, Р. Һ. Һаһи, Ј. Н. Нәсиров, CuSbTe_2 бирләшмә- синдә бәрк вә маје һалында термо ЕНГ-нин вә електриккечирмәнин тәдгиги	84
М. И. Әлијев, Г. И. Сәфәрәлијев, Галлиум-сүрмәнин истиликке- чирмә вә термоелектрик һәрәкәт күввәси	87
О. Н. Новрузов, Импульс үсулу илә јарымкечиричиләрин температур кечиричилијинин өлчүлмәси	91
Н. Гулијев, А. Рүстәмова, Електрон-позитрон чүтүнүн эәиф анни- гилјасијасы	98
М. Ә. Талиби, Т. М. Вердијева, Ј. Г. Крутенјук, Селенин сәтһ гурулушу вә кристаллашма дәрәчәсинин $\text{Se}-\text{Cd Se}$ вә $\text{Se CdS } p-n$ кечидләри- нин әмәлә кәлмәсинә тәсиринин тәдгиги	101
Ј. С. Боровик, М. Ш. Мәмәдов, В. Г. Волотскаја, Импульс јүкләмә шәраитиндә мисин давамлылығынын тәдгиги	107
Р. Ш. Гулијев, А. К. Аббасзәдә, Ш. С. Һачыјев, Нефт јағлары үчүн өздүлүјүн температурдан асылылығын дәстур	111
С. С. Багдасарјан, Мајенин гурулушунун модел нәзәријәсинә даир	116
М. Ә. Мусајев, Кечирмә сәдлә арылан гатларда маје ахыны	124
Р. Ә. Һүсәјнов, 21 август 1959-чу ил хромосфер алышмасынын спек- трофотометрик тәдгигинин нәтичәләри һаггында	129
Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхәјзер, Ј. В. Горин, П. В. Леонов, Диелектриклә һүдудланмыш газ аралығында електрик бошалмасынын волт-ам- пер характеристикалары	139
Ч. М. Чуварлы, К. А. Миронов, 110-кв-лыг шәбәкә трансформаторунун торпагланмамыш нејтралында гејри-тамфазлы режимләрде феррорезонанс ифрат кәркинликләр	147
Д. Н. Кәримова, Ади диференсиал тәнликләр үчүн бир сәрһәд мәсәлә- синин сонлу артым үсулу илә һәлли	157
Х. М. Хәлилов, А. И. Агаев, 4÷100 мГц интервалында ултрасәс дал- галарынын бәрк чисимләрде удулма әмсалы вә јајылма сүр'әтини өлчмәк үчүн гурғу	166

СОДЕРЖАНИЕ

А. Х. Бабаев. О порядке приближения непрерывных функций суммами Фейера по многочленам Эрмита	3
Р. Г. Мамедов и Г. И. Османов. Некоторые свойства преобразований Фурье и свойств коэффициентов ряда Фурье	15
К. М. Кулиев. Напряжения в плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий при упругопластических деформациях	25
А. Д. Гаджиев. О близости к нулю семейства нелинейных интегральных операторов Гаммерштейна	32
Л. Ш. Абдулкеримов, С. Я. Якубов. Исследование задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений параболического типа в банаховом пространстве	35
М. А. Азимов. Некоторые задачи для уравнения Лапласа в пространстве для составной среды	43
Г. М. Джафарли. Системы сходимости, связанные с мультипликативными ортонормированными системами функций	55
Ш. М. Кафаров. О некоторых связях между поведением коэффициентов Фурье—Бесселя и структурными свойствами функций	60
Р. Ю. Керимов. Распространение пластических зон возле кругового отверстия в пластине при чистом сдвиге	66
Э. Э. Зулфугарзаде, Ф. В. Майоров. О совместимости машин цифрового вычислительного комплекса одного типа	71
С. М. Аксельрод, Р. А. Мустафаев, К. Ф. Ширинов. К исследованию зависимости входного импеданса сферического вибратора от его размеров и параметров окружающей среды	77
Ю. Б. Наджафов, Ю. Х. Шаулов. Энтальпия образования двуокиси кремния	81
А. У. Мальсагов, Р. Х. Нани, Я. Н. Насиров. Исследование электропроводности и термоэдс CuSbTe_2 в твердом и жидком состояниях	84
М. И. Алиев, Г. И. Сафаралиев. Теплопроводность и термоэдс антимонида галлия легированного Zn и Te	87
О. Н. Новрузов. Измерение температуропроводности полупроводников импульсным методом	91
Н. Гулиев, А. Рустамова. Слабая аннигиляция электронно-позитронной пары	98
М. А. Талиби, Т. М. Вердиева и Е. Г. Крутенюк. Влияние кристаллизации и состояния поверхности Se на формирования $P-n$ контактов $\text{Se}-\text{CdSe}$ и $\text{Se}-\text{CdS}$	101
[Е. С. Боровик], М. Ш. Мамедов, В. Г. Волоцкая. Исследование долговечности меди при импульсных условиях нагружения	107
Р. Ш. Кулиев, А. К. Аббасзаде, Ш. С. Гаджиев. Формула для температурной зависимости вязкости нефтяных масел	111
С. С. Багдасарян. К модельной теории строения жидкостей	116
М. А. Мусаев. Течение жидкости в пластах, разделяющихся частично проницаемыми перемычками	124
Р. Э. Гусейнов. О результатах спектрофотометрического исследования хромосферной вспышки 21 августа 1959 г.	129
Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, Ю. В. Горин, П. В. Леонов. Вольтамперные характеристики электрического разряда в газовой полости, ограниченной диэлектриком	139
Ч. М. Джуварлы, Г. А. Мионов. Феррорезонансные перенапряжения на нейтрали разземленного трансформатора в сети 110 кВ при неполнофазных режимах	147
Д. Н. Керимова. Применение метода конечных разностей к одной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	157
Х. М. Халилов, А. И. Агаев. Установка для измерения коэффициента поглощения и скорости распространения ультразвука в твердых телах в диапазоне частот 4÷100 мГц	166