

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

1

1966

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

С. Г. МИХЛИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ*

Пусть дано уравнение $Au=f$, где u и f —искомый и данный элементы некоторого гильбертова пространства H , A —действующий в этом пространстве положительно определенный оператор**. Важнейший вариационный метод (метод Ритца) решения упомянутого уравнения состоит в следующем.

Пусть пространство H сепарабельно. В пространстве выбираем последовательность элементов (координатную систему) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, таких, что: 1) $\varphi_n \in H_A$, $n=1, 2, \dots$; 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы; 3) координатная система полна в H_A . Приближенное решение уравнения строится в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)} \varphi_k, \quad (1)$$

где коэффициенты $a_k^{(n)}$ суть решения так называемой системы Ритца:

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] a_k^{(n)} = (f, \varphi_j); j=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Если u_0 означает точное решение уравнения $Au=f$, то $|u_n - u_0|$ монотонно стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Естественно величиной $|u_n - u_0|$ оценивать погрешность приближенного решения (1), тогда оказывается, что с увеличением числа n точность этого приближенного решения возрастает.

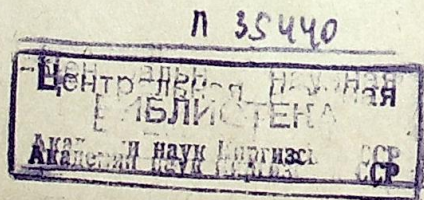
Этот вывод, однако, не соответствует практике вычислений, которая показывает, что с увеличением n точность приближения (1) часто ухудшается. Оказывается, это явление связано с тем, что при составлении (а также при решении) системы (2) неизбежно возникают малые погрешности, которые в зависимости от выбора координатной системы могут привести к большей или меньшей погрешности в приближенном решении (1). В связи с этим возникает вопрос об устойчивости метода Ритца.

Введя соответствующие обозначения, можно записать систему (2) в матричной форме:

$$R_n a^{(n)} = f^{(n)}. \quad (3)$$

*Тезисы доклада, прочитанного на заседании Азерб. матем. общества в марте 1965 г.

** По поводу понятий символов и терминов, приводимых без определений, см. [1].



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: Ч. М. Джуварлы (редактор), Г. Б. Абдуллаев (зам. редактора), А. И. Гусейнов (зам. редактора), Г. Н. Агаев, Д. А. Бабаев, Д. Б. Байсанов, М. А. Джавадов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов А. А. Эфендизаде, К. Х. Сафаров (отв. секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)»

Пусть матрица R_n вычислена нами с ошибкой Γ_n , а столбец свободных членов $f^{(n)}$ — с ошибкой $\delta^{(n)}$. Вместо матричного уравнения (3) мы будем решать уравнение

$$(R_n + \Gamma_n)b^n = f^{(n)} + \delta^{(n)}. \quad (4)$$

Будем говорить, что метод Рунта устойчив относительно малых погрешностей в матрице и свободных членов системы Рунта, если существуют не зависящие от n постоянные p, q, r, s такие, что при $\|\Gamma_n\| \leq r$ и $\|\delta^{(n)}\| \leq s$ имеет место неравенство

$$\|b^{(n)} - a^{(n)}\| \leq p \|\Gamma_n\| + q \|\delta^{(n)}\|. \quad (5)$$

Теорема 1. Для того, чтобы метод Рунта был устойчив в указанном выше смысле, необходимо и достаточно, чтобы координатная система была сильно минимальна в H_A , иначе говоря, чтобы при любом n собственные числа матриц R^n были ограничены снизу некоторой положительной постоянной.

Устойчивость метода Рунта исследована в работах автора [2, 3]. В статье [4] исследуется устойчивость метода Бубнова-Галеркина для стационарных задач, а в [5] — для нестационарных задач. В статье [6] изучена устойчивость метода Рунта для задач о собственных числах и собственных элементах самосопряженного оператора. Более общая трактовка устойчивости дана в [7].

Пусть некоторый вычислительный процесс состоит в решении последовательности уравнений

$$A_n x^{(n)} = y^{(n)}, \quad (6)$$

где $x^{(n)} \in X_n$, $y^{(n)} \in Y_n$; X_n и Y_n — банаховы пространства, A_n — линейные операторы, каждый из которых действует из X_n в Y_n . Будем считать, что операторы A_n обратимы. Наряду с уравнениями (6) рассмотрим уравнения

$$(A_n + \Gamma_n)z^{(n)} = y^{(n)} + \delta^{(n)}. \quad (7)$$

Будем говорить, что процесс (6) устойчив, если существуют такие не зависящие от n числа p, q, r, s , что при $\|\Gamma_n\| \leq r$ уравнения (7) разрешимы и при $\|\Gamma_n\| \leq r, \|\delta^{(n)}\| \leq s$ справедливо неравенство:

$$\|z^{(n)} - x^{(n)}\| \leq p \|\Gamma_n\| + q \|\delta^{(n)}\|. \quad (8)$$

Теорема 2. Для того, чтобы процесс (6) был устойчив, необходимо и достаточно, чтобы $\|A_n^{-1}\| \leq C_1 \|A_n^{-1} B_n A_n^{-1} y^{(n)}\| \leq C_2$, где B_n — произвольный оператор с единичной нормой, а постоянные C_1 и C_2 не зависят от n и от выбора оператора B_n .

Теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
2. Михлин С. Г. „ДАН СССР“, т. 135, № 1, 1960.
3. Михлин С. Г. „Вестн. ЛГУ. серия матем. мех. и астр.“, вып. 2, № 13, 1961.
4. Яскова Г. Н. и Яковлев М. Н. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, т. 66, 1962.
5. Велиев М. А. „ДАН СССР“, т. 157, № 1, 1964.
6. Довбыш Л. Н. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова (в печати).
7. Михлин С. Г. „ДАН СССР“, т. 157, № 2, 1964.

Л. Р. ВОЛЕВИЧ, Б. П. ПАНЕЯХ

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ*

Теория пространств $H_p^k(\Omega)$, введенных в работе [1], охватывает широкие классы функциональных пространств (пространства С. Л. Соболева, Л. Н. Слободецкого, бесселевых потенциалов, а также пространства, сопряженные с ними). Эта теория строится в три этапа. Сначала рассматриваются пространства H_p^k функций (обобщенных), заданных во всем пространстве. При их изучении широко используется преобразование Фурье и теория мультипликаторов интегралов Фурье (классы M_p^a). В частности, все условия вложимости одних пространств в другие формулируются в терминах мультипликаторов Фурье.

Такое описание не вполне эффективно, поскольку неизвестны необходимые и достаточные условия принадлежности функции к классу M_p^a . Подобная неэффективность в известной мере оправдывается тем, что в терминах мультипликаторов Фурье удается указывать предельно точные (необходимые и достаточные) условия вложимости одного пространства в другое. Из этих общих теорем можно получить известные ранее теоремы вложения для конкретных пространств с помощью различных достаточных условий принадлежности функций к классам M_p^a (теоремы Михлина, Лизоркина).

Далее изучаются функции сосредоточенные в ограниченной области Ω и в некотором смысле удовлетворяющие однородным граничным условиям.

Затем пространство $H_p^k(\Omega)$ функций, заданных в ограниченной области Ω , определяется как фактор-пространство пространства H_p^k функций, заданных во всем пространстве по подпространству H_p^k, Ω функций из H_p^k , носители которых расположены в дополнении к области Ω . Достоинством такого описания является то, что мы можем определять функциональные пространства (например, пространства очень гладких функций) в как угодно „плохих областях“. Укажем на несколько отдаленную аналогию этого определения и определения аналитических функций на многообразиях с особыми точками.

Большинство утверждений в этом докладе приведено без доказательств. Подробные доказательства можно найти в обзорной статье [1]. В качестве новых результатов отметим теоремы 3 и 4.

* Доклад прочитан Л. Р. Волевицем на заседании Азерб. матем. общества 22 февраля 1965 г. Сформулированные в этом докладе результаты в резервном виде излагались в циклах докладов, прочитанных в Институте математики и механики АН Азерб.ССР Б. П. Панеяхом (май 1964 г.) и Л. Р. Волевицем (февраль 1965 г.)

1. Как обычно, обозначим через $W_p^{(l)}$ ($1 \leq p \leq \infty$, l — целое положительное число) пространство С. Л. Соболева, состоящее из функций $f(x)$ на K^n , для которых

$$D^\alpha f(x) \in L_p, \quad |\alpha| \leq l \quad (1)$$

$$\|f\|_{W_p^{(l)}} = \sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha f\|_p.$$

Здесь, как обычно, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^k}$; L_p — пространство функций, для которых норма $\|u\|_p = (\int |u(x)|^p dx)^{1/p}$ конечна.

При $p=2$ пространство $W_p^{(l)}$ допускает другое описание в терминах преобразования Фурье. Если обозначить

$$Ff = \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx,$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\langle x, \xi \rangle = x^1 \xi_1 + \dots + x^n \xi_n$, то

$$f(x) \in W_2^{(l)} \Leftrightarrow \int (1 + |\xi|^2)^l |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \quad (2)$$

(знак $\Leftrightarrow$ здесь и в дальнейшем означает равносильность связываемых соотношений), причем

$$\|f\|_{W_2^{(l)}} \leq \| (1 + |\xi|^2)^{l/2} \hat{f}(\xi) \|_{L_2} \leq \text{const} \|f\|_{W_2^{(l)}} \quad (2')$$

Описание (2) позволяет сделать теорию пространств $W_2^{(l)}$ очень простой и прозрачной. Поскольку правая часть в (2) имеет смысл при любых вещественных l , возникает естественная возможность расширения шкалы пространств $W_2^{(l)}$. Далее, если в (2') заменить функцию $(1 + |\xi|^2)^{l/2}$ на весовую функцию $\mu(\xi)$ общего вида, то можно получить очень широкий класс пространств $H_2^\mu \equiv H^\mu$, изученный в [1].

Недостатком описания (2) является его неприменимость к случаю $p \neq 2$. Однако нетрудно переписать (2) и (2') в виде, допускающем обобщение на случай $p \neq 2$. В самом деле, в силу равенства Парсеваля

включение $(1 + |\xi|^2)^{l/2} \hat{f}(\xi) \in L_2$ эквивалентно включению

$$\varphi(x) = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{l/2} \hat{f}(\xi)] \in L_2,$$

где F^{-1} — обратное преобразование Фурье. Поэтому

$$f(x) \in W_2^{(l)} \Leftrightarrow f = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-l/2} \hat{\varphi}(\xi)], \quad \varphi \in L_2, \quad (3)$$

$$\|f\|_{W_2^{(l)}} = \|\varphi\|_{L_2}. \quad (3')$$

Поскольку преобразование Фурье переводит произведение функций в свертку, (3) можно переписать в виде

$$f(x) \in W_2^{(l)} \Leftrightarrow f(x) G_l(x) * \varphi(x), \quad \varphi \in L_2, \quad (3'')$$

Функция $G_l(x)$ — обратное преобразование Фурье функции $(1 + |\xi|^2)^{-l/2}$ выражается через функцию Бесселя [2] и называется бесселевым потенциалом.

Впервые с этой точки зрения пространства $W_2^{(l)}$ изучались Ароншайном и Смитом [2]. Отталкиваясь от (3), можно прийти к новой шкале функциональных пространств $L_p^{(l)}$, где $1 \leq p \leq \infty$, l — любое вещественное. Пространство $L_p^{(l)}$ определяется следующим образом:

$$f(x) \in L_p^{(l)} \Leftrightarrow f(x) = F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-l/2} \hat{\varphi}(\xi)], \quad \varphi \in L_p, \quad (4)$$

$$\|f\|_{L_p^{(l)}} = \|\varphi\|_{L_p}. \quad (4')$$

Если $l > 0$, то элементы из $L_p^{(l)}$ являются свертками бесселевого потенциала с элементами пространства L_p :

$$f(x) = G_l * \varphi. \quad (4'')$$

Пространства $L_p^{(l)}$ подробно изучены в ряде работ (см. [3, 4]). При целых положительных l пространства $L_p^{(l)}$ совпадают с соболевскими пространствами $W_p^{(l)}$.

Это следует из теоремы Михлина о мультипликаторах Фурье.

Говорят, что функция $\Phi(\xi) \in M_p^q$, если при всех $v \in L_p$

$$\|F^{-1}[\Phi(\xi) \hat{v}(\xi)]\|_q \leq \text{const} \|v\|_p, \quad (5)$$

наименьшая из констант в этом неравенстве обозначается через $M_p^q(\Phi)$. Подобные функции называются мультипликаторами Фурье типа (p, q) (по поводу более строгих определений мы отсылаем к работе [5]). Существует целый ряд достаточных условий принадлежности функций к пространствам M_p^q [5, 6], наиболее известным из которых является теорема С. Г. Михлина [6]. В силу этой теоремы

$$\xi^\alpha (1 + |\xi|^2)^{-l/2} \in M_p^q, \quad \text{если } |\alpha| \leq l;$$

поэтому, если функция $f(x)$ имеет вид (4), то $D^\alpha f(x) \in L_p$ $0 \leq |\alpha| \leq l$, т. е. $f(x) \in W_p^{(l)}$. Без труда устанавливается и обратное утверждение [3, 4].

Заменяя в определении (4) $(1 + |\xi|^2)^{-l/2}$ на функции $\mu(\xi)$ общего вида, мы приходим к пространствам H_p^μ , введенным в [1]. Переходим к строгим определениям.

2. Обозначим через $M_{(n,p)}$ класс весовых функций $\mu(\xi)$, удовлетворяющих двум условиям:

А). Функция $\mu(\xi)$ является мультипликатором в пространстве С. Л. Шварца (другими словами, функция $\mu(\xi)$ бесконечно дифференцируема и при $\xi \rightarrow \infty$ функция $\mu(\xi)$ и все ее производные растут не быстрее многочлена (для каждой производной своего);

В) при всех $h \in R_n$ справедливо $\mu(\xi + h) \mu^{-1}(\xi) \in M_p^0$ и для некоторых постоянных c, l

$$M_p^0(\mu(\xi + h) \mu^{-1}(\xi)) \leq c (1 + |h|^2)^l \equiv \rho(h). \quad (6)$$

Если $p=2$, то условие В) переходит в условие

$$|\mu(\xi + h) \mu^{-1}(\xi)| \leq c (1 + |h|^2)^l. \quad (6')$$

При $p=2$ условие А) можно заменить требованием непрерывности $\mu(\xi)$. Нетрудно проверить, что если $\mu(\xi) \in M_{(n,p)}$ то $\mu^{-1}(\xi) \in M_{(n,p)}$.

Пусть S' — сопряженное с S пространство (элементы пространства S' принято называть умеренными распределениями). Мы скажем, что обобщенная функция $u \in S'$ принадлежит пространству H_p^μ , если

$$v = F^{-1}[\mu(\xi) \hat{u}(\xi)] \in L_p. \quad (7)$$

С введением нормы $\|u\|_{H_p^\mu} = \|v\|_{L_p}$ становится полным банаховым пространством, а оператор $F_\mu^{-1} F$ устанавливает изометрический изоморфизм между H_p^μ и L_p .

Если обобщенная функция $u \in H_p^\mu$, то ее значение на любой основной функции $\varphi \in S$ вычисляется по формуле

$$u(\varphi) = \int [F^{-1}(\mu(\xi) \hat{u}(\xi))] [F^{-1}(\mu^{-1}(\xi) \hat{\varphi}(\xi))] dx. \quad (8)$$

Используя (8) и утверждение, обратное неравенству Гельдера, можно показать, что пространство $H_p^{1/p}$ является банаховым сопряженным к H_p^1 (здесь $p^{-1} + p'^{-1} = 1$).

Используя свойства А) весовой функции, можно показать, что

$$S \subset H_p^1 \subset S^1,$$

причем в обоих случаях включение имеет место с топологией и вкладываемые пространства плотны в объемлющих.

Из условия В) следует, что пространство H_p^1 является модулем над пространством финитных функций C_0^∞ , т. е. если $u \in H_p^1$ и $a(x) \in C_0^\infty$, то

$$\|au\|_{\mu,p} \leq c(a) \|u\|_{\mu,p},$$

где $c(a)$ — константа, не зависящая от u .

3. Переходим теперь к теоремам вложения. Сначала рассмотрим вложение H_p^1 в пространства того же вида.

Теорема 1. Пусть $\mu(\xi) \in M_{(n,p)}$, $\nu(\xi) \in M_{(n,q)}$. Для того, чтобы пространство H_p^1 было вложено в пространство H_q^1 необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) \in M_{p,q}^1. \quad (9)$$

Доказательство этой теоремы по существу, следует из определения классов $M_{p,q}^1$.

Следствие 1. Если H_p^1 вложено в H_q^1 то $q \geq p$. В самом деле в силу теоремы Хермандера [5] класс $M_{p,q}^1$ пуст при $q < p$.

Следствие 2. Для того, чтобы пространства H_p^1 и H_q^1 совпадали необходимо и достаточно, чтобы $p = q$ и

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) \in M_{p,p}^1; \mu(\xi)\nu^{-1}(\xi) \in M_{p,p}^1.$$

Следствие 3. Для того, чтобы пространство H_2^1 было вложено в пространство H_2^1 , необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu(\xi)\mu^{-1}(\xi) \leq \text{const}$$

Надо воспользоваться тем, что $M_{2,2}^1 = L_\infty$ [5].

Из теоремы 1 без труда получается теорема С. Л. Соболева о вложении $W_p^{(l)}$ в $W_q^{(s)}$. В самом деле, пусть $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{l/2}$, $\nu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$. Если $(1 + |\xi|^2)^{(s-l)/2} \in M_{p,q}^1$, то $W_p^{(l)}$ вложено в $W_q^{(s)}$. Для проверки последнего включения удобно воспользоваться теоремой П. И. Лизоркина [6]. Согласно этой теореме $\Phi(\xi) \in M_{p,q}^1$, если

$$|\xi|^{n(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} |\xi^\alpha D_\xi^\alpha \Phi| < \text{const}, \quad |\alpha| \leq n.$$

Теперь легко проверить, что, если

$$l - r/p \geq s - n/q,$$

то $(1 + |\xi|^2)^{(s-l)/2} \in M_{p,q}^1$, т. е. $W_p^{(l)}$ вложено в $W_q^{(s)}$.

Рассмотрим теперь вопрос о вложении H_p^1 в пространство S непрерывных функций. Заметим, что в силу теоремы 1 вложение $H_p^1 \subset L_q$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mu^{-1}(\xi) \in M_{p,q}^1$. Пусть $q = \infty$. Так как $M_{p,\infty}^1 = FL_{p'}$ [5], то условие $F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)) \in L_{p'}$ необходимо для вложимости H_p^1 в L_∞ (и тем более в S). Наоборот, если $F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)) = m(x) \in L_{p'}$ и $u(x) \in S$, $v = F^{-1}[\mu u]$, то

$$u(x) = m(x) * v(x). \quad (10)$$

По непрерывности представление (10) распространяется на все функции $u \in H_p^1$. Если $m \in L_{p'}$, $v \in L_p$, то, как легко видеть, $u(x) \in C$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы пространство H_p^1 было вложено в S , необходимо и достаточно, чтобы

$$F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)] \in L_{p'}.$$

Следствие. При $p=2$ пространство H_2^1 вложено в S тогда и только тогда, когда $\mu^{-1}(\xi) \in L_2$.

Пусть теперь $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{l/2}$. Тогда $F^{-1}[\mu^{-1}(\xi)] = G_l(x)$. Функция $G_l(x)$ экспоненциально убывает при $x \rightarrow \infty$, а при $x \rightarrow 0$ ведет себя как $|x|^{l-n}$ [2]. Поэтому $G_l \in L_{p'}$, если $p'(l-n) > -n$, т. е. $pl > n$. Таким образом, если $pl > n$, то пространство $W_p^{(l)}$ вложено в S .

4. Переходим к изучению следов функций $u \in H_p^1$ на плоских многообразиях R^m , где $0 < m < n$. Пусть $x = (x', x'')$, $x' \in R^m$, $x'' \in R^{n-m}$. Мы скажем, что элементы $u \in H_p^1$ имеют следы на плоскости $x'' = 0$, если оператор $T: H_p^1 \ni u(x) \rightarrow u(x', 0) \in S'$, $u \in S$, непрерывен.

Теорема 3. Для существования следа на плоскости $x'' = 0$, у каждого элемента $u \in H_p^1$ необходимо и достаточно, чтобы $F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)\hat{\varphi}(\xi')) \in L_{p'}$ для всех $\varphi(x') \in S(R^m)$ (здесь $\hat{\varphi}(\xi')$ — преобразование Фурье по переменной x').

Доказательство. Непрерывность оператора T эквивалентна тому, что для любой функции $\varphi(x') \in S(R^m)$ справедливо неравенство

$$|u(x', 0)\varphi(x') dx'| \leq C_\varphi \|u\|_{\mu,p}, \quad u \in S,$$

в котором $C_\varphi > 0$ — константа, не зависящая от u . В терминах преобразования Фурье это неравенство выражается так:

$$|\int \mu(\xi)\hat{u}(\xi)\hat{\varphi}(\xi')| \mu(\xi) d\xi| \leq C_\varphi \|F^{-1}(\mu(\xi)\hat{u}(\xi))\|_{p'}. \quad (11)$$

Поскольку $\mu(\xi)$ — мультипликатор в S и $\mu(\xi) \neq 0$, функции $F^{-1}(\mu(\xi)\hat{u}(\xi))$ пробегает все пространство S одновременно с $u(x)$. Поэтому последнее неравенство можно записать в виде

$$|\int \nu(\xi)(\hat{\varphi}(\xi)/\mu(\xi)) d\xi| \leq C_\varphi \|v\|_{p'}, \quad v \in S.$$

Но согласно определению пространства $L_{p'}$ это возможно тогда и только тогда, когда $\hat{\varphi}(\xi')/\mu(\xi) \in FL_{p'}$, т. е. когда $F^{-1}(\hat{\varphi}(\xi')/\mu(\xi)) \in L_{p'}$. Теорема доказана.

Нетрудно проверить, что при $p=2$ условие (i) теоремы 3 эквивалентно сходимости интеграла:

$$\int \mu^{-2}(0, \xi'') d\xi''. \quad (12)$$

В самом деле, в силу (6') $\mu(\xi) \leq \mu(\xi')\mu(0, \xi'')$, поэтому

$$\begin{aligned} \|F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)\hat{\varphi}(\xi'))\|_2^2 &= \int |\hat{\varphi}(\xi')|^2 \mu^{-2}(\xi) d\xi > \\ &> \int \mu^{-2}(\xi') |\hat{\varphi}(\xi')|^2 d\xi' \int \mu^{-2}(0, \xi'') d\xi'' \end{aligned} \quad (12')$$

и из условия (i) следует (12). Наоборот, поскольку $\mu(\xi) \geq \mu^{-1}(\xi')\mu(0, \xi'')$, из (12) следует ограниченность нормы $\|F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)\hat{\varphi}(\xi'))\|_2$.

Как показано в [1], при $p=2$ следы на подпространстве R^m функций из H_p^1 целиком заполняют пространство $H_2^1(R^m)$, где $\mu'(\xi') = (\int \mu^{-2}(\xi) d\xi'')^{-1/2}$, т. е.

$$TH_2^1 = H_2^1,$$

где T — оператор следа. При $p \neq 2$ пространство TH_p^1 , вообще говоря, невозможно отождествить с каким-либо пространством вида $H_q^1(R^m)$.

Так, например, следы на R^m элементов пространства $L_p^{(l)}(R^n)$ за-
полняют (целиком) пространство $B_p^{l-\frac{n-m}{p}}(R^m)$, принадлежащее к дру-
гой шкале пространств [7, 8]. Можно указать также необходимые и
достаточные условия вложимости пространства следов TH_p^μ в прост-
ранство $H_q^\mu(R^m)$ [1], но мы на этом не будем останавливаться.

5. Пусть $\mathcal{Q}$ —ограниченная область в R^n . Обозначим через $H_p^\mu(\mathcal{Q})$
замыкание множества $C_0^\infty(\mathcal{Q})$ функций с носителем в $\mathcal{Q}$ в норме
пространства H_p^μ , поэтому операторы вложения

$$J_1: H_p^\mu(\mathcal{Q}) \rightarrow H_q^\nu(\mathcal{Q}); J_2: H_p^\mu(\mathcal{Q}) \rightarrow C(\bar{\mathcal{Q}})$$

будут непрерывны, если выполнены условия теорем 1,2. Для опера-
тора J_2 без труда доказывается обратное утверждение, т. е. если в
некоторой области $\mathcal{Q}$ оператор J_2 непрерывен, то $F^{-1}(\mu^{-1}(\xi)) \in L_{p'}$. Для
оператора J_1 обратное утверждение доказано лишь при $p=2$ [1].

Если $\mathcal{Q}$ —ограниченная область, то из интегрального представле-
ния (10) легко вывести что (11) является необходимым и достаточ-
ным условием полной непрерывности оператора J_2 . Что касается опе-
ратора J_1 , то для него мы можем указать лишь достаточное условие
полной непрерывности.

Обозначим через $\chi_R(\xi)$ бесконечно дифференцируемую функцию,
причем $|\chi_R(\xi)| \leq 1$, $\chi_R(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leq R$ и $\chi_R(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \geq R+1$.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{Q}$ —ограниченная область, $\mu \in M_{(n,p)}$, $\nu \in M_{(n,q)}$
и $\nu\mu^{-1} \in M_{p'}^q$. Если

$$M_p^q(\chi_R \nu \mu^{-1}) \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (13)$$

то оператор вложения $J_1: H_p^\mu(\mathcal{Q}) \rightarrow H_q^\nu(\mathcal{Q})$ вполне непрерывен. При $p=2$
условие теоремы примет такой вид:

$$\nu(\xi) \mu^{-1}(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Как показано в [1], это условие и необходимо для полной непрерыв-
ности оператора J_1 .

Доказательству теоремы 4 мы предположим две леммы.

Лемма 1. Пусть $u(x) \in C_0^\infty(\mathcal{Q})$, K —некоторый компакт в R_n .
Тогда для любого мультииндекса α найдется постоянная $C=C(\alpha, K)$
такая что

$$\sup_{\xi \in K} |D^\alpha u(\xi)| \leq C \|u\|_{\mu, p}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha=0$. Пусть функция $\chi \in C_0^\infty$, причем
 $\chi(x) \equiv 1$ при $x \in \mathcal{Q}$. Тогда

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int u(x) \chi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \int \hat{u}(\eta) \hat{\chi}(\xi - \eta) d\eta.$$

Обозначим $v = F^{-1}(\mu^{-1} \hat{u})$. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi) &= \int \mu(\eta) \hat{u}(\eta) \hat{\chi}(\xi - \eta) \mu^{-1}(\eta) d\eta = \int \hat{v}(\eta) \hat{\chi}(\xi - \eta) \mu^{-1}(\eta) d\eta = \\ &= \int g(x, \xi) v(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= \int e^{i\langle x, \eta \rangle} \hat{\chi}(\xi - \eta) \mu^{-1}(\eta) d\eta = \\ &= e^{i\langle x, \xi \rangle} \int [\mu(\eta) \mu^{-1}(\xi + \eta)] [\hat{\chi}(-\eta) \mu^{-1}(\eta)] e^{i\langle x, \eta \rangle} d\eta. \end{aligned}$$

В силу условия В) для функции $\mu(\xi)$ имеем $\|g(x, \xi')\|_{p'} \leq \rho(\xi) \|\chi\|_{1/\mu, p}$.
Применяя теперь неравенство Гельдера, получим

$$\|\hat{u}(\xi)\| \leq \rho(\xi) \|\chi\|_{1/\mu, p} \|v\|_p = C(\xi) \|u\|_{\mu, p}.$$

Таким же образом утверждение доказывается при $\alpha > 0$, поскольку

$$D^\alpha \hat{u}(\xi) = \int (ix)^\alpha u(x) \chi(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx.$$

Помимо леммы 1, нам понадобится еще одно вспомогательное утвер-
ждение.

Лемма 2. Пусть $f(x) \in S$ и N —целое число, $N > n$. Тогда, если
 $q \geq 1$, то

$$\|f\|_q \leq c \max_{\xi \in R_n} |(1 + |\xi|^2)^N (1 - \Delta)^N \hat{f}(\xi)|. \quad (15)$$

Доказательство. Имеем

$$\|f\|_q = \left(\int |f(x)|^q (1 + |x|^2)^{Nq} (1 + |x|^2)^{-Nq} dx \right)^{1/q} \leq c \max_{R^n} |f(x) (1 + |x|^2)^N|.$$

Далее

$$\begin{aligned} |(1 + |x|^2)^N f(x)| &= (2\pi)^{-n/2} \left| \int (1 - \Delta)^N \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi \right| \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int (1 + |\xi|^2)^N |(1 - \Delta)^N \hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{-N} d\xi \end{aligned}$$

и мы приходим к утверждению леммы.

Доказательство теоремы 4. Мы покажем, что из лю-
бой последовательности $u_k \in C_0^\infty(\mathcal{Q})$, для которой $\|u_k\|_{\mu, p} \leq 1$, можно
выбрать подпоследовательность, сходящуюся в $H_q^\nu(\mathcal{Q})$. Обозначим
через K_R шар $|\xi| \leq R+1$. В силу леммы 1 все производные функ-
ций $u_k(\xi)$ равномерно ограничены при $\xi \in K_R$. Поэтому из последова-
тельности $\{\hat{u}_k\}$ можно выбрать подпоследовательность (которую мы
также обозначим через $\{\hat{u}_k\}$, равномерно сходящуюся на K_R вместе
со всеми производными. Покажем, что новая последовательность $\{\hat{u}_k\}$
сходится в $H_q^\nu(\mathcal{Q})$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_{\nu, q} &= \|F^{-1}[\nu(\hat{u}_m - \hat{u}_n)]\|_q \leq \|F^{-1}[\nu \chi_R(\hat{u}_m - \hat{u}_n)]\|_q \\ &\quad + \|F^{-1}[\nu(1 - \chi_R)(\hat{u}_m - \hat{u}_n)]\|_q. \end{aligned} \quad (16)$$

В силу условия теоремы первый член в правой части этого нера-
венства, который оценивается сверху посредством $M_p^q(\nu \mu^{-1} \chi_R) \|u_m -$
 $- u_n\|_{\mu, p}$, как угодно мал при достаточно больших R .

Займемся оценкой второго члена. Обозначим его через A . Заме-
тим, что функция $1 - \chi_R(\xi) = \psi_R(\xi) \in C_0^\infty$ и равна 1 при $|\xi| < R$,
нулю, если $|\xi| > R+1$.

Из того, что $S \subset M_p^a$, и из леммы 2 теперь легко выводится оценка

$$A \leq M_p^a(v) \|F^{-1} [\psi_R(\xi) (\hat{u}_m - \hat{u}_n)]\|_q \leq \\ \leq c \max_{|\xi| < R+1} |(1+|\xi|^2)^N (1-\Delta)^N [\psi_R(\xi) (\hat{u}_m - \hat{u}_n)]|,$$

а так как последовательность $\{\hat{u}_k(\xi)\}$ сходится на K_R равномерно вместе со всеми производными, отсюда вытекает, что $A \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

6. Определим пространство $H_p^s(\Omega)$ как совокупность тех обобщенных функций из D_Ω , которые являются сужениями на Ω обобщенных функций из H_p^s . В пространстве $H_p^s(\Omega)$ вводится норма

$$\|u, \Omega\|_{p,p} = \inf \|u^c\|_{p,p}, \quad (17)$$

где нижняя грань берется по тем $u^c \in H_p^s$, сужения которых на Ω совпадают с u .

Сопоставим с каждым элементом $u \in H_p^s(\Omega)$ класс $U(u)$ всех обобщенных функций из H_p^s , сужения которых на Ω совпадают с u . Если u_1 и u_2 два элемента из $U(u)$, то для любой основной функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $(u_1 - u_2)(\varphi) = 0$. Обозначим через $H_{p,c\Omega}^s$ подпространство в H_p^s , состоящее из тех обобщенных функций, носители которых содержатся в дополнении к области Ω^* . Тогда $u_1 - u_2 \in H_{p,c\Omega}^s$, поэтому пространство $H_p^s(\Omega)$, снабженное нормой (17), можно понимать как фактор-пространство $H_p^s/H_{p,c\Omega}^s$ пространства H_p^s . Используя это описание, можно показать, что H_p^s является полным рефлексивным пространством, причем $H_p^{1/p}(\Omega)$ будет банаховым сопряженным пространством к $H_p^s(\Omega)$.

Пусть оператор вложения $J_1: H_p^s \rightarrow H_q^s$ непрерывен. Поскольку $J_1[H_{p,c\Omega}^s] \subset H_{q,c\Omega}^s$, оператор J_1 порождает естественное вложение пространства $H_p^s(\Omega)$ в $H_q^s(\Omega)$. Аналогично обстоит дело с вложением $H_p^s(\Omega)$ в C и $H_c(\Omega \cap R^m)$. Таким образом, при нашем определении пространств $H_p^s(\Omega)$ прямые теоремы вложения 1,2 тривиально следуют из теорем вложения во всем пространстве. Доказательство обратных теорем упирается в доказательство соответствующих теорем для пространств $H_p^s(\Omega)$.

Пусть Ω_1 — любая область, содержащая Ω вместе с замыканием. Тогда пространство $H_p^s(\Omega)$ можно также реализовать как фактор-пространство пространства $H_p^s(\Omega_1)$, именно

$$H_p^s(\Omega) = H_p^s(\Omega_1)/H_{p,c\Omega_1}^s.$$

Эта реализация позволяет перенести на $H_p^s(\Omega)$ теоремы о полной непрерывности операторов вложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волевич Л. Р. и Панеях Б. П. УМН, XX, 1(1965), 3—74.
2. Agonszajn N. and Smith K. T. Theory of Bessel potentials (I), Ann. Inst. Fourier. 11(1961), 385—475.

* Заметим, что при очень слабых ограничениях на границе области Ω [1] пространство $H_{p,c\Omega}^s$ совпадает с $H_p^s(C\Omega)$.

3. Лизоркин П. И. Обобщенное лиувилевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^s(E_n)$. Теоремы вложения. Матем. сб., т. 60 (102): 3 (1963), 325—353.

4. Calderon A. P. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. R. T. Amer. math. soc. (1961), 33—49.

5. Хермандер Л. Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. МИЛ, 1962.

6. Лизоркин П. И. ДАН СССР, т. 152, 4 (1963), 808—811.

7. Лизоркин П. И. Характеристика граничных значений функций из $L_p^s(E_n)$ на гиперплоскостях.

8. Stein E. M. The characterisation of functions arising as potentials II, Bull Amer. math. soc. vol. (1963).

Г. Г. САФАРОВ

ОТСАСЫВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Теория взаимопроникающих сред [1], выдвинутая Х. А. Рахматулиным, представляет собой обобщение теории фильтрации. В работе [2] были разработаны основные теории пограничного слоя для многокомпонентных сред, результаты которых доложены на симпозиуме „Исследование по пограничному слою“ во Фрайбурге в Западной Германии в 1957 г. Как известно, при управлении пограничным слоем для сохранения ламинарной формы течения наибольшее практическое значение имеет отсасывание.

В настоящей работе рассматривается отсасывание пограничного слоя при обтекании тел двухкомпонентной жидкостью. При решении задачи применяется метод частичного осреднения Н. А. Слезкина и С. М. Тарга [3], который заменяет два уравнения в частных производных одним нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением для функции толщины пограничного слоя. В частности, найдено выражение для определения толщины пограничного слоя, распределения скоростей и напряжения силы трения, при обтекании пластинки с однородным отсасыванием. Показан также переход от результатов двухкомпонентной среды к однокомпонентной и сравнивается с точными решениями для однокомпонентной среды [4].

1. Постановка задачи и интегрирование основного уравнения

Уравнения Х. А. Рахматулина для случая плоского установившегося движения двухкомпонентной вязкой жидкости будут иметь следующий вид:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{oi}} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\kappa}{\rho_i} (u_j - u_i);$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad i, j = 1; 2; j \neq i.$$

Здесь сохранены обозначения плотности ρ_0 , скорости u, v , кинематический коэффициент вязкости ν и другие величины для смеси жидкостей, и обозначены индексом i (или j) соответствующие значения этих величин для отдельных компонентов, входящих в смесь жидкости:

κ —коэффициент взаимодействия, постоянная размерная величина;
 ρ_i —средняя плотность i -ого компонента смеси.

Отметим, что мы предполагаем истинные ρ_{oi} и средние ρ_i плотности постоянными и ограничиваемся такими средами, в которых давление p в каждой точке может быть принято общим для всех компонентов. Давление в пределах пограничного слоя считается известной функцией от переменного x , так как принимается, что

$$\frac{1}{\rho_{oi}} \frac{\partial p}{\partial x} = -U_i \frac{dU_i}{dx} - \frac{\kappa}{\rho_i} (U_j - U_i), \quad (1)$$

где U_i —скорость на внешней границе пограничного слоя, которая считается наперед заданной и должна быть определена из решения задачи о движении идеальной жидкости.

Применяя метод частичного осреднения, получим систему

$$\frac{d^2 u_i}{dy^2} = A_i(x)$$

$$v_i = - \int_0^y \frac{\partial u_i}{\partial x} dy + C_{3i}(x), \quad (2)$$

где

$$A_i(x) = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\nu_i \delta_i} \int_0^{\delta_i} \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) dy -$$

$$- \frac{\kappa}{\rho_i \nu_i} \left(\frac{1}{\delta_j} \int_0^{\delta_j} u_j dy - \frac{1}{\delta_i} \int_0^{\delta_i} u_i dy \right); \quad (3)$$

$\delta_i(x)$ —переменная толщина слоя i -ого компонента. Система (2) допускает решения

$$u_i = \frac{1}{2} A_i(x) y^2 + C_{1i}(x) y + C_{2i}(x); \quad (4)$$

$$v_i = - \left[\frac{1}{6} A_i'(x) y^3 + \frac{1}{2} C_{1i}'(x) y^2 + C_{2i}'(x) y \right] + C_{3i}(x), \quad (5)$$

где штрихи означают производные по x . Примем следующие граничные условия: на поверхности обтекаемого профиля

$$u_i = 0, \quad v_i = v_{oi}(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (6)$$

на внешней границе пограничного слоя

$$u_i = U_i(x), \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = \delta_i. \quad (7)$$

При этих граничных условиях (6), (7) устанавливаем следующие значения для постоянных:

$$C_{1i}(x) = -A_i(x) \delta_i, \quad C_{2i}(x) = \frac{1}{2} A_i(x) \delta_i^2 U_i'(x). \quad (8)$$

$$C_{3i}(x) = v_{oi}(x), \quad (9)$$

Подставляя значения постоянных из (8), (9) в (4), (5), для распределения скоростей в пограничном слое будем иметь формулы:

$$u_i = \frac{1}{2} A_i(x) (y - \delta_i)^2 + U_i(x), \quad (10)$$

$$v_i = - \left\{ \frac{1}{6} A_i'(x) [(y - \delta_i)^3 + \delta_i^3] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} A_i(x) \delta_i' [(y - \delta_i)^2 - \delta_i^2] + U_i'(x) y \right\} + v_{oi}(x). \quad (11)$$

Привлекаем граничное условие $u_i = 0$ при $y = 0$ и получаем, что

$$A_i(x) = -\frac{2 U_i(x)}{\delta_i^2(x)}. \quad (12)$$

Подставим значения u_i , v_i , A_i и их производные в (3) и после почленного интегрирования, с учетом граничных условий (6), (7), получим следующее дифференциальное уравнение для определения толщин пограничных слоев:

$$2 U_i \delta_i \delta_i' + \left[9 U_i' - \frac{\kappa}{45 \rho_i} \frac{U_j - U_i}{U_i} \right] \delta_i^2 - 15 v_{oi}(x) \delta_i = 30 v_i \quad (13)$$

и распределение скоростей в пограничном слое будет:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{U_i(x)}{\delta_i^2(x)} (2 \delta_i y - y^2), \\ v_i &= \left(U_i \delta_i' - U_i' \delta_i \right) \frac{y^2}{\delta_i^2} - \left(\frac{2}{3} U_i \delta_i' - \frac{1}{3} U_i' \delta_i \right) \frac{y^3}{\delta_i^3} + v_{oi}(x). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) дают решения поставленной задачи. В качестве примера рассмотрим продольное обтекание плоской пластинки.

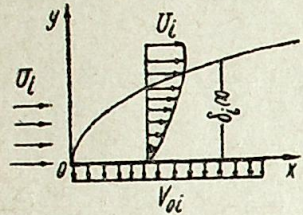


Рис. 1

(рис. 1). В случае однородного отсасывания $v_{oi} < 0$ и причем $U_i' = 0$. Следовательно, уравнение (13) принимает вид

$$2 U_i \delta_i \delta_i' = \frac{\kappa}{45 \rho_i} \frac{U_j - U_i}{U_i} \delta_i^2 + 15 v_{oi} \delta_i + 30 v_i. \quad (15)$$

Перейдем в уравнении (15) к безразмерным величинам:

$$\varphi_i = \frac{v_{oi}}{2 v_i} \delta_i, \quad \xi_i = \frac{15}{4} \left(\frac{v_{oi}}{V_i} \right)^2 \frac{U_i}{v_i} x.$$

Будем иметь после приведений

$$\varphi_i \varphi_i' = \alpha_i \varphi_i^2 + \varphi_i + 1, \quad (16)$$

где

$$\alpha_i = \frac{\kappa}{1350 f_i \mu_i} \left(\frac{2 v_i}{v_{oi}} \right) \frac{U_j - U_i}{U_i}. \quad (17)$$

После интегрирования уравнения (16), при условии, что на передней кромке пластинки толщина пограничного слоя равна нулю, т. е. $\varphi_i = 0$, при $\xi_i = 0$ получим следующее выражение для определения φ_i :

$$\ln(\alpha_i \varphi_i^2 + \varphi_i + 1) - \frac{2 \alpha_i}{1 - \sqrt{1 - 4 \alpha_i}} \varphi_i + 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - 4 \alpha_i}} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \alpha_i}}{2 \alpha_i} \varphi_i + 1 = 2 \alpha_i \xi_i \quad \text{при } 1 - 4 \alpha_i > 0, \quad (18)$$

$$\ln(\alpha_i \varphi_i^2 + \varphi_i + 1) - \frac{2 \alpha_i \varphi_i}{1 + 2 \alpha_i \varphi} = 2 \alpha_i \xi_i \quad \text{при } 1 - 4 \alpha_i = 0, \quad (19)$$

$$\ln(\alpha_i \varphi_i^2 + \varphi_i + 1) - \frac{2}{\sqrt{4 \alpha_i - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{4 \alpha_i - 1}}{\varphi_i + 2} \varphi_i = 2 \alpha_i \xi_i \quad \text{при } 1 - 4 \alpha_i < 0. \quad (20)$$

Итак, если вернуться к размерным величинам, зная функцию $\delta_i(x)$, находим распределение скоростей в пограничном слое в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \left[2 \left(\frac{y}{\delta_i} \right) - \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^2 \right]; \\ v_i &= U_i \left[\delta_i' \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^2 - \frac{2}{3} \delta_i' \left(\frac{y}{\delta_i} \right)^3 + \frac{v_{oi}}{U_i} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, задача оказывается решенной до конца. Чтобы перейти к исследованию полученных решений, рассмотрим однокомпонентную среду, т. е.

$$\mu_i = \mu, \quad \rho_{oi} = \rho, \quad f_i = 1, \quad v_{oi} = v_0, \quad U_i = U_j = U.$$

В рассматриваемом случае уравнение (15) принимает вид

$$\varphi \varphi' = \varphi + 1, \quad (21)$$

что допускает решение

$$\varphi - \ln(\varphi + 1) = \xi, \quad (22)$$

где

$$\varphi = \frac{v_0 \delta}{2 v}, \quad \xi = \frac{15}{4} \left(\frac{v_0}{U} \right)^2 \frac{U}{v} x.$$

Аналогичное аналитическое решение получено Г. Шлихтингом [4] исходя из уравнения импульсов. Из решения (22) устанавливаем, что при отсасывании $v_0 < 0$, $\varphi = -1$ при $\xi \rightarrow \infty$, т. е. $\delta = \frac{2 v}{v_0}$. В случае выбрасывания жидкости в пограничный слой $v_0 > 0$,

$$\varphi = \xi \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty, \quad \text{т. е. } \delta = \frac{15}{2} \frac{v_0}{U} x.$$

Сравнение результатов показывает (рис. 2), что отсасывание уменьшает толщину пограничного слоя, стабилизирует его, следовательно, уменьшает сопротивление трения. Легко убедиться, что такой же процесс происходит при обтекании двухкомпонентной жидкостью.

Как видно из решения (18), при $\alpha_i < 0,25$ функция $\varphi_i(\xi_i)$ с увеличением аргумента ξ_i убывает и стремится к асимптоте

$$\varphi_i = -\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \alpha_i}}{2 \alpha_i}, \quad (23)$$

зависящей от параметра α_i . Знак параметра α_i зависит от знака относительной скорости компонентов $U_j - U_i/U_i$ в потенциальном потоке, т. е.

$$\begin{aligned} \alpha_i &> 0 \quad \text{при } U_j - U_i > 0, \\ \alpha_i &< 0 \quad \text{при } U_j - U_i < 0, \end{aligned}$$

а) если $U_j - U_i = 0$ ($\alpha_i = 0$), то асимптотой служит прямая $\varphi_i = -1$ или $\delta_i = \frac{2 v_i}{-v_{oi}}$, т. е. i -ый компонент образует толщину пограничного

слоя независимо от остальных компонентов смеси.

б) если $U_j - U_i \neq 0$ (рис. 3), то толщина пограничного слоя с увеличением вязкости растет, а с увеличением объемного содержания и плотности уменьшается.

Следует отметить, что в непосредственной близости от передней кромки распределение толщины пограничных слоев имеет такую же форму, как при отсутствии отсасывания, по мере удаления от передней кромки $\delta_i(x)$ — толщина постепенно увеличивается и в зависимости от объемного содержания компонента достигает значения (23). При $\alpha_i = 0,25$ следует использовать решение (19) асимптотой которого служит прямая $\varphi_i = -2$, при $\alpha_i > 0,25$ следует использовать решение (20), которое не имеет асимптоты, толщина слоя $\delta_i(x)$ по мере удаления от передней кромки бесконечно увеличивается (рис. 3).

В области асимптотического решения касательное на-

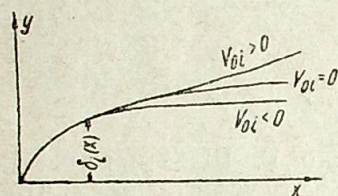


Рис. 2

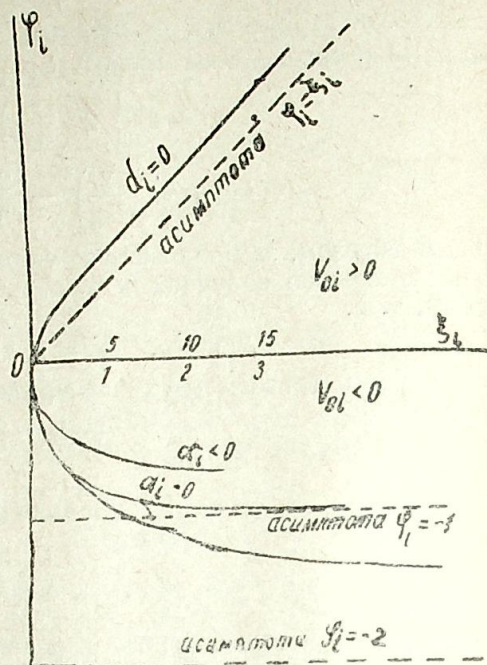


Рис. 3

пряжение на пластинке определяется по формуле

$$\tau_{0i} = \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} \right)_0 = 2\mu_i U_i \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha_i}}{2\alpha_i} (-\tau_{0i}) U_i \rho_{0i}$$

и для местного коэффициента сопротивления i -ого компонента получим значение

$$W_i = \frac{\tau_{0i}}{\frac{1}{2} \rho_{0i} U_i^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha_i}}{2\alpha_i} (2q_i),$$

где $q_i = -v_0/U_i$ — коэффициент расхода отсасывания i -ого компонента смеси.

Поскольку отсасывание пограничного слоя позволяет сохранить в нем ламинарную форму течения, чтобы выяснить, какое уменьшение сопротивления i -ого компонента достигается посредством отсасывания, необходимо определить минимальное значение расхода i -ого компонента, которым должно производиться отсасывание. Требуется особое исследование перехода ламинарной формы течения двухкомпонентной жидкости в турбулентную.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Теория взаимопроникающих сред. ПММ, т. 20, № 2, 1956 г.
2. Rachmatulin H. A. Grenzschicht theorie der homogenen und Zweikomponenten-Flüssigkeit mit zwei Geschwindigkeiten. Intam symposium Freiburg /Br. 1957. Grenzschichtforschung bondory layer research herausgeber. H. Görtler. Berlin, 1958.
3. Слезкин Н. А. и Тапр С. М. ДАН СССР, LIV, № 3, 1946.
4. Schichting H. Die Grenzschicht mit Absaugung und Anblasen. Luftfahrtforschung 19, s., 179 (1942).

Н. Н. Сәфәров

Мәсамәли чисмин икикомпонентли маје илә јујулмасында сәрһәд лајынын сорулмасы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә мәсамәли чисмин икикомпонентли өзлү сыхылмајан маје илә јујулмасында сәрһәд лајынын сорулмасы мәсәләсинә бахылып. Х. Ә. Рахматулинин мәлүм тәнликләри тәгриби тәнликләрлә әвәз олунур вә интегралланыр.

Хүсуси һалда мәсамәли мүстәви пластинканын јујулмасы үчүн сәрһәд лајынын галынлығы, сүрәтләрин пајланмасы вә сүртүнмә гүввәси тапылараг, мајенин һәрәкәти арашдырылып.

Әлдә едилән мәлүматлар бирчинсли мүһитин мәлүм нәтичәләринин хүсуси һалда алындығыны көстәрир.

С. Я. ЯКУБОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье исследуется разрешимость задачи Коши для уравнения

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + A_1(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_n(t) u(t) = f(t, u(t), \dots, \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}}) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u^{(i)}(0) = u_i \quad (i = \overline{0, n-1}), \quad (2)$$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями в банаховом пространстве E , $A_i(t)$ — операторы, действующие в E .

О п р е д е л е н и е. Решением АЗК₁ (абстрактной задачи Коши) для (1) — (2) будем называть n раз непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую при каждом $t \in [0, T]$ уравнению (1) и начальным условиям (2) и обладающую, кроме того, тем

свойством, что функции $A_i(t) \frac{d^{n-i} u(t)}{dt^{n-i}} \quad (i = \overline{1, n})$ непрерывны на $[0, T]$.

Решением АЗК₂ для (1) — (2) будем называть $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$, n раз непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую при каждом $t \in (0, T]$ уравнению (1) и начальным условиям (2) и обладающую, кроме того, тем

свойством, что функции $A_i(t) \frac{d^{n-i} u(t)}{dt^{n-i}} \quad (i = \overline{2, n})$ непрерывны на $[0, T]$

а функция $A_1(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}}$ непрерывна на $(0, T]$ и интегрируема по Бохнеру на $(0, T)$.

Метод сведения уравнения высшего порядка к системе, примененной нами в [1], развивается и применяется к более общим уравнениям. В случае $n = 2$ эта задача исследована П. Е. Соболевским [2, 3].

Л е м м а. Пусть A — замкнутый оператор в E ; пусть вектор-функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$; $u(0) \in D(A)$, $\frac{du(t)}{dt} \in D(A)$; $A \frac{du(t)}{dt}$ непрерывна на $(0, T]$ и интегрируема по Бох-

неру на $(0, T)$. Тогда $u(t) \in L(A)$, вектор-функция $Au(t)$ непрерывна на $[0, T]$, непрерывно дифференцируема на $(0, T]$ и при $t \in (0, T]$

$$\frac{d}{dt} [Au(t)] = A \frac{du(t)}{dt} \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 3.7.12 [4]

$$A \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_0^t A \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

т. е

$$A[u(t) - u(0)] = \int_0^t A \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Так как $u(0) \in D(A)$, то $u(t) \in D(A)$ и требуемое равенство получается дифференцированием последнего.

З а м е ч а н и е 1. Если $A \frac{du(t)}{dt}$ непрерывна на $[0, T]$, то $Au(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и равенство (3) имеет место при всех $t \in [0, T]$.

1. Рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + A_1(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_n(t) u(t) = f(t). \quad (4)$$

Т е о р е м а 1. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Замкнутый линейный оператор $A_1(t) \quad (t \in [0, T])$ действует в E , имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $D(A_1(t)) = D(A_1)$, и выполняется неравенство

$$\|R(\lambda, -A_1(t))\| \leq (\lambda + \delta)^{-1}$$

при $\lambda > -\delta \quad (\delta > 0)^*$;

2°. Сператор-функция $A_1(t) A_1^{-1}(0)$ дважды сильно непрерывно дифференцируема, а оператор-функции $A_i(t) A_1^{-1}(0) \quad (i = \overline{2, n})$ сильно непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$;

3° $u_i \in D(A_1) \quad (i = \overline{0, n-1})$;

4°. Вектор-функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Тогда АЗК₁ для (4) — (2) имеет единственное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При помощи замены

$$\begin{cases} V_1(t) = A_1(0) u^{(i-1)}(t) \quad (i = \overline{1, n-2}) \\ V_{n-1}(t) = A_1(t) u^{(n-2)}(t) + u^{(n-1)}(t) \\ V_n(t) = u^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (5)$$

* Предположение $\delta > 0$ не накладывает никаких дополнительных ограничений на задачу, так как с помощью замены $u(t) = e^{kt} V(t)$ можно всегда добиться его выполнения.

АЗК₁ для (4) — (2) в банаховом пространстве E сводится к эквивалентной АЗК₁ для системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= V_{i+1}(t) \quad (1 = 1, n-3) \\ V_{n-2}'(t) &= A_1(0) A_1^{-1}(t) V_{n-1}(t) - A_1(0) A_1^{-1}(t) V_n(t) \\ V_{n-1}'(t) &= -A_n(t) A_1^{-1}(0) V_1(t) + \dots + [-A_2(t) A_1^{-1}(t) + \\ &+ A_1'(t) A_1^{-1}(t)] V_{n-1}(t) + [A_2(t) A_1^{-1}(t) - A_1'(t) A_1^{-1}(t)] V_n(t) + f(t) \\ V_n'(t) &= -A_n(t) A_1^{-1}(0) V_1(t) - \dots - A_2(t) A_1^{-1}(t) V_{n-1}(t) + \\ &+ A_2(t) A_1^{-1}(t) V_n(t) - A_1(t) V_n(t) + f(t) \\ V_1(0) &= A_1(0) u_{i-1} \quad (1 = 1, n-2) \\ V_{n-1}(0) &= A_1(0) u_{n-2} + u_{n-1} \\ V_n(0) &= u_{n-1} \end{aligned} \quad (6)$$

в топологическом произведении $E^n = E \times \dots \times E$. Покажем эквивалентность АЗК₁ для (4) — (2) и для (6). Пусть $u(t)$ — решение АЗК₁ для (4) — (2). Тогда из определения 1 и условия 2° вытекает, что функция $u^{(n-1)}(t)$ удовлетворяет условиям леммы. Последовательно убеждаемся, что все функции $u^{(i)}(t) (i = \overline{0, n-2})$ удовлетворяют условиям леммы (точнее, замечанию к лемме). Значит функции $A_i(0) u^{(i)}(t) (i = \overline{0, n-2})$ непрерывно дифференцируемы на $[0, T]$ и при $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} [A_1(0) u^{(i)}(t)] = A_1(0) u^{(i+1)}(t) \quad (i = \overline{0, n-2}).$$

Учитывая это обстоятельство, легко убеждаемся, что вектор-функция $V(t) = (V_1(t), \dots, V_n(t))$, определяемая равенствами (5), является решением АЗК₁ для (6).

Обратно, если вектор-функция $V(t)$ есть решение АЗК₁ для (6), то функция

$$u(t) = A_1^{-1}(0) V_1(t)^{*}) \quad (7)$$

является решением АЗК₁ для (4) — (2). Действительно, из (6) получаем, что функция, определяемая равенством (7), удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} u^{(i)}(t) = A_1^{-1}(0) V_{i+1}(t) \quad (i = \overline{0, n-3}) \\ u^{(n-1)}(t) = A_1^{-1}(t) [V_{n-1}(t) - V_n(t)] \\ u^{(n-1)}(t) = V_n(t) \\ u^{(n)}(t) = V_n'(t), \end{cases}$$

откуда легко получается, что функция, определяемая равенством (7), является решением АЗК₁ для (4)–(2). В E^n задачу (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} + A_1(t)V(t) = A_2(t)V(t) + F(t), \\ V(0) = V_0, \end{cases} \quad (8)$$

где

* В случае $n = 2$ $u(t) = A_1^{-1}(t)(V_1(t) - V_2(t))$

$$V(t) = \begin{vmatrix} V_1(t) & \dots & V_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1(t) & \dots & V_n(t) \end{vmatrix}, F(t) = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ f(t) & \dots & f(t) \end{vmatrix}, V_0 = \begin{vmatrix} A_1(0)u_0 & \dots & A_1(0)u_{n-2} + u_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1(0)u_{n-2} + u_{n-1} & \dots & u_{n-1} \end{vmatrix}, A_1(t) = \begin{vmatrix} I & \dots & I \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I & \dots & A_1(t) \end{vmatrix}$$

$$A_2(t) = \begin{vmatrix} I & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -A_n(t) A_1^{-1}(0) & \vdots & \vdots & I - A_2(t) A_1^{-1}(t) + A_1'(t) A_1^{-1}(t) & A_2(t) A_1^{-1}(t) - A_1'(t) A_1^{-1}(t) \\ -A_n(t) A_1^{-1}(0) & \vdots & \vdots & -A_2(t) A_1^{-1}(t) & A_2(t) A_1^{-1}(t) \end{vmatrix}$$

В силу условия 1° $A_1(t)$ ($t \in [0, T]$) — замкнутый линейный оператор, действующий в E^n , имеющий не зависящую от t , всюду плотную область определения $D(A_1(t)) = E \times \dots \times E \times D(A_1)$, причем выполняется неравенство

$$\|R(\lambda, -A_1(t))\| \leq (\lambda + \delta_1)^{-1}$$

при $\lambda > -\delta_1$, где $\delta_1 = \min(\delta, 1)$.

Так как оператор-функция $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, то из равенства

$$A_2(t)A_1^{-1}(0) = \begin{pmatrix} I \\ \vdots \\ I \\ A_1(t)A_1^{-1}(0) \end{pmatrix} \quad (9)$$

получаем, что оператор-функция $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. С другой стороны, в силу условий 2° и 4° оператор-функция $A_2(t)$ сильно непрерывно дифференцируема, а вектор-функция $V(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Значит, в силу теоремы 6 [5] АЗК₁ для (8) имеет единственное решение на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$. Ясно, что $\|A_2(t)\| \leq M$ на $[0, T]$, откуда вытекает, что решения $V(t)$ АЗК₁ для (8) удовлетворяют априорным оценкам $\|V(t)\| \leq C$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что найденное решение АЗК₁ для (8) на $[0, t_0]$ может быть единственным образом продолжено на отрезок $[0, T]$. Итак, теорема полностью доказана.

Применяя результаты работы [6], можно доказать следующую теорему для операторов, порождающих аналитическую полугруппу.

Теорема 2. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Замкнутый линейный оператор $A_1(t)$ ($t \in [0, T]$) действует в E , имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $D(A_1(t)) = D(A_1)$, и выполняется неравенство

$$\|R(\lambda, -A_1(t))\| \leq C[|\lambda| + 1]^{-1}$$

при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$;

2°. Оператор-функция $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема, оператор-функции $\frac{d}{dt}[A_1(t)A_1^{-1}(0)]$ и $A_1(t)A_1^{-1}(0)$

($i = \overline{2, n}$) удовлетворяют какому-нибудь условию Гельдера на $[0, T]$;

3°. $u_i \in D(A_1)$ ($i = \overline{0, n-2}$), $u_{n-1} \in D(A_1^\alpha(0))$ при некотором $\alpha > 0$;

4°. Вектор-функция $f(t)$ удовлетворяет какому-нибудь условию Гельдера на $[0, T]$.

Тогда АЗК₂ для (4)–(2) имеет единственное решение.

Доказательство. Как и в теореме 1, при помощи замены (5) АЗК₂ для (4)–(2) сводится к эквивалентной АЗК₂ для уравнения (8) в банаховом пространстве E^n . Применим теорему 7 [6] к АЗК₂ для (8). В силу условия 1° оператор $A_1(t)$ ($t \in [0, T]$) действует в E^n и имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $E \times \dots \times E \times D(A_1)$, кроме того, при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\|R(\lambda, -A_1(t))\| \leq C[|\lambda| + 1]^{-1}.$$

Так как оператор-функция $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема, то она удовлетворяет условию Липшица, откуда ввиду (9) вытекает, что оператор-функция $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ также удовлетворяет

условию Липшица. С другой стороны, в силу условия 2° оператор $F(t, V) = A_2(t)V + F(t)$ при любых $0 \leq t, \tau \leq T$, $V_1, V_2 \in E^n$ и при некотором δ удовлетворяет оценке

$$\|F(t, V_1) - F(\tau, V_2)\| \leq C[-t - \tau]^\delta + \|V_1 - V_2\|.$$

Так как оператор $A_1(t)$ имеет дробные степени, которые определяются по формуле

$$A_1^\alpha(t) = \begin{pmatrix} I \\ \vdots \\ I \\ A_1^\alpha(t) \end{pmatrix},$$

то в силу условия 3°, $V_0 \in D(A_1^\alpha(0))$.

Итак, по теореме 7 [6] существует определенное на некотором $[0, t_0]$ единственное непрерывное на $[0, t_0]$ и непрерывно дифференцируемое при $t > 0$ решение задачи (8). Так как возмущающий оператор $A_2(t)$ является линейным, то полученное решение можно продолжить на $[0, T]$ (см. теорему 1). С другой стороны, так как $V_0 \in D(A_1^\alpha(0))$, то в силу теоремы 2 [6] имеем оценку

$$\|A_1(t)U(t, 0)V_0\| \leq Ct^{-1+\alpha},$$

где $U(t, \tau)$ — функция Като [7] оператора $A_1(t)$. Значит вектор-функция $A_1(t)V(t)$ интегрируема по Бохнеру на $[0, T]$, т. е. $V(t)$ является решением АЗК₂ для (8). Итак, теорема доказана.

Замечание 2. Если $u_{n-1} \in L(A)$, то найденное решение является решением АЗК₁ для (4)–(2).

2. Перейдем к рассмотрению нелинейного уравнения

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + A(t) \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} = f(t, u(t), \dots, \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}}). \quad (10)$$

Метод, развитый в предыдущих теоремах, позволяет исследовать АЗК₁ для (10)–(2). В частности, при $n = 2$ получаются некоторые результаты статей [2, 3].

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Замкнутый линейный оператор $A(t)$ ($t \in [0, T]$) действует в E , имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $D(A(t)) = D(A)$ и выполняется неравенство

$$\|R(\lambda, -A(t))\| \leq (\lambda + \delta)^{-1}$$

при $\lambda > -\delta$ ($\delta > 0$);

2°. Оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ дважды сильно непрерывно дифференцируема на $[0, T]$;

3. $u_i \in D(A)$ ($i = \overline{0, n-1}$);

4°. Оператор $f(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(0)v_{n-1}, v_n)$ на топологическом произведении $[0, T] \times S(A(0)u_0, R) \times \dots \times S(A(0)u_{n-2}, R) \times S(u_{n-1}, R)$, где R — некоторое число, имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $f_i(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(0)v_{n-1}, v_n)$ и $f'_{v_i}(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(0)v_{n-1}, v_n)$ ($i = \overline{1, n}$) (последняя — в смысле Фреше), удовлетворяющие по v_i ($i = \overline{1, n}$) условию Липшица.

Тогда АЗК₁ для (10)–(2) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. При помощи замены

$$\begin{cases} v_i(t) = A(0) u^{(i-1)}(t) \quad (i = \overline{1, n-2}) \\ v_{n-1}(t) = A(t) u^{(n-2)}(t) + u^{(n-1)}(t) \\ v_n(t) = u^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (11)$$

АЗК₁ для (10) — (2) в пространстве E сводится к эквивалентной АЗК₁ для уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} + A(t)V(t) = F(t, V(t)) \\ V(0) = V_0 \end{cases} \quad (12)$$

в топологическом произведении E^n , где

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} A(0)u_0 \\ \vdots \\ A(0)u_{n-2} + u_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} I & & \\ & \ddots & \\ & & I \\ & & & A(t) \end{pmatrix}$$

$$F(t, V) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} + A(0)A^{-1}(t)[v_{n-1} - v_n] \\ v_{n-1} + A'(t)A^{-1}(t)[v_{n-1} - v_n] + f(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(t)(v_{n-1} - v_n), v_n) \\ f(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(t)(v_{n-1} - v_n), v_n) \end{pmatrix}$$

В теореме 1 доказано, что при $\lambda > -\delta_1$ имеет место неравенство $\|R(\lambda, -A(t))\| \leq (\lambda + \delta_1)^{-1}$ и оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема.

В силу условий 2° и 4° оператор $f(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(t)(v_{n-1} - v_n), v_n)$ при некотором $t_1 \in (0, T]$ и $R_1 \leq R^*$ на топологическом произведении $[0, t_1] \times S(A(0)u_0, R_1) \times \dots \times S(A(0)u_{n-2} + u_{n-1}, R_1) \times S(u_{n-1}, R_1)$ имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $f'_i(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(t)(v_{n-1} - v_n), v_n)$ и $f'_{v_i}(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(t)(v_{n-1} - v_n), v_n) (i = \overline{1, n})$, удовлетворяющие [по $v_i (i = \overline{1, n})$ условию Липшица. Отсюда следует, что оператор $F(t, V)$ на топологическом произведении $[0, t_1] \times S(V_0, R)$ имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные $F'_i(t, V)$ и $F'_{v_i}(t, V)$, удовлетворяющие по V условию Липшица. Тогда на основании теоремы 6 [5] АЗК₁ для (12) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$. Итак, теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Замкнутый линейный оператор $A(t) (t \in [0, T])$ действует в E , имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $D(A(t)) = D(A)$ и выполняется оценка

$$\|R(\lambda, -A(t))\| \leq C[|\lambda| + 1]^{-1}$$

при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$;

* При нахождении R_1 существенно используется то обстоятельство, что оператор-функция $A(0)A^{-1}(t)$ непрерывна по норме. Последний факт следует из сильно непрерывной дифференцируемости $A(t)A^{-1}(0)$.

2°. Оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема и $\frac{d}{dt}[A(t)A^{-1}(0)]$ удовлетворяет какому-нибудь условию Гельдера на $[0, T]$;

3°. $u_i \in DA (i = \overline{0, n-2})$, $u_{n-1} \in D(A)(A^2(0))$ при некотором $a > 0$;

4°. При любых $0 \leq t, \tau \leq T$, $v_i, w_i \in S(A(0)u_{i-1}, R) (i = \overline{1, n-1})$, $v_n, w_n \in S(u_{n-1}, R)$, где R — некоторое число, и при некотором δ имеет место неравенство

$$\|f(t, A^{-1}(0)v_1, \dots, A^{-1}(0)v_{n-1}, v_n) - f(\tau, A^{-1}(0)w_1, \dots, A^{-1}(0)w_{n-1}, w_n)\| \leq C \left[|t - \tau|^\delta + \sum_{i=1}^n \|v_i - w_i\| \right].$$

Тогда, АЗК₂ для (10) — (2) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. При помощи замены (11) АЗК₂ для (10) — (2) в банаховом пространстве E сводится к эквивалентной АЗК₂ для (12) в топологическом произведении E^n . В теореме 2 доказано, что оператор $A(t) (t \in [0, T])$ действует в E^n , имеет не зависящую от t , всюду плотную область определения $E \times \dots \times E \times D(A)$, и при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ имеет неравенство $\|R(\lambda, -A(t))\| \leq C[|\lambda| + 1]^{-1}$, и оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ удовлетворяет условию Липшица. С другой стороны, в силу условий 2° и 4° при некотором $t_1 \in (0, T]$, $R_1 \leq R$ и при любых $0 \leq t, \tau \leq t_1$, $V, W \in S(V_0, R_1)$ имеет место неравенство

$$\|F(t, V) - F(\tau, W)\| \leq C[|t - \tau|^\delta + \|V - W\|].$$

Тогда, в силу теорем 7 и 2 [6] АЗК₂ для (12) имеет единственное решение, определенное на некотором отрезке $[0, t_0] \subset [0, T]$. Теорема доказана.

Замечание 3. Если $u_{n-1} \in D(A)$, то найденное решение является решением АЗК₁ для (10) — (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубов С. Я. ДАН СССР*, 153, 1964, № 5.
2. Соболевский П. Е. ДАН СССР*, 145, 1962, № 4.
3. Соболевский П. Е. Уч. зап. АГУ, серия физ.-мат., 1932, № 3.
4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.
5. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Соболевский П. Е. ДАН СССР*, 111, 1956, № 1.
6. Соболевский П. Е. Тр. Московского матем. об-ва, 1961, № 10.
7. Като Т. J. Math. soc. Japan. 5, № 2, 1953.

С. Я. Якубов

Банах фэзасыннэ гејри-мәһдуд вә гејри-сабит операторлардан асылы олан јүксәк тәртибли дифференциал тәнликләр

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә хәтти мәһдуд операторларын јарымгрупплар нәзәријәсиндән истифадә олунараг, Банах фэзасында гејри-мәһдуд вә гејри-сабит операторлардан асылы олан n тәртибли дифференциал тәнликләр үчүн Коши мәсәләси һәллинин варлығы өјрәнилир.

n -тәртибли дифференциал тәнлик үчүн гојулмуш Коши мәсәләси Банах фэзаларынын тоположи һасилиндә биринчи тәртиб Коши мәсәләсинә кәтирилир вә она мәлум нәтичәләр тәتبиг едилир.

Р. И. АЛИХАНОВА

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Настоящее исследование представляет собой некоторое развитие работы С. Н. Бернштейна [1] и продолжение работы [2].

Рассматривается функциональное уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = f\left(\int_a^b u^2(t, x) dx\right) L(u) \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x) \quad (2)$$

и краевых условиях

$$\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{jv} \left(\frac{\partial^v u(t, x)}{\partial x^v} \right)_{x=a} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{jv} \left(\frac{\partial^v u(t, x)}{\partial x^v} \right)_{x=b} = 0, \quad j=0, 1, \dots, p-1, \quad (3)$$

где

$$L(u) = \sum_{v=0}^p A_v(x) \frac{\partial^v u(t, x)}{\partial x^v}, \quad (4)$$

$\frac{1}{A_p(x)}$, $A_v(x)$, $v=0, 1, 2, \dots, p-1$ — непрерывные функции для $a \leq x \leq b$ и $f(z) \geq \alpha > 0$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную первую производную. Предполагается, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ разложимы в ряды по собственным функциям $v_v(x)$ самосопряженного оператора $L(\cdot)$, порожденного дифференциальным оператором

$$l(v) = \sum_{v=0}^p A_v(x) \frac{d^v v(x)}{dx^v} \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{jv} \left(\frac{d^v v(x)}{dx^v} \right)_{x=a} + \sum_{j=0}^{p-1} \beta_{jv} \left(\frac{d^v v(x)}{dx^v} \right)_{x=b} = 0, \quad j=0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (6)$$

Пусть все собственные значения оператора (5) при краевых условиях (6) отрицательны. Обозначим их через $-\lambda_v^2$. Под λ_v будем понимать арифметический корень из $+\lambda_v^2$.

Предположим, что ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^{4p}} \quad (7)$$

сходится. Например в работе С. Н. Бернштейна [1] это предположение выполняется.

Далее пусть

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} b_v v_v(x)$$

и

$$\psi(x) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v v_v(x)$$

так, чтобы ряды

$$\sum_{v=1}^{\infty} b_v^2 \lambda_v^8 \quad (8)$$

и

$$\sum_{v=1}^{\infty} c_v^2 \lambda_v^6 \quad (9)$$

сходились.

Решение задачи (1), (2), (3) ищут в виде

$$u(t, x) = \sum_{v=1}^{\infty} a_v(t) v_v(x). \quad (10)$$

Если собственные функции $v_v(x)$ выбраны так, что они образуют полную ортонормированную систему, то получим

$$\int_a^b u^2(t, x) dx = \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t).$$

При указанных предположениях $a_v(t)$ подбираются так, чтобы (10) удовлетворяло уравнению (1) и условиям (2), (3).

Для этого достаточно, чтобы $a_v(t)$ было решением бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$a_v''(t) + \lambda_v^2 f\left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t)\right) a_v(t) = 0 \quad (11)$$

с начальными условиями

$$a_v(0) = b_v \quad \text{и} \quad a_v'(0) = c_v. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу (11), (12) при условии $b_v = c_v = 0$, когда $v > n$. Тогда задача (11), (12) превратится в задачу Коши для конечной системы

$$a_{v,n}''(t) + \lambda_{v,n}^2 f\left(\sum_{v=1}^{\infty} a_{v,n}^2(t)\right) a_{v,n}(t) = 0 \quad (11n)$$

при начальных условиях

$$a_{v,n}(0) = \begin{cases} b_v, & v \leq n, \\ 0, & v > n, \end{cases} \quad a_{v,n}'(0) = \begin{cases} c_v, & v \leq n, \\ 0, & v > n. \end{cases} \quad (12n)$$

Отметим, что здесь $a_{v,n}(t) \equiv 0$, если $v > n$.

На основании классической теоремы существования решения задачи Коши [4] существует решение задачи (11 n), (12 n) для достаточно малых t .

Кроме того, нетрудно видеть, что в этом случае решение существует при любых t . Для этого покажем, что $a_{v,n}(t)$ и $a'_{v,n}(t)$, $v \leq n$, ограничены для всех значений t , $0 \leq t < +\infty$. В самом деле, умножим обе части равенства

$$a'_{v,n}(t) + \lambda_v^2 f\left(\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t)\right) a_{v,n}(t) = 0$$

на $\frac{1}{\lambda_v^2} a'_{v,n}(t)$, просуммируем и проинтегрируем от 0 до t .

Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\lambda_v^2} [a'_{v,n}(t)]^2 + \int_0^t \sum_{v=1}^n a'_{v,n}(t) a_{v,n}(t) f\left(\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t)\right) dt = \\ = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\lambda_v^2} c_v^2. \end{aligned}$$

Положим

$$\int_0^z f(z) dz = \Phi(z),$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\lambda_v^2} [a'_{v,n}(t)]^2 + \frac{1}{2} \Phi\left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t)\right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\lambda_v^2} c_v^2 + \frac{1}{2} \Phi\left[\sum_{v=1}^n b_v^2\right] = C. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\Phi(z) \geq \alpha z$, имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{v=1}^n \frac{1}{\lambda_v^2} [a'_{v,n}(t)]^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \leq C, \quad (13)$$

откуда следует, что $a_{v,n}(t)$ и $a'_{v,n}(t)$ остаются ограниченными для всех t , $0 \leq t < +\infty$, а потому, в частности, классическая теорема Коши обеспечивает существование решения при $t+h$, если оно существует при t , где h есть постоянная, не зависящая от t .

Следовательно, решение существует при всяком t [4]. Из (13) следует, что совокупности $\{a_{v,n}(t)\}$ и $\{a'_{v,n}(t)\}$ равномерно ограничены при всех значениях t . Кроме того, множество $\{a_{v,n}(t)\}$ равномерно непрерывно. В самом деле, для двух значений t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$) имеем

$$a_{v,n}(t_2) - a_{v,n}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a'_{v,n}(\tau) d\tau.$$

Следовательно, в силу неравенства Буняковского,

$$|a_{v,n}(t_2) - a_{v,n}(t_1)|^2 \leq (t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} (a'_{v,n}(\tau))^2 d\tau \leq (t_2 - t_1)^2 C.$$

Из этого неравенства видим, что при $|t_2 - t_1| \leq \delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}$ выполнены условия равномерной непрерывности. По теореме Арцела существует подпоследовательность $\{a_{v,n_s}(t)\}$, сходящаяся равномерно к некоторой непрерывной функции $a_v(t)$, причем $a_v(0) = b_v$ и $a'_v(0) = C_v$. Теперь надо показать, что ряд $\sum_{v=1}^{n_s} a_{v,n_s}^2(t)$ сходится равномерно относительно

t к ряду $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t)$. Предварительно докажем некоторые леммы.

Лемма 1. Пусть имеем функцию

$$z_{k,n}(t) = \sum_{v=1}^n \lambda_v^2 \left[\lambda_v^2 a_{v,n}^2(t) + \frac{[a'_{v,n}(t)]^2}{f\left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t)\right]} \right], \quad (14)$$

где k — произвольное положительное целое число, а $a_{v,n}(t)$ является решением задачи (11 n), (12 n), тогда при

$$0 \leq t \leq \sigma < \frac{1}{M z_{k,n}(0)} \quad (15)$$

имеет место

$$z_{k,n}(t) \leq \frac{z_{k,n}(0)}{1 - M z_{k,n}(0) t}, \quad (16)$$

где

$$M = \max \left| \frac{f'(z)}{V f(z)} \right|_{\lambda_1^{k+1}}, \quad \lambda_1 = \min \lambda_v, \quad 0 \leq z \leq \frac{2C}{\alpha}.$$

Доказательство. Из (14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d z_{k,n}(t)}{dt} = - \\ - \frac{2 f' \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]}{f^2 \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]} \sum_{v=1}^n \lambda_v^k [a'_{v,n}(t)]^2 \sum_{v=1}^n (a_{v,n}(t) a'_{v,n}(t)). \end{aligned}$$

Заметим, что из (14) следует

$$\sum_{v=1}^n \frac{\lambda_v^k [a'_{v,n}(t)]^2}{f \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]} \leq z_{k,n}(t),$$

$$\frac{2}{V f \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]} \sum_{v=1}^n |a_{v,n}(t) a'_{v,n}(t)| \leq z_{k,n}(t) \frac{1}{\lambda_1^{k+1}}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{d z_{k,n}(t)}{dt} \right| \leq \frac{f' \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]}{V f \left[\sum_{v=1}^n a_{v,n}^2(t) \right]} z_{k,n}^2(t) \frac{1}{\lambda_1^{k+1}} \leq M z_{k,n}^2(t).$$

Отсюда следует утверждение леммы.
Функция $\varepsilon_{k,n}(t)$ имеет верхнюю границу, не зависящую от n .
Следовательно, для

$$\varepsilon_k(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^k \left[\lambda_v^2 a_v^2(t) + \frac{[a'_v(t)]^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right]} \right],$$

где

$$a_v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{v,n}(t), \quad a'_v(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_{v,n}(t),$$

справедливо неравенство

$$\varepsilon_1(t) \leq \frac{\varepsilon_k(0)}{1 - M \varepsilon_k(0) t} \quad (17)$$

для всех

$$t < \frac{1}{M \varepsilon_k(0)}.$$

Лемма 2. При сходимости рядов (8) и (9) ряды

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^8 a_v^2(t) \quad (18)$$

и

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^6 [a'_v(t)]^2 \quad (19)$$

равномерно сходятся при t , удовлетворяющих (15).

Доказательство. Сходимость рядов (18), (19) следует из леммы 1.

Возьмем $k=6$. Из (16) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 a_v^2(t) + \frac{\lambda_v^6 [a'_v(t)]^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right]} \right] \leq \\ & \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} b_v^2 \right]} \right] \leq \\ & \leq \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} b_v^2 \right]} \right] t}{1 - M \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} b_v^2 \right]} \right] t} \leq \\ & \leq \frac{\sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{\alpha} \right]}{1 - M \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{\alpha} \right] \sigma} \leq \\ & \left[\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^8 b_v^2 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{\alpha} \right] < +\infty, \end{aligned}$$

где

$$C_2 = \frac{1}{1 - M \sum_{v=1}^{\infty} \left[\lambda_v^8 b_v^2 + \frac{\lambda_v^6 c_v^2}{\alpha} \right] \sigma}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Более того, отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^6 \frac{[a'_v(t)]^2}{f \left[\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right]}.$$

Теперь докажем сходимость ряда $\sum_{v=1}^{n_s} a_{v,n_s}^2(t)$ к ряду $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t)$.

В самом деле,

$$\left| \sum_{v=1}^{n_s} a_{v,n_s}^2(t) - \sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right| \leq \sum_{v=1}^{n_s} |a_{v,n_s}^2(t) - a_v^2(t)| + \sum_{v=n_s+1}^{\infty} a_v^2(t).$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t)$ получается утверждение.

Задача (11 n), (12 n) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{v,n}(t) &= b_v + c_v t + \\ &+ \int_0^t (\tau - t) f \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_{v,n}^2(\tau) \right) \lambda_v^2 a_{v,n}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

и $a_{v,n}(t) \rightarrow 0$,

если $v > n$. Интегральное уравнение (20) имеет место и для всех $a_{v,n_s}(t)$. Перейдя к пределу в (20) при $n_s \rightarrow \infty$, получаем, что $a_v(t)$ есть решение уравнения (20), а следовательно, задачи (11), (12).

Лемма 3. При сходимости ряда (8) ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^2 |a_v(t)| \quad (21)$$

сходится равномерно для t , удовлетворяющих условию (15).

Доказательство. В силу (7) ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^4} \quad (22)$$

сходится, так как λ_v , начиная с некоторого достаточно большого номера, делается > 1 , следовательно,

$$\frac{1}{\lambda_v^2} < \frac{1}{\lambda_v^{1/p}},$$

т. е. ряд (22) сходится.

Применяя неравенство Шварца, имеем

$$\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^2 |a_v(t)| \leq \sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^4} \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^8 [a_v(t)]^2},$$

откуда в силу леммы 2 ряд (21) сходится для t , удовлетворяющих условию (15).

Лемма 4. При сходимости ряда (9) ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} |a'_v(t)| \quad (23)$$

равномерно сходится для всех t , удовлетворяющих условию (15).

Доказательство. Применяя неравенство Шварца, получим

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{\infty} |a'_v(t)| &\leq \sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^4} \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^4 [a'_v(t)]^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^4} \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^6 [a'_v(t)]^2}. \end{aligned}$$

В силу леммы 2 ряд (23) сходится.

Лемма 5. При сходимости ряда (8) ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} |a''_v(t)| \quad (24)$$

равномерно сходится для всех t , удовлетворяющих (15).

Доказательство. На основании сходимости ряда (21) из уравнения (11) следует сходимость ряда (24).

Докажем, что ряд (10) равномерно сходится вместе со своими производными порядка $\leq p$ по x и первой производной по t . Для собственных функций и их производных имеет место оценка [3]

$$\begin{aligned} |v_v^{(i)}(x)| &< N \lambda_v^{\frac{2i}{p}} \\ i &= 0, 1, 2, \dots, p-1, \\ \lambda &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

где N — постоянная.

Сходимость ряда (10) и его производных по x порядка $\leq p-1$ вытекает из леммы 2, 3 и оценки (25). В самом деле из неравенства (25) при $i=0$

$$|v_v(x)| < N.$$

Тогда из (10) имеем

$$|u(t, x)| < N \sum_{v=1}^{\infty} |a_v(t)|.$$

В силу леммы 3 ряд (10) сходится равномерно.

Далее при $i=1, 2, \dots, p-1$ из неравенства (25) имеем

$$\left| \frac{d^i v_v(x)}{dx^i} \right| < N \lambda_v^{\frac{2(p-1)+i}{p}}.$$

$$\left| \frac{d^i u(t, x)}{dx^i} \right| \leq N \sum_{v=1}^{\infty} |a_v(t)| \lambda_v^{\frac{2}{p}} \frac{1}{\lambda_v^{\frac{2}{p}}} \leq$$

Тогда

$$\leq N \sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^4 [a_v(t)]^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^{\frac{4}{p}}}.$$

В силу сделанных предположений заключаем, что ряд (10) и его производные по x порядка $\leq p-1$ равномерно сходятся. Докажем, что ряд (10) имеет производную p -го порядка по x .

В самом деле, из уравнения (5) имеем

$$\frac{d^p v_v(x)}{dx^p} = \frac{1}{A_p(x)} \left(-\lambda_v^2 v_v(x) - \sum_{\mu=0}^{p-1} A_{\mu}(x) \frac{d^{\mu} v_v(x)}{dx^{\mu}} \right).$$

Так как

$$\frac{1}{A_p(x)}, A_{\mu}(x), \mu = 1, 2, \dots, p-1 -$$

ограниченные функции, то в силу оценки (25) имеем

$$\left| \frac{d^p v_v(x)}{dx^p} \right| \leq \tilde{N} \lambda_v^2$$

Дифференцируя ряд (10) до порядка p по x , имеем

$$\left| \frac{d^p u(t, x)}{dx^p} \right| \leq \tilde{N} \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^2 |a_v(t)| \leq \tilde{N} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^4} \sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^8 a_v^2(t),$$

т. е. производная p -го порядка по x ряда (10) равномерно сходится. Сходимость производной по t ряда (10) вытекает, на основании леммы 3, из следующего неравенства:

$$\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right| = \left| \sum_{v=1}^{\infty} a'_v(t) v_v(x) \right| \leq N \sum_{v=1}^{\infty} |a'_v(t)|.$$

Вторая производная по t ряда (10) также сходится.

Действительно, так как

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = -f \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right) \lambda_v^2 a_v(t) v_v(x),$$

то, применяя неравенство Шварца, имеем

$$\left| \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \right| \leq f \left(\sum_{v=1}^{\infty} a_v^2(t) \right) N \sqrt{\sum_{v=1}^{\infty} \lambda_v^8 [a_v(t)]^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_v^2}.$$

Следовательно, вторая производная по t ряда [10] равномерно сходится. Таким образом, ряд [10] представляет собой требуемое решение задачи (1), (2), (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бериштейн С. Н. Изв. АН СССР, т. 4, 1940, № 1.
2. Агаев Г. Н., Алиханова Р. И. Тр. Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, серия матем., т. VIII, 1959.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. РИИТЛ, М., 1954.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. 1945.

Р. И. Элиханова

Бир функционал тэнлик үчүн гарышыг мәсələ

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə (1) тэнлижинин (2) вə (3) шəртлəri дахилиндə һəлли тəдгиг едилir. (1), (2), (3) мəсəлəсинин һəлли (10) сырасы шəклиндə ахтарылыр.

(1), (2), (3) мәсәләси (11) сонсуз диференциал тәнликләр системинин (12) башлангыч шәрти дахилиндә һәлл олунур.

Бир нечә көмәкчи лемма исбат едилир. (11), (12) мәсәләси редуксија үсулу илә һәлл олунур.

Мәгаләдә диференциал операторун мөхсүси функцијаларына көрә аҗрыла билән функцијалар синфиндә (11), (12) мәсәләсинин, еләчә дә (1), (2), (3) мәсәләси һәллинин варлығы исбат едилир.

А. М. МАМЕДОВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$

В настоящей работе вводится некоторый класс аналитических функций. Использование квадратурных формул Н. М. Коробова для теоретикочисловых сеток для функций введенного класса $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$ получены квадратурные формулы, которые затем применяются к приближенному решению нелинейного и линейного интегральных уравнений.

Следуя Н. М. Коробову [1], сетки вида

$$M_\kappa = \left(\frac{\kappa_1}{n}, \frac{\kappa_2}{n}, \dots, \frac{\kappa_s}{n} \right) (1 \leq \kappa_v \leq n, v = 1, 2, \dots, s) \quad (1)$$

будем называть равномерными, сетки вида

$$M_\kappa = \left(\left\{ \frac{a_1 \kappa}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 \kappa^2}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s \kappa^s}{N} \right\} \right) \quad (2)$$

($\kappa = 1, 2, \dots, N, N = p$ простое, $a_1, \dots, a_s$ произвольное — целые взаимно простые с N) неравномерными, а сетки вида

$$M_\kappa = \left(\left\{ \frac{a_1 \kappa}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 \kappa}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s \kappa}{N} \right\} \right), (\kappa = 1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

($a_1, \dots, a_s$ являются оптимальными коэффициентами по модулю $p = N$) параллелепипедальными.

Н. Н. Ченцовым (см. [1]) доказано, что ни при каком выборе последовательности точек M_κ в классе аналитических функций нельзя получить оценку погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N f(\xi_1(\kappa), \dots, \xi_s(\kappa)) - R$$

лучше, чем $R = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Для класса $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ аналитических функций, которые удовлетворяют нижеследующим условиям, можно улучшить эти оценки.

Пусть функция $f(z_1, \dots, z_s)$ аналитическая в области $E(|z_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, s)$, и ограничена по модулю числом M и имеет период, равный единице по каждой из переменных $z_1, \dots, z_s$. Класс таких функций обозначим через $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$. Когда не нужно указы-

вать величину константы M , будем вместо $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ писать $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$.

В зависимости от вида сетки для класса $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ оценки погрешности квадратурных формул имеют следующий вид: для равномерных сеток

$$R = O(\exp(-\pi \eta s \sqrt{\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_s} \cdot N^{\frac{1}{s}}), \eta > 1; \quad (4)$$

$$(i = 1, \dots, s)$$

для параллелопипедальных

$$R = O\left(\exp\left(\frac{2\pi \eta s \sqrt{\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \dots \cdot \delta_s} \cdot N^{\frac{1}{s}}}{\ln N}\right)\right). \quad (5)$$

Все результаты остаются в силе, если вместо класса $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ рассматривать класс бесконечно дифференцируемых периодических функций, у которых производные удовлетворяют неравенствам

$$\left| \frac{\partial^{as} f(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1^a \dots \partial x_s^a} \right| \leq \frac{M(x!)^s}{\delta^{as}}.$$

Пусть G_{rs} — единичный rs -мерный куб,

$$F(P_1, \dots, P_r) = (z_1^{(1)}, \dots, z_s^{(1)}, \dots, z_1^{(r)}, \dots, z_s^{(r)}) —$$

произвольная функция rs переменных, принадлежащих классу $\Omega_{sr}^{(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s)}(M)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(n) = 0 \quad \text{и}$$

точки M_k выбраны в единичном s -мерном кубе так, что квадратурная формула

$$\int_{G_{rs}} F(P_1, \dots, P_r) dP_1 \dots dP_r = \frac{1}{n^r} \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^n F(M_{k_1}, \dots, M_{k_r}) + R,$$

где $|R| \leq rA \varepsilon(n)$, A не зависит от $M_{k_1}, \dots, M_{k_r}$ и F , справедлива при $r = 1$. Тогда эта формула будет справедлива и при любом фиксированном $r > 1$.

Для класса $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ имеет место

$$\text{Лемма: Пусть } 1) f(z_1, \dots, z_s, u) = \sum_{k=1}^n a_k(z_1, \dots, z_s) u^k, \quad \text{где}$$

$(z_1, \dots, z_s) \in E(|\operatorname{Im} z_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, s)$, $a_k \in \Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ ($k = 1, 2, \dots$). Если $M \leq \frac{1}{2}$ то для каждого $\varphi \in \Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z_1, \dots, z_s) \varphi^k(z_1, \dots, z_s)$ сходится равномерно на E и существует

константа L такая, что для любых φ_1 и φ_2 из $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$ справедливо неравенство

$$|f(z_1, \dots, z_s, \varphi_1) - f(z_1, \dots, z_s, \varphi_2)| \leq L |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим уравнение

$$\varphi(P) = g(P) + \lambda \int_{G_s} K(P, Q) f[Q, \varphi(Q)] dQ. \quad (7)$$

где G_s — единичный s -мерный куб.

Теорема. Пусть $K(P, Q) = K(z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_s)$ является аналитической функцией от $P \in E(|\operatorname{Im} z_i| < \delta_i, i = 1, 2, \dots, s)$ при любом фиксированном Q из единичного s -мерного куба G_s и непрерывной функцией от Q на G_s при любом фиксированном P из E , периодической по каждому из переменных $z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_s$ и $|K(P, Q)| \leq C$ для всех $P \in E$ и $Q \in G_s$;

2) $f(Q, \varphi)$ удовлетворяет условию леммы,

$$3) |\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{1}{2C}, \frac{(1-M)^2}{CM} \right\},$$

тогда уравнение (7) имеет единственное решение, принадлежащее классу $\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}(M)$.

Далее, применяя квадратурные формулы, которые имеют оценки погрешности вида (5), к интегральному уравнению (7), получаем следующую нелинейную алгебраическую систему уравнений;

$$\varphi(P) = g(P) + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N K(P, M_j) f[M_j, \varphi(M_j)] +$$

$$+ O\left(\exp\left(-\frac{2\pi d \eta s \sqrt{N}}{\ln N}\right)\right). \quad (8)$$

Положим вместо $P \leftrightarrow M_i = \left(\left\{\frac{a_1 i}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s i}{N}\right\}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и от-

сывая остаточный член, получим систему нелинейных алгебраических бра уравнений;

$$z_i = b_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N K(M_i, M_j) f(M_j, z_j), \quad (9)$$

так как, если

$$|b_i| = |g(M_i)| \leq \frac{M}{2}, |K(M_i, M_j)| \leq C,$$

$$|f(M_j, z_j)| \leq M \quad \text{и} \quad |\lambda| < \lambda^* = \min \left\{ \frac{1}{2C}, \frac{(1-M)^2}{CM} \right\},$$

то уравнение (9) имеет единственное решение z_i^* . При этом z_i^* может быть получено как предел последовательности $\{z_i^{(n)}\}$, где

$$z_i^{(n)} = b_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N K(M_i, M_j) f(M_j, z_j^{(n-1)}), \quad (10)$$

а $z_i^{(0)}$ — произвольный элемент из $R(|z_i| < M)$.

Быстрота сходимости последовательности $\{z_i^{(n)}\}$ к решению даются неравенством

$$|z_i^{(n)} - z_i^*| > \frac{\delta^n}{1 - \delta} \max_i |z_i^{(1)} - z_i^{(0)}|,$$

где $\delta = |\lambda| CL < 1$.

Так как

$$z_i^* = b_i + \frac{\lambda}{N} \sum_{j=1}^N K(M_i, M_j) f(M_j, z_j^*)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

Положим $i = 1, 2, \dots, N$ и снова просуммируем, на основе этого получаем

С другой стороны,

где $\delta = |\lambda| CL < 1$.

Таким образом,

Теперь рассмотрим кратное интегральное уравнение Фредгольма второго рода;

где G_s — единичный s -мерный куб. Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ его знаменатель Фредгольма;

40

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{N} K(M_1, M_1) & \dots & -\frac{\lambda}{N} K(M_1, M_s) \\ \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\lambda}{N} K(M_s, M_1) & \dots & 1 - \frac{\lambda}{N} K(M_s, M_s) \end{vmatrix}, \quad (13)$$

и точки M_k выбраны так, что при $F \in \Omega_s^{(b_1, \dots, b_s)}$ справедлива квадратная формула

тогда при всяком достаточно большом n выполняется оценка

Теорема. Пусть ядро и свободный член уравнения (11) принадлежат соответственно классам

Если знаменатель Фредгольма $D(\lambda) \neq 0$, то

где величины $\varphi(M_j)$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. К о р о б о в Н. М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М. Физматгиз, 1963.

Ә. М. Мәммәдов

$\Omega_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$ функцијалар синфиндэ интеграл тэнликлэрин
тэгриби һәлли

ХҮЛАСЭ

Бу мөгаләдә $\mathcal{Q}_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$ аналитик функцијалар синфи гурулур(
Н. М. Коробовун квадратур дүстурларындан истифадә едәрәк $\mathcal{Q}_s^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$
синфиндә квадратур дүстурлар гурулур вә сонра онлар гејри-хәтти
вә хәтти тәнликләрин тәгриби һәллинә тәтбиғ едилир. Даһа сонра
интеграл тәнлијин һәлли вә квадратур дүстурларын тәтбиғи нәтичә-
синдә алынған чәбри тәнликләр системинин тәгриби һәлләри арасын-
дакы фәрг гижмәтләндирилир.

Г. Н. АГАЕВ, К. А. МУСТАФАЕВ

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод Галеркина как метод приближенного решения граничных задач и операторных уравнений в абстрактных пространствах развивался главным образом в двух направлениях: для нахождения достаточных признаков сходимости процесса Галеркина, определения ее скорости (для операторных уравнений с вполне непрерывными операторами), а также для установления существования решения различных граничных задач, для которых отсутствует теория нормальной разрешимости.

Исследования, характеризующие в основном первое направление, изложены в монографиях С. Г. Михлина [1]. Наиболее обширные исследования, относящиеся ко второму направлению, в последнее время велись М. И. Вишиком [2]. Им даны различные аналоги метода Галеркина установления разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка, а также смешанной задачи для квазилинейных параболических уравнений, имеющих дивергентную форму. Указанные схемы применялись также в работах [3, 4].

В настоящей статье дается один аналог метода Галеркина для решения квазилинейных операторных уравнений с дивергентным оператором вида

$$K_1 K_2(u)u = h \quad (1)$$

в некотором комплексном пространстве Гильберта H .

Относительно уравнения (1) делаются следующие предположения:
1° K_1 — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(K_1^*) = H$, причем $\lambda = 0$ не принадлежит его спектру, который является чисто дискретным и простым. Точки спектра оператора K_1^* будем обозначать, $\{\lambda_k\}$ $\{k=1, 2, \dots\}$, причем за λ_1 примем ближайшее из них к нулю. Через $\{\varphi_k\}$ обозначим систему соответствующих собственных функций оператора K_1^* . Будем считать, что система $\{\varphi_k\}$ ортогональна. При этом линейная оболочка H_0 собственных векторов, будет всюду плотна в H .

2° Нелинейный оператор K_2 действует из H во множество линейных непрерывных равномерно положительно определенных операторов над H , причем так, что всякая слабо сходящаяся последовательность $\{u_n\} \in H$ переводится в сильно сходящуюся последовательность

линейных операторов $\{K_2(u_n)\}$. Таким образом, для любых $u, w \in H$ имеет место

$$[K_2(w)u, u] \geq \gamma^2 \|u\|^2, \quad (2)$$

где $\gamma^2 \neq 0$ не зависит от выбора w . Знаки $[\cdot, \cdot]$, $\|\cdot\|$ обозначают скалярное произведение и нормы в H .

Отметим еще следующую лемму, относящуюся к определенному выше классу операторов, который впоследствии будет применяться в установлении разрешимости операторного уравнения (1).

Лемма 1. Пусть H — гильбертово пространство; $\{A_n\}$ — последовательность линейных ограниченных самосопряженных операторов, определенных на H , сильно сходится к самосопряженному оператору A_0 и пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность элементов из H слабо сходящаяся к φ_0 . Тогда $\{A_n \varphi_n\}$ слабо сходится к $A_0 \varphi_0$.

Доказательство леммы вытекает из неравенства

$$|(A_n \varphi_n, f) - (A_0 \varphi_0, f)| \leq |(\varphi_n, A_n f - A_0 f)| + |(\varphi_n - \varphi_0, A_0 f)| \leq \|\varphi_n\| \|A_n f - A_0 f\| + |(\varphi_n - \varphi_0, A_0 f)| \text{ и } \|\varphi_n\| \leq M,$$

где f — произвольный элемент из H .

Под слабым решением уравнения (1) мы понимаем элемент $u \in H$, для которого выполняется соотношение

$$[K_2(u)u, K_1^* v] = [h, v] \quad (3)$$

при любом $v \in D(K_1^*)$. Разрешимость операторного уравнения (1) в смысле (3) будем исследовать некоторым аналогом метода Галеркина, описание которого дается ниже. За координатную систему возьмем систему $\{\varphi_k\}$.

Искомое решение u уравнения (1) определим как слабый предел приближенных решений $u_k = \sum_{i=1}^k c_{ik} \varphi_i$, где c_{ik} определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$[K_2(u_k)u_k, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (4)$$

Предварительно покажем разрешимость системы (4) относительно $c_{ik} (i=1, 2, \dots, k)$. Для этого выведем формулу

$$R(w; u, v) = [K_2(w)u, v]. \quad (5)$$

В системе (4) заморозим элемент $u_k = w_k = \sum_{i=1}^k b_{ik} \varphi_i$ в выражении

$K_2(u_k)$. Рассмотрим полученную линейную систему в соответствии с формулой (5):

$$R(w_k; z_k, \varphi_i) = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], \quad (6)$$

где $z_k = \sum_{i=1}^k d_{ik} \varphi_i$ — искомый элемент из H_0 .

Линейная система (6) разрешима относительно $d_{ik} (i=1, 2, \dots, k)$, так как соответствующая квадратичная форма $R(w_k; z_k, z_k)$ в силу (2) отлична от нуля. Итак, каждому $w_k \in H_0$ соответствует одно решение системы (6). Такое сопоставление порождает некоторый конечномерный оператор L_k . Имеет место

Лемма 2. Конечномерный оператор L_k имеет неподвижную точку в H_0 .

Доказательство. Пусть $w_k = \sum_{i=1}^k b_{ik} \varphi_i$ — заданный элемент из

H_0 , и $\varepsilon_k = L_k w_k$. При этом будет иметь место соотношение (6). Умножая обе части (6) на d_{ik} и просуммировав по i от единицы до K , получим

$$R(w_k; z_k, \bar{z}_k) = [h, \phi_k], \quad (7)$$

где

$$\Phi_K = \sum_{i=1}^K \frac{d_{iK}}{\lambda_i} \varphi_i.$$

В силу условия (2) ясно, что $[h, \Phi_k] > 0$.

Применяя неравенство Шварца, получим

$$[h, \phi_k] \leq \frac{\|h\|^2}{2|\lambda_1|^2 \gamma^2} + \frac{|\lambda_1|^2 \gamma^2}{2} \|\phi_k\|^2.$$

С другой стороны,

$$\|\Phi_K\|^2 = \sum_{i,j=1}^K \frac{d_{ik} \overline{d_{jk}}}{|\lambda_i| |\lambda_j|} [\varphi_i, \varphi_j] = \sum_{i=1}^K \frac{|d_{ik}|^2}{|\lambda_i|^2} \|\varphi_i\|^2 \leq \frac{1}{|\lambda_1|^2} \|z_n\|^2.$$

Следовательно,

$$[h, \Phi_k] \leq \frac{\|h\|^2}{2|\lambda_1|^2\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{2}\|z_k\|^2.$$

Учитывая это неравенство и применяя к левой части соотношения (7) неравенство (2), получим

$$\|z_k\|^2 \leq \frac{1}{|\lambda_1| \gamma^2} \|h\|. \quad (8)$$

Введем константу $M = \frac{1}{|\lambda_1|^2} \gamma^2$, которая не зависит от κ и от z_κ .

Таким образом, оператор L_k по существу проектирует пространство H_0 в шар

$$\|z_n\| \leq M \|h\| \quad (8')$$

радиуса M , не зависящего от заранее зафиксированного w_k , входящего в систему (6). Итак, если w_k изменяются в шаре $\|w_k\| \leq 2M\|h\|$, то их образы будут находиться внутри шара (8').

Теперь докажем непрерывность оператора L_K . Пусть

$$w_k^n = \sum_{i=1}^K b_{ik}^n \varphi_i \rightarrow w_k^0 = \sum_{i=1}^K b_{ik}^0 \varphi_i, \quad w_k^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} w_k^n.$$

Докажем, что $L_K(w_K^n) \rightarrow L_K(w_K^0)$. Обозначим $z_K^n = L_K w_K^n$, $z_K^0 = L_K w_K^0$ и пусть

$$\alpha_K^n = \sum_{i=1}^n a_{iK}^n \varphi_i, \quad \alpha_K^0 = \sum_{i=1}^K a_{iK}^0 \varphi_i.$$

Тогда

$$[K_2(w_k^n)z_k^n, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right],$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Разрешим эту систему относительно d_{ik}^n :

$$d_{ik}^n = \frac{\left| \begin{array}{cccc} [K_2(w_k^n) \varphi_1, \varphi_2], & \dots, & \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], & \dots, [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_1], & \dots, & \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], & \dots, [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_k] \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cccc} [K_2(w_k^n) \varphi_1, \varphi_1], & \dots, & [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_1] \\ \dots & \dots & \dots \\ [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_1], & \dots, & [K_2(w_k^n) \varphi_k, \varphi_k] \end{array} \right|}$$

Переходя здесь к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$d_{ik}^n \rightarrow d_{ik}^0.$$

Таким образом, $\hat{z}_k^n \rightarrow \hat{z}_k^0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е. оператор L_k непрерывен. Следовательно, на основании известного принципа Шаудера оператор L_k имеет неподвижную точку, а это означает, что система (4) имеет хотя бы одно решение.

Теперь приступим к решению системы (3). Подставляя вместо u решение системы (4), мы получаем соотношение

$$[K_2(u_k)u_k, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, r.$$

В силу замечания, сделанного при доказательстве леммы 2, можно считать, что последовательность $\{u_k\}$, входящая в (9), также равномерно ограничена в H :

$$\|u_k\| \leq M$$

Так как любой шар в гильбертовом пространстве слабо компактен, то из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Обозначим эту последнюю подпоследовательность через $\{u_r\}$, а слабый предел ее через u_0 . Для них запишем систему (9):

$$[K_2(u_r)u_r, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right], \quad (10)$$

Зафиксировав i , перейдем к пределу при $r \rightarrow \infty$. Так как последовательность операторов $\{K_2(u_r)\}$ сильно сходится, то в силу леммы 1 получим, что u_0 является решением системы

$$[K_2(u_0)u_0, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right]$$

или

$$[K_2(u_0)u_0, K_1^* \varphi_i] = [h, \varphi_i], \quad i=1, 2, \dots \quad (11)$$

Теперь докажем, что u_0 является слабым решением уравнения (1). Определим

В самом деле, пусть v — произвольный элемент из $D(K_1)$. Очевидно, что линейная оболочка последовательности $\{K_1^* \varphi_i\}$ будет плотной в H . Рассмотрим $\psi = K_1^* v$, где $v \in D(K_1)$. Ясно, что существует сходящаяся к ψ последовательность

$$\psi_K = \sum_{i=1}^K a_{iK} K_{i1}^* \varphi_i.$$

Положим $(K_1^*)^{-1}\psi_k = v_k$. Очевидно, $v_k = \sum_{i=1}^k a_{ik}\varphi_i$. Так как $(K_1^*)^{-1}$ — огра-

ниченый оператор, то последовательность $\{(K_1^*)^{-1}\varphi_k = \{v_k\}$ будет сходиться к элементу $(K_1^*)^{-1}\varphi = v$. Умножая (11) на a_k и суммируя по i от 1 до k , получим соотношение $[K_2(u_0)u_0, \varphi_k] = [h, v_k]$. Переходя здесь к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем желаемый результат: $[K_2(u_0)u_0, K_1^*] = [h, v]$ для любого элемента $v \in D(K_1^*)$, т. е. u_0 является слабым решением уравнения (1). Ясно, что если $K_2(u_0)u_0 \in D(K_1)$, то u_0 будет сильным решением. Итак, имеет место

Теорема. При выполнении условий 1° и 2° уравнение (1) при любой правой части $h \in H$ имеет хотя бы одно слабое решение в H , которое может быть получено как слабый предел некоторой последовательности галеркинских приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ М.—Л., 1952; Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, М., 1957.
2. Вишик М. И. Тр. Московского матем. об-ва, т. 13, 1962; О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Матем. сб., т. 59 (101), 1962.
3. Агаев Г. Н. „ДАН СССР“, т. 145, 1962, № 2; „ДАН Азерб. ССР“, т. 19, 1963, № 11.
4. Мустафаев К. А. „ДАН Азерб. ССР“, т. 8, 1964; Изв. АН Азерб. ССР серия физ.-техн. и матем. наук, т. 5, 1964; Разрешимость задачи Неймана для эллиптических уравнений второго порядка. Некоторые применения функционального анализа. Сб. статей аспирантов и соискателей. Изд. АН Азерб. ССР, 1965.

Г. Н. Агаев, Г. Э. Мустафаев

Квазихэтти оператор тэнликлэрин хэллн үчүн Галјоркин методунун бир аналогу хаггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ хэр хансы Гилберт H фэзасында дивергент операторлу квазихэтти

$$K_1 K_2(u)u = h \quad (1)$$

шэклиндэ оператор тэнликлэринин хэллн үчүн Галјоркин методунун аналогу верилнр. (1) тэнлијиндэ иштирак едэн K_1 вэ K_2 операторларынын ашагыдакы шэртлэри өдэмэлэри тэлэб олунур.

1. K_1 гошмасынын тэјин областы $D(K_1^*)H$ -да сых олан хэтти, үмүмјјэтлэ, гејри-мэхдуд оператор олуб, $\lambda = 0$ онун нөгтэви, саф дискрет вэ садэ олан $\{\lambda_k\}$ спектринэ дахил дејилдир.

Бунунла белэ спектр нөгтэлэриндэн сыфра эн јахыны λ_1 илэ ишарэ олунур. $\{\varphi_k\}$ мэхуси функцијалар системи ортогонал олуб, онларын хэтти өртүјү H -да хэр јердэ сыхдыр.

2. Гејри-хэтти K_2 оператору H фэзасындан H -да тэјин олунмуш хэтти кэсилмэз мүнтэзэм мүсбэт мүјјэн операторлар чохлауна тэјир едир, белэ ки, K_2 оператору H фэзасында ихтијари зэйф јығылан $\{u_n\}$ ардычыллыгыны хэтти операторларын күчлү јығылан ардычыллыгына чевирир.

Ихтијари $v \in D(K_1^*)$ үчүн

$$[K_2(u)u, K_1^*v] = [h, v] \quad (2)$$

мүнасибэтини өдэјэн ихтијари $u \in H$ елементи (1) тэнлијинин зэйф хэллн адландырылыр, бурада $[,]$ H фэзасында спалјар һасили кестэрир.

(1) оператор тэнлијинин зэйф мэхнада хэлл олунмасынын мүмкүнлүјү координат функцијалары эвэзинэ мэхуси функцијаларын $\{\varphi_k\}$ системи кетүрүлэн Галјоркин методунун аналогу илэ мүјјэн едилнр.

Тэгриби хэллн

$$u_k = \sum_{i=1}^k C_{ik} \varphi_i,$$

шэклиндэ ахтарылыр ки, бурада C_{ik}

$$[K_2(u_k)u_k, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right] \quad (3)$$

системиндэн тэјин олунур.

(3) системиндэ K_2 операторунун алтында $u_k = w_k$ фиксэ олунараг

$$[K_2(w_k)u_k, \varphi_i] = \left[h, \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \right]$$

системинэ бахылыр, белэликлэ, хэр w_k -ја гаршы ахырынчы системин бир хэллн ујғун кэлнр ки, бу ујғунлуг сонлу өлчүлү L_k оператору-ну доғурур. Ишдэ L_k операторунун Шаудер оператору олмасы мүјјэн едилнр вэ белэликлэ (3) системинин һеч олмаса бир хэллин варлыгыны кестэрир.

Зэйф хэллин варлыгы исэ H фэзасында зэйф јығылан гејри-мэхдуд ардычыллыгынын сечилмэсинин мүмкүнлүјүнэ эсасланыр. Исбат едилнр ки, хэмнн зэйф лимит гојулан мэхалэнин (2) мэхнада хэллн-дир.

Л. Ш. АБДУЛКЕРИМОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОИЗВОДЯЩИМ ОПЕРАТОРОМ ПОЛУГРУППЫ КЛАССА (A)

1. Уравнение первого порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t) \quad (0 < t \leq T), \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0) = u_0, \quad (2)$$

где $u(t)$ — искомая функция со значениями из банахова пространства E . A — вообще говоря, неограниченный линейный оператор. $f(t)$ — заданная вектор-функция, u_0 — элемент пространства E . Производная $\frac{du(t)}{dt}$ понимается в сильном смысле.

Задача (1) — (2) рассмотрена Р. Филлипсом [1], когда A — производящий оператор полугруппы класса C_0 , М. З. Соломяком [2], К. Иосидой [3], когда A — производящий оператор аналитической полугруппы, С. Я. Якубовым [4], когда A — производящий оператор полугруппы класса $(1, A)$ или $(0, A)$.

В этой работе рассматривается случай, когда A — производящий оператор полугруппы класса (A) .

Под решением задачи (1) — (2) будем понимать функцию $u(t)$, непрерывно дифференцируемую в на $[0, T]$, удовлетворяющую уравнению (1) на $[0, T]$ и начальному условию (2), для которой $Au(t)$ непрерывна в на $[0, T]$. Пусть $T(t)$ — сильно непрерывная при $t > 0$ полугруппа линейных ограниченных операторов.

Определение 1. Будем говорить, что $T(t)$ принадлежит классу C_0 , если $\lim_{t \rightarrow +0} T(t)x = x$ при любом $x \in E$.

Определение 2. $T(t)$ принадлежит классу (A) , если $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt = x$ при любом $x \in E$.

Определение 3. Полугруппа $T(t)$ из класса (A) принадлежит классу $(1, A)$, $(0, A)$, если $\int_0^1 \|T(t)\| dt < \infty$ $\left(\int_0^1 \|T(t)x\| dt < \infty \right)$ для всех $x \in E$.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что A — производящий оператор полугруппы $T(t)$ класса (A) . Не ограничивая общности, можно считать, что A имеет ограниченный обратный.

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$.

Тогда функция $\varphi(t) = \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds$ непрерывна на $[0, T]$.

Доказательство. Сначала докажем, что при любом $x \in E$ и $\alpha \geq 0$ имеет место формула

$$[T(t) - T(\alpha)] A^{-2} x = \int_\alpha^t T(\xi) A^{-1} x d\xi. \quad (3)$$

Действительно, формула (3) имеет место при $\alpha > 0$. А по теореме 11.5.3 [6] $\lim_{\alpha \rightarrow 0} T(\alpha) A^{-2} x = A^{-2} x$. Следовательно, при $\alpha \rightarrow 0$ в формуле (3) можно перейти к пределу.

Пусть теперь $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Тогда,

так как $f(s) = f(0) + \int_0^s f'(\xi) d\xi$, то

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds = \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(0) ds + \\ &+ \int_0^t T(t-s) A^{-1} \int_0^s f'(\xi) d\xi ds = [T(t) - I] A^{-2} f(0) + \int_0^t \int_\xi^t T(t-s) A^{-1} f(\xi) ds d\xi. \end{aligned}$$

Из формулы (3) имеем $\int_\xi^t T(t-s) A^{-1} f'(\xi) ds = [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(\xi)$

Следовательно,

$$\varphi(t) = [T(t) - I] A^{-2} f(0) + \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(\xi) d\xi. \quad (4)$$

По теореме 11.5.3 [6] оператор-функция $T(t) A^{-2}$ сильно непрерывна на $[0, T]$. Отсюда в силу (4) вытекает непрерывность вектор-функции $\varphi(t)$.

Лемма 2. Пусть $f(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Тогда $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и имеет место формула

$$\varphi'(t) = T(t) A^{-1} f(0) + \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Доказательство. По формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(\xi) d\xi &= \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(0) d\xi + \\ &+ \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} \int_0^\xi f''(\sigma) d\sigma d\xi = [T(t) - I] A^{-3} f'(0) + \\ &+ \int_0^t \int_\sigma^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f''(\sigma) d\xi d\sigma = [T(t) - I] A^{-3} f'(0) + \\ &+ \int_0^t [T(t-\sigma) - I] A^{-3} f''(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Тогда из (4) получим

$$\varphi(t) = [T(t) - I] A^{-2} f(0) + [T(t) - I] A^{-3} f'(0) + \int_0^t [T(t-\sigma) - I] A^{-3} f''(\sigma) d\sigma. \quad (6)$$

По теореме 11.5.3 [6] $T(t) A^{-3}$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$. Отсюда вытекает непрерывная дифференцируемость функции $\varphi(t)$. Теперь докажем формулу (5). Функция $T(t) A^{-2} f(0)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и имеет место

$$\frac{d}{dt} [T(t) - I] A^{-2} f(0) = T(t) A^{-1} f(0). \quad (7)$$

Теперь покажем, что $\frac{d}{dt} \left(\int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(\xi) d\xi \right) = \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi$. Рассмотрим функцию $\psi(t) = \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-3} f'(\xi) d\xi$.

Она непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и $\psi'(t) = \int_0^t T(t-\xi) A^{-2} f'(\xi) d\xi$. С другой стороны, на основании леммы 1 существует интеграл $\int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi$, поэтому имеет место равенство

$$\psi'(t) = \int_0^t T(t-\xi) A^{-2} f'(\xi) d\xi = A^{-1} \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi.$$

Отсюда вытекает, что $\psi'(t) \in D(A)$ и на основании леммы 1 $A\psi'(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Тогда по лемме 23.9.1 [6] $A\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и $\frac{d}{dt} [A\psi(t)] = A \frac{d\psi(t)}{dt}$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-2} f'(\xi) d\xi \right) = A A^{-1} \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi = \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi.$$

Лемма 3. Пусть $f(t)$ трижды непрерывно дифференцируема, $f(0) \in D(A^2)$ и $f'(0) \in D(A)$. Тогда при каждом $t \in [0, T]$ $\varphi(t) \in D(A^2)$ и $\varphi'(t) \in D(A)$.

Доказательство. Из (6) и леммы 1 имеем

$$\varphi(t) = A^{-2} [T(t) - I] f(0) + A^{-2} [T(t) - I] A^{-1} f'(0) + A^{-2} \int_0^t [T(t-\sigma) - I] A^{-1} f''(\sigma) d\sigma.$$

Это показывает, что $\varphi(t) \in D(A^2)$ при каждом $t \in [0, T]$. Из (5) вытекает

$$\varphi'(t) = A^{-1} T(t) f(0) + \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(0) d\xi +$$

$$+ \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} \int_0^\xi f''(\sigma) d\sigma d\xi = A^{-1} T(t) f(0) + T(t) A^{-2} f'(0) + \int_0^t \int_0^\xi T(t-\xi) A^{-1} f''(\sigma) d\xi d\sigma = A^{-1} T(t) f(0) + A^{-2} T(t) f'(0) + A^{-1} \int_0^t [T(t-\sigma) - I] A^{-1} f''(\sigma) d\sigma. \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что $\varphi'(t) \in D(A)$ при каждом $t \in [0, T]$.

Теорема 1. Пусть $f(t)$ трижды непрерывно дифференцируема, $u_0 \in D(A^3)$, $f(0) \in D(A^2)$, $f'(0) \in D(A)$. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение, которое дается формулой

$$u(t) = T(t) u_0 + A \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds. \quad (9)$$

Доказательство. Из (4) получим

$$A\varphi(t) = [T(t) - I] A^{-1} f(0) + \int_0^t [T(t-\xi) - I] A^{-1} f'(\xi) d\xi = T(t) A^{-1} f(0) + \int_0^t T(t-\xi) A^{-1} f'(\xi) d\xi - A^{-1} \left[f(0) + \int_0^t f'(\xi) d\xi \right] = \varphi'(t) - A^{-1} f(t).$$

Следовательно, $\varphi'(t) = A\varphi(t) + A^{-1} f(t)$. Отсюда на основании леммы 3 получаем

$$A\varphi'(t) = A^2 \varphi(t) + f(t). \quad (10)$$

С другой стороны, из (8) имеем

$$A\varphi'(t) = T(t) f(0) + T(t) A^{-1} f'(0) + \int_0^t [T(t-\sigma) - I] A^{-1} f''(\sigma) d\sigma.$$

Отсюда вытекает непрерывность $A\varphi'(t)$. Тогда по лемме 23.9.1 [6] $A\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и $\frac{d}{dt} [A\varphi(t)] = A \frac{d\varphi(t)}{dt}$.

Следовательно, из (10) имеем $\frac{d}{dt} [A\varphi(t)] = A [A\varphi(t)] + f(t)$ или

$$\frac{d}{dt} \left[A \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds \right] = A \left[A \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds \right] + f(t).$$

Отсюда и из (9) получим

$$\frac{du(t)}{dt} = A \left[T(t) u_0 + A \int_0^t T(t-s) A^{-1} f(s) ds \right] + f(t) = A u(t) + f(t).$$

Непрерывность $Au(t)$ на $[0, T]$ вытекает из непрерывности на $[0, T]$ функций $\frac{du(t)}{dt}$ и $f(t)$.

Теперь докажем единственность полученного решения. Предположим, что задача (1)–(2) имеет два решения: $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Тогда функция $v(t) = u_1(t) - u_2(t)$ является решением задачи

$$\frac{dv(t)}{dt} = A v(t), \quad (11)$$

$$v(0) = v_0. \quad (12)$$

Возьмем функцию $T(t-s)A^{-2}v(s)$. Так как $v(s) \in D(A)$, то по теореме 11.5.3 [6] существует производная и

$$\frac{d}{ds} [T(t-s)A^{-2}v(s)] = T(t-s)A^{-2} \left[-Av(s) + \frac{dv(s)}{ds} \right] = 0.$$

Пусть $0 < \alpha < \beta < t$. Тогда, интегрируя последнее соотношение от α до β , получим

$$0 = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{ds} [T(t-s)A^{-2}v(s)] ds = T(t-\beta)A^{-2}v(\beta) - T(t-\alpha)A^{-2}v(\alpha).$$

Перейдя к пределу, при $\alpha \rightarrow 0$ получаем $T(t-\beta)A^{-2}v(\beta) = 0$; в последнем равенстве по теореме 11.5.3 [6] можем перейти к пределу при $t \rightarrow \beta$. Тогда получаем, что $A^{-2}v(\beta) = 0$. Отсюда $v(\beta) = 0$. В силу произвольности точки $\beta \in (0, T)$ получаем противоречие. Следовательно, решение задачи (1)–(2) единственно.

Замечание 1. Как известно [6], если резольвента некоторого замкнутого линейного оператора B удовлетворяет при $0 < \beta \leq 1$ неравенству

$$\|R(\sigma + i\tau; B)\| \leq \frac{M}{\sigma + |\tau|^{\beta}}; \quad \sigma > 0,$$

то B порождает некоторую полугруппу $s(t)$ класса $(A)_{\infty}$, состоящего из бесконечно дифференцируемых при $t > 0$ полугрупп класса (A) .

Если $0 < \beta < \frac{1}{2}$, то эта полугруппа $s(t)$, вообще говоря, не принадлежит классу $(0, A)$, поэтому рассмотрение уравнений с операторами, порождающими полугруппы класса (A) , вполне оправдано.

Замечание 2. Для того, чтобы доказать существование единственного решения задачи (1)–(2), непрерывного в $[0, T]$, непрерывно дифференцируемого на $(0, T)$, в теореме 1 достаточно требовать, чтобы $f(t)$ была бы трижды непрерывно дифференцируема и $u_0 \in D(A)$.

2. Уравнения высших порядков. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n u(t)}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_n u(t) = f(t) \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\left. \frac{d^k u(t)}{dt^k} \right|_{t=0} = u_k \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad (14)$$

где $A_1, \dots, A_n$ — вообще говоря, неограниченные линейные операторы, действующие в E .

Задача (13)–(14) исследована Б. С. Митягиным [5], когда A_1 — производящий оператор полугруппы класса C_0 , С. Я. Якубовым [4], когда A_1 — производящий оператор полугруппы класса $(1, A)$ или $(0, A)$.

В этой работе рассматривается случай, когда A_1 — производящий оператор полугруппы класса (A) . Под решением задачи (13)–(14) будем понимать n раз непрерывно дифференцируемую на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую уравнению (13) и начальным условиям (14), для которой $A_1 \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}}$ непрерывны на $[0, T]$. Сформулируем одну лемму, являющуюся аналогом леммы 23.9.1 [6].

Лемма 4. Пусть A — замкнутый линейный оператор, $u(t)$ — непрерывно дифференцируемая на $[0, T]$ функция, $u_0, \frac{du(t)}{dt} \in D(A)$ и $A \frac{du(t)}{dt}$ непрерывна на $[0, T]$. Тогда $u(t) \in D(A)$, $Au(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и при $t \in [0, T]$

$$\frac{d}{dt} [Au(t)] = A \frac{du(t)}{dt}. \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть удовлетворяются следующие условия:

1) A_1 — производящий оператор некоторой полугруппы класса (A) ;

2) операторы $A_i A_1^{-1}$ ($i = \overline{2, n}$) ограничены;

3) функция $f(t)$ трижды непрерывно дифференцируема;

4) $u_i \in D(A_1)$ ($i = \overline{0, n-2}$), $u_{n-1} \in D(A_1^2)$, $f(0) \in D(A_1^2)$, $f'(0) \in D(A_1)$. Тогда задача (13)–(14) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение задачи (13)–(14).

Тогда $u^{(n-2)}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$, $\frac{d}{dt} u^{(n-2)}(t) \in D(A)$, $A_1 u^{(n-1)}(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Следовательно, по лемме 4 $u^{(n-2)}(t) \in D(A_1)$, $A_1 u^{(n-2)}(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и для любого $t \in [0, T]$ имеет место

$$\frac{d}{dt} [A_1 u^{(n-2)}(t)] = A_1 u^{(n-1)}(t).$$

Таким же образом $u^{(n-3)}(t) \in D(A_1)$, функция $A_1 u^{(n-3)}(t)$ непрерывно дифференцируема и при любом $t \in [0, T]$ имеет место

$$\frac{d}{dt} [A_1 u^{(n-3)}(t)] = A_1 u^{(n-2)}(t).$$

Продолжая этот процесс, последовательно убеждаемся, что все $A_1 u^{(n-i)}(t)$ ($i = \overline{2, n}$) непрерывно дифференцируемы, и при $t \in [0, T]$ имеет место $\frac{d}{dt} [A_1 u^{(n-i)}(t)] = A_1 u^{(n-i+1)}(t)$. Учитывая эти рассуждения, делаем следующую замену:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A_1 u^{(i-1)}(t) \quad (i = \overline{1, n-2}) \\ v_{n-1}(t) &= A_1 u^{(n-2)}(t) + u^{(n-1)}(t) \\ v_n(t) &= u^{(n-1)}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Дифференцируя эти соотношения и учитывая, что $u(t)$ — решение задачи (13)–(14), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1(t)}{dt} &= A_1 u^{(i)}(t) = v_{i+1}(t) \quad (i = \overline{1, n-3}), \\ \frac{dv_{n-2}(t)}{dt} &= v_{n-1}(t) - v_n(t); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{n-1}(t)}{dt} &= -A_n A_1^{-1} v_1(t) - \dots - A_2 A_1^{-1} v_{n-1}(t) + A_2 A_1^{-1} v_n(t) + f(t), \\ \frac{dv_n(t)}{dt} &= -A_n A_1^{-1} v_1(t) - \dots - A_2 A_1^{-1} v_{n-1}(t) + A_2 A_1^{-1} v_n(t) - \\ &\quad - A_1 v_n(t) + f(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_i(0) &= A_1 u_{i-1} \quad (i = 1, \overline{n-2}), \\ v_{n-1}(0) &= A_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \\ v_n(0) &= u_{n-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Под решением задачи (17)–(18) будем понимать совокупность функций $\{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$, непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$, удовлетворяющих системе (17) и начальным условиям (18), для которых $A_1 v_n(t)$ непрерывна на $[0, T]$.

Мы показали, что если $u(t)$ – решение задачи (13)–(14), то $\{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ – решение (17)–(18). Легко устанавливается обратное утверждение. В топологическом произведении $E^n = E \times \dots \times E$ задачу (17)–(18) запишем в следующем виде:

$$\frac{dv(t)}{dt} = A v(t) + F(t), \quad (19)$$

$$v(0) = v_0, \quad (20)$$

$$\text{где } v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}, F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, v_0 = \begin{pmatrix} A_1 u_0 \\ \vdots \\ A_1 u_{n-2} + u_{n-1} \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & A^1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & -I \\ -A_n A_1^{-1} - A_{n-1} A_1^{-1} - A_{n-2} A_1^{-1} & \dots & -A_2 A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} & & & \\ -A_n A_1^{-1} - A_{n-1} A_1^{-1} - A_{n-2} A_1^{-1} & \dots & -A_2 A_1^{-1} A_2 A_1^{-1} & & & \end{pmatrix} = A_1 + A_2.$$

Так как оператор A_1 порождает полугруппу класса (A), то A_1 также порождает полугруппу класса (A) и

$$e^{tA_1} = \begin{pmatrix} I & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & I \\ 0 & e^{tA_1} & \end{pmatrix}.$$

По условию 2) A_2 – ограниченный оператор, тогда по теореме 13.4.2 [6] $A = A_1 + A_2$ также порождает полугруппу класса (A). Кроме того, $f(t)$ трижды непрерывно дифференцируема и

$$v_0 \in D(A_1^3), F(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f(0) \\ f(0) \end{pmatrix} \in D(A_1^2), F'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f'(0) \\ f'(0) \end{pmatrix} \in D(A_1).$$

Мы доказали, что удовлетворяются все условия теоремы 1. Следовательно, существует единственное решение задачи (19)–(20), тем самым доказано существование единственного решения задачи (13)–(14).

В заключение считаю приятным долгом выразить глубокую благодарность С. Я. Якубову за непосредственное руководство при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips R. S. Trans. of the Am. Math. Soc., 74, 1953, № 2.
2. Соломяк М. З. ДАН СССР, т. 122, 1958, № 5.
3. Josida K. Proc. of the Japan Acad. 34, 1958, № 6.
4. Якубов С. Я. ДАН СССР, т. 156, 1964, № 5.
5. Митягин Б. С. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1961, № 1.
6. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.

Л. Ш. Абдулкаримов

Банах фэзасында (A) синифли жарымгруп жарадан операторлу Коши мәселәсинин һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1)–(2) Коши мәселәси һәллини варлығы вә јеканә-лији тәдгиг едилір. Исбат олунур ки, әкәр A оператору (A) синифли жарымгруп јарадырса, онда мүәјјән шәртләр дахилиндә (1)–(2) мә-сәләсинин јеканә һәлли вардыр. Алынған нәтичәләрдән истифадә едә-рәк, јүксәк тәртибли дифференциал тәнлик үчүн Коши мәселәси тәд-гиг олунур.

Э. М. МАМЕДЛИ

КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА НЕИСПРАВНОСТЕЙ ИЗБЫТОЧНОЙ ЦВМ, ПОСТРОЕННОЙ ПО МАЖОРИТАРНОМУ ПРИНЦИПУ

В настоящее время существует ряд способов повышения надежности управляющих ЦВМ. К ним относятся: повышение надежности самих элементов ЦВМ, систематический профилактический контроль, своевременная замена элементов, находящихся на пределе работоспособности. Однако в ряде случаев, когда требуется непрерывная работоспособность системы в течение заданного интервала времени, повышение надежности элементов ЦВМ до требуемого уровня оказывается технически трудновыполнимой задачей. Увеличение надежности управляющей ЦВМ косвенным путем — введением контроля тоже не дает положительного результата, так как все виды контроля, как правило, требуют специального времени для нахождения неисправного элемента (т. е. нарушается непрерывность работы системы) и не обеспечивают нормальной работы ЦВМ при одиночных сбоях.

Используя соответствующие избыточные цепи, можно увеличить надежность управляющей ЦВМ и довести ее до некоторого вполне приемлемого уровня, не достижимого при использовании избыточных схем. В частности, применение избыточных структур, использующих мажоритарную логику с равными весами, позволяет повысить надежность управляющей ЦВМ на несколько порядков [1, 2]. Кроме того, мажоритарный принцип объединения элементов дает возможность автоматически обнаруживать неисправности в избыточной ЦВМ и заменять отказавшие элементы без прерывания работы вычислительной системы.

Основной мерой надежности управляющей ЦВМ, для которой крайне важна непрерывная и успешная работа в течение заданного промежутка времени T , является вероятность безотказной работы в этом промежутке. Режим надежной работы управляющей ЦВМ определяется следующими условиями:

- а) управляющая ЦВМ должна функционировать непрерывно в течение заданного интервала времени T ;
- б) время работы T должно быть достаточно велико, а сложность структуры избыточной ЦВМ таковой, чтобы надежность ее в интервале T была меньше требуемой;
- в) должна быть обеспечена надежная работа ЦВМ при возникновении отказов, которые относятся к категории „постоянных“ (обрыв цепи, пробой конденсатора и т. д.) и „случайных“ (сбоев) вследствие шумов;

г) предполагается, что отказы элементов вследствие износа (старения) не имеют места;

д) стоимость и вес ЦВМ должны иметь второстепенное значение, хотя порядок этих величин желательно иметь минимальным.

Использование мажоритарной избыточности для повышения надежности управляющей ЦВМ

На рис. 1 представлена структурная схема избыточной управляющей ЦВМ, где $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_N$ — функциональные элементы. Будем считать ЦВМ последовательной системой, т. е. отказ любого из элементов будет приводить к отказу всей машины, причем отказы элементов статистически независимы. Кроме того, будем полагать, что надежность элементов ЦВМ подчиняется экспоненциальному закону.

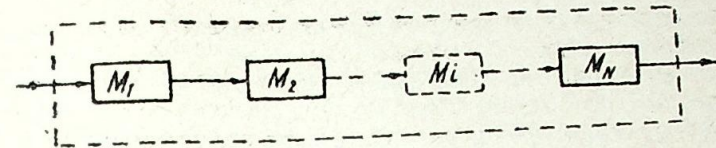


Рис. 1. Структурная схема избыточной управляющей ЦВМ

При оценке надежности избыточной управляющей ЦВМ устанавливается вероятность того, что машина будет правильно функционировать в интервале времени T без введения дополнительных (избыточных) связей. Тогда для правильного функционирования машины необходимо, чтобы все N элементов ее работали правильно, т. е. надежность ЦВМ — P_0 определится как произведение вероятностей непрерывной работоспособности ее элементов в интервале времени T :

$$P_0 = P_{M_1} \cdot P_{M_2} \cdot \dots \cdot P_{M_i} \cdot \dots \cdot P_{M_N} = \prod_{i=1}^N P_{M_i}, \quad (1)$$

где P_{M_i} — надежность i -го элемента.

На основании экспоненциального закона надежности элементов

$$P_{M_i} = e^{-\lambda_{M_i} T} \quad (2)$$

где λ_{M_i} — интенсивность отказов i -го элемента. Отсюда следует, что

$$P_0 = e^{-\lambda_{M_1} T} \cdot e^{-\lambda_{M_2} T} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_{M_i} T} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_{M_N} T} = e^{-\lambda_0 T} \quad (3)$$

где $\lambda_0 = \lambda_{M_1} + \lambda_{M_2} + \dots + \lambda_{M_i} + \dots + \lambda_{M_N}$ — интенсивность отказов избыточной ЦВМ.

Если все элементы обладают одинаковой надежностью P_M , то

$$P_0 = P_M^N, \text{ где } 0 < P_M < 1.$$

В целях повышения надежности ЦВМ используется мажоритарная избыточность. Для этого ЦВМ разбивается на S равнонадежных блоков, на уровне которых вводится избыточность, где $S \leq N$. На рис. 2 показан пример избыточной ЦВМ с объединением элементов по мажоритарному принципу, где $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_S$ — идентичные функциональные блоки, а $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots, R_S$ — избыточные блоки ЦВМ.

Под функциональным блоком может подразумеваться и целиком ЦВМ, и менее сложное устройство (сумматор, переключающая схема

и т. д.). Мажоритарный элемент V — избирательная схема, работающая по принципу большинства (2 из 3), т. е. мажоритарный элемент вырабатывает выходной сигнал на основе большинства входных. Поскольку входные сигналы двоичные и число выходов мажоритарного элемента нечетное, большинство всегда определяется однозначно.

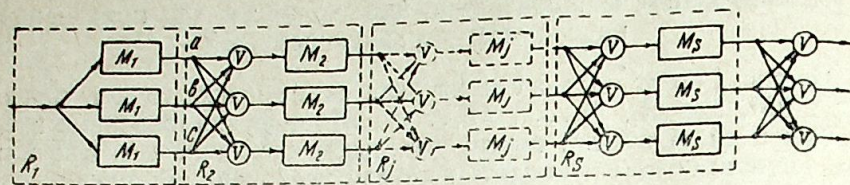


Рис. 2. Структурная схема избыточной ЦВМ, построенной по мажоритарному принципу

Последовательно включенные мажоритарные элементы и функциональные блоки образуют избыточные цепи ЦВМ. Избыточный блок не выйдет из строя, если не выйдет из строя ни одна из избыточных цепей или выйдет только одна из них. Поскольку два события взаимно исключают друг друга, то надежность избыточного блока P_R равна сумме вероятностей этих двух событий:

$$P_R = P_M^3 P_V^3 + 3P_M^2 P_V^2 (1 - P_M \cdot P_V) = 3P_M^2 P_V^2 - 2P_M^3 P_V^3. \quad (4)$$

Тогда надежность всей ЦВМ, состоящей из S избыточных блоков, будет

$$P_3 = (P_R)^S = (3P_M^2 P_V^2 - 2P_M^3 P_V^3)^S. \quad (5)$$

Если представить P_M как P_0 , то выражение (5) перейдет в следующем виде:

$$P_3 = (3P_0^{\frac{2}{S}} P_V^{\frac{2}{S}} - 2P_0^{\frac{3}{S}} P_V^{\frac{3}{S}})^S. \quad (6)$$

Легко показать, что $P_3 = f(S)$ при фиксированных значениях P_0 и P_V первоначально возрастает с увеличением S , а затем стремится к нулю. Следовательно, P_3 имеет максимум при некотором значении $S = S_0$. Определим значение $P_3 = P_{3\max}$ и стационарной точки S_0 . Для

этого обозначим $x = \ln(P_V P_0)$. Тогда

$$\ln P_3 = S \ln (3e^{2x} - 2e^{3x}). \quad (7)$$

Разлагая $\ln(3e^{2x} - 2e^{3x})$ в ряд Тейлора и ограничиваясь первым ненулевым членом, получим

$$\ln P_3 = -12 \ln P_V \cdot \ln P_0 - 3 \left[\sqrt{S} \ln P_V - \frac{1}{\sqrt{S}} \ln P_0 \right]^2. \quad (8)$$

Откуда

$$P_3 = \exp\{-12 \ln P_V \cdot \ln P_0\} \times \exp\left\{-3 \left[\sqrt{S} \ln P_V - \frac{1}{\sqrt{S}} \ln P_0 \right]^2\right\}. \quad (9)$$

Так как в этом выражении первый коэффициент не зависит от S , а максимальное значение второго равно $e^0 = 1$, то

$$P_{3\max} = \exp\{-12 \ln P_V \cdot \ln P_0\}, \quad (10)$$

$$a \quad S_0 = \frac{\ln P_0}{\ln P_V}. \quad (11)$$

На основании экспоненциального закона надежности справедливо

$$\ln P_0 = -\lambda_0 \cdot T, \quad a \quad \ln P_V = -\lambda_V \cdot T, \quad (12)$$

где λ_V — интенсивность отказов мажоритарного элемента. Тогда (10) и (11) можно переписать в виде

$$P_{3\max} = \exp\{-12 \lambda_V \cdot \lambda_0 \cdot T^2\}, \quad (13)$$

$$S_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda_V}. \quad (14)$$

В некоторых случаях не требуется максимальной надежности избыточной ЦВМ, а достаточно достичь некоторого значения $P_3 < P_{3\max}$. Величина P_3 достигается, если разбить неизбыточную ЦВМ на S_1 блоков, причем S_1 может сильно отличаться от S_0 . При заданной величине P_3 значение S_1 можно найти из уравнения

$$\ln P_3 = \left[1 + \frac{1}{4} \frac{(S_1 - S_0)^2}{S_1 \cdot S_0} \right] \ln P_{3\max}, \quad (15)$$

которое получается в результате подстановки (10) и (11) в (9).

На практике разбить неизбыточную машину на равноценные блоки невозможно и поэтому разбиение нужно производить с учетом функциональной структуры ЦВМ. Причем при практическом разбиении неизбыточной ЦВМ для достижения требуемого P_3 число избыточных блоков — S_2 не должна быть меньше S_1 , а интенсивность отказов самого ненадежного избыточного блока не должна быть больше $\frac{\lambda_0}{S_1}$. Тогда надежность избыточной ЦВМ определится как

$$P_3 = P_{R_1} \cdot P_{R_2} \dots P_{R_j} \dots P_{R_{S_2}}, \quad (16)$$

где P_{R_j} — надежность j -го избыточного блока.

Обнаружение неисправностей и ремонт избыточной ЦВМ

Введение избыточности требует изменения процесса контроля работоспособности ЦВМ. Это связано с тем, что если выйдет из строя какой-либо функциональный элемент избыточной схемы, то обычный схемный контроль не обнаружит неисправность, пока вся система не выйдет из строя. Однако из-за этой неисправности одна избыточная цепь будет потеряна, а следовательно уменьшится надежность избыточной системы. Значит контроль избыточной ЦВМ должен определять неисправные избыточные цепи с тем, чтобы иметь возможность восстанавливать первоначальную избыточность не прерывая работы вычислительной системы.

Для обнаружения неисправностей в избыточной ЦВМ используется тот факт, что в случае правильной работы всех функциональных и мажоритарных элементов выходы избыточных цепей (a, b, c на рис. 2) должны иметь одинаковые состояния. Будем считать, что первоначально все избыточные цепи работают правильно. При появлении первой неисправности в одной из избыточных цепей состояние соответствующего выхода изменяется и становится отличным от состояния остальных. Это рассогласование состояний и позволяет определить неисправную цепь. Наличие сигнала на выходах избыточных цепей соответственно обозначим через a, b и c , а отсутствие через $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$. Тогда комбинации возможных состояний выходов правильно работающего избыточного блока могут быть представлены таблицей.

Состояния 1 и 8 соответствуют правильной работе всех функциональных элементов, а состояния 2÷7 — неправильной работе одной из

быточной цепи. Нетрудно видеть, что рассогласование выходов избыточного блока можно описать нулевой функцией следующего вида:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \dots = y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \bar{y}_4 \bar{y}_5 \bar{y}_6 \bar{y}_7 \bar{y}_8 \bar{y}_9 \bar{y}_{10} \quad (17)$$

$$f_{\text{расогл.}} = ab\bar{c}Vabc\bar{V}abcVab\bar{c}V\bar{a}b\bar{c}V\bar{a}\bar{b}\bar{c}. \quad (17)$$

Перепишем выражение (16) следующим образом:

$$f_{\text{распол}} = f_I V f_{II} V f_{III}, \quad \text{где} \quad (18)$$

$$f_1 = a\bar{b}\bar{c} \vee \bar{a}bc,$$

$$f_{II} = \bar{a}b\bar{c}V a\bar{b}c,$$

$$f_{III} = \overline{a}\overline{b}cVabc.$$

1	a	b	c
2	a	b	$\bar{c}$
3	a	$\bar{b}$	c
4	a	$\bar{b}$	$\bar{c}$
5	$\bar{a}$	b	c
6	$\bar{a}$	b	$\bar{c}$
7	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c
8	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$

Таблица

Из (18) видно, что если $f_{\text{расг.}}$ определяет только расогласование выходов, то f_I , f_{II} , f_{III} определяют избыточную цепь, вышедшую из строя.

Можно показать, что f_I, f_{II}, f_{III} являются двухпороговыми функциями и каждая из них может быть реализована одним двухпороговым элементом [3]. Следовательно, логическая схема, реализующая функции f_I, f_{II}, f_{III} , может служить индикатором отказов избыточных цепей. Легко видеть, что если такие логические схемы подключить к выходам избыточных блоков, то при появлении сигнала о неисправности можно заменять неисправный элемент не прерывая работы машины. Выходы одного избыточного блока будем называть контрольной точкой.

Очевидно, что введение избыточности и, соответственно, индикация отказов должны осуществляться на таком уровне, чтобы ремонтпригодность избыточной ЦВМ была наилучшей. Время, требуемое для ремонта неисправностей избыточной ЦВМ,

$$T_{\text{рем.}} = T_{\text{обн.}} + T_{\text{зм.}}, \quad (19)$$

где $T_{\text{обн.}}$ — время обнаружения отказавших элементов и $T_{\text{зам.}}$ — время замены этих элементов исправными.

Пусть $\frac{T}{T_{\text{рем.}}} = L$ — число периодов полного ремонта избыточной ЦВМ. Избыточный блок в период $T_{\text{рем.}}$ не откажет, если в этом промежутке времени не откажет ни одна, или откажет только одна избыточная цепь. Следовательно, надежность ремонтируемого избыточного блока в интервале времени $T_{\text{рем.}}$ равна

$$P_{Rj}^1 = 3(P_{Mj}^1)^2 \cdot (P_{Vj}^1)^2 - 2(P_{Mj}^1)^3 \cdot (P_{Vj}^1)^3, \quad (20)$$

где $P'_{M_j} = e^{-\lambda_{M_j} \cdot T_{\text{рем.}}}$, $P'_{V_j} = e^{-\lambda_{V_j} \cdot T_{\text{рем.}}}$.

Можно считать, что при периодических ремонтах отказы, возникшие в избыточном блоке в период между ремонтами, устраняются, т. е. восстанавливается полная избыточность блока. Отсюда следует, что надежность избыточного ремонтируемого блока в интервале T

$$P_{Rj}^* = \prod_{i=1}^L P_{Rj}^{\prime i} \quad (21)$$

Легко видеть, что в течение всего заданного промежутка времени надежность ремонтируемой избыточной ЦВМ

$$P_{\text{зрем.}} = P_{R_1} \cdot P_{R_2} \dots P_{R_j} \dots P_{R_{S_0}}, \quad (22)$$

причем с уменьшением $T_{\text{рем.}}$ величина $P_{\text{зрем.}}$ будет увеличиваться. $T_{\text{рем.}}$ будет минимальным при фиксированном уровне индикации отказов, если к каждой контрольной точке подключать автономную схему индикации отказов. Однако при большом числе контрольных точек для экономии оборудования выгодно использовать одну схему индикации отказов, к которой последовательно подключаются контрольные точки, причем каждой контрольной точке присваивается свой адрес. Если число контрольных точек $K \gg S$, то код адреса будет иметь K двоичных разрядов. Следует отметить, что $T_{\text{рем.}}$ при такой системе контроля увеличивается незначительно.

Было разработано устройство контроля, использующее последовательное подключение контрольных точек для индикации неисправностей. Блок-схема устройства контроля показана на рис. 3.

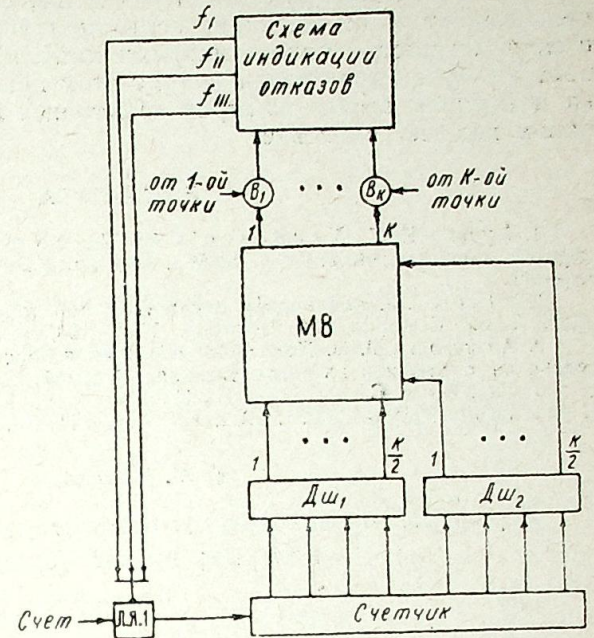


Рис. 3. Блок-схема устройства контроля избыточной мажоритарной ЦВМ

рис. 3.

Единичные импульсы через логическую ячейку (л. я. 1) поступают на двоичный счетчик параллельного типа, на котором записан адрес j -ой контрольной точки. Работа счетчика описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k(t+1) &= \alpha_1(t) \cdots \alpha_{k-1}(t) \cdot \bar{\alpha}_k(t) \cdot 1(t) \\ \bar{\alpha}_k(t+1) &= \alpha_1(t) \cdots \alpha_{k-1}(t) \cdot \alpha_k(t) \cdot 1(t) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где $a_k(t)$ — состояние k -го разряда счетчика в момент времени t (счет времени дискретный). При поступлении единичного импульса на счетчике формируется адрес новой контрольной точки в двоичном коде и вновь образованный код адреса поступает на дешифрацию.

Для экономии оборудования была использована двухступенчатая дешифрация адреса контрольной точки. В первой ступени дешифрация двоичного кода в позиционный осуществляется по правилу де Моргана на активных элементах дешифраторов $D_{ш1}$ и $D_{ш2}$, причем на каждом из них расшифровывается половина длины кода адреса. Таким образом, работа $D_{ш1}$ и $D_{ш2}$ описывается соответственно уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_k &= \overline{\alpha_1 V \alpha_2 V \dots V \alpha_k} \\ \alpha_{\frac{k}{2}+1} \cdot \alpha_{\frac{k}{2}+2} \dots \alpha_k &= \overline{\alpha_{\frac{k}{2}+1} V \alpha_{\frac{k}{2}+2} V \dots V \alpha_k} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Вторая ступень дешифрации осуществляется на пассивных элементах матрицы выборки (МВ) контрольной точки путем совпадения пози-

ционных кодов с Дш₁ и Дш₂. Выходной позиционный код матрицы выборки клапанирует ($j+1$)-ю контрольную точку и информация о состояниях выходов ($j+1$)-го избыточного блока поступает на схему индикации отказов (СИО). В том случае, если какая-либо избыточная цепь выйдет из строя, схема индикации определит неисправную цепь и запретит поступление единичных импульсов на счетчик до тех пор, пока не будет произведен ремонт этой цепи. Адрес избыточного блока, в котором вышла из строя избыточная цепь, будет записан в двоичном коде на счетчике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyons R. E., Vanderkulk W. The use of triple—modular redundancy to improve computer reliability J. "SBM i. Res. i and Developm", 1962, vol. 6, N2, pp. 203—209.
2. Fleek J. J. Redundancy techniques for reliable flight—control computers, IEEE Trans. Commun. and Electron., 1963, N68, pp. 535—546.
3. Аскеров Ч. И. Некоторые обобщения пороговых элементов. Сб. "Сети передачи информации и их автоматизация" Изд. АН СССР, 1965.
4. James D. C., Kent A. H., Hollorvay J. A. Redundancy and the detection of first failures. "Trans. IRE", 1962, vol. RQC—11, N3, pp. 8—27.

Е. М. Маммэдли

Исраф рэгэм һесаблајычы машинларын зэдэләнмэләринин контролу вә диагностикасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә „артыглыг“ принципи илә гурулмуш әдәди һесаблама машинларынын (ӘММ) чатышмамазлыг диагностикасына бахылып вә бу просесә нәзарәт едән чиһазын блок-схеми верилир.

Б. О. КАСИМОВ

О СРАВНЕНИИ НАДЕЖНЫХ СИСТЕМ ТЕЛЕМЕХАНИКИ И ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЛА ЗАПРОСОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТЕЛЕМЕХАНИКИ С РАССРЕДОТОЧЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Чем сложнее тот или иной процесс, тем он, очевидно, требует большего освещения, чтобы быть познанным, управляемым, причем чем многограннее процесс, тем сложнее и труднее управлять им и обеспечить надлежащую надежность этого управления. По количеству информации о процессе можно судить о его сложности и о степени надежности управления им. А информации о нем, о системе, как известно, можно измерять с помощью ее энтропии. Поэтому, если известна энтропия системы, можно судить о соответствующей надежности последней в зависимости от характера рассматриваемых вероятностных законов системы (или от характера соответствующего общего закона распределения системы) и сравнивать различные системы по надежности, считая, согласно понятию энтропии, данному в теории информации, систему с наибольшей энтропией менее надежной.

Пример. Дано, скажем, два радиотехнических устройства X и Y . Нужно решить вопрос о надежности с точки зрения их длительной, безаварийной работы, причем для каждой системы известны число элементов и соответствующие вероятностные законы последних (например, числа повреждений каждого элемента при работе в этой системе).

Обозначим энтропии элементов соответственно через $H(X_k)$ и $H(Y_m)$, где k и m —номера элементов систем; $k=1, 2, 3, \dots, n$; $m=1, 2, 3, \dots, l$. Согласно условию, элементы каждой системы как системы статистически независимы. Следовательно,

$$H(X) = \sum_{k=1}^n H(X_k), \quad H(Y) = \sum_{m=1}^l H(Y_m).$$

Притом, если окажется $H(X) = H(Y)$, это будет означать, что системы равнонадежны, если $H(X) \neq H(Y)$, то система, имеющая большую энтропию, будет менее надежной.

Если вероятностные законы элементов при работе в системе (в комплексе) неизвестны, в этих случаях (для сравнения систем) можно пользоваться и соответствующими общими законами распределения систем (например, закон распределения числа повреждений элементов всей системы). Ниже для целей вычисления энтропии систем телемеханики с рассредоточенными объектами предлагается решение следующей задачи.

Постановка задачи

Дается n объектов. В течение некоторого времени t с вероятностью p_m (где m — порядковый номер объекта) на каждый объект, независимо от другого объекта, поступает одна единица информации (или просто информация). Требуется найти закон распределения числа поступлений единиц информации за время t .

Метод решения задачи

Согласно условию задачи необходимо произвести композицию законов распределения числа поступлений единиц информации на объектах. Задачу рассмотрим для трех конкретных случаев, представляющих практический интерес, когда:

1) $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_m = p$, полагая при этом, что при увеличении числа объектов математическое ожидание числа поступлений единиц информации на объекты остается неизменным, т. е. считаем, что при увеличении n пропорционально уменьшается p ;

2) закон распределения на объектах является: а) законом Пуассона, б) нормальным законом;

3) известны законы распределения на объектах с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_n$.

Первый случай

При $n \rightarrow \infty$ можно предположить, что имеется распределение некоторой прерывной случайной величины, скажем, X (число поступлений единиц информации за время t) по закону Пуассона.

Действительно, обозначим через A_k событие, состоящее в том, что на все объекты за время t поступит k единиц информации, где k может принимать значения натурального ряда чисел от 0 до n (0, 1, 2, ..., n). Примем $p_m = 1 - q_m = \frac{1}{2}$; найдем сколько раз мо-

жет произойти каждое событие A_k и все эти события вместе с тем, чтобы вычислить вероятности последних.

Очевидно:

- 1) число событий $A_0 = C_n^0$,
- 2) — „ — $A_1 = C_n^1$,
- 3) — „ — $A_2 = C_n^2$,
- ...
- $n+1$) — „ — $A_n = C_n^n$.

Просуммировав все эти сочетания, найдем общее число событий:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Разделив же каждое сочетание на 2^n , получим вероятности этих событий:

$$p(A_0) = \frac{C_n^0}{2^n}; \quad p(A_1) = \frac{C_n^1}{2^n}; \quad \dots, \quad p(A_n) = \frac{C_n^n}{2^n}.$$

Или, исходя из частной теоремы о повторении опытов,

$$p(A_k) = C_n^k p_m^k q_m^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию случайной величины X , конкретные значения которой равны k :

$$m_x = M(X) = \sum_{k=0}^n k p(A_k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{C_n^k}{2^n} = \frac{n}{2}.$$

Дисперсию вычислим по формуле $D(X) = \sigma_x^2 = a_2 - m_x$, где a_2 является вторым начальным моментом случайной величины X :

$$a_2 = \sum_{k=0}^n k^2 p(A_k) = \sum_{k=0}^n k^2 \frac{C_n^k}{2^n} = \frac{n(n+1)}{4};$$

$$D(X) = a_2 - m_x^2 = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4}.$$

Для вычисления $M(X)$ и $D(X)$, конечно, можно применить и теоремы сложения математических ожиданий и дисперсий. В этом случае событие на объекте — поступление информации на объект — будем характеризовать его характеристической случайной величиной, которая берется равной 1, когда событие происходит, и равной 0 — в противном случае.

Обозначим эту случайную величину через X_m , тогда:

$$M(X_m) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2};$$

$$M(X) = \sum_{m=1}^n M(X_m) = \frac{n}{2};$$

$$D(X_m) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$

$$D(X) = \sum_{m=1}^n D(X_m) = \frac{n}{4}.$$

Известно, что дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию. У нас же $D(X)$ получилось близким к $M(X)$, что указывает на верность нашего предположения. Действительно, после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} p(A_k) &= C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k}{2^n} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right)^n}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)^k} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{m_x^k}{k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{m_x}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{m_x}{n}\right)^k}; \end{aligned}$$

$$p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_k) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{m_x^k}{k!} \cdot \left[\left(1 - \frac{m_x}{n}\right)^{\frac{n}{m_x}} \right]^{m_x} =$$

$$= \frac{m_x^k}{k!} e^{-m_x}.$$

На практике может встретиться, когда $p_1, p_2, \dots, p_n$ — величины примерно одного порядка малости, тогда справедлив закон Пуассона. Чтобы убедиться в этом, положим, например, что нам дано n^2 объектов с независимым поступлением информации, которые разбиты на n групп по n объектов, причем каждый объект из одной и той же группы имеет одну и ту же вероятность $\frac{p_m}{n}$ поступления информации.

Как и выше, событие на объекте будем выражать характеристической случайной величиной, которую обозначим буквой Z_{mj} , где m означает номер группы, а j — номер объекта в этой группе.

$$Y_m = \sum_{j=1}^n Z_{mj}; \quad Y = \sum_{m=1}^n Y_m;$$

$$M(Z_{mj}) = 1 \cdot \frac{p_m}{n} = \frac{p_m}{n};$$

$$M(Y_m) = M\left(\sum_{j=1}^n Z_{mj}\right) = \sum_{j=1}^n M(Z_{mj}) = p_m;$$

$$M(Y) = \sum_{m=1}^n M(Y_m) = \sum_{m=1}^n p_m;$$

$$D(Z_{mj}) = \left(1 - \frac{p_m}{n}\right)^2 \frac{p_m}{n} + \left(0 - \frac{p_m}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{p_m}{n}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{p_m}{n}\right) \frac{p_m}{n} \left(1 - \frac{p_m}{n} + \frac{p_m}{n}\right) = \left(1 - \frac{p_m}{n}\right) \frac{p_m}{n};$$

$$D(Y_m) = D\left(\sum_{j=1}^n Z_{mj}\right) = \sum_{j=1}^n D(Z_{mj}) = \left(1 - \frac{p_m}{n}\right) \frac{p_m}{n};$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{m=1}^n Y_m\right) = \sum_{m=1}^n D(Y_m) = \sum_{m=1}^n \left(1 - \frac{p_m}{n}\right) p_m.$$

Очевидно, и тут при $n \rightarrow \infty$ мы получаем

$$M(Y) = D(Y).$$

Второй случай

Задачу решим вначале, полагая, что даны только два какие-нибудь из n объектов, а затем, используя метод полной индукции, обобщим полученный результат на все n объектов:

$$X = \sum_{m=1}^n X_m.$$

а. Закон распределения на объектах — закон Пуассона.

Произведем композицию законов объектов № 1 и № 2, пользуясь характеристическими функциями $f_1(t)$ и $f_2(t)$ случайных величин X_1 и X_2 . Найдем характеристическую функцию случайной величины X_m , распределенной по закону Пуассона; $m_{x_m} = M(X_m)$. Обозначим через k конкретные значения X_m ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$f_m(t) = M e^{itx_m} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{m_{x_m}^k}{k!} e^{-m_{x_m}} = e^{-m_{x_m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m_{x_m} e^{it})^k}{k!} =$$

$$= e^{-m_{x_m}} e^{m_{x_m} e^{it}} = e^{(e^{it}-1)m_{x_m}}; \quad C = X_1 + X_2;$$

$$f_1(t) = e^{m_{x_1}(e^{it}-1)}; \quad f_2(t) = e^{m_{x_2}(e^{it}-1)};$$

$$f_c(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = e^{(m_{x_1}+m_{x_2})(e^{it}-1)}.$$

Согласно теореме единственности, любая функция распределения однозначно определяется своей характеристической функцией. Поэтому характеристической функции случайной величины $C = X_1 + X_2$, $f_c(t)$ будет соответствовать только закон Пуассона, для которого

$$p_k = \frac{(m_{x_1} + m_{x_2})^k}{k!} e^{-(m_{x_1} + m_{x_2})}.$$

Рассматривая сумму $C + X_3$, видим, что она также распределена по закону Пуассона.

Очевидно, рассуждая аналогичным образом, мы придем к заключению, что вся сумма $X = \sum_{m=1}^n X_m$ распределена по закону Пуассона, для которого

$$p_k = \frac{m_x^k}{k!} e^{-m_x}, \quad \text{где}$$

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2} + \dots + m_{x_n}.$$

б. Закон распределения на объектах — нормальный закон.

Найдем характеристическую функцию случайной величины X_m , распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием m_{x_m} и дисперсией $\sigma_{x_m}^2$:

$$\psi_m(t) = \frac{1}{\sigma_{x_m} \sqrt{2\pi}} \int e^{itx - \frac{(x-m_{x_m})^2}{2\sigma_{x_m}^2}} dx.$$

Обозначив

$$Z = \frac{X - m_{x_m}}{\sigma_{x_m}} - it\sigma_{x_m},$$

получим

$$\psi_m(t) = e^{im_{x_m}t - \frac{\sigma_{x_m}^2 t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - it\sigma_{x_m}}^{\infty - it\sigma_{x_m}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При любом вещественном β

$$\int_{-\infty - i\beta}^{\infty - i\beta} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi},$$

поэтому

$$\varphi_m(t) = e^{im_m t - \frac{\sigma_m^2 t^2}{2}}$$

Произведем композицию законов распределения случайных величин X_1 и X_2 , пользуясь их характеристическими функциями:

$$C = X_1 + X_2;$$

$$\varphi_1(t) = e^{im_{x_1} t - \frac{\sigma_{x_1}^2 t^2}{2}};$$

$$\varphi_2(t) = e^{im_{x_2} t - \frac{\sigma_{x_2}^2 t^2}{2}};$$

$$\varphi_c(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t) = e^{(im_{x_1} + im_{x_2})t - \frac{1}{2}t^2(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}$$

На основании вышеупомянутой теоремы единственности характеристической функции $\varphi_c(t)$ будет соответствовать только нормальный закон с плотностью вероятности

$$\varphi_c(x) = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2) \cdot 2\pi}} \cdot e^{-\frac{[x - (m_{x_1} + m_{x_2})]^2}{2(\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2)}}$$

Рассматривая последовательно суммы:

$$C + X_3; (C + X_3) + X_4; (C + X_3 + X_4) + X_5; \\ (C + X_3 + X_4 + X_5) + X_6; \dots; \\ (C + X_3 + X_4 + \dots + X_{n-1}) + X_n,$$

видим, что они также распределены по нормальному закону. Поэтому сумма $X = \sum_{m=1}^n X_m$ распределена по нормальному закону с плотностью вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

где

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2} + \dots + m_{x_n}, \\ \sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_3}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2.$$

Таким образом, если закон распределения числа поступлений единиц информации на каждом из n объектов подчиняется:

а) закону Пуассона, то закон распределения числа поступлений единиц информации на все объекты также подчиняется закону Пуассона с математическим ожиданием

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2} + m_{x_3} + \dots + m_{x_n};$$

б) нормальному закону, то закон распределения числа поступлений единиц информации на все объекты также подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием

$$m_x = m_{x_1} + m_{x_2} + \dots + m_{x_n} \quad \text{и дисперсией} \\ \sigma_x^2 = (\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2).$$

Третий случай

Согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, если для последовательности взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m, \dots, X_n$ выполняется условие (необходимое и достаточное) Линдеберга: при любом постоянном $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{m=1}^n \int_{|x - m_m| > \tau B_n} (x - m_m)^2 \varphi_m(x) dx = 0,$$

где m_m и $\varphi_m(x)$, соответственно, математическое ожидание и плотность распределения случайной величины X_m , а $B_n = \sqrt{\sum_{m=1}^n D(X_m)}$, то закон распределения суммы этих величин $X = \sum_{m=1}^n X_m$ неограниченно приближается к нормальному.

Для рассматриваемого случая X_m имеем два возможных значения — 0 или 1:

$$M(X_m) = 0 \cdot q_m + 1 \cdot p_m = p_m;$$

$$D(X_m) = (1 - p_m)^2 p_m + (0 - p_m)^2 q_m = q_m p_m;$$

$$D(X) = \sum_{m=1}^n D(X_m) = \sum_{m=1}^n p_m q_m;$$

$X_m - m_m| < 1$, а вне этого интервала все $\varphi_m(x)$ равны нулю, тогда как B_n при увеличении n неограниченно возрастает, что говорит о выполнении условия Линдеберга. Следовательно, так как возможные значения X_m ограничены (0 или 1), а сумма дисперсий $\sum_{m=1}^n D(X_m)$ неограниченно возрастает с увеличением числа слагаемых, то закон распределения суммы $X = \sum_{m=1}^n X_m$ имеет пределом нормальный закон распределения. К этому же результату мы пришли во втором случае (б), который (теперь нетрудно видеть) является частностью третьего случая.

Опыт показывает, что когда число слагаемых порядка десяти $X = \sum_{m=1}^{10} X_m$ (а часто и меньше), закон распределения суммы обычно при таких условиях может быть заменен нормальным. Известно [1], что среди всех законов распределения непрерывной случайной величины X , для которых задача одна и та же дисперсия, σ_x^2 , наибольшей энтропией обладает нормальный закон распределения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обозначив:

- 1) $H(C)$ — энтропию всей телемеханической системы по надежности принятия информации;
- 2) $H(X)$ — энтропию закона распределения числа поступлений единиц информации на объекты;

3) $H(A)$ — энтропию аппаратуры диспетчерского пункта относительно надежности принятия информации;
 4) $H(K)$ — энтропию каналов связи относительно их пропускной способности;
 очевидно, будем иметь

$$H(C) = H(X) + H(A) + H(K).$$

Следовательно, подбирая соответствующим образом объекты, можно менять $H(X)$, а, комплектуя подходящую аппаратуру и каналы, можно менять $H(A)$ и $H(K)$ и тем самым обеспечивать надлежащую надежность системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей под ред. проф. А. А. Свешникова, Судпромгиз, 1962.

Б. О. Гасымов

Телемеханиканын үмидверичи системинин мугајисәси
 вә сәпәләнмиш объектли телемеханик системин
 тәләбләри сајынын пәјланма ганунуна даир

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә үмидверичи системә дахил олан вә пәјланма ганунларындан истифадә едилән телемеханик системин оптимал гурулушунун гурулмасы мәсәләсинә бахылып. Ејни заманда системин ентропијасынын гјмәтинә көрә онун үмидлилијинин тәјјини һаггында мәсәлә гојулур.

А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. К. ИСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АНИОНОВ ОСНОВАНИЯ НА НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ ФОСФОРОВ, АКТИВИРОВАННЫХ СЕРЕБРОМ И МЕДЬЮ

В настоящей работе приводятся результаты наших исследований кривых неизотермических релаксационных процессов — термического высвечивания $J(T)$, термообесцвечивания $\chi(T)$ и термооптического высвечивания $J_\lambda(T)$ — в интервале $293 \div 500 \text{ K}^\circ$ смешанных монокристаллических КСlКBr-фосфоров, активированных серебром и медью, в зависимости от соотношения компонентов с разными анионами в основании фосфора при фиксированном содержании активаторных добавок. Указанные фосфоры были выращены по методу Киропулоса. Содержание солей КСl и КBr в расплаве и монокристалле контролировалось. Концентрация активирующих примесей — AgCl и CuCl — во всех кристаллофосфорах была взята по 0,5 моль % в расплаве.

Фосфоры возбуждались излучением от рентгеновской трубки с вольфрамовым антикатодом (45 кВ; 10 мА) при комнатной температуре. Время возбуждения для всех исследованных нами фосфоров составляло 60 мин. Кривые неизотермических релаксационных процессов записывались на релаксационном комбайне сразу после рентгенизации фосфоров с постоянной скоростью нагрева, равной 0,7 град/сек. Мы работали с кристаллофосфорами, имеющими малый коэффициент возбужденного поглощения. Приведенные ниже кривые термообесцвечивания исправлены на зависимость формы $I' =$ полосы от температуры [1].

А. Термическое высвечивание монокристаллов NaCl, KCl, KBr и KJ, активированных серебром, изучалось в работе [1—6]. Было показано, что большинство центров окраски при комнатной температуре, проявляющихся в термовысвечивании, обусловлено тепловыми микродефектами основного вещества и не связано с наличием в кристалле ионов серебра.

В активированных серебром щелочно-галогидных кристаллах в отличие от чистых, помимо уровней захвата основного вещества, обнаруживаются также электронные уровни захвата иной природы, которые проявляются в спектрах возбужденного поглощения указанных фосфоров [1,3—4, 6—9]. Наши опыты показывают, что эти центры проявляются в качестве электронных центров захвата также в явлениях термического высвечивания рентгенизованных щелочно-галогидных кристаллов, активированных серебром.

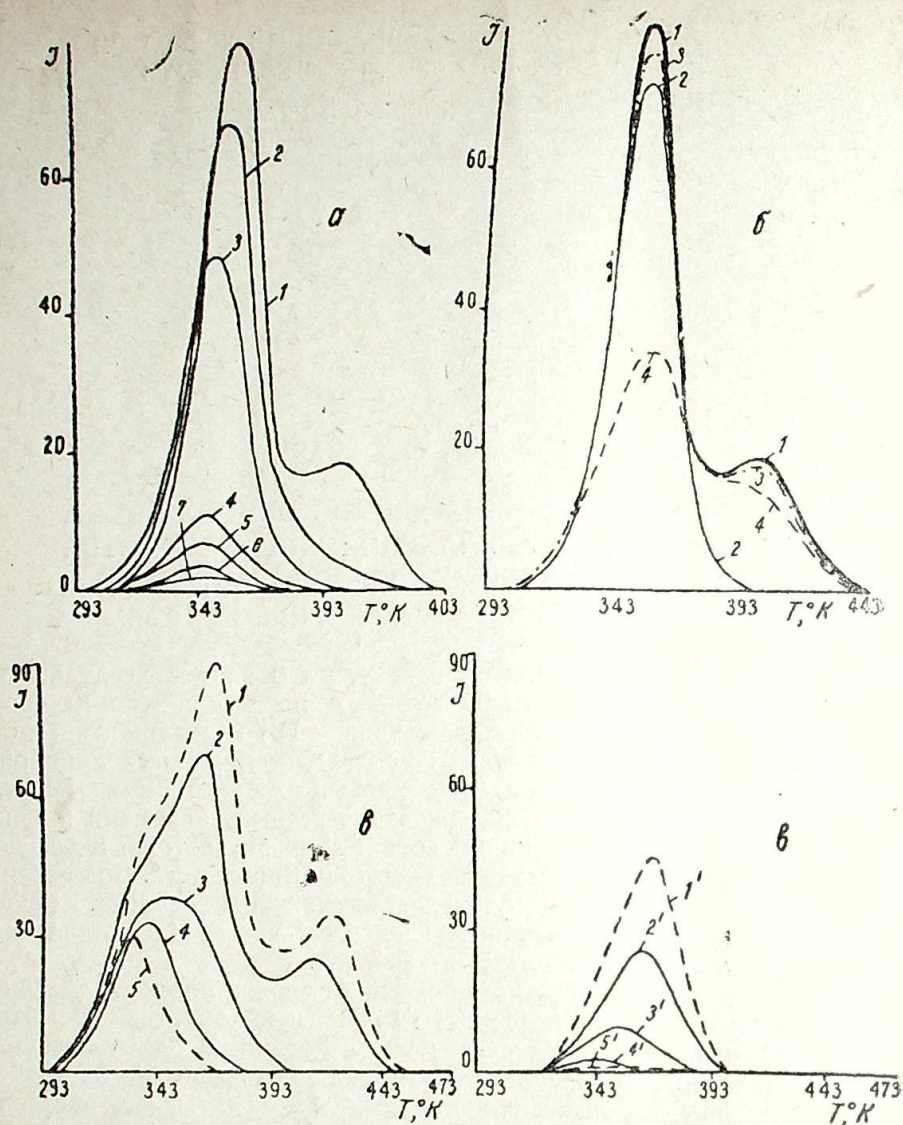


Рис. 1. а—кривые термического высвечивания фосфоров (моль %):

- 1—KCl+AgCl (0,5);
- 2—KCl (90) KBr (10) +AgCl (0,5);
- 3—KCl (70) KBr (30) +AgCl (0,5);
- 4—KCl (50) KBr (50) +AgCl (0,5);
- 5—KCl (30) KBr (70) +AgCl (0,5);
- 6—KCl (10) KBr (90) +AgCl (0,5);
- 7—KBr+AgCl (0,5).

б—кривые термического высвечивания фосфора KCl+AgCl (0,5 моль %) :

- 1—сразу после возбуждения;
- 2—после возбуждения и облучения F-светом;
- 3—после возбуждения и облучения M-светом;
- 4—после возбуждения и облучения E-светом указанного фосфора.

в—кривые термического высвечивания фосфоров (моль %):

- 1,1'—KCl+CuCl (0,5);
- 2,2'—KCl (90) KBr (10) +CuCl (0,5);
- 3,3'—KCl (50) KBr (50) +CuCl (0,5);
- 4,4'—KCl (10) KBr (90) +CuCl (0,5);
- 5,5'—KBr+CuCl (0,5).

1, 2, 3, 4, 5—до облучения F-светом;
1', 2', 3', 4', 5'—после облучения F-светом указанных фосфоров.

На рис. 1 а (кривые 1 и 7) изображены кривые термовысвечивания KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров. Как видно из рисунка, кривая термовысвечивания KCl+AgCl фосфора состоит из двух пиков—интенсивного с $T_m = 358^\circ\text{K}$ и сравнительно слабого пика с $T_m = 403^\circ\text{K}$, а у фосфора KBr+AgCl имеется только один пик с $T_m = 341^\circ\text{K}$.

На рис. 1 б показаны результаты исследования влияния предварительного облучения рентгенизованных KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров в их E (435; 463 mμ), F (363; 620 mμ) и M (820 mμ) полосах возбужденного поглощения на кривые термического высвечивания тех же фосфоров. Как видно, существенное изменение интенсивности свечения в пиках с $T_m = 358^\circ\text{K}$ и $T_m = 341^\circ\text{K}$ соответственно для KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров происходит после предварительного облучения их в E-полосах поглощения, а пик с $T_m = 403^\circ\text{K}$ для KCl+AgCl фосфора полностью разрушается лишь при облучении фосфора F-светом.

На рис. 2 а (а и д) приведены регистрируемые одновременно кривые термовысвечивания $I(T)$, термообесцвечивания F —полосы $\chi^F(T)$ и термооптического высвечивания при стимуляции в F —полосе $J_\lambda^F(T)$ (через фильтр УФС 2) KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров. Данные относительно одновременной записи кривых $I(T)$ и $\chi(T)$ для E-полосы, а также кривые 1 и 2 рис. 2 а (а и д) показывают, что область термического разрушения активаторных E-центров окраски KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров соответствует максимумам пиков $T_m = 358^\circ\text{K}$ и с $T_m = 341^\circ\text{K}$ тех же фосфоров, а область термического обесцвечивания F-центров—максимуму пика с $T_m = 403^\circ\text{K}$ KCl+AgCl фосфора. По кривым 1 и 2 рис. 2 а (а и д) также видно, что в случае KCl+AgCl фосфора кривая $J_\lambda^F(T)$ почти повторяет ход $\chi^F(T)$. Однако при этом на кривой термовысвечивания KBr+AgCl фосфора никаких пиков не наблюдается и он не дает также оптической вспышки при стимуляции в F-полосе из-за теплового тушения люминесценции, наступающего уже при температуре, близкой к комнатной.

Описанные факты, по-видимому, указывают на то, что пик термовысвечивания с $T_m = 403^\circ\text{K}$ соответствует F-полосе KCl+AgCl фосфора, а пики с $T_m = 358^\circ\text{K}$ и $T_m = 341^\circ\text{K}$ —активаторным E-полосам возбужденного поглощения KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров, и не связаны с центрами окраски основного вещества.

Большие изменения на кривых термовысвечивания наблюдаются в щелочно-галогидных фосфорах со смешанными основаниями. На рис. 1 а (кривые 2—6) показаны термовысвечивания KClKBr+AgCl фосфоров со смешанными основаниями. Как видно из рисунка, высокотемпературный пик (403°K), характерный для KCl+AgCl фосфора, на кривых термовысвечивания указанных фосфоров со смешанным основанием не обнаруживается. На кривых термовысвечивания смешанных KClKBr+AgCl фосфоров в интервале $300 \div 500^\circ\text{K}$ при любом соотношении компонентов с разными анионами в основании фосфора содержится только один пик. Как видно (кривые 1—7, рис. 1 а), в смешанных KClKBr+AgCl фосфорах при увеличении содержания KBr от 0 до 100 моль % пик термовысвечивания с $T_m = 358^\circ\text{K}$ (E-пик), характерный для KCl+AgCl фосфора, монотонно и неравномерно ослабляется, смещаясь в сторону низких температур. При этом наибольшее смещение пика и относительно малое уменьшение его интенсивности обнаруживаются до эквимолярного соотношения компонентов смешанного основания. Дальнейший рост содержания KBr приводит к резкому уменьшению интенсивности пика и лишь к малому сдвигу его.

Непрерывное смещение термопика с $T_m = 358^\circ\text{K}$ в смешанных KClKBr+AgCl фосфорах при увеличении содержания KBr-компонента

свидетельствует о том, что в фосфорах со смешанным основанием природа указанного пика остается такой же, как и в соответствующих фосфорах с однокомпонентным основанием. Указанное смещение максимума пика термовысвечивания с $T_m = 358^\circ\text{K}$ и уменьшение интенсивности свечения в нем находятся в соответствии с монотонным и неравномерным смещением и уменьшением E -полосы возбужденного поглощения [7].

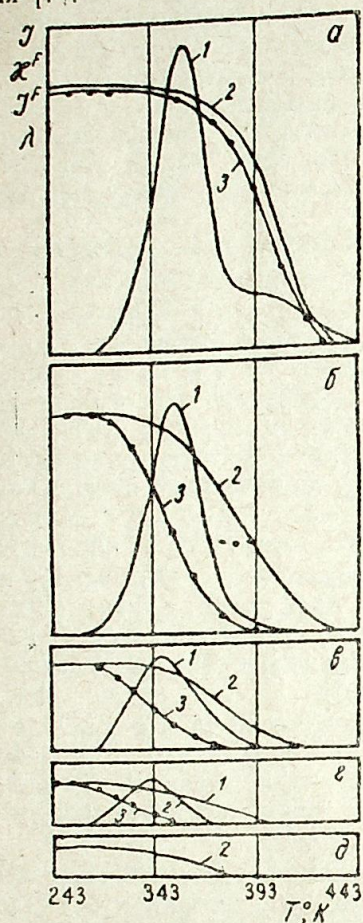


Рис. 2А. Кривые термовысвечивания (1), термообесвечивания F -полосы (2) и термооптического высвечивания при стимуляции в F -полосе (3) фосфоров (моль %): а— $\text{KCl} + \text{AgCl}$ (0,5); б— KCl (90) KBr (10) $+ \text{AgCl}$ (0,5); в— KCl (50) KBr (50) $+ \text{AgCl}$ (0,5); г— KCl (10) KBr (90) $+ \text{AgCl}$ (0,5); д— $\text{KBr} + \text{AgCl}$ (0,5), одновременно регистрируемые на релаксационном комбайне

Из рис. 1 а следует, что полуширина термопика, обусловленного освобождением электронов из E -центров, в $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфорах со смешанным основанием шире, чем в однокомпонентных $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфорах. При сравниваемых количествах компонентов с разными анионами в основании фосфора указанная полуширина — наибольшая. После предварительного выдерживания рентгенизованного

$\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфора с 50 моль % KBr в течение разных промежуточных времени при 293°K активаторный пик (E -пик) термовысвечивания данного фосфора смещается в сторону высоких температур, что сопровождается уменьшением его полуширины.

Изложенные данные по изменению положения максимума, интенсивности и полуширины пика, соответствующего E -центрам захвата, на кривых термовысвечивания смешанных $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфоров при варьировании содержания KBr легко объясняются на основе представлений об образовании изоструктур E -центров окраски [27, 10, 11]. При этом неравномерный сдвиг активаторного пика на кривых термовысвечивания в сторону низких температур с ростом концентраций KBr и с увеличением KCl в основании $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфоров обусловлен, по-видимому, преимущественным расположением более тяжелых ионов Br около E -центров окраски [7, 10, 11].

На рис. 2 А (б, в, г), показаны регистрируемые одновременно с кривыми $I(T)$ кривые $\chi^F(T)$ (2) и $J_\lambda^F(T)$ (3) фосфоров $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ с 10, 50 и 90 моль % KBr . Для сравнения там же приводим аналогичные кривые соответствующих однокомпонентных фосфоров, по которым видно, что в $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфора со смешанным основанием в отличие от $\text{KCl} + \text{AgCl}$ фосфора резкое уменьшение оптической вспышки из-за теплового тушения люминесценции не соответствует температурам полуспада кривых $\chi^F(T)$. Температура полуспада кривой $J_\lambda^F(T)$ с увеличением содержания KBr в смешанном основании $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфоров очень сильно уменьшается относительно температуры полуспада кривой $\chi^F(T)$. При этом одновременно интенсивность оптической вспышки резко понижается и в $\text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфоре доходит до нуля.

Из рассмотрения кривых 2 рис. 2 А (б, в, г) также следует, что температура полуспада кривой $\chi^F(T)$ плавно уменьшается и происходит своеобразное изменение формы ее по мере увеличения содержания KBr в основании $\text{KClKBr} + \text{AgCl}$ фосфоров. При этом обнаруживается, что кривые $\chi^F(T)$ для указанных фосфоров со смешанным основанием не элементарны.

Б. Исследованию термического высвечивания рентгенизованных щелочно-галогидных кристаллов, активированных медью, посвящен ряд работ [2, 3, 4, 12].

На рис. 1 в изображены измеренные нами кривые (1 и 5) термовысвечивания $\text{KCl} + \text{CuCl}$ и $\text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфоров. На кривой (1) первого фосфора имеется три максимума (335, 369 и 421°K), а у второго — один с $T_m = 331^\circ\text{K}$.

На рис. 2 Б (а) сопоставлены кривые (1) $I(T)$ и (2) $\chi^F(T)$ $\text{KCl} + \text{CuCl}$ фосфора. Как видно, резкий спад кривой $\chi^F(T)$ происходит в три стадии, которые в основном соответствуют максимумам термического высвечивания. Аналогичным образом показано, что в случае $\text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфора на кривой $\chi^F(T)$, кроме резкого спада, соответствующего максимуму пика термовысвечивания с $T_m = 331^\circ\text{K}$, наблюдается также более высокотемпературный спад ($369-393^\circ\text{K}$), хотя соответствующего пика при указанной температуре на кривой $I(T)$ соответствующего фосфора нет (рис. 2 Б, д, кривые 1 и 2). Эти результаты, а также данные по исследованию влияния F - и M -облучения фосфоров на интенсивность свечения в пиках термовысвечивания (рис. 1 в, кривые 1', 5') показывают, что все наблюдаемые три пика $\text{KCl} + \text{CuCl}$ и единственный пик $\text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфоров обусловлены электронами, освобождаемыми из F -центров.

На рис. 1 в кривые 2—4 характеризуют термическое высвечивание смешанных $\text{KClBr} + \text{CuCl}$ фосфоров с 10, 50 и 90 моль% KBr . Из этих кривых, а также из кривой $J(T)$ $\text{KCl} + \text{CuCl}$ фосфора (1), приведенной на этом же рисунке, следует, что при переходе от $\text{KCl} + \text{CuCl}$ к смешанному $\text{KClBr} + \text{CuCl}$ фосфору и при дальнейшем увеличении содержания KBr в основании последнего пика с $T_m = 335, 369$ и 421°C (особенно два последних), характерные для $\text{KCl} + \text{CuCl}$ фосфора, плавнo смешаются в сторону низких температур и одновременно с этим интенсивность и световая сумма, свечения в пиках с $T_m = 369$ и 421°C монотонно уменьшаются. При сравнимых содержаниях компонентов KCl и KBr в смешанном основании $\text{KClBr} + \text{CuCl}$ фосфора пик термовысвечивания с $T_m = 421^\circ\text{C}$, характерный для $\text{KCl} + \text{CuCl}$, полностью исчезает.

Как следует из рассмотрения кривых 2 и 3 рис. 2 Б (а, б, в, г), кривые $\chi^F(T)$ и $J_\lambda^F(T)$ для $\text{KClBr} + \text{CuCl}$ фосфоров со смешанным основанием также не являются элементарными и плавнo переходят в соответствующие кривые $\text{KBr} + \text{CuCl}$ при увеличении содержания KBr в смешанном основании фосфора. Результаты опытов по исследованию термообесцвечивания и термооптического высвечивания в i -полосе для смешанных KClBr фосфоров разного состава, активированных серебром и медью, а также термовысвечивания смешанных хлористобромистых фосфоров, активированных медью, следует объяснить наличием изоструктур F -центров в указанных фосфорах со смешанным основанием [7, 10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лушик Ч. Б., Зайтов Ф. Н. Тр. ИФА АН ЭССР, № 4, 53, 1956.
2. Лушик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 3, 1955.
3. Парфианович И. А. Изв. АН СССР, серия физич., 15, 669, 1951.
4. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочно-галогенных соединений. Изд. Саратовского ун-та, 1960.
5. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю., Мамедов А. П., Алиева Т. Д., Исаев Ф. К. Изв. АН СССР, серия физич., 25, 335, 1961.
6. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук, 1963, № 1.
7. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1963, № 4.
8. Eitel H., Schulman J. J. chem. phys., 22, 1549, 1954.
9. Гиндина Р. И., Лушик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 15, 81, 1961.
10. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. Изв. АН СССР, серия физич., 25, 28, 1961.
11. Клемент Ф. Д. и Тейсс Л. А. Тр. ИФА АН ЭССР, № 14, 76, 1961.
12. Парфианович И. А. ЖЭТФ, 25, 614, 1953; 21, 314, 1951; 19, 605, 1949.

Э. Х. Халилов, Ф. К. Исаев

Күмүш вә мис ионлары илә активләшдирилмиш бә'зи гарышыг әсаслы гәләви-һалокен кристаллофосфорларында әсас анионларын гејри-изотермик релаксасија хассәләринә тә'сиринин тәдиги

ХҮЛАСӘ

Мәгалә күмүш вә мис ионлары илә активләшдирилмиш гарышыг әсаслы KClBr монокристалларында әсас анионларын гејри-изотермик релаксасија хассәләринә тә'сиринин термошүаланма, терморәнксизләшмә вә термооптик шүаланма методлары илә тәдигинә һәср едилмишдир.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, С. И. МЕХТИЕВА, Д. Ш. АБДИНОВ, Г. М. АЛИЕВ

О НОВЫХ СВОЙСТВАХ СЕЛЕНА ВЫСОКОЙ ЧИСТОТЫ

Хотя селен в течение столетий являлся объектом многих исследований и нашел разнообразное применение в современной технике, однако до сих пор непонятны некоторые его свойства; экстремумы на кривых концентрационной зависимости электропроводности (σ), термоэдс (ϵ), теплопроводности (κ), энергии активации при самодиффузии (ΔE), плотность (ρ), микротвердости (H) при введении различных примесей [1—9], скачкообразное уменьшение σ и κ при плавлении [8, 10—13] и т. д. Не выяснен также механизм дырочной (P) проводимости и температурной зависимости подвижности, концентрации носителей тока в селене.

Получение селена высокой чистоты марки В₄ и В₅ (99,9999 и 99,99999%) и исследование влияния ряда примесей, в том числе кислорода и кислородкомпенсирующих, наводит на мысль, что вышеотмеченные, до сих пор непонятные свойства селена обусловлены наличием в нем примеси кислорода и образованием его комплексов. Выяснение этого вопроса является целью данной работы.

Исследования проводились на селене В₄ и В₅ до и после обескислороживания, а также после окислороживания. Обескислороживание и измерение указанных параметров производили по методам [7, 10, 13, 14]. В качестве кислородкомпенсирующих примесей были взяты Cd , Sb , Mn , Tl , Na и S .

На рис. 1 показана концентрационная зависимость λ кристаллического селена. Кривые 1 и 2 относятся к необескислороженным образцам с сурьмой (Sb) и кадмием (Cd), соответственно. Как видно, примеси Cd и Sb при 0,125 вес % уменьшают λ селена на ~25%, при большем же количестве примеси λ начинает расти не доходя до значения для чистого образца. Такая же аномальная концентрационная зависимость получается при введении Na , Tl , Bi , Cl , J , Br , S , [5, 15, 17].

Если проанализировать наблюдавшееся уменьшение λ по [18] и вычислить сечение рассеяния (Φ) на каждом примесном атоме по формуле

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + \frac{N}{N_0} \Phi \frac{l_0}{a}$$

(где N_0 и N —число атомов основного вещества и примеси на 1 см^3 , кристалла, соответственно; a —расстояние между соседними атомами в решетке; l_0 —средняя длина свободного пробега фонона в материале без примесей; Φ —множитель в выражении $S = \Phi a^2$, который меняется в пределах $0 < \Phi \leq 10$; S —поперечное сечение рассеяния примесями;

λ_0 и λ — теплопроводности кристаллической решетки, соответственно, чистого образца и с примесью), то для Φ при 0,125 вес. % Sb и Cd получается ~ 60 , что значительно больше, чем значение Φ в [18]. Кривые 3 и 4 (рис. 1) показывают влияние примеси Sb на λ обескислороженного селена, соответственно. Как следует из рисунка, вследствие обескислороживания λ чистого селена снижается от $5,93 \cdot 10^{-3}$ до $4,90 \cdot 10^{-3}$ кал/см сек. град.

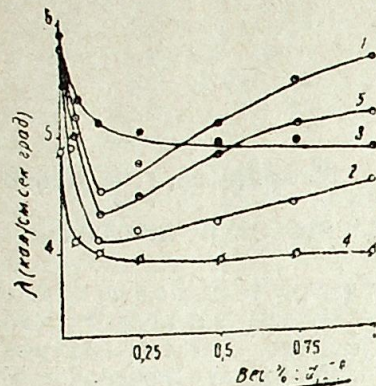


Рис. 1. Зависимость теплопроводности селена от содержания примеси вес. % Sb и Cd: 1—Se+Sb; 2—Se+Cd; 4—обескислороженный Se+Sb; 3—Se+Cd (в виде CdO); 5—окислороженный Se+Sb.

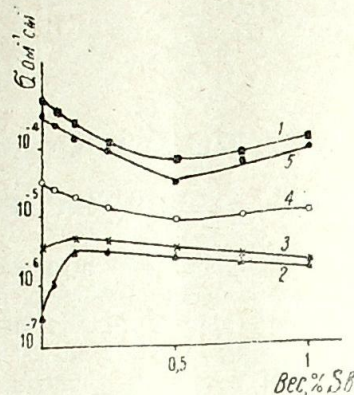


Рис. 2. Зависимость электропроводности селена от содержания примеси вес. % Sb: 1—Se+Sb; 2—обескислороженный Se+Sb; 3—окислороженный Se+Sb.

При введении указанных примесей в обескислороженный (кривая 4) или же их оксидов (кривая 3) в необескислороженный селен исчезает минимум на кривой концентрационной зависимости λ и для Φ получается ~ 17 и 2,7, соответственно, что хорошо согласуется с выводом теории [18]. Подобные результаты получаются для концентрационной зависимости η и H [7, 17].

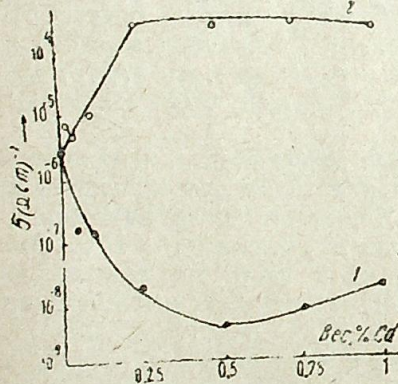


Рис. 3. Зависимость электропроводности селена от содержания вес. % Cd: 1—Se+Cd; 2—Se+Cd (в виде CdO).

Весьма интересные данные получены по влиянию кислорода и кислородкомпенсирующих примесей Cd, Sb, Mn, Tl, Na на σ селена. На рис. 2 представлена зависимость σ необескислороженного (кривая 1), обескислороженного (кривая 2) и окислороженного селена (кривая 3—5) от концентрации примесей сурьмы.

На рис. 3 показана концентрационная зависимость селена при введении Cd (кривая 1) и CdO (кривая 2). Нетрудно заметить, что обескислороживание приводит к уменьшению σ чистого селена в ~ 1000 раз при 20°C (рис. 2). Кривые концентрационной за-

висимости σ при введении Sb (рис. 2, кривая 1) и Cd (рис. 3, кривая 1) в необескислороженный селен проходят через минимум. Такое же изменение σ получается при введении в необескислороженный селен примесей Tl, Mn, S и Na [19]. В случае же обескислороженного селена (рис. 2, кривая 2), или при введении оксидов кислородкомпенсирующих

примесей, например CdO (рис. 3, кривая 2), в необескислороженный селен σ при малых содержаниях примеси сначала растет, а затем остается почти постоянной.

Определяющую роль для электрических свойств полупроводников играет ближний порядок [20, 21]. При плавлении σ меняется значительно в тех случаях, когда ближний порядок изменяется коренным образом. Нарушение же дальнего порядка приводит лишь к небольшим изменениям σ .

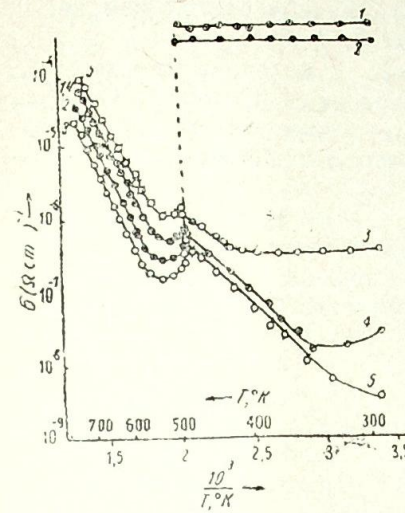


Рис. 4. Температурная зависимость электропроводности селена: 1—Se; 2—Se окислороженный; 3—Se обескислороженный; 4—Se+0,5 вес. % Mn; 5—Se+0,5 вес. % Cd.

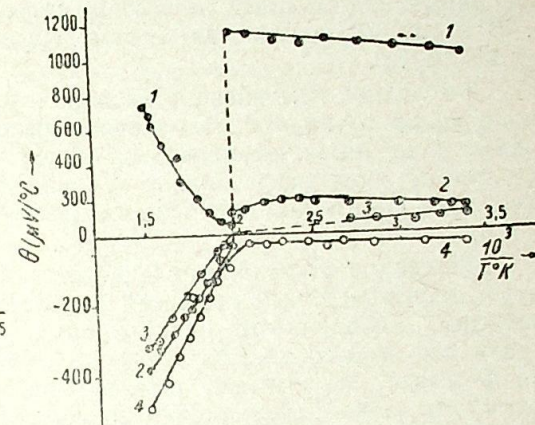


Рис. 5. Температурная зависимость термоэдс селена: 1—Se; 2—Se+0,1 вес. % Sb; 3—Se обескислороженный; 4—Se+0,1 вес. % Cd.

При плавлении селена ближний порядок не нарушается, исчезает лишь дальний порядок [22]. Поэтому σ селена должна меняться незначительно, что не подтвердилось опытом. Это противоречие оказалось связанным с наличием кислорода. Действительно, это подтверждается данными, приведенными на рис. 4.

Как видно, σ необескислороженного селена (кривая 1) при плавлении уменьшается скачком в ~ 1000 раз, а после обескислороживания (кривая 3), также при введении Mn (кривая 4) и Cd (кривая 5), исчезает. Исчезновение скачка σ при плавлении наблюдается также в присутствии примесей Sb, Na, Tl, S [7, 19].

Обычно селен в кристаллическом и жидком состояниях обладает p -типом проводимости, что имеет разные объяснения [10, 24, 25]. Учитывая сильное действие кислорода на σ селена, интересно было вести исследования по влиянию кислорода на механизм возникновения вести исследования по влиянию кислорода на механизм возникновения P -проводимости. С этой целью селен обескислороживали, а в необескислороженный селен вводили кислородкомпенсирующие примеси Sb и Cd и измеряли термоэдс (рис. 5). Термоэдс необескислороженного селена (кривая 1) в твердом и жидком состояниях с температурой растет скачком, уменьшаясь при плавлении, а механизм проводимости остается дырочным.

В случае обескислороживания (кривая 3) или при введении Sb (кривая 2) значение θ в твердом состоянии при 20° С уменьшается от 1000 до 150 мкВ/град, скачок при плавлении почти исчезает, а знак θ до плавления соответствует дырочной проводимости, после—элек-

тронной. При введении Cd (кривая 4) во всем температурном интервале отрицательная, что указывает на электронную проводимость.

Эти факты свидетельствуют о том, что примеси кислорода в селене, создавая акцепторные уровни. Sb, Cd, Mn, Na, взаимодействуя с кислородом в селене, образуют электронейтральные комплексы типа Sb_2O_3 , CdO , MnO (образование комплекса с кислородом типа MnO в случае Mn было показано также методом электронно-парамагнитного резонанса [26]). Это равносильно обескислороживанию и приводит к уменьшению концентрации дырок [8], следовательно σ приводит к уменьшению концентрации дырок (рис. 2, кривая 1 и рис. 3, кривая 1), и в конечном счете к изменению типа проводимости селена (рис. 5, кривые 2, 3, 4).

Эффективное сечение рассеяния этих комплексов для фононов будет в несколько раз больше, чем Φ введенных примесей. Поэтому при малых содержаниях примесей λ сильно уменьшается (рис. 1, кривые 1, 2) и для Φ получается значение значительно превышающее указанное в [18].

При полной компенсации кислорода λ , ρ , H и σ достигают минимума, после которого примеси в основном распределяются в дефектах, созданных указанными комплексами, образуя свободные локальные уровни. Вследствие этого эффективное сечение дефектов уменьшается, а концентрация носителей тока увеличивается, что приводит к росту λ , ρ , H и σ .

Обескислороживанием селена устраняется вероятность образования комплексов введенных примесей с кислородом, т. е. примеси, действуя свободно, увеличивают концентрацию носителей тока и σ . В этом случае дефекты создаются самими атомами примесей, поэтому значение Φ бывает значительно меньше, чем в случае обычного селена, и минимумы на концентрационной зависимости λ , ρ и H исчезают.

Вышеописанного можно достичь и путем введения оксидов кислородкомпенсирующих примесей, например, CdO (рис. 1, кривая 3 и рис. 3, кривая 2). Видно, что действительно и в этом случае минимум на кривой концентрационной зависимости λ исчезает и для Φ получается значение, соответствующее теории [18]. Увеличение же σ в случае CdO (рис. 3, кривая 2), по-видимому, связано с разложением некоторой части молекул CdO на Cd и O и их свободным действием.

Электропроводность монокристаллов селена, выращенных в атмосфере кислорода [27], на порядок больше, чем σ монокристаллов, выращенных в вакууме [27]. Это указывает на вхождение примеси кислорода в решетку селена.

Уменьшение λ чистого селена при обескислороживании показывает, что атомы кислорода упорядочивают решетку селена. Упорядочивающая роль кислорода в решетке селена видна также из того факта, что примеси кислорода увеличивают подвижность носителей в селене [30] и монокристаллы в атмосфере кислорода получают более совершенными, чем в вакууме [27]. Этим же объясняется неодинаковое значение λ для чистого селена, полученного в различных температурных условиях.

Учитывая высокое сродство к кислороду примесей Ti и Na, из значения их концентраций, при котором σ достигает минимума (т. е. кислород полностью компенсируется), вычислена концентрация ионизированных атомов кислорода в селене, она оказалась равной $\sim 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Это значение хорошо совпадает с концентрацией дырок в селене [8, 25, 31, 32] от 20°C до температуры плавления. Отсюда следует, что селен в твердом состоянии — примесный полупроводник. Так как в аморфных и жидких телах примесные уровни отсутствуют [21, 33], то плавление селена заканчивается исчезновением акцепторных уровней

кислорода и сильным уменьшением концентрации дырок [34], следовательно и σ (рис. 4, кривая 1).

Удалением кислорода (рис. 4, кривая 3) или компенсацией его действия примесями (рис. 4, кривая 4 и 5) селен приближается к собственному полупроводнику, поэтому концентрация носителей тока и, следовательно, σ при плавлении меняются незначительно. Действительно, из рис. 4 видно, что чем больше компенсировано действие кислорода, тем раньше начинается полупроводниковый ход σ и ее изменение при плавлении более разумно согласуется с сохранением ближнего порядка.

Влияние примеси кислорода на σ и ее температурную зависимость селена обнаружено также в [41, 42]. Выше $\sim 250^\circ\text{C}$ значение σ всех образцов почти одинаково и растет с температурой экспоненциально с наклоном $\sim 2 \text{ эВ}$ (рис. 4). Это свидетельствует об ослаблении действия примесей в жидком состоянии. На кривой спектрального распределения фоточувствительности получается два максимума. Для чистого селена первый максимум соответствует 0,56, второе 0,66 мк. Введением примеси Cd или обескислороживанием второй максимум смещается в сторону длинных волн от 0,66 до 0,72 мк.

Таким образом видно, что p -проводимость, прохождение через минимум σ , λ , ρ и H при введении примесей, аномально большое значение для Φ , сильное уменьшение σ и θ при плавлении, смещение второго максимума фотопроводимости связаны с присутствием в селене примеси кислорода и его комплексообразованием.

В пользу этого предположения говорит еще и то, что вследствие окислороживания обескислороженного селена путем выдержки в атмосфере кислорода при 215°C в течение 350 часов, n -проводимость переходит в p , значения λ (рис. 1, кривая 5) σ (рис. 2, кривая 5) и их концентрационная и температурная зависимости (рис. 3, кривая 2) приближаются к таковым для необескислороженного селена. Не наблюдается также перемены знака θ от P к n при введении Cd в виде CdO .

Подвижность носителей тока (u) в твердом селене всегда мала ($u < 10 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$) и растет с температурой экспоненциально [23, 25, 30, 32, 35, 40]. Как показали опыты, то же самое имеет место и в жидком состоянии.

Температурная зависимость σ (кривая 1), коэффициент Холла R (кривая 2) и холловская подвижность носителей тока u (кривая 3) для селена марки В₅ приведены на рис. 6. Видно, что σ селена в твердом и жидком состояниях растет с температурой экспоненциально, скачком уменьшаясь при плавлении. Экспоненциальная зависимость σ целиком обусловлена экспоненциальным ростом подвижности носителей тока, так как R в твердом и жидком состояниях с температурой почти не меняется (кривая 2), что свидетельствует о постоянстве концентрации ($\sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$) носителей тока при изменении температуры. Скачкообразное же уменьшение σ при плавлении вызывается как уменьшением n (~ 10 раз), так и уменьшением подвижности (~ 80 раз).

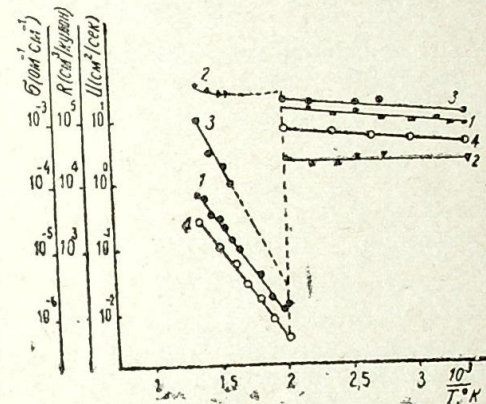


Рис. 6

Температурная зависимость электропроводности σ (1), холловской подвижности (3), постоянной Холла R (2) и вычисленной подвижности (4) носителей тока в селене

Независимость концентрации носителей тока от температуры показывает, что кристаллический и жидкий селен в указанном интервале температур является примесным полупроводником и что все примесные центры ионизированы. В работах [25, 30, 32, 35, 40, 44] малое значение подвижности и ее рост с температурой в кристаллическом селене объясняются тем, что отдельные, хорошо проводящие кристаллики окружены высокоомными аморфными прослойками, которые играют роль энергетического барьера при движении носителей тока. Однако такое утверждение о существовании в селене „двух фаз“ не является полностью обоснованным, так как в настоящее время имеется целый ряд работ, опровергающих данное утверждение [28, 40]. Рост n с температурой в жидком селене, где нет кристалликов, также отрицает указанную интерпретацию.

Подвижность носителей тока в селене, кристаллизованном под давлением, меньше, чем у кристаллизованного в атмосфере [45], с повышением температуры она растет и в аморфном селене [46], что не подтверждает указанное выше предположение.

При объяснении температурной зависимости n мы исходим из полимерной структуры селена [47]. Механизм проводимости полимеров складывается из двух процессов: движения носителей тока по молекуле и их перескокового перехода от молекулы к молекуле [48].

Так как частота этих перескоков определяется множителем $e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$, то n носителей тока растет с температурой по следующей формуле [36, 37, 49]:

$$n = \frac{d^2 \nu}{kT} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (1)$$

где $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (a — параметр решетки), ν — частота колебаний решетки, k — постоянная Больцмана.

Принимая $\Delta E \sim 0,075$ и $0,90$ эв соответственно в твердом и жидком селене, по формуле (1) была вычислена температурная зависимость подвижности носителей тока (рис. 6, кривая 4). Видно, что вычисленные значения n хорошо согласуются с экспериментальными данными. Уменьшение n при плавлении объясняется увеличением расстояния между молекулами (от 3,46 до 3,74 Å), из которых построен кристаллический и жидкий селен, так как это приводит к увеличению межмолекулярных барьеров, т. е. к росту ΔE .

После обескислороживания эффект Холла в селене нами обнаружен не был, но имеющиеся данные [14] приводят к заключению, что обескислороживание сопровождается уменьшением концентрации в ~ 100 раз и подвижности носителей тока в ~ 10 раз. Концентрация носителей тока с повышением температуры остается постоянной и в обескислороженном селене.

Указанные данные дают основание полагать, что атомы кислорода, располагаясь в концевках цепочки селена, создают акцепторные центры, что приводит к росту концентрации дырок и уменьшению межмолекулярных барьеров, т. е. к увеличению подвижности носителей тока.

Малое значение n и ее экспоненциальный рост с повышением температуры в твердом и жидком селене объясняются тем, что движение носителей тока в нем образуется перескакиванием из одной цепочки в другую, которые разделены энергетическими барьерами. Так как частота этих перескоков определяется множителем $e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$ [36—37],

то подвижность носителей тока с повышением температуры будет расти экспоненциально.

Исследование характеристик селеновых выпрямителей и фотоэлементов, изготовленных из селена разной чистоты, указывает на то, что кислород в селене создает уровни с глубиной залегания 0,7—0,8 эв. Наличие этих уровней обуславливает ограничение тока пространственным зарядом, что является причиной высоковольтной анодной поляризации, наблюдаемой в [38], обратимой электроформовки, расформовки селеновых выпрямителей [39].

Тот факт, что наибольшее эффективное выпрямление и вентильный фотоэффект в селене получаются на контакте с кадмием, объясняется не только образованием n CdSe, но и превращением P -слоя селена в n вследствие компенсации кислорода с диффундирующими примесями Cd.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козловский И. Л., Наследов Д. Н. ЖТФ, 13, 627, 1943.
2. Наследов Д. Н., Соколов Б. В. ЖТФ, 27, 704, 1958.
3. Чижиков Д. М., Счастливый В. П. Селен и селениды. Изд. АН СССР, М., 1964.
4. Алиев Г. М., Абдуллаев Г. Б. ДАН СССР, 116, 598, 1957.
5. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М., Башшалиев А. А., Алиев Г. М. Тр. III совещания по полупроводниковым материалам. Изд. АН СССР, М., 1958.
6. Регель А. Р., Тагиев Б. Г. ФТТ, 5, 2914, 1963; 6, 1001, 1429, 1964.
7. Абдинов Д. Ш., Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М. ДАН Азерб. ССР, 1964, № 2.
8. Мехтиева С. И., Алиев Г. М., Абдинов Д. Ш. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1964 № 4.
9. Алиев Б. Д., Абдуллаев Г. Б. ДАН Азерб. ССР, 1959, № 10.
10. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М., Баркинхоев Х. Г. ФТТ, 6, 1020, 1964.
11. Bogelius G., Pihlstrand F., Anderson J. and Gulberg K. Ark. Mat. Astar. Och. Fysik., 30A, 14, 1944.
12. Мехтиева С. И., Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 2.
13. Eckart F. Ann. Phys., 14, 233, 1954.
14. Козырев П. Т. ФТТ, 1, 113, 1959.
15. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М., Ахундова С. А. ФТТ, 3, 326, 1961.
16. Алиев Б. Д., Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М. Тр. Ин-та физики АН Азерб. ССР, 11, 5, 1963.
17. Аскеров Ч. М., Алиев Г. М., Ахундова Э. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1964, № 1.
18. Иоффе А. В., Иоффе А. Ф. ДАН СССР, 98, 757, 1954.
19. Велиев М. И., Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 1.
20. Регель А. Р. Стресс и физические свойства германия в жидком состоянии. Изд. Киевского гос. ун-та им. Шевченко, 1954.
21. Губанов А. И. Квантово-электронная теория аморфных полупроводников. Изд. АН СССР, М.—Л., 1962.
22. Prins J. A. and Dekesyer. Physika, 4, 900, 1937.
23. Stucke J. und Wendi K. Phys. stat. sol. 8, 543, 1965.
24. Коломиец Б. Т. Сб., посвященный 70-летию зкад. А. В. Иоффе. Изд. АН СССР, М., 1950.
25. Plesner K. W. Proc. Phys. soc., B. 64, 671, 1951.
26. Абдуллаев Г. Б., Ибрагимов Н. М., Мамедов Ш. В., Джуварлы Т. Ч. ДАН Азерб. ССР, 1965, № 4.
27. Джалилов Н. З., Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 3.
28. Eckart E., Henrion W. und Peibst H. Zs. Phys. Chem., 227, 93, 1964.
29. Eckart F. und Henrion W. Phys. stat. sol. 2, 841, 1962.
30. Henkels H. W. Phys. rev., 77, 734, 1950.
31. Henkels H. W. J. appl. phys., 22, 916, 1951.
32. Иглицин М. И. ЖТФ, 12, 885, 1952.
33. Коломиец Б. Т., Назарова Т. Ф. ФТТ, 2, 174, 1960.
34. Абдинов Д. Ш., Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1965, № 4.
35. Nijland L., Philips. Res. Rep., 9, 259, 1954.

36. Иоффе А. Ф. ФТТ, 1, 157, 1959.
 37. Клиггер М. И. Автореф. докт. дисс. Ин-т физики металлов АН СССР, Свердловск, 1964.
 38. Наследов Д. Н. и Малышев Е. К. ЖТФ, 16, 1135, 1946.
 39. Абдуллаев Г. Б. Полупроводниковые выпрямители. Изд. АН Азерб. ССР, 1958.
 40. Gobrecht H. Fausend A. Physics of Sem. Proc. of the Zintern. Con. Paris 1964.
 41. Eckart F. Mon. Deut Akad. Wiss. Berlin, 3, 162, 1961.
 42. Eckart F. Phys stat. Solidi, 2, 23, 1962.
 43. Eckart F. Ann. Phys., 17, 84, 1956.
 44. Мейлихов Е. З. ФТТ, 7, 1743, 1965.
 45. Наследов Д. Н., Козырев П. Т. ЖТФ, 24, 2151, 1964.
 46. Spear W. E. Proc. Phys. soc., 76, 816, 1960.
 47. Hippel A. V. J. chem. phys., 16, 372, 1943.
 48. Каргин В. А., Кренцель В. А. Органические полупроводники. Изд. АН СССР, М., 1965.
 49. Heikes R. R. J. chem. phys., 26, 582, 1957.

А. М. ПАШАЕВ, М. И. ИГЛИЦЫН, И. Н. ТУРКИН

ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ СИЛЬНОЛЕГИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Работа приборов основана на индикации изменений добротности колебательного контура при внесении в поле датчика полупроводникового образца. Вихревые токи, наводимые в образце, изменяют добротность датчика высокочастотного поля, внося тем самым дополнительные потери в цепь колебательного контура. Изменение электрических параметров датчиков, питаемых высокочастотным током, зависит при данной частоте тока от геометрических размеров и проводимости образца, находящегося вблизи датчика, а также относительного расположения датчика и образца.

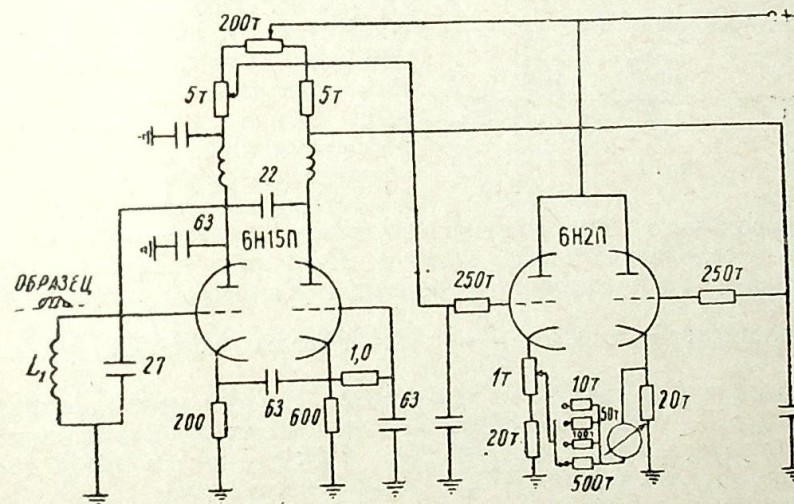


Рис. 1

Объектами измерений в нашем случае были кремний и германий. Для сильнолегированных кремния и германия величина удельного сопротивления колеблется в пределах $0,0001 \div 10 \text{ ом} \cdot \text{см}$. Для измерения такого диапазона величин электропроводности нами использовались два типа высокочастотных датчиков:

- 1) обыкновенная катушка индуктивности, используемая на частоте 60 мГц [1].
- 2) ферритовый торроид с воздушным зазором, на который намотаны витки, соответствующие частоте 2 мГц [2].

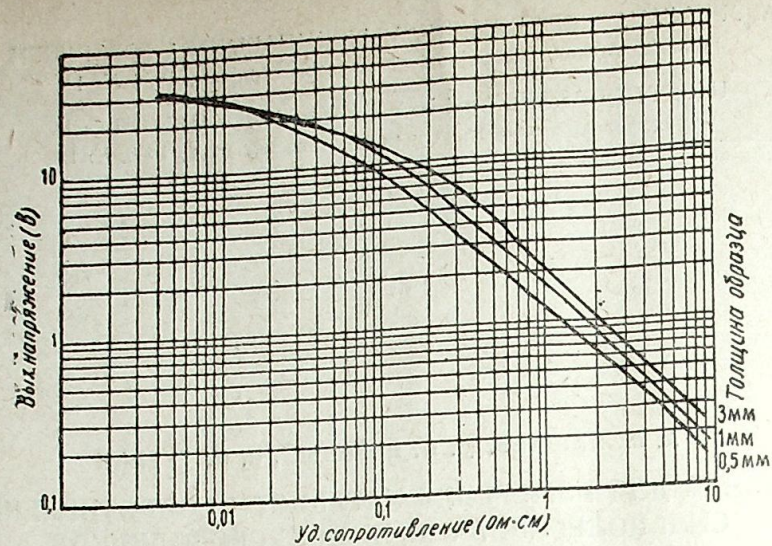


Рис. 2

Первый тип датчика исследовался в схеме, изображенной на рис. 1. Датчик представляет собой катушку индуктивности с латунным сердечником для рассеяния и тем самым создания рабочего высокочастотного поля. Диаметр катушки 5 мм, поэтому рабочая плоскость образца, прикладываемая к датчику, должна быть не менее 5 мм (8—9 мм). Образец располагается по центру катушки и может передвигаться в плоскости торца катушки в двух взаимно перпендикулярных направлениях благодаря микроманипулятору. Таким образом, осуществляется фиксация расстояния между катушкой и образцом.

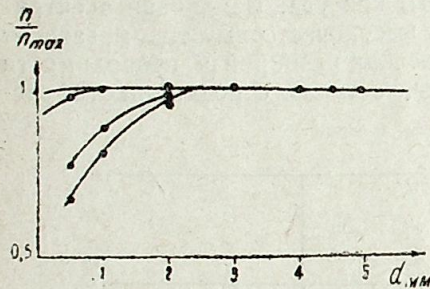


Рис. 3

Градуировочные кривые для данного типа датчика показаны на рис. 2. Было исследовано также влияние толщины и состояния поверхности образца на показания прибора при частоте 60 мГц. На рис. 3 представлена зависимость $\frac{n}{n_{\max}}$ для четырех значений удельного

сопротивления (0,001; 0,01; 0,1; 4,5 ом·см). По этим кривым определяется минимальная толщина образца, начиная с которой изменения не от зависят толщины. Так, для $\rho = 0,001$ ом·см толщина образца должна быть более 0,5 мм, а для $\rho = 0,1$ ом·см — более 2 мм.

Зависимость показания индикатора от состояния поверхности для образца с $\rho = 0,1$ ом·см представлена в табл. 1.

Таблица 1

Состояние поверхности	Показание индикатора (n)
Срез алмазным диском	12,5
Грубая шлифовка	12,7
Тонкая шлифовка	12,7
Полировка	12,7

Как видно, отличие имеется лишь для поверхности непосредственно после среза алмазным диском. Это объясняется, по-видимому, неровностью поверхности образца после среза, а следовательно неравномерным прижимом к датчику, что ликвидируется при шлифовке.

Второй тип датчика исследовался в схемах, изображенных на рис. 4, 5.

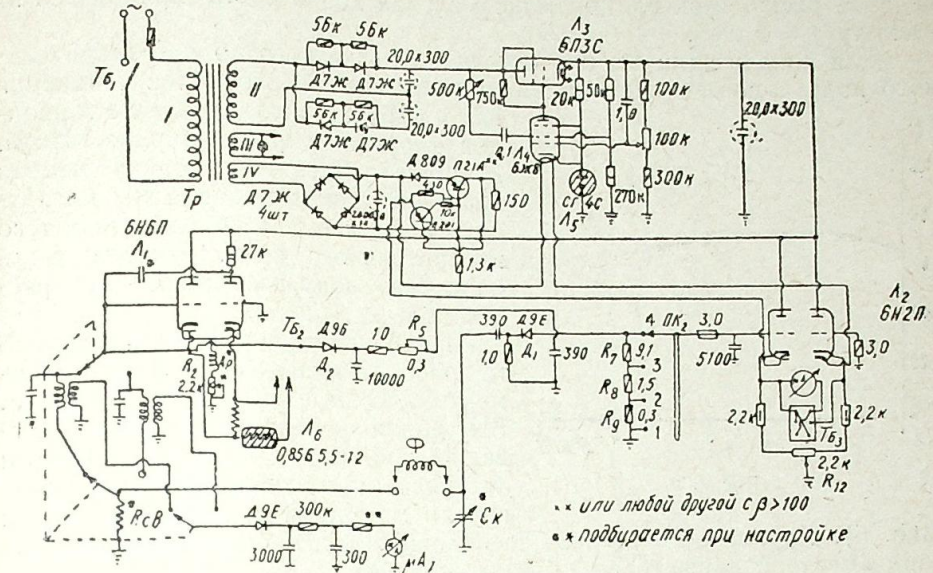


Рис. 4

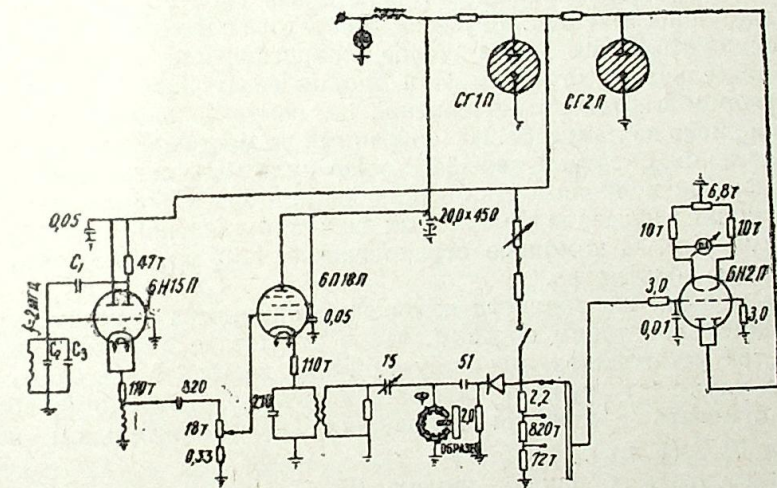


Рис. 5

В табл. 2 показаны технические и конструктивные данные одного из ферритовых датчиков, используемых нами.

Таблица 2

f мГц	D _н	D _в	h	l	d	μф	n	Марка обмоточного провода
2	8,5	3,5	2,5	0,6	0,25	15—20	47	ЛЭШО 12 × 0,1

D_n и D_v — наружный и внутренний диаметры,
 h — толщина торроида,
 μ_f — магнитная проницаемость феррита,
 n — число витков обмотки,
 f — рабочая частота.

Зависимость добротности ферритового датчика от частоты представлена на рис. 6. Как видно, максимальная добротность приходится на частоту $f = 2$ мГц.

Для локализации высокочастотного магнитного поля (измерительного поля) и повышения тем самым разрешающей способности прибора нами выбраны малые размеры торроидов феррита и малая ширина зазора. В щель вставляется тонкая медная пластина для вытеснения ВЧ магнитного поля, т. е. для создания рабочего измерительного поля. Ширина щели определяет зону распространения рассеянной части поля.

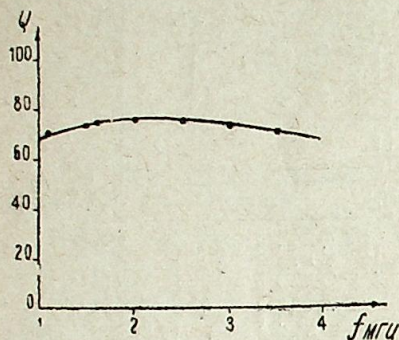


Рис. 6

(рис. 5). Другой — с датчиком, расположенным на крышке кожуха прибора вместе с держателем образца (слитка).

Принципиальная схема данного варианта прибора представлена на рис. 4. Генератор собран на лампе $Л_1$ — 6Н6П по схеме с катодной связью. Выходное напряжение генератора в процессе измерений поддерживается постоянным. Развязка генератора с измерительным контуром осуществляется через малое сопротивление $R_{св}$, включенное последовательно с датчиком Φ и блоком воздушных конденсаторов. Индикатором выходного напряжения на измерительном контуре является вольтметр на лампе 6Н2П, собранный по мостовой схеме с сильной отрицательной обратной связью. Дрейф нуля вольтметра должен быть много меньше величины отклонения индикатора на самом высокочастотном конце диапазона измеряемых значений удельного сопротивления ($1-10$ ом·см). С помощью переключателя ПК₂ можно менять чувствительность вольтметра.

Для повышения точности измерений применена компенсационная схема измерений таким образом, что в отсутствие образца показания вольтметра устанавливаются на нуль. Такая дифференциальная система намного улучшает чувствительность и точность измерений, ибо позволяет отмечать изменения напряжения на измерительном контуре порядка 10^{-3} в (1 мВ).

Выпрямитель собран на диодах Д7Ж по схеме удвоения. Электронный стабилизатор осуществляет стабилизацию высокого напряжения. Имеется стабилизация и по накалу для управляющей лампы стабилизатора высокого напряжения 6Ж8 и лампы вольтметра 6Н2П посредством схемы на транзисторах П21А, П201 и диоде Д809.

Принципиальная схема второго варианта представлена на рис. 5. Генератор собран на двойном триоде 6Н15П по схеме с отрицательным внутренним сопротивлением, причем выходное напряжение снимается с катодной нагрузки L . Для развязки генератора с измерительным контуром применен буферный каскад, собранный на лампе 6П18П с нагрузкой в катод, что обеспечивает малое выходное сопротивление

и позволяет согласовать ее с измерительным контуром, подключаемым к буферному каскаду посредством линии (низкоомный вход). Индикатор аналогичен тому, какой применен в первом варианте.

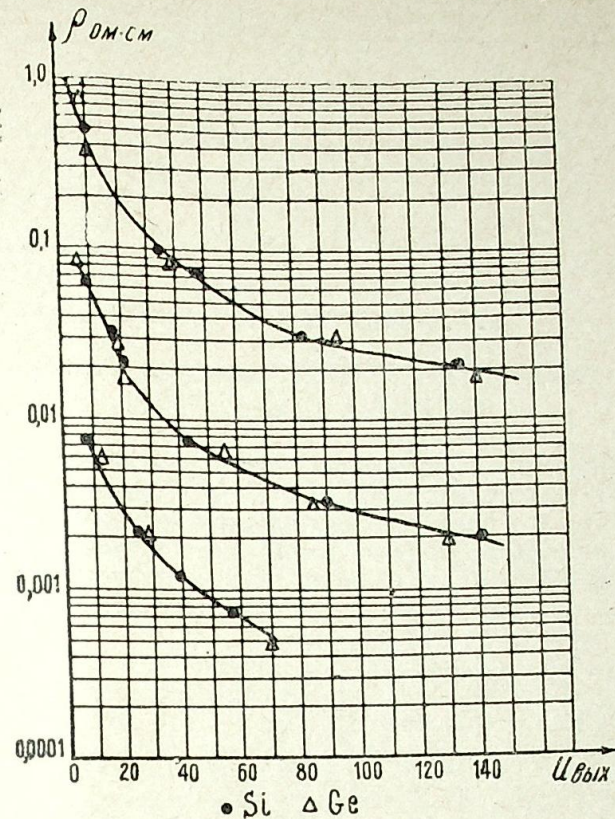


Рис. 7

Градуировочные кривые для Si и Ge представлены на рис. 7. Нетрудно заметить, что кривые для них совпадают, это объясняется практически одинаковой для них величиной ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Brice J., Moore P., Brit A. J. Scient. Instrum. 38, 307, 1961.
2. Фистуль В. И., Оржевский. "Заводская лаборатория". 29, 1327, 1963.

А. М. Пашаев, М. И. Иглитсин, И. Н. Туркин

Чоxашгарлы жарымкечиричилэрин хусуси мугавимэтини өлчмэк үчүн чиһазлар

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә чоxашгарлы жарымкечиричилэрин хусуси мугавимэтини өлчмэк үчүн гурулмуш чиһазлар тәсвир едилир. Һәмин чиһазлар бу кәмијјәти контактсыз үсулла өлчмәјә имкан верирләр. Чиһазлар рәгс контурунун кејфијјәтинин дәјишмәси әсасында гурулмушлар.

Рәгс контуру илә жарымкечиричи нүмунэлэрин әлагәси јүксәк тезликдә ишләјән датчикләр васитәсилә јараныр. Мәгаләдә оптимал өлчү шәраити мугәјјән едилир.

В. Б. АНТОНОВ, Я. Н. НАСИРОВ

ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДОГО РАСТВОРА $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$

В настоящее время интенсивно исследуются теллурид германия, легированный различными добавками, и твердые растворы на его основе, являющиеся одними из наиболее эффективных материалов для термоэлектрических преобразователей. Данная работа посвящена исследованию электрических свойств псевдобинарной системы $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$, которую, возможно, следует рассматривать как тройной твердый раствор вида $\text{GeTe}-\text{Sb}_2\text{Te}_3-\text{Cu}_2\text{Te}$.

Исследование микроструктуры литых отожженных сплавов по разрезу $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ показало, что однофазными являются сплавы, соответствующие содержанию CuSbTe_2 в GeTe до 8 мол. %. Исследования термоэлектрических свойств проводились на псевдобинарных твердых растворах 98% GeTe —2% CuSbTe_2 , 96% GeTe —4% CuSbTe_2 , 94% GeTe —6% CuSbTe_2 и 92% GeTe —8% CuSbTe_2 : если рассматривать эти системы как тройные твердые растворы, то исследованные составы можно представить в виде

$$1-2x(\text{GeTe}) + x(\text{Sb}_2\text{Te}_3) + x(\text{Cu}_2\text{Te}),$$

где $x=0,01; 0,02; 0,03; 0,04$.

§ 1. Зависимость термоэлектрических свойств твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ от состава при $T=300^\circ\text{K}$

Зависимость электропроводности σ , термоэдс α , теплопроводности χ и концентрации носителей тока n от состава твердого раствора при комнатной температуре показана на рис. 1. Как видно, в области малых концентраций растворенного CuSbTe_2 (до ~4 мол. %) наблюдается резкое снижение концентрации носителей тока и связанные с этим уменьшение электропроводности и рост термоэдс.

С ростом содержания CuSbTe_2 концентрация носителей тока уменьшается менее резко. Подвижность носителей тока, рассчитанная на основе измерений постоянной Холла, в области содержания тройного компонента до 4 мол. % увеличивается более чем в два раза, а затем начинает падать (рис. 2). Такое резкое снижение концентрации носителей тока и указанная выше зависимость их подвижности от состава могут быть объяснены следующим образом. При содержании из-под германия в дефектной решетке GeTe , а атомы теллура образуют новые вакансии, которые, в свою очередь, частично заполняются

атомами сурьмы и меди. Этим объясняется, по-видимому, тот факт, что число атомов на кубический сантиметр, соответствующее 4 мол. % CuSbTe_2 , значительно превышает число вакансий в GeTe ($\sim 3 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$), поскольку при приведении второго компонента происходит заполнение как имевшихся, так и вновь образовавшихся вакансий.

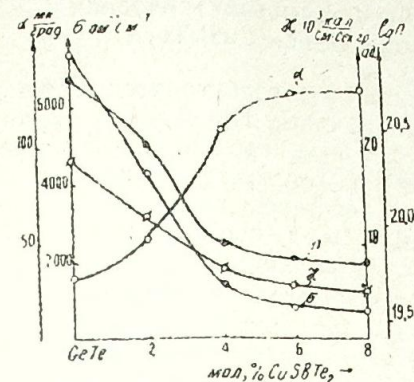


Рис. 1
Зависимость термоэдс (α), электропроводности (σ), теплопроводности (χ) и концентрации носителей тока (n) от состава

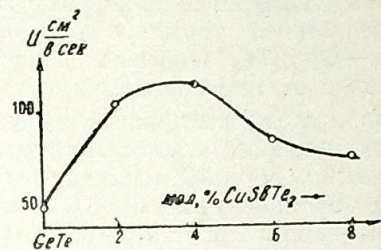


Рис. 2
Зависимость подвижности носителей тока от состава

Заполнение вакансий приводит к снижению числа точечных дефектов, играющих роль акцепторов, и, следовательно, снижает концентрацию носителей тока. Подвижность последних при этом растет.

С дальнейшим ростом содержания CuSbTe_2 , когда возможное количество вакансий уже заполнено, начинается, по-видимому, образование твердого раствора. При этом могут происходить значительные

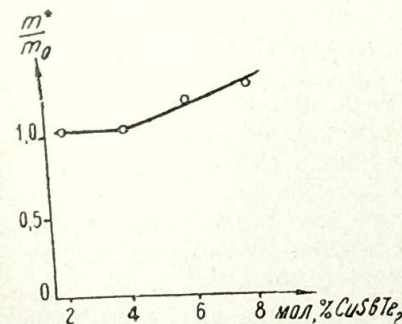


Рис. 3
Зависимость эффективной массы плотности состояний от состава

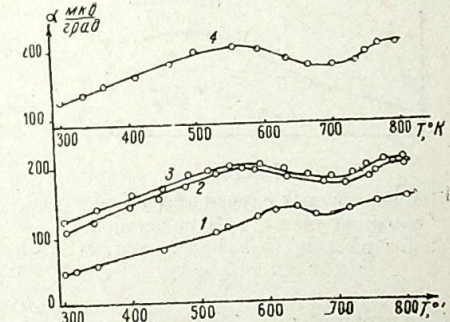


Рис. 4
Температурные зависимости термоэдс для твердых растворов 98% GeTe —2% CuSbTe_2 (1); 96% GeTe —4% CuSbTe_2 (2); 94% GeTe —6% CuSbTe_2 (3) и 92% GeTe —8% CuSbTe_2 (4).

изменения зонной структуры. На рис. 3 показано изменение эффективной массы плотности состояний, рассчитанной на основе измерений термоэдс и концентрации носителей тока, для системы $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$. Как видно из графика, до содержания тройного компонента ~4 мол. %, эффективная масса практически не меняется, что соответствует заполнению вакансий в дефектной решетке GeTe , а при большом содержа-

нии CuSbTe_2 начинает расти. Это связано, по-видимому, с тем, что при образовании твердого раствора происходит некоторое изменение зонной структуры. Подвижность носителей тока при этом падает за счет появления дополнительных центров рассеяния, что обычно имеет место при образовании твердых растворов.

§ 2. Температурные зависимости термоэлектрических свойств твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$

Измерение температурных зависимостей термоэлектрических свойств проводилось на 2—3 образцах каждого состава. Приведенные кривые являются усредненными по данным 2—3 измерений. Коэффициент термоэдс измерялся в интервале 300—800°K. Температурная зависимость коэффициента термоэдс для четырех составов твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ показана на рис. 4. Для всех составов зависимость термоэдс от температуры имеет сложный характер.

Одним из возможных путей объяснения наблюдаемой в эксперименте сложной зависимости термоэдс от температуры является, по-видимому, предположение о том, что сложный ход зависимости $\alpha(T)$ обусловлен сложной структурой валентной зоны. При образовании твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$, вероятно, сохраняется сложная структура валентной зоны теллурида германия с двумя сортами дырок [1], меняются лишь ее параметры.

Причем, поскольку концентрация носителей тока в теллуриде германия высока, то уровень Ферми расположен достаточно глубоко в подзоне „легких“ дырок, вблизи области перекрытия подзон „легких“ и „тяжелых“ дырок, ввиду чего влияние „тяжелых“ дырок на суммарную термоэдс начинает сказываться уже при комнатных температурах. В твердых же растворах $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ концентрация носителей тока значительно ниже и, следовательно, уровень Ферми удален от области перекрытия подзон „легких“ и „тяжелых“ дырок, причем тем сильнее, чем ниже концентрация носителей тока. Ввиду этого величина энергии носителей, необходимая для заброса последних в подзону с большей плотностью состояний, будет достигаться при более высоких температурах.

Следовательно, аномалии, связанные со сложной структурой зон, также должны проявляться при более высоких температурах.

На рис. 5 представлена схема, иллюстрирующая два возможных случая проявления сложной структуры валентной зоны на температурных зависимостях термоэдс.

Исходя из изложенного выше, можно объяснить экспериментальные зависимости термоэдс от температуры, показанные на рис. 4. Для всех составов твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$, которые в зависимости от содержания CuSbTe_2 имеет набор концентраций носителей тока от $2,6 \cdot 10^{20}$ до $\sim 5,0 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, в области температур от комнатной до 520—620°K (в зависимости от концентрации носителей тока) термоэдс растет, что соответствует примесной проводимости. Причем влияние „тяжелых“ дырок на рост термоэдс сказывается сравнительно слабо (для

составов с $n > 10^{20} \text{ см}^{-3}$) или практически совсем не сказывается (для $n < 10^{20} \text{ см}^{-3}$). С дальнейшим ростом температуры наблюдается некоторое уменьшение термоэдс, связанное с приближением области собственной проводимости и начинающимся забросом электронов из зоны проводимости в подзону „легких“ дырок.

Тот факт, что влияние носителей другого знака сказывается раньше, чем осязаемое влияние „тяжелых“ дырок, указывает на то, что величина энергетического зазора между подзонами с различной плотностью состояний, по-видимому, несколько превышает ширину запретной зоны. Поскольку подзоны с различной плотностью состояний смещены относительно друг друга на некоторый энергетический зазор, то заброс носителей в подзону „тяжелых“ дырок из зоны проводимости будет иметь место при гораздо более высоких температурах, чем в подзону „легких“ дырок.

Поэтому с дальнейшим повышением температуры будет увеличиваться вклад „тяжелых“ дырок в процессы проводимости, в результате чего происходит сначала замедление падения суммарной термоэдс, а затем, когда концентрация „тяжелых“ дырок, участвующих в процессах проводимости, становится достаточно высокой, суммарная термоэдс начинает расти. И, наконец, падение термоэдс в области температуры $\sim 800^\circ\text{K}$ связано с наступлением собственной проводимости и в подзоне „тяжелых“ дырок.

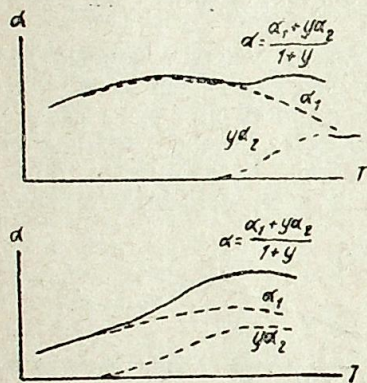


Рис. 5

Два возможных случая проявления сложной структуры валентной зоны на температурных зависимостях термоэдс

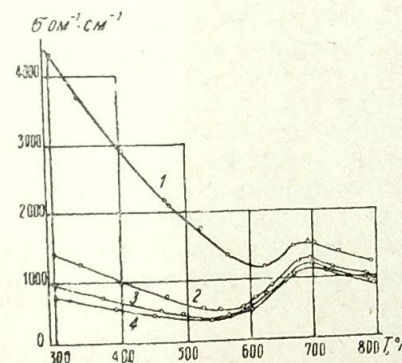


Рис. 6

Температурные зависимости электропроводности для твердых растворов: 98% $\text{GeTe}-2\% \text{CuSbTe}_2$ (1); 96% $\text{GeTe}-4\% \text{CuSbTe}_2$ (2); 94% $\text{GeTe}-6\% \text{CuSbTe}_2$ (3) и 92% $\text{GeTe}-8\% \text{CuSbTe}_2$ (4).

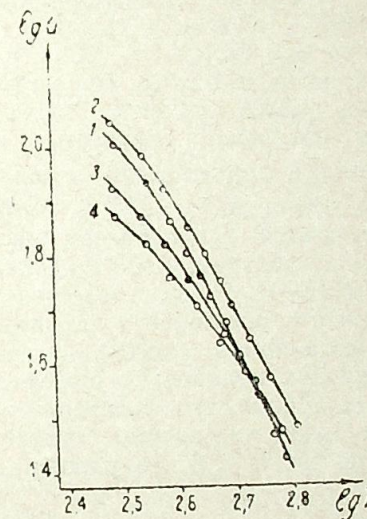


Рис. 7

Температурные зависимости холловской подвижности для твердых растворов: 98% $\text{GeTe}-2\% \text{CuSbTe}_2$ (1); 96% $\text{GeTe}-4\% \text{CuSbTe}_2$ (2); 94% $\text{GeTe}-6\% \text{CuSbTe}_2$ (3) и 92% $\text{GeTe}-8\% \text{CuSbTe}_2$ (4).

Таким образом, аномальный характер температурной зависимости термоэдс в твердых растворах $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ обусловлен, по-видимому, сложной структурой валентной зоны.

Зависимость электропроводности от температуры для твердого раствора $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ приведена на рис. 6. Как видно из рисунка, зависимость удельной электропроводности от температуры также имеет аномальный характер, связанный со сложностью зонной струк-

туры. С этой точки зрения можно объяснить температурные зависимости электропроводности следующим образом. В области температур от комнатной до 50—600°K (в зависимости от концентрации носителей), соответствующей примесной проводимости, электропроводность с температурой падает. Концентрация носителей тока в этой области температур остается постоянной и электропроводность падает ввиду падения подвижности.

С дальнейшим ростом температуры электропроводность начинает несколько увеличиваться, что связано, по-видимому, с забросом электронов в подзону „легких“ дырок. При дальнейшем увеличении температуры растущее влияние подзоны „тяжелых“ дырок приводит к падению электропроводности, поскольку растет доля участия в процессах проводимости „тяжелых“ дырок с малой подвижностью.

На рис. 7 показаны температурные зависимости подвижности носителей тока для твердых растворов $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$, рассчитанные исходя из холловских измерений. Приведение к одинаковой степени вырождения показывает, что с изменением концентрации носителей тока изменяется закон зависимости подвижности от температуры (от $\mu \sim T^{-3.1}$ до $\mu \sim T^{-1.6}$). Такое изменение подвижности с температурой, по-видимому, можно объяснить тем, что с уменьшением концентрации носителей тока уровень Ферми все сильнее удаляется от области перекрытия подзон „легких“ и „тяжелых“ дырок и, следовательно, уменьшается дополнительное падение подвижности, вызванное участием „тяжелых“ дырок в процессах проводимости. На твердом растворе 92% $\text{GeTe}-8\% \text{CuSbTe}_2$, имеющем наиболее низкую концентрацию носителей тока, дополнительное падение подвижности, вызванное участием в процессах проводимости „тяжелых“ дырок, в исследованном интервале температур практически почти не проявляется, и зависимость подвижности от температуры для него ($\mu \sim T^{-1.6}$) близка к теоретической ($\mu \sim T^{-3/2}$), которую дает теория для случая рассеяния на тепловых колебаниях кристаллической решетки.

Таким образом, можно сделать заключение, что в твердом растворе $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$, в области температур, близких к комнатным, подвижность носителей тока, по-видимому, определяется комбинацией двух механизмов рассеяния—рассеяния на дефектах решетки и на акустических колебаниях решетки. С дальнейшим ростом температуры начинает преобладать рассеяние на акустических колебаниях решетки.

В заключение авторы считают приятным долгом выразить благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву за интерес к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломец Н. В., Лев Е. Я., Сысоева Л. М. ФТТ, т. 6, вып. 3, 1964.

В. Б. Антонов, Ж. Н. Насиров

$\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ бэрк мэллулунун термоэлектрик хассэлэри

ХҮЛАСЭ

Тэдгигатлар көстэрир ки, CuSbTe_2 бирлэшмэсинин GeTe -дэ хэлл олунма сэрхэдди тэхминэн 10—12%-э чатыр. Өлчү апарылмыш нүмүнэлэрин тэркиби ашагыдакы кими көтүрүлмүшдүр: 98% $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$; 96% $\text{GeTe}-4\% \text{CuSeTe}$; 94% $\text{GeTe}-6\% \text{CuSbTe}_2$; 92% $\text{GeTe}-8\% \text{CuSeTe}_2$ вэ 90% $\text{GeTe}-10\% \text{CuSbTe}_2$. Бэрк мэллулларда електриккечирмэ, термоэлектрик хэрэкэт гүввэси, истиликкечирмэ вэ жүкдашычыларын концентрасијасынын мэллулун тэркибиндэн вэ температурдан асылы-

лыгы өјрәнилмишдир. Тэчрүбэләр көстэрир ки, CuSbTe_2 -нин аз мигдарында мэллулда жүкдашычыларын концентрасијасы GeTe -а көрә бир тәртиб ашагыдыр ки, бу да әсас бирлэшмәдә Ge -ун ваканс јерлеринин јутулмасы илә әлагәдардыр.

Өјрәнилмиш бэрк мэллулларда тәјин олунмушдүр ки, GeTe бирлэшмэсинин золаг гурулушу дәјишмәмишдир. Термоэлектрик нөгтејинәзәриндән мэллуллардан ән чох мараг кәсб едәни 96% GeTe -вә 4% CuSeTe -дир.

Јүкдашычыларын јүрүклүјүнүн температурдан асылылыгы көстэрир ки, јүрүклүлүк $U \sim T^{-1.9 \div -2.4}$ гануна табедир. Белә асылылыг валент золагынын мүрәккәблији илә әлагәдардыр вә золагын гурулушунун параметрләриндән асылыдыр.

Алынмыш нәтичәләр GeTe бирлэшмэсинин јарымкечиричи тәбиәтә малик маддә олмасы барәдә әсас верир.

М. А. МАМЕДОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ КОМЕТЫ 1965 F СЕКИ-ИКЕЙЯ

18 сентября 1965 г. японские любители астрономии Цутомо Секи и Каору Икейя обнаружили в созвездии Гидры новую комету. 24 и 25 сентября новая комета, названная по имени своих первооткрывателей кометой Секи-Икейя, наблюдалась в обсерватории Скальнате Плесо (Чехословакия) в виде диффузного объекта с центральным сгущением восьмой звездной величины. 27 сентября 1965 г. Институт теоретической астрономии АН СССР (ИТА) получил из Киева по телеграфу три положения кометы, впоследствии опубликованные в „Кометном циркуляре“ № 29 от 29 сентября 1965 г.

Для определения уверенной орбиты по трем наблюдениям необходимо, чтобы отдельные наблюдения были разделены интервалом в несколько дней. Полученные нами наблюдения не удовлетворяли этому условию: два наблюдения разделены интервалом в один день (наблюдения 24 и 25 сентября). Тем не менее мы сделали попытку определить орбиту кометы по этим трем наблюдениям. При ручных вычислениях ради простоты все орбиты по трем наблюдениям вычисляются как параболические. Незадолго перед открытием кометы Секи-Икейя в ИТА были разработаны две программы для вычисления орбит комет: первая позволяет вычислять параболическую орбиту, вторая—орбиту, близкую к параболе.

Вообще говоря, вторая программа позволяет определять более уверенную первоначальную орбиту. Однако ввиду того, что одно из имевшихся в нашем распоряжении наблюдений было приближенным (наблюдения 18 сентября), не было особого смысла получать орбиту, близкую к параболической. Поэтому вычисленные нами орбиты кометы Секи-Икейя в большинстве параболические.

Все вычисления выполнялись на машине БЭСМ-2 Ленинградского вычислительного центра АН СССР. Вычисление первой орбиты было основано на трех следующих наблюдениях:

1965 сент. 18.83	8 ^h 45 ^m .4	—8°38'	Обсерватория положение при открытии Скальнате Плесо
24.13920	9 ^h 06 ^m 51 ^s .58	—9°55' 42".9	
25.13359	9 11 25.29	—10°11' 12".8	

Вычисленная на основе этих наблюдений орбита помещена в табл. 1 под номером 1. Полученные элементы орбиты кометы были сообщены 27 сентября в Астросовет, в редакцию „Кометного циркуляра“ и в другие заинтересованные организации.

Орбиты кометы Секи-Икейя, полученные в ИТА

	I	II	III	IV	V	VI
Элементы орбиты	сентябрь 18.83 24.50429 25.13359	сентябрь 26.10159 30 10584 октябрь 3.10780	сентябрь 24.13920 29 10440 октябрь 3.08068	сентябрь 22.51061 28.10422 октябрь 3.10780	сентябрь 22.51061 29.09186 октябрь 3.80868	сентябрь 22 51061 29 10440 октябрь 6.43428
T	1965 окт. 23.220	1965 окт. 21.54	1965 окт. 21.189	1965 окт. 21.189	1965 окт. 21.184	1965 окт. 21.180
ω	45° 026	63° 199	67° 745	67° 980	68° 167	68° 264
Q	234.523	335.967	344.148	344.584	344.948	345.126
i	50.341	140.038	141.564	141.624	141.670	141.701
q	0.003575	0.004417	0.007 20	0.007189	0.007351	0.007434

Таблица 2

Эфемериды кометы Секи-Икейя через каждые 15 мин 21 октября 1965 г.

И. Т.	α _{1950.0}	δ _{1950.0}	p	r
Окт. 21 0 ^h 15 ^m	13 ^h 39 ^m .3	— 11° 15'	0.970	0.0296
30	13 39 .5	— 11 13	.971	.0283
45	13 39 .8	— 11 12	.972	.0271
1 00	13 40 .0	— 11 10	.973	.0258
15	13 40 .3	— 11 07	.974	.0245
30	13 40 .6	— 11 05	.975	.0232
45	13 40 .9	— 11 03	.976	.0218
2 00	13 41 .0	— 11 01	.977	.0204
15	13 41 .4	— 10 58	.978	.0190
30	13 41 .8	— 10 56	.979	.0176
45	13 42 .0	— 10 53	.981	.0162
3 00	13 42 .2	— 10 51	.982	.0148
15	13 42 .5	— 10 47	.984	.0133
30	13 42 .7	— 10 44	.986	.0119
45	13 42 .9	— 10 41	.988	.0105
4 00	13 43 .1	— 10 37	.990	.0092
15	13 43 .1	— 10 34	.992	.0080
30	13 43 .3	— 10 30	.994	.0073
45	13 43 .1	— 10 26	.997	.0070
5 00	13 42 .9	— 10 23	.999	.0074
15	13 42 .6	— 10 0	1.002	.0082
30	13 42 .2	— 10 10	1.003	.0093
45	13 41 .8	— 10 17	1.005	.0106
6 00	13 41 .4	— 10 17	1.006	.0106
15	13 41 .00	— 10 16	1.007	.0130
30	13 40 .6	— 10 16	1.008	.0149
45	13 40 .2	— 10 16	1.009	.0164
7 00	13 39 .9	— 10 16	1.010	.0178
15	13 39 .5	— 10 16	1.010	.0192
30	13 39 .2	— 10 16	1.011	.0206
45	13 38 .9	— 10 16	1.012	.0220
8 00	13 38 .6	— 10 16	1.012	.0233
15	13 38 .3	— 10 16	1.013	.0246
30	13 37 .9	— 10 17	1.013	.0259
45	13 37 .7	— 10 17	1.013	.0272
9 00	13 37 .4	— 10 17	1.014	.0285

Таблица 3

Эфемериды кометы Секи-Икея с 21 до 25 октября 1965 г.

И. Т.	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	ρ	r
Октябрь 21 01 ^h	13 ^h 40 ^m .6	— 11° 00'	0.974	0.0242
02	13 41 .7	— 10 56	.979	.0186
03	13 42 .7	— 10 45	.985	.0127
04	13 43 .3	— 10 0	.994	.00789
05	13 42 .4	— 0 19	1.003	.00927
06	13 40 9	— 10 15	1.003	.0148
07	13 39 .4	— 10 15	1.012	.0206
08	13 38 .1	— 10 16	1.014	.0261
09	13 36 .7	— 10 18	1.015	.0312
10	13 5 .9	— 10 19	1.517	.0361
11	13 34 .9	— 10 21	1.018	.0408
12	13 33 .9	— 10 24	1.019	.0452
13	13 33 .0	— 10 26	1.000	.0495
14	13 32 .2	— 10 28	1.020	.0536
15	13 31 .4	— 10 30	1.021	.0576
16	13 30 .6	— 10 33	1.022	.0615
17	13 29 .8	— 10 35	1.022	.0653
18	13 29 .1	— 10 37	1.023	.0690
19	13 28 .4	— 10 0	1.023	.0726
20	13 27 .7	— 10 42	.024	.0761
21	13 27 .0	— 10 44	1.024	.0796
22	13 26 .4	— 10 47	1.024	.0830
23	13 25 .8	— 10 49	1.025	.0863
Октябрь 22 00 ^h	13 25 .2	— 10 51	1.025	.0896
01	13 24 .6	— 10 53	1.025	.0928
02	13 23 .9	— 10 56	1.026	.0959
03	13 23 .4	— 10 58	1.026	.0991
04	13 22 .8	— 11 01	1.026	.102
05	13 22 .3	— 11 03	1.027	.105
06	13 21 .7	— 11 05	1.027	.108
07	13 21 .2	— 11 07	1.027	.111
08	13 20 .7	— 11 09	1.027	.114
09	13 20 .1	— 11 16	1.028	.117
10	13 19 .7	— 11 14	1.028	.120
11	13 19 .1	— 11 16	1.028	.123
12	13 18 .7	— 11 18	1.028	.125
13	13 18 .1	— 11 21	1.028	.128
14	13 17 .7	— 11 23	1.029	.131
15	13 17 .2	— 11 25	1.029	.134
16	13 16 .7	— 11 27	1.029	.136
17	13 16 .3	— 11 30	1.029	.139
18	13 15 .8	— 11 32	1.029	.142
19	13 15 .3	— 11 34	1.029	.144
20	13 14 .9	— 11 36	1.030	.147
21	13 14 .5	— 11 39	1.030	.149
22	13 14 .0	— 11 41	1.030	.152
23	13 13 .6	— 11 43	1.030	.154
Октябрь 23 00 ^h	13 13 .2	— 11° 45'	1.030	0.157
01	13 12 .8	— 11 47	1.030	.159
02	13 12 .4	— 11 49	1.030	.162
03	13 11 .9	— 11 51	1.030	.164
04	13 11 .5	— 11 54	1.031	.167
05	13 11 .1	— 11 56	1.031	.169
06	13 10 .7	— 11 58	1.031	.172
07	13 10 .3	— 11 59	1.031	.174
08	13 09 .9	— 12 02	1.032	.176
09	13 09 .6	— 12 04	1.032	.179
10	13 09 .2	— 12 06	1.032	.181
11	13 08 .8	— 12 08	1.032	.183
12	13 08 .4	— 12 10	1.032	.186

Окончание табл. 3

И. Т.	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	ρ	r
Октябрь 23 13	13 08 .0	— 12 13		
14	13 07 .6	— 12 15	1.032	.188
15	13 07 .2	— 12 17	1.031	.190
16	13 06 .0	— 12 19	1.031	.192
17	13 06 .5	— 12 20	1.031	.195
18	13 06 .1	— 12 22	1.031	.197
19	13 05 .8	— 12 24	1.031	.199
20	13 05 .4	— 12 26	1.031	.201
21	13 05 .0	— 2 28	1.031	.203
22	13 04 .7	— 12 0	1.031	.206
23	13 04 .4	— 12 32	1.031	.208
Октябрь 24 00	13 04 .0	— 12 34	1.031	.210
01	13 03 .7	— 2 36	1.032	.212
02	13 03 .3	— 12 38	1.032	.215
03	13 03 .0	— 12 40	1.02	.217
04	13 02 .7	— 12 42	1.032	.219
05	13 02 .3	— 12 44	1.032	.221
06	13 02 .0	— 12 46	1.032	.223
08	13 01 .7	— 12 48	1.032	.225
08	13 01 .3	— 12 50	1.032	.227
09	13 01 .0	— 12 52	1.032	.229
10	13 00 .7	— 12 54	1.033	.231
11	13 00 .3	— 12 56	1.033	.233
12	13 00 .0	— 12 58	1.033	.235
13	12 59 .7	— 13 00	1.033	.237
14	12 59 .4	— 13 02	1.033	.239
15	12 59 .1	— 13 04	1.033	.242
16	12 58 .8	— 3 06	1.033	.244
17	12 58 .5	— 13 08	1.033	.246
18	12 58 .2	— 13 10	1.033	.248
19	12 57 .9	— 13 12	1.033	.250
20	12 57 .6	— 13 14	1.033	.252
21	12 57 .2	— 13 16	1.034	.254
22	12 56 .9	— 13 18	1.034	.256
23	12 56 .7	— 13 20	1.034	.258
25 00	12 56 .3	— 13 22	1.034	.259
		— 13 24	1.034	.261

Таблица 4

Эфемериды кометы Секи-Икея с 17 до 25 октября 1965 г.

И. Т.	$\alpha_{1950.0}$	$\delta_{1950.0}$	ρ	r
Окт. 17	12 ^h 24 ^m .5	— 14° 37'	0.910	0.279
18	12 40 .6	— 14 16	.910	.232
19	12 57 .7	— 13 44	.915	.179
20	13 16 .5	— 12 54	.930	.117
21	13 38 .6	— 11 17	.939	.0308
22	13 25 .0	— 10 52	1.023	.0892
23	13 13 .0	— 11 46	1.023	.157
24	13 03 .9	— 12 37	1.030	.212

Поскольку первое использованное наблюдение было приближенным, полученные нами элементы орбиты не могли оказаться надежными. Согласно этой орбите комета 23 октября должна была столкнуться с Солнцем (Перигельное расстояние $q = 0.003575$). Хотя последующие уточнения орбиты не подтвердили факта столкновения кометы с Солнцем, однако уже эта грубая орбита показала, что комета представляет объект, интересный для астрономов и радиофизиков.

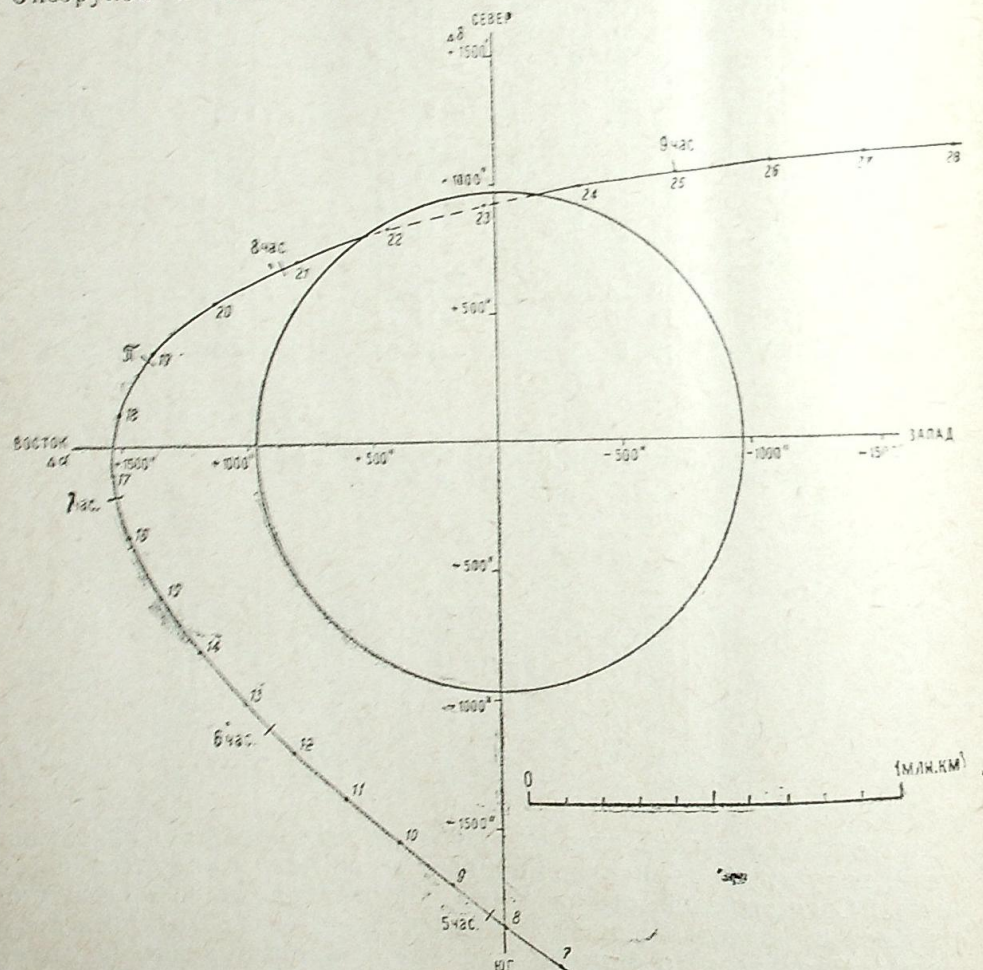
11 октября Институт получил 15 наблюдений, произведенных с 26 сентября по 3 октября в Крымской астрофизической обсерватории АН СССР (наблюдатель Н. С. Черных). Эти наблюдения будут опубликованы в Бюллетене ИТА.

Таблица 5

Эфемериды кометы Секи-Икея с 27 октября до 1 декабря 1965 г.

И. Т.	$\alpha_{1950,0}$	$\delta_{1950,0}$	ρ	r
Октябрь 27	12 ^h 43 ^m .5	-14° 53'	1.038	0.349
Ноябрь 1	12 18 .6	-18 19	1.043	.531
6	11 58 .3	-21 30	1.044	.686
11	11 39 .5	-24 31	1.043	.825
16	11 20 .8	-27 25	1.041	.954
21	11 01 .2	-30 09	1.038	1.074
26	10 40 .0	-32 42	1.037	1.188
Декабрь 1	10 16 .9	-34 58	1.038	1.297

14 октября проф. С. К. Всехсвятским в Институт были сообщены наблюдения, произведенные в США и Японии Елизаветой Ремер, Ван-бисбруком и Томита. Это позволило перейти к уточнению орбиты



кометы. Последовательно были получены орбиты, помещенные в табл. 1 под номерами 2, 3, 4, 5. Эти орбиты получены из различных комбинаций наблюдений, охватывающих дугу, пройденную кометой с 22 сентября по 3 октября. Табл. 1 показывает, как изменялись вычисленные элементы орбиты по мере увеличения дуги наблюдениями.

Вычисляемые элементы орбит, также как суточные и часовые эфемериды, сообщались различным обсерваториям Советского Союза (см. таб. 2, 3, 4, 5).

19 октября из Астросовета было получено сообщение о новых наблюдениях кометы, что позволило расширить промежуток времени, с 22 сентября по 6 октября. На основе дуги, пройденной за это время кометой, была получена орбита № 6 из табл. 1. Чтобы обеспечить возможность наблюдения кометы непосредственно вблизи перигелия, были вычислены координаты кометы относительно центра диска Солнца. На основе этих координат вычерчен рисунок, показывающий проекцию околоперигельной части орбиты на геоцентрическую небесную сферу. В основу вычислений была положена орбита 4. Нужно, однако, отметить, что эфемериды, получаемые на основе орбит 3, 4, 5, 6, очень мало отличаются друг от друга.

По имеющимся в нашем распоряжении сведениям многие обсерватории Советского Союза производили наблюдения кометы как вблизи перигелия, так и после прохождения кометы через перигелий, пользуясь эфемеридами, составленными в ИТА. Несмотря на то, что наши эфемериды основывались на орбите, полученной только по доперигельным наблюдениям, они, как оказалось впоследствии, достаточно хорошо удовлетворяют послеперигельным наблюдениям. Всего до настоящего времени нами собрано более 100 точных наблюдений кометы, выполненных различными советскими и иностранными обсерваториями до прохождения кометы через перигелий. Вероятно, в скором времени начнут поступать точные наблюдения, выполненные после прохождения кометы через перигелий. В дальнейшем предполагается с помощью быстродействующих вычислительных машин обработать всю совокупность опубликованных наблюдений кометы Секи-Икея с целью получения окончательной орбиты.

В заключение я хочу выразить сердечную благодарность научному руководителю С. Г. Макову за руководство работой и директору Вычислительного центра АН СССР С. Г. Болдыреву за предоставленные возможности выполнять срочные вычисления по данной работе на машине БЭСМ-2.

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, Б. А. ЛИСТЕНГАРТЕН, Ю. М. КУРДЮКОВ

К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ В ОДНОФАЗНОМ ИНВЕРТОРЕ

Значительное развитие полупроводниковой техники за последние годы позволяет решить такую актуальную проблему, как создание надежных статических преобразователей частоты и напряжения для регулируемых электроприводов переменного тока. Создание надежных преобразователей и выбор рациональных схем могут быть достигнуты при разработке соответствующих методик исследования и расчета. Рассмотрению переходных процессов включения инвертора посвящен ряд работ [1—6].

В данной статье описано исследование однофазного мостового инвертора при активной индуктивной нагрузке. На рис. 1, представлена эквивалентная схема однофазного мостового инвертора, который преобразует постоянный ток в переменный в цепи нагрузки $z_n = R_n + jx_n$. Сначала замыкаются вентили УВ1-УВ3, ток протекает от зажима *b* к *c*, конденсатор заряжается. Затем цепь управления включает вентили УВ2-УВ4, конденсатор начинает перезаряжаться, ток в нагрузке будет протекать в обратном направлении — от зажима *c* к зажиму *b*.

Исследование проводится при допущении идеальной коммутации, т. е. время переключения вентилях считается пренебрежимо малым. Исходная система дифференциальных уравнений для произвольного *n*-го интервала времени в промежутках между переключениями составляется на основе законов Кирхгофа:

$$\left. \begin{aligned} i &= i_n + i_c \\ L \frac{di}{dt} + R_n i_n + L_n \frac{di_n}{dt} &= E \\ u_c &= \frac{1}{c} \int i_c dt = i_n R_n + L_n \frac{di_n}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Прделав ряд преобразований, получим:

$$\frac{d^3 i}{dt^3} + \frac{R_n}{L_n} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{L + L_n}{LL_n c} \frac{di}{dt} + \frac{R_n}{LL_n c} i = \frac{E}{LL_n c}, \quad (2)$$

$$\frac{d^3 i_n}{dt^3} + \frac{R_n}{L_n} \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \frac{L + L_n}{LL_n c} \frac{di_n}{dt} + \frac{R_n}{LL_n c} i_n = \frac{E}{LL_n c}. \quad (3)$$

Общие решения уравнений (2) и (3) будут следующими:

$$i(t) = \frac{E}{R_n} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}, \quad (4)$$

$$i_n(t) = \frac{E}{R_n} + A'_1 e^{p_1 t} + A'_2 e^{p_2 t} + A'_3 e^{p_3 t}, \quad (5)$$

где p_1, p_2, p_3 — корни характеристического уравнения

$$p^3 + \frac{R_n}{L_n} p^2 + \frac{L + L_n}{LL_n c} p + \frac{R_n}{LL_n c} = 0; \quad (6)$$

$$A'_1 = -A_1 \frac{p_1 L}{R_n + p_1 L_n} = q_1 A, \quad A'_2 = -A_2 \frac{p_2 L}{R_n + p_2 L_n} = q_2 A, \quad (7)$$

$$A'_3 = -A_3 \frac{p_3 L}{R_n + p_3 L_n} = q_3 A.$$

В момент коммутации происходит скачкообразное изменение переменной. Уравнения (4) и (5) характеризуют изменение токов $i(t)$ и $i_n(t)$ в промежутках между переключениями, начальные же условия будут меняться с изменением номера интервала *n*. Время полупериода, т. е. время между переключениями обозначим как период повторения *T*. Время от начала процесса *t* можно представить тогда как $t = nT + \Delta t$, где Δt — время внутри каждого интервала ($0 \leq \Delta t \leq T$). В дальнейшем вместо Δt пишем *t*, т. е. принимаем, что время отсчитывается от начала *n*-го интервала, тогда $i[n, t]$, $i_n[n, t]$ означают токи внутри *n*-го интервала времени между *n* и *n* + 1 переключениями. Так как ток в индуктивностях может меняться лишь непрерывно, то значения $i[n, t]$, $i_n[n, t]$ в момент $t = T$ равны начальным значениям $i[n+1, 0]$, $i_n[n+1, 0]$:

$$i[n+1] \Big|_{t=0} = i[n] \Big|_{t=T}, \quad i_n[n+1] \Big|_{t=0} = i_n[n] \Big|_{t=T}. \quad (8)$$

Из условия, что величина напряжения сохраняет в момент переключения свое значение, а относительно внешней э.д.с. меняет направление, получаем следующие зависимости:

$$E = L \frac{di[n]}{dt} \Big|_{t=T} + u_c, \quad E = L \frac{di[n+1]}{dt} \Big|_{t=0} - u_c,$$

откуда

$$\frac{di[n+1]}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{2E}{L} - \frac{di[n]}{dt} \Big|_{t=T}. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) определяют разрывные краевые условия. Введем следующие обозначения:

$$i[n] \Big|_{t=0} = \alpha[n], \quad \frac{di[n]}{dt} \Big|_{t=0} = \beta[n], \quad i_n[n] \Big|_{t=0} = \lambda[n], \quad (10)$$

где $\alpha[n]$, $\beta[n]$, $\lambda[n]$ — значения тока *i*, производной тока $\frac{di}{dt}$ и тока в цепи нагрузки i_n в начале *n*-го интервала при $t=0$.

Из уравнений (4) и (5) определяем значения тока *i*, его производной $\frac{di}{dt}$ и значение тока i_n в момент $t=0$, и приравниваем эти значения $\alpha[n]$, $\beta[n]$, $\lambda[n]$:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \alpha[n] - \frac{E}{R_n}, \\ p_1 A_1 + p_2 A_2 + p_3 A_3 &= \beta[n], \end{aligned} \quad (11)$$

$$q_1 A_1 + q_2 A_2 + q_3 A_3 = \lambda[n] - \frac{E}{R_n}.$$

Решая систему уравнений (11), находим значения постоянных A_1, A_2, A_3 . Подставляя эти значения в выражение (4), определяем выражение для тока $i[n, t]$ в функции начальных значений $\alpha[n], \beta[n], \lambda[n]$:

$$i[n, t] = \frac{E}{R_n} + \left(\alpha[n] - \frac{E}{R_n} \right) x(t) + \beta[n] z(t) + \left(\lambda[n] - \frac{E}{R_n} \right) w(t), \quad (12)$$

где ток $i[n, t]$ является функцией двух независимых переменных n и t . Функции $x(t), z(t), w(t)$ не зависят от переменной n и определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 e^{p_1 t} + A_0' e^{p_2 t} + A_0'' e^{p_3 t}, \\ z(t) &= B_0 e^{p_1 t} + B_0' e^{p_2 t} + B_0'' e^{p_3 t}, \\ w(t) &= D_0 e^{p_1 t} + D_0' e^{p_2 t} + D_0'' e^{p_3 t}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{где } A_0 &= \frac{p_2 q_3 - p_3 q_2}{D}, \quad B_0 = \frac{q_2 - q_3}{D}, \quad D_0 = \frac{p_3 - p_2}{D}, \quad A_0' = \frac{p_3 q_1 - p_1 q_3}{D}, \\ B_0' &= \frac{q_3 - q_1}{D}, \quad D_0' = \frac{p_1 - p_3}{D}, \quad A_0'' = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{D}, \quad B_0'' = \frac{q_1 - q_2}{D}, \\ D_0'' &= \frac{p_2 - p_1}{D}, \end{aligned}$$

$$D = q_3(p_2 - p_1) + q_1(p_3 - p_2) + q_2(p_1 - p_3).$$

Продифференцировав уравнение (12) по t , находим значение производной в n -ом интервале:

$$\frac{di[n, t]}{dt} = \left(\alpha[n] - \frac{E}{R_n} \right) y(t) + \beta[n] v(t) + \left(\lambda[n] - \frac{E}{R_n} \right) u(t), \quad (14)$$

где

$$y(t) = x'(t), \quad v(t) = z'(t), \quad u(t) = w'(t).$$

Из уравнения (13) определяются значения функций $x(t) \div w(t)$ для любого момента t .

Подставляя значения постоянных $A_1 - A_3$ в уравнение (5), получим выражение для тока нагрузки $i_n[n, t]$ в n -ом интервале в функции начальных значений на этом же интервале:

$$\begin{aligned} i_n[n, t] &= (-1)^n \left\{ \frac{E}{R_n} + \left(\alpha[n] - \frac{E}{R_n} \right) x_1(t) + \beta[n] z_1(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left[(-1)^n \lambda[n] - \frac{E}{R_n} \right] w_1(t) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } x_1(t) = q_1 A_0 e^{p_1 t} + q_2 A_0' e^{p_2 t} + q_3 A_0'' e^{p_3 t}, \quad z_1(t) = q_1 B_0 e^{p_1 t} + q_2 B_0' e^{p_2 t} + q_3 B_0'' e^{p_3 t},$$

$$w_1(t) = q_1 D_0 e^{p_1 t} + q_2 D_0' e^{p_2 t} + q_3 D_0'' e^{p_3 t}.$$

При $t=T$ функции $x(t) \div w_1(t)$ будем обозначать $x \div w_1$. Так как направление тока в цепи нагрузки меняется от интервала к интервалу, то в уравнении (15) имеется множитель $(-1)^n$.

Запишем граничные условия в виде разностных уравнений. Следуя принятым обозначениям, имеем

$$i[n+t] \Big|_{t=0} = \alpha[n+1], \quad \frac{di[n+t]}{dt} \Big|_{t=0} = \beta[n+1], \quad i_n[n+1] \Big|_{t=0} = \lambda[n+1].$$

Подставляя в уравнения (8) значения $i, i_n, \frac{di}{dt}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha[n+1] &= \frac{E}{R_n} (1 - x - w) + x \alpha[n] + z \beta[n] + w \lambda[n], \\ \beta[n+1] &= E \left(\frac{2}{L} + \frac{y+u}{R_n} \right) - y \alpha[n] - v \beta[n] - u \lambda[n], \\ \lambda[n+1] &= (-1)^n \left\{ \frac{A}{R_n} (1 - x_1 - w_1) + x_1 \alpha[n] + z_1 \beta[n] + (-1)^n w_1 \lambda[n] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Таким образом, мы получили систему из разностных уравнений с тремя переменными. Последовательно определяем значения $\alpha[n+1], \beta[n+1], \lambda[n+1]$ по $\alpha[n], \beta[n], \lambda[n]$. Значения $\alpha[0], \beta[0], \lambda[0]$ определяются из начальных условий. При исходном состоянии схемы, при $t=0$ $\alpha[0] = \lambda[0] = 0, \beta[0] = \frac{E}{L}$.

Определив значения $\alpha[n], \beta[n], \lambda[n]$ для различных n , подставляем величины в уравнения (19), (15) и тем самым находим токи $i[n, t]$ и $i_n[n, t]$ в любой момент времени.

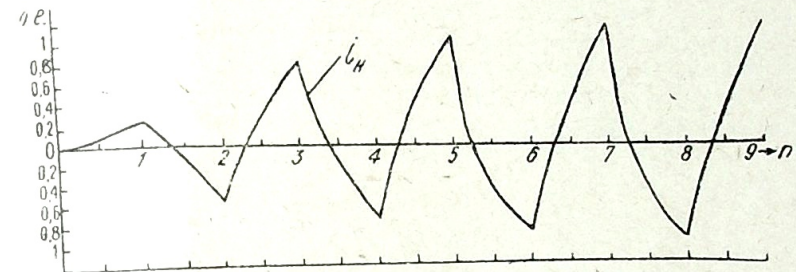


Рис. 2

По описанной методике был проведен расчет при следующих параметрах инвертора: $R_n = 10 \text{ м}, x_n = 1,57 \text{ ом}; x = 5 x_n, x_c = 2 \text{ ом}$. При $f = 50 \text{ гц}, L = 0,005 \text{ гн}, c = 0,0016 \text{ ф}$. Э.д.с. условно принимаем равной единице.

Корни характеристического уравнения $p_1 = -34,7; p_{2,3} = -82,7 \pm j371$:

$$q_1 = 1,04; q_{2,3} = -4,25 \pm j2,48;$$

$$A_0 = 0,86, A_0' = 0,072 - j0,056, A_0'' = 0,072 + j0,056;$$

$$B_0 = 0,0012, B_0' = 10^{-4}(-6 - j12,8), B_0'' = 10^{-4}(-6 + j12,8),$$

$$D_0 = 0,18, D_0' = -0,09 + j0,0103, D_0'' = -0,09 - j0,0103.$$

При периоде повторения $T = 0,01 \text{ сек}$

$$x = 0,53, z = -10^{-4} \cdot 1,65,$$

$$w = 0,197,$$

$$y = -17, v = -0,153,$$

$$u = -23,$$

$$x_1 = 1, z_1 = 0,0047,$$

$$w = -0,08.$$

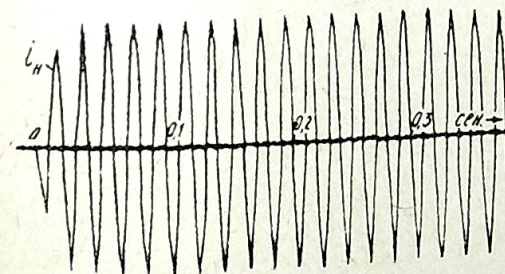


Рис. 3

На рис. 2 представлена кривая для тока нагрузки $i_n[n, t]$, полученная расчетным путем, а на рис. 3 — осциллограмма для тока нагрузки, снятая для схемы инвертора, собранного в лаборатории на управляемых кремневых вентилях.

Как видно из рисунков, расчетная кривая сходится с экспериментально снятой осциллограммой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хамудханов М. З. Частотно-управление асинхронным электроприводом. Изд. АН Узбек. ССР. 1959.
2. Булгаков А. А. Основы динамики управляемых вентильных систем. Изд. АН СССР, М., 1963.
3. Васильев А. С., Слухоцкий А. Е. Ионные и электронные инверторы высокой частоты. Госэнергоиздат. 1961.
4. Wagner C. F. Parallel inverter with inductive Load Tr. of AIEE, v. 55 1936.
5. Wagner C. F. Parallel inverter with resistance Load Tr. of AIEE, v. 54. 1935.
6. Иванов А. П., Никитина В. Н. Изв. АН СССР, ОТН, энергетика и автоматика, 1961, № 1.

А. Э. Эфендизаде, Б. А. Листенгартен, Ж. М. Курджуков

Бирфазлы инверторда кечид режимлеринин hesabyна daир

ХУЛАСЭ

Мәгаләдә актив-индуктив жүк шәраитиндә бирфазлы көрпү инверторунун тәдгиги верилмишдир. Схем 1-чи шәкилдә көстәрилмишдир. 1—3 ифадәләри вентил режиминин дәјишмә вахтынын тәнликләридир. i вә жүк дөврәсинин i_n чәрәжанларынын үмуми һәлли ашағыдакы кими олачагдыр.

$$i = \frac{E}{R_n} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}, \quad (1)$$

$$i_n = \frac{E}{R_n} + A'_1 e^{p_1 t} + A'_2 e^{p_2 t} + A'_3 e^{p_3 t}. \quad (2)$$

Сәрһәд шәртләри белә бир еһтимала көрә тапылыр ки, индуктив мугавимәтли дөврәнин чәрәжаны вә конденсаторун кәркинлији чеврилмә заманы сабит галыр.

$i[n, t]$, $i_n[n, t]$ чәрәжанларынын гижмәти ашағыдакы тәнликләрдән тапылыр:

$$i[n, t] = \frac{E}{R_n} + \left(\alpha[n] - \frac{E}{R_n} \right) x(t) + \beta[n] z(t) + \left(\lambda[n] - \frac{E}{R_n} \right) W(t), \quad (3)$$

$$i_n[n, t] = (-1)^n \left\{ \frac{E}{R_n} + \left(\alpha[n] - \frac{E}{R_n} \right) x_1(t) + \beta[n] z_1(t) + \left[(-1)^n \lambda[n] - \frac{E}{R_n} \right] W_1(t) \right\} \quad (4)$$

2-чи шәкилдә $i_n[n, t]$ жүк чәрәжанынын hesabi jolla тапылмыш гижмәтләринә әсасән гурулмуш характеристикасы верилмишдир.

3-чү шәкилдә $i_n[n, t]$ чәрәжанынын осциллограммасы көстәрилмишдир. Мәгаләдән көрүндүју кими, hesabi вә тәчрүби әјриләр тамамилә ејнидир.

Ж. А. АКИЛОВ, А. Ф. КАСИМОВ

К РАСЧЕТУ ДВИЖЕНИЯ ПЕСКА В СТВОЛЕ СКВАЖИНЫ

Как известно, в процессе эксплуатации нефтяных скважин при недостаточной скорости восходящего потока жидкости, песка, поступающих вместе с нефтью на забой скважины, с течением времени образуется песчаная "пробка". В целях предупреждения пробкообразования, прихвата подъемных труб и т. д. нельзя допускать увеличения объемной концентрации песка α_x в скважине [1]. Объемная концентрация песка зависит от ряда факторов, в том числе от расходной концентрации песка α_0 , которая определяется из следующей формулы:

$$\alpha_0 = \frac{Q_n}{Q_{ск} + Q_n}, \quad (1)$$

где Q_n , $Q_{ск}$ — соответственно, расход песка и дебит скважины.

В статье рассматривается распределение непрерывно поступающего песка по радиусу трубы и по времени в текущем потоке жидкости. При этом необходимо учитывать, что конвективный перенос среды осуществляется путем конвективной диффузии, а интенсивность конвекции определяется величиной коэффициента конвективной диффузии. Тогда движение взвешенных частиц в ламинарно текущем потоке описывается уравнением [2]

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v(r) \frac{\partial \alpha}{\partial x} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где D — коэффициент диффузии;

α — текущая концентрация песка в жидкости.

При этом полагаем, что скорость конвективного переноса вещества значительно больше диффузионного переноса. Тогда изменение концентрации песка в потоке будет определяться решением уравнения (2) при условиях:

$$\alpha(x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\alpha(0, t) = \alpha_0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (5)$$

где R — радиус трубы.

Уравнение (2) решим приближенным методом Тейлора [3]. Рассматривая конвекцию через сечение движущейся с постоянной средней скоростью w среды, уравнение (2) приведем к виду

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + [v(r) - w] \frac{\partial \alpha}{\partial y} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right], \quad (6)$$

$$y = x - wt, \quad (7)$$

где w — средняя скорость.

Исходя из вышесказанного, видим, что перенос зависит только от радиального изменения и характеристическое дифференциальное уравнение в частных производных для квазистационарного состояния запишется в виде

$$[v(r) - w] \frac{\partial \alpha}{\partial y} = D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right]. \quad (8)$$

Предполагается, что в первом приближении

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} \approx \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} = \text{const}, \quad (9)$$

где α_x — средняя объемная концентрация песка по сечению.

Решение уравнения (8) при условии (5) может быть записано в виде

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{wR^2}{4D} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^4}{R^4} \right), \quad (10)$$

где α_1 — концентрация песка при $r = 0$.

Заменяя α_1 через среднюю концентрацию в сечении, получим

$$\alpha = \alpha_x + \frac{wR^2}{4D} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \left(-\frac{1}{3} + \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{2} \frac{r^4}{R^4} \right). \quad (11)$$

Скорость переноса концентрации через сечение

$$\bar{v} = 2\pi \int_0^R \alpha [v(r) - w] r dr = -\pi R^2 \frac{R^2 w^2}{48D} \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \quad (12)$$

при

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} \neq \text{const}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\pi R^2 \frac{\partial \alpha_x}{\partial t}. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13) и учитывая, что в неподвижной системе отсчета

$$\frac{\partial t_x}{\partial t'} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial t} + w \frac{\partial \alpha_x}{\partial y}, \quad (t' = t), \quad (14)$$

получим

$$\frac{\partial \alpha_x}{\partial t} + w \frac{\partial \alpha_x}{\partial y} = D^* \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial y^2}, \quad (15)$$

где $D^* = \frac{R^2 w^2}{48D}$ — эффективный коэффициент диффузии.

Решение (15) при условиях (3) и (4) имеет вид [4]

$$\frac{\alpha_x}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{w\bar{y}}{D^*} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{we}{4D^*}} \cdot \frac{\bar{y} + \bar{t}}{\sqrt{\bar{t}}} \right] + \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{we}{4D^*}} \cdot \frac{\bar{y} - \bar{t}}{\sqrt{\bar{t}}} \right] \right\}, \quad (16)$$

$$\operatorname{erfc} \lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda; \quad (17)$$

здесь безразмерные $\bar{y} = \frac{y}{e}$; $\bar{t} = \frac{wt}{e}$.

По данным табл. 1 приведенным по (16), произведены расчеты, результаты которых представлены на рис. 1 (на рисунке цифры соответствуют примерам). В формулу (16) входит одна неизвестная величина D^* ; в рассматриваемом случае в грубом приближении значение D^* было принято $2,3 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{сек}$ (для вязких жидкостей) [5].

Таблица 1.

α_x , %	$2R$, дюймы	$Q_{\text{ск.}}$, м ³ /сутки	l , м
0,5	2 1/2	10	500
"	"	"	1000
"	"	5	500
"	"	25	1000

Из графика видно, что непрерывно поступающие частицы песка на забой скважины постепенно накапливаются и через некоторое время t_1 начинается вынос песка из трубы в таком количестве, в каком он поступает в нее извне.

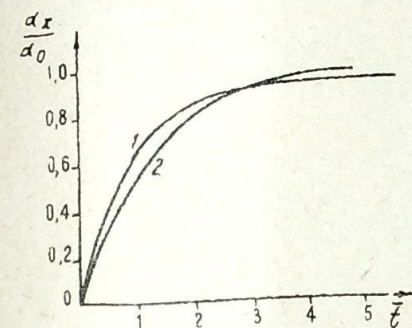


Рис. 1

1 — $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сутки}$; $l = 500 \text{ м}$;
2 — $Q = 10 \text{ м}^3/\text{сутки}$; $l = 1000 \text{ м}$.

Необходимо отметить, что в рассмотренном выше случае задача решена без учета стесненного движения песка. При таком рассмотрении с окончанием неустойчивого движения средняя объемная концентрация песка в любом живом сечении потока в стволе скважины приближается к α_0 . Если учесть стесненное движение, то средняя объемная концентрация песка окажется α_x , а не α_0 . Объемная концентрация песка в потоке (α_x) отличается от расходной (α_0). Это отличие зависит от ряда факторов: от физико-механических свойств лифтируемой жидкости и песка, дебита скважины, от диаметра песчинок, колонн труб и т. п. [6].

С целью учета стесненного движения песка поставленную задачу можно решать по-разному: задавая $\alpha_0 = \alpha_0(t)$ в виде (16); пользуясь зависимостью $\alpha_x = \alpha_x(\alpha_0)$ по [7, 8]. В последнем случае связь между α_x и α_0 при различных значениях вязкости жидкости, диаметра песчинок, диаметра труб, суточного дебита скважины представлена на рис. 2.

Рассмотренный прием учета стесненности движения песка заключается в следующем. В (16) вместо α_0 представляется соответствующее α_x , определяемое по рис. 2 при известном значении вязкости жидкости (μ в сантипуазах), диаметра песка (d в миллиметрах), диаметра труб, ($D = 2R$ в дюймах), суточного дебита скважины ($Q_{\text{ск}}$ в м³/сутки).

Таблица 2.

α_0 , %	Q , м ³ /сутки	μ , спз	d , мм	D , дюймы	α_x , %
0,10	1	2	0,1	2	0,5
0,50	"	"	"	"	1,8
1,00	"	"	0,4	"	2,6
0,10	5	"	"	"	4,2
0,50	"	"	"	"	5,1
1,00	"	"	"	"	"

$\text{м}^3/\text{сутки}$) и расходной концентрации песка (α_0 в %). Значения α_x , найденные по рис. 2 при соответствующих заданных α_0 для различных Q, ρ, d, D , представлены в табл. 2.

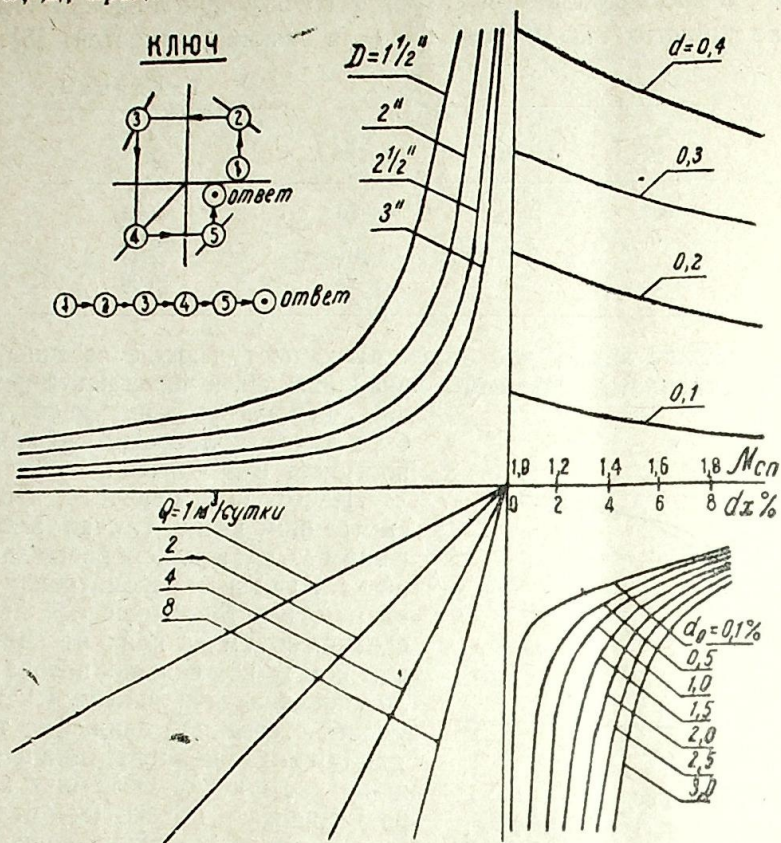


Рис. 2

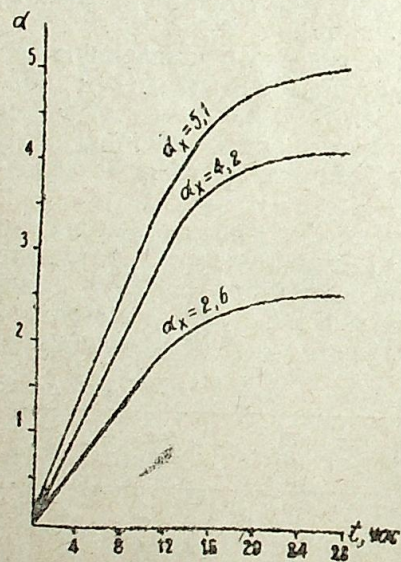


Рис. 3

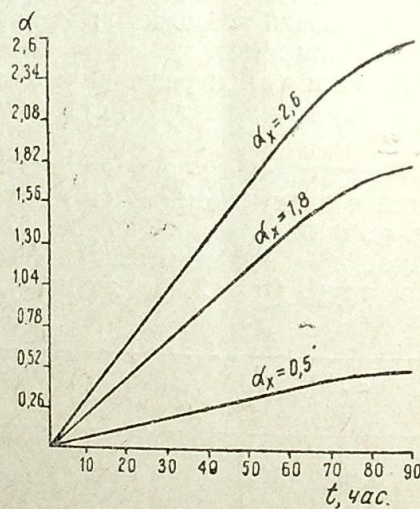


Рис. 4

Результаты расчетов по приведенным приемам представлены на рис. 8 и 4, из которых следует:

- при одном и том же Q , но различным α_x (или α_0) время появления песка на устье одинаково;
- во всех случаях песок выносится из скважины еще до достижения в стволе ее объемной концентрации, равной по значению заданному α_x ;
- интенсивность изменения α_x в стволе скважины в начальный период происходит по близкому к прямой линии закону.

ЛИТЕРАТУРА

- Касимов А. Ф. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1961, № 6.
- Фукс Н. А. Механика аэрозолей. Изд. АН СССР, 1955.
- Taylor, Sir Geoffrey—Proceeding of the Royal Society Series A., series A, vol. 219. London, 1953.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
- Bailey H. R. and Gargaty W. B. Proceedings of the Royal Society. Series A. London 1962.
- Минц Д. М., Шуберт-С. А. Гидравлика зернистых материалов. Изд. МХХ РСФСР, 1953.
- Адопин Ан. Н. АНХ, № 4, 1952.
- Грошштейн и др. АНХ, № 9, 1953.
- Амиров А. Д. и др. И. в. Вузов СССР, нефть и газ, № 11, 1959.

Ж. К. Акилов, Э. Ф. Гасымов

Гујуда гумун һәрәкәтинин һесаблинамасына даир

ХҮЛАСӘ

Нефть гујуларынын истисмарында маје сүр'әтинин кафи олмадығы һалларда гумун чөкмәси вә бунунла әлагәдар олараг, гум тыхачынын јаранмасы баш верир.

Мәгаләдә гумун шагули боруда (гујуда һәрәкәти, концентрасијанын дәјишмәси ганунилији тәдгиг олунур. һесабат кәстәрир ки, гумун гују ағзына кәлиб чатмасы маје сәрфиндән асылы олуб, гумун сәрфинин концентрасијасындан асылы дејилдир; гум гују ағзына кәлиб чатаркән гујуда һәчми концентрасија сәрфи концентрасијасындан аз олур. һәрәкәтинин илк дөврүндә һәчми концентрасијанын дәјишмәси дүзхәтт гануна табе олур.

Э. А. КАЗИЕВ

ОДНОСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛОМАНЫХ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим в банаховом пространстве E дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x). \quad (1)$$

Как известно, к такому уравнению приводятся многие задачи математической физики, интегро-дифференциальные уравнения, бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д.

В работе [1] найдены достаточные условия для существования и единственности решения и сходимости последовательных приближений Тонелли к решению дифференциального уравнения (1), удовлетворяющему начальному условию

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Эти достаточные условия имеют вид одностороннего неравенства, налагаемого на оператор $f(t, x)$.

В настоящей статье показано что при этих же односторонних оценках решение задачи (1) — (2) может быть найдено методом ломаных Эйлера. Далее дается оценка полученного методом ломаных Эйлера приближенного решения. Используя эту оценку, полученное приближенное решение задачи (1) — (2) продолжается на максимально возможный интервал, а также рассматривается вопрос об устойчивости приближенного решения задачи (1) — (2) по начальным данным.

1. Общие предположения. Через $\Phi(x)$ ($x \in E$, $\Phi(0) = 0$) обозначим нелинейный непрерывный функционал, обладающий следующими свойствами:

- а) $\Phi(x) > 0$ при $\|x\| > 0$;
- б) из $\Phi(x) \rightarrow 0$ следует $\|x\| \rightarrow 0$;

в) $\Phi \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] \leq c_n \sum_{i=1}^n \Phi x_i$, где $x_i \in E$, c_n — некоторая постоянная, определяемая ниже ($c_m > c_n$, $m > n$);

г) $\Phi(\lambda x) \leq \varphi(\lambda) \Phi(x)$, где $\varphi(\lambda)$ ($\varphi(0) = 0$) — некоторая положительная неубывающая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi \left(\frac{1}{n} \lambda \right) \leq \frac{1}{n c_n} \varphi(\lambda) \quad (n \geq 1). \quad (3)$$

Предположим далее, что приращение функционала $\Phi(x)$ может быть оценено следующим образом:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \leq D(x, h) + o(\|h\|). \quad (4)$$

Здесь функционал $D(x, h)$ непрерывен по h равномерно относительно x из каждого шара, полуоднороден и полуаддитивен по переменной h , то есть

$$D(x, \lambda h) \leq \lambda D(x, h) \quad (\lambda \geq 0), \quad D(x, h_1 + h_2) \leq D(x, h_1) + D(x, h_2).$$

Кроме того, для $x \in S_r = \{x: x \in E, \Phi(x - x_0) \leq r\}$ имеет место оценка

$$|D(x, h)| \leq c \|h\|. \quad (5)$$

Заметим, что в случае, когда $E = H$, где H — гильбертово пространство, можно положить

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2, \quad \Phi(x) = \|x\|,$$

тогда соответственно будем иметь

$$D(x, h) = (x, h), \quad D(x, h) = \left(\frac{x}{\|x\|}, h \right) \quad (x \neq 0),$$

кроме того, постоянная c_n , участвующая в условии свойства в) функционала $\Phi(x)$, принимает соответственно значения

$$c_n = n \text{ и } c_n = 1.$$

Пусть ограниченный оператор $f(t, x)$ определен и равномерно непрерывен по совокупности переменных на топологическом произведении $R = [t_0, T] \times S_r$, и при $t \in [t_0, T]$, $x, y \in S_r$ выполняется условие

$$D[x - y, f(t, x) - f(t, y)] \leq F[t, \Phi(x - y)]. \quad (6)$$

Функция $F(t, v)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и такой, что решение задачи $v' = F(t, v)$, $v(t_0) = 0$ тождественно равно нулю. Предположим также, что при $(t, x) \in R$

$$\Phi[f(t, x)] \leq M.$$

Определение 1. Функцию $\psi(t)$ ($t \in [t_0, T]$) назовем h_n приближенным решением задачи (1) — (2) на интервале $[t_0, T]$ (см. напр. [2], [3]), если выполняются следующие условия:

- 1) $\Phi[\psi(t) - x_0] \leq r$ при $t \in [t_0, T]$;
- 2) $\|f(t, \psi(t)) - \psi'(t)\| \leq h_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$;

3) функция $\psi'(t)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва первого рода.

2. Существование h_n — приближенного решения задачи (1) — (2). Рассмотрим в банаховом пространстве E задачу (1) — (2). Составим функцию

$$y(t) = x_0 + (t - t_0) f(t, x), \quad (t, x) \in R.$$

Тогда

$$\Phi[y(t) - x_0] \leq \varphi(t - t_0) \Phi[f(t, x)] \leq \varphi(t - t_0) M.$$

Так как функция $\varphi(t - t_0)$ положительна при $t \in (t_0, T]$ и при $t = t_0$ обращается в нуль, то всегда можно указать такое вещественное α , что при $t \in [t_1, t_0 + \alpha]$ будем иметь

$$\varphi(t - t_0) \leq \frac{r}{M}. \quad (7)$$

Обозначим $a = \min(\alpha, T - t_0)$. Докажем существование h_n — приближенного решения задачи (1) — (2) на интервале $[t_0, t_0 + a]$. Для этого на интервале $[t_0, t_0 + a]$ определим узловые точки $t_j = t_0 + jh_n$,

где $h_n = \frac{a}{n} = 0, 1, \dots, n$.

Определим последовательные приближения Эйлера $\{x^{(n)}(t)\}$ по следующему правилу:

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = x_0 + (t - t_0) f_0, & t \in [t_0, t_1], \\ x^{(n)}(t) = x_0 + h_n \sum_{j=0}^{n-1} f_j + (t - t_n) f_n, \end{cases} \quad (8)$$

где $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $n = 2, 3, \dots$, $f_p = f(t_p)$, $x^{(n)}(t_p)$.

Из равномерной непрерывности оператора $f(t, x)$ по совокупности переменных следует, что для данного $h_n > 0$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$) существует такое $\delta_n > 0$, что если $(t, x), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in R_1 = [t_0, t_0 + a] \times S_r$ ($\tilde{x} = x(\tilde{t})$), $|t - \tilde{t}| \leq \delta_n$, $\Phi[x(t) - x(\tilde{t})] = \Phi(x - \tilde{x}) \leq \delta_n$, то

$$\|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})\| \leq h_n.$$

Из (8) при $n = 1$ ($\kappa = 0$), учитывая (1), имеем

$$\Phi[x^{(1)}(t) - x_0] = \Phi[(t - t_0) f_0] \leq \varphi(t - t_0) M \leq r.$$

Далее при $n = 2$ и $\kappa = 0$ для $t \in [t_0, t_1]$ ($t_1 = \frac{a}{2}$) имеем

$$\Phi[x^{(2)}(t) - x_0] = \Phi[(t - t_0) f_0] \leq r,$$

а для $t \in [t_1, t_0 + a]$ и $\kappa = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi[x^{(2)}(t) - x_0] &= \Phi[h_2 f_0 + (t - t_1) f_1] \leq \\ &\leq c_2 \{\Phi[h_2 f_0] + \Phi[(t - t_1) f_1]\} \leq \\ &\leq c_2 \{\varphi(h_2) M + \varphi(t - t_1) M\} = c_2 M \{\varphi(h_2) + \varphi(t - t_1)\}. \end{aligned}$$

Используя неубывание функции $\varphi(t)$ для $n = 2$, $\kappa = 1$ и $t \in [t_1, t_0 + a]$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi[x^{(2)}(t) - x_0] &\leq c_2 M \{\varphi(h_2) + \varphi(h_2)\} \leq 2 c_2 M \varphi(h_2) = \\ &= 2 C_2 M \varphi\left(\frac{a}{2}\right) \leq \frac{2 c_2 M \varphi(a)}{c_2 \cdot 2} = M \varphi(a) \leq r. \end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает также, что

$$x^{(2)}(t_0), x^{(2)}(t_1), x^{(2)}(t_2) \in S_r.$$

Предположим, что $x^{(m-1)}(t) \in S_r$. Тогда имеем

$$\Phi[x^{(m)}(t) - x_0] = \Phi\left[h_m \sum_{j=0}^{m-1} f_j + (t - t_m) f_m\right],$$

где $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $\kappa = 0, 1, 2, \dots, m-1$.

Для $\kappa = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \Phi[x^{(m)}(t) - x_0] &= \Phi[(t - t_0) f_0] \leq \varphi(t - t_0) M \leq r, \\ \Phi[x^{(m)}(t_1) - x_0] &= \Phi[(t_1 - t_0) f_0] \leq \varphi(t_1 - t_0) M = \\ &= \varphi\left(\frac{a}{m}\right) M \leq \frac{M \varphi(a)}{m c_m} \leq M \varphi(a) \leq r. \end{aligned}$$

То есть $x^{(m)}(t_1) \in S_r$. Пусть для $\kappa = p-1$ $x^{(m)}(t_0), \dots, x^{(m)}(t_{p-1}) \in S_r$ и

$$\Phi[x^{(m)}(t) - x_0] = \Phi\left[h_m \sum_{j=0}^{p-1} f_j + (t - t_p) f_p\right] \leq r.$$

Тогда для $\kappa + 1 \leq m$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi[x^{(m)}(t) - x_0] &= \Phi\left[h_m \sum_{j=0}^{p-1} f_j + (t - t_p) f_p\right] \leq \\ &\leq c_{p-1} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \Phi[h_m f_j] + \Phi[(t - t_p) f_p] \right\} \leq \\ &\leq c_{p+1} \left\{ \sum_{j=0}^{p-1} \varphi(h_m) M + \varphi(h_m) M \right\} = c_{p+1} (p+1) M \varphi(h_m) = \\ &= c_{p+1} (p+1) M \varphi\left(\frac{a}{m}\right) \leq \frac{c_{p+1} (p+1) M \varphi(a)}{c_m m} < M \varphi(a) \leq r. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что $x^{(n)}(t) \in S_r$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Кроме того, из (8) при $t, \tilde{t} \in [t_k, t_{k+1}]$ имеет место соотношение

$$\Phi[x^{(n)}(t) - x^{(n)}(\tilde{t})] \leq \varphi(t - \tilde{t}) M.$$

Выберем n таким, чтобы одновременно выполнялось условие

$$h_n \leq \delta_n \text{ и } \varphi(t - \tilde{t}) \leq \frac{\delta_n}{M} \quad (t \in [t_k, t_{k+1}]),$$

что всегда можно сделать в силу условия (3) и непрерывности функции $\varphi(\lambda)$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1$) получаем, что

$$|t - \tilde{t}| \leq \delta_n \text{ и } \Phi[x^{(n)}(t) - x^{(n)}(t_k)] \leq \delta_n.$$

Таким образом, при $t \in [t_k, t_{k+1}]$ ($\kappa = 0, 1, \dots, n-1$) следует, что

$$\|f(t, x^{(n)}(t)) - f(t_k, x^{(n)}(t_k))\| \leq h_n.$$

Из (8) находим

$$[x^{(n)}(t)]' = f(t, x^{(n)}(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

То есть для $t \in [t_0, t_0 + a]$ получаем

$$\|f(t, x^{(n)}(t)) - [x^{(n)}(t)]'\| \leq h_n.$$

Кроме того, нетрудно заметить, что функция $x^{(n)}(t)$ имеет разрыв первого рода.

Итак имеет место

Лемма. Пусть ограниченный оператор $f(t, x)$ определен и равномерно непрерывен по совокупности переменных на топологическом произведении R , тогда для задачи (1)–(2) на интервале $[t_0, t_0 + a]$ всегда существует h_n – приближенное решение, причем которого являются последовательные приближения Эйлера, определенные по формулам (8).

3. Локальная теорема существования. Рассмотрим задачу (1)–(2).

Имеет место

Теорема 1. Пусть оператор $f(t, x)$ удовлетворяет предположениям леммы и условию (6), тогда на интервале $[t_0, t_0 + a]$ существует (единственное) решение $x^*(t)$ задачи (1)–(2), причем

$$x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t),$$

где $\{x^{(n)}(t)\}$ – последовательность функций, определяемая по формулам (8).

Доказательство. Представим функцию $x^{(n)}(t)$ в интегральной форме. Для этого заметим, что

$$[x^{(n)}(t)]' = f[t, x^{(n)}(t)] + \Delta_n(t),$$

где $\Delta_n(t) = \begin{cases} f(t_k, x^{(n)}(t_k)) - f(t, x^{(n)}(t)) & \text{для } t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k=0, 1, \dots, n-1 \\ 0 & \text{для } t = t_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$
 Кроме того, согласно лемме $\|\Delta_n(t)\| \leq h_n$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$). Отсюда получим

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \{f[s, x^{(n)}(s)] + \Delta_n(s)\} ds.$$

Ниже будет показано, что последовательность $\{x^{(n)}(t)\}$ сходится равномерно по $t \in [t_0, t_0 + a]$. Тогда, если обозначить $\lim x^{(n)}(t) = x^*(t)$,

то

$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x^*(s)) ds.$$

Последнее же говорит о том, что $x^*(t)$ является решением задачи (1)–(2) на интервале $[t_0, t_0 + a]$. Итак, для завершения доказательства осталось показать, что последовательность $\{x^{(n)}(t)\}$ фундаментальная. А для этого достаточно показать, что скалярная функция

$$W^{(n, m)}(t) = \Phi[x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)]$$

равномерно сходится к нулю при $n, m \rightarrow \infty$.

Используя равномерную непрерывность функционала $D(x, h)$ по h относительно x и обозначая через $D^*W^{(n, m)}(t)$ верхнее производное число функции $W^{(n, m)}(t)$, получим

$$D^*W^{(n, m)}(t) \leq D[x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t), [x^{(n)}(t)]' - [x^{(m)}(t)]'] \quad (9)$$

или

$$D^*W^{(n, m)}(t) \leq D[x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t), f[t_k, x^{(n)}(t_k)] - f[t_k, x^{(m)}(t_k)]],$$

где $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, n-1$, $n=1, 2, \dots$

Введем обозначения

$$\gamma_1^{(n, m)} = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + a} |D(x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t), f[t_k, x^{(n)}(t_k)] - f[t_k, x^{(m)}(t_k)]|,$$

$$\gamma_2^{(n, m)} = \max_{t_0 \leq t \leq t_0 + a} |D[x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t), f[t, x^{(m)}(t)] - f[t_k, x^{(m)}(t_k)]|.$$

В силу леммы и условия (5) имеем

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \gamma_i^{(n, m)} = 0 \quad (i=1, 2).$$

Используя (6), получаем

$$D^*W^{(n, m)}(t) \leq F[t, W^{(n, m)}(t)] + \gamma_1^{(n, m)} + \gamma_2^{(n, m)}.$$

Обозначим через $V^{(n, m)}(t)$ решение задачи

$$[V^{(n, m)}(t)]' = F[t, V^{(n, m)}(t)] + \gamma_1^{(n, m)} + \gamma_2^{(n, m)}, \quad V^{(n, m)}(t_0) = 0.$$

Тогда из теоремы о дифференциальных неравенствах вытекает, что

$$W^{(n, m)}(t) \leq V^{(n, m)}(t).$$

Так как $\lim_{n, m \rightarrow \infty} V^{(n, m)}(t) = 0$, то из последнего соотношения, получаем,

что $\lim_{n, m \rightarrow \infty} W^{(n, m)}(t) \leq 0$. Следовательно, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} W^{(n, m)}(t) = 0$, т.е. $\Phi[x^{(n)}(t) - x^{(m)}(t)] \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [t_0, t_0 + a]$. Тем самым

доказана фундаментальность последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$, определяемой по формулам (8), и, следовательно, утверждение теоремы 1.

4. Оценка h_n -приближенного решения. Пусть $x(t)$ является точным решением задачи (1)–(2) на интервале $[t_p, t_0 + a]$ ($t_0 \leq t_p <$

$< t_0 + a$), а $x^{(n)}(t)$ является h_n -приближенным решением задачи (1)–(2) на интервале $[t_p, t_0 + a]$.

Определение 2. Функцию $\Phi[x(t) - x^{(n)}(t)] = u_n(t)$ (см., например, [2]) назовем погрешностью h_n -приближенного решения задачи (1)–(2) на интервале $[t_p, t_0 + a]$.

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда для функции $u_n(t)$ ($t \in [t_p, t_0 + a]$) справедлива оценка

$$u_n(t) \leq u^*(t), \quad (10)$$

где $u^*(t)$ является решением задачи

$$[u^*(t)]' = F[t, u^*(t)] + \sigma_n, \quad u^*(t_p) = u_p,$$

$$\sigma_n = \max_{t_p \leq t \leq t_0 + a} |D[x(t) - x^{(n)}(t), f[t, x^{(n)}(t)] - [x^{(n)}(t)]']|.$$

Доказательство. Для функции $u_n(t)$ нетрудно получить неравенство, аналогичное неравенству (9) в виде

$$D^*u_n(t) \leq D[x(t) - x^{(n)}(t), [x(t)]' - [x^{(n)}(t)]'].$$

Используя свойства функционала $D(x, h)$, получим

$$\begin{aligned} D[x(t) - x^{(n)}(t), [x(t)]' - [x^{(n)}(t)]'] &= \\ &= D[x(t) - x^{(n)}(t), f(t, x) - f[t_k, x^{(n)}(t_k)]] \leq \\ &\leq D[x(t) - x^{(n)}(t), f(t, x) - f[t, x^{(n)}(t)] + \\ &+ f[t, x^{(n)}(t)] - f[t_k, x^{(n)}(t_k)]] \leq \\ &\leq D[x(t) - x^{(n)}(t), f(t, x) - f[t, x^{(n)}(t)]] + \\ &+ D[x(t) - x^{(n)}(t), f[t, x^{(n)}(t)] - f[t_k, x^{(n)}(t_k)]] \leq \\ &\leq F[t, u_n(t)] + \sigma_n. \end{aligned}$$

То есть

$$D^*u_n(t) \leq F[t, u_n(t)] + \sigma_n.$$

Применяя к последнему соотношению теорему о дифференциальных неравенствах, получаем утверждение теоремы 2.

Следствие 1. Легко видеть, что если функция $F(t, V) = F_1(t) \cdot V$, где $\int_{t_p}^{t_0+a} F_1(s) ds < \infty$, то оценка (10) принимает более конкретный вид:

$$u_n(t) \leq u_n(t_p) \exp \left[\int_{t_p}^t F_1(s) ds \right] + \sigma_n \int_{t_p}^t \exp \left[\int_s^t F_1(\tau) d\tau \right] ds. \quad (11)$$

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 $t_p = t_0$, то для $u_n(t)$ оценка (11) принимает вид

$$u_n(t) \leq c \sigma_n \int_{t_0}^t \exp \left[\int_s^t F(\tau) d\tau \right] ds \leq a \sigma_n \exp \left[\int_{t_0}^t F_1(s) ds \right]. \quad (12)$$

5. Продолжение h_n -приближенного решения. Рассмотрим на интервале $[t_0, T]$ задачу (1)–(2). Для этой задачи методом Эйлера получено h_n -приближенное решение $x^{(n)}(t)$ для $t \in [t_0, t_0 + a]$ ($a = \min(\alpha, T - t_0)$, $\varphi(t - t_0) \leq \frac{r}{M}$ при $t \in [t_0, t_0 + a]$). Пользуясь полу-

ченными в п. 4 априорными оценками (10), (11) или (12), можно рассмотреть вопрос о возможности продолжения полученного h_n -приближенного решения задачи (1)–(2) $x^{(n)}(t)$ ($t \in [t_0, t_0 + a]$) на максимально возможный интервал $[t_0, T^*]$ ($T^* > t_0 + a$). В дальнейшем будем предполагать, что оператор $f(t, x)$ в области R удовлетворяет

условию (6). В этом случае имеет место априорная оценка (10). По формуле (10) вычисляем оценку

$$\Phi[x(t_0 + a) - x^{(n)}(t_0 + a)] \leq b^{(1)}.$$

Область $R^{(1)} \subset R$ определяется соотношением

$$R^{(1)} = [t_0, t_0 + a] \times S_{r^{(1)}},$$

где $S_{r^{(1)}} = \{x; x \in E, \Phi[x(t) - x^{(n)}(t_0 + a)] = r^{(1)}\}$ ($r^{(1)} > b^{(1)}$).

Очевидно далее, что всегда можно указать такое вещественное $\alpha^{(1)}$ ($\alpha^{(1)} > 0$), что при $t \in [t_0 + a, t_0 + a + \alpha^{(1)}]$ выполняется соотношение

$$\varphi(t - t_0 - a) \leq \frac{r^{(1)} - b^{(1)}}{M} \quad ((t, x) \in R, \Phi[f(t, x)] \leq M).$$

Обозначая через $\alpha^{(1)} = \min(\alpha^{(1)}, T - t_0 - a)$, ($\alpha^{(1)} > 0$) h_n — приближенное решение задачи (1)–(2), $-x^{(n)}(t)$ можно продолжить на интервал $[t_0 + a, t_0 + a + \alpha^{(1)}]$. На i -м шаге продолжений по формуле (10) вычисляем оценку

$$\Phi \left[x(t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)}) - x^{(n)}(t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)}) \right] \leq b^{(1)}$$

Область $R^{(i)} \subset R$ определяется соотношением

$$R^{(i)} = \left[t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-2} a^{(s)}, t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)} \right] \times S_{r^{(i)}},$$

где $S_{r^{(i)}} = \{x; x \in E, \Phi[x(t) - x^{(n)}(t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)})] \leq r^{(i)}\}$ ($r^{(i)} > b^{(i)}$).

Числа $a^{(i)}$ определяются соотношением:

$$a^{(i)} = \min \left(\alpha^{(i)}, T - t_0 - a - \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)} \right),$$

где $\alpha^{(i)}$ определяется соотношением

$$\varphi \left(t - t_0 - a - \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)} \right) \leq \frac{r^{(i)} - b^{(i)}}{M} \quad ((t, x) \in R, \Phi[f(t, x)] \leq M)$$

$$\text{для } t \in \left[t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)}, t_0 + a + \sum_{s=1}^{i-1} a^{(s)} + \alpha^{(i)} \right].$$

В этом случае h_n — приближенное решение продолжимо на интервал $\left[t_0 + a, t_0 + a + \sum_{s=1}^i a^{(s)} \right]$.

Указанным выше способом можно продолжить h_n — приближенное решение задачи (1)–(2) вплоть до границы области R . Для продолжения решения за область R необходимо на каждом шаге проверять выполнение условия (6).

6. Устойчивость h_n — приближенного решения. Рассмотрим, наконец, вопрос об устойчивости по начальным данным h_n — приближенного решения задачи (1)–(2) на интервале $[t_0, T^*]$.

Определение 3. h_n — приближенное решение задачи (1)–(2) назовем устойчивым по начальным данным на интервале $[t_0, T^*]$, если оно $x^{(n)}(t)$ непрерывно зависит от начальных данных, причем эта

зависимость равномерная относительно h_n , то есть каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$V^{(1,2)}(t) \leq K \left[V^{(1,2)}(t_0) + K \int_{t_0}^t \varepsilon_n ds \right]. \quad (13)$$

Учитывая, что $x_1^{(n_1)}(t)$ и $x_2^{(n_2)}(t)$ являются h_{n_1} — приближенными решениями задачи (1)–(2) ($i = 1, 2$) подберем n_1 и n_2 так, чтобы при $n_1, n_2 > N_1$

$$\varepsilon_n K^2 (T^* - t_0) \leq \varepsilon,$$

(ε — заданное сколь угодно малое число). Подберем далее n_1 и n_2 так, чтобы при $n_1, n_2 > N_2$

$$\delta \leq \frac{\varepsilon - \varepsilon_n K^2 (T^* - t_0)}{K} \quad (\delta = V^{(1,2)}(t_0),$$

Обозначим через $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для $n_1, n_2 > N$, учитывая (13), получим

$$\Phi[x_1^{(n_1)}(t) - x_2^{(n_2)}(t)] \leq K[\delta + K\varepsilon_n(T^* - t_0)] \leq \varepsilon.$$

В заключение автор приносит глубокую благодарность С. Г. Крейну и Я. Д. Мамедову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибенко А. В., Красносельский М. А., Мамедов Я. Д. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. и хим. наук“, 1961, № 3, 13–19.
2. Бондаренко П. С. „ДАН СССР, 1960, 132, № 4, 739–742.“
3. Колдингтон Э. А., Левинсон А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИИЛ, 1958.

Е. А. Газиев

Дифференциал тэнликлэрин Ејлер сыныг хэтлэри үсүлү илэ хэллиндэ биртэрэфдэн гиймэтлэндирмэлэр

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә (1)–(2) Коши мәсәләсинин Банах фәзасында хәллине бахылып. $f(t, x)$ операторунун үзәринә гојулан шәртләр, әсәсэн, биртәрэфдән мәндулгудур.

Оператор биртәрэфдән мәндул олдугда (1)–(2) мәсәләси хәллинин варлығы вә јеканәлији [1] мәгаләсиндә исбат едилмишдир. Бурада исә исбат олунур ки, хәмин шәртләр дахилиндә јеканә хәллә мүнтәзәм олараг Ејлер сыныг хәтләр ардычылығы јығылып. Бундан башга, исбат едилир ки, хәлли бүтүн интервал үзрә давам етдирмәк олар вә бу хәлл башланғыч шәртләринә көрә дајаныглыдыр.

Ш. Н. МАМЕДОВ, Т. НУРУЛЛАЕВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВЕЛИЧИН БУРОВЗРЫВНЫХ РАБОТ ПРИ БЫЕМКЕ ТОНКИХ ЖИЛ (НА ПРИМЕРЕ РУДНИКОВ ИНГИЧКА, КОЙТАШ УЗБЕКСКОЙ ССР)

Положения (паспортизация) о буровзрывных работах при отбойке жил разрабатываются на более или менее длительное время. Однако опыт рудников Ингичка и Койташ свидетельствует о том, что принятая паспортизация буровзрывных работ часто нарушается, а в ряде случаев ею вообще не руководствуются.

В составленных паспортах буровзрывных работ на этих рудниках принято, что мощность жилы и, следовательно, ширина очистного пространства, количество, глубина шпуров, заряд в шпурах и сетка расположения их являются постоянными. Однако практика и наши теоретические положения [1, 2] подтверждают тот факт, что количество шпуров, их глубина и размещенное в них взрывчатое вещество (ВВ) должны быть различными в зависимости от мощности жилы, типа ВВ, числа рядов и свойства вмещающих пород.

Причинами нарушения паспорта буровзрывных работ в указанных месторождениях являются: а) несоответствие количества и глубины шпуров; б) тип и количество применяемого ВВ, следовательно, и распределение зарядов по шпурам; в) место расположения патрона-боевика по длине удлинённого заряда и т. д. Количество шпуров на забой камеры, как правило, определяется по эмпирической формуле М. М. Протодяконова $N = 2,7\sqrt{fS}$ и, как показала практика работы этих рудников, часто это количество было недостаточным для участков жил с мощностью менее 0,6—0,8 м.

В камере № 9 блока № 24 Ингичкинского месторождения по паспорту буровзрывных работ намечалось пробурить $N = 2,7\sqrt{12 \cdot 9,6} = 29$ шпуров при сечении камеры $S = 9,6$ м², крепости жилы $f = 12$ и сетке расположения $0,6 \times 0,6$ м. В действительности количество шпуров доходило до 35 и в силу этих причин, в отдельной части забоя сетка была уменьшена до $0,4 \times 0,4$ м.

Известно, что расчетные формулы М. М. Протодяконова выведены из практики применения динамита для случаев проходческих работ, где боковые породы не играют никакой роли, так как среда при этом по площади и по глубине считается однородной. Однако механическое перенесение этих условий для отбойки тонких и весьма тонких жил не отражает сути дела, так как здесь фактор зажима играет большую роль и поэтому какая-то доля полезной работы взрыва будет идти на преодоление влияния зажима.

Действительно, уменьшение диаметра воронки выброса ведет к увеличению расхода ВВ. Это означает, что повысилась крепость породы при неизменном поперечном сечении выработки. Отбойка жил характеризуется еще тем, что невыдержанная мощность жилы по забою и различная крепость руды и боковых пород по всему сечению камеры создают как бы ряд элементарных площадей отрыва, физико-механические свойства которых отличаются на малую величину. Если значения смежных элементарных площадок отрыва считать равными, то их крепости отличаются на малую величину ввиду изменчивости мощности. Значит общее количество шпуров для однородной среды и постоянной мощности равно $N_1 = 2,7\sqrt{fS}$, а при изменении мощности жилы (это эквивалентно неоднородной по крепости, постоянной по мощности жиле) — N_2 , тогда общее количество шпуров на забой будет

$$N = N_1 + N_2. \quad (1)$$

При выводе N_2 имеется в виду, что для тонких, изменчивых по мощности жил f и S можно считать переменными величинами, имеющими частные производные первого порядка от эмпирической зависимости М. М. Протодяконова, т. е. от N_1 :

$$N_2 = \frac{\partial N_1}{\partial S} + \frac{\partial N_1}{\partial f} = \frac{2,7}{2} \left(\sqrt{\frac{f}{S}} + \sqrt{\frac{S}{f}} \right) = 1,35 \frac{f+S}{\sqrt{fS}}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1), получим эмпирическую зависимость по определению количества шпуров для тонких и весьма тонких жил невыдержанной мощности:

$$N = 1,35 \frac{2:fS + f + S}{\sqrt{fS}}. \quad (3)$$

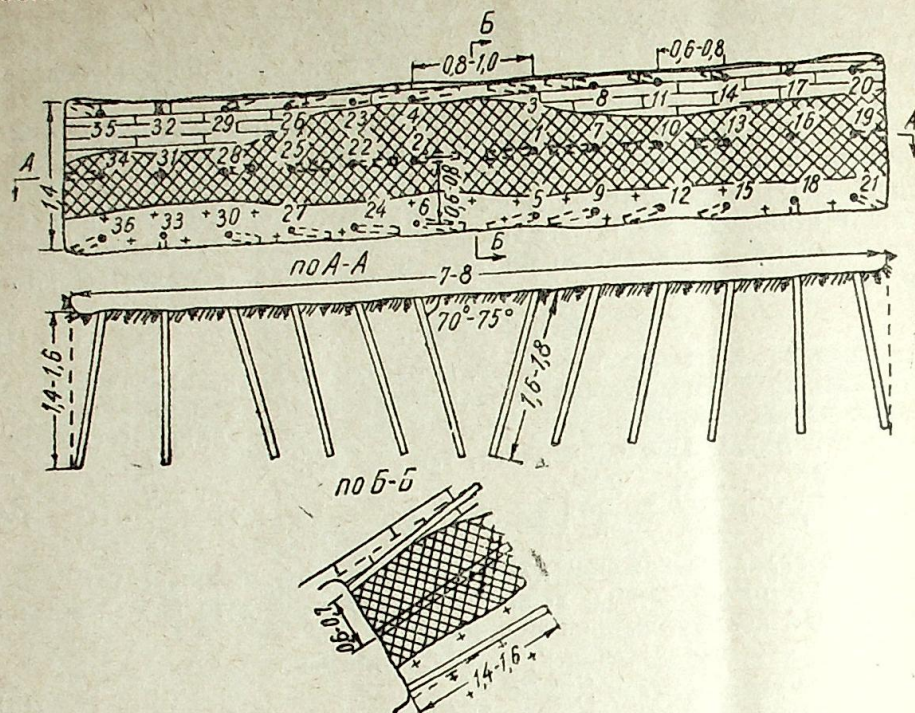
Для примера определим количество шпуров по формуле (3) для камеры № 9 блока № 24 Ингичкинского месторождения при известных значениях крепости жилы и сечения забоя. Вычисление дает:

$$N = 1,35 \frac{2 \cdot 12 \cdot 9,6 + 12 + 9,6}{\sqrt{12 \cdot 9,6}} = 32 \text{ шпура.}$$

Во время наблюдений было выявлено, что сетку расположения шпуров в зависимости от общего количества последних и количества ряда можно считать оптимальной только в том случае, если шпуры располагаются строго по жиле. На самом деле, рассчитанное количество шпуров для данной жилы (породы) располагается по неизменной сетке всего сечения забоя, в результате чего работа заряда в различных шпурах будет различной и, следовательно, эффект будет отличаться от того результата, когда работа зарядов всех шпуров будет одинакой.

На рис. 1 представлена зарисовка камеры № 9 блока № 24, сделанная во время наблюдений. Хотя количество шпуров на забой в данном случае соответствует намеченному по паспорту (32—36), на самом деле условия работы зарядов резко отличаются, к тому же третья часть шпуров расположена по породе лежащего бока, представленного лейкократовыми гранитами, взрываемости которых примерно в 1,25—1,5 раза ниже взрываемости самой жилы (хотя крепость ее равна 12 а крепость лейкократовых гранитов 9). Несколько шпуров располагалось по породам висячего бока, представленного мраморизованными известняками крепостью 8, более взрываемыми, нежели сама жила или лежащий бок. Отсюда ясно, что распределение энергии по шпурам будет различным ввиду того, что вес заряда во всех шпурах принимался равным 0,8—1,0 кг; вследствие этого ко-

эффицент использования шпуров (к.и.ш.) получался различным в зависимости от того, расположены ли они по твердой или по мягкой части забоя камеры.



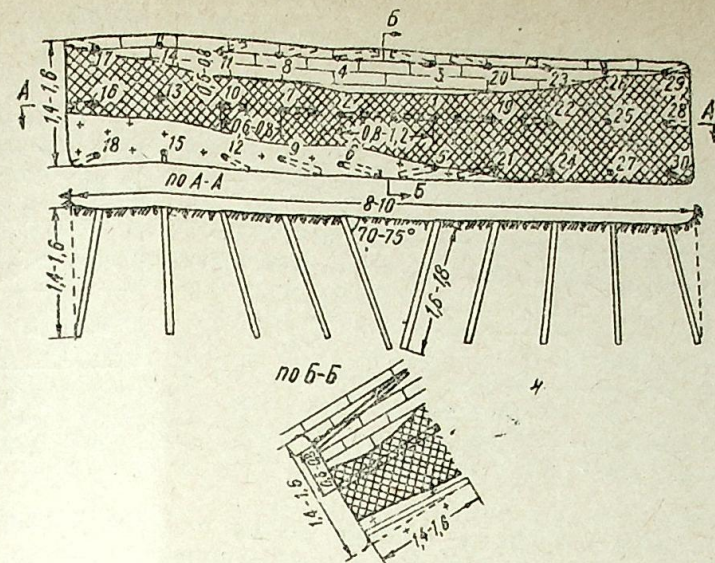
1. Вид и расположение шпуров в забое камеры № 24 Ингичкинского месторождения во время наблюдения

После каждого цикла взрыва нами проверялось состояние забоя камеры. В варианте расположения шпуров, показанном на рис. 1, и в других подобных случаях было выявлено, что лежащий бок после взрыва сильно разрушается: трещинообразования (зона рыхления) уходят вглубь и это является причиной увеличения ширины очистного пространства во время скрепирования вследствие того, что разрушенная или сильно нарушенная почва забоя в процессе скрепирования срезается.

Часть шпуров, расположенная по известняку, давала очень плохие результаты: оставались большие стаканы после взрыва. Такое нежелательное явление было выявлено также в блоках № 26, 30 и 27 (рис. 2).

При отбойке тонких жил Койташского месторождения паспорт буровзрывных работ нарушается реже, что объясняется большей выдержанностью жил, а также тем, что здесь хорошо освоено влияние боковых пород на технику ведения взрывных работ, т. е. шпуров, пробуриваемые с боков, отступают от соответствующего бока на несколько сантиметров, в зависимости от устойчивости пород последнего.

В блоках Койташского месторождения количество располагаемых шпуров на забой камеры сечением 10—12 м² и крепостью жилы 14—16 колеблется от 35 до 45 против рассчитанного количества по формуле М. М. Протодеяконова, в то время как количество шпуров, рассчитанное по формуле (3), равно 40—45 для этих условий, что соответствует практике.



2. Вид и расположение шпуров в забое камеры № 2 блока № 27 Ингичкинского месторождения во время наблюдения

Для проверки определим глубину врубовых шпуров и линию наименьшего сопротивления (л. н. с.) отбойных шпуров по формулам, введенным нами на базе основного дифференциального уравнения [1,2]:

$$\omega = \frac{0,32 \cdot Q v_0 \sin 2\beta}{h \left(\sigma_{сж} \varepsilon + \frac{1}{\sigma} \gamma h \delta \right)} \quad (4)$$

$$\omega' = \frac{0,50 \cdot 1,37 Q' v_0 \sin 2\beta'}{L \left[\left(2\varepsilon' + \frac{h}{L} \right) \sigma_{сж} + \frac{1}{2} \gamma h \delta' \right]} = \frac{\omega''}{2}, \quad (5)$$

где Q —вес принятого заряда ВВ, кг;

$Q' = 78,6 d^2 \gamma$ —вес заряда в удлиненном шпуре, при длине последнего 1,0 м, кг;

v_0 —скорость детонации ВВ, м/сек;

h —мощность жилы или диаметр воронки выброса, м;

$\sigma_{сж}$ —нормальное сопротивление породы на сжатие, кг/см²;

γ —объемный вес породы, кг/м³ ($\gamma = 3000$ кг/м³);

δ, δ' —тригонометрические функции, учитывающие падение жилы;

L —длина шпура, параллельного обнаженным плоскостям, м;

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}; \quad \varepsilon' = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta'};$$

d —диаметр шпура (диаметр заряда принимаем равным диаметру шпура);

η —коэффициент заполнения шпура;

$\omega, \omega', \omega''$ —глубина врубовых, отбойных при двух плоскостях и отбойных при трех плоскостях обнажения, м.

Критерии по определению тангенса угла полураствора воронки выброса при одной плоскости обнажения ($\operatorname{tg} \beta$) и призмы выброса при двух плоскостях обнажения ($\operatorname{tg} \beta'$) соответственно будут установлены при помощи зависимостей [1,2]:

$\operatorname{tg} \beta = \frac{3 \sqrt{\sigma_{\text{сж}}} h^2}{\rho Q \lg v_0}$, $\operatorname{tg} \beta' = \frac{2,5 h \sqrt{\sigma_{\text{сж}}} h L}{\rho Q' 1,37 \lg v_0}$, где $\rho \lg v_0$ — корень квадратный из бризантности ВВ.

Таблица 1

h	f = 12						f = 14					
	Q = 0,8 кг			Q = 1,0 кг			Q = 1,0 кг			Q = 1,2 кг		
	ω	ω'	ω''	ω	ω'	ω''	ω	ω'	ω''	ω	ω'	ω''
0,2	0,96	0,23	0,46	0,97	0,21	0,42	0,90	0,20	0,40	0,90	0,18	0,36
0,4	1,20	0,38	0,76	1,45	0,38	0,76	1,50	0,41	0,82	1,60	0,35	0,70
0,6	0,60	0,36	0,72	0,95	0,35	0,70	0,70	0,35	0,70	0,96	0,32	0,64

В блоке № 24 паспортная глубина шпура принята 1,4—1,6 м с зарядом ВВ в каждом шпуре по 0,8—1,0 кг. В блоках Койташского месторождения глубина шпура 1,5—1,8 м с зарядом в них по 1,0—1,3 кг. Взрывчатое вещество аммонит № 6 с диаметром патрона 32 мм, который разрезается при зарядании с целью увеличения плотности заряжания (скорость детонации $v_0 = 3800$ м/сек). Расчетные величины глубины врубовых шпуров (ω), л.н.с. первого ряда (близкий к висячему боку) зарядов (ω') и для второго ряда (близкий к лежащему боку) зарядов (ω'') приведены в табл. 1 (расчеты относятся к случаю двухрядного расположения шпуров).

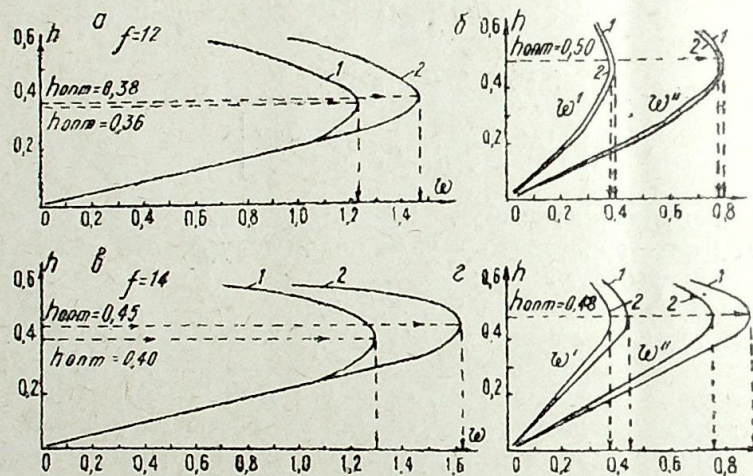


Рис. 3. Кривые функциональных зависимостей $\omega = f(h)$, $\omega' = f(h)$ и $\omega'' = f(h)$: а и б—соответствующие кривые при весе аммонита № 6—0,8 кг (1) и при весе 1,0 кг (2); в и г—соответствующие кривые при весе аммонита № 6—1,0 кг (1) и при весе 1,2 кг (2).

Кривые функциональных зависимостей $\omega = f(h)$, $\omega' = f(h)$ и $\omega'' = f(h)$ показаны на рис. 3а,б,в,г. Эти расчеты и кривые показывают, что для условий блоков № 24, 27, 30 при крепости руды $f = 12$ и диаметре шпура 46 мм оптимальной глубиной врубовых шпуров будет: при заряде в шпуре 0,8 кг—1,25 м; при заряде 1,0 кг—1,46 м. Для условий блоков Койташского месторождения при крепости руды $f =$

$= 14$ и диаметре шпура 46 мм оптимальная глубина врубовых шпуров будет: при заряде ВВ в шпуре 1,0 кг—1,3 м; при заряде 1,2 кг—1,65 м. Если при этом учесть наклон шпуров к плоскости забоя ($70-75^\circ$), то расчетные данные точно соответствуют данным практики, что указывает на точность вычислений по выведенным нами зависимостям.

Большое значение имеет число плоскостей обнажения. Заряд, взорвавшийся первым после врубовых шпуров, имеет две, а последующий ряд шпуров—три плоскости обнажения, поэтому при одинаковом весе заряда л.н.с. заряда второго ряда должна быть в два раза больше л.н.с. первого ряда [см. формулу (5)].

На практике, как правило, л.н.с. всех зарядов принимается одинаковой, при этом заряд в обоих рядах берется одинаковым. Это, видимо, делается с целью уменьшения влияния числа обнаженных плоскостей, что ведет к искусственному увеличению веса заряда в последующих шпурах. Если мы хотим уравновесить л.н.с. обоих рядов при очередном взрывании, то за л.н.с. должны брать среднеарифметическое, т.е. $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega' + \omega''}{2}$. При этом заряды в шпурах соответственно должны быть различными. Заряд второго ряда должен быть меньше на величину отношения $\frac{\omega_{\text{ср}}}{\omega''}$.

Определим оптимальный вес заряда в шпурах первого и последующих рядов по данным табл. 1 и рис. 3 а,б,в,г. В табл. 2 приведены усредненные значения л.н.с и веса заряда в шпурах.

Таблица 2

f	ω	Q	$\omega_{\text{ср}}$	$Q_{\text{ср}}$	ω	Q	$\omega_{\text{ср}}$	$Q_{\text{ср}}$
12	1,25	0,80	0,62	0,60	1,46	1,00	0,62	0,76
14	1,30	1,00	0,66	0,78	1,65	1,20	0,56	1,00

С целью уточнения справедливости этих положений нами проведены опыты в камере № 9 блока № 24. В забое было размещено 32 шпура. Глубина отбойных шпуров достигала 1,4 м; врубовые шпуры вертикально клиновые в количестве 6 штук были размещены в левой части забоя. До опытов все отбойные шпуры заряжались аммонитом № 6 в количестве 0,8 кг в каждом из них. При этом отбиваемая масса измельчалась на очень мелкие фракции и получался большой разброс отбитой массы по всему выработанному пространству; такое положение служило причиной разрушения и ослабления боковых пород, вследствие чего ширина очистного пространства доходила до 1,6 м против 1,2.

В опытах заряд второго и последующих рядов уменьшили на 25—30% при неизменной л.н.с. всех зарядов. После каждого взрыва нами была замерена высота очистного пространства. Во время опытов к.и.ш. почти не ухудшался, зато объем мелких фракций, степень разрушения боковых пород, а следовательно высота очистного пространства уменьшались. Данные опытов приведены в табл. 3.

В блоках № 24, 27, 30 и 31 при мощности жилы менее 0,8 м отбойка велась при высоте очистного пространства 1,2—1,4 м как технически возможной величины. Это положение отрицательно сказывалось на экономике рудника.

Допустим, что мы решили отбить только жильную массу (для условий блока № 24) при ее мощности 0,6 м. Количество шпуров при се-

чений забоя $0,8 \times 0,6 = 4,8 \text{ м}^2$ по формуле М. М. Протодеяконова составит

$$N = 2,7 \sqrt{12 \cdot 4,8} = 20, \text{ а по формуле (3) } N = 1,35 \frac{2 \cdot 12 \cdot 4,8 + 12 + 4,8}{\sqrt{12 \cdot 4,8}}$$

= 23. Возникает вопрос, каким образом расположить это количество шпуров по забою и каким образом распределить заряд по шпурам, чтобы иметь максимум эффекта. Чтобы правильно решить этот вопрос, мы должны исходить из такого диаметра шпура (мы принимаем диаметр заряда равным диаметру шпура потому, что патроны разрезаются у которого воронка выброса была бы по крайней мере в два раза меньше мощности жилы при двухрядном расположении шпуров. Расчеты показывают, что этому условию соответствует диаметр шпура 40 мм для аммонита №6 и 36 мм для скального аммонита или детонита 10А. При плотности ВВ 1,0 и коэффициенте заполнения шпура 0,75 вес заряда аммонита в шпуре составит 0,94 кг, а детонита 0,76 кг.

Таблица 3

Ширина камеры, м	Мощность жилы, м	Количество шпуров	Сетка расположения шпуров, м × м	Глубина шпуров, м		Вес заряд, кг		Ширина очистного пространства, м	к. и. ш.	Экономия ВВ, %
				врубных	отбойных	во врубных	в отбойных			
7,0	0,80	30	0,6 × 0,6	1,60	1,40	1,0	0,8 (0,6)*	1,3	0,95	10
7,5	0,90	33	0,6 × 0,6	1,60	1,40	1,0	0,8 (0,6)	1,25	0,90	12
7,0	0,85	30	0,6 × 0,6	1,50	1,40	1,0	0,8 (0,6)	1,30	0,91	10
7,4	0,80	33	0,6 × 0,6	1,60	1,40	1,0	0,8 (0,6)	1,20	0,95	10

* Цифры в скобках — вес заряда в шпуре второго ряда.

Определим для этих значений глубину врубных шпуров (для аммонита №6 и скального аммонита). Для этого предварительно находим диаметр будущей воронки выброса. Для аммонита №6 он составит

$$h = \sqrt{\frac{Q \lg v_0}{3 \sqrt{\sigma_{сж}}}} = \sqrt{\frac{0,94 \cdot 3,58}{3 \sqrt{15}}} = 0,53 \text{ м}; \text{ для скального}$$

$$\text{аммонита } h = \sqrt{\frac{0,76 \cdot 3,7}{3 \sqrt{15}}} = 0,49 \text{ м};$$

Глубина врубных шпуров для аммонита №6 будет

$$\omega = \frac{0,32 \cdot 0,94 \cdot 3800 \cdot 1,0}{0,53 (1500 \cdot 1,42 - 500 \cdot 0,53 \cdot 0,25)} = 1,10 \text{ м};$$

для скального аммонита

$$\omega = \frac{0,32 \cdot 0,76 \cdot 5000 \cdot 1,0}{0,49 (1500 \cdot 1,42 - 500 \cdot 0,49 \cdot 0,25)} = 1,25 \text{ м}.$$

Для определения л.н.с. шпуров первого ряда необходимо определить критерий. Критерием для шпуров, заряженных аммонитом №6, будет

$$\lg \beta' = \frac{2,5 \cdot 0,53}{0,94 \cdot 1,37 \cdot 3,58} \frac{15 \cdot 0,53 \cdot 1,1}{1,1} = 0,85;$$

при этом л.н.с. составит

$$\omega^1 = \frac{0,50 \cdot 0,94 \cdot 1,37 \cdot 3800 \cdot 0,98}{1,1 \left[\left(2,61 + \frac{0,53}{1,1} \right) \cdot 1500 - 1500 \cdot 0,53 \cdot 0,18 \right]} = 0,5 \text{ м};$$

л.н.с. второго ряда при этом равна удвоенной величине л.н.с. первого ряда. Среднее значение л.н.с. для всех рядов будет

$$\omega'_{\text{ср}} = \frac{\omega' + \omega''}{2} = \frac{0,5 + 1,0}{2} = 0,75 \text{ м}.$$

Критерий для шпуров, заряженных скальным аммонитом, будет

$$\lg \beta' = \frac{2,5 \cdot 0,49 \sqrt{15 \cdot 0,49 \cdot 1,25}}{0,76 \cdot 1,37 \cdot 3,7} = 0,96;$$

при этом л.н.с. составит

$$\omega' = \frac{0,5 \cdot 0,76 \cdot 1,37 \cdot 5000 \cdot 0,99}{1,25 \left[\left(2,78 + \frac{0,49}{1,25} \right) 1500 - 1500 \cdot 0,49 \cdot 0,23 \right]} = 0,46$$

Средняя л.н.с. для всех рядов составит:

$$\omega'_{\text{ср}} = \frac{0,46 + 0,92}{2} = 0,69 \text{ м}.$$

Было указано раньше, что кровля забоя камеры №9 блока №24 представлена мраморизованным известняком крепостью 8, а почва лейкократовым гранитом крепостью 9. Исходя из этого, шпуры необходимо располагать от указанных боков на расстоянии, рассчитанном по формулам, выведенным нами и хорошо соответствующим данным практики рудников:

$$\text{от висячего бока } h'_b = \frac{1}{m} \cdot \frac{hf_p}{f_p + f_p}, \quad (6)$$

$$\text{от лежачего бока } h'_l = \frac{1}{m} \cdot \frac{hf_p}{f_p + f_n}. \quad (7)$$

где m — число рядов шпуров по мощности жилы;
 f_p, f_b, f_n — соответственно, крепость руды висячего и лежачего бока;
 h — мощность жилы или высота очистного пространства при многорядном расположении шпуров, м.

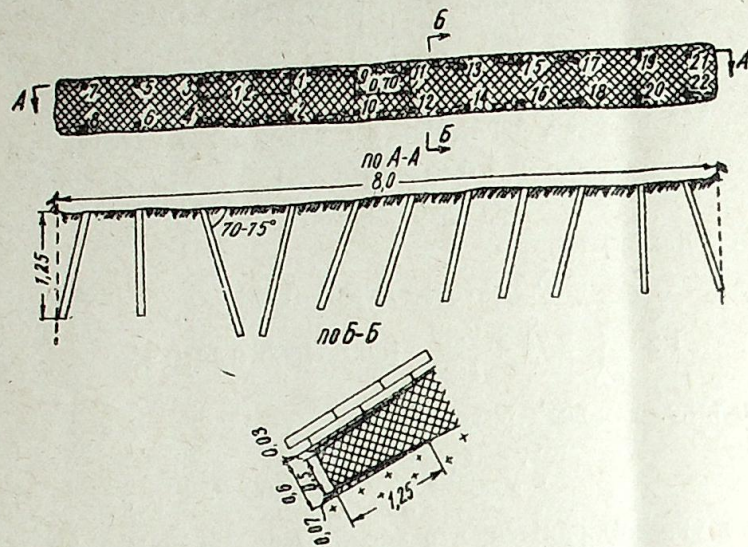
Расчетные значения h'_b и h'_l соответственно будут; $h'_b = \frac{1}{2} \cdot$

$$\frac{0,6 \cdot 12}{12 + 8 \cdot 1,25} = 0,16 \text{ м и } h'_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,6 \cdot 12}{12 + 9 \cdot 0,75} = 0,18 \text{ м}.$$

Если мы преследуем получение чистой и мелкой руды, то будем учитывать влияние боковых пород и при этом шпуры будем располагать отступая от боков на расстояние не меньше, чем расчетные значения h'_b и h'_l по формулам (6) и (7). Если нас интересует расход ВВ строго по намеченному числу шпуров и сетке расположения их, то расстояние шпуров от соответствующих боков уменьшим так, чтобы расстояние между рядами было равно значению диаметра воронки выброса оптимального заряда. В данном случае оно равно 0,50 м.

Таким образом, для данного случая целесообразно применять более мощное ВВ и уменьшенный диаметр шпура, при котором все параметры будут оптимальными: глубина шпура 1,25 м, расстояние между

ними в ряду 0,69 м, между рядами шпуров 0,50 м, количество ВВ в шпурах верхнего ряда 0,76 кг, нижнего ряда (который взрывается вторым) — $0,76 \frac{0,69}{0,92} = 0,76 \cdot 0,75 = 0,57$ кг скального аммонита (или донита 10 А). Все параметры, рассчитанные по формулам, изображены на рис. 4



4. Расположение шпуров при отбойке жилы мощностью 0,6 м (расчетные)

Уместно отметить одно очень важное обстоятельство, относящееся к удлиненным зарядам, параллельным обнаженным плоскостям — снижение эффекта взрыва при увеличении их длины. Данный факт, подтвержденный практикой, подтверждается также формулой (5). Это обусловлено тем, что в формуле по определению критерия ($tg\beta'$) длина играет меньшую роль, нежели в формуле (5), т.е. длина шпура в критерии находится под корнем квадратным, а в формуле (5) — в первой степени и в обратной зависимости. Это говорит о том, что с увеличением длины удлиненных зарядов соответственно уменьшается средняя л.н.с. зарядов, поэтому для увеличения л.н.с. удлиненных зарядов большой длины необходимо соответственно увеличить число точек инициирования или же рассредоточить заряды.

Выводы

1. Эмпирическая формула М. М. Протодаконова по определению количества шпуров при отбойке тонких и весьма тонких невыдержанных по мощности жил дает заниженное количество шпуров, поэтому считаем целесообразным определять необходимое количество шпуров на забой по уточненной формуле (3).

2. Глубина шпуров при отбойке должна выбираться из условий выемочной мощности (ширины очистного пространства) и падения жилы, диаметра шпура, веса и типа применяемого ВВ по формулам (4) и (5).

3. Диаметр шпура должен быть таким, чтобы величина диаметра воронки выброса была бы равна мощности жилы при учете условий (6) и (7).

4. Применять такой тип ВВ, при котором глубина шпура была бы наибольшей при минимальном его диаметре, соответствующей ширине очистного пространства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов Ш. Н., Нуруллаев Т. Изв. АН Азерб. ССР, серия геол.-географ. наук, 1965, № 4.
2. Мамедов Ш. Н., Нуруллаев Т. ДАН Азерб. ССР, 1965, № 5.

Ш. Н. Мамедов, Т. Нуруллаев

Назик дамар типли јатагларын ишләнмәсиндә газыма-партлатма ишләринин бә'зи оптимал өлчүләринин тә'јин едилмәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәгалә назик дамар типли јатагларын ишләнмәсиндә газыма-партлатма ишләринин оптимал өлчүләринин сечилмәсинә һәср едилмишдир.

Назик дамар типли јатаглар ишләндикдә филиз чыхарылан лағымларын лағыми мигдары М. М. Протодаконовун вердији дәстурә әсасән тә'јин олунур. Анчаг лағымларын бу дәстурә васитәсилә тә'јин едилмиш мигдары гејри-сабит галынлығы малик олан јатаглар үчүн ујғун дејилдир.

Мәгаләдә јатагын галынлығынын гејри-сабитлијини нәзәрә алан, лағымларын оптимал мигдарыны тә'јин едән, онларын сәмәрәли јерләшдирилмәсини тә'мин едән дәгигләшмиш дәстур вә чапычы лағымларын оптимал дәринлијини вә дәринләшдирилмиш лағымларын ән аз мүғавимәт хәттини тә'јин етмәк үчүн дәстурлар верилир. һесабама нәтичәсиндә диаметри азалдылмыш лағымларын (30—34 мм) ефектли олмасы сүбүт едилир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. М. МУСЛИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НА МОДЕЛИ ПОВЫШЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ НА НЕЙТРАЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ, ВЫЗВАННОГО АТМОСФЕРНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Задача исследования повышения напряжения на нейтрали раз-
земленных трансформаторов, вызванного атмосферными воздействи-
ями, может быть решена с помощью ЭЦВМ при создании соответ-
ствующих методов и программ расчета, или с помощью физической
модели. При этом чтобы иметь правильное представление о развитии
процесса повышения напряжения на нейтрали таких трансформаторов,
необходимо учитывать реальную схему подстанции.

Физическая модель, на которой будет исследована поставленная
задача, состоит из моделей трансформаторов, системы шин и отклю-
чающей аппаратуры, защитных устройств, а также содержит в себе
генератор волн, измерительные и регистрирующие устройства (рис. 1).

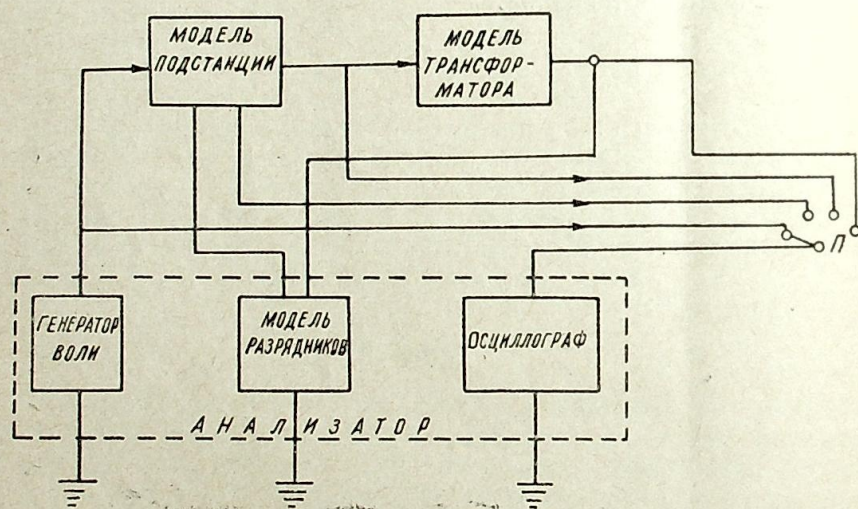


Рис. 1

В схеме построенной нами модели были использованы с опреде-
ленной модернизацией элементы анализатора грозозащиты подстан-
ций конструкции ЛПИ им. М. И. Калинина.

В статье рассматривается вопрос моделирования трансформатора.
Наиболее опасным для изоляции нейтрали трансформаторов является

одновременное падение на его три фазы одинаковых волн. При этом
переходный процесс в каждой фазе трансформатора протекает одина-
ково и в таком случае рассмотрение процесса в трехфазном транс-
форматоре может быть заменено рассмотрением его в однофазном
трансформаторе, для которого справедлива следующая система урав-
нений (рассматривается приведенный трансформатор с длиной обмот-
ки: l):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial i_1}{\partial x} &= C'_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + C'_{12} \frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial t} - K'_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t}, \\ -\frac{\partial i_2}{\partial x} &= C'_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + C'_{12} \frac{\partial (u_2 - u_1)}{\partial t} - K'_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t}, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M'_{11}(x, s) i_1(s) ds + \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 M'_{12}(x, s) i_2(s) ds + r'_1 i_1, \\ -\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M'_{22}(x, s) i_2(s) ds + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M'_{12}(x, s) i_1(s) ds + r'_2 i_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где u_1, u_2, i_1, i_2 — напряжения и токи в первичной и вторичной об-
мотках трансформатора;

C'_1, C'_2, C'_{12} — единичные емкости обмоток на землю и между со-
бой;

K'_1, K'_2 — единичные продольные емкости обмоток;

$M'_{11}, M'_{22}, M'_{12}$ — единичные собственные и взаимные индуктивности
обмоток;

r'_1, r'_2 — единичные активные сопротивления обмоток.

Вычитая из третьего уравнения четвертое системы (1), получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 [M'_{11}(x, s) - M'_{12}(x, s)] i_1(s) ds - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 [M'_{22}(x, s) - M'_{12}(x, s)] i_2(s) ds + i_1(r'_1 + r'_2). \end{aligned}$$

Если учесть, что $M'_{11} - M'_{12} = M'_{s1}, M'_{22} - M'_{12} = M'_{s2}$, то

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} (u_1 - u_2) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^1 M'_{s1}(x, s) i_1(s) ds - \right. \\ &- \left. \int_0^1 M'_{s2}(x, s) i_2(s) ds \right\} + i_1(r'_1 + r'_2) \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Для рассматриваемого процесса можно принять $u_2 = 0$, при этом
неизвестные u_1, i_1 могут быть определены совместным решением пер-
вого уравнения системы (1) и уравнения (2), записанных ниже после
небольших преобразований:

$$-\frac{\partial i_1}{\partial x} = C \frac{\partial u_1}{\partial t} - K \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial t},$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 M_s(x, s) i_1(s) ds + r i_1.$$

Здесь: $C = C_1 + C_{12}$; $M_s = M_{s_1} - M_{s_2}$; $r = 2r_1$.
Заменив последние уравнения приближенно системой разностных уравнений, имеем

$$i_{n+1} - i_n = h C \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{K}{h} \frac{d}{dt} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}),$$

$$u_{n+1} - u_n = h \sum_{p=1}^m M_{np} \frac{di_p}{dt} + h r i_n, \quad (3)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots, m$,
 h — шаг по x .

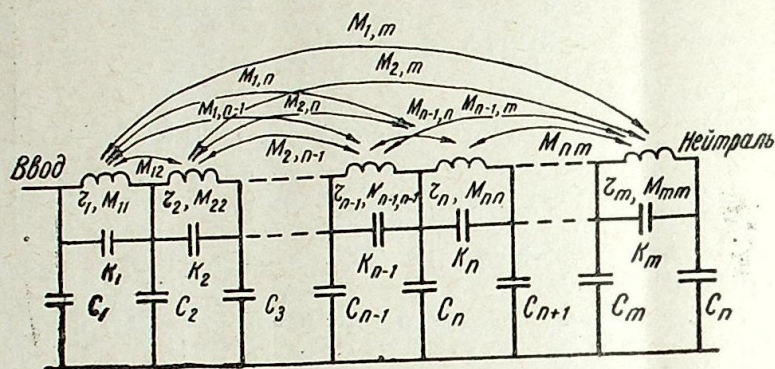


Рис. 2. Схема замещения трансформатора

Уравнениям (3) соответствует схема замещения рис. 2, поэтому последняя может служить схемой модели для изучения переходных процессов в трансформаторе (рассматриваемый случай). Параметры трансформатора для волновых процессов: полная индуктивность — L и емкость на землю — C могут быть найдены из [2], индуктивность отдельных ячеек — M_{nn} и взаимная индуктивность между ними — M_{np} из [3]. Среднее значение продольной емкости — K определяется по кривой начального распределения напряжений для исследуемого трансформатора. Активное сопротивление r , учитывающее поверхностные эффекты, эффекты близости, потери в стали и обмотке и неподдающиеся точному расчету при импульсных воздействиях, ориентировочно определяется из экспериментальных кривых, полученных при импульсных испытаниях трансформатора, проводящихся в заводских условиях.

Оптимальные масштабы моделирования. Для трансформаторов 110 кВ мощностью 10 ÷ 120 мВА индуктивность $L_0 = 0,017 \div 0,202$ Гн и $C = 1000 \div 7500$ пФ. Число ячеек на модели трансформатора может быть принято с достаточной для практики точностью равным десяти или более [1]. Как известно, масштабы индуктивности — P_L , емкости — P_C , активного сопротивления — P_r , времени — P_t , напряжения — P_u , и тока — P_i связаны между собой соотношением $P_t = P_r \cdot P_C$; $P_u = P_r \cdot P_i$; $P_L = P_t \cdot P_r$.

Переходный процесс в трансформаторе можно считать завершенным за 2 ÷ 3 миллисекунды, что при использовании генератора волн, подающего 50 импульсов в секунду, ограничивает масштаб времени величиной 6,6 ÷ 10. Дальнейшее увеличение масштаба времени может

привести к наложению переходных процессов от повторяющихся импульсов.

При искусственном сокращении продолжительности переходного процесса можно пользоваться большим масштабом времени — до 50, нужный момент времени. Масштаб P_C для уменьшения влияния паразитных емкостей соединительных проводов должен быть не менее 2. Масштаб P_r связан с затратами проводникового материала для построения модели; для экономии материала минимальное значение этого масштаба принято равным 3.

Импульсное активное сопротивление трансформатора, полученное нами в результате обработки ряда осциллограмм импульсных испытаний трансформаторов в заводских условиях, мало зависит от мощности трансформатора: $r = (30 \div 50)$ Ом. При известных минимальных и максимальных значениях масштабов P_r и P_C минимальный масштаб индуктивности $P_{Lmin} = 18$, максимальный $P_{Lmax} = 250$. Для моделирования часто встречающихся на крупных подстанциях трансформаторов, мощность которых находится в пределах 10 ÷ 120 мВА, полная индуктивность модели должна находиться в пределах

$$L_m = L_{0max} \cdot P_{Lmin} \div L_{0min} \cdot P_{Lmax} = (0,2 \cdot 18 \div 0,02 \cdot 250) = (3,6 \div 5,0) \text{ Гн}.$$

Нами была построена модель с параметрами $L = 4,67$ Гн и $r = 150$ Ом, число ячеек в модели равнялось тринадцати.

Сравним действительную картину развития повышения напряжения на нейтрали трансформатора ТДГУ—60000/110, полученную при падении на его вводы стандартной волны с результатом исследования такого же процесса на модели.

Полная индуктивность трансформатора при рассматриваемых атмосферных воздействиях в соответствии с [2] равна

$$L_T = 0,5 L_s = 0,5 \cdot \frac{1}{2 \pi f} \cdot \frac{u_k \% U^2}{100 P} = 0,5 \cdot \frac{1}{314} \cdot \frac{10,5 \cdot 110^2}{100 \cdot 60} = 0,0337 \text{ Гн};$$

L_s — индуктивность короткого замыкания трансформатора. Эквивалентная емкость приближенно равна емкости между обмотками ВН и НН трансформатора:

$$C \approx C_{12} = \epsilon_r \frac{\pi \epsilon_0 l (d_1 + d_2)}{d_1 - d_2} =$$

$$= 3,9 \frac{3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1,66 \cdot 1,334}{0,134} = 2630 \text{ пФ}.$$

где l , d_1 , d_2 — расчетная длина обмотки ВН, внутренний диаметр обмотки ВН и наружный диаметр обмотки НН, соответственно;
 ϵ_r — относительная диэлектрическая проницаемость изоляции между обмотками ВН и НН (для обмоток, помещенных в бак, заполненный маслом $\epsilon_r = 3,9$).

Суммарная продольная емкость определяется из выражения

$$K = \frac{C}{a^2} = \frac{2630}{9^2} = 32,6 \text{ пФ};$$

a — среднее значение коэффициента начального распределения напряжения вдоль обмотки трансформатора равно 9. Активное сопротивление обмотки трансформатора, определенное на основе заводских данных, оказалось равным 50 Ом.

На основании установленных выше параметров масштабы моделирования имеют следующие значения:

$$P_L = \frac{L_m}{L_0} = \frac{4,67}{0,0337} = 139, \quad P_r = \frac{r_m}{r_0} = \frac{150}{50} = 3,0,$$

$$P_t = \frac{P_L}{P_r} = \frac{139}{3} = 4,63, \quad P_c = \frac{P_t}{P_r} = \frac{46,3}{3} = 15,4.$$

Параметры модели:

$$L_m = 4,67 \text{ гн}, \quad C_m = 40500 \text{ пф}, \quad K_m = 502 \text{ пф}, \quad r_m = 150 \text{ ом},$$

$$M_{np} = 0,052 \text{ гн}, \quad M_{n, n+1} = 0,047 \text{ гн}, \quad M_{n, n+2} = 0,021 \text{ гн}, \quad C_n = 3120 \text{ пф},$$

$$K_n = 6500 \text{ пф}.$$

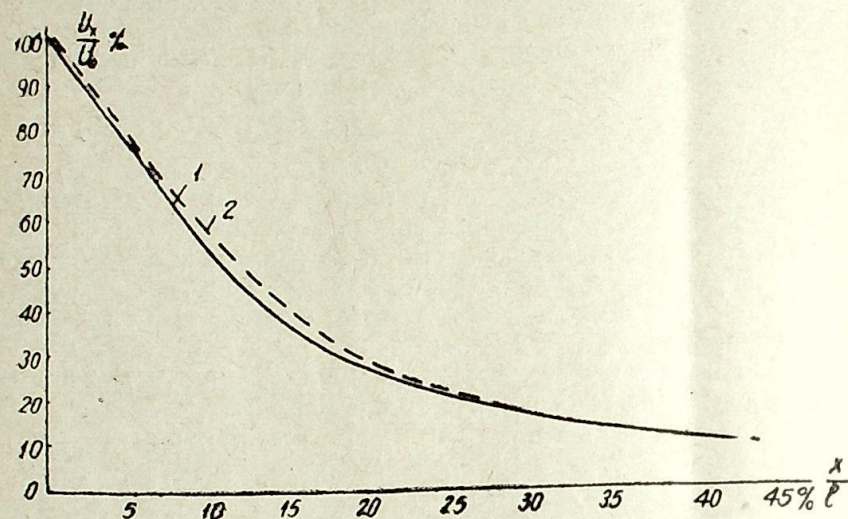


Рис. 3

Кривая начального распределения: 1—ТДГУ—60000; 2—модель.

Сопоставление кривых начального распределения напряжения для трансформатора (рис. 3, кривая 2) и его модели (рис. 3, кривая 1), а также картина развития повышения напряжения на нейтрали трансформатора и в соответствующей точке модели (рис. 4 и 5) показы-

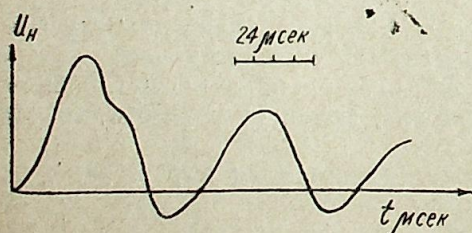


Рис. 4

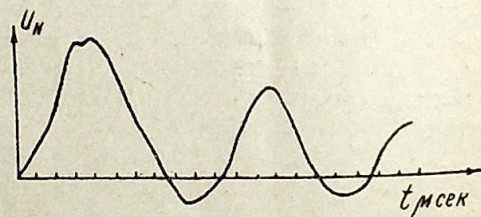


Рис. 5

вает, что построенная модель имитирует реальный трансформатор с небольшой погрешностью и что переходный процесс на нейтрали, связанный с атмосферными воздействиями, может быть изучен с достаточной точностью на такой модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геллер Б. и Веверка А. Волновые процессы в электрических машинах. Госэнергоиздат, 1962.
2. J. Johansen J., Riege H. Numerical avaluation of natural frequencies in power transformer windings. PAS № 64 февраль 1963 (перевод).
3. Abetti P. A., Maginniss F. I. „Natural frequencies of coils and windings determined by equivalent circuit.“ Tans. AIEE, 1953, Part III, P. 495.

Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов

Атмосфер ифрат кәркинликлеринин тәсириндән трансформаторун нейтралында кәркинлијин артмасы просесинин моделлә тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгалә elektrik хәтләри илә атмосфер ифрат кәркинликләри кәлдикдә реал јарымстансијанын бүтүн элементләрини нәзәрә алмагла, трансформаторун нейтралында кәркинлијин артмасы просесинин физики моделләшдирмәнин көмәји илә тәдгигинә һәср олунур. Трансформатор ифрат кәркинлик далғасынын онун һәр үч фазасы илә кәлдији ән тәһлүкәли һал үчүн моделләшдирилир. Белә тәдгигатлары јеринә јетирмәк үчүн индуктивлијин, тутумун, актив мүғавимәтин вә заманын мигјасларынын еффеktiv гијмәтләри тәјин олунур, һабелә белә мүшәһидәләрдә истифадә етмәк үчүн ЛПИ-дә һазырланмыш јарымстансијаларын илдирым мүһафизәси анализаторунун бә’зи блокларыны истифадә етмәк үчүн реконструксијасы тәклиф едилир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Е. В. ДМИТРИЕВ, К. М. ЧАЛБЯН

УРАВНЕНИЯ УЗЛА СЕТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭЦВМ

Переходный процесс в сложной электрической сети может быть рассчитан совместным решением нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процессы в линиях с нелинейными дифференциальными уравнениями, описывающими процессы в узлах этой сети. Используя для решения уравнений ЛЭП различные численные методы, можно вместо системы нелинейных уравнений, состоящей из уравнений с частными производными и обыкновенных дифференциальных уравнений, получить систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, или систему, состоящую из алгебраических и дифференциальных уравнений. Применение численных методов интегрирования этих уравнений позволяет на одном шаге расчета рассматривать их как не связанные между собой отдельные группы уравнений (уравнения для узлов, уравнения для ЛЭП), согласовав предварительно начальные значения переменных для решения на этом шаге. Такое согласование обеспечивается на основе первого закона Кирхгофа, что позволяет последовательно решать уравнения для каждой ЛЭП и каждого узла рассматриваемой сети. При расчетах с помощью ЭЦВМ это имеет существенное значение ввиду ограниченности оперативной памяти машины.

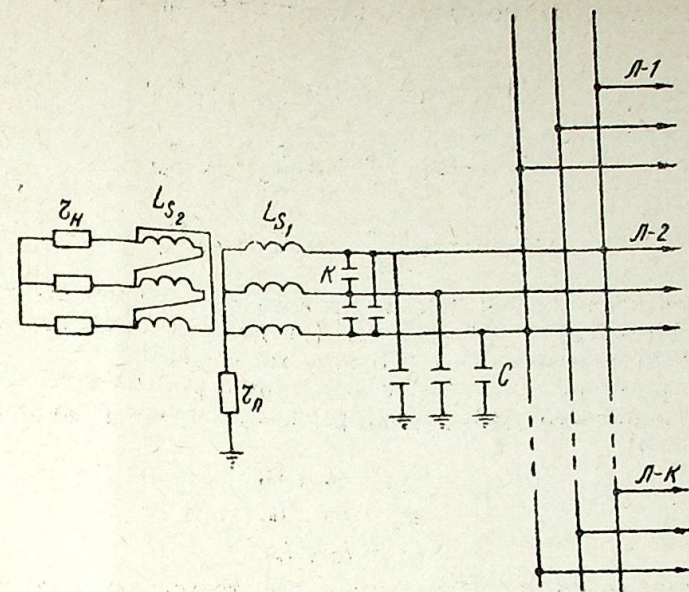
Данная статья посвящена составлению уравнений для узла сети (рисунок), содержащего трансформатор и произвольное число отходящих линий. Уравнения, необходимые для определения напряжения в узле:

$$\frac{d}{dt} [u]_3 = C_{33}^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^n [i_{kA}]_2 + [i_T]_3 \right\}. \quad (1)$$

Для определения токов, приходящих в узел по k -ой ЛЭП, в случае применения метода прямых [1] имеем

$$\frac{d}{dt} [i_k]_3 = [i_k]_{33}^{-1} \{ [u]_3 - [u_{1k}]_3 - [r_k]_{33} [i_k]_3 \}. \quad (2)$$

Составим уравнения для определения токов в трансформаторе. Эта задача рассматривается нами для трехстержневого трансформатора. Уравнения для группового трансформатора были рассмотрены в [1,23]. Обозначим через L_{s1} и L_{s2} индуктивности, r_1 и r_2 — активные сопротивления, u_A , u_B , u_C , u_{ca} , u_{ab} , u_{bc} — мгновенные значения напря-



тальным путем, можно составить следующие аппроксимирующие уравнения:

$$\begin{aligned}\Psi'_A &= -a_1 \frac{di_{A\mu}}{dt} + a_2 i_{A\mu} + a_3 i_{A\mu}^n, \\ \Psi'_B &= -a_1 \frac{di_{B\mu}}{dt} + a_2 i_{B\mu} + a_3 i_{B\mu}^n, \\ \Psi'_C &= -a_1 \frac{di_{C\mu}}{dt} + a_2 i_{C\mu} + a_3 i_{C\mu}^n.\end{aligned}\quad (4)$$

При учете несимметрии магнитопровода трансформатора коэффициенты второго уравнения системы (4) должны быть отличными от коэффициентов уравнения 1 и 3 этой же системы.

Для трехстержневого трансформатора с разземленной нейтралью, или для группового трансформатора, независимо от режима нейтрали, имеет место:

$$\begin{aligned}i_{A\mu} &= i_A + i_a, \\ i_{B\mu} &= i_B + i_b, \\ i_{C\mu} &= i_C + i_c.\end{aligned}$$

Эти же выражения действительны и для трехстержневого трансформатора с заземленной нейтралью, подключенного к симметричному источнику. Для такого трансформатора в несимметричном режиме выражения для определения $i_{A\mu}$, $i_{B\mu}$, $i_{C\mu}$ должны быть заданы соответственно с видом несимметрии. Например, при обрыве двух фаз В и С имеем:

$$\begin{aligned}i_{A\mu} &= (i_A + i_a) + (i_B + i_b) + (i_C + i_c), \\ i_{B\mu} &= 0, \\ i_{C\mu} &= 0.\end{aligned}$$

Для коэффициентов κ в системе уравнения (3), если обозначить через $R_{A\mu}$, $R_{B\mu}$, $R_{C\mu}$ магнитное сопротивление стержней трансформатора соответствующих фаз, будет иметь:

$$\begin{aligned}\kappa_{AB} &= \frac{R_{C\mu}}{R_{B\mu} + R_{C\mu}}, & \kappa_{BA} &= \frac{R_{C\mu}}{R_{A\mu} + R_{C\mu}}, \\ \kappa_{AC} &= \frac{R_{B\mu}}{R_{B\mu} + R_{C\mu}}, & \kappa_{CA} &= \frac{R_{B\mu}}{R_{B\mu} + R_{A\mu}}, \\ \kappa_{BC} &= \frac{R_{A\mu}}{R_{A\mu} + R_{C\mu}}, & \kappa_{CB} &= \frac{R_{A\mu}}{R_{A\mu} + R_{B\mu}}.\end{aligned}$$

В нормальном режиме работы трехстержневого трансформатора, если не учитывать несимметрию магнитного пути, эти коэффициенты равны 0,5. Для группового трансформатора они равны нулю.

Магнитные сопротивления и потокоцепления в обмотках трансформатора связаны уравнениями:

$$\begin{aligned}R_{A\mu} &= \frac{1}{\Psi_A} \left(-b_1 \frac{d\Psi_A}{dt} + b_2 \Psi_A + b_3 \Psi_A^m \right), \\ R_{B\mu} &= \frac{1}{\Psi_B} \left(-b_1 \frac{d\Psi_B}{dt} + b_2 \Psi_B + b_3 \Psi_B^m \right), \\ R_{C\mu} &= \frac{1}{\Psi_C} \left(-b_1 \frac{d\Psi_C}{dt} + b_2 \Psi_C + b_3 \Psi_C^m \right),\end{aligned}\quad (5)$$

Коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 находятся на основании опытных зависимостей $\Psi = \varphi(i_{\mu})$.

Уравнения для нахождения u_0 могут быть составлены исходя из режима нейтрали. Для глухого заземления нейтрали и для случая заземления нейтрали через активное сопротивление соответственно имеем $u_0 = 0$, $u_0 = r i_0$. В случае разземленной нейтрали напряжение u_0 может быть найдено из уравнения

$$C_n \frac{du_0}{dt} = i_0.$$

Здесь C_n — емкость в нейтрали, соответствующая П-образной схеме замещения обмотки трансформатора.

Уравнения для определения u_a , u_b , u_c составляются исходя из рода нагрузки. Например, в случае чисто активной нагрузки имеем:

$$\begin{aligned}u_a &= -3 r_n i_a, \\ u_b &= -3 r_n i_b, \\ u_c &= -3 r_n i_c.\end{aligned}\quad (6)$$

Уравнения (1) ÷ (6) могут быть решены методом Рунге-Кутты при предварительно определенных начальных значениях величин $\frac{d\Psi_A}{dt}$,

$\frac{d\Psi_B}{dt}$, $\frac{d\Psi_C}{dt}$, входящих в уравнение (3). Если принять, что $\frac{d\Psi_A}{dt} = \frac{\Delta\Psi_A}{\Delta t}$, $\frac{d\Psi_B}{dt} = \frac{\Delta\Psi_B}{\Delta t}$, $\frac{d\Psi_C}{dt} = \frac{\Delta\Psi_C}{\Delta t}$ и искать значения переменных,

входящих в уравнения узла сети для момента t , тогда величины $\frac{\Delta\Psi_A}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\Psi_B}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\Psi_C}{\Delta t}$ находятся из выражений $\frac{\Delta\Psi_A}{\Delta t} = \frac{\Psi_A(t-\Delta t) - \Psi_A(t-2\Delta t)}{\Delta t}$

и т.д. Значения этих переменных, найденные для момента t , могут быть уточнены методом последовательных приближений.

Порядок решения уравнений (1) ÷ (6) на одном шаге расчета следующий.

1. Определив предварительно $\frac{\Delta\Psi_A}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\Psi_B}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\Psi_C}{\Delta t}$ совместным решением уравнений узла сети методом Рунге-Кутты находятся значения неизвестных для момента t .

2. Определяются значения Ψ'_A , Ψ'_B , Ψ'_C и далее находятся Ψ_A , Ψ_B , Ψ_C , при этом используются значения κ , найденные для момента $t - \Delta t$.

3. Находятся $R_{A\mu}$, $R_{B\mu}$, $R_{C\mu}$ затем определяются коэффициенты κ . При условии, что значения Ψ_A , Ψ_B , Ψ_C найдены с достаточной точностью, переходят к следующему шагу расчета, в противном случае методом последовательных приближений производят их уточнение.

Таким образом, рассмотренный нами вопрос составления уравнений для узла электрической сети, включая уравнения для определения токов в трехстержневом двухобмоточном трансформаторе в различных режимах, позволит при решении этих уравнений совместно с уравнениями ЛЭП рассматриваемой сети выявить картину развития перенапряжений в ее узловых точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. техн. и матем. наук, 1965, № 4.
2. Базуткин В. В. Тр. МЭИ, ТВН, вып. XIV, 1965.
3. Кадомяская К. П., Левинштейн М. Л., Набутовский И. Б., Чернов В. М. Тр. конференции по физическому и математическому моделированию МЭИ, 1962.

МҮНДЭРИЧАТ

С. Г. Ми́хаилин. Вариација үсулларынын давамлылығы хаггында	3
Л. Р. Волевич, Б. П. Пане́ях. Дахил олма теоремлэринэ жени мүнасибэт	5
Н. Н. Сәфэров. Мәсамәли чисмин икикомпонентли маје илә јујулмасында сәрһәд лајынын сорулмасы	14
С. Ј. Јагубов. Банах фәзасында гејри-мәһдуд вә гејри-сабит операторлардан асылы олан жүксәк тәртибли диференциал тәнликләр	20
Р. И. Әлиханов. Бир функционал тәнлик үчүн гарышыг мәсәлә	28
Ә. М. Мәммәдов. $\Omega^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$ функцијалар синфиндә интеграл тәнликләрин тәгриби һәлли	37
Н. Н. Ағајев, Г. Ә. Мустафајев. Квази-хәтти оператор тәнликләрин һәлли үчүн Галјоркин методунун бир аналогу хаггында	42
Л. Ш. Әбдулкәримов. Банах фәзасында (A) синифли јарымгруп јарадан операторлу Коши мәсәләсинин һәлли хаггында	48
Е. М. Мәммәдәли. Ибраф рәгәм һесаблајычы машынларын зәдәләмәләринин контролу вә диагностикасы	56
Б. О. Гасымов. Телемеханиканын үмидверичи системинин мүгајисәси вә сәпәләнмиш объектли телемеханик системин тәләбләри сајынын пајланма гануцуна даир	63
Ә. Х. Хәлилов, Ф. К. Исајев. Күмүш вә мис ионлары илә активләшдирилмиш бәзи гарышыг әсаслы гәләви-һалокен кристаллофосфорларында әсас анионларын гејри-изотермик релаксација хассәләринә тәсиринин тәдгиги	71
Н. Б. Абдуллајев, С. И. Мәһдијева, Д. Ш. Абдинов, Н. М. Әлијев. Јүксәк тезликли селенин јени хассәләри хаггында	77
А. М. Пашајев, М. И. Иглитсин, И. Н. Туркин. Чохашигарлы јарымкечиричиләрин хусуси мүгавимәтини өлчмәк үчүн чиһазлар	85
В. Б. Антонов, Ј. Н. Нәсиров. $\text{GeTe}-\text{CuSbTe}_2$ бәрк мәһлулунын термоэлектрик хассәләри	90
М. А. Мәммәдов. Секи Икејја 1965 F комети орбитинин тәјини	96
А. Ә. Әфәндизадә, Б. А. Листенгартен, Ј. М. Курдјуков. Бирфазлы инверторда кечид режимләринин һесабына даир	102
Ж. К. Акилов, Ә. Ф. Гасымов. Гујуда гумун һәрәкәтинин һесабына даир	107
Е. А. Газијев. Диференциал тәнликләрин Ејлер сыныг хәтләри үсулу илә һәллиндә биртәрәфдән гијмәтләндирмәләр	112
Ш. Н. Мәммәдов, Т. Нуруллајев. Назик дәмәр типли јатагларын ишләмәсиндә газыма партлатма ишләринин бәзи оптимал өлчүләринин тәјин едилмәсинә даир	120
Ч. М. Чуварлы, М. М. Мүслүмов. Атмосфер ифрат кәркинликләринин тәсириндән трансформаторун нейтралында кәркинлијин артмасы просесинин моделлә тәдгиги	130
Ч. М. Чуварлы, Ј. В. Дмитријев, К. М. Чалјан. ЕМҺМ-дән истифадә етмәклә кечичи електромагнит просесләринин һесабламаг үчүн тәнлик	136

СОДЕРЖАНИЕ

Михлин С. Г. Об устойчивости вариационных методов	3
Волевич Л. Р. и Панеях Б. П. Новый подход к теоремам вложения	5
Сафаров Г. Г. Отсасывание пограничного слоя при обтекании тел двухкомпонентной жидкостью	14
Якубов С. Я. Дифференциальные уравнения высших порядков с переменными неограниченными операторами в банаховом пространстве	20
Алиханова Р. И. Смешанная задача для одного функционального уравнения	28
Мамедов А. М. Приближенное решение интегральных уравнений в классе $\Omega^{(\delta_1, \dots, \delta_s)}$	37
Агаев Г. Н., Мустафаев К. А. Об одном аналоге метода Галеркина для решения квазилинейных операторных уравнений	42
Абдулкеримов Л. Ш. О разрешимости задачи Коши в банаховом пространстве с производящим оператором полугруппы класса (A)	48
Мамедли Ә. М. Контроль и диагностика неисправностей избыточной ЦВМ, построенной по мажоритарному принципу	56
Касимов Б. О. О сравнении надежных систем телемеханики и законе распределения числа запросов для систем телемеханики с рассредоточенными объектами	63
Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Исследование влияния анионов основания на неизометрические релаксационные свойства некоторых смешанных щелочногалонидных фосфоров, активированных серебром и медью	71
Абдуллаев Г. Б., Мехтиева С. И., Абдинов Д. Ш., Алиев Г. М. О новых свойствах селена высокой чистоты	77
Пашаев А. М., Иглицын М. И., Туркин И. Н. Приборы для измерения удельного сопротивления сильнолегированных полупроводников	85
Антонов В. Б., Насиров Я. Н. Термоэлектрические свойства твердого раствора	90
Мамедов М. А. Определение орбиты кометы 1965 Секи-Икейя	96
Эфендизадә А. А., Листенгартен Б. А., Курдюков Ю. М. К расчету переходных режимов в однофазном инверторе	102
Акилов Ж. А., Касимов А. Ф. К расчету движения песка в стволе скважины	107
Казиев Ә. А. Односторонние оценки при решении дифференциальных уравнений методом ломаных Эйлера	112
Мамедов Ш. Н., Нуруллаев Т. К. определению некоторых величин буровзрывных работ при выемке тонких жил (на примере рудников Ингичка, Койташ Узбекской ССР)	120
Джуварлы Ч. М., Муслимов М. М. Исследование на модели повышения напряжения на нейтрале трансформаторов, вызванного атмосферными воздействиями	130
Джуварлы Ч. М., Дмитриев Е. В., Чалъян К. М. Уравнения узла сети для расчета переходных электромагнитных процессов с использованием ЭЦВМ	136

Подписано к печати 25/VI 1966 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$ Бум. лист. 4,63.
Печ. лист. 12,67. Уч.-изд. лист. 11,85. ФГ 05275. Заказ 165. Тираж 650. Цена 80 коп

Типография «Красный Восток» Комитета по печати
при Совете Министров Азербайджанской ССР. Баку, ул. Ази Асланова, 80.