

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

5

1965

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

А. С. МАХМУДОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 1. Будем говорить, что функция $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

принадлежит классу K^* , $F(z) \in K^*$, если ее ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равномерно сходится к $F(z)$ на окружности $|z| = 1$.

В дальнейшем коэффициенты Тейлора функции $F(z) \in K^*$ будем обозначать через $c_n = c_n(t)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Пусть p некоторое число такое, что $0 < p < 2$. В 1956 г. С. Б. Стечкин [1] поставил такой вопрос: для любой ли последовательности $d_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |c_n|^p = \infty? \quad (1)$$

В настоящей заметке, при некоторых дополнительных условиях, кроме условия $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$, на последовательность $\{d_n\}$ доказывается существование функции $F(z) \in K^*$, удовлетворяющей условию (1).

Определение 2. Пусть $0 < p \leq 2$. Будем говорить, что система функций $\{\Phi_n\} = \{\Phi_n(u)\}$ принадлежит классу C_p , $\{\Phi_n\} \in C_p$, если выполняются следующие условия:

$$\Phi_n(u) \geq 0 (u \geq 0), \Phi_n(u) \uparrow \text{ и } u^{-p} \Phi_n(u) \downarrow$$

при каждом n ($n = 1, 2, 3, \dots$) по u .

Очевидно, что если $0 < p < 2$, то $C_p \subset C_2$.

1. Рассматривается следующая задача:

Пусть $0 < p \leq 2$ и $\{\Phi_n\} \in C_p$. При каких дальнейших ограничениях на систему $\{\Phi_n\}(u)$ существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|) = \infty? \quad (2)$$

* На этот вопрос в работе [3] был дан частичный ответ.

П 35/86
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)»

Подписано к печати 3/1-1966 г. Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Бум. лист. 5,5.
Печ. лист. 15,07. Уч.-изд. лист. 14,4. ФГ 06801. Заказ 464. Тираж 710. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Комитета по печати
при Совете Министров Азербайджанской ССР Баку, ул. Ази Асланова, № 80.

В дальнейшем класс вогнутых последовательностей будем обозначать через S . Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $0 < p < 2$, $\{\Phi_n\} \in C_p$, $d_n^2 = \Phi_n(d_n)^*$, $d_n \downarrow 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$ и $\{d_n^{-1} S_n^{\frac{1}{p}}\} \in S$. Для того, чтобы существовала функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (2), необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2.$$

Замечание. Если $d_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$ и $\{S_n d_n^{-1}\} \in S$, то $\{d_n^{-1}\} \in S$, а если $\{d_n^{-1}\}$ выпукла, то $\{S_n d_n^{-1}\}$ также выпукла (легко можно доказать).

Доказательство теоремы 1. Так как $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, то необходимость условия теоремы 1 следует из леммы 1 работы [7].

Достаточность. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Полагая $r_n = d_n S_n^{-\frac{1}{p}}$ имеем

$$r_n \downarrow 0, \{r_n^{-1}\} = \{d_n^{-1} S_n^{\frac{1}{p}}\} \in S,$$

и в силу теоремы Абеля-Дини [8],

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 S_n^{-\frac{2}{p}} < \infty.$$

Поэтому, в силу теоремы Салема [4], существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию $|c_n| = r_n$.

На основании леммы 3 работы [7], для этой функции имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(|c_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(d_n S_n^{-\frac{1}{p}}) = \infty$$

Теорема 1 доказана. Из этой теоремы имеем

Следствие 1. Пусть $0 < p < 2$, $d_n \downarrow 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$ и $\{d_n^{-1} S_n^{\frac{1}{p}}\} \in S$.

Для того, чтобы существовала функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |c_n|^p = \infty$ необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$.

* т. е. d_n — есть корень уравнения $d_n^2 = \Phi_n(d_n)$.

Для доказательства следствия 1 достаточно положить $\Phi_n(u) = d_n^{2-p} u^p$ и применить теорему 1. Отметим, что последовательности

$$n^{-\frac{1}{2}}, n^{-\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} n, n^{-\frac{1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} n \log^{-\frac{1}{2}} \log n, \dots \quad (3)$$

удовлетворяют всем условиям следствия 1.

Следующая теорема является усилением следствия 1.

Теорема 2. Пусть $0 < s < 2$, $d_n \downarrow 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$, $A_n = d_n S_n^{-\frac{1}{2}}$,

$B_n = \sum_{k=1}^n A_k^2$ и $\{A_n^{-1} B_n^{\frac{1}{s}}\} \in S$. Для того, чтобы существовала функция

$F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |c_n|^p = \infty$ при всех p , $0 < p < 2$, необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$.

Доказательство. Необходимость условия теоремы получается из следующего неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^{2-p} |c_n|^p \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right\}^{\frac{p}{2}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \right\}^{\frac{2-p}{2}}$$

Для того, чтобы доказать его достаточности, надо положить $r_n = A_n B_n^{-\frac{1}{s}}$ и применить теорему Салема [4] и следствие из леммы 2 работы [6]. Последовательности (3) удовлетворяют всем условиям теоремы 2.

Для класса C_2 справедлива следующая

Теорема 3. Пусть $0 < s < 2$, $\{\Phi_n\} \in C_2$, $T_n = T_n(\beta)$ есть один из положительных корней уравнения

$$\Phi_n \left(T_n Q_n^{-\frac{1}{s}} \right) = \beta T_n^2 Q_n^{-1}, \quad (4)$$

где $Q_n = \sum_{k=1}^n T_k^2$ и $\beta > 0$ некоторое число, $T_n \downarrow 0$ и $\{T_n^{-1} Q_n^{\frac{1}{s}}\} \in S$. Для того, чтобы существовала функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (2), необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2$.

Отметим, что так как $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, то необходимость условия теоремы следует из следствия 2 леммы 4 работы [7], а чтобы доказать его достаточности, надо положить $r_n = T_n Q_n^{-\frac{1}{s}}$ и применить теоремы Салема [4] и Абеля-Дини [8].

Замечание. При условиях теоремы 3, для того чтобы существовала функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (2), необходимо

димо и достаточно, чтобы расходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ при всех $\alpha > 0$, где $u_n = u_n(\alpha)$ — есть наибольший корень уравнения

$$\Phi_n(u_n) = \alpha u_n^2 \quad (5)$$

Это замечание следует из леммы 4 работы [7] и из теоремы 3.

2. В этом пункте мы рассматриваем следующую задачу. Пусть $0 < p \leq 2$, $\{\Phi_n\} \in C_p$ и последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию $\lambda_n \uparrow$.

При каких дальнейших ограничениях на систему $\{\Phi_n\}$ и последовательность $\{\lambda_n\}$ существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\lambda_n |c_n|) = \infty \quad (6)$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |c_n|^s \Phi_n^{\frac{2-s}{2}}(\lambda_n |c_n|) = \infty \text{ при всех } s, 0 < s < 2?$$

Здесь мы будем пользоваться следующим фактом, который следует из известной теоремы Салема и Зигмунда [5].

Теорема А. Пусть $r_n \geq 0$, $R_n = \sum_{k=1}^n r_k^2$ и $\sum_{n=2}^{\infty} R_n^{\frac{1}{2}} n^{-1} \log^{-\frac{1}{2}} n < \infty$.

Тогда существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $|\varepsilon_n| = 1$ такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n r_n z^n$ сходится равномерно на окружности $|z| = 1$.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность $\{\lambda_n\}$ принадлежит классу R , $\{\lambda_n\} \in R$, если она удовлетворяет условиям: 1)

$$\lambda_n \uparrow \quad 2) \quad \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \lambda_n^{-1} \log^{-\frac{1}{2}} n < \infty.$$

Доказываются следующие теоремы

Теорема 4. Пусть $0 < p < 2$, $\{\Phi_n\} \in C_p$, $\{\lambda_n\} \in R$, $d_n^2 = \Phi_n(d_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (6).

Сначала докажем одну элементарную лемму.

Лемма В. Пусть $\{\lambda_n\} \in R$, $r_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 r_n^2 < \infty$. (8) Тогда

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \sqrt{R_n} \log^{-\frac{1}{2}} n < \infty, \quad (9) \text{ где } R_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k^2.$$

Доказательство. При всех $n \geq n_0$ имеем

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2} r_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^2} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k^2 r_k^2 \leq \frac{1}{\lambda_n^2}, \text{ т. е. } \sqrt{R_n} \leq \lambda_n^{-1}.$$

Следовательно, в силу условия $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \lambda_n^{-1} \log^{-\frac{1}{2}} n < \infty$, получаем,

что

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \sqrt{R_n} \log^{-\frac{1}{2}} n \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \lambda_n^{-1} \log^{-\frac{1}{2}} n < \infty,$$

и лемма доказана.

Замечание 1. Для любой последовательности $\{r_n\}$, $r_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), удовлетворяющая условию (9) существует последовательность $\{\lambda_n\} \in R$, такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 r_n^2 = \infty$$

Действительно, полагая $\lambda_n = R_n^{-\frac{1}{2}}$ имеем $\{\lambda_n\} \in R$. Но, по теореме

Дини [8] получаем, что $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 r_n^2 = \infty$.

Поэтому, естественно, отметить следующее

Замечание 2. Справедливо одно из следующих предложений (взаимно исключающих друг друга)

а) если $\{r_n\}$, $r_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) удовлетворяет условию (9), то существует последовательность $\{\lambda_n\} \in R$, для которой $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 r_n^2 < \infty$.

б) существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 = \infty$ для всех $\{\lambda_n\} \in R$.

Отметим, что если а) верно, то условие (8) леммы В не может быть улучшено, а если б) верно, то оно само по себе представляет интерес.

Доказательство теоремы 4. Полагая $S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$ и $r_n = d_n S_n^{-\frac{1}{p}} \lambda_n^{-1}$ в силу теоремы Абеля-Дини, имеем: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 r_n^2 < \infty$.

В силу леммы В, последовательность $\{r_n\}$ удовлетворяет условию (9).

На основании теоремы А существует функция $F(z) \in K^*$, для которой $|c_n| = r_n$. В силу леммы 3 работы [7]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\lambda_n |c_n|) = \infty.$$

Теорема 4 доказана. Из теоремы 4 имеем:

Следствие 2. Пусть $0 < p < 2$, $\{\lambda_n\} \in R$, $d_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p d_n^{2-p} |c_n|^p = \infty.$$

Например, можно взять, при некотором $\epsilon > 0$

$$\lambda_n = \log^{\frac{1}{2}+\epsilon} n, \log^{\frac{1}{2}} n \log^{1+\epsilon} \log n, \log n \log^{\frac{1}{2}} \log n \log^{1+\epsilon} \log \log n, \dots$$

Следующая теорема является усилением следствия 2.

Теорема 5. Пусть $\{\lambda_n\} \in R$, $d_n \geq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p d_n^{2-p} |c|^{-p} = \infty \text{ при всех } p, 0 < p < 2.$$

Для доказательства этой теоремы достаточно положить

$$S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2, A_n = d_n S_n^{-\frac{1}{2}}, B_n = \sum_{k=1}^n A_k^2 \text{ и } r_n = A_n B_n^{-\frac{1}{s}} \lambda_n^{-1}, \text{ где } 0 < s < 2$$

и применить теорему Абеля-Дини, теорему А, лемму В и следствие из леммы 2 работы [6].

Для класса C_2 справедлива следующая

Теорема 6. Пусть $\{\lambda_n\} \in R$, $\{\Phi_n\} \in C_2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2 = \infty$, где T_n есть один из положительных корней уравнения (4). Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (6).

Для доказательства теоремы 6 достаточно положить

$$r_n = T_n Q_n^{-\frac{1}{s}} \lambda_n^{-1}, R_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k^2,$$

где $Q_n = \sum_{k=1}^n T_k^2$ и $0 < s < 2$ и применить теорему Абеля-Дини, лемму

В и теорему А.

Другое доказательство теоремы 6. Полагая $r_n = T_n Q_n^{-\frac{1}{s}}$ в силу теоремы Абеля-Дини получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(r_n) = \infty \quad (10)$$

Пусть $1 \leq p < 2$. В силу следствия 2 существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p |c_n|^{\frac{2-p}{2}} \Phi_n^{\frac{2-p}{2}}(r_n) = \infty$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$, то в силу леммы 2 работы [7]

имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(\lambda_n |c_n|) = \infty$.

Для класса C_p , $0 < p \leq 2$ докажем следующую теорему, которая является обобщением теорем 4, 5 и 6.

Теорема 7. Пусть $0 < p \leq 2$,

$$\{\Phi_n\} \in C_p \quad (11)$$

$$\{\lambda_n\} \in R \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(a) = \infty \text{ при всех } a > 0, \quad (12)$$

где $u_n(a)$ — есть наибольший корень уравнения (5). Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (7).

Доказательство. В силу условий (11) и (12) существует последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющая условиям (10). (Отметим, что

достаточно положить: $r_n = T_n Q_n^{-\frac{1}{s}}$, где $0 < s < 2$, T_n — есть один из положительных корней уравнения (4) и $Q_n = \sum_{k=1}^n T_k^2$, если $p = 2$, а

$$r_n = d_n S_n^{-\frac{1}{p}}, \text{ где } d_n^2 = \Phi_n(d_n) \text{ и } S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2, \text{ если } 0 < p < 2. \text{ О су-}$$

ществовании последовательности $\{r_n\}$, удовлетворяющей условиям (10) см. также [2]).

В силу теоремы 5 существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(r_n) = \infty, \quad (13)$$

при всех δ , $0 < \delta < 2$.

Для каждого номера n либо $r_n \leq \lambda_n |c_n|$, либо $r_n > \lambda_n |c_n|$. В первом случае, в силу условия $\Phi_n(u) \uparrow$, имеем

$$\Phi_n(r_n) \leq \Phi_n(\lambda_n |c_n|)$$

или

$$\lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(r_n) \leq \lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|)$$

при всех δ , $0 < \delta < 2$, а во втором, в силу $u^{-p} \Phi_n(u) \downarrow$ —

$$\Phi_n(r_n) \leq r_n^p \lambda_n^{-p} |c_n|^{-p} \Phi_n(\lambda_n |c_n|)$$

или

$$\lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(r_n) \leq r_n^{\frac{2-\delta}{2}} \lambda_n^{\frac{2-\delta}{2}-p} |c_n|^{\frac{2-\delta}{2}-p} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|),$$

при всех δ , $0 < \delta < 2$.

Таким образом, в обоих случаях

$$\lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(r_n) \leq \lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|) + r_n^{\frac{2-\delta}{2}} \lambda_n^{\frac{2-\delta}{2}-p} |c_n|^{\frac{2-\delta}{2}-p} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|)$$

при всех δ , $0 < \delta < 2$, откуда учитывая (13) получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|) + \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{\frac{2-\delta}{2}} \lambda_n^{\frac{2-\delta}{2}-p} |c_n|^{\frac{2-\delta}{2}-p} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|) = \infty \quad (14)$$

при всех δ , $0 < \delta < 2$.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta} |c_n|^{\delta} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}}(\lambda_n |c_n|) = \infty \text{ при всех } \delta, 0 < \delta < 2, \text{ то теорема доказана.}$$

Пусть этот не так. Тогда существует число δ_0 , $0 < \delta_0 < 2$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta_0} |c_n|^{\delta_0} \Phi_n^{\frac{2-\delta_0}{2}} (\lambda_n |c_n|) < \infty. \quad (15)$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $R = \frac{2-\delta_0}{2-\delta}$ и

$D = \frac{2-\delta_0}{\delta-\delta_0}$, где δ —любое число, такое, что $\delta_0 < \delta < 2$ в силу (15) и в

силу $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 < \infty$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta_0} |c_n|^{\delta_0} \Phi_n^{\frac{2-\delta_0}{2}} (\lambda_n |c_n|) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{2}{D}} \lambda_n^{\frac{\delta_0}{R}} |c_n|^{\frac{2}{D}} \times \\ &\times |c_n|^{\frac{\delta_0}{R}} \Phi_n^{\frac{2-\delta_0}{2}} (\lambda_n |c_n|) \leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{D}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta_0} |c_n|^{\delta_0} \Phi_n^{\frac{2-\delta_0}{2}} (\lambda_n |c_n|) \right\}^{\frac{1}{R}} < \infty, \end{aligned}$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\delta_0} |c_n|^{\delta_0} \Phi_n^{\frac{2-\delta_0}{2}} (\lambda_n |c_n|) < \infty \text{ при всех } \delta, \delta_0 \leq \delta < 2.$$

Поэтому, в силу (14) получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^p \lambda_n^{\frac{2-\delta}{2}} |c_n|^{\frac{2-\delta}{2}} \Phi_n^{\frac{2-\delta}{2}} (\lambda_n |c_n|) = \infty$$

при всех $\delta, \delta_0 \leq \delta < 2$. (16)

Пусть $2 \frac{p\delta_0 + 2\delta_0 - 2p}{2(2-p) + p\delta_0} \leq s < 2$. Положим $\delta_1 = 2 \frac{s(2-p) + 2p}{4+p(2-s)}$.

Тогда из (16) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{\frac{2p(2-s)}{4+p(2-s)}} \lambda_n^{\frac{4s}{4+p(2-s)}} |c_n|^{\frac{4s}{4+p(2-s)}} \Phi_n^{\frac{2(2-s)}{4+p(2-s)}} (\lambda_n |c_n|) = \infty, \quad (17)$$

Беря показатели $R = \frac{4+p(2-s)}{p(2-s)}$ и $D = \frac{4+p(2-s)}{4}$ в силу

неравенства Гельдера получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{\frac{2p(2-s)}{4+p(2-s)}} \lambda_n^{\frac{4s}{4+p(2-s)}} |c_n|^{\frac{4s}{4+p(2-s)}} \Phi_n^{\frac{2(2-s)}{4+p(2-s)}} (\lambda_n |c_n|) &\leq \\ &\leq \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 \right\}^{\frac{1}{R}} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |c_n|^s \Phi_n^{\frac{2-s}{2}} (\lambda_n |c_n|) \right\}^{\frac{1}{D}}, \end{aligned}$$

откуда в силу (17) и в силу условия: $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$, следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^s |c_n|^s \Phi_n^{\frac{2-s}{2}} (\lambda_n |c_n|) = \infty$$

при всех s , $2 \frac{\delta_0(2+p) - 2p}{2(2-p) + \delta_0 p} \leq s < 2$, тем более и при всех s , $0 < s < 2$

(см. лемма 1 работы [6]) и теорема 7 полностью доказана.

3. Теоремы второго пункта доказываются при помощи леммы В, относительно которой мы не знаем, насколько она окончательна. Чтобы получить несколько результатов, непосредственно применением предложения А, мы здесь рассматриваем следующую задачу. Пусть $0 < p \leq 2$ и $\{\Phi_n\} \in C_p$. При каких дальнейших ограничениях на систему $\{\Phi_n\}$ существует функция $F(z) \in K^*$, для которой

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{R_n^{1/4}}{n^{1/4} \log^{1/4} n} \right) = \infty, \quad (19)$$

где $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть $0 < p < 2$, $\{\Phi_n\} \in C_p$, $d_n^2 = \Phi_n(d_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty$,

$S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2$, $P_n = S_n^{-\frac{4}{p}} n^2 d_n^4 \log n$ (20) и $P_n \downarrow 0$. Тогда существует функция

$F(r) \in K^*$, удовлетворяющая условию (19).

Доказательство. Полагая $r_n^2 = p_n - p_{n+1}$ имеем

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} r_k^2 = \sum_{k=n}^{\infty} p_k - p_{k+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (p_n - p_{m+1}) = p_n, \quad (21)$$

В силу Абеля-Дини, (20) и (21) получаем, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{R_n}}{n \sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{p_n}}{n \sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{\infty} d_n^2 S_n^{-\frac{2}{p}} < \infty$$

Поэтому по теореме А существует функция $F(z) \in K^*$, для которой $|c_n| = r_n$.

Для этой функции, в силу (21), (20) и леммы 3 работы [7] имеем:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{R_n^{1/4}}{n^{1/4} \log^{1/4} n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \left(\frac{p_n^{1/4}}{n^{1/4} \log^{1/4} n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n \left(d_n S_n^{-\frac{1}{p}} \right) = \infty.$$

и теорема доказана.

Из теоремы 8 имеем

Следствие 1. Пусть $0 < p < 2$, $d_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty, S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2, P_n = S_n^{-\frac{4}{p}} n^2 d_n^4 \log n$$

и $P_n \downarrow 0$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n^{2-p} R_n^{1/4}}{n^{p/4} \log^{p/4} n} = \infty, \text{ где } R_n = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2.$$

Отметим, что последовательности (3) удовлетворяют всем условиям следствия 1.

В силу теоремы Абеля-Дини, теоремы А и следствия из леммы 2 работы [6] доказывается следующая теорема, которая является усилением следствия 1.

Теорема 9. Пусть $0 < s < 2$, $d_n \geq 0$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 = \infty, S_n = \sum_{k=1}^n d_k^2, A_n = d_n S_n^{-\frac{1}{2}}, B_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2, P_n = B_n^{-\frac{4}{s}} n^2 A_n^4 \log n,$$

$P_n \downarrow 0$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n^{2-p} R_n^{p/4}}{n^{p/2} \log^{1/4} n} = \infty$, где $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k|^2$ при всех p , $0 < p < 2$.

Для класса C_2 справедлива следующая

Теорема 10. Пусть $0 < s < 2$, $\{\Phi_n\} \in C_2$, $\sum_{n=1}^{\infty} T_n^2 = \infty$, где T_n

есть один из положительных корней уравнения (4), $P_n = Q_n^{-\frac{4}{s}} n^2 T_n^4 \log n$, $Q_n = \sum_{k=1}^n T_k^2$ и $P_n \downarrow 0$. Тогда существует функция $F(z) \in K^*$, удовлетворяющая условию (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стечкин С. Б. Одна экстремальная задача для многочленов. Изв. АН СССР, сер. мат.-м., 1956, 20, 765—774.
2. Стечкин С. Б. О коэффициентах Фурье непрерывных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 21, 1957, 93—116.
3. Хавин В. П. О нормах некоторых операций в пространстве многочленов. Вест. Лен. Ун-та, 19, 1959, 47—59.
4. Salem R., Essais sur les series trigonometriques. Act. Sc. et. Industr. № 862, 1940.
5. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, 1961.
6. Махмудов А. С. О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций, (1), Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-мат., 1964, № 2.
7. Махмудов А. С. О коэффициентах Фурье и Тейлора непрерывных функций, (11), Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-мат., 1964, № 4.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Гостехиздат, 1958.

А. С. Махмудов

Кәсілмәз функцијаларын Тејлор әмсаллары һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Тејлор сырасы $|z|=1$ чеврәси үзәриндә мүнтәзәм јығылан функцијаларын Тејлор әмсалларындан дүзәлдилмиш мұхтәлиф типли сыралар ејрәнирилә.

И. И. ИБРАГИМОВ, А. А. ГАМИДОВ

О СМЕШАННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО В ПРОТИВОЛЕЖАЩИХ УГЛАХ ПОСРЕДСТВОМ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ*

Обозначим через $D_1^{(p)}$ и $D_2^{(p)}$, соответственно, области противолежащих углов $|\arg z| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $|\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и положим, что $\bar{D}^{(p)} = \bar{D}_1^{(p)} + \bar{D}_2^{(p)}$, где $\rho \geq 1$ — данное число.

Очевидно, в случае $\rho = 1$ множество $D^{(1)}$ представляет собой всю вещественную ось. Далее обозначим через $L_p^*[D^{(p)}]$ множество функций $f(z)$, для которых

$$\int_{C(\varphi)} |f(z)|^p |dz| \leq M(\varphi),$$

где $M(\varphi) < +\infty$ при $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $C(\varphi)$ — прямая с уравнением:

$$z = t e^{i\varphi} \left(-\infty < t < \infty, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \right).$$

В частности, множество функций из $L_p^*[D^{(p)}]$, аналитических в $D^{(p)}$ обозначается через $L_p[D^{(p)}]$. Очевидно, $L_p[D^{(p)}] \subset L_p^*[D^{(p)}]$. Заметим, что если для функции $f(z)$ из множества $L_p[D^{(p)}]$ определить норму

$$\|f\|_{L_p[D^{(p)}]} = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} \left(\int_{C(\varphi)} |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}},$$

то множество $L_p[D^{(p)}]$ окажется линейно-нормированным пространством.

Наконец, обозначим через $L_p^{(c)}[D^{(p)}]$ множество целых функций**

* Доложено в сентябре 1963 г. на VII Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в г. Ростове на Дону.

** В случае $\rho = 1$ множества $L_p[D^{(1)}]$ и $L_p^{(c)}[D^{(1)}]$ совпадают, соответственно, с известными классами функций $L_p(-\infty, \infty)$ и $W^{(p)}$ (см. [5] стр. 38).

типа σ и порядка ρ ($1 \leq \rho < +\infty$), входящих в $L_p[D^{(\rho)}]$. Ниже будет доказано, что множество $L_p^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]$ не пусто (см. лемму 1).

Назовем величину

$$A_\sigma(f; D^{(\rho)})_p = \inf_{g \in L_p^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]} \|f(z) - g(z)\|_{L_p[D^{(\rho)}]} \quad (0,1)$$

смешанным наилучшим приближением функции $f(z) \in L_p[D^{(\rho)}]$ на множестве $D^{(\rho)}$, а выражение

$$\omega(f; \delta; D^{(\rho)})_p = \sup_{|h| < \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{\rho})} \left\{ \sup_{|h| < \delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(r+h)e^{i\varphi} - f(re^{i\varphi})|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \quad (0,2)$$

смешанным модулем непрерывности функций.

Настоящая работа посвящена установлению связи в виде неравенства между смешанным модулем непрерывности $\omega(f; \sigma^{-\frac{1}{\rho}}; D^{(\rho)})_p$ и смешанным наилучшим приближением $A_\sigma(f; D^{(\rho)})_p$ функции* $f(z) \in L_p[D^{(\rho)}]$.

Решение этой задачи и доказательство стремления к нулю смешанного модуля непрерывности функций $f(z) \in D_p[D^{(\rho)}]$ базируется на одном вспомогательном утверждении для аналитических интегрируемых в угле функций, являющемся аналогом классической теоремы Фрагмена—Линделефа.

Наконец, доказаны прямые теоремы приближения функций $f(z) \in L_p[D^{(\rho)}]$ посредством целых функций $g(z) \in L_p^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]$ в смысле метрики пространства $L_p[D^{(\rho)}]$.

1. Мы доказываем три вспомогательные леммы и одну теорему, являющуюся аналогом классической теоремы Фрагмена—Линделефа.

Лемма 1. Если $\lambda > 0$ — четное целое число, то целая функция (см. [3])

$$H_\lambda(z) = \left\{ \frac{E_\rho(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z) - E_\rho(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z)}{iz} \right\}^\lambda \quad (\rho \geq 1) \quad (1,1)$$

принадлежит множеству $L_p^{(1)}[D^{(\rho)}]$, где

$$\bar{E}_\rho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho^{-1})} \quad (1,2)$$

— целая функция Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа 1.

Доказательство. Очевидно, имеем;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |H_\lambda(re^{i\varphi})|^p dr &= \int_{-\infty}^{-1} |H_\lambda(re^{i\varphi})|^p dr + \int_{-1}^{\infty} |H_\lambda(re^{i\varphi})|^p dr + \\ &+ \int_{-1}^{+1} |H_\lambda(re^{i\varphi})|^p dr = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (1,3)$$

* Подобная задача рассмотрена С. Н. Бернштейном [1] на вещественной оси в метрике пространства $C(-\infty, \infty)$, И. И. Ибрагимовым [4] в полусе $D = D(-\infty < x < \infty, -a < y < a)$ в метрике пространства $L_p[D]$ ($p > 1$), М. М. Джрбашьяном и А. П. Тамадяном [6] на множестве $D^{(\rho)}$ в метрике пространства $(C D^{(\rho)})$.

Заметим, что $E_\rho(iz)$ ограничена (см. [3]) в области $\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$ и $E_\rho(-iz)$ ограничена в области $\frac{\pi}{2\rho} - \frac{3\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}$ ($\rho \geq 1$). Следовательно, в силу (1,1) функция $[E_\rho(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z) - E_\rho(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z)]^\lambda$ ограничена в области $\bar{D}^{(\rho)}$ и потому

$$|I_1| = |I_2| = \int_0^{\infty} |H_\lambda(re^{i\varphi})|^p dr \leq \frac{M_{\rho,\lambda}^p}{1-\rho\lambda} < +\infty \quad (\rho\lambda > 1), \quad (1,4)$$

где

$$M_{\rho,\lambda} = \sup_{z \in \bar{D}^{(\rho)}} \left| E_\rho(i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z) - E_\rho(-i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z) \right|^\lambda.$$

Кроме того, в силу (1,1) и (1,2) имеем

$$|I_3| = \int_{-1}^{+1} \left| \frac{2}{iz} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z \cdot (i\lambda^{-\frac{1}{\rho}}z)^{2\kappa}}{\Gamma[1+(2\kappa+1)\rho^{-1}]} \right|^\lambda |dz| < +\infty. \quad (1,5)$$

Таким образом, в силу (1,4) и (1,5) из равенства (1,3) следует лемма и потому $H_\lambda(\sigma z) \in L_p^{(\sigma)}[D^{(\rho)}]$.

Обозначим через $B_\rho[G^{(\rho)}]$ множество функций $f(z)$ ($z=re^{i\varphi}$), регулярных в области $G^{(\rho)} \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho} \right)$, имеющих вторую частную производную по r и φ в замкнутой области $\bar{G}^{(\rho)} \left(|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} \right)$ и удовлетворяющих условиям:

1°. $|f(z)| \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ ($z \in \bar{G}^{(\rho)}$).

2°. Существуют интегралы:

$$\int_0^{\infty} \left| f\left(z\rho^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) \right|^p dr = M_1^p < +\infty \quad (1,6)$$

и

$$\int_0^{\infty} \left| f\left(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) \right|^p dr = M_2^p < +\infty. \quad (1,7)$$

3°. Существует интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} |f(re^{i\varphi})|^p dr$ и справедливо равен-

ство:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} |f(re^{i\varphi})|^p dr.$$

Лемма 2. Для функции $f(z)$ ($z = re^{i\varphi}$) из класса $B_p [G^{(p)}]$ имеет место формула:

$$f(z) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2p}}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{f(ue^{-i\frac{\pi}{2p}}) du}{ue^{-i\frac{\pi}{2p}} - z} - \frac{e^{i\frac{\pi}{2p}}}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{f(ue^{i\frac{\pi}{2p}}) du}{ue^{i\frac{\pi}{2p}} - z}. \quad (1,8)$$

Кроме того, имеем:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\kappa+1} \frac{\partial^\kappa}{\partial r^\kappa} f(re^{i\varphi}) = 0 \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots). \quad (1,9)$$

Равенство (1,8) получается применением формулы Коши к функции $f(z)$ вдоль контура $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma$, где γ_1 — отрезок прямой $z = te^{-i\frac{\pi}{2p}}$, γ_2 — отрезок прямой $z = te^{i\frac{\pi}{2p}}$, находящейся внутри круга $|z| \leq R$, а γ — дуга окружности $|z| = R$, находящейся в области $G^{(p)}$.

Лемма 3. Пусть $\kappa(z) = a \sin \varphi + b \cos \varphi$, где a и b — действительные числа и действительная функция $g(\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$r(\varphi) = g''(\varphi) + g(\varphi) \geq 0, \quad g(0) = \kappa(0), \quad g(\alpha) = \kappa(\alpha),$$

где $0 < \alpha < \pi$. Тогда $g(\varphi) \leq \kappa(\varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \alpha$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$H(\varphi) = g(\varphi) - \kappa(\varphi).$$

Заметим, что в силу условия леммы имеем:

$$H''(\varphi) + H(\varphi) = r(\varphi) \quad (1,10)$$

при $0 \leq \varphi \leq \alpha$ и

$$H(0) = H(\alpha) = 0. \quad (1,11)$$

Решение дифференциального уравнения (1,10) при условиях (1,11) имеет вид

$$H(\varphi) = - \int_0^\varphi r(t) \sin(t - \varphi) dt - \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \int_0^\alpha r(t) \sin(\alpha - t) dt.$$

Отсюда после простых преобразований получим

$$H(\varphi) = - \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \int_0^\varphi \sin t r(t) dt - \frac{\sin \varphi}{\alpha} \int_0^\alpha \sin(\alpha - t) r(t) dt.$$

Из этого равенства вытекает, что $H(\varphi) \leq 0$, т. е. $g(\varphi) \leq \kappa(\varphi)$ при $0 \leq \varphi \leq \alpha < \pi$.

Теорема 1. Для функции $f(z)$ из класса $B_p [G^{(p)}]$ имеет место неравенство:

$$\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^p dr = \int_{c(\varphi)} |f(z)|^p |dz| \leq \frac{M_1^p + M_2^p}{2 \cos \frac{\pi}{2p}} \cos \varphi + \frac{M_1^p - M_2^p}{2 \sin \frac{\pi}{2p}} \sin \varphi, \quad (1,12)$$

где M_1^p и M_2^p определяются равенствами (1,6) и (1,7).

Доказательство.* Введем обозначения:

$$g(\varphi) = \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^p dr, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2p}. \quad (1,13)$$

Заметим, что если

$$f^p(z) = [f(x + iy)]^p = u(x, y) + iv(x, y)$$

и Δ — оператор Лапласа, то для всех z , лежащих в угле $|\varphi| < \frac{\pi}{2p}$, в

силу субгармоничности функции $|f(z)|^p$ имеем

$$\Delta(\sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}) = \Delta(|f(z)|^p) \geq 0,$$

где $f^p(z)$ означает ту однозначную и аналитическую в области $G^{(p)}$ ветвь функции $f^{(p)}(z)$, которая принимает положительное значение при положительном $f(z)$.

Записывая оператор Лапласа в полярных координатах для функции $|f(re^{i\varphi})|^p = H(r, \varphi)$, получим

$$r^2 \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + r \frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \geq 0,$$

что может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} rH + \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \geq 0.$$

Отсюда в силу (1,9) следует, что

$$\int_0^\infty H(r, \varphi) dr + \int_0^\infty \frac{\partial^2 H(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} dr \geq 0.$$

Далее, учитывая, что для функции

$$H(r, \varphi) = |f(re^{i\varphi})|^p$$

выполняется условие

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^p dr = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} |f(re^{i\varphi})|^p dr,$$

и имея в виду (1,13), получим

$$\frac{d^2 g(\varphi)}{d\varphi^2} + g(\varphi) \geq 0.$$

Пусть $\kappa(\varphi) = \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi$, где коэффициенты α и β определяются из условий:

$$g\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \kappa\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \alpha \cos \frac{\pi}{2p} + \beta \sin \frac{\pi}{2p} = M_1^p,$$

$$g\left(-\frac{\pi}{2p}\right) = \kappa\left(-\frac{\pi}{2p}\right) = \alpha \cos \frac{\pi}{2p} - \beta \sin \frac{\pi}{2p} = M_2^p.$$

Тогда в силу леммы 3 имеем

$$g(\varphi) \leq \kappa(\varphi)$$

при $0 \leq \varphi < \pi$, что и доказывает (1,12).

* Схемы доказательства этой теоремы нам подсказаны М. А. Евграфовым.

Примечание. При $p = \infty$ из (1,6) и (1,7) следует, что

$$\sup_{0 < r < \infty} \left| f \left(r e^{i \frac{\pi}{2p}} \right) \right| = M_1 \leq \max (M_1, M_2) = M,$$

$$\sup_{0 < r < \infty} \left| f \left(r e^{-i \frac{\pi}{2p}} \right) \right| = M_2 \leq \max (M_1, M_2) = M.$$

Тогда на основании неравенства (1,12) имеем

$$\sup_{0 < r < \infty} |f(r e^{i\varphi})| \leq M$$

при любом φ , удовлетворяющих условию $|\varphi| < \frac{\pi}{2p}$, что является анало-

гом теоремы Фрагмента—Линделефа.

§ 2. Займемся теперь выяснением поведения смешанного модуля непрерывности $\omega(f; \delta; D^{(p)})_p$ в зависимости от δ . Для этой цели введем в рассмотрение следующие величины:

$$\omega(f; \delta; c_1)_p = \sup_{\substack{|\xi| < \delta \\ \xi \in C_1}} \left(\int_{C_1} |f(z + \xi) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2,1)$$

$$\omega(f; \delta; c_2)_p = \sup_{\substack{|\xi| < \delta \\ \xi \in C_2}} \left(\int_{C_2} |f(z + \xi) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2,2)$$

где

$$c_1 = c \left[-\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right], \text{ а } c_2 = c \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Очевидно, $\omega(f; \delta; c_1)_p$ и $\omega(f; \delta; c_2)_p$ являются модулями непрерывности (z) сторонах угла $G^{(p)}$ и каждый из них не превосходит $\omega(f; \delta; D^{(p)})_p$

Теорема 2. Если $f(z) \in L_p[L^{(p)}]$, то величины $\omega(f; \delta; c_1)_p$, $\omega(f; \delta; c_2)_p$ и $\omega(f; \delta; D^{(p)})_p$ связаны неравенством:

$$\omega(f; \delta; D^{(p)})_p \leq [\omega(f; \delta; c_1)_p + \omega(f; \delta; c_2)_p] \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\rho}}. \quad (2,3)$$

Кроме того,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta; L^{(p)})_p = 0. \quad (2,4)$$

Обычным рассуждением, проводимым на вещественной оси, можно показать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta; c_1)_p = \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta; c_2)_p = 0, \quad (2,5)$$

В силу (2,1) и (2,2) имеем:

$$\int_{C_1} |f(z + \xi) - f(z)|^p |dz| \leq [\omega(f; \delta; c_1)_p]^p,$$

$$\int_{C_2} |f(z + \xi) - f(z)|^p |dz| \leq [\omega(f; \delta; c_2)_p]^p.$$

Тогда в силу теоремы 1, полагая $M_1 = \omega(f; \delta; c_1)_p$ и $M_2 = \omega(f; \delta; c_2)_p$, получаем неравенство:

$$\omega(f; \delta; c(\varphi))_p \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{\rho}} \left[\omega(f; \delta; c_1)_p \cdot \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2\rho} \right) + \right.$$

$$\left. + \omega(f; \delta; c_2)_p \cdot \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2\rho} \right) \right].$$

Отсюда следует неравенство (2,3), а из него в силу (2,5) следует (2,4).

Теорема 3. Если $f(z) \in L_p[D^{(p)}]$, то существует целая функция $g(z)$ из класса $L_p^{(s)}[D^{(p)}]$, для которой выполняются неравенства:

$$\omega \left(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)} \right)_p \leq 2 A_\sigma(f; D^{(p)})_p + \omega \left(g_0; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)} \right)_p \quad (2,6)$$

и

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_p \leq B \omega \left(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)} \right)_p, \quad (2,7)$$

где $g_0(z)$ — некоторая целая функция из класса $L_p^{(s)}[D^{(p)}]$ и B — постоянное, независимое от σ и ρ .

Доказательство. Неравенство (2,6) доказывается аналогичным рассуждением, проводимым в работе [4]. Из того, что $g_0(z)$ является

целой функцией из класса $L_p^{(s)}[D^{(p)}]$ следует $\omega(g_0; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)})_p \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Для доказательства неравенства (2,7) выберем функцию $\kappa(z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\kappa(z)$ — четная целая функция из множества $L_p^{(s)}[D^{(p)}]$ и $\kappa(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ [$z \in \bar{D}^{(p)}$];

2) $\int_{C(\varphi)} \kappa(t) dt = a$, где $c(\varphi)$ — прямая с уравнением

$$r = r e^{i\varphi} \left(-\infty < r < +\infty, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right);$$

3) для любой функции $f(z) \in L_p[D^{(p)}]$ функция

$$g(z) = \frac{1}{a} \int_{C(\varphi)} \kappa(u) f \left(z + u \sigma^{-\frac{1}{p}} \right) du$$

входит в $L_p^{(s)}[D^{(p)}]$;

4) $\int_{C(\varphi)} |t \kappa(t)| |dt| < +\infty$.

Заметим, что в качестве функции $\kappa(z)$ можно взять функцию $H_\lambda(z)$, определяемую равенством (1,1), и простым вычислением можно показать, что $H_\lambda(z)$ удовлетворяет всем четырем условиям, наложенным на $\kappa(z)$.

Рассмотрим разность:

$$g(z) - f(z) = \frac{1}{a} \int_{C_1} \kappa(u) \left\{ f \left(z + u \sigma^{-\frac{1}{p}} \right) - f(z) \right\} du.$$

Пусть $z \in c_1$, где $c_1 = c \left(-\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right)$.

Отсюда в силу обобщенного неравенства Минковского получим

$$\left(\int_{C_1} |g(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|a|} \int_{C_1} |\kappa(u)| \left\{ \int_{C_1} \left| f \left(z + u \sigma^{-\frac{1}{p}} \right) - f(z) \right|^p |dz| \right\}^{\frac{1}{p}} du$$

$$-f(z)^p |dz| \Big| \Big| \frac{1}{p} |du|. \quad (2,8)$$

Далее, пользуясь определением и свойством модуля непрерывности, находим:

$$\left(\int_{c_1} |g(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|a|} \int_{c_1} |\kappa(u)| \omega\left(f; u \delta^{-\frac{1}{p}}; c_1\right)_p |du| \leq \beta_1 \omega\left(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; c_1\right)_p,$$

где $B_1 > 0$ — постоянное, независящее от σ . Аналогично этому доказывается неравенство:

$$\left(\int_{c_2} |g(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_2 \omega\left(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; c_2\right)_p, \quad (2,9)$$

где $c_2 = c \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$ и B_2 — постоянное, независящее от σ . Итак, в силу определения класса $L_p [D^{(p)}]$ из неравенств (2,8) и (2,9) следует неравенство (2,7).

Следствие 1. Если $\omega\left(f; \sigma^{-\frac{1}{p}}; D^{(p)}\right)_p \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то $A_\sigma(f; D^{(p)})_p \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$ и наоборот.

Следствие 2. Для любой функции $f(z) \in L_p [D^{(p)}]$ существует целая функция из $L_p^{(p)} [D^{(p)}]$ такая, что $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} A_\sigma(f; L^{(p)})_p = 0$. Таким образом доказано, что множество $L_p^{(p)} [D^{(p)}]$ плотно в $L_p [D^{(p)}]$.

§ 3. Займемся теперь исследованием порядка смешанного приближения $A_\sigma(f; D^{(p)})_p$ в зависимости от дифференциальных свойств $f(z)$.

Теорема 4. Если $f(z)$ вместе со своими производными до порядка m входит в $L_p [L^{(p)}]$, то

$$A_\sigma(f; D^{(p)})_p \leq \frac{c_m}{\sigma^{\frac{m}{p}}}, \quad (3,1)$$

где c_m не зависит от σ .

Доказательство. Пусть $\kappa(z)$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 4° теоремы 3 и, кроме того, удовлетворяет следующим двум условиям

$$1^\circ. \int_{c(\varphi)} |z^j \kappa(z)| |dz| < +\infty \quad (j = 0, 1, \dots, m);$$

$$2^\circ. g_\sigma(z) = \sigma^{\frac{1}{p}} \int_{c(\varphi)} \kappa\left[\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{p}}}(\xi - z)\right] f(\xi) d\xi = \sigma^{\frac{1}{p}} \int_{c(\theta)} \kappa\left[\frac{1}{\sigma^{\frac{1}{p}}}(\xi - z)\right] f(\xi) d\xi \quad (3,2)$$

входит в $L_p^{(p)} [D^{(p)}]$ при любых $\theta, \varphi \left(|\theta|, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right)$ и $g_\sigma(z) \rightarrow 0$

при $|z| \rightarrow \infty$ ($z \in \bar{D}^{(p)}$). Заметим, что функция $H_\lambda(\cdot)$, определяемая равенством (1,1), при четном $\lambda \geq m+2$ удовлетворяет вышеуказанным условиям.

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} c_m^j g_{\frac{\sigma}{j}}(z). \quad (3,3)$$

Очевидно, функции $H(z)$ и $g_\sigma(z)$ имеют один и тот же порядок роста и $H(z) \in L_p^{(p)} [D^{(p)}]$.

В силу (3,2) равенство (3,3) при $z \in c_1 = c \left[-\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$ примет вид

$$H(z) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} c_m^j \frac{\sigma^{\frac{1}{p}}}{j} \int_{c_1} \kappa\left[\frac{\sigma^{\frac{1}{p}}}{j}(\xi - z)\right] f(\xi) d\xi = \frac{1}{a} \int_{c_1} \kappa(u) \left\{ \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} c_m^j f\left(z + \frac{ju}{\sigma^{\frac{1}{p}}}\right) \right\} du + f(z). \quad (3,4)$$

Аналогично при $z \in c_2 \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right]$ можно получить следующую формулу:

$$H(z) - f(z) = \frac{1}{a} \int_{c_2} \kappa(u) \left\{ \sum_{j=0}^m (-1)^{j-1} c_m^j f\left(z + \frac{ju}{\sigma^{\frac{1}{p}}}\right) \right\} du. \quad (3,5)$$

В силу (3,4) при $m=1$ имеет место неравенство:

$$\left(\int_{c_1} |H(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{|a|} \int_{c_1} \frac{|u \kappa(u)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}} |du| \left(\int_{c_1} |f'(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{B_1}{\sigma^{\frac{1}{p}}}, \quad (3,6)$$

где B_1 — постоянное, независящее от σ .

Далее методом индукции доказывается, что имеет место более общее неравенство:

$$\left(\int_{c_1} |H(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{B_2}{\sigma^{\frac{m}{p}}}, \quad (3,7)$$

где $m \geq 1$ — любое целое число и $B_2 > 0$ — постоянное, независящее от σ . Аналогично этому доказывается неравенство

$$\left(\int_{c_2} |H(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{B_2^*}{\sigma^{\frac{m}{p}}}, \quad (3,8)$$

при любом целом $m \geq 1$.

Из неравенств (3,7) и (3,8) в силу определения класса $L_p [D^{(p)}]$ следует

$$\left(\int_{c(\varphi)} |H(z) - f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{B}{\sigma^{\frac{m}{p}}},$$

что и доказывает неравенство (3,1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. I. Изд. АН ССР, 1952.
2. Келдыш М. В. ДАН СССР, 47, 1945, 243—245.
3. Кобер. Approximation by integral function in the complex domain Trans. Amer. Math. Soc., 56 (1944), 7—71.
4. Ибрагимов И. И. УМН, 1956, 11: 5(71), 50—56.
5. Ибрагимов И. И. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1962.
6. Джрбашян М. М., Тамадян А. П. Изв. АН СССР, серия матем., 20 (1956) 485—512.

И. И. Ибрагимов, А. Э. Хамидов

Комплекс дәјишәнли функцијаларын гаршы-гаршыја дуран бучагларда там функцијаларла гарышыг јакынлашмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Фрагмен-Линделеф типли теорем исбат олунмушдур. Бу теоремин көмәжилә мүүјјән синиф функцијалары һәмин синифдән олан там функцијаларла јакынлашдырмағын мүмкүнлүјү исбат олунур. Нәһајәт, верилмиш функцијанын гапалы чохлугдакы дифференциал хас-сәләриндән асылы олараг ән јакшы јакынлашманын сыфра кетмә тәр-тиби көстәрилир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1965, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 5

Р. М. АЛИЕВ, А. С. ДЖАФАРОВ

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

1°. Настоящий раздел статьи посвящен вопросу об оценке погрешности квадратных формул в некоторых классах дифференцируемых функций. В этих классах, используя результаты работы [1] и некоторые свойства функции В. А. Стеклова, доказывается ряд теорем. Возьмем произвольную квадратную формулу:

$$\int_0^1 f(x) dx \approx L(0,1; f),$$

$$L(0,1; f) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k f(x_k), \quad (1)$$

определяемую весами A_k ($k=0,1,\dots,N-1$) и узлами $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} \leq 1$. Пусть при помощи квадратурной формулы (1) требу-

ется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Разделим отрезок

$[a, b]$ на n равных частей точками $\xi_k = a + \frac{b-a}{n} k$ и каждому интервалу (ξ_k, ξ_{k+1}) ($k=0,1,\dots,n-1$), применяя квадратную формулу, подобную формуле (1), получим усложненную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f). \quad (2)$$

Классом $W_{\omega_1}^{(r)}(a, b)$ назовем множество функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные порядка r такие, что

$$|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leq \omega_1(f^{(r)}; a; b; h),$$

где $\omega_1(f^{(r)}; h)$ есть модуль непрерывности функции $f^{(r)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Классом $W_{\omega_2}^{(r)}(a, b)$ назовем множество функций, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные порядка r такие, что

$$\left| f^{(r)}(x_1) + f^{(r)}(x_2) - 2f^{(r)}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right| \leq \omega_2(f^{(r)}; a; b; h),$$

где $\omega_2(f^{(r)}; h)$ есть модуль гладкости второго порядка для функции $f^{(r)}(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. Если квадратурная формула (1) точна для многочлена степени r , то для любой функции $f(x) \in W_{\omega_1}^{(r)}(a, b)$ при $r \geq 1$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \leq \frac{(b-a)^{r+1}}{n^r} (c_r + 2c_{r+1}) \omega_1 \left(\frac{b-a}{2n} \right), \quad (3)$$

где

$$c_r = \int_0^1 |F_r(t)| dt \cdot F_r(t) = \frac{1}{(r-1)!} \left| \frac{(1-t)^r}{r} - \sum_{k=0}^{N-1} A_k E_r(x_k - t) \right|,$$

$$E_r(u) = \begin{cases} u^{r-1} & \text{для } u \geq 0 \\ 0 & \text{для } u < 0. \end{cases}$$

Теорема 2. Если квадратурная формула (1) точна для многочленов степени $r+1$, то для любой функции $f(x) \in W_{\omega_2}^{(r)}(a, b)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \leq \frac{(b-a)^{r+1}}{n^r} \left(\frac{1}{2} c_r + 2c_{r+2} \right) \omega_2 \left(\frac{b-a}{n} \right). \quad (4)$$

Докажем теорему 2. Для $h = \frac{b-a}{n}$ построим первую функцию В. А. Стеклова:

$$f_{hh} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_h(x+t) dt.$$

Представляя функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = [f(x) - f_{hh}(x)] + f_{hh}(x) = \Phi_{hh}(x) + f_{hh}(x),$$

представим ее по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x) = P_{r+1}(x) + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 E_r(x-t) \Phi_{hh}^{(r)}(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{(r+1)!} \int_0^1 E_{r+2}(x-t) \cdot f_{hh}^{(r+2)}(t) dt,$$

где

$$P_{r+1}(x) = \Phi_{hh}(0) + \frac{\Phi_{hh}'(0)}{1!} \cdot x + \dots + \frac{\Phi_{hh}^{(r-1)}(0)}{(r-1)!} \cdot x^{r-1} +$$

$$+ f_{hh}(0) + \frac{f_{hh}'(0)}{1!} \cdot x + \dots + \frac{f_{hh}^{(r+1)}(0)}{(r+1)!} \cdot x^{r+1}.$$

После простых преобразований получим

$$\int_0^1 f(x) dx - L(f) = \int_0^1 F_r(t) \Phi_{hh}^{(r)}(t) dt +$$

$$+ \int_0^1 F_{r+2}(t) f_{hh}^{(r+2)}(t) dt. \quad (5)$$

Тогда в силу равенства (5) получим

$$\int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = h^{r+1} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \int_0^1 F_r(u) \Phi_{hh}^{(r)}(\xi_k + hu) du + \right.$$

$$\left. + h^2 \int_0^1 F_{r+2}(u) [f_{hh}^{(r)}(\xi_k + hu)]^r du \right\}. \quad (6)$$

Пользуясь равенством (6) и неравенствами

$$|\Phi_{hh}^{(r)}(x)| \leq \frac{1}{2} \omega_2(f^{(r)}, h), \quad |[f_{hh}^{(r)}(x)]^r| \leq 2\omega_2(f^{(r)}, h), \quad \text{легко получим}$$

неравенство (4).

Теорема 1 доказывается так же, как и теорема 2. Здесь нужно функции $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = [f(x) - f_h(x)] + f_h(x) \quad \left(h = \frac{b-a}{n} \right)$$

и на основании свойства функции В. А. Стеклова

$$|f^{(r)}(x) - f_h^{(r)}(x)| \leq \omega_1\left(f^{(r)}, \frac{h}{2}\right), \quad |f_h^{(r)}(x)| \leq 2\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{h}{2}\right)$$

она легко доказывается.

Если аналогично классам $W_{\omega_1}^{(r)}(a, b)$, $W_{\omega_2}^{(r)}(a, b)$ соответственно определить классы $W_{\omega_1}^{(r)}(a, b)_{L_p}$, $W_{\omega_2}^{(r)}(a, b)_{L_p}$, то справедливы неравенства (3) и (4), которые в L_p соответственно примут вид:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \leq \frac{(b-a)^{r+1-\frac{1}{p}}}{n^r} (c_r^{(q)} + 2c_{r+1}^{(q)}) \omega_1 \left(\frac{b-a}{2n} \right)_{L_p}, \quad (7)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) \right| \leq \frac{(b-a)^{r+1-\frac{1}{p}}}{n^r} \left(\frac{1}{2} c_r^{(q)} + \right.$$

$$\left. + 2c_{r+2}^{(q)} \right) \omega_2 \left(\frac{b-a}{n} \right)_{L_p}. \quad (8)$$

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на области $D(a, b; c, d)$. Возьмем две произвольные квадратурные формулы:

$$\int_0^1 f(x, y) dx \approx L_1(f(y)) = \sum_{k=0}^{N_1} A_k f(x_k, y),$$

$$\int_0^1 f(x, y) dy \approx L_2(f(x)) = \sum_{k=0}^{N_2} B_k f(x, y_k), \quad (9)$$

$$0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{N_1} \leq 1, \quad 0 \leq y_0 < y_1 < \dots < y_{N_2} \leq 1.$$

Тогда для непрерывной функции на квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ квадратурная формула имеет вид

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} A_k B_l f(x_k, y_l) = L(0, 1; 0, 1; f) \quad (10)$$

Пусть функция $f(x, y)$ имеет частные производные по x порядка r и по y порядка s .

Теорема 3. Если квадратурные формулы (9) точны соответственно для многочленов степени r и s , то для любой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей на прямоугольнике $D(a, b; c, d)$ условиям:

$$\begin{aligned} |f_x^{(r)}(x_1, y) - f_x^{(r)}(x_2, y)| &\leq \omega_{1,1}(f_x^{(r)}, h), \\ |f_y^{(s)}(x, y_1) - f_y^{(s)}(x, y_2)| &\leq \omega_{1,2}(f_y^{(s)}, \eta), \end{aligned}$$

где $\omega_{1,1}, \omega_{1,2}$ есть модуль непрерывности функций $f_x^{(r)}, f_y^{(s)}$, справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij}(f) \right| \leq (b-a)(d-c) \left[\left(\frac{b-a}{n} \right)^r \times \right. \quad (11)$$

$$\times (c_r + 2c_{r+1}) \omega_{1,1} \left(f_x^{(r)}, \frac{b-a}{2n} \right) + \sum_{k=0}^{N_1} |A_k| \left(\frac{d-c}{m} \right)^s (c_s + 2c_{s+1}) \omega_{1,2} \left(f_y^{(s)}, \frac{d-c}{2m} \right) \Big].$$

Теорема 4. Если квадратурные формулы (9) точны соответственно для многочленов степени $r+1$ и $s+1$, то для любой функции $f(x, y)$, удовлетворяющей на прямоугольнике $D(a, b; c, d)$ условиям:

$$\left| f_x^{(r)}(x_1, y) + f_x^{(r)}(x_2, y) - 2f_x^{(r)} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y \right) \right| \leq \omega_{2,1}(f_x^{(r)}, h), \quad (12)$$

$$\left| f_y^{(s)}(x, y_1) + f_y^{(s)}(x, y_2) - 2f_y^{(s)} \left(x, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \right| \leq \omega_{2,2}(f_y^{(s)}, \eta),$$

где $\omega_{2,1}$ и $\omega_{2,2}$ есть модуль гладкости второго порядка соответственно функций $f_x^{(r)}$ и $f_y^{(s)}$, имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij}(f) \right| &\leq (b-a)(d-c) \left[\left(\frac{b-a}{n} \right)^r \cdot \left(\frac{1}{2} c_r + \right. \right. \\ &+ 2c_{r+2} \Big) \omega_{2,1} \left(f_x^{(r)}, \frac{b-a}{n} \right) + \sum_{k=0}^{N_1} |A_k| \left(\frac{d-c}{m} \right)^s \left(\frac{1}{2} c_s + \right. \\ &\left. \left. 2c_{s+2} \right) \omega_{2,2} \left(f_y^{(s)}, \frac{d-c}{m} \right) \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Неравенства (11) и (13) в L_p соответственно представятся в виде:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij}(f) \right| &\leq (b-a)(d-c) \left[\frac{(b-a)^{r-\frac{1}{p}}}{n^r} (c_r^{(q)} + \right. \\ &+ 2c_{r+1}^{(q)}) \omega_{1,1} \left(f_x^{(r)}, \frac{b-a}{2n} \right)_{L_p} + \sum_{k=0}^{N_1} |A_k| \frac{(d-c)^{s-\frac{1}{q}}}{m^s} (c_s^{(q)} + \end{aligned}$$

$$+ 2c_{s+1}^{(q)}) \omega_{1,2} \left(f_y^{(s)}, \frac{d-c}{2m} \right)_{L_p} \Big], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} L_{ij}(f) \right| &\leq (b-a)(d-c) \left[\frac{(b-a)^{r-\frac{1}{p}}}{n^r} (c_r^{(q)} + \right. \\ &+ 2c_{r+2}^{(q)}) \omega_{2,1} \left(f_x^{(r)}, \frac{b-a}{n} \right)_{L_p} + \sum_{i=0}^{N_1} |A_k| \frac{(d-c)^{s-\frac{1}{p}}}{m^s} \left(\frac{1}{2} c_s^{(q)} + \right. \\ &\left. \left. + 2c_{s+2}^{(q)}) \omega_{2,2} \left(f_y^{(s)}, \frac{d-c}{m} \right)_{L_p} \right] \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

2°. В этом разделе данной работы находится наилучшая кубатурная формула для класса $W_{0,2}^{(1,1)}(1; 0, 1; 0, 1)$ с равноотстоящими узлами.

Классом $W_{0,2}^{(1,1)}(1; 0, 1; 0, 1)$ назовем совокупность функций, удовлетворяющих условию

$$f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0; \left(\int_0^1 \int_0^1 |f_{xy}''(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \leq 1. \quad (2,1)$$

Пусть задана кубатурная формула вида

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,k=1}^n A_{ik} f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right). \quad (2,2)$$

Требуется отыскать такую систему весов A_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$), чтобы верхняя грань

$$\sup_{f \in W_{0,2}^{(1,1)}} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \sum_{i,k=1}^n A_{ik} f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right| = E_n(W_{0,2}^{(1,1)}; A_{i,k}),$$

распространенная на $W_{0,2}^{(1,1)}(1; 0, 1; 0, 1)$, была бы наименьшей среди кубатурных формул вида (2,2).

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию (2,1), то верна оценка

$$\begin{aligned} |R(f)| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \sum_{i,k=1}^n A_{ik} f\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right) \right| \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 [\psi_{11}(t, \tau)]^2 dt d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t, \tau) &= (1-t)(1-\tau) - \sum_{i,k=1}^n A_{ik} E\left(\frac{i}{n} - t\right) \cdot E\left(\frac{k}{n} - \tau\right), \\ E(u) &= \begin{cases} 1 & u \geq 0 \\ 0 & u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значит дело сводится к минимизации интеграла $\int_0^1 \int_0^1 [\psi_{11}(t, \tau)]^2 dt d\tau$:

$$E(W_{0,2}^{(1,1)}) = \min_{A_{ik}} E_n(W_{0,2}^{(1,1)}; A_{ik}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \min_{A_{ik}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{i,k=1}^n A_{ik} E\left(\frac{i}{n}-t\right) \cdot E\left(\frac{\kappa}{n}-\tau\right) \right]^2 dt d\tau \right\}^{1/2} \\
&= \min_{A_{ik}} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{i,k=0}^n A_{ik} \right]^2 dt d\tau + \right. \\
&\quad + \sum_{\kappa=1}^n \int_0^1 \int_0^{\frac{\kappa}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{i=1, p=\kappa+1}^n A_{ip} \right]^2 dt d\tau + \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \int_0^{\frac{i+1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{m=i+1, \kappa=1}^n A_{mk} \right]^2 dt d\tau + \\
&\quad \left. + \sum_{i, \kappa=1}^{n-1} \int_0^{\frac{i+1}{n}} \int_0^{\frac{\kappa+1}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{m=i+1, p=\kappa+1}^n A_{mp} \right]^2 dt d\tau \right\}^{1/2}.
\end{aligned} \quad (2,3)$$

Дифференцирование (2,3) по A_{ik} приводит к следующей системе n^2 уравнений:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{i, \kappa=1}^n A_{ik} \right] d\tau \cdot dt = 0, \\
&\int_0^1 \int_0^{\frac{\kappa+1}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{i=1, p=\kappa+1}^n A_{ip} \right] dt d\tau = 0, \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1) \\
&\int_0^{\frac{i+1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{m=i+1, \kappa=1}^n A_{mk} \right] dt d\tau = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2,4) \\
&\int_0^{\frac{i+1}{n}} \int_0^{\frac{\kappa+1}{n}} \left[(1-t)(1-\tau) - \sum_{m=i+1, p=\kappa+1}^n A_{mp} \right] dt d\tau = 0 \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned}$$

Из системы (2,4) определим неизвестные A_{ik} . Из уравнений (2,4) получим:

$$\begin{aligned}
(2n-1)^2 &= 4n^2 \sum_{i, \kappa=1}^n A_{ik}, \\
(2n-1)(2n-2\kappa-1) &= 4n^2 \sum_{i=1, p=\kappa+1}^n A_{ip} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
(2n-1)(2n-2i-1) &= 4n^2 \sum_{m=i+1, \kappa=1}^n A_{mk} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
(2n-2i-1)(2n-2\kappa-1) &= 4n^2 \sum_{m=i+1, p=\kappa+1}^n A_{mp} \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned} \quad (2,5)$$

Систему уравнений (2,5) заменим эквивалентной ей системой:

$$\begin{aligned}
(2n-2\kappa-1) \cdot 2i &= 4n^2 \left(\sum_{j=1, p=\kappa+1}^{i, n} A_{jp} \right) \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
(2n-2i-1) \cdot 2\kappa &= 4n^2 \sum_{m=i+1, j=1}^{n, \kappa} A_{mj} \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
(2n-1) \cdot 2\kappa &= 4n^2 \sum_{i=1, p=1}^{n, \kappa} A_{ip} \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
(2n-1) \cdot 2i &= 4n^2 \sum_{m=1, p=1}^{i, n} A_{mp} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned} \quad (2,6)$$

Из (2,6) получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
4n^2 \sum_{m=1, p=1}^{i, \kappa} A_{mp} &= 2\kappa \cdot 2i \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
4n^2 \sum_{i=1, p=1}^{n, \kappa} A_{ip} &= 2\kappa(2n-1) \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
4n^2 \sum_{m=1, p=1}^{i, n} A_{mp} &= 2i(2n-1) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
4n^2 \sum_{i=1, \kappa=1}^n A_{ik} &= (2n-1)^2.
\end{aligned} \quad (2,7)$$

Из первого, второго и третьего, четвертого уравнений системы (2,7) соответственно определяем:

$$\begin{aligned}
A_{ik} &= A_{ki} = \frac{1}{n^2} \quad (i, \kappa = 1, 2, \dots, n-1), \\
A_{np} &= A_{pn} = \frac{1}{2n^2} \quad (p = 1, 2, \dots, n-1), \\
A_{nn} &= \frac{1}{4n^2}, \quad E_n(W_{0L_2}^{(1,1)}; A_{ik}) = \frac{\sqrt{8n^2-1}}{12n^2}.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М. Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Доронин Г. Я. Сборник научных трудов Днепрпетровского инженерно-строительного ин-та, 1955, № 1-2, 210-217.
3. Артмеладзе Н. К. Тр. Тбилисского математического ин-та, т. 7, 1939, 147-160.
4. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. ОГИЗ, 1947.

Р. М. Элиев, Э. С. Чэферов

Квадратура дүстурларынын галыг һәдди һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) шәкилли квадратура дүстурларынын ујгун оларат

$$W_{\omega_1}^{(r)}(a, b), \quad W_{\omega_2}^{(r)}(a, b), \quad W_{\omega_1}^{(r)}(a, b)_{L_p}, \quad W_{\omega_2}^{(r)}(a, b)_{L_p}$$

синифләриндә галыг һәдләри јухарыдан гијмәтләндирилир. Даһа сонра $W_{0L_2}^{(1,1)}(1, 0, 1; 0, 1)$ синифиндә (2.2) шәкилли ән јахшы кубатур дүстур алыныр.

Г. М. ГАШИМОВ

О СВОЙСТВАХ МЕДЛЕННО РАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ

Настоящая статья посвящается установлению некоторых новых свойств медленно растущих функций. Основной результат состоит в том, что функция, обратная к функции $t^{\alpha}l(t)$, где $l(t)$ — медленно растущая функция, имеет вид $t^{\frac{1}{\alpha}}l_1(t)$, где $l_1(t)$ — тоже медленно растущая функция (теорема 1). Аналогичный результат устанавливается для функций, двойственных по Юнгу с функцией $t^{\alpha}l(t)$ (теорема 2). Полученные результаты используются для установления некоторых асимптотических оценок (теоремы 3, 4).

Определение 1. Медленно растущей функцией $l(z)$ называется такая аналитическая функция, которая регулярна в области $|z| \geq a$, $|\arg z| < \pi$, и удовлетворяет условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{l'(z)}{l(z)} = 0.$$

Заметим, что если $l(z)$ — медленно растущая функция, то $l^{-1}(z)$ — тоже медленно растущая функция.

Действительно,

$$z \frac{(l^{-1}(z))'}{l^{-1}(z)} = -z \frac{l'(z)}{l(z)}.$$

Отсюда следует, что медленно растущие функции не обязаны возрастать; они могут быть и убывающими. Две медленно растущие функции $l_1(z)$ и $l_2(z)$ называются эквивалентными, $l_1(z) \sim l_2(z)$, если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{l_1(z)}{l_2(z)} = 1.$$

Отметим следующие свойства медленно растущих функций (см. [1], стр. 77), которыми будем пользоваться:

а) если $l(z)$ — медленно растущая функция, то при любом $c \neq 0$

$$l(cz) \sim l(z), \quad (z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \pi - |\arg c|);$$

б) если две медленно растущие функции $l(z)$ и $l^*(z)$ связаны

$$\text{соотношением } l(z) = z \int_0^{\infty} \frac{l^*(t)}{(t+z)^2} dt, \text{ то они эквивалентны;}$$

в) пусть $l(z)$ — медленно растущая функция. Тогда

$$\frac{z^{\kappa} l^{\kappa}(z)}{l(z)} = O(1), \quad z \rightarrow +\infty, \quad \kappa \geq 1.$$

Пусть $h(r)$ при достаточно больших r — положительная логарифмически выпуклая функция, т. е. $h(r)$ дифференцируема и $rh'(r)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \frac{h'(r)}{h(r)} = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq \infty. \quad (1)$$

Определение 2. Если $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_F(r)}{h(r)} = \sigma$, ($0 < \sigma < \infty$), то говорят, что точный порядок функции $F(z)$ равен σ . Число σ называют

типом функции $F(z)$.

Понятие точного порядка делит целые функции на классы по их росту точнее, чем понятие порядок роста. Оно охватывает не только целые функции нулевого порядка, но также и целые функции бесконечного порядка. Легко привести пример целых функций, имеющих одинаковый порядок, но отличных по точному порядку.

Лемма 1. Пусть $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)} = \alpha$, тогда $v(\xi) = \xi^{\alpha} l(\xi)$, где $l(\xi)$ — медленно растущая функция.

Доказательство. Положим $v(\xi) = \xi^{\alpha} l(\xi)$ и покажем, что $l(\xi)$ есть медленно растущая функция. Имеем

$$v'(\xi) = \alpha \xi^{\alpha-1} l(\xi) + \xi^{\alpha} l'(\xi).$$

Поэтому

$$\xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)} = \xi \frac{\alpha \xi^{\alpha-1} l(\xi) + \xi^{\alpha} l'(\xi)}{\xi^{\alpha} l(\xi)} = \alpha + \xi \frac{l'(\xi)}{l(\xi)}.$$

Отсюда при $\xi \rightarrow \infty$ получим, что $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{l'(\xi)}{l(\xi)} = 0$, т. е. $l(\xi)$ — медленно растущая функция.

Следствие. Если $h(r)$ удовлетворяет соотношению (1), то при любом $c \neq 0$

$$h(cr) \sim c^{\rho} h(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Действительно, согласно лемме 1 $h(r) = r^{\rho} l(r)$. Тогда

$$h(cr) = (cr)^{\rho} l(cr) \sim c^{\rho} r^{\rho} l(r) = c^{\rho} h(r).$$

Лемма 2. Если $v(\xi) = \xi^{\alpha} l(\xi)$, то $v'(\xi) = \xi^{\alpha-1} l_1(\xi)$, где $l_1(\xi)$ — тоже медленно растущая функция.

Доказательство. В силу свойства в) имеем

$$v'(\xi) = \alpha \xi^{\alpha-1} l(\xi) + \xi^{\alpha} l'(\xi) \sim \alpha \xi^{\alpha-1} l(\xi),$$

$$v''(\xi) = \alpha(\alpha-1) \xi^{\alpha-2} l(\xi) + 2\alpha \xi^{\alpha-1} l'(\xi) + \xi^{\alpha} l''(\xi).$$

Отсюда $\frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} \sim \frac{\alpha-1}{\xi}$ или $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{v''(\xi)}{v'(\xi)} = \alpha-1$. Следовательно, согласно

лемме 1 $v'(\xi) = \xi^{\alpha-1} l_1(\xi)$, где $l_1(\xi)$ — медленно растущая функция.

Лемма 3. Пусть $l(z)$ и $l_1(z)$ — медленно растущие функции. Тогда функция $\varphi(z) = l(l_1(z))$ — тоже медленно растущая.

Доказательство. Имеем $\varphi'(z) = l'(l_1(z)) \cdot l_1'(z)$. Поэтому

$$z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = z \frac{l'(l_1(z)) \cdot l_1'(z)}{l(l_1(z))} = z \cdot \frac{l'(l_1(z)) \cdot l_1'(z)}{l(l_1(z)) \cdot l_1(z)} \cdot l_1(z) =$$

$$= l_1(z) \cdot \frac{l'(l_1(z))}{l(l_1(z))} \cdot z \frac{l_1'(z)}{l_1(z)}.$$

Отсюда при $z \rightarrow \infty$ получим, что $\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = 0$, т. е. $\varphi(z)$

есть медленно растущая функция.

Лемма 4. Произведение двух медленно растущих функций есть медленно растущая функция.

Доказательство. Пусть $l(z) = l_1(z) \cdot l_2(z)$, где $l_1(z), l_2(z)$ — медленно растущие функции. Покажем, что $l(z)$ — тоже медленно растущая функция.

Имеем

$$l'(z) = l_1'(z) \cdot l_2(z) + l_1(z) \cdot l_2'(z).$$

Поэтому

$$z \frac{l'(z)}{l(z)} = z \cdot \frac{l_1'(z) \cdot l_2(z) + l_1(z) \cdot l_2'(z)}{l_1(z) \cdot l_2(z)} = z \cdot \frac{l_1'(z)}{l_1(z)} + z \cdot \frac{l_2'(z)}{l_2(z)}.$$

Отсюда при $z \rightarrow \infty$ получаем, что $l(z)$ есть медленно растущая функция.

Теорема 1. Пусть $f(t) = t^\alpha l(t)$, $\alpha > 0$, $l(t)$ — медленно растущая функция. Тогда обратная к $f(t)$ функция $v(t)$ имеет вид $v(t) =$

$t^{\frac{1}{\alpha}} l_1(t)$, где $l_1(t)$ — тоже медленно растущая функция.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\xi > 0$. При достаточно больших t функция $f(t)$ возрастает, так как

$$f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} l(t) + t^\alpha l'(t) = \alpha t^{\alpha-1} l(t) \left[1 + \frac{1}{\alpha} \cdot t \frac{l'(t)}{l(t)} \right] > 0.$$

Поэтому при больших $\xi > 0$ имеется обратная к $f(t)$ функция $v(\xi)$.

Пусть теперь $\xi = \rho e^{i\theta}$. Рассмотрим $f(t) - \xi$ в круге

$$\left| t - v(\rho) e^{i \frac{\theta}{\alpha}} \right| < a v(\rho), \quad (a < 1).$$

Имеем $f(t) - \xi = t^\alpha l(t) - \xi = l(t) \left[t^\alpha - \frac{\xi}{l(t)} \right]$. Но при $\left| t -$

$v(\rho) e^{i \frac{\theta}{\alpha}} \right| < a v(\rho)$ мы из свойства а) медленно растущих функций находим, что

$$l(t) \sim l\left(v(\rho) e^{i \frac{\theta}{\alpha}}\right) \sim l(v(\rho)).$$

Поэтому на границе круга $f(t) - \xi \sim l(v(\rho)) t^\alpha - \xi$.

Но $f(v(\rho)) = \rho$, значит $[v(\rho)]^\alpha l(v(\rho)) = \rho$ и $l(v(\rho)) = [v(\rho)]^{-\alpha} \cdot \rho$. Таким образом, на границе круга

$$f(t) - \xi = l(v(\rho)) [t^\alpha - (v(\rho))^\alpha e^{i\theta}] \quad (1 + o(1)).$$

Значит, по теореме Руше $f(t) - \xi$ имеет в круге столько же нулей, сколько и $t^\alpha - [v(\rho)]^\alpha e^{i\theta}$, т. е. один нуль. Этот нуль мы и обозначим через $v(\xi)$.

Остается показать, что $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)} = \frac{1}{\alpha}$. Имеем $f(v(\xi)) = \xi$ или $f'(v(\xi)) \cdot v'(\xi) = 1$. Следовательно, при $t = v(\xi)$

$$t \frac{f'(t)}{f(t)} = v(\xi) \frac{f'(v(\xi))}{f(v(\xi))} = \frac{v(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1}{v'(\xi)} = \frac{1}{\xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)}}.$$

Отсюда $\alpha = \frac{1}{\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)}}$ или $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi \frac{v'(\xi)}{v(\xi)} = \frac{1}{\alpha}$. По лемме 1

$v(\xi) = \xi^{\frac{1}{\alpha}} l_1(\xi)$ и $l_1(\xi)$ — медленно растущая функция.

Определение 3. Если функция $\psi(t)$ определена для достаточно больших t и $\frac{\psi(t)}{t} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то функция $\bar{\psi}(\xi) = \max_{t>0} \{t\xi - \psi(t)\}$ называется двойственной по Юнгу с функцией $\psi(t)$ (см. [1], стр. 86).

Теорема 2. Пусть $h(t) = t^p l(t)$, где $l(t)$ — медленно растущая функция. Тогда $h(\xi) = \xi^q l_1(\xi)$, где p, q связаны между собой соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а $l_1(\xi)$ — медленно растущая функция.

($h(\xi) = v(\xi)$ — функция, двойственная по Юнгу с функцией $h(t)$).

Доказательство. Имеем

$$\bar{h}(\xi) = \max_{t>0} \{t\xi - h(t)\}$$

или

$$\bar{h}(\xi) = \xi \cdot t(\xi) - h(t(\xi)), \quad (2)$$

где $t(\xi)$ — функция, обратная к $h'(t)$.

Действительно, в силу того, что

$$\xi = p t^{p-1} l(t) + t^p l'(t) = t^p l(t) \left[p + t \frac{l'(t)}{l(t)} \right] > 0;$$

при больших t существует, согласно лемме 2, $t(\xi) = \xi^{\frac{1}{p-1}} l_1'(\xi)$, где $l_1'(\xi)$ есть медленно растущая функция.

Подставляя это значение в (2) и учитывая леммы 3 и 4, получим

$$\bar{h}(\xi) = \xi \cdot \xi^{\frac{1}{p-1}} l_1'(\xi) - \left[\xi^{\frac{1}{p-1}} \cdot l_1(\xi) \right]^p \cdot l\left(\xi^{\frac{1}{p-1}} \cdot l_1(\xi)\right) = \xi^q l_1(\xi) -$$

$$- \xi^q \cdot l_1^p(\xi) l\left(\xi^{\frac{1}{1-p}} \cdot l_1(\xi)\right) = \xi^q l_2(\xi),$$

где $l_2(\xi)$ — медленно растущая функция.

Пользуясь сформулированными утверждениями, нетрудно получить асимптотические оценки для некоторых интегралов и канонических произведений.

Теорема 3. Для функции $E(x) = \int_0^\infty e^{xt - ah(t)} dt$, $\alpha > 0$, $h(t) = t^p l(t)$,

где $l(t)$ — медленно растущая функция, имеет место оценка $x \rightarrow \infty (v(x) = \bar{h}(x) = x^b l_1(x))$.

$$\ln E(x) = \alpha^{1-q} v(x) (1 + o(1)),$$

Доказательство. Для оценки этого интеграла можно применить метод Лапласа. Ссылаясь на теоремы 1, 2, 6[1], получим асимптотическую формулу для вклада точки $t=c(x)$:

$$V_c(x) \sim \sqrt{2\pi \cdot \rho_c(x)} \cdot \exp[-ah(c(x)) + x \cdot c(x)],$$

где $\rho_c(x) = [h''(c(x))]^{-\frac{1}{2}}$ — радиус влияния. Следовательно,

$$\ln V_c(x) \sim [-ah(c(x)) + x \cdot c(x)],$$

где $c(x)$ определяется из уравнения $-ah'(c) + x = 0$, т. е.

$$\ln V_c(x) \sim \max_{t \geq 0} \{-ah(t) + x \cdot t\}.$$

По определению функции, двойственной по Юнгу,

$$\tilde{h}(x) = \max_{t \geq 0} \{x \cdot t - h(t)\}.$$

Поэтому

$$\max_{t \geq 0} \{x \cdot t - ah(t)\} = a \cdot \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{x}{a} \cdot t - h(t) \right\} = a \tilde{h}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Значит

$$\ln V_c(x) \sim a \left(\frac{x}{a}\right)^q l\left(\frac{x}{a}\right) \sim a^{1-q} x^q l_1(x) = a^{1-q} \tilde{h}(x).$$

Теорема 4. Пусть имеется $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2q}}{\lambda_n^{2q}}\right)$, и $\kappa(n) = n^{\frac{1}{q}} l_1(n)$, $1 < q < 2$, $l_1(n)$ — медленно растущая функция, и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\kappa(n)} = 1$. Для функции $L(z)$ имеет место оценка

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{v(r)} = \pi \cdot |\sin q\varphi|, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{q},$$

где $v(r)$ — функция, обратная к $\kappa(n)$.

Доказательство. Имеем

$$\ln |L(re^{i\varphi})| = \operatorname{Re} \ln L(z) = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^{2q}}{\lambda_n^{2q}}\right).$$

Положим $z^q = J$, $\lambda_n^q = \alpha_n$.

Тогда

$$\ln \left| L\left(J^{\frac{1}{q}}\right) \right| = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{J^2}{\alpha_n^2}\right) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \ln \left(1 - \frac{J^2}{t^2}\right) dn(t),$$

$$\alpha_n = \lambda_n^q \sim (c \cdot \kappa(n))^q.$$

(см. [1], стр. 100), откуда получим требуемую оценку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1962.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций, М., 1962.
3. Гашимов Г. М. Канд. дисс., МОПИ, 1964.

Н. М. Гашимов

Јаваш артан функцијаларын хассэлэри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә јаваш артан функцијаларын бә'зи хассэлэри вә онларын тәтбиги мәсэләсиндән данышылараг көстәрилир ки, јаваш артан функцијаларын һасили вә суперпозицијалары да јаваш артан функцијалардыр. $t^{\alpha} l(t)$ -нин ($\alpha > 0$, $l(t)$ јаваш артан функцијадыр) тәрс функцијасы

$t^{\frac{1}{q}} l_1(t)$ шәклиндә вә $t^{\alpha} l(t)$ илә Јунг мә'нада икили олан функција исә $t^{\beta} l_2(t)$ шәклиндә олур; бурада $l_1(t)$, $l_2(t)$ јенә јаваш артан функцијалардыр, β исә α илә гаршылыглы гошма олан әдәдир. Сонра көс-

тәрилән хассэлэрин көмәји илә $E(x) = \int_0^{\infty} e^{xt - ah(t)} dt$, $a > 0$, $h(t) = t^q l(t)$

шәклиндә олан интегралларын вә $L(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^{2q}}{\lambda_n^{2q}}\right)$, $\lambda_n^q = n^{\frac{1}{q}} l(n)$ каноник һасилинин гијмәтләндирилмәси верилир.

Ф. Г. ШАМИЕВ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ КОМБИНИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Существующие решения задач о пластическом проектировании конструкций минимального веса (обзор этих работ см., например, в [1]) относятся к пластинкам, дискам и цилиндрическим оболочкам. Решений же для комбинированных конструкций в литературе пока нет. В предлагаемой статье на примере цилиндрического резервуара с плоским дном показана возможность решения задачи о проектировании комбинированных конструкций минимального веса.

Решение основано на работах [2,3], в которых исследовано проектирование статически неопределимых (в отношении опорных реакций) пластинок минимального веса.

Материал конструкций считается однородным (задача проектирования конструкций минимального веса совпадает с задачей проектирования конструкций минимального объема), идеально-пластическим, подчиняющимся условию те-

куности Треска и ассоциированному закону течения. Используется критерий для конструкций минимального веса, предложенный Друккером и Шилдом [4, 5].

Рассмотрим круглый слоистый цилиндрический сосуд давления с плоским дном, находящийся под действием внутреннего равномерно распределенного давления p (рис. 1). Пусть r , φ и x — цилиндрические координаты (ось x , имеющая положительное направление вверх, совпадает с осью сосуда), R — радиус срединной поверхности, L — длина, $2h$ — переменная толщина сосуда, а $H \gg h$ — толщина заполнителя. Обозначим через M_r и M_φ , соответственно, радиальный и тангенциальный изгибающие моменты для пластинки, N_x , N_φ и M_x — соответственно, осевую, окружную силы и осевой изгибающий момент для оболочки. Начало координат поместим в центре срединной поверхности пластинки. Пусть при $x=L$ сосуд свободно оперт.

Уравнение равновесия пластинки имеет вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \int_0^r p r dr. \quad (1)$$

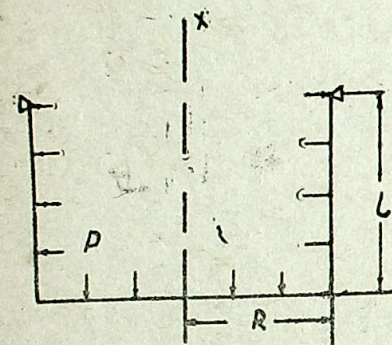


Рис. 1

Радialная и тангенциальная скорости кривизны κ и λ выражаются через скорости прогиба w следующим образом:

$$\kappa = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \lambda = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (2)$$

Уравнение равновесия оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\varphi}{R} = p. \quad (3)$$

Скорость удлинения срединной поверхности в окружном направлении ϵ_φ и скорость изменения кривизны срединной поверхности κ выражаются через w следующим образом:

$$\epsilon_\varphi = \frac{w}{R}, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (4)$$

Условия пластичности Треска для пластинки и оболочки показаны соответственно на рис. 2 и 3, где $M_0 = \sigma_0 h H$ — полный пластический изгибающий момент.

Ясно, что в месте соединения оболочки и пластинки осевой изгибающий момент M_x в оболочке равен радиальному изгибающему моменту M_r в пластинке, откуда следует равенство толщины пластинки и оболочки в этом месте. Поскольку оболочка является более жестким элементом соединения, нежели пластинка, деформации оболочки должны определять деформации пластинки. Ряд пробных решений показал, что всем условиям задачи может удовлетворить предположение, что для оболочки поле напряжений определится одним состоянием, а для пластинки тремя состояниями, как показано на рис. 4.

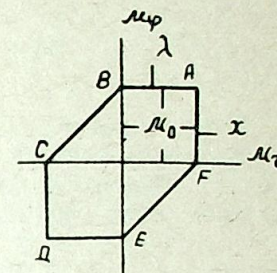


Рис. 2

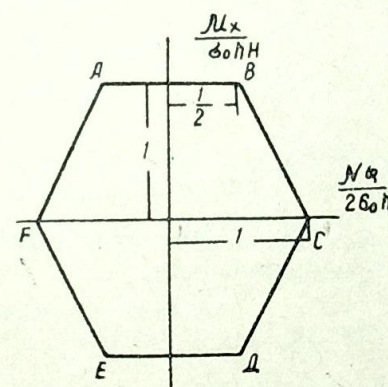


Рис. 3

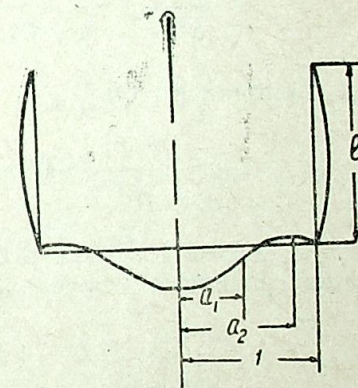


Рис. 4

Как видно из этого рисунка, в центральной части пластинки радиальный изгибающий момент M_r положителен (растяжение нижних, сжатие верхних волокон), а вблизи края отрицателен. Кроме того, в центральной части $\lambda \geq 0$, $\kappa \geq 0$, вблизи края везде $\kappa \leq 0$, однако в этой области λ сначала сохраняет свой неотрицательный знак, а затем при некотором значении r меняет знак, т. е. $\lambda \leq 0$. Таким образом, мы предполагаем, что в указанных трех областях напряженные состояния характеризуются соответственно точками A, C и D кривой текучести (рис. 2). Для оболочки осевой изгибающий момент M_x будет отрицательным (растяжения внешних и сжатия внутренних волокон). Ок-

ружная сила N_φ положительна, так как действует внутренняя нагрузка.

Таким образом, напряженное состояние оболочки будет характеризоваться точкой D на шестиугольнике текучести (рис. 3).

Считаем, что для проекта минимального веса удовлетворяется условие:

$$\frac{D}{h} = \frac{M_r x + M_\varphi \lambda}{h} = \frac{M_x \kappa + N_\varphi \epsilon_0}{h} = \text{const} = \alpha \sigma_0 H, \quad (5)$$

где D — скорость диссипации, отнесенная к единице площади срединной поверхности.

Примем следующие безразмерные величины:

$$\eta = \frac{r}{R}, \quad W = \frac{w}{\alpha R^2}, \quad P = \frac{P}{\sigma_0},$$

$$M^* = \frac{M_0}{p R^2}, \quad h^* = \frac{h}{R}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{RH}}. \quad (6)$$

Пусть в области $0 \leq \eta \leq a_1$ пластинки напряженное состояние характеризуется точкой A , в области $a_1 \leq \eta \leq a_2$ точкой C и в области $a_2 \leq \eta \leq 1$ точкой D . Тогда из (5) и (2), с учетом условия пластичности для этих точек, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 W}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dW}{d\eta} &= 1 & 0 \leq \eta \leq a_1 \\ \frac{d^2 W}{d\eta^2} &= -1 & a_1 \leq \eta \leq a_2 \\ \frac{d^2 W}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dW}{d\eta} &= -1 & a_2 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для оболочки имеем

$$\frac{d^2 W}{d\xi^2} - W = K, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (8)$$

где $K = H/R$, а $l = L/\sqrt{RH}$ есть безразмерная длина оболочки. Имеем следующие граничные условия и условия непрерывности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= 0, \quad [W]_{\eta=a_1} = [W]_{\eta=a_2} = 0, \\ \frac{dW}{d\eta} \Big|_{\eta=a_1} &= 0, \quad \left[\frac{dW}{d\eta} \right]_{\eta=a_1} = \left[\frac{dW}{d\eta} \right]_{\eta=a_2} = 0, \quad W|_{\eta=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

для пластинки,

$$W|_{\xi=0} = W|_{\xi=l} = 0 \quad (10)$$

для оболочки.

Так как изгибающие моменты M_r и M_x у стыка оболочки и пластинки непрерывны, то непрерывны будут и углы наклона пластинки и оболочки в этом месте, т. е.

$$\frac{dW}{d\eta} \Big|_{\eta=1} = \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi=0}. \quad (11)$$

Используя эти условия, а также (7) и (8), находим:

$$W = \begin{cases} \frac{1}{4} [\eta^2 - 3(a_2^2 - a_1^2) + 2a_2^2 \ln a_2 + 1] & 0 \leq \eta \leq a_1 \\ \frac{1}{4} (-2\eta^2 + 4a_2\eta - 3a_2^2 + 2a_2^2 \ln a_2 + 1) & a_1 \leq \eta \leq a_2 \\ \frac{1}{4} (-\eta^2 + 2a_2^2 \ln \eta + 1) & a_2 \leq \eta \leq 1 \\ K \frac{\text{sh } l - \text{sh } \xi - \text{sh}(l - \xi)}{\text{sh } l} & 0 \leq \xi \leq l \end{cases} \quad (12)$$

где a_1 и a_2 определяются из соотношения:

$$a_1 = \frac{2}{3} a_2,$$

$$a_2 = \left[\frac{\text{sh } l - 2K(\text{ch } l - 1)}{\text{sh } l} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Теперь можно найти искомые выражения для толщины пластинки и оболочки. Для точек $A(M_r = M_\varphi = M_0)$, $C(M_r = -M_0, M_\varphi = 0)$ и $D(M_r = M_\varphi = -M_0)$ из уравнения равновесия пластинки (1), с учетом условия

$$M^*|_{\eta=a_1} = [M^*]_{\eta=a_1} = [M^*]_{\eta=a_2} = 0, \quad (14)$$

получим

$$M^* = \begin{cases} \frac{a_1^2 - \eta^2}{4} & 0 \leq \eta \leq a_1 \\ \frac{\eta^3 - a_1^3}{6\eta} & a_1 \leq \eta \leq a_2 \\ \frac{3\eta^2 a_2 - 2a_1^3 - a_2^3}{12a_2} & a_2 \leq \eta \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

Используя условие непрерывности радиального изгибающего момента для пластинки и осевого изгибающего момента для оболочки в месте их соединения, которое равносильно условию

$$h^*|_{\eta=1} = h^*|_{\xi=0}, \quad (16)$$

и граничное условие

$$h^*|_{\xi=1} = 0, \quad (17)$$

из уравнения равновесия оболочки (3) находим выражение для переменной толщины оболочки:

$$h^* = P \frac{\{\mu [a_2(3 - a_2^2) - 2a_1^3] - 12a_3\} \text{sh}(l - \xi)}{12a_2 \text{sh } l} +$$

$$+ P \left(1 - \frac{\text{sh } \xi}{\text{sh } l} \right), \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (18)$$

где

$$\mu = \frac{1}{K} = \frac{R}{H}. \quad (19)$$

Для оболочки должно удовлетворяться неравенство (соответствующее точке D):

$$0 \leq W \leq -H \frac{d^2 W}{d\xi^2}. \quad (20)$$

Отсюда получим, что $l \leq 2,62$.

Попробуем совершить предельный переход к заземленной пластинке. С этой целью в (13) положим $l \rightarrow 0$, тогда

$$a_2 = 1, \quad a_1 = \frac{2}{3},$$

т. е. напряженное состояние пластинки характеризуется точками A и C шестиугольника Треска (рис. 3), что как раз соответствует проекту круглой заземленной по контуру пластинки минимального веса [6].

На рис. 5 и 6 соответственно показаны зависимости скорости прогиба и толщины резервуара от координат η и ξ для следующих параметров: $l=1$, $\mu=20$. Для этих значений параметров $a_1=0,6516$, $a_2=0,9767$.

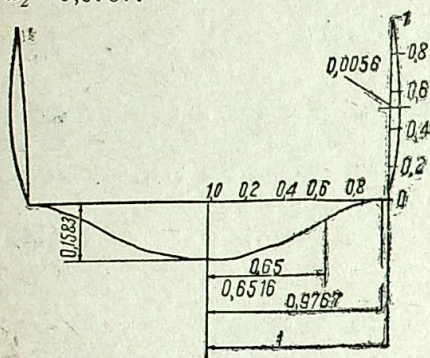


Рис. 5

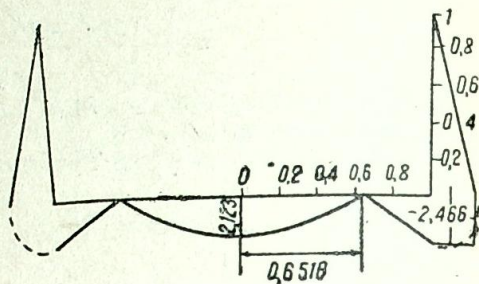


Рис. 6

В заключение автор выражает искреннюю благодарность проф. Г. С. Шапиро за ценные советы при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шилд Р. „Механика“, 1962, 2.
2. Шамиев Ф. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1962, 2.
3. Шамиев Ф. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1963, 3.
4. Drucker D. C. and Shield R. T. Design for minimum weight. Proc. 11th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussel, 1956.
5. Друкер Д. и Шилд Р. „Механика“, 1958, 3.
6. Onat E. T., Schumann W., Shield R. T. Design of circular plates for minimum weight. ZAMP, 1957, v. 8, 485—499.

Ф. Г. Шамиев

Мүхтәлиф һиссәләрдән гурашдырылмыш минимум чәкили
конструксиялар ләйһә етмәк һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгәләдә ләһһә вә өртүјүн бирләшмәсиндән алынған минимум чәкили мүхтәлиф ләјлә цилиндрик резервуарлар ләйһә етмәк мәсәләсінә бахылып.

Резервуар материалынын бирчинс, һабелә Тресканын ахма шәртинә вә онунла әләгәдар олан ахма ганунуна табе олдуғу гәбуледилип.

Р. З. ХАЛИЛОВА

АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРА, ПОРОЖДЕННОГО СИСТЕМОЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Пусть H — совокупность сильно измеримых векторных функций $y(x)$, $-\infty < x < \infty$ со значениями в гильбертовом пространстве H_1 таких, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|y(x)\|_{H_1}^2 dx < \infty.$$

Введем в H скалярное произведение $[y_1, y_2] =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (y_1(x), y_2(x))_{H_1} dx. \quad \text{Тогда норма есть}$$

$$[\|y\|] = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \|y(x)\|_{H_1}^2 dx \right\}^{1/2}.$$

По такой норме H полно и, следовательно, есть гильбертово пространство. C_0^k — линейное многообразие в H k раз непрерывно сильно дифференцируемых финитных векторных функций. Известно, что $C_0^\infty = H$. Рассмотрим на всей оси x дифференциальное выражение ly , задаваемое формулой

$$ly = (-1)^m y^{(2m)}(x) + p_{2m-2}(x) y^{(2m-2)}(x) + \dots + p_0(x) y(x),$$

где $p_j(x)$, $j=0$, при каждом x являются ограниченными операторами в H_1 . Пусть выражение ly формально симметрично, т. е. для y_1 и $y_2 \in C_0^{2m}$

$$[ly_1, y_2] = [y_1, ly_2].$$

Рассмотрим оператор, порожденный дифференциальным выражением ly на C_0^{2m} , а затем замкнем его. Обозначим замыкание через L_0 . Предположим, что L_0 полуограничен снизу. Если оператор L_0 не является самосопряженным, то у него есть полуограниченные самосопряженные расширения. Обозначим некоторое такое расширение через L и пусть $\theta(x, \xi, \lambda)$ — спектральная операторная функция для L .

(см. [4]). В случае, когда $H_1 = \{c = (c_1, \dots, c_k)\}$ или $H_1 = \{c = (c_1, \dots, c_m, \dots)\}$ соответственно с нормами $\|c\|_{H_1}^2 = \sum_{i=1}^k c_i^2$ или $\sum_{i=1}^m c_i^2$ или

$$\|c\|_{H_1}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2,$$

$\theta(x, \xi, \lambda)$ есть матричная функция: $\theta(x, \xi, \lambda) = \|\theta_{ij}(x, \xi, \lambda)\|$ (матрица соответственно конечная или бесконечная).

В настоящей статье доказывается теорема для таких реализаций пространства H_1 .

Равномерно в каждой конечной области x и ξ имеет место асимптотика

$$\theta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \theta_{0ij}(x, \xi, \lambda) + o(1), \quad (1)$$

где $\|\theta_{0ij}(x, \xi, \lambda)\|$ — матрица — спектральная функция минимального оператора, порожденного выражением $(-1)^m y^{2m}(x)$ на всей оси.

Случай оператора, порожденного уравнением второго порядка, был изучен в работах Левитана и Марченко [1] и получена такая же асимптотика. Для случая самосопряженного полуограниченного расширения оператора, порожденного эллиптическим дифференциальным выражением, Гординым [2] получена асимптотика, но в ряде случаев она не находит непосредственного применения, так как выражается следующим образом:

$$\theta(x, \xi, \lambda) = \theta_k(x, \xi, \lambda) + o\left(\lambda^{-\frac{n}{2m}}\right),$$

где $\theta_0(x, \xi, \lambda)$ — спектральная функция невозмущенной части дифференциального выражения, а n — размерность x .

Случай одного дифференциального выражения вида (1) подробно изучен А. Г. Костюченко [3], им получены различные применения, следующие из его более точной асимптотики

$$\theta(x, \xi, \lambda) = \theta_0(x, \xi, \lambda) + o(1).$$

Настоящая работа является прямым обобщением методов А. Г. Костюченко на случай системы как конечной, так и бесконечной. Теорема доказывается в два этапа. Первый этап — случай финитных коэффициентов $p_j(x)$ — доказывается по аналогии со схемой доказательства А. Г. Костюченко [3] и здесь не приводится. Условие финитности в этом случае можно облегчить требованием небольшой гладкости коэффициентов $p_j(x)$.

В дальнейшем интеграл от векторной функции $y(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx$$

будет пониматься поэлементно, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y_1(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} y_2(x) dx, \dots \right).$$

Перейдем к основному доказательству. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -Lu, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ при каждом x и t есть искомый элемент H_1 , а $\varphi(x)$ — известная вектор-функция.

Решение уравнения (1) можно записать в виде

$$u(x, t) = e^{-tL} \varphi(x). \quad (2)$$

Из [4] известно, что

$$G(x, \xi, t) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\theta(x, \xi, \lambda), \quad (3)$$

где $G(x, \xi, t)$ — операторная функция Грина задачи Коши (1) и

$$G(x, \xi, t) = \|G_{ij}(x, \xi, t)\|.$$

Так как для некоторого λ_0 при $\lambda \leq \lambda_0$ $\theta(x, \xi, \lambda) = 0$, то

$$G(x, \xi, t) = \int_{\lambda_0}^\infty e^{-t\lambda} d\theta(x, \xi, \lambda). \quad (3')$$

Без ограничения общности считаем, что $\lambda_0 > 0$.

Функции Грина $G(x, \xi, t)$ при $t > 0$ имеет по крайней мере $2m$ производных по совокупности переменных и по каждой переменной удовлетворяет уравнению $\frac{\partial G}{\partial t} = -LG$.

Зафиксируем некоторую конечную область S изменения x и ξ и пусть S_0 — некоторая подобласть S , отстоящая от S на расстоянии $\delta > 0$. Далее поступим следующим образом.

Рассмотрим на всей оси выражение

$$L_0^1 y \equiv (-1)^m y^{2m}(x) + \bar{p}_{2m-2}(x) y^{(2m-2)}(x) + \dots + \bar{p}_0(x) y(x),$$

где $\bar{p}_j(x)$ финитны, но в области S совпадают с соответствующими коэффициентами — операторными функциями $p_j(x)$. Известно, что минимальный симметрический оператор L_0^1 для выражения L_0^1 уже будет самосопряженным и, следовательно, ему будет отвечать единственная операторная функция Грина $\bar{G}_0(x, \xi, t)$ задачи Коши, которую можно найти из интегро-дифференциального уравнения:

$$\bar{G}_0(x, \xi, t) = G_0(x, \xi, t) + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, \eta, t) \cdot p \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \bar{G}_0(\eta, \xi, \tau) d\eta.$$

Здесь $G_0(x, \xi, t)$ — функция Грина для оператора L_0 . $\bar{G}_0(x, \xi, t)$ удовлетворяет условию

$$\|\bar{G}_0^{(s)}(x, \xi, t)\| \leq \frac{A_1}{t^{\frac{s+1}{2m}}} e^{-A \frac{(x-\xi)^{2m}}{t^{1/2m-1}}}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (4)$$

где A, A_1 — постоянные, не зависящие от x, ξ, t (все это проверено автором по схеме Эйдельмана [5]).

Лемма 1. Если x меняется в S_0 , а ξ — в любой конечной области, то $G_0(x, \xi, t)$ и $G(x, \xi, t)$ связаны соотношением

$$\|\bar{G}_0(x, \xi, t) - G(x, \xi, t)\| = o(1) e^{-\frac{\delta}{t^{1/2m-1}}} \quad (5)$$

Доказательство. Разность $v(x, \xi, t) = G - G_0$ есть регулярное в области S операторное решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -L_0^1 v \quad (6)$$

и, кроме того, $v(x, \xi, t)|_{t=0} = 0$.

Напишем равенство:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} - L_0^1 \right\} \bar{G}_0(x, \eta, t - \tau) v(\eta, \xi, \tau) d\eta = 0$$

$$t_0 > 0, x \in (a, b), \quad (7)$$

верное для любого решения уравнения (6).

Пусть a и b — концевые точки области S . Проинтегрируем по частям равенство (7):

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \bar{G}_0(x, \eta, t - \tau) \left(-\frac{\partial v}{\partial \tau} - L_0^1 v \right) d\eta + \int_a^b \bar{G}_0(x, \eta, t - \tau) \cdot v(\eta, \xi, \tau) \Big|_{t_0}^{t_1} d\eta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=0}^{2m-1} b_j \bar{G}_0^{(j)}(x, b, t_1 - \tau) v^{(2m-j)}(b, \xi, \tau) - \sum_{j=0}^{2m-1} a_j \bar{G}_0^{(j)}(x, a, t_1 - \tau) \times \right.$$

$$\left. \times v^{(2m-j)}(b, \xi, \tau) \right\} d\tau.$$

Так как $v(x, \xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению (6), то

$$\int_a^b \bar{G}_0(x, \eta, t - t_1) v(\eta, \xi, t_1) d\eta = \int_a^b \bar{G}_0(x, \eta, t - t_0) v(\eta, \xi, t_0) d\eta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=0}^{2m-1} b_j \bar{G}_0^{(j)}(x, b, t_1 - \tau) v^{(2m-j)}(b, \xi, \tau) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=0}^{2m-1} a_j \bar{G}_0^{(j)}(x, a, t_1 - \tau) \cdot v^{(2m-j)}(b, \xi, \tau) \right\} d\tau. \quad (8)$$

Устремим теперь $t_1 \rightarrow t$, $t_0 \rightarrow 0$.

Тогда из (8), ввиду того, что $\bar{G}_0^{(j)}(x, \xi, t)$ удовлетворяет оценке (4), а $|x - a| \geq \delta$, $|x - b| \geq \delta$, следует неравенство:

$$\|v(x, \xi, t)\| \leq A_1 \int_0^t e^{-\frac{A\delta}{(t-\tau)^{1/2m-1}}} d\tau \leq A_1 e^{-\frac{A\delta}{t^{1/2m-1}}}.$$

Принимая во внимание (3), получаем

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\theta(x, \xi, \lambda) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\bar{\theta}(x, \xi, \lambda) \right\| = O(1) e^{-\frac{\delta}{t^{1/2m-1}}}, \quad (9)$$

$\bar{\theta}(x, \xi, \lambda)$ — спектральная операторная функция оператора $\bar{L}_0$.

Дальнейший путь состоит в использовании ряда тауберовых теорем, которые позволяют заключить о поведении $\theta(x, \xi, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Из соотношения (9) получим поэлементно асимптотику

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\theta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda) + O(1) e^{-\frac{\delta}{t^{1/2m-1}}}. \quad (10)$$

Следующие две леммы верны для случая произвольного эллиптического оператора.

Лемма 2. Для любых фиксированных точек x и ξ .

$$\theta_{kk}(x, x, \lambda) \text{ и } \sigma(\lambda) = \theta_{kk}(x, x, \lambda) + 2\theta_{kk}(x, \xi, \lambda) + \theta_{kk}(\xi, \xi, \lambda)$$

— неубывающие функции на оси λ

$$\text{var } \theta_{ik}(x, \xi, \lambda) \leq \{\text{var } \theta_{ii}(x, x, \lambda)\}^{1/2} \cdot \{\text{var } \theta_{kk}(\xi, \xi, \lambda)\}^{1/2}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x), \dots)$ и $g(x) = (g_1(x), \dots, g_k(x), \dots)$ — произвольные финитные бесконечно-дифференцируемые функции. Имеем:

$$[E_\Delta f, g] = [E_\Delta f, E_\Delta g]; \quad (11)$$

$$E_\Delta f = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x, \xi, \Delta) \cdot f(x) dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{1j}(x, \xi, \Delta) f_j(x) dx, \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{2j}(x, \xi, \Delta) f_j(x) dx, \dots \right),$$

$$[E_\Delta f, g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{kj}(x, \xi, \Delta) f_j(x) dx \right) \cdot \bar{g}_k(\xi) d\xi =$$

$$= \left[\sum_{k,j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_{kj}(x, \xi, \Delta) f_j(x) \bar{g}_k(\xi) dx d\xi \right]. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$[E_\Delta f, E_\Delta g] = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \theta_{kl}(x, \eta, \Delta) f_j(x) dx \right) \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \theta_{kj}(\xi, \eta, \Delta) \bar{g}_l(\xi) d\xi \right) d\eta =$$

$$= \sum_{j,l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{kl}(x, \eta, \Delta) \cdot \theta_{kj}(\xi, \eta, \Delta) d\eta \right) f_j(x) \bar{g}_l(\xi) dx d\eta. \quad (13)$$

Подставляя в (11) равенства (12) и (13), получим в силу произвольности $f_l(x)$ и $g(x)$

$$\theta_{kj}(x, \xi, \Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{kl}(x, \eta, \Delta) \cdot \theta_{lj}(\xi, \eta, \Delta) d\eta.$$

Положив $x = \xi$, $k = j$ и используя симметричность $\theta(x, \xi, \lambda)$ получаем

$$\theta_{kk}(x, x, \Delta) = \int_{l=1}^{\infty} \theta_{kl}^2(x, \eta, \Delta) d\eta \geq 0. \quad (14)$$

Для любого λ также

$$\theta_{kk}(x, x, \lambda) \geq 0.$$

Из (14) следует

$$\sigma(\lambda) = \theta_{kk}(x, x, \Delta) + 2\theta_{kk}(x, \xi, \Delta) + \theta_{kk}(\xi, \xi, \Delta) =$$

$$= \int_{l=1}^{\infty} (\theta_{kl}(x, \eta, \Delta) + \theta_{kl}(\xi, \eta, \Delta))^2 d\eta \geq 0.$$

Первая часть леммы доказана. Докажем вторую часть.

Имеем

$$\theta_{ik}(x, \xi, \Delta) = \sum_{j=1}^{\infty} \int \theta_{ij}(x, \eta, \Delta) \theta_{jk}(\eta, \xi, \Delta) d\eta;$$

$$|\theta_{ik}(x, \xi, \Delta)| \geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int \theta_{ij}^2(x, \eta, \Delta) d\eta \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int \theta_{jk}^2(\eta, \xi, \Delta) d\eta \right)^{1/2} = \\ = \theta_{ii}^{1/2}(x, x, \Delta) \cdot \theta_{kk}^{1/2}(\xi, \xi, \Delta).$$

Отсюда и следует второе утверждение леммы.

$$\text{Введем обозначение } D^{\alpha, \beta} \theta(x, \xi, \lambda) = \frac{\partial^{\alpha+\beta} \theta(x, \xi, \lambda)}{\partial x^{\alpha} \cdot \partial \xi^{\beta}}.$$

Лемма 3. При $2\alpha \leq 2m-1$ существует интеграл $\int_0^{\infty} \frac{d\theta_{ij}^{\alpha, \alpha}(x, x, \lambda)}{\lambda + \mu}$,

$\mu > 0$.

Доказательство. Напишем равенство

$$[R_{-\mu} f, g] = \int_0^{\infty} \frac{d[E_{\lambda} f, g]}{\lambda + \mu} = \\ = \int \frac{d \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int \theta_{ij}(x, \xi, \lambda) f_j(x) dx \right) \cdot \bar{g}_i(\xi) d\xi \right]}{\lambda + \mu}. \quad (15)$$

Положим

$$f = (0, \dots, 0, f_i(x), 0, \dots), \\ g = (0, \dots, 0, g_j(x), 0, \dots).$$

Так как с другой стороны

$R_{-\mu} f = \int K(x, \xi, -\mu) f(\xi) d\xi$, где $K(x, \xi, \lambda)$ — матричная функция, то

$$[R_{-\mu} f, g] = \int \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int \sum_{l=1}^{\infty} K_{kl}(x, \xi, -\mu) f_l(x) dx \right) \bar{g}_k(\xi) d\xi = \\ = \iint K_{ij}(x, \xi, -\mu) f_i(x) \bar{g}_j(\xi) dx d\xi. \quad (16)$$

Приравнявая (15) и (16), для взятых $f(x)$ и $g(x)$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \iint K_{ij}(x, \xi, -\mu) f_i(x) \bar{g}_j(\xi) dx d\xi = \\ = \int_0^{\infty} \frac{d \iint \theta_{ij}(x, \xi, \lambda) f_i(x) \bar{g}_j(\xi) dx d\xi}{\lambda + \mu}. \quad (17)$$

Пусть теперь

$$f_i(x) = f_n^{(\alpha)}(x, x_0), \\ g_j(\xi) = f_n^{(\alpha)}(\xi, x_0),$$

где $f_n(x, x_0)$ и $f_n(\xi, x_0)$ — финитные положительные дельтаобразные последовательности, имеющие α производных [8].

Интегрируя по частям в левой и правой части (17), получим

$$\int_2^{\infty} \int K_{ij}^{\alpha, \alpha}(x, \xi, -\mu) f_n^{(\alpha)}(x, x_0) f_n^{(\alpha)}(\xi, x_0) dx d\xi = \int_0^{\infty} \frac{d\rho_n^{ij}(\lambda)}{\lambda + \mu}, \quad (18)$$

где $\rho_n^{ij}(\lambda) = \int_2^{\infty} \int \theta_{ij}^{\alpha, \alpha}(x, \xi, \lambda) f_n(x, x_0) f_n(\xi, x_0) dx d\xi$,

Ω — область финитности функций,

$f_n(x, x_0), f_n(\xi, x_0)$ при всех n .

Так как $2\alpha \leq 2m-1$, то ядро $K_{ij}^{\alpha, \alpha}(x, \xi, -\mu)$ равномерно по μ ограничено в области Ω , откуда следует неравенство при всех n :

$$\int_0^{\infty} \frac{d\rho_n^{ij}(\lambda)}{\lambda + \mu} \leq K. \quad (19)$$

Постоянная K от n не зависит. Так как $\rho_n^{ij}(\lambda)$ — неотрицательные неубывающие функции, то из (19) и следует утверждение леммы. Приведем теперь же тауберовы теоремы, которыми придется пользоваться для доказательства основной теоремы.

Теорема 1. Пусть $\sigma(\lambda)$ — функция ограниченной вариации в каждом конечном интервале и такая, что

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\lambda t} d\sigma(\lambda) = O(1) e^{-c/t^{\epsilon}} \text{ при } t \rightarrow 0 \quad (20)$$

при условии, что

$$\sup_{\lambda \leq \mu < \lambda + \frac{1}{1+\epsilon}} \int_{\lambda}^{\mu} d\sigma(\xi) = O(1) \lambda^{-\frac{\epsilon}{1+\epsilon}} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Тогда $I^k \sigma(\lambda) = O(1) \lambda^{-\frac{K\epsilon}{1+\epsilon}} \text{ при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (22)$

$I^k \sigma(\lambda)$ — Риссовское среднее порядка k , т. е.

$$I^k \sigma(\lambda) = \{\Gamma(k)\}^{-1} (\lambda - \lambda_0)^{1-k} \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda - \mu)^{k-1} d\sigma(\mu).$$

Если в условии (21) можно заменить $O(1)$ на $o(1)$, то тогда и в равенстве (22) также можно заменить $O(1)$ на $o(1)$. Эта теорема принадлежит Т. Ганелиусу [6].

Теорема 2 (Марченко В. А. [7]). Пусть $\rho(\lambda)$ и $\sigma(\lambda)$ — неубывающие и непрерывные слева функции, причем

$$\sigma^*(\lambda_0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \{\sigma(a + \lambda_0) - \sigma(a)\} < \infty.$$

Известно, что

$$\int_0^{\infty} e^{-s\lambda} d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-s\lambda} d\sigma(\lambda) + G(s), \quad s = x + iy, x > 0.$$

Если равномерно относительно $y \in (-h, h)$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} G(x + iy) = G(iy), \quad (-h < y < h),$$

причем ряд Фурье функции $G(iy) - G(-iy)$ сходится в точке 0, то

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{\rho(N+0) + \rho(N)}{2} - \sigma(N) - G(0) \right| \right| \leq 32 \cdot 10^7 \cdot \sigma^*(h_1). \quad (23)$$

Мы используем сначала теорему Марченко для установления нужной асимптотики для диагональных элементов $\theta_{ii}(x, \xi, \lambda)$ точно так, как у А. Г. Костюченко [3], с использованием асимптотики (10), леммы 2 и 3. Поэтому доказательства мы не приводим.

Докажем теорему для остальных, внедиагональных элементов $\theta_{ij}(x, \xi, \lambda)$, когда $i \neq j$.

Для этого случая теорема доказывается с использованием полученной асимптотики для $\theta_{ij}(x, \xi, \lambda)$ при помощи тауберовой теоремы Ганелиуса. Проверим выполнимость условий тауберовой теоремы Ганелиуса. Обозначим $\sigma(\lambda) = \theta_{ij}(x, \xi, \lambda) - \bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda)$.

Для $\sigma(\lambda)$ имеет место оценка (10). Ограниченность вариации следует из ограниченности вариации нормы $\theta(x, \xi, \lambda)$ и $\bar{\theta}_0(x, \xi, \lambda)$ [4].

Докажем, что

$$\sup_{\lambda < \mu < \lambda + \frac{1}{1+\varepsilon}} \int_{\lambda}^{\mu} d\sigma(\xi) = o(1).$$

Действительно:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\mu} d\sigma(\xi) &= \sigma(\mu) - \sigma(\lambda) = \theta_{ij}(x, \xi, \mu) - \theta_{ij}(x, \xi, \lambda) + \bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \mu) - \bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda). \\ |\sigma(\mu) - \sigma(\lambda)| &\leq |\theta_{ij}(x, \xi, \mu) - \theta_{ij}(x, \xi, \lambda)| + \\ &+ |\bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \mu) - \bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda)|. \end{aligned} \quad (24)$$

Используем неравенство

$$|\theta_{ij}(x, \xi, \Delta)| \leq \theta_{ij}^{1/2}(x, x, \Delta) \cdot \theta_{ij}^{1/2}(\xi, \xi, \Delta)$$

в правой части (24):

$$|\sigma(\mu) - \sigma(\lambda)| \leq \theta_{ij}^{1/2}(x, x, \Delta) \cdot \theta_{ij}^{1/2}(\xi, \xi, \Delta) + \bar{\theta}_{0ij}^{1/2}(x, x, \Delta) \cdot \bar{\theta}_{0ij}^{1/2}(\xi, \xi, \Delta).$$

Так как $\lambda < \mu < \lambda + \frac{1}{1+\varepsilon}$, то при $\lambda \rightarrow \infty$ из асимптотики

$$\theta_{ij}(x, x, \lambda) = \theta_{0ij}(x, x, \lambda) + o(1),$$

$$\bar{\theta}_{0ij}(x, x, \lambda) = \theta_{0ij}(x, x, \lambda) + o(1)$$

окончательно получим

$$|\sigma(\mu) - \sigma(\lambda)| \leq o(1) \cdot o(1) + o(1) \cdot o(1) = o(1).$$

Отсюда и

$$\sup_{\lambda < \mu < \lambda + \frac{1}{1+\varepsilon}} \int_{\lambda}^{\mu} d\sigma(\xi) = o(1) \text{ при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда из теоремы Ганелиуса следует, что $\sigma(\lambda) = o(1)$, т. е.

$$\theta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda) + o(1).$$

Но ввиду того, что

$$\bar{\theta}_{0ij}(x, \xi, \lambda) = \theta_{0ij}(x, \xi, \lambda) + o(1),$$

окончательно

$$\theta_{ij}(x, \xi, \lambda) = \theta_{0ij}(x, \xi, \lambda) + o(1).$$

Оценка равномерна по x и ξ в каждой конечной области. Теорема полностью доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность научному руководителю А. Г. Костюченко за постановку задачи и большое внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. „Изв. АН СССР“, т. 17, 1953, № 5; т. 19, 1955.
2. Гордин Г. Математика (сб. перев.) 1957, 1:3.
3. Костюченко А. Г. „ДАН СССР“, т. 166, 1966, № 2.

4. Халилова Р. З. „Дан Азерб. ССР“, 1965, № 10.
5. Эйдельман С. Д. Параболические системы. „Наука“, 1964.
6. Ганелиус. Математика (сб. перев.) 1957, 1:3.
7. Марченко „Изв. АН СССР“, т. 19.
5. Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними, т. 1, Физматгиз, 1959.

Р. З. Халилова

Өз-өзүнө гошма олан жарыммәһдуд ади дифференциал
ифадәләрин системиндән әмәлә кәлән операторун
кенишләnmәсинин спектрал функцијасынын асимптотикасы

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә 2m-тәртибли ади дифференциал ифадәдән әмәлә кәлән өз-өзүнә гошма жарыммәһдуд операторун спектрал функцијасынын асимптотикасы тапылмышдыр.

А. Ш. ДАДАШЕВ

О ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРОВ

В настоящей работе рассматривается поведение свободно вращающихся сплошных и полых цилиндров из идеального упруго-пластического материала при повторных воздействиях вращения и квазистационарного температурного поля.

Рассмотрена приспособляемость сплошных цилиндров, когда физико-механические характеристики материала считаются постоянными. Аналогичная задача решается для полых цилиндров, причем предполагается, что при повышении температуры предел текучести снижается, а остальные характеристики материала остаются неизменными. Коэффициент Пуассона-материала принимается равным 0,5.

§ 1. Приспособляемость свободно вращающихся сплошных цилиндров при неравномерной нагреве.

Пусть сплошной цилиндр радиуса b свободно вращается с угловой скоростью ω и находится в неравномерном температурном поле, распределенном по закону:

$$T = T_0 + T_1 \frac{r^2}{b^2}, \quad (1, 1)$$

где T_0 и T_1 — некоторые функции времени. Тогда упругие температурные напряжения будут:

$$\sigma_r = q(1 - \rho), \quad \sigma_\varphi = q(1 - 3\rho), \quad \sigma_z = 2q(1 - 2\rho),$$

а напряжения от центробежных сил имеют вид [4]:

$$\sigma_r = \sigma(1 - \rho), \quad \sigma_\varphi = \sigma(1 - \rho), \quad \sigma_z = \sigma/2(1 - 2\rho), \quad (1, 3)$$

где $q = \frac{\alpha E T_1}{4\sigma_s}$ — параметр теплового поля;

$$\sigma = \frac{\lambda \omega^2 p_0^2}{2g_{\sigma s}} - \text{параметр времени.}$$

Согласно теореме Мелана [1—2], конструкция приспособится, если можно найти такое поле остаточных напряжений, при котором все изменения напряжений, вызываемые приложением внешних нагрузок, не приводят к дальнейшему развитию пластической деформации.

Примем для этих остаточных напряжений выражения:

$$\sigma_r = -m(1 - \rho), \quad \sigma_\varphi = -m(1 - 3\rho), \quad \sigma_z = -2m(1 - 2\rho). \quad (1, 4),$$

Здесь параметр m определяется так, чтобы область допустимых значений нагрузок была возможно более широкой.

Суммарные напряжения в цилиндре будут:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma(1 - \rho) + (q - m)(1 - \rho), \\ \sigma_\varphi &= \sigma(1 - \rho) + (q - m)(1 - 3\rho),\end{aligned}\quad (1, 5)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{2}(1 - 2\rho) + 2(q - m)(1 - 2\rho).$$

Если выражения для напряжений (1,5) подставить в условие текучести Мизеса:

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2, \quad (1,6)$$

то получим уравнение семейства предельных поверхностей, ограничивающих области изменения параметров σ , q , m , внутри которых деформации на соответствующих радиусах цилиндра будут упругими:

$$4\rho^2 t^2 + \left(\frac{\sigma}{2} - t + \rho t\right)^2 + \left(-\frac{\sigma}{2} + t - 3\rho t\right) = 2, \quad (1, 7)$$

где

$$t' = q - m.$$

Для значений $0 \leq \rho \leq 1$ уравнение (1,7) определяет семейство эллипсов на плоскости σ, t .

При $\rho=0$ эллипс вырождается в пару прямых.

$$\sigma - 2t = \pm 2, \quad (1, 8)$$

а при $\rho=1$ получим

$$\left(\frac{\sigma}{2} + t\right)^2 + 3t^2 = 1. \quad (1,9)$$

Введя новые переменные $\frac{\sigma}{2} - t = x$, $\frac{\sigma}{2} + t = y$,

получим

$$x = \pm 1 \quad \text{и} \quad y^2 + \frac{3}{4}(y-x)^2 = 1. \quad (1, 10)$$

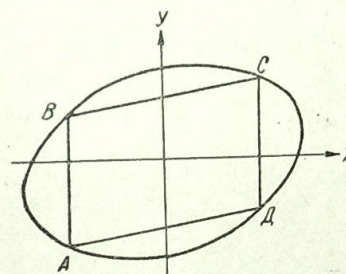


Рис. 1

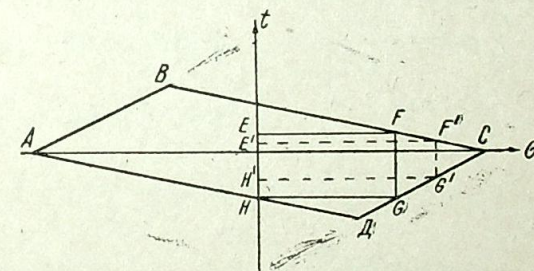


Рис. 2

Показанный на рис. 1 параллелограмм $ABCD$ является внутренней областью любого из эллипсов (1,7) и, следовательно, представляет собой область допустимых состояний. Она ограничена прямыми

$$3(x - 1) = 7(y - 1),$$

$$3(x + 1) = 7(y + 1),$$

$$x = +1.$$

На плоскости σt прямые будут (рис. 2):

$$\sigma + 5t - 2 = 0,$$

$$\sigma + 5t + 2 = 0,$$

$$\sigma - 2t + 2 = 0.$$

Пусть параметры нагрузки произвольно изменяются в некоторых интервалах $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$, $0 \leq q \leq q_0$. При $t = q - m$ эти параметры определяют некоторую прямоугольную область на плоскости σt . Очевидно, приспособляемость имеет место, если этот прямоугольник можно вписать в область допустимых значений. Варьируя параметр m [3], можно получить различные положения этого прямоугольника.

Предположим, что σ_0 фиксировано, тогда из геометрических соображений, вытекающих из рис. 2, находим высоту прямоугольника $EFGH$, определяющую для данного σ_0 предельное значение

$$q_0 = \frac{4 - \sigma_0}{5}. \quad (1, 12)$$

При $\sigma_0 > \frac{6}{5}$ амплитуда q_0 определяется из расположения прямоугольника $E'F'G'H'$, показанного на рис. 2.

В этом случае длины сторон прямоугольника $E'F'G'H'$ связаны соотношением:

$$q_0 = 0,7(2 - \sigma_0). \quad (1, 13)$$

На рис. 3 построены прямые, соответствующие (1, 12) и (1, 13). На плоскости $q_0 \sigma_0$ они ограничивают область допустимых нагрузок, при которых будет иметь место приспособляемость.

§ 2. Приспособляемость вращающегося полого цилиндра при неравномерном нагреве.

Напряжения в упруго-полном цилиндре свободно вращающемся с угловой скоростью ω определяются формулами [4]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma \left(\kappa + 1 - \rho - \frac{\kappa}{\rho} \right), \\ \sigma_\varphi &= \sigma \left(\kappa + 1 + \frac{\kappa}{\rho} - \rho \right), \\ \sigma_z &= \frac{\sigma}{2} (\kappa + 1 - 2\rho). \end{aligned} \quad (2, 1)$$

$$\text{Здесь } \kappa = \frac{a^2}{b^2}.$$

Допуская квазистационарный режим нагрева и охлаждения, будем считать, что температура распределяется по закону:

$$T = T_0 + T_1 \frac{\ln \rho}{\ln \kappa}. \quad (2, 2)$$

Возникающие тепловые напряжения определяются выражениями [5]. Приведем их к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q \left(1 - \frac{1}{\rho} + \delta \ln \rho \right), \\ \sigma_\varphi &= -q \left[1 + \frac{1}{\rho} + \delta(2 + \ln \rho) \right], \\ \sigma_z &= -2q [1 + \delta(1 + \ln \rho)]. \end{aligned} \quad (2, 3)$$

Здесь

$$q = \frac{\alpha E T_1}{\sigma_s} \cdot \frac{\kappa}{1 - \kappa}, \quad \delta = \frac{1 - \kappa}{\kappa \ln \kappa}.$$

Остаточные напряжения возьмем в виде

$$\sigma_r = m \left(1 - \frac{1}{\rho} + \delta \ln \rho \right),$$

$$\sigma_\varphi = m \left[1 + \frac{1}{\rho} + \delta(2 + \ln \rho) \right],$$

$$\sigma_z = 2m [1 + \delta(1 + \ln \rho)].$$

Таким образом, суммарные напряжения в полном цилиндре будут:

$$\sigma_r = \sigma \left(\kappa + 1 - \rho - \frac{\kappa}{\rho} \right) + (m - q) \left(1 - \frac{1}{\rho} + \delta \ln \rho \right),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma \left(\kappa + 1 - \rho + \frac{\kappa}{\rho} \right) + (m - q) \left[1 + \frac{1}{\rho} + \delta(2 + \ln \rho) \right], \quad (2, 5)$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{2} (\kappa + 1 - 2\rho) + 2(m - q) (1 + \delta + \delta \ln \rho).$$

Примем, что предел текучести останется постоянным при $T \leq T_0$, а при $T > T_0$ — понижается по линейному закону:

$$\sigma_{ST} = \sigma_s [1 - \alpha(T - T_0)] = \sigma_s (1 - \gamma q \delta \ln \rho),$$

$$\gamma = \frac{\alpha \sigma_s}{\alpha E}.$$

С учетом уравнения (2, 6) условие текучести Мизеса будет иметь вид

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 = 2(1 - \gamma q \delta \ln \rho)^2. \quad (2, 7)$$

Подставляя (2, 5) в (2, 7), получим семейство предельных поверхностей:

$$a_{11}q^2 + a_{22}m^2 + a_{33}\sigma^2 + 2a_{12}qm + 2a_{23}m\sigma + 2a_{13}q\sigma + 2a_{14}q + a_{15} = 0, \quad (2, 8)$$

$$\text{где } a_{11} = a_{22} - a_{14}^2, \quad a_{22} = -q_{12} = \left(\frac{2}{\rho} + 2\delta \right)^2 + \left(-1 + \frac{1}{\rho} - \delta \ln \rho \right)^2 +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\rho} + 2\delta + \delta \ln \rho \right)^2,$$

$$a_{13} = -a_{23} = - \left\{ \frac{8\kappa}{\rho} \left(\delta + \frac{1}{\rho} \right) + 2 \left[\left(\frac{\kappa^2 + 1}{2} + \frac{\kappa}{\rho} \right) \left(-1 + \frac{1}{\rho} - \delta \ln \rho \right) \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \left[\left(-\frac{\kappa + 1}{2} + \frac{\kappa}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} + 1 + 2\delta + \delta \ln \rho \right) \right] \right\},$$

$$a_{33} = \left(\frac{2\kappa}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\kappa + 1}{2} + \frac{\kappa}{\rho} \right)^2 + \left(-\frac{\kappa + 1}{2} + \frac{\kappa}{\rho} \right)^2; \quad a_{14} = \gamma \delta \ln \rho, \quad a_{44} = -1.$$

Уравнение (7) представляет семейство эллиптических конусов. Координаты вершин конусов равны

$$q_0 = m_0 = \frac{1}{\gamma \delta \ln \rho}.$$

Для точек, расположенных на $\rho = 1$, из (2, 8) получаем уравнение цилиндра:

$$4(1 + \delta)^2(m - q)^2 - (1 + \delta)(5\kappa - 1)(q - m) + \frac{\sigma^2}{4}(13\kappa^2 + 2\kappa + 1) - 1 = 0. \quad (2, 9)$$

Для точек, расположенных на внутреннем радиусе $\rho = \kappa$, предельной поверхностью будет

$$[4(1 + \delta\kappa)^2 - \kappa^2 \gamma^2 \delta^2 \ln \kappa^2] q^2 + 4(1 + \kappa\delta)^2 m^2 - (1 + \kappa\delta)(5 - \kappa)\kappa(q - m)\sigma - 8(1 + \kappa\delta)^2 m q + (2\gamma \kappa^2 \delta \ln \kappa) q + \frac{\sigma^2}{4} (\kappa^2 + 2\kappa + 13) - \kappa^2 = 0. \quad (2, 10)$$

Рассматривая сечения области возможных состояний плоскостями $\sigma = \text{const}$, получим следующие выражения определяющие максимальные значения параметра теплового поля, при которых возможна приспособляемость:

$$q = \frac{\kappa(1 + \kappa\delta) \sqrt{16 - 3(\kappa + 3)^2 \sigma^2} - 2\gamma(1 - \kappa)\kappa}{4(1 + \kappa\delta)^2 - \gamma^2(1 - \kappa)^2}. \quad (2, 11)$$

Отсюда можно получить зависимость между температурой приспособляемости и скоростью вращения полого цилиндра, не изменяющейся в течение цикла. Соответствующая графическая зависимость показана на рис. 4 (построение выполнено для $\kappa = 0,25$, $\gamma = 0,2$).

Сечение области возможных состояний плоскостями $q = \text{const}$ дает возможность определить предельную угловую скорость вращения и его зависимость от температурного перепада:

$$\kappa(\kappa^2 + 2\kappa + 13)\sigma = 2(5 - \kappa)[\kappa - \gamma(1 - \kappa)q]. \quad (2, 12)$$

Эта зависимость показана на рис. 4 (линия 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Прагер В. Приспособляемость в упруго-пластической среде, подвергнутой циклам нагрузки и температуры. Ст. пер. механика 1958, № 5.
2. Койтер В. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. Изд-во ИЛ, 1961.
3. Розенблюм В. И. К теории приспособляемости упруго-пластических тел. Изд-во АН СССР. ОН, 1958, № 6.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, 1954.
5. Тимошенко С. П. Теория упругости, 1934.

Э. Ш. Дадашов

Гејри мунтээм гыздырлымш фырланан силиндрлэрин
пластик деформасија вэијјетинэ „ујгунлашма“
габилијјети

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә идеал эластик-пластик материалдан олан фырланан бүтөв вэ ичи бош силиндрлэрин тәкр.р фырланманын вэ квазистационар температуран тәсири алгында илк пластик деформасијалардан сонра эластик деформасијаланмасы мәсәләсинә бахылыр.

1-чи параграфда бүтөв, 2-чидә исә ичи бош силиндрләрден бәһс едилир. Бундан әлавә, 2-чи параграфда материалын ахма һәддинин температурдан хәтти асылылыгы да гәбул олунур. Силиндрик пластик деформасија вэијјетинә ујгунлашма һалы үчүн параметрләр арасында асылылыг 3 вэ 4-чү шәкилләрдә кәстәрилмишдир.

А. О. ЯГУБ-ЗАДЕ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ*

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(u)}{\partial r}, \quad (1)$$

которое возникает при решении двумерного нелинейного уравнения типа нестационарной фильтрации:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \varphi(u),$$

Δ — оператор Лапласа в осесимметрическом случае. Функция $\varphi(u)$ определена для значений $u \geq 0$, причем $\varphi'(u) > 0$ для $u > 0$, $\varphi'(0) = 0$.

Уравнение вида (1) рассматривалось в [1], где строятся автомодельные решения при $\varphi(u) = u^\kappa$, $\kappa \geq 2$ такие, что в точках, где $u(r, t) = 0$, производные $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial r^2}$ имеют конечный скачок или об-

ращаются в бесконечность, в то время как $\frac{\partial \varphi(u)}{\partial r}$ непрерывна.

В [2] исследуются вопросы численного решения одномерного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2}$.

В настоящей статье строятся явные разностные схемы для решения первой краевой задачи для уравнения (1) и при помощи метода работы [2] доказывается их сходимость. Уравнение (1) решается на отрезке $r_0 \leq r \leq R$ или $r_0 \leq r < \infty$, $r_0 > 0$. Представляют интерес задачи, в которых r_0 сколь угодно мало. В этом случае второе слагаемое

правой части (1) имеет бесконечно большой множитель $\frac{1}{r}$. Приво-

димые в работе схемы обладают тем свойством, что не содержат подобных членов, и полученные оценки справедливы равномерно для всех $r_0 > 0$.

По этим схемам проводились расчеты конкретных задач и были получены достаточно хорошие решения.

* Результаты работы докладывались на Всесоюзной конференции по вычислительной математике; Москва, 22 (26 января 1965г.)

§ 1. Рассмотрим уравнение (1) при $x \in I$, $0 \leq t \leq l$ с одним из следующих условий:

при $I = [r_0, \infty)$

$$u|_{t=0} = u_0(r), \quad u|_{r=r_0} = u_1(t), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} u_0(r) = \text{const}, \quad u_0(r_0) = u_1(0);$$

при $I = [r_0, R]$

$$u|_{t=0} = u_0(r), \quad u|_{r=r_0} = u_1(t), \quad u|_{r=R} = u_2(t), \\ u_0(r_0) = u_1(0), \quad u_0(R) = u_2(0).$$

Введем переменную $x = r^2$. Тогда уравнение (1) переписется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} \right) \quad (1, 1)$$

Начальными и граничными условиями соответственно будут: при $I = [x_0, \infty)$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=x_0} = u_1(t), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u_0(x) = \text{const}, \quad u_0(x_0) = u_1(0); \quad (1, 2)$$

при $I = [x_0, l]$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=x_0} = u_1(t), \quad u|_{x=l} = u_2(t), \\ u_0(x_0) = u_1(0), \quad u_0(l) = u_2(0). \quad (1, 3)$$

Предполагается, что

$$0 \leq u_j \leq M_j \quad j = 0, 1, 2, \quad (1, 4)$$

$u_1(t)$, $u_2(t)$ непрерывны, $|u_0(x_1) - u_0(x_2)| \leq M_3 |x_1 - x_0|$, $|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)| \leq M_4 |u_1 - u_2|$, $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ ограничены при ограниченных u . Также $\varphi''(u) \geq 0$, $[\varphi'(u)]^2 \leq M_5 \varphi'(u)$ при ограниченных u . Здесь M_j ($j = 0, 1, \dots, 5$) — положительные константы.

Рассмотрим следующую разностную аппроксимацию задачи:

$$U_{ik+1} = U_{ik} + 4\gamma \left[x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta \varphi(U_{ik})}{h^2} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla \varphi(U_{ik})}{h^2} \right], \quad (1, 5)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad \Delta \varphi(U_{ik}) = \varphi(U_{i+1k}) - \varphi(U_{ik}),$$

$$\nabla \varphi(U_{ik}) = \varphi(U_{ik}) - \varphi(U_{i-1k}).$$

При $I = [x_0, \infty)$

$$U_{i0} = u_0(ih), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1, 6)$$

$$U_{xk} = u_1(\kappa\tau), \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots;$$

при $I = [x_0, l]$

$$U_{i0} = u_0(ih), \quad U_{xk} = u_1(\kappa\tau), \quad (1, 7)$$

Решение задач (1, 5) — (1, 6), (1, 5) и (1, 7) обладает следующими свойствами.

1. При $\gamma \leq \frac{1}{2} M_4$ решение U_{ik} неотрицательно и не превосходит M .

Действительно, (1, 5) можно представить в виде

$$U_{ik+1} = U_{ik} \left[1 - 4\gamma \left(x_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{ik} + x_{i-\frac{1}{2}} \alpha_{i-1k} \right) \right] + \\ + 4\gamma x_{i+\frac{1}{2}} \alpha_{ik} U_{i+1k} + 4\gamma x_{i-\frac{1}{2}} \alpha_{i-1k} U_{i-1k},$$

где $\alpha_{ik} = \frac{\Delta \varphi(U_{ik})}{\Delta U_{ik}} \geq 0$. При $\gamma \leq \frac{1}{2} M_4$ все коэффициенты при U_{ik} неотрица-

тельны и сумма их равна единице. Поэтому

$$U_{ik+1} \leq \max_{i-1, i, i+1} U_{ik}, \quad U_{ik+1} \geq \min_{i-1, i, i+1} U_{ik}.$$

Отсюда и из (1, 4) следует доказательство нашего утверждения.

2. При $\gamma \leq \frac{1}{2} M_4$ имеет место соотношение

$$|\omega_{ik}| = \frac{|\Delta \varphi(U_{ik})|}{h} \leq M_\delta \quad \text{для } x_i \in I_\delta, \quad \text{где } I_\delta = [x_0 + \delta, l - \delta] \text{ или}$$

$I_\delta = [x_0 + \delta, \infty)$, $\delta > 0$, M_δ — константа. Доказательство проведем для $I = [x_0, l]$.

Рассмотрим дискретную функцию

$$z_{ik} = F_i \omega_{ik}^2 + M_6 (e^{\varphi_{ik}} + e^{\varphi_{i+1k}}), \quad (1, 8)$$

где $F_i = x_i^2(l - x_i)^2$, M_6 — некоторая положительная константа. Пусть $M_7 = \max_i F_i$.

Рассмотрим разностный оператор

$$L(z_{ik}) = 4x_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+1k} \frac{\Delta z_{ik}}{h^2} - 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \frac{\nabla z_{ik}}{h^2} - \frac{\Delta z_{ik}}{\tau} = f_{ik}, \quad (1, 9)$$

$$\beta_{ik} = \frac{\varphi_{ik+1} - \varphi_{ik}}{U_{ik+1} - U_{ik}},$$

и покажем, что $L(z_{ik}) \geq 0$ при $x_i \in I$, если M_6 достаточно велико. Тогда из (1, 9) легко получить ограниченность z_{ik} .

Действительно,

$$0 \leq z_{ik+1} = z_{ik} \left[1 - 4\gamma \left(\beta_{i+1k} x_{i+\frac{1}{2}} - \beta_{ik} x_{i-\frac{1}{2}} \right) \right] + \\ + 4\gamma \beta_{i+1k} x_{i+\frac{1}{2}} z_{i+1k} + 4\gamma \beta_{ik} x_{i-\frac{1}{2}} z_{i-1k} - \tau f_{ik}.$$

При $\gamma \leq \frac{1}{2} M_4$ и при $f_{ik} \geq 0$

$$\max_i z_{ik} \leq M_6 (M_7 + 2e^\mu), \quad (1, 10)$$

если $M_6 \geq (M_3 M_4)^2$ (по предположению $|\omega_{i0}| \leq M_3 M_4$). Из ограниченности z_{ik} непосредственно следует утверждение 2, именно:

$$|\omega_{ik}| \leq \frac{\sqrt{M_6 (M_7 + 4e^\mu)}}{\delta(l - \delta)} = M_\delta, \quad x_i \in I_\delta.$$

Легко видеть, что

$$L(\omega_{ik}) = 0;$$

$$\frac{\Delta \rho_{ik}}{h} = \frac{\Delta_i \varphi_{i+1k} / \Delta_i U_{i+1k} - \Delta_i \varphi_{ik} / \Delta_i U_{ik}}{\Delta U_{ik}} \left(\frac{\Delta \varphi_{ik}}{\Delta U_{ik}} \right)^{-1} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h} = \frac{\tilde{\varphi}_{u_{ik}}}{\tilde{\varphi}_{u_{ik}}} \omega_{ik};$$

$$L(F_i) = 4\beta_{ik} \left[x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h^2} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla F_i}{h^2} \right] \frac{\tilde{\varphi}_{u_{ik}}}{\tilde{\varphi}_{u_{ik}}} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} \omega_{ik}; \quad (1, 11)$$

$$L(e^{\varphi_{ik}}) = 4x_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+1k} \frac{\Delta e^{\varphi_{ik}}}{\Delta \varphi_{ik}} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h^2} - 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \frac{\nabla e^{\varphi_{ik}}}{\nabla \varphi_{ik}} \frac{\nabla \varphi_{ik}}{h^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\Delta_t e^{\varphi_{ik}}}{\Delta_t \varphi_{ik}} \frac{\Delta_t \varphi_{ik}}{\tau} = \\
& = b_0^{(ik)} \left(4x_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+1k} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h^2} - 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \frac{\nabla \varphi_{ik}}{h^2} - \frac{\Delta_t \varphi_{ik}}{\tau} \right) + \\
& + b_1^{(ik)} \cdot 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \left(\frac{\nabla \varphi_{ik}}{h} \right)^2 - \tau \left(\frac{\Delta_t \varphi_{ik}}{\tau} \right)^2 \cdot b_2^{(ik)},
\end{aligned}$$

где

$$b_0^{(ik)} = \frac{\Delta e^{\varphi_{ik}}}{\Delta \varphi_{ik}}, \quad b_1^{(ik)} = \frac{\frac{\Delta e^{\varphi_{ik}}}{\Delta \varphi_{ik}} - \frac{\nabla e^{\varphi_{ik}}}{\nabla \varphi_{ik}}}{\nabla \varphi_{ik}},$$

$$b_2^{(ik)} = \frac{\frac{\Delta_t e^{\varphi_{ik}}}{\Delta_t \varphi_{ik}} - \frac{\Delta e^{\varphi_{ik}}}{\Delta \varphi_{ik}}}{\Delta_t \varphi_{ik}}.$$

$$\begin{aligned}
L(e^{\varphi_{ik}}) &= b_0^{(ik)} \left[4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta \beta_{ik}}{h} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h} - 4\beta_{ik} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h^2} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla \varphi_{ik}}{h^2} \right) - \frac{\Delta_t \varphi_{ik}}{\tau} \right] + \\
&+ 4b_1^{(ik)} \beta_{ik} x_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Delta \varphi_{ik}}{h} \right)^2 - 4\gamma \beta_{ik}^2 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta \varphi_{ik}}{h} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla \varphi_{ik}}{h} \right)^2 \cdot b_2^{(ik)} = \\
&= 4x_{i+\frac{1}{2}} b_0^{(ik)} \frac{\Delta \beta_{ik}}{h} \omega_{ik}^2 + 4x_{i-\frac{1}{2}} b_1^{(ik)} \beta_{ik} \omega_{i-1k}^2 - 4\gamma b_2^{(ik)} \beta_{ik}^2 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \omega_{ik} x_{i-\frac{1}{2}} \omega_{i-1k} \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \left[b_0^{(ik)} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} \omega_{ik}^2 + b_1^{(ik)} \cdot 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \omega_{i-1k}^2 \right],
\end{aligned}$$

$\gamma \leq \frac{M_8}{2M_4}$, M_8 — константа, зависящая от $b_j^{(ik)}$, $1 \leq b_j^{(ik)} \leq e^{\mu}$, $i=0, 1, 2$.

Имеет место формула (см. [2]):

$$\begin{aligned}
L(a_{ik} \cdot b_{ik}) &= a_{ik} L(b_{ik}) + b_{ik} L(a_{ik}) + \beta_{i+1k} \frac{\Delta a_{ik}}{h} \frac{\Delta b_{ik}}{h} + \\
&+ \beta_{ik} \frac{\nabla a_{ik}}{h} \frac{\nabla b_{ik}}{h} - \tau \frac{\Delta_t a_{ik}}{\tau} \frac{\Delta_t b_{ik}}{\tau}.
\end{aligned} \quad (1, 12)$$

Вычислим $L(\omega_{ik}^2)$ по формуле (1, 12):

$$\begin{aligned}
L(\omega_{ik}^2) &= 2\omega_{ik} L(\omega_{ik}) + \beta_{i+1k} \left(\frac{\Delta \omega_{ik}}{h} \right)^2 + \beta_{ik} \left(\frac{\nabla \omega_{ik}}{h} \right)^2 - \tau \left(\frac{\Delta_t \omega_{ik}}{\tau} \right)^2 \geq \\
&\geq \frac{1}{2} \left[\beta_{i+1k} \left(\frac{\Delta \omega_{ik}}{h} \right)^2 + \beta_{ik} \left(\frac{\nabla \omega_{ik}}{h} \right)^2 \right], \quad \gamma \leq \frac{1}{4} M_4.
\end{aligned}$$

По формуле (1, 12) найдем $L(z_{ik})$:

$$\begin{aligned}
L(z_{ik}) &= F_i L(\omega_{ik}^2) + \omega_{ik}^2 L(F_i) + \beta_{i+1k} \frac{\Delta F_i}{h} \frac{\Delta \omega_{ik}^2}{h} + \\
&+ \beta_{ik} \frac{\nabla F_i}{h} \frac{\nabla \omega_{ik}^2}{h} + M_6 [L(e^{\varphi_{ik}}) + L(e^{\varphi_{i+1k}})] \geq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \omega_{ik}^2 \left[L(F_i) + M_6 \frac{b_0^{(ik)}}{2} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} \right] + \\
&+ \frac{F_i}{2} \left[\beta_{i+1k} \left(\frac{\Delta \omega_{ik}}{h} \right)^2 + \beta_{ik} \left(\frac{\nabla \omega_{ik}}{h} \right)^2 \right] + \\
&+ \beta_{i+1k} \frac{\Delta F_i}{h} \frac{\Delta \omega_{ik}^2}{h} + \beta_{ik} \frac{\nabla F_i}{h} \frac{\nabla \omega_{ik}^2}{h} + \\
&+ M_6 \left[\frac{b_1^{(ik)}}{2} \cdot 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} \omega_{i-1k}^2 + \frac{b_0^{(i+1k)}}{2} \cdot 4x_{i+1,5} \frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} \omega_{i+1k}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{b_1^{(i+1k)}}{2} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+1k} \omega_{ik}^2 \right].
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что (см. [2])

$$\begin{aligned}
\left[\frac{F_i}{2} \left(\frac{\Delta \omega_{ik}}{h} \right)^2 + \frac{\Delta F_i}{h} \frac{\Delta \omega_{ik}^2}{h} \right] \beta_{i+1k} &\geq \beta_{i+1k} (l - 2x_i - h)^2 (-7\omega_{ik}^2 - 5\omega_{i+1k}^2), \\
\frac{F_i}{2} \left(\frac{\nabla \omega_{ik}}{h} \right)^2 + \frac{\nabla F_i}{h} \frac{\nabla \omega_{ik}^2}{h} &\geq \beta_{ik} (l - 2x_{i-1} - h)^2 (-5\omega_{ik}^2 - 7\omega_{i-1k}^2).
\end{aligned}$$

Используя проведенные оценки, получим, что

$$\begin{aligned}
L(z_{ik}) &\geq \omega_{ik}^2 \left[M_6 - \frac{14(l - 2x_i - h)^2}{4x_{i+\frac{1}{2}} b_1^{(i+1k)}} \right] \frac{b_1^{(i+1k)}}{2} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \beta_{i+1k} + \\
&+ \omega_{i-1k}^2 \left[M_6 - \frac{14(l - 2x_{i-1} - h)^2}{4x_{i-\frac{1}{2}} b_1^{(ik)}} \right] \frac{b_1^{(ik)}}{2} \cdot 4x_{i-\frac{1}{2}} \beta_{ik} + \\
&+ \omega_{i+1k}^2 \left[M_6 - \frac{10(l - 2x_i - h)^2}{4x_{i+1,5} b_0^{(i+1k)}} \cdot \frac{\beta_{i+1k} \varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} \right] \frac{b_0^{(i+1k)}}{2} \cdot 4x_{i+1,5} \frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} + \\
&+ \omega_{ik}^2 \left[M_6 - \frac{2\varphi_{u_{ik}}'}{\varphi_{u_{ik}}'} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{b_0^{(ik)}}{2} \{L(F_i) - 5\beta_{ik}(l - 2x_{i-1} - h)^2\} \right] \frac{b_0^{(ik)}}{2} \times \\
&\quad \times 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'}.
\end{aligned}$$

Подставим вместо $L(F_i)$ его значение, тогда выражение в последней квадратной скобке будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&M_6 - \frac{2\varphi_{u_{ik}}'}{\varphi_{u_{ik}}'} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{b_0^{(ik)}}{2} \left[\frac{\varphi_{u_{ik}}''}{\varphi_{u_{ik}}'} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} \omega_{ik} + \right. \\
&\quad \left. + 4\beta_{ik} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla F_i}{h} \right) - 5\beta_{ik}(l - 2x_{i-1} - h)^2 \right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} M_6 + \frac{1}{2} M_6 - \frac{4x_i(l-x_i)(l-2x_i-h)}{b_0^{(ik)}} \omega_{ik} - \frac{2(l-2x_i-h)^2}{b_0^{(ik)}} \Delta \varphi_{ik} -$$

$$- \frac{2}{b_0^{(ik)} \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\varphi'_{u_{ik}}}{\varphi_{u_{ik}}} \beta_{ik} \left[4 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla F_i}{h} \right) - 5(l-2x_{i-1}-h)^2 \right].$$

Выберем константу M_6 столь большой, чтобы было одновременно

$$M_6 \geq \frac{14(l-2x_i-h)^2}{4x_{i-\frac{1}{2}} b_1^{(ik)}},$$

$$M_6 \geq \frac{10(l-2x_i-h)^2}{4x_{i-\frac{1}{2}} b_0^{(ik)}} \frac{\beta_{ik} \varphi'_{u_{ik}}}{\varphi_{u_{ik}}},$$

$$\frac{1}{2} M_6 \geq \frac{2(l-2x_i-h)^2 \Delta \varphi_{ik} - \frac{2\beta_{ik} \varphi'_{u_{ik}}}{4x_{i+\frac{1}{2}} \varphi_{u_{ik}}} \left[4 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla F_i}{h} \right) - 5(l-2x_{i-1}-h)^2 \right]}{b_0^{(ik)}}.$$

Это возможно, так как $1 \leq b_j^{(ik)} \leq e^\mu$, $j=0, 1, 2$; $\frac{\varphi'_{u_{ik}}}{\varphi_{u_{ik}}} \beta_{ik}$ — величина

ограниченная (мы предполагали, что $[\varphi'(u)]^2/\varphi''(u)$ ограничена при ограниченных u), $|\Delta \varphi_{ik}|$ и $4 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \frac{\Delta F_i}{h} - x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\nabla F_i}{h} \right)$ — ограниченные величины. Тогда

$$2L(z_{ik}) \geq \omega_{ik}^2 \left[M_6 - \frac{8x_i(l-x_i)(l-2x_i-h)}{b_0^{(ik)}} \omega_{ik} \right] \cdot 4x_{i+\frac{1}{2}} \frac{b_0^{(ik)} \varphi'_{u_{ik}}}{2 \varphi_{u_{ik}}}.$$

Покажем, что существует константа M_6 , для которой справедливо неравенство

$$M_6 \geq \frac{8x_i(l-x_i) |l-2x_i-h|}{b_0^{(ik)}} |\omega_{ik}|. \quad (1, 13)$$

Неравенство (1, 13) легко удовлетворяется при $\kappa=0$, так как $|\omega_{i0}| \leq M_3 M_4$. При этом $f_{i0} \geq 0$, а значит неравенство (1, 10) имеет место при $\kappa=1$. Предположим, что (1, 13) справедливо для $\kappa=s$, тогда $f_{is} \geq 0$ и (1, 10) справедливо для $\kappa=s+1$.

Из (1, 8) имеем $x_i(l-x_i) |\omega_{is+1}| \leq \sqrt{M_6(M_7 + 4e^\mu)}$.

Введем обозначение $\max_i \frac{8(l-2x_i-h)}{b_0^{(ik)}} = M_8$. Тогда (1, 13) имеет место при $\kappa=s+1$, если $M_6 \geq M_8^2(M_7 + 4e^\mu)$.

При таком выборе константы M_6 справедливы $L(z_{ik}) \geq 0$ при всех i, κ и $|\omega_{ik}| \leq M_8$.

§ 2. Рассмотрим функцию $W(x, t)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varphi \left(4 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right), \quad x \in I, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2, 1)$$

при одной из следующих совокупностей условий:

$$\text{при } I = [x_0, \infty) \quad W|_{t=0} = W_0(x), \quad W|_{x=x_0} = W_1(t); \quad (2, 2)$$

$$\text{при } I = [x_0, l] \quad W|_{t=0} = W_0(x), \quad W|_{x=x_0} = W_1(t), \quad W|_{x=l} = W_2(t). \quad (2, 3)$$

Здесь $W_0(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению

$$4 \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW_0}{dx} \right) = u_0(x), \quad (2, 4)$$

$W_1(t)$ и $W_2(t)$ определяются из уравнений $\frac{\partial W_j}{\partial t} = \varphi(u_j)$, $j=1, 2$, с начальными условиями: $W_1(0) = W_0(x_0)$, $W_2(0) = W_0(l)$.

Легко видеть, что $u(x, t) = 4 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial W}{\partial x} \right)$ внутри I . Функция $W(x, t)$

является более гладкой, чем $u(x, t)$. Поэтому доказательство сходимости разностного решения к точному при неограниченном измельчении шага для $W(x, t)$ получается элементарно. В § 3 описано, как сделать обратный переход от $W(x, t)$ к первоначальной функции $u(x, t)$ и получить сходимость U_{ik} к точному решению $u(x_i, t_k)$ при $h \rightarrow 0$.

Заменим (2, 1) — (2, 2), (2, 1) и (2, 3) следующей разностной задачей:

$$V_{ik+1} = V_{ik} + \tau \varphi \left(4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta V_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla V_{ik}}{h^2} \right), \quad (2, 5)$$

$$\text{при } I = [x_0, \infty) \quad V_{i0} = W_0^*(ih), \quad V_{x_0k} = W_1^*(\kappa\tau); \quad (2, 6)$$

$$\text{при } I = [x_0, l] \quad V_{i0} = W_0^*(ih), \quad V_{x_0k} = W_1^*(\kappa\tau), \quad V_{lk} = W_2^*(\kappa\tau) \quad (2, 7)$$

$i=0, 1, 2, \dots, \kappa=0, 1, 2, \dots$

Здесь W_0^* — решение разностного уравнения

$$4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta W_0^* - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla W_0^*}{h^2} = u_0(ih)$$

с начальными условиями:

$$W_0^*(x_0) = W_0(x_0), \quad W_0^*(l) = W_0(l),$$

$W_1^*(\kappa\tau)$ и $W_2^*(\kappa\tau)$ определяются из разностных уравнений

$$W_j^*((\kappa+1)\tau) - W_j^*(\kappa\tau) = \tau \varphi(u_j(\kappa\tau)), \quad j=1, 2, \quad (2, 8)$$

с начальными условиями:

$$W_1^*(0) = W_0(x_0), \quad W_2^*(0) = W_0(l).$$

Покажем, что решение (2, 5) — (2, 6), (2, 5) и (2, 7) при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению задачи (2, 1) — (2, 2), (2, 1) и (2, 3). Разность $W_{ik} - V_{ik} = R_{ik}$ удовлетворяет уравнению

$$R_{ik+1} = R_{ik} + \tau \frac{\varphi(u_{ik}) - \varphi(U_{ik}^*)}{u_{ik} - U_{ik}^*} \cdot 4 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \Delta R_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla R_{ik} \right) + \tau \psi_{ik}, \quad (2, 9)$$

где

$$|\psi_{ik}| = \left| \bar{\omega}_{ik} + \frac{\varphi(u_{ik}) - \varphi(U_{ik}^*)}{u_{ik} - U_{ik}^*} \bar{\omega}_{ik} \right| \leq \max_{i,k} |\bar{\omega}_{ik}| (1 + M_4) = \omega,$$

$$U_{ik}^* = 4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta V_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla V_{ik}}{h^2},$$

$\bar{\omega}_{ik}$ — погрешность аппроксимации по t ,

$\bar{\omega}_{ik}$ — погрешность аппроксимации по x .

Так как

$$\begin{aligned} |W_{i0} - V_{i0}| &\rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0, \\ |W_{x,k} - V_{x,k}| &\rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \\ |W_{ik} - V_{ik}| &\rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то в любой момент времени $t = T_1$ имеем

$$|R_i| = |W_i^* - V_i| \leq T_1 \omega. \quad (2, 10)$$

Покажем, что $\omega_{ik} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда будет следовать, что $\omega \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Обозначим через $\pi(h)$ модуль непрерывности функции $u(x, t)$ по x при $x \in I$:

$$\pi(h) = \max |u(x + \xi) - u(x)|, \quad |\xi| \leq h.$$

Так как $4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta W_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla W_{ik}}{h^2} = u(\xi)$, $|x_i - \xi| \leq h$, то

$$\begin{aligned} &\left| \varphi \left(4 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial W_{ik}^*}{\partial x} \right) \right) - \varphi \left(4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta W_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla W_{ik}}{h^2} \right) \right| = \\ &= \frac{\varphi(u_{ik}) - \varphi(u(\xi))}{u_{ik} - u(\xi)} |u_{ik} - u(\xi)| \leq M_4 \pi(h) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из (2, 1) видно, что $\frac{\partial W}{\partial t}$ непрерывна, поэтому $\frac{\partial W_{ik}}{\partial t} - \frac{\Delta_t W_{ik}}{\tau} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Сделаем переход от V_{ik} к U_{ik} . Из (2, 5) имеем $U_{ik+1}^* = U_{ik}^* + 4\gamma \left[x_{i+\frac{1}{2}} \Delta \varphi(U_{ik}^*) - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla \varphi(U_{ik}^*) \right]$, $U_{i0}^* = u_0(ih) = U_{i0}$.

Доопределим U_{x0}^* и U_{ik}^* с помощью формул

$$W_j^*((k+1)\tau) - W_j^*(k\tau) = \tau \varphi(U_j^*(k\tau)), \quad j=1, 2,$$

$$W_1^*(0) = W_0(x_0), \quad W_2^*(0) = W_0(l).$$

Тогда в силу (2, 8) получим $U_{x0}^* = u_1(k\tau) = U_{xk}$, $U_{ik}^* = u_2(k\tau) = U_{ik}$.

Определенная таким образом функция U_{ik}^* тождественно совпадает с U_{ik} .

§ 3. В [2] было получено неравенство: $\beta_1 \leq 2\sqrt{\beta_0 \beta_2 \kappa}$ (3, 1)

где

$$\beta_0 = \sup_{x_i \in I} |p(x_i) - q(x_i)|,$$

$$\beta_1 = \sup_{x_i \in I} \left| \varphi \left(\frac{\Delta p_i}{h} \right) - \varphi \left(\frac{\Delta q_i}{h} \right) \right|,$$

$$\beta_2 = \sup_{x_i \in I} \left| \frac{\Delta \varphi \left(\frac{\Delta p_i}{h} \right)}{h} - \frac{\Delta \varphi \left(\frac{\Delta q_i}{h} \right)}{h} \right|,$$

функции $p(x_i)$ и $q(x_i)$ определены на $I = [x_0, \infty)$ или $I = [x_0, l]$. Докажем, что $\varphi(U_{ik}) - \varphi(u_{ik}) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

$$\sup_{x_i \in I} |R_i| \leq T_1 \omega,$$

$$\begin{aligned} \sup_{x_i \in I} \left| 4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta R_i - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla R_i}{h^2} \right| &= \sup_{x_i \in I} \left[4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta W_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla W_{ik}}{h^2} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta V_{ik} - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla V_{ik}}{h^2} \right] \leq 2M. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Ландау—Адамара, получим

$$\sup_{x_i \in I} \left| 4x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta R_i}{h} \right| = \sup_{x_i \in I} \left| 4x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta W_i}{h} - 4x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta V_i}{h} \right| \leq 2\sqrt{2MT_1\omega}.$$

Пусть теперь $4x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta W_i}{h} = p_i$, $4x_{i-\frac{1}{2}} \frac{\Delta V_i}{h} = q_i$. Тогда

$$\beta_0 = \sup_{x_i \in I} |p_i - q_i| \leq 2\sqrt{2MT_1\omega},$$

$$\beta_2 = \sup_{x_i \in I_0} \left| \frac{\Delta \varphi \left(\frac{\Delta p_i}{h} \right)}{h} - \frac{\Delta \varphi \left(\frac{\Delta q_i}{h} \right)}{h} \right| =$$

$$= \sup_{x_i \in I_0} \left| \frac{\Delta \varphi \left(4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta W_i - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla W_i}{h^2} \right)}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Delta \varphi \left(4 \frac{x_{i+\frac{1}{2}} \Delta V_i - x_{i-\frac{1}{2}} \nabla V_i}{h^2} \right)}{h} \right| \leq 2M_0 \quad (I_0 \text{ и } M_0 \text{ определены в § 2}).$$

На основании (3, 1) имеем $|\varphi(u_{ik}) - \varphi(U_{ik})| \leq 4\sqrt{\kappa M_0 \sqrt{2MT_1\omega}}$, $\omega \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Это и доказывает сходимость приближенного решения U_{ik} к точному решению $u(x_i, t_k)$ при $h \rightarrow 0$.

В заключение выражаю глубокую благодарность А. А. Абрамову, руководившему настоящей работой, а также В. Ф. Баклановской за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. „Прикл. матем. и мех.“, вып. 1, 1952, 16.
2. Баклановская В. Ф. „Ж. вычисл. матем. и матем. физ.“, 1961, 1, № 3.

Поступило 17. III 1965

Гејри-стационар филтрасија тәнлији үчүн гојулмуш оха симметрик мәсәләнин әдәди һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гејри-хәтти (1) тәнлији үчүн һәм сонлу ($0 \leq t \leq T$, $0 < r_0 \leq r \leq R$), һәм дә сонсуз ($0 \leq t \leq T$, $0 \leq r_0 \leq r < \infty$) областларда гарышыг мәсәлә верилир. r_0 -ын кичик гијмәтләриндә (1) тәнлијинин мөхсусијјәти оддугундан дәјишәнләри әвәз етмәклә һәммин мөхсусиј-јәт арадан галдырылыр. Алынған јени мәсәлә үчүн сонлу фәргләр методу тәклиф олунур вә көстәрилир ки, сонлу фәргләр мәсәләсинин һәлли оха симметрик мәсәләнин әдәди һәллинә јахындыр.

Ә. Дж. АСЛАНОВ

О МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

1. Пусть H —гильбертово пространство. Рассмотрим совокупность векторных функций $x(t)$, определенных на $[0, T]$, со значениями из H . Множество векторных функций, интегрируемых по Бохнеру [1] на отрезке $[0, T]$, ($T > 0$), обозначим через $L = L([0, T], H)$, тогда под $L_2 = L_2([0, T], H)$ будем понимать множество элементов L , для которых квадрат нормы интегрируем в смысле Лебега. Нетрудно показать, что L_2 есть гильбертово пространство [1].

Норму и скалярное произведение в H обозначим $\| \cdot \|$ (...), а норму и скалярное произведение в L_2 обозначим соответственно $\| \cdot \|_{L_2}$, $[\cdot, \cdot]$.

2. Рассмотрим в пространстве L_2 функционал

$$F(f) = \int_0^T \|u(t) - v(t)\|^2 dt + \alpha \int_0^T \|f(t)\|^2 dt. \quad (1)$$

Автором [2], в частности, доказана следующая теорема:

Пусть $v(\cdot) \in L_2$. Тогда существует управляющая функция $f(\cdot) \in L_2$, минимизирующая при $\alpha > 0$ функционал (1), где $u(t)$ —решение задачи Коши,

$$\frac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t), \quad (2)$$

$$u(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Здесь $A(t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ есть, вообще говоря, неограниченный замкнутый линейный оператор, действующий в H , с плотной областью определения $D(A)$.

Цель настоящей статьи—более эффективно решить поставленную задачу для случая, когда $v(t)$ не любой элемент L_2 , а определяется как решение задачи Коши:

$$\frac{dv(t)}{dt} + A(t)v(t) = h(t), \quad (4)$$

$$v(0) = u_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

¹ Сообщение второе. Первое сообщение см. „ДАН Азерб. ССР“, т. XXI, № 7, 1965.

Естественно, что существует единственная управляющая функция $f(\cdot) \in L_2$, минимизирующая при $\alpha > 0$ функционал (1), где $u(t)$ и $z(t)$ — решение задачи Коши (2) — (3) и (4) — (5), соответственно, а $h(t)$ — заданная векторная функция, определенная на $[0, T]$, со значениями из H , так как эта задача является частным случаем задачи, сформулированной в теореме.

3. Пусть оператор $A(t)$ и вектор-функция $f(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) оператор $-A(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы операторов $e^{-\tau A(t)}$ ($\tau \geq 0$), причем $\|e^{-\tau A(t)}\| \leq 1$, $u_0 \in L(A)$;

2) $A(t)$ имеет независимую от t область определения $D(A)$ и оператор $A(t)A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируемый по t .

3) вектор-функция $A(0)f(t)$ непрерывна по t . При этих предположениях Т. Като [3] показал, что формула

$$u(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, s)f(s)ds \quad (6)$$

определяет единственное непрерывное при $t \geq 0$ и непрерывно дифференцируемое при $t > 0$ решение задачи (2) — (3). Здесь $U(t, s)$ — операторная функция переменных t, s и сильно непрерывная по совокупности переменных t, s при $0 \leq s \leq t \leq T$, значения которых при фиксированных t и s суть линейные ограниченные операторы, действующие в H . При этом выполнены соотношения

$$U(t, s) = U(t, \tau)U(\tau, s), \quad U(t, t) = E, \quad \|U(t, s)\| \leq 1.$$

П. Е. Соболевский [4] исследовал уравнение (2) в других предположениях, при которых также существует разрешающий оператор $U(t, s)$, обладающий указанными выше свойствами, причем решение задачи (2) — (3) определяется той же формулой (6) (см. также Н. Табае [5]).

Ввиду того, что задача (4) — (5) отличается от (2) — (3) лишь свободным членом, то ее решение запишется в виде

$$v(t) = U(t, 0)u_0 + \int_0^t U(t, s)h(s)ds. \quad (7)$$

Отсюда имеем

$$F(f) = \int_0^T \|(Bf - Bh)(t)\|^2 dt + \alpha \int_0^T \|f(t)\|^2 dt$$

или в обозначениях $L_2([0, T], H)$

$$F(f) = [Bf - Bh, Bf - Bh] + \alpha[f, f], \quad (8)$$

где положено

$$(Bf)(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)ds. \quad (9)$$

Очевидно, функция (9) является решением задачи (2) с нулевым начальным условием [3].

Легко проверить, что при $f(\cdot) \in L_2$, $\|U(t, s)\| \leq 1$ B — линейный ограниченный оператор, действующий в пространстве L_2 .

Из результатов статьи [2] вытекает существование и единственность минимизирующей функции f_α для функционала (8). Найдем эту функцию непосредственно.

Пусть для произвольного $g(\cdot) \in L_2$

$$f_\lambda = f_\alpha + \lambda g. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), получим, что

$$F(f_\lambda) = F(f_\alpha) + 2\lambda[Bf_\alpha - Bh, Bg] + \alpha[f_\alpha, g] + 2\lambda^2[Bg, Bg] + \alpha[g, g].$$

Из $\min F(f) = F(f_\alpha)$ следует, что

$$F(f_\lambda) = F(f_\alpha) \quad \text{при } \lambda = 0.$$

Тогда для всех $g(\cdot) \in L_2$

$$\left. \frac{dF(f_\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = [Bf_\alpha - Bh, Bg] + \alpha[f_\alpha, g] = 0. \quad (11)$$

Принимая во внимание определение сопряженного оператора

$$[B\psi_1, \psi_2] = [\psi_1, B^*\psi_2] \quad \text{для любых } \psi_1, \psi_2 \in L_2$$

из (11) для всех $g(\cdot) \in L_2$ имеем

$$B^*Bf_\alpha + \alpha f_\alpha - B^*Bh = 0, \quad (12)$$

где

$$(B^*\psi)(t) = \int_t^T U^*(s, t)\psi(s)ds.$$

Известно [6, 7], что B^*B — положительный самосопряженный оператор, поэтому при $\alpha > 0$ оператор $(B^*B + \alpha E)$ имеет ограниченный и определенный во всем пространстве L_2 обратный, причем

$$\|(B^*B + \alpha E)^{-1}\|_{L_2} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, из уравнения (12) минимизирующая функция определяется единственным образом:

$$f_\alpha = (B^*B + \alpha E)^{-1}B^*Bh \quad (13)$$

или

$$f_\alpha = h - \alpha(B^*B + \alpha E)^{-1}h, \quad (13')$$

где для любой функции $\psi(\cdot) \in L_2$

$$[(B^*B)\psi](t) = \int_t^T U^*(s, t) \int_0^s U(s, \tau)\psi(\tau) d\tau ds. \quad (14)$$

Из (8) и (12) можно получить, что $F(f_\alpha) = [f_\alpha, h]$. По этой формуле можно вычислить минимальные значения функционала $F(f)$, если найден минимизирующий элемент f_α .

4. В качестве приложения рассмотрим следующую конкретную задачу об оптимальном управлении.

Задача. Найти управляющую функцию $f(x, t)$ такую, чтобы при любом $0 \leq t \leq T$

$$f(x, t) \in L_2(-\infty, \infty), \quad \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, t)|^2 dx \in L_2(0, T)$$

и чтобы она минимизирует функционал

$$F(f) = M[f] + \alpha N[f] = \iint_Q |u(x, t) - v(x, t)|^2 dx dt + \alpha \iint_Q |f(x, t)|^2 dx dt, \quad (15)$$

где $\alpha > 0$, $Q = \{(x, t): -\infty < x < \infty, t \geq 0\}$.

Здесь $u(x, t)$ — обобщенное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (16)$$

$$(-\infty < x < \infty, t \geq 0) \quad (17)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

а $v(x, t)$ — решение такой же задачи, отличающейся от (16) — (17) лишь правой частью (вместо $f(x, t)$ стоит известная функция $h(x, t)$).
Под обобщенным решением $u(x, t)$ понимаем

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \eta, t) \varphi(\eta) d\eta + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \eta, t-s) f(\eta, s) d\eta ds,$$

где

$$G(x, \eta, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4t}}, \quad t > 0.$$

Применим к этой задаче предложенный нами подход.

$$\text{Здесь } H = L_2(-\infty, \infty), -\frac{\partial^2}{\partial x^2} = A, D(A) = W_2^2(-\infty, \infty).$$

Рассматривая $u(x, t)$ при каждом фиксированном t как элемент пространства $L_2(-\infty, \infty)$, задачу (16) — (17) можно записать в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $L_2(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{dw(t)}{dt} + Aw(t) &= f(t), \\ w(0) &= w_0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $f(t) = f(x, t)$, $w_0 = \varphi(x)$.

Как известно [7], A — самосопряженный, положительный оператор поэтому — A порождает сильно непрерывную полугруппу e^{-tA} ([8], стр. 466), причем решение задачи (18) с нулевым начальным условием дается формулой [9]:

$$(Bf)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds, \quad s \leq t. \quad (19)$$

Ввиду того, что A самосопряженный, оператор e^{-tA} также будет самосопряженным [8]. Тогда формула (14) примет следующий вид:

$$[(B^*B)\psi](t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} \int_0^s e^{-(s-\tau)A} \psi(\tau) d\tau ds. \quad (20)$$

Как известно [8], полугруппа (она будет аналитической), порождаяемая оператором $-A$, в $L_2(-\infty, \infty)$ определяется интегральным оператором

$$e^{-tA}[\varphi] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4t}} \varphi(\eta) d\eta, \quad t > 0.$$

Известно, что при $0 \leq s < t$ (см. [10])

$$(Bf)(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-s)}} f(\eta, s) d\eta ds \quad (21)$$

является решением задачи (16) с нулевым начальным условием. Тогда, сравнивая (19) с (21), имеем

$$[e^{-(t-s)A} f](x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-s)}} f(\eta, s) d\eta. \quad (22)$$

Воспользовавшись (22), вычислим (20):

$$\begin{aligned} [(B^*B)\psi](x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-(t-s)A} \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s-\tau}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(s-\tau)}} \psi(\eta, \tau) d\eta d\tau ds = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^s \frac{e^{-\frac{(z-x)^2}{4(s-t)}}}{\sqrt{s-t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(z-\eta)^2}{4(s-\tau)}}}{\sqrt{s-\tau}} \psi(\eta, \tau) d\eta d\tau dz ds. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и применяя к внутреннему интегралу формулу 3.323(2) [11], придем к равенству

$$[(B^*B)\psi](x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4(2s-\tau-t)}}}{\sqrt{2s-\tau-t}} \psi(\eta, \tau) d\eta d\tau ds.$$

Снова меняя порядок интегрирования по τ и по s , имеем

$$\begin{aligned} [(B^*B)\psi](x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4(2s-\tau-t)}}}{\sqrt{2s-\tau-t}} \psi(\eta, \tau) d\eta ds d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4(2s-\tau-t)}}}{\sqrt{2s-\tau-t}} \psi(\eta, \tau) d\eta ds d\tau. \end{aligned}$$

Затем, меняя порядок интегрирования по η и по s , интегрируя по частям и воспользовавшись формулой 3.321(2) или 3.461(5) [11], получим

$$[(B^*B)\psi](x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t, \eta, \tau) \psi(\eta, \tau) d\eta d\tau, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t, \eta, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{2T-\tau-t} e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4(2T-\tau-t)}} - \sqrt{|t-\tau|} e^{-\frac{(\eta-x)^2}{4|t-\tau|}} \right] + \\ &+ \frac{\eta-x}{4} \left[\Phi\left(\frac{\eta-x}{2\sqrt{2T-\tau-t}}\right) - \Phi\left(\frac{\eta-x}{2\sqrt{|t-\tau|}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$$

известный интеграл вероятности.

Тем самым решение задачи об оптимальном управлении сведено нами к решению двумерного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром $K(x, t, \eta, \tau) = K(\eta, \tau, x, t)$ в полосе Q :

$$\int_Q K(x, t, \eta, \tau) \psi(\eta, \tau) d\eta d\tau + a \psi(x, t) = h(x, t), \quad (25)$$

которое имеет единственное решение, так как $\alpha > 0$ и B^*B — самосопряженный положительный оператор.

Формула (24) описывает оператор B^*B для тех функций $\psi(x, t)$, для которых законны перестановки порядка интегрирования, проделанные нами в формуле (23). Поэтому на $h(x, t)$ нужно наложить такие условия, чтобы решение $\psi(x, t)$ уравнения было именно такой функцией.

Решив уравнение (25), получим из (13')

$$f_\alpha(x, t) = h(x, t) - \alpha \psi(x, t).$$

Можно также записать уравнение непосредственно относительно $f(x, t)$:

$$\iint_Q K(x, t, \eta, \tau) f_\alpha(\eta, \tau) d\eta d\tau + \alpha f_\alpha(x, t) = \iint_Q K(x, t, \eta, \tau) h(\eta, \tau) d\eta d\tau.$$

Рассмотренная задача может быть физически истолкована следующим образом: ищут "экономичный" подогрев $f(x, t)$ бесконечного стержня так, чтобы распределение температуры $u(x, t)$ "мало" отличалось от распределения $\tau(x, t)$, порождаемого "неэкономичным" подогревом $h(x, t)$.

"Малость" отклонения в сочетании с "экономичностью" подогрева математически описывается тем, что ищут минимум функционала (15), где $M[f]$ — цена отклонения, $N[f]$ — цена управления, а число $\alpha > 0$ показывает вес цены управления.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность научному руководителю акад. АН Азербайджанской ССР З. И. Халилову за постановку задачи и систематическую помощь в работе, а также Ю. И. Домшляку за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хилл Э. и Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1962.
2. Асланов Э. Дж. ДАН Азерб. ССР. т. XXI, № 7, 1965.
3. Като Т. Сб. перев. "Математика". 2(4). 1958.
4. Соболевский П. Е. Тр. Московского матем. об-ва, т. 10, 1961.
5. Танаб Н. Osaka math. J., 11 (1959), № 2.
6. Рисс Ф. и Б. С. Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, 1954.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 5, М., 1959.
8. Хилл Э. Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, 1951.
9. Phillips R. Trans. Am. Math. Soc., 74 № 2 (1953).
10. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ГИТТЛ, М., 1954.
11. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., 1962.

Е. Ч. Асланов

Гильберт фəзасында квадратик функционалын минимуму таггында

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə L_2 Гильберт фəзасында (8) функционалына минимум верəн функција үчүн (13) дүстүрү чыхарылып.

Алынган абстракт нəтичə (15) функционалына тəتبиг едилір. Бурада $u(x, t)$ истиликкечирмə тəнлији үчүн гојулмуш Коши мəсəлəsi-нин həллидир.

И. Ш. ИБРАМХАЛИЛОВ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ЯВНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Работа посвящена нахождению явных выражений для параметров распределений случайных величин.

§ 1. Обозначения и определения. Символ $M\{\cdot\}$ будет употребляться для обозначения математического ожидания. Рассмотрим семейство вероятностей $\{F(x, \theta)\}$, зависящее от числового параметра θ . Множество значений θ обозначим через Θ .

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — выборка в n значений из совокупности с функцией распределения $F(x, \theta)$, где $F(x, \theta) \in \{F(x, \theta)\}$ и неизвестный числовой параметр θ из Θ . Значения, получаемые при независимых выборках из указанного распределения, суть независимые случайные величины, имеющие одну и ту же функцию распределения. Каждая конкретная выборка представляется определенной точкой

$$Z_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

в пространстве выборок R_n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для обозначения какой-нибудь функции от всех выборочных значений будет употребляться символ

$$\theta_n^*(Z_n) = \theta_n^*(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Изложим основные определения.

Определение 1. Произвольная функция $\theta_n^*(Z_n)$ на пространстве выборок R_n называется „ n -оценкой параметра θ “, принимающей значение из Θ^* ($\Theta^* \subset \Theta$). Последовательность $\{\theta_n^*(Z_n)\}$ таких „ n -оценок“ будем называть обычно оценкой θ .

Определение 2. n -оценка $\theta_n^*(Z_n)$ параметра θ такова, что для любого $\theta \in \Theta$

$$|M_\theta\{\theta_n^*(Z_n)\} - \theta| \leq \varepsilon,$$

тогда $\theta_n^*(Z_n)$ называется ε -смещенной оценкой θ , где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. При $\varepsilon = 0$ полученная оценка называется несмещенной оценкой параметра θ .

Пусть $\{\varepsilon_m^*(z_1, z_2, \dots, z_m)\}$ $m = 1, 2, \dots$ последовательность функций от наблюдений.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность $\{\theta_m^*\}$ есть состоятельная оценка для истинных значений θ_0 параметра θ , если при $m \rightarrow \infty$ θ_m^* сходится по вероятности к θ_0 .

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует число $M_{\varepsilon, \delta}$ такое, что при $m > M_{\varepsilon, \delta}$

$$P\{|\theta_m^* - \theta| > \varepsilon/\theta = \theta_0\} < \eta.$$

§ 2. Теоремы о состоятельных оценках. Производится выборка в n значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ из генеральной совокупности $F(x, \theta) \in \{F(x, \theta)\}$. Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, получаемые при независимых выборках, — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же функцию распределения, следовательно, и

$$\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$$

есть независимые, одинаково распределенные случайные величины.

Теорема 1. Если неизвестный параметр θ имеет несмещенную оценку $\varphi(x)$, тогда

$$\theta_n(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)$$

есть состоятельная оценка параметра θ .

Теорема 2. Если для каждого ε существует $\varphi_\varepsilon(x)$ такая, что для всех $\theta \in \Theta$

$$\left| \int \varphi_\varepsilon(x) dF(x, \theta) - \theta \right| \leq \varepsilon, \quad (1)$$

то существует последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что при $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_n(x_i) - \theta\right| > \alpha\right\} \rightarrow 0 \quad (2)$$

для всех $\varepsilon > 0, \alpha > 0$.

Теорема 3. 1) функция $G(\theta)$ монотонна и непрерывна в некотором конечном интервале $\Theta = [\alpha, \beta]$;

2) функция $\varphi(x)$ такая, что $\int \varphi(x) dF(x, \theta) = G(\theta)$ при любом $\theta \in [\alpha, \beta]$.

Тогда статистика вида $\theta_n^*(Z_n) = W\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)\right)$ — состоя-

тельная оценка параметра θ , где $W = G^{-1}$.

Теорема 4. Если: 1) функция $G(\theta)$ непрерывна и монотонна на конечном интервале $\Theta = [\alpha, \beta]$;

2) существует функция $\Phi(x, \varepsilon)$ такая, что

$$\left| \int \Phi(x, \varepsilon) dF(x, \theta) - G(\theta) \right| \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, тогда существует последовательность функций $\{\Phi_n(x)\}$ такая, что статистика

$$\theta_n^*(Z_n) = W\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_n(x_i)\right) \quad (3)$$

будет состоятельной оценкой параметра θ , где $W = G^{-1}$.

Выберем последовательности $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\Phi_n(x)\}$ следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$\Phi_n(x) = \Phi(x, \varepsilon_n).$$

Очевидно,

$$\int |\Phi(x, \varepsilon_n)| dF(x, \theta) < \infty.$$

Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Phi(x_k, \varepsilon_i) = \int \Phi(x, \varepsilon_i) dF(x, \theta).$$

Для любого $\eta_i > 0$ и $\gamma_i > 0$ существует такое число $m(\eta_i, \gamma_i)$, что при всех $m > n(\eta_i, \gamma_i)$

$$P\left\{\left|\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Phi(x_k, \varepsilon_i) - \int \Phi(x, \varepsilon_i) dF(x, \theta)\right| > \eta_i\right\} < \gamma_i.$$

Возьмем

$$\eta_i = \gamma_i = \frac{1}{2^i}.$$

Тогда при $m > m_i$

$$P\left\{\left|\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Phi(x_k, \varepsilon_i) - M_\theta\{\Phi(x, \varepsilon_i)\}\right| > \frac{1}{2^i}\right\} < \frac{1}{2^i}.$$

Положим

$$\Phi_m(x) = \Phi(x, \varepsilon_i)$$

при

$$m_i \leq m < m_{i+1}.$$

Из теоремы 2 вытекает, что при $m \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \Phi_m(x_k) - G(\theta)\right| > \alpha\right\} \rightarrow 0,$$

где $\alpha > 0$ есть сколь угодно малое число, выбранное таким же образом, как в теореме 2. Поскольку последовательность

$$\left\{ \frac{\Phi_m(x_1) + \Phi_m(x_2) + \dots + \Phi_m(x_m)}{m} \right\} \quad (4)$$

сходится по вероятности к функции $G(\theta)$, тогда любая подпоследовательность

$$\left\{ \frac{\Phi_{\kappa_m}(x_1) + \Phi_{\kappa_m}(x_2) + \dots + \Phi_{\kappa_m}(x_m)}{\kappa_m} \right\} \quad (5)$$

последовательности (4) содержит другую подпоследовательность

$$\left\{ \frac{\Phi_{n_{\kappa_m}}(x_1) + \Phi_{n_{\kappa_m}}(x_2) + \dots + \Phi_{n_{\kappa_m}}(x_m)}{n_{\kappa_m}} \right\} \quad (6)$$

такую, что с вероятностью 1

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_{\kappa_m}} \sum_{i=1}^{n_{\kappa_m}} \Phi_{n_{\kappa_m}}(x_i) = G(\theta). \quad (7)$$

При $m \rightarrow \infty$ будет $\kappa_m \rightarrow \infty$ и, следовательно, $n_{\kappa_m} \rightarrow \infty$. Тогда очевидно, что с вероятностью 1

$$W\left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{n_{\kappa_m}} \sum_{i=1}^{n_{\kappa_m}} \Phi_{n_{\kappa_m}}(x_i)\right) = W(G(\theta)) = \theta. \quad (8)$$

Поскольку из каждой подпоследовательности (5) всегда можно выбрать другую подпоследовательность (6) такую, что для всех (6) с вероятностью 1 будет удовлетворять соотношение (8), то вместо n_{k_m} можем принимать N .

Тогда с вероятностью 1 удовлетворяется соотношение

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi_N(x_i) \right) = 0. \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что (3) есть состоятельная оценка параметра θ .

Теорема 5. Пусть существует „к“ функций $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, обладающих следующими свойствами:

$$1) F_i(\theta) = \int_S \varphi_i(x) dF(x, \theta), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

непрерывных по θ на конечном интервале $[\alpha, \beta]$;

2) из соотношений

$$F_i(\theta_1) = F_i(\theta_2), \quad i = 1, 2, \dots, k$$

вытекает, что $\theta_1 = \theta_2$. Тогда статистика вида

$$\Phi \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_1(x_i), \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_2(x_i), \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i) \right) = \theta_n^*(Z_n)$$

будет состоятельной оценкой параметра θ .

Доказательство очевидно.

§ 3. Предположим, что функция $f(x, \theta) \in \{f(x, \theta)\}$ при каждом фиксированном значении θ , принадлежащем некоторому невырожденному интервалу θ , является плотностью вероятности. $\{f(x, \theta)\}$ является семейством непрерывных распределений. x и θ принимают значения, соответственно, из множеств S и $[\alpha, \beta]$ так, что плотность распределения $f(x, \theta)$ определена на двумерном пространстве $S \times [\alpha, \beta]$.

Теорема 6. Если: 1) плотность распределения $f(x, \theta)$ для почти всех x , по θ в интервале $[\alpha, \beta]$ непрерывна:

$$2) \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \text{ существует и непрерывна при каждом } \theta \in (\alpha, \beta) \text{ для}$$

почти всех x , и $\left| \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right| \leq L$, где L — некоторое положительное постоянное;

$$3) \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \text{ не обращается тождественно в нуль ни в какой}$$

части интервала (α, β) . Тогда существует функция $\Phi(x)$ такая, что для каждого $\theta = \theta_0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что

$$\int_S \Phi(x) f(x, \theta) dx = I(\theta)$$

будет монотонной функцией по θ в интервале $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$.

Доказательство. Рассмотрим функции вида

$$\int_S \Phi(x) \cdot f(x, \theta) dx = I(\theta).$$

Учитывая условия теорем, можем написать следующее:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_S \Phi(x) f(x, \theta) dx = \int_S \Phi(x) \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx.$$

Теперь возьмем любое значение $\theta = \theta_0$ из интервала (α, β) . Очевидно, что $\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \neq 0$. Тогда можно найти такое число $\delta > 0$, что в

окрестности точки θ_0 , т. е. в интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ функция $\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$ сохраняет тот же знак, какой она имеет в данной точке $\theta = \theta_0$ и

$$\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \neq 0$$

в интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$, следовательно, для любого $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ получается, что

$$\int_S \Phi(x) \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} dx \neq 0.$$

Теперь выберем функцию $\Phi(x)$ надлежащим образом. В данной задаче для доказательства существования функции $\Phi(x)$ такой, что $I(\theta)$ монотонна, поступим следующим образом. Положим

$$\Phi(x) = \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \quad \text{или} \quad \Phi(x) = - \frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$$

для любого $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$. Тогда получается, что

$$\int_S \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx > 0 \quad \text{или} \quad - \int_S \left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right) < 0$$

в интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$. При таком выборе функции $\Phi(x)$ в интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ функция $I(\theta)$ монотонна. Теорема доказана.

Теперь допустим, что в теореме 3 функция распределения $F(x, \theta)$ принадлежит к непрерывному семейству распределений.

Соединяя вышеизложенные теоремы 3 и 6 в одну, можно утверждать следующее.

Теорема 7. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) при каждом $\theta \in [\alpha, \beta]$ для почти всех x $f(x, \theta)$ непрерывна и при каждом $\theta \in (\alpha, \beta)$ существует непрерывная, ограниченная производная $\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$;

2) везде на оси x , ни в каком промежутке, составляющая часть (α, β) $\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$ не обращается тождественно в нуль.

Тогда существует функция $\Phi(x)$ такая, что статистика вида

$$\psi \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi(x_i) \right) = \theta_n^*(Z_n)$$

будет состоятельной оценкой параметра θ .

В заключение выражаю благодарность доктору физико-математических наук проф. А. В. Скороходу за помощь, оказанную при написании настоящей статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крамер Г. Матем. методы статистик. М. ИЛ. 1948.
2. Дуб Дж. Вероятностные процессы. ИЛ, 1956.
3. Ле-Кам Л. Математика. Периодический сборник переводов иностранных статей. 1960, 4:2, 69—121.
4. Ибрагимов И. Ш. Тр. VII Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистики. Тбилиси. 1964.

Параметр гѳмѳтлѳринин ашкар ифадѳлѳри ѳаггында бѳ'зи теоремлѳр

ХУЛАСѳ

Тѳсадѳфи кѳмиѳѳѳтдѳн асылы функсиѳанын тапылмасы мѳмкѳн олдуѳу ѳалда, тѳсадѳфи кѳмиѳѳѳтлѳрин пѳѳлама функсиѳаларынын параметрлѳринин гѳмѳтлѳри тапылыр.

Бурада, тѳсадѳфи кѳмиѳѳѳтдѳн асылы функсиѳанын риѳази кѳзлѳмѳси параметрдѳн асылы олмалыдыр. Бу ѳалда параметрлѳр ѳчѳн тапылан гѳмѳтлѳр ашкар дѳѳанѳтли олур.

Мѳгалѳдѳ јухарыдакы хассѳѳѳ малик олан функсиѳаларын варлыгы тѳдгиг олунур.

И. Л. АБРОСИМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ЖДУЩЕГО МУЛЬТИВИБРАТОРА НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

Ждущий мультѳвѳбрѳтор широко применяется в импульсных и цифровых устройствах и может быть с успехом реализован на одном туннельном диоде. Такая компактная схема используется в качестве формирователя и расширителя импульсов, порогового устройства, основного элемента логических схем и схем задержки. Наиболее распространена одностабильная схема, работающая в режиме переключения тока [1,2].

Видоизмененный ждущий мультѳвѳбрѳтор, работающий фактически в режиме переключения напряжения с меньшим отбором тока от запускающей цепи [3], приведен на рис. 1, а. В данном случае одностабильность достигается изменением результирующей характеристики активного элемента при включении параллельно ему сопротивления R .

Туннельный диод T в начальном положении находится в состоянии А (рис. 1, б), которое определяется нагрузочной прямой (I):

$$i = \frac{U_0 - u}{R_n}$$

Запускающий импульс, проходя через D , сопротивление и туннельный диод T , приводит нагрузочную линию к виду II, где она при $0 < u < U_{вх}$ ($U_{вх} < U_0$) описывается следующим выражением:

$$i = \frac{U_0 - u}{R_0} = \frac{U_{вх}R_n + U_0(R_i + R_1)}{R_n + R_i + R_1} - u, \quad (1)$$

R_i —прямое сопротивление диода D ;

$U_{вх}$ —амплитуда входного импульса; в (1) значение $U_{вх}$ может быть произвольно по отношению к U_0 .

Схема при этом опрокидывается в состояние Б и ток i_1 через индуктивность L и сопротивление R начинает экспоненциально возрастать. Результирующая характеристика, полученная сложением токов i_1 и i_2 цепочки RL (III) и туннельного диода (IV), изменяет свою форму и положение, приближаясь к виду V. При напряжении U'_2 , когда минимальное текущее значение тока результирующей характеристики $i_3 = i_2 + i_1$ станет равным току i нагрузочной прямой (I), начнется обратный переброс схемы в состояние А.

Значения напряжений и токов в состояниях А и Б определяются по формулам, которые были получены путем решения уравнения нагрузочной прямой I совместно с аппроксимированной характеристикой туннельного диода:

$$U_A = \frac{U_1 U_0}{U_1 + 2 J_1 R_n};$$

$$U_B = \frac{U_1 U_0 + J_1 R_n (a U_3 - U_1)}{U_1 + a J_1 R_n};$$

$$J_A = \frac{2 U_0 J_1}{U_1 + 2 J_1 R_n};$$

$$J_B = J_1 - a \frac{J_1}{U_1} \left[U_3 - \frac{U_1 U_0 + J_1 R_n (a U_3 - U_1)}{U_1 + a J_1 R_n} \right]$$

Для диодов из германия $a = 1$, из арсенида галлия $a = 0,35$.

Вершина выходного импульса мультивибратора $U_{\text{вых}} = U_B - U_A$ имеет спад, что объясняется изменением напряжения на туннельном диоде во время формирования вершины импульса. Значение спада вершины в процентах к амплитуде следующее:

$$n\% = \frac{U_B - U'_2}{U_B - U_A} 100.$$

Предпочтительным с точки зрения минимального спада вершины является режим, при котором $U'_2 \approx U_2$. Это может быть достигнуто при выборе R_n по следующему неравенству, которое вытекает из описания работы схемы в момент переброса:

$$\frac{U_2}{R_n} + J_2 > \frac{U_0 - U_2}{R_n}; \quad (2)$$

R_n — значение условного шунтирующего сопротивления, при котором $\Delta U_2\% = 5 \div 10$ (выбирается, исходя из зависимости $\Delta U_2\% = \frac{U_2 - U'_2}{U_2} 100 = f(R_n)$ на рис. 2).

С другой стороны, режим схемы должен обеспечивать необходимую чувствительность по входу. Диод опрокидывается из первоначального состояния, если при напряжении U_1 ток нагрузочной линии (I) будет больше пикового тока суммарной характеристики, то есть

$$J_1 + \frac{U_1}{R} < \frac{\frac{U_{\text{вх}} R_n + U_0 (R_i + R_1)}{R_n + R_i + R_1} - U_1}{\frac{R_n (R_i + R_1)}{R_n + R_i + R_1}} \quad (3)$$

Из (2) и (3), учитывая, что $R_{\text{нх}} = R_i + R_1$, определяем:

$$\frac{U_0 - U_1}{J_1 + \frac{U_1}{R} - \frac{U_{\text{вх}} - U_1}{R_{\text{нх}}}} > R_n > \frac{U_0 - U_2}{\frac{U_2}{R_n} + J_2} \quad (4)$$

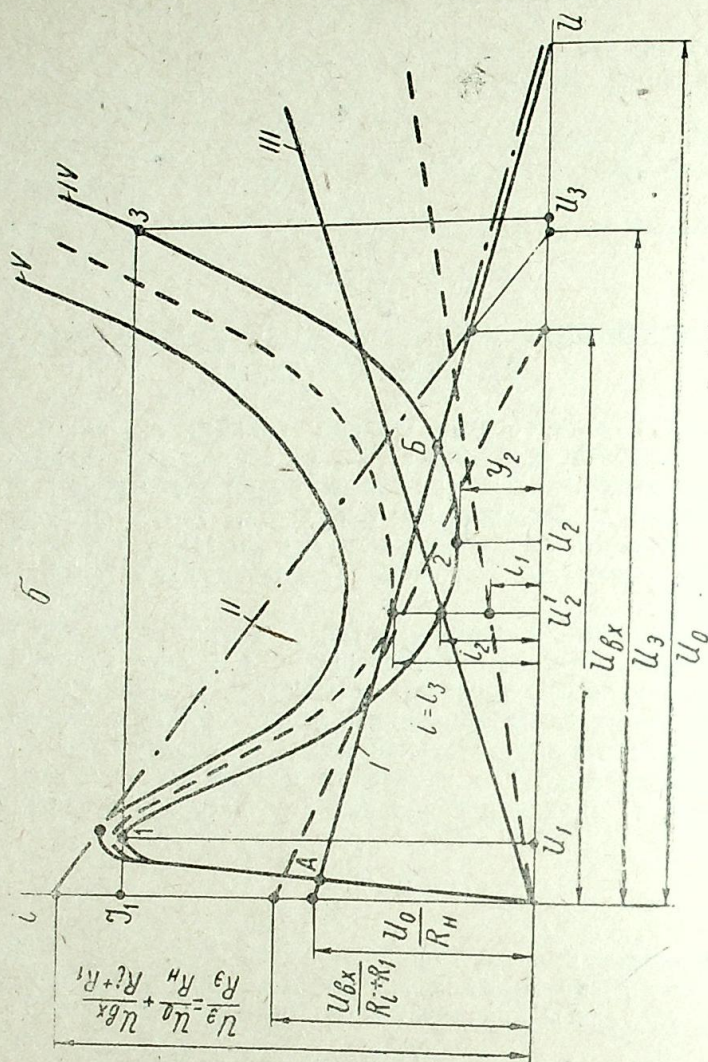


Рис. 1

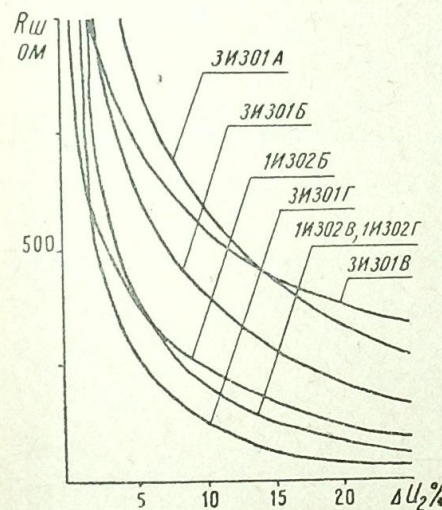
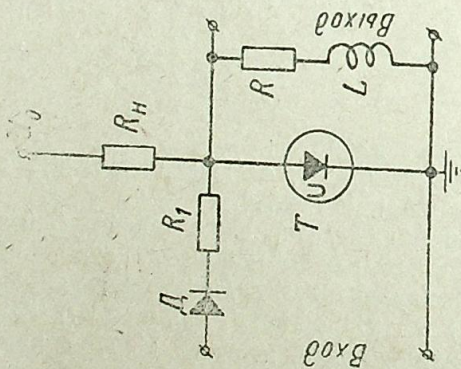


Рис. 2

Значение R_{Π} выбирается по (4) минимально возможным, что позволяет увеличить чувствительность схемы при большом входном сопротивлении $R_{\text{вх}}$. Устойчивость в начальном положении будет соблюдена, когда $J_A < J_1$.

Определим длительность вершины формируемого импульса t_0 , которая зависит от постоянной времени $\frac{L}{R}$, параметров и режима туннельного диода.

Исходя из описания работы схемы, запишем для момента переключения при окончании формирования следующее равенство:

$$i = i_2 + i_1. \quad (5)$$

При $U_2 \approx U_2$ имеем:

$$i = \frac{U_0 - U_2}{R_{\Pi}}; \quad i_2 = J_2 \quad (6)$$

Изменение тока в индуктивности L во времени без учета начального тока, определяемого напряжением U_A , запишется так:

$$i_1 = \frac{U_B}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (7)$$

Оценим влияние начальных условий на форму кривой изменения тока. В этом случае решение переходного процесса [4] дает следующее выражение для тока в индуктивности, равного сумме токов свободного и принужденного режимов:

$$i_1 = i_{\text{пр.}} + i_{\text{св.}} = \frac{U_B}{R} + A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

В начальный момент времени, когда свободный ток равен нулю, имеем $i_{\text{пр.0}} = \frac{U_B}{R} + A$. С другой стороны, $i_{\text{пр.0}} = \frac{U_A}{R}$. Отсюда $A = \frac{U_A - U_B}{R}$. Таким образом, изменение тока в индуктивности с учетом начальных условий будет равно

$$i_1 = \frac{U_B}{R} \left(1 - \frac{U_B - U_A}{U_B} e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Зная, что $U_A \ll U_B$, получаем $\frac{U_B - U_A}{U_B} \approx 1$. Следовательно, можно пренебречь начальными условиями и рассматривать изменение тока в цепочке RL , данное в (7).

Однако в этом выражении напряжение U_B принято постоянным условием. На самом деле напряжение на цепочке RL меняется согласно следующей зависимости, принятой линейной, при $0 \leq t \leq t_0$:

$$u(t) = U_B - (U_B - U_2) \frac{t}{t_0}.$$

Ввиду такого изменения напряжения меняется значение принужденного тока $i_{\text{пр.}} = \frac{U_B}{R}$. Время переходного процесса будет также изменяться, уменьшаясь при уменьшении $i_{\text{пр.}}$. В связи с этим уменьшается длительность вершины формируемого импульса.

Определим зависимость (7) для этого случая при $U_B = u(t)$, воспользовавшись формулой свертывания [5]:

$$i(t) = u(0) A(t) + \int_0^t A(t-\tau) u'(\tau) d\tau.$$

В данной формуле:

$$\begin{aligned} u(0) &= U_B; \\ A(t) &= \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right); \\ A(t-\tau) &= \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} \right); \\ u'(\tau) &= -\frac{U_B - U_2}{t_0}. \end{aligned}$$

Решение для момента переключения ($t = t_0$) дает следующее:

$$i_1 = \frac{U_B}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_0} \right) - a; \quad (8)$$

$$a = \frac{U_B - U_2}{R} \left[1 - \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{t_0} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_0} \right) \right].$$

Подставив (6) и (8) в (5), после соответствующих преобразований окончательно получим:

$$t_0 = \frac{L}{R} \ln \frac{1}{1 - \frac{R}{U_B} \left(a + \frac{U_0 - U_2}{R_{\Pi}} - J_2 \right)}. \quad (9)$$

По формуле (9) находится, вначале приближенное значение t_0 при $a = 0$, когда $U_B = U_2$ и не учитывается изменение напряжения на

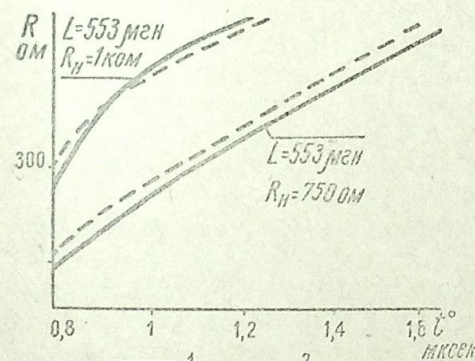


Рис. 3

RL во время формирования вершины импульса. Затем, определив поправочный член при полученном t_0 , по этой же формуле вычисляется уточненное значение длительности вершины импульса мультивибратора. Значение R необходимо выбрать меньше принятой ранее величины R_{Π} .

На рис. 3 приведены результаты расчетов по формуле (9) для схемы с диодом 3И301А при $U_0 = 1,2$ в. Отличие этих данных (1) от эксперимента (2) лежит в пределах погрешности измерительных приборов.

При высоком быстродействии туннельных диодов, время переключения которых составляет десятки и единицы наносекунд, длительность фронтов формируемого импульса получается весьма малой. Воспользовавшись данными, изложенными в [6], можно определить длительность фронта положительного (t_{Φ}^+) и отрицательного (t_{Φ}^-) перепада напряжения и полную длительность импульса $t_u = t_0 + t_{\Phi}^+ + t_{\Phi}^-$.

В заключение отметим, что нагрузка формирователя $R_{\text{вых}}$ не должна сильно искажать характеристики туннельного диода. Выбор допустимой величины нагрузки может быть произведен с помощью кривых на рис. 2, когда $R_{\Pi} = R_{\text{вых}}$. При этом принимаем $\Delta U_2 \% < 5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hausman G. Anwendungen der Tunneldiode „Elektronische Rundschau“, 1962, I, № 1.
2. Bergman R., Cooperman M., Ur H. High-Speed logic Circuits Using Tunnel Diodes. „RCA Review“, 1962, XXIII, № 2.
3. Изох В. В., Багринцев В. П. „Приборы и техника эксперимента“, 1963, № 5.
4. Круг А. П. и др. Основы электротехники. Госэнергоиздат, 1952.
5. Канторвич М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехиздат, 1955.
6. Кононов Б. Н., Сидоров А. С. Туннельные диоды и их применение в триггерах. Сб. „Полупроводниковые приборы и их применение“, вып. 7; „Советское радио“, 1961.

И. Л. Абросимов

Тунелли диод үзәриндә җығылмыш бир дајанаглы
вәзијјәти олан мултивибраторун тәдгиги

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә тунелли диод үзәриндә җығылмыш бир дајанаглы вәзијјәти олан мултивибраторун иш режими вә кечиричи просесләринин тәдгиги әсасында онун схеминин элементләринин сечилмәси үчүн һесаблама формуласы верилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-техника вә ријазийәт елмләри серијасы, 1965, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 5

И. А. МАМЕДОВ

О РЕЛАКСАЦИОННОМ МЕХАНИЗМЕ ПОГЛОЩЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ВОДЕ

Известно два основных релаксационных процесса: один, связанный с распределением энергии между внешними и внутренними степенями свободы молекул, — релаксация Кнезеровского типа и второй, связанный с перегруппировкой молекул при распространении ультразвуковых волн, — так называемая структурная релаксация.

Теория структурной релаксации была рассмотрена в работах Я. И. Френкеля [1], А. И. Ансельма [2], Гирера и Вирца [3], Л. Холла [4] Б. Гоша [5].

Впервые Я. И. Френкель [1] указал, что избыточный коэффициент поглощения ультразвука в квазикристаллических жидкостях частично связан с релаксационным эффектом структуры.

Для воды Холлом [4] был произведен расчет релаксационного механизма, обусловленного перестройкой квазикристаллической структуры из рыхлой в более упакованную модификацию.

Идея Холла заключается в следующем. Во время распространения ультразвука молекулы жидкости сближаются, а затем перестраиваются в более плотную упаковку. Процесс молекулярного сжатия, похожий на тот, что встречается в кристаллах, происходит относительно быстро и может рассматриваться как мгновенный и в фазе с приложенным давлением.

Перестройка же в более плотную упаковку вызывает разрыв межмолекулярных связей или переход молекул через энергетические барьеры, которые поддерживают равновесную конфигурацию, она протекает с конечной скоростью, сравнимой с периодом колебаний ультразвуковых волн, и заметно отстает от приложенного давления, имеет релаксационный характер и ведет к поглощению ультразвуковой энергии.

Холл принял следующую модель структуры воды. „Нормальным состоянием“ молекул является их тетраэдрическое расположение, когда каждая молекула окружена четырьмя „соседями“. Это довольно рыхлая структура льда, где незаметен дальний порядок, но существует значительный ближний порядок, который поддерживается водородными связями. В „возбужденном“ состоянии молекулы воды расположены так, что квазикристаллическая структура близка к наиплотнейшей упаковке. Холл считает, что в этом состоянии каждая молекула имеет от двух до трех водородных связей в интервале от 0 до 100°С. В модели двух состояний для воды состояние 1 может быть отожд-

дествлено с состоянием льдоподобным, а состояние 2—с состоянием, которое более подходит на простую плотную упаковку у жидкости. Пренебрегая нагреванием при адиабатическом сжатии, Холл получил формулу для релаксационной сжимаемости в следующем виде:

$$\beta_0 - \beta_\infty = \left\{ \frac{V \left(\frac{v}{V} \right)^2}{2RT \left[1 + \text{ch} \frac{\Delta E}{RT} \right]} \right\} \frac{1}{1 + \omega\tau} \quad (1)$$

Здесь ΔE —энергия активации, необходимая для перескока молекулы из состояния 1 во 2; v —разница в молярном объеме состояний 1 и 2; V —молярный объем; τ —время реакции.

При условии $\omega\tau \ll 1$ выражение принимает вид:

$$\beta_0 - \beta_\infty = \frac{V \left(\frac{v}{V} \right)^2}{2RT \left[1 + \text{ch} \frac{\Delta E}{RT} \right]} \quad (2)$$

Молярный объем возбужденного состояния Холл вычисляет как для плотно упакованных шариков с диаметром, равным наименьшему расстоянию между молекулами ($10,4 \text{ см}^3$). Молярный объем состояния 1, лежащий между водой и льдом, заключен между $18,0$ и $19,6 \text{ см}^3$.

Это дает относительное изменение объема $\frac{v}{V}$ на величину $0,42$ и $0,51$. Далее Холл вычисляет β_∞ . Для этого он принял два пробных значения: $\beta_\infty = 15 \cdot 10^{-12} \frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$ и $\beta_\infty = 18 \cdot 10^{-12} \frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$. Это, вероятно, разумнее, так как $\beta_\infty = 12 \div 24 \cdot 10^{-12} \frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$.

Подставляя значения $\beta_0 - \beta_\infty$ и $\frac{v}{V}$ в формулу, Холл определил ΔE , равное $0,5 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$ на $1/2$ водородной связи.

На основании теории абсолютных скоростей реакции для времени релаксации объемной вязкости Холл получил формулу:

$$\tau = \frac{V \eta_{cg}}{RT \left[1 + \exp \frac{\Delta E}{RT} \right]} \quad (3)$$

где η_{cg} —сдвиговая вязкость.

При вычислении коэффициента поглощения ультразвука Холл использовал следующее выражение:

$$\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}} = 2 \pi^2 \rho C \beta_1 \tau \quad (4)$$

где ρ и C —соответственно, плотность жидкости и скорость ультразвука; α —коэффициент поглощения ультразвука; f —частота ультразвуковых колебаний; β_1 —релаксационная сжимаемость.

Из (2), (3), (4) для коэффициента поглощения ультразвука можно написать:

$$\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}} = \frac{2\pi^2 M}{RT} \left(1 - \frac{\beta_\infty}{\beta_0} \right) \frac{\eta_{cg}}{C \rho \left[1 + \exp \left(\frac{\Delta E}{RT} \right) \right]} \quad (5)$$

где M —молекулярный вес.

Используя экспериментальные данные скорости, коэффициента поглощения ультразвука и сдвиговой вязкости на автоматической ультразвуковой установке [6], нами проверена формула Холла (5) как функция температуры и давления. При вычислении $\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}}$ нами

была выбрана мгновенная сжимаемость, равная $\beta_\infty = 15 \cdot 10^{-12} \frac{\text{см}^2}{\text{дин}}$,

использовано численное значение, ΔE , равное $0,64 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$ на полу-

связь (она в $5,57$ раз меньше, чем энергия активации E , вычисленная по формуле Я. И. Френкеля: $\eta_{cg} = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$), вычисленное по экспери-

ментальным значениям скорости, коэффициента поглощения ультразвука и сдвиговой вязкости при 25°C и $P = 1 \text{ кг/см}^2$, и вместо β_0 взято $\frac{1}{C^2 \rho}$.

В таблице представлены избыточный коэффициент поглощения ультразвука $\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{изб.}}$ и теоретически вычисленный коэффициент поглощения $\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}}$. Как следует из таблиц, теория Холла хорошо

$P, \text{ кг/см}^2$	$T^\circ\text{K}$	$\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{изб.}}$ $10^{-17} \text{ см}^{-1} \text{ сек}^2$	$\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}}$ $10^{-17} \text{ см}^{-1} \text{ сек}^2$	$\Delta \left(\frac{\alpha}{f^2} \right), \%$
1	298	14,8	14,4	-3,0
200		14,2	13,6	-3,0
400		13,4	13,2	-1,5
600		12,3	12,7	3,2
800		11,3	11,9	5,2
1	308	11,6	11,8	0,0
200		10,6	11,0	4,0
400		9,5	10,4	9,6
600		8,9	6	13,6
800		8,0	9,6	20,0
1	323	8,1	8,2	1,2
200		7,2	8,0	11,1
400		6,1	7,6	24,5
600		4,9	7,4	51,0
800		4,0	7,0	75,0
1	338	7,1	6,4	-11,0
200		5,9	6,2	5,0
400		4,6	5,9	28,1
600		3,7	5,8	56,6
800		2,7	5,7	111,0

описывает температурный ход коэффициента поглощения ультразвука (максимальная относительная ошибка составляет 11%). При низких температурах коэффициент поглощения ультразвука хорошо описывается теорией Холла как функция давления. При высоких давлениях и температурах отклонение $\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{теор.}}$ от $\left(\frac{\alpha}{f^2} \right)_{\text{изб.}}$ составляет 110% . Как

видно, полученные результаты $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{теор.}}$ с $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{изб.}}$ как функции давления нельзя считать удовлетворительными. В общем схема расчета Холла правильно описывает механизм релаксации в воде. Однако следует сказать, что вычисление времени релаксации для перестройки квазикристаллической структуры с помощью данных о сдвиговой вязкости дает правильный температурный ход. Совпадение в широком интервале температур не является доводом в пользу количественной применимости теории Холла, так как предэкспоненциальный множитель в формуле для вязкости выводится из очень грубых модельных соображений.

Коэффициент поглощения ультразвука от температуры определяется в основном экспоненциальным множителем в формуле для вязкости. Как известно, коэффициент поглощения $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{экс}}$, полученный из эксперимента, изменяется с температурой по тому же закону, что и коэффициент поглощения $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{кл}}$, полученный из классической теории [7], то есть приблизительно он пропорционален сдвиговой вязкости. Если для одной точки величина $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{теор.}}$ совпадает с величиной $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)_{\text{изб.}}$, то автоматически будет совпадать при всех температурах.

Теория Холла не может объяснить изменение поглощения от давления. Это, естественно, так как при вычислении времени релаксации Холлом не учтена зависимость вязкости от давления.

Из вышеизложенного следует, что вычисленное теоретически значение коэффициента поглощения по теории Холла для воды достаточно хорошо согласуется с избытком поглощения, наблюдаемым экспериментально. Результаты проведенного анализа находятся в согласии с выводами работы [8], в которой исследовалась температурная зависимость $\left(\frac{\alpha}{f^2}\right)$ для воды в плане теории Холла. Итак, квазикристаллическая модель жидкости Холла приводит к заключению, что основная часть избыточного поглощения ультразвука в воде связана с механизмом структурной релаксации.

Наблюдаемое расхождение эксперимента и теории, вероятнее всего, можно объяснить неточностью теории Холла, связанной в основном с приближенностью теории вязкости как исходного положения этой теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкости. АН СССР, 1945.
2. Ансельм А. И. ЖЭТФ, 15, 751, 1945.
3. Gierer A., Wirtz K. Zs. Naturf. 5a, 270, 1950.
4. Hall L. Phys. rev., 73, 775, 1948.
5. Ghosh B. B. Ind. J. phys., 24, 1, 1950.
6. Мамедов И. А. Ж. ЗТП, 8, Баку, 1964.
7. Stokes. Trans. Camb. phil. Soc. 8, 237, 1845.
8. K  chhoff. Pogg. ann, 134, 177, 1863.
9. Beyer and Smith. JASA, 17, 474, 1946.

И. А. Мамедов

Суда ултрас  с далгаларынын удулмасынын релаксација механизми haггында

ХУЛАС  

Магал  д   ултрас  с далгаларынын удулмасы механизминд  н б  һс ед  н Холл-структур релаксација н  з  ријјесинд  н данышылыр.

Бу вахта г  д  р ултрас  с далгаларынын јажылма с  р  тинин, удулмасынын в   динамик   зл  л  ј  н  н ејни бир ш  раитд     лч  лм  си м  мк  н олмадыгындан Холл-структур релаксација н  з  ријјеси кифај  т г  д  р д  гиг јохланылмамышдыр. Бу ч  тинлик м   ллиф т  р  финд  н арадан к  т  р  л  р  к, Холл н  з  ријјесинд  н алынан ултрас  с удулма   мсалынын т  зјигд  н в   температурдан асылылыгы јохланылмамышдыр.

Ист  р т  чр  б  д  н в   ист  рс   д   Холл н  з  ријјесинд  н алынан ултрас  с далгаларынын удулма   мсалынын 25—65  С температур в   1—800 атм т  зјиг интервалындакы гижм  тл  ри ч  дв  лд   верилмишдир.

М  'лум олмушдур ки, Холлун квази-кристал модели   сасында јарадылан структур релаксација н  з  ријјеси ултрас  с далгаларынын суда удулма   мсалыны к  јфијј  т  е характериз  е едир. Ултрас  с далгаларынын удулма   мсалынын температур асылылыгы, т  зјигд  н асылылыгына (100%) нисб  т  н, Холл н  з  ријјеси ил   даһа д  зк  н верилир (10%). Бу ондан ир  ли к  лир ки, Холл н  з  ријјесинин чыхарылышында динамик   зл  л  ј  н  н т  зјигд  н асылылыгы н  з  р   алынмамышдыр.

Г. М. АЛИЕВ, С. Г. АЛИЕВА

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО И ЖИДКОГО СЕЛЕНА С ПРИМЕСЬЮ ТАЛЛИЯ

Исследование физических свойств селена марок В-4 (99,9999%) и В-5 (99,99999%) до и после обескислороживания указывает на то, что многие аномальные изменения явлений переноса обусловлены наличием кислорода в селене.

Обескислороживание селена или введение в селен ряда примесей, компенсирующих кислород, переводят Se в *n*-тип, уменьшают электропроводность (σ), термоэдс (α), приводят к исчезновению скачка σ и α при плавлении кристаллического селена [1—2].

В данной работе приводятся результаты исследований влияния примеси таллия (Tl), эффективно компенсирующей акцепторное действие кислорода, на σ кристаллического и жидкого селена марок В-5.

Для исследования были изготовлены образцы, содержащие: 0,01; 0,025; 0,05; 0,1; 0,25; 0,5; 1; 2 вес.% Tl.

Методика измерения σ в зависимости от примесей и от температуры описана в работе [1]. Из чистого селена и селена с указанными примесями Tl при одинаковых условиях было изготовлено по два образца. σ и α измерялись компенсационным методом, причем σ измерялась при двух направлениях тока. Также проводились измерения сопротивления мостом типа T—W—Д, который позволяет измерять от 1 до 10^9 ом.

В литературе имеются указания на то, что расплавленный селен с примесью Tl кристаллизуется уже в процессе охлаждения [3,4]. Это наблюдалось и в наших опытах.

На рис. 1 показана зависимость σ от концентрации Tl. Видно, что введение 0,01% Tl уменьшает σ Se почти на 5 порядков. Дальнейшее увеличение содержания Tl приводит к повышению σ . Из-за большого сопротивления образцов α не была обнаружена.

В работах [5—10] также указывается на значительное уменьшение σ кристаллического селена с примесью Tl.

Селен с примесью Tl ведет себя как обескислороженный. Действительно, с удалением кислорода в селене (В-5) его σ уменьшается

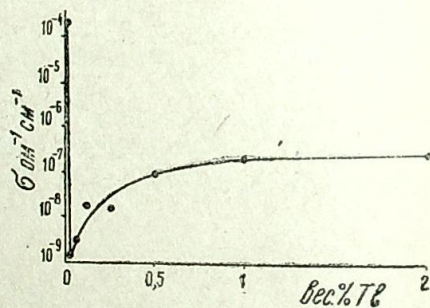


Рис. 1. Зависимость электропроводности селена от примеси таллия.

от $6,7 \cdot 10^{-4}$ до $4,3 \cdot 10^{-7}$ ($\text{ом} \cdot \text{см}$) $^{-1}$, а селене, содержащем 0,025 Tl, σ имеет $1,93 \cdot 10^{-7}$ ($\text{ом} \cdot \text{см}$) $^{-1}$.

Это явление можно объяснить предполагая, что атомы Tl в селене создают дополнительные донорные уровни, а это приводит к компенсации действия акцепторных уровней кислорода и галоидов. При дальнейшем увеличении концентрации атомов Tl число донорных уровней подтверждается изучением двойных примесей таллия и галоидов.

В интервале от $293 \div 723^\circ \text{K}$ нами была измерена температурная зависимость σ чистого селена и селена с примесью Tl. На основе полученных результатов построена зависимость $\lg \sigma$ от $1/T$, изображенная на рис. 2 (а и б).

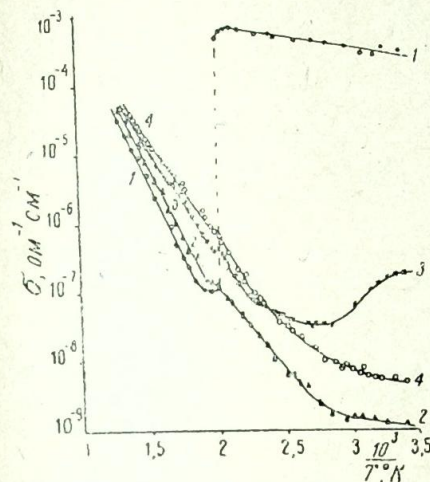


Рис. 2а. Температурная зависимость электропроводности селена с примесью таллия: 1—Se; 2—Se+0,01% Tl; 3—Se+0,025% Tl; 4—Se+0,05% Tl.

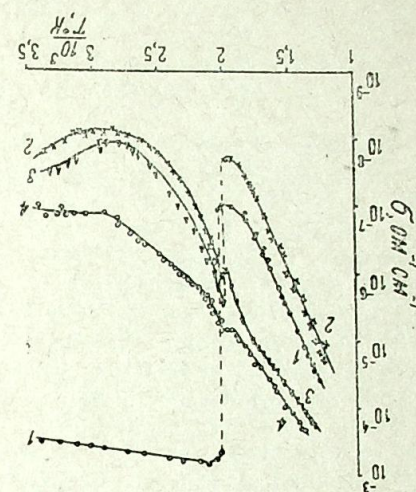


Рис. 2б. Температурная зависимость электропроводности селена с примесью таллия: 1—Se; 2—Se+0,1% Tl; 3—Se+0,25% Tl; 4—Se+0,5% Tl.

Как видно из графиков, температурный ход σ всех образцов резко отличается от температурного коэффициента σ чистого селена. Температурный ход σ чистого селена в интервале $273 \div 493^\circ \text{K}$ имеет полупроводниковый ход, при плавлении селена σ скачкообразно уменьшается в 2000 раз. Это уменьшение σ , по-видимому, связано с наличием примесей в селене, которые после плавления становятся неактивными [15,16]. При введении примеси Tl в селен σ в твердом состоянии резко уменьшается и в зависимости от содержания Tl температурный ход различных образцов резко отличается друг от друга. Для образцов, имеющих 0,01 и 0,05% (кривые 2 и 4 рис. 2а) Tl, σ в твердом состоянии во всем интервале температур имеет полупроводниковый ход. При плавлении почти исчезает скачкообразное изменение σ и в жидком состоянии полупроводниковый ход усиливается.

В температурном ходе σ образцов с примесью Tl 0,1% и более наблюдаются минимумы. Такой минимум σ в зависимости от температуры для чистого селена был наблюден в [18] и объясняется уменьшением кислорода в селене с повышением температуры. По этим кривым также видно, что внесение 0,1 и 0,25% Tl в селен смещает точку плавления селена в сторону высоких температур.

Энергия активации, вычисленная из наклона кривых 1—4 (рис. 2, а и б), твердой и жидкой фазах указана в таблице. Из этих данных следует, что с увеличением содержания примеси Тl в селене энергия активации в твердом состоянии сначала растет, а затем уменьшается, а энергия активации чистого селена в твердом состоянии составляет 0,15 эв, что согласуется с данными [17].

Среднее значение энергии активации в селене с содержанием 0,1% Тl в твердом состоянии 2,53 эв. Это значение совпадает с данными [18] для чистого селена.

% Тl	ΔE —эв (в твердом состоянии)	ΔE —эв (в жидком состоянии)	% Тl	ΔE —эв (твердом состоянии)	ΔE —эв (в жидком состоянии)
0	0,15	2,05	0,10	2,53	1,83
0,01	1,01	1,73	0,25	2,40	1,10
0,025	1,46	1,43	0,50	0,65	1,15
0,05	1,49	1,25	—	—	—

Следует отметить, что в работах [19—21] энергия активации составляет около 2,5 эв. Это соответствует энергии связи между двумя атомами селена Se—Se (57,6 ккал/мол, т. е. 2,5 эв, 23 ккал/мол = 1 эв [22]).

Энергия активации чистого селена в жидком состоянии составляет 2,05 эв, что согласуется со средним значением [23] и оптическими данными [25], но меньше данных [24].

Из таблицы также видно, что с увеличением концентрации Тl энергия активации в жидком селене уменьшается. Исключение составляет образец, имеющий 0,1% Тl, у которого энергия активации равна 1,83 эв и совпадает с данными работы [26], в которой изучался фотовольтаический эффект в селене.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность профессору Г. Б. Абдуллаеву за постоянное внимание и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Алиев Г. М. и др. ФТТ, 6, 1018, 1964.
2. Мехтиева С. И., Алиев Г. М., Абдинов Д. Ш. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, № 4, 1964.
3. Хениш Г. Сб. „Полупроводниковые выпрямители“, ИЛ, 1951.
4. Креос Г. Сб. „Полупроводниковые материалы“, ИЛ, 1954.
5. Алиев М. И., Гусейнова Р. Ф., Ахундова С. А. „Уч. зап. АГУ им. С. М. Кирова“, № 1, 1960.
6. Алиев М. И., Ахундова С. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, № 3, 1960.
7. Nijland L. M. Philips. Res. Rep., 9, 259, 1954.
8. Lehouec K. L. Zs. f. Phys., 124, 278, 1943; 125, 451, 1949.
9. Hoffmann A. Zs. f. Phys., 128, 414, 1950.
10. Henkels H. W., Maczuk J. J. Appl. phys., 25, 1, 1954.
11. Hempel H. P., Lauckner H. и Thumann H. Zs. Naturf., 16a, 1402, 1951.
12. Schweickert H. Zs. f. Phys., 128, 47—55, 1950.
13. Comboy L., Gyulai J., Kispeter J., Lang J. Acta Phys. et chem. szeged., 8, № 1—2, 30—45, 1962.
14. Cobrecht H., von Tausend A. und Siemsen K. Zs. Naturf., 18a, 745, 753, 1963.
15. Коломиец В. Т., Назарова Т. Ф. ФТТ, 2, 174, 1960.
16. Губанов А. И. Квантовая электронная теория аморфных проводников. Изд. АН СССР, М.—Л., 1963.
17. Henkels H. W., Maczuk J. J. appl. phys., 26, 725, 1950.

18. Eckart Ann. phys., 14, 233, 1954.
19. Gilileo M. A. J. Chem. Phys., 19, 1291, 1951.
20. Gebbil H. A. u. Killy D. G. Proc. Phys. soc., B. 65, 553, 1952.
21. Dowd J. J. Proc. Phys. soc., B. 64, 783, 1952.
22. Pauling L. The Nature of the chemical Bond Itaka N. J. Gornal University Press., 53, 1948.
23. Borelius G., Pilstrand F., Anderson J., Gullberg K. Ark. Mat. Astr. Phys., 30A, 14, 1944.
24. Henkels H. W., Maczuk J. J. Appl. phys., 24, 1056, 1953.
25. Dowd J. J. Proc. Phys. soc., B. 64, 783, 1951.
26. Choys W. J., Patrick L. Phys. rev., 108, 25, 1957.

Г. М. Алиев, С. И. Алиева

Таллиум ашгарлы кристал вә маје селенин
электрик кечирмәси

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә јүксәк тәмизликли селенә мүхтәлиф фаизләрдә Тl ашгары вурмагла онун 293—723°К температур интервалында электрик хас-сәсинин тәдғиг едилмәсиндән бәһс едилир.

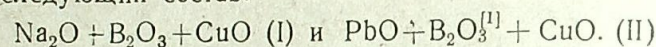
Тәчрүбә көстәрир ки, 0,01% Тl ашгары селенин электриккечир-мәсини 4—5 тәртиб азалдыр, сонрадан таллиум ашгарынын артмасы илә электриккечирмә дә артыр.

Тәмиз Se бәрк һалдан маје һала кечдикдә электриккечирмә сычрајышла азалдығы һалда, тәркибиндә Тl ашгары олан нүмунәләрдә бу чүр азалма арадан көтүрүлүр. Бәрк һалда электриккечирмәнин температурдан асылылығы, селендә Тl ашгарынын мигдарындан асылы олараг, бир бириндән кәскин фәргләнир. Бу асылылыг кичик фаиз-ләрдә јарымкечиричи, бөјүк фаизләрдә металлик олур. Маје һалында исә электриккечирмә бүтүн нүмунәләрдә температурдан асылы олараг шиддәтлә артыр.

В. М. НАГИЕВ

ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС Cu^{2+} В БОРАТНЫХ СТЕКЛАХ

В настоящей работе методом электронного парамагнитного резонанса изучено локальное изменение ближайшего окружения парамагнитных примесей Cu^{2+} в процессе термической обработки стекол, имеющих следующий состав:



Исходные стекла (I) и (II) были термически обработаны в интервале $450-650^\circ\text{C}$ в течение 18 часов и $450-550^\circ\text{C}$ в течение 12 часов, соответственно. Выбор парамагнитного индикатора Cu^{2+} для исследования боратных стекол был связан с хорошей растворимостью его в этих стеклах.

Как известно, в боратных стеклах бор имеет тройное BO_3 и четверное BO_4 координационные состояния. Координационные состояния BO_4 улучшают способность образования стеклообразного состояния. Координационное состояние BO_3 улучшает способность образования кристаллизационного состояния стекол. В боратных стеклах существуют несвязанные B_2O_3 , которые образуют координационное состояние BO_3 . Во время увеличения концентрации окислов-модификаторов уменьшается количество несвязанных B_2O_3 в стекле. Для получения стеклообразного состояния в боратных стеклах концентрация окислов-модификаторов увеличивается до определенного значения, больше этого значения во время медленного охлаждения расплава или во время термической обработки образцы (I) и (II) легко кристаллизуются. Известно, что избыток окислов-модификаторов не приводит к увеличению числа тетраэдров BO_4 , а они проникают в промежутки решетки и содействуют разрыву кислородных связей [2].

Во время термической обработки исходные стекла (I) и (II), имеющие большую концентрацию окислов-модификаторов, хорошо кристаллизуются.

Наши измерения производились при частоте 9320 Мгц , при температуре жидкого азота ($T=77^\circ\text{K}$) и при комнатной температуре ($T=295^\circ\text{K}$).

В исходном стекле (I) при комнатной температуре и температуре жидкого азота наблюдаются сложные спектры электронного парамагнитного резонанса, состоящие из частично разрешенных сверхтонких компонентов от изотопов Cu^{63} и Cu^{65} (рис. 1а). В пределах ошибок эксперимента при комнатной температуре и при температуре жидкого азота вид спектров не отличается. Наблюдаемый электронный парамаг-

нитный резонансный спектр в исходном стекле (I) описывается спин-гамильтонианом для аксиальной симметрии:

$$H = g_{\parallel} \beta H_z \hat{S}_z + g_{\perp} \beta (H_x \hat{S}_x + H_y \hat{S}_y) + A_{\parallel} I_z \hat{S}_z + A_{\perp} (I_x \hat{S}_x + I_y \hat{S}_y) \quad (1)$$

при

$$S = \frac{1}{2}, I = \frac{3}{2}, g_{\parallel} = 2,332 \pm 0,003, g_{\perp} = 2,041 \pm 0,003,$$

$$A_{\parallel} \simeq 146 \text{ эрстед}, A_{\perp} \simeq 27 \text{ эрстед}.$$

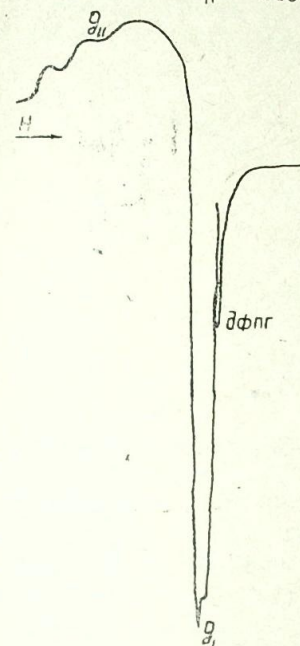


Рис. 1а. ЭПР спектр Cu^{2+} в исходном стекле (I).

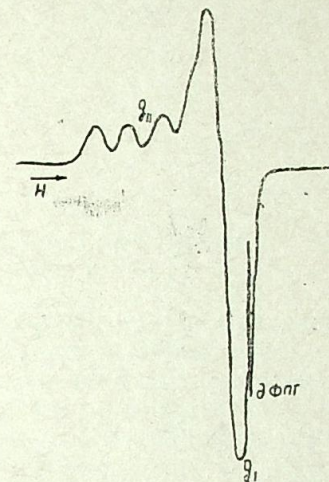


Рис. 1б. ЭПР спектр Cu^{2+} в термически обработанном образце (I) при $T=77^\circ\text{K}$.

Для термически обработанного образца (I) при температуре жидкого азота, как видно из рис. 1б, вид спектра отличается от спектра Cu^{2+} в исходном стекле (I) тем, что компонента сверхтонкого расщепления для фактора $A_{\parallel}$ практически полностью разрешаются. Этот спектр также описывается спин-гамильтонианом (I) при

$$S = \frac{1}{2}, I = \frac{3}{2}, g_{\parallel} = 2,332 \pm 0,002, g_{\perp} = 2,037 \pm 0,002,$$

$$A_{\parallel} = 146 \pm 5 \text{ эрстед}.$$

Вторая СТС благодаря малости $A_{\perp}$ не разрешается.

Таким образом, из разрешения компонентов сверхтонкого расщепления можно сделать о том, что в процессе кристаллизации стекла при термической обработке происходит упорядоченность координационных сфер Cu^{2+} .

При комнатной температуре наблюдается только широкая линия электронного парамагнитного резонанса Cu^{2+} в термически обработанном образце (I) с $g_{\text{эф}} = 2,104 \pm 0,003$; $\delta H = 268 \pm 5 \text{ эрстед}$ (рис. 1с). Ширина линии, обусловленная спин-решеточными взаимодействиями, полностью перекрывает форму линии, определенной как анизотропией фактора, так и анизотропией сверхтонкой структуры. Такое уменьшение времени спин-решеточной релаксации в кристаллическом образце в составе (I) можно объяснить, предполагая, что при кри-

сталлизации стекла происходит не только упорядоченность координационных сфер Cu^{2+} , но и их симметризация. Таким образом, эта упорядоченность проявляется в лучшем разрешении сверхтонких компонентов, кроме того, при кристаллизации происходит симметризация ближайшего окружения Cu^{2+} , что ведет к уменьшению времени спин-решеточной релаксации.

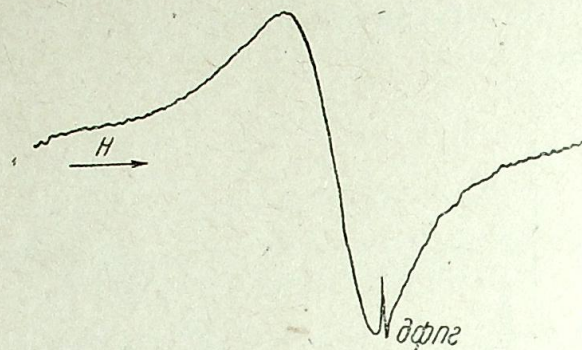


Рис. 1в. ЭПР спектр Cu^{2+} в термически обработанном образце (I) при $T=295^\circ\text{K}$.

В исходном стекле (II) при комнатной температуре и температуре жидкого азота наблюдается сложный спектр. В пределах ошибок эксперимента вид спектров при комнатной и при температуре жидкого азота не отличается друг от друга. Компоненты сверхтонкого расщепления для фактора $A_{||}$ только частично разрешаются. В исходном стекле (II) для наблюдаемого спектра, описываемого спин-гамильтонианом (I), параметры имеют следующие значения:

$$S = \frac{1}{2}, I = \frac{3}{2}, g_{||} = 2,354 \pm 0,003, g_{\perp} = 2,047 \pm 0,003, A_{||} \approx 136 \text{ эрстед}, A_{\perp} \text{ оценить невозможно.}$$

Для термически обработанного образца (II), как и у образца (I), при температуре жидкого азота вид спектра отличается от спектра в исходном стекле (II) тем, что компоненты сверхтонкого расщепления для фактора $A_{||}$ разрешаются. Компоненты сверхтонкого расщепления для фактора $A_{\perp}$ частично разрешены. В термически обработанном образце (II) для наблюдаемого спектра, описываемого спин-гамильтонианом (I), параметры имеют следующие значения:

$$S = \frac{1}{2}, I = \frac{3}{2}, g_{||} = 2,332 \pm 0,003, g_{\perp} = 2,025 \pm 0,003,$$

$$A_{||} = 130 \pm 5 \text{ эрстед}, A_{\perp} \approx 27 \text{ эрстед.}$$

Спектры электронного парамагнитного резонанса—примеси Cu^{2+} в кристаллическом образце II при комнатной температуре и при температуре жидкого азота друг от друга отличаются. При комнатной температуре компоненты сверхтонкого расщепления изотопов Cu^{63} и Cu^{65} частично прикрываются спин-решеточными взаимодействиями. Но

остается форма линии, определенная как анизотропией g фактора, так и анизотропией сверхтонкой структуры. Поэтому спектр в кристаллическом образце (II) описывается спин-гамильтонианом (I) при

$$S = \frac{1}{2}, I = \frac{1}{2}, g_{||} = 2,328 \pm 0,003, g_{\perp} = 2,027 \pm 0,003,$$

$$A_{||} = 127 \pm 5 \text{ эрстед},$$

$A_{\perp}$ оценить невозможно. Как и у образца (I) в процессе кристаллизации исходного стекла (II) при термической обработке происходит упорядоченность координационных сфер Cu^{2+} .

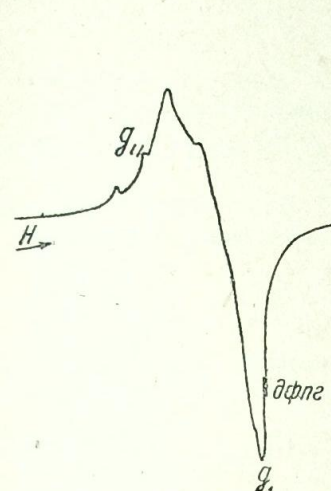


Рис. 2б. ЭПР спектр Cu^{2+} в термически обработанном образце (II) при $T=77^\circ\text{K}$.

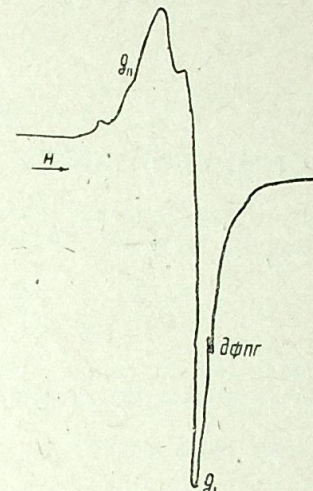


Рис. 2в. ЭПР спектр Cu^{2+} в термически обработанном образце (II) при $T=295^\circ\text{K}$.

В отличие от исходных стекол во время кристаллизации в образцах (I) и (II) координационные сферы Cu^{2+} приближаются к однотипным.

Автор благодарит Н. С. Гарифьянова за полезные советы при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береховских С. М., Черемисионов В. П. III Всесоюзное совещание по стеклообразному состоянию. Тезисы докладов, 1962.
2. Ainsworth L. J. Of the Glass Techn., vol. XXXVIII, 1954.

В. М. Нагыжев

Боратлы шүшәдә Cu^{2+} электрон парамагнит резонансы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә термик ишләнмәнин борат шүшәсинин јахын әтрафында атомларын јерләшмәсинә тәсири өјрәнилмишдир. Бунун үчүн шүшәдә Cu^{2+} идикарф парамагнит иону гарышдырылып вә Cu^{2+} ионундан алынган электрон парамагнит резонансы сигналы өјрәнилип.

Маје азот температурунда ифрат инчә гурулуш компонентләринин ајрылмасына көрә белә нәтичә чыхарылмышдыр ки, термик ишләнмә заманы шүшәнин кристаллашмасында Cu^{2+} координат сферасынын низама дүзүлмәси баш верир.

А. А. АБДУРАХМАНОВ

К ТЕОРИИ СПОНТАННОГО ЭФФЕКТА ЭТТИНГСГАУЗЕНА

Известно, что явление Эттингсгаузена* у изотропных образцов ферромагнитных металлов описывается эмпирической формулой:

$$\left(\frac{dT}{dy}\right)_E = [(P_0 \vec{B} + 4\pi P_s \vec{J}), \vec{j}], \quad (1)$$

где $\vec{B}$ — магнитная индукция, $\vec{J}$ — намагниченность, $\vec{j}$ — плотность тока, P_0 и P_s — соответственно обычная и спонтанная постоянные Эттингсгаузена. Появление в ферромагнетиках части $G_E = \left(\frac{dT}{dy}\right)_E$ аномального

эффекта Эттингсгаузена, линейной намагниченности с точки зрения современной теории связано с изменением характера рассеяния и действия внешнего электрического поля на носители тока под влиянием спин-орбитального взаимодействия [1—3], которое сказывается только в высших членах разложения по потенциалу рассеяния.

Однако величина G_E , зависящая от намагниченности, не была рассчитана и вообще отсутствует удовлетворительная теория явления Эттингсгаузена в ферромагнетиках.

Цель настоящей работы заключалась в том, чтобы теоретически оценить знаки, температурную зависимость (в области высоких температур, когда основную роль играет рассеяние носителей тока на фононах) и порядок величин G_E и P_s , возникающих в ферромагнитных металлах благодаря спин-орбитальному взаимодействию электронов проводимости с ионами решетки, пользуясь принципом симметрии кинетических коэффициентов Онзагера.

Для расчета G_E и P_s мы пользовались кинетическими коэффициентами, рассчитанными в работах [4—5].

В изотропном случае при наличии намагниченности по оси z , градиента температуры и электрического поля в плоскости x у компоненты тока $\vec{j}$ и тепловотока $\vec{q}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} j_x &= \sigma_{xx} E_x - \sigma_{xy} E_y - T^{-1} C_{xx} \nabla_x T + T^{-1} C_{xy} \nabla_y T, \\ j_y &= \sigma_{xy} E_x + \sigma_{yy} E_y - T^{-1} C_{xy} \nabla_x T - T^{-1} C_{yy} \nabla_y T \end{aligned} \quad (2)$$

$$q_x = C_{xx} E_x - C_{xy} E_y - b_{xx} \nabla_x T - b_{xy} \nabla_y T,$$

$$q_y = C_{xy} E_x - C_{yy} E_y + b_{xy} \nabla_x T - b_{yy} \nabla_y T.$$

* Явление Эттингсгаузена — возникновение поперечной разности температур при наличии электрического тока в x -направлении и отсутствие токов по направлению y .

Все коэффициенты, входящие в (2), являются функциями $\vec{J}$ и удовлетворяют следующим соотношениям, вытекающим из принципа симметрии кинетических коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}(\vec{J}) &= \sigma_{ki}(-\vec{J}), \\ C_{ik}(\vec{J}) &= C_{ki}(-\vec{J}), \\ b_{ik}(\vec{J}) &= b_{ki}(-\vec{J}), \quad (i, k = x, y) \\ TC_{ki}(-\vec{J}) &= b_{ik}(\vec{J}). \end{aligned} \quad (3)$$

Пользуясь условием определения поперечной разности температуры при наличии электрического поля: $\nabla_y T \neq 0$; $j_x \neq 0$, $j_y = q_y = \nabla_x T = 0$, для E_x и E_y получим следующие выражения:

$$E_x = \frac{D_1}{D_0}, \quad E_y = \frac{D_2}{D_0}, \quad (4)$$

где

$$D_0 = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} \sigma_0 \\ -C_{xy} C_0 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} T^{-1} C_0 \sigma_0 \\ -b_0 C_0 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xy} T^{-1} C_0 \\ C_{xy} b_0 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0, \quad C_{xx} = C_{yy} = C_0, \quad b_{xx} = b_{yy} = b_0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{\nabla_y T}{j_x} = \frac{D_0}{\sigma_0 T^{-1} (C_0^2 + C_{xy}^2) + b(b_0^2 + \sigma_{xy}^2)}. \quad (6)$$

Для строгого вычисления спонтанной постоянной Эттингсгаузена надо учесть квадратичные поправки из-за спин-орбитального взаимодействия.

Далее мы ограничимся эффектом спин-орбитального взаимодействия, вычисленного [3—4] в первом приближении теории возмущений. Ограничиваясь первым порядком малости в (2), пользуясь условием: $j_y = q_y = 0$, получим

$$E_y = \frac{C_{xy} - b_0 \nabla_y T}{C_0}, \quad (7)$$

$$\sigma_{xy} E_x + \frac{\sigma_0}{C_0} (C_{xy} E_x - b_0 \nabla_y T) = T^{-1} C_0 \nabla_y T, \quad (8)$$

Для поперечной разности температуры $\nabla_y T$ и спонтанной постоянной Эттингсгаузена P_s получим:

$$\nabla_y T = \frac{C_0 \sigma_{xy} + \sigma_0 C_{xy}}{T^{-1} C_0^2 + b_0 \sigma_0} E_x, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} P_s &= - \frac{\nabla_y T}{j_x 4\pi J} = - \frac{1}{4\pi J} \cdot \frac{C_0 \sigma_{xy} + \sigma_0 C_{xy}}{T^{-1} C_0^2 + b_0 \sigma_0} \cdot \frac{E_x}{j_x} = \\ &= - \frac{1}{4\pi J} \cdot \frac{C_0 \sigma_{xy} + \sigma_0 C_{xy}}{(T^{-1} C_0^2 + b_0 \sigma_0) \sigma_0} \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда видно, что для вычисления P_s надо определить коэффициенты σ_{xy} и C_{xy} . Коэффициент C_{xy} можно определить пользуясь значением поля Нернста—Эттингсгаузена из работы [5] (σ_{xy} определен в работе [4]). Согласно [5]

$$j_y = -\frac{E_N}{\rho} = \left(\sigma_{xy} \frac{C_0}{\sigma_0} - C_{xy} \right) T^{-1} \nabla_x T = K_{xy} \nabla_x T. \quad (11)$$

($E_x \neq 0$)

Отсюда для C_{xy} получим

$$C_{xy} = \sigma_{xy} \frac{C_0}{\sigma_0} - T K_{xy}, \quad (12)$$

где [4, 5]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\gamma_0 \frac{J_z}{J_s} \\ K_{xy} &= -\gamma_0 \frac{J_z}{J_s} T \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при рассеянии носителей тока на фононах;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\gamma_0 \left(\frac{\partial_F}{3nV} \rho_{ост} \sigma + 1 \right) \frac{J_z}{J_s} \\ K_{xy} &= -\gamma_0 \frac{\partial_F}{3nV} T \left(\frac{1}{\rho_{ост}} \sigma + 1 \right) \frac{T_z}{T_s} \end{aligned} \right\}^* \quad (14)$$

при рассеянии носителей тока на примесях и на фононах одновременно. Здесь $\rho_{ост}$ —остаточное электрическое сопротивление, n —число рассеивающих примесных центров в единице объема, V —средний примесный потенциал, E_F —энергия Ферми, $\frac{J_z}{J_s}$ —относительная намагниченность по оси z ,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{e^4 n_0}{m^2 c^2 \Delta^2} \bar{\nu} \delta < \frac{1}{m^*} >, \\ \rho_0 &= \frac{\pi^2 (r + 1/2)}{3eE_F} k_0^2 \frac{1}{2(r+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В (15) k_0 —постоянная Больцмана; n_0 —число носителей тока в единице объема; m —масса носителей тока; $\Delta = \epsilon_c - \epsilon_v = \omega_{cv} \cong \text{const}$; δ —число полос, электроны которых участвуют в проводимости; $\bar{\nu}, < \frac{1}{m^*} >$ —усред-

ненные по этим полосам эффективная плотность и обратная эффективная масса электронов; r —постоянное число, определяющееся механизмом рассеяния носителей тока ($r=0$ в случае рассеяния электронов на примесях, $r=2$ в случае рассеяния на фононах).

Подставляя (12) в (10), получаем

$$P_s = -\frac{1}{4\pi J} \cdot \frac{2C_0 \sigma_{xy} - \sigma_0 T K_{xy}}{\sigma_0 (T^{-1} C_0^2 + \sigma_0 b_0)}. \quad (16)$$

Отсюда при учете (13) и (14) имеем

$$P_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma_0 (2C_0 - \rho^{-1} T^2 \rho_0)}{\sigma_0 (T^{-1} C_0 + \sigma_0 b_0)} \quad (17)$$

* Мы здесь не учли части σ_{xy} и K_{xy} , соответствующих членам второго приближения по потенциалу рассеяния (4).

при рассеянии электронов на фононах и

$$P'_s = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\gamma_0 \left[\frac{\rho_{ост}}{nV} \left(2 \frac{C_0 E_F}{3} - \frac{\rho_0 T}{\rho} \right) + (2\rho C_0 - \rho_0 T^2) \right]}{T^{-1} C_0^2 + \sigma_0 b_0} \quad (18)$$

при рассеянии электронов на фононах и на примесях одновременно. Формулы (17) и (18) можно представить в следующем виде:

$$P_s = \frac{\beta T^2 \rho^{-1} - 2C_0 b}{\sigma_0 (T^{-1} C_0^2 + \sigma_0 b_0)}; \quad (17')$$

$$P'_s = \frac{\sigma_0^2 T^2 (\alpha + \beta \rho) - 2C_0 (\alpha \rho \rho_{ост} + b \rho^2)}{\sigma_0 (T^{-1} C_0^2 + \sigma_0 b_0)}, \quad (18')$$

где a, b и α, β —постоянные, независимые от температуры и совпадают с их значениями, соответственно, в работах [4, 5]. Учитывая, что

$$\sigma_{xy} = \frac{R_s}{\rho^2} 4\pi J, \quad K_{xy} = \frac{Q_s}{\rho} 4\pi J, \quad (19)$$

можно выразить через спонтанные постоянные Холла R_s и Нернста—Эттингсгаузена Q_s

$$P_s = \frac{\sigma_0 (T Q_s - 2C_0 R_s)}{T^{-1} C_0 + \sigma_0 b_0}. \quad (20)$$

Как видно из (20), знаки температурной зависимости и порядок величины спонтанной постоянной Эттингсгаузена P_s в ферромагнитных образцах можно определить через спонтанные постоянные Холла R_s и Нернста—Эттингсгаузена Q_s .

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohn W., Luttinger J. M. Phys. rev., vol. 108, 590, 1957.
2. Luttinger J. M. Phys. rev., vol. 112, 739, 1958.
3. Ирхин Ю. П. и Шавров В. Г. ЖЭТФ, т. 42, 1233, 1962.
4. Абдурахманов А. Вестн. МГУ, серия физич., № 2, 1964.
5. Абдурахманов А. Диссертация, МГУ, 1964.
6. Кондорский Е. И. ЖЭТФ, т. 45, 511, 1963.

Поступило 20. XI 1964

А. А. Абдурахманов

Эттинггаузен спонтан еффектинин нэээрижэсинэ даир

ХҮЛАСЭ

Лүксэк температурларда электронларын фононлардан сэлэлэнмэк халы үчүн Онзакерин принципдэн истифадэ едэрэк, ферромагнит-лардэ Эттинггаузен спонтан сабити несабланмышдыр. Эттинггаузен сабитинин температурдан вэ мугавимэтдэн асылылыгы тапылараг, Холл вэ Нернст сабитлэри илэ ифадэ едилмишдир. Бунунла бэрабэр, электронларын фононлардан вэ примеслэрдэн сэлэлэнмэк халына да бахылмышдыр.

А. Н. АЛИЕВ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ АДсорбЦИИ ИЧЕРТНЫХ ГАЗОВ ПРИ ВЕСЬМА НИЗКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ТЕМПЕРАТУРАХ

Как известно, весьма важными и интересными в определении теплоты и энтропии адсорбции, а также других термодинамических величин является выяснение самого процесса адсорбции.

Энтропия — одна из основных термодинамических величин. Данные по изменению дифференциальных энтропий адсорбции освещают важные вопросы адсорбционных процессов. Например, по изменению энтропии можно судить о состоянии адсорбированного вещества.

Для системы свободно движущихся точечных масс энтропия является функцией температуры и давления. Количественные расчеты величины энтропии адсорбции должны быть произведены относительно определенного стандартного состояния (в качестве стандартной величины для газообразных систем выбрана энтропия 1 г-моля чистого газа при атмосферном давлении и температуре 25°C). При этом необходимо также знание величины поверхности, т. е. степени заполнения поверхности относительно стандартного состояния. При отсутствии последней расчеты энтропий адсорбции ΔS и других термодинамических функций носят чисто качественный характер. Однако и в этом случае возможна интерпретация ряда экспериментальных результатов.

Настоящая работа посвящена вычислению зависимости дифференциальных изменений энтропии адсорбции от заполнения поверхности при переходе из начального стандартного состояния насыщенного пара в конечное равновесное при данном заполнении поверхности (V) для неона, аргона, криптона и ксенона. При вычислении использованы изотермы адсорбции этих газов на угле Бау при низких давлениях и температурах [1,2].

Величины дифференциальных изменений энтропии вычислены по следующей формуле [3]:

$$\Delta S = - \frac{Q - \lambda}{T} R \ln P/P_s,$$

где ΔS — дифференциальное изменение энтропии адсорбции; Q — дифференциальная теплота адсорбции, вычисленная по методу [4]; λ — скрытая теплота испарения; R — газовая постоянная; P — равновесное давление; P_s — давление насыщенных паров при данной температуре.

Изменение дифференциальных энтропий адсорбции представляет собой разность энтропий при переходе из начального состояния (насыщенный пар при $P/P_s=1$) в конечное (адсорбированный слой) — равно-

На рис. 1, а изображены изменения дифференциальных энтропий адсорбции неона при 20 (треугольники) и 14°K (кружки). Как и следовало ожидать, изменение дифференциальных энтропий адсорбции, стремясь к приближению поверхности, уменьшаясь с максимального значения, объясняется тем, что при незначительных заполнениях поверхности атомы с заполнением поверхности движением большими свободами движения, а к уменьшению энтропии адсорбции.

Из рис. 1, а видно, что для неона при температурах 14 и 20°K уменьшения дифференциальных энтропий адсорбции до $\sim 10 \text{ см}^3/\text{г}$ поглощенного газа почти аналогичны в пределах точности эксперимента. При дальнейшем заполнении поверхности они расходятся. Изменение энтропии при 20°K до $70 \text{ см}^3/\text{г}$ поглощенного газа остается положительным, в то время как при 14°K, продолжая уменьшаться,

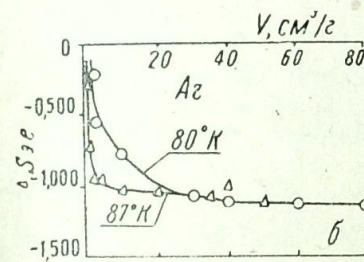
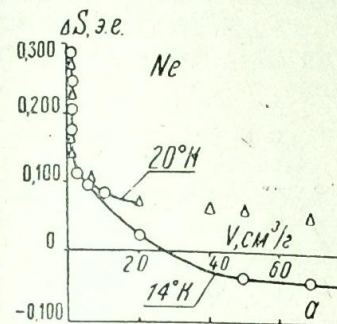


Рис. 1. Дифференциальные энтропии адсорбции Ne (а) и Ar (б).

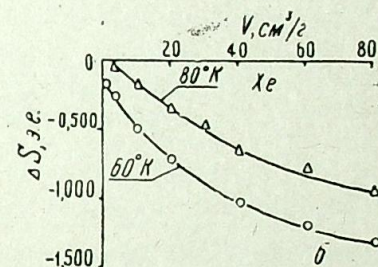
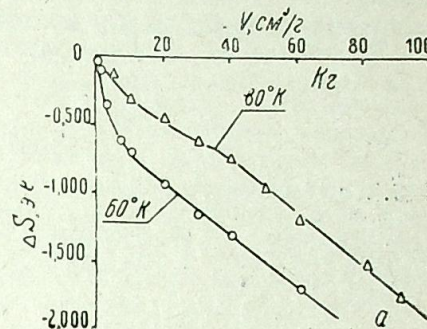


Рис. 2. Дифференциальные энтропии адсорбции Kr (а) и Xe (б).

оно принимает отрицательное значение. Положительное значение изменения энтропии указывает на то, что подвижность атомов поглощенного вещества в адсорбционном состоянии больше, чем в жидком. Начиная с заполнения поверхности около $30 \text{ см}^3/\text{г}$, изменение энтропии при 14°K имеет отрицательное значение, т. е. при таких заполнениях поверхности адсорбента подвижности атомов неона в адсорбированном состоянии становятся меньше, чем в жидком.

Из рис. 1, б видно, что зависимость изменения энтропии адсорбции от температуры для аргона наблюдается до $20 \text{ см}^3/\text{г}$ поглощенного газа, а при дальнейшем заполнении зависимость отсутствует и кривые при относительно больших заполнениях сливаются.

На рис. 1, а и б изображены кривые изменения дифференциальных энтропий адсорбции Kr и Xe. Какими же особенностями обладают изменения энтропии адсорбции этих газов?

Изменения дифференциальных энтропий адсорбции для этих газов во всей области заполнения поверхности отрицательны как и у аргона

Следовательно, можно предположить, что для исследованных температур подвижность атомов в адсорбционной фазе меньше, чем в жидкой. Это подтверждается еще и тем фактом, что установление равновесия для аргона, криптона и ксенона достигается до 20—30 часов, в то время как для неона достаточно 30 минут.

Из рис. 1 и 2 видно, что общий ход зависимости дифференциальных энтропий адсорбции от степени заполнения поверхности для неона, аргона, криптона и ксенона различен. Это, по-видимому, связано со специфическими особенностями названных газов. Можно полагать, что температуры, при которых исследованы эти газы, влияют на них по-разному, что сказывается на изотермах и, следовательно, на теплотах и энтропиях адсорбции.

Из вышеизложенного следует, что изменения дифференциальных энтропий адсорбции при переходе из исходного газообразного состояния в адсорбированного (за исключением неона при 20°K) отрицательны. Это означает, что подвижность вещества в адсорбированном состоянии меньше, чем в жидком.

В заключение хочу выразить благодарность канд. химических наук А. Аббасову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А. Н., Федорова М. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1964, № 2.
2. Федорова М. Ф. Ротапринт. Харьков (УФТИ), 1964.
3. Беринг Б. П., Серпинский В. В. „ДАН ССР“, 148, № 6, 1963.
4. Беринг Б. П., Серпинский В. В. „ДАН СССР“, 114, 1254, 1957.

Поступило

Э. Н. Элиев

Чох алчаг тэзјиг вэ температурларда тэ'сирсиз газларын адсорбсијасынын дифференсиал энтропијасынын һесаблинамасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә Ns, Ar, Kr вә Xe-нун адсорбсијасынын дифференсиал энтропијасынын һесаблинамасындан бәһс едилір. Һесаблама 10^{-8} — 10^{-4} мм Нг ст. тэзјиг интервалында вә 14; 20°K-дә Ne үчүн, 60 вә 80°K-дә Ar, Kr вә Xe үчүн апарылмышдыр.

Бу газларын адсорбсијасынын дифференсиал энтропијалары јухарыда кәстәрилән температур вә тэзјигләрдә мәнфи гијмәт алыр. Бу онунла әлағәдардыр ки, адсорбсија олунмуш газ атомларынын јүрүклүју бу атомларын маје һалындакы јүрүклүјүндән аздыр.

Д. Г. АРАСЛЫ, М. И. АЛИЕВ и В. И. ФИСТУЛЬ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ГЕРМАНИЯ, СИЛЬНОЛЕГИРОВАННОГО МЫШЬЯКОМ И ГАЛЛИЕМ

В последнее время большое внимание уделяется теоретическим и экспериментальным работам по сильнолегированным полупроводникам. Как стало известно, в области сильного легирования многие физические свойства полупроводников существенно изменяются. Показано, что в области сильного легирования подвижность носителей заряда и термоэдс Se зависят от концентрации примеси [7—9]. Панков [10], исследуя спектры поглощения, обнаружил сужение ширины запрещенной зоны Ge, легированного мышьяком до $3,4 \cdot 10^{19}$ см⁻³.

Несмотря на наличие большого числа работ, посвященных электрическим, оптическим и другим свойствам сильнолегированного германия, систематические исследования его теплопроводности (κ) в литературе отсутствуют. Она изучалась в основном на слаболегированных образцах [1—6]. Лишь в работе [5] между 300—1200°K исследована κ германия, содержащего $5 \cdot 10^{15}$ и $3 \cdot 10^{19}$ см⁻³ мышьяка и $2,4 \cdot 10^{19}$ см⁻³ галлия. Показано, что в вырожденном *n*-Ge тепловое сопротивление W почти во всем интервале температур на 17% больше, чем в чистом Ge, а в вырожденном *p*-Ge оно при 600°K больше лишь на 7%.

Представляло интерес исследование теплопроводности германия, легированного донорными и акцепторными примесями в широком интервале концентраций, и выяснение влияния степени легирования на нее.

В этой статье мы приводим результаты исследования κ германия, легированного мышьяком и галлием от $1,4 \cdot 10^{14}$ до 10^{20} см⁻³ между 100 и 500°K.

Зависимость теплопроводности германия от концентрации примесей и температуры

Образцы представляли собой монокристаллы германия, легированного мышьяком и галлием. Вытягивание монокристаллов производилось по методу Чохральского в условиях, обеспечивающих однородность образцов. Для измерения теплопроводности из полученных кристаллов вырезались образцы в форме параллелепипеда с размерами $4 \times 5 \times 12$ мм³.

κ измеряли стационарным методом в вакууме порядка 10^{-3} мм рт. ст. Для измерения градиента температуры пользовались медь-контрт. ст. Для измерения термопар и электрическую мощность стантановыми термопарами. Э.д.с. термопар и электрическую мощность

нагревателя, создающего температурный градиент, измеряли с помощью потенциометра КЛ-48 и зеркального гальванометра М-21.

На рис. 1 представлена зависимость κ германия от концентрации примесей при 300°K. До 10^{17} см^{-3} κ германия почти не зависит ни от количества, ни от типа легирующей примеси, т. е. имеет место плато. Выше этой концентрации κ заметно падает. Расчеты показывают, что электронная теплопроводность для всех образцов незначительна и, следовательно, перенос тепла осуществляется в основном фононами.

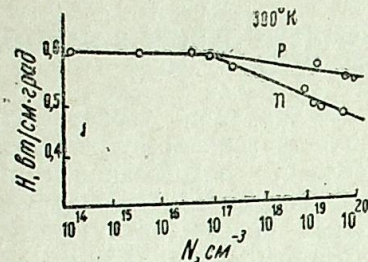


Рис. 1. Зависимость теплопроводности германия от концентрации примесей.

Плато на рис. 1 соответствует значению $\kappa = 0,60 \text{ Вт/см·град}$.

При содержании мышьяка $5,45 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ κ падает до значения $0,471 \text{ Вт/см·град}$. Германий, содержащий примесь галлия с концентрацией $1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, при этом имеет $\kappa = 0,53 \text{ Вт/см·град}$. Эти данные показывают, что, начиная с некоторой концентрации, κ германия зависит от типа примесей. Для германия с донорными примесями (As) она зависит от концентрации более резко, чем с акцепторными примесями (Ga). Причем концентрация, при которой начинается различие в κ *n*- и *p*-Ge, зависит от температуры—с ее повышением она смещается в сторону больших концентраций.

На рис. 2 и 3 приводится зависимость W *n*- и *p*-Ge от температуры. Как видно, в сильнолегированных образцах *n*-Ge $W \sim T$. В слаболегированных же образцах, начиная с $320 \div 340^\circ\text{K}$, наблюдается отклонение, причем чем чище образец, тем раньше начинается это отклонение. В *p*-Ge, кроме образца с концентрацией $1 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$, такое отклонение имеет место почти во всех образцах.

На рис. 4 в двойном логарифмическом масштабе приведена температурная зависимость κ *n*-Ge. Как видно, кроме образцов 1,3 и 4, остальные имеют зависимость $\kappa \sim T^{-1}$. В более чистых образцах (1÷3) выше 300°K $\kappa \sim T^{-0,9}$ ниже 300°K $\kappa \sim T^{-1,15}$.

Обсуждение результатов

На рис. 2, 3 и 4 мы замечаем, что в области температур исследования в сильнолегированных образцах $\kappa \sim T^{-1}$, это свидетельствует о доминирующей роли трехфононных процессов. Отклонение κ более чистых образцов Ge от закона T^{-1} выше 320°K , по-видимому, объясняется появлением фотонной теплопроводности.

Как известно, Е. Д. Девяткова и И. А. Смирнов [4] также наблюдали отклонение от закона T^{-1} теплопроводности чистого Ge ($20 \text{ м}^{-1} \text{ см}^{-1}$) выше 340°K , что, по их мнению, объясняется переносом тепла за счет фотонов.

При высоких температурах в теплопроводности решетки решающую роль играет межфононные процессы. Однако уменьшение κ с легированием (рис. 1) позволило предположить, что при больших концентрациях существенный вклад могут давать примеси, которые,

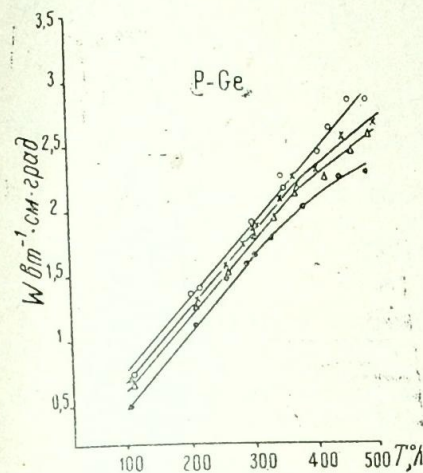


Рис. 2. Температурная зависимость теплового сопротивления *n*-Ge:
● $-3,58 \cdot 10^{15}$; △ $-1 \cdot 10^{17}$;
□ $-3 \cdot 10^{17}$; ▲ $-8,8 \cdot 10^{18}$;
△ $-1,3 \cdot 10^{19}$; × $-2 \cdot 10^{19}$;
○ $-5,45 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

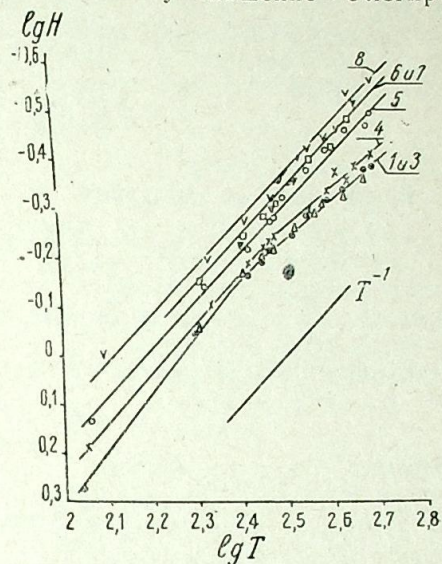


Рис. 4. Температурная зависимость теплопроводности *n*-Ge:
● $-3,58 \cdot 10^{15}$; △ $-1,10^{17}$; × $-3 \cdot 10^{17}$;
○ $-8,8 \cdot 10^{18}$; ▲ $-1,3 \cdot 10^{19}$; □ $-2 \cdot 10^{19}$
и ⊕ $-5,45 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.

очевидно, можно рассматривать как точечные дефекты.

Теория рассеяния фононов точечными дефектами развита в основном в работах Клеменса [11, 12] и Амбегаокара [3]. В основе их теории лежит дебаевское приближение для спектра тепловых колебаний решетки.

Это приближение исходит из предположения об одинаковой скорости всех фононов данной ветви. Исходным моментом их теории является также применение для длины свободного пробега фононов формулы $l \sim q^{-4}$, где q —волновой вектор.

Рассеяние фононов на точечных дефектах щелочно-галлоидных кристаллов и их растворов с применением дебаевской модели и в приближении рэлеевского типа рассеяния исследовано в работах [14, 15].

Как известно, теплопроводность решетки выражается формулой:

$$\kappa = \frac{1}{3} \int_0^{\omega_D} C(\omega) \bar{v}^2 \tau_{\phi}(\omega) d\omega, \quad (1)$$

где $C(\omega) d\omega$ —вклад в теплоемкость единицы объема для частот от ω до $\omega + d\omega$, $\bar{v}$ —групповая скорость фононов, $\tau_{\phi}(\omega)$ —время релаксации фононов.

При наличии межфононных (фф) и фонон-примесных (фп) процессов общее время релаксации $\tau_{\phi}^{-1}(\omega) = \tau_{\phi\phi}^{-1}(\omega) + \tau_{\phi\text{п}}^{-1}(\omega)$.

Можно показать, что

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\phi\phi}^{-1} &= B \omega^2 \\ \tau_{\phi n}^{-1} &= A \omega^4 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Для вычисления времени релаксации $\tau_{\phi n}$ нужно знать коэффициент A . Для этого пользуемся выкладками, приведенными в работах [11, 13, 16].

Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$z_{\phi} = \frac{\kappa}{2\pi^2 \tau B} \int_0^{\omega_D} \frac{d\omega}{1 + \left(\frac{A}{B}\right)\omega^2} \quad (4)$$

Интегрируя ее, получаем:

$$z_{\phi} = \frac{\kappa \omega_0}{2\pi^2 \tau B} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_D}{\omega_0}\right) \quad (5)$$

Здесь $\omega_0^2 = \frac{B}{A}$, т.е. это та частота, при которой $\tau_{\phi\phi} = \tau_{\phi n}$.

Из формулы (4) при $A=0$ получается

$$z_{\phi\phi} = \frac{\kappa \omega_D}{2\pi^2 \tau B} \quad (6)$$

Значит

$$z_{\phi} = z_{\phi\phi} \frac{\omega_0}{\omega_D} \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_D}{\omega_0}\right) \quad (7)$$

Из формулы (7) следует

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_D}\right)^2 = \frac{\kappa}{2\pi^2 \tau z_{\phi\phi} \omega_D A} \quad (8)$$

Зная из эксперимента отношение $\frac{z_{\phi}}{z_{\phi\phi}}$, из формулы (7) находим $\frac{\omega_0}{\omega_D}$ и

с его помощью из (8) вычисляем A . При этом $\frac{z_{\phi}}{z_{\phi\phi}}$ находим из рис. 1.

За $z_{\phi\phi}$ берем значение x , соответствующее плато, а z_{ϕ} — экспериментальное значение x при различных концентрациях примеси. Вычисленные значения ω_0 и A приведены ниже:

Концентраций примесей см ⁻³	5.10 ¹⁷	1.10 ¹⁸	5.10 ¹⁸	1.10 ¹⁹	5.10 ¹⁹
$\omega_0 \cdot 10^{-13}$ сек ⁻¹	9,58	9,0	6,76	5,75	4,6
$A \cdot 10^{14}$ сек ³	1,68	1,9	3,37	4,67	7,3

В вычислениях были приняты значения для скорости звука $\bar{v} = 3,58 \cdot 10^5$ см/сек [13], для дебаевской температуры $\theta_D = 350^\circ\text{K}$ с учетом изменения ее с концентрацией на величину $2,4 \cdot 10^{-6} N^{1/3}$ [17].

Зная A по формуле (3), вычислили время релаксации $\tau_{\phi n}$. Среднюю длину свободного пробега определили из соотношения $l_{\phi n} = \bar{v} \tau_{\phi n}$. Значения $l_{\phi n}$ позволили определить сечение рассеяния фононов точечным дефектом по формуле:

$$l_{\phi n} = \frac{1}{N \sigma_{\phi n}(q)} \quad (9)$$

Вычисленные значения $\tau_{\phi n}$, $l_{\phi n}$ и $\sigma_{\phi n}$ представлены графически на рис. 5.

Обращает на себя внимание изменение $\sigma_{\phi n}$ с увеличением концентрации примеси. Этот факт свидетельствует об изменении вида центров рассеяния. Так как теория Клеменса не вкладывает физического смысла в понятие „точечный дефект“, то мы попытались обработать экспериментальные результаты еще и по формуле Иоффе [18]:

$$\frac{z_{\phi\phi}}{z_{\phi}} = 1 + \frac{N}{N_0} \frac{l_{\phi}}{a} \Phi, \quad (10)$$

где N_0 — число атомов в 1 см³ чистого вещества,
 N — число примесных атомов в 1 см³,
 a — межатомное расстояние,
 Φ — параметр, определяющий вид центра рассеяния.

В [18] показано, что $\Phi < 1$, если примесь образует раствор замещения; $\Phi > 1$ — в случае раствора внедрения. Таким образом,

определив Φ из (10), можно судить о природе центров рассеяния фононов.

С другой стороны известно, что $\sigma = \Phi a_1^2$, где a_1 — постоянная решетки. Принимая $a_1 = 5,46 \cdot 10^{-8}$ см и $l_{\phi} = 2,8 \cdot 10^{-6}$ см и определив Φ из (10), мы вычислили величину σ . Видно, что значения σ , найденные таким образом, хорошо совпадают с величинами σ , вычисленными по теории Клеменса (рис. 5.).

Характерно, что параметр оказался большим единицы и переменным — он меняется от 50 при $N = 5 \cdot 10^{17}$ см⁻³ до 3,3 при $N = 5 \cdot 10^{19}$ см⁻³. Так как хорошо известно, что мышьяк в германии образует раствор замещения, то величины $\Phi > 1$ свидетельствуют о том, что рассеяние фононов происходит не только на атомах примеси, но и на иных центрах, количество которых растет с увеличением степени легирования. Такими центрами могут быть вакансии, содержание которых N_v , как известно, растет с легированием полупроводника донорами [19, 20].

Лонжини и Грин [21] показали, что в тех полупроводниках, в которых решеточные вакансии ведут себя как акцепторы, равновесная концентрация их должна зависеть от концентрации и типа примесей. Равновесная концентрация акцепторных вакансий будет больше при легировании донорами, чем при легировании акцепторами. Исследования диффузионных процессов в германии показывают, что решеточные вакансии в нем являются акцепторными.

В случае полной ионизации акцепторных примесей и при таких температурах, когда концентрация донорной примеси больше собственной концентрации электронов ($N_D \gg n_i$), имеет место следующее соотношение:

$$\frac{N_v}{N_i} \approx \frac{N_D}{n_i}, \quad (12)$$

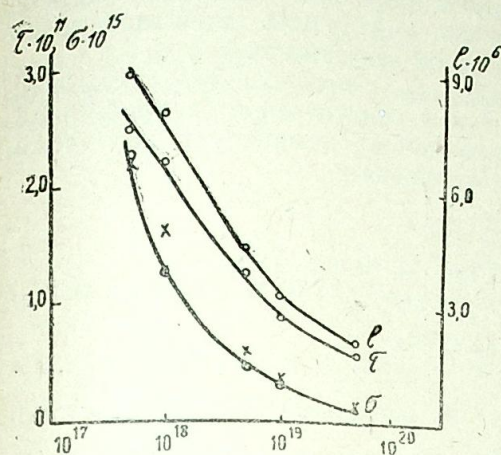


Рис. 5. Время релаксации, средняя длина свободного пробега и эффективное сечение рассеяния фононов в сильно олегирированном n -Ge. Крестиками показаны значения σ , вычисленные по формуле Иоффе.

где N и N_i — концентрации вакансий акцепторного типа в присутствии и в отсутствие донорной примеси.

Эти рассуждения указывают на то, что более резкое уменьшение χ германия, легированного мышьяком, начиная с некоторой концентрации примеси, по-видимому, связано с приростом вакансий. Характер взаимодействия дефектов в германии n - и p -типа вызывает вышеуказанное различие в концентрационной зависимости χ .

Уменьшение Φ и, следовательно, $\tau_{\text{фп}}$ с легированием указывает, по-видимому, на то, что с увеличением концентрации доноров число вакансий типа Шоттки (раствор замещения) доминирует над числом вакансий типа Френкеля (раствор внедрения).

ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. В. и Иоффе А. Ф. ЖТФ, 24, 10, 191, (1954).
2. Carruthers J. A., Geballe J. H., Rosenberg H. M., Ziman J. M. Proc. Roy. soc. A 238, 502 (1957).
3. Stuckes A. D. Phil. Mag., 5, 49, 84, (1960).
4. Девяткова Е. Д. и Смирнов И. А. ЖТФ, 27, 9, 1944, (1957), ФТТ, 2, 4, 561 (1960); 4, 6, 1669 (1962).
5. Beers D. S., Cody G. D., Abeles B. „Proc. Intern. Conf. Phys. Semicond. Exeter, July, 1962, стр. 41.
6. Абдуллаев Г. В., Алиев Г. М. и Четвериков Н. И. ЖТФ, 28, 11 2368 (1958).
7. Фистуль В. И., Иглицын М. И. и Омеляновский Э. Н. ФТТ, 4, 4, 1065, (1962).
8. Фистуль В. И. и Черкас К. В. ФТТ, 4, 11, 3289 (1962); 6, 1, 16, (1964).
9. Орлов А. А., Голикова О. А., Можейс Б. Я. ФТТ, 4, 12, 3482, (1962).
10. Rankove J. I. Phys. Rev. Letters. 4, 454, 1960.
11. Klemens P. G. Phys. Rev., 119, 507 (1960); Proc. Phys. soc. A 68, 1113, (1955).
12. Клеменс. Сб. „Физика низких температур“ перев. с английского под ред. А. И. Шалникова, ИЛ, 1959.
13. Ambegaokar V. Phys. Rev., 114, 2, 488, (1959).
14. Walker C. T. and Pohl R. O. Phys. rev., 121, 4, 1433, 1896.
15. Pohl R. O. Zs. für Physik 176, 4, 358 (1963).
16. Драбл Дж. и Гольдсмит Г. Теплопроводность полупроводников, ИЛ, 1963.
17. Keyes R. W. Bull. Amer. Phys soc., 7, 237, (1962).
18. Иоффе А. В. Иоффе А. Ф. „ДАН СССР“, 98, № 5 (1954).
19. Фуллер. Взаимодействие между дефектами в полупроводниках. В кн. „Полупроводники“ под ред. Хенней, ИЛ, 1962.
20. Рейс и Фуллер. Диффузионные процессы в германии и кремнии. В кн. „Полупроводники“ под ред. Хенней, ИЛ, 1962.
21. Longini R. L. and Greene R. F. Phys. Rev., 102, 4, 992, 1956.

Поступило

Д. Ы. Араслы, М. И. Элијев вэ В. И. Фистул

Арсен вэ галлиумла јүксэк лекире олуиуш
керманиумун истилик кечирмэси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә арсен вэ галлиумла кениш концентрасија интервалында лекире олуиуш керманиумун монокристалынын истилик кечирмэсиндән χ данышылып.

χ 100÷500°K температурларында тәдгиг едилмишдир. Ашгарларын концентрасијасы (N) $1,4 \cdot 10^{14} \div 10^{20} \text{ см}^{-3}$ арасындадыр.

1-чи шәкилдә χ -нын 300°K-дә N -дән асылылығы көстәрилмишдир. $N=10^{17} \text{ см}^{-3}$ сонра χ һәм ашгарларын нөвүндән, һәм дә мигдарындан асылыдыр: P -Ge истилик кечирмэси n -Ge-дан чохдур.

2 вэ 3-чү шәкилләрдә n вэ p -Ge-ун истилик мугавимәтинин (W) температурдан асылылығы верилмишдир. 4-чү шәкилдә χ -нын T -дән асылылығы көстәрилмишдир. Бу графикләрдән ајдын олуи ки, 1, 3

вэ 4-чү нүмунәләрдә $T > 300^\circ \text{K}$ олдугда, $\chi \propto T^{-0.23}$, $T < 300^\circ \text{K}$ олдугда исә $\chi \propto T^{-1.15}$ олуи. Тәмиз нүмунәләрдә χ -нын T^{-1} ганунундан кәнара чых-масынын фотон истилик кечирмэси илә әлагәдар олмасы фәрз еди-лир. Јүксэк лекире олуиуш нүмунәләрдә $\chi \propto T^{-1}$ -дир. Клеменс вэ Амбегаокарын нәзәријәсинә әсасән јүксэк лекире олуиуш n Ge-да фононларын нөгтәви дефектләрдән сәпилмэси үчүн релаксација мүддәти (τ), орта сәрбәст јүрүш јолу ($\bar{l}$) вэ сәпилмәнин эффектив кәсији (ε) һесабланмышдыр вэ онларын N -дән асылылығы гурулмушдур (5-чи шәкил).

Л. М. ИМАНОВ, Ч. О. КАДЖАР, И. Дж. ИСАЕВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ CH_3CHDOH

Для определения точной структуры и вращательно-колебательных взаимодействий в молекуле этилового спирта продолжается изучение микроволновых спектров разных дейтерированных разновидностей этой молекулы. В ранее опубликованных работах [2—7] сообщались результаты исследований молекул $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OD}$, $\text{CH}_3\text{CD}_2\text{OH}$, $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OH}$ и $\text{CD}_3\text{CD}_2\text{OD}$. В настоящей статье даются результаты изучения микроволнового вращательного спектра α -монодейтерированной молекулы этилового спирта— CH_3CHDOH .

Таблица 1
Частоты (МГц) обнаруженных линий молекулы CH_3CHDOH

Частота	Относит. интенсивность	Частота	Относит. интенсивность	Частота	Относит. интенсивность
1	2	3	4	5	6
12050		13150	средняя	19432,4	средняя
12070,5	средняя	13303,1		19433,6	
12071,3	"	13309,8	"	20495,4	"
12163	"	13354,4	"	20571,2	"
12173	"	13815	сильная	21089,8	"
12214	слабая	13820		21140	"
12308	средняя	13843	средняя	21160	"
12315	"	13862,5	"	21250	сильная
12360,1	"	13873	"	21348	"
12360,8	"	13896,8	"	21422	слабая
12389	сильная	13897,9	"	21470	"
12439,6	средняя	13952	"	21498	"
12468	"	14069	слабая	21623	средняя
12535,1	слабая	14079		21715	"
12570	средняя	14090	средняя	21717,8	"
12614,2	"	14092,9	сильная	21725,2	"
12615,8	"	14100	средняя	21735,6	слабая
12638,2	"	14130	средняя	21743,4	средняя
12674	"	14220	слабая	21747	слабая
12700	сильная	14240	сильная	21936	"
12723	средняя	14277	слабая	21938	"
12739	"	14320	"	22062	"
12785	слабая	14493	"	22268	"
12809,5	средняя	14480	"	22103	"
12843,5	"	17387,6	средняя	22247	"
12856	слабая	17391,6	"	22278,4	сильная
12920	сильная	17397,8	"	22326,2	"
12930	"	18249,2	"	22353	слабая
13010	средняя	19421,4	"	22377	сильная
13105	слабая	19430,4	слабая	22416	"

Окончание таблицы 1					
1	2	3	4	5	6
22440	слабая	24964			
22470	средняя	2552	слабая	27803	слабая
22509,1	"	2553	"	27807	"
22512,6	"	25062	"	27814	"
22606,2	"	25068	"	27900	средняя
22619	слабая	25124	"	27906	"
22630	"	25180	"	27925	слабая
22650	"	25186,5	средняя	2804	средняя
22726	сильная	25192,6	"	28152	слабая
22731	слабая	25222	"	28220	средняя
22734	"	25226	слабая	224	"
22799	средняя	25245	"	28453	слабая
22820	сильная	25275,1	"	28710	"
22823	"	25294	"	28844,8	"
22870	средняя	25320	"	28869,7	"
22875	"	25330	"	2886,1	средняя
22907	"	25336	средняя	28892	сильная
22910	сильная	25362	"	28894	"
22964	средняя	25462	слабая	28899	"
22966	"	25556	"	29500	средняя
22993	слабая	25535	"	29587	сильная
23000	"	25635	"	29628	слабая
23007	"	25662	средняя	29542	средняя
23007	"	25667	сильная	29665	слабая
23018	средняя	25714	средняя	29791	сильная
23019	"	25769	слабая	29794,3	"
23020	"	25867	сильная	29816	средняя
23070	слабая	25940	"	39842	сильная
23160,8	средняя	26017	слабая	30270,2	"
23163,8	"	26074	средняя	30314	средняя
23362	слабая	26138	слабая	30343	"
23384	"	26186	"	30391,6	"
23437	"	26238	средняя	30440	"
23449	"	26256	слабая	30516,5	"
23473	"	26273	средняя	30525	слабая
23505	"	26293	слабая	4060	средняя
2366,5	сильная	26293	"	30637	"
23720	средняя	26460	"	30660	слабая
23725	"	26472	"	30764,2	сильная
23756	"	26490	"	30837,6	средняя
23870	слабая	26520	"	30841,3	сильная
23937	"	26530	"	30850	средняя
23940	"	26543,3	средняя	30940	"
24004	средняя	26564,8	"	30983	"
24096	сильная	26535	"	31306,4	сильная
24133	средняя	26628,3	слабая	31366	слабая
24275,8	сильная	26707,4	средняя	31447,3	средняя
24444	слабая	26710,4	"	31509	средняя
24460	"	26725	"	31593	сильная
24490	сильная	26740	"	31553	средняя
24537,1	"	26838	"	31581,2	слабая
24540,1	слабая	26800	слабая	31604,8	"
24573,8	"	26900	"	31610,6	сильная
24588,8	"	26916	"	31613,8	"
24623	средняя	26938	"	31624	средняя
24660	"	27023	средняя	31654	слабая
24650	слабая	27033	сильная	31747,6	"
24686	сильная	27035	"	31760	"
24689	"	27136	слабая	31781,2	сильная
24708	средняя	27140	"	31812	слабая
24717	слабая	27160	средняя	31847,8	сильная
24750	сильная	27240	слабая	31908	средняя
24765	слабая	27253	"	31947,4	слабая
24774	сильная	27375	"	3202,6	"
24790	средняя	27436	сильная	32241,6	средняя
24805	слабая	27438	"	32318	"
24818	средняя	27500	слабая	32327	"
24915	"	27660	средняя	32398,3	"
24916	слабая	27677	слабая		
24950	средняя	27800	сильная		

Спектр исследовался на спектрометре с электрической молекулярной модуляцией [1], с частотой модуляции 75 кГц, в диапазоне $12 \pm 32,5$ кГц, при температуре около -45°C и давлении от 10^{-1} до 10^{-2} мм рт. ст. Грубое измерение частот (с точностью ± 3 МГц) производилось с помощью объемных волномеров, а частоты идентифицированных линий измерялись вторичным эталоном частоты, контролируемым кварцем. Точность измерения частот не хуже 0,3 МГц.

По вероятным структурным данным работы [2] был произведен предварительный расчет, что облегчило идентификацию довольно сложного спектра. В табл. 1 приведены частоты и относительные интенсивности обнаруженных в данном диапазоне спектральных линий, из которых идентифицирован ряд переходов в P , Q и R ветвях с низкими J . Из анализа эффекта Штарка первыми были идентифицированы переходы $1_{01}-1_{10}$, $2_{02}-2_{11}$ и $1_{11}-2_{02}$, по которым определены вращательные постоянные A , B , C и параметр асимметрии χ (табл. 2). По экспериментально измеренным эффективным вращательным постоянным A , B и C рассчитаны и измерены частоты ряда других переходов P , Q и R ветвей. Сравнение рассчитанных и измеренных частот [6] показало, что идентификация проведена верно и согласие вполне удовлетворительное.

Таблица 2

Вращательные постоянные (МГц), параметр асимметрии и главные моменты инерции (a, b, c в $\text{\AA}^2$) молекулы CH_3CHDOH

Постоянные	Экспериментальные	Рассчитанные по структуре [2]
A	30208,7	30218,3
B	9238,9	9235,9
C	790,3	7925,8
χ	-0,882518	-0,882463
I_a	16,7346	16,7293
I_b	54,7174	54,7355
I_c	63,7468	63,7832

В спектре также обнаружены две серии сателлитов, которые могут быть отнесены к вращательно-колебательным взаимодействиям в молекуле. Линии этих сателлитов в несколько раз слабее по интенсивности, чем линии основного состояния. Окончательный вывод о происхождении серий сателлитов будет сделан после изучения аналогичных явлений в спектре молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$.

ЛИТЕРАТУРА

- Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 4, 49, 1959.
- Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 4, 55, 1952.
- Иманов Л. А., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Оптика и спектроскопия“, 8, 1964.
- Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „Изв. АН Азерб. ССР“, 3, 1964.
- Иманов Л. М., Абдурахманов А. А., Рагимова Р. А. „ДАН Азерб. ССР“, 12, 1964.
- Иманов Л. М., Каджар Ч. О., Исаев И. Дж. „Оптика и спектроскопия“, 2, 1965.
- Иманов Л. М., Каджар Ч. О., Исаев И. Дж. „Оптика и спектроскопия“, 5, 1965.

Л. М. Иманов, Ч. О. Гачар И. Ч. Исаев

CH_3CHDOH молекулунун микродалгадакы спектри

ХУЛАСА

Мәгаләдә CH_3CHDOH молекулу ғырланма спектринин електрик-молекуллар модулясија үсулу илә ишләјән радиоспектрометрин $12 \pm 32,5$ кМГц тезлик даипазонунда тәдгиг олунмасындан бәһс едилір. Молекулун ефектив ғырланма сабитләри, асимметрија параметри вә баш әталәт моментләри тәјин олунмушдур.

Мәгаләдә CH_3CHDOH молекулунун удма хәтләринин үмуми тезлик хәдвәли вә бир сыра ујғунлашдырылмыш кечидләрин тезликләри дә верилір.

А. Х. ХАЛИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МИКРОДЕФЕКТОВ НА СПЕКТРЫ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ РЕКОМБИНАЦИОННОЙ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ ФОСФОРОВ

Исследование рекомбинационной люминесценции щелочно-галогидных фосфоров необходимо для выяснения механизма возникновения отдельных пиков на кривых термостимулированной люминесценции и механизма миграции энергии рекомбинации электронов и дырок к различным центрам свечения в различных стадиях релаксационного процесса. Представляет существенный интерес выяснение влияния на этот процесс распределения в решетке микродефектов, сильно зависящее от характера термической обработки, пластической деформации и других воздействий [4—8].

В настоящей статье приводятся результаты исследования влияния последних на различные виды рекомбинационной люминесценции: на кривые и спектры термостимулированной люминесценции (ТСЛ), на спектры фосфоресценции и рентгенолюминесценции монокристаллических $\text{NaCl} + \text{Ag}$ фосфоров и $\text{NaCl} + \text{Ag}$ фосфоров, содержащих ионы Ca , Sr , Ba , Zn , Cd . Люминесценция $\text{NaCl} + \text{Ag}$ фосфоров в литературе описана [1—4, 9—16]. Спектры их рекомбинационной люминесценции рассмотрены в работах [11, 13]. Условия изготовления указанных фосфоров и изучение их спектров изложены в работе [16]. $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,01) фосфор, рентгенизованный при 90°K , имеет четыре пика ТСЛ, расположенных при 183, 233, 261 и 316°K . С ростом концентрации Ag^+ максимумы пиков ТСЛ смещаются в сторону низких температур. Например, у $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) взамен вышеуказанных пиков наблюдаются пики ТСЛ при 163, 198, 255 и 303°K , а у $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,75) при 153, 188, 241 и 303°K . С ростом концентрации Ag^+ растет интенсивность II и IV пиков и уменьшается интенсивность I пика ТСЛ. Однако интенсивность III пика при этом существенно не меняется. Наличие в решетке $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) ионов Ca , Sr , Ba , Zn , Cd действует на кривые ТСЛ так же, как уменьшение концентрации Ag^+ в указанной решетке, т. е. кривые ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфоров с ионами Ca , Sr , Ba , Zn , Cd по расположению пиков ТСЛ почти совпадают с кривой ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора. Однако по интенсивности указанные пики ТСЛ существенно отличаются в зависимости от природы неактивирующих ионов, за исключением III пика ТСЛ при 261°K , который доминирует на кривых ТСЛ всех фосфоров. Интенсивность IV пика ТСЛ при 330°K минимальна (близка к нулю) в присутствии ионов Cd и растет в ряду Zn , Ba , Sr , Ca . II пик ТСЛ в присутствии этих ионов

расположен при 190°K . Интенсивность последнего больше, чем у остальных пиков $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора с ионами Ca и Sr . Однако в ряду ионов Ba , Zn , Cd указанный пик ослабляется и для $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Cd фосфора его интенсивность становится меньше, чем у IV пика ТСЛ.

Сравнение спектрального состава этих пиков позволяет высказать механизм возникновения ТСЛ в различных низкотемпературных стадиях релаксационного процесса: так, если в возникновении низкотемпературного крыла I пика ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора принимают участие полосы 390 и $520 \text{ m}\mu$, то высокотемпературное крыло этого пика содержит также свечение 250 и $360 \text{ m}\mu$ -центров. В области II и III пиков ТСЛ этого фосфора наблюдается максимальное свечение полос 250, 360 и $520 \text{ m}\mu$. В максимуме III пика ТСЛ наиболее интенсивной становится полоса $250 \text{ m}\mu$, обусловленная ионами Ag^+ , расположенными в регулярных узлах решетки NaCl , а интенсивность полос свечения 436 и $520 \text{ m}\mu$, обусловленных B- и C-центрами, ослабляется. При концентрации Ag^+ 2% полоса $250 \text{ m}\mu$ имеет почти нулевую интенсивность. В спектре ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора в возникновении II пика ТСЛ принимает участие также слабая полоса $360 \text{ m}\mu$, которая достигает значительной интенсивности в максимуме III пика. С ростом концентрации Ag^+ интенсивность полосы 360 падает и при 2% Ag^+ она почти не наблюдается. В области III пика ТСЛ начинает светиться полоса $470 \text{ m}\mu$ и сильно возрастает интенсивность полосы $525 \text{ m}\mu$. С ростом концентрации Ag^+ растет интенсивность полос 440, 470 и $525 \text{ m}\mu$.

Как видно из вышеизложенного, по спектральному составу наиболее простым является I пик ТСЛ, а наиболее сложным IV, в области которых наблюдается свечение всех центров люминесценции, присутствующих в фосфоре $\text{NaCl} + \text{Ag}$. Что касается II и III пиков ТСЛ, то в их области свечение одних центров только начинается, а свечения других находятся в стадии затухания. Наличие в решетке $\text{NaCl} + \text{Ag}$ ионов Ca , Sr , Ba , Zn , Cd существенно влияет также на спектры ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора. В спектре ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ca ; $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Sr и $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ba фосфоров, в отличие от $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5), в интервале нагрева от 113 до 233°K доминирует полоса $420 \text{ m}\mu$, а в интервале нагрева от 233 до 373°K полоса $380 \text{ m}\mu$. В то время как у $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфора с ионами Zn и Cd в I интервале рекомбинационное свечение в основном сконцентрировано в области $400 \text{ m}\mu$, в интервале от 210 до 293°K в спектрах ТСЛ этих фосфоров полосе $400 \text{ m}\mu$ не уступает по интенсивности полоса $250 \text{ m}\mu$, которая в присутствии этих примесей становится неэлементарной и состоит из двух компонентов, обусловленных изолированными ионами Ag^+ и ионами Ag^+ , деформированными их ближайшим дефектным окружением. Расстояние между указанными компонентами полосы $250 \text{ m}\mu$ различно для ионов Ca , Sr , Ba , Zn , Cd [16]. Что касается более длинноволновых полос свечения, обусловленных B- и C-центрами свечения, то они в спектрах ТСЛ $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) фосфоров с указанными ионами слабее, чем у фосфора $\text{NaCl} + \text{Ag}$ (0,5) без этих ионов, который после рентгенизации при 293°K имеет пики ТСЛ при 348, 393 и 443°K .

Наличие в решетке указанного свежеприготовленного фосфора вышеупомянутых ионов значительно изменяет распределение интенсивности между указанными пиками ТСЛ и приводит к возникновению новых пиков. Так, например, фосфор $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Sr имеет пики ТСЛ при 333, 353, 413, 453 и 503°K , среди которых доминирует пик при 413, а последние два пика очень слабы. Фосфор $\text{NaCl} + \text{Ag}$, Ba , содержащий 0,6 моль % анионов J -имеет интенсивные пики ТСЛ при 338, 373, 433, 483 и 513°K , среди которых пики при 373 и 513°K в 1,5 раза более интенсивны, чем остальные. Однако при наличии в решетке

NaCl+Ag (0,5) ионов Zn и Cd их кривые ТСЛ содержат столько же пиков, сколько у NaCl+Ag (0,5) фосфора, хотя по интенсивности эти пики резко отличаются; т. е. если у NaCl+Ag (0,5) фосфора доминирует пик ТСЛ при 393°K, то при наличии в его решетке ионов Zn и Cd указанный пик в два-три раза менее интенсивен, чем пик при 353°K. Сравнение спектрального состава этого пика у фосфоров NaCl+Ag с разной концентрацией Ag^+ показывает, что рост общей интенсивности II пика ТСЛ происходит за счет роста в его составе свечения С-центров. Наконец, III пик ТСЛ, который с ростом концентрации Ag ведет себя как I пик, по спектральному составу отличается от последнего тем, что в указанном пике доля свечения В-центров по сравнению с С-центрами значительно больше.

Ионы Zn, Cd существенно не влияют на спектральный состав вышеперечисленных пиков NaCl+Ag (0,5) фосфора, в то время как ионы Ca, Sr и Ba вызывают значительные изменения в составе указанных пиков ТСЛ. Так, например, наличие в решетке NaCl+Ag (0,5) ионов Zn и Cd проявляется усилением в их присутствии полос свечения 420 и 373 $m\mu$ в составе II и III пиков ТСЛ NaCl+Ag, Cd и NaCl+Ag, Zn фосфоров, в то время как у NaCl+Ag (0,5) без ионов Zn и Cd в составе всех пиков ТСЛ наблюдается только полоса 520 $m\mu$, а полосы 420 и 375 $m\mu$ при этом совершенно отсутствуют. Следует отметить, что если начало разгорания этих полос в присутствии Zn соответствует области I пика ТСЛ, то для ионов Cd эти полосы разгораются в области II и III пика. Гораздо более значительные изменения в составе пиков ТСЛ NaCl+Ag (0,5) фосфора происходят в присутствии ионов Ba, Sr и Cd.

В отличие от NaCl+Ag (0,5), у которого свечение всех пиков содержит только полосу 520 $m\mu$, у фосфоров NaCl+Ag (0,5) с ионами Ca, Sr, Ba спектральный состав вышеупомянутых пиков ТСЛ очень сильно отличается. Так, например, у NaCl+Ag, Sr в I и II пиках разгораются полосы 249, 255, 360, 380, 430 и 540 $m\mu$, III пик содержит полосы 360, 430 и 520 $m\mu$, а последний пик состоит только из свечения 520 $m\mu$ -центров.

Фосфор NaCl+Ag, Ca, кроме вышеуказанных полос, в составе I и II пиков ТСЛ содержит очень интенсивное свечение 380 $m\mu$ -центров. У NaCl+Ag, Ba фосфора, при наличии еще в решетке анионов J^- (0,6) наблюдается, кроме полосы свечения 249 $m\mu$, также весьма интенсивная полоса свечения 260 $m\mu$ Ag^+ J^- -центров, обусловленных соответственно изолированными ионами Ag^+ и ионами Ag^+ , деформированными их ближайшим анионным окружением. Если в спектральном составе I и II пиков ТСЛ этого фосфора наблюдаются полосы свечения 249, 260, 360, 400 и 520 $m\mu$, то в составе свечения III пика мы наблюдали полосы 360, 435 и 520 $m\mu$, а последний пик ТСЛ состоит только из свечения 520 $m\mu$ -центров.

После годичного старения указанных фосфоров, при котором происходит сильная ассоциация катионных и анионных вакансий в решетке, на кривых ТСЛ значительно уменьшается абсолютная интенсивность всех пиков, среди которых доминируют пики при 393°K. Соотношение интенсивностей остальных пиков ТСЛ у этих фосфоров отличается незначительно. Так, у NaCl+Ag, Ba фосфора после старения пропадает пик при 338°K, сильно подавлены пики при 373, 483 и 513°K, а у фосфоров NaCl+Ag, Ca и NaCl+Ag, Sr значительно ослаблены пики ТСЛ при 353°K и возрастает интенсивность пика при 443°K. У NaCl+Ag, Zn и NaCl+Ag, Cd после старения в отличие от NaCl+Ag доминирует I пик ТСЛ при 353°K, а интенсивность II пика более чем два раза меньше I. У этих фосфоров более высокотемпературных пи-

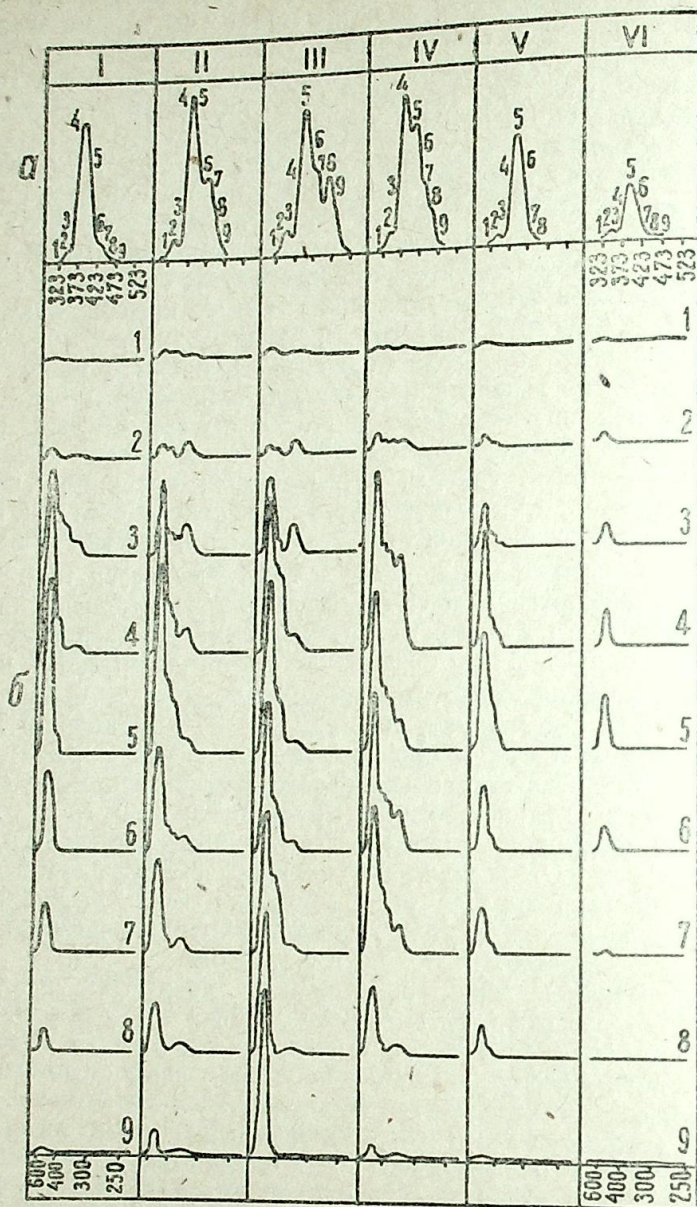
ков ТСЛ не наблюдается. После годичного старения вышеуказанных NaCl+Ag фосфоров в составе ни одного из пиков ТСЛ полосы свечения 250 $m\mu$ не наблюдается (даже у NaCl+Ag фосфоров с малой концентрацией серебра); сильно падает интенсивность полос 360 и 440 $m\mu$. Старение очень сильно уменьшает интенсивность коротковолновых полос свечения и значительно усиливает длинноволновые пики ТСЛ указанных фосфоров по окончании процесса старения. Кроме ионов Zn и Cd, наличие в решетке NaCl+Ag (0,5) остальных ионов приводит к росту интенсивности свечения полосы 360 $m\mu$. Хотя процесс старения значительно ослабляет эту полосу, однако свечение наблюдается в составе всех пиков ТСЛ, которые содержат также полосы 440 $m\mu$, обусловленные свечением В-центров.

После закалки NaCl+Ag фосфоров (рис.), при которой генерируется большое число вакансий (за счет ассоциированных таких образований) и улучшается внедрение ионов активатора в узлы решетки NaCl, происходит усиление интенсивности всех пиков ТСЛ по сравнению со свежеприготовленными фосфорами и особенно с состарившимися фосфорами. Однако относительная интенсивность I, II, III пиков при этом испытывает неодинаковое усиление, а зависимость их интенсивности от концентрации ионов Ag^+ в NaCl становится такой же, как у свежеприготовленных NaCl+Ag фосфоров. После закалки NaCl+Ag (0,5) фосфора с ионами Ca, Sr, Ba значительно возрастает интенсивность I пика ТСЛ и ослабляется высокотемпературный пик ТСЛ при 4-3°K. У фосфора NaCl+Ag, Ba, содержащего 0,6% анионов J^- , на кривых ТСЛ доминирует пик при 378°K. Уменьшение T_m пиков ТСЛ при 393°K на 5-10° происходит также у фосфора NaCl+Ag (0,5) с ионами Ca, Sr и без этих ионов. После закалки наблюдается обратное соотношение интенсивностей I и II пика ТСЛ NaCl+Ag, Zn и NaCl+Ag, Cd фосфоров, у которых в отличие от состарившихся фосфоров на кривых ТСЛ доминируют пики при 393°K. Однако абсолютная интенсивность пиков ТСЛ NaCl+Ag, Zn и NaCl+Ag, Cd фосфоров как до, так и после их закалки значительно меньше, чем у NaCl+Ag (0,5) фосфора с ионами Ca, Sr, Ba и без ионов.

Процесс закалки значительно больше влияет на спектры ТСЛ NaCl+Ag (0,5) фосфора. В максимуме I пика ТСЛ указанного фосфора доля свечения 360 и 395 $m\mu$ -центров значительно меньше, чем у незакаленного фосфора, а во II пике этого фосфора после закалки сильно растет относительная интенсивность полосы 440 $m\mu$.

После закалки NaCl+Ag с указанными ионами интенсивность коротковолновых полос свечения 395 и 360 $m\mu$ растет меньше, чем у остальных полос свечения. Очень однообразный состав свечения наблюдается у NaCl+Ag, Cd фосфора, у которого все пики ТСЛ состоят только из свечения 520 $m\mu$ -центров. По сравнению с NaCl+Ag, Cd фосфором у NaCl+Ag, Zn I пик значительно отличается по спектральному составу от II пика ТСЛ, в то время как у незакаленных NaCl+Ag, Zn фосфоров наблюдается такой же спектральный состав пиков ТСЛ, как для NaCl+Ag, Cd фосфора, т. е. свечения всех пиков ТСЛ состоят из полос 520 $m\mu$.

После отжига, который выводит часть ионов активатора из узлов решетки NaCl и способствует возникновению ассоциированных образований из катионных и анионных вакансий, происходит значительное ослабление абсолютной интенсивности всех пиков ТСЛ по сравнению с закаленными фосфорами. При этом относительная интенсивность I пика после отжига значительно ниже, чем у свежеприготовленного пика после отжига значительно ниже, чем у закаленных фосфоров. III пик ТСЛ этих фосфоров, но выше, чем у закаленных фосфоров.



В вертикальных колодках I, II, III, IV, V и VI приведены спектры, соответствующие: NaCl+Ag (0,5); NaCl+Ag (0,5), Ca (0,6); NaCl+Ag (0,5), Sr (0,6); NaCl+Ag (0,5), Ba (0,6); NaCl+Ag (0,5), Zn (0,6) и NaCl+Ag (0,5), Cd (0,6) фосфоров после их закалки от 600°C. а—кривые термостимулированной люминесценции; б—спектры термостимулированной люминесценции указанных фосфоров. Цифрами 1—9 обозначены, соответственно, интервалы нагрева (скорость 0,15 г/сек) 313—328; 333—348; 353—368; 373—388; 393—406; 410—423; 427—439; 443—456; 460—473°K.

Шкалы по осям абсцисс всюду как на крайних графиках.

фосфоров после отжига ведет себя аналогично I. На кривых ТСЛ интенсивность пиков при 385, 413 и 463°K почти такая же, как у пика (0,5) фосфора. Далее, как видно из рисунка, на кривых ТСЛ отожженного NaCl+Ag фосфора доминирует пик при 373°K, которому не уступают по интенсивности пики ТСЛ при 408 и 448°K. После отжига, кроме роста ин- (на 10—15°K) их T_m .

Сравнение спектров ТСЛ для различных этапов релаксационного процесса в этих фосфорах показывает, что у отожженных NaCl+Ag (0,5) фосфоров наблюдается различное разгорание и затухание полос свечения 360, 395 и 440 $m\mu$. Так, например, если у свежеприготовленных фосфоров NaCl+Ag (0,05) максимальное разгорание полосы 360 $m\mu$ соответствует максимуму I пика ТСЛ, то после отжига этого фосфора максимум разгорания указанной полосы перемещается в область II пика. Для полосы 530 $m\mu$ этого фосфора мы наблюдали обратную закономерность. Отжиг существенно влияет также на спектральный состав свечения отдельных пиков ТСЛ указанных фосфоров. Так, например, спектральный состав пиков ТСЛ закаленных NaCl+Ag, Cd и NaCl+Ag, Zn фосфоров после отжига приблизительно совпадает со спектральным составом этих фосфоров после их старения. Однако в отличие от последнего начало появления свечения полос 440 и 395 $m\mu$ сдвигается из области I пика в область II.

Резкие изменения в спектральном составе пиков ТСЛ наблюдаются у NaCl+Ag (0,5) фосфоров с ионами Ca^{2+} , Sr^{2+} и Ba^{2+} . Действительно, сравнение спектрального состава I пика ТСЛ NaCl+Ag, Sr после закалки и после отжига показывает, что полоса 385 $m\mu$ очень слабая после закалки этого фосфора, а после отжига имеет аномально высокую интенсивность. Она доминирует также в составе свечения II и III пиков ТСЛ и затухает только в области последнего пика. Таким образом, на основании этих результатов можно полагать, что центры, ответственные за полосу 385 $m\mu$, в присутствии ионов Sr^{2+} после отжига сильно размножаются или как-то процесс отжига сильно влияет на вероятность передачи энергии рекомбинации к указанным центрам свечения. Полоса 385 $m\mu$ максимально интенсивна в спектре ТСЛ отожженных фосфоров, у которых область максимального свечения этой полосы соответствует I, II и III пикам ТСЛ, в то время как у закаленных NaCl+Ag, Sr начало свечения этой полосы соответствует только II пику ТСЛ и в стадии максимального разгорания (область III и IV пиков) ее интенсивность в 2—3 раза меньше, чем у остальных полос свечения.

Аналогичное сравнение для NaCl+Ag, Ca фосфора показывает, что после отжига, кроме резкого ослабления общей интенсивности полос свечения 440, 520 $m\mu$, наблюдается некоторое возрастание интенсивности полосы 360 $m\mu$. Спектры ТСЛ NaCl+Ag, Ba фосфора после отжига ведут себя так же, как спектры ТСЛ фосфоров NaCl+Ag, Ca и NaCl+Ag, Sr, т. е. наряду с ослаблением полос 520 и 440 $m\mu$ происходит возрастание интенсивности полос 390 и 360 $m\mu$, область разгорания которых охватывает почти все пики ТСЛ (кроме последнего) указанного фосфора.

У фосфоров NaCl+Ag (0,75) и NaCl+Ag (0,5) после пластической деформации в отличие от недеформированных фосфоров очень сильно возрастают пики ТСЛ при 423 и 443°K и почти до нулевой интенсивности ослабевают пики при 353 и 393°K. В спектральном составе пиков ТСЛ указанных фосфоров после пластической деформации происходит возрастание доли свечения С-центров. Кроме этого, у фосфора

NaCl+Ag (0,05) после пластической деформации в отличие от недеформированных фосфоров полоса 360 $m\mu$ максимально разгорается не в области I пика ТСЛ, а в области III и IV пиков. При больших концентрациях Ag^+ в решетке NaCl у деформированных фосфоров в спектрах ТСЛ происходит также усиление абсолютной интенсивности полос свечения 525 $m\mu$.

Сравнение кривых ТСЛ и спектрального состава отдельных пиков вышеуказанных NaCl+Ag фосфоров с ионами Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} до и после их пластической деформации (перед рентгенизацией) показало, что интенсивность полос свечения В- и С-центров в спектрах ТСЛ пластически деформированных фосфоров растет значительно больше, чем у NaCl+Ag. Таким образом, после пластической деформации усиливается интенсивность длинноволновых полос свечения, обусловленных ионами активаторов, ассоциированных сточечными дефектами решетки число которых сильно растет после пластической деформации. Нагрев, NaCl+Ag фосфоров с примесями Ca, Sr, Ba до 383°K после их рентгенизации уничтожает все вышеуказанные пики ТСЛ и приводит к очень сильному возрастанию высокотемпературного пика ТСЛ, наблюдающегося у всех фосфоров при 475°K. После пластической деформации NaCl+Ag, Ba фосфора происходит падение I пика ТСЛ и сильно возрастает интенсивность пиков, расположенных при 418 и 463°K. Эти пики, по-видимому, связаны с центрами окраски, возникающими у дефектных узлов решетки, число которых после пластической деформации очень сильно возрастает.

Сравнение спектрального состава отдельных пиков ТСЛ вышеуказанных фосфоров показывает, что после нагрева NaCl+Ag (0,5) фосфоров с ионами Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} , Zn^{2+} , Cd^{2+} до 110°С спектры их ТСЛ состоят только из единственной слабой полосы свечения 520 $m\mu$, обусловленной свечением С-центров, в то время как у NaCl+Ag (0,5) фосфора без этих ионов после нагрева его до 110°С в спектрах ТСЛ наблюдаются, кроме интенсивных полос свечения 520 $m\mu$, также полосы 440 $m\mu$, обусловленные свечением В-центров. Эти результаты свидетельствуют о том, что наличие в решетке NaCl+Ag (0,5) ионов Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} , Zn^{2+} и Cd^{2+} уменьшает термическую стабильность В- и С-центров свечения. С другой стороны, полная неуничтожаемость спектров ТСЛ С-полос свечения после свечения после нагрева фосфоров NaCl+Ag (0,5) с указанными ионами свидетельствует в пользу мнения о том, что в образовании С-центров свечения существенную роль играют ионные процессы, усиливаемые в присутствии в решетке NaCl+Ag (0,5) указанных ионов.

Сравнение спектров рентгенолюминесценции со спектрами фосфоресценции и ТСЛ указанных фосфоров показывает, что в отличие от последних в спектрах рентгенолюминесценции наблюдается аномально высокое значение интенсивности полосы 250 $m\mu$, которая у свежеприготовленных фосфоров при всех концентрациях Ag^+ в решетке фосфоресценции и в спектрах ТСЛ в стадии максимального разгорания указанной полосы. С ростом содержания ионов Ag^+ в решетке NaCl от 0,05 до 0,75% интенсивность полосы 250 $m\mu$ уменьшается в спектрах фосфоресценции всего в 1,5 раза, в то время как в спектрах ТСЛ в интервале нагрева 293—493 К ее совсем не наблюдается. Процесс старения фосфоров ослабляет ее интенсивность в 2 раза в спектрах фосфоресценции, в 1,5 раза в спектрах рентгенолюминесценции, а в спектрах ТСЛ даже в области максимального разгорания указанной полосы в указанном интервале нагрева ее интенсивность не отличается от нуля.

После закалки рост интенсивности полосы 250 $m\mu$ в спектрах рентгенолюминесценции в 3—4 раза больше, чем в спектрах фосфоресценции. В спектрах ТСЛ после закалки состарившихся фосфоров на всех указанных стадиях релаксационного процесса этой полосы не наблюдается. Процесс отжига закаленных фосфоров приводит к ослаблению этой полосы в спектрах рентгенолюминесценции и фосфоресценции, но интенсивность ее превышает таковую у термически необработанных фосфоров.

Параллельное исследование спектров рентгенолюминесценции чистых монокристаллов NaCl показало, что интенсивность полосы 215 $m\mu$, обусловленной центрами свечения неактиваторного происхождения, в указанных спектрах при наличии в NaCl небольшого количества ионов Ag^+ стремится к нулю [2]. Поэтому описанное поведение интенсивности полосы 250 $m\mu$ в спектрах рентгенолюминесценции NaCl+Ag (0,01) не может быть обусловлено наложением свечения чистой решетки NaCl. В спектрах фосфоресценции и рентгенолюминесценции указанных NaCl+Ag (0,5) фосфоров с примесями Ca^{2+} , Sr^{2+} , Ba^{2+} наблюдаются те же полосы свечения, что в их спектрах ТСЛ. Однако полоса 250 $m\mu$ в спектрах рентгенолюминесценции свежеприготовленных NaCl+Ag, Sr и NaCl+Ag, Ba в 2—3 раза интенсивнее, чем полосы 360, 420, 520 $m\mu$, а в спектрах ТСЛ этого фосфора даже в области максимального разгорания указанной полосы ее интенсивность в 2—3 раза меньше, чем у остальных. У свежеприготовленных NaCl+Ag, Zn, NaCl+Ag, Cd фосфоров в спектрах ТСЛ полосы 250 $m\mu$ совсем не наблюдается (при концентрации Ag^+ , равной 0,5%).

После годичного старения указанных фосфоров полоса 250 $m\mu$ не наблюдается также в спектрах ТСЛ NaCl+Ag, Sr и NaCl+Ag, Ba фосфоров, в то время как в спектрах фосфоресценции и рентгенолюминесценции интенсивность этой полосы в процессе старения фосфора ослабляется всего в 2 раза и становится равной интенсивности длинноволновых полос свечения 435 и 520 $m\mu$. После старения вышеперечисленных фосфоров значительно растет в спектрах фосфоресценции и рентгенолюминесценции полоса 525 $m\mu$, обусловленная свечением С-центров. Закалка указанных фосфоров от 600°С приводит к значительному (в 3 раза) возрастанию интенсивности всех полос свечения во всех указанных спектрах рекомбинационной люминесценции. Однако полоса 250 $m\mu$ при этом растет только в спектрах фосфоресценции и рентгенолюминесценции, а в спектрах ТСЛ ее интенсивность, даже в области ее максимального разгорания, не отличается от нуля.

Кроме указанного, после отжига вышеперечисленных фосфоров полосы 250 $m\mu$ ослабляются по сравнению с закаленными, но отсутствуют в спектрах фосфоресценции и рентгенолюминесценции, но отсутствуют в спектре ТСЛ. Вышеизложенные факты свидетельствуют о наличии существенной разницы в передаче энергии с дырками свободными ионами Ag^+ , когда рекомбинирующие с дырками свободные электроны освобождаются от неглубоких ловушек с глубиной 0,02 эВ при фосфоресценции и рентгенолюминесценции, и от более глубоких при фосфоресценции и рентгенолюминесценции. Они состоят из двух компонентов, из которых коротковолновые обусловлены изолированными ионами Ag^+ , а длинноволновые — ионами Ag^+ , деформированными ближайшим дефектным окружением. Расстояние между этими компонентами в зависимости от рода вышеуказанных примесей такое же, как и в спектрах ТСЛ. После старения и отжига растет относительная интенсивность длинноволновых полос свечения, а после закалки происходит обратное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клемент Ф. Д. Тр. ИФА АН ЭССР, I, 1955; 7, 1956; 14, 1961.
2. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочно-галогидных соединений. Саратов, 1960.
3. Парфианович И. А. Дисс. М., 1958.
4. Лущик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 3, 1955.
5. Лущик Н. Е. Тр. ИФА АН ЭССР, 14, 1961.
6. Гиндина Р. И., Лущик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, 15, 1961.
7. Ребанс Л. А. Тр. ИФА АН ЭССР, 14, 15, 17, 1961.
8. Яэк И. В. Тр. ИФААН ЭССР, 10, 1959, 12, 1960.
9. Заитов Ф. Н., Карк В. Я. Тр. ИФА АН ЭССР, № 6, 1957.
10. Bohun A. Чехосл. физ. журн., 5, 64, 1955; 6, 141, 1956.
11. Черненко В. П., Заитов Ф. Н., Луканцев Ю. Л., ЖОС, 15, 86, 1963.
12. Williams E., Johnson P. J. Chem. Phys., 25, 125, 1953.
13. Халилов А. Х. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук", 2, 3, 5, 1964.
14. Халилов А. Х., Мамедов А. П. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук", № 6, 1963.
15. Hill J. T., Schwed P. J. Chem. Phys., 23, 652, 1955.
16. Халилов А. Х., Мамедов А. П. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук", № 5, 1960.

Поступило

Э. Х. Халилов

**NaCl+Ag фосфорларынын мухталиф невр рекомбинасиялы
люминесценсия спектрлерине микродефектлерин пайланмасынын
таъсиринин тедгиги**

ХУЛАСЭ

Мегаледэ NaCl+Ag фосфорларынын мухталиф невр рекомбинасиялы
люминесценсия спектрлерине термик ишленме вэ пластик деформация
процесслеринин таъсиринин тедгиги нэтичелери шарх едилмишдир.
Кестерилмишдир ки, хамин процесслерин таъсири илэ рекомбинасиялы
ишыгвермедэ II невр меркэзин ишыгвермеси кучлу артыр вэ электронларын
локал савијјелерде пайланмасы кэскин дэјишир.

АЗЕРБАЙДЖАН ССР ЕЛМЛЕР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ
Физика-техника вэ ријазиијат елмлери серијасы, 1965, № 5

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 5

Р. Ш. ЯХЬЯЕВ, Ф. С. САДЫХОВ

УЧЕТ ФОРМФАКТОРОВ И ПРОДОЛЬНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЙ СПИНОВ ЧАСТИЦ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ АННИГИЛЯЦИИ

$$p + p \rightarrow \mu^- + \mu^+$$

Исследование структуры элементарных частиц является одной из
важных проблем физики элементарных частиц. Электромагнитная анни-
гиляция протонно-антипротонных пар на два мюона позволяет полу-
чить ценные сведения о структуре протонов и мюонов. Исследование
этого процесса дает возможность изучить формфакторы частиц в об-
ласти временноподобных значений передаваемого импульса.

В работах [1,2] был исследован процесс двухмюонной аннигиля-
ции протонно-антипротонных пар без учета поляризационных состоя-
ний частиц и формфакторов мюона. В работе [1] показано, что форм-
факторы, определенные в области временноподобных значений пере-
даваемого импульса, приводят к поляризации протонов, изучение
которой представляет большой интерес.

Учет формфакторов частиц при образовании протонно-антипротон-
ных пар на встречных электрон-позитронных пучках рассматривался в
работах [3,4]. В работе [4] показано, что в подавляющем большинстве
случаев образование протонно-антипротонных пар происходит за счет
столкновения электронных и позитронных пучков, с продольными по-
ляризациями разного знака.

В настоящей работе изучается двухмюонная аннигиляция протонно-
антипротонных пар с учетом формфакторов и продольных поляриза-
ций спинов частиц в системе центра инерции. Полученные в работе
выражения для эффективного сечения аннигиляции протонно-антипро-
тонных пар позволяют исследовать влияние формфакторов на их уг-
ловое и энергетическое распределение, а также на продольную спи-
новую корреляцию всех участвующих частиц в данном процессе.

Дифференциальное эффективное сечение процесса $p + p \rightarrow \mu^- + \mu^+$
в однофотонном приближении имеет следующий вид*:

$$d\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{32M^2} \frac{\beta_\mu}{\beta_\gamma^2} \left\{ \Phi_0(\theta) + s_\mu s'_\mu \Phi_1(\theta) + s_p s'_p \Phi_2(\theta) + \right. \\ \left. + (s_\mu s_p + s'_\mu s'_p - s_\mu s'_p - s'_\mu s_p) \Phi_3(\theta) + s_\mu s'_\mu s_p s'_p \Phi_4(\theta) \right\} d(\cos\theta) \quad (1)$$

* В работе принята система $c = h/2\pi = 1, \frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137}$.

где

$$\begin{aligned}
\Phi_0(\theta) &= a_1 \varphi_0 + a_2 (\varphi_0 + \delta_0) + a_3 \varphi'_0 + a_4 (\varphi'_0 + \delta'_0) - \\
&- b_1 (3 - \beta_\mu^2) - b_2 (3 - 2\beta_\mu^2) - [3a_0 - b_3 (1 + 2\gamma^2) - b_4 (2 + \gamma^2)] \beta_{0\mu}, \\
\Phi_1(\theta) &= a_1 (\varphi_0 - 2\xi_0) - a_2 (\varphi_0 - 2\xi_0 + \delta_1) + \\
&+ a_3 (\varphi'_0 - 2\xi'_0) - a_4 (\varphi'_0 - 2\xi'_0 + \delta'_1) + b_1 (1 + \beta_\mu^2) + \\
&+ b_2 (1 - 2\beta_\mu^2) + [a_0 - (b_3 + \gamma^2 b_4) + 2(1 - \gamma^2)(b_3 - b_4) \cos^2 \theta] \beta_{0\mu}, \\
\Phi_2(\theta) &= a_1 \varphi_1 - a_2 (\varphi_1 + \delta_1) + a_3 \varphi'_1 - a_4 (\varphi'_1 + \delta'_1) + \\
&+ b_1 (\beta_\mu^2 - 1 + 2(1 - \beta_\mu^2 \sin^2 \theta)) + b_2 (1 - 2\beta_\mu^2 \cos^2 \theta) + \\
&+ [a_0 + b_3 (1 - 2\gamma^2) - b_4 (2 - \gamma^2)] \beta_{0\mu}, \\
\Phi_3(\theta) &= -2 \cos \theta [a_1 \gamma^2 + a_3 + (a_2 + a_4 \gamma^2 - b_2)(1 - \beta_\mu^2) - \\
&- b_1 - (a_0 - b_3 \gamma^2 - b_4) \beta_{0\mu}], \\
\Phi_4(\theta) &= a_1 (\varphi_1 - 2\xi_1) + a_2 (\varphi_1 - 2\xi_1 + \delta_0) + a_3 (\varphi'_1 - 2\xi'_1) + \\
&+ a_4 (\varphi'_1 - 2\xi'_1 + \delta'_0) - b_1 (1 + \beta_\mu^2 - 4 \sin^2 \theta) + \\
&+ 2(1 - \beta_\mu^2 \cos^2 \theta) + b_2 (-1 + 4 \sin^2 \theta - 2(1 - \beta_\mu^2 \cos^2 \theta)) + \\
&+ [a_0 (1 - 4 \cos^2 \theta) - (b_3 + b_4 \gamma^2) + 2(1 + \gamma^2)(b_3 + b_4) \cos^2 \theta] \beta_{0\mu}, \\
a_0 &= \kappa_a \kappa_\mu \gamma_0 (f_1^+ f_2 + f_1 f_2^+) (F_1^+ F_2 + F_1 F_2^+), \\
a_1 &= \frac{1}{\gamma^2} |f_1|^2 |F_1|^2, a_2 = \kappa_a^2 \kappa_\mu^2 \gamma_0^2 |f_2|^2 |F_2|^2, \\
a_3 &= \kappa_a^2 |f_1|^2 |F_2|^2, a_4 = \kappa_a^2 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^2 |f_2|^2 |F_1|^2, \\
b_1 &= \kappa_a |f_1|^2 (F_1^+ F_2 + F_1 F_2^+), \\
b_2 &= \kappa_a \kappa_\mu^2 \gamma_0^2 |f_2|^2 (F_1^+ F_2 + F_1 F_2^+), \\
b_3 &= \frac{\gamma_0}{\gamma^2} \kappa_a |F_1|^2 (f_1^+ f_2 + f_1 f_2^+), b_4 = \kappa_a \kappa_\mu \gamma_0 |F_2|^2 (f_1^+ f_2 + f_1 f_2^+), \\
\varphi_{0,1} &= (1 - \beta_\mu^2 \cos^2 \theta) \mp \gamma^2 (2 - \beta_\mu^2 \sin^2 \theta), \\
\varphi'_{0,1} &= \gamma^2 (1 - \beta_\mu^2 \cos^2 \theta) \mp (2 - \beta_\mu^2 \sin^2 \theta), \\
\xi_{0,1} &= \sin^2 \theta \mp \gamma^2 (1 + \cos^2 \theta), \xi'_{0,1} = \gamma^2 \sin^2 \theta \mp (1 + \cos^2 \theta), \\
\delta_{0,1} &= 1 - \beta_\mu^2 \pm \gamma^2, \delta'_{0,1} = \pm 1 \mp \gamma^2 (1 - \beta_\mu^2), \\
\gamma &= \frac{E}{M}, \gamma_0 = \frac{E}{\mu}, \beta = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma}, \beta_\mu = \frac{\sqrt{\gamma_0^2 - 1}}{\gamma_0}, \beta_{0\mu} = \frac{1}{\gamma_0}.
\end{aligned}$$

Здесь нижний знак относится к функциям с индексом ноль, а верхний — с индексом единица; F_1, F_2 и f_1, f_2 — электромагнитные формфакторы; κ_a и κ_μ — аномальные магнитные моменты; M и μ — массы протона и мюона, соответственно; E и θ — полная энергия протона и угол вылета мюона в системе центра инерции; s_p (s_p) = ± 1 и s_μ (s_μ) = ± 1 — удвоенная проекция спина протона (антипротона) и μ^- — мезона (μ^+ — мезона) на их импульсы [5].

При усреднении по поляризациям протона-антипротона и суммировании по спиновым состояниям мюонов, а также при $f_1 = 1, f_2 = 0$ формула (1) как частный совпадает с результатом Кабиббо и Гатто [1]. Производя интегрирование по углу вылета мюона θ , из (1) получаем следующую формулу для полного эффективного сечения:

$$\sigma = \frac{\pi \alpha^2}{48 M^2} \frac{\beta_\mu}{\beta_\mu^2} [G_0(E) + s_\mu s'_\mu G_1(E) + s_p s'_p G_2(E) + s_\mu s'_\mu s_p s'_p G_3(E)], \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}
G_0(E) &= [(a_1 + a_2)(1 + 2\gamma^2) + (a_3 + a_4)(2 + \gamma^2) - \\
&- 3b_1](3 - \beta_\mu^2) + 3(a_2 \delta_0 + a_4 \delta'_0) - 3b_2(3 - 2\beta_\mu^2) - \\
&- 3[3a_0 - b_3(1 + 2\gamma^2) - b_4(2 + \gamma^2)] \beta_{0\mu}, \\
G_1(E) &= [(a_2 - a_1)(1 + 2\gamma^2) + (a_4 - a_3)(2 + \gamma^2) + \\
&+ 3b_1](1 + \beta_\mu^2) - 3(a_2 \delta_1 + a_4 \delta'_1) + 3b_2(1 - 2\beta_\mu^2) + \\
&+ [3a_0 - 3(b_3 + \gamma^2 b_4) + 2(b_3 - b_4)(1 - \gamma^2)] \beta_{0\mu}, \\
G_2(E) &= [(a_1 - a_2)(1 - 2\gamma^2) - (a_3 - a_4)(2 - \gamma^2) + \\
&+ b_1](3 - \beta_\mu^2) - 3(a_2 \delta_1 + a_4 \delta'_1) + b_2(3 - 2\beta_\mu^2) + \\
&+ 3[a_0 + b_3(1 - 2\gamma^2) - b_4(2 - \gamma^2)] \beta_{0\mu}, \\
G_3(E) &= -\{[(a_1 + a_2)(1 - 2\gamma^2) - (a_3 + a_4)(2 - \gamma^2) + \\
&+ b_1](1 + \beta_\mu^2) - 3(a_2 \delta_0 + a_4 \delta'_0) + b_2(1 - 2\beta_\mu^2) + \\
&+ [a_0 + 3(b_3 + \gamma^2 b_4) - 2(b_3 + b_4)(1 + \gamma^2)] \beta_{0\mu}\}.
\end{aligned}$$

Из выражения следует, что в отличие от дифференциального сечения процесса $p + p \rightarrow \mu^- + \mu^+$ полное сечение не зависит от барион-лептонных спиновых корреляций. При аннигиляции право ($s_p s_p = 1$)-и лево ($s_p s_p = -1$)-поляризованных протонно-антипротонных пар могут образоваться мюоны с правой ($s_\mu s_\mu = 1$) и левой ($s_\mu s_\mu = -1$) продольной поляризацией, причем с различной вероятностью.

Усредняя по поляризациям протон и антипротон, из (2) получаем

$$\bar{\sigma} = \frac{\pi \alpha^2}{48 M^2} \frac{\beta_\mu}{\beta_\mu^2} [G_0(E) + s_\mu s'_\mu G_1(E)]. \quad (3)$$

Из (3) видно, что в случае аннигиляции неполяризованных протонно-антипротонных пар мюонные пары могут быть образованы либо правой ($s_\mu s_\mu = 1$), либо левой ($s_\mu s_\mu = -1$) продольной поляризацией.

Для иллюстрации полученных формул (1) и (2) оценим влияние формфакторов протона (F_1 и F_2) на угловое и энергетическое распределение процесса $p + p \rightarrow \mu^- + \mu^+$. При этом предполагается, что образованные мюоны являются точечными и не обладают аномальным магнитным моментом ($f_1 = 1, f_2 = 0$).

Из свойства резонанса для формфакторов протона в области временноподобных значений передаваемого импульса известно [6]:

$$F_1 = 1 - \frac{1,18 q^2}{q^2 + 30 m_\pi^2}, F_2 = 1 - \frac{1,59 q^2}{q^2 + 30 m_\pi^2};$$

здесь m_π — масса мюона, q — передаваемый импульс.

Количественный анализ производится для следующих случаев:

а) все участвующие частицы неполяризованные,

б) при $s_p = s_p = \pm 1, s_\mu = -s_\mu = 1$ или -1 .

На рис. 1 показана зависимость дифференциального сечения процесса $p + p \rightarrow \mu^- + \mu^+$ от угла вылета мюона. Кривые 1 и 2 соответствуют случаю а), а 3 и 4 — случаю б).

На рис. 2 представлена зависимость полного сечения аннигиляции протон-антипротонных пар от энергии протона. Кривые 1 и 2 относятся к случаю а); 3 и 4 — к случаю б).

Как для первого, так и для второго рисунка кривые с нечетными номерами относятся к случаю точечного протона, а с четными номерами — к случаю протяженного протона с формфакторами [4]. Из рис. 1 и 2 видно, что формфакторы протона оказывают сильное влияние на угловое и энергетическое распределение аннигиляции как поляризованных, так и неполяризованных протон-антипротонных

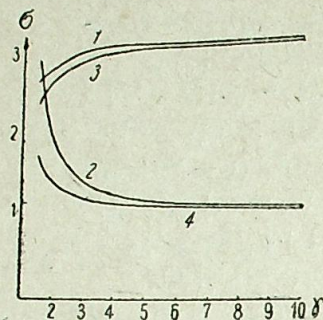


Рис. 1 Зависимость дифференциального сечения от угла вылета мисона при $\gamma=1,5$ (в единицах $\frac{\pi\alpha^2}{6M^2}$); кривые 1 и 3 относятся к точечным, а 2 и 4 — к протяженным протонам.

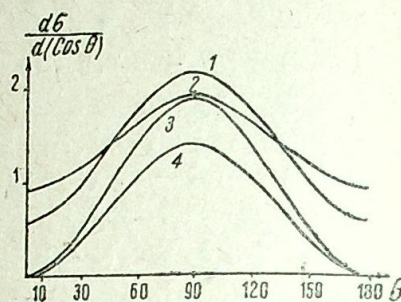


Рис. 2. Зависимость полного сечения от энергии протона (в единицах $\frac{\pi\alpha^2}{6M^2}$), кривые 1 и 3 относятся к точечным, а 2 и 4 — к протяженным протонам.

пар на два мюона. Причем во всех рассмотренных выше случаях формфакторы протона заметно уменьшают значения углового и энергетического распределения (кривые 2 и 4) по сравнению с их соответствующими значениями, относящимися к точечному протону (кривые 1 и 3).

Следует подчеркнуть, что полученные нами результаты для процесса $p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+$ при $\beta_\mu \rightarrow 1, s_\mu \rightarrow s_e, s_\mu \rightarrow s_e$ также верны и для процесса $p + \bar{p} \rightarrow e^- + e^+$.

В заключение выражаем свою благодарность Б. К. Керимову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cabibbo N., Gatto R., Berman S., Zichichi A. Nuovo Cimento, 24, 170, 1962.
2. Barnes K. J. Nuovo Cimento, 28, 284, 1963.
3. Байер В. Н. УФН, 79, 619, 1962.
4. Садыхов Ф. С., Джафаров И. Г., Яхьяев Р. Ш. ЖЭТФ (в печати).
5. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. М., 1958.
6. Eubini S. Proc. of the Aix-en-Provence Intern. Conf. on elementary particles (1961).

Поступило 19. IX 1964

Р. Ш. Јаҗајев, Ф. С. Садыхов

Һиссәчикләрин формфакторларынын вә узунуна полјаризасиянын
 $p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+$ просесиндә нәзәрә алынмасы

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә протон вә антипротон чүтүнүн ики мјонлу аннигиляция просесиндә һиссәчикләрин формфакторларынын вә спинләрин узунуна полјаризасиясы шәрһ едилир. $p + \bar{p} \rightarrow \mu^- + \mu^+$ просеси үчүн алынған эффектив кәсик һиссәчикләрин формфакторларынын бучаг вә энержи

пајланмасына, һабелә һиссәчикләрин узунуна спин коррелјасиясына тәсирини өјрәнмәјә имкан верир. Алынған нәтичәләр кестәрир ки, протонун формфакторлары бучаг вә енержи пајланмасыны, нөгтәви протона нисбәтән нәзәрә чар-пачаг дәрәчәдә азалдыр.

В. Ц. ГУРОВИЧ, О. Х. ГУСЕЙНОВ

О ПРЕДЕЛЬНОЙ МАССЕ СВЕРХПЛОТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В настоящее время массы статических сверхплотных конфигураций, полученные по теории Ньютона и Эйнштейна как для идеального, так и реального холодного Ферми-газа, хорошо известны [1, 2, 3, 4]. Знание параметров таких конфигураций важно потому, что они определяют предельную массу неколлапсирующих за гравитационный радиус холодных тел.

При расчете предельной массы таких конфигураций не принималось во внимание два фактора, имеющих место при образовании гиперонных звезд: наличие тепловой энергии и вращательного момента. Оба эти фактора, очевидно, будут увеличивать предельную массу конфигураций.

В данной статье в первом параграфе проводится оценка возможного увеличения предельной массы за счет вращения и тепловой энергии, во втором параграфе строится модель релятивистской вращающейся звезды и обсуждаются эффекты с ней связанные помимо увеличения массы.

§ 1. Для оценки изменения массы звезды за счет вращения воспользуемся предельно упрощенной моделью. Будем считать, что центробежная сила

$$F = \frac{\varepsilon v^2}{rc^2} = \frac{\varepsilon}{r} \beta^2 \quad (1)$$

действует изотропно по всем направлениям. При такой постановке задачи можно пользоваться уравнениями Эйнштейна для статической конфигурации с учетом центробежной силы:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} \varepsilon r^2; \quad \frac{dP}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} \beta^2 = - \frac{G(P + \varepsilon)}{r^2(c^2 r - 2GU)} \left(\frac{4\pi}{c^2} r^3 p + U \right). \quad (2)$$

Здесь U —масса, накопленная в сфере с радиусом r , P —давление. Зависимость давления от радиуса ищем в виде

$$P = Aa r^{-n}, \quad \varepsilon = ar^{-n}. \quad (3)$$

Интегрируя первое уравнение системы (2), получим

$$U = \frac{4\pi}{c^2} \frac{a}{3-n} r^{3-n}. \quad (4)$$

Подставляя (4) во второе уравнение системы (2), из требования тождественного его выполнения найдем для a и n следующие значения:

$$= \frac{(2A + \beta^2) c^4}{4\pi G[(A + 1)^2 + 2(2A + \beta^2)]}; \quad n = 2 \quad (5)$$

Из (3) и (4) видно, что зависимость массы и ее распределения от скорости вращения выражается через a , поэтому достаточно рассмотреть изменение a :

	$A = 1$			$A = 1/3$		
	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 = 1/9$	$\beta^2 = 1/4$	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 = 1/9$	$\beta^2 = 1/4$
$\frac{a}{c^4/\pi b}$	$6,25 \cdot 10^{-2}$	$6,42 \cdot 10^{-2}$	$6,62 \cdot 10^{-2}$	$5,36 \cdot 10^{-2}$	$5,63 \cdot 10^{-2}$	$6,35 \cdot 10^{-2}$

В Ньютоновском случае имеем систему:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} \varepsilon r^2; \quad \frac{dP}{dr} - \frac{\varepsilon}{r} \beta^2 = - \frac{G\varepsilon U}{c^2 r^2}, \quad (6)$$

из которой для n и a получим

$$n = 2, \quad a = 2(2A + \beta^2) c^4 / 4\pi G \quad (7)$$

	$A = 1$			$A = 1/3$		
	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 = 1/9$	$\beta^2 = 1/4$	$\beta^2 = 0$	$\beta^2 = 1/9$	$\beta^2 = 1/4$
$\frac{a}{c^4/\pi b}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5,28 \cdot 10^{-1}$	$5,62 \cdot 10^{-1}$	$1,63 \cdot 10^{-1}$	$1,94 \cdot 10^{-1}$	$2,29 \cdot 10^{-1}$

Из этих данных, соответственно для эйнштейновского и ньютоновского случаев, видно влияние вращения конфигурации на массу его ядра. Полная масса и радиус конфигурации не будут существенно отличаться от этих же параметров его ядра, как и в случае невращающейся конфигурации. Это является следствием того, что когда давление сильно падает (область с $A \ll 1$) вследствие уменьшения плотности, центробежная сила совместно с градиентом давления уже не может уравновесить гравитационную силу. В эйнштейновском случае массы конфигураций из взаимодействующего и идеального газов могут быть увеличены (при учете также лоренцова приращения массы) соответственно на ~ 4 и $\sim 10\%$. Эта оценка относится к звездам с моментами порядка 2—3 солнечных. В ньютоновском случае увеличение массы гораздо больше, но это решение служит лишь для лучшего понимания эйнштейновских результатов и далеко от реальности.

Перейдем к оценке увеличения массы за счет тепловой энергии. Если бы звезда сохраняла энергию неизменной при переходе из обычного состояния в гиперонное, то верхнее значение температуры конфигурации ($c\rho(0) < 10^{16}$ г/см³) находилось бы из соотношения

$$\frac{3}{2} \kappa T = \frac{m_n N - M}{N} = 10^{-1} \frac{M_\odot c^2}{10^{57}} = 1,8 \cdot 10^{-4}, \quad (8)$$

здесь κ —постоянная Больцмана, m_n —масса нейтрона, M —масса, а N —число нуклонов сверхплотной конфигурации. Найденное из (8) значение температуры равно $T = 8,710^{11}$ (нуклоны при такой температуре можно считать нерелятивистскими). Порядок ядерных реакций. Но температура конфигурации очень быстро понижается до $T \approx 10^9$, возможно, $T \sim 10^{11}$ вовсе и не достигается. Причиной этому является потеря энергии звездой в виде нейтринных пар $\nu, \bar{\nu}$, возникающих при

аннигиляции электронов позитронами, которыми обильна звезда вследствие сверхвысокой температуры [5].

Температура вырождения нуклонного газа имеет порядок

$$T_b = \left(\frac{6\pi}{g} \right)^{2/3} \frac{(h/2\pi)^2}{3m_n k} n^{2/3} \sim 1,210^{-14} n^{2/3} \sim 10^{11}, \quad (9)$$

о сюда отношение парциальных плотностей энергии теплового движения к энергии вырождения имеет порядок $\sim 10^{-2}$, а это значит, что масса конфигурации и ее распределение изменятся совершенно неощутимо.

§ 2. Как показывают расчеты структуры нейтронных и гиперонных звезд, последние имеют ярко выраженное ядро, имеющее большую часть массы конфигурации и находящееся в состоянии ультрарелятивистского газа ($P \sim c^2 \rho$) и небольшое по массе и размерам оболочку с уравнением состояния, близким к обычному.

Относительное малое вращение, порядок которого будет указан ниже, вызовет слабое отклонение ядра конфигурации от сферической формы. Наиболее сильно вследствие вращения будет деформироваться оболочка звезды, где отношение центробежной силы к градиенту давления максимально.

Для определения параметров слабо вращающейся конфигурации применяется обобщение известной в нерелятивистской теории модели Роша [6].

Сущность указанной модели заключается в том, что пренебрегают гравитационным полем оболочки вследствие малости массы последней по сравнению с массой ядра. Оболочка вращается фактически во внешнем гравитационном поле ядра, отклонением от сферичности которого можно пренебречь.

Задача сводится теперь к нахождению поля большой сферически симметричной и слабо вращающейся массы. Слабое гравитационное поле сферически симметричной вращающейся массы известно; в отличие от ньютоновского приближения оно имеет дополнительный компонент метрического тензора:

$$g_{0\varphi} = \frac{2GM}{c^3 r} \sin^2 \theta. \quad (10)$$

Но, как известно, потенциал гравитационного поля ядра $\varphi \sim c^2$, поэтому непосредственное применение результата (10) к рассматриваемой задаче необоснованно.

Поле слабо вращающейся большой сферически симметричной массы рассматривалось в работах [7,8]. Методом теории возмущения к метрике Шварцшильда показано, что в случае слабого вращения ($M < MR_g c$, где R_g — гравитационный радиус массы) результат справедлив вплоть до гравитационного радиуса. Другие поправки к метрике Шварцшильда могут быть обращены в нуль.

Таким образом, оболочка нейтронной звезды вращается в поле с метрикой:

$$\begin{aligned} -g_{00} = g^{11} &= (1 - R_g/r); \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta; \\ g_{0g} &= \frac{a}{r} \sin^2 \theta; \quad g^{0\varphi} = \frac{a}{r^3} (1 - R_g(r)^{-1}); \quad a = \frac{2GM}{c^3} = \frac{R_g^2 M}{M R_g c}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для описания движения оболочки воспользуемся релятивистским уравнением Эйлера [9]:

$$w U^k U_{i;k} = - \frac{\partial P}{\partial x^i} - U^k U_i \frac{\partial P}{\partial x^k}. \quad (12)$$

Здесь w — тепловая функция; $w = P + \rho c^2$, P — давление, ρ — плотность вещества, U^i — четырехскорость, точкой с запятой обозначено ковариантное дифференцирование по метрике (11).

В рассматриваемой задаче отличными от нуля будут компоненты четырехскорости U^0 и U^φ и все компоненты (12) зависят от переменных r и θ . Отсюда из четырех уравнений (10) два выполняются тождественно ($i=0,3$), а два других дают

$$w = U^k U_{i;k} = - \frac{\partial P}{\partial r}; \quad w U^k U_{2;k} = - \frac{\partial P}{\partial \theta}. \quad (13)$$

Выражения $U^k U_{i;k}$ и $U^k U_{2;k}$ есть уравнения геодезические в стационарном поле (11), которые, однако, здесь не являются уравнениями движения ввиду наличия градиентов давления.

Используя соотношения [10], приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{w}{Q^2} \left[-\frac{1}{2} \frac{R_g/r^2}{(1 - R_g/r)} - \frac{a \sin^2 \theta \dot{\varphi}}{r^2 (1 - R_g/r)^{3/2} c} + \frac{\dot{\varphi}^2 r \sin^2 \theta}{r^2} \right] &= \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \frac{w}{Q^2} \left[\frac{2a \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}}{r (1 - R_g/r)^{1/2} c} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta}{c} \right] &= \frac{\partial P}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$Q^2 = 1 - g_{33} \dot{\varphi}^2 / c^2$$

Здесь компонент $\dot{\varphi}$ измерен в собственном синхронизированном времени [10], R_g и a в соответствии с (11) определяются массой и моментом ядра конфигурации.

Из первого уравнения (14) следует, что действие центробежной силы в некотором смысле "нейтрализуется" возросшей силой тяготения (второе слагаемое). Указанный эффект существует вследствие того, что оболочка и ядро вращаются в одном направлении. В противном случае второй член менял бы знак (направление вращения выбирается по вращению ядра) и приводил бы к большей деформации оболочки.

В системе (14) вращение считается баротропным, т. е. оно есть функция от r . С целью упрощения системы (14) воспользуемся малостью параметра $r\omega/c$ (следствие малости вращения), разложим в ряд Q^{-2} и, ограничиваясь порядком $(r\omega/c)^2$, получим

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{2} \frac{R_g/r^2}{(1 - R_g/r)} \left(1 + r^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2} \right) - \frac{a \sin^2 \theta \dot{\varphi}}{r^2 (1 - R_g/r)^{3/2} c} + \right. \\ \left. + \frac{\dot{\varphi}^2 r \sin^2 \theta}{c^2} \right] &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \end{aligned} \quad (15)$$

$\left[\frac{2a \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}}{r (1 - R_g/r)^{1/2} c} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta}{c^2} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$. Здесь с учетом уравнения состояния $\rho = f(P)$ введена функция

$$\psi = \int \frac{dP}{P + c^2 f(P)}. \quad (16)$$

Необходимым условием решения системы (15) является ее совместность, которая накладывает ограничения на выбор $\varphi(r)$.

Легко видеть, что при вращении с постоянной угловой скоростью φ , измеренной по собственному синхронизированному времени, условие совместности не выполняется.

Наиболее естественным предположением является твердотельное вращение с точки зрения внешнего наблюдателя, т. е. $d\varphi/dt = \omega = \text{const.}$ Указанное предположение для φ дает следующее выражение [10]:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\tau} \approx \frac{\omega}{(1 - R_g/r)^{1/2}}, \quad (17)$$

где в соответствии с применяемым в системе (15) приближением пренебрегаем поправкой на синхронизацию часов.

С учетом (17) из (15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{\omega^2 r \sin^2 \theta}{c^2 (1 - R_g/r)} - \frac{a \sin^2 \theta \omega}{r^2 (1 - R_g/r)^2 c} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{R_g/r^2}{(1 - R_g/r)} \left[1 + \frac{r^2 \sin^2 \theta \omega^2}{c^2 (1 - R_g/r)} \right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{2a \sin \theta \cos \theta \omega}{r (1 - R_g/r) c} + \frac{r^2 \omega^2}{(1 - R_g/r) c^2} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (18)$$

В этом случае выполняется условие совместности двух уравнений, после чего их решение можно представить в виде

$$\psi = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{r^2}{(1 - R_g/r)} \frac{\sin^2 \theta}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 - R_g/r) + \frac{\omega a}{rc} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - R_g/r)} + K. \quad (19)$$

Значение K определяется из граничного условия на сфере R —границе ядра конфигурации, где задано значение $\psi(R) = \psi_0$, при этом

$$\begin{aligned} \psi - \psi_0 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{r^2}{1 - R_g/r} - \frac{R^2}{1 - R_g/R} \frac{\sin^2 \theta}{2} + \ln \sqrt{\frac{1 - R_g/R}{1 - R_g/r}} + \right. \\ &\left. + \frac{\omega a \sin^2 \theta}{c} \left[\frac{1}{r - R_g} - \frac{1}{R - R_g} \right] \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Выражение (20) дает значение ψ (плотности и давление) во вращающейся оболочке как функции r и θ .

Для определения внешней формы звезды следует положить в (20) $F(P, P_0) = \psi - \psi_0$, $P = 0$, после чего найдем уравнение поверхности звезды.

Как отмечалось выше, толщина оболочки нейтронной конфигурации на порядок меньше размеров ее ядра, отсюда для оценки формы вращающейся звезды можно ввести параметр $\Delta = r - R$, где r —координата точек поверхности, а R —радиус ядра, так что величиной $(\Delta/R)^2$ можно пренебречь.

При этом из (20) имеем

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{B(1 - R_g/R)^2}{c^2(R_g/R - R_g^2/R^2) - \omega^2(2R^2 - 3R_g R) \sin^2 \theta + 2a \omega c \sin^2 \theta / R}. \quad (21)$$

Здесь введен параметр $B = -2c^2 F(0, P_0)$.

Как отмечалось выше, для всей оболочки выбрано одно и то же уравнение состояния и потому параметр A может быть определен из расчетов невращающейся конфигурации.

Для сверхплотной конфигурации с центральной плотностью $\rho(0) \rightarrow \infty$, массой, равной $1,1 M_\odot$ и моментом вращения порядка четверти солнечного величина Δ/R на полюсе ($\theta = 0$) составляет 0,127, в то время как это же отношение на экваторе ($\theta = \pi/2$) составляет 0,146. При моменте вращения, близком к солнечному, это же отношение на экваторе равно 0,17.

В заключение выражаем благодарность Д. Д. Иваненко и К. П. Станюкевичу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oppenheimer I. R., Volkoff G. M. Phys. rev., 55, 374, 1939.
2. Саакян Г. С. "Астр. ж.", 39, 1014, 1952.
3. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л. "Астр. ж." 43, 193, 1964.
4. Гусейнов О. Х. Тезисы II Сов. грав. конференции. апрель 1965 г.
5. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. УФН, 84, 377, 1964.
6. Крат В. А. Фигуры равновесия небесных тел. М., Гостехиздат, 1950.
7. Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. ЖЭТФ, т. 47, 1965 (в печати).
8. Гурович В. Ц. "Астр. ж.", 1955 (в печати).
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. ГИТТЛ, 1956.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Ф. М., 192.

Поступило

В. С. Гурович, О. Х. Гусейнов

Ифрат сыхлыглы конфигурацијаларын лимит күтлэси
наггында

ХУЛАСӘ

Ајдындыр ки, күтлэси ағ чыртданын күтлэсиндән ($1,4 M_\odot$) бөјүк олан улдузлар гисмән киперон халына кечә биләр ($M \sim 2M_\odot$ олдуғда). Статик конфигурацијаларын параметри индики дөврдә јахшы мә'лумдур. Мәгаләдә исә фырланма вә истилик енержиси олдуғда ифрат сыхлыглы конфигурацијаларын параметрләри һесабыланмышдыр. Рошун классик улдуз моделини релјативистик һала үмүмиләшдирәрәк, моменти Күнәшин моменти тәртибиндә олан фырланан киперон улдузун харици формасы мүәјјән едилмишдир.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, В. Я. ШТЕЙНШРАЙБЕР

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЗОНАТОРА В ПЕРЕХОДНОЙ ОБЛАСТИ

Как известно, при малых напряжениях озонатор представляет собой конденсатор, состоящий из двух последовательно включенных емкостей: емкости диэлектрического барьера C_d и емкости газового зазора C_g .

Если амплитуда напряжения на озонаторе превышает некоторое критическое значение U_k , то в газовом зазоре возникает разряд; при этом считается [1], что напряжение U_r на газовом зазоре остается во время горения постоянным. Критическое напряжение связано с напряжением горения соотношением

$$U_k = U_r \frac{C_g}{C_0}, \quad (1)$$

$$\text{где } C_0 = \frac{C_d C_g}{C_d + C_g}.$$

Ток через озонатор при синусоидальном напряжении $U = U_m \sin \omega t$ ($U_m > U_k$) представляет собой разрывную функцию, равную

$$i = i_1 = \omega C_0 U_m \cos \omega t \quad (2)$$

в части периода, когда разряд не горит, и

$$i = i_2 = \omega C_d U_m \cos \omega t \quad (3)$$

в части периода, когда горит разряд (рис. 1 а).

Разряд в озонаторе прекращается при прохождении напряжения через максимум и вновь возникает при

$$\sin \omega t = \pm \left(1 - 2 \frac{U_k}{U_m}\right). \quad (4)$$

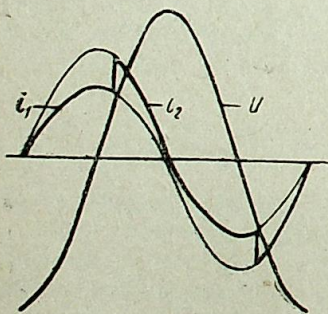


Рис. 1 б

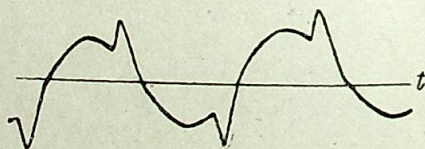


Рис. 1 а

Вольтамперная характеристика $I_{cp} = f(U_m)$, согласно [2], состоит из двух прямых, одна из которых соответствует области $U_m < U_k$,

другая — $U_m > U_k$ (рис. 2а). Уравнения этих прямых:

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} \omega C_0 U_m = A U_m \quad (5)$$

для участка ab ($U_m < U_k$) и

$$I_{cp} = \frac{2}{\pi} \omega C_0 U_m - \frac{2}{\pi} \omega (C_d - C_0) U_k = B U_m - (B - A) U_k \quad (6)$$

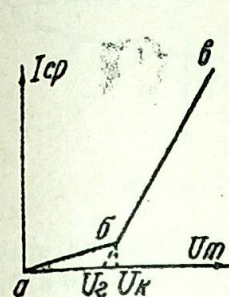


Рис. 2 а

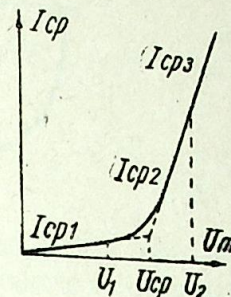


Рис. 2 б

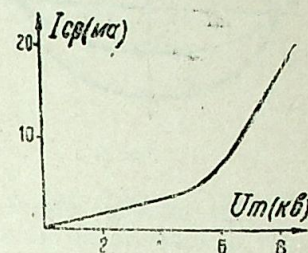


Рис. 2 в

для участка $бв$,

$$\text{причем } A = \frac{2}{\pi} \omega C_0, \quad B = \frac{2}{\pi} \omega C_d.$$

Активная мощность озонатора [3]

$$P = 0 \quad \text{при } U_m < U_k \quad (7)$$

и

$$P = \frac{2}{\pi} \omega (C_d - C_0) U_k (U_m - U_k) = (B - A) U_k (U_m - U_k) \quad (8)$$

при $U_m > U_k$ (рис. 3а)

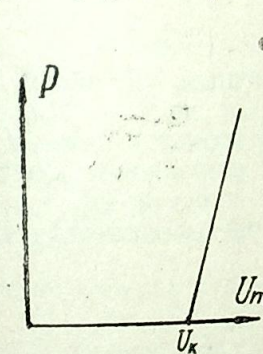


Рис. 3 а

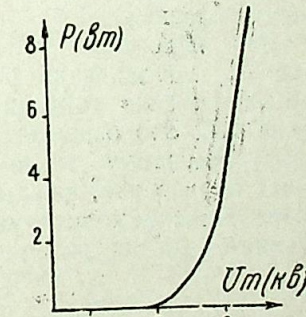


Рис. 3 б

Зависимость мгновенного значения тока от напряжения $i = f(u)$ представлена на рис. 4а при $U_m > U_k$. Малый эллипс (участок AB) соответствует отсутствию разряда, а большой (участок CD) — горению разряда.

Зависимость заряда от напряжения $q = f(u)$ имеет вид параллелограмма, расположенного симметрично относительно начала координат (рис. 5а). Согласно (4) изломы на рис 4 и 5 возникают при значениях мгновенного напряжения на озонаторе, равном $\pm (U_m - 2U_k)$.

Проведенные позднее исследования [4] показали, что разряд в озонаторе носит дискретный характер, однако усреднение этих процессов позволяет для макроскопического описания озонатора пользоваться приведенной моделью.

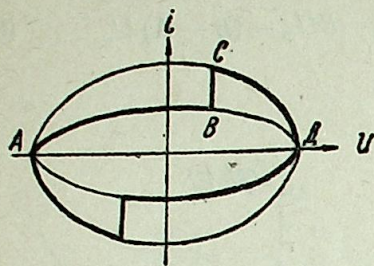


Рис. 4 а

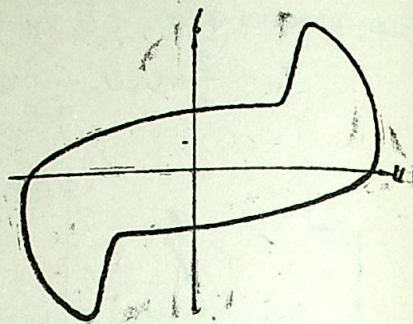


Рис. 4 б

При выводе уравнений (1)–(8) принимается, что разряд возникает одновременно по всей поверхности озонатора, как только напряжение на его газовом зазоре достигнет величины U_r . В действительности ввиду неизбежных дефектов изготовления и случайных неоднородностей поверхности напряжения зажигания на различных участках озонатора будут различными. Цель настоящей работы — выяснение влияния этого факта на характеристики и кривые тока озонатора.

Будем считать, что напряжение горения меняется от некоторого значения U_{r1} до значения U_{r2} , причем площадь dS озонатора, на которой напряжение горения меняется от U_r до $U_r + dU_r$, пропорциональна dU_r . Это означает, что реальный озонатор считается эквивалентным большому числу параллельно соединенных небольших идеальных озонаторов, каждый из которых характеризуется определенным напряжением горения, причем распределение озонаторов по напряжениям горения равномерное:

$$\frac{dS}{S} = \frac{dU_r}{U_{r2} - U_{r1}} = \frac{dU_k}{U_2 - U_1}, \quad (9)$$

где S — вся рабочая поверхность озонатора,

$$U_2 = U_{k2} = U_{r2} \cdot \frac{C_r}{C_0}, \quad U_1 = U_{k1} = U_{r1} \cdot \frac{C_r}{C_0}.$$

Найдем сначала уравнение вольтамперной характеристики. При $U_m < U_1$ оно совпадает с (5). При $U_1 < U_m$ для среднего тока через элемент dS согласно (6) при $U_k < U_m$ имеем:

$$dI_{cp} = \frac{dU_k}{U_2 - U_1} [BU_m - (B - A)U_k].$$

В этом случае разряд загорается, согласно (9), в части озонатора, равной $\int_{U_1}^{U_m} \frac{dU_k}{U_2 - U_1} = \frac{U_m - U_1}{U_2 - U_1}$, и не загорается в части, равной $\frac{U_2 - U_m}{U_2 - U_1}$.

Поэтому общее значение среднего тока

$$I_{cp} = \int_{U_1}^{U_m} \frac{dU_k}{U_2 - U_1} [BU_m - (B - A)U_k] + AU_m \cdot \frac{U_2 - U_m}{U_2 - U_1} = AU_m + \frac{(B - A)(U_m - U_1)^2}{2(U_2 - U_1)}.$$

При $U_m > U_2$, когда разряд загорается по всей поверхности озонатора,

$$I_{cp} = \int_{U_1}^{U_2} \frac{dU_k}{U_2 - U_1} [BU_m - (B - A)U_k] = BU_m - (B - A) \cdot \frac{U_2 + U_1}{2}.$$

Таким образом, вольтамперная характеристика $I_{cp} = f(U_m)$ озонатора состоит из трех участков (рис. 26):

$$I_{cp} = \begin{cases} AU_m & \text{при } U_m < U_1 \\ AU_m + \frac{(B - A)(U_m - U_1)^2}{2(U_2 - U_1)} & \text{при } U_1 < U_m < U_2 \\ BU_m - \frac{(B - A)(U_2 + U_1)}{2} & \text{при } U_m > U_2 \end{cases} \quad (10)$$

В отличие от (5–6) здесь отсутствует излом, ибо, как нетрудно убедиться,

$$\left. \frac{dI_{cp}}{dU_m} \right|_{U_m=U_1-0} = \left. \frac{dI_{cp}}{dU_m} \right|_{U_m=U_1+0} \quad \text{и} \quad \left. \frac{dI_{cp}}{dU_m} \right|_{U_m=U_2-0} = \left. \frac{dI_{cp}}{dU_m} \right|_{U_m=U_2+0}$$

Далее сравнение (10) с (6) показывает, что пересечение прямолинейного участка с осью U_m дает теперь $\frac{U_{r1} + U_{r2}}{2}$, т. е. среднее значение напряжения горения; пересечение прямых I_{cp1} и I_{cp3} происходит при $U_m = \frac{U_1 + U_2}{2} = U_{cp}$.

Типичная экспериментальная характеристика озонатора представлена на рис. 2в.

Найдем зависимость мощности, потребляемой озонатором от напряжения. При $U_m < U_1$, естественно, мощность озонатора равна нулю. Мощность элемента dS с критическим напряжением U_k на основании (8) и (9) равна

$$dP = (B - A)U_k(U_m - U_k) \frac{dU_k}{U_2 - U_1}.$$

Для вычисления мощности озонатора при $U_1 < U_m < U_2$ следует проинтегрировать это выражение в пределах от U_1 до U_m :

$$P = \int_{U_1}^{U_m} dP = \frac{B-A}{6(U_2-U_1)} (U_m^3 - 3U_m U_1^2 + 2U_1^3) =$$

$$= \frac{B-A}{6(U_2-U_1)} (U_m - U_1)(U_m^2 + U_m U_1 - 2U_1^2). \quad (11)$$

При $U_m > U_2$ имеем

$$P = \int_{U_1}^{U_2} dP = (B-A) \left[\frac{U_m(U_1+U_2)}{2} - \frac{U_1^2+U_2^2+U_1 U_2}{3} \right]. \quad (12)$$

Таким образом, при $U_m > U_2$ зависимость мощности от напряжения линейна. При $U_1 < U_m < U_2$ эта зависимость выражается кубической параболой; изломы по-прежнему отсутствуют. Прямая пересекает ось U_m в точке $U_{m0} = \frac{2}{3} \frac{U_1^2+U_2^2+U_1 U_2}{U_1+U_2}$.

Экспериментальная кривая представлена на рис. 36.

Перейдем к рассмотрению выражений для мгновенных значений тока. В рассматриваемой задаче кривая тока через озонатор при $U_m < U_1$ совпадает с (2). При $U_1 < U_m < U_2$ ток через озонатор равен

$$i(t) = \frac{S_1}{S} \omega C_d U_m \cos \omega t + \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) \omega C_0 U_m \cos \omega t =$$

$$= \omega C_0 U_m \cos \omega t + \frac{S_1(t)}{S} (C_d - C_0) \omega U_m \cos \omega t,$$

где $S_1(t)$ — площадь озонатора, охваченная разрядом к моменту t .

Согласно (4), разряд начинается в момент t_1 , когда напряжение на озонаторе $u_1 = U_m \sin \omega t_1 = 2U_1 - U_m$. Разряд охватывает всю поверхность озонатора к моменту t_2 , когда $u_2 = U_m \sin \omega t_2 = 2U_2 - U_m$. Таким образом, процесс распространения разряда по всей поверхности озонатора происходит за время, равное времени изменения приложенного к озонатору напряжения на величину $u_2 - u_1 = 2(U_2 - U_1)$.

При мгновенном значении напряжения u (т.е. в момент времени t) разрядом будет охвачена часть озонатора:

$$\frac{S_1(t)}{S} = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{U_m \sin \omega t - 2U_1 + U_m}{2(U_2 - U_1)}.$$

Для тока получаем.

$$i(t) = \omega C_0 U_m \cos \omega t + (C_d - C_0) \omega U_m \cos \omega t \cdot \frac{U_m \sin \omega t - 2U_1 + U_m}{2(U_2 - U_1)}.$$

Эта формула справедлива при $t_1 < t < t_2$. При $t > t_2$ (если $t_2 < \frac{T}{4}$) ток определяется формулой (3). Из полученных выражений следует, что кривая тока при $t = t_1$ и $t = t_2$ непрерывна (рис. 1 б).

Вычисление среднего тока и мощности с помощью полученных формул для мгновенных значений тока приводит, после несложных преобразований, к выражениям (10)–(12).

На циклограмме $i = i(u)$ переход от малого эллипса к большому происходит в этом случае не скачком, а плавно (рис. 46). Уравнение для переходной области имеет вид:

$$i = U_m \omega \sqrt{1 - \frac{u^2}{U_m^2}} \left[C_0 + (C_d - C_0) \frac{u - 2U_1 + U_m}{2(U_2 - U_1)} \right].$$

Из вышеизложенного видно, что ширина переходной области на циклограмме равна $2(U_2 - U_1)$. Экспериментально подтверждено, что при изменении амплитуды приложенного напряжения ширина переходной области остается постоянной.

Параллелограмм потерь, как легко показать, будет деформирован у вершин P и R ; переход с прямой QP на прямую PS происходит по параболе (рис. 56).

До сих пор мы исходили из равномерного распределения напряжений зажигания отдельных элементов. Однако весьма вероятно и гауссовское распределение этих напряжений:

$$\frac{dS}{S} = N \exp \left[-\frac{(U_k - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right] dU_k, \quad (13)$$

где β — дисперсия распределения критических напряжений;

dS — площадь части озонатора с критическим напряжением от U_k до $U_k + dU_k$,

N — нормировочный множитель, определяемый из условия

$$\int_0^\infty N \exp \left[-\frac{(U_k - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right] dU_k = 1$$

и равный

$$N = \left\{ \beta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \Phi \left(\frac{U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) \right] \right\}^{-1},$$

причем $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ есть интеграл вероятности.

Для вольтамперной характеристики $I_{cp} = f(U_m)$ получаем:

$$I_{cp} = \int_0^{U_m} [BU_m - (B-A)U_k] \cdot N \exp \left[-\frac{(U_k - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right] dU_k +$$

$$+ AU_m \left\{ 1 - \int_0^{U_m} N \exp \left[-\frac{(U_k - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right] dU_k \right\} =$$

$$= AU_m + (B-A)N\beta \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (U_m - U_{k0}) \left[\Phi \left(\frac{U_m - U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) + \Phi \left(\frac{U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + \beta \left[\exp \left(-\frac{U_{k0}^2}{2\beta^2} \right) - \exp \left(-\frac{(U_m - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

В реальных условиях дисперсия распределения невелика, так что можно считать $\frac{U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \gg 1$ и, следовательно,

$$\Phi \left(\frac{U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) \approx 1, \quad N \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta}, \quad \exp \left(-\frac{U_{k0}^2}{2\beta^2} \right) \ll 1.$$

Тогда

$$I_{cp} \approx AU_m + (B - A) \left\{ \frac{1}{2} (U_m - U_{k0}) \left[\Phi \left(\frac{U_m - U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) + 1 \right] - \beta \exp \left(- \frac{(U_m - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right) \right\}.$$

Для больших напряжений $\left(\frac{U_m - U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \gg 1 \right)$ отсюда получаем:

$$I_{cp} \approx AU_m + (B - A)(U_m - U_{k0}),$$

что совпадает с (6).

В случае малых напряжений ($U_m \ll U_{k0}$)

$$\Phi \left(\frac{U_m - U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) \approx \Phi \left(- \frac{U_{k0}}{\beta \sqrt{2}} \right) \approx -1,$$

$$\exp \left(- \frac{(U_m - U_{k0})^2}{2\beta^2} \right) \approx \exp \left(- \frac{U_{k0}^2}{2\beta^2} \right) \ll 1,$$

так что

$$I_{cp} \approx AU_m.$$

Следовательно, и в случае гауссовского распределения напряжений зажигания вольтамперная характеристика озонатора по существу состоит из двух отрезков прямых, соединенных плавной кривой. Пересечение отрезков прямых и в этом случае дает среднее значение критического напряжения. Выражение для мощности и другие могут быть получены как и для случая равномерного распределения.

Таким образом показано, что разброс напряжений зажигания различных участков озонатора приводит к появлению переходной области на электрических характеристиках и влияет на форму кривой тока через озонатор. Последнее имеет существенное значение для анализа процессов, происходящих при разряде в газовом зазоре, ограниченном диэлектриками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельянов Ю. М., Филиппов Ю. В. ЖФХ, 31, 1628 (1957).
2. Филиппов Ю. В., Емельянов Ю. М. ЖФХ, 32, 2817 (1958).
3. Емельянов Ю. М., Филиппов Ю. В. ЖФХ, 33, 1042 (1959).
4. Gorbrecht H., Meinhardt O., Hein E. Bericht der Bunsengesellschaft, 68, 55 (1964).

Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхазер, В. Л. Штејншрајбер

Озонаторун кечид саһәләриндә електрик характеристикалары

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә озонаторун мүхтәлиф саһәләриндә бирчинсли олмајан јанма һалы илә әмәлә кәлән кечид саһәсинин електрик характеристикалары музакирә олунур.

Тәчрүбә нәтичәсиндә озонаторун мүхтәлиф саһәләриндә јанм кәркинлијинин бәрәбәр пәјланмасы һалы үчүн кечид саһәсинин волт-амперхарактеристикасы, күч әјриси, волт-кулон характеристикасы алынмышдыр.

Волт-ампер характеристикасы јанма кәркинлијинин Гаусс пәјланма һалы үчүн тәнлији алынмышдыр.
Нәзәри изаһатлар тәчрүбәдән алынған характеристикаларын кедишини изаһ едир. Аналитик мулаһизәләр тәчрүби нәтичәләрлә ујғун кәлир.
Кечид саһәсинин олмасы кимјәви реактор кими ишләјән озонаторларда просесләрин кедишинә бөјүк тәсир кәстәрә биләр.

Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Л. А. МУХАРСКАЯ

О ПРИМЕНИМОСТИ ПОКАЗАТЕЛЯ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ТРАНСФОРМАТОРНЫХ МАСЕЛ

В последнее время неоднократно высказывалось мнение о возможности оценки качества нефтяных масел по величине поверхностного натяжения [1, 2]. Этот показатель рекомендовался также для оценки степени окисляемости масел. Между тем, в литературе не имеется достаточно полных данных для суждения о связи поверхностного натяжения с качеством трансформаторных масел и изменениях этого показателя в процессе окисления. В связи с этим нами исследовалась зависимость поверхностного натяжения от происхождения масел, технологического режима их изготовления, содержания в маслах продуктов окисления, а также связь поверхностного натяжения с электрическими и физико-химическими свойствами масел.

Определение поверхностного натяжения производилось методом наибольшего давления пузырьков или капель [1, 3]. Прибор Ребиндера, основанный на этом методе, является удобным и весьма точным для измерения поверхностного натяжения на границе двух сред при различных температурах, при этом устраняются влияние смачивания исследуемой жидкости на результаты измерений и возможность испарения жидкости. Кроме того, этот способ позволяет образовывать новую поверхность медленно и тем самым получать истинные (статические) значения поверхностного натяжения. Способ этот основан на том, что при выдавливании в исследуемую жидкость через капилляр отдельных пузырьков воздуха или капель другой несмешивающейся с ней жидкости наибольшее давление, при котором происходит образование и отрыв пузырька или капли, пропорционально поверхностному натяжению исследуемой жидкости:

$$p = \frac{2}{r} \sigma + \delta (\rho_1 - \rho_2) \cdot g,$$

где p — наибольшее давление в дн/см ,

r — радиус капилляра в см ,

δ — поверхностное натяжение в эрг/см^2 ,

δ — глубина погружения капилляра,

ρ_1 и ρ_2 — плотности первой и второй фаз,

g — ускорение силы тяжести в см/сек^2 .

При малом погружении капилляра ($\delta \rightarrow 0$) можно считать, что

$$p = \frac{2}{r} \sigma \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{r}{2} p.$$

Давление p определялось микроманометром; в качестве манометрической жидкости использовался толуол. При пользовании водой или этиловым спиртом малейшие примеси поверхностноактивных веществ изменяют условия смачивания стекла и показания манометра становятся неточными.

Определение поверхностного натяжения производилось на границе с воздухом. Капиллярный кончик имел пипеточную форму с цилиндрическим расширением на конце; выходное отверстие кончика остро срезано перпендикулярно к его оси. Постоянная капилляра была рассчитана из соображений оптимальной чувствительности измерения и составляла 0.46 эрг/см^2 , при этом диаметр отверстия составлял 0.23 мм .

Характеристика трансформаторных масел в исходном состоянии

Таблица 1

№ образцов	Масло	$\sigma, \text{эрг/см}^2$		ϵ		$\text{tg } \delta, \%$		Кислотное число, мг КОН/г	Реакция водной вытяжки	Цвет по УНИОНу NPA
		20°C	70°C	20°C	70°C	20°C	70°C			
1	Товарное из бузовинской нефти:									
2	обр. № 1	30,69	27,31	2,21	2,14	0,1	1,1	0,01	нейтральная	1 1/2
3	обр. № 2	30,72	27,34	2,21	2,14	0,1	1,3	0,01	"	"
4	обр. № 3	30,82	27,43	2,22	2,15	0,1	1,2	0,01	"	2 минус
5	Из бузовинской нефти (исследовательский обр.)	30,79	27,40	2,21	2,14	0,3	2,1	0,01	"	"
6	Из смеси балаханской масляной и раманинской нефтей (исследовательский обр.)	30,26	26,93	2,19	2,12	0,1	0,8	0,01	"	"
7	Адсорбционной очистки из бузовинской нефти (исследовательский обр.)	30,79	27,40	2,21	2,14	0,2	0,2	0,01	"	1
	Гидроочищенное из смеси сернистых нефтей НКНПЗ	31,59	28,12	2,26	2,19	0,2	2,5	0,01	"	3

Результаты определения поверхностного натяжения свежих трансформаторных масел приведены в табл. 1. Там же показаны электрические и некоторые физико-химические характеристики исследуемых масел. Образцы № 1—4 получены кислотно-щелочным методом очистки из бузовинской нефти; образец № 5 — тем же способом очистки из смеси балаханской масляной и раманинской нефтей. Исследованы также масла адсорбционной очистки бузовинской нефти (образец № 6) и гидроочищенные масла НКНПЗ, полученные из смеси сернистых и гидроочищенные масла НКНПЗ, полученные из смеси сернистых нефтей — туймазинской, мухановской и бовлинской (образец № 7).

Из полученных результатов следует, что режим очистки и исходное сырье оказывают некоторое влияние на величину поверхностного натяжения трансформаторных масел. Этот показатель непосредственно связан с диэлектрической проницаемостью масел, что находится в соответствии с теорией. Действительно, измеренное тем или иным способом поверхностное натяжение на границе двух фаз зависит от физической природы обеих фаз, образующих поверхность раздела, и опре-

деляется различием в интенсивности межмолекулярных сил, действующих в каждой фазе. Поэтому при переходе от менее полярной жидкости к более полярной поверхностное натяжение на границе с воздухом увеличивается, а на границе с водой уменьшается.

Поверхностное натяжение трансформаторных масел является линейной функцией, убывающей с температурой

$$\sigma_t = \sigma_{20}[1 - \gamma(t - 20)],$$

где σ_{20} — поверхностное натяжение при 20°C;

γ — температурный коэффициент.

Температурные зависимости поверхностного натяжения для двух образцов масел приведены на рис. 1 и 2. Они аналогичны температурным зависимостям диэлектрической проницаемости ϵ (рис. 1 и 2).

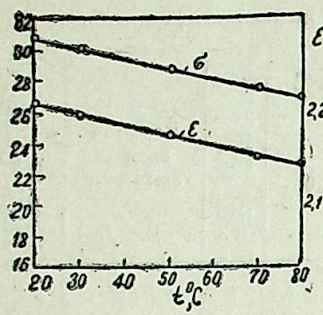


Рис 1.

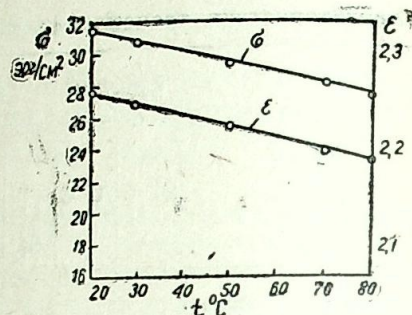


Рис 2.

Проведенные исследования указывают на отсутствие связи между значениями поверхностного натяжения трансформаторных масел и такими показателями, как электропроводность, тангенс угла диэлек-

Таблица 2

Характеристика окисленных трансформаторных масел (300 часов окисления с катализаторами—медью и железом)

№ образца (см. табл. 1)	σ , эрг/см ²		ϵ		tg δ , %		Кислотное число, мг КОН/г	Водорастворимые кислоты		Цвет по УНИОНу, марки NPA
	20°С	70°С	20°С	70°С	20°С	70°С		мг КОН/г	реакция	
1	30,69	27,31	2,21	2,14	1,0	16,8	0,11	0,027	кислая	7
2	30,72	21,34	2,21	2,14	1,8	25,2	0,12	0,029	"	8
3	30,82	27,43	2,22	2,15	1,6	24,4	0,16	0,034	"	8
4	30,79	27,40	2,21	2,14	0,8	16,2	0,11	0,025	"	"
5	30,26	26,93	2,19	2,12	0,6	8,2	0,06	0,012	сл. кислая	4 1/2 минус
6	30,79	27,40	2,21	2,14	0,2	1,5	0,03	0,005	нейтральная	2
7	31,59	28,12	2,26	2,19	0,83	9,5	0,03	0,004	"	8
7 ¹	31,59	28,12	2,26	2,19	0,6	6,2	0,02	0,0012	"	6
7 ²	31,59	28,12	2,26	2,19	0,7	7,8	0,024	0,0024	"	7

Примечание: 1) после 120 часов окисления без катализаторов;
2) после 120 часов окисления с катализатором.

трических потерь, кислотное число, содержание в маслах низкомолекулярных кислот и цвет масел. Отсутствие взаимосвязи особенно обнаруживается при исследованиях склонности масел к окислению (табл. 2). Так, например, окисление масел при 105°C в условиях сво-

бодного доступа воздуха в присутствии катализаторов (медь и железо) приводит к значительному возрастанию tg δ (до 8 ÷ 25%, в зависимости от качества масла), кислотного числа и содержания в маслах водорастворимых кислот (кислая реакция водной вытяжки). Величина же tg δ не меняется, что соответствует постоянству диэлектрической проницаемости масел в процессе окисления.

Наблюдаемое несоответствие между поверхностным натяжением и значениями tg δ обусловлено отсутствием в трансформаторных маслах дипольно-релаксационной поляризации и связано с омическим характером диэлектрических потерь масел.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что для трансформаторных масел поверхностное натяжение меняется в небольших пределах. Поэтому с точки зрения заводской практики поверхностное натяжение не может служить критерием качества масел и степени их окисляемости. Однако не исключена возможность применения этого показателя в дополнение к другим для более полной характеристики масел при проведении исследовательских работ. Поверхностное натяжение непосредственно связано с диэлектрической проницаемостью масел и вследствие этого определяется их групповым химическим составом, главным образом содержанием в маслах ароматических углеводородов.

Непосредственная связь поверхностного натяжения с химическим составом масел позволяет использовать этот показатель для суждения об углеводородном составе масляных фракций. Так, например, предложена комбинированная константа—парахор, являющаяся функцией поверхностного натяжения и молекулярного объема [2]:

$$P = \frac{M \cdot \sigma^{0.25}}{d} = V_m \cdot \sigma^{0.25},$$

где P —парахор;

M —молекулярный вес;

d —плотность жидкости;

σ —поверхностное натяжение жидкости на границе с воздухом, определенное при той же температуре, что и плотность;

V_m —молекулярный объем.

Парахор дает некоторое представление о сложном химическом составе масляных фракций; в пределах 200°C он практически не зависит от температуры.

Учитывая несовершенство существующих методов анализа масел и необходимость более глубокого проникновения в их состав, парахор или показатель поверхностного натяжения в сочетании с другими физическими константами могут быть использованы при оценке углеводородного состава трансформаторных масел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбак Б. М. Анализ нефти и нефтепродуктов. М. Гостоптехиздат, 1962
2. Рыбак Б. М. Оценка применимости некоторых физико-химических констант для изучения углеводородного состава нефтяных масел. "Химия и технология топлив", № 11, 1956.
3. Кусаков М. М. Методы определения физико-химических характеристик нефтяных продуктов. ОНТП СССР, М.—Л., 1936.

Поступило 10. VII 1965

Сәтһи кәрилмә кәстәричисинин трансформатор
јағы кәјфијјәтинин нәзарәтиндә истифадә олунмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгалә трансформатор јағы тәмизлијинин һава сәрһәддиндә тә'јин олунан сәтһи кәрилмә кәстәричисинин гијмәтинә кәрә нәзарәт олунмасы мүмкүнлүјүнә һәср олунмушдур. Сәтһи кәрилмә кәстәричисинән бөјүк тәзјиг методу әсасында тә'јин едилмишдир. Бунун үчүн Ребиндер чиһазы һазырланмыш вә јохланылмышдыр.

Мәгаләдә илк мәһсулун, јағын һазырланма технолокијасынын, онун оксидләшмә дәрәчәләринин вә башга амилләрин сәтһи кәрилмә кәстәричисинин гијмәтинә тә'сири өјрәнилмишдир. Тәчрүбәләрин нәтичәсиндән ајдын олмушдур ки, сәтһи кәрилмә кәстәричисини јағын диелектрик нүфуз әмсалы илә сых әлағәдардыр вә демәк олар ки, диелектрик иткиләр бучағынын танкенсиндән, туршулуғ әдәдиндән, суда һәлл олан туршуларын олуб-олмамасындан вә с. бу кими амилләрдән асылы дејилдир.

Мәгаләдә сәтһи кәрилмә кәстәричисинин јағлы тәркибиндәки карбоһидрад бирләшмәләринин гијмәтләндирилмәсиндә дә истифадә олунмасы кәстәрилир.

К. М. ЧАЛБЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА РАСЧЕТА
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В СИСТЕМЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОВОДОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Общий метод расчета распределения переменного тока по сечениям произвольного числа цилиндрических, параллельных, как угодно расположенных токопроводов, произвольных радиусов с токами, имеющими произвольные значения j_q ($q = 0, 1, \dots, p$) с учетом эффекта близости, изложен нами в [1, 2, 3, 4]. Допущения, принимаемые при этом, не выходят за рамки обычных. Эта физическая задача математически сводится к краевой задаче для составной области и формулируется следующим образом: 1) внутри каждого q -го проводника напряженность поля, обозначаемая $H^q(r, \varphi)$, исходя из уравнения Максвелла, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 H^q = \kappa_q^2 H^q$ ($\kappa_q^2 = \frac{4\pi}{c^2} j \omega \sigma_q$);

2) вне проводников напряженность поля $H^p(r, \varphi)$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 H^p = 0$; 3) на всей плоскости напряженность поля непрерывна. Исходя из физических соображений, при помощи введения комплексного потенциала находятся граничные условия для m -го проводника.

Поставленная задача решалась методом последовательных приближений. Решение для области внутри m -го проводника ищут в виде

$$H^m(r, \varphi) = h_0^m(r, \varphi) + h_1^m(r, \varphi) + \dots + h_n^m(r, \varphi) + \dots \quad (1)$$

и соответственно

$$\delta^m(r, \varphi) = \delta_{h_0}^m(r, \varphi) + \delta_{h_1}^m(r, \varphi) + \dots + \delta_{h_n}^m(r, \varphi) + \dots \quad (2)$$

Каждый шаг этих последовательных приближений $h_n^m(r, \varphi)$ представляет собой решение некоторой внутренней задачи Дирихле, которая решается методом Фурье. Существенной особенностью является то обстоятельство, что граничные условия каждого приближения приходится находить с помощью некоторого другого вспомогательного процесса последовательных приближений. Удастся найти предел этих приближений и представить их в виде суммы сходящегося со скоростью геометрической прогрессии ряда.

Докажем сходимость рядов, дающих представление решения каждого приближения. Для простоты изложения принимаем радиусы проводов одинаковыми. Оценим вначале отношения:

$$\frac{I_n(\kappa r)}{I_{n-1}(\kappa a)}, \quad \frac{I_{n+1}(\kappa a)}{I_n(\kappa a)}$$

Для этого рассмотрим:

$$I_n(\kappa r) = \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (1 + \varepsilon_1)$$

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^2 \frac{1}{1!(n+1)} + \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^4 \frac{1}{2!(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$I_{n-1}(\kappa r) = \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 \frac{1}{1!n} + \left(\frac{\kappa r}{2}\right)^4 \frac{1}{2!n(n+1)} + \dots$$

$$I_{n-1}(\kappa a) = \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} (1 + \varepsilon_3)$$

$$\varepsilon_3 = \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 \frac{1}{1!n} + \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^4 \frac{1}{2!n(n+1)} + \dots$$

$$I_{n+1}(\kappa a) = \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} (1 + \varepsilon_4)$$

$$\varepsilon_4 = \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^2 \frac{1}{1!(n+2)} + \left(\frac{\kappa a}{2}\right)^4 \frac{1}{2!(n+2)(n+3)} + \dots$$

Оценим числитель:

$$|I_n(\kappa r)| = \left(\frac{|\kappa| r}{2}\right)^n \frac{1}{n!} |1 + \varepsilon_1| \leq \left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (1 + |\varepsilon_1|), \text{ где } \varepsilon_1 \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Для этого заменяем r наибольшей величиной a ,

$$|1 + \varepsilon_1| \leq 1 + |\varepsilon_1|.$$

Оценим знаменатель:

$$|I_{n-1}(\kappa a)| = \left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} |1 + \varepsilon_3|.$$

Так как $\varepsilon_3 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то, следовательно, можно считать, что при больших n $|\varepsilon_3| < \frac{1}{m}$, где m — любое наперед заданное число,

$$|1 + \varepsilon_3| > 1 - \frac{1}{m}.$$

Удобно взять, например, $m = 2$ тогда $|1 + \varepsilon_3| > \frac{1}{2}$. Следовательно:

$$\left| \frac{I_n(\kappa r)}{I_{n-1}(\kappa a)} \right| \leq \frac{\left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^n \frac{1}{n!} (1 + |\varepsilon_1|)}{\left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} |1 + \varepsilon_3|} =$$

$$= \frac{|\kappa| a}{2} \frac{1}{n} \frac{1 + |\varepsilon_1|}{|1 + \varepsilon_3|} \leq \frac{|\kappa| a}{2} \frac{1}{n} \frac{1 + |\varepsilon_1|}{\frac{1}{2}} \leq \alpha_1 \frac{1}{n},$$

$$\alpha_1 = |\kappa| a (1 + |\varepsilon_1|)$$

$$\left| \frac{I_{n+1}(\kappa a)}{I_{n-1}(\kappa a)} \right| \leq \frac{\left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} (1 + |\varepsilon_4|)}{\left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} |1 + \varepsilon_3|} \leq$$

$$\leq \left(\frac{|\kappa| a}{2}\right)^2 \frac{1}{n(n+1)} \frac{1 + |\varepsilon_4|}{1 - \frac{1}{m}} \leq \alpha_2 \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\alpha_2 = (|\kappa| a)^2 \frac{1}{2} (1 + |\varepsilon_4|)$$

Отметим неточность оценок указанных отношений в [5]. Докажем сходимость ряда в выражении первого приближения:

$$\delta_{n_1}(r, \varphi) = \frac{J_1 \kappa}{\pi a} \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{a}{D}\right)^{n_1} \frac{I_{n_1}(\kappa r)}{I_{n_1-1}(\kappa a)} \cos n_1 \varphi.$$

Оценим общий член U_{n_1} :

$$|U_{n_1}| \leq \frac{|J_1| |\kappa|}{\pi a} \left(\frac{a}{D}\right)^{n_1} \left| \frac{I_{n_1}(\kappa r)}{I_{n_1-1}(\kappa a)} \right| \leq \frac{|J_1| |\kappa|}{\pi a} \left(\frac{a}{D}\right)^{n_1} \frac{1}{n_1} \alpha_1 =$$

$$= \frac{|J_1| |\kappa|}{\pi a} \frac{\left(\frac{a}{D}\right)^{n_1}}{n_1} \leq \frac{|J_1| |\kappa|}{\pi a} \alpha_1 \left(\frac{a}{D}\right)^{n_1}.$$

Так как $\frac{a}{D} < 1$, то ряд $\sum_{n_1=1}^{\infty} U_{n_1}$ сходится, причем равномерно и абсолютно.

Докажем сходимость рядов в выражении второго приближения:

$$\delta_{n_2}(r, \varphi) =$$

$$= \frac{J_0 \kappa}{\pi a} \sum_{n_2=1}^{\infty} \left(\frac{a}{D}\right)^{n_2} \frac{I_{n_2}(\kappa r)}{I_{n_2-1}(\kappa a)} \cos n_2 \varphi \sum_{n_1=1}^{\infty} \left(\frac{a}{D}\right)^{2n_1} \frac{I_{n_1+1}(\kappa a)}{I_{n_1-1}(\kappa a)} C_{n_1+n_2-1}^{n_1-1}.$$

Воспользуемся известным неравенством:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \leq 2^n.$$

Обозначая общий член ряда с индексом суммирования n_1 через U_{n_1} , а общий член ряда с индексом суммирования n_2 через W_{n_2} , произведем последовательные оценки:

$$|U_{n_1}| \leq \left(\frac{a}{D}\right)^{2n_1} \alpha_2 \frac{1}{n_1(n_1+1)} 2^{n_1+n_2-1} = \frac{\alpha_2}{2} 2^{n_2} \frac{1}{n_1(n_1+1)} 2^{n_1} \left(\frac{a}{D}\right)^{2n_1} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha_2}{2} 2^{n_2} \left[2 \left(\frac{a}{D}\right)^2 \right]^{n_1}.$$

Ряд сходится, если $2 \left(\frac{a}{D}\right)^2 < 1$, т. е. $\frac{a}{D} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$$\left| \sum_{n_1=1}^{\infty} U_{n_1} \right| \leq \frac{\alpha_2}{2} 2^{n_2} \frac{2 \left(\frac{a}{D}\right)^2}{1 - 2 \left(\frac{a}{D}\right)^2}$$

Тогда

$$|W_{n_2}| \leq \left(\frac{a}{D}\right)^{n_2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2 n_2} 2^{n_2} \frac{2 \left(\frac{a}{D}\right)^2}{1 - 2 \left(\frac{a}{D}\right)^2} \leq \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2} \left(\frac{a}{D}\right)^{n_2} \frac{2 \left(\frac{a}{D}\right)^2}{1 - 2 \left(\frac{a}{D}\right)^2}.$$

Если $\frac{2a}{D} < 1$, то исходный ряд сходится абсолютно и равномерно. Методом индукции убеждаемся в сходимости всех рядов в последующих приближениях при условии, что $2\frac{a}{D} < 1$.

Таким образом, для равных радиусов двух кругов получили условие сходимости:

$$\frac{a}{D} < \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad a < \frac{1}{2} D.$$

Это условие всегда выполняется для самого предельного случая расположения проводников, т. е. когда два проводника могут быть как угодно близки друг к другу, но не соприкасаются.

Перейдем теперь к рассмотрению сходимости процесса последовательных приближений. Отметим, что так как $h_m^m(r, \varphi)$ и соответственно $\delta h_m^m(r, \varphi)$ представляются в виде ν -кратных рядов по произведениям комбинаций бесселевых функций на показательные функции, то это приводит к большим трудностям при доказательстве сходимости (1) и (2), однако не затрудняет численных вычислений. Поэтому, пользуясь тем, что при достаточно больших ν ряд, представляющий $h_m^m(r, \varphi)$, можно приближенно заменить его старшим членом по a/D (с любой наперед заданной точностью), проводим оценки, которые позволяют получить представление о скорости сходимости процесса последовательных приближений (1) и (2). Такой подход, не дающий возможности провести формально строгого математического доказательства сходимости процесса последовательных приближений, однако, все же является более убедительным, чем проверка на отдельных конкретных примерах, что обычно признается достаточным в инженерной практике. Кроме того, полученные оценки дают возможность подбирать необходимое число приближений при численных расчетах.

В первом приближении старшим членом будет

$$v_1 = -\frac{\kappa_0}{\pi} \sum_{q_1 \neq 0} \frac{J_{q_1} a_0}{a_0 |D_{0q_1}|} \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \cos(\varphi - \psi_{0q_1}).$$

Оценим модуль его

$$|v_1| < \frac{|\kappa_0|}{a_0} \sum_{q_1 \neq 0} \frac{J_{q_1} |a_{0q_1}|}{a_0 |D_{0q_1}|} \left| \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \right|.$$

Выбираем наибольшее значение радиуса a из всех проводников и наименьшее расстояние между проводниками D так, что (любое возможное) отношение всегда меньше,

$$\left| \frac{a_{q_1}}{D_{q_1, q_1-1}} \right| \leq \frac{a}{D}.$$

Выбираем соответственно

$$|J_{q_1}| \leq J.$$

Обозначим

$$\max_{0 < r < a_0} \left| \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \right| = 1.$$

Получаем

$$|v_1| \leq \frac{\beta_1 |\kappa|}{\pi} \sum_{q_1 \neq 0} \frac{J}{a} \frac{a}{D} = p \beta_1 \frac{|\kappa_0| J}{\pi a} \frac{a}{D} = A p \frac{a}{D},$$

где p — число проводников.

Запишем теперь главный член второго приближения

$$v_2 = -\frac{\kappa_0}{\pi} \sum_{q_2 \neq 0} \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{J_{q_1} a_0}{a_0 |D_{0q_2}|} \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \frac{a_{q_2}}{|D_{q_2, q_1}|} \frac{a_{q_1}}{|D_{0q_2}|} \frac{I_2(\kappa_{q_2} a_{q_2})}{I_0(\kappa_{q_2} a_{q_2})} C_1^0 \cos(\varphi - 2\psi_{0q_2} + \psi_{q_2, q_1}).$$

Оценим модуль

$$|v_2| \leq \frac{\kappa_0}{\pi} \sum_{q_2 \neq 0} \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{|J_{q_1}|}{a} \frac{a}{|D_{0q_2}|} \left| \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a)} \right| \left\| \frac{a_{q_2}}{|D_{q_2, q_1}|} \right\| \left\| \frac{a_{q_1}}{|D_{0q_2}|} \right\| \left\| \frac{I_2(\kappa_{q_2} a_{q_2})}{I_0(\kappa_{q_2} a_{q_2})} \right\|.$$

Обозначим соответственно

$$\max_{0 < q_2 < p} \left| \frac{I_2(\kappa_{q_2} a_{q_2})}{I_0(\kappa_{q_2} a_{q_2})} \right| = \beta_2,$$

Получаем

$$|v_2| \leq \frac{\beta_1 \beta_2 |\kappa_0|}{\pi} \sum_{q_2 \neq 0} \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{J}{a} \left(\frac{a}{D} \right)^3 = p^2 \frac{\beta_1 \beta_2 |\kappa| J}{\pi a} \left(\frac{a}{D} \right)^3 = A p^2 \beta_2 \left(\frac{a}{D} \right)^3.$$

Заменим главный член третьего приближения

$$v_3 = -\frac{\kappa}{\pi} \sum_{q_3 \neq 0} \sum_{q_2 \neq q_3} \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{J_{q_1} a_0}{a_0 |D_{0q_3}|} \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \frac{I_2(\kappa_{q_2} a_{q_2})}{I_0(\kappa_{q_2} a_{q_2})} \frac{a_{q_3}}{|D_{q_3, q_2}|} \frac{a_{q_2}}{|D_{0q_3}|} \times \\ \times C_1^0 \frac{I_2(\kappa_{q_3} a_{q_3})}{I_0(\kappa_{q_3} a_{q_3})} \frac{a_{q_3}}{|D_{q_3, q_2}|} \frac{a_{q_2}}{|D_{q_3, q_2}|} C_1^0 \cos(\varphi - 2\psi_{0q_3} + 2\psi_{q_3, q_2} - \psi_{q_3, q_1}),$$

$$|v_3| \leq \frac{|\kappa| \beta_1 \beta_2^2}{\pi} p^3 \frac{J}{a} \left(\frac{a}{D} \right)^5 = A p^3 \beta_2^2 \left(\frac{a}{D} \right)^5.$$

Заменим старший член ν приближения

$$v_\nu = -\frac{\kappa_0}{\pi} \sum_{q_\nu \neq 0} \sum_{q_{\nu-1} \neq q_\nu} \dots \sum_{q_1 \neq q_2} \frac{J_{q_1} a_0}{a_0 |D_{0q_\nu}|} \frac{I_1(\kappa_0 r)}{I_0(\kappa_0 a_0)} \frac{I_2(\kappa_{q_\nu} a_{q_\nu})}{I_0(\kappa_{q_\nu} a_{q_\nu})} \frac{a_{q_\nu}}{|D_{q_\nu, q_{\nu-1}}|} \frac{a_{q_{\nu-1}}}{|D_{0q_\nu}|} \times \\ \times C_1^0 \frac{I_2(\kappa_{q_\nu} a_{q_\nu})}{I_0(\kappa_{q_\nu} a_{q_\nu})} \frac{a_{q_{\nu-1}}}{|D_{q_{\nu-1}, q_{\nu-2}}|} \frac{a_{q_{\nu-2}}}{|D_{q_\nu, q_{\nu-1}}|} C_1^0 \dots \\ \dots \frac{I_2(\kappa_{q_2} a_{q_2})}{I_0(\kappa_{q_2} a_{q_2})} \frac{a_{q_2}}{|D_{q_2, q_1}|} \frac{a_{q_1}}{|D_{q_2, q_1}|} \times \\ \times C_1^0 \cos[\varphi - 2\psi_{0q_\nu} + 2\psi_{q_\nu, q_{\nu-2}} - \dots + (-1)^{\nu-1} 2\psi_{q_3, q_2} + (-1)^\nu \psi_{q_3, q_1}].$$

Оценим его:

$$|v_\nu| \leq \frac{|\kappa_0| \beta_1}{\pi} \frac{J}{a} p^\nu \frac{a}{D} \left[\beta_2 \left(\frac{a}{D} \right)^2 \right]^{\nu-1} = \\ = \frac{|\kappa_0| J \beta_1}{\pi a} \frac{a}{D} \beta_2^{\nu-1} \left[\left(\frac{a}{D} \right)^2 \right]^{\nu-1} p^\nu = A p^\nu \beta_2^{\nu-1} \left(\frac{a}{D} \right)^{2\nu-1}.$$

Оценим старший член $\nu+1$ приближения:

$$|v_{\nu+1}| \leq A p^{\nu+1} \beta_2^\nu \left(\frac{a}{D} \right)^{2\nu+1}.$$

Составим ряд из главных членов последовательных приближений:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} v_\nu = v_1 + v_2 + \dots + v_\nu + \dots$$

Рассмотрели ряд

$$\sum_{v=1}^{\infty} |v_v| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_v| + \dots$$

Теперь составим ряд вида

$$\sum_{v=1}^{\infty} Q_v = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_v + \dots \quad (3)$$

таким образом, что $Q_n \geq |v_n|$, т. е. в нашем случае

$$\sum_{v=1}^{\infty} Q_v = \sum_{v=1}^{\infty} A_p \beta_2^{v-1} \left(\frac{a}{D} \right)^{2v-1} = A_p \frac{a}{D} + A_p^2 \beta_2 \left(\frac{a}{D} \right)^3 + A_p^3 \beta_2^2 \left(\frac{a}{D} \right)^5 + \dots$$

Ряд (3) есть геометрическая прогрессия со знаменателем прогрессии

$$q = \frac{Q_{v+1}}{Q_v} = \frac{A_p^{v+1} \beta_2^v \left(\frac{a}{D} \right)^{2v+1}}{A_p^v \beta_2^{v-1} \left(\frac{a}{D} \right)^{2v-1}} = p \beta_2 \left(\frac{a}{D} \right)^2,$$

т. е. условие сходимости получено в следующем виде:

$$\frac{a}{D} < \frac{1}{\sqrt{p \beta_2}}. \quad (4)$$

В двух предельных случаях условие (4) можно заменить более грубым, но более удобным.

1. При больших значениях k („большая“ частота), воспользовавшись асимптотическим разложением, получаем $\beta_2 = 1$. Тогда $\frac{a}{D} < \sqrt{\frac{1}{p}}$.

2. При малых значениях k („малая частота“), воспользовавшись первыми членами разложения I_2, I_0 , получаем $\beta_2 \approx \left(\frac{|k|a}{2} \right)^2 \frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{a}{D} < \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{|k|a}{2} \right)^2 \frac{1}{2} p}} = \frac{2\sqrt{2}}{|k|a\sqrt{p}}.$$

Полученные оценки будут применены к расчету конкретных случаев в последующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Меерович Э. А. и Чальян К. М. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1963, № 3.
2. Чальян К. М. „ДАН Азерб. ССР“, 1963, № 8.
3. Чальян К. М. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1964, № 4.
4. Чальян К. М. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1965, № 2.
5. Mappesack C. An integral equation for skin-effect in parallel conductors J. of Math. and Phys., 1921, V. 1.

Поступило

К. М. Чальян

Даирэви ен кэсикли цилиндрик нагиллэр системиндэ дэжишэн чэрэжанын пайланмасынын һесаплама үсулу илэ жахынлығынын тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Истэнилэн мигдарда мүхтэлиф радиуслу цилиндрик, паралел. истэнилэн J_q чэрэжанлы вэ һэр һансы радиуслу истэнилэн вэзи]јәтдэ јерләшэн кечиричилэрин јахынлыг эффектени нэзэрэ алмагла дэјишэн чэрэжан пайланмасынын үмуми һесаплама үсулу әввәлки [1, 2,

3, 4] мәгаләләримиздә верилмишдир. Бу мәгаләдә, һәлли һаггында аңлајыш верән һәр јахынлашманын сыраларынын јығыланлығы исбат олунур. Бурада ардычыл јахынлашмаг просесинин јығыланлығы нэзәр-дә тутулур.

v -нин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $h_v^m(r^?)$ сырасынын $\frac{a}{D}$ -јә көрә бөјүк һәдди илэ тәхмини әвәз олунмасындан истифадә едәрәк ардычыл јахынлашмагла (1) вә (2) просесин јығылма сүр'әти һаггын-да аңлајыш алмаға имкан верән гијмәт верилир.

З. Г. КЕРИМОВ, Н. И. ЯГУБОВ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ОБСАДНОЙ КОЛОННЕ

Обеспечение прочности материалов обсадных труб для нефтяных и газовых скважин имеет большое значение, в особенности для сверхглубоких скважин.

Как известно, при бурении сверхглубоких скважин глубиной порядка 7—15 км возникает высокая температура. Влияние этой температуры на состояние обсадных колонн пока мало изучено [1, 2, 3, 4 и др.].

В настоящей работе ставится цель—определить температурные напряжения в обсадной колонне в период эксплуатации. При этом предполагается, что концы вертикальной обсадной колонны закреплены и неподвижны, а распределение температуры ($^{\circ}\text{C}$) по длине колонны до начала эксплуатации (рис., а) соответствует изменению геотермического градиента; согласно [5] это изменение имеет вид

$$T_1(z) = A_1 z^2 + B_1 z + C_1,$$

где $A_1 = -0,00375 \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}/\text{м}^2$;

$B_1 = 0,0207 ^{\circ}\text{C}/\text{м}$;

$C_1 = 20^{\circ}\text{C}$ (соответствует среднегодовой температуре земной поверхности).

При эксплуатации скважины восходящий поток жидкости и газа будет дополнительно нагревать обсадную колонну и через некоторое время распределение температуры по длине станет стационарным. Распределение температуры (T_2) потока от устья до забоя (рис., б) будет иметь следующий вид [5]:

$$T_2(z) = B_2 z + C_2,$$

где $B_2 = 0,00375 ^{\circ}\text{C}/\text{м}$;

$$C_2 = T^* - 0,00375 l;$$

Здесь T^* —температура соответствующей глубины, вычисленная по (1). Вычитая (1) из (2), получаем распределение по стволу в виде

$$T(z) = A z^2 + (B_2 - B_1) z + (C_2 - C_1)$$

или

$$T(z) = A z^2 + B z + C,$$

где $A = 0,00375 \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}/\text{м}^2$;

$B = -0,017 ^{\circ}\text{C}/\text{м}^2$;

$$C = (T^* - C_1) - 0,00375 l ^{\circ}\text{C}.$$

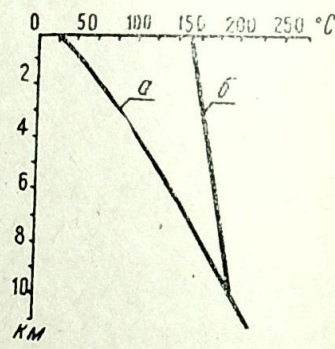


Рис. 1

Рассматриваемая задача сводится к определению температурных напряжений в обсадной колонне, когда температура по высоте распределена согласно (3) и отсутствуют поверхностные и объемные силы.

Для случая свободно сплошного цилиндра, находящегося в симметричном температурном поле относительно оси цилиндра, задача решена В. С. Никишиным [6].

Для решения поставленной задачи принимается цилиндрическая система координат, в которой ось z совпадает с осью обсадной колонны. Вследствие симметричности перемещения и напряжения не зависят от координаты θ , кроме того, тангенциальные перемещения v и два касательных напряжения ($\tau_{\theta z}$, $\tau_{\theta r}$) обращаются в нуль. Так как концы колонны закреплены, то

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

согласно [6]

$$\epsilon_{zz} = \bar{\epsilon}_{zz} + \alpha T,$$

где $\bar{\epsilon}_{zz}$ —относительная деформация, возникающая от температурных напряжений;

αT —свободные деформации колонны от температуры.

Подобно этому можно написать:

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} = \bar{\epsilon}_{rr} + \alpha T; \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = \bar{\epsilon}_{\theta\theta} + \alpha T;$$

w , u —соответственно, осевое и радиальное перемещения.

Учитывая вышеизложенное, уравнения термоупругого равновесия обсадной колонны в перемещениях можно записать:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{1-2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{r} \right) \right] = \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \alpha \frac{d}{dz} T(z), \quad (4)$$

здесь α —коэффициент линейного температурного расширения материала обсадных колонн;

μ —коэффициент Пуассона.

Уравнения, выражающие связь между напряжениями и перемещениями, для рассматриваемого случая будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{\alpha E}{1-2\mu} T(z), \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1+2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{u}{r} \right] - \frac{\alpha E}{1-2\mu} T(z), \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right] - \frac{\alpha E}{1-2\mu} T(z), \\ \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где E —модуль упругости.

Отметим, что при решении задачи E и α принимаются постоянными. В общем случае величины E и α меняются с температурой, но при изменении температуры в пределах 100—200 $^{\circ}\text{C}$, это не превышает 10—15%. Так как учет $E(T)$ и $\alpha(T)$ усложняет расчеты, то для простоты $\alpha = \alpha_{cp}(T) = \text{const}$, $E = E_{cp}(T) = \text{const}$.

Общее решение (4) будем искать в виде
 $u = u_1 + u_2, w = w_1 + w_2;$

здесь u_1, w_1 — общее решение (4) при $T(z) = 0$,
 u_2, w_2 — любое частное решение (4).

Как известно [7], при

$$u_1 = -\frac{1+\mu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z},$$

$$w_1 = \frac{1+\mu}{E} \left[2(1-\mu) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]$$

напряжения определяются следующим образом:

$$\sigma_{rr_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \Delta \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_{zz_1} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(2 - \mu \right) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right],$$

$$\tau_{rz_1} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \mu \right) \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right].$$

Функция Эри $\varphi(r, z)$ должна удовлетворять бигармоническому уравнению:

$$\Delta \Delta \varphi = 0.$$

Исходя из вышеуказанного, напряжения также ищут в виде суммы:

$$\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr_1} + \sigma_{rr_2},$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta_1} + \sigma_{\theta\theta_2},$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz_1} + \sigma_{zz_2},$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \tau_{rz_1} + \tau_{rz_2}.$$

Как видно, $\sigma_{rr_1}, \sigma_{\theta\theta_1}, \sigma_{zz_1}$ и τ_{rz_1} определяются из (6), а $\sigma_{rr_2}, \sigma_{\theta\theta_2}, \sigma_{zz_2}$ и τ_{rz_2} по (5), когда $T(z) \neq 0$.

Частное решение системы (4) в рассматриваемом случае принимается в виде

$$w_2 = 0,$$

$$u_2 = \alpha r(1+\mu) T(z) + \frac{m}{8} r^3, \quad (8)$$

где

$$m = -\frac{A\sigma(1+\mu)}{1-\mu} (1-2\mu).$$

Учитывая (8), в (5) находим

$$\sigma_{rr_2} = -\frac{AE\sigma r^2}{8(1-\mu)} (3-2\mu),$$

$$\sigma_{\theta\theta_2} = -\frac{AE\sigma r^2}{8(1-\mu)} (1+2\mu),$$

$$\sigma_{zz_2} = -\frac{AE\sigma r^2}{2(1-\mu)} \mu - \alpha ET(z),$$

$$\tau_{rz_2} = \frac{\sigma Er}{2} \frac{d}{dz} T(z). \quad (9)$$

Для того, чтобы найти полные напряжения, следует подобрать функции $\varphi(r, z)$ так, чтобы удовлетворялись граничные условия:

$$\sigma_{rr}(a, z) = \sigma_{rr}(b, z) = 0,$$

$$\tau_{rz}(a, z) = \tau_{rz}(b, z) = 0, \quad (10)$$

где a — внутренний радиус колонны, b — ее внешний радиус.

Далее из (6) находим $\sigma_{rr_1}, \sigma_{\theta\theta_1}, \sigma_{zz_1}$ и τ_{rz_1} . Суммируя полученные напряжения с (9), получим полные напряжения в обсадной колонне. Функцию напряжений возьмем в виде полинома пятой степени:

$$\varphi(r, z) = a_3(2z^3 - 3r^2z) + b_3(r^2z + z^3) + a_4(8z^4 - 24r^2z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2z^2 - r^4) + a_5(8z^5 - 40r^2z^3 + 15r^4z) + b_5(2z^5 - r^2z^3 - 3r^4z).$$

Подставляя (11) в (6) и сложив эти значения напряжений с (9), находим компоненты напряжения в обсадной колонне:

$$\bar{\sigma}_{rr} = 6a_3 + (10\mu - 2)b_3 + [96a_4 + 4b_4(14\mu - 1)]z +$$

$$+ [240a_5 + (6 + 108\mu)b_5]z^2 + \left[-180a_5 + (36 - 54\mu)b_5 - \frac{AE\alpha}{8(1-\mu)} (3 - 2\mu) \right] r^2,$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = 6a_3 + (10\mu - 2)b_3 + [96a_4 + 4b_4(14\mu - 1)]z +$$

$$+ [240a_5 + (6 + 108\mu)b_5]z^2 +$$

$$= \left[-60a_5 + (12 - 54\mu)b_5 - \frac{AE\alpha}{8(1-\mu)} (1 + 2\mu) \right] r^2, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -12a_3 + (14 - 10\mu)b_3 - \alpha EC + [-192a_4 + 4b_4(16 - 14\mu) -$$

$$- \alpha EB]z + [-480a_5 + (96 - 108\mu)b_5 - \alpha EA]z^2 +$$

$$+ \left[240a_5 + (-102 + 54\mu)b_5 - \frac{\alpha EA}{2(1-\mu)} \mu \right] r^2,$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \left[96a_4 - 4b_4(8 - 7\mu) + \frac{\alpha EB}{2} \right] r +$$

$$+ [480a_5 + (-96 + 108\mu)b_5 + AE\alpha] rz.$$

Используя граничные условия (10), находим a_3, a_4, b_4, a_5, b_5 и имеем

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{AE\alpha\mu}{4(1-\mu^2)} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} - r^2 \right],$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{AE\alpha}{4(1-\mu^2)} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} - 3r^2 \right], \quad (13)$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = -\frac{AE\alpha}{4(1-\mu^2)} [\mu(a^2 + b^2) + 4r^2] + 10(1+\mu)b_3 - \alpha EC,$$

$$\tau_{rz} = 0.$$

Как видно, σ_{rr} не удовлетворяет граничным условиям (10). Тогда из формулы (13) можно найти следующие значения:

$$\sigma_{rr}(a; z) = P_a = \frac{AE\alpha\mu}{8(1-\mu^2)} (b^2 - a^2),$$

$$\sigma_{rr}(b; z) = P_b = -\frac{AE\alpha\mu}{8(1-\mu^2)} (b^2 - a^2).$$

По формулам Ляме найдем

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{AE\alpha\mu}{8(1-\mu^2)} \left[a^2 + b^2 - \frac{2a^2b^2}{r^2} \right],$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{AE\alpha\mu}{8(1-\mu^2)} \left[a^2 + b^2 + \frac{2a^2b^2}{r^2} \right].$$

Учитывая [8], можно написать; $\bar{\sigma}_{zz} = \mu (\bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{\theta\theta})$, т. е.

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{AE\alpha\mu^2}{4(1-\mu)} (a^2 + b^2).$$

В результате получается

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{rr} = \frac{AE\alpha\mu}{4(1-\mu^2)} \left[(a^2 + b^2) - \frac{(r^4 + a^2b^2)}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \bar{\sigma}_{\theta\theta} + \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{AE\alpha\mu}{4(1-\mu^2)} \left[(a^2 + b^2) + \frac{(a^2b^2 - 3r^4)}{r^2} \right], \\ \sigma_{zz} &= \bar{\sigma}_{zz} + \bar{\sigma}_{zz} = -\frac{AE\alpha\mu}{4(1+\mu)} (a^2 + b^2) + 10(1+\mu)b_3 - \alpha EC - \frac{AE\alpha}{(1-\mu^2)} r^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из третьего уравнения (14) постоянную b_3 можно определить по принципу Сен-Венана. Известно, что если в поперечном сечении труб температура постоянная, но меняется по длине, то при полном закреплении концов в первом приближении можно написать:

$$\sigma_{zz}^* = -\frac{\alpha E}{l} \int_0^l T(z) dz, \quad (15)$$

где l —заданная длина.

Тогда результирующая усилия по оси z , в сечениях достаточно отдаленных от торцев, должна удовлетворять следующему условию:

$$\frac{2\pi}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \sigma_{zz} r dr = -\frac{\alpha E}{l} \int_0^l T(z) dz.$$

Отсюда определяем

$$b_3 = \frac{AE\alpha(b^2 + a^2)}{40(1+\mu)^2} \left(\mu + \frac{2}{1-\mu} \right) + \frac{\alpha EC}{10(1+\mu)} - \frac{\alpha E(2Al^2 + 3Bl + 6C)}{60(1+\mu)}.$$

И наконец, для напряжений в обсадной колонне с неподвижно закрепленными концами имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \frac{AE\alpha}{(1-\mu^2)} \left[\frac{b^2 + a^2}{2} - r^2 \right] - \frac{\alpha E(2Al^2 + 3Bl + 6C)}{6}, \\ \sigma_{rr} &= \frac{AE\alpha\mu}{4(1-\mu^2)} \left[(a^2 + b^2) - \frac{(r^4 + a^2b^2)}{r^2} \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{AE\alpha\mu}{4(1-\mu^2)} \left[(a^2 + b^2) + \frac{(a^2b^2 - 3r^4)}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В частном случае, при $a=0$ и отсутствии второго члена (т. е. при отсутствии закрепления концов) в σ_{zz} , компоненты напряжения из (16) соответствуют результатам, полученным в [6] для сплошного цилиндра с открытыми концами.

Приведем численный расчет для определения термоупругого напряжения в обсадной колонне при следующих данных:

диаметр колонны $8\frac{5}{8}$ дюймов,

внешний радиус $b=0,1095$ м,

внутренний радиус $a=0,0985$ м,

$E=2 \cdot 10^7$ н/см², $\alpha=12,3 \cdot 10^{-6}$ 1/°С.

По формулам (16) легко проверить, что первое слагаемое в σ_{zz} не зависит от z , а при $r=0,1$ м даёт напряжение, равное $8,785 \cdot 10^{-7}$

н/мм², σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ также не зависят от z , и равны соответственно $0,465 \cdot 10^{-8}$ н/мм², $2,5885 \cdot 10^{-7}$ н/мм². Ввиду незначительности этих величин по сравнению со вторым слагаемым в σ_{zz} , в расчетах ими можно пренебречь.

С учетом второго слагаемого в σ_{zz} , термоупругие напряжения для различных глубин будут иметь следующие значения:

l , в м	10 000	9000	8000	7000	6000	5000	4000	3000	2000	1000
σ_{zz} , в $\frac{\text{н}}{\text{мм}^2}$	143,4	134,8	124,4	115,5	100,5	86,8	69,4	55,7	38,6	19,0

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисов Г. М. Некоторые вопросы расчета обсадных труб. Баку, Азнефтеиздат, 1955.
2. Песляк Ю. А., Руппенейт К. В. Теория давления горных пород и метод расчета обсадных труб. ГТТИ, 1961.
3. Мальков И. А., Шацов Н. И. Конструкции нефтяных скважин и методы расчета на прочность обсадных колонн в США. ГОСИНТИ, 1957.
4. Сароян А. Е. О влиянии температуры нагрева на деформацию обсадных эксплуатационных колонн. НХ, № 11, 1960.
5. Мехтиев Ш. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. и др. Тепловой режим нефтяных и газовых месторождений. Баку, Азернефтепешр, 1960.
6. Никишин В. С. Термонапряженное состояние сплошного и полного цилиндра при произвольном распределении температуры по высоте. ВЦ АН СССР, 1962.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости, ч. I. ОНТИ, 1937.
8. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными напряжениями. М., Физматгиз, 1958.

З. Н. Кәримов, Н. И. Ягубов

Горујучу кәмәрдә температур кәркинликләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә истисмар дөврүндә горујучу кәмәр бојунча температур дәјишмәсини нәзәрә алараг температур кәркинликләринин тәјин олунмасындан бәһс едилір.

Алынмыш дәстурларла апарылан һесабламалар кәстәбир ки, чоһ дәрин гујуларда нәзәрә чарпачаг дәрәчәдә температур кәркинликләри јараныр вә буну кәмәрләрин һесабланмасында саја алмамаг бөјүк хәтаја сәбәб олар.

Г. А. ФАРИВЕР, Р. Б. КУРБАНОВА, Н. А. АТАМОВА

СТАТИКА И НЕРАВНОМЕРНОСТИ СТАБИЛИЗАТОРНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ВЕТРОДВИГАТЕЛЯ Д-12

Несмотря на высокие качества и регулируемую способность стабилизаторных ветродвигателей Д-12, их конструкцию не следует рассматривать как окончательно установившийся образец. Они еще далеко несовершенны.

В Азербайджане в процессе длительной эксплуатации стабилизаторных ветродвигателей Д-12 выявились их недостатки, для устранения которых приходилось реконструировать целые узлы.

Инженер Г. А. Фаривер поставил задачу—устранить этот недостаток путем введения кинематической связи между лопастями. С этой целью он связал поворотные части лопастей тягами, ликвидировал некоторые узлы в системе регулирования (трехплечный рычаг, штанга центробежного груза) и проверил регулировку с кинематической связью в работе.

В настоящей статье рассматриваются статические качества и силы трения в существующих ветродвигателях и предложенной системе регулирования.

α -силы трения и нечувствительность в существующем механизме регулирования ветродвигателя Д-12

В существующем конструктивном оформлении центробежно-аэродинамического регулирования ветродвигателя Д-12 трение в звеньях механизма регулирования имеет большую величину, чем обуславливается значительное увеличение общей неравномерности регулирования ветродвигателя.

Проведем все силы трения в механизме регулирования ветродвигателя к моменту трения на оси поворота трехплечего рычага. Согласно схеме, приведенной на рис. 1, можно написать:

$$M_{\text{тр}} = M_0 + M_A + M_B + M_{\text{ст}} + M_c,$$

где $M_0 = \left(\frac{C + P}{2} \right) d_0 f$ —момент трения на оси трехплечего рычага от действующих на него центробежной силы и силы натяжения пружины; C —центробежные силы груза и штанги, приведенные к оси O трехплечего рычага; P —усилие пружины регулирования, приведенное к оси O и равное $C \frac{a}{\delta}$; $d_0 = 16$ мм—диаметр оси O ; f —коэффициент трения на оси O при недостаточной смазке принимается рав-

ным 0,2; $M_A = \frac{CdA}{2} f$ —момент трения на оси A от действия центробежных сил груза и штанги; dA —диаметр оси A , равны 8 мм; $M_B = \frac{PdB}{2} f$ —момент трения на оси B от действия на нее усилия пружины регулирования; dB —диаметр оси B . $M_{\text{ст}} = \frac{C_{\text{ст}} d \delta + P_a d_0}{2} f \cdot \frac{e}{r} \cdot \frac{a}{d}$ —момент трения на осях стабилизатора, приведенный к оси O ; $C_{\text{ст}} = \frac{G_{\text{ст}}}{g} \omega^2 r_{\text{ст}} = 40$ —центробежная сила, действующая на стабилизатор;

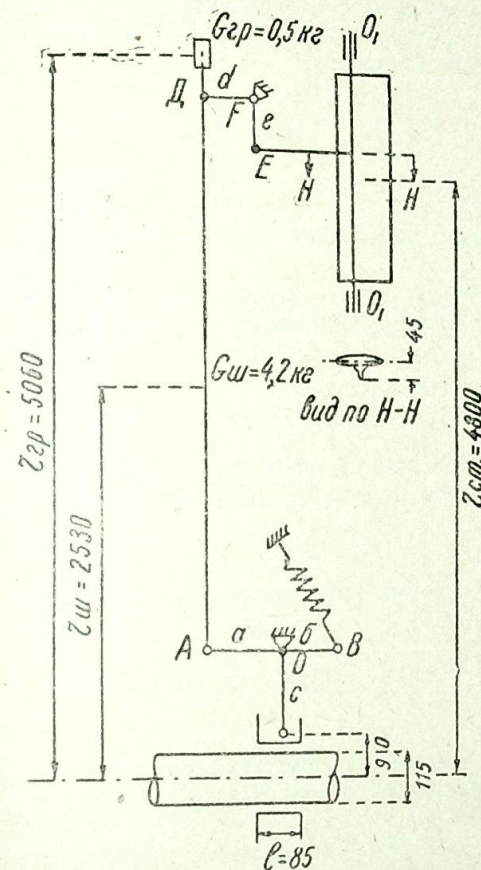


Рис 1. Схема регулирования Д-12.

$M_c = (G_{\text{гр}} + G_{\text{ш}}) a \frac{h}{e} f$ —момент трения в муфте регулятора от перекашивающего действия весовых сил, 1/3 которого этим выражением приводится к оси O трехплечего рычага;

$G_{\text{гр}}$ и $G_{\text{ш}}$ —все центробежного груза и штанги регулирования; h —расстояние от оси вращения ветроколеса до шарнира c на трехплечем рычаге;

l —длина муфты регулятора;

f —коэффициент трения скольжения муфты регулятора по валу ветроколеса принимаем равным 0,3 из-за плохих условий смазки и работы.

$d\delta$ —средний диаметр опорной поверхности буртика оси стабилизатора равный 18 мм;

ω —угловая скорость вращения ветроколеса;

$r_{\text{ст}}$ —расстояние от оси вращения ветроколеса до центра тяжести стабилизатора;

$$P_a = C_{\text{умax}} \frac{\lambda}{g} F_{\text{ст}} \left(\frac{\omega^2 r_{\text{ст}}^2 + v^2}{2} \right) =$$

$= 13,3$ кг—аэродинамическая сила, действующая на стабилизатор на номинальном режиме работы ветродвигателя;

$F_{\text{ст}}$ —площадь стабилизатора в м^2 ;

$C_{\text{умax}} = 1,25$ —максимальное значение коэффициента подъемной силы для профиля стабилизатора;

d_0 —диаметр оси стабилизатора, равный 8 мм;

r —радиус кронштейна на стабилизаторе;

e и d —радиусы двухплечего рычага;

a —величина радиуса трехплечего рычага;

Подставляя числовые значения параметров регуляторов в приведенные выражения, находим:

$$\begin{aligned} M_0 &= 19,5 \text{ кг} \cdot \text{см} & M_A &= 4,22 \text{ кг} \cdot \text{см} \\ M_B &= 6,9 & M_{ct} &= 23 \\ M_c &= 18,8 \end{aligned}$$

Приведенный к оси O трехплечего рычага момент сил трения равен

$$M_{тр} = 19,5 + 4,22 + 6,9 + 23 + 18,8 = 72,42 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Силы трения в механизме регулирования определяют [его нечувствительность к небольшим изменениям действующих сил при изменении скорости вращения ветроколеса.

Степень нечувствительности регулятора называется его нечувствительностью к колебаниям угловой скорости вращения регулируемого объекта, которая определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_1}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{2\omega^2},$$

где

ω — равновесная угловая скорость;

ω_1 — угловая скорость, при которой начинается перемещение муфты регулятора.

В связи с тем, что центробежные силы грузов регулятора пропорциональны ω^2 , то выражение нечувствительности можно переписать в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{M_n - M_{н1}}{2M_{н1}}$$

но разность $M_n - M_{н1}$ равна моменту трения всех сил системы регулятора ветродвигателя, приведенного к оси O трехплечего рычага.

Поэтому $\varepsilon = \frac{M_{тр}}{2M_{н1}}$.

Подставляя цифровые значения, находим степень нечувствительности регулирования ветродвигателя Д-12:

$$\varepsilon = \pm \frac{M_{тр}}{2M_{н1}} = \pm \frac{M_{тр}}{2Ca} = \pm \frac{72,42}{2 \cdot 52,8 \cdot 12,5} = \pm 0,055 = \pm (5,5\%).$$

8-статика предложенного механизма стабилизаторного регулирования ветродвигателя Д-12

Пренебрегая (ввиду незначительной величины) моментами аэродинамических и центробежных сил, действующих на стабилизатор относительно его оси поворота, уравнение статического равновесия регулятора напишем в следующем виде:

$$M_n - M_{н1} \pm M_{тр} = 0,$$

где

M_n — момент центробежных сил груза регулятора относительно оси поворота двухплечего рычага;

$M_{н1}$ — момент усилия пружины относительно оси B поворота двухплечего рычага;

$M_{тр}$ — момент всех сил трения в механизме регулятора, приведенный к оси B .

Согласно схеме, приведенной на рис. 2, находим

$$M_n = \frac{G}{g} \omega^2 (r_{гр} + a \cdot \sin \varphi) a \cdot \cos \varphi,$$

где

G — вес центробежного груза регулятора, кг; ω — угловая скорость вращения ветроколеса, 1/сек; $r_{гр}$ — расстояние от оси вращения ветроколеса до центра тяжести груза, м; a — величина плеча двухплечего рычага; φ — угол поворота двухплечего рычага;

$$M_n = (P_0 + Ka \sin \varphi) a \cdot \cos \varphi,$$

где

P_0 — усилие предварительной затяжки пружины регулирования, кг; K — жесткость пружины регулятора, кг/м. Момент силы трения $M_{тр}$ в механизме регулирования возникает в основном на оси поворота стабилизатора от больших центробежных и аэродинамических нагрузок, действующих на стабилизатор:

$$M_{тр} = \frac{Cd\delta + P_{ст}d}{2} f \cdot \frac{b \cos \varphi}{C \cos \Delta\beta},$$

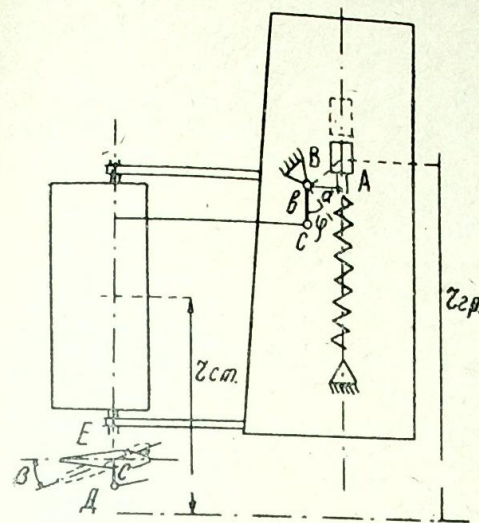


Рис. 2. Схема предложенного регулирования.

где

$C = \frac{G_{ст}}{g} \omega^2 r_{ст}$ — центробежная сила, действующая на стабилизатор;

$P_{ст} = C_{y_{max}} \frac{\gamma}{g} F_{ст} \left(\frac{\omega^2 r_{ст}^2 + \tau^2}{2} \right)$ — аэродинамическая сила, действующая на стабилизатор; $d\delta$ — средний диаметр опорной поверхности буртика оси стабилизатора; d — диаметр оси стабилизатора; f — коэффициент трения на оси стабилизатора, величину которого вследствие недостаточной смазки можно принять равной 0,2;

$\Delta\beta$ — угол поворота стабилизатора; $G_{ст}$ — вес стабилизатора, кг; $r_{ст}$ — расстояние от оси вращения ветроколеса до центра тяжести стабилизатора, м; $C_{y_{max}} = 1,25$ — максимальное значение коэффициента подъемной силы для профиля стабилизатора; $F_{ст}$ — площадь стабилизатора, м²; τ — скорость ветра, м/сек. Ввиду малости углов поворота двухплечего рычага и стабилизатора принимаем:

$$\cos \varphi \approx \cos \beta = 1, \sin \varphi \approx \varphi; \varphi = \frac{c}{b} \beta;$$

имеем

$$\begin{aligned} & \frac{G_{гр}}{g} \omega^2 \left(r_{гр} + \frac{ac}{b} \Delta\beta \right) a - \left(P_0 + Ka \frac{c}{b} \Delta\beta \right) a \pm \\ & \pm \left[\frac{G_{ст}}{2g} \omega^2 r_{ст} d\delta + C_{y_{max}} \frac{\gamma}{2g} F_{ст} \left(\frac{\omega^2 r_{ст}^2 + \tau^2}{2} \right) d \right] f \frac{b}{c} = 0. \end{aligned}$$

Исключая силы трения при предварительном расчете и подставляя $\omega = \frac{\pi n}{30}$, найдем окончательное выражение статики регулирования:

$$n = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{P_0 + Ka \frac{c}{b} \Delta\beta}{\frac{G_{ст}}{g} \left(r_{ст} + a \frac{c}{b} \Delta\beta \right)}}.$$

Для статической устойчивости регулятора необходимо, чтобы обеспечивалось непрерывное увеличение скорости вращения ветроколеса с увеличением угла поворота стабилизатора в процессе регулирования. Это условие обеспечивается при положительном значении первой производной скорости вращения ветроколеса по углу поворота стабилизатора, т. е. при $\frac{dn}{d\beta} > 0$.

Найдем производную выражения n :

$$\frac{dn}{d\beta} = \frac{30}{\pi} \cdot \frac{Ka \frac{c}{b} \cdot \frac{G_{rp}}{g} \left(r_{rp} + a \frac{c}{b} \beta \right) - \frac{G_{rp}}{g} a \frac{c}{b} \left(P_0 + Ka \frac{c}{b} \beta \right)}{2 \sqrt{\frac{P_0 + Ka \frac{c}{b} \beta}{\frac{G_{rp}}{g} \left(r_{rp} + a \frac{c}{b} \beta \right)}}$$

откуда, приравняв числитель дроби к нулю, после сокращения находим жесткость пружины регулирования, обеспечивающую статическую устойчивость регулятора: $K \geq \frac{P_0}{r_{rp}}$. Или, подставляя сюда значение предварительной затяжки пружины регулирования P_0 , равное величине центробежных сил груза регулятора в начале регулирования при $n = n_0$ и $\Delta\beta = 0$, находим:

$$K \geq \frac{\frac{G_{rp}}{g} \omega_0^2 r_{rp}}{r_{rp}} > \frac{G_{rp} \omega_0^2}{g}$$

С учетом заданной статической неравномерности регулирования скорости вращения ветроколеса δ на всем диапазоне изменения скорости ветра и нагрузки ветродвигателя найдем окончательное значение необходимой жесткости пружины регулирования:

$$K \geq \frac{G_{rp} \omega_0^2 (1 + \delta)^2}{g}$$

Подставив параметры механизма регулирования, находим значение необходимой жесткости пружины регулирования и его конструктивные размеры:

$$K = \frac{2,62}{9,81} \cdot 6,28^2 (1 + 0,02)^2 = 11 \frac{\text{кг}}{\text{м}} = 0,11 \frac{\text{кг}}{\text{см}}$$

Начальная затяжка пружины регулирования равна:

$$P_0 = \frac{G_{rp}}{g} \omega_0^2 r_{rp} = 53,2 \text{ кг.}$$

Степень нечувствительности предложенного механизма регулирования ветродвигателя Д-12 находим по выражению:

$$\varepsilon = \pm \frac{M_{тр}}{2 M_y}$$

Подставляя цифровые значения момента трения $M_{тр}$ и момента центробежных сил M_y , находим величину степени нечувствительности ε при $\Delta\beta = 0$:

$$\varepsilon = \pm \frac{\left[\frac{G_{ст}}{2g} \cdot \omega^2 r_{ст} - d \delta + C_{y \max} \frac{\gamma}{2g} F_{ст} \left(\frac{\omega^2 r_{ст}^2}{2} + \frac{v^2}{2} \right) d \right] f \frac{b}{C}}{2 \frac{G_{rp}}{g} \omega^2 r_{rp} a} = \pm 0,0175$$

Общая неравномерность скорости вращения ветродвигателя складывается из статической и динамической неравномерности и зоны нечувствительности регулятора:

$$\delta_{общ} = \delta_{ст} + \delta_{дин} + 2\varepsilon.$$

В нашем случае, принимая $\delta_{ст} = 2\%$, $\delta_{дин} \approx \delta_{ст}$, находим:

$$\delta_{общ} = 2 + 2 + 2 \cdot 1,75 = 7,5\%; \text{ из опыта получено } \delta_{общ} = 7,7\%.$$

Таким образом, приходим к выводу, что с помощью прямой кинематической связи между поворотными частями лопастей ветроколеса можно добиться синхронизации между углами поворота лопастей при работе и устранить значительную аэродинамическую неравномерность ветроколеса. Можно также уменьшить вес центробежных систем. Ясно, что поскольку вес центробежной системы будет иметь меньше, то влияние весовых сил в системе регулирования уменьшится. Исходя из вышеуказанного, предлагаются следующие конструктивные изменения системы регулирования.

Сменить центробежный груз новым, весом 2,62 кг, снять штангу и поместить пружину регулирования внутри поворотной части лопасти. В этом случае муфта, пружины и трехплечий рычаг служит для пуска и остановки ветроколеса.

Выводы

Неравномерность хода ветродвигателя с кинематической связью на 3,5% меньше по сравнению с ветродвигателем без кинематической связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов В. Н., Быстрицкий, Д. Н., Вашкевич К. П., Секторов В. Р. Ветроэлектрические станции, Гос. энергиздат, 1960.
2. Фаривер Г. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук*, 1964, № 5.

Г. А. Фаривер, Р. Б. Курбанова, Н. А. Атамова

Д-12 күләк мұһәррикинн стабилизатор тәнзимләјичисинн статикасы вә бәрәбәрсизлији

ХУЛАСӘ

Д-12 күләк мұһәррики өз иш принципіне көрә јүксәк кејфијјәтли сајылдығына бахмајараг, ондан узун мүддәт истифадә етдикдә бир сыра нөгсанлар ашкара чыхыр. Узун мүддәт истисмарда олдугда сырадан чыхан һиссәләрден бири ганадларын азад һәрләнән һиссәсидир. Бунун әсас сәбәби ганадларын бир-биринә кинематик бирләшдирилмәсидир ки, бу да һәмин һиссәләрин мүхтәлиф бучаг алтында дөнмәсинә сәбәб олур. Ганадлары бир-бирилә кинематик бирләшдирмәклә һәмин нөгсанлар гисмән арадан галдырылыр.

Белә бир конструктив дәјишikliкдән сонра мұәллифләр тәрәфиндән ријазинә һесабламаларла Д-12 күләк мұһәррикинн тәнзимләјичисини илә тәклиф олунан тәнзимләјичинин статикалары мұгајисә олунур.

Ријази ҳесабламалардан белә нәтиҷә ашкар едилір ки, бу үсулла ганадларын арасындакы бәрабәрсизлик нисбәтән азалыр. Беләликлә, мӯәллифләр һесаб едиләр ки, ганадлар арасында кинематик әләгә јаратдыгда Д-12 мӯһәррикинин тәнзимләнмә кәјфијјәти хејли јахшылашыр вә онун истисмар мүддәти чоһалыр.

И. А. МУХТАРОВ, Р. И. МУХТАРОВ

ЦЕНТРОБЕЖНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В МИКРОВОЛНОВОМ СПЕКТРЕ МОЛЕКУЛЫ 1,1,2-ТРИФТОРЭТАНА

Вращательно-колебательное взаимодействие в многоатомных молекулах приводит к заметному отличию вращательных спектров от спектра „эффективного“ жесткого ротатора. Поэтому для точного описания микроволновых спектров таких молекул необходимо вводить дополнительные постоянные τ — постоянные центробежного возмущения [1]. Поправки на центробежное возмущение малы и для практической идентификации переходов не имеют никакого значения. Однако учет их позволяет определить из экспериментального спектра в общем случае 6 постоянных τ , которые, вследствие их относительно простой связи с гармоническими силовыми постоянными молекулы [2], оказываются полезной и в некоторых случаях необходимой дополнительной информацией о силовых постоянных.

1. Теория центробежного возмущения, развитая в [1], приводит к следующему выражению для вращательной энергии молекулы типа асимметрического волчка:

$$W = W_0 + A_1 W_0^2 + A_2 W_0 I(I+1) + A_3 I^2(I+1)^2 + A_4 I(I+1) \langle P_z^2 \rangle + A_5 \langle P_z^4 \rangle + A_6 W_0 \langle P_z^2 \rangle. \quad (1)$$

Это выражение, полученное с учетом вращательно-колебательного взаимодействия во втором порядке теории возмущений, не учитывает высших членов, содержащих шестые, восьмые и т. д. степени операторов момента, и поэтому применимо при не очень больших значениях вращательных квантовых чисел. Трудно получить какой-либо практически удобный критерий, определяющий область применимости, однако для грубых оценок можно указать следующее:

$$\tau \sim \left(\frac{1}{I \omega} \right)^2 \frac{1}{I} \sim B \alpha^2, \text{ где } \alpha = \left(\frac{W_{\text{вр}}}{W_{\text{кол}}} \right) \sim 5 \cdot 10^{-3}, \text{ поэтому } \tau \sim 10^{-5} B, \text{ а для}$$

поправки на центробежное возмущение получим

$$\Delta W_{\text{цб}} \sim 10^{-5} B \langle P^4 \rangle \sim 10^{-5} B I^2 (I+1)^2.$$

Приведенная оценка является сильно завышенной сверху, однако можно ожидать, что аналогичные оценки сверху справедливы и для высших порядков теории возмущений, т. е. что для члена, содержащего $\langle P^{2n} \rangle$, будем иметь величину порядка $B [\alpha I(I+1)]^n$. Это показывает, что при больших I растет весьма быстро $\Delta W_{\text{цб}}$ и, по всей вероятности, необходимо учитывать следующие члены теории возмущений.

Из вышеизложенного следует, что для корректного определения величин τ (или связанных с ними простой зависимостью [1] величин

A , фигурирующих в формуле (1) нужно ограничиться переходами с наиболее низкими значениями I . При этом необходимо учесть также и следующее обстоятельство: как правило, центробежное возмущение в микроволновых спектрах тяжелых многоатомных молекул невелико и для переходов с малыми I составляет от долей $Mгц$ до нескольких $Mгц$.

Обычная погрешность измерения частоты ($0,1 \div 0,2 Mгц$) делает в таких случаях невозможным уверенное определение постоянных центробежного возмущения.

Учитывая эти обстоятельства, из идентифицированных в [3,4] линий вращательных переходов молекулы 1,1,2-трифторэтана были выбраны 13 с наименьшими значениями I и измерены заново их частоты с погрешностью $0,02 \div 0,04 Mгц$.

При составлении уравнений для определения девяти параметров (A, B, C — вращательные постоянные и $A_1, \dots, A_6$ — постоянные центробежного возмущения) возможны два существенно различных метода. Первый заключается в том, чтобы подобрать такие значения параметров, которые минимизировали бы среднюю квадратичную во всех имеющихся в наличии переходах разницу между экспериментальными и расчетными частотами, т. е. составляем квадратичный функционал вида

$$F(A, B, C, A_1, \dots, A_6) = \sum_{I, I'} (v_{I, I'}^{I'} - v_{I, I'}^{I'})^2$$

и тем или иным конкретным способом ищем точку минимума его в окрестности первоначально (из трех переходов с наименьшими I) определенных вращательных постоянных и нулевых значений $A_1, \dots, A_6$. Этот метод, несмотря на кажущуюся привлекательность, обладает, однако, тем недостатком, что в нем не различаются переходы с различными I , а, как говорилось выше, описание спектра с помощью (1) тем менее точно, чем больше I . От этого недостатка можно было бы избавиться, минимизируя функционал вида

$$F(A, B, C, A_1, \dots, A_6) = \sum_{I, I'} (v_{I, I'}^{I'} - v_{I, I'}^{I'})^2 / \sigma^2(I, I')$$

где множители $\sigma^2(I, I')$ введены для учета различной роли переходов с разными I (очевидно, $\sigma^2(I, I')$ должно убывать с увеличением I). Однако для нахождения конкретного вида этих σ^2 необходимы весьма трудоемкие исследования высших членов теории возмущений. Поэтому нам кажется предпочтительнее первый метод, который к тому же менее трудоемок.

Из идентифицированных переходов, частоты которых измерены с достаточной точностью, отбираются девять с наименьшими I и составляется девять уравнений для определения вращательных постоянных и постоянных центробежного возмущения. Получающаяся система существенно нелинейна. Для решения ее наиболее подходящим по смыслу приближения и ввиду малости центробежного возмущения, является хорошо известный метод Ньютона (метод касательных плоскостей).

Для удобства вычислений выражение (1) преобразуем к виду

$$W = W_0 + D_1 \left[\frac{x_2}{x_1} \varepsilon(x) \right]^2 + D_2 I^2 (I+1)^2 + D_3 I (I+1) \frac{x_2}{x_1} \varepsilon(x) + D_4 I (I+1) \langle P_z^2 \rangle + D_5 \langle P_z^4 \rangle + D_6 \langle P_z^6 \rangle \frac{x_2}{x_1} \varepsilon(x). \quad (2)$$

Здесь введены обычные при расчетах спектра асимметрического волчка

[5] величины $x_1 = \frac{A+C}{2}$; $x_2 = \frac{A-C}{2}$ и $x = \frac{2B-A-C}{A-C}$; $\varepsilon(x)$ — приведенная энергия, табулированная в [5], а новые переменные $D_1, \dots, D_6$ связаны со старыми следующим образом:

$$D_1 = A_1 x_1^2; D_2 = D_1 + A_2 \cdot x_1 + A_3; D_3 = 2D_1 + A_2 x_1; D_4 = A_4 + A_6 \cdot x_1; D_5 = A_5 \text{ и } D_6 = A_6 \cdot x_1.$$

Все D имеют одинаковую размерность ($Mгц$) и не так сильно отличаются друг от друга по величине, как A .

Таблица 1

Переходы	$\nu_{\text{эсп.}}$	$\nu_{\text{расч.}}$	$\Delta \nu$
$0_{00}-1_{11}$	11909,70	11909,70	0,00
$1_{01}-2_{12}$	17525,75	17526,31	-0,56
$2_{12}-2_{21}$	18879,45	18879,45	0,00
$2_{11}-2_{20}$	16472,23	16472,23	0,00
$2_{12}-3_{03}$	14280,52	14281,51	-0,99
$3_{12}-3_{21}$	15627,93	15628,45	-0,52
$3_{03}-3_{12}$	8747,50	8747,67	-0,17
$3_{13}-3_{22}$	20179,27	20179,44	-0,17
$4_{11}-4_{23}$	21933,67	21933,80	-0,22

Переходы, использованные для составления уравнений, и исходные данные при $x_1 = 5954,85$; $x_2 = 3146,575$; $x = -0,735673$ и всех $D_i = 0$ приведены в табл. 1.

Секулярные уравнения для всех уровней, приведенных в табл. 1, не выше второго порядка, аналитические выражения для $\varepsilon(x)$ приведены в [5], поэтому нетрудно получить соответствующие выражения для $\langle P_z^2 \rangle$ и $\langle P_z^4 \rangle$, используя волновые функции асимметрического волчка в IKM -представлении.

Решение системы методом Ньютона было проведено на электронной машине $M-20$. В результате решения получены следующие значения:

$$A = 9102,10 Mгц, \quad B = 3640,40 Mгц, \quad C = 2807,32 Mгц, \\ A_1 = 1,36 \cdot 10^{-8} Mгц^{-1}, \quad A_2 = -1,12 \cdot 10, \quad A_3 = 0,134 Mгц, \\ A_4 = 6,263 Mгц, \quad A_5 = 10,31 Mгц, \quad A_6 = -1,88 \cdot 10^{-3}.$$

По этим значениям были подсчитаны частоты других переходов. В табл. 2 для сравнения приведены результаты расчетов и экспериментальные частоты. Уровням 4_{04} , 4_{22} соответствуют секулярные уравнения третьей степени и значения $\varepsilon(x)$, $\langle P_z^2 \rangle$ и $\langle P_z^4 \rangle$ находились

Таблица 2

Переходы	$\nu_{\text{расч.}}$	$\nu_{\text{эсп.}}$
$2_{02}-3_{13}$	22762,54	22762,56
$3_{13}-4_{04}$	21203,62	21203,60
$4_{13}-4_{22}$	14916,90	14916,87
$4_{04}-4_{13}$	11042,95	11042,96

точным решением этих уравнений, так как интерполяция по таблицам приведенной энергии в [5] приводит к погрешности, сравнимой с величиной центробежного возмущения.

Как видно из табл. 2, согласие расчетов с экспериментальными частотами вполне удовлетворительное.

К сожалению, сложность уравнений затрудняет точную оценку погрешности определения постоянных центробежного возмущения и поправок к вращательным постоянным. Однако оценки в линейном приближении показывают, что относительная погрешность меньше $0,02 \div 0,04$ Мгц; $5 \cdot 10^{-2}$ при абсолютной ошибке в измерении частот. Отметим, что для оценки надо брать не исходные центробежные поправки, приведенные в третьем столбце табл. 1, а истинные, получающиеся в результате решения.

Авторы выражают благодарность Ф. М. Гашимзаде за участие в предварительных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kivelson D. a. Wilson E. B. J. Chem. Phys., 20, 1575 (1952).
2. Kivelson D. a. Wilson E. B. J. Chem. Phys., 21, 1229 (1953).
3. Мухтаров И. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, № 4, 59 (1962).
4. Мухтаров И. А. „ДАН СССР“, т. 151, 1076 (1963).
5. Таунс Ч. и Шавлов А. „Радиоспектроскопия“. ИИЛ, М., 1959.

Поступило

И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров

1,1,2- үчфторлу этан молекулун микродалгалары спектриндә мәркәздәнгачма һәҗәчанланмасы

ХҮЛАСӘ

1, 1,2-үчфторлу этан молекулун микродалгалар спектриндән һәм ин молекулун мәркәздәнгачма сабитләри тапылмышдыр. Бунун үчүн кичик квант әдәлләринә тәфавүг едән 13 кечидин удулма хәтти $0,02-0,04$ мгх хәта илә өлчүлмүш вә бунлардан енержи сәвијәләри садә тәнлик-ләрлә верилә биләнләриндән 9 мәчһул мәркәздәнгачма сабитләрини тапмагдан өтрү 9 тәнлик алмаг үчүн истифадә едилмишдир.

Алынән тәнликләр бөјүк електрон һесаблајычы машинларда һәлл едилмишдир. Мәркәздәнгачма сабитләри үчүн алынән гијмәтләр јердә галан 4 хәтләрдә јохланылмыш вә кафи чаваб алынмышдыр.

МҮНДӘРИҖАТ

А. С. Маһмудов. Кәсилмәз функцијаларын Тејлор әмсаллары һаггында	3
И. И. Ибраһимов, А. Ә. һәмидов. Комплексы дәјишәнли функција-ларын гаршы-гаршыја дуран бучагларда там функцијаларла гарышыг јахынлаш-масы һаггында	13
Р. М. Әлијев, Ә. С. Чәфәров. Квадратура дүстурларынын гадыг һәдди һаггында	23
Һ. М. Һәшимов. Таваш артан функцијадын хәссәләри һаггында	30
Ф. Һ. Шамијев. Мүхтәлиф һиссәләрдән гурашдырылмыш минимум чә-кили конструкцијалар ләһнә етмәк һаггында	36
Р. З. Хәлилова. Өз-өзүнә гошма олан јарыммәһдуд ади дифференциал ифадәләрин системиндән әмәдә кәдән операторун кенишләмәсинин спектрал функцијасынын асимптотикасы	—
Ә. Ш. Дадашов. Гејри-мүнтәзәм гыздырылмыш фырланан цилиндрләрин пластик д. формасына вәзијәтинә „уҗуғлашма“ габилијәти	50
А. О. Јагубзаде. Гејри-стационар филтрәсија тәндлији үчүн гојулмыш оха симметрик мәсәләнин әдәли һәлли	55
Е. Ч. Асланов. Һилберт фәзасында квадратик функцијаларын минимуму һаггында	65
И. Ш. Ибраһимов. Параметр гијмәтләринин ашкар ифадәләри һаг-гында бәзи теоремләр	71
И. Л. Абросимов. Тунелли диод үзәриндә јығылмыш бир дағанагы вәзијәти олан мултивибраторун тәдгиги	77
И. А. Мәммәдов. Суда ултрасәс далгаларынын удулмасынын релак-сација механизми һаггында	83
Г. М. Әлијев, С. Һ. Әлијева. Таллиум ашгарлы кристал вә маје селенин електрик кечирмәси	88
В. М. Нағыјев. Боратлы шүшәдә Cu^{2+} электрон парамагнит резонансы	92
А. А. Әбдүррәһманов. Еттинһаузен спонтан еффеҗтинин нәзәријә-синә даир	96
Ә. Н. Әлијев. Чох алчаг тәзиғи вә температурларда тәсирсиз газларын адсорбцијасынын дифференциал энтропијасынын һесабыланмасы	100
Д. Һ. Араслы, М. И. Әлијев вә В. И. Фистул. Арсен вә галлиумла јүксәк лекире олунмыш керманиумун истилик кечирмәси	103
Л. М. Иманов, Ч. О. Гачар, И. Ч. Исајев. CH_3CHDOH молекулунун микродалгалар кы спектри	110
Ә. Х. Хәлилов. $\text{NaCl} + \text{Ag}$ фосфорларынын мүхтәлиф нәв рекомбина-сијалы лүминесценсија спектрләринә микродефектләрин пајланмасынын тәсир-нин тәдгиги	114
Р. Ш. Јәһјајев, Ф. С. Садыгов. Һиссәчикләрин формфакторларынын вә узунуна поларизацијанын $p \rightarrow p \rightarrow \mu \rightarrow \mu$ просесиндә нәзәрә алынмасы	123
В. С. Гурович, О. Х. Һүсәјнов. Ифрат сыхлыгы конфигурацијала-рын лимит күтәси һаггында	128
Ч. М. Чуварлы, Г. В. Вечхајзер, В. Ј. Штејншрајбер. Озона-торун кечид саһәләриндә електрик характеристикалары	134
Ч. М. Чуварлы, Л. А. Мухарскаја. Сәғһи кәрилмә кестәричисинин трансформатор ағы кәйфијәтинин нәзәрәтиндә истифадә олунмасы	142
Ч. М. Чалјан. Даирәви ен кәсикли силиндрик нагилләр системиндә	147
З. Һ. Кәримов, Н. И. Јагубов. Горујучу кәмәрдә температур кәр-жиндикләри	154
Г. А. Фаривер, Р. Б. Гурбанова, Н. А. Атамова. Д-12 күдәк мүһәррикинин стабилизатор тәнзимләјишсинин статикасы вә бәрәбәрсизлији	160
И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров. 1, 1, 2-үчфторлу этан молекулун микродалгалары спектриндә мәркәздәнгачма һәҗәчанланмасы	167

СОДЕРЖАНИЕ

А. С. Махмудов, О коэффициентах Тейлора непрерывных функций . . .	3
И. И. Ибрагимов, А. А. Гамидов. О смешанных приближениях функций комплексного переменного в противоположащих углах посредством целых функций	13
Р. М. Алиев, А. С. Джафаров. Об оценке погрешности квадратурных формул	23
Г. М. Гашимов. О свойствах медленно растущих функций	30
Ф. Г. Шамиев. О проектировании комбинированных конструкций минимального веса	36
Р. З. Халилова. Асимптотика спектральной функции полуограниченного самосопряженного расширения оператора, порожденного системой обыкновенных дифференциальных выражений	41
А. Ш. Дадашев. О приспособляемости неравномерно нагретых вращающихся цилиндров	50
А. О. Ягуб-заде. Численное решение осесимметрической задачи для уравнения типа нестационарной диффузии	55
Э. Дж. Асланов. О минимизации квадратичного функционала в гильбертовом пространстве	65
И. Ш. Ибрагимов. Некоторые теоремы о явных выражениях оценок параметров	71
И. Л. Абросимов. Исследование ждущего мультивибратора на туннельном диоде	77
И. А. Мамедов. О релаксационном механизме поглощения ультразвуковых волн в воде	83
Г. М. Алиев, С. Г. Алиева. Электропроводность кристаллического и жидкого селена с примесью теллура	88
В. М. Нагиев. Электронный парамагнитный резонанс Cu^{2+} в боратных стеклах	92
А. А. Абдурахманов. К теории спонтанного эффекта Эттингсгаузена	96
А. Н. Алиев. Вычисление энтропии адсорбции инертных газов при весьма низких давлениях и температурах	100
Д. Г. Араслы, М. И. Алиева и В. И. Фистуль. Теплопроводность германия, сил легированного мышьяком и галлием	103
Л. М. Иманов, Ч. О. Каджар, И. Дж. Исаев. Микроволновый спектр молекулы CH_3CHDOH	110
А. Х. Халилов. Исследование влияния распределения микродфектов на спектры различных видов рекомбинационной люминесценции $NaCl-A_2$ фосфоров	114
Р. Ш. Яхьяев, Ф. С. Садыгов. Учет факторов и продольных поляризацй спинов частиц при электромагнитной аннигиляции $p+p \rightarrow \mu+\mu$	123
В. Ц. Гурович, О. Х. Гусейнов. О предельной массе сверхплотных конфигураций	128
Ч. М. Джуварлы, Г. В. Вечхайзер, В. Я. Штейншрайбер. Электрические характеристики озонатора в переходной области	134
Ч. М. Джуварлы, Л. А. Мухарская. О применимости показателя поверхностного напряжения для контроля качества трансформаторных масел	142
К. М. Чальян. Исследование сходимости метода расчета распределения переменного тока в системе цилиндрических проводов кругового сечения	147
З. Г. Керимов, Н. И. Ягубов. Термоупругие напряжения в обсадной колонне	154
Г. А. Фаривер, Р. Б. Курбанова, Н. А. Атамова. Статика и неравномерности стабилизаторного регулирования ветродвигателя Д-12	160
И. А. Мухтаров, Р. И. Мухтаров. Центробежное возмущение в микроволновом спектре молекулы 1, 1, 2-трифторэтана	167