

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-ТЕХНИКА ВƏ РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИХ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

3

1965

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

М. Ю. АХУНД-ЗАДЕ, И. Г. ТАГИЕВ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Во многих задачах по теории и расчету оболочек исходят из принципа малых деформаций, пренебрегая в уравнениях равновесия нелинейными членами—приводят их к линейной системе уравнений относительно искомых функций.

В большинстве случаев ограничение только линейными членами дает вполне удовлетворительные результаты для инженерной практики и поэтому линейная теория занимает ведущее место в общей теории оболочек, она разработана с достаточной полнотой. Но при решении некоторых задач практика настойчиво требует учета больших деформаций, т. е. оставления в выражениях деформаций нелинейных членов.

Следует отметить, что в пологих оболочках, особенно когда они подвергаются нормальной нагрузке, нелинейные члены, происходящие от тангенциальных перемещений u и v , по сравнению с нелинейными членами от прогиба w пренебрежительно малы. Поэтому при определении деформаций нами будут учтены нелинейные члены, происходящие только от прогиба w .

1. Уравнения равновесия пологих оболочек с учетом нелинейных членов, происходящих только от w , и при отсутствии внешних тангенциальных сил В. З. Власовым представлены в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta \varphi - Eh \left[K_2(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_1(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + Eh \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] &= 0, \\ \Delta \Delta w + \frac{1}{D} \left[K_2(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_1(x, y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{D} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \right. & \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] &= \frac{1}{D} Z(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1, 1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ —главные кривизны.

Эти уравнения отличаются от уравнений линейной теории нали-

п 35186
Центральная научная
библиотека
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-технических и математических наук)“

Подписано к печати 27/VIII 1965 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,56. Печ. лист. 12,50. Уч.-изд. лист. 11,65. ФГ 02012. Заказ 190. Тираж 680. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Государственного Комитета
Совета Министров Азербайджанской ССР по печати,
Баку, ул. Ази Асланова, 80.

чим в них нелинейных членов, играющих существенную роль при больших прогибах оболочки. Полагая в (1, 1)

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= \frac{L + \bar{L}}{2} \\ \varphi &= \kappa \frac{L - \bar{L}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (1, 2)$$

где L — комплексная функция, $\bar{L}$ — комплексное сопряжение функции L , i — мнимая единица, а $\kappa = \sqrt{EhD}$, и введя обозначение

$$\bar{\nabla}_\kappa = K_2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_1(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (1, 3)$$

уравнения (1, 1) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta \Delta L - i \lambda \bar{\nabla}_\kappa L + i \lambda \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) \right]^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{L - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{L - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{L - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{L + \bar{L}}{2} \right) \right\} = \frac{1}{D} \cdot Z(x, y), \end{aligned} \quad (1, 4)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h} \quad (1, 5)$$

где

Рассмотрим обратное значение κ :

$$\kappa^* = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{EhD}} = \frac{1}{\sqrt{Eh \cdot \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}}} = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{E \cdot h^2} = \nu \cdot \bar{\nu},$$

где ν обозначает безразмерную часть κ^* , а $\bar{\nu} = 1/\kappa^2$.

Очевидно, что ν — существенно малое число. Далее вводим в рассмотрение функцию условного прогиба

$$\bar{w} = \frac{1}{\nu} w. \quad (1, 6)$$

Тогда функция L выражается в виде

$$L^* = \nu \cdot (\bar{w} + i \bar{\nu} \varphi) = \nu \bar{L}, \quad (1, 7)$$

$$\bar{L} = \bar{w} + i \bar{\nu} \varphi, \quad \bar{\varphi} = \bar{\nu} \varphi. \quad (1, 8)$$

Подставляя в (1, 4) выражение L по (1, 7), получим

$$\Delta \Delta \bar{L} - i \lambda \bar{\nabla}_\kappa \bar{L} + \nu i \lambda \Lambda(\bar{L}, \bar{L}) = \bar{\nu} Z(x, y), \quad (1, 9)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{L}, \bar{L}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right) - \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right) \right]^2 + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L} - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L} - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right) + \end{aligned} \quad (1, 10)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L} - \bar{L}}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L} + \bar{L}}{2} \right), \\ & \lambda = \frac{1}{D} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{12(1-\mu^2)}{E \cdot h^3} \cdot \frac{1}{\nu} = \\ & = \left(\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{E \cdot h} \right) \cdot \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h} \cdot \frac{1}{\nu} = (\nu \cdot \bar{\nu}) \cdot \lambda \cdot \frac{1}{\nu} = \\ & = \bar{\nu} \lambda, \text{ т. е. } \lambda^* = \bar{\nu} \lambda \end{aligned}$$

$\bar{L}$ — комплексное сопряжение функции $\bar{L}$. Отсюда видно, что λ^* и λ различаются только по размерности, а их численные значения равны.

Форма уравнения (1, 9) указывает на возможность разложения $\bar{L}$ и $\bar{\bar{L}}$ по степеням малого параметра ν :

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \bar{L}_0 + \nu \bar{L}_1 + \nu^2 \bar{L}_2 + \dots \\ \bar{\bar{L}} &= \bar{\bar{L}}_0 + \nu \bar{\bar{L}}_1 + \nu^2 \bar{\bar{L}}_2 + \dots \end{aligned} \quad (1, 11)$$

Подставляя эти выражения в (1, 9), получим следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \bar{L}_0 - i \lambda \bar{\nabla}_\kappa \bar{L}_0 &= \lambda^* Z(x, y), \\ \Delta \Delta \bar{L}_1 - i \lambda \bar{\nabla}_\kappa \bar{L}_1 &= -i \lambda \Lambda_0(\bar{L}_0, \bar{\bar{L}}_0), \\ \Delta \Delta \bar{L}_2 - i \lambda \bar{\nabla}_\kappa \bar{L}_2 &= -i \lambda \Lambda_1(\bar{L}_0, \bar{\bar{L}}_0, \bar{L}_1, \bar{\bar{L}}_1) \end{aligned} \quad (1, 12)$$

и т. д.,

где

$$\Lambda_0(\bar{L}_0, \bar{\bar{L}}_0) = \Lambda(\bar{L}_0, \bar{L}_0) \quad (\text{см. (1, 10)}),$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\bar{L}_0, \bar{\bar{L}}_0, \bar{L}_1, \bar{\bar{L}}_1) &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \left. \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_0 - \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_1 - \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \left. \right] - \\ & - 2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_0 - \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_1 - \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \left. \right] + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_0 - \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_1 + \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) + \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\bar{L}_1 - \bar{\bar{L}}_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\bar{L}_0 + \bar{\bar{L}}_0}{2} \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (1, 13)$$

Азгабарыглы өртүклэрин гејри-хэтти мувазинэт
тэнликлэринин тэгриби һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә В. З. Власовун азгабарыглы өртүклэрин гејри-хэтти мувазинэт тэнликлэринин илишән хэтти тэнликләрә кәтирилмәси мәсәләси изаһ едилир. (1, 1) тэнликләри кичик параметр $\nu = \frac{1}{\sqrt{EhD}}$ васитәсилә илишән хэтти тэнликләр системинә чеврилир. Беләликлә, алынан тэнликләр хэтти нәзәријјәнин әсасында һәлл едилир вә верилмиш сәрһәд мәсәләсинин һәлли истәнилән дәгигликлә тапыла билир.

2. Рассмотрим частные случаи.

При $K_1 = K_2 = \frac{1}{r_0} = \text{const}$ имеем случай сферической оболочки. При этом

$$\nabla_k = \frac{1}{r_0} \Delta, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2, 1)$$

тогда левые части уравнений (1, 12) по виду совпадают с уравнением равновесия сферической оболочки линейной теории.

Следовательно, предложенный метод позволяет свести уравнение равновесия сферической оболочки при больших прогибах к зацепляющейся системе уравнений сферической оболочки линейной теории.

В случае $K_1 = 0, K_2 = \frac{1}{r_0}$ из уравнений (1, 12) получаем зацепляющиеся уравнения круговой цилиндрической оболочки при больших прогибах, которые по структуре совпадают с уравнениями равновесия круговой цилиндрической оболочки линейной теории.

Необходимо отметить, что при учете изменения кривизны, т. е. когда K_1 и K_2 переменные, к каждому уравнению системы (1, 12) следует повторно применить способ разложения по малому параметру, по предложенному нами в предыдущей работе [4] методу относительно уравнений равновесия линейной теории оболочек. При этом малым параметром является $\nu = 1 - \rho_2$ наимен., где ρ_2 наимен. — наименьшее значение безразмерного радиуса кривизны. В результате каждое уравнение системы (1, 12) распадается на систему зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами, совпадающих по виду с уравнением равновесия сферической оболочки.

Аналогичным образом для произвольных пологих цилиндрических оболочек при $K_1 = 0, K_2(\beta) = \frac{1}{r(\beta)}$ из каждого уравнения системы (1, 12) получается система зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами, которые по виду совпадают с уравнением равновесия круговой цилиндрической оболочки.

При решении конкретных краевых задач к полученной системе присоединяются краевые условия, которые тоже надо разложить по степеням ν и добиться удовлетворения граничных условий каждым членом ряда в отдельности.

Учитывая, что решение нелинейных уравнений равновесия произвольных пологих оболочек при больших прогибах с заданными краевыми условиями связано со значительными трудностями, приведение вышеуказанной нелинейной системы по предложенному методу к системе зацепляющихся линейных уравнений имеет важное практическое значение в инженерном деле при расчете и проектировании оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.
2. Власов В. З. Избранные труды, т. I, 1962.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948.
4. Ахундзаде М. Ю., Тагыев И. Г. Новый приближенный метод решения уравнений равновесия произвольных пологих оболочек.

Поступило 4.V.1963

О ЕДИНСТВЕННОСТИ НАИЛУЧШЕЙ ПРИБЛИЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ
ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ
СУММАМИ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

$$L_p^{(n)}(Q) = L_{p_1, \dots, p_n}(Q), \quad \bar{p} = (p_1, \dots, p_n) \quad p_i \geq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$
$$\left(\int_{x_1^0}^{x_1} \left(\dots \left(\int_{x_1^0(x_2, n)}^{x_1(x_2, n)} |F(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}-1}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}} = \|F\|_{\frac{r}{\mu}}^{(r)},$$
$$\left. \begin{aligned} x_n^0 &\leq x_n \leq X_n \\ x_{n-1}^0(x_n) &\leq x_{n-1} \leq X_{n-1}(x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ x_2^0(x_{\overline{3,n}}) &= x_2^0(x_3, \dots, x_n) \leq x_2 \leq X_2(x_3, \dots, x_n) = X_2(x_{\overline{3,n}}) \\ x_1^0(x_{\overline{2,n}}) &= x_1^0(x_2, \dots, x_n) \leq x_1 \leq X_1(x_2, \dots, x_n) = X_1(x_{\overline{2,n}}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Величину

$$E_{\bar{p}}^{(n)}(F) = \inf_{\varphi_1 + \dots + \varphi_n} \left\| F(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\|_{\bar{p}}^{(n)}$$

назовем наилучшим приближением в смысле метрики пространства $L_p^{(n)}(Q)$ функции $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q)$ посредством функций вида

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \in L_p^{(n)}(Q).$$

§ 2. Каждое множество Q n -мерного евклидова пространства R определяет некоторый параллелепипед $[Q_1, \dots, Q_n]$, где $Q_i, i = 1, \dots, n$ являются проекциями множества Q на оси Ox_i . Рассмотрим функцию $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$, определенную на параллелепипеде $[Q_1, \dots, Q_n]$, и Q_i разделим точками

$$x_i^{(0)} < x_i^{(1)} < \dots < x_i^{(m)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$V = \sum_{k=1}^{m-1} \left| \sum_{i=1}^n [\varphi_i(x_i^{(k+1)}) - \varphi_i(x_i^{(k)})] \right|. \quad (V)$$

Аналогично однородному случаю точную верхнюю границу множества всевозможных сумм V назовем полной вариацией функции $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ на параллелепипеде $[Q_1, \dots, Q_n]$ и обозначим через $V_Q \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right)$.

Если $V_Q \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right) < +\infty$,

то функцию $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ будем называть функцией ограниченной вариации.

Нетрудно убедиться, что таким образом определенная функция ограниченной вариации $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ обладает многими обычными свойствами функции одной переменной с ограниченной вариацией. Назовем некоторые из этих свойств:

а) монотонная функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ (функцию многих переменных называем монотонной, если она монотонна по каждой переменной при фиксированных остальных) есть функция с ограниченной вариацией;

в) функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ в ограниченном n -мерном параллелепипеде, удовлетворяющая условию Липшица

$$\left| \sum_{i=1}^n [\varphi_i(x'_i) - \varphi_i(x''_i)] \right| \leq L \sum_{i=1}^n |x'_i - x''_i|,$$

является функцией с ограниченной вариацией;

с) всякая функция с ограниченной вариацией $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ ограничена;

д) сумма и разность двух функций вида $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ с ограниченной вариацией суть функции с ограниченной вариацией;
е) пусть на n -мерном параллелепипеде $P+Q=[P_1+Q_1, \dots, P_n+Q_n]$ задана конечная функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ и $mP_i, mQ_i > 0, i=1, \dots, n$, тогда

$$V_{P+Q} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) = V_P \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) + V_Q \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right);$$

ф) для того, чтобы функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ была с ограниченной вариацией, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме разности двух возрастающих функций.

Эти свойства функций с ограниченной вариацией $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ нетрудно установить при помощи рассуждений, приведенных для одномерного случая (см. [3]).

Установим еще одно свойство функций с ограниченной вариацией $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$. В соотношении (V), фиксируя переменные $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n, k=1, \dots, n$, получим, что для того, чтобы функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$

была с ограниченной вариацией на $[Q_1, \dots, Q_n]$, необходимо, чтобы функции $\varphi_i(x_i), i=1, \dots, n$ были с ограниченными вариациями на отрезках Q_i . С другой стороны, как показывает соотношение

$$\begin{aligned} V \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) &= \sum_{k=1}^{m-1} \left| \sum_{i=1}^n [\varphi_i(x_i^{(k+1)}) - \varphi_i(x_i^{(k)})] \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m-1} |\varphi_i(x_i^{(k+1)}) - \varphi_i(x_i^{(k)})| = \sum_{i=1}^n V(\varphi_i), \end{aligned}$$

оно и достаточно, т. е. справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы функция $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ была с ограниченной вариацией на параллелепипеде $[Q_1, \dots, Q_n]$, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi_i(x_i), i=1, \dots, n$ были с ограниченными вариациями соответственно на отрезках Q_i .

Очевидно, мы имеем $\varphi_i(x_i) \in L_{p_i}[Q_i]$, откуда в силу ограниченности множества Q $\varphi_i(x_i) \in L_p^{(n)}(Q)$, что нам дает $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \in L_p^{(n)}(Q)$.

Итак, функция с ограниченной вариацией $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ на ограниченном параллелепипеде $[Q_1, \dots, Q_n]$ принадлежит пространству $L_p^{(n)}(Q)$.

§ 3. Обозначим через $\left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\}_{V_M}$ семейство функций, определенных в параллелепипеде $[Q_1, \dots, Q_n]$, таких, что все функции этого семейства и множество их вариаций ограничены одним числом M :

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right| \leq M, \quad V_Q \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i \right) \leq M.$$

Наилучшее приближение функции $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q)$ посредством функций из семейства $\left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\}_{V_M}$ обозначим через $E_p^{(n)}(F)_{V_M}$.

В [3] нами была доказана

Теорема 2. Пусть $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q), p_i \geq 1, i=1, \dots, n$, где Q — ограниченное множество вида (1) пространства R_n . Тогда в классе $\left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\}_{V_M}$ существует наилучшая приближающая, т. е.

$$\begin{aligned} \text{функция } \sum_{i=1}^n \varphi_i^0(x_i) \in \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\}_{V_M} \text{ такая, что} \\ \left\| F - \sum_{i=1}^n \varphi_i^0 \right\|_{\bar{p}}^{(n)} = \\ = \inf_{\sum_{i=1}^n \varphi_i \in \left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i \right\}_{V_M}} \left\| F - \sum_{i=1}^n \varphi_i \right\|_{\bar{p}}^{(n)} = E_p^{(n)}(F)_{V_M}. \end{aligned}$$

Теперь выясним, когда сумма $\sum_{i=1}^n \varphi_i^0(x_i)$ — наилучшая приближающая функции $F(x_1, \dots, x_n)$ будет единственной для всякой $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q)$. С этой целью установим одно свойство пространства $L_p^{(n)}(Q), p_i > 1, i=1, \dots, n$.

Теорема 3. Пространство $L_p^{(n)}(Q), p_i > 1, i=1, \dots, n$, где Q есть множество вида (1), является строго нормированным, т. е. неравенство

$$\|f_1 + g_1\|_{\bar{p}}^{(n)} \leq \|f_1\|_{\bar{p}}^{(n)} + \|g_1\|_{\bar{p}}^{(n)} \quad (2)$$

превращается в равенство только при

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \alpha g_1(x_1, \dots, x_n),$$

где $\alpha > 0, f_1, g_1 \in L_p^{(n)}(Q)$ (мы пренебрегаем множеством меры нуль в смысле пространства R_n).

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } \|f_1 + g_1\|_{\bar{p}}^{(n)} &= \\ &= \left\| \left(\left\| \left(\dots \left(\|f_1(x_1, \dots, x_n) + g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} \right) \dots \right) \right\|_{p_{n-1}} \right) \right\|_{p_n} \leq (A_1) \\ &\leq \left\| \left(\left\| \left(\dots \left(\|f_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} + \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} \right) \dots \right) \right\|_{p_{n-1}} \right) \right\|_{p_n} = \\ &= \left\| \left(\left\| \left(\dots \left(\|f_2(x_2, \dots, x_n) + g_2(x_2, \dots, x_n)\|_{p_2} \right) \dots \right) \right\|_{p_{n-1}} \right) \right\|_{p_n} \leq (A_2) \end{aligned}$$

$$\leq \dots \leq \left\| \left(\|f_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\|_{p_{n-1}} + \|g_{n-1}(x_{n-1}, x_n)\|_{p_{n-1}} \right)_{n-1} \right\|_{p_n} =$$

$$= \|f_n(x_n) + g_n(x_n)\|_{p_n} \leq$$

$$\leq \|f_n(x_n)\|_{p_n} + \|g_n(x_n)\|_{p_n}. \quad (A_n)$$

Известно, что пространства L_{p_i} , $p_i > 1$, $i = 1, \dots, n$ строго нормированы. Чтобы в (2) получилось равенство, необходимо, чтобы неравенства $(A_1), \dots, (A_n)$ превращались в равенства. В силу строгой нормированности пространства L_{p_i} из превращения неравенства (A_1) в равенство следует, что

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \gamma_1(x_2, \dots, x_n) g_1(x_1, \dots, x_n), \quad (B_1)$$

$$\gamma_1(x_2, \dots, x_n) > 0,$$

так как для каждой точки $(x_2^0, \dots, x_n^0) \in A_Q^{(1)}$ мы имеем

$$f_1(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) = \gamma g_1(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

т. е. γ вообще зависит от переменных $x_2, \dots, x_n$ ($A_Q^{(1)}$ — проекция множества Q на евклидово пространство $R_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$).

Аналогично, в силу строгой нормированности пространств L_{p_i} , $i = 2, \dots, n$ из превращения неравенств $(A_2), \dots, (A_n)$ в равенства последовательно получаем

$$f_2(x_2, \dots, x_n) = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) g_2(x_2, \dots, x_n), \quad \gamma_2(x_3, \dots, x_n) > 0, \quad (B_2)$$

$$f_n(x_n) = \gamma_n g_n(x_n), \quad \gamma_n > 0, \quad (B_n)$$

где $\gamma_n = \text{const}$.

Соотношения $(B_2), \dots, (B_n)$ можем написать в виде

$$\|f_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1}, \quad \gamma_2(x_3, \dots, x_n) > 0, \quad (C_2)$$

$$\|f_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1, \dots, p_{n-1}} = \gamma_n \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1, \dots, p_n}, \quad \gamma_n > 0. \quad (C_n)$$

Воспользуемся равенством (B_1) в (C_2) .

$$\|\gamma_1(x_2, \dots, x_n) g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1},$$

или

$$\gamma_1(x_2, \dots, x_n) \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1} = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) \|g_1(x_1, \dots, x_n)\|_{p_1},$$

откуда

$$\gamma_1(x_2, \dots, x_n) = \gamma_2(x_3, \dots, x_n).$$

Тогда

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) g_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\gamma_2(x_3, \dots, x_n) > 0.$$

Рассуждая аналогично, получим цепь равенств

$$\gamma_1(x_2, \dots, x_n) = \gamma_2(x_3, \dots, x_n) =$$

$$= \gamma_3(x_4, \dots, x_n) = \dots = \gamma_n > 0,$$

которая нам даст

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \gamma_n g_n(x_1, \dots, x_n),$$

где число $\gamma_n = \alpha > 0$, что требовалось доказать.

Теперь уже нетрудно установить и единственность наилучшей приближающей функции при приближении функции $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q)$, $p_i > 1$, $i = 1, \dots, n$ суммами функций одной переменной.

Теорема 4. Пусть

$$F(x_1, \dots, x_n) \in L_p^{(n)}(Q), \quad p_i > 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Q — ограниченное множество вида (1) n -мерного евклидова пространства R_n . Тогда в классе $\left\{ \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i) \right\}_{V_M}$ существует единственная

наилучшая приближающая функция в смысле метрики пространства $L_p^{(n)}(Q)$, $p_i > 1$, $i = 1, \dots, n$.

Эта теорема доказывается аналогично известной теореме единственности ([1], стр. 17—18).

§ 4. Пусть E — произвольное линейное нормированное пространство, элементами которого служат функции, зависящие от n независимых параметров $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, определенные на некотором множестве пространства R_n . Будем говорить, что пространство E строго нормировано, если в неравенстве

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad u \neq 0, \quad v \neq 0, \quad v \in E,$$

знак равенства достигается только при $u = \alpha v$, где $\alpha > 0$.

Задачу аппроксимации определим следующим образом: найти функцию

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^0(\lambda_i), \quad \text{которая дает наименьшее значение величине } \|\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i)\|,$$

где $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i)$ принадлежат пространству E .

Определение. Непустое множество A элементов метрического пространства E называется компактным, если оно конечно, или же, если всякая бесконечная часть A_0 этого множества имеет хотя бы одну предельную точку ([3], стр. 509).

Теперь при такой общей постановке вопроса приведем теоремы существования и единственности.

Теорема 5. Пусть $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E$, где E — линейное нормированное пространство и $\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}$ — компактное семейство функций из этого пространства. Тогда в этом классе существует наилучшая приближающая, т. е. функция $\sum_{i=1}^n \omega_i^0(\lambda_i) \in \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}$, для которой

$$\left\| \Phi - \sum_{i=1}^n \omega_i^0 \right\| = \inf_{\sum_{i=1}^n \omega_i \in \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i \right\}} \left\| \Phi - \sum_{i=1}^n \omega_i \right\|.$$

Этот факт устанавливается аналогично теореме 2 из [4]. Как частный случай из этой общей теоремы следует теорема 2, где $E = L_p^{(n)}(Q)$ и условие компактности, накладываемое на класс приближающих функций $\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}$, удовлетворяется в силу равномерной ограниченности функций и их вариаций семейства $\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}_{V_M}$.

Теорема 6. Пусть $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in E$, где линейное нормированное пространство E строго нормировано. Если $\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}$ — компактное семейство функций из этого пространства, то в нем су-

существует единственная наилучшая приближающая функция в смысле метрики пространства E .

Эта теорема доказывается аналогично теореме 4.

Если класс приближающих функций $\left\{ \sum_{i=1}^n \omega_i(\lambda_i) \right\}$ не ограничивать вышеуказанным достаточным условием для существования наилучшей приближающей функции, то справедлива

Теорема 6*. В строго нормированном линейном пространстве, если существует наилучшая приближающая в смысле этого пространства, то она единственна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.
2. Ибрагимов И. И. Abstracts of short Communications, Stockholm. 1962 (J. C. M.)
3. Натансон И. П. Теория функций вещественного переменного. М., 1957.
4. Бабаев М.-Б. А. Тр. Ин-та математики и механики АН Азерб. ССР, т. 3, Поступило 27. IV 1964

М.-Б. Э. Бабаев

Үмүмиләшмиш Лебег фәзасында чохдәјишәнли
функсијалары бирдәјишәнли функсијаларын чәмләри
илә јахынлашдыраркән ән јахшы јахынлашдыран функсијанын
јеканәлији һаггында

ХҮЛАСӘ

Ишдә үмүмиләшмиш Лебег фәзасынын $L_p^{(n)}(Q)$, $p_i > 1$, $i = 1, \dots, n$ чидди нормаллашмыш олдуғу көстәрилир. $\sum_{i=1}^n \varphi_i(x_i)$ шәклиндә олан чохдәјишәнли функсијалар үчүн вариасија аңлајышы верилир вә онларын бәзи хассәләри мүүјјән едилир.

Бундан башга, чохдәјишәнли функсијалары бирдәјишәнли функсијаларын чәмләри илә јахынлашдыраркән ән јахшы јахынлашдыран функсијанын варлығы вә јеканәлији ихтијари хәтти нормал фәзада өјрәнилир.

Ариф С. ДЖАФАРОВ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ АНАЛОГАМИ СУММ ФЕЙЕРА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

В работе выводятся общие оценки для отклонений функции на сфере от сумм, составленных из частных сумм ее ряда Лапласа и являющихся аналогами сумм Фейера и Валле-Пуссена. Отметим, что средние арифметические ряды Лапласа довольно подробно изучались в работах Фейера, Грануолла, Чепмена, Хаара [2], где главным образом рассматривался вопрос о сходимости, а вычислению оценок погрешности приближения при тех или иных дифференциальных свойствах функции внимания не уделялось.

Впервые Г. Г. Кушниренко [5] доказано, что среднее арифметическое $\sigma_n(\theta, \varphi)$ ряда Лапласа функции $f(\theta, \varphi)$, удовлетворяющей условию Липшица порядка $0 < \alpha \leq 2$, дает приближение этой функции не превосходящее

$$\frac{c(\alpha)}{n^\alpha}, \text{ если } 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \text{ и } \frac{c}{\sqrt{n}} \ln n, \text{ если } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Полученные нами оценки являются общими. Особенности этих оценок состоят в том, что они зависят от поведения последовательности $\{E_n(f)\}$ — наилучших приближений функций на единичной сфере посредством конечных сферических сумм. В частности усиливается и дополняется соответствующий результат Г. Г. Кушниренко, находится условие разложимости непрерывной на единичной сфере функций в равномерно сходящийся ряд Лапласа.

Пусть $f(\theta, \varphi)$ — непрерывная на единичной сфере функция и

$$f(\theta, \varphi) \sim \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{2\kappa+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_\kappa(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi', \quad (1)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

ее ряд Лапласа.

Обозначим через $S_n[f]$ сумму первых $n+1$ членов этого ряда:

$$S_n[f] = J_0(\theta, \varphi) + J_1(\theta, \varphi) + \dots + J_n(\theta, \varphi), \quad (2)$$

где

$$J_\kappa(\theta, \varphi) = \frac{2\kappa+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi') P_\kappa(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

а через $\sigma_n[f]$ среднее арифметическое первого порядка суммы (2):

$$\sigma_n[f] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(\theta, \varphi).$$

По аналогии с классическим случаем суммы

$$\sigma_{n,m}[f] = \frac{1}{m+1} \sum_{k=n-m}^n S_k(\theta, \varphi)$$

$$(0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots)$$

будем называть суммами Валле-Пуссена. Как видно,

$$\sigma_{n,n}[f] = \sigma_n[f], \quad \sigma_{n,0}[f] = S_n[f],$$

если $f(\theta, \varphi)$ есть сферическая сумма порядка μ , то при $n-m \geq \mu$

$$\sigma_{n,m}[f; \theta, \varphi] = f(\theta, \varphi).$$

Покажем, что суммы Валле-Пуссена удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_{n,m}[f; \theta, \varphi]| \leq c \frac{2n-m+1}{m+1} \max_{\theta, \varphi} |f(\theta, \varphi)|, \quad (3)$$

где c — постоянная, не зависящая от n и m .

Действительно, из определения $\sigma_n(\theta, \varphi)$ вытекает, что

$$S_0(\theta, \varphi) + S_1(\theta, \varphi) + \dots + S_{k-1}(\theta, \varphi) = \kappa \sigma_k(\theta, \varphi).$$

Отсюда

$$S_k(\theta, \varphi) = (\kappa+1) \sigma_{k+1}(\theta, \varphi) - \kappa \sigma_k(\theta, \varphi),$$

и потому

$$\sum_{k=n-m}^n S_k(\theta, \varphi) = (n+1) \sigma_{n+1}(\theta, \varphi) - (n-m) \sigma_{n-m}(\theta, \varphi),$$

так что

$$\sigma_{n,m}(\theta, \varphi) = \frac{n+1}{m+1} \sigma_{n+1}(\theta, \varphi) - \frac{n-m}{m+1} \sigma_{n-m}(\theta, \varphi). \quad (4)$$

Но доказано [1], что если $f(\theta, \varphi)$ — произвольная суммируемая функция, заданная на единичной сфере, и $|f(\theta, \varphi)| \leq M$, то средние первого порядка отрезков ряда Лапласа этой функции ограничены неравенством

$$\left| \frac{S_0(\theta, \varphi) + S_1(\theta, \varphi) + \dots + S_n(\theta, \varphi)}{n+1} \right| \leq cM, \quad (5)$$

где c — постоянная, не зависящая от n (Гронвальд).

Из (4), (5) вытекает (3).

Теперь докажем теорему, аналогичную теореме Валле-Пуссена

Теорема 1. Если $f(\theta, \varphi)$ — непрерывная на единичной сфере функция, то отклонение сумм Валле-Пуссена $\sigma_{n,m}(\theta, \varphi)$ этой функции удовлетворяет неравенству

$$|f(\theta, \varphi) - \sigma_{n,m}(\theta, \varphi)| \leq c \frac{n+1}{m+1} E_{n-m+1}(f), \quad (6)$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение $f(\theta, \varphi)$ посредством сферических сумм порядка $n-1$, c — постоянная, не зависящая от n и m .

Доказательство. В самом деле, аналогично суммам $S_n(\theta, \varphi)$ суммы $\sigma_{n,m}(\theta, \varphi)$ обладают тем свойством, что

$$\sigma_{n,m}[f-g] = \sigma_{n,m}[f] - \sigma_{n,m}[g].$$

Отметив это, обозначим через $Q(\theta, \varphi)$ сферическую сумму, наименее уклоняющуюся от $f(\theta, \varphi)$ среди сферических сумм порядка $\leq n-m$, так что

$$|f(\theta, \varphi) - Q(\theta, \varphi)| \leq E_{n-m+1}(f).$$

В таком случае по (3) окажется

$$|\sigma_{n,m}[f-Q]| \leq c \frac{2n-m+1}{m+1} E_{n-m+1}(f),$$

или, что то же самое,

$$|\sigma_{n,m}[f] - \sigma_{n,m}[Q]| \leq c \frac{2n-m+1}{m+1} E_{n-m+1}(f),$$

а так как

$$\sigma_{n,m}[Q] = Q(\theta, \varphi),$$

то

$$|\sigma_{n,m}[f] - Q(\theta, \varphi)| \leq c \frac{2n-m+1}{m+1} E_{n-m+1}(f).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(\theta, \varphi) - \sigma_{n,m}[f]| &\leq \\ &\leq |f(\theta, \varphi) - Q(\theta, \varphi)| + |Q(\theta, \varphi) - \sigma_{n,m}[f]| \leq \\ &\leq E_{n-m+1}(f) + c \frac{2n-m+1}{m+1} E_{n-m+1}(f) \leq \\ &\leq c \frac{n+1}{m+1} E_{n-m+1}(f), \end{aligned}$$

где c — новая постоянная, не зависящая от n и m .

Теорема доказана.

При $m=0$ из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1.1. Сумма первых n членов ряда Лапласа функции $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(\theta, \varphi) - S_{n-1}[f; \theta, \varphi]| \leq cn E_n(f).$$

В работе [4] нами был рассмотрен класс функций $H^{(p)}[\varphi]$ ($p = 0, 1, 2, \dots$), аналогичный соответствующему классу С. Б. Стечкина, и доказано, что если

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &\in H^{(p)}[\varphi] \quad (\varphi \in N^*), \text{ то} \\ E_n(f) &\leq \frac{c}{n^{2p}} \varphi \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Сопоставляя это со следствием 1.1, получаем

Следствие 1.2. Если $f(\theta, \varphi) \in H^{(p)}[\varphi]$ ($\varphi \in N^*$), то

$$|f(\theta, \varphi) - S_{n-1}[f; \theta, \varphi]| \leq \frac{c}{n^{2p-1}} \varphi \left(\frac{1}{n} \right) \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Между прочим, из следствия 1.1, вытекает разложимость в равномерно сходящийся ряд Лапласа (1) всех функций $f(\theta, \varphi)$, у которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(f) = 0. \quad (8)$$

Условие (8) выполнено, например, если $f(\theta, \varphi) \in H[\delta^\alpha]$ ($1 < \alpha \leq 2$), т. е. если функция $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет обобщенному условию Липшица порядка α , $1 < \alpha \leq 2$ (см. [4]).

Это последнее условие, как нам кажется, сравнительно легко проверяемое, в отличие от существующих, нам известных (см., например, [2], стр. 334, [6], стр. 496). Дадим одно применение теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $f(\theta, \varphi)$ — непрерывная на единичной сфере функция. Тогда

$$|f(\theta, \varphi) - \sigma_{n-1}[f; \theta, \varphi]| \leq \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n E_k(f), \quad (9)$$

где c — постоянная, не зависящая от n .

Аналогичная теорема для 2π -периодических функций от одной переменной была доказана С. Б. Стечкиным [3] и иным путем М. Ф. Тиманом [7]. Мы проведем доказательство, следуя С. Б. Стечкину.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n и найдем целое $p \geq 0$ из условий

$$2^p \leq n < 2^{p+1}. \quad (10)$$

Тогда можем написать:

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}(f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k(f) = \\ &= \frac{1}{n} \left\{ S_0(f) + \sum_{v=1}^{p-1} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^v-1} S_k(f) + \sum_{k=2^{p-1}}^{n-1} S_k(f) \right\}, \end{aligned}$$

где в случае $n=1$ обе суммы справа являются пустыми. Поэтому

$$\begin{aligned} f - \sigma_{n-1}(f) &= \frac{1}{n} \left\{ [f - S_0(f)] + \right. \\ &+ \sum_{v=1}^{p-1} \sum_{k=2^{v-1}}^{2^v-1} [f - S_k(f)] + \left. \sum_{k=2^{p-1}}^{n-1} [f - S_k(f)] \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Выражая правую часть (11) через суммы Валле—Пуссена и используя оценку (6), получаем

$$\begin{aligned} f - \sigma_{n-1}(f) &= \frac{1}{n} \left\{ [f - \sigma_{0,0}(f)] + \sum_{v=1}^{p-1} 2^{v-1} [f - \sigma_{2^{v-1}, 2^{v-1}-1}(f)] + \right. \\ &+ \left. (n - 2^{p-1}) [f - \sigma_{n-1, n-2^{p-1}-1}(f)] \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |f - \sigma_{n-1}(f)| &\leq \frac{c}{n} \left\{ E_1(f) + \sum_{v=1}^{p-1} (2^v + 2^{v-1} - 1) E_{2^{v-1}}(f) + \right. \\ &+ \left. (2n - 2^{p-1}) E_{n-2^{p-1}}(f) \right\} \leq \frac{c}{n} \left\{ 3E_1(f) + \right. \\ &+ \left. 3 \sum_{v=2}^{p-1} 2^{v-1} E_{2^{v-1}}(f) + (2n - 2^{p-1}) E_{n-2^{p-1}}(f) \right\}. \end{aligned}$$

Но

$$2^{v-1} E_{2^{v-1}}(f) \leq \sum_{k=2^{v-2}+1}^{2^{v-1}-1} E_k(f)$$

и в силу (10)

$$\begin{aligned} (2n - 2^{p-1}) E_{n-2^{p-1}}(f) &\leq \frac{2n - 2^{p-1}}{n - 2^{p-1} - 2^{p-2}} \sum_{k=2^{p-2}+1}^{n-2^{p-1}-1} E_k(f) = \\ &= \left(2 + \frac{2^p}{n - 2^{p-1} - 2^{p-2}} \right) \sum_{k=2^{p-2}+1}^n E_k(f) \leq 6 \sum_{k=2^{p-2}+1}^n E_k(f). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |f - \sigma_{n-1}(f)| &\leq \frac{c}{n} \left\{ 3E_1(f) + 6 \sum_{v=2}^{p-1} \sum_{k=2^{v-2}+1}^{2^v-1} E_k(f) + \right. \\ &+ \left. 6 \sum_{k=2^{p-2}+1}^n E_k(f) \right\} \leq \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n E_k(f), \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Следствие 2. 1. если $f(\theta, \varphi) \in H[\delta^\alpha](0 < \alpha \leq 2)$, т. е. если функция $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет обобщенному условию Липшица порядка $0 < \alpha \leq 2$, то

$$|f(\theta, \varphi) - \sigma_{n-1}[f; \theta, \varphi]| \leq \begin{cases} \frac{c_1}{n^\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{c_2}{n} \ln n & \text{при } \alpha = 1, \\ \frac{c_3}{n} & \text{при } 1 < \alpha \leq 2. \end{cases}$$

Эта оценка усиливает соответствующий результат Г. Г. Кушниренко при $\alpha = \frac{1}{2}$ и дополняет для $\frac{1}{2} < \alpha \leq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гронвальд. Math. Ann., т. 74, 1913, 213—270.
2. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
3. Стечкин С. Б. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LXII, 1961.
4. Джафаров Ариф С. Тр. Второй конференции по конструктивной теории функций, Баку, 1965.
5. Кушниренко Г. Г. О приближении функций, заданных на единичной сфере конечными сферическими суммами. Научные доклады высшей школы, физ.-матем. науки, № 4, 1958.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2, ГИТТЛ, М., 1957.
7. Тиман М. Ф. ДАН СССР, 145, № 4, 1962.

Поступило 26, V 1964

Сфера үзәриндә тә'јин олунмуш функцијаларын ујғун
Фејер вә Валле-Пуссен чәмләри васитәсилә
јахынлашдырылмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ваһид радиуслу сфера үзәриндә кәсилмәјән функција-
нын өз Лаплас сырасынын Фејер вә Валле-Пуссен чәмләринә ујғун
хүсуси чәмләриндән мејли тәдгиг едилир. Алынмыш нәтичәләр үму-
мидир. Бу нәтичәләр сфера үзәриндә кәсилмәјән функцијанын сонлу
сферик чәмләрлә ән јахшы мүнтәзәм јахынлашмасы васитәсилә вери-
лир. Хүсуси һалда функцијанын Лаплас сырасына ајрылыш шәрти
көстәрилир.

Р. К. КАСУМОВ

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$P(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Рассматривается задача Коши

$$\begin{cases} P(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \delta(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $P(x) > 0$.

Мы будем предполагать также, что:

1) $P''(x)$ непрерывная;

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \frac{P'}{P^{1/2}} \right| + \left| \frac{P''}{P^{3/2}} \right| \right) dx < \infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \xi(x) = \infty,$$

$$\xi(x) = \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau. \quad (2)$$

Нас интересует асимптотика функции Грина — $G(x, t)$ при $t \rightarrow +0$
и при $x \rightarrow +\infty$.

Докажем следующую теорему, из которой, в частности, получа-
ется искомая асимптотика для $G(x, t)$.

Теорема 1. Для задачи (1), если выполняются условия 1, 2,
3, асимптотика для $G(x, t)$ при $\frac{\xi^2(x)}{t} \rightarrow +\infty$ имеет вид $G(x, t) =$

$$= \frac{[P(x)]^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2(x)}{4t}} \left[1 + o\left(\frac{t}{\xi(x)}\right) \right].$$

Доказательство. Изложим вначале план доказательства. Сле-
даем преобразование Лапласа по t . Тогда уравнение (1) превратится
в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} - \lambda P(x) V = -P(x) \delta(x). \quad (3)$$

Далее, применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} G_0(x, \lambda) d\lambda, \quad (4)$$

где $G_0(x, \lambda)$ — функция Грина для уравнения (3). Воспользуемся следующим известным фактом для уравнения

$$V'' - \lambda PV = 0.$$

Если выполняются условия 1, 2, 3, то существует два решения этого уравнения, имеющие следующий вид:

$$V_1 = [P(x)]^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} [1 + \varphi_1(x, \lambda)] \quad \text{при } x > 0;$$

$$V_2 = [P(x)]^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} [1 + \varphi_2(x, \lambda)] \quad \text{при } x < 0,$$

где

$$|\varphi_1(x, \lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \int_x^\infty \psi(x) dx \quad \text{при } x > 0,$$

$$|\varphi_2(x, \lambda)| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^x \psi(x) dx \quad \text{при } x < 0, \quad (5)$$

оценка (5) для φ_1 и φ_2 имеет место при $x > x_0 > 0$, $x < x_0 < 0$ и при $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} > C_0 > 0$, C_0 и x_0 — фиксированные числа. При этом $\varphi_i(x, \lambda)$ — регулярные при $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda} > C_0 > 0$,

Теперь мы имеем:

$$G_0(x, \lambda) = C \left\{ [P(x)]^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \psi(x)\right) \right] \right\} \quad x > 0;$$

$$G_0(x, \lambda) = C \left\{ [P(x)]^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}} \psi(x)\right) \right] \right\} \quad x < 0;$$

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\lambda} P(0)} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right].$$

Оценим интеграл (4) методом перевала.

Интеграл (4) перепишется в следующем виде:

$$G(x, t) = C(x) \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) \right] d\lambda,$$

$$C(x) = \frac{[P(x)]^{-\frac{1}{4}}}{4\pi i P(0)},$$

отсюда $G(x, t) = C(x) [I_1 + I_2]$.

Мы имеем $I_1 = 2\sqrt{\pi} i t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2(x)}{4t}}$

Оценим интеграл I_2 :

$$I_2 = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{\lambda t} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^x \sqrt{P(\tau)} d\tau} O\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) d\lambda.$$

Сделаем замену

$$\lambda = \mu_1^2,$$

тогда контур интегрирования переходит в гиперболу (рис.). Мы берем ту часть гиперболы, которая находится в правой полуплоскости.

Снова сделаем замену

$$\mu_1 = \frac{\xi(x)}{t} \mu,$$

тогда

$$I_2 = \int_{L_1} e^{\frac{\xi^2(x)}{t} [\mu^2 - \mu]} O\left(\frac{t}{\xi(x)} \mu^{-1}\right) \frac{\xi(x)}{t} d\mu.$$

Этот контур обозначим через L_1 . Его можно деформировать в линию наискорейшего спуска, проходящую через точки перевала функции $h(\mu) = \mu^2 - \mu$.

Тогда

$$|I_2| \leq C_0 \int_C \left| e^{\frac{\xi^2(x)}{t} [\mu^2 - \mu]} \right| |\mu^{-1}| |d\mu|,$$

где уравнение линии C будет $\xi = \frac{1}{2}$.

Найдем точку перевала

$$h(\mu) = \mu^2 - \mu,$$

$$h'(\mu) = 2\mu - 1 = 0;$$

точка перевала $-\xi = \frac{1}{2}$.

В качестве линии наискорейшего спуска мы должны выбрать ту, на которой

$$\operatorname{Im} h(\mu) = 0 \quad \text{и}$$

$$\operatorname{Re} h(\mu) < \operatorname{Re} h(\xi).$$

Это и будет линия C . Значит мы можем интеграл I_2 оценить методом Лапласа:

$$|I_2| \leq C_1 \xi^{-1}(x) t^{1/2} e^{-\frac{\xi^2(x)}{4t}},$$

тогда

$$G(x, t) = \frac{[P(x)]^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2(x)}{4t}} \frac{1}{\sqrt{t}} \left[1 + O\left(\frac{t}{\xi^2(x)}\right) \right].$$

Теорема доказана.

При $x < 0$ получается аналогичная формула. В частности, если $x > 0$ фиксировано, а $t \rightarrow +0$, то асимптотика имеет вид

$$G(x, t) \sim C e^{-\frac{C_1}{4t}} \frac{1}{\sqrt{t}} [1 + O(t)], \quad (*)$$

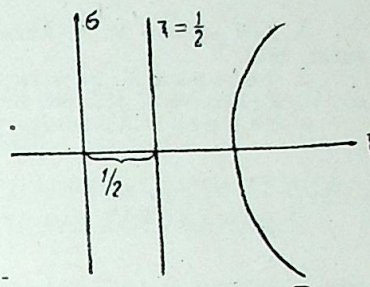


Рис.

а при $t \geq 0, x \rightarrow +\infty$

$$G(x, t) = C_0 \frac{[P(x)]^{-\frac{1}{4}}}{2\sqrt{\pi}} e^{-C_1 \xi(x)} [1 + O[\xi(x)^{-1}]]. \quad (**)$$

Если $P(x) = \text{const}$, то главный член асимптотики $(C_1 \cdot t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}})$ совпадает с известной в этом случае функцией Грина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., Гостехиздат, 1958.
2. Федорюк М. В. Асимптотика функции Грина при $t \rightarrow +0, x \rightarrow \infty$. Матем. сб., т. 62 (104), № 4, М., 1963 (397—468).
3. Де Брейн. Асимптотические методы в анализе. ИЛ, 1962.

Поступило 22. X 1964

Р. Г. Гасымов

$$P(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{тэнлији үчүн Грин функцијасынын асимптотикасы}$$

ХҮЛАСӘ

Төгдүм олунан мөгаләдә верилән тэнлијин Грин функцијасы үчүн $t \rightarrow +0, t \rightarrow \infty$ олдугда асимптотикасы тапылыр: $t \rightarrow +0$ олдугда Грин функцијасы $G(x, t)$ үчүн (*) вә $x \rightarrow \infty$ (**) асимптотикалары алыныр.

Х. Г. БАГИРОВ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГУРСА ПО ПАРАМЕТРАМ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию непрерывности и дифференцируемости решения дифференциальных уравнений в зависимости от параметров.

В данной работе изучается дифференцируемость решения задачи Гурса в пространстве Банаха для системы уравнений:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \Phi_{k i_k}(x_1, \dots, x_s; u_1, \dots, u_N; \lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad (1)$$

при

$$u_{i_k}|_{x_k=x} = \varphi_{i_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s), \quad (2)$$

$$k = \overline{1, s}; i_k = n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + 1, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + n_k;$$

$$\sum_{k=1}^s n_k = N,$$

в классе абстрактных функций скалярных аргументов со значениями из некоторого пространства Банаха B_0 ; n_k — целые числа.

Область изменения пространственных координат $x = (x_1, \dots, x_s)$ обозначим через $D_0 = D_0(a_k \leq x_k \leq b_k)$, a_k и b_k — постоянные числа.

Параметры $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ изменяются в определенном замкнутом множестве E_0 заданного пространства Банаха E .

Предположим, что операторы $\Phi_{k i_k}$ действующие из $D_0 \times B_0 \times E_0$ в B_0 , непрерывны по совокупности всех своих аргументов, имеют ограниченные непрерывные частные производные по u_{i_k} и λ_v ($v = \overline{1, s}$).

Абстрактные функции $\varphi_{i_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)$ со значениями из B_0 непрерывны по совокупности своих аргументов*.

Рассматриваемая задача эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$u_{i_k} = \int_{x_k}^{x_k} \Phi_{k i_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; u_1, \dots, u_N; \lambda_1, \dots, \lambda_s) d\xi_k + \varphi_{i_k}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s) \quad (3)$$

* Аналогичная задача нами рассматривалась в пространстве C . См. Тр. Ин-та физики и математики, АН Азерб. ССР. Серия матем., т. VII, 1956, стр. 55.

Пусть B_k — совокупность векторов с n_k компонентами, каждая из которых принадлежит B_0 .

Введем обозначения:

$$U_k = (u_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, u_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}),$$

$$\tilde{\Phi}_k = (\Phi_{k, n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \Phi_{k, n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}),$$

$$\tilde{\varphi}_k = (\varphi_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \varphi_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}),$$

Рассмотрим произведение

$$B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_s$$

и

$$U = (U_1, \dots, U_s).$$

Пусть

$$\|U_k\|_{B_k} = \max_{i_k} \{ \|u_{i_k}\|_{B_0} \},$$

$$\|U\|_B = \max_k \{ \|U_k\|_{B_k} \}.$$

Очевидно, C — банахово пространство.

Далее имеем:

$$U_k|_{x_k=x_k^0} = (\varphi_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, \varphi_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+n_k}) = \tilde{\varphi}_k \in B_k.$$

В этих обозначениях (1) и (2), соответственно и (3) примут вид:

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = \tilde{\Phi}_k(x_1, \dots, x_s; U_1, \dots, U_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad (1)'$$

$$U_k|_{x_k=x_k^0} = \tilde{\varphi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s), \quad (2)'$$

$$U_k = \int_{x_k^0}^{x_k} \tilde{\Phi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_1, \dots, U_s, \lambda_1, \dots, \lambda_s) d\xi_k +$$

$$+ \tilde{\varphi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s). \quad (3)$$

Существование и единственность решения вышепоставленной задачи, а также непрерывная зависимость найденного решения от начальных функций нами рассмотрены ранее.*

В настоящей статье исследуется дифференцируемость единственного решения $U(x_1, \dots, x_s; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ задачи (1)', (2)' по параметрам λ_v ($v = \overline{1, s}$).

Пусть $\bar{\lambda}_v$ и λ_v — значения одного и того же параметра.

Кроме вышеуказанных условий, допустим, что при фиксированном

v :

$$\left\| \sum_{j=1}^s \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial U_{j,v}}(\cdot) \cdot (\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}) \right\| \leq \psi_k^{(1)}(x) \cdot \|\bar{U}_{k,v} - U_{k,v}\|, \quad (3)''$$

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial \lambda_v}(\cdot) \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) \right\| \leq \psi_k^{(2)}(x) \cdot \|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|,$$

$$\bar{U}_{k,v}, U_{k,v} \in B_k; \quad \bar{\lambda}_v, \lambda_v \in E_0,$$

где функции $\psi_k^{(m)} > 0$ непрерывны и

$$\int_{a_k}^{b_k} \psi_k^{(m)}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s) d\xi_k < \infty.$$

$$m = 1, 2$$

Рассмотрим вспомогательную систему интегральных уравнений

$$\mathcal{U}_{k,v}(x_1, \dots, x_s) \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) =$$

$$= \int_{x_k^0}^{x_k} \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \right.$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \cdot \mathcal{U}_{j,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial \lambda_v}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots,$$

$$U_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) \left. \right] d\xi_k \quad (4)$$

при фиксированном v .

В силу непрерывности и ограниченности $\frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial U_{j,v}}$ и $\frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial \lambda_v}$ система (4)

имеет единственное решение.

Теорема. При вышеуказанных предположениях решение U_k задачи (1)' и (2)' допускает непрерывные частные производные Фреше по λ_v ($v = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, s}$), совпадающее с решением системы (4).

Пусть

$$\bar{U}_{k,v} = \int_{x_k^0}^{x_k} \tilde{\Phi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; \bar{U}_{1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v};$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) d\xi_k +$$

$$+ \tilde{\varphi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s),$$

$$U_{k,v} = \int_{x_k^0}^{x_k} \tilde{\Phi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v};$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) d\xi_k + \tilde{\varphi}_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)$$

при фиксированном v ,

откуда

$$\bar{U}_{k,v} - U_{k,v} =$$

$$= \int_{x_k^0}^{x_k} \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{j,v}, \right.$$

$$\bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) (\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}) +$$

$$+ \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial \lambda_v}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v};$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) \left. \right] d\xi_k$$

$$+ \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)}(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{j,v},$$

$$\bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; (\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}); \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) +$$

$$+ \omega(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi_k, x_{k+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \lambda_1, \dots,$$

* Изв. АН Азерб. ССР, 1963, № 1.

$$\left. \lambda_{v-1}, \lambda_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s; (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) \right] d\xi_K. \quad (5)$$

Или

$$\begin{aligned} & \|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\| \leq \\ & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left[\left\| \sum_{j=1}^s \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}} \cdot (\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}) \right\| + \left\| \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial \lambda_v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) \right\| + \right. \\ & \quad \left. + \left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} + \omega \right\| \right] d\xi_K. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (3)'', получим:

$$\begin{aligned} \|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\| & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left[\psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\| + \right. \\ & \quad \left. + \psi_K^{(2)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| + \left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} + \omega \right\| \right] d\xi_K; \end{aligned}$$

$\bar{\lambda}_v$ и λ_v фиксированны, следовательно $\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| \neq 0$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left[\psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \right. \\ & \quad \left. + \psi_K^{(2)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) + \frac{\left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} \right\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \frac{\|\omega\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \right] d\xi_K. \end{aligned}$$

Пусть

$$\psi_K(x_1, \dots, x_s) = \psi_K^{(2)}(x_1, \dots, x_s) + \frac{\left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} \right\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \frac{\|\omega\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|}.$$

Очевидно

$$\int_{x_K^0}^{x_K} \psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) d\xi_K < +\infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left[\psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \right. \\ & \quad \left. + \psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \right] d\xi_K. \end{aligned}$$

Так как $\bar{\lambda}_v$ и λ_v фиксированы, то $\frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|}$ есть непрерывная функция $x \in D_0$.

Применяя обобщенное неравенство Гроноулла, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\|\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \leq \\ & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) e^{\xi_K} d\xi_K. \quad (5)' \end{aligned}$$

В силу ограниченности правой части (5)' $U_{K,v}$ равномерно непрерывны по λ_v .

Далее из (4) и (5) получим

$$\begin{aligned} & [(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v)] = \\ & = \int_{x_K^0}^{x_K} \left[\sum_{j=1}^s \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{j,v}, \bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \right. \\ & \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \times [(\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}) - v_{j,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v)] + \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{j,v}, \bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \right. \right. \\ & \quad \left. \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) - \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s; \right. \\ & \quad \left. U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \right] v_{j,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v) + \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} + \omega \right] d\xi_K. \end{aligned}$$

В силу (3)'', очевидно, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - V_{K,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \leq \\ & \leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left\{ \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \cdot \frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - V_{K,v} \cdot (\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^s \left[\left\| \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{j,v}, \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) - \frac{\partial \tilde{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, \right. \\ & \quad \left. x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \right\| \times \\ & \quad \left. \times \|v_{j,v}\| \right] + \frac{\left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} \right\|}{\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\|} \cdot \frac{\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \frac{\|\omega\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \Bigg\} d\xi_K. \end{aligned}$$

Заданному числу $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\eta_j^{(1)}$, что при $\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\| < \eta_j^{(1)}$ будет иметь место

$$\frac{\left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)} \right\|}{\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\|} < s \cdot \varepsilon.$$

Пусть

$$\eta^{(1)} = \min \{ \eta_j^{(1)} \}.$$

Тогда по найденному $\eta^{(1)}$ можно выбрать такое $\eta^{(2)}$, что из $\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| < \eta^{(2)}$ следует

$$\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\| < \eta^{(1)}.$$

Также для $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\eta^{(3)}$, что при $\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| < \eta^{(3)}$ будем иметь:

$$\frac{\|\omega(\cdot)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} < \varepsilon \text{ и}$$

$$\left\| \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, x_K, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{i,v}, \bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) - \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x_1, \dots, x_{K-1}, x_K, x_{K+1}, \dots, x_s; U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \right\| < \varepsilon.$$

Пусть

$$\eta = \min \{ \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)} \}.$$

Тогда из

$$\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| < \eta$$

следует

$$\frac{\left\| \sum_{j=1}^s \omega_j^{(1)}(\cdot) \right\|}{\|\bar{U}_{j,v} - U_{j,v}\|} < s \cdot \varepsilon, \quad \frac{\|\omega(\cdot)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} < \varepsilon \text{ и}$$

$$\sum_{j=1}^s \left\| \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x, U_{1,v}, \dots, U_{j,v}, \bar{U}_{j+1,v}, \dots, \bar{U}_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \bar{\lambda}_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) - \frac{\partial \bar{\Phi}_K}{\partial U_{j,v}}(x, U_{1,v}, \dots, U_{s,v}; \lambda_1, \dots, \lambda_{v-1}, \lambda_v, \lambda_{v+1}, \dots, \lambda_s) \right\| \cdot \|v_{j,v}\| < s \cdot \varepsilon \|v_{j,v}\|.$$

Согласно (5') получим

$$\frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - V_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \leq$$

$$\leq \int_{x_K^0}^{x_K} \left\{ \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - V_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \right\} +$$

$$+ \varepsilon \left[s \|v_{j,v}\| + s \int_{a_K}^{b_K} \psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \times \right. \\ \left. \times e^{\int_{\xi_K}^{x_K} \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) d\xi_K} d\xi_K + 1 \right] d\xi_K,$$

или

$$\frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} < \\ < \int_{x_K^0}^{x_K} \left\{ \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} + \right. \\ \left. + \varepsilon \Psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \right\} d\xi_K, \quad (6)$$

где

$$\Psi_K(\cdot) = s \|v_{j,K}\| + s \int_{a_K}^{b_K} \psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) \times \\ \times e^{\int_{\xi_K}^{x_K} \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) d\xi_K} d\xi_K.$$

Очевидно,

$$\int_{a_K}^{b_K} \Psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) d\xi_K < +\infty$$

и

$$\frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} \text{ непрерывные функции } x \in D_0,$$

откуда будем иметь

$$\frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} < \\ < \varepsilon \int_{a_K}^{b_K} \Psi_K(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) e^{\int_{\xi_K}^{x_K} \psi_K^{(1)}(x_1, \dots, x_{K-1}, \xi_K, x_{K+1}, \dots, x_s) d\xi_K} d\xi_K. \quad (7)$$

Интеграл, входящий в правую часть (7), существует.

Следовательно, множитель при ε суть конечное число и

$$\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|$$

равномерно непрерывно по λ_v .

Таким образом, имеем

$$\lim_{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\| \rightarrow 0} \frac{\|(\bar{U}_{K,v} - U_{K,v}) - v_{K,v}(\bar{\lambda}_v - \lambda_v)\|}{\|\bar{\lambda}_v - \lambda_v\|} = 0, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\partial U_{K,v}}{\partial \lambda_s} = V_{K,v}(x_1, \dots, x_s; x_1^0, \dots, x_s^0, \lambda_1, \dots, \lambda_s).$$

Следовательно, производная Фреше решения задачи (1), (2) существует, и эта производная совпадает с решением системы уравнений (4).

Поступило 19. XI 1964

Х. Н. Бағыров

Банах фəзасында Гурса мəсəлəsi һəллінін параметрлəрə кəрə дифференциалланмасы

ХҮЛАСƏ

Мəгалəдə гижмэтлəri Банах фəзасындан кəтүрүлмүш абстракт функцијалар синфиндə

$$\frac{\partial u_{i_k}}{\partial x_k} = \Phi_{i_k}(x_1, \dots, x_s; u_1, \dots, u_N; \lambda_1, \dots, \lambda_s)$$

$$u_{i_k}^1|_{x_k=x_k^0} = \varphi_{i_k}(\lambda_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_s)$$

мəсəлə һəллінін λ_i ($i=1, 2, \dots, s$) параметрлəринə кəрə дифференциалланмасы тəдгиг олунур.

АЗƏРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХƏБƏРЛƏРИ
Физика-техника вə рижизјјат елмлəri серијасы, 1965, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 3

М. Р. ИБРАГИМОВ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА ПРИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ СИСТЕМАХ НАГРУЗОК

В настоящей статье рассматривается задача проектирования круглой слоистой пластинки минимального веса при действии двух независимых систем нагрузок. Системы состоят из равномерно распределенных давлений p_1 с радиусом a и p_2 с радиусом R , равным радиусу пластинки (рис. 1). Пластика нагружается либо нагрузкой $\pi a^2 p_1$, либо $\pi R^2 p_2$, причем вес ее не учитывается.

Использовано условие минимального веса (проект минимального веса совпадает с проектом минимального объема) конструкции, полученное в работе Р. Шилда [1], справедливое для двух независимых систем нагрузок и являющееся обобщением условий оптимального проектирования, указанное в работах Д. Друккера, Р. Шилда [2, 3] и Р. Шилда [4].

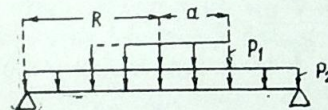


Рис. 1.

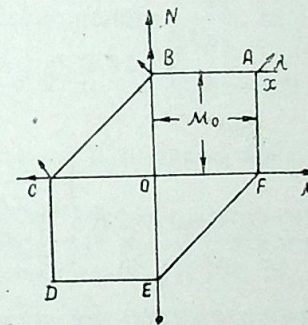


Рис. 2.

Пластика состоит из двух одинаковых несущих слоев переменной толщины h , разделенных заполнителем данной толщины $H \gg h$. Материал несущих слоев считается однородным, идеально-упруго-пластическим, подчиняющимся условию текучести Треска и связанному с ним закону течения.

Исследованы случаи, когда пластика свободно опирается или закреплена по контуру. Случай свободно опирающейся пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенной силы в центре исследовался Р. Шилдом [1].

1. Свободно опирающаяся пластика

Если механические величины, соответствующие давлению p_i ($i=1,2$), обозначим индексом i , то согласно [1] условие минимального веса пластинки имеет вид

$$\frac{\sum_{i=1}^2 D_i}{h} = \frac{\sum_{i=1}^2 (z_i M_i + \lambda_i N_i)}{h} = \text{const}, \quad (1,1)$$

где D_i —скорость диссипации энергии, отнесенной к единице площади срединной поверхности пластинки;

M_i и N_i —радиальный и окружной моменты, удовлетворяющие уравнениям равновесия:

$$\frac{d}{dr} (r M_i) - N_i = - \int_0^r p_i(r) r dr \quad (i=1,2); \quad (1,2)$$

z_i и λ_i —скорости изменения радиальной и окружной кривизны, связанные со скоростью прогиба W_i равенствами:

$$z_i = - \frac{d W_i}{dr} \quad \lambda_i = - \frac{1}{r} \frac{d W_i}{dr} \quad (i=1,2). \quad (1,3)$$

Можно убедиться, что для свободно опертой пластинки режимы

$$0 \leq r \leq r_0 \quad M_1 = N_1 = M_0(A) \quad M_2 < M_0, \quad N_2 < M_0 \quad (1,4)$$

$$r_0 \leq r \leq R \quad 0 \leq M_1 \leq N_1 = M_0(AB) \quad M_2 = N_2 = M_0(A) \quad (1,5)$$

на шестиугольнике текучести (рис. 2) соответствуют проекту минимального веса, где $M_0 = \sigma_0 H h(r)$ —предельный пластический момент. Условие (1,1) дает следующие уравнения для определения скоростей прогибов:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad \begin{cases} \frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d W_1}{dr} = -\alpha \\ \frac{d W_2}{dr} = 0 \end{cases} \quad (1,7)$$

$$r_0 \leq r \leq R \quad \begin{cases} \frac{d^2 W_2}{dr^2} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{d W_1}{dr} + \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d W_2}{dr} = -\alpha, \end{cases} \quad (1,6)$$

где α —положительная постоянная.

Используя граничные условия $W_1(R) = W_2(R) = \frac{d W_1(0)}{dr} = 0$ и

$[W_1]_{r=r_0} = [W_2]_{r=r_0} = \left[\frac{d W_1}{dr} \right]_{r=r_0} = \left[\frac{d W_2}{dr} \right]_{r=r_0} = 0$, получим следующие выражения для скоростей прогибов:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad \begin{cases} W_1 = \frac{\alpha}{4} (r_0^2 - r^2) + \frac{\alpha r_0}{2} (R - r_0) \\ W_2 = \frac{\alpha}{4} (R - r_0)^2 \end{cases} \quad (1,8)$$

$$r_0 \leq r \leq R \quad \begin{cases} W_1 = \frac{\alpha r_0}{2} (R - r) \\ W_2 = \frac{\alpha}{4} (R^2 - r^2) - \frac{\alpha r_0}{2} (R - r). \end{cases} \quad (1,9)$$

При определении поля моментов нужно различать случаи: 1) $a \leq r_0$, 2) $a \geq r_0$. Рассмотрим их последовательно.

1) случай $a \leq r_0$. Поля моментов M_i и N_i , отвечающие давлению p_i , должны удовлетворять уравнению (1,2), решение которого согласно (1,4), (1,6), удовлетворяющее граничным условиям $M_1(R) = M_2(R) = 0$, условию непрерывности M_1 при $r = a, r_0$ и непрерывности M_1 и M_2 при $r = r_0$, имеет вид:

$$0 \leq r \leq a \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{4} p_1 \left(a^2 - r^2 + 2 a^2 \ln \frac{r_0}{a} \right) + \frac{1}{4} p_2 (R^2 - r_0^2) \quad (1,10)$$

$$a \leq r \leq r_0 \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \ln \frac{r_0}{r} + \frac{1}{4} p_2 (R^2 - r_0^2) \quad (1,11)$$

$$r_0 \leq r \leq R \quad \begin{cases} M_2 = N_2 = M_0 = \frac{1}{4} p_2 (R^2 - r^2) = N_1 \\ M_1 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) + \frac{p_2}{4} \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{R^3}{r} \right), \end{cases} \quad (1,12)$$

где r_0 определяется уравнением:

$$\frac{r_0}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{12 a^2 p_1}{R^2 p_2} - 3 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}. \quad (1,14)$$

Как видно из (1,14), при изменении отношения $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2}$ от 1 до $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right)$ значения r_0 меняются от R до a . Следовательно, при $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2} \geq 1$ пластинка под действием давления p_1 целиком находится

в состоянии (A) на шестиугольнике текучести и ее минимальный вес рассчитывается на действие только нагрузки $\pi a^2 p_1$. В этом случае толщина несущих слоев определяется выражениями (1,10), (1,11) и пластинка выдерживает действие нагрузки $\pi R^2 p_2$.

При изменении нагрузки $\pi a^2 p_1$ в интервале

$$\pi R^2 p_2 > \pi a^2 p_1 > \frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right) \pi R^2 p_2 \quad (1,15)$$

обе системы нагрузок влияют на решение. Заметим, что выражение (1,12) справедливо также в области $0 \leq r \leq r_0$, так при этом удовлетворяются уравнение равновесия и условие $M_2 < M_0, M_2 < M_0$. Следовательно, формула (1,12) дает одну из возможностей распространения поля моментов M_2 и N_2 в области $0 \leq r \leq r_0$.

При изменении r_0 от R до a согласно (1,13) и (1,12) M_1 не превышает N_1 , что показывает справедливость неравенства $0 \leq M_1 \leq N_1$, принятого в (1,5).

2) Случай $a \geq r_0$. При этом поля моментов определяются следующими формулами:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{4} p_1 (r_0^2 - r^2) + \frac{1}{4} p_2 (R^2 - r_0^2), \quad (1,16)$$

$$r_0 \leq r \leq a \quad M_1 = \frac{1}{2} p_1 \left(\frac{a^2 R}{r} - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{a^3}{r} \right) + \frac{1}{4} p_2 \left(R^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{R^3}{r} \right), \quad (1, 17)$$

где

$$r_0 = \left[\frac{p_1}{p_1 - p_2} \left(3a^2 R - \frac{p_2}{p_1} R^3 - 2a^3 \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (1, 18)$$

Выражения для M_1 , $N_2 = M_2 = N_1$ в областях $a \leq r \leq R$ и $r_0 \leq r \leq R$ соответственно совпадают с (1, 13) и (1, 12). Поэтому согласно (1, 18) сказанное выше относительно (1, 13) и (1, 12) справедливо и в случае $a \geq r_0$.

При изменении отношения нагрузок от $\frac{R}{3R-a}$ до $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right)$ согласно (1, 18) значение r_0 меняется от 0 до a . При $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2} < \frac{R}{3R-a}$ пластинка рассчитывается на действие только нагрузки $\pi R^2 p_2$ и выдерживает действие $\pi a^2 p_1$. Толщина несущих слоев пластинки согласно [5] определяется из (1, 12).

При изменении $\pi a^2 p_1$ в интервале

$$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{a}{R} + \frac{a^2}{R^2} \right) \pi R^2 p_2 \geq \pi a^2 p_1 > \frac{\pi R^2 p_2}{3 - \frac{a}{R}} \quad (1, 19)$$

решение зависит от обеих систем нагрузок. Минимальный объем V_m несущих слоев в случае $a \leq r_0$ определяется формулой:

$$V_m = \frac{\pi}{4 \sigma_0 H} \left[a^2 p_1 (2r_0^2 - a^2) + R^4 p_2 \left(1 - \frac{r_0^4}{R^4} \right) \right]. \quad (1, 20)$$

Сравним значение V_m с объемом V_c несущих слоев пластинки постоянной толщины. Согласно [6] имеем

$$V_c = \frac{\pi}{3 \sigma_0 H} \left[a^2 p_1 \left(3 - \frac{a}{R} \right) + R^4 p_2 \right]. \quad (1, 21)$$

При $a = \frac{R}{2}$ с изменением r_0 от a до R $\frac{V_m}{V_c}$ изменяется от 0,375 до 0,44. Следовательно, в проекте минимального веса достигаемая экономия изменяется от 63,5 до 56%.

2. Зашемленная пластинка

Для зашемленной по контуру пластинки (рис. 3) режимы

$$\begin{array}{lll} \leq r \leq r_0 & M_1 = N_1 = M_0 (A) & M_2 < M_0, N_2 < M_0 \\ r_0 \leq r \leq \rho & 0 < M_1 \leq N_1 = M_0 (AB) & M_2 = N_2 = M_0 (A) \\ \rho \leq r \leq \rho_1 & M_1 = -M_0, N_1 = 0 (C) & M_2 = N_2 = M_0 (BC) \\ \rho_1 \leq r \leq R & |M_1| < M_0, |N_1| < M_0 & M_2 = -M_0, N_2 = 0 (C) \end{array} \quad (2, 1)$$

дает проект минимального веса. Здесь r_0 , ρ , ρ_1 — неизвестные параметры, подлежащие определению. Из (1, 1), (1, 3) и (2, 1) получим следующие уравнения для определения скоростей прогибов:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad \begin{cases} \frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dr} = -a \\ \frac{dW_2}{dr} = 0 \end{cases} \quad (2, 2)$$

$$r_0 \leq r \leq \rho \quad \begin{cases} \frac{d^2 W_1}{dr^2} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{dW_1}{dr} + \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} = -a \end{cases} \quad (2, 3)$$

$$\rho \leq r \leq \rho_1 \quad \begin{cases} \frac{d^2 W_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW_2}{dr} = 0 \\ \frac{d^2 W_1}{dr^2} + \frac{d^2 W_2}{dr^2} = a \end{cases} \quad (2, 4)$$

$$\rho_1 \leq r \leq R \quad \begin{cases} \frac{dW_1}{dr} = 0 \\ \frac{d^2 W_2}{dr^2} = a \end{cases} \quad (2, 5)$$

Решение (2, 2) — (2, 5), удовлетворяющие граничным условиям

$$W_1(R) = \frac{dW_1(R)}{dr} = \frac{dW_1(0)}{dr} = W_2(R) = \frac{dW_2(R)}{dr} = \frac{dW_2(0)}{dr} = 0$$

и условию непрерывности W_1 , W_2 и $\frac{dW_1}{dr}$, $\frac{dW_2}{dr}$ при $r = r_0$, ρ , ρ_1 , имеет следующий вид:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad \begin{cases} W_1 = \frac{a}{12r} [2R(3\rho_1 - 2R) - 3r^2 + 3r_0(\rho - r_0)] + A(\rho) \\ W_2 = \frac{a}{4} (\rho - r_0)^2 + \frac{a}{2} (R - \rho_1)^2 - A(\rho) \end{cases} \quad (2, 6)$$

$$r_0 \leq r \leq \rho \quad \begin{cases} W_1 = \frac{a}{2} (\rho_1^2 - \rho^2 - rr_0) + A(\rho) \\ W_2 = \frac{a}{4} (\rho - r)(\rho + r - 2r_0) + \frac{a}{2} (R - \rho_1)^2 - A(\rho) \end{cases} \quad (2, 7)$$

$$\rho \leq r \leq \rho_1 \quad \begin{cases} W_1 = \frac{a}{2} (r - \rho_1)(r + \rho_1 - 2R) + A(r) \\ W_2 = \frac{a}{2} (R - \rho_1)^2 - A(r) \end{cases} \quad (2, 8)$$

$$\rho_1 \leq r \leq R \quad \begin{cases} W_1 = 0 \\ W_2 = \frac{a}{2} (R - r)^2 \end{cases} \quad (2, 9)$$

где

$$A(r) = \alpha \rho_1 (R - \rho_1) \ln \frac{r}{\rho_1}$$

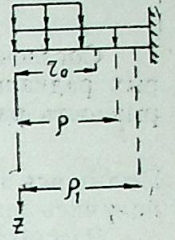


Рис. 3.

$$r_0 = \rho - 2 \frac{\rho_1}{\rho} (R - \rho_1) \quad (2, 10)$$

$$\rho = \frac{2}{3} R. \quad (2, 11)$$

Согласно (2, 1) $r = \rho$ является границей двух областей, на которых радиальный момент имеет разные знаки. Следовательно, непрерывность радиальных моментов требует, чтобы

$$M_1(\rho) = M_2(\rho) = 0. \quad (2, 12)$$

Пользуясь (2, 12), непрерывностью M_1 и M_2 , при $r = a$, r_0 , ρ_1 можно получить поля моментов.

Рассмотрим следующие два случая.

1) Случай $a \leq r_0$. В этом случае поля моментов определяются формулами:

$$0 \leq r \leq a \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{4} p_1 a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} + 2 \ln \frac{r_0}{a} \right) + \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r_0^2) \quad (2, 13)$$

$$a \leq r \leq r_0 \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \ln \frac{r_0}{a} + \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r_0^2) \quad (2, 14)$$

$$r_0 \leq r \leq \rho \quad \begin{cases} M_2 = N_2 = N_1 = M_0 = \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r^2) \\ M_1 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \left(\frac{\rho}{r} - 1 \right) + \frac{1}{4} p_2 \left(\rho^2 - \frac{2}{3} \frac{\rho^3}{r} - \frac{r^2}{3} \right) \end{cases} \quad (2, 15) \quad (2, 16)$$

$$\rho \leq r \leq \rho_1 \quad \begin{cases} M_1 = -M_0 = -\frac{1}{2} p_1 a^2 \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \\ M_2 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \left(\ln \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} - 1 \right) + \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r^2) \\ N_2 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \ln \frac{r}{\rho} + \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r^2) \end{cases} \quad (2, 17) \quad (2, 18)$$

$$\rho_1 \leq r \leq R \quad M_2 = -M_0 = \frac{1}{2} p_1 a^2 \left(\frac{\rho - \rho_1}{r} + \frac{\rho_1}{r} \ln \frac{\rho_1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} p_2 \left(\frac{r^2}{3} - \frac{\rho^2 \rho_1}{2r} + \frac{\rho_1^3}{6r} \right), \quad (2, 19)$$

где

$$\frac{r_0}{R} = \left(\frac{12 a^2 p_1}{R^2 p_2} - \frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}. \quad (2, 20)$$

Согласно (2, 20) и (2, 10) с изменением отношения $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2}$ от $\frac{4}{9}$ до $\left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{R^2} \right) r_0$ и ρ_1 изменяются соответственно от ρ и R

до a и $\left(\frac{1}{3} a R + \frac{R^2}{36} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{R}{2}$. При $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2} \geq \frac{4}{9}$ центральная область

($0 \leq r \leq \rho$) пластинки находится в режиме (А), а кольцевая ($\rho \leq r \leq R$) в режиме (С).

В этом случае минимальный вес пластинки рассчитывается на действие только давления p_1 и при толщине несущих слоев, определяемой из (2, 13), (2, 14), (2, 17), пластинка выдерживает действие давления p_2 .

При изменении нагрузки $\pi a^2 p_1$ в интервале

$$\frac{4}{9} \pi R^2 p_2 > \pi a^2 p_1 \geq \left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{R^2} \right) \pi R^2 p_2 \quad (2, 21)$$

решение зависит от обеих систем нагрузок. В предельном случае при $a \rightarrow 0$, $\pi a^2 p_1 \rightarrow P$ получим решение, соответствующее равномерному давлению p_2 и силе P , сосредоточенной в центре пластинки. Заметим, что согласно (2, 10), (2, 20) условие $0 \leq M_1 \leq N_1$ в области $r_0 \leq r \leq \rho$ выполняется, а выражения (2, 15) и (2, 17) дают одну из возможных распространения поля моментов M_2 , N_2 и M_1 , N_1 , соответственно, в областях $0 \leq r \leq r_0$, $\rho_1 \leq r \leq R$.

Действительно, при этом удовлетворяются уравнения равновесия и условия $M_2 < M_0$, $N_2 < M_0$ и $|M_1| < M_0$, $|N_1| < M_0$ не нарушаются.

2) Случай $a \geq r_0$. Поле моментов определяется формулами:

$$0 \leq r \leq r_0 \quad M_1 = N_1 = M_0 = \frac{1}{4} p_1 (r_0^2 - r^2) + \frac{1}{4} p_2 (\rho^2 - r_0^2) \quad (2, 22)$$

$$r_0 \leq r \leq a \quad M_1 = \frac{1}{2} p_1 \left(\frac{a^2 \rho}{r} - \frac{2}{3} \frac{a^3}{r} - \frac{r^2}{3} \right) - \frac{1}{6} p_2 \left(\frac{\rho^2}{r} + \frac{r^2}{2} - \frac{3}{2} \rho^3 \right), \quad (2, 23)$$

где

$$r_0 = \left[\frac{2 p_2}{2 p_1 - p_2} \left(3 \frac{a^2 p_1}{p_2} \rho - 2 \frac{a^3 \rho_1}{p_2} - \rho^3 \right) \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2, 24)$$

Выражения для M_1 , M_2 в областях $a \leq r \leq \rho$, $\rho \leq r \leq \rho_1$ и $\rho_1 \leq r \leq R$, соответственно, совпадают с (2, 15)–(2, 19). Согласно (2, 10) (2, 24) с изменением отношения $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2}$ от $\frac{4}{27} \frac{R}{R-a}$ до $\left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{R^2} \right) r_0$ и

ρ_1 , соответственно изменяются от 0 и ρ до a и $\left(\frac{1}{3} a R + \frac{R^2}{36} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{R}{2}$.

При $\frac{a^2 p_1}{R^2 p_2} \leq \frac{4}{27} \frac{R}{R-a}$ минимальный вес пластинки рассчитывается на действие равномерного давления p_2 и толщина несущих слоев определяется из формул (2, 15), (2, 17), (2, 19). Пластинка будет также выдерживать нагрузку $\pi a^2 p_1$. При изменении нагрузки $\pi a^2 p_1$ в интервале

$$\left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{R^2} \right) \pi R^2 p_2 \geq \pi a^2 p_1 > \frac{4}{27} \frac{\pi R^2 p_2}{1 - \frac{a}{R}} \quad (2, 25)$$

решение зависит от обеих систем нагрузок. Минимальный объем в случае $a \leq r_0$ определяется по формулам:

$$V_m = \frac{\pi a^2 p_1}{\varepsilon_0 H} \left[\frac{r_0^2}{2} - \frac{a^2}{4} + 3\rho_1^2 - 4\rho\rho_1 + 2R(\rho - \rho_1) + \right. \\ \left. + \rho^2 + 2\rho_1(R - \rho_1) \ln \frac{\rho_1}{\rho} \right] + \frac{\pi p_2}{\varepsilon_0 H} \left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{R^4}{6} - \frac{\rho_1^4}{2} + \frac{\rho_1^3 R}{3} - \right. \\ \left. - \rho^2 \rho_1(R - \rho_1) - \frac{r_0^4}{4} \right]. \quad (2, 26)$$

Когда пластинка рассчитывается только на действие нагрузки $\pi a^2 p_1$, из (2,26) при $r_0 = \rho$, $\rho = R$ получим

$$V_m = \frac{\pi a^2 p_1}{4 \varepsilon_0 H} \left(\frac{4}{3} R^2 - a^2 \right). \quad (2, 27)$$

Согласно [8] объем V_c несущих слоев пластинки постоянной толщины, выдерживающей нагрузки $\pi a^2 p_1$, определяется формулой:

$$V_c = \frac{\pi a^2 p_1}{\varepsilon_0 H} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a}{\rho} \right) R^2, \quad (2, 28)$$

где ρ является решением уравнения:

$$1 - \frac{2}{3} \frac{a}{\rho} \left(1 + \ln \frac{R}{\rho} \right) = 0. \quad (2, 29)$$

При $a = \frac{R}{2}$ $\rho = 0,5392 R$. При этом согласно (2,27) и (2,28) экономия в проекте минимального веса достигает 29%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шилд Р. Сб. „Механика“, № 2 (1964).
2. Drucker D. C., Shield R. T. Proc. 9 th. Int. Congr. Appl. Mech. (1956).
3. Друкер Д., Шилд Р. Сб. „Механика“, № 3 (1958).
4. Shield R. T. J. appl. mech. 27 (1960).
5. Гопкинс, Прагер. Сб. „Механика“, № 6 (1956).
6. Прагер В. Проблемы теории пластичности. Физматгиз, (1958).
7. Opat E. T. Schumann W., Shield R. T. J. appl. math. and phys. 8 (ZAMP) (1957).
8. Гопкинс и Прагер. Сб. „Механика“, № 3 (1955).

Поступило 26. I 1965

М. Р. Ибрагимов

Минимум чэкили даирэви лөвһэлэрин бир-бириндэн асылы
олмајан ики систем јук һалында лајиһә едилмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә даирэви (мүхтәлиф тәбәғәли) лөвһэлэрин ики мүхтәлиф сәрһәд шәрти дахилиндә лајиһә едилмәси мәсәләси арашдырылып. Лөвһэлэрин тәбәғәләринин материалы идеал еластик-пластикдир. Тресканын ахма шәртинә вә онунла әлагәдар олан пластик ахма ганунуна табедир. Минимум чэкили лөвһэлэрин чәкиси сабит галынлыгылы лөвһэлэрин чәкиси илә мүгајисә едилир вә алынан гәнаәт көстәрилик.

А. М. МАМЕДОВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] рассматривается применение теоретико-числовых методов к приближенному решению линейных интегральных уравнений.

Цель настоящей работы — применить теоретико-числовые методы к приближенному решению одного типа нелинейных интегральных уравнений.

Пусть $\alpha > 1$, $\bar{m} = \max(1, |m|)$, $s \geq 1$ и $E_s^\alpha(K)$ — класс функций $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ определенных условиями

$$f(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} f(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

$$|f(m_1, m_2, \dots, m_s)| \leq \frac{K}{(\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_2 \cdot \dots \cdot \bar{m}_s)^\alpha}.$$

Этот класс был рассмотрен Н. М. Коробовым.

Имеет место следующая.

Теорема 1. Класс функций $E_1^\alpha(K)$ является замкнутой частью $C[0, 1]$.

Доказательство. Пусть

$$\{f_n(x)\} \in E_1^\alpha(K), \quad f_n(x) \text{ равномерно стремится к } f_0(x).$$

Докажем, что $f_0(x) \in E_1^\alpha(K)$.

Имеем

$$f_n(m) = \int_0^1 f_n(x) e^{-2\pi i m x} dx, \quad a \quad f_0(m) = \int_0^1 f_0(x) e^{-2\pi i m x} dx.$$

Ясно, что $f_n(m) \rightarrow f_0(m)$ при каждом m . Если в неравенстве

$$|f_n(m)| \leq \frac{K}{\bar{m}^\alpha}$$

перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$, то получим:

$$|f_0(m)| \leq \frac{K}{\bar{m}^\alpha}.$$

Таким образом, $E_1^\alpha(K)$ является полным метрическим пространством в метрике равномерной сходимости.

Теорема 2. Пусть:

1) существует разложение

$$K(x, y, u) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(x, y) u^p \quad \text{при } 0 \leq x, y \leq 1, \quad |u| < R, \quad R > 1;$$

$$2) A_p(x, y) \in E_2^s(K), \quad K > 0;$$

$$3) K\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right) = q < 1;$$

$$4) |\lambda| K\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \left[K\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right]^p \leq K;$$

$$5) |K(x, y, u_1) - K(x, y, u_2)| \leq M |u_1 - u_2|;$$

$$6) |\lambda| < \frac{1}{M}$$

Тогда уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi(y)) dy \quad (1)$$

имеет единственное решение в $E_1^s(K)$.

Действительно, обозначим соответственно через $\psi(m)$ и $A_p(m, n)$ коэффициенты Фурье функций $\psi(x)$ и $A_p(x, y)$, где

$$\psi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi(y)) dy, \quad \varphi(y) \in E_1^s(K).$$

Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} \psi(m) &= \int_0^1 \psi(x) e^{-2\pi i m x} dx = \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-2\pi i m x} \left[\int_0^1 A_p(x, y) \varphi^p(y) dy \right] dx = \\ &= \lambda \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \varphi^p(y) \left[\int_0^1 A_p(x, y) e^{-2\pi i m x} dx \right] dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно,

$$\int_0^1 A_p(x, y) e^{-2\pi i m x} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_p(m, n) e^{2\pi i n y}. \quad (3)$$

Действительно,

$$A_p(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_p(m, n) e^{2\pi i m x} \quad (3_1)$$

Умножим (3₁) на $e^{-2\pi i l x}$ и проинтегрируем по x в $[0, 1]$.
Ясно, что

$$\int_0^1 e^{-2\pi i m x} \cdot e^{2\pi i l x} dx = \begin{cases} 1, & \text{при } m = l \\ 0, & \text{при } m \neq l \end{cases}$$

Поэтому имеет место (3).

Далее

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_p(m, n) e^{2\pi i n y} \right| &\leq K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha \cdot n^\alpha} = \frac{K}{m^\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \\ &= \frac{K}{m^\alpha} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right) \leq \frac{K}{m^\alpha} \left(3 + 2 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \right) = \frac{K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)}{m^\alpha}. \end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой, из (2) получим

$$|\psi(m)| \leq \frac{|\lambda| K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)}{m^\alpha} \sum_{p=0}^{\infty} |\varphi(y)|^p dy.$$

Так как $\varphi(y) \in E_1^s(K)$, то

$$|\varphi(y)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) e^{2\pi i n y} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(n)| \leq K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right).$$

Тогда

$$|\varphi(y)|^p \leq \left[K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \right]^p.$$

По условию 4) ряд

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \right]^p$$

сходится.

По условию 5)

$$|\lambda| K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \left[K \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \right]^p \leq \frac{K}{m^\alpha},$$

т. е. оператор A переводит $E_1^s(K)$ в свою часть.

Докажем сжатость оператора A в $E_1^s(K)$.

Пусть φ_1 и φ_2 принадлежат классу $E_1^s(K)$;

$$\begin{aligned} \rho(A\varphi_1, A\varphi_2) &= \max_{0 \leq x, y \leq 1} \left| \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi_1) dy - \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi_2) dy \right| \leq \\ &\leq |\lambda| \max_{0 \leq x, y \leq 1} \left| \int_0^1 K(x, y, \varphi_1) - K(x, y, \varphi_2) dy \right| \leq |\lambda| M \rho(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Остается заметить, что $|\lambda| M < 1$, использовать принцип сжатых отображений и теорема доказана.

Нетрудно сформулировать аналогичные теоремы для интегральных уравнений в многомерном случае.

Следуя Н. М. Коробову, сетки вида

$$M_\kappa = \left(\left\{ \frac{a_1 \kappa}{p} \right\}, \left\{ \frac{a_2 \kappa}{p} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s \kappa}{p} \right\} \right), \quad (4)$$

где $\kappa = 1, 2, \dots, N$, $p = N$, а $a_1, a_2, \dots, a_s$ оптимальные коэффициенты, будем называть параллелепипедальными сетками.

При $s = 1$ существует единственная параллелепипедальная сетка, которая совпадает с равномерной сеткой, получающейся при делении отрезка $[0, 1]$ на N равных частей, т. е.

$$M_\kappa = \left(\left\{ \frac{\kappa}{N} \right\} \right), \quad \kappa = 1, 2, \dots, N.$$

При $s = 2$ целые $a_1 = 1$ и $a_2 = a$ будут оптимальными коэффициентами для любого $a = a(N)$, при котором неполное частное отношение $\frac{a}{N}$ будет ограничено величиной, возрастающей с ростом N не

скорее некоторой степени $\ln N$. В частности, при $N = u_n$, где u_n — общий член последовательности Фибоначчи, которая определяется равенствами

$$u_0 = 1, u_1 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n = 2, 3, \dots,$$

целые

$$a_1 = 1 \text{ и } a_2 = u_{n-1}$$

будут оптимальными коэффициентами, и точки

$$M_k = \left(\left\{ \frac{\kappa}{u_n} \right\}, \left\{ \frac{\kappa u_{n-1}}{u_n} \right\} \right) \quad (5)$$

образуют двумерную параллелепipedальную сетку.

При $f(x, y) \in E_2^a$ для квадратных формул, построенных с помощью сетки (5), Н. С. Бахваловым [2] найдена следующая формула:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{\kappa=1}^N f\left(\left\{ \frac{\kappa}{p} \right\}, \left\{ \frac{a\kappa}{p} \right\}\right) + O\left(\frac{\ln N}{N^a}\right), \quad (6)$$

где $p = N = u_n$, $a = u_{n-1}$.

Теперь рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x, y, s, t) \Phi(s, t, \varphi(s, t)) ds dt, \quad (7)$$

где $\Phi(s, t, \varphi(s, t))$ представляет собой многочлен m -й степени относительно $\varphi(s, t)$;

$$\Phi(s, t, \varphi(s, t)) = a_0(s, t) + a_1(s, t) \varphi(s, t) + \dots + a_m(s, t) \varphi^m(s, t). \quad (8)$$

Пусть функции $f(x, y)$, $a_0(s, t), \dots, a_m(s, t)$ и ядро $K(x, y, s, t)$ соответственно принадлежат классу E_2^a и E_4^a .

Тогда на основании леммы 9 [1] Н. М. Коробова

$$K(x, y, s, t) a_r(s, t) \varphi^r(s, t), \quad r = 0, 1, \dots, m$$

принадлежит классу E_2^a как функция переменных s и t при каждом фиксированном x и y .

Применяя к каждому интегралу (7) квадратурную формулу (6), получим

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \frac{\lambda}{N} \left\{ \sum_{\kappa=1}^N K(x, y, s_\kappa, t_\kappa) [a_0(s_\kappa, t_\kappa) + a_1(s_\kappa, t_\kappa) \varphi(s_\kappa, t_\kappa) + \dots + a_m(s_\kappa, t_\kappa) \varphi^m(s_\kappa, t_\kappa)] \right\} + O\left(\frac{\ln N}{N^a}\right). \quad (9)$$

Положим $x = x_i$ и $y = y_i$ вместо x и y и отбросим остаточный член, тогда для отыскания приближенных значений $\bar{\varphi}(x_i, y_i)$ решения $\varphi(x, y)$ в узлах

$$\left(\left\{ \frac{\kappa}{p} \right\}, \left\{ \frac{a\kappa}{p} \right\} \right), \quad \kappa = 1, 2, \dots, N$$

получим нелинейную систему алгебраических уравнений.

$$\bar{\varphi}(x_i, y_i) - \frac{\lambda}{N} \left\{ \sum_{\kappa=1}^N K(x_i, y_i, s_\kappa, t_\kappa) [a_0(s_\kappa, t_\kappa) + a_1(s_\kappa, t_\kappa) \bar{\varphi}(s_\kappa, t_\kappa) + \dots + a_m(s_\kappa, t_\kappa) \bar{\varphi}^m(s_\kappa, t_\kappa)] \right\} - f(x_i, y_i) = 0. \quad (10)$$

Обозначим:

$$\bar{\varphi}(x_i, y_i) = z_i, f(x_i, y_i) = b_i;$$

$$-\frac{\lambda}{N} K(x_i, y_i, s_\kappa, t_\kappa) a_j(s_\kappa, t_\kappa) = A_{jik}, j = 0, 1, \dots, m;$$

$$F_i(z_1, z_2, \dots, z_N) = z_i + \sum_{\kappa=1}^N \sum_{j=1}^m A_{jik} z_\kappa^m - b_i = 0. \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть: 1) уравнение (7) имеет решение $\varphi(x, y)$; 2) матрица Якоби

$$\left\| \frac{\partial F_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)}{\partial z_r} \right\|, \quad r = 1, 2, \dots, N$$

имеет определитель $\Delta \neq 0$, и для алгебраического дополнения элемента $\frac{\partial F_i}{\partial z_r} - B_{ik}$ справедливо

$$\frac{1}{|\Delta|} \sum_{i=1}^N |B_{ik}| \leq B; \quad (12)$$

3) $\alpha > 2$.

Тогда уравнения (11) имеют решения, лежащие в окрестности точки

$$(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N).$$

Для доказательства воспользуемся теоремой 4 из [3].

Рассмотрим систему (1) как функциональное уравнение в пространстве m_n . Проверим выполнение условий указанной теоремы.

В качестве начального приближения возьмем вектор

$$(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) = [\psi(x_1, y_1), \psi(x_2, y_2), \dots, \psi(x_N, y_N)].$$

Этот вектор удовлетворяет системе (9).

Поэтому

$$|F_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)| \leq \eta' = O\left(\frac{\ln N}{N^a}\right).$$

Найдем $\frac{\partial^2 F_i(z_1, \dots, z_N)}{\partial z_p \partial z_q}$. Мы видим, что при $p \neq q$ $\frac{\partial^2 F_i}{\partial z_p \partial z_q} = 0$.

Нетрудно заметить, что каждый

$$\left| \frac{\partial^2 F_i(z_1, z_2, \dots, z_N)}{\partial z_i^2} \right| < \frac{\gamma}{N} = L, \quad \gamma = \text{const},$$

не зависит от N ($i = 1, 2, \dots, N, |z_i - \psi_i| \leq h_1$).

$$h = B^2 \eta' L N^2 \leq B^2 C \cdot \frac{\ln N}{N^a} \cdot \frac{\gamma}{N} \cdot N^2 = C_1 \cdot \frac{\ln N}{N^{a-1}}.$$

Здесь h зависит от N и α . При достаточно больших N можно получить $h \leq \frac{1}{2}$. При том же условии относительно N для любой постоянной $|z_i - \psi_i| \leq h_1$ окажется

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \cdot \frac{BC \ln N}{N^a} \leq h_1.$$

Тогда система (11) имеет решения $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_N)$, лежащие в окрестности точки $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$.

$$|\bar{z}_i - \psi_i| \leq \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{BC \ln N}{N^\alpha}, \text{ причем в области}$$

$$|\bar{z}_i - \psi_i| \leq \frac{1 + \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{BC \ln N}{N^\alpha} \text{ решение}$$

единственно.

Аналогичные результаты можно установить и для функций $s > 2$ переменных. Для этого нужно воспользоваться квадратурной формулой Н. М. Коробова для параллелепипедальных сеток многих переменных

$$\int_{G_s} f(q) dg = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^s N}{N^\alpha}\right);$$

G_s — единичный s -мерный куб. В этом случае получим:

$$|\bar{z}_i - \psi_i| \leq \frac{1 - \sqrt{1-2h}}{h} \cdot \frac{BC \ln^s N}{N^\alpha}.$$

Численный пример. Рассмотрим уравнения

$$\varphi(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y \cdot \sin 2\pi s \cdot \sin 2\pi t \cdot \varphi^2(s, t) ds dt \quad (13)$$

$$f(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y \in E_2^2;$$

$$K(x, y, s, t) = \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y \cdot \sin 2\pi s \cdot \sin 2\pi t \in E_4^2.$$

Выберем $N = p = u_n = 3$; $a = u_{n-1} = 2$;

$$M_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); M_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); M_3 = (0, 0).$$

Точное решение уравнения есть

$$\psi(x, y) = \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y.$$

Численным решением интегрального уравнения будет

$$\varphi(x_1, y_1) = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \frac{4\pi}{3} = -0,8660 \cdot 0,8660 \approx -0,75;$$

$$\varphi(x_2, y_2) = \sin \frac{4\pi}{3} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \approx -0,75;$$

$$\varphi(x_3, y_3) = 0.$$

Применяя квадратурную формулу к уравнению (13), получим:

$$\bar{\varphi}(x_i, y_i) = \sin 2\pi x_i \cdot \sin 2\pi y_i + \frac{1}{3} \sin 2\pi x_i \cdot \sin 2\pi y_i \sum \sin 2\pi s_k \cdot \sin 2\pi t_k \cdot \bar{\varphi}_k^2.$$

Обозначая $\bar{\varphi}(x_i, y_i) = \bar{\varphi}(x_k, y_k) = z_i$, получим

$$F_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 - \frac{1}{3} \sin 2\pi x_1 \cdot \sin 2\pi y_1 [\sin 2\pi s_1 \cdot \sin 2\pi t_1 \cdot z_1^2 +$$

$$+ \sin 2\pi s_2 \cdot \sin 2\pi t_2 \cdot z_2^2 + \sin 2\pi s_3 \cdot \sin 2\pi t_3 \cdot z_3^2];$$

$$F_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 - 0,1875(z_1^2 + z_0^2) + 0,75;$$

$$F_2(z_1, z_2, z_3) = z_2 - 0,1875(z_1^2 + z_2^2) + 0,75;$$

$$F_3(z_1, z_2, z_3) = z_3.$$

Тогда система для определения первых поправок $\Delta z_1, \Delta z_2, \Delta z_3$ будет

$$\begin{cases} 1,2812 \Delta z_1 + 0,2812 \Delta z_2 = 0,2109 \\ 0,2812 \Delta z_1 + 1,2812 \Delta z_2 = 0,2109 \\ \Delta z_3 = 0 \end{cases}$$

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1,2812 & 0,2812 & 0 \\ 0,2812 & 1,2812 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,5624.$$

Возьмем матрицу, обратную матрице рассматриваемой системы

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1,2812}{1,5624} & \frac{0,2812}{1,5624} & 0 \\ \frac{0,2812}{1,5624} & \frac{1,2812}{1,5624} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Поэтому $\|P'(x_0)\| = \|\Gamma_0\| = 1$.

$$\text{Так как } \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_2^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2} = -0,3750,$$

$$\partial^2 F_k / \partial z_p \partial z_r = 0 \text{ при } p \neq r.$$

Тогда

$$L = 0,3750.$$

Определим

$$h = B^2 \eta L N^2 = 1 \cdot 0,2109 \cdot 0,3750 \cdot 9 \approx 0,697 > 0,5.$$

Таким образом, на основании теоремы Л. В. Канторовича заключения о сходимости процесса сделать нельзя. Это происходит вследствие очень грубой оценки $\|P''(x)\|$. Действительно мы приняли

$$\|P''(x)\| \leq L N^2 = 3,3750.$$

Между тем фактически имеет место более точная оценка:

$$\|P''(x)\| \leq 0,3750 \cdot 2 = 0,7500.$$

Используя ее, получим

$$h = B^2 \eta K' \leq 1 \cdot 0,2109 \cdot 0,75 = 0,16 < 0,5,$$

что уже позволяет сделать заключение о сходимости процесса Ньютона.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность кандидатам физико-математических наук А. С. Джафарову и А. А. Бабаеву за ценные советы при написании этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробов Н. М. Теоретико-численные методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963.
2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов. Вестн. МГУ, № 4 (1959).
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика УМН, т. III, вып. 6 (1948).

Гејри-хэтти интеграл тэнликлэрин тэгриби һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә $E_s^x(K)$ функцијалар синфиндә

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y, \varphi(y)) dy$$

тәнлијинин һәллинин варлығы вә јеканәлији исбат олунур.

Сонра Н. С. Бахваловун [2] ишиндән истифада едиләрәк E_s^x функцијалар синфиндә

$$\varphi(x, y) = t(x, y) + \lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x, y, s, t) \Phi(s, t, \varphi(s, t)) ds dt,$$

$$\Phi(s, t, \varphi(s, t)) = a_0(s, t) + a_1(s, t) \varphi(s, t) + \dots + a_m(s, t) \varphi^m(s, t)$$

типли гејри-хэтти интеграл тәнлијин тэгриби һәллинин бә'зи мәсәләләри өјрәнилир.

К. А. КЕРИМОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ
МЕТОДОМ РАЗГРУЖАЮЩЕГО ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА

Теория поперечного удара при упруго-пластическом законе деформирования и ее применение для получения динамической диаграммы растяжения в случае ударного нагружения рассмотрены в работе [1]. Однако в литературе мало освещены исследования, связанные с изучением свойств материалов при динамических разгрузках.

В [2, 3] впервые разработан метод определения динамической диаграммы $T(\varepsilon)$ разгрузки материалов при разгружающем поперечном ударе. Указанный метод был рассмотрен для различных схем $T(\varepsilon)$ деформирования. Этот метод основан на аппроксимации зависимостей между скоростью торможения и соответствующим углом излома нити, полученных из эксперимента.

В статье приводятся экспериментальные результаты по изучению механических свойств резинового шнура Ш-65 при динамическом разгружающем поперечном ударе, а также иллюстрируется предложенный в [2] метод для построения динамической диаграммы $T(\varepsilon)$ разгрузки.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается однократный нагружающий поперечный удар по гибкому недеформированному образцу нити с постоянной скоростью удара v_0 . Далее, в процессе удара, путем мгновенного присоединения к ударяющему телу некоторой массы m , производится частичное разгружение испытуемого образца.

Фотографируя картину движения нити, можно найти экспериментальные зависимости между скоростями v_0, v_1 ударяющего тела с углами наклона γ_0, γ_1 , соответствующие случаям нагружения и разгрузки, т. е. $v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1)$ и $v_1 = v_1(\gamma_1)$.

Как показано в работе [2], в этом случае решение задачи определения динамической диаграммы $T(\varepsilon)$ разгрузки сводится к решению параметрических уравнений $T_1 = T_1(\gamma_1)$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\gamma_1)$, где T_1 и ε_1 — соответственно, натяжение и деформация разгрузки; γ_1 — угол излома нити в случае разгрузки.

Действительно, из теоретического решения [2] имеем:

$$u_1 = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{dT}{d\varepsilon}} d\varepsilon = \varphi(\gamma_1); \quad (1, 1)$$

$$T_1(1 + \varepsilon_1) = \frac{\rho_0(v_0 - v_1)^2 \cos^2 \gamma_0}{\sin^2(\gamma_0 - \gamma_1)} = f(\gamma_1), \quad (1, 2)$$

где ρ_0 — масса единицы длины;
 ε_0 — начальная деформация нити, которая определяется из диаграммы нагружения;
 v_0 — скорость нагружающего удара;
 v_1 — скорость торможения;
 u_1 — продольная скорость частицы при разгрузке;
 γ_0 и γ_1 — углы наклона нити, соответствующие нагрузке и разгрузке;

$T_1 = T_1(\varepsilon_1)$ — искомый закон деформирования при разгрузке.
 Дифференцируя выражения (1, 1) и (1, 2) по γ_1 , будем иметь:

$$\frac{d}{d\gamma_1} [(1 + \varepsilon_1) T_1] = \frac{df(\gamma_1)}{d\gamma_1}; \quad (1, 3)$$

$$\left[\frac{d\varphi(\gamma_1)}{d\gamma_1} \right]^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{dT_1}{d\varepsilon_1} \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_1} \right)^2. \quad (1, 4)$$

Исключив из равенств (1, 3) и (1, 4) $\frac{dT_1}{d\gamma_1}$, после несложных преобразований, получим

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_1} \right)^2 - \omega(1 + \varepsilon_1) \frac{d\varepsilon_1}{d\gamma_1} + \mu(1 + \varepsilon_1)^2 = 0. \quad (1, 5)$$

При этом введены следующие обозначения:

$$\omega = \frac{1}{f(\gamma_1)} \frac{df(\gamma_1)}{d\gamma_1}; \quad \mu = \frac{f_0}{f(\gamma_1)} \cdot \left(\frac{d\varphi}{d\gamma_1} \right)^2.$$

Таким образом, определение динамической диаграммы $T_1(\varepsilon_1)$ при разгрузке сводится к решению дифференциального уравнения (1, 5) относительно деформации ε_1 . При заданных начальных условиях решение уравнения (1, 5) сводится к вычислению квадратур.

Решая уравнение (1, 5), получим

$$\frac{d\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1} = \left(\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - \mu} \right) d\gamma_1.$$

Интегрируя будем иметь

$$\ln \left(\frac{1 + \varepsilon_1}{c} \right) = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \left(\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - \mu} \right) d\gamma. \quad (1, 6)$$

Постоянная интегрирования c определяется из начальных условий, т. е. $\gamma_1 = \gamma_0$, $v_1 = v_0$, $T_1 = T_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$,

$$c = 1 + \varepsilon_0$$

Следовательно,

$$\varepsilon_1 = (1 + \varepsilon_0) e^{\Phi^*} - 1, \quad (1, 7)$$

где

$$\Phi^* = - \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \left(\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - \mu} \right) d\gamma,$$

и из (1, 2)

$$T_1 = \rho_0 \frac{(v_0 - v_1)^2 \cos^2 \gamma_0}{(1 + \varepsilon_1) \sin^2(\gamma_0 - \gamma_1)}.$$

Исключая параметр γ_1 , окончательно получим искомый закон деформирования, т. е. $T_1 = T_1(\varepsilon_1)$.

§ 2. Определение экспериментальных зависимостей

$$v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1) \text{ и } v_1 = v_1(\gamma_1)$$

Испытания были проведены на пневмокопре над образцом резинового шнура Ш-65 диаметром 5 мм, длиной 4 м, линейной массовой плотностью $0,00209 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^2}$ в диапазоне скоростей $v_0 = 129,5 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$ и

v_1 от 96,7 до 31,4 м/сек, т. е. при $v_0 - v_1$, меняющихся от 32,4 до 98,1 м/сек. Постановка опыта и схема экспериментальной установки аналогичны указанным в работе [4].

В случае разгрузки по оси ствола пневмокопра устанавливается специальное устройство, при помощи которого осуществляется торможение бойка, а следовательно частичная разгрузка образца исследуемого материала (схема приведена на рис. 1). Это устройство изменяет скорость ударяющего тела благодаря мгновенному присоединению к ударнику дополнительной массы в процессе удара.

Проведя аналогичные эксперименты для разных масс m_1 при различных дискретных ударах, при постоянных v_0 будем иметь ряд последовательных разгружающих ударов, соответствующих различным толчкам диаграммы разгрузки. Необходимо отметить, что осуществление ударной разгрузки таким способом вызывало большие затруднения, связанные с применением дополнительной массы, которая представляет собой стальной цилиндр. При прохождении снаряда (имеющего в данном случае длинную носовую часть) через цилиндр до момента присоединения происходит нагружение образца, затем на корпус снаряда навешивается цилиндр и скорость ударяющего тела изменяется, что и вызывает некоторую разгрузку. В момент присоединения разгрузочной массы происходит

удар, который может вызвать разрушение снаряда. Для устранения этого внутри цилиндра вкладывают смягчающие свинцовые прокладки. Для улучшения сцепления прокладок с корпусом цилиндра на внутренней поверхности последнего протачивают канавки.

Вышеуказанный процесс фиксировался с помощью скоростной кинокамеры СКС-1М. Как видно из картины разгружающего удара, полученной путем киносъемки (рис. 2), угол γ_1 сразу не устанавливается. Это объясняется тем, что скорость ударяющего тела монотонно изменяется от v_0 до v_1 . Из той же картины видно, что через

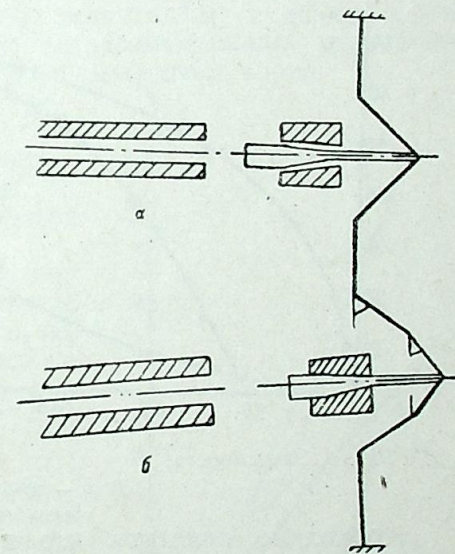


Рис. 1. Нагружение исследуемого образца (а) и разгрузка (б).

некоторое время после присоединения массы m_1 скорость v_1 и угол γ_1 остаются постоянными. Установившиеся значения скорости v_1 и угол γ_1 при разгрузке определялись по результатам обработки киносъемки. Точность определения v_1 (γ_1) была при этом не ниже $\pm 5\%$. Для $m_0 = 138$ гр. значения $m_1, m_2, \dots, m_i$ менялись (от 30 до 460 г).

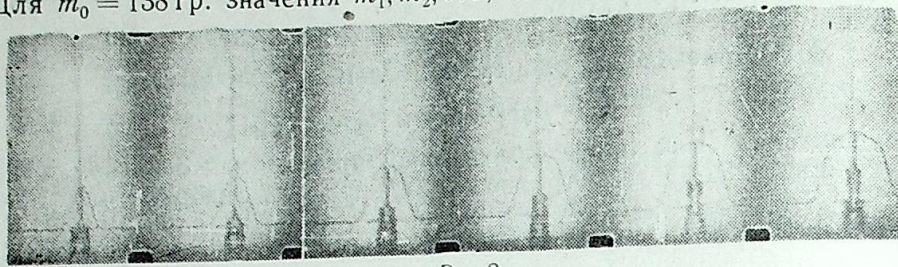


Рис. 2.

Экспериментальные точки, полученные в результате обработки фотоснимков, хорошо аппроксимируются при помощи функции вида

$$v_1 = \frac{19,21 \gamma_1^3 - 44,89 \gamma_1^2 + 31,6 \gamma_1 + 33,75}{1,5708 - \gamma_1} \quad (2, 1)$$

кривые $v_1(\gamma_1)$ и $v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1)$ показаны на рис. 3. При этом максимальная погрешность не превышает 5%.

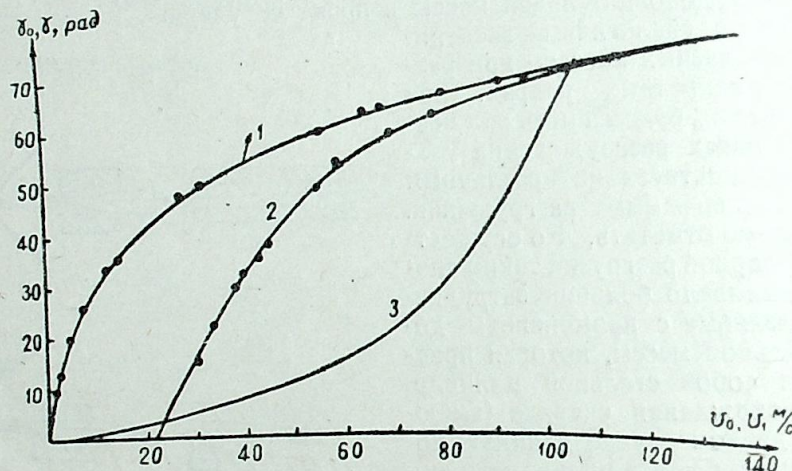


Рис. 3. Зависимость $v = v(\gamma)$: 1) $v_0 = v_0(\gamma_0)$; 2) $v_1 = v_1(\gamma_1)$; 3) $v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1)$.

Необходимо отметить, что для получения удовлетворительной аппроксимационной формулы вводится дополнительное условие, заключающееся в том, что для точки, соответствующей концу нагрузки и началу разгрузки $T_1 = T_0$ и $\epsilon_1 = \epsilon_0$. Вычисленное для указанной точки значение производной $\frac{dv_1}{d\gamma_1}$ включается в систему уравнений, из решения которой получается формула (2, 1). Дифференцируя данную формулу, получим:

$$\frac{dv_1}{d\gamma_1} = \frac{57,63 \gamma_1^2 - 89,78 \gamma_1 + 31,6 + v_1}{1,5708 - \gamma_1} \quad (2, 2)$$

В результате обработки экспериментальных данных получены кривые $v_1 = v_1(\gamma_1)$ и $v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1)$ (рис. 3).

Рис. 2 воспроизводит один из киноснимков резинового шнура диаметром 5 мм при поперечном разгрузочном ударе со скоростью торможения $v_1 = 41$ м/сек.

§ 3. Построение динамической диаграммы разгрузки $T_1(\epsilon_1)$

Расчетные формулы для построения динамической диаграммы разгрузки согласно § 1 имеют вид

$$T_1 = \rho_0 \frac{(v_0 - v_1)^2 \cos^2 \gamma_0}{(1 + \epsilon_1) \sin^2 (\gamma_0 - \gamma_1)} \quad (1, 7)$$

$$\epsilon_1 = (1 + \epsilon_0) e^{\Phi^*} - 1,$$

где

$$\Phi^* = - \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \left[\left(\frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{2} \right)^2 - \mu} \right) d\gamma_1; \right.$$

$$\frac{\omega}{2} = \operatorname{ctg} (\gamma_0 - \gamma_1) - \frac{v^1(\gamma_1)}{v_0 - v_1};$$

$$\mu = \left(\frac{\omega}{2} \right)^2 \left(\frac{\cos \gamma_1 - \cos \gamma_0}{\cos \gamma_0} \right)^2.$$

Эти формулы получены в предположении, что изменение деформации в случае разгрузки сопровождается слабыми разрывами. Формулы обработки, полученные для сильного разрыва [3], в данном случае не годятся, так как при обработке экспериментальных результатов выявляется особенность, выражающаяся мнимостью корня.

Приведенный расчет по (1, 7) с учетом экспериментальных кривых $v_0 - v_1 = f(\gamma_0 - \gamma_1)$ и $v_1(\gamma_1)$ позволяет построить полную диаграмму $T_1(\epsilon_1)$ (рис. 4).

На рис. 4 приведена также кривая $T(\epsilon)$ нагружения.

Анализ кривых показывает, что при динамическом нагружении имеет место перегиб, который в случае разгрузки отсутствует, что установлено исследованием поведения первой производной $\frac{dT_1}{d\epsilon_1}$

от ϵ_1 .

Кроме вышеизложенного, на рис. 4 приводятся также статические диаграммы для той же резины ($d = 5$ мм). Анализ показывает, что по форме эти диаграммы похожи. При нагружении динамические кривые ложатся выше, чем статические. Отношение напряжений при одинаковых деформациях меняется в пределах 1,5—2. Что касается диаграммы разгрузки, то здесь динамические кривые ложатся ниже статических в районе нулевых натяжений. Остаточная деформация в этом случае примерно равна 0,15, тогда как при статическом 0,05.

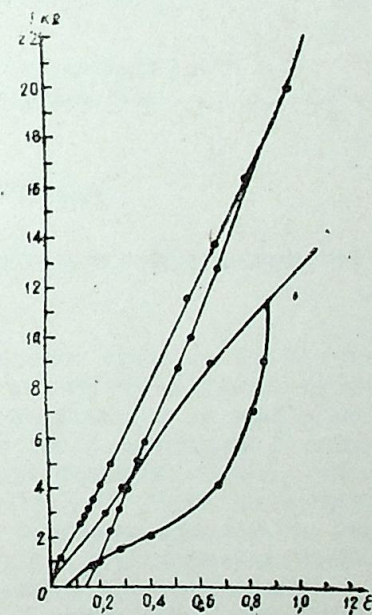


Рис. 4. Динамическая (1) и статическая (2) диаграмма $T = T(\epsilon)$ для резины $d = 5$ мм.

* Перед корнем был взят знак минус, так как при этом формулы дают реальный результат для деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Прочность при импульсивных и кратковременных нагрузках. Физматгиз. 1961.
2. Керимов К. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1961, № 3.
3. Керимов К. А. ДАН Азерб. ССР, т. 18, 1962, № 8.
4. Керимов К. А. ДАН Азерб. ССР, т. 19, 1963, № 4.

Поступило 9. II 1965

К. Ә. Керимов

Бошалмада материалларын динамик хассэлэринин бошалма енинэ зэрбэ үсулу илэ тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мұәллиф тәрәфиндән әввәлләрдә апарылмыш тэдгигатын давами верилмишдир. Белә ки, [2]-дә бошалмада материалларын динамик хассэлэринин өјрәнилмәси үчүн $\sigma(\epsilon)$ бошалма диаграммынә тәјинетмә үсулу тәклиф олуңмушдур.

Тәгдим олуңан иш ики һиссәдән ибарәтдир: биринчи һиссәдә мәсәләннн нәзәри һәлли вә $\sigma(\epsilon)$ бошалма гануну аналитик шәкилдә верилмишдир.

Икинчи һиссәдә исә мұәллиф тәрәфиндән апарылмыш тәчрүби тэдгигатын нәтичәләри верилмишдир.

Јүкләмә вә бошалма $\sigma(\epsilon)$ диаграмларының графикләри дә мәгаләдә верилир.

АЗӘРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРӘЛӘРИ
Физика-техника вә ријазиијат елмләри серијасы, 1965, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 3

Л. Г. МУСТАФАЕВ

КЛАССЫ РЕГУЛЯРНОСТИ ПОЛУГРУД

Настоящая статья посвящена одной из аналогий, существующих между теорией полугрупп и теорией полугруд, в ней классы регулярности, введенные Круазо [4] для полугрупп, рассмотрены в полугрудах.

§ 1. Полугрудой [1, 2] называется множество S , в котором определена тернарная алгебраическая операция, ставящая в соответствие каждой тройке элементов $s_1, s_2, s_3 \in S$ элемент $[s_1 s_2 s_3] \in S$ и удовлетворяющая следующему условию типа ассоциативности:

$$\forall s_i \in s [[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]]^* \quad (1)$$

Для любых элементов $s_i \in S$ обозначим

$$[[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 s_2 s_3 s_4 s_5], [[s_1 s_2 s_3 s_4 s_5] s_6 s_7] = [s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7] \text{ и т. д.}$$

Если $s_{k+1} = s_{k+2} = \dots = s_{k+t} = s$, то обозначим $[s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n] = [s_1 s_2 \dots s_k s^{t+1} s_{k+t+1} \dots s_n]$.

Кроме того, пусть

$$s^{[3]} = [sss], s^{[2n+1]} = [[s^{2n-1} ss]].$$

Под s° будем понимать пустой символ.

Определим в полугруде S новую тернарную алгебраическую операцию при помощи равенства:

$$[[s_1 s_2 s_3]] = [s_3 s_2 s_1].$$

Очевидно, что эта новая операция удовлетворяет условиям (1) и, следовательно, относительно этой операции множество S также будет полугрудой. Эта полугруда называется инвертированной по отношению к исходной полугруде. Непустое подмножество A полугруды S называется ее левым (соответственно правым, латеральным) идеалом, если $[SSA] \subseteq A$ (соответственно $[ASS] \subseteq A$, $[SAS] \subseteq A$). Если подмножество $A \subseteq S$ одновременно является и левым и правым идеалом, то оно называется двусторонним идеалом полугруды S . Двусторонний идеал, являющийся и латеральным идеалом, называется просто идеалом.

Непустое подмножество B полугруды S называется подполугрудой S , если

$$[BBB] \subseteq B.$$

Подполугруда B полугруды S называется изолированной, если для всякого $s \in S$ и любого нечетного n из $s^{[n]} \in B$ всегда следует $s \in B$.

* $\forall$ — квантор существования.

Элемент s полугруды S называется регулярным, если в S найдется такой элемент x , что

$$s = [sxs].$$

Если все элементы $s \in S$ регулярны, то и полугруда S называется регулярной.

§ 2. Понятие регулярности в полугрудах может быть обобщено и детализировано при помощи следующих условий.

Пусть m и n — целые неотрицательные числа одинаковой четности. Классом регулярности $D_s(m, n)$ называется совокупность всех элементов a полугруды S , для каждого из которых найдется такой элемент $x \in S$, что

$$a = [a^m x a^n]. \quad (2)$$

Связь вышеуказанного понятия с регулярностью заключается в том, что регулярными элементами полугруды S являются элементы класса $D_s(1, 1)$. Выясним теперь вопрос о включениях различных классов регулярности. Всюду в $1^\circ - 15^\circ$ через S обозначена произвольная полугруда.

1° . $D_s(0, 0) = S$.

2° . Если $m_1 \geq m_2$ и $n_1 \geq n_2$, то

$$D_s(m_1, n_1) \subseteq D_s(m_2, n_2).$$

Действительно, если $a \in D_s(m_1, n_1)$, то в силу (2)

$$a = [a^{m_1} x a^{n_1}] = [a^{m_2} a^{m_1-m_2} x a^{n_1-n_2} a^{n_2}] = [a^{m_2} z a^{n_2}],$$

где $z = [a^{n_1-n_2} x a^{m_1-m_2}]$, если m_2 нечетно, и $z = [a^{m_1-m_2} x a^{n_1-n_2}]$, если m_2 четно; таким образом,

$$a \in D_s(m_2, n_2).$$

3° . Если $m_1 \geq m_2 \geq 2$, то при любом $n \neq 0$

$$D_s(m_1, n) = D_s(m_2, n).$$

Поскольку четность чисел m_1 , n и m_2 совпадает, то нам достаточно показать справедливость этого равенства при $m_1 = m_2 + 2$. Если n четно и $a \in D_s(m_2, n)$, то в силу (2) и (1) имеем

$$\begin{aligned} a &= [a^{m_2} x a^n] = [a^{m_2-1} a x a^n] = [a^{m_2-1} [a^{m_2} x a^n] x a^n] = \\ &= [a^{m_2-1} a^n x a^{m_2} x a^n] = [a^{m_2} a a^{n-2} x a^{m_2} x a^n] = \\ &= [a^{m_2} [a^{m_2} x a^n] a^{n-2} x a^{m_2} x a^n] = [a^{m_2} a^{m_2} x a^n a^{n-2} x a^{m_2} x a^n] = \\ &= [a^{m_2+2} a^{m_2-2} x a^n a^{n-2} x a^{m_2} x a^n] = [a^{m_2+2} z a^n] = [a^{m_1} z a^n], \end{aligned}$$

где $z = [a^{m_2-2} x a^n a^{n-2} x a^{m_2} x]$.

Если же n нечетно и $a \in D_s(m_2, n)$, то опять в силу (2) и (1) имеем

$$\begin{aligned} a &= [a^{m_2} x a^n] = [a^{m_2-1} a x a^n] = [a^{m_2-1} [a^{m_2} x a^n] x a^n] = \\ &= [a^{m_2-1} a^{m_2} x a^n x a^n] = [a^{m_2+2} a^{m_2-3} x a^n x a^n] = [a^{m_1} z_1 a^n], \end{aligned}$$

где $z_1 = [x a^n x a^{m_2-3}]$ (по условию m_2 — нечетное ≥ 2 , т. е. $m_2 \geq 3$).

Итак, для любого $n \neq 0$

$$D_s(m_2, n) \subseteq D_s(m_1, n).$$

Но в силу 2°

$$D_s(m_1, n) \subseteq D_s(m_2, n).$$

Таким образом,

$$D_s(m_1, n) = D_s(m_2, n).$$

Рассматривая полугруду, инвертированную, к S , из 3° получим;

4° . Если $n_1 \geq n_2 \geq 2$, то при любом $m \neq 0$

$$D_s(m, n_1) = D_s(m, n_2).$$

5° . Для любой пары чисел m, n ($m \geq 2, n \geq 2$) одинаковой четности справедливо равенство

$$D_s(m, n) = D_s(n, m).$$

Действительно, пусть, например, $m > n$. Из 3° и 4° следует

$$D_s(m, n) = D_s(n, n) = D_s(n, m).$$

6° . Все классы вида $D_s(0, 2n)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) совпадают с классом $D_s(0, 4)$.

Действительно, согласно 2°

$$D_s(0, 2n) \subseteq D_s(0, 2n-2).$$

С другой стороны, если $a \in D_s(0, 2n-2)$, то в силу (2) и (1)

$$\begin{aligned} a &= [x a^{2n-2}] = [x a a a^{2n-4}] = [x a [x a^{2n-2}] a^{2n-4}] = \\ &= [x a x a^{2n-6} a^{2n}] = [y a^{2n}], \end{aligned}$$

где $y = [x a x a^{2n-6}]$ (заметим, что по условию $2n-6 \geq 0$). Из рассмотрения инвертированной полугруды и из 6° получим:

7° . Все классы вида $D_s(2n, 0)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) совпадают с классом $D_s(4, 0)$.

8° . Все классы вида $D_s(p, p)$ при $p > 2$ совпадают с классом $D_s(2, 2)$.

Действительно, во-первых, согласно 2°

$$D_s(p, p) \subseteq D_s(2, 2).$$

Во-вторых, если $a \in D_s(2, 2)$, то из (2) и (1) имеем

$$a = [a^2 x a^2] = [a [a^2 x a^2] x [a^2 x a^2] a] = [a^3 x a^2 x a^2 x a^3] = [a^3 z_1 a^3],$$

где $z_1 = [x a^2 x a^2 x]$.

Далее

$$a = [a^2 [a^2 x a^2] z_1 [a^2 x a^2] a^2] = [a^4 x a^2 z_1 a^2 x a^4] = [a^4 z_2 a^4],$$

где $z_2 = [x a^2 z_1 a^2 x]$, и т. д. В конце концов получим

$$a = [a^p z_k a^p], \text{ где } z_k \in S.$$

9° . $D_s(2, 2) = D_s(0, 4)$.

Действительно, согласно 8° и 2°

$$D_s(2, 2) = D_s(4, 4) \subseteq D_s(0, 4).$$

Но, с другой стороны, если $a \in D_s(0, 4)$, то в силу (2) и (1)

$$\begin{aligned} a &= [x a^4] = [x [x a^4] a^3] = [x a^4 x a^3] = [x a x a^3] = \\ &= [a x a [a x a^3] a] = [a x a a^3 x a a] = [a x a^3 a x a a] = \\ &= [a a x a a] = [a^2 x a^2] \end{aligned} \quad (3)$$

и, следовательно, $a \in D_s(2, 2)$.

10° . $D_s(2, 2) = D_s(4, 0)$. Доказательство, как в 4° и 7° , следует из 9° и из рассмотрения инвертированной полугруды.

11° . Все классы вида $D_s(1, 2n-1)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) совпадают с классом $D_s(1, 3)$. Действительно, согласно 2°

$$D_s(1, 2n-1) \subseteq D_s(1, 2n-3).$$

С другой стороны, если $a \in D_s(1, 2n-3)$, то в силу (2) и (1)

$$\begin{aligned} a &= [a x a^{2n-3}] = [a x a a a^{2n-5}] = [a x [a x a^{2n-3}] a^{2n-4}] = \\ &= [a x a x a^{2n-6} a^{2n-1}] = [a y a^{2n-1}], \end{aligned}$$

где $y = [a^{2n-6} x a x]$

(заметим, что по условию $2n-6 \geq 0$). Из рассмотрения инвертированной полугруды и из 11° получим:

12° . Все классы вида $D_s(2n-1, 1)$ ($n = 3, 4, 5, \dots$) совпадают с классом $D_s(3, 1)$.

13°. $D_s(1,3) = D_s(0,4)$. При доказательстве 9° в (3) нами попутно было доказано, что

$$D_s(0,4) \subseteq D_s(1,3).$$

Пусть теперь $a \in D_s(1,3)$. Тогда в силу (2) и (1) имеем

$$a = [axa^3] = [axaa^2] = [axaxa^2] = [za^4],$$

где $z = [axaxa]$.

Из рассмотрения инвертированной полугруды и из 13° имеем:

$$14°. D_s(3,1) = D_s(4,0).$$

$$15°. D_s(2,2) = D_s(2,0) \cap D_s(0,2).$$

Действительно, согласно 2°

$$D_s(2,2) \subseteq D_s(2,0) \cap D_s(0,2).$$

Но, с другой стороны, если $a \in D_s(2,0) \cap D_s(0,2)$, то при некоторых $x, y \in S$

$$a = [aax] = [yaa].$$

Отсюда получаем

$$a = [aax] = [a[aax]x] = [axaax] = [axa] = [aaxxyaa] = [a^2xxya^2]$$

и, следовательно, $a \in D_s(2,2)$.

Из 1° — 15° вытекает следующая теорема.

Теорема 1. В любой полугруде S существует не более пяти классов регулярности $D_s(m, n)$ (некоторые из этих классов могут совпадать). Между этими классами существуют следующие включения:

$$\begin{array}{ccc} & D_s(0,0) & \\ & \cup & \\ & D_s(1,1) & \\ & \cup & \cup \\ D_s(2,0) & & D_s(0,2) \\ & \cup & \cup \\ & D_s(2,2) & \end{array} \quad (4)$$

Следующие три примера полугруд показывают, что включения (4) могут быть строгими.

Пример 1. Рассмотрим полугруд из трех элементов $A = \{a, b, \theta\}$, у которой $a^{[3]} = b^{[3]} = \theta$, $a = [aba]$, $b = [bab]$ и $[xyu] = [xxy] = \theta$ для любых $x, y \in A$. Эта полугруд регулярна, поэтому $A = D_A(1,1)$. Но включения классов $D_A(2,0) \subset D_A(1,1)$ и $D_A(0,2) \subset D_A(1,1)$ будут строгими, так как $D_A(2,0) = D_A(0,2) = \theta$.

Пример 2. Нетрудно проверить, что в полугруде $B = \{a, b, \theta\}$, у которой $a^{[3]} = b^{[3]} = \theta$, $a = [aab]$, $b = [bba]$ и $[xyu] = \theta$, при любых $x, y \in B$ включение $D_B(2,2) \subset D_B(2,0)$ будет строгим.

Пример 3. Полугруд $S = \{a, \theta\}$, у которой $a^{[3]} = \theta$, показывает, что существуют нерегулярные полугруды (в нерегулярных полугрудах класс $D_s(1,1)$ строго включается в S). Отметим, что полугруды примеров 1 и 2 являются вполне простыми полугрудами Л. М. Глускина [2].

§ 3. Многие свойства полугруд могут быть охарактеризованы при помощи тех или иных свойств системы идеалов полугруд. Например, важное свойство регулярности полугруды может быть охарактеризовано таким образом.

Теорема 2. Для того, чтобы полугруд S совпадала со своим классом $D_s(1,1)$ (т. е. для того, чтобы S была регулярной), необходимо и достаточно, чтобы для всякого ее левого идеала L , всякого ее правого идеала R и всякого латерального идеала P имело место

$$[RPL] = R \cap P \cap L.$$

Пусть $S = D_s(1,1)$. Возьмем в $R \cap P \cap L$ произвольный элемент a . В силу (2)

$$a = [axa] \quad (x \in S).$$

Ясно, что $a = [axaxa]$. Отсюда, так как $[xax] \in P$, то

$$a \in [RPL],$$

т. е.,

$$R \cap P \cap L \subseteq [RPL].$$

Но так как $[RPL] \subseteq R$, $[RPL] \subseteq P$ и $[RPL] \subseteq L$, то

$$[RPL] \subseteq R \cap P \cap L.$$

Таким образом доказано, что

$$[RPL] = R \cap P \cap L.$$

Пусть в S имеет место указанное свойство идеалов. Для $a \in S$ возьмем правый идеал $R = [aSS]Ua$. Согласно предложению,

$$R = R \cap S \cap S = [RSS] = [[aSS]Ua]SS \subseteq [aSS].$$

Следовательно, $a \in [aSS]$. Аналогично можно доказать, что $a \in [SSa]$. Но $[aSS]$ есть правый идеал S , а $[SSa]$ — левый идеал и поэтому

$$a \in [aSS] \cap S \cap [SSa] = [aSSSSSa] \subseteq [aSa],$$

откуда следует, что при некотором $x \in S$ имеет место

$$a = [axa].$$

Пользуясь понятием классов регулярности, можно выделить полугруды, которые характеризуются изолированностью тех или иных идеалов.

Теорема 3. Для того, чтобы все левые (правые) идеалы полугруды S были изолированными, необходимо и достаточно, чтобы

$$S = D_s(2,2).$$

Действительно, пусть все левые идеалы полугруды S изолированные. Тогда для произвольного $a \in S$ изолированным является левый идеал $[Saaaa]$. Но $a^{[5]} \in [Saaaa]$. Поэтому $a \in [Saaaa]$, т. е. при некотором $x \in S$

$$a = [xaaaa].$$

Отсюда, принимая во внимание 10° (§ 2), находим, что

$$a = [aaxaa].$$

т. е.

$$a \in D_s(2,2).$$

В свою очередь, если $S = D_s(2,2)$, а L — некоторый левый идеал полугруды S и $a^{[k]} \in L$ ($a \in S$) при некотором нечетном k , то согласно 9° и 6° (§ 2)

$$S = D_s(0,4) = D_s(0, k+1).$$

Отсюда при некотором $z \in S$ находим

$$a = [za^{k+1}] = [zaa^k].$$

По определению левого идеала $a \in L$, а это и означает изолированность идеала L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Матем. сб., 32 (74), № 3 (1953).
2. Глускин Л. М. ДАН СССР, 151, № 3, 485 (1963).
3. Ляпин Е. С. Полугруппы. М., 1960.
4. Croisot R. Demi-groupes inversifs et demi-groupes reunions de demi-groupes simples. Ann. Sci. Ecole. Norm (3), 70 (1953).

Поступило 27. II 1965

Ф. А. ТАГИЕВ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ В ОДНОМ ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$LU \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

В настоящей статье рассматривается приближенное решение одной краевой задачи для уравнения Лаврентьева—Бицадзе:

$$LU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

являющейся обобщением задачи Т. Трикоми, поставленной и исследованной в работах М. А. Лаврентьева и А. В. Бицадзе [1], А. В. Бицадзе [2] и Г. Каратопраклиева [3].

Пусть D —односвязная конечная область плоскости XU , ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC : $y = -x - 1$ и $y = x - 1$, выходящими из точки $C(0,-1)$. Обозначим через D_1 и D_2 , соответственно, эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D .

В упомянутой статье Г. Каратопраклиева [3] наряду с другими доказана

Теорема. *Каковы бы ни были достаточно гладкие функции φ и ψ , заданные соответственно на достаточно гладкой линии σ и AC , всегда существует одно и только одно решение $U(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{D}$ при $y \neq 0$, имеющее частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$, непрерывные в D при $y \neq 0$, причем на отрезке AB*

действительной оси $U(x, y)$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ удовлетворяют условиям склейвания

$$U(x, +0) = \alpha(x) U(x, -0), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, +0) = \beta(x) \frac{\partial U}{\partial y}(x, -0),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ —заданные функции, не обращающиеся в нуль на отрезке AB и $\alpha'(x)\beta(x) \leq 0$, $-1 < x < 1$.

При $\alpha(x) = \beta(x) = 1$ упомянутая задача совпадает с задачей Т. В настоящей статье ставится цель—решить приближенно упомянутую задачу, т. е.

$$LU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$U(x, +0) = \alpha(x) U(x, -0), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, +0) = \beta(x) \frac{\partial U}{\partial y}(x, -0), \quad (2)$$

$$U|_{\sigma} = \varphi(s), \quad U|_{AC} = \psi(x), \quad (3)$$

причем

$$\alpha'(x)\beta(x) \leq 0. \quad (4)$$

Приближенное решение задачи (1)—(3) для случая $\alpha(x) = \beta(x) = 1$ дано З. И. Халиловым [4] и О. А. Ладыженской [5].

В области D_2 , в силу (2), решение U уравнения (1) имеет вид

$$2U(x, y) = \frac{\tau(x+y)}{\alpha(x+y)} + \frac{\tau(x-y)}{\alpha(x-y)} + \int_{x-y}^{x+y} \frac{\nu(t)}{\beta(t)} dt, \quad (5)$$

где $\tau(x) = U(x, +0)$, $\nu(x) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, +0)$.

В силу (3) из (5) получим

$$\frac{\tau(x)}{\alpha(x)} + \frac{\tau(-1)}{\alpha(-1)} - \int_{-1}^x \frac{\nu(t)}{\beta(t)} dt = 2\psi\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

или после дифференцирования

$$\left[\frac{\tau(x)}{\alpha(x)} \right]' - \frac{\nu(x)}{\beta(x)} = 2 \frac{d}{dx} \psi\left(\frac{x-1}{2}\right) - |x| < 1. \quad (6)$$

Отсюда в силу (4), также как и в задаче Т [2], заключаем, что если $\psi(x) \equiv 0$, решение $U(x, y)$ —задачи (1)—(3) в замкнутой области $\bar{D}_1$ положительный максимум и отрицательный минимум принимают на дуге σ . Следовательно, для определения $U(x, y)$ в D_1 имеем условия:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

$$LU \equiv \alpha'(x)\beta(x)U(x, +0) - \alpha(x)\beta(x)\frac{\partial U}{\partial x}(x, +0) + \alpha^2\frac{\partial U}{\partial y} = F, \quad (8)$$

$$U|_{\sigma} = \varphi(s). \quad (9)$$

Если из них мы найдем U в D_1 , то по значениям $U(x, 0)$ найдем U в D_2 квадратурой. Итак, вся задача сводится к определению U по условиям (7), (8) и (9). Для ее решения применим метод конечных разностей. В процессе решения мы будем пользоваться предложением О. А. Ладыженской [5].

Разобьем D_1 прямыми $x_k = kh$, $y_i = ih$ (рис.), где $h = \frac{1}{n}$, $k =$

$= 0, \pm 1, \dots, i = 0, 1, \dots$, на квадраты со стороной h , совокупность всех квадратов, принадлежащих D_1 , обозначим через D_{1h} . Граница D_{1h} состоит из двух частей: γ_h , принадлежащей отрезку AB , и σ_h —остальной части. Продолжим φ с σ внутрь D_1 с сохранением непрерывности и положим $U_h|_{\sigma_h} = \varphi. \quad (10)$

Аппроксимируя (7) и (8), имеем:

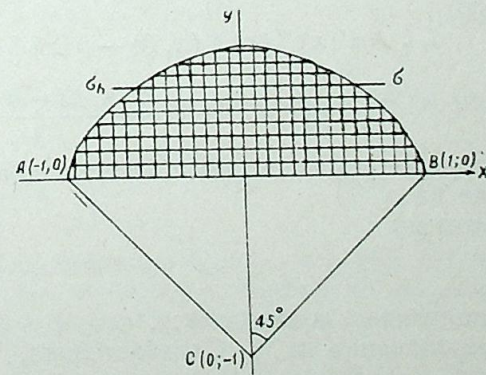


Рис. 1.

$$\Delta_h U_h = \frac{1}{h^2} [U_h(x+h, y) + U_h(x-h, y) + U_h(x, y+h) + U_h(x, y-h) - 4U_h(x, y)] = 0, \quad (11)$$

$$l_h U_h \equiv \alpha'(x) \beta(x) U_h(x, 0) - \alpha(x) \beta(x) \frac{U_h(x, 0) - U_h(x, h)}{h} + \alpha^2(x) \frac{U_h(x, h) - U_h(x, 0)}{h} = F(x). \quad (12)$$

Условия (11)–(12) образуют линейную алгебраическую систему для определения U_h , причем в силу (10) число неизвестных равно числу уравнений. Докажем, что системы (10)–(12) однозначно разрешимы. Для этого, кроме условия (4), потребуем, чтобы

$$\alpha(x) \beta(x) > 0. \quad (13)$$

В связи с этим докажем следующую лемму.

Лемма. Если функции w_1 , w_2 и v , заданные на решетке D_{1h} , таковы, что

$$\Delta_h w_2 < \Delta_h v < \Delta_h w_1 \quad (14)$$

и

$$l_h w_2 < l_h v < l_h w_1, \quad (15)$$

то в D_{1h} справедливо неравенство

$$w_1 + \min_{\sigma_h} (v - w_1) \leq v \leq w_2 + \max_{\sigma_h} (v - w_2). \quad (16)$$

Доказательство. Разность $v - w_1$ обозначим через θ , т. е. $\theta = v - w_1$. В силу (14)

$$\Delta_h \theta = \Delta_h (v - w_1) < 0. \quad (17)$$

Предположим, что θ принимает свой отрицательный минимум в точке $(x, y) \in D_{1h}$. Тогда

$$\Delta_h \theta = \frac{1}{h^2} [\theta(x+h, y) + \theta(x-h, y) + \theta(x, y+h) + \theta(x, y-h) - 4\theta(x, y)] \geq 0.$$

Это противоречит (17). Следовательно, θ не может принимать свое минимальное значение во внутренних точках области D_{1h} . Покажем, что $\theta = v - w_1$ не может принимать свое минимальное (отрицательное) значение и на γ_h .

В силу (15)

$$l_h \theta = l_h (v - w_1) \leq 0. \quad (18)$$

Предположим, что $\theta = v - w_1$ принимает свое минимальное (отрицательное) значение в точке $(x, 0) \in \gamma_h$. Тогда в силу (4), (13)

$$l_h \theta = \alpha'(x) \beta(x) \theta(x, 0) - \alpha(x) \beta(x) \frac{\theta(x, 0) - \theta(x-h, 0)}{h} + \alpha^2(x) \frac{\theta(x, h) - \theta(x, 0)}{h} \geq 0.$$

Это противоречит (18). Значит θ принимает свое минимальное значение на σ_h .

Поэтому

$$w_1 + \min_{\sigma_h} (v - w_1) \leq v. \quad (19)$$

Аналогично доказывается, что $\theta_1 = v - w_2$ принимает свое максимальное значение на σ_h . Следовательно,

$$v \leq w_2 + \max_{\sigma_h} (v - w_2). \quad (20)$$

Объединяя (19) и (20), получим:

$$w_1 + \min_{\sigma_h} (v - w_1) \leq v \leq w_2 + \max_{\sigma_h} (v - w_2).$$

Таким образом, неравенство (16) доказано.

Теорема. Система уравнений (10)–(12) имеет единственное решение при любом h .

Доказательство. Для доказательства единственности решения системы (10)–(12) достаточно доказать, что соответствующая однородная система:

$$\Delta_h v = 0, l_h v = 0, v|_{\sigma_h} = 0 \quad (21)$$

имеет только нулевое решение.

Для доказательства теоремы положим:

$$w_1 = \varepsilon y [x^2 + (y+1)^2] = \varepsilon y r^2(x, y),$$

где $\varepsilon > 0$ и $r(x, y)$ — расстояние от точки $(0, -1)$ до точки решетки $(x, y) \in D_{1h}$. Покажем, что w_1 удовлетворяет условию (14) леммы:

$$\Delta_h w_1 = \frac{1}{h^2} [w_1(x+h, y) + w_1(x-h, y) + w_1(x, y+h) + w_1(x, y-h) - 4w_1(x, y)] = 4\varepsilon(2y+1) > 0.$$

Следовательно, учитывая (21),

$$\Delta_h w_1 > 0 = \Delta_h v.$$

Покажем, что w_1 удовлетворяет и условию (15):

$$l_h w_1 = \alpha'(x) \beta(x) w_1(x, 0) - \alpha(x) \beta(x) \frac{w_1(x, 0) - w_1(x-h, 0)}{h} + \alpha^2(x) \frac{w_1(x, h) - w_1(x, 0)}{h} = \varepsilon \alpha^2 r^2 > 0.$$

С учетом (21) имеем

$$l_h w_1 > 0 = l_h v.$$

Следовательно, w_1 удовлетворяет условиям леммы. Поэтому

$$\varepsilon y r^2 + \min_{\sigma_h} (-\varepsilon y r^2) \leq v. \quad (22)$$

Положим $w_2 = -\varepsilon y r^2(x, y)$. Аналогично можно показать, что

$$\Delta_h w_2 = -4\varepsilon(2y+1) < 0, l_h w_2 = -\varepsilon \alpha^2 r^2 < 0.$$

Учитывая (21),

$$\Delta_h w_2 < 0 = \Delta_h v, l_h w_2 < 0 = l_h v.$$

Следовательно, w_2 удовлетворяет условиям леммы. Поэтому

$$v \leq -\varepsilon y r^2(x, y) + \max_{\sigma_h} \varepsilon y r^2(x, y). \quad (23)$$

Объединяя (22) и (23), получим:

$$\varepsilon y r^2(x, y) + \min_{\sigma_h} (-\varepsilon y r^2(x, y)) \leq v \leq -\varepsilon y r^2(x, y) + \max_{\sigma_h} \varepsilon y r^2(x, y).$$

Ввиду произвольности ε

$$v \equiv 0,$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если U — точное решение задачи (7), (8), (9), а U_h — решение системы (10)–(12), то, выбрав h достаточно малым, мы придем к таким U_h , которые как угодно мало отличаются от значений U в соответствующих точках.

Доказательство. Будем предполагать, что решение U -задачи (7), (8) и (9) имеет в D_1 ограниченные производные до 3-го порядка

включительно, причем первые производные непрерывны вплоть до σ , а вторые производные непрерывны вплоть до AB . Для доказательства возьмем разность $v_h = U - U_h$ и с применением Δ_h получим

$$\Delta_h v_h = \Delta_h (U - U_h) = \Delta_h U = \frac{1}{h^2} [U(x+h, y) + U(x-h, y) + U(x, y+h) + U(x, y-h) - 4U(x, y)].$$

Разлагая правую часть по формуле Тейлора, имеем:

$$\Delta_h v_h = h \left[\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(\bar{x}, y) - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}(\bar{x}, y) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x, \bar{y}) + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}(x, \bar{y}) \right],$$

где

$$x \leq \bar{x} \leq x+h, \quad x-h \leq \bar{x} \leq x, \quad y \leq \bar{y} \leq y+h, \quad y-h \leq \bar{y} \leq y.$$

Переходя к модулю, имеем:

$$|\Delta_h v_h| \leq C_1 h. \quad (24)$$

Теперь оценим $l_h v_h$:

$$l_h v_h = l_h (U - U_h) = l_h U - F, \quad (25)$$

$$l_h U = \alpha'(x) \beta(x) U(x, 0) - \alpha(x) \beta(x) \frac{U(x, 0) - U(x-h, 0)}{h} + \alpha^2 \frac{U(x, h) - U(x, 0)}{h} = F + h \cdot \frac{\alpha(x) \beta(x)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + h \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Подставляя значение $l_h U$ в (25), получим:

$$l_h v_h = h \left(\frac{\alpha(x) \beta(x)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right).$$

Переходя к модулю,

$$|l_h v_h| \leq C_2 h. \quad (26)$$

Теперь оценим разность $v = U - U_h$ на σ :

$$v_h = U - U_h = U(x, y) - U(x', y') = (x - x') \frac{\partial U}{\partial x} + (y - y') \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (x', y') \in \sigma.$$

Переходя к модулю, имеем;

$$|v| \leq C_3 h. \quad (27)$$

Возьмем вспомогательную функцию $w = (y - x + a)^2$ и выберем число a так, чтобы

$$w|_{\sigma} \geq 1, \quad l_h w|_{AB} \geq 1. \quad (28)$$

Очевидно,

$$\Delta_h w = 4. \quad (29)$$

Покажем, что $w_1 = C_4 h w$ и $w_2 = -C_5 h w$ в силу (24), (26), (27), (28) и (29) удовлетворяют условиям леммы при некоторых C_4 и C_5 , зависящих от C_1, C_2, C_3 и пригодных для всех $h \leq h_0$:

$$\Delta_h w_1 - \Delta_h v_h = C_4 h \Delta_h w - \Delta_h v_h \geq h (4C_4 - C_1) > 0 \quad \left(\text{выбирая } C_4 > \frac{1}{4} C_1 \right);$$

$$\Delta_h v_h - \Delta_h w_2 = \Delta_h v_h + C_5 h \Delta_h w \geq h (4C_5 - C_1) \geq 0$$

$$\left(\text{выбирая } C_5 \geq \frac{1}{4} C_1 \right).$$

Теперь оценим разность $l_h w_1 - l_h v_h$. В силу (26) и (28)

$$l_h w_1 - l_h v_h = C_4 h l_h w - l_h v_h \geq (C_4 - C_2) > 0$$

(выбирая $C_4 > C_2$). Аналогично

$$l_h v_h - l_h w_2 \geq h (C_5 - C_2) > 0$$

(выбирая $C_5 > C_2$).

Этим мы показали, что w_1 и w_2 удовлетворяют условиям леммы. Следовательно,

$$|v_h| = |U - U_h| \leq Ch.$$

Тем самым теорема доказана.

Покажем, что систему (10)–(12) можно решать методом последовательных приближений Гаусса–Зейделя. Для этого пронумеруем все p -точки множества $D_{1h} U_{\gamma h}$ в таком порядке: сначала берем точки области D_{1h} с самыми большими ординатами (т. е. точки самой верхней строки в D_{1h}) и нумеруем в любом порядке. Затем нумеруем точки нижней строки также в любом порядке. Продолжив этот процесс, мы пронумеруем все точки $D_{1h} U_{\gamma h}$. Предположим, что в D_{1h} имеется r строк. Решая системы линейных алгебраических уравнений (10)–(12) относительно p неизвестных, имеем:

$$U_h(\kappa) = \sum_{j=1}^{\kappa-1} b_{kj} U_h(j) + \sum_{j=\kappa}^p b_{kj} U_h(j) + g_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, p}.$$

Беря произвольное нулевое приближение $U_h^{(0)}(1), U_h^{(0)}(2), \dots, U_h^{(0)}(p)$, напомним формулу Гаусса–Зейделя:

$$U_h^{(m)}(\kappa) = \sum_{j=1}^{\kappa-1} b_{kj} U_h^{(m)}(j) + \sum_{j=\kappa}^p b_{kj} U_h^{(m-1)}(j) + g_{\kappa}. \quad (30)$$

Теорема. При $m \rightarrow \infty$ для всех $\kappa = 1, 2, \dots, p$

$$U_h^{(m)}(\kappa) \rightarrow U_h(\kappa),$$

где $U_h(\kappa)$ составляют точное решение системы (10)–(12).

Доказательство. Если $V_h^{(m)}(\kappa)$ — ошибки для m -го приближения, т. е.

$$V_h^{(m)}(\kappa) = U_h(\kappa) - U_h^{(m)}(\kappa),$$

очевидно, что $V_h^{(m)}(\kappa)$ удовлетворяет однородной системе (30).

Положим

$$\max \{ |V_h^{(0)}(1)|, |V_h^{(0)}(2)|, \dots, |V_h^{(0)}(p)| \} = A.$$

Рассмотрим случай $\alpha'(x) \beta(x) = 0$. На основании (11)

$$|V_h^{(1)}(1)| \leq \left(1 - \frac{1}{4} \right) A.$$

Методом индукции также найдем, что

$$|V_h^{(1)}(\kappa_1)| \leq \left(1 - \frac{1}{4} \right) A, \quad \kappa_1 = 1, 2, \dots, m_1.$$

Для второй (сверху) строки имеем:

$$|V_h^{(1)}(m_1+1)| \leq \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A.$$

Аналогично найдем:

$$|V_h^{(1)}(\kappa_2)| \leq \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) A, \text{ где } \kappa_2 = m_1+1, \dots, m_2.$$

Продолжая этот процесс, имеем для r -ой строки

$$|V_h^{(1)}(\kappa_r)| \leq \left(1 - \frac{1}{4^r}\right) A, \text{ где } \kappa_r = m_{r-1}+1, \dots, m_r;$$

$m_1, \dots, m_r$ — количество узлов соответственно 1, 2, ..., r -строки. Для узлов, находящихся на γ_h , в силу (12), имеем:

$$|V_h^{(1)}(x, 0)| \leq \frac{\alpha(x) \beta(x) A + \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{4^r}\right) A}{\alpha^2(x) + \alpha(x) \beta(x)} = (1-\rho) \cdot A, \text{ где } 0 < \rho < 1.$$

Следовательно, при всех $\kappa = 1, 2, \dots, p$ в случае $\alpha'(x) \beta(x) = 0$

$$|\dot{V}_h^{(1)}(\kappa)| \leq (1 - \rho_1) A, \text{ где } \rho_1 = \min \left(\frac{1}{4^r}, \rho \right).$$

Также найдем, что при всех m и κ

$$|V_h^{(m)}(\kappa)| \leq (1 - \rho_1)^m A, \text{ где } 0 < \rho_1 < 1.$$

Отсюда следует, что $V_h^{(m)}(\kappa) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Аналогично в случае $\alpha'(x) \beta(x) < 0$ в силу

$$V_h(x, 0) = \frac{\alpha^2(x) V(x, h) + \alpha(x) \beta(x) V(x_1' - h, 0)}{\alpha^2(x) + \alpha(x) \beta(x) - h \alpha'(x) \beta(x)}$$

для всех m и κ найдем

$$|V_h^{(m)}(\kappa)| \leq (1 - \rho_2)^m A, \text{ где } 0 < \rho_2 < 1.$$

Следовательно, $V_h^{(m)}(\kappa) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Решение задачи (1)–(5) в D_2 в силу найденного $\psi_1(x)$ и (3) имеет вид

$$U = \psi_1(x+y) - \psi\left(\frac{x+y-1}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y-1}{2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А. и Бицадзе А. В. „ДАН СССР“, т. 70, № 3, 1950.
2. Бицадзе А. В. „ДАН СССР“, т. 70, № 4, 1950.
3. Каратопраклиев Г. „ДАН СССР“, т. 151, № 6, 1963.
4. Халилов З. И. „ДАН Азерб. ССР“, т. 9, № 4, 1953.
5. Ладыженская О. А. УМН, т. 9, вып. 4 (62), 1954.
6. Филиппов А. Г. „Изв. АН СССР“, 21 (1957).
7. Тагиев Ф. А. Тр. ВЦ АН Азерб. ССР, т. 3, 1964.

Ф. Ә. Тағыјев

Трикоми мәсәләсинин бир үмуми һалда

$$LU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

тәнлији үчүн тәгриби һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә трикоми мәсәләси Лаврентјев-Бисхадзе тәнлији үчүн даһа үмуми јапышдырма шәрти дахилиндә сонлу артым үсулу илә һәлл едилмишдир.

(7)–(9) мәсәләсинин һәлли тәгриби олараг (10)–(12) хәтти чәбри тәнликләр системинин һәллине кәтирилир.

1-чи теоремдә (10)–(12) системинин һәллинин варлығы вә јека-нәлији исбат олунур.

2-чи теоремдә тәгриби һәллдә бурахылан хәта гијмәтләндирилир.

3-чү теоремдә (10)–(12) системинин тәгриби һәлл үсулу верилир. Гиберболик һиссәдә һәлл квадратурла тапылыр.

Р. Ю. КЕРИМОВ, Л. П. ХОРОШУН

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНКИ С ОТВЕРСТИЕМ

При изучении плоского напряженного состояния возле отверстий важно установление влияния пластического поведения материала на распределение напряжений, а также определение границы, отделяющей упругую область от пластической. В существующих работах [1, 2, 3, 4, 5] для материала принимается закон идеальной пластичности и задачи решаются путем сопряжения функций напряжения для упругой и пластической областей на неизвестном контуре. Подобные задачи в общей постановке весьма сложны, поэтому вышеуказанные решения относятся к некоторым частным случаям нагружения. При этом заранее требуется, чтобы пластическая зона охватывала отверстие полностью. Для случаев неполного охвата отверстия П. И. Перлиным [4] предложен приближенный способ решения путем сопряжения функций напряжения в отдельных точках искомого контура.

Для материалов с линейным упрочнением известна лишь работа И. И. Фаерберга [6], который исследовал пластические зоны возле кругового отверстия в полосе при одноосном растяжении. Приближенное решение этой задачи основано на теории упруго-пластического изгиба кривого бруса.

В настоящей работе изучаются напряженное состояние и пластические зоны возле отверстий в пластинке для материалов с упрочнением на основе теории малых упруго-пластических деформаций [7]. Здесь выводятся основные уравнения для плоского напряженного состояния, дается постановка задачи и показан способ ее решения.

Основные зависимости напряжения-деформации. В теории упруго-пластических деформаций нужно различать процессы нагружения и разгрузки, так как зависимости напряжения-деформации неодинаковы в том и другом случаях. Будем предполагать, что во всей области происходит процесс нагружения. Зависимости напряжения-деформации можно представить в одной из форм:

$$\sigma_{kk} = 3K \epsilon_{kk},$$

$$\sigma'_{jk} = 2\mu [1 - \omega(\epsilon_i)] \epsilon'_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

или

$$\epsilon_{kk} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk},$$

$$\epsilon'_{jk} = \frac{1}{2\mu} [1 + \varphi(\sigma_i)] \sigma'_{jk} \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Здесь, соответственно, σ_{kk} , ϵ_{kk} — среднее напряжение и объемная деформация;

σ'_{jk} , ϵ'_{jk} — девиаторы тензоров напряжения и деформаций,

σ_i , ϵ_i — интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига;

$\omega(\epsilon_i)$, $\varphi(\sigma_i)$ — функция Ильюшина и аналогичная функция для зависимостей (2);

K , μ — упругие постоянные.

В зависимости от того, решается ли задача в перемещениях или напряжениях исходят соответственно из соотношений (1) или (2). Мы в дальнейшем будем пользоваться соотношениями (2).

Функция $\varphi(\sigma_i)$ выбирается на основе экспериментальных данных об упрочнении материала. Если исходить из кусочно-линейной аппроксимации диаграммы растяжения образца (рис. 1), что обычно принимается в теории упруго-пластических деформаций, то вид функции будет следующий:

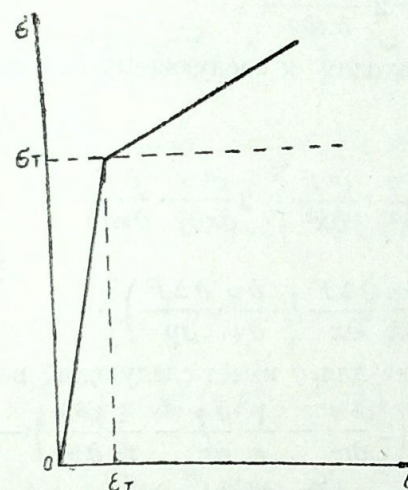


Рис. 1

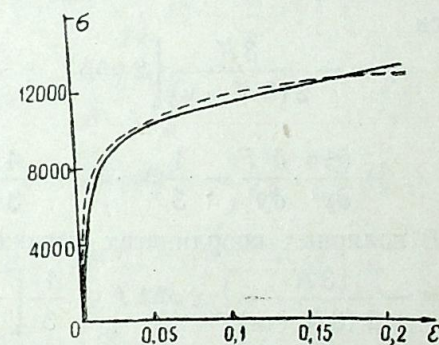


Рис. 2

$$\varphi(\sigma_i) = \begin{cases} 0 & \text{для } \sigma_i \leq \sigma_T \\ \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{\sigma_T}{\sigma_i} \right) & \text{для } \sigma_i > \sigma_T. \end{cases} \quad (3)$$

Однако при решении многих задач с целью сокращения вычислений более удобно выбрать аналитическое выражение для $\varphi(\sigma_i)$ и в частности закон, принимаемый для физически нелинейных материалов [9]:

$$\varphi(\sigma_i) = g \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sigma_i \right)^{n-1}. \quad (4)$$

Зависимость напряжения-деформации для одноосного растяжения образца в этом случае, как следует из (2), будет следующая:

$$\epsilon = \frac{\mu + 3K}{9K\mu} \sigma + \frac{g}{3\mu} \sigma^n. \quad (5)$$

При этом постоянная g находится из условия, с тем, чтобы зависимость (5) наилучшим образом совпадала с диаграммой растяжения образца.

Нетрудно убедиться, что, полагая $n = 3, 5$, можно охватить большой класс металлов, встречающихся в инженерной практике. Так, например, для стали У 8, полагая $n = 5$, найдем $g = 0,93 \cdot 10^{-15} \left(\frac{сМ^2}{к2} \right)^4$.

Расчетная зависимость по формуле (5) и экспериментальная изображены на рис. 2 соответственно сплошной и пунктирной линиями.

Основные уравнения плоского напряженного состояния. В случае плоского напряженного состояния из (2) следует соотношение

$$\Sigma_{jk} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{jk} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \sigma_{ii} \delta_{jk} + \frac{\varphi(\sigma_i)}{2\mu} \left(\sigma_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \delta_{jk} \right), \quad (6)$$

где

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 3(\sigma_{12} - \sigma_{11} \sigma_{22})}.$$

Подставляя (3) в уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \Sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Sigma_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \Sigma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

и вводя функцию напряжений F , приходим к следующему нелинейному уравнению:

$$\Delta \Delta F = q. \quad (7)$$

Здесь

$$q = -\frac{3K}{2(3K + \mu)} \left[2\varphi \Delta \Delta F + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \Delta \varphi \cdot \Delta F + \frac{4}{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Delta F}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Delta F}{\partial y} \right) \right]. \quad (8)$$

В полярных координатах выражение для q имеет следующий вид:

$$q = -\frac{3K}{2(3K + \mu)} \left\{ 2\varphi \Delta \Delta F + \frac{1}{3} \left[\sigma_\theta \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) + 4 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial (\sigma_2 + \sigma_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial (\sigma_r + \sigma_\theta)}{\partial \theta} \right) \right] - 2\tau_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (9)$$

Решение уравнения (7) можно строить методом последовательных приближений, полагая в первом приближении $q = 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F_1 &= 0, \\ \Delta \Delta F_2 &= q_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким путем можно получить аналитическое выражение двух-трех приближений для некоторых простых задач. В общем же случае необходимо использовать численные методы с применением ЭЦВМ.

Двухосное напряженное состояние пластинки с круговым отверстием. В инженерной практике чаще всего требуется найти напряженное состояние пластинки с круговым отверстием при всестороннем растяжении, одностороннем растяжении, чистом сдвиге и двухосной нагрузке. Для этих случаев приближенное решение удобно

строить путем приведения уравнения (7) к обыкновенным дифференциальным уравнениям [8] с последующим применением численных методов. Функцию напряжений F ищем в виде

$$F(r, \theta) = F_0(r) + F_2(r) \cos 2\theta, \quad (11)$$

что совпадает с решением упругой задачи. Тогда, применяя метод Галеркина, приводим (7) к системе двух обыкновенных уравнений:

$$\begin{aligned} F_0^{IV} + \frac{2}{r} F_0^{III} - \frac{1}{r^2} F_0^{II} + \frac{1}{r^3} F_0^I &= q_0, \\ F_2^{IV} + \frac{2}{r} F_2^{III} - \frac{9}{r^2} F_2^{II} + \frac{9}{r^3} F_2^I &= q_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь q_0 и q_2 зависят от показателя n в законе (4). Так, для $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{(h + gA_1 + gA_3)R_1 - 2gA_2R_2}{(2h + 4gA_1)(h + 2gA_1 + gA_3) - 4g^2A_2^2}, \\ q_2 &= \frac{2gA_2R_1 - (2h + 4gA_1)R_2}{4g^2A_2^2 - (2h + 4gA_1)(h + 2gA_1 + gA_3)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{2g}{3} \left[A_1^{II} \left(2F_0^{II} - \frac{1}{r} F_0^I \right) + A_1 \left(4F_0^{III} + \frac{3}{r} F_0^{II} - \frac{2}{r^2} F_0^I \right) + \right. \\ &+ A_2^{II} \left(F_2^{II} - \frac{1}{2r} F_2^I + \frac{2}{r^2} F_2 \right) + A_2 \left(2F_2^{III} + \frac{3}{2r} F_2^{II} + \frac{3}{r^2} F_2^I \right) + \\ &+ A_2 \left(\frac{10}{r^2} F_2^{II} - \frac{8}{r^3} F_2^I - \frac{4}{r^4} F_2 \right) \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= -\frac{g}{3} \left[A_1^{II} \left(2F_2^{II} - \frac{1}{r} F_2^I + \frac{4}{r^2} F_2 \right) + A_1 \left(4F_2^{III} + \frac{3}{r} F_2^{II} - \frac{18}{r^2} F_2^I + \right. \right. \\ &+ \frac{24}{r^3} F_2 \Big) + A_2^{II} \left(2F_0^{II} - \frac{1}{r} F_0^I \right) + A_2 \left(4F_0^{III} + \frac{3}{r} F_0^{II} - \frac{2}{r^2} F_0^I \right) + \\ &+ A_2 \left(\frac{4}{r^2} F_0^{II} - \frac{8}{r^3} F_0^I \right) + A_3^{II} \left(F_2^{II} - \frac{1}{2r} F_2^I + \frac{2}{r^2} F_2 \right) + A_3 \left(2F_2^{III} + \right. \\ &+ \frac{3}{2r} F_2^{II} + \frac{15}{r^2} F_2^I - \frac{12}{r^3} F_2 \Big) + 24A_3 \left(\frac{1}{r^2} F_2^{II} - \frac{1}{r^3} F_2^I + \frac{1}{r^4} F_2 \right) \Big]. \end{aligned}$$

Для $n = 5$

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{B_1R_1 - B_3R_2}{B_1B_2 - B_3^2}, \\ q_2 &= \frac{B_3R_1 - B_2R_2}{B_3^2 - B_1B_2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$B_1 = h + g(2A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + g \left(\frac{1}{2} A_2^2 + 2A_1A_3 \right),$$

$$B_2 = h + 2g(2A_1^2 + A_2^2 + A_3^2),$$

$$B_3 = 2g(2A_1A_2 + A_2A_3),$$

$$\begin{aligned}
R_1 = & -\frac{2g}{3} \left[\left(2A_1^{II} + 2A_1 A_1^{II} + A_2^{II} + A_2 A_2^{II} + A_3^{II} + A_3 A_3^{II} \right) (2F_0^{II} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} F_0^I) + (2A_1 A_1^I + A_2 A_2^I + A_3 A_3^I) \left(4F_0^{III} + \frac{3}{r^2} F_0^{II} - \frac{2}{r^2} F_0^I \right) + \right. \\
& + (2A_1^{II} A_2 + 4A_1^I A_2^I + 2A_1 A_2^{II} + 2A_2^I A_3^I + A_2^{II} A_3 + A_2 A_3^{II}) \left(F_2^{II} - \frac{1}{2r} F_2^I + \right. \\
& \left. + \frac{2}{r^2} F_2 \right) + (2A_1^I A_2 + 2A_1 A_2^I + A_2^I A_3 + A_2 A_3^I) \left(2F_2^{III} + \frac{3}{2r} F_2^{II} + \right. \\
& \left. + \frac{3}{r^2} F_2^I \right) + (2A_1 A_2 + A_2 A_3) \left(\frac{10}{r^2} F_2^{II} - \frac{8}{r^3} F_2^I - \frac{4}{r^2} F_2 \right) \Big], \\
R_2 = & -\frac{g}{3} \left[(2A_1^{II} + 2A_1 A_1^{II} + A_2^{II} + A_2 A_2^{II} + A_3^{II} + A_3 A_3^{II}) (2F_2^{II} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{r} F_2^I + \frac{4}{r^2} F_2) + (2A_1 A_1^I + 2A_2 A_2^I + A_3 A_3^I) \left(4F_2^{III} + \frac{3}{r} F_2^{II} - \right. \right. \\
& \left. - \frac{18}{r^2} F_2^I + \frac{24}{r^3} F_2 \right) + (2A_1^{II} A_2 + 4A_1^I A_2^I + 2A_1 A_2^{II} + 2A_2^I A_3^I + A_2^{II} A_3 + \\
& + A_2 A_3^{II}) \left(2F_0^{II} - \frac{1}{r} F_0^I \right) + 2A_1^I A_2 + 2A_1 A_2^I + A_2^I A_3 + A_2 A_3^I \left(4F_0^{III} + \right. \\
& \left. + \frac{3}{r} F_0^{II} - \frac{2}{r^2} F_0^I \right) + (2A_1 A_2 + A_2 A_3) \left(\frac{4}{r^2} F_0^{II} - \frac{8}{r^3} F_0^I \right) + (A_2^{II} + A_2 A_1^{II} + \\
& + 2A_1^{II} A_3 + 4A_1^I A_3^I + 2A_1 A_3^{II}) \left(F_2^{II} - \frac{1}{2r} F_2^I + \frac{2}{r^2} F_2 \right) + (A_2 A_2^I + \\
& + 2A_1^I A_3 + 2A_1 A_3^I) \left(2F_2^{III} + \frac{3}{r} F_2^{II} + \frac{15}{r^2} F_2^I - \frac{12}{r^3} F_2 \right) + \left(\frac{1}{2} A_2^2 + \right. \\
& \left. + 2A_1 A_3 \right) \cdot \frac{24}{r^2} \left(F_2^{II} - \frac{1}{r} F_2^I + \frac{1}{r^2} F_2 \right) \Big].
\end{aligned}$$

В выражениях (13) и (14)

$$\begin{aligned}
A_1 = & \frac{1}{r^2} F_0^{II} - \frac{1}{r} F_0^I F_0^{II} + F_0^{III} + \frac{14}{r^4} F_2^2 + \frac{1}{2} F_2^{II} - \frac{16}{r^2} F_2 F_2^I - \\
& - \frac{1}{2r} F_2^I F_2^{II} + \frac{2}{r^2} F_2 F_2^{II}, \\
A_2 = & \frac{2}{r^2} F_0^I F_2^I - \frac{8}{r^3} F_0^I F_2 - \frac{1}{r} F_0^I F_2^{II} - \frac{1}{r} F_0^{II} F_2^I + \frac{4}{r^2} F_0^{II} F_2 + 2F_0^{II} F_2^{II}, \\
A_3 = & \frac{2}{r^4} F_2^2 = \frac{11}{2r^2} F_2^{II} + \frac{1}{2} F_2^{III} + \frac{8}{r^3} F_2 F_2^I - \frac{1}{2r} F_2^I F_2^{II} + \frac{2}{r^2} F_2 F_2^{II}, \\
h = & \frac{2(3K + \mu)}{3K}.
\end{aligned}$$

Решения уравнений (12) ищут при соответствующих граничных условиях. В общем случае задания двухосной нагрузки на бесконеч-

ности ($\sigma_x^\infty = P_1$, $\sigma_y^\infty = P_2$, $\tau_{xy}^\infty = 0$) и равномерного давления на контуре эти условия будут:

при $r = \infty$

$$\frac{1}{r} \frac{dF_0}{dr} = \frac{P_1 + P_2}{2}, \quad \frac{d^2 F_0}{dr^2} = \frac{P_1 + P_2}{2},$$

$$\frac{1}{r} \frac{dF_2}{dr} - \frac{4}{r^2} F_2 = \frac{P_1 - P_2}{2},$$

$$\frac{d^2 F_2}{dr^2} = -\frac{P_1 - P_2}{2},$$

$$\frac{2}{r} \frac{dF_2}{dr} - \frac{2}{r^2} F_2 = -\frac{P_1 - P_2}{2};$$

при $r = r_0$

$$\frac{1}{r} \frac{dF_0}{dr} = P_0, \quad \frac{1}{r} \frac{dF_2}{dr} - \frac{4}{r^2} F_2 = 0,$$

$$\frac{2}{r} \frac{dF_2}{dr} - \frac{2}{r^2} F_2 = 0.$$

(15)

Решения конкретных задач будут изложены в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Прикл. матем. и мех., т. X, 1946, № 3.
2. Ивлев Д. Д. Вестник МГУ, серия матем., мех., астр., 1957, № 5.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
4. Перлин П. П. Приближенный метод решения упруго-пластических задач. Инженерный сборник, т. XXVIII, 1960.
5. Заславский В. В. Тр. МАИ, вып. 69, 1956.
6. Фаерберг И. И. Тр. ЦАГИ, № 615, 1947.
7. Ильюшин А. А. Пластичность, Гостехиздат, 1948.
8. Канторович Л. В., Крылов Б. И. Приближенные методы высшего анализа. ФМ, 1962.
9. Каудерер Г. Нелинейная механика. ИЛ, 1961.
10. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. II. ГИТИЛ, 1948.

Поступило 10. VIII 1964

Р. Ж. Керимов, Л. П. Хорошун

Зөйфлэдилмиш лөвһәнин еластики-пластики деформасијада кәркинлик вәзијјәти

ХУЛАСӘ

Тәгдим олунан мәгаләдә зөйфлэдилмиш лөвһәдә еластики-пластики деформасија заманы кәркинлик вәзијјәти тәдгиг олунур. Бурада кичик еластики-пластики деформасија нәзәријјәси әсас кәтүрүлмәклә, материалын бәркимә гануна табе олундуғу фәрз едилир.

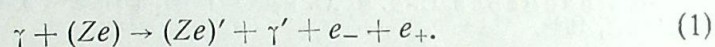
Мәгаләдә мүстәви кәркинлик вәзијјәтинин әсас тәнликләринин чыхарылышы, мәсәлән гөјүлүшү вә бу тәнликләрин һәлл үсүлү кәстәрилилр.

А. МУХТАРОВ, И. НАДЖАФОВ, Н. ТЕНЯКОВА

К РАССЕЙНИЮ ГАММА-КВАНТОВ В ПОЛЕ ЯДРА С ОБРАЗОВАНИЕМ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Возможность получения высокоэнергетических пучков поляризованных частиц (электронов, позитронов, гамма-квантов и т. д.) в последнее время позволяет осуществить постановку опытов по изучению неупругих процессов рассеяния. Такие опыты, очевидно, дадут возможность более детально изучить характер взаимодействия между частицами, выявить его спиновую зависимость и получить сведения о структуре сталкивающихся частиц. Этим и объясняется уделяемое в последние годы внимание теоретическим исследованиям эффектов высокого порядка.

Столкновение частиц высокой энергии (гамма-квантов с энергией выше 1 Бев, электронов и позитронов — выше 10^6 Бев с ядрами или другими частицами, очевидно, будет вызывать в основном неупругое рассеяние, сопровождаемое рождением бозонов или фермион-антифермионных пар. В данной статье нас будут интересовать только реакции, сопровождающиеся фоторождением электрон-позитронных пар при рассеянии гамма-квантов из ядер:



Эффективное сечение этого процесса, как было показано нами в [1], в зависимости от угла рассеяния меняется в интервале $10^{-22} \div 10^{-42} \frac{\text{см}^2}{\text{стер}}$,

что может быть вполне измерено в современных экспериментах.

Различные аспекты реакции (1) изучены в работах [1–3]. Де Таллис и др. [2] исследовали данный процесс без учета поляризаций частиц, однако, как было показано нами в [1], их конечные результаты являются ошибочными. В работе Нелипы [3] показано, что общее число шпуров задачи можно свести к вычислению семи шпуров. Более детальное исследование процесса (1) проведено в работе [1]. Там приводится общее выражение дифференциального эффективного сечения процесса (1) с учетом продольных поляризаций фотонов и фермионов, однако анализ угловой и энергетической зависимости сечения и спиновых корреляций проведен только для следующих двух частных случаев: 1) фотон рассеивается под нулевым углом, а пара испускается под углом θ ; 2) пара испускается под нулевым углом, а гамма-квант рассеивается под углом θ .

С целью получения более полной информации об угловом и энергетическом распределении рассеянных частиц, а также об их спиновой корреляции, относительно подробное теоретическое рассмотрение процесса (1) представляет определенный интерес.

Отсылая читателя за подробностями к работе [1], дифференциальное эффективное сечение процесса (1) запишем в виде

$$d\sigma = 4(2\pi)^{-4} \alpha^2 r_0^2 Z^2 \frac{\chi' - \kappa \kappa_+ \kappa_0^2 dK - d\kappa_+}{\chi q^4 K_- K_+} |M|^2 d\Omega_+ d\Omega_- d\Omega_+. \quad (2)$$

Здесь M -матричный элемент перехода [2]; $q = \chi - \chi' - \kappa_- - \kappa_+$ — импульс, передаваемый ядру; $E_{\pm} = \text{ch } K_{\pm} = \text{ch } \sqrt{\kappa_{\pm}^2 + \kappa_0^2}$; $h\kappa_{\pm}$ — энергия и импульс электрона и позитрона; $\varepsilon_{\gamma} = h\chi$, $\varepsilon_{\gamma'} = h\chi'$ и $h\chi(\chi')$ — энергия и импульс падающего (рассеянного) фотона; $d\Omega_{\gamma'}$, $d\Omega_{\pm}$ — телесные углы вылета рассеянных частиц; $\kappa_0 = m_0 c/h$, m_0 — масса покоя фермиона.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть рассеянный фотон и позитрон летят под нулевым углом, а электрон испускается под углом θ , т. е. $\chi \parallel \chi' \parallel \kappa_+$, $\chi \kappa_- = \chi \kappa_- \cos \theta$, $\kappa_+ = \kappa_-$. Такое рассмотрение важно для определения характера зависимости эффективного сечения от угловой корреляции между импульсами электрона и позитрона.

В рассматриваемой области энергии ($\varepsilon_{\gamma} = h\chi \sim 1$ Бев), не нарушая общности, мы можем ограничиться учетом только продольной поляризации фермионов, которая вычисляется по методу, предложенному А. Соколовым [4]. Тогда квадрат матричного элемента можем записать следующим виде:

$$4Q|M|^2 = (1 - ss_+) [f_1 + (1 + ll') f_2] + s_- s_+ [f_3 + (1 + ll') f_4] - (l\eta + l'(\xi - 2))(s_+ f_5 - s_- f_6) - 2(l + l')(\eta - 1)(s_+ f_7 - s_- f_8), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= 2 \sin^4 \theta \beta^4 (1 - \beta) [-\beta(2 - \beta)(1 - \beta)(1 + \cos \theta) + 4(1 - \beta \cos \theta)]; \\ f_2 &= \eta(\eta - 2)(1 - \beta \cos \theta) [2 \sin^2 \theta \beta^2 (1 - \beta) [(1 + \cos \theta) \beta(1 - \beta)(\beta - 4) + \\ &+ (4 + \beta^2(1 + \cos \theta))(1 - \beta \cos \theta)] + \eta(\eta - 2)(1 - \beta \cos \theta) [\sin^2 \theta (1 - \\ &- \cos \theta) \beta^4 - 4\beta(1 + \cos \theta)(2 - \beta \cos \theta)(1 - \beta^2) + 8(1 - \beta)(1 - \beta \cos \theta)]; \\ f_3 &= 8 \sin^4 \theta (1 - \cos \theta) \beta^4 (1 - \beta^2); \\ f_4 &= 2(1 - \cos \theta) \eta(\eta - 2)(1 - \beta^2) [\sin^4 \theta \beta^4 + 4 \sin^2 \theta \beta^2 (1 - \beta \cos \theta) + \\ &+ 4\eta(\eta - 2)(1 - \beta \cos \theta)^2]; \\ f_5 &= 2 \sin^4 \theta \beta^4 (1 - \beta) [(1 + \cos \theta) \beta(1 - \beta) - 2(1 - \beta \cos \theta)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6 &= f_5 + 1/2 f_3; \\ f_7 &= \sin^2 \theta \eta \beta^2 (\eta - 2)(1 - \beta)(1 - \cos \theta) [(1 - \beta^2) + 2(\beta - 2)(1 - \beta \cos \theta) - \\ &- (1 - \beta \cos \theta)^2]; \\ f_8 &= f_7 + 4 \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) \eta \beta^2 (\eta - 2)(1 - \beta^2)(1 - \cos \theta \beta); \\ Q &= 8 \eta^2 (\eta - 2)^2 (1 - \beta \cos \theta)^4 (1 - \beta^2)^2; \beta = \frac{v}{c} = \frac{\kappa}{K}, \eta = \frac{\chi}{K}; \end{aligned}$$

$$q^2 = 2K^2 [2 - \beta(2 - \beta)(1 + \cos \theta)].$$

Здесь s_- , s_+ , l , l' определяют продольную поляризацию фермионов и фотонов. При $s_{\pm} = 1$ ($s_{\pm} = -1$) спин фермионов направлен по (против) их импульсу, при $l = 1$ фотон поляризован по правому кругу, а при $l = -1$ по левому.

Сначала рассмотрим случай неполяризованных частиц. Тогда усредняя выражение (2) по направлениям поляризации падающего фотона и суммируя по направлениям поляризации рассеянных частиц, получим для эффективного сечения следующее выражение (энергия частиц выражена в единицах $m_0 c^2$):

$$\frac{1}{2} \sum_{l, l', s_-, s_+} \frac{d\sigma}{dK dK_+ d\Omega_+ d\Omega_-} = 8(2\pi)^{-4} \alpha^2 r_0^2 Z^2 \frac{\chi^1 \beta^2}{\chi^4 Q} (f_1 + f_2). \quad (4)$$

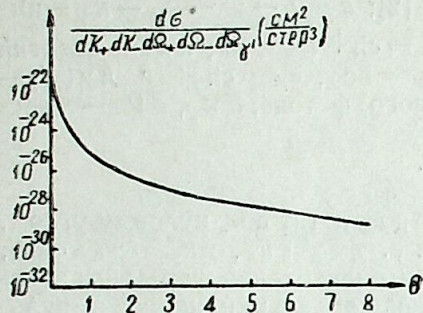


Рис. 1 Угловая зависимость сечения (4) в случае неполяризованных частиц при $\varepsilon_\gamma = 2\varepsilon_\gamma = 4E = 2 \cdot 10^3 m_0 c^2$.

На рис. 1 представлена зависимость сечения (4) от угла разлета фермионной пары для значений энергии $\varepsilon_\gamma = 2\varepsilon_\gamma = 4E = 2 \cdot 10^3 m_0 c^2$ при $Z = 1$. Максимум эффективного сечения соответствует нулевому углу разлета $\theta = 0^\circ$ и с увеличением угла сечения уменьшается. Однако уменьшение эффективного сечения носит не такой резкий характер, как это имеет место в случаях, рассмотренных в работе [1]. Вероятность рождения фермионной пары здесь имеет ощутимое значение даже для углов разлета $\theta > 10^\circ$.

Исследование энергетической зависимости выражения (4) показы-

вает, что, за исключением начала и конца спектра, сечение слабо зависит от энергии рассеянного гамма-кванта (или от энергии пары).

При нулевом угле ($\theta = 0^\circ$), когда $\frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} \rightarrow 0$, сечение стремится к нулю.

При отличных же от нуля углах разлета в рассматриваемом случае, в отличие от других, имеет место инфракрасная расходимость, т. е. для $\theta \neq 0^\circ$ дифференциальное эффективное сечение расходится, если

$\frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma} \rightarrow 0$. Однако эту расходимость, как известно, можно исключить с помощью метода Блоха—Нордсика.

Из-за небольшого объема статьи мы не имеем возможности подробно остановиться на анализе угловой и энергетической зависимости степени продольной (круговой) поляризации рассеянного гамма-кванта и образованной пары. Ограничимся относительно энергии фермионной пары следующим приближением: а) кинетическая энергия пары намного превышает ее собственную энергию,

т. е. $\beta = \frac{\kappa}{K} \rightarrow 1$, тогда из (3) имеет:

$$|M|^2 \sim (1 - s_- s_+)(1 + ll')f(\theta),$$

где $f(\theta)$ —некоторая функция угла разлета; б) собственная энергия пары немного превышает ее кинетическую энергию, т. е. $\beta \rightarrow 0$ и

$$|M|^2 \sim (1 + ll')(1 - s_- s_+ \cos \theta).$$

Из этих выражений следует, что в обоих приближениях гамма-кванты после рассеяния сохраняют первоначальное направление своей поляризации, а фермионные пары в основном образуются в состояниях, в которых спин фермиона направлен по своему импульсу, а спин анти-

фермиона имеет обратное по отношению к соответствующему импульсу направление или наоборот.

2. Рассмотрим теперь более общий случай, когда гамма-квант рассеивается под углом θ_1 , а пара образует с первоначальным направлением угол θ_2 , т. е. $\chi\chi' = \chi\chi' \cos \theta_1$, $\chi\kappa_\mp = \chi\kappa_\pm \cos \theta_2$, $\kappa_+ // \kappa_-$. Здесь мы получаем возможность исследовать зависимость эффективного сечения не только от углов θ_1 и θ_2 , но и от угла между плоскостями (χ, χ') ($\chi, \kappa_\mp$).

В этом случае выражение для квадрата матричного элемента перехода $|M|^2$ с учетом поляризаций всех частиц имеет сравнительно громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся здесь двумя выражениями $|M|^2$, соответствующими случаю поляризованной пары и неполяризованных гамма-квантов:

$$\frac{1}{2} \sum_{l, l' = \pm 1} |M|^2 = \phi^{-1} [(1 - s_- s_+) F_1 + s_- s_+ F_2] \quad (5)$$

и случаю поляризованных гамма-квантов и неполяризованной пары:

$$\sum_{s_-, s_+ = \pm 1} |M|^2 = 2\phi^{-1} [F_1 + ll' F_3]. \quad (6)$$

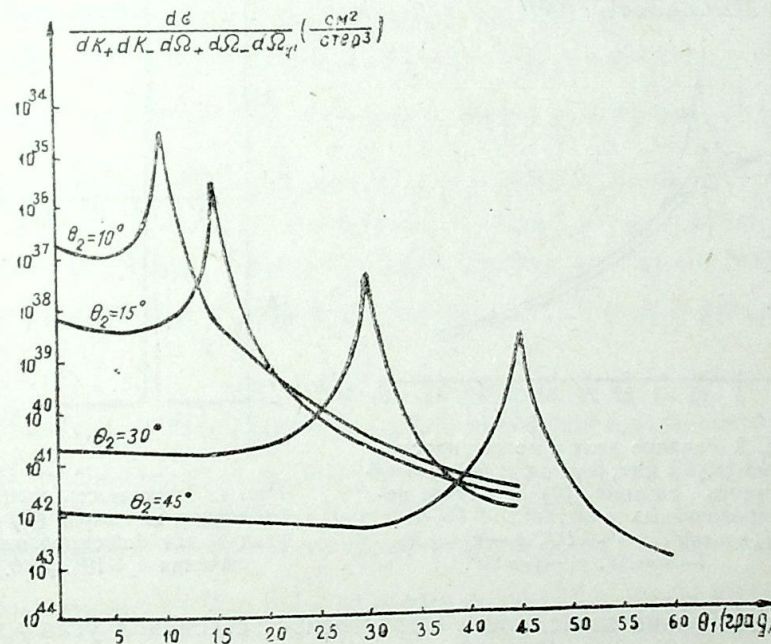


Рис. 2. Зависимость сечения (6) для неполяризованных частиц от угла θ_1 при фиксированных значениях θ_2 ($\varepsilon_\gamma = 2\varepsilon_\gamma = 4E = 2 \cdot 10^3 m_0 c^2$, $\varphi_1 = \varphi_2$).

Каждая из функций F_i ($i = 1, 2, 3$) может быть представлена в виде суммы двух функций $F_i = F_i^{(1)} + F_i^{(2)}$, которые переходят друг в друга при замене $\eta \rightleftharpoons -\eta'$, $\cos \alpha \rightleftharpoons \cos \theta_2$:

$$F_i^{(2)} = F_i^{(1)}(\eta \rightleftharpoons -\eta', \cos \alpha \rightleftharpoons \cos \theta_2), \quad i = 1, 2, 3.$$

Функции $F_i^{(1)}$ приведены в дополнении, α — угол между векторами χ'

и $\kappa_{\mp}$: $\cos \alpha = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi$, где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — угол между векторами (χ, χ') и $(\chi, \kappa_{\mp})$.

Зависимость эффективного сечения, соответствующего (5) или (6), от угла θ_1 без учета поляризации представлена на рис. 2 для следующих фиксированных значений: $\theta_2 = 10, 15, 30$ и 45° . Кривые построены для случая $\varphi = 0$, т. е. когда все частицы находятся в одной плоскости, а $\epsilon_1 = 2\epsilon_1' = 2 \cdot 10^3 m_0 c^2$, $Z=1$. Как видно из рис. 2, зависимость сечения от угла θ_1 носит резонансный характер; с увеличением θ_1 сечение сперва увеличивается и при $\theta_1 = \theta_2$ достигает максимума, дальнейшее увеличение угла θ_1 приводит к достаточно быстрому спаду сечения рассеяния. Значения максимумов с увеличением угла θ_2 , под которым испускается пара, также уменьшается. По кривым видно, что более вероятны те случаи, когда все частицы излучаются под одним и тем же углом.

Следует отметить, что процесс образования пары при рассеянии гамма-кванта в поле ядра имеет некоторые особенности по сравнению с обычным фоторождением пары. Так, например, обычное образование электрон-позитронной пары гамма-квантом в поле ядра имеет запрет для нулевого угла, в то время как в рассматриваемом случае сечение при нулевом угле имеет наибольшее значение.

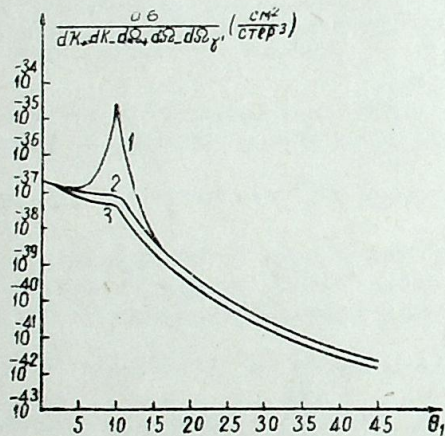


Рис. 3. Влияние угла φ между плоскостями (χ, χ') и $(\chi, \kappa_{\pm})$ на угловую зависимость сечения (6) в случае неполяризованных частиц: 1— $\theta_2=10^\circ$, $\varphi_1-\varphi_2=0^\circ$; 2— $\theta_2=10^\circ$, $\varphi_1-\varphi_2=15^\circ$; 3— $\theta_2=10^\circ$, $\varphi_1-\varphi_2=90^\circ$.

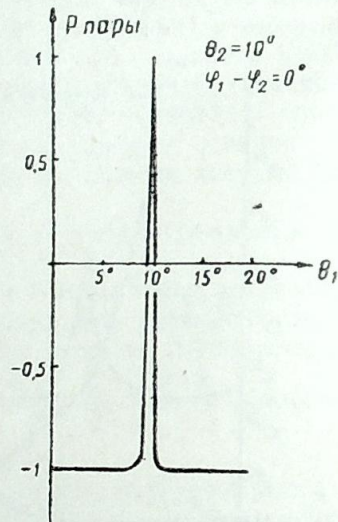


Рис. 4. Зависимость степени поляризации пары (7) от угла θ_1 для фиксированного значения $\theta_2=10^\circ$, $\varphi=0$.

Исследование зависимости эффективного сечения от угла φ между плоскостями (χ, χ') и $(\chi, \kappa_{\mp})$ показывает, что резонансный характер рассеяния сохраняется только для углов, близких к нулю. Увеличение угла φ , как видно из кривых, представленных на рис. 3, приводит к изменению характера угловой зависимости в области значений $\theta_1 \leq \theta_2$: резонансные пики исчезают, наблюдается лишь пологое падение кривой с увеличением θ_1 . В интервале $\theta_1 > \theta_2$ характер сечения почти не изменяется.

Определив обычным образом степени поляризации рассеянного φ -кванта и пары, получим следующие выражения:

$$P_1' = l \frac{F_3}{F_1}, \quad P_{\text{пары}} = \frac{F_2 - F_1}{F_1}.$$

На рис. 4 показана зависимость степени поляризации пары от угла θ_1 для фиксированного значения $\theta_2 = 10$. Как видно, угловая зависимость степени поляризации пары имеет резонансный характер: в интервале углов $\theta_1 \neq \theta_2$ ($0 \leq \theta_1 < 180$) пара образуется в синглетном состоянии, при $\theta_1 \approx \theta_2$ характер поляризации резко изменяется — синглетное состояние сменяется триплетным.

Степень поляризации рассеянного φ -кванта слабо зависит от угла θ_1 . В области $\theta_1 \neq \theta_2$ ($0 \leq \theta_1 < 180$) рассеянный фотон обладает той же поляризацией, что и падающий, и лишь для значений $\theta_1 \approx \theta_2$ и θ_1 , близких к 180° , характер зависимости степени поляризации изменяется. При $\theta_1 = \theta_2$ степень поляризации уменьшается до $+0,8$, а при θ_1 , близких к 180° , резко падает до $0,8$.

В заключение авторы выражают благодарность проф. А. А. Соколову, проф. Д. Д. Иваненко и Б. К. Керимову за обсуждение работы.

ДОПОЛНЕНИЕ

Выражения функций, входящих в формулы (4) и (5):

$$\begin{aligned} F_1^{(1)} = & r_- r'_- \{ 2(r'_- + \beta x)(\eta^2 + \beta^2) + \sin^2 \theta_1 r'_+ (\eta'^2 + 4\eta' + 3\beta^2) - \\ & - 2\beta \eta u (\xi' + 1) + 4\beta \eta (\beta \cos \theta_1 - \cos \theta_2) - 2\beta u \cos \theta_1 (\eta' + \beta^2) \} + r'_- \\ & [(-2r - 2(2-y)r'_+ + (2-y)^2 r_+) \eta \eta' - 2\eta' (2-y)(r' - y) - 2(1 - \\ & - \beta^2)(2\eta - \cos^2 \theta_1 r_+) + 2 \cos \theta_1 (r - 2(-1 - \beta^2)) + \sin^2 \theta_1 \beta^2 r] + y [\eta \eta' (2 - \\ & - y)(2\eta r + \eta' (y r'_+ - \beta u) + \frac{1}{2} y \eta \eta' + \beta^2 (2+y) + \beta (\cos \alpha - 3 \cos \theta_2) + \\ & + 2(1 - \beta^2)y) + 4\beta^2 (1 - \beta^2) \sin^2 \theta_2] \} + (1 - \beta^2) \{ 2r_-^2 [\sin^2 \theta_1 (2(1 - \beta^2) + \\ & + \eta'^2) + 2\beta u \xi] + r r'_- [-\sin^2 \theta_1 (4 + \eta \eta') - \cos \theta_1 y^2 \eta \eta' - 4\beta^2 u \cos \alpha] + \\ & + 2ry [\sin^2 \theta_1 \eta \eta_1'^2 + \beta u \eta (\eta' + 2\eta) + 2\beta (\beta \eta z - \eta'^2 x) + 2\beta^2 x (2\beta - \\ & - r'_+ \cos \alpha)] + y^2 \left[\frac{1}{4} \sin^2 \theta_1 \eta^2 \eta'^2 + \beta \eta' \eta (\beta z - 2\eta' x) + 2\beta^2 (1 - \right. \\ & \left. - \cos^2 \alpha)(\eta^2 - \beta^2 \sin \theta_2) \right] \}; \\ F_2^{(1)} = & (2(1 - \beta^2) \{ r_-^2 [2(\sin^2 \theta_1 + \cos \theta_1 z) \eta^2 + \sin^2 \theta_1 (1 + \cos^2 \alpha) \eta'^2 - \\ & - 2u \eta \eta' \cos \alpha] + r r'_- [-2(\sin^2 \theta_1 + u \cos \theta_2) \eta^2 + (-(1 + \cos^2 \theta_1) z + \\ & + 2x \cos \theta_2) \eta \eta'] + ry [2(2-y)(y+z) \eta^2 \eta' + (\sin^2 \theta_1 + (x-u) \cos \alpha) \eta'^2 \eta + \\ & + 2 \cos \alpha (-\sin^2 \theta_1 - z + x \cos \alpha) \beta \eta \eta' + 2(u + \cos \theta_2 (1 - \cos^2 \alpha)) \beta \eta^2 - \\ & - 2(1 + \cos^2 \alpha) \beta x \eta'^2] + y^2 \left[\frac{1}{2} (2-y)(y+x) \eta^2 \eta'^2 + 2u \beta \eta^2 \eta' + 2\beta^2 (1 - \right. \\ & \left. - \cos^2 \alpha)(\eta^2 - \sin^2 \theta_2) - (\sin^2 \theta_2 - x \cos \alpha) \beta^2 \eta \eta' + 2z \beta \eta \eta' \cos \alpha \right] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3^{(1)} = & r_- r'_- \left\{ 2r_- \left[\cos \theta_1 r'_- - \beta u (\eta^2 + \beta^2) + (r'_+ \sin^2 \theta_1 - \beta u \cos \theta_1) \eta \eta' + \right. \right. \\ & + \beta \eta (x - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) + \beta^2 \eta (2 + \sin^2 \theta_1) - \beta u (\eta^2 + \beta^2) \left. \right] + 2r'_- \left[(2 - \right. \\ & - y)(y + r'_+ - r_+) \eta \eta' - r_- \eta \eta' \cos \theta_1 - 2\eta (1 - \beta^2) \cos \theta_1 + (2-y)(r'_+ - \\ & - 2 \cos \theta_1 - \beta^2 y) \eta' + 2\beta^2 - r_+ (y + \beta^2 \cos \theta_1) \left. \right] + y [\eta \eta' (2-y) (2r_- \eta + \end{aligned}$$

$$+ \eta' (y r_+ - \beta u) + \beta^2 (2 + y) - \beta (3 \cos \theta_2 - \cos \alpha) + \frac{1}{2} y \eta \eta' \Big) + 4 \beta (1 - \beta^2 (x \eta + z \beta) \Big] \Big\} + (1 - \beta^2) \Big\{ 2 r_-^2 \eta (\sin^2 \theta_1 \eta' - 2 x \beta) + 2 r_- r'_- (-y \eta \eta' + + 2 (1 - \beta^2) \sin^2 \theta_1 + 2 \beta^2 u \cos \beta_2) + y \eta r_- [\eta' (\eta + \eta') \sin^2 \theta_1 + 4 \eta' \beta (u - x) - - 2 \beta \eta x + 4 \beta^2 \sin^2 \theta_2] + y^2 \eta \eta' \Big[\frac{1}{4} \sin^2 \theta_1 \eta \eta' + 2 \beta \eta u + \beta^2 (2 z + + \sin^2 \theta_2 - x \cos \alpha) \Big] \Big\};$$

$$\Phi = 4 r_-^2 r'^2 (\eta r_- - \eta' r'_- + \eta \eta' y)^2;$$

$$r_{\mp} = 1 \mp \beta \cos \theta_2, \quad r'_{\mp} = 1 \mp \beta \cos \alpha, \quad y = 1 - \cos \theta_1, \\ x = \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad u = \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \alpha, \quad z = \cos \theta_1 - \cos \theta_2 \cos \alpha, \\ q^2 = 2 K^2 (2 \eta r_- - \eta^2 r'_- + \eta \eta' y - 2 (1 - \beta^2)), \quad \eta' = \eta - 2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Наджафов И., Теняков Н., Мухтаров А. ЖЭТФ, 46, 769, 1964.
2. De Tollis B., Tona Lasinio G. R. S. 18, 145, 1960.
3. Нелипа Н. Ф. "ДАН СССР", 148, 68, 1963.
4. Соколов А. А. Введение в квантовую электродинамику. Гостехиздат, 1958.

Поступило 19. X. 1964.

А. Мухтаров, И. Нечафов, Н. Тенжакова

Электрон-позитрон чүтү эмэлэ кэлмэк шәртилэ гамма-квантларын нүвәнин сәһәсиндә сәпилмәси

ХҮЛАСӘ

Сон илләрдә јүксәк енејрили полјаризә олунмуш зәррәчикләр дәстәләринин алынмасы имжаны илә әләгәдар олараг гејри-эластики сәпилмә просесләринин һәм тәчрүби вә һәм дә нәзәри өјрәнилмәсинә мараг хејли артмышдыр. Бунунла әләгәдар олараг тәгдим едилән мәгаләдә $\gamma + (Ze) \rightarrow (Ze)' + \gamma' + e_- + e_+$ реаксиясы нәзәри олараг тәдгиг едилир.

Һадисәнин үмуми шәкилдә тәһлили мүмкүн олмадығындан, мәгаләдә тәчрүби әһәмијјәти олан ашағыдакы ики хүсуси һала бахылыр: 1) сәпилән фотон вә позитрон дүшән фотонун һәрәкәти истигамәтиндә, электрон исә θ бучағы алтында һәрәкәт едир; 2) сәпилән фотон дүшән фотонун һәрәкәти истигамәти илә θ_1 бучағы, электрон-позитрон чүтү исә θ_2 бучағы әмәлә кәтирир. Һәр ики һалда һадисәнин еффејтив кәсијинин вә әмәлә кәлән зәррәчикләрин полјаризә олунма дәрәчәсинин енејридән вә бучагдан асылылығы тәдгиг олунур. Көстәрилир ки, еффејтив кәсик $10^{-22} \div 10^{-42} \text{ см}^2/\text{стерад}^3$ интервалында гијмәт алыр вә о, мүасир тәчрүбәләрдә өлчүлә биләр; еффејтив кәсијин вә чүтүн полјаризә олунма дәрәчәсинин максимум гијмәти биринчи һалда бучағын $\theta = 0$, икинчи һалда исә $\theta_1 = \theta_2$ гијмәтләринә ујғундур, $\theta_1 \neq \theta_2$ фәргли бүтүн гијмәтләрдә чүт синглет һалда, јалныз $\theta_1 = \theta_2$ гијмәтиндә исә о триплет һалда олур. Еләчә дә еффејтив кәсијин енејридән асылылығы вә сәпилән фотонун полјаризә олунма дәрәчәсинин енејжи вә бучагдан асылылығы мүзакирә олунур.

Р. А. АКОПЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ИСКУССТВЕННОГО СТАРЕНИЯ СПЛАВА Al—Zn МЕТОДОМ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ РЕНТГЕНОВЫХ ЛУЧЕЙ

В работе [1], посвященной изучению процесса естественного старения сплава Al—Zn с 8,4 вес. % (3,65 ат. %) цинка, описана методика получения образцов данного сплава, их термическая обработка, а также примененная методика определения размеров зон Гинье—Престона по рентгенограммам малоуглового рассеяния. В той же работе приведены результаты измерения микротвердости сплава на ранних стадиях старения.

Данная статья посвящена изучению процесса искусственного старения сплава Al—Zn того же состава. Образцы после закалки при 250—450°С подвергались старению в интервале температур 80—150°С от пяти минут до двух часов.

На рис. 1 графически представлена зависимость радиуса зон (R) от времени старения (t) для сплава, закаленного при 250°С. Как видно, при постоянной температуре искусственного старения с течением времени (до 1,5 час выдержки) радиус зон возрастает, а затем наблюдается почти полная стабилизация их. Так, например, в течение 1,5-часовой выдержки при температуре старения 80°С радиус зон возрастает

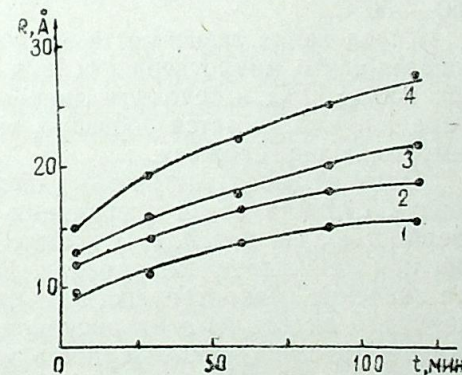


Рис. 1. Зависимость радиуса R зон от времени старения при различных температурах T для сплава, закаленного при 250°С:

1 — температура старения	80°С;
2 —	100°С;
3 —	125°С;
4 —	150°С.

от 9,5 до 15 Å, при дальнейшем увеличении времени выдержки до двух часов размеры зон почти не изменяются. Из этого же рисунка видно, что с повышением температуры старения радиус зон увеличивается. Аналогичные (рис. 1) зависимости размера зон от времени выдержки и температуры старения получены и на образцах сплавов, закаленных при 350 и 450°С. Различие лишь в том, что с увеличением температуры закалки процесс протекает быстрее. Более резко выражено возрастание размеров зон при повышении температуры старения (T) и

при постоянных выдержках. С повышением температуры закалок увеличивается скорость роста зон.

Характеристикой механических свойств сплавов, прошедших процесс старения при повышенных температурах, служит микротвердость. На рис. 2 показана зависимость микротвердости (H) от времени (t) искусственного старения для образца, подвергнутого закалке при 250°C .

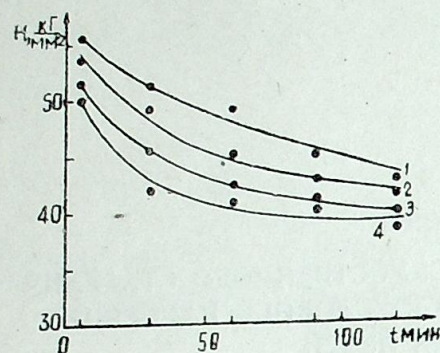


Рис. 2. Изменение микротвердости сплава, закаленного при 250°C , от времени старения (здесь и во всех последующих рисунках обозначения те же, что на рис. 1).

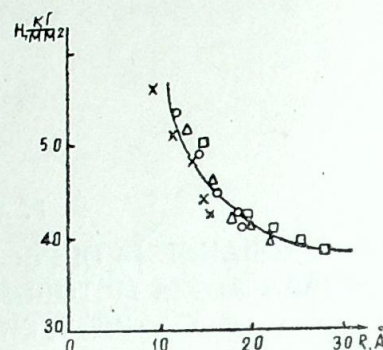


Рис. 3. Зависимость микротвердости H от радиуса R зон для сплава, закаленного при 250°C и подвергнутого старению.

Из приведенных данных видно, что микротвердость уменьшается при всех температурах старения. Как видно из этого же рисунка, микротвердость убывает с увеличением времени выдержки при постоянной температуре. Однако следует отметить, что приблизительно после часа старения изменения микротвердости незначительны. Аналогичная зависимость, что и на рис. 2, получена для сплава, закаленного при $350\text{--}450^\circ\text{C}$.

Исследование зависимости микротвердости от температуры старения показало, что микротвердость для образцов, подвергнутых закалке при $250\text{--}350^\circ\text{C}$, в основном линейно убывает с ростом температуры старения. Что касается образцов, закаленных при 450°C , то эта зависимость более сложная.

Одна из задач настоящей работы заключалась в том, чтобы установить, существует ли корреляция между размерами зон и микротвердостью. На рис. 3, 4, 5 достаточно ясно видна подобная корреляция при искусственном старении. На данных графиках представлены все значения микротвердости и соответствующие им радиусы зон. Нетрудно видеть из этих рисунков, что с увеличением размера зон Гинье—Престона микротвердость уменьшается. Из рис. 3 видно, что для образцов, закаленных при 250°C и подвергавшихся старению при повышенных температурах, в основном все значения микротвердости и, соответственно, размеры зон лежат на одной кривой, т. е. имеется отчетливая однозначная зависимость. Подобный характер зависимости наблюдается для сплава, закаленного при 350°C .

В последнем случае кривая расположена несколько выше, чем для закалки при 250°C . Что касается зависимости микротвердости от размера зон в процессе старения для образцов, закаленных при 450°C , то, как видно из рис. 5, она имеет менее определенный характер. Однако и в этом случае микротвердость в общем уменьшается с увеличением размера зон. Из приведенных рисунков (3, 4, 5)

видно, что зависимость микротвердости H от радиуса R зон для всех температур закалки отчетливо наблюдается при температурах старения $80\text{--}125^\circ\text{C}$. Для температуры старения 150°C микротвердость слабо зависит от радиуса зон; это относится в особенности к сплавам, закалявшимся при $350\text{--}450^\circ\text{C}$.

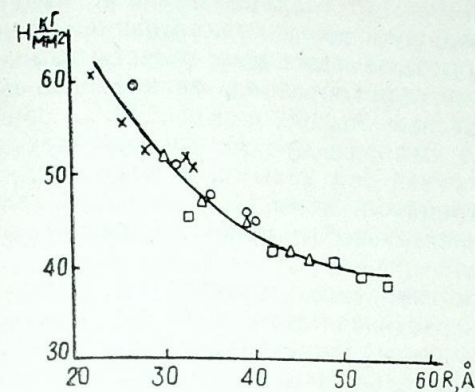


Рис. 4. Зависимость микротвердости H от радиуса R зон для сплава, закаленного при 350°C и подвергнутого старению.

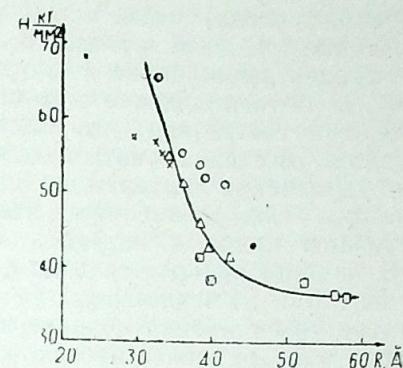


Рис. 5. Зависимость микротвердости H от радиуса R зон для сплава, закаленного при 450°C и подвергнутого старению.

Таким образом можно считать установленной корреляцию между микротвердостью и размерами зон для температур закалки $250\text{--}450^\circ\text{C}$. Следует отметить, что корреляция зависит от температуры закалки образца.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В процессе искусственного старения для сплавов Al—Zn , закаленных при $250\text{--}450^\circ\text{C}$ и подвергавшихся термической обработке в интервале $80\text{--}150^\circ\text{C}$, можно отметить, что рост зон наблюдается при всех температурах старения. Как было отмечено, размер зон зависит от температуры закалки. Чем выше температура закалки, тем больше радиус зон при любом времени выдержки. Скорость роста зон существенно зависит как от температуры закалки, так и от температуры старения. Наиболее быстрый рост зон наблюдается в начальных стадиях старения до $1\text{--}1,5$ час, дальнейшая выдержка при данной температуре почти не ведет к укрупнению зон и наблюдается тенденция к стабилизации. Нужно, однако, отметить, что эффект достаточно характерен только для сравнительно низких температур закалок ($250\text{--}350^\circ\text{C}$) и старения ($80, 100^\circ\text{C}$). При температурах закалки более 350°C и температурах старения 150°C рост зон происходит со значительной скоростью и после $1\text{--}1,5$ -часовой выдержки. Можно предположить, что рост зон при повышенных температурах старения ($125\text{--}150^\circ\text{C}$) происходит за счет диффузии атомов цинка, не связанной с избыточными вакансиями, которые при высоких температурах старения исчезают очень быстро. Известно [2,3], что если плотность вакансий в образце становится малой, то рост зон практически прекращается.

Как указывалось выше, в настоящей работе наблюдался рост зон в интервале $80\text{--}150^\circ\text{C}$. Так как термическая обработка проводилась ступенчато, то вполне можно представить следующее: в интервале

температур старения 100–150°C зоны полностью не растворяются, а представляют собой образования с концентрацией, почти не отличающейся от концентрации матриц. В процессе охлаждения образца при комнатной температуре концентрация цинка в этих зонах возрастает.

Используя найденную в работе [4] (для двухфазной модели старения сплава) связь между радиусом зон и концентрацией цинка в матрице ($m_{\text{матр.}}$) и в зонах ($m_{\text{зон.}}$), были проведены расчеты изменения концентрации цинка в матрице для образцов, закаленных при 350°C и подвергавшихся старению при 80, 100, 125 и 150°C, время выдержки составляло два часа. Зная радиус R зон, измеренный методом рассеяния рентгеновых лучей под малыми, и допуская, что при увеличении температуры старения от комнатной до 150°C величина $m_{\text{зон}} - m_{\text{матр.}}$ изменяется незначительно*, можно подсчитать концентрацию цинка в матрице.

В таблице приводятся данные по изменению концентрации цинка в матрице при вышеуказанных температурах старения. С увеличением температуры старения концентрация цинка в матрице возрастает. Очевидно, одновременно происходит уменьшение концентрации цинка в зонах. Следует отметить, что при температурах старения 125 и 150°C (в течение двух часов) интенсивности рассеяния рентгеновых лучей заметно отличаются.

Концентрация цинка в матрице для образцов сплава Al—Zn с 3,65 ат % цинка, закаленных при 350°C и подвергнутых искусственному старению

Температура старения ($T^{\circ}\text{C}$)	80	100	125	150
Время выдержки (t , час)	2	2	2	2
Атомная концентрация цинка в матрице ($m_{\text{матр.}}$, %)	2,51	2,8	3,1	3,2

Более слабое рассеяние наблюдается от образца, подвергавшегося старению при 150°C в течение двух часов. Последнее можно объяснить тем, что в этом случае имеется незначительное количество зон, но с большими радиусами.

Рассматривая корреляцию между размерами зон и микротвердостью (рис. 3, 4), легко увидеть, что кривые для температур закалок 250 и 350°C не совпадают. Последнее можно объяснить тем, что имеются различия в величине межзонных расстояний.

Из работ [2, 3, 5] известно о существовании гипотез относительно изменения размеров и числа зон при старении. Допуская уменьшение общего объема зон при повышенных температурах старения, можно объяснить уменьшение микротвердости в процессе старения. С уменьшением числа зон при повышенных температурах старения радиус зон возрастает, а концентрация цинка в зонах, как это следует из данных, приведенных в таблице, уменьшается. Электронномикроскопические исследования сплава Al—Zn с 8,4 вес. % цинка (трансмиссионным методом) показали, что в процессе повышения температуры старения и времени выдержки наблюдается рост зон Гинье—Престона и возрастание межзонного расстояния. Таким образом, полагая, что

* Фактически величина $m_{\text{зон}} - m_{\text{матр.}}$ при повышении температуры старения от комнатной до 150°C изменяется примерно на 10% согласно диаграмме состояния, приведенной в работе [3].

вместе с возрастанием зон увеличивается межзонное расстояние, нетрудно представить, что последний факт, как и уменьшение концентрации цинка в зонах, приводит к разупрочению, т. е. к уменьшению значений микротвердости.

В настоящее время предложено две модели старения сплавов Al—Zn на зонной стадии старения. Одна из них соответствует трехфазной системе, а другая двухфазной. Известно, что трехфазная система в (000) имеет интенсивность рассеяния, равную нулю, тогда как в данной работе на очень малых углах наблюдалась тенденция к росту интенсивности рассеяния. Рост интенсивности рассеяния на малых углах может происходить за счет вклада двойных вульф-брэгговских отражений. Однако, как было отмечено в работе [1], интенсивность двойных вульф-брэгговских отражений в исследуемом интервале углов незначительна. Автор [4] исходил из двухфазной модели сплава Al—Zn и получил для размеров зон значения, удовлетворительно совпадающие со значениями, найденными другими методами. Следовательно, рост интенсивности рассеяния на малых углах, а также результаты работы [4] еще раз подчеркивают справедливость двухфазной модели.

Наряду с отмеченным в работе [1] определением энергии образования зон по данным измерениям микротвердости сплава при естественном старении в настоящей работе была сделана попытка оценить величину энергии образования зон по данным рентгенографических исследований. В данном случае энергия образования зон определялась по изменению их размеров с течением времени при различных температурах старения: при каждой температуре закалки определялось время, необходимое для того, чтобы размеры зон достигли определенного значения. Например, для температуры закалки 350°C было взято значение радиуса зон, равное 30 Å. Строился график (рис. 6), изображающий зависимость логарифма времени, необходимого для роста зон до данных размеров, от $\frac{1}{T^{\circ}\text{C}}$, где $T^{\circ}\text{C}$ — температура старения.

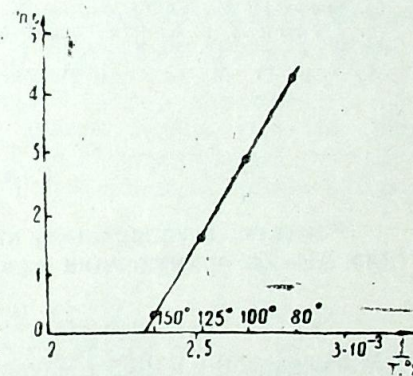


Рис. 6. К расчету энергии образования зон по результатам измерений радиуса зон.

Энергия образования зон определялась по тангенсу угла наклона, получающейся при этом прямой. Полученные таким образом значения энергии для всех температур закалок имели величину 16–19 $\frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$. Эти значения близки к полученным в работе [6] для так называемой переходной области диаграммы состояний системы Al—Zn $\left(19 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}\right)$.

Полученные нами значения энергии образования зон соответствуют процессу превращения малых скоплений цинка, возникающих на самых ранних стадиях старения и росту зон вследствие диффузии атомов цинка.

Выводы

1. Установлено наличие зон в сплаве, подвергнутом закалке при 250–450°C и старению в интервале температур от 80 до 150°C, при времени старения от пяти минут до двух часов.

2. Установлено, что размеры зон Гинье—Престона в сплаве Al—Zn с 3,65 ат % цинка увеличиваются с ростом температуры закалки, а также при повышении температуры старения.

3. Исходя из представлений о двухфазном старении сплавов, подвергнутых искусственному старению, показано, что концентрации цинка в зонах и матрице таких сплавов несколько отличаются от значений, соответствующих естественно состаренным сплавам.

4. Рост зон при искусственном старении обусловлен обычной диффузией атомов цинка в кристаллической решетке матрицы; это в частности, подтверждается увеличением скорости роста зон при повышении температуры старения.

5. Показано, что в процессе искусственного старения при указанных в работе режимах термической обработки в качестве одной из возможных причин разупрочнения может явиться возрастание межзонного расстояния, а также уменьшение концентрации цинка в зонах.

6. Установлена корреляция между микротвердостью и размерами зон при искусственном старении: с увеличением размеров зон до некоторых предельных значений микротвердость уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян Р. А., Тузов Л. В. Физика металлов и металлообразование (в печати).
2. Gerold V. Physica Status Solidi, 1, 37 (1961).
3. Gerold V., Schweizer W. Zeitschrift für Metallkunde, 52, 76 (1961).
4. Тузов Л. В. Кристаллография, 10, 52, (1965).
5. Panzeri C., Federighi T. Acta Metallurgica, 8, 217 (1960).
6. Dahl O., Maackes H. Metallwissenschaft und Technik, 10, 719 (1959).

Поступило 19. X 1964

Р. А. Акопян

**Рентген шұаларынын кичик бучаглы сәпилмәси үсулу
илә Al—Zn әринтисинин сүн'и көһнәлмә просесинин тәдгиги**

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә 80÷150°C температур интервалында 5 дәгигәдән 2 саата гәдәр сүн'и көһнәлмәжә 'мә'руз галмыш Al—Zn әринтисиндә (синкин 8,4 чәки %-ләриндә вә ја 3,65 ат %-ләриндә) Кинье-Престон зоналары өлчүләриниң тәчрүби мүүжән едилмиш гижмәтләри верилмишдир. Температурун артмасы илә зоналарын өлчүләри бөжүјүр.

Әринтинин микробәрклији дә өлчүлмүшдүр. Зона өлчүләринин рентгенографик јолла таялымш гижмәтләринә әсасән онларын әмәләкәлмә енержиси мүүжәнләшдирилмишдир. Мә'лум олмушдур ки, сүн'и көһнәлмә просесиндә зоналарын бөјүмәси синк атомларынын диффузијасы нәтичәсиндә јараныр. Әринтинин микробәрклији илә зоналарын өлчүләри арасында коррелјасија олдуғу мүүжән едилмишдир.

В. С. КОГАН, Т. Г. ОМАРОВ

ВАКУУМНАЯ И НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ РЕНТГЕНОВСКАЯ КАМЕРА

Камера разработана со специальной целью рентгеноструктурных съемок легкоокисляющихся образцов с низкой температурой плавления. Такие съемки, как правило, приходится проводить в вакууме или в атмосфере инертного газа. Кроме того, желательно снижать температуру образца для уменьшения теплового фона.

Известен ряд типов вакуумных камер и камер для съемок при низких температурах [1]. Описываемая камера отличается тем, что она объединяет в одном приборе обе возможности—съемку в вакууме и съемку в парах азота при 78°K. В таких камерах обычно перезарядка и смена образца сопряжены с известными трудностями. Поэтому в данной конструкции предусмотрена возможность одновременной установки двух образцов с последовательным их перемещением под пучок. Съемка каждого образца производится на отдельный кадр пленки (без перезарядки).

Общий вид камеры для съемки в вакууме при комнатной температуре изображен на рис. 1. Камера состоит из корпуса (2) с бериллиевым окошком (13), уплотненным на резиновых шайбах. Таким же образом уплотнено стеклянное окошко (1) со светочувствительным экраном. Корпус камеры уплотнен к ее дну (14) с помощью резинового кольца (20). Держатель кольца (20). Откачка камеры держателя и стержня с цангой (9), уплотненного образца состоит из корпуса держателя и стержня с цангой (9), уплотненного резиновыми и металлическими шайбами (8) в корпусе, при-

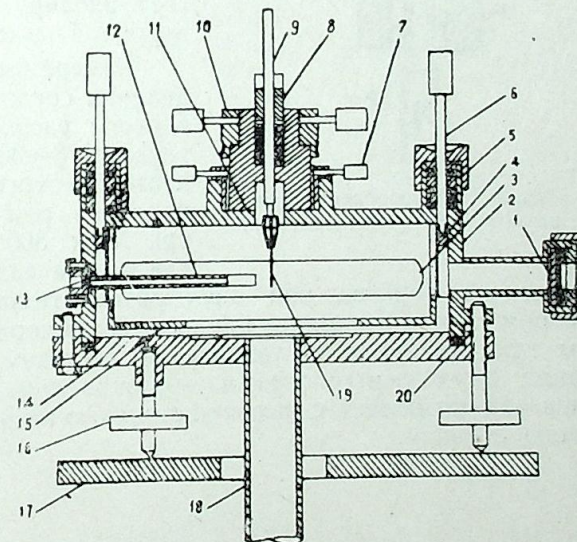


Рис. 1. Рентгеновская камера.

лифованном к крышке камеры. Держатель может перемещаться для центрировки образца при помощи винтов (7) и вращаться на шлифе (11). Цилиндрическая кассета (4), на внутренней стенке которой лежит пленка, перемещается без нарушения вакуума при помощи толкателей (6), уплотненных так же, как и стержень с цангой (9). Диаметр кассеты 114,6 мм.

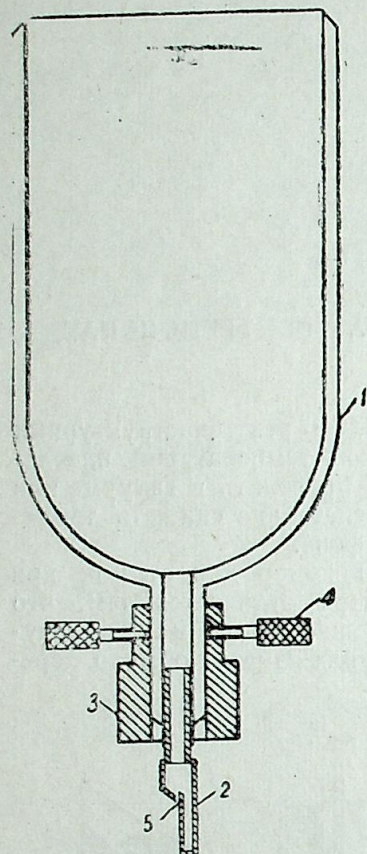


Рис. 2. Приспособление для низкотемпературных съемок.

Для низкотемпературных съемок (при температуре жидкого азота) держатель образца заменяется миниатюрным дьюаром (1) на 0,5 л (рис. 2), заканчивающимся трубкой (2) с щелью (5). Через эту щель образец (в данном случае плоский шлиф) охлаждается тонкой струей жидкого азота. Вертикальное положение дьюара можно зафиксировать винтами (4).

При съемке цилиндрического образца трубка (2) заменяется соответствующим приспособлением (оно состоит из трубки с круглым отверстием в дне, через которое проходит образец, охлаждаемый струей жидкого азота). Как при вакуумной съемке, образец можно привести во вращение.

В случае низкотемпературной съемки трубка (18) для откачки камеры на вакуум отсоединяется от насоса и служит для удаления из камеры азота, стекающего с образца. Чтобы избежать сильного охлаждения корпуса камеры, ее дно и труба (18) изолируются изнутри специальной воронкой из пенопласта.

Камера была использована для определения среднего коэффициента термического расширения ряда веществ в интервале 78—300°K, а также для изучения изотопического эффекта в величине параметров решетки ионных кристаллов при 78 и 300°K [2, 3]. В первом случае на два кадра пленки снимался один

и тот же образец при двух разных температурах (78 и 300°K). Во втором случае снимались при данной температуре (78 или 300°K) образцы отличающиеся изотопическим составом. Съемка на одну пленку таких двух рентгенограмм образцов с малым отличием параметров решетки позволяет с высокой степенью точности определить величину этого отличия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уманский М. М. Аппаратура рентгеноструктурных исследований. Физматгиз, 1960.
2. Коган В. С., Омаров Т. Г. ЖЭТФ, 47, 789 (1964).
3. Коган В. С., Омаров Т. Г. ФТТ, 7, 933 (1965).

В. С. Коган, Т. Г. Омаров

Вакуум в алчаг температур ренткен камерасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә нүмунәләрин отаг температурунда (вакуумда) вә ја 78°K температурда (азот бухарында) икикадрлы кассета үзәриндә (кассетаны јенидән долдурмадан) ренткенограмларыны алмаг имканы верән вакуум вә алчаг температур ренткен камерасы тәсвир олунур.

Поступило 12. I 1965

Н. З. ДЖАЛИЛОВ, Г. М. АЛИЕВ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОНОКРИСТАЛЛОВ СЕЛЕНА

Изучению электрических свойств поликристаллического селена посвящено много работ. Существует ряд работ и по монокристаллам [1—6]. Однако механизм проводимости в селене полностью не раскрыт. Изучение электрических свойств монокристалла в дальнейшем может дать более ясное представление о механизме проводимости в селене.

Несмотря на то, что монокристаллы селена из пара были получены давно, условия выращивания их как из расплава, так и из пара до настоящего времени полностью не изучены. При выращивании из пара имеет значение температура, при которой осаждается кристалл, а при выращивании из расплава—скорость изменения температурного градиента [7]. На рост кристалла влияют также давление насыщенного пара самого селена и освещение [8, 9]. Эти факты объясняются сложностью структуры селена и недостаточной изученностью его.

Монокристаллы из парообразной фазы были получены под небольшим давлением аргона, гелия и в вакууме [10]. Кристаллы эти в основном были игольчатые и лентообразные. Монокристаллы из парообразной фазы были получены также в атмосфере кислорода. В атмосфере кислорода кристаллы росли быстрее (четверо суток) и в больших размерах ($15 \times 2 \times 2$ мм³), чем в атмосфере гелия, аргона и в вакууме.

При получении монокристалла из расплава вся масса превращается в блок хрупких монокристаллов, расположенных параллельно друг другу, имеющих призматическую форму и легко расщепляющихся по плоскостям призм. Поверхность монокристаллов из расплава не сдвояна (что наблюдается у монокристаллов из пара) как в атмосфере гелия, аргона (рис. 1, а), так и в атмосфере кислорода (рис. 1 в).

Микроструктурные исследования кристаллов после травления показывают, что кристаллические зерна имеют призматическую форму (рис. 1 с). Образцы травил в концентрированной азотной кислоте при 150° С в течение 15—20 мин.

Плотность монокристалла из расплава, определенная пикнометрически, равна 4,65 г/см³, что больше плотности поликристаллического селена (4,56 г/см³).

Измерения проводимости производились компенсационным методом на кристаллах из пара и из расплава в интервале температур от

—170° до 215° С, в вакууме (10^{-3} мм рт. ст.) и темноте. Электродами служили концы с нанесенным в вакууме никелем. Температура измерялась медь-константановой термопарой.

Освещение сильно действует на значение электропроводности монокристаллов селена, поэтому при помещении образца в темноту с течением времени она уменьшается. Исходя из этого, все измерения проводились после того, как образец выдерживали несколько дней в закрытом латунном стакане для получения равновесного состояния. Полученные кривые при соблюдении условия измерений воспроизводимы.

При комнатной температуре темновая σ для кристаллов из пара

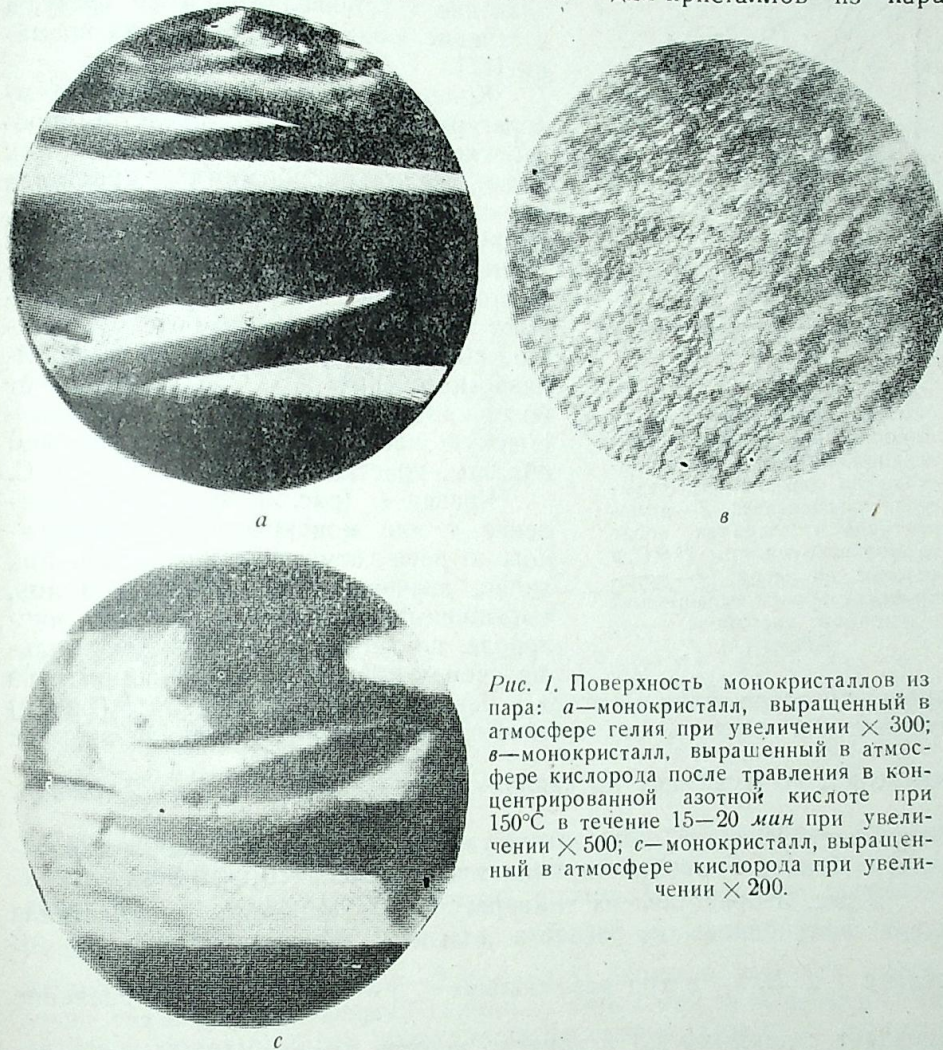


Рис. 1. Поверхность монокристаллов из пара: а—монокристалл, выращенный в атмосфере гелия при увеличении $\times 300$; в—монокристалл, выращенный в атмосфере кислорода после травления в концентрированной азотной кислоте при 150°С в течение 15—20 мин при увеличении $\times 500$; с—монокристалл, выращенный в атмосфере кислорода при увеличении $\times 200$.

и из расплава равна $2,3 \cdot 10^{-6}$ и $1,1 \cdot 10^{-7}$ ом⁻¹ см⁻¹, соответственно. В работе [4] указывается, что σ кристаллов селена из пара для различных образцов варьирует между 10^{-5} и $0,5 \cdot 10^{-6}$ ом⁻¹ см⁻¹. Из этих данных видно, что значения σ зависят от чистоты исходного селена и условий выращивания кристалла. Однако в работе [3] указывается на независимость σ монокристалла селена от условия выращивания и дается величина $3 \cdot 10^{-5}$ ом⁻¹ см⁻¹.

Температурная зависимость σ для кристаллов из пара (кривая 1) и расплава (кривая 2) показана на рис. 2. Как видно, общий ход σ для обоих кристаллов одинаков.

Стрелка на кривых рис. 2 указывает направление изменений температуры. Как видно, во всем температурном интервале измерений получается гистерезисная петля, которая получается также при измерении σ поликристаллического [11, 12] и жидкого селена [13]. Причиной гистерезиса σ является то обстоятельство, что после перехода от одной температуры к другой значение σ устанавливается не сразу, а в течение какого-то промежутка времени [17].

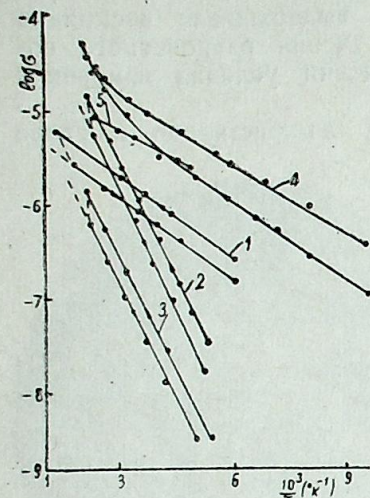


Рис. 2. Температурная зависимость электропроводности монокристаллов селена параллельно оси C : 1—монокристалл из пара; 2—монокристалл из расплава; 3—монокристалл из расплава после термообработки при 215°С в течение 50 часов; 4—монокристалл из пара выращенный в атмосфере кислорода; 5—из работы (4).

Кривая 3 на рис. 2 показывает температурную зависимость σ после термообработки при 215°С в течение 50 час. Как видно, после термообработки σ кристалла уменьшается, но общий ход сохраняется. По-видимому, это связано с тем, что при термообработке уменьшается число дефектов, которые непосредственно участвуют в проводимости. В работе [15] также наблюдалось, что образцы, кристаллизованные при 110°С, обнаруживают более высокую проводимость и более высокую плотность носителей тока, чем образцы, кристаллизованные при 175°С.

Кривая 4 (рис. 2) показывает изменение σ для монокристалла, выращенного из пара в атмосфере кислорода. Как видно, значение σ для монокристаллов, выращенных из пара в атмосфере кислорода, почти на один порядок больше, чем у кристаллов, выращенных из

пара в атмосфере гелия и аргона, а также в вакууме. Кривая 5 (рис. 2) относится к одному из измерений в работе [4]. Значение энергии активации, вычисленное по наклону $\lg \sigma \sim \frac{1}{T}$ для кривых 1 и 2 (рис. 2),

составляет 0,06 и 0,17 эв, соответственно. В работе [2] энергия активации в электропроводности меняется в пределах 0,1—0,3 эв.

На рис. 3 представлена температурная зависимость σ кристалла селена, полученного из расплава вдоль и перпендикулярно оси C (кривая 1 и 2). σ_{11} в три раза больше $\sigma_{\perp}$ ($\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{\perp}} = 3$) и это значение совпадает с данными [2] и намного меньше данных [16, 17], где это отношение меняется в пределах 10—100. Полученные разными авторами различные отношения $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{\perp}}$ связаны, по-видимому, с условиями роста кристалла. Оптические свойства кристалла из пара также зависят от условия выращивания [18].

Для выяснения расхождения значений анизотропии σ в различных кристаллах была измерена микротвердость. Интересно отметить, что

перпендикулярно оси C микротвердость у кристаллов, выращенных из пара и из расплава, одинакова и равна 75,5 кг/мм², а вдоль оси C она отличается для кристаллов из пара и из расплава и соответственно равна 56 и 64,3 кг/мм². Из этих данных видно, что коэффициент анизотропии микротвердости для кристаллов из расплава и из пара равен $\kappa_1 = 1,16$ и $\kappa_2 = 1,31$, т. е. значение коэффициента анизотропии микротвердости больше для кристаллов из пара. Этим, видимо, и объясняется анизотропия σ . Кроме того, видно, что микротвердость в перпендикулярном направлении больше, чем вдоль оси C . Для аналога селена—теллура наблюдается такая же картина [19].

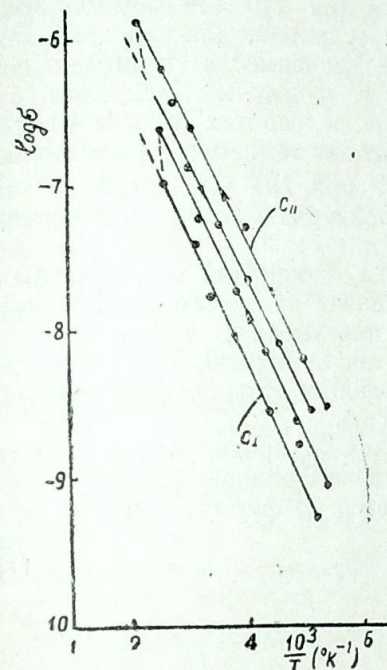


Рис. 3. Температурная зависимость электропроводности монокристалла селена из расплава параллельно и перпендикулярно оси C после термообработки.

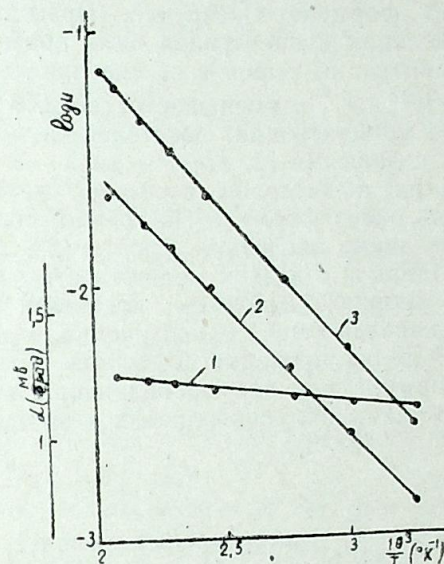


Рис. 4. Температурная зависимость термоэдс (1) и подвижности (2, 3) монокристалла из расплава: 2—подвижность вычислена на основе зонной теории; 3—подвижность вычислена на основе теории малых подвижностей

Известно, что имеется связь между микротвердостью и силами химической связи [20]. Кристаллическая решетка селена состоит из параллельных спиральных цепочек атомов. Кратчайшее расстояние между двумя атомами соседних цепочек равно 3,48 Å, а между двумя атомами вдоль цепей—2,36 Å [21]. Атомы в каждой цепочке тесно связаны ковалентными силами, а атомы между цепочками—значительно более слабыми молекулярными силами. Поэтому периодичность межатомного потенциала в направлении, перпендикулярном оси C , менее совершенна, чем вдоль этой оси. Отсюда вытекает анизотропия подвижности, твердости и электропроводности. В первом случае, т. е. в перпендикулярном направлении оси C , происходит разрушение сильных внутрицепочечных связей ковалентного типа, а во втором, т. е. вдоль оси C ,—сравнительно слабых межцепочечных связей вандерваальсовского характера. Поэтому микротвердость в перпендикулярном направлении оси C больше, чем вдоль оси. Исходя из разницы значений микротвердости вдоль оси C , для

кристаллов из пара и из расплава, естественно, можно предполагать, что силы связи между атомами в разных цепочках зависят от условия выращивания, а это, в свою очередь, сказывается на значении σ и оптических свойствах монокристаллов из пара. Из равенства микро-твердости в направлении, перпендикулярном оси C , вытекает, что значение сил связи между атомами внутри цепочек не зависит от условия выращивания кристалла.

На рис. 4 (кривая 1) показана температурная зависимость термоэдс кристалла селена, полученного из расплава. Как видно, термоэдс с повышением температуры очень мало растет и при комнатной температуре значение ее равно 1100 мкВ/град , а при 210°C — 1250 мкВ/град .

Концентрация (n) носителей тока, т. е. дырок, для каждой температуры вычислялась по температурной зависимости термоэдс согласно формуле Писаренко. Пригодность формулы Писаренко для вычисления концентрации была проверена в работах [15, 4, 12, 22]. Концентрация дырок в селене при комнатной температуре составляет $9,33 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и уменьшается до $2,08 \cdot 10^{14}$ при 210°C . Численное значение концентраций носителей и температурная зависимость совпадают с данными [2, 4].

При вычислении носителей тока из измерений термоэдс была использована формула Писаренко, полученная на основе зонной теории. Однако последние работы [23, 24] показывают, что для полупроводников с низкой подвижностью нельзя применять обычную зонную теорию. Движение носителей тока при этом осуществляется перескакиванием из одной ячейки в другую.

В целях проверки указанных вычислений проводились расчеты по формуле для полупроводников с низкой подвижностью.

В таких полупроводниках α вычисляется по формуле [25]:

$$\alpha = \frac{\kappa}{e} (\mu^* + \epsilon^* + \delta\epsilon^*), \quad (1)$$

где $\mu^* = \frac{\mu}{\kappa T}$ — приведенный химический потенциал,

ϵ^* — кинетический член,

$\delta\epsilon^*$ — энергия связи малого полярона.

Вычислив μ^* из (1) по формуле

$$n = \frac{N_0}{1 + e^{\mu^*}}, \quad (2)$$

можно найти концентрацию носителей тока [26, 27]; здесь N_0 — плотность состояния.

Подставляя значение n в $\sigma = n U_d e$, (3) вычисляется дрейфовая подвижность носителей тока (U_d).

Из формулы (1) видно, что произведение $e\alpha T$ представляет уровень Ферми, если в проводимости участвует один тип носителей тока и пренебрегается их кинетическая энергия. Принимая $\mu = e\alpha T$, при помощи формул (2) и (3) вычислены концентрация и подвижность носителей тока, учитывая, что движение носителей тока в селене обусловлено перескакиванием из одной цепочки в другую; N_0 принималось равной числу концов цепочек в 1 см^3 кристаллического селена ($N_0 \sim 1,2 \cdot 10^{20}$).

Концентрация дырок, вычисленная по формуле (2), при комнатной температуре дает $2,8 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, при 210° — $2,08 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, и отличается приблизительно втрое от вычисленного на основе зонной теории.

На рис. 4 показана температурная зависимость подвижности, вычисленной на основе зонной теории (кривая 2) и теории малых под-

вижностей (кривая 3). Подвижность как в первом, так и во втором случае изменяется по экспоненциальному закону. Рост σ с повышением температуры обусловлен превалированием роста подвижности над уменьшением концентраций носителей тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Müller T. Sitzungsbericht phys. med. soz. Erlangen, 70, 7, 1938.
2. Henkels H. W. I. appl. phys. 22, 916, 1951.
3. Козырев П. Т. ФТТ, 1, 104, 1959.
4. Plessner K. W. Proc. phys. Soc., 1364, 671, 1951.
5. Polke M. Stuke I. und Vinaricky r. Phys. stat. sol. 3, 1885, 1963.
6. Stuke I. Phys. stat. sol., 2, 441, 1964.
7. Козырев П. Т. ЖТФ, 27, 500, 1958.
8. Furuta H. I. Sci. Univ. Hiroshima Ser. A, vol. 24, 2 october 1960.
9. Furuta H. I. Sci. Univ. Hiroshima Ser. A—11, 21, 2, 271—280, 1961.
10. Алиев Г. М., Ларионкина Л., Джалилов Н. З. Изд. АН Азерб. ССР, 1964, № 4.
11. Козырев П. Т. ЖТФ, 255, 1956.
12. Henkels H. W. I. appl. phys., 22, 1265, 1951.
13. Баркинхоев Х. Г., Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, 1963, № 3.
14. Козырев П. Т. ЖТФ, 27, 1, 35, 1957.
15. Plessner K. W. Proc. phys. Soc., B. 64, 681, 1951.
16. De Boer F. Philips Rec., 2, 352, 1947.
17. Lehovec L. Unveröffentlicht. Kurze Mitteilung in Naturforschung und Medizin. B. 9, 2, 80, 1948.
18. Eckart F., Henrion W. Monatsber. Deutsch Akademie der Wissenschaften zu Berlin. B. 4, 7, 1962.
19. Ланге Г. И., Гоцу Д. В., Ланге В. Н. Изв. АН СССР, серия физ., № 6, 1080—1084, 1964.
20. Поваренных А. С. ДАН СССР, 112, № 6, 1957.
21. Billig E. Proc. phys. Soc., 65, 3, 216.
22. Козырев П. Т. ЖТФ, 26, 266, 1956.
23. Иоффе А. Ф. ФТТ, 1, 1, 157, 1959.
24. Клиггер М. И. ФТТ, 4, 3075, 1962; Изв. АН СССР, серия физ., 25, 1342, 1961.
25. Клиггер М. И. Докт. дисс. ИП АН СССР, 1964.
26. Ionker G. H., Van Houten S. Halbleiterprobleme, 6, 118, Braunschweig 1961.
27. Самохвалов А., А. Рустамов А. Г. ФТТ, 6, 969, 1964.

Поступило 10. III 1965

Н. З. Чалилов, Г. М. Алиев

Монокристал селенин-електрик хассэси

ХҮЛАСЭ

Селенин-електрик хассэсине даир чохлу тэдгигат ишлэри хэср олунмасына бахмајараг електриккечирмэ механизми хэлэ там ајдын едилмэмишдир. Буна сәбәб әсас е’тибарилә бу вахта гәдәр селенин мүкәммәл монокристалынын алынмамасыдыр.

Бу ишдә мүхтәлиф шәраитләрдә кәјәрдилмиш монокристал селенин кениш температур интервалында електриккечирмәси вә термоелектрик хәрәкәт гүввәси өлчүлмүшдүр. Тәчрүбә кәстәрир ки, оксикен атмосфериндә кәјәрдилән монокристал Se хелиум вә аргон атмосфериндә кәјәрдилән монокристалла нисбәтән хәм бөјүмә сүр’әти, хәм дә өлчүләри е’тибарилә чох бөјүк олуб, електриккечирмәси дә бир тәртиб артыг олур.

Електриккечирмә — $170 \div 210^\circ \text{C}$ интервалында експоненсиал ганунла артыр вә бу артма анчаг чәрәјан дашыјычыларын јүрүклүјү һесабына олур. Селендә електриккечирмәнин кристалын мүхтәлиф истигамәтләриндә фәргли олмасынын сәбәби изаһ едилмиш вә бу фәргин кристалын јетишдирмә шәраитиндән асылы олараг дәјишмәси мүәјјән олмушдүр. Кичик јүрүклүк нәзәријјәси илк дәфә олараг селенә тәтбиг едилмишдир.

А. А. АБДУЛЛАЕВ, В. Ю. БАРАНОВСКИЙ

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ПРИБОРОВ

Известные методы определения тепловых параметров полупроводникового прибора по его кривой остывания основываются на замене нестационарных тепловых процессов электрическими, происходящими в аналоговой (термоэквивалентной) цепи, представляемой в виде цепной схемы с параллельными RC -звеньями [1] (рис. 1).

При этом считают, что определяемые по кривой остывания:

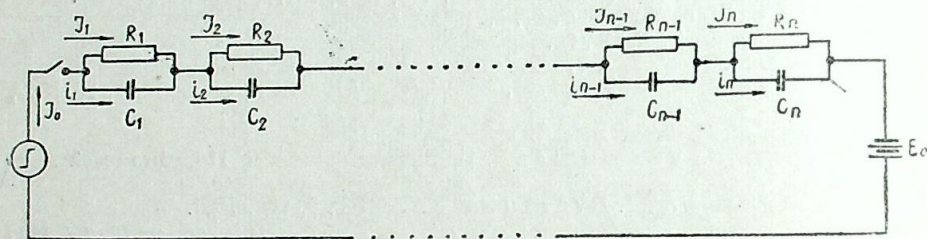


Рис. 1. Электрическая термоэквивалентная схема с параллельными RC -звеньями.

$$\theta'(t) - \theta'_0 = \sum_{i=1}^n \theta'_i e^{P_i t}$$

коэффициенты θ_i и P_i соответствуют реальным тепловым сопротивлениям R_i и теплоемкостям C_i конструктивных элементов полупроводникового прибора (элементам RC -звеньев), то есть

$$\theta'_i = R_i, \quad (2)$$

$$P'_i = \frac{1}{R_i C_i}, \quad (3)$$

$$C_i = \frac{1}{P'_i R_i}, \quad (4)$$

где θ'_i — температура p - n -перехода;

R_i — тепловые сопротивления конструктивных элементов полупроводникового прибора;

C_i — теплоемкости конструктивных элементов полупроводникового прибора;

θ'_0 — температура окружающей среды.

Однако представление термоэквивалентной схемы в виде рис. 1 не соответствует физическим процессам, а величины тепловых параметров R_i и C_i полупроводникового прибора, определяемых по вышеуказанному методу, отличаются от параметров их конструктивных элементов [2].

На рис. 2 представлена термоэквивалентная схема, состоящая из Γ -образных RC -звеньев, которые, как было показано [2], наиболее полно отражают процессы теплопередачи в полупроводниковых приборах.

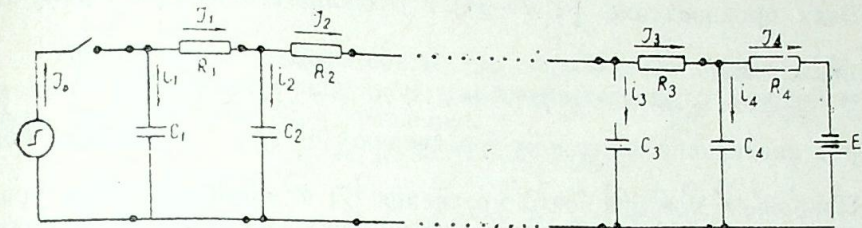


Рис. 2. Электрическая термоэквивалентная схема с Γ -образными RC -звеньями.

Из анализа решения данной цепи (см: приложение) следует:

1) коэффициенты θ_i и показатели экспонентов P_i являются сложными функциями реальных параметров конструктивных элементов полупроводникового прибора (тепловых сопротивлений R_i и теплоемкостей C_i), т.е. в общем случае

$$\theta_i \neq R_i \text{ и } P_i \neq \frac{1}{R_i C_i};$$

2) уравнение (1) является по существу решением дифференциальных уравнений, описывающих процессы теплопередачи в физической тепловой модели полупроводникового прибора или эквивалентных им электрических процессов в аналоговой электрической схеме замещения в виде цепной схемы рис. 2.

Ниже приводится метод определения величин реальных параметров конструктивных элементов полупроводникового прибора по его кривой остывания. Сущность метода заключается в следующем. Предположим, что задана экспериментальная кривая остывания p - n -перехода (1). Заменив в выражении (1) тепловые величины электрическими, в соответствии с [3] получим уравнение:

$$U(t) - E_0 = \sum_{i=1}^n \theta_i e^{P_i t}, \quad (5)$$

аналогичное по виду (1).

В уравнении (5) θ_i аналог θ'_i и $P_i - P'_i$. Очевидно, что если известны θ_i и P'_i , то известны θ'_i и P_i . Однако θ'_i и P'_i , как было сказано, являются сложными функциями реальных параметров составных элементов конструкции прибора, каждый из которых характеризуется двумя значениями тепловых величин: тепловым сопротивлением R_i и теплоемкостью C_i . Поэтому для определения реальных значений R_i и C_i по известным величинам θ_i и P_i , определяемых из кривой остывания прибора, содержащего в общем случае n элементов, необходимо составить систему $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными.

Таким образом, задача нахождения реальных значений термических параметров конструктивных элементов сводится к составлению и решению $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными.

Первые n уравнений составляются исходя из того, что определяемые по кривой остывания показатели экспонентов являются корнями характеристического уравнения (приложение)

$$K_0 P^n + K_1 P^{n-1} + \dots + K_{n-1} P + 1 = 0, \quad (6)$$

где

$$K_i = F(R_i, C_i).$$

Взяв произведение $\prod_{i=1}^n (P - P_i)$ и разделив его на $\prod_{i=1}^n P_i$, получим

уравнение вида

$$\alpha_0 P^n + \alpha_1 P^{n-1} + \alpha_2 P^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} P + 1 = 0, \quad (7)$$

которое аналогично исходному уравнению (6) для нахождения корней.

Приравняв коэффициенты уравнения (7) к коэффициентам уравнения (6), которые, как было показано ранее, являются функциями R и C отдельных звеньев, получим первые n уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= K_0(R_i, C_i) \\ \alpha_1 &= K_1(R_i, C_i) \\ &\dots \\ \alpha_{n-1} &= K_{n-1}(R_i, C_i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Вторые n уравнений могут быть получены из выражения (1,9), если коэффициенты при одинаковых экспоненциальных членах приравнять к соответствующим коэффициентам θ_i кривой остывания данного прибора, взятым с обратным знаком*, т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_1(A_1 e^{P_1 t}) &= -\theta_1 \\ f_2(A_2 e^{P_2 t}) &= -\theta_2 \\ &\dots \\ f_n(A_n e^{P_n t}) &= -\theta_n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Совместное решение уравнений позволяет определить истинные величины тепловых сопротивлений и теплоемкостей конструктивных элементов полупроводникового прибора. Для проверки правильности полученных результатов можно воспользоваться условием, по которому

$$\sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (10)$$

Ниже приводится пример практического расчета тепловых характеристик полупроводникового прибора по его заданной кривой остывания.

В качестве испытуемого прибора был выбран германиевый плоскостной транзистор *IBM* тип 13. Значения коэффициентов K_i и P_i , определяемые по данной кривой остывания, приведены в таблице.

Уравнение кривой остывания для данного случая, как это следует из [1], можно представить в виде:

* Коэффициенты приняты отрицательными исходя из того, что выражение $f(A_i e^{P_i t})$ взято из формулы кривой нагрева, а θ_i — из формулы кривой остывания

$$\theta(t) - \theta_{\text{окр.}} = 0,0473 e^{-85,3t} + 0,0193 e^{-3,32t} + 0,0734 e^{-0,826t} + 0,0189 e^{-0,165t}, \quad (11)$$

т. е. кривая остывания данного прибора характеризуется четырьмя экспоненциальными членами.

Составляем характеристическое уравнение:

$$\frac{\prod_{i=1}^n (P - P_i)}{\prod_{i=1}^n P_i} = 0,0259 P^4 + 2,31 P^3 + 9,61 P^2 + 7,561 P + 1 = 0. \quad (12)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях P_i полученного уравнения и исходного характеристического уравнения (15), получим первые четыре уравнения:

$$R_1 R_2 R_3 R_4 C_1 C_2 C_3 C_4 = 0,0259; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &R_1 R_2 R_3 C_1 C_2 C_3 + R_1 R_2 R_4 C_1 C_2 C_4 + R_1 R_3 R_4 C_1 C_3 C_4 + \\ &+ R_2 R_3 R_4 C_2 C_3 C_4 + R_1 R_3 R_4 C_1 C_2 C_4 + R_1 R_2 R_4 C_1 C_2 C_3 + \\ &+ R_2 R_3 R_4 C_1 C_3 C_4 = 2,31; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &R_1 R_2 C_1 C_2 + R_1 R_3 C_1 C_3 + R_1 R_4 C_1 C_4 + R_2 R_3 C_2 C_3 + R_2 R_4 C_2 C_4 + \\ &+ R_3 R_4 C_3 C_4 + R_1 R_3 C_1 C_2 + R_1 R_4 C_1 C_2 + R_1 R_4 C_1 C_3 + \\ &+ R_2 R_4 C_2 C_3 + R_2 R_3 C_1 C_3 + R_2 R_4 C_1 C_4 + R_3 R_4 C_1 C_4 + \\ &+ R_3 R_4 C_2 C_4 + R_2 R_4 C_1 C_3 = 9,61; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_3 C_3 + R_4 C_4 + R_2 C_1 + R_3 C_1 + R_4 C_1 + \\ &+ R_3 C_2 + R_4 C_2 + R_4 C_3 = 7,56. \end{aligned} \quad (16)$$

Для составления вторых n уравнений находим коэффициенты выражения (18), которые для нашего случая с учетом начальных условий будут:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{P_2 P_3 P_4}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_1 - P_4)} = 0,77 \cdot 10^{-6}; \\ A_2 &= \frac{P_3 P_4 P_1}{(P_2 - P_3)(P_2 - P_4)(P_2 - P_1)} = -0,01807; \\ A_3 &= \frac{P_4 P_1 C_2}{(P_3 - P_4)(P_3 - P_1)(P_3 - P_2)} = 0,336; \\ A_4 &= \frac{P_1 P_2 P_3}{(P_4 - P_1)(P_4 - P_2)(P_4 - P_3)} = -1,318. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив коэффициенты A_i в уравнение (1,9) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях экспонентов к коэффициентам в выражении (9), получим вторые четыре уравнения.

Первое из этих уравнений можно записать:

$$\begin{aligned} f_1(A_1 e^{P_1 t}) &= -\theta_1 = A_2 [R_1 + R_2 + R_3 + R_4] + P_1 A_1 [(R_2 C_2 + R_3 C_3 + \\ &+ R_4 C_4 + R_3 C_2 + R_4 C_2 + R_4 C_3) R_1 + (R_3 C_3 + R_4 C_3 + R_4 C_4) R_2 + \\ &+ R_4 C_4 \cdot R_3] + P_1^2 A_1 [R_2 C_2 R_3 C_3 + R_2 C_2 R_4 C_4 + R_3 C_3 R_4 C_4 + \\ &+ R_2 C_2 R_4 C_3 + R_3 C_2 R_4 C_4) R_1 + R_3 C_3 R_4 C_4 \cdot R_2] + \\ &+ P_1^3 A_1 [R_2 R_3 R_4 C_2 C_3 C_4 \cdot R_1] = -0,0473. \end{aligned} \quad (18)$$

Следующие уравнения отличаются от (18) лишь множителями A_i и $P_i A_i$, так как выражения, стоящие в квадратных скобках, не зависят от A_i и P_i и повторяются во всех уравнениях. Обозначив для

упрощения записи выражения в квадратных скобках соответственно буквами X, Y, Z, H и разделив левые и правые части уравнения (18) на A_i , получим:

$$\frac{\theta_1}{A_1} = X + P_1 Y + P_1^2 Z + P_1^3 H = -61500,$$

аналогично для остальных членов

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2}{A_2} &= X + P_2 Y + P_2^2 Z + P_2^3 H = 1,068, \\ \frac{\theta_3}{A_3} &= X + P_3 Y + P_3^2 Z + P_3^3 H = -0,218, \\ \frac{\theta_4}{A_4} &= X + P_4 Y + P_4^2 Z + P_4^3 H = -0,01436. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом получены восемь уравнений с восемью неизвестными. Решение этих уравнений заключается в определении значения X, Y, Z, H из уравнения (19).

Численные величины их для рассматриваемого прибора будут равны:

$$\begin{aligned} X &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0,1589; \\ Y &= (R_2 C_2 + R_3 C_3 + R_4 C_4 + R_3 C_2 + R_4 C_2 + R_4 C_3) R_1 + \\ &\quad + (R_3 C_3 + R_4 C_3 + R_4 C_4) R_2 + R_4 C_4 \cdot R_3 = 1; \\ Z &= (R_2 C_2 R_3 C_3 + R_2 C_2 R_4 C_4 + R_3 C_3 R_4 C_4 + R_2 C_2 R_4 C_3 + \\ &\quad + R_3 C_2 R_4 C_4) R_1 + R_3 C_3 R_4 C_4 \cdot R_2 = 0,746; \\ H &= R_3 C_3 R_4 C_4 \cdot R_1 C_2 R_2 = 0,1077. \end{aligned} \quad (20)$$

Значения R и C , определенные по методу [1]		Реальные значения R^i и C^i	
$\theta_1 = R_1^1$	0,0473	R_1	0,05055
$\theta_2 = R_2^1$	0,0193	R_2	0,06025
$\theta_3 = R_3^1$	0,0734	R_3	0,03838
$\theta_4 = R_4^1$	0,0189	R_4	0,01261
$R_1^1 = C_1^1$	0,248	C_1	0,02405
$R_2^1 = C_2^1$	15,6	C_2	7,8225
$R_3^1 = C_3^1$	16,6	C_3	20,792
$R_4^1 = C_4^1$	320	C_4	449,94

Дальнейшие преобразования заключаются в группировке членов в уравнениях таким образом, чтобы их можно было заменить численными значениями X, Y, Z, H .

Путем последовательного упрощения были вычислены реальные значения тепловых сопротивлений R_i и теплоемкостей соответствующих элементов конструкции прибора (табл.). Как следует из таблицы, реальные значения R_i и C_i довольно существенно отличаются от их значений, определяемых по кривой остывания $p-n$ -перехода. Для

проверки произведенных расчетов нами была составлена аналоговая электрическая схема замещения (рис. 3) по полученным значениям R_i и C_i и определена кривая остывания прибора. Полученный результат можно представить в виде

$$\begin{aligned} U_{\text{ост}} - E_0 &= 0,04837 e^{-84,01 t} + 0,01968 e^{-3,392 t} + \\ &\quad + 0,0726 e^{-0,837 t} + 0,0193 e^{-0,163 t} \end{aligned}$$

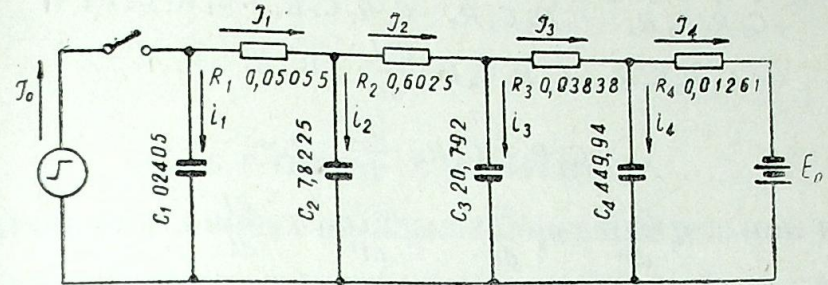


Рис. 3. Электрическая термозквивалентная схема плоскостного транзистора.

Максимальное отклонение расчетных коэффициентов θ_i и P_i от их значений, определенных экспериментально по кривой остывания, не превышало 2,5%.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Система дифференциальных уравнений для данной схемы (рис. 2) будет иметь вид

$$E_0 + I_4 R_4 = \frac{1}{C_4} \int i_4 dt, \quad 1,1$$

отсюда:

$$i_4 = C_4 R_4 \frac{dI_4}{dt},$$

$$I_3 = I_4 + i_4 = C_4 R_4 \frac{dI_4}{dt} + I_4, \quad 1,2$$

$$E_0 + I_4 R_4 + I_3 R_3 = \frac{1}{C_3} \int i_3 dt.$$

Выражая последовательно все токи через I_4 , получаем:

$$I_2 = R_3 R_4 C_3 C_4 \frac{d^2 I_4}{dt^2} + (C_3 R_3 + C_3 R_4 + C_4 R_4) \frac{dI_4}{dt} + I_4; \quad 1,3$$

$$\begin{aligned} I_1 &= C_2 R_2 C_3 R_3 C_4 R_4 \frac{d^3 I_4}{dt^3} + (C_2 R_2 C_3 R_3 + C_2 R_2 C_4 R_4 + C_3 R_3 C_4 R_4 + \\ &\quad + C_2 R_2 C_3 R_4 + C_2 R_3 C_4 R_4) \frac{d^2 I_4}{dt^2} + (C_2 R_2 + C_3 R_3 + C_4 R_4 + C_2 R_3 + \\ &\quad + C_2 R_4 + C_3 R_4) \frac{dI_4}{dt} + I_4; \end{aligned} \quad (1,4)$$

$$\begin{aligned}
I_0 = & C_1 R_1 C_2 R_2 C_3 R_3 C_4 R_4 \frac{d^4 I_4}{dt^4} + (C_1 R_1 C_2 R_2 C_3 R_3 + \\
& + C_1 R_1 C_2 R_2 C_4 R_4 + C_1 R_1 C_2 R_3 C_4 R_4 + C_2 R_2 C_3 R_3 C_4 R_4 + \\
& + C_1 R_1 C_2 R_3 C_4 R_4 + C_1 R_1 C_2 R_2 C_3 R_4 + C_1 R_2 C_3 R_3 C_4 R_4) \frac{d^3 I_4}{dt^3} + \\
& + (C_1 R_1 C_2 R_2 + C_1 R_1 C_3 R_3 + C_1 R_1 C_4 R_4 + C_2 R_2 C_3 R_3 + \\
& + C_2 R_2 C_4 R_4 + C_3 R_3 C_4 R_4 + C_1 R_1 C_2 R_3 + C_1 R_1 C_2 R_4 + C_1 R_1 C_3 R_4 + \\
& + C_2 R_2 C_3 R_4 + C_1 R_2 C_3 R_4 + C_1 R_2 C_4 R_4 + C_1 R_1 C_4 R_4 + \\
& + C_2 R_3 C_3 R_4 + C_1 R_2 C_3 R_4) \frac{d^2 I_4}{dt^2} + (C_1 R_1 + C_2 R_2 + \\
& + C_3 R_3 + C_4 R_4) \frac{d I_4}{dt} + I_4 =
\end{aligned}$$

$$= K_1 \frac{d^4 I_4}{dt^4} + K_2 \frac{d^3 I_4}{dt^3} + K_3 \frac{d^2 I_4}{dt^2} + K_4 \frac{d I_4}{dt} + I_4.$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид

$$K_1 P^4 + K_2 P^3 + K_3 P^2 + K_4 P + 1 = 0. \quad 1,6$$

Решение последнего, как известно, можно представить в виде

$$I_4 = I_0 + A_1 e^{P_1 t} + A_2 e^{P_2 t} + A_3 e^{P_3 t} + A_4 e^{P_4 t}, \quad 1,7$$

где $P_1 \div P_4$ — корни характеристического уравнения;

$A_1 \div A_4$ — коэффициенты при экспонентах, определяемые исходя из граничных условий:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{P_2 P_3 P_4}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)(P_1 - P_4)}; \\
A_2 &= \frac{P_3 P_4 P_1}{(P_2 - P_3)(P_2 - P_4)(P_2 - P_1)} \text{ и т. д.} \quad 1,8
\end{aligned}$$

Подставив значение I_4 в выражение $I_1 \div I_3$, находим мгновенное значение на первом элементе:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_3 R_3 + \dot{I}_4 R_4. \quad 1,9$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Strickland P. R. The thermal equivalent circuits of a transistor. IBM. Journal of Research and Development, 1959, № 1.
2. Абдулаев А. А., Барановский В. Ю. Расчет нестационарной температуры полупроводниковых приборов. Тезисы докладов, межвузовской конференции по тепловым режимам радиоэлектронных устройств (деталей и аппаратов). Л., 2-5 апреля 1963 г.
3. Вебер Э. „Советское радио“, т. I, М., 1958.

Поступило 26. VII 1964

Я. Г. ГЕНИС, Э. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

МИКРОПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЦЕМ

Обычные цифровые вычислительные машины (ЦВМ) работают с ограниченным набором команд, который затем программируется в последовательность, необходимую для решения определенной задачи. В зависимости от выполнения различных программ значительно меняется оптимальный набор операций. Очевидно, в каждом случае неэкономично обеспечивать ЦВМ оборудованием, необходимым для совершенно исчерпывающего ряда команд. Эти команды, являющиеся наилучшим выбором для отрабатываемого процесса, могут быть получены путем комбинации основных шагов в определенной последовательности [1].

Элементарные операции, такие как передача числа из одного регистра в другой, сложение чисел, гашение регистров и т. д., в арифметическом устройстве (АУ) выполняются по получении сигналов из устройства управления (УУ) и называются микрооперациями. Поэтому под микрокомандой будем понимать команду, вызывающую выполнение одной или нескольких микроопераций.

Путем комбинации микрокоманд в необходимых последовательностях строятся сложные команды, которые составляют внешний алфавит машины. Эти команды — макрокоманды — состоят из временной последовательности микрокоманд. Составление макрокоманд из микрокоманд называют микропрограммированием. Изменения в списке команд не влияют на структуру управляемых блоков ЦВМ. Выбор набора микроопераций производится так, что конечный результат равносильен выполнению команды в общепринятом смысле.

Микропрограммный принцип управления обеспечивает значительную гибкость структуры машины, увеличивает ассортимент выполняемых операций. В микропрограммной машине можно определять любой список команд, так как сложные операции могут быть легко синтезированы из элементарных микроопераций. Быстрое и автоматическое составление макрокоманд из имеющихся микрокоманд в микропрограммном запоминающем устройстве (МЗУ) с минимальным временем считывания без разрушения информации обеспечивает значительные преимущества подобного рода ЦВМ по сравнению с обычными машинами, которые применяют для выполнения сложных операций подпрограммы, и в связи с этим сильно проигрывают в скорости.

С инженерной точки зрения микропрограммно управляемая ЦВМ является простой по структуре и удобной в эксплуатации [2]. Например, вместо проверки правильности работы в машине всех макрокоманд,

манд достаточно проверить функционирование лишь машинных микроопераций.

Предлагаемый способ реализации микропрограммного управления предназначен для последовательной ЦВМ с одноадресной системой команд. Каждой микрооперации ставится соответствие двоичный разряд

1	2	3	...	n	1	1	2	3	...	m
Код операции					им	Адрес операнда				

Рис. 1. Структура команды (ИМ—индекс модификации).

микрокомандного слова (микрооперанд), который осуществляет определенные управляющие воздействия. Наличие единиц в тех или иных двоичных разрядах вызывает выполнение микроопераций, соответствующих этим разрядам.

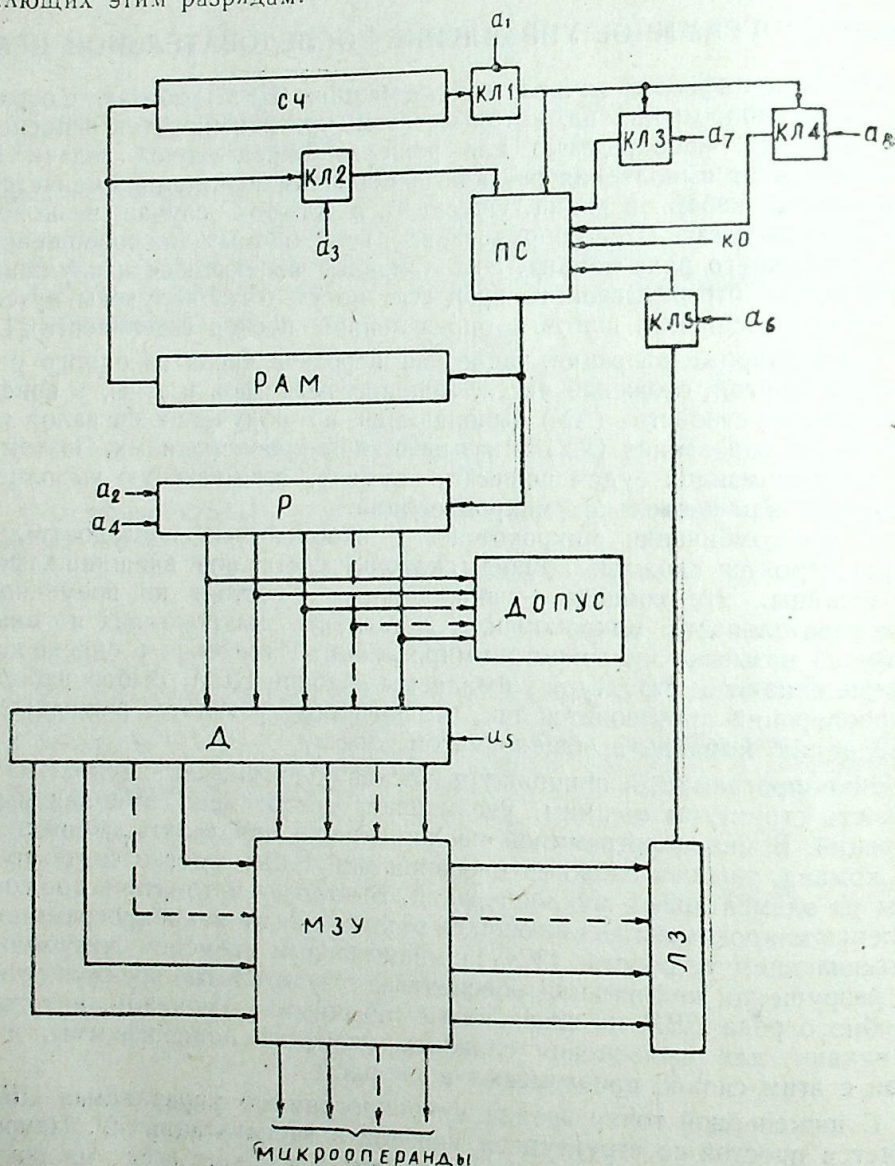


Рис. 2. Блок-схема узла микропрограмм.

На рис. 1 представлена структура команды. Под адрес отводится m разрядов, n разрядов отводится под код операции, один разряд является индексом модификации. Равенство его единице означает, что к адресу выполняемой команды необходимо прибавить адрес соседней ячейки команды. Такого рода косвенная адресация возможна благодаря записи в одну линейку магнитного оперативного запоминающего устройства (МОЗУ) двух чисел или команд. Код операции длиной в n разрядов дает возможность иметь в машине набор из 2^n микрокоманд.

Блок-схема узла микропрограмм представлена на рис. 2. Она состоит из полусумматора (ПС), регистра адреса микропрограмм (РАМ) и счетчика повторения микрокоманд (СЧ), объединенных в кольцевой динамический регистр с циклом рециркуляции в $2 \cdot m$, равным длине такта работы машины.

Операции, управляемые микропрограммным блоком ЦВМ, делятся на короткие (время выполнения в АУ один такт), длинные (время выполнения в АУ два и более тактов) и передачи управления (АУ не участвует в выполнении операции). Кроме того, в начале выполнения любой операции предусмотрен нулевой такт для обработки кода макрокоманды и адресной части в МОЗУ.

Код операции (КО) в нулевом такте поступает через ПС в РАМ. Предварительно сигналом a_1 гасится содержимое кольцевого регистра. На схему разворота (Р), куда поступают последовательным кодом n разрядов кода операции ($X, \bar{X}$), подается строб a_2 . Развернутый код операции следует на дешифратор определения команд передачи управления и сдвигов (ДОПУС). Признак команд передачи управления используется для выполнения этих команд за один такт, признак сдвига разрешает адресной части команды, содержащей информацию о количестве сдвигов, поступить на СЧ.

В нулевом такте сигнал a_3 разрешает коду операции путем сокращения линии циркуляции занять место адреса первой микрокоманды микропрограммы в регистре Р, на который подается строб a_4 . Дешифратор (Д) стробируется a_5 , обеспечивая выдачу из МОЗУ очередной микрокоманды.

Каждая микрокоманда помимо управляющих микрооперандов несет в себе информацию о количестве повторений самой себя, которая поступает из МОЗУ в линию задержки (ЛЗ) и по сигналу a_6 следующего такта вводится в СЧ один раз за время выполнения данной микрокоманды.

Очередная микрокоманда может выполняться только после окончания предыдущей, которая в общем случае может быть повторена не более 2^k раз ($2^{k-1} < m + n + 1 \leq 2^k$). Единица, прибавляемая к содержимому счетчика ($[СЧ] + 1$), образуется по a_7 , если хоть один разряд счетчика отличен от нуля ($[СЧ] \neq 0$).

Адрес следующей микрокоманды образуется из адреса предыдущей микрокоманды прибавлением единицы по a_8 , если содержимое счетчика равно нулю ($[СЧ] = 0$), обеспечивая таким образом повторение микрокоманды необходимое число раз. Прибавление единиц к $[СЧ]$ и $[РАМ]$ производится в ПС. Специальный микрооперанд в последней микрокоманде микропрограммы указывает на конец макрокоманды. Для иллюстрации рассмотрим выполнение операции „вычислить полином...” по схеме Горнера:

$$P(x) = (... (b_0 x + b_1) x + b_2) x + ... x + b_n.$$

Микрооперанды, необходимые для операции „вычислить полином...“

№ микро-операнда	Символ	Объяснение
1	ОЧ РЧ-М	Очистить регистр частного множителя РЧ-М
2	НР → РЧ-М	Передать число из накопительного регистра НР в РЧ-М
3	ОЧ НР	Очистить НР
4	ПР УМН	Признак умножения ПР УМН (сложить, вычесть или ничего не делать)
5	НР → П	Сдвинуть число в НР на 1 разряд вправо
6	РЧ-М → П	Сдвинуть число в РЧ-М на 1 разряд вправо
7	ОПР	Опросить, закончено ли накопление частичных произведений
8	КУ	Конец умножения в операции „полином“. Из МОЗУ считывается b_i
9	СЛ С-В	Признак сложения на сумматоре-вычитателе С-В
10	ВХ С-В	Разрешение входа на С-В
11	НР → МОЗУ	Передача числа из НР в МОЗУ
12	ОПР ПОВТ	Опросить разряд повторить ПОВТ, стоит или там 1
13	КП	Конец макрооперации „вычислить полином...“

Микропрограмма составлена для вычисления выражения вида

$$c_{i-1}x + b_i.$$

Если к коэффициенту b_i специально отведенный разряд равен единице, то полученное выражение умножается на x и к произведению прибавляется b_{i+1} и т. д.

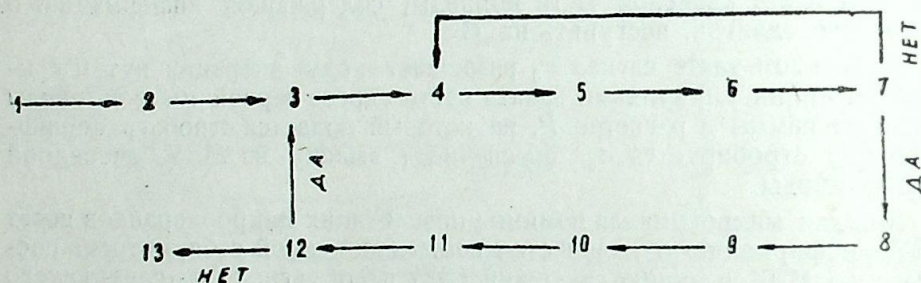


Рис. 3. Схема последовательности микрооперандов микрокоманды „Вычислить полином...“.

В таблице записаны микрооперанды, необходимые для выполнения операции „вычислить полином...“

Стрелки на рис. 3 указывают на временную последовательность микрокоманд.

Появляющиеся циклы микропоследовательностей будут повторяться до окончания выполнения операции „вычислить полином...“. Содержимым НР после выполнения операции будет $P(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wittkes M. V. Proc. EJCC, Philadelphia, 1958, pp. 18—20.
2. Кампе Т. JRE Transactions on Electronic Computer, 1960, v. EC—9, №2, pp. 208—213.

Поступило 25. XII 1964

Ж. Г. Кенис, Е. Э. Зүлфүгарзадэ

Ардычыл тэ'сирлэнэн электрон рэгэмһесаблајычы машинын микропрограм идарэси

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ микропрограм идарэ гурғусуна малик олан электрон рэгэмһесаблајычы машинларын гурулмасы мәсәлэләриндән бәһс олунур. Һәммин мәгалэдэ тәклиф олунан ардычыл тэ'сирлэнэн рэгэмһесаблајычы машинын микропрограм идарэ гурғусунун структур схеми верилир. Мисал олараг „полиномун һесабы“ әмәлијатынын јеринә јетирилмәси методу шәрһ едилмишдир. Тәклиф олунан микропрограм идарэ гурғусунун истифадәсинә, электрон рэгэмһесаблајычы машинын гурулушча садә олмасына вә мүхтәлиф әмәлләрин ади машинлардакына һисбәтән даһа сүр'әтлә ичра олунмасына сәбәб олур.

И. Л. АБРОСИМОВ, С. А. АЛЕСКЕРОВ, Г. Л. ЛИЖДВОЙ

ЗАПОМИНАЮЩАЯ ЯЧЕЙКА НА ТУННЛЬНОМ ДИОДЕ

Одним из способов повышения быстродействия электронной цифровой вычислительной машины является введение в ее состав сверхоперативного запоминающего устройства (СОЗУ) с малым временем обращения, которое может быть выполнено на туннельных диодах, обладающих высоким быстродействием, малой потребляемой мощностью, широким интервалом рабочих температур, малыми габаритами и весом. В последнее время в научной печати появились сообщения о подобных запоминающих устройствах [1, 2]. Однако этот вопрос требует дальнейшего рассмотрения, особенно в части разработки и исследования запоминающей ячейки на туннельном диоде.

Основание требования к запоминающей ячейке на туннельном диоде и принципиальная схема ячейки

К запоминающей ячейке на туннельном диоде предъявляются следующие требования: высокое быстродействие; высокий уровень выходного сигнала при считывании; низкий уровень помех; широкие

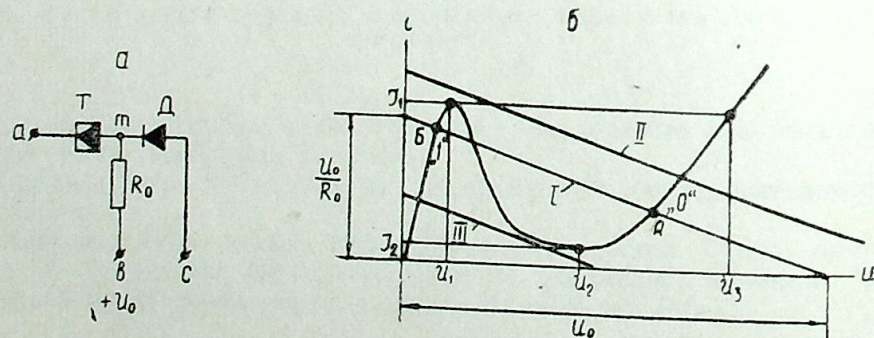


Рис. 1

допуски на параметры элементов; малая мощность, необходимая для переключения; устойчивость и надежность в работе; простота ячейки; малая статическая мощность рассеивания. Компромиссным является решение, при котором параметры ячейки наиболее близко подходят к выполнению важнейших из данных требований, так как одинаково

полная реализация всех условий в одной схеме практически невозможна.

Запоминающая ячейка (рис. 1 а), предназначенная для работы в известном устройстве с выборкой по системе Z, построена на основе известного принципа использования дополнительного нелинейного элемента [2]. В схему входит туннельный диод Т, сопротивление смещения R_0 и развязывающий точечный диод D. Вывод а соединяется с общей строчной шиной, вывод б—с разрядовой, а вывод с—подключается к шине выделения сигнала. Смещение U_0 и сопротивление R_0 определяют положение нагрузочной прямой I (рис. 1 б). При этом ячейка обладает двумя устойчивыми состояниями—в точках А и Б, первое из которых соответствует записи нуля, а второе—единицы.

Запись единицы производится двумя полутками—положительным по строчной шине и отрицательным по разрядовой, которые перемещают нагрузочную прямую в положение III, опрокидывая тем самым схему в точку, соответствующую записи единицы. При записи нуля отрицательный полуток отсутствует и переключения не происходит. Во время считывания отрицательный импульс подается по строчной шине и проходит через развязывающий диод только когда состояние ячейки характеризуется низким потенциалом (запись „1“). В противном случае развязывающий диод не пропустит на выход импульс считывания из-за высокого потенциала в точке m схемы.

Посылка разрядового полутка записи не через развязывающий диод, как это обычно осуществляется, а по сопротивлению R_0 исключает влияние импульса на усилитель считывания, а также значительно снижает разброс величины полутка в различных ячейках системы, что объясняется гораздо меньшей величиной разброса номиналов сопротивлений по сравнению с разбросом прямого сопротивления германиевого диода и значительно снижает требования к стабильности параметров туннельных диодов.

В данном режиме при считывании информация стирается, так как отрицательный импульс перебрасывает ячейку в состояние А. Однако возможна работа и без разрушения информации, но при этом необходимо снизить амплитуду импульса считывания, что приведет к уменьшению уровня выходного сигнала.

Следует отметить, что можно принять состояние А соответствующим записи „1“, а состояние „Б“—записи „0“ и производить считывание с разрушением или без разрушения информации импульсом положительной полярности. При этом следует изменить направление включения развязывающего диода и подать в точку c схемы постоянное смещение $U_0 = U_A$ в целях развязки цепей по постоянному току.

Выбор статического режима ячейки

Выбор статического режима ячейки возможен графоаналитическим методом, путем построения нагрузочной прямой на характеристике туннельного диода. Однако представляет интерес получить простые аналитические выражения, с помощью которых, зная параметры туннельного диода J_1 , J_2 , U_1 , U_2 , U_3 (рис. 1 б), определяются необходимые данные и выбирается наиболее выгодный режим.

Определим значение напряжений на германиевом туннельном диоде при записи „0“ и „1“, для чего воспользуемся кусочно-линей-

ной аппроксимацией характеристики (рис. 2) и рассмотрим $i = \Phi(u)$ на участках I и V. Аналитическое выражение аппроксимирующих отрезков на этих участках имеет вид [3]

$$i = a_0 + a_1 u, \quad (1)$$

где $a_0 = \Phi(0)$; $a_1 = \Phi'(0) = S$;

S —крутизна линеаризованной характеристики.

Для отрезка I имеем:

$$a_0^I = 0; \quad a_1^I = S^I = \frac{2J_1}{U_1}. \quad (2)$$

Отсюда

$$i_1 = \frac{2J_1}{U_1} u_1. \quad (2)$$

Для отрезка V коэффициенты полинома (1) находим подстановкой значения функции в точке 3 (U_3, J_3), исходя при этом из предположения, что крутизна линеаризованной характеристики на участке V вдвое меньше крутизны на участке I.

Из выражения (1) $J_3 = a_0^V + a_1^V U_3$, или $a_0^V = J_3 - a_1^V U_3$.

Имея в виду, что $a_1^V = S^V = \frac{J_1}{U_1}$, окончательно получим

$$i_V = J_3 + \frac{J_1}{U_1} (u_V - U_3). \quad (3)$$

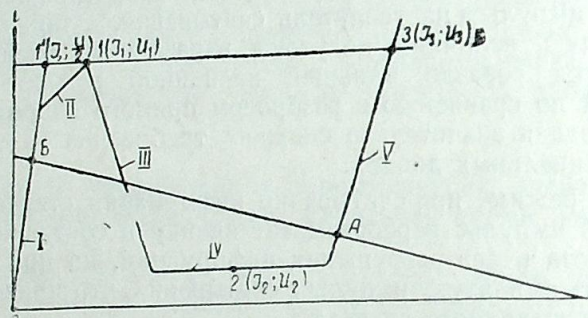


Рис. 2

Для определения напряжений на ячейке при записи „I“ (точка „Б“) и „0“ (точка „А“) решим уравнения (2) и (3) совместно с уравнением нагрузочной прямой:

$$i = \frac{U_0 - u}{R_0}.$$

Имея в виду, что $J_1 = J_3$, получим:

$$U_B = \frac{U_1 U_0}{U_1 + 2J_1 R_0}, \quad (4)$$

$$U_A = \frac{U_1 U_0 + J_1 R_0 (U_3 - U_1)}{U_1 + J_1 R_0}. \quad (5)$$

Исходя из выражений (2) и (4), (3) и (5), определим токи, потребляемые германиевым туннельным диодом в положениях Б и А:

$$J_B = \frac{2U_0 J_1}{U_1 + 2J_1 R_0}, \quad (6)$$

$$J_A = J_1 - \frac{J_1}{U_1} \left[U_3 - \frac{U_1 U_0 + J_1 R_0 (U_3 - U_1)}{U_1 + J_1 R_0} \right]. \quad (7)$$

Полученные выражения (4), (5), (6), (7), позволяющие легко получить значения токов и напряжений в рабочих точках, проверены на соответствие со значениями этих же величин, которые получаются в результате решения следующего аналитического выражения характеристики туннельного диода [4] совместно с уравнением нагрузочной прямой:

$$i = J_1 \frac{u}{U_1} e^{1 - \frac{u}{U_1}} + J_1 e^{\frac{u - U_3}{U_1}} + \frac{J_2}{U_2} u.$$

U_T —температурное напряжение ($U_T = 26$ мВ при 300° К).

Решение данного уравнения при нескольких рабочих режимах ячейки, проведенное численным методом с помощью клавишной вычислительной машины, дало совпадение с точностью от 1 до 5%, что доказывает возможность принятых при аппроксимации допущений и позволяет использовать выведенные выражения.

Для установления определенного режима работы ячейки необходимо выбрать сопротивление смещения R_0 и напряжение смещения U_0 , от которых зависит расположение нагрузочной прямой относительно характеристики туннельного диода, исходя из следующих положений.

1. Для обеспечения устойчивости ячейки при действии случайных возмущений в точке Б величина сопротивления выбирается достаточно большой. При этом, однако, устойчивость в точке А не должна нарушаться.

2. Сопротивление должно обеспечивать такое положение точки Б, при котором максимальный считывающий импульс перебрасывает ячейку только при достижении своего амплитудного значения, так как иначе выходной сигнал не успеет полностью выделиться на нагрузке. Дальнейшее увеличение R_0 нежелательно из-за роста считываемого импульса выше максимального, что приводит к появлению помех.

В соответствии с первым требованием к режиму ячейки необходимо выполнить следующие неравенства:

$$J_B \leq J_2 + (1 - p_1) (J_1 - J_2); \quad (8)$$

$$J_A \geq J_2 + p_2 (J_1 - J_2); \quad (9)$$

p_1, p_2 —коэффициенты устойчивости для состояний Б и А (при $J_1 - J_2 = 3,5 \div 5$ ма обычно принимаем $p_1 = 0,25$ и $p_2 = 0,2$).

Значения J_B и J_A при данном R_0 определяются из (6) и (7).

Определим величину R_0 , позволяющую выполнить второе требование.

Максимальный считывающий импульс, при котором помеха не превышает допустимую, определяется из выражения

$$U_{сч} = n (U'_A + U_{пор}), \quad (10)$$

где n —коэффициент, определяющий допустимую помеху при считывании, когда на ячейке записан „0“ (точка А);

$U_{пор}$ —пороговое напряжение развязывающего диода.

Обычно принимаем $n = 1,1 \div 1,15$ и $U'_A \approx U_3$.

На рис. 3 показана эквивалентная схема ячейки в момент считывания, откуда видно, что ток через туннельный диод равен

$$i = i_0 + i_1 + i_2 = i_0 + i_{сч};$$

i_0 —постоянный ток смещения;
 $i_{сч}$ —ток, создаваемый импульсом считывания.

Очевидно,

$$i_0 = \frac{U_0}{R_0 + R_T}; \quad i_{сч} = \frac{U_{сч}}{R_0(R_i + R_n) + R_T'}$$

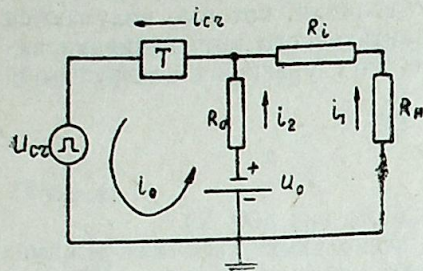


Рис. 3

где R_i — прямое сопротивление развязывающего диода;

R_n — сопротивление нагрузки на шине выделения сигнала;

R_T — статическое сопротивление туннельного диода;

R_T' — динамическое сопротивление туннельного диода.

Принимая на отрезке $0 \leq u \leq U_1$,

$$R_T = R_T' = \text{const} = \frac{U_1}{J_1}, \text{ а также имея}$$

в виду выражение (10), запишем следующее уравнение для момента опрокидывания ячейки:

$$\kappa J_1 = \frac{U_0}{R_0 + \frac{U_1}{J_1}} + \frac{n(U_3 + U_{пор})}{\frac{R_0(R_i + R_n)}{R_0 + R_i + R_n} + \frac{U_1}{J_1}};$$

κ — коэффициент превышения тока считывания.

После соответствующих преобразований имеем:

$$aR_0^2 + bR_0 + c = 0;$$

$$a = \kappa J_1 \left(R_n + R_i + \frac{U_1}{J_1} \right) - n(U_3 + U_{пор});$$

$$b = 2\kappa U_1(R_n + R_i) - \left(R_n + R_i + \frac{U_1}{J_1} \right) [U_0 + n(U_3 + U_{пор})];$$

$$c = \kappa \frac{U_1^2}{J_1} (R_n + R_i) - (R_n + R_i) \frac{U_1}{J_1} [U_0 + n(U_3 + U_{пор})].$$

Условиям работы в двустабильном режиме удовлетворяет только следующее решение:

$$R_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (11)$$

Определив из формулы (11) значение R_0 , следует проверить ячейку на устойчивость по (8) и (9). Таким образом, пользуясь приведенными выражениями, можно установить наиболее предпочтительный статический режим ячейки с точки зрения устойчивости и максимума выходного сигнала при считывании. Если при полученном R_0 условия устойчивости не выполняются, следует изменить напряжение U_0 или выбрать туннельный диод с большим значением J_1 . Отметим, что при этом не следует сильно завышать J_A по сравнению с неравенством (9), так как это приводит к увеличению мощности импульсов записи.

Допуски на параметры элементов

Оценим допустимый разброс параметров туннельного диода в описываемой схеме. Допуск на величину J_1 может не регламентироваться, так как переброс ячейки в положение А производится полным током считывания, который может быть выбран так, чтобы надежно

перебросить ячейку с диодом, имеющим максимальный положительный допуск.

Определим максимально приемлемый допуск δ_2 на величину J_2 , имея в виду, что при худшей комбинации разбросов должны выполняться условия, при которых полукток записи не меняет положения. Имея в виду, что изменения тока J_A можно принять пропорциональными величине разброса номинала сопротивления смещения δ_R , запишем следующие неравенства, характеризующие условия надежной работы ячейки в системе:

$$\begin{cases} J_A(1 - \delta_R) - J_2(1 + \delta_2) > J_{зап}(1 + \delta_R) \\ J_A(1 + \delta_R) - J_2(1 - \delta_2) < 2J_{зап}(1 - \delta_R), \end{cases}$$

где $J_{зап}$ — величина полуктока записи.

Введем коэффициент запаса $k_1 = 1,1$ и $k_2 = 1,05$ и перепишем неравенства в следующем виде:

$$\begin{cases} J_A(1 - \delta_R) - J_2(1 + \delta_R) = k_1 J_{зап}(1 + \delta_R) \\ k_2 [J_A(1 + \delta_R) - J_2(1 - \delta_2)] = 2J_{зап}(1 - \delta_R) \end{cases}$$

Решая совместно эти уравнения относительно δ_2 , получим максимально допустимый разброс J_2 :

$$\delta_2 = \frac{h[2(1 - \delta_R)^2 - k_1 k_2(1 + \delta_R)^2] - [2(1 - \delta_R) - k_1 k_2(1 + \delta_R)]}{2(1 - \delta_R) + k_1 k_2(1 + \delta_R)}, \quad (12)$$

где $h = \frac{J_A}{J_2}$.

При использовании сопротивлений с допуском $\pm 5\%$, когда $\delta_R = 0,05$, и при достаточно больших значениях h , как следует из полученного выражения (12), вполне можно получить $\delta_2 \approx 0,25$, что позволяет использовать серийно выпускаемые туннельные диоды без предварительного отбора, так как разброс параметров J_2 обычно не превышает 25%.

Амплитуда выходного сигнала

При действии на развязывающий диод D (рис. 1 а) малого по амплитуде сигнала можно принять линейную аппроксимацию его вольт-амперной характеристики (рис. 4). Тогда амплитуда импульса на R_n при считывании будет равна

$$U_{вых} = (U_{вх} - U_{пор}) \frac{R_n}{R_i + R_n}, \quad (13)$$

где $U_{вх}$ — амплитуда сигнала считывания в точке m (рис. 1 а).

Однако в момент появления входного напряжения прямое сопротивление точечного диода не успеет установиться и будет равно $R_{i \max}$. Для характеристики величины $R_{i \max}$ используются отношением [5]

$$\gamma = \frac{R_{i \max}}{R_i}.$$

Принимаем, что установление прямого сопротивления диода происходит линейно за время $\tau_{пр}$. Подобное допущение не улучшает импульсных свойств точечного диода и, следовательно, не завысит амплитуду выходного сигнала по сравнению с реальной.

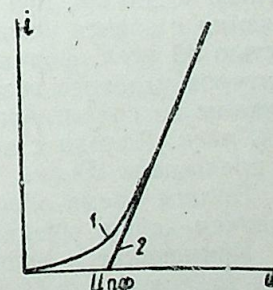


Рис. 4

Аналитическое выражение зависимости изменения прямого сопротивления во времени при $t \leq \tau_{пр}$ запишется так:

$$R_i(t) = R_i \frac{\gamma(\tau_{пр} - t) + t}{\tau_{пр}}. \quad (14)$$

Пусть импульс считывания имеет линейно нарастающий фронт длительностью $\tau_{ф}$. Тогда при $t \leq \tau_{ф}$

$$U_{вх}(t) = U_{вх} \frac{t}{\tau_{ф}}. \quad (15)$$

Подставив в выражение (13) равенства (14) и (15), получим значение выходного сигнала ячейки при $\tau_{пр} \geq \tau_{ф}$:

$$U_{вых}(t) = \left(U_{вх} \frac{t}{\tau_{ф}} - U_{пор} \right) \frac{R_n}{R_i \frac{\gamma(\tau_{пр} - t) + t}{\tau_{пр}} + R_n}.$$

Из этого выражения следует, что выходной сигнал достигает своего амплитудного значения при $t = \tau_{ф}$ и будет равен

$$U_{вых} = (U_{вх} - U_{пор}) \frac{R_n}{R_i \frac{\gamma(\tau_{пр} - \tau_{ф}) + \tau_{ф}}{\tau_{пр}} + R_n},$$

где $U_{вх} = U_{сч} - U_1$.

Таким образом, для получения наибольшего выходного сигнала при весьма малых длительностях считывающего импульса быстродействующей ячейки необходимо применять развязывающий диод с малыми значениями R_i и $\tau_{пр}$.

Результаты эксперимента

Экспериментально исследовалась запоминающая ячейка, построенная на основе изложенных выше положений, в которой использовался германиевый туннельный диод со следующими параметрами: $J_1 = 5,2 \text{ ма}$ ($\pm 15\%$), $J_2 = 0,9 \text{ ма}$ ($\pm 20\%$), $U_1 = 45 \text{ мв}$, $U_2 = 245 \text{ мв}$, $U_3 = 405 \text{ мв}$, $C \approx 50 \text{ пф}$.

В качестве развязывающего диода применялся германиевый точечный диод Д10 $\tau_{пр} = 0,1 \text{ мксек}$. Сопротивление смещения $R_0 = 420 \text{ ом}$ с разбросом номинала $\pm 5\%$. Ячейка работала в составе разряда запоминающей матрицы на 30 чисел с нагрузкой на шине выделения сигнала в 200 ом , при напряжении смещения $U_0 = 1,25 \text{ в}$. Для считывания и записи использовались остроконечные импульсы длительностью 30 нсек , формирование которых осуществлялось с помощью контуров ударного возбуждения. Выходной импульс при считывании единицы на сопротивлении 200 ом равнялся 200 мв при длительности в 30 нсек . Помеха с ячейки, наложение которой соответствует нулю, не превышала 20 мв .

Полное время обращения к запоминающему устройству с использованием данной ячейки составляет менее 100 нсек .

Применение в запоминающей ячейке туннельного диода из арсенида галлия с $J_1 = 10,5 \text{ ма}$, $J_2 = 0,8 \text{ ма}$, $U_1 = 105 \text{ мв}$, $U_2 = 550 \text{ мв}$, $U_3 = 1,12 \text{ в}$, $C \approx 7 \text{ пф}$ позволяет получить амплитуду выходного импульса на сопротивление 200 ом , равную 450 мв при длительности в 30 нсек . В этой схеме сопротивление смещения $R_0 = 390 \text{ ом}$, напряжение $U_0 = 1,25 \text{ в}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кононов Б. И., Орликовский А. А. „Изв. ВУЗов, радиотехника“, 1963, № 1.
2. Thompson P. M. Tunnel-Diode Computer stores. „Industrial Electronics“, 1963, v. 1, № 6.
3. Ицхоки Я. С. „Советское радио“, М., 1955.
4. Vogelsang Erich. Die statische Kennlinie der Tunneldiode. „Arch. elektr. Übertrag“, 1963, 17, № 10.
5. Киреев Б. Б., Неупокоев Б. А. „Советское радио“, М., 1964.

Поступило 28. XII 1964

И. Л. Абросимов, С. Э. Элэскэров, Г. Л. Лиждвој
Тунелли диод үзәриндә жығылмыш јаддаш ханәси

ХҮЛАСӘ

Магаләдә Z системи үзрә ишләјән јүксәк оператив јаддаш гурғусунун тунелли диодлар үзәриндә гурулмуш јаддаш ханәси тәдгиг едилмишдир.

Ханәнин статик иш режиминә бахылмыш. элементләрин параметрләринә олан тәләбатлар вә чыхыш сигналынын амплитудасы аראшдырылмышдыр.

Магаләдә тәчрүби нәтичәләр кәстәрилир.

М. С. КАСИМЗАДЕ, Х. Ф. ГУСЕЙНОВ

ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОГО СЕЙСМОПРИЕМНИКА ДАВЛЕНИЯ

Ранее нами [1] был рассмотрен принцип работы и устройство электрокинетических преобразователей (ЭКП), и показана целесообразность применения их в качестве сейсмоприемников давления при сейсмической разведке нефти на море.

Представляет интерес теоретическое и экспериментальное исследование процессов при работе ЭКП на переменном давлении и получение соответствующих зависимостей между параметрами преобразователя и его конструктивными элементами.

В данной статье рассматриваются вопросы установления зависимости переменного потенциала ЭКП от действующего внешнего давления, получения аналитических выражений для чувствительности, амплитудно-фазовых и других характеристик ЭКП, используемых в качестве сейсмоприемников давления (ЭКС).

Зная законы движения жидкости в пористой перегородке при действии на ЭКС переменного давления и пользуясь методом, примененным при выводе уравнения для постоянного потенциала протекания, можно с достаточной точностью найти выражение для переменного потенциала протекания ЭКС.

Потенциал протекания при постоянном течении, как известно, определяется формулой [2]:

$$E = \frac{\xi \varepsilon P}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}}, \quad (1)$$

где ξ — электрокинетический потенциал,
 ε — диэлектрическая проницаемость рабочей жидкости,
 μ — вязкость рабочей жидкости,
 λ_s ; λ_v — соответственно, поверхностная и объемная электропроводность жидкости,
 r_{cp} — средний радиус пор пористой перегородки,
 P — перепад давления на пористой перегородке.

В соответствии с формулой (1) между потенциалом протекания и перепадом давления на пористой перегородке при определенных условиях существует прямая зависимость. Это положение имеет место лишь при ламинарном характере течения и линейном законе фильтрации.

Поскольку при сейсмической разведке амплитуда действующего на ЭКС давления мала (звуковое давление), толщина пористой перегородки, размеры ее пор и камеры преобразователя так же малы, то можно ожидать, что для ЭКС удовлетворяются условия ламинарности течения и линейности фильтрации жидкости через пористую перегородку. С другой стороны, учитывая, что работа ЭКС происходит в области низких частот, для определения потенциала протекания на переменном течении можно пользоваться выражением (1) для постоянного течения [3].

Скорость фильтрации связана с действующим давлением зависимостью

$$v_\phi = \frac{k}{\mu l} P, \quad (2)$$

где k — гидравлическая проницаемость перегородки,
 l — длина капилляра.

Если считать жидкость в ЭКС несжимаемой, пористую перегородку и стенки корпуса преобразователя жесткими — недеформируемыми, то количество жидкости Q_1 , вытесняемой в единицу времени мембраной, будет равно объемному расходу жидкости — количеству жидкости Q_2 , которая за единицу времени фильтруется через пористую перегородку, т. е.

$$Q_1 = Q_2.$$

В каждый момент времени

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= S_1 \frac{dx}{dt} = v(t) \cdot S_1 \\ Q_2 &= v_\phi \cdot S_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где S_1 ; S_2 — соответственно, площадь мембраны и перегородки,
 x — перемещение мембраны,

$v(t)$ — скорость движения мембраны (или жидкости в камерах преобразователя).

Следует указать, что выражение (3) справедливо при условии, когда движение мембраны рассматривается как движение поршня. Мембраны в ЭКС гофрированы, деформация их находится в области малых перемещений, поэтому с достаточной точностью можно пользоваться выражением (3). Из (3), учитывая равенство $Q_1 = Q_2$, получаем

$$v_\phi = v(t) \frac{S_1}{S_2}.$$

Подставив значение v_ϕ в (2) и принимая $S_1 = S_2$, находим выражение для перепада давления:

$$P = \frac{\mu l}{k} v(t).$$

После подстановки значения P в формулу (1) получаем выражение для переменного потенциала протекания:

$$E(t) = \frac{\xi \varepsilon}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}} \cdot \frac{\mu l}{k} \cdot v(t). \quad (4)$$

Формулы (1) и (4) получены при определенных упрощающих допущениях, в частности при условии цилиндрической формы пор, без учета электроосмотического противотечения жидкости, изменения величины вязкости и диэлектрической постоянной жидкости, заключенной в капилляры.

Составив уравнение динамики ЭКС, можно определить скорость движения жидкости в преобразователе.

В области низких частот и давлений механическая система ЭКС с распределенными параметрами, из которых некоторые в принципе нелинейны, может быть заменена эквивалентной линейной системой с сосредоточенными параметрами [4].

Уравнения, описывающие поведение механической части ЭКС с сосредоточенными параметрами, при воздействии на мембрану сосредоточенной переменной силы $F(t)$, имеют вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = F(t), \quad (5)$$

где M, R, C — сосредоточенные масса, гидравлическое сопротивление и гибкость системы.

В частном случае, при воздействии на ЭКС силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$F(t) = F_0 e^{-j(\omega t + \varphi_0)},$$

решение уравнения (5) для скорости движения жидкости $v(t) = \frac{dx}{dt}$

в установившемся режиме представится в виде

$$v(t) = \frac{F_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega M - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \psi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Подставив полученное значение $v(t)$ в формулу (4) и учитывая, что

$$F_0 = P_0 S_1; R = \frac{\mu l \cdot S_1}{k}, \text{ и приняв } \varphi = \psi_0 + \frac{\pi}{2}, \text{ получим}$$

$$E(t) = \frac{\xi \varepsilon}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}} \cdot \frac{\omega \tau P_0}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + (\omega^2 MC - 1)^2}} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi), \quad (6)$$

где P_0 — амплитуда действующего переменного давления,

$\tau = RC$ — механическая постоянная времени ЭКС.

Сдвиг фаз φ между $E(t)$ и $P(t)$ может быть определен из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega M - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7)$$

Если учесть, что на низких частотах инерционное сопротивление преобразователя во много раз меньше его гидравлического сопротивления и сопротивления упругости, т. е. $\omega M \ll R$ и $\omega M \ll \frac{1}{\omega C}$, то формулы (6) и (7) с допустимой погрешностью можно написать в следующем виде:

$$E(t) = \frac{\xi \varepsilon}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}} \cdot \frac{\omega \tau P_0}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi), \quad (8)$$

Уравнение (5) не учитывает незначительного по величине влияния электрической стороны преобразователя на поведение его механической стороны.

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega \tau}. \quad (9)$$

Выражение (8) показывает, что переменный потенциал протекания ЭКС зависит не только от физико-химических свойств системы — пористая перегородка — жидкость, но и от частоты и амплитуды действующего давления, гидродинамических и механических параметров преобразователя.

Поскольку в реальных условиях ЭКС будет включен на внешнюю нагрузку, необходимо определить не только э. д. с., но и напряжение на выходе преобразователя $U(t)$.

Из эквивалентной электрической схемы ЭКС, представленной на рис. 1, имеем:

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= E(t) \cdot r \\ r &= \frac{r_{\text{н}}}{r_{\text{в}} + r_{\text{н}}} \end{aligned} \right\}, \quad (10)$$

где $r_{\text{в}}$ — внутреннее сопротивление ЭКС,

$r_{\text{н}}$ — сопротивление нагрузки.

Подставляя значение $E(t)$ в формулу (10), получаем выражение для выходного сигнала ЭКС:

$$U(t) = \frac{\xi \varepsilon}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{P_0 r}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}} \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi_0 + \varphi). \quad (11)$$

Выражение (11) дает возможность выявить основные свойства ЭКС, в частности частотную зависимость чувствительности. Чувствительность ЭКС по давлению выражается отношением амплитуды выходного напряжения к амплитуде действующего давления, т. е.

$$m = \frac{\xi \varepsilon}{4 \pi \mu \lambda_v} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2 \lambda_s}{r_{cp} \lambda_v}} \cdot \frac{\omega \tau}{\sqrt{(\omega \tau)^2 + 1}}. \quad (12)$$

Выражение (12) показывает, что если $\omega \tau \ll 1$, то в области частот $f \ll \frac{1}{2 \pi \tau}$ чувствительность ЭКС зависит от частоты. Если $\omega \tau \gg 1$, то

в области частот $f \gg \frac{1}{2 \pi \tau}$ частотная характеристика чувствительности имеет плоский характер. При $\omega \tau = 1$, т. е. частоте $f_{\text{н}} = \frac{1}{2 \pi \tau} =$

$= \frac{1}{2 \pi R C}$, чувствительность уменьшается в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раза по сравнению

с максимальным значением. Частота $f_{\text{н}}$ есть нижний частотный предел плоской части частотной характеристики ЭКС.

При данных размерах и структурных свойствах пористой перегородки и выбранной рабочей жидкости нижний частотный предел ЭКС тем меньше, чем более гибкая его мембрана.

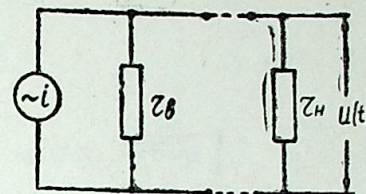


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема ЭКС.

Частотные характеристики чувствительности для ЭКС с механической постоянной времени $\tau_1 = 0,5$, $\tau_2 = 1$ и $\tau_3 = 2,5$ сек, рассчитанные по формуле (12), показаны на рис. 2.

Как видно, с увеличением механической постоянной времени τ нижний частотный предел преобразователя снижается.

Фазовая характеристика ЭКС представляет зависимость от частоты сдвига фаз между э. д. с. (напряжением) на выходе преобразователя $E(t)$ и действующим на вход давлением $p(t)$. Согласно (9)

$$\varphi = -\arctg \frac{1}{\omega\tau}.$$

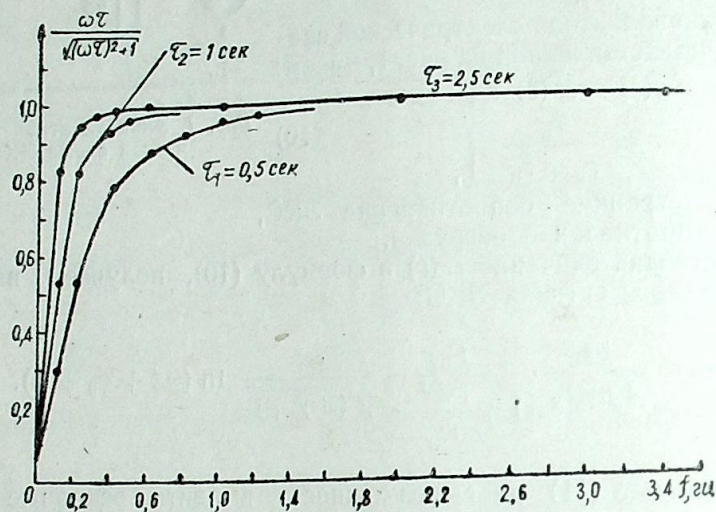


Рис. 2 Теоретические частотные характеристики ЭКС.

В области низких и инфранизких частот для данного ЭКС с механической постоянной времени τ с повышением частоты сдвиг фаз между выходным сигналом преобразователя и действующим давлением уменьшается. Фазовая характеристика ЭКС с механической постоянной времени $\tau = 2,5$ сек показана на рис. 3.

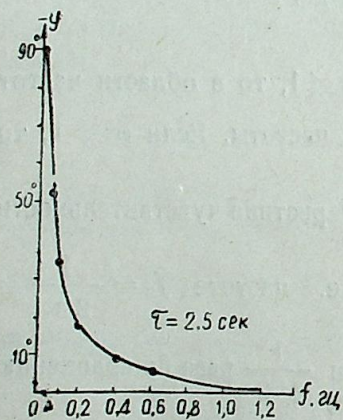


Рис. 3. Фазовая характеристика ЭКС.

из шамотно-бентонитовой керамики со средним диаметром пор 50 мк. Рабочая жидкость — ацетон.

Сравнение экспериментальных кривых (рис. 4) с кривой, полученной расчетным путем при $\tau = 0,5$ сек (рис. 2), свидетельствует об удовлетворительном их совпадении.

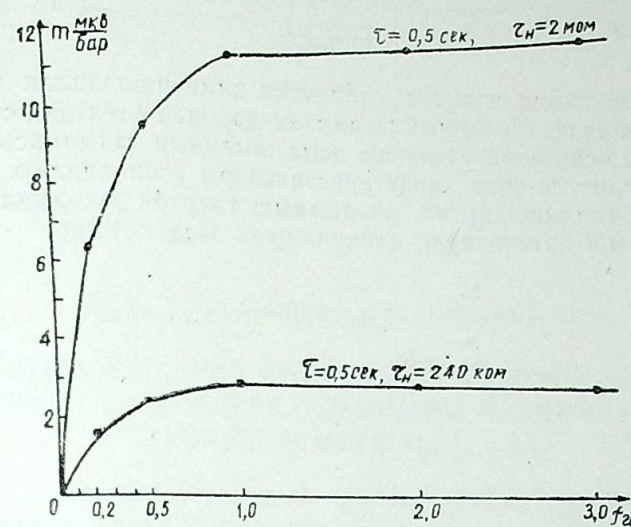


Рис. 4. Экспериментальные частотные характеристики ЭКС.

Выводы

1. Получены аналитические выражения для амплитудно-фазовых характеристик и чувствительности ЭКС в области низких и инфранизких частот. Экспериментальное исследование макетов ЭКС подтверждает справедливость полученных результатов.

2. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что при соответствующем выборе механических параметров можно добиться плоской частотной характеристики ЭКС начиная с очень малых частот (менее одного герца).

Установлено, что нижний частотный предел ЭКС зависит от механической постоянной времени τ . С увеличением τ нижний частотный предел ЭКС снижается. Такое же влияние оказывает τ на фазовую характеристику ЭКС. С увеличением τ фазовый сдвиг между действующим на ЭКС давлением и напряжением на его выходе уменьшается.

3. Полученные результаты показывают, что нижний частотный предел ЭКС значительно меньше, чем у пьезокерамических сейсмоприемников, что успешно может быть использовано при применении ЭКС в сейсморазведке на низких частотах (3—40 гц), особенно при глубинном сейсмическом зондировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимзаде М. С., Гусейнов Х. Ф. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, № 1 1965.
2. Касимзаде М. С. Тр. ЭНИИ АН Азерб. ССР, т. XVI, 1962.
3. Касимзаде М. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 6.
4. Касимзаде М. С. „Изв. ВУЗов, серия Приборостроение“ т. V, 1962, № 3.

Поступило 20. X 1964

М. С. Гасымзаде, Х. Ф. Хусейнов

Электрокинетик типли тэзјиг сејсмогэбуледичисинин тезлик хусусијјэтлэри

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ тэзјиг сејсмогэбуледичиси кими ишлэдилэн электрокинетик чевиричинин чыхышында алынан дэјишэн електрик сигналынын чевиричијэ тэ'сир едэн тэзјигдэн асылылығынын тапылмасы вэ чевиричинин амплитуда-фаза характеристикалары изаһ едилир.

Мүэјјэн едилмишдир ки, апарылмыш тэчрүби јохламалар нэзэри јолла алынмыш нэтичэлэрин дүзкүнлүјүнү тэсдиг едир.

АЗЕРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛӨР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБӨРЛӨРИ
Физика-техника вэ ријазиијат елмлэри серијасы, 1965, № 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-технических и математических наук, 1965, № 3

М. А. ТОПЧИБАШЕВ, А. С. АЛЛАХКУЛИЕВ

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТА (С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ВЗАИМОСВЯЗЯМИ) УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА

При разработке вопросов составления алгоритмов управления систем автоматического управления (совокупность управляемого объекта и управляющей машины), содержащих элементы с распределенными взаимосвязями (например, ЛЭП с расщепленными фазовыми проводами в качестве каналов связи; каналы проводной связи телеавтоматических систем управления; каналы связи между объектом и машиной и т. п.), приходится решать следующую систему уравнений динамики:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + \overline{M} \frac{\partial i_2}{\partial t} + R_1 i_1; & \frac{\partial i_1}{\partial x} &= C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \overline{C} \frac{\partial U_2}{\partial t} - G_1 U_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + \overline{M} \frac{\partial i_1}{\partial t} + R_2 i_2; & \frac{\partial i_2}{\partial x} &= C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} - \overline{C} \frac{\partial U_1}{\partial t} - G_2 U_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)^*$$

Для решения системы (1) необходимо привести ее к каноническому виду относительно одной из функций. В работе [1] система (1) путем соответствующих преобразований приведена к каноническому виду и поставленная задача решена методом разделения операторов (при условии $G_1 = G_2 = R_1 = R_2 \approx 0$).

Однако этому методу присуща та особенность, что решение задачи получается в более общем виде. Это затрудняет переход к числовому результату. Учитывая указанное обстоятельство, нами были сделаны попытки решить поставленную задачу другими, более простыми и удобными методами, к числу которых могут быть отнесены:

1. Комбинированный способ (например, классический и операционный);
2. Метод функции от матрицы.

§ 1. Решение комбинированными способами

1. Согласно этому способу вначале, путем ряда преобразований, в области действительных переменных (x, t) приводим исходные уравнения к каноническому виду относительно одной функции.

* Здесь U_1, U_2, i_1 и i_2 — малые приращения соответствующей функции.

$$\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} - A \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial t^2} + B \frac{\partial^4 U_1}{\partial t^4} = 0, \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= a_1 + a_2, \quad B = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ \text{и } a_1 &= L_1 C_1 - \bar{M} \bar{C}, \quad a_2 = \bar{M} C_2 - L_1 \bar{C} \\ b_1 &= \bar{M} C_1 - L_2 \bar{C}, \quad b_2 = L_2 C_2 - \bar{M} \bar{C} \end{aligned} \right\} \quad (\kappa)$$

Будем решать уравнение (2) операционным методом, применяя преобразования Лапласа, при нулевых начальных условиях. При этих условиях, применяя преобразования относительно одной переменной (например, t), при фиксированной другой (x) получим изображающее уравнение относительно $\bar{U}_1(x; p)$ в виде

$$\frac{d^4 \bar{U}_1(x, p)}{dx^4} - A p^2 \frac{d^2 \bar{U}_1(x, p)}{dx^2} + B p^4 \bar{U}_1(x, p) = 0. \quad (3)$$

Последнее уравнение, рассматриваемое в области действительной переменной (x), является обыкновенным однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с постоянным коэффициентом $A p^2$ и $B p^4$.

Для последнего уравнения примем следующую задачу Коши:

$$\bar{U}_1(x, p)|_{x=0} = x_0; \quad \frac{d \bar{U}_1}{dx} \Big|_{x=0} = x_1; \quad \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx^2} = \frac{d^3 \bar{U}_1}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

Решение уравнения (3) будем искать в виде

$$\bar{U}_1(x; p) = e^{\lambda x},$$

Тогда для (3) характеристическое уравнение будет иметь вид

$$\lambda^4 - A p^2 \lambda^2 + B p^4 = 0. \quad (5)$$

Корнями характеристического уравнения (5) в общем виде будут:

$$\lambda_{1,2} = \pm \alpha p; \quad \lambda_{3,4} = \pm \beta p,$$

где

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}}.$$

Тогда получим общее решение в виде

$$\bar{U}_1(x, p) = C_1 e^{\alpha x p} + C_2 e^{-\alpha x p} + C_3 e^{\beta x p} + C_4 e^{-\beta x p}. \quad (6)$$

Для определения коэффициентов уравнения (6) воспользуемся условиями (4), при этом получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= x_0 \\ \alpha p C_1 - \alpha p C_2 + \beta p C_3 - \beta p C_4 &= x_1 \\ \alpha^2 p^2 C_1 + \alpha^2 p^2 C_2 + \beta^2 p^2 C_3 + \beta^2 p^2 C_4 &= 0 \\ \alpha^3 p^3 C_1 - \alpha^3 p^3 C_2 + \beta^3 p^3 C_3 - \beta^3 p^3 C_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для решения системы, (7) применяя метод Крамера, находим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha p & -\alpha p & \beta p & -\beta p \\ \alpha^2 p^2 & \alpha^2 p^2 & \beta^2 p^2 & \beta^2 p^2 \\ \alpha^3 p^3 & -\alpha^3 p^3 & \beta^3 p^3 & -\beta^3 p^3 \end{vmatrix} = 2\alpha^3 \beta^3 p^6 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 - \alpha p & \beta p & -\beta p & 1 \\ 0 & \alpha^2 p^2 & \beta^2 p^2 & \beta^2 p^2 \\ 0 & -\beta^3 p^3 & \beta^3 p^3 & -\beta^3 p^3 \end{vmatrix} = -2x_0 \alpha^3 \beta^3 p^6 - 2x_1 \beta^5 p^5$$

Аналогичным образом можно получить выражения и для остальных определителей в виде

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= 2x_0 \alpha^3 \beta^3 p^6 + 2x_1 (\alpha^3 p^2 - \beta^5) p^5, \\ \Delta_3 &= 2(\alpha^5 \beta - \alpha^3 \beta^3) p^6 + 2x_1 (\alpha^2 \beta^3 - \alpha^5) p^5, \\ \Delta_4 &= 2x_1 (\alpha^3 \beta^3 - \alpha^5 \beta) p^6 + 2x_1 (\alpha^2 \beta^3 - \alpha^5) p^5. \end{aligned}$$

Для дальнейшего вычисления принимаем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 2\alpha^3 \beta^3, \quad A_2 = -2x_0 A_1, \quad A_3 = -2x_1 \beta^5, \quad A_4 = A_1 \\ A_5 &= 2x_1 (A_1 - \beta^5), \quad A_6 = 2(\alpha^5 \beta - A_1), \quad A_7 = 2x_1 (\alpha^2 \beta^3 - \alpha^5) \\ A_8 &= 2x_1 (A_1 - \alpha^5 \beta) A_9 = 2x_1 (A_1 - \alpha^5) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пользуясь формулой $C_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, получим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{A_2}{A_1} + \frac{A_3}{A_1} \cdot \frac{1}{p}, \quad C_2 = 1 + \frac{A_5}{A_1} \cdot \frac{1}{p} \\ C_3 &= \frac{A_6}{A_1} + \frac{A_7}{A_1} \cdot \frac{1}{p}, \quad C_4 = \frac{A_8}{A_1} + \frac{A_9}{A_1} \cdot \frac{1}{p} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Как видно из выражений (9), для коэффициентов C_i ($i = 1, 2, 3, 4$), они зависят от параметра p . Поэтому, рассматривая выражения (9) для C_i как изображающие функции, найдем соответствующие оригиналы их:

$$C = \frac{A_2 + A_3}{A_1}, \quad C_2 = \frac{A_1 + A_5}{A_1}, \quad C_3 = \frac{A_6 + A_7}{A_1}, \quad C_4 = \frac{A_8 + A_9}{A_1}. \quad (10)$$

Отсюда видно, что оригиналы коэффициентов зависят только от начальных параметров.

Подставляя значение C_i в уравнение (6), получим:

$$\bar{U}(x, p) = \frac{A_2 + A_3}{A_1} e^{\alpha x p} + \frac{A_1 + A_5}{A_1} e^{-\alpha x p} + \frac{A_6 + A_7}{A_1} e^{\beta x p} + \frac{A_8 + A_9}{A_1} e^{-\beta x p} \quad (11)$$

Теперь переходим от изображающих решений (11) к искомому решению-оригиналу. В результате получим:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi j} \frac{A_2 + A_3}{A_1} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \exp[p(t + \alpha x)] dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \frac{A_1 + A_5}{A_1} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \exp[p(t - \alpha x)] dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \frac{A_6 + A_7}{A_1} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \exp[p(t + \beta x)] dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \frac{A_8 + A_9}{A_1} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \exp[p(t - \beta x)] dp. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили точное решение $U_1(x, t)$, зависящее от начальных параметров и переменных x, t .

2. Рассмотрим случай, когда $L_1 = L_2 = 0$; $C_1 = C_2 = 0$. При этих условиях система уравнений (1) приводится к следующей канонической форме:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (12)$$

где $U = U_1 + U_2$.

Если $U_1 = U_2$, то $U_1 = \frac{U}{2}$, или $U_2 = \frac{U}{2}$.

3. Предположим, теперь, что $\bar{M} = 0$, $\bar{C} = 0$ (например, для случая использования двухцепных ЛЭП), тогда получим, что

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \quad (13)$$

и

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \lambda_2^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}, \quad (14)$$

где

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1}}, \quad \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{L_2 C_2}}.$$

Таким образом, в частном случае мы получили волновое уравнение.

§ 2. Метод функции от матрицы

1. Рассмотрим решение системы линейных дифференциальных уравнений (1) при $R_1 = R_2 \approx 0$ и $G_1 = G_2 \approx 0$ методом функции от матрицы.

Из системы (1) получим систему уравнений в виде.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= L_1 \frac{\partial i_1}{\partial t} + \bar{M} \frac{\partial i_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial x} = C_1 \frac{\partial U_1}{\partial t} - \bar{C} \frac{\partial U_2}{\partial t} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} &= L_2 \frac{\partial i_2}{\partial t} + \bar{M} \frac{\partial i_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial x} = C_2 \frac{\partial U_2}{\partial t} - \bar{C} \frac{\partial U_1}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При нулевых начальных условиях, применяя преобразование Лапласа к системе (15), переходим от уравнений с частными производными к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } \frac{d\bar{U}_1}{dx} &= L_1 p \bar{i}_1 + \bar{M} p \bar{i}_2; \text{ б) } \frac{d\bar{i}_1}{dx} = C_1 p \bar{U}_1 - \bar{C} p \bar{U}_2 \\ \text{в) } \frac{d\bar{U}_2}{dx} &= L_2 p \bar{i}_2 + \bar{M} p \bar{i}_1; \text{ г) } \frac{d\bar{i}_2}{dx} = C_2 p \bar{U}_2 - \bar{C} p \bar{U}_1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Дифференцируя уравнения а) и б) по переменной x , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx^2} &= L_1 p \frac{d\bar{i}_1}{dx} + \bar{M} p \frac{d\bar{i}_2}{dx} \\ \frac{d^2 \bar{U}_2}{dx^2} &= L_2 p \frac{d\bar{i}_2}{dx} + \bar{M} p \frac{d\bar{i}_1}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Подставляя уравнения б) и г) из системы (16) в систему (17), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{U}_1}{dx^2} + a_{11} \bar{U}_1 + a_{12} \bar{U}_2 &= 0 \\ \frac{d^2 \bar{U}_2}{dx^2} + a_{21} \bar{U}_1 + a_{22} \bar{U}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= p^2 (\bar{M} \bar{C} - L_1 C_1), \quad a_{12} = p^2 (L_1 \bar{C} - \bar{M} C_2) \\ a_{21} &= p^2 (L_2 \bar{C} - \bar{M} C_1), \quad a_{22} = p^2 (\bar{M} \bar{C} - L_2 C_2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Решим систему (18) для задачи Коши:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_1(x, p) \big|_{x=0} &= x_0^1, \quad \frac{d\bar{U}_1}{dx} \bigg|_{x=0} = x_0^2 \\ \bar{U}_2(x, p) \big|_{x=0} &= x_0^3, \quad \frac{d\bar{U}_2}{dx} \bigg|_{x=0} = x_0^4 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь $a_{ik} (i, k = 1, 2)$ — постоянные коэффициенты. Вводя столбец $\bar{U} = (\bar{U}_1, \bar{U}_2)$ в квадратную матрицу, получаем.

$$A = \|a_{ik}\|_1^2.$$

Перепишем систему (18) в матричном виде:

$$\frac{d^2 (\bar{U}_1 + \bar{U}_2)}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{U}}{dx^2} = A \bar{U}. \quad (21)$$

Для уравнения (21) задача Коши (20) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} \big|_{x=0} &= \bar{U}_1(x, p) \big|_{x=0} + \bar{U}_2(x, p) \big|_{x=0} = x_0^1 + x_0^3 = x_0 \\ \frac{d\bar{U}}{dx} \bigg|_{x=0} &= \frac{d\bar{U}_1}{dx} \bigg|_{x=0} + \frac{d\bar{U}_2}{dx} \bigg|_{x=0} = x_0^2 + x_0^4 = x_1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $A \neq 0$. Если $n = 1$, то $\bar{U}$ и A — скаляры ($A \neq 0$) и общее решение уравнения (21) может быть записано в виде

$$\bar{U}(x, p) = x_0 \cos \sqrt{A} x + x_1 (\sqrt{A})^{-1} \sin \sqrt{A} x. \quad (23)$$

Выражение (23) представляет собой решение уравнения (18), когда $\bar{U}$ — столбец, A — неособенная квадратная матрица при любом n . В этом нетрудно убедиться, пользуясь выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \cos \sqrt{A} x &= E - \frac{1}{2!} A x^2 + \frac{1}{4!} A^2 x^4 - \dots \\ (\sqrt{A})^{-1} \sin \sqrt{A} x &= x - \frac{1}{3!} A x^3 + \frac{1}{5!} A^2 x^5 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставляя значение матрицы A в уравнение (23), получим

$$\bar{U}(x, p) = x_0 \cos \omega p x + \frac{x_1}{p\omega} \sin \omega p x, \quad (25)$$

где

$$\omega = \sqrt{(M^2 - L_1 L_2)(C^2 - C_1 C_2)}.$$

Разделив обе части уравнения (25) на положительную p^2 , получим:

$$\frac{\bar{U}(x, p)}{p^2} = x_0 \frac{\cos \omega p x}{p^2} + \frac{x_1}{\omega} \frac{\sin \omega p x}{p^3}. \quad (26)$$

Применяя теоремы свертывания, окончательно получим решение в виде оригинала:

$$U(x, t) = \int_0^t \bar{U}_1(x, p)(t - \tau) d\tau$$

или

$$U(x, t) = x_0 \int_0^t \cos \omega \tau x (t - \tau) d\tau + \frac{x_1}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau x (t - \tau)^2 d\tau.$$

Учитывая вышеизложенную методику решения задачи, можно составить следующий алгоритм ее решения:

1. Привести к каноническому виду исходные уравнения относительно одной из функций.
2. Ввести определенные начальные условия.
3. Составить изображающее уравнение относительно одной из переменных.
4. В полученном уравнении четвертого порядка с постоянными коэффициентами поставить определенную задачу Коши.
5. Искать решение полученного уравнения в виде суммы экспонентов и составить соответствующее характеристическое уравнение, решив последнее, найти общее выражение корней.
6. Пользуясь полученными выражениями, найти решение уравнения (3) в общем виде (6), и для определения коэффициентов, зависящих от параметров, учесть условия (4) и решить полученную систему методом Крамера.
7. Перейти из системы (9) к (10).
8. Пользуясь известными формулами, найти оригинал функций, входящих в уравнение (11).
9. Аналогично составляется алгоритм и для второго метода (§ 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Тр. Энергетического ин-та им. И. Г. Есьмана, т. XVI, Баку, 1964.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Гостехиздат, 1950.
3. Гантмахер И. Теория матриц. Гостехиздат, 1951.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1958.
5. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехиздат, 1949.

М. А. Топчубашов, Э. С. Аллагулиев

Идарәетмә объектинин динамик элементинин
(гаршылыгы, пајланмыш) тәнликләри системинин
һәлли методикасы

ХҮЛАСӘ

Автоматик идарәетмә (идарә олунаң объектлә идарәедичи машин) системләринин алгоритмини гурмаг әсас мәсәләләрдән биридир. Бу мәсәдлә мәгаләдә автоматик идарәетмә системләринин пајланмыш вә гаршылыгы әлағәси олан електрик вә рабитә хәтләринин диференциал тәнликләри системинин (1) һәлли методикасына бахылмышдыр. (1) систем тәнлијин һәлли бир нечә характер хүсуси һал үчүн оператор һесабламасынын вә классик үсулларын тәтбиги илә верилір. Алынан нәтичәләр мәсәләни әдәди шәкилдә алмаға имкан верир. Бунун үчүн (1) системинә дахил олан әмсалларын мә'лум олмасы кифәјәтдир.

А. А. ЭФЕНДИЗАДЕ, С. М. БАГИРОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ПИТАНИИ

Одним из перспективных способов питания забойных двигателей электробура является система токоподвода, использующая в качестве третьего провода бурильные трубы—систему два провода—труба (ДП-Т). В этом случае несимметрия напряжения, приложенного к зажимам забойного двигателя, обуславливается неодинаковыми сопротивлениями канала питания между синхронным генератором, установленным наверху—у устья скважины, и зажимами двигателя [1].

Исходя из этих условий, был проведен анализ переходных режимов электродвигателя при частотном управлении. В статье рассматривается пуск асинхронного двигателя электробура про разных частотах и напряжениях для различных глубин бурения при питании по системе ДП-Т. При исследовании были рассмотрены глубины 0÷5000 м и частоты в пределах 20÷50 гц. Для разных частот напряжение определялось в соответствии с законом изменения момента от скорости и с учетом падения напряжения на токоподводе.

При исследовании статических режимов электробуров [2] был получен закон регулирования напряжения при частотном управлении погружного двигателя.

Напряжение на зажимах двигателя определялось по формуле:

$$U = U_n \frac{f}{f_n} \cdot \sqrt{1 + 2\beta \frac{f_n - f}{f_n + f} \cdot \left(1 + \frac{f_n}{f} \cdot \kappa\right)}, \quad (1)$$

где β —постоянная, зависящая от осевой нагрузки,

$\kappa = \frac{\kappa_1 \cdot \kappa_f}{R_n}$ —постоянная, зависящая от глубины бурения.

При питании двигателя электробура по системе ДПТ в двух фазах токоподвода оказываются включенными равные сопротивления кабеля r_k , а в третьей фазе включено сопротивление трубы $z_T = r_T + jx_T \kappa_f$.

Имея в виду, что активные сопротивления двух жил кабеля равны, обозначим сопротивление трубы через r_T , а сопротивление фазы

кабеля через r_k , тогда симметричные составляющие сопротивления r_T будут:

$$r_{T1} = r_{T2} = \frac{1}{3}(r_T - r_k), \quad r_{T0} = \frac{1}{3}(r_T + 2r_k).$$

Уравнение переходного процесса двигателя электробура с учетом начальных условий при переменной частоте в операторной форме при исследовании методом вращающихся магнитных полей имеет вид [3].

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{a1} + (p + j)(\kappa_f x_1 i_{a1} + \kappa_f x_m i_{pa1}) + r_{T0} i_{a1} + r_{T1} i_{a2} - c_1 &= U_1 \\ r_1 i_{a2} + (p + j)(\kappa_f x_1 i_{a2} + \kappa_f x_m i_{pa2}) + r_{T1} i_{a1} + r_{T0} i_{a2} - c_2 &= U_2 \\ r_2 i_{pa1} + (p + js)(\kappa_f x_m i_{a1} + \kappa_f x_2 i_{pa1}) - c_3 &= 0 \\ r_2 i_{pa2} + [p + j(2 - s)](\kappa_f x_m i_{a2} + \kappa_f x_2 i_{pa2}) - c_4 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} -\kappa_f x_1 p i_{a10} - \kappa_f x_m p i_{pa10} &= -c_1, \\ -\kappa_f x_2 p i_{pa10} - \kappa_f x_m p i_{a10} &= -c_2, \\ -\kappa_f x_1 p i_{pa20} - \kappa_f x_m p i_{pa20} &= -c_3, \\ -\kappa_f x_1 p i_{pa20} - \kappa_f x_m p i_{a20} &= -c_4. \end{aligned}$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 учитывают начальные условия.

Решая систему уравнений (2), находим токи для цепей статора и ротора прямой и обратной последовательностей в следующем виде:

$$i_{a1}(p) = \frac{U_1 a_3 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_2 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3 r_{T1} \begin{vmatrix} c_3 c_4 \\ a_2 a_5 \end{vmatrix} - a_3 a_5 r_{T1} U_2}{\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3 a_5 r_{T1}^2}; \quad (3)$$

$$i_{a2}(p) = \frac{U_2 a_5 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3 c_4 \\ a_2 a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} - a_5 r_{T1} \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_2 a_3 \end{vmatrix} - a_3 a_5 r_{T1} U_1}{\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3 a_5 r_{T1}^2};$$

$$i_{pa1}(p) = \frac{K' c_2 - U_1 a_3 a_4 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_2 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} +}{a_3 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3^2 a_5 r_{T1}^2} + \frac{a_3 a_4 r_{T1} \begin{vmatrix} c_3 c_4 \\ a_2 a_5 \end{vmatrix} + a_3 a_4 a_5 r_{T1} U_2}{a_3 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3^2 a_5 r_{T1}^2};$$

$$i_{pa2}(p) = \frac{K' c_4 - U_2 a_5 a_6 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} - a_6 \begin{vmatrix} c_3 c_4 \\ a_2 a_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} +}{a_5 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3 a_5^2 r_{T1}^2} + \frac{a_5 a_6 r_{T1} \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_2 a_3 \end{vmatrix} + a_3 a_5 a_6 r_{T1} U_1}{a_5 \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_4 a_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ a_6 a_5 \end{vmatrix} - a_3 a_5^2 r_{T1}^2}$$

Здесь $a_1 = r_{\tau 0} + r_1 + \kappa_f x_1 (p + j)$, $a_4 = (p + js) \kappa_f x_m$,
 $a_2 = \kappa_f x_m (p + j)$, $a_5 = r_2 + \kappa_f x_2 [p + j(2 - s)]$,
 $a_3 = r_2 + (p + js) \kappa_f x_2$, $a_6 = \kappa_f x_m [p + j(2 - s)]$.

Характеристическое уравнение системы (3) может быть представлено в виде:

$$ap^4 + bp^3 + cp^2 + dp + e = 0, \quad (4)$$

где: $a = \kappa_f^4 (x_1^2 - x_m^2)^2$,
 $b = 2(x_1^2 - x_m^2) [x_1(r_1 + r_2 + r_{\tau 0}) + j2\kappa_f(x_1^2 - x_m^2)] \kappa_f^3$,
 $c = [(s^2 - 2s - 5)(x_1^2 - x_m^2)^2 \kappa_f^4 - x_1^2 \kappa_f^2 (4r_{\tau 0} r_2 + 4r_1 r_2 + r_2^2 + r_{\tau 0}^2 + r_1^2 + 2r_{\tau 0} r_1 - r_1^2) - 2x_m^2 \kappa_f^2 (r_{\tau 0} r_2 + r_1 r_2) + j6x_1 \kappa_f^3 (x_1^2 - x_m^2) (r_1 + r_2 + r_{\tau 0})]$,
 $d = 2r_1 x_1 \kappa_f (r_{\tau 0}^2 + r_1^2 - r_{\tau 1}^2 + 2r_{\tau 0} r_1 + r_1 r_2 + r_{\tau 0} r_2) + 2x_1^3 \kappa_f^3 [(s^2 - 2s - 2)(r_{\tau 0} + r_1) - 3r_2] - 2x_1 x_m^2 \kappa_f^3 [s^2 - 2s - 2)(r_{\tau 0} + r_1) - 3r_2] + 2x_1^2 \kappa_f^2 (r_{\tau 0}^2 + r_1^2 + 4r_{\tau 0} r_2 + 4r_1 r_2 + r_2^2 - r_{\tau 1}^2 + 2r_{\tau 0} r_1) + 2x_1^4 \kappa_f^4 (s^2 - 2s - 1) - 2x_m^4 \kappa_f^4 (s^2 + 2s + 1) + 4x_1^2 x_m^2 \kappa_f^4 (2s - s^2 + 1) - 4r_2 x_m^2 \kappa_f^2 (r_{\tau 0} + r_1)$,
 $e = [r_2^2 (r_1^2 - r_{\tau 1}^2 + 2r_1 r_{\tau 0} + r_{\tau 0}^2) + x_1^2 \kappa_f^2 (2r_{\tau 1}^2 s - 4r_1 r_2 - 4r_{\tau 0} r_2 - 4r_1 r_{\tau 0} s + r_1^2 s^2 + 2r_1 r_{\tau 0} s^2 + r_{\tau 0}^2 s^2 - 2r_{\tau 0} s - r_2^2 - r_{\tau 1}^2 s^2 - 2r_1^2 s) + \kappa_f^4 s (x_1^2 - x_m^2)^2 (2 - s) + 2r_2 x_m^2 \kappa_f^2 (r_1 + r_{\tau 0}) + j[2x_1 \kappa_f^3 (r_{\tau 0} s^2 - 2r_{\tau 0} s + r_1 s^2 - 2r_1 s - r_2) (x_1^2 - x_m^2) + 2x_1 \kappa_f (2r_1 r_{\tau 0} + r_1^2 + r_{\tau 0}^2 + r_1 r_2 + r_{\tau 0} r_2 - r_{\tau 1}^2)]$.

Уравнение электромагнитного момента определяется следующим выражением:

$$M = cRe (j i_{a2}(t) i_{pa1}(t) e^{j\varphi} - j i_{a1}(t) i_{pa2}(t) e^{-j\varphi}). \quad (5)$$

где

$$c = 0,102 \cdot \frac{2pm}{\omega} x_m \cdot \kappa_f.$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем следующие выражения для токов статора и ротора прямой и обратной последовательности:

$$\left. \begin{aligned} i_{a1}(t) &= \frac{F_{a1}(0)}{L_{a1}(0)} + \sum_{i=1}^4 e^{p_i t} \frac{F_{a1}(p_i)}{p_i L_{a1}(p_i)} \\ i_{pa1}(t) &= \frac{F_{pa1}(0)}{L_{pa1}(0)} + \sum_{i=1}^5 e^{p_i t} \frac{F_{pa1}(p_i)}{p_i L_{pa1}(p_i)} \\ i_{a2}(t) &= \frac{F_{a2}(0)}{L_{a2}(0)} + \sum_{i=1}^4 e^{p_i t} \frac{F_{a2}(p_i)}{p_i L_{a2}(p_i)} \\ i_{pa2}(t) &= \frac{F_{pa2}(0)}{L_{pa2}(0)} + \sum_{i=1}^5 e^{p_i t} \frac{F_{pa2}(p_i)}{p_i L_{pa2}(p_i)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Определив значения токов асинхронного двигателя, находим общее выражение для электромагнитного момента двигателя согласно формуле (5).

Переходный процесс в системе описывается уравнением движения электропривода, если в уравнение движения

$$m - m_c = -T \frac{ds}{dt} \quad (7)$$

подставить соответствующие значения момента, выраженные в функции времени и скольжения. Однако точное решение этой задачи сопряжено со значительными трудностями. Для решения уравнения (7) воспользуемся методом последовательных интервалов [4]. Принимая на каждом интервале скольжение постоянным, определяем среднее значение момента двигателя на данном интервале, т. е. находим

$$m_{cp} = \frac{1}{\Delta t_{n+1} - \Delta t_n} \int_{\Delta t_n}^{\Delta t_{n+1}} m dt.$$

Пользуясь значениями момента в интервале, определим соответствующее скольжение для следующего интервала:

$$s_{n+1} = s_n - \frac{1}{T} \int_{\Delta t_n}^{\Delta t_{n+1}} m_{cp} dt.$$

Аналогично проводится расчет среднего значения момента на последующих интервалах.

Решение уравнения (4) было выполнено на счетно-решающей машине ЭЦВМ БЭСМ-2 в Вычислительном центре АН Азербайджанской ССР. Ниже приводится логическая схема, составленная для ЭЦВМ БЭСМ-2. Здесь был использован метод Феррари, что позволило произвести расчеты с большей точностью. Расчеты сводились к выполнению элементарных операций.

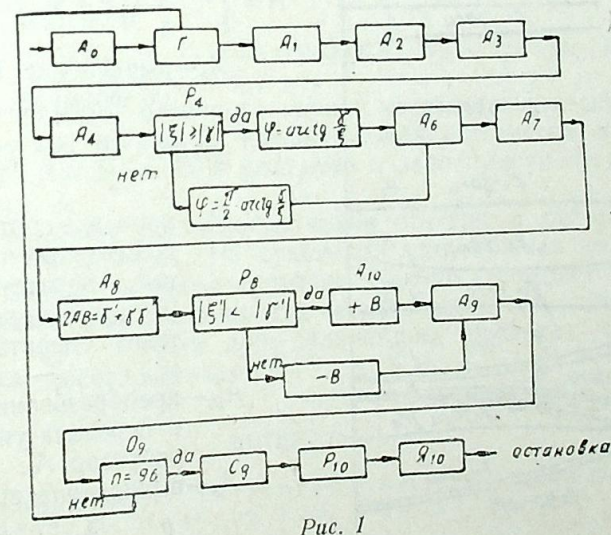


Рис. 1

Логическая схема для ЭЦВМ БЭСМ-2 показана на рис. 1, где: A_0 — ввод рабочей программы, стандартных подпрограмм числового материала в память машины и перевод (2—10);

Γ —групповое деление коэффициентов уравнения (4) на

$$a = (x_1^2 - x_m^2)^2 \cdot \kappa_1^4;$$

A_1 —вычисление выражений:

$$p = -\frac{b^2}{3} + c, \quad q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d;$$

A_2 —вычисление модуля комплексного числа

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27};$$

A_3 —вычисление выражения

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}};$$

A_4 —с помощью оператора A_3 вычисление значения:

$$U = \xi + j\gamma = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

P_4 —проверка соотношений вещественных и мнимых частей выражений A_4 :

при $|\xi| \geq |\gamma|$ будет $\varphi = \arctg \frac{\gamma}{\xi}$

при $|\xi| < |\gamma|$ будет $\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\gamma}{\xi}$.

A_6 —вычисление выражений

$$v = -\frac{p}{3U}, \quad y = U + v + \frac{b}{3};$$

A_7 —при помощи оператора A_3 вычисляются:

$$A = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c + y}, \quad B = \sqrt{\frac{y^2}{4} - e};$$

A_8 —вычисление производится по формуле:

$$2AB = \frac{by}{2} - d = \xi' + j\gamma';$$

P_8 —проверка соотношений вещественных и мнимых частей оператора A_8 : при $|\xi'| < |\gamma'|$ передача управления оператору A_9 ; при $|\xi'| \geq |\gamma'|$ —оператору A_{10} .

A_{10} —преобразование B на $-B$ и передача управления на оператор A_9 ;

A_9 —вычисление выражений

$$\left(-\frac{b}{4} + \frac{A}{2}\right)^2, \quad \frac{y}{2} - B$$

и определение значений

P_1, P_2, P_3 и P_4 .

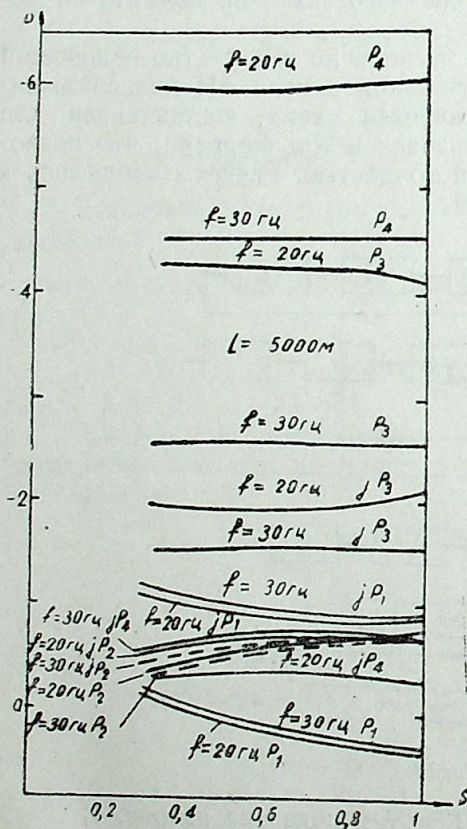


Рис. 2

O_9 —восстановление по n (n —число уравнений на различных частотах, скольжениях и глубинах бурения; в нашем примере $n = 96$).

C_9 —обращение к переводу и печать;

P_{10} —проверка содержимого счетчика, передача управления на оператор Γ продолжается до $n = 96$, при $n = 96$ —на оператор A_{10} ;

A_{10} —остановка.

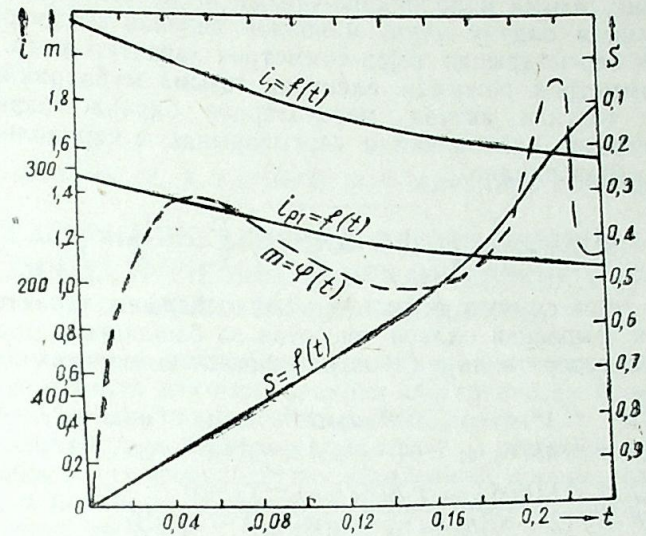


Рис. 3

В качестве примера был проведен расчет пускового вращающего момента для электробур $МАП1-21,5-658/8$, работающего на глубине 5000 м при разных частотах.

Данные двигателя:

$r_1 = 0,5$ ом; $r_2 = 0,73$ ом; $x_1 = x_2 = 8,34$ ом; $x_m = 7,5$ ом. При глубине 5000 м $r_{r1} = r_{r2} = 0,18$ и $r_{r0} = 2,2$ ом.

Соответствующие изменения корней характеристического уравнения представлены на рис. 2. Кривые изменения токов в цепях статора и ротора, скольжения и моментов в зависимости от времени показаны на рис. 3.

Были построены зависимости токов статора и ротора, а также моментов от скольжения. Из сравнения этих кривых получено, что статическая характеристика достаточно хорошо совпадает с расчетной кривой, максимальная погрешность не превышает 9% при $s = s_k$. Это позволяет в ряде случаев при дальнейших расчетах пользоваться статическими характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А. „Нефть и газ“ 1963, № 10.
2. Багиров С. М., Низамов Т. И., Эфендизаде А. А. „Нефть и газ“, 1964, № 6.
3. Лайон В. Анализ переходных процессов в электрических машинах переменного тока методом симметричных составляющих М.—Л., 1958.
4. Кадымов Я. Б., Расулов М. М. „Электричество“, 1960, № 2.

Поступило 29.1 1965

Гејри-симметрик чэрэјанла бэслэнэн асинхрон мүһэррикин кечид просесинин һесаблинамасында электрон ријазии машинларын тәтбиғи

ХУЛАСӘ

Електрик газыма мүһэррикинә чэрэјан нәгл едән кабел, ики фаза труба шәклиндә олдуғу үчүн, мәнбәдән верилән симметрик чэрэјан мүһэррикин сарғыларында гејри-симметрик характер алып. Она көрә дә гејри-симметрик режимдә електрик газыма мүһэррикин кечид просесинин тәдғиги актуал мәсәләләрдән биринә чеврилмишдир. Електрик газыма мүһэррикин сарғыларындакы кәркинлик (1) тәнлији илә мүәјјән едилир:

$$U = U_n \cdot \frac{f}{f_n} \cdot \sqrt{1 + 2\beta \frac{f_n - f}{f_n + f} \cdot \left(1 + \frac{f_n}{f} \cdot \kappa\right)} \quad (1)$$

Бу тип гејри-симметрик системин кечид һалыны характеризә едән тәнликләрин фырланан охлара нисбәтән вә башланғыч шәртләри нәзәрә алан оператор тәнлији (2) ифадәсиндәки кимидир:

$$\left. \begin{aligned} r_1 i_{a1} + (p + j)(\kappa_1 x_1 i_{a1} + \kappa_1 x_m i_{pa1}) + r_{to} i_{a1} + r_{t1} i_{a2} - c_1 &= U_1 \\ r_1 i_{a2} + (p + j)(\kappa_1 x_1 i_{a2} + \kappa_1 x_m i_{pa2}) + r_{t1} i_{a1} + r_{to} i_{a2} - c_2 &= U_2 \\ r_2 i_{pa1} + (p + js)(\kappa_1 x_m i_{a1} + \kappa_1 x_2 i_{pa1}) - c_3 &= 0 \\ r_2 i_{pa2} + [p + j(2 - s)]\kappa_1 x_m i_{a2} + \kappa_1 x_2 i_{pa2} - c_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Бу ифадәнин һәлли заманы гаршыја чыхан характеристик тәнлик Азәрбајҗан ССР Елмләр Академијасынын һесаблама мәркәзиндәки „БЕСМ-2“ ријазии машинында һәлл едилмишдир.

Моментин ани гијмәти (5) тәнлији васитәси илә һесабланыр.

Моментин һәллини асанлашдырмағ үчүн ајры-ајры сәрһәдләрдә сүрүшмә s сабит көтүрүлмүш вә электромеханики моментин орта гијмәти һесабланмышдыр. Мисал оларағ МАП1-21,5—658/8 мүһэррикинин 5000 м дәринлик вә мүхтәлиф тезликдә ишә бурахылмасы һалы һесабланмышдыр. (3) характеристик тәнлијинин мәнтиғи схеми мәғаләдәки 1-чи шәкилдә, бу тәнлијин 5000 м дәринликдә, мүхтәлиф тезликләрдә сүрүшмәдән асылылығы 2-чи шәкилдә, статор, ротор чэрәјанларынын, сүрүшмәнин вә моментин замандан асылылығы исә 3-чү шәкилдә верилир.

С. А. АБАСОВ, М. А. БАГИРОВ, Н. В. КЛИМОВА, В. П. МАЛИН

ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИСТИРОЛЬНОЙ ПЛЕНКИ

Рациональное использование полимеров в электротехнике и радиотехнике требует изучения влияния электрических полей на диэлектрические и механические свойства полимеров.

При воздействии электрических полей и разрядов на полимерные диэлектрики в них происходит так называемый процесс электрического старения и полимеры теряют свои первоначальные диэлектрические и механические свойства.

В последнее время исследования изменений механических и диэлектрических свойств полимеров при воздействии на них различных факторов (ионизирующие лучи, температура, электрическое поле и т. д.) рассматриваются как самостоятельные методы, связанные с изучением структуры полимеров.

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТА

Исследованию подвергалась полистирольная пленка (ПС) толщиной 20 мк. Были созданы условия для интенсификации процесса старения ПС пленки и сняты зависимости диэлектрических свойств (температурно-частотной зависимости $\tan \delta$, проницаемости ϵ , электрической прочности $E_{пр}$, электропроводности γ), а также механических свойств (изменение температурно-временной зависимости механической прочности) от величины электрического напряжения и продолжительность его воздействия на пленку.

Пленка подвергалась действию высокого напряжения от 1 до 7 кВ промышленной частоты в специальных испытательных ячейках с воздушным (а) и без воздушного зазора (б), схематически показанных на рис. 1. В обеих ячейках пленка прилежала к металлическому заземленному электроду, а высокое электрическое напряжение прикладывалось к металлизированной стеклянной пластинке, являющейся вторым электродом. Для создания плотного контакта пленки с металлическим электродом ее натягивали с помощью грузов, не вызывающих механической деформации пленки. Предварительно пленку сушили.

Снятие температурно-временной зависимости прочности, т. е. изменение зависимости долговечности τ (время, прошедшее от начала нагружения до момента разрыва) ПС пленки от механического напря-

жения σ при различных температурах T проводилось путем одноосного растяжения на разрывной машине, описанной в работах (1, 2). Разрывная машина позволяла сохранять постоянство приложенного к испытуемому образцу механического напряжения в течение всего опыта. При каждом измерении обеспечивалось также и постоянство температуры.

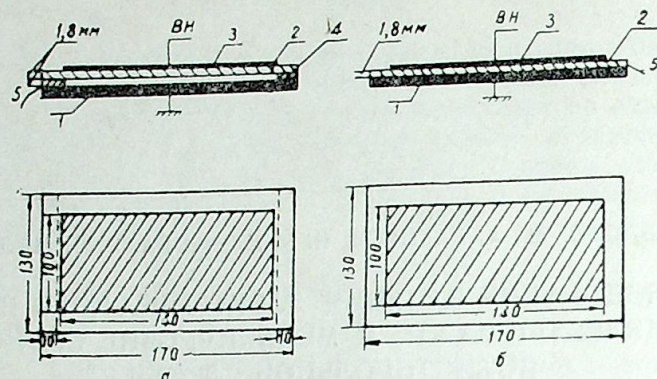


Рис. 1. Испытательные ячейки с воздушным зазором (а) и без воздушного (б); 1—металлический заземленный электрод; 2—стеклянная металлизированная пластина; 3—металлическое покрытие; 4—стеклянные прокладки; 5—полимерная пленка.

Химические изменения в полистирольной пленке, вызванные электрическим полем и разрядами определялись с помощью спектрофотометра типа ИКС-14.

Изменения диэлектрических свойств полистирольной пленки под действием электрического поля и разрядов

Полистирол принадлежит к неполярным полимерам, и наличие у него максимума дипольно-эластических потерь (рис. 2, кривая 1) при температуре приблизительно 118°C (температура стеклования равна $80-100^\circ\text{C}$) объясняется небольшой полярностью молекул или присутствием примесей, химически связанных с цепью [3].

На рис. 2 показаны температурные зависимости $\text{tg } \delta$ ПС пленки на частоте 1000 гц, полученные после пребывания ее в электрическом поле промышленной частоты в ячейке с воздушным зазором при различных величинах напряжения $U_{\text{ст}} = 3-7 \text{ кВ}$, но одинаковом времени воздействия $t_{\text{ст}} = 5 \text{ час}$. Увеличение времени воздействия приводило при высоких напряжениях $U_{\text{ст}} = 6-7 \text{ кВ}$ к пробое пленки.

Зависимости, аналогичные показанным на рис. 2, были получены также и для частот измерения 400 и 5000 гц, при этом наблюдалось уменьшение $\text{tg } \delta$ с увеличением частоты измерения. По своему характеру полученные кривые $\text{tg } \delta = \varphi(f, t^\circ)$ можно подразделить на два типа. Для кривых первого типа наблюдается общий рост $\text{tg } \delta$ с увеличением испытательного напряжения, новые максимумы $\text{tg } \delta$ практически не наблюдаются.

Осциллограммы тока через ячейки показывают, что при напряжениях до 4 кВ электрических разрядов в воздушном зазоре ячейки практически не обнаруживается, а при напряжениях более 4 кВ наблюдаются разряды, причем интенсивность их возрастает с увеличением

напряжения. Возникновение электрических разрядов радикально изменяет вид температурной зависимости $\text{tg } \delta$.

Наряду с общим значительным повышением $\text{tg } \delta$ наблюдается новый максимум при температуре $\approx 35^\circ\text{C}$, т. е. значительно ниже температуры стеклования.

Роль разрядов в изменении диэлектрических свойств ПС пленки подтверждается также рис. 3, где сравниваются температурные зависимости $\text{tg } \delta$ ПС пленки, со старившейся в ячейке без воздушного за-

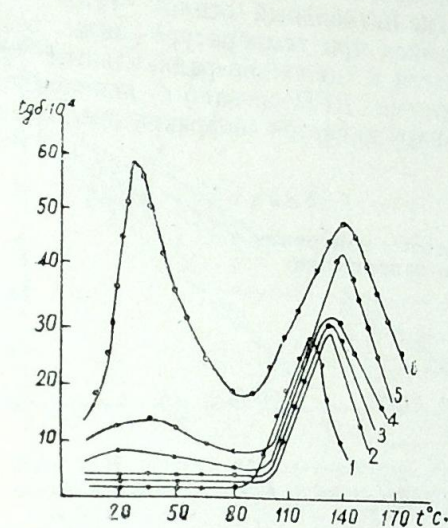


Рис. 2. Температурная зависимость $\text{tg } \delta$ ПС пленки при $t_{\text{ст}} = 5 \text{ час}$, $f = 1000 \text{ гц}$.
1—исходная пленка; 2— $U_{\text{ст}} = 3 \text{ кВ}$;
3— $U_{\text{ст}} = 4 \text{ кВ}$; 4— $U_{\text{ст}} = 5 \text{ кВ}$; 5— $U_{\text{ст}} = 6 \text{ кВ}$;
6— $U_{\text{ст}} = 7 \text{ кВ}$.

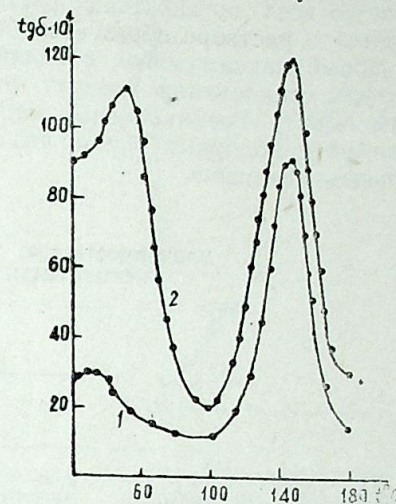


Рис. 3. Температурная зависимость $\text{tg } \delta$ при $f = 400 \text{ гц}$, $U_{\text{ст}} = 6 \text{ кВ}$, $t_{\text{ст}} = 5 \text{ час}$. 1— $\text{tg } \delta$ ПС пленки, со старившейся в ячейке без воздушного зазора; 2— $\text{tg } \delta$ ПС пленки, со старившейся в ячейке с воздушным зазором.

зора (кривая 1) и в ячейке с воздушным зазором (кривая 2). Несмотря на то, что напряжение, приходящееся на пленку в ячейке без воздушного зазора, выше, однако $\text{tg } \delta$ такой пленки во всем интервале температур меньше, причем новый максимум выражен очень слабо.

Осциллограммы тока, снятые для ячейки без воздушного зазора, при $U_{\text{ст}} = 7 \text{ кВ}$ показывают лишь слабые разряды, обусловленные воздушными включениями (из-за неровностей стекла и пленки). Таким образом, электрические разряды в воздухе у поверхности пленки вызывают резкое ухудшение ее диэлектрических свойств, что может быть объяснено наличием окислительных процессов. Окислительное действие разрядов на ПС пленку доказывается также появлением в полистироле кислородсодержащих групп C=O , OH , NO_2 , обнаруженных по инфракрасным спектрам поглощения.

Сопоставление максимумов дипольно-эластических потерь (ДЭП) ПС пленки при различных напряжениях старения показывает, что с увеличением $U_{\text{ст}}$ растет $\text{tg } \delta$, что можно объяснить увеличением числа полярных групп или примесей, химически связанных с цепью. Одновременно наблюдается смещение $\text{tg } \delta$ в сторону более высоких температур.

Это смещение означает увеличение времени релаксации сегментов макромолекулы, т. е. уменьшение их подвижности. По аналогии с работой [4] это смещение можно объяснить либо увеличением концен-

трации полярных групп в полимерной цепи, т. е. увеличением внутри и межмолекулярных взаимодействий, либо [5] поперечной сшивкой макромолекул, которая всегда уменьшает подвижность сегментов. Об образовании поперечных связей говорят также данные инфракрасных спектров поглощения, показывающие увеличение фона в области $1500 \div 700 \text{ см}^{-1}$.

О процессе сшивания свидетельствует также образование нерастворимого осадка—геля. Исходная ПС пленка растворяется практически почти во всех органических растворителях, однако в результате ее старения в растворе образуется белый нитевидный осадок—гель.

Новый максимум $\text{tg } \delta$, появляющийся при температуре ниже температуры стеклования следует отнести к дипольно-радикальным потерям (ДРП). Возникновение максимума ДРП связано с появлением в полимере полярных групп, что обнаруживается инфракрасным спектральным анализом.

Таблица 1

Зависимость ε от частоты измерения и испытательного напряжения			
$U_{\text{ст}}, \text{ кВ}$	Частота, Гц		
	400	1000	5000
5	2,55	2,55	2,55
6	2,62	2,6	2,53
7	2,77	2,67	2,57

Появление в полимере полярных групп подтверждается также зависимостью диэлектрической проницаемости ε состарившейся пленки от частоты. Для полистирола в широком диапазоне частот ε не зависит от частоты, но для пленки, состарившейся при напряжениях выше 5 кВ, наблюдается уменьшение ε с увеличением частоты (табл. 1).

Изменение температурно-временной зависимости механической прочности полистирольной пленки, вызванное действием электрических полей и разрядов

Измерения температурно-временной зависимости прочности проводились как для исходной ПС пленки, так и для пленки, подвергавшейся предварительно воздействию электрического поля при напряжении старения $U_{\text{ст}}=4 \text{ кВ}$ в течение $t_{\text{ст}}=5 \text{ час}$.

Найденная из опыта зависимость логарифма долговечности $\lg \tau$ от растягивающего механического напряжения σ при температурах 22, 42, 62°C как для исходной, так и состарившейся пленки показана на рис. 4. Каждая точка на этих графиках получена как средняя из 5—6 измерений.

Следует отметить, что полученные временные зависимости прочности при различных температурах как для исходной, так и состарившейся ПС пленки графически изображаются веерообразным семейством прямых, которые при экстраполяции в сторону меньшего времени и больших напряжений сходятся в одной точке полюсе; при некотором определенном напряжении σ (рис. 4), что аналогично результатам работы С. Н. Журкова с сотрудниками [1, 2, 7].

На рис. 5 показаны графики зависимости $\lg \tau$ от $1/T$ при $\sigma=\text{const}$ по данным, приведенным на рис. 4 (кривые 1, 2, 3). Аналогичная зависимость $\lg \tau$ от $1/T$ получается также для состарившейся пленки, если построить эту зависимость по данным рис. 4 (кривые 4, 5, 6). Как видно, эти зависимости также изображаются веерообразным семейством прямых, которые при экстраполяции пересекаются в точке, со-

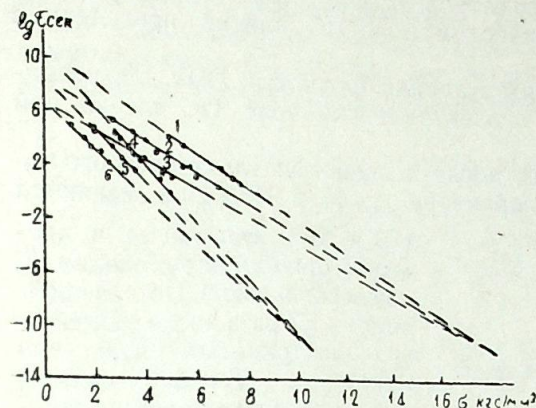


Рис. 4. Изменение долговечности ПС пленки от механического напряжения и температуры —исходная пленка: 1—22°C; 2—42°C; 3—62°C; —состарившаяся пленка (при $U_{\text{ст}}=4 \text{ кВ}$, $t_{\text{ст}}=45 \text{ час}$; 4—22°C; 5—42°C; 6—62°C.

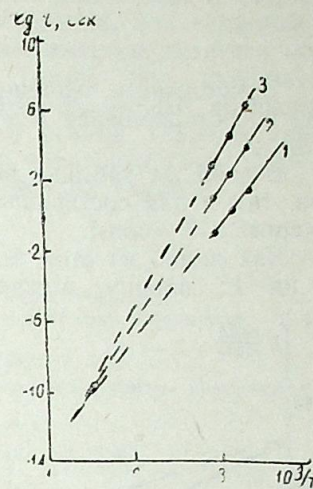


Рис. 5. Температурная зависимость долговечности исходной ПС пленки: 1— $\sigma=7,5$; 2— $\sigma=5,5$; 3— $\sigma=3,5 \text{ кгс/мм}^2$

ответствующей $\lg \tau = \lg \tau_0 = -12$ при $10^3/T = 1,26$. Здесь в отличие от экспериментальных данных, приведенных в работах [1, 2, 7], где выполняется общая закономерность температурно-временной зависимости прочности в виде

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{R_0 - T \sigma}{RT}}, \quad (1)$$

происходит так называемое смещение полюса в сторону меньших значений температуры.

Таким образом, как показывают экспериментальные данные, температурную зависимость долговечности как исходной, так и состарившейся ПС пленки, находящейся под действием постоянного механического напряжения, можно выразить уравнением, вводя в формулу (1) дополнительный член $1/T_n$, т. е.

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{R} \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right]} \quad (2)$$

где параметр U , характеризующий наклон прямых, соответствующих разным напряжениям, приобретает смысл энергии активации процесса механического разрушения, протекающего во времени. Предэкспоненциальный множитель τ_0 , который соответствует точке пересечения экстраполированных прямых (рис. 5), при $10^3/T_n = 1,26$ равен 10^{-12} сек и совпадает с периодом колебания атомов в твердом теле.

На рис. 6 приводится зависимость параметра U от напряжения σ исходной и состарившейся ПС пленки. Как видно, зависимость $U=f(\sigma)$ является линейной, т. е.

$$U = U_0 - \gamma \sigma, \quad (3)$$

где U_0 — энергия активации процесса механического разрушения в не-напряженном состоянии пленки.

Следовательно, для исходной и состарившейся ПС пленки общая зависимость долговечности от напряжения и температуры выражается уравнением:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U_0 - \gamma \sigma}{R} \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right]} \quad (4)$$

Вычисленные значения параметров τ_0 , U_0 , γ и $10^3/T_n$ для исходной и состарившейся в электрическом поле ПС пленки приведены в табл. 2.

В этой же таблице показаны значения прочности σ как для исходной, так и для состарившейся в электрическом поле ПС пленки при $\tau = \text{const}$ и $T = \text{const}$.

Как видно из этой таблицы, после воздействия электрического поля на ПС пленку величины параметра τ_0 , U_0 и $10^3/T_n$ не меняются

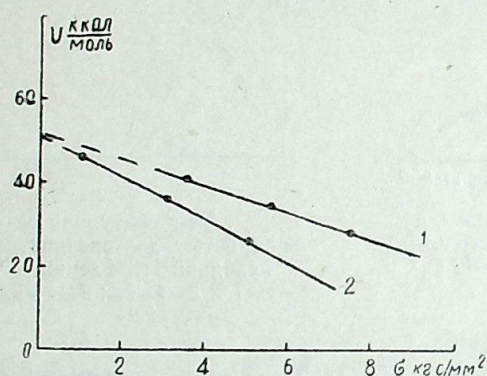


Рис. 6. Зависимость энергии активации разрыва от механического напряжения: 1 — исходная ПС пленка; 2 — состарившаяся ПС пленка при $U_{\text{ст}} = 4$ кВ и $t_{\text{ст}} = 45$ час.

(52 и 51,5 ккал/моль в пределах ошибки определения U_0 почти совпадают). Потеря прочности в 1,7 раза после воздействия электрического поля (при $\tau = \text{const}$ и $T = \text{const}$) связана только с увеличением структурно-чувствительного коэффициента γ .

Таким образом, из вышесказанного следует, что всякое изменение прочностных свойств ПС пленки, вызванное воздействием электрического поля, связано только с изменением коэффициента γ , а величина U_0 не зависит от электрического старения пленки.

В работе [2] указывается, что независимость U_0 от ориентации, пластификаций в парах жидкостей, облучения ультрафиолетовыми лучами и т. д., при которых изменяются межмолекулярные взаимодействия, а химические связи остаются неизменными, приводит к тому, что под действием механического напряжения разрыв полимеров происходит по химическим связям. Этот вывод еще раз подтверждается тем, что величина U_0 также не зависит от воздействия электрического поля. Однако изменение структурно-чувствительного коэффициента γ указывает на структурные изменения ПС пленки, вызванные электрическим старением.

Таблица 2

Полистирольная пленка	τ_0 сек	$\frac{U_0}{\text{ккал/моль}}$	$\frac{\gamma}{\frac{\text{ккал}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{мм}^2}{\text{кгс}}}$	$10^3/T_n$	$\frac{\sigma}{\text{мм}^2}$ при $t^\circ = 22^\circ\text{C}$ $\lg \tau = 2$
Исходная	10^{-12}	52,0	3,6	1,26	6,9
Подвергшаяся воздействию электрического поля при $U_{\text{ст}} = 4$ кВ и $t_{\text{ст}} = 45$ час	10^{-12}	51,5	5,2	1,26	4,0

В связи с этим отметим, что, как указано в работе [8], при ультрафиолетовом облучении карбоновых волокон постепенно изменяется их структура (за счет разрыва химических связей), а следовательно и коэффициент γ .

Здесь также можно предположить, что изменение межмолекулярных связей и, следовательно, изменение структуры ПС пленки при воздействии электрических полей и разрядов связано или с разрывом цепей, т. е. уменьшением степени ориентации, или с разрывом химических связей. Более вероятным, как нам кажется, является последний случай, т. е. разрыв химических связей под действием электрического поля и разрядов. Действительно, данные инфракрасного спектрального анализа указывают на разрыв главных цепей макромолекулы ПС пленки при воздействии электрического поля и разрядов с последующим гидрированием концевой группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журков С. Н., Томашевский Э. Е. ЖТФ, 25, 66, 1955.
2. Журков С. Н., Абасов С. А. Высокомолекулярные соединения, 3, 441, 1961; 3, 450, 1961; 4, 1704, 1962; ФТТ, 4, 2184, 1962.
3. Broens O. und Müller F. H. Kolloids., 140, 121, 1957.
4. Михайлов Г. И., Борисова Т. И. Высокомолекулярные соединения, 2, 1772, 1960.
5. Schmieder K., Wolf K. Kolloids 134, 2, 1953.
6. Тагер А. А. Физико-химия полимеров. Госхимиздат, 1963.
7. Журков С. Н. Вестн. АН СССР, 11, 75, 1957.
8. Вершинина Н. П., Регель В. Р., Черный Н. Н. Высокомолекулярные соединения, 6, 1450, 1964.

Поступило 10. III 1965

С. А. Абасов, М. Э. Багыров, Н. В. Климсва, В. П. Малин

Електрик саһәсинин полистирол плјонкасынын диелектрик вә механики хассәләринә тә'сиринин тәдғиги

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә електрик саһәсинин вә бошалмаларынын полистирол плјонкасынын диелектрик вә механики хассәләринә тә'сири өјрәнилмишдир.

Мүәјјән едилмишдир ки, електрик бошалмалары полистирол плјонкасынын електрик саһәсиндә көһнәлмәсиндә әсас рол ојнајыр. Електрик саһәсиндә полистирол плјонкасынын көһнәлмәси нәтичәсиндә о, нисбәтән полјар диелектрик хассәләри кәсб едир.

Полистирол плјонкасынын механики ғырымасы кимјәви рабитәләрдә кедир.

Мөһкәмлик хассәләринин дәјишмәси структура һәссас әмсалын дәјишмәси илә әлағәдардыр ки, бу да електрик саһәсиндә көһнәлмә нәтичәсиндә полистирол плјонкасынын структурунун дәјишдијини кәстәрир.

МҮНДЭРИЧАТ

М. Ј. Ахундзаде, И. Ы. Тагыјев, Азгабарыглы өртүклэрин гејри-хэтти мувазинэт тэнликлэринин тэгриби хэллн	3
М.-Б. Ә. Бабајев, Үмүмилэшмиш Лебег фэзасында чохдэјишэнли функцијалары бирдэјишэнли функцијаларын чэмлэри илэ јажынлашдыраркэн эн јажыш јажынлашдыран функцијанын јеканэлији һаггында	8
Ариф С. Чэфэров, Сфера үзэриндэ тэјин олунмуш функцијаларын ујғун Фејер вэ Валле-Пуссен чэмлэри васитэсилэ јажынлашдырылмасы	11
Р. Г. Гасымов, $P(x) \frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$ тэнлији үчүн Грин функцијасынын асимптотикасы	21
Х. Ы. Багыров, Банах фэзасында Гурса мәсэлэси һэллинин параметр-лэрэ көрэ дифференциалланмасы	25
М. Р. Ибраһимов, Минимум чэкиди лаирэви лөвһэлэрин бир-бириндэн асылы олмајан ики систем јук һалында лајинэ едилмэси	33
Ә. М. Мәммэдов, Гејри-хэтти интеграл тэнликлэрин тэгриби хэллн һаггында	41
К. Ә. Кэримов, Бошалмада материалларын динамик хассэлэринин бо-шалама енинэ зэрбэ үсулу илэ тэдгиги	49
Л. Г. Мустафајев, Јарымгрудларын мүнтэзэмлик синифлэри	55
Ф. Ә. Тагыјев, Трикоми мәсэлэсинин бир үмуми һалда $LU = \frac{d^2U}{dx^2} +$ $+ \operatorname{sign} u \frac{d^2U}{dy^2} = 0$ тэнлији үчүн тэгриби хэллн	60
Р. Ј. Кэримов, Л. П. Хорошун, Зөңфләдилмиш лөвһэнин еластики-пластики деформасијада кэркинлик вэзијјэти	68
А. Мухтаров, И. Нэчэфов, Н. Тенјакова, Електрон-позитрон чүтү эмэлэ кэдмэк шэртилэ гамма-квантларын нүвэнин саһэсиндэ сәпилмэси	74
Р. А. Акопјан, Ренткен шүаларынын кичик бучаглы сәпилмэси үсулу илэ Al—Zn әринтисинин сүн'и көһнэлмэ просесинин тэдгиги	81
В. С. Коган, Т. Ы. Өмэров, Вакуум вэ алчаг температур ренткен камерасы	87
Н. З. Чәлилов, Г. М. Әлијев, Монокристал селенин електрик хассэси	90
А. А. Абдуллајев, В. Ј. Барановски, Јарымкечиричи чиһазларын конструктив елементлэринин истилик параметрлэринин һесаблинмасы	96
Ј. Г. Кенис, Е. Ә. Зүлфугарзаде, Ардычыл тәсирләнән електрон рэгәмһесаблајычы машинын микропрограм идарэси	103
И. Л. Абросимов, С. Ә. Әлэскэров, Г. Л. Лиждвој, Тунелли диод үзэриндэ јығылмыш јадлаш ханәси	108
М. С. Гасымзаде, Х. Ф. һүсөјнов, Электрокинетик типли тәзјиг сејсөмөгүледичисинин тезлик хусусијјэтлэри	116
М. А. Топчубашов, Ә. С. Аллаһгулијев, Идарәетмэ объектинин динамик елементинин (гаршылыгы, пәјланмыш) тәнликлэри системийин хэллн методикасы	123
А. Ә. Әфәндизаде, С. М. Багыров, Гејри-симметрик чэрәјанда бәсләнән асинхрон мүнәррикин кечид просесинин һесаблинмасында електрон ријазы машиналарын тәтбиги	130
С. А. Абасов, М. Ә. Багыров, И. Н. Климова, В. П. Мәли, Електрик саһэсинин полистирол пәјонкасынын диелектрик вэ механики хассэ-лэринэ тәсиринин тэдгиги	137

СОДЕРЖАНИЕ

М. Ю. Ахундзаде, И. Г. Тагиев. Приближенный метод решения уравнений равновесия пологих оболочек при больших прогибах	3
М.-Б. А. Бабаев. О единственности наилучшей приближающей функции при приближении функций многих переменных суммами функций одной переменной в обобщенном пространстве Лебега	8
Ариф С. Джфаров. Приближение функций на сфере аналогами сумм Фейера и Валье-Пуссена	15
Р. К. Касумов. Асимптотика функции Грина для уравнения $P(x) \frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2}$	21
Х. Г. Багиров. Дифференцируемость решения задачи Гурса по параметрам в пространстве Банаха	25
М. Р. Ибрагимов. Проектирование круглой пластинки минимального веса при двух независимых системах нагрузок	33
А. М. Мамедов. О приближенном решении нелинейных интегральных уравнений	41
К. А. Керимов. Экспериментальное исследование динамических свойств материалов методом разгружающего поперечного удара	49
Л. Г. Мустафаев. Классы регулярности полугруд	55
Ф. А. Тагисв. Приближенное решение задачи трикоми в одном общем случае для уравнения $LU = \frac{d^2U}{dx^2} + \operatorname{sign} y \frac{d^2U}{dy^2} = 0$	60
Р. Ю. Керимов, Л. П. Хорошун. Упруго-пластическое напряженное состояние пластинки с отверстием	68
А. Мухтаров, И. Наджафов, Н. Теняков. К рассеянию гамма-квантов в голе ядра с образованием электрон-позитронных пар	74
Р. А. Акопян. Исследование процесса искусственного старения сплава Al—Zn методом малуглового рассеяния рентгеновых лучей	81
В. С. Коган, Т. Г. Омаров. Вакуумная и низкотемпературная рентгеновская камера	87
Н. З. Джалилов, Г. М. Алиев. Электрические свойства монокристаллов селена	90
А. А. Абдуллаев, В. Ю. Барановский. Расчет тепловых параметров конструктивных элементов полупроводниковых приборов	96
Я. Г. Генис, Э. Э. Зульфугарзаде. Микропрограммное управление последовательной ЦВМ	103
И. Л. Абросимов, С. А. Алескров, Г. Л. Лиждвой. Запоминающая ячейка на туннельном диоде	108
М. С. Касимзаде, Х. Ф. Гусейнов. Частотные свойства электрокинетического сейсмоприемника давления	116
М. А. Топчибашев, А. С. Аллахкулиев. Методика решения системы уравнений динамики элемента (с распределенными взаимосвязями) управляемого объекта	123
А. А. Эфендизаде, С. М. Багиров. Применение цифровых вычислительных машин для расчета переходных процессов асинхронного двигателя при несимметричном питании	130
С. А. Абасов, М. А. Багиров, Н. В. Климова, В. П. Малин. Исследования влияния электрического поля на диэлектрические и механические свойства полистирольной пленки	137