

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

6

1963

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ—БАКУ

М. Г. ДЖАВADOB

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $V = V_t$ — переменная полоса $0 \leq x_1 \leq t$, а $S = S_t$ — плоскость $x_1 = t$, где $0 \leq t \leq 1$ и

$$L_\varepsilon U = \varepsilon a U + b U,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр,

$$a = \sum a_\alpha(x) D^\alpha, \quad b = \sum b_\beta(x) D^\beta$$

суть линейные гиперболические операторы порядка $m+1$ и m , соответственно, $|\alpha| \leq m+1$, $|\beta| \leq m$, $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} \left(D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$L_\varepsilon U = \varepsilon a U + b U = f, \quad (1)$$

$$D_i^k U|_{x_i=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (2)$$

Цель нашей работы заключается в том, чтобы, пользуясь методом М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1], построить асимптотику по малому параметру решения поставленной задачи (1), (2).

Прежде чем приступить к построению асимптотики решения, мы напишем другое выражение оператора L_ε вблизи границы $x_1 = 0$. Для этого произведем замену переменных $x_1 = \varepsilon \tau$ и разложим коэффициенты L_ε по степеням ε .

$$a_\alpha(x) = a_\alpha^0(\eta) + \sum_{i=1}^n a_\alpha^i(\eta)(\varepsilon \tau)^i + a_\alpha^{n+1}(x)(\varepsilon \tau)^{n+1}$$

$$b_\beta(x) = b_\beta^0(\eta) + \sum_{i=1}^n b_\beta^i(\eta)(\varepsilon \tau)^i + b_\beta^{n+1}(x)(\varepsilon \tau)^{n+1},$$

где

$$\eta = (x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Подставляя эти выражения коэффициентов в L_ε и учитывая, что

$$D_1^m = \varepsilon^{-m} \frac{\partial^m}{\partial \tau^m}, \quad \text{получим}$$

742503
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Киргизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескерев, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)“

Подписано к печати 18/II-1964 г. Формат бумаги $70 \times 108^{1/16}$. Бум. лист. 4,0. Печ. лист. 10,96. Уч.-изд. лист 9,7. ФГ 07914. Заказ 9. Тираж 530. Цена 80 коп.

Типография «Красный Восток» Государственного Комитета
Совета Министров Азербайджанской ССР по печати.
Баку, ул. Ази Асланова, № 80.

$$L_\varepsilon = \varepsilon^{-m} \left(M_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon^j M_j \right), \quad (3)$$

где

$$M_0 = \frac{\partial^{m+1}}{\partial \tau^{m+1}} + b_1^0(\tau) \frac{\partial^m}{\partial \tau^m}.$$

Выражение (3) называют вторым расщеплением оператора L_ε .
Решения (1), (2) будем искать в виде:

$$U = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \varepsilon^m \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i + \varepsilon^{n+1} Z_n, \quad (4)$$

где функции W_i и v_i определяются итерационными процессами.
В первом итерационном процессе приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$U = W_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i W_i. \quad (5)$$

Подставляя выражение для $U(x)$ из (5) в (1) и сравнивая члены с одинаковыми степенями по ε , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} b W_0 &= f, \\ b W_i &= -a W_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия, при которых определяются функции W_i , будут сформулированы чуть позже.

Во втором итерационном процессе приближенное решение однородного уравнения

$$L_\varepsilon v = 0$$

ищется в виде

$$v = \varepsilon^m \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i \right).$$

Подставляя это выражение для $v(x)$ в уравнение $L_\varepsilon v = 0$ и сравнивая члены с одинаковыми степенями по ε , получим:

$$M_0 v_0 = 0, \quad M_0 v_i = - \sum_{s=1}^i M_s v_{i-s}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Очевидно, результаты обоих итерационных процессов в каждом этапе связаны граничными условиями. Для выявления этой связи подставим выражение решения из (4) в (2). Тогда получим

$$\begin{aligned} D_1^k U|_{x_1=1} &= D_1^k \left(W_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i W_i \right) \Big|_{x_1=0} + \\ &+ \varepsilon^{m-k} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left(v_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i \right) \Big|_{\tau=0} + \varepsilon^{n+1} D_1^k Z_n \Big|_{x_1=0} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

$$k = 0, 1, \dots, m.$$

В последнем выражении, сравнивая коэффициенты при $\varepsilon^i (i \leq n)$, получим

$$D_1^k W_i \Big|_{x_1=0} + \frac{\partial^k v_{i-m+k}}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (9)$$

Тогда в (8) уничтожатся все члены порядка $\varepsilon^k (k \leq n)$ и для остаточного члена получим следующее начальное условие:

$$D_1^k Z_n|_{x_1=0} = \varphi_k, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (10)$$

где φ_k суть известные функции.

Условие (9) напомним в следующем виде:

$$D_1^k W_i = - \frac{\partial^k v_{i-(m-k)}}{\partial \tau^k} \Big|_{\tau=0}, \quad (11)$$

если $0 \leq k < m$, причем предполагается, что $v_{-j} = 0$, если $j > 0$ и

$$\frac{\partial^m v_i}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = - D_1^m W_i \Big|_{x_1=0}. \quad (12)$$

Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (1) являются гладкими функциями. Определим функции W_i и $v_i (i = 0, 1, \dots, n)$.

Функция W_0 определяется из следующей задачи:

$$b W_0 = f,$$

$$D_1^k W_0|_{x_1=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда на основе (12) v_0 есть решение уравнения

$$\frac{\partial^{m+1} v_0}{\partial \tau^{m+1}} + b_1^0(\tau) \frac{\partial^m v_0}{\partial \tau^m} = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^m v_0}{\partial \tau^m} \Big|_{\tau=0} = - D_1^m W_0 \Big|_{x_1=0}. \quad (13)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v_0 = C^0(\tau) e^{-b_1^0(\tau)\tau},$$

где $C^0(\tau)$ определяется из условия (13).

Очевидно, если $b_1^0(\tau) > 0$, то функция

$$v_0(x) = C^0(\tau) e^{-b_1^0(\tau) \frac{x_1}{\varepsilon}}$$

есть функция типа пограничного слоя вблизи границы $x_1 = 0$.

После того, как определены функции W_0 и v_0 , следующие функции определяются по индукции.

Пусть для некоторого $i, i \leq n$ уже определены все функции W_s и v_s при $s < i$. Тогда в i -ом уравнении (6) и начальных условиях (11) правые части уже известны. При сделанных предположениях относительно коэффициентов и правой части уравнения (1) задача (6) и (11) имеет единственное достаточно гладкое решение.

Теперь определим v_i . В уравнении (7) для v_i и в начальных условиях (12) правые части суть известные функции. Кроме того, в уравнении (7) правые части являются функциями типа пограничного слоя вблизи $x_1 = 0$. Тогда, очевидно, решения этих задач, т. е. v_i тоже будут функциями типа пограничного слоя вблизи $x_1 = 0$.

Умножим все функции v_i на сглаживающую функцию $\psi_i\left(\frac{x_1}{\delta}\right)$ и новые функции снова обозначим через v_i .

Таким образом, мы определили все функции W_i и v_i , входящие в разложение (4).

Теперь оценим остаточный член. Для этого к выражению (4) применяем оператор L_ε , причем к первому и последнему слагаемому будем применять первое расщепление L_ε , а ко второму — второе. Получим

$$f = L_\varepsilon U = (\varepsilon a + b) \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \left(M_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i M_i \right) \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i + \varepsilon^{n+1} L_\varepsilon Z_n.$$

Если учесть уравнения, полученные первыми и вторыми итерационными процессами, то в последнем выражении погасятся все члены при ε^i , $i \leq n$ и для Z_n получим следующее уравнение:

$$L_\varepsilon Z_n = g(x), \quad (14)$$

где $g(x)$ — известная функция.

Кроме этого Z_n удовлетворяет начальным условиям (10).

Прежде чем оценить Z_n ищем его в виде $Z_n = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)}$, где $Z_n^{(1)}$ удовлетворяет граничным условиям (10) и имеет m ограниченных производных.

Очевидно, при $0 \leq x_1 \leq n$ можно положить

$$Z_n^{(1)} = \psi(x_1) \sum_{k=0}^m \frac{\varphi_k}{k!} x_1^k,$$

где $\psi(x_1)$ — сглаживающая функция.

Тогда $Z_n^{(2)}$ будет решением следующей задачи:

$$L_\varepsilon Z_n^{(2)} = g(x) - L_\varepsilon Z_n^{(1)} = g_1(x), \quad (15)$$

$$D_i^k Z_n^{(2)}|_{x_i=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (16)$$

Пусть $Pa = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$, где $|\alpha| = m+1$ и $Pb = \sum b_\beta(x) D^\beta$, где

$|\beta| = m$.

Говорят, что оператор b разделяет a , если для всех x листы поверхности $Pb(x, \xi) = 0$ разделяют листы $Pa(x, \xi) = 0$.

Имеет место следующая

Лемма. Если коэффициенты и правая часть уравнения (1) суть достаточно гладкие функции и оператор b разделяет a , то имеет место неравенство:

$$|D^{m-1}U, V| \leq M|f, V|, \quad (17)$$

где M — постоянная, не зависящая от ε ,

$$|D^{m-1}U, V| = \int \sum |D^\alpha U|^2 dV, \quad \alpha \leq m+1.$$

Для доказательства леммы обе части уравнения (1) умножим на bU и результат проинтегрируем по V . Получим

$$\varepsilon \int_V aU \cdot bU dV + \int_V (bU)^2 dV = \int_V f \cdot bU dV. \quad (18)$$

Преобразуем первый член (18). Для этого напомним произведение $aU \cdot bU$ в следующем виде:

$$aU \cdot bU = \sum D_i A^i U + A^0 U,$$

где A^i суть двойные дифференциальные операторы порядка m ; m . Тогда

$$\int_V aU \cdot bU dV = \int_V \sum D_i A^i U dV + \int_V A^0 U dV.$$

Если учесть, что функции U финитны в V и при $x_1 = 0$ удовлетворяют нулевым начальным условиям, то последнее равенство можно писать так:

$$\int_V aU \cdot bU dV = \int_V A^1 U dS + \int_V A^0 U dV. \quad (19)$$

В работе [2] доказано, что

$$\int_S A^1 U dS \geq C^{-1} |D^m U, S|^2 - C |D^{m-1} U, S|^2. \quad (20)$$

Тогда

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq C^{-1} |D^m U, S|^2 - C |D^{m-1} U, S|^2 + \int_V A^0 U dV.$$

Кроме этого, имеет место неравенство:

$$\int_V A^0 U dV \leq C_1 |D^m U, V|^2.$$

Поэтому

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq C^{-1} |D^m U, S|^2 - C |D^{m-1} U, S|^2 - C_1 |D^m U, V|^2.$$

Интегрируя последнее равенство по t , получим

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq C^{-1} |D^m U, V|^2 - C |D^{m-1} U, V|^2 - C_1 t |D^m U, V|^2$$

или

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq (C_2 - C_1 t) |D^m U, V|^2 - C |D^{m-1} U, V|^2. \quad (21)$$

Если t достаточно мало, то $C_2 - tC_1 > 0$. Покажем, что неравенство (21) имеет место по всему V . Для этого проинтегрируем равенство

$$aU \cdot bU = \sum D_i A^i U + A^0 U$$

по V_t ($t_0 \leq t \leq t_1$). При этом получим

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV_t = \int_{S_{t_1}} A^1 U dS_{t_1} - \int_{S_{t_0}} A^1 U dS_{t_0} + \int_{V_t} A^0 U dV_t.$$

Если учесть равенство (19), то имеем

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV_t = \int_{S_{t_1}} A^1 U dS_{t_1} - \int_{V_t} aU \cdot bU dV_t + \int_{V_t} A^0 U dV_t + \int_{V_t} A^0 U dV_t$$

или

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV_t = \frac{1}{2} \int_{S_{t_1}} A^1 U dS_{t_1} + \int_{V_t} A^0 U dV_t.$$

Учитывая неравенство (20) и оценку для последнего члена, получим

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV \geq C_1 |D^m U, S_{t_1}|^2 - C |D^{m-1} U, S_{t_1}|^2 - C_2 |D^m U, V_t|^2.$$

Принтегрируем последнее неравенство от t_0 до t_1 :

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV_t \geq C_1 |D^m U, V_t|^2 - C |D^{m-1} U, V_t|^2 - (t_1 - t_0) C_2 |D^m U, V_t|^2.$$

или

$$\int_{V_t} aU \cdot bU dV \geq [C_1 - C_2(t_1 - t_0)] |D^m U, V_t|^2 - C |L^{m-1} U, V_t|^2.$$

Если $t_1 - t_0$ мало, то $C_1 - C_2(t_1 - t_0) > 0$.

Аналогично шаг за шагом, продолжая процесс, получим, что по всему V имеет место неравенство:

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq C_1 |D^m U, V|^2 - C |D^{m-1} U, V|^2.$$

Тогда в последнем неравенстве можно отбросить слагаемое $C_1 |D^m U, V|^2$. В результате имеем

$$\int_V aU \cdot bU dV \geq -C |D^{m-1} U, V|^2.$$

Подставляя эту оценку в (18), получим

$$\varepsilon C |D^{m-1} U, V|^2 + \int_V (bU)^2 dV \leq \int_V f \cdot bU dV$$

или

$$\varepsilon C |D^{m-1} U, V|^2 = \int_V (bU)^2 dV \leq \frac{1}{2r} \int_V f^2 dV + \frac{r}{2} \int_V (bU)^2 dV.$$

Отсюда

$$-2\varepsilon C |D^{m-1} U, V|^2 + (2-r) \int_V (bU)^2 dV \leq \frac{1}{r} \int_V f^2 dV.$$

Так как b — гиперболический оператор порядка m , то

$$C |D^{m-1} U, V|^2 \leq \int_V (bU)^2 dV.$$

Поэтому

$$-\varepsilon C_1 |D^{m-1} U, V|^2 + C_2 |D^{m-1} U, V|^2 \leq M_1 |f, V|^2.$$

Из последнего неравенства получим

$$(C_2 - \varepsilon C_1) |D^{m-1} U, V|^2 \leq M_1 |f, V|^2.$$

Если ε малое число, то $C = C_2 - \varepsilon C_1 > 0$. Тогда из последнего неравенства имеем

$$|D^{m-1} U, V| \leq M |f, V|.$$

Если доказанную лемму применить к задаче (14) и (10), получим

$$|D^{m-1} Z_n^{(2)}, V| \leq C |g_1, V|.$$

Так как

$$|D^{m-1} Z_n, V| \leq |D^{m-1} Z_n^{(1)}, V| + |D^{m-1} Z_n, V|,$$

то Z_n — ограниченная функция в смысле указанной метрики.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если коэффициенты и правая часть уравнения (1) суть гладкие функции $b_1^0(\eta) > 0$ и оператор b разделяет a , то решение задачи (1) и (2) представимо в виде (4), где функции W_i определяются первым, а v_i вторым итерационным процессом. Остаточный член стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, как ε^{n+1} в смысле указанной метрики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. УМН, т. XV, вып. 3 (93), 1960.
2. Гордлинг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. ИЛ, 1961.

М. Н. Чавалов

Лүксәк тәртиб төрәмәдә кичик параметри олан гиперболик тип тәнлији үчүн Коши мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә

$$\varepsilon au + bu = f \quad (1)$$

тәнлији үчүн Коши мәсәләси һәлл олунур, һарадакы a вә b үлгүн оларак $m+1$ вә m тәртибли гиперболик тәнликләрдир.

Теорем. Әкәр (1) тәнлијинин әмсаллары вә сағ тәрәфи һамар функцијалардырса, $b_1^0(\eta) > 0$ вә b оператору a -ны бөлүрсә, онда Коши мәсәләсинин һәлли

$$U = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \varepsilon^m \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i + \varepsilon^{n+1} Z_n$$

белә олур. Һарадакы W_i биринчи v_i иккинчи итерасија методу илә тапылан һәллдир. Галыг һәдди ε сыфра јахынлашанда ε^{n+1} тәртибдән көстәрилән метрика мәнасында сыфра јахынлашыр.

Ш. И. ВЕКИЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D(u) = \sum_{i,j}^{1,3} d_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^{1,3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d, \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (1)$$

где a_{ik} — трижды непрерывно дифференцируемые функции (x) в замкнутой области $\bar{G}$ трехмерного пространства, ограниченной поверхностью G .

Пусть $L \subset G$ — замкнутая линия непрерывной кривизной, вне которой G — гладкая в смысле Ляпунова и

$$\theta = \sup_{s \in L} |\pi - \alpha(s)|,$$

где $\alpha(s)$ (s — длина дуги) — углы, образованные касательными в любой точке на угловой линии L справа и слева.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию:

$$u(x) = f(x) \quad x \in L. \quad (2)$$

Найдем сначала решение однородного самосопряженного уравнения:

$$L(u) = \sum_{i,j}^{1,3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3)$$

с краевым условием (2).

Пусть $\Delta = \det \| d_{ik}(x) \|$. Обозначим, через A_{ik} частное отделение алгебраического дополнения элемента a_{ij} на Δ и рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$\sigma(x, \xi) = \sum_{i,j}^{1,3} A_{ij}(x)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j).$$

В силу условия эллиптичности

$$\sigma(x, \xi) \leq \mu^2 \sum_i^{1,3} (x_i - \xi_i)^2,$$

Ш. И. ВЕКЛОВ

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ЛИНИЯМИ

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка:

$$D(u) = \sum_{i,j}^{1,3} d_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^{1,3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = d, \quad (a_{ij} = a_{ji}) \quad (1)$$

где a_{ik} — трижды непрерывно дифференцируемые функции (x) в замкнутой области G трехмерного пространства, ограниченной поверхностью Γ .

Пусть $L \subset \Gamma$ — замкнутая линия непрерывной кривизной, вне которой Γ — гладкая в смысле Ляпунова и

$$\theta = \sup_{s \in L} |\pi - \alpha(s)|,$$

где $\alpha(s)$ (s — длина дуги) — углы, образованные касательными в любой точке на угловой линии L справа и слева.

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию:

$$u(x) = f(x) \quad x \in L. \quad (2)$$

Найдем сначала решение однородного самосопряженного уравнения:

$$L(u) = \sum_{i,j}^{1,3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (3)$$

с краевым условием (2).

Пусть $\Delta = \det \| d_{ik}(x) \|$. Обозначим, через A_{ik} частное отделение алгебраического дополнения элемента a_{ij} на Δ и рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$c(x, \xi) = \sum_{i,j}^{1,3} A_{ij}(x)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j).$$

В силу условия эллиптичности

$$c(x, \xi) \leq \mu^2 \sum_i^{1,3} (x_i - \xi_i)^2,$$

где μ — наибольшее собственное значение матрицы $\|A_{ij}(x)\|$ в $\bar{g}$. Возьмем

$$\psi(x, \xi) = \frac{1}{[\sigma(x, \xi)]^{1/2}},$$

строим функцию:

$$\Gamma(x, \xi) = \psi(x, \xi) + \int_{\Gamma} \psi(x, t) f(t, \xi) d\tau_t,$$

причем $f(x, \xi)$ определяется из того условия, чтобы $\Gamma(x, \xi)$ как функция (x) была решением уравнения (3). Доказано [1], что $f(x, \xi)$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода, и что эта функция — непрерывная функция точек (x) и (ξ) , если они не совпадают, и полярна порядка не выше $\frac{1}{r}$ при совпадении указанных точек.

Возьмем функцию

$$\delta(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(n, x_k),$$

где n — внешняя нормаль к поверхности Γ в точке $x \in \Gamma - L$.

Доказывается [4], что

$$\int_{\Gamma} \delta_x [K(x, \xi)] d\Gamma_x = \begin{cases} 4\pi & \text{при } \xi \in g \\ 2\pi & \text{„ } \xi \in \Gamma - L \\ 0 & \text{„ } \xi \in R - (g + \Gamma). \end{cases}$$

Причем

$$K(x, \xi) = \frac{\Gamma(x, \xi)}{E(\xi)},$$

где $E(\xi)$ — некоторая положительная ограниченная, а вне линии L непрерывно дифференцируемая до второго порядка функция.

Будем считать, что коэффициенты a_{ik} уравнения (3) продолжены с сохранением непрерывности производных до третьего порядка на все пространство так, что вне некоторой сферы D_1 уравнение (3) есть уравнение Лапласа, т. е. $L(u) = \Delta u$ вне D_1 . Если (x) лежит вне D_1 , то $\sigma(x, \xi) = r^2$ при любом положении (ξ) и $E(x) = 1$.

Тогда функция $K(x, \xi)$ определена во всем пространстве и доказывается, что $K(x, \xi)$ — симметричная функция. Она аналогична решению уравнения Лапласа, а оператор $\delta(u)$ в случае уравнения Лапласа переходит в производную по нормали $\frac{du}{dn}$.

Ищем решение в виде потенциала двойного слоя:

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \delta_{\xi} [K(x, \xi)] \mu(\xi) d\Gamma_{\xi}. \quad (4)$$

Как известно [4], при приближении точки (x) к точке (x_0) , лежащей на $\Gamma - L$ изнутри поверхности Γ , потенциал (4) имеет предельные значения

$$W_i(x_0) = \mu(x_0) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \delta_{\xi} [K(x_0, \xi)] d\Gamma_{\xi}.$$

Поэтому предельная задача (2), (3) сводится к сингулярному интегральному уравнению для неизвестной $\mu(x)$:

$$\mu(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \delta_{\xi} [K(x, \xi)] \mu(\xi) d\Gamma_{\xi} = f(x), \quad x \in \Gamma - L \quad (7)$$

справедливости которого не требуется для точек угловой линии L .

Пусть

$$\delta_{\xi} [K(x, \xi)] = Q(x, \xi). \quad (8)$$

Опишем вокруг каждой точки на L сферы радиуса δ . Совокупность этих сфер, образуя трубчатую поверхность, выражает из данной поверхности Γ область в виде двух полос — D_1 и D_2 (рис. 1). Определим ядро $G(x, \xi)$ следующим образом.

1°. $G(x, \xi)$ отлично от нуля, когда x и ξ принадлежат различным полосам — D_1 и D_2 и совпадает при этом с $Q(x, \xi)$.

2°. $G(x, \xi) = 0$ во всех остальных случаях. Положим

$$Q(x, \xi) = G(x, \xi) + R(x, \xi). \quad (9)$$

Ядро $R(x, \xi)$, определяемое посредством (9), разложим на два ядра:

$$R(x, \xi) = G_1(x, \xi) + R_1(x, \xi),$$

где $G_1(x, \xi) = R(x, \xi)$, при $r_{x\xi} \leq \eta > 0$,

$G_1(x, \xi) = 0$ при $r_{x\xi} > \eta$.

Из этого определения вытекает, что $R_1(x, \xi)$ ограничено.

Докажем, что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\int_{\Gamma} |G(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} < \frac{\theta}{E \mu^3 \pi} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (10)$$

где $E = \inf E(\xi)$ и μ — наименьшее собственное значение матрицы $\|A_{ij}(\xi)\|$ на Γ .

Для этого допустим, что $x \in D_1$ и $\xi \in D_2$.

Тогда в силу того, что

$$\delta_{\xi} [K(x, \xi)] = \delta_{\xi} [K(\xi, x)] = \frac{r \cos(r, n_{\xi})}{E(x) [\sigma(\xi, x)]^{3/2}} + R(x, \xi),$$

где

$$R(x, \xi) = 0 \left(\frac{1}{r_{x\xi}} \right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |G(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} &\leq \frac{1}{E(x)} \int_{D_2} \frac{r |\cos(r, n_{\xi})|}{\sigma^{3/2}(\xi, x)} d\Gamma_{\xi} + \int_{D_2} \frac{|\nu(\xi)|}{r} dF_{\xi} \leq \\ &\leq \frac{1}{E \mu^3} \int_{D_2} \frac{|\cos(r, n_{\xi})|}{r^2} d\Gamma_{\xi} + \int_{D_2} \frac{|\nu(\xi)|}{r} d\Gamma_{\xi}, \end{aligned}$$

$\nu(\xi)$ — некоторая непрерывная функция на Γ .

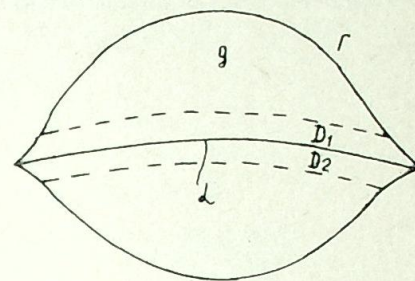


Рис. 1

Можно доказать, что независимо от $x \in D_{\perp}$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ столь малым, что

$$\int_{D_2} \frac{|v(r)|}{r} d\Gamma_{\xi} < \frac{\varepsilon}{4},$$

и

$$\int_{D_2} \frac{|\cos(r, n_{\xi})|}{r^2} dF_{\xi} < \frac{\theta}{\pi} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Отсюда получаем неравенство (10).

Теперь докажем, что при достаточно малом $\eta > 0$ имеет место

$$\int_{\Gamma} |G_{\perp}(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

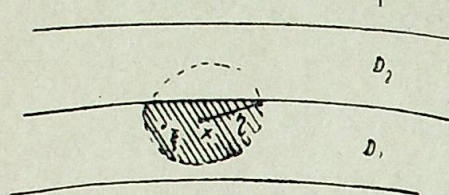


Рис. 2

Возьмем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |G_{\perp}(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} &= \int_{\Gamma} |R(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} = \\ &= \int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} |Q(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} \leq \\ &\leq \frac{1}{E(x)} \int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} \frac{r |\cos(r, n_{\xi})|}{\sigma_{3/2}(x, \xi)} d\Gamma_{\xi} + \int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} \frac{|v(\xi)|}{r} d\Gamma_{\xi}. \end{aligned}$$

Подберем $\eta > 0$ достаточно малым, так, чтобы

$$\int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} \frac{r |\cos(r, n_{\xi})|}{\sigma_{3/2}(x, \xi)} d\Gamma_{\xi} < \frac{1}{\mu^3} \int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} \frac{|\cos(r, n_{\xi})|}{r^2} d\Gamma_{\xi} < \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\int_{(r_{x,\xi} < \eta, \xi \in D_{\perp})} \frac{|v(\xi)|}{r} d\Gamma_{\xi} < \frac{\varepsilon}{4},$$

Следовательно неравенство (11) доказано.

Таким образом,

$$\int_{\Gamma} |G(x, \xi) + G_{\perp}(x, \xi)| d\Gamma_{\xi} < \frac{\theta}{E \mu^3 \pi} + \varepsilon. \quad (12)$$

Для решения уравнения (7) введем в рассмотрение функции $\omega(x, \xi)$ и для $F(x)$, определяемые посредством равенств:

$$\omega(x, \xi) + \lambda \int_{\Gamma} [G(x, t) + G_{\perp}(x, t)] \omega(t, \xi) d\Gamma_t = R_{\perp}(x, \xi), \quad (13)$$

$$F(x) + \lambda \int_{\Gamma} [G(x, t) + G_{\perp}(x, t)] F(t) d\Gamma_t = f(x). \quad (14)$$

Согласно (12) решения этих уравнений, если выбрать δ и η соответствующим образом, находятся методами последовательных приближений в любой области

$$|\lambda| < R' < \frac{E \mu^3 \pi}{\theta}. \quad (15)$$

Из (13) следует, что функция $\omega(x, \xi)$ ограничена. Если в уравнении (7) вместо ядра $Q(x, \xi)$ подставим $G(x, \xi) + G_{\perp}(x, \xi) + R_{\perp}(x, \xi)$ и вне-

сем в (7) значения $R_{\perp}(x, \xi)$ и $f(x)$ из последних уравнений, то получим:

$$\Phi(x) + \lambda \int_{\Gamma} [G(x, \xi) + G_{\perp}(x, \xi)] \Phi(\xi) d\Gamma_{\xi} = 0, \quad (16)$$

где

$$\Phi(x) = \mu(x) + \lambda \int_{\Gamma} \omega(x, \xi) \mu(\xi) d\Gamma_{\xi} = F(x).$$

Согласно вышеизложенному уравнение (16) в области $|\lambda| < \frac{E \mu^3 \pi}{\theta}$

не имеет отличных от нуля решений. Следовательно, все решения уравнения (7) удовлетворяют уравнению

$$\mu(x) + \lambda \int_{\Gamma} \omega(x, \xi) \mu(\xi) d\Gamma_{\xi} = F(x), \quad (17)$$

к которому метод Фредгольма применим в области $|\lambda| < \frac{E \mu^3 \pi}{\theta}$. Так

как по нашему предположению величина $\frac{E \mu^3 \pi}{\theta}$ больше единицы, то

теорию Фредгольма можно применить для решения интегрального уравнения (17) при $\lambda = 1$, решающего задачу (2), (3). Далее применяется метод Карлемана [3], можно установить, что задача (2), (3) однозначно разрешима.

Перейдем к решению задачи (1), (2):

Пусть функции b_i , c и d непрерывны и имеют непрерывную первую производную в $g + \Gamma$.

Напишем уравнение (1) в виде:

$$D(u) = L(u) + \sum_{i=1}^{1,3} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = d. \quad (1)$$

Тогда решение задачи (1), (2) эквивалентно решению интегрального уравнения [4]:

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \int_g \left[GC - \sum_{i=1}^{1,3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (CB_i) \right] U d\tau_x - \frac{1}{4\pi} \int_g d \cdot G d\tau_x + v(x), \quad (18)$$

где $v(x)$ есть решение уравнения (3) с краевым условием (2). Существование этого решения нами доказано, $G(x, \xi)$ есть функция Грина для уравнения (3) (т. е. фундаментальное решение (3) с нулевыми граничными условиями). Уравнение (18) есть уравнение Фредгольма, поэтому можем сказать, что задача (1), (2) имеет либо единственное регулярное решение, либо имеет решение тогда и только тогда, когда функция

$$v(x) - \int_g d \cdot G(x) d\tau_x$$

удовлетворяет условию ортогональности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леви Э. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. "Усп. матем. наук", т. VIII, 1941.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, 1953.
3. Carleman T. Über das Neumann—Poincarésche Problem für ein Gebiet mit Ecken, Uppsala, 1916.

Ш. И. Вәкилов

Бучаг хэтти олан областда еллиптик тәнлијә мэхсус Дирихле мәсәләсинин һәлли

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә икинчи тәртиб еллиптик типли

$$D(u) = \sum_{i,j}^{1,3} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i^{1,3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (1)$$

дифференциал тәнлијинә мэхсус биринчи сәрһәд мәсәләси тәдгиг еди-
лир. Бурада a_{ij} — Γ сәтһилә әһатә олуиуш g үчөлчүлү областында
(x)-ә көрә үч дәфә кәсилмәз төрәмәси олан функцијалардыр.

$LC\Gamma$ кәсилмәз әјрилијә малик олан елә гапалы хәтдир ки, бу
хәтдән кәнарда Γ сәтһи Лјапунов мә'нада һамардыр вә

$$b = \sup_{s \in L} [\pi - \alpha(s)]$$

$\alpha(s)$ (s —гөвс узунлуғудур)— L хәтти үзәриндә көтүрүлмүш нөгтәдән
чәкилән тохунан сол-сағ мүстәвиләр арасында галан хәтти бучагдыр.

Карлеман үсулундан истифадә едәрәк, әввәлчә

$$L(u) = \sum_{i,j}^{1,3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (2)$$

$$u(x) = f(x) \quad x \in L \quad (3)$$

сәрһәд мәсәләсинин һәллинин варлығы вә јеканәлији кәстәрилир вә
[1] [3] мәсәләсинин һәллинин һансы шәртләр дахилиндә олуб-олма-
масы тәсдиг едилир.

Д. Г. АГАЛАРОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВЯЗКО-НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ

При рассмотрении продольных волн в материалах с существенным
влиянием скорости деформирования свойства материалов описываются
следующей зависимостью:

$$E \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Phi[\sigma - f(e)], \quad (1)$$

где

t —время,

e —деформация,

σ —напряжение,

$f(e)$ —статическое напряжение, соответствующее деформа-
ции e ,

E —модуль упругости,

$\Phi[\sigma - f(e)]$ —функция, установленная экспериментально.

В работе [2] получено решение на фронте волны и приведены
численные решения некоторых одномерных задач.

В работе [3] методом преобразования Лапласа получены инте-
гральные представления решений и исследованы асимптотические реше-
ния.

Ввиду ограниченности применения зависимости (1) для различных
материалов, в данной работе рассматривается более общая зависимость,
учитывающая изменение скорости звука от деформации.

Доказывается существование централизованных волн, получены усло-
вия на фронте ударной волны, получено также приближенное реше-
ние и приведено численное решение. Дана методика эксперименталь-
ного определения неизвестных функций, описывающих свойства мате-
риалов.

1. Зависимость между напряжениями и деформациями

Зависимость (1) принята исходя из постоянства скорости звука
в стержне. Рассматриваемая зависимость имеет вид:

$$E(e) \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + d \Phi[\sigma - f(e)], \quad (2)$$

где d —физическая константа, размерность которой обратна размер-
ности времени; $E(e)$ и $\Phi[\sigma - f(e)]$ —некоторые функции, определяе-
мые экспериментально, причем

$$E(e) > 0; \operatorname{sign} \Phi[\sigma - f(e)] = \operatorname{sign} \sigma; \Phi[0] = 0.$$

При весьма медленном деформировании в зависимости (2) можно опустить дифференциальные члены и получить статическую зависимость в виде $\sigma = f(e)$.

2. Основные уравнения

Рассмотрим полубесконечный цилиндрический стержень. Примем начало абсцисс $x=0$ в конце стержня, положительную полуось $x \geq 0$ направим вдоль оси стержня.

Дифференциальное уравнение движения поперечных сечений стержня при отсутствии объемных сил будет следующим:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (3)$$

где ρ_0 — начальная плотность материала, v — скорость частиц. Деформация и скорость связаны между собой соотношением:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

Система уравнений

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\ E(e) \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Phi[\sigma - f(e)] \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial e}{\partial t} \end{aligned} \quad (5)$$

служит для определения деформации e , напряжения σ и скорости v . Система уравнений (4) относится к гиперболическому типу и имеет три семейства характеристик. Дифференциальные уравнения характеристик и условия на них:

$$dx = adt \quad E(e) dv = ad\sigma + \Phi[\sigma - f(e)] dx \quad (a)$$

$$dx = -adt \quad E(e) dv = -ad\sigma + \Phi[\sigma - f(e)] dx \quad (b) \quad (6)$$

$$dx = 0 \quad E(e) de = d\sigma + \Phi[\sigma - f(e)] dt, \quad (c)$$

где

$$a^2 = \frac{E(e)}{\rho_0}.$$

3. Продольный удар с постоянной скоростью по недеформированному стержню

В случае удара с постоянной скоростью необходимо решать систему (5) при следующих начальных и граничных условиях:

$$t=0, v=0, \sigma=0, e=0, 0 < x < \infty;$$

$$x=0, v=v_0, 0 \leq t < \infty.$$

Рассмотрим два случая:

а) $E'(e) < 0$ и б) $E'(e) > 0$.

а) Случай $E'(e) < 0$.

Докажем, что в этом случае возникает система центрированных волн. Пользуясь соотношениями на характеристиках и начальными

условиями, получаем в области AOX $v \equiv e \equiv \sigma \equiv 0$. Следовательно, фронт волны совпадает с характеристикой $x = a(0)t$ (рис. 1).

Пользуясь условиями на границе и на характеристике OA , исследуем решение за фронтом в окрестности точки. Интегрируя условия на характеристиках (6 а) и (6 б), соответственно, вдоль характеристик 1-М и 2-М (рис. 1) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^e E(e) de - \int_{t_1}^t \Phi[\sigma - f(e)] dt; \\ v &= - \int_0^e ade - \int_{x_2}^x \frac{a}{E(e)} d \int_{t_1}^t \Phi[\sigma - f(e)] dt + \\ &\quad + \int_{x_2}^x \frac{\Phi[\sigma - f(e)]}{E(e)} dx. \end{aligned}$$

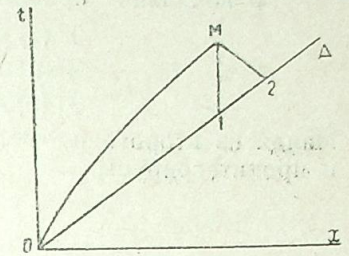


Рис. 1

Приближая точку M вдоль характеристики положительного наклона (в направлении a_1) к точке O ($x_2 \rightarrow x \rightarrow 0$ и $t \rightarrow t_1 \rightarrow 0$), в пределе получаем:

$$\sigma_* = \int_0^{e_*} E(e) de, v_* = \int_0^{e_*} ade. \quad (7)$$

Формулы (7) показывают, что решение в малой окрестности начала в точке, находящейся на пучке характеристик, зависит исключительно от направления характеристики, на которой находится выбранная точка, так как e_* зависит только от выбранного направления a_* .

б) Случай $E'(e) > 0$.

Этот случай характеризуется наличием ударной волны. Условие непрерывности смещений и уравнение количества движения на фронте имеют вид:

$$v + \kappa e = 0, \quad (8)$$

$$-\rho_0 \kappa v = \sigma, \quad (9)$$

где κ — скорость распространения поверхности сильного разрыва.

Из уравнения (2) имеем

$$\int_0^e E(e) de = \sigma + \int_t^{t+\Delta t} \Phi[\sigma - f(e)] dt,$$

если $\Delta t \rightarrow 0$, в пределе получим

$$\sigma = \int_0^e E(e) de.$$

Для скорости сильного разрыва имеем

$$\kappa^2 = \frac{\int_0^e E(e) de}{\rho_0 e}.$$

На конце стержня $v = v_0$ и $\kappa_0 = -\frac{v_0}{e_0}$, где e_0 определяется из соотношения $\rho_0 v_0^2 = e_0 \int_0^{e_0} E(e) de$.

4. Приближенное аналитическое решение задачи о продольном ударе

За начальное приближение принимаем:

$$\begin{aligned} E(e) dv &= ad\sigma + \Phi[\sigma - f(e)] dx, \\ E(e) dv &= -ad\sigma, \\ E(e) de &= d\sigma. \end{aligned}$$

Найдя из второго и третьего уравнений $d\sigma$ и dv подставим в первое и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} x &= -2 \int_{e_*}^e \frac{E(\eta) a(\eta) d\eta}{\Phi \left[\int_0^\eta E(\xi) d\xi - f(\eta) \right]}, \\ t &= -2 \int_{e_*}^e \frac{E(\eta) d\eta}{\Phi \left[\int_0^\eta E(\xi) d\xi - f(\eta) \right]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключив из соотношений (10) e , получим уравнение семейства характеристик параметра e_* , если же исключим e_* , то получим e как функцию x и t .

Из полученного решения следует, что при x (или t) $\rightarrow \infty$, $e \rightarrow 0$; x (или t) $\rightarrow 0$, $e \rightarrow e_*$.

Если $\Phi[z] \rightarrow 0$ ($z \neq 0$), то $e \rightarrow e_*$ и в пределе получаем $\frac{x}{t} = a(e)$,

т. е. при $\Phi \equiv 0$ решение (10) совпадает с решением в случае отсутствия вязкости. Произведем оценку сделанного приближения. Уравнения (6) перепишем в виде

$$-2aEde = \Phi dx - ad_+ \int_{t_2}^t \Phi dt - Ed_+ \int_{x_2}^x \frac{\Phi}{E} dx - Ed_+ \int_{t_1}^t \frac{a}{E} d_+ \int_{t_1}^t \Phi dt, \quad (11)$$

где d_+ — дифференциал вдоль характеристики положительного наклона, d_- — дифференциал вдоль характеристики отрицательного наклона. Оценка второго члена правой части дает

$$ad_+ \int_{t_2}^t \Phi dt = ad_+ [\Phi_{cp}(t-t_2)] = a(t-t_2) d_+ \Phi_{cp} + a \Phi_{cp} d_+ (t-t_2);$$

$$|a(t-t_2) d_+ \Phi_{cp}| < |a E(t-t_2) \Phi^1 de|;$$

$$|a \Phi_{cp} d_+ (t-t_2)| < \left| \Phi_{cp} \frac{a(0)-a}{a(0)} dx \right|.$$

Если величины $(t-t_2) \Phi^1$ и $\frac{a(0)-a}{a(0)}$ малы по сравнению с единицей (третий и четвертый члены правой части уравнения (11) того же порядка), то могут быть опущены.

Уравнение (11) может быть переписано в виде:

$$-\frac{aEde}{\Phi} = \frac{1-\kappa_1}{2-\kappa_2(t-t_2)\Phi^1} \frac{a(0)-a}{a(0)} dx, \quad (12)$$

где κ_1 и κ_2 — величины порядка единицы.

В сделанном приближении коэффициент при dx уравнения (12) принят равным $1/2$. Подставляя решение (10) в уравнения (6) можно получить второе приближение, которое в упрощенном виде представляется соотношениями:

$$\begin{aligned} t &= -2 \int_{e_*}^e \frac{1+2 \left[1 - \frac{a(\eta)}{a(e_*)} \right] - \frac{\Phi[\sigma_2 - f(\eta)]}{\Phi[\sigma_1 - f(\eta)]} \cdot \frac{a(e_*) - a(\eta)}{a(e_*) + a(\eta)} E(\eta) d\eta}{\Phi[\sigma_2 - f(\eta)]}; \\ x &= -2 \int_{e_*}^e \frac{1+2 \left[1 - \frac{a(\eta)}{a(e_*)} \right] - \frac{\Phi[\sigma_2 - f(\eta)]}{\Phi[\sigma_1 - f(\eta)]} \cdot \frac{a(e_*) - a(\eta)}{a(e_*) + a(\eta)} \cdot E(\eta) a(\eta') d\eta}{\Phi[\sigma_2 - f(\eta)]}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1 = \int_0^\eta E(\xi) d\xi,$$

$$\sigma_2 = \left\{ 1+2 \left[1 - \frac{a(\eta)}{a(e_*)} \right] \right\} \int_0^\eta E(\xi) d\xi.$$

5. Численное решение

Введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= d \cdot t; \quad \bar{x} = \frac{a}{a(0)} \cdot x; \quad \bar{a} = \frac{a}{a(0)}; \quad \bar{E} = \frac{E}{E(0)}; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{E(0)}; \\ \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{a(0)}; \quad \bar{f} = \frac{f}{E(0)}; \quad \varphi(\bar{\sigma} - \bar{f}) = \frac{\Phi(\sigma - f)}{E(0)}. \end{aligned}$$

Система (5) в безразмерных переменных принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{x}}; \\ \bar{E} \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} + \varphi(\bar{\sigma} - \bar{f}); \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} &= \frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{t}}. \end{aligned}$$

Уравнение характеристик:

$$\begin{aligned} \bar{E} d\bar{\varphi} &= \bar{a} d\bar{\sigma} + \varphi(\bar{\sigma} - \bar{f}) d\bar{x}, & d\bar{x} &= \bar{a} d\bar{t} \\ \bar{E} d\bar{\varphi} &= -\bar{a} d\bar{\sigma} + \varphi(\bar{\sigma} - \bar{f}) d\bar{x}, & d\bar{x} &= -\bar{a} d\bar{t} \\ \bar{E} d\bar{e} &= d\bar{\sigma} + \varphi(\bar{\sigma} - \bar{f}) d\bar{t}, & d\bar{x} &= 0. \end{aligned}$$

Условия на характеристиках, переписанные в разностном виде, дают возможность последовательного вычисления функций $\bar{\sigma}$, $\bar{\varphi}$ и $\bar{e}$, а уравнения характеристик — координат соответствующих точек. В таблице приведены данные численного и приближенного решений при $E = \exp(-e)$ и $\varphi = \bar{\sigma} - \frac{1}{2}[1 - \exp(-e)]$.

На рис. 2, 3 показаны характеристики, построенные численным и приближенным методом.

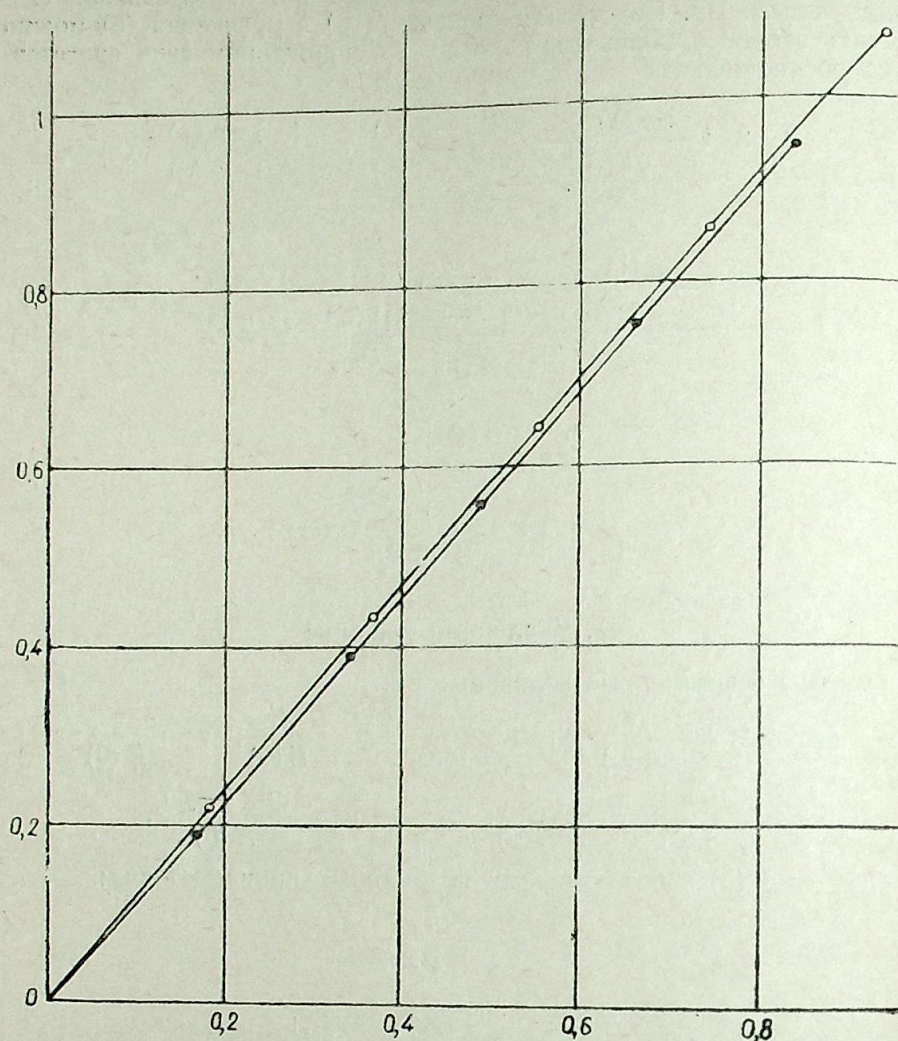


Рис. 2

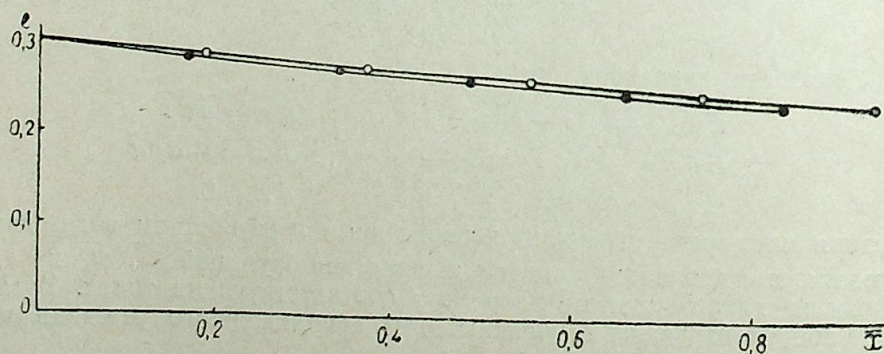


Рис. 3

e	a	Численное решение		Первое приближение		Второе приближение	
		x	t	x	t	x	t
0	0,3	0,8608	0	0	0	0	0
1	0,2838	0,8678	0,1855	0,2155	0,1656	0,1660	0,1931
2	0,2682	0,8446	0,3719	0,4301	0,3427	0,3465	0,4002
3	0,2555	0,8800	0,5584	0,6431	0,4854	0,4957	0,5697
4	0,2416	0,8863	0,7465	0,8569	0,6604	0,6832	0,7817
5	0,2288	0,8921	0,9347	1,0695	0,8366	0,8759	0,9985

6. Частный случай

Рассмотрим случай, когда функция $E(e)$ постоянна на отрезке $0 < e \leq e_1$ и убывает при $e > e_1$.

Представим уравнение характеристики положительного наклона в виде:

$$x = a(e)t - \int_{e_*}^e t a^1(e) de$$

при $e_* \leq e_1$, $a^1(e) = 0$, $a = a_0$.

Уравнение характеристики и соответствующее условие принимают вид:

$$x = a_0 t, \quad x = -2a_0 E_0 \int_{e_1}^e \frac{de}{\Phi[E_0 e - f(e)]}$$

при $e_* > e_1$

$$a) \quad e_1 < e < e_*; \quad x = at - \int_{e_*}^e t a^1 de$$

$$б) \quad e < e_1; \quad x = a_0 t - \int_{e_*}^e t a^1 de,$$

т. е. до некоторой точки характеристики криволинейны (линия 1 рис.4), а затем прямолинейны с наклоном a_0 . Такие же результаты дает приближенное решение.

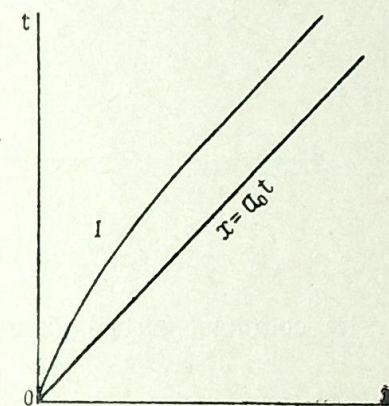


Рис. 4

7. Методика экспериментального определения функций Φ и E

Функция E определяется методом догрузочных импульсов, заключающемся в измерении скорости распространения малых импульсов по статически нагруженному стержню.

В случае отсутствия сильного разрыва применимость этого метода очевидна. Покажем, что и в случае ударной волны малый импульс

распространяется со скоростью $a = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$.

Скорость распространения ударной волны K определяется из выражения:

$$K = \sqrt{\frac{\sigma - \sigma_1}{\rho_0(e - e_1)}};$$

e_1 и σ_1 — статическая деформация и напряжение. Из зависимости (2) можно получить

$$\sigma - \sigma_1 = \int_{e_1}^e E(e) de,$$

в случае малости $e - e_1$

$$K = \sqrt{\frac{\int_{e_1}^e E(e) de}{\rho_0 (e - e_1)}} \approx a.$$

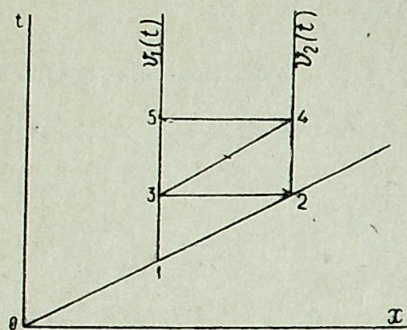


Рис. 5

Имея скорости частиц в двух близких точках, можно численным методом определить функцию Φ (рис. 5).

Напряжения в точках 1 и 2 в случае слабого разрыва на фронте волны равны нулю. В случае сильного разрыва напряжение на фронте находится из соотношений:

$$\sigma = \int_0^e E(e) de; \quad \rho_0 \sigma^2 = e \int_0^e E(e) de.$$

Для нахождения σ_3 перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\Delta x} = \frac{1}{2} \rho_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \Big|_3 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_2 \right).$$

Из соотношения (4) имеем:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{v_2(t) - v_1(t)}{\Delta x};$$

$$e = \frac{1}{\Delta x} \int_{t_1}^t [v_2(t) - v_1(t)] dt + \frac{t_2 - t_1}{2} \cdot \sigma_3.$$

Из условий (а) и (б) системы (6) и уравнения (3) мы имеем:

$$E(e_A)(v_4 - v_3) = a(\sigma_4 - \sigma_3) + \Phi[\sigma_A - f(e_A)] \Delta x;$$

$$E(e_A)(v_5 - v_2) = -a(\sigma_5 - \sigma_2) + \Phi[\sigma_A - f(e_A)] \Delta x;$$

$$\frac{\sigma_4 - \sigma_5}{\Delta x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \Big|_5 + \frac{\partial v_2}{\partial t} \Big|_4 \right).$$

Из этой системы находятся σ_4 , σ_5 и Φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. и Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, 1961.
2. Соколовский В. В. Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях. ПММ, т. XII, 1948.
3. Rubin, Robert J. Journal of Applied Physics, 25, №4, 528—536 (1954).

Ч. Н. Агаларов

Өзлү-хејри хэтти-еластики далгаларын чубугларда јайылмасы

ХҮЛАСӘ

Бу мәгаләдә узунуна зәрбә заманы чубугларда далгаларын јайылмасы мәсәләсиндән данышылыр.

Белә ки, тәдгиг олунан чубугда кәркинлик илә деформасија арасында олан асылылыгда өзлүлүк вә деформасија сәс сүрәтинин дәјишмәси нәзәрдә тутулур.

Бу һалда мәркәзләшдирилмиш далгаларын варлығы исбат олунмуш, мәсәләнин һәлли үчүн тәгриби үсул тәклиф едилмиш вә мәсәләнин әдәди һәлли тапылмышдыр.

Материалларын хассәләрини характеризә едән асылылыға дахил олан функцијаларын тәјин едилмә үсулу верилмишдир.

А. Д. ГАДЖИЕВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Путь на множестве E функций $f(x)$, обладающих определенными свойствами, задается семейство сингулярных интегралов вида

$$f_{\lambda}(x) = \int_a^b f(t) K_{\lambda}(t, x) dt,$$

где $K_{\lambda}(t, x)$ — ядро, λ — вещественный параметр. После выяснения, что при определенных дополнительных условиях, налагаемых на ядро $K_{\lambda}(t, x)$ или на функцию $f(t)$, выполняется соотношение $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\lambda}(x_0) = f(x_0)$ в фиксированной точке $x = x_0$, естественно поставить вопрос о скорости или о порядке такой сходимости.

Решению этого вопроса посвящено довольно много работ. В частности, Р. Г. Мамедовым определены порядки сходимости написанных выше сингулярных интегралов в точках d , в точках Лебега заданного порядка [3, 5], а также обобщены результаты на случай так называемых m -сингулярных интегралов [4].

В 1956 г. И. П. Натансон [2] обобщил теорему П. И. Романовского о сингулярных интегралах на интегралы Стильтьеса, т. е. на сингулярные интегралы вида

$$W_{\lambda}(x) = \int_a^b K_{\lambda}(t, x) df(t), \quad (1)$$

где λ — вещественный параметр.

Настоящая статья посвящена исследованию порядков сходимости интегралов (1) и дальнейшему обобщению результата И. П. Натансона. Отметим, что в случае, когда функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, из наших теорем вытекают некоторые из отмеченных выше результатов Р. Г. Мамедова.

§ 1. Будем говорить, что функция $\Phi_{\lambda}(t, x)$ удовлетворяет условию (A), если:

1) она неотрицательна и при фиксированных λ и x возрастает в промежутке $[a, x]$ и убывает в $[x, b]$ и, кроме того,

$$\int_a^b \Phi_{\lambda}(t, x) dt = 1; \quad (2)$$

2) для любого $y \neq x$ при $\lambda \rightarrow \infty$

А. Д. ГАДЖИЕВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Путь на множестве E функций $f(x)$, обладающих определенными свойствами, задается семейство сингулярных интегралов вида

$$f_{\lambda}(x) = \int_a^b f(t) K_{\lambda}(t, x) dt,$$

где $K_{\lambda}(t, x)$ — ядро, λ — вещественный параметр. После выяснения, что при определенных дополнительных условиях, налагаемых на ядро $K_{\lambda}(t, x)$ или на функцию $f(t)$, выполняется соотношение $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_{\lambda}(x_0) = f(x_0)$ в фиксированной точке $x = x_0$, естественно поставить вопрос о скорости или о порядке такой сходимости.

Решению этого вопроса посвящено довольно много работ. В частности, Р. Г. Мамедовым определены порядки сходимости написанных выше сингулярных интегралов в точках d , в точках Лебега заданного порядка [3, 5], а также обобщены результаты на случай так называемых m -сингулярных интегралов [4].

В 1956 г. И. П. Натансон [2] обобщил теорему П. И. Романовского о сингулярных интегралах на интегралы Стильтьеса, т. е. на сингулярные интегралы вида

$$W_{\lambda}(x) = \int_a^b K_{\lambda}(t, x) d f(t), \quad (1)$$

где λ — вещественный параметр.

Настоящая статья посвящена исследованию порядков сходимости интегралов (1) и дальнейшему обобщению результата И. П. Натансона. Отметим, что в случае, когда функция $f(t)$ абсолютно непрерывна, из наших теорем вытекают некоторые из отмеченных выше результатов Р. Г. Мамедова.

§ 1. Будем говорить, что функция $\Phi_{\lambda}(t, x)$ удовлетворяет условию (A), если:

1) она неотрицательна и при фиксированных λ и x возрастает в промежутке $[a, x]$ и убывает в $[x, b]$ и, кроме того,

$$\int_a^b \Phi_{\lambda}(t, x) dt = 1; \quad (2)$$

2) для любого $y \neq x$ при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\Phi_\lambda(y; x) = 0 (\Delta_\lambda), \quad (3)$$

где

$$\Delta_\lambda = \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^{\alpha+1} \Phi_\lambda(t, x) dt; \quad (\alpha > 0) \quad (3')$$

и $\Delta_\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Введем функцию

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t-x} - f'(x) & \text{при } t \neq x \\ 0 & \text{при } t = x \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть в сингулярном интеграле (1) функция $K_\lambda(t, x)$ удовлетворяет условию (A), а $f(t)$ такая ограниченная функция, что при некотором x интеграл (1) имеет смысл. Если при этом x и при $t \rightarrow x$ выполняется условие

$$\gamma(t) = o(|t-x|^{\alpha+1}), \quad (4)$$

где $\alpha > 0$ — любое вещественное число, то при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливо соотношение:

$$|W_\lambda(x) - f'(x)| = o(\Delta_\lambda).$$

Доказательство. Из определения функции $\gamma(t)$ ясно, что

$$f(t) = f(x) + \gamma(t)(t-x) + f'(x)(t-x). \quad (5)$$

Подставляя в (1) и учитывая (2), получим

$$W_\lambda(x) - f'(x) = \int_a^b K_\lambda(t, x) d[\gamma(t)(t-x)] = \\ = \left\{ \int_a^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^b \right\} K_\lambda(t, x) d[\gamma(t)(t-x)] = I'_\lambda + I''_\lambda + I'''_\lambda.$$

Рассмотрим каждый из этих интегралов в отдельности. Интегрируя I'_λ по частям, имеем

$$I'_\lambda = \int_a^{x-\delta} K_\lambda(t_1 x) d[\gamma(t)(t-x)] = [K_\lambda(t, x) \gamma(t)(t-x)]_a^{x-\delta} - \\ - \int_a^{x-\delta} \gamma(t)(t-x) dK_\lambda(t_1 x).$$

Так как функция $\gamma(t)(t-x)$ ограничена, т. е.

$$|\gamma(t)(t-x)| < M,$$

то, используя монотонность $K_\lambda(t, x)$, получим

$$|I'_\lambda| \leq M [2 K_\lambda(x-\delta, x) + K_\lambda(a, x)]$$

и в силу условия (3) при $\lambda \rightarrow \infty$

$$|I'_\lambda| = o(\Delta_\lambda). \quad (6)$$

Совершенно аналогично получаем при $\lambda \rightarrow \infty$

$$|I'''_\lambda| = o(\Delta_\lambda). \quad (7)$$

Оценим теперь I''_λ . Интегрируем по частям

$$I''_\lambda = \int_{x-\delta}^{x+\delta} K_\lambda(t_1 x) d[\gamma(t)(t-x)] = [K_\lambda(t_1 x) \gamma(t)(t-x)]_{x-\delta}^{x+\delta} -$$

$$- \int_{x-\delta}^{x+\delta} \gamma(t)(t-x) dK_\lambda(t_1 x).$$

На $[x-\delta, x+\delta]$ в силу условия (4)

$$|\gamma(t)| \leq \varepsilon |t-x|^{\alpha+1}.$$

Следовательно,

$$|I''_\lambda| \leq \varepsilon K_\lambda(x+\delta, x) \delta^{\alpha+2} + \varepsilon K_\lambda(x-\delta, x) \delta^{\alpha+2} + \varepsilon \int_{x-\delta}^{x+\delta} |t-x|^{\alpha+2} dK_\lambda(t, x).$$

Вторичное интегрирование по частям дает в силу (2) условия (A)

$$|I''_\lambda| \leq \varepsilon \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda). \quad (8)$$

В силу (6), (7) и (8) и произвольности ε теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим сингулярный интеграл Стильтьеса с ядром Джексона.

$$D_n(x) = \frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^4 \frac{n(t-x)}{2}}{\sin^4 \frac{t-x}{2}} df(t). \quad (9)$$

Здесь $a = -\pi$, $b = \pi$, $\lambda = n$. Проверим выполнимость условия (A) при $\alpha = 1$. Пункт 1) условия (A), очевидно, выполняется. Проверим пункт 2). Известно [1], что

$$\mu_n = \frac{3}{2n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \frac{\sin^4 \frac{nt}{2}}{\sin^4 \frac{t}{2}} dt = \frac{3}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \approx \frac{1}{n^2},$$

т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$ и (3') выполнено.

С другой стороны, при $y \neq x$

$$\frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} \frac{\sin^4 \frac{n(y-x)}{2}}{\sin^4 \frac{y-x}{2}} \leq \frac{3}{2n\pi(2n^2+1)} = O\left(\frac{1}{n^3}\right) = o(\mu_n),$$

т. е. выполнено и (3).

Следовательно, имеет место

Теорема 2. Пусть в сингулярном интеграле (9) $f(t)$ такая ограниченная функция, что при некотором x интеграл $D_n(x)$ имеет смысл. Если при этом x существует конечная производная $f'(x)$ и выполняется (4), то для сингулярных интегралов (9) при $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$|D_n(x) - f'(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

§ 2. Пусть в сингулярном интеграле (1) неотрицательная функция $K_n(t, x)$ при фиксированных λ и x возрастает в промежутке $[a, x]$ и убывает в $[x, b]$ и при этом же x

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^x K_\lambda(t, x) dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_x^b K_\lambda(t, x) dt = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Мы покажем, что теорему И. П. Натансона [2] можно обобщить на случай недифференцируемых функций, имеющих в некоторой точке только правую и левую производные.

Теорема 3. Пусть $f(t)$ ограниченная функция, обеспечивающая при некотором x существование интеграла (1). Если при этом x существуют конечные правая и левая производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$ функции $f(x)$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} W_\lambda(x) = \frac{f'_+(x) + f'_-(x)}{2}.$$

Доказательство. Известно [2], что при любом $y \neq x$ для ядра $K_\lambda(t, x)$ выполняется условие:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} K_\lambda(y, x) = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'_+(x) & \text{при } t > x \\ 0 & \text{при } t = x \\ \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'_-(x) & \text{при } t < x \end{cases}$$

Интеграл (1) напомним в виде

$$W_\lambda(x) = \int_a^x K_\lambda(t, x) df(t) + \int_x^b K_\lambda(t, x) df(t). \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{при } t > x \quad f(t) &= f(x) + f'_+(x)(t-x) + \sigma(t)(t-x), \\ \text{при } t < x \quad f(t) &= f(x) + f'_-(x)(t-x) + \sigma(t)(t-x). \end{aligned}$$

Подставляя соответственно в (11), будем иметь;

$$\begin{aligned} W_\lambda(x) &= f'_+(x) \int_a^x K_\lambda(t, x) dt + f'_-(x) \int_x^b K_\lambda(t, x) dt + \\ &+ \int_a^x K_\lambda(t, x) d[\sigma(t)(t-x)] + \int_x^b K_\lambda(t, x) d[\sigma(t)(t-x)]. \end{aligned}$$

Так как имеет место условие (10), то достаточно показать, что последние два интеграла, стоящие в правой части, стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Достаточно оценить первый интеграл. Разделим промежуток $[a, x]$ на два: $[a, x-\delta]$ и $[x-\delta, x]$, причем δ выберем в зависимости от ϵ так, чтобы при $x-\delta \leq t \leq x$ выполнялось $|\sigma(t)| < \epsilon$.

Повторяя вычисления И. П. Натансона, завершим доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И. П. ДАН СССР, т. 73, 1950, №2.
2. Натансон И. П. Научные труды Ленинградского инженерно-строительного ин-та, вып. 23, (1956).
3. Мамедов Р. Г. ДАН Азерб. ССР, 1961, 11.
4. Мамедов Р. Г. ДАН СССР, 1961, №12.
5. Мамедов Р. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1962, № 2.

А. Ч. Начыјев

Бир синиф сингулјар интегралларын јығылмасынын сүр'әти һаггында

ХУЛАСӘ

Бу ишин биринчи параграфында Стилтјес типли (1) сингулјар интеграллары $f(x)$ функцијасынын төрәмәсинә јығылмасы һаггында 1-чи теорем исбат олунур. Алынган нәтичәләр Чексон нүвәли сингулјар интеграла тәтбиг олунур вә 2-чи теорем сөјләнилик.

Икинчи параграфда И. П. Натансонун бир теореминин үмумиләшдирилмәси көстәрилир.

Г. М. ГАСУМОВ

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Пусть заданы непересекающиеся между собой гладкие замкнутые кривые Γ_1 и Γ_0 так, что Γ_0 охватывает Γ_1 . Обозначим область, ограниченную контуром Γ_1 , через D_1 , а область, ограниченную кривыми Γ_0 и Γ_1 , через D_0 .

Требуется найти регулярное в области $D_0 + D_1$ решение уравнения

$$\Delta U + a(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + c(x, y)U = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$A(t) \frac{dU^+}{dn} + B(t) \frac{dU^+}{ds} + C(t)U^+ = f(t) \text{ на } \Gamma_0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\kappa_1 \left[\frac{dU}{dn} \right]^+ - \kappa_2 \left[\frac{dU}{dn} \right]^- + \kappa_1 \int_{\Gamma_1} b_1(t, t_1) \left[\frac{dU}{dn} \right]^+ ds - \\ &- \kappa_2 \int_{\Gamma_1} b_2(t, t_1) \left[\frac{dU}{dn} \right]^- ds = f_1(t) \text{ на } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (3)$$

где $a(x, y)$, $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ — аналитические функции в $D_0 + D_1 + \Gamma_0 + \Gamma_1$; $f(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — заданы на Γ_0 ; $f_1(t)$, $b_1(t, t_1)$, $b_2(t, t_1)$ — заданные на Γ_0 действительные функции, удовлетворяющие условию

Гельдера; $\kappa_1 \neq \kappa_2$ — положительные постоянные; $\frac{dU^+}{dn}$, $\frac{dU}{ds}$ — предель-

ные значения нормальной и касательной производных на Γ_0 ; $\left[\frac{dU}{dn} \right]^+$, $\left[\frac{dU}{dn} \right]^-$ — предельные значения нормальной производной на

Γ_1 , соответственно из области D_1 и D_0 . Эту задачу назовем задачей (Г). В частности, при $a = b = c = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $A = B = 0$, $C = 1$,

$f_1(t) = 0$ получаем работу А. И. Гусейнова [4]. Класс функций, для которых $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU}{ds}$ есть функции класса H^1 назовем классом H_1 .

¹ Определение класса H дано в работе [5].

Г. М. ГАСУМОВ

О НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. Пусть заданы непересекающие между собой гладкие замкнутые кривые Γ_1 и Γ_0 так, что Γ_0 охватывает Γ_1 . Обозначим область, ограниченную контуром Γ_1 , через D_1 , а область, ограниченную кривыми Γ_0 и Γ_1 , через D_0 .

Требуется найти регулярное в области $D_0 + D_1$ решение уравнения

$$\Delta U + a(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + c(x, y)U = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$A(t) \frac{dU^+}{dn} + B(t) \frac{dU^+}{ds} + C(t)U^+ = f(t) \text{ на } \Gamma_0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left[\frac{dU}{dn} \right]^+ - \kappa_2 \left[\frac{dU}{dn} \right]^- + \kappa_1 \int_{\Gamma_1} b_1(t, t_1) \left[\frac{dU}{dn} \right]^+ ds - \\ - \kappa_2 \int_{\Gamma_1} b_2(t, t_1) \left[\frac{dU}{dn} \right]^- ds = f_1(t) \text{ на } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (3)$$

где $a(x, y)$, $b_1(x, y)$, $b_2(x, y)$ — аналитические функции в $D_0 + D_1 + \Gamma_0 + \Gamma_1$; $f(t)$, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — заданы на Γ_0 ; $f_1(t)$, $b_1(t, t_1)$, $b_2(t, t_1)$ — заданные на Γ_0 действительные функции, удовлетворяющие условию

Гельдера; $\kappa_1 \neq \kappa_2$ — положительные постоянные; $\frac{dU^+}{dn}$, $\frac{dU}{ds}$ — предельные значения нормальной и касательной производных на Γ_0 ;

$\left[\frac{dU}{dn} \right]^+$, $\left[\frac{dU}{dn} \right]^-$ — предельные значения нормальной производной на Γ_1 , соответственно из области D_1 и D_0 . Эту задачу назовем задачей

(Г). В частности, при $a = b = c = 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $A = B = 0$, $C = 1$, $f_1(t) = 0$ получаем работу А. И. Гусейнова [4]. Класс функций, для

которых $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU}{ds}$ есть функции класса H^1 назовем классом H_1 .

¹ Определение класса H дано в работе [5].

В данной работе исследуется решение задачи (Г) из класса H_1 . В работе для решения задачи (Г) используем общее представление регулярного в $D_0 + D_1$ действительного решения уравнение (1), данное И. Н. Векуа и приспособленное для составной области [2].

Представим искомое решение $U(x; y)$ уравнения (1) в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} \operatorname{Re} \left[H_0(z) p(z) - \int_0^z p(t) H(z, t) dt \right], & \text{на } D_1, \\ \beta \omega(x, y, x_1, y_1) + \operatorname{Re} \left\{ B[0; \varphi_0(z)] + B[\bar{z}_1; \varphi_1(z) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \overline{\varphi_1(\bar{\tau})} H(\bar{\tau}, \bar{z}_1, z_1, \bar{z}) d\bar{\tau} \right) \lg(z - z_1) \right\}, & \text{на } D_0 \end{cases} \quad (4)$$

где

$$B[z_0, \varphi(z)] = G(z, z_0, z, \bar{z}) \varphi(z) - \int_0^z \varphi(t) H(t, \bar{z}_0, z, \bar{z}) dt, \quad (5)$$

$$H(t, \tau, z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau, z, \zeta) - B(t, \tau) G(t, \tau, z, \zeta), \quad (6)$$

$$H_0(z) = G(z, 0, z, \bar{z}), \quad H(z, t) = -\frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z}) + B(z, 0) G(t, 0, z, \bar{z}), \quad (7)$$

$$B(t, \tau) = \frac{1}{4} \left[a \left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2i} \right) - ib \left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2i} \right) \right], \quad (8)$$

$\omega(x, y, x_1, y_1)$ — элементарное решение уравнения (1) с полюсом в точке $z_1 = x_1 + iy_1$; $p(z)$ — произвольная голоморфная функция в D_1 , которую можно подчинить условию

$$p(0) = \overline{p(0)}; \quad (*)$$

$\varphi_0(z)$ — голоморфная в $D_1 + \Gamma_1 + D_0$ функция, удовлетворяющая условию

$$\varphi_0(0) = \overline{\varphi_0(0)}, \quad (**)$$

β — действительная постоянная; $\varphi_1(z)$ — голоморфная функция в S , исчезающая на бесконечности (S — область, дополняющая D_1 до полной плоскости); z_1 — фиксированная точка на D_1 ; $G(t, \tau, z, \zeta)$ — функция Римана для уравнения (1); $\bar{\Gamma}_1$ — зеркальное отражение кривой Γ_1 относительно действительной оси.

Представим $p(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ и β в виде:

$$p(z) = \int_{\Gamma_1} \frac{t}{t-z} \mu_1(t) ds, \quad z \in D_1, \quad (9)$$

$$\varphi_0(z) = \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) \frac{t}{t-z} ds, \quad z \in D_1 + \Gamma_1 + D_0, \quad (10)$$

$$\varphi_1(z) = \int_{\Gamma_1} \frac{t-z_1}{t-z} \mu_1(t) ds, \quad z_1 \in D_1, z \in S, \quad (11)$$

$$\beta = \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) ds, \quad (12)$$

где $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ — функции, подлежащие определению, удовлетворяющие условию Гельдера, соответственно, на Γ_0 и Γ_1 .

Используя (9)–(12), можно переписать (4) в следующем виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{H_0(z)t}{t-z} - \int_0^z H(z, t) \frac{t}{t-z} dt \right\} \mu_1(t) ds, & z \in D_1, \\ \int_{\Gamma_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{H_0(z)t}{t-z} - \int_0^z H(t_1, 0, z, \bar{z}) \frac{t}{t-t_1} dt_1 \right\} \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} \left[\omega(x, y, x_1, y_1) + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ H_0(z) \left[\frac{t-z_1}{t-z} - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t-z_1}{t-\bar{\tau}} H(\bar{\tau}, \bar{z}_1, z_1, \bar{z}) d\bar{\tau} \right) \lg(z - z_1) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_0^z \left[\frac{t-z_1}{t-t_1} - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t-z_1}{t-\bar{\tau}} H(\bar{\tau}, \bar{z}_1, z_1, \bar{t}_1) d\bar{\tau} \right) \lg(t_1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - z_1 \right) \right] H(t_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}) dt_1 \right\} \mu_1(t) ds. \right. \end{cases} \quad (13)$$

В области D_1

$$\frac{dU}{dn} = \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[\{ H'_0(z) - H(z, z) \} p(z) + H_0(z) p'(z) - \int_0^z p(t) \frac{\partial H(z, t)}{\partial z} dt \right] \right\},$$

где θ — угол, составляемый положительной касательной к Γ_1 с осью ox . Переходя к пределу при $z \rightarrow t_0$ из области D_1 получим (t_0 — точка на Γ_1),

$$\left[\frac{dU}{dn} \right]^+ = B_1(t_0) \mu_1(t_0) + \int_{\Gamma_1} P_1(t_0, t) \mu_1(t) ds, \quad (14)$$

где

$$B_1(t_0) = \operatorname{Re} \{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \pi i t_0 \bar{t}_0' [H'_0(t_0) - H(t_0, t_0)] \},$$

$$P_1(t_0, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[\{ H_0(t_0) - H(t_0, t_0) \} \frac{t}{t-t_0} - \frac{H_0(t_0)t}{(t-t_0)^2} - \int_0^{t_1} \frac{t_1}{t_1-t} \frac{\partial H(t_0, t_1)}{\partial z} dt_1 \right] \right\}.$$

Из области D_0 , переходя к пределу при $z \rightarrow t_0$ (t_0 — точка на Γ_0), можно найти

$$U^+(t_0) = A_1(t_0) \mu_0(t_0) + \int_{\Gamma_0} N_1(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M_1(t_0, t) \mu_1(t) ds, \quad (1)$$

составляя $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU}{ds}$ в D_0 и переходя к пределу при $z \rightarrow t_0$, на Γ_1 имеем:

$$\left[\frac{dU}{dn} \right]^- = B_2(t_0) \mu_1(t_0) + \int_{\Gamma_0} N_2(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M_2(t_0, t) \mu_1(t) ds. \quad (16)$$

Аналогичным образом на Γ_0 получим:

$$\left[\frac{dU}{dn} \right]^+ = A_2(t_0) \mu_0(t_0) + \int_{\Gamma_0} N_3(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M_3(t_0, t) \mu_1(t) ds, \quad (17)$$

$$\left[\frac{dU}{ds} \right]^+ = A_3(t_0) \mu_0(t_0) + \int_{\Gamma_0} N_4(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M_4(t_0, t) \mu_1(t) ds, \quad (18)$$

где

$$A_1(t_0) = \operatorname{Re} [\pi i t_0 \bar{t}_0' H_0(t_0)],$$

$$A_2(t_0) = \operatorname{Re} [(-\sin \theta + i \cos \theta) \pi i t_0 \bar{t}_0' \{H_0'(t_0) - H(t_0, t_0)\}],$$

$$A_3(t_0) = \operatorname{Re} [(\cos \theta + i \sin \theta) \pi i t_0 \bar{t}_0' \{H_0'(t_0) - H(t_0, t_0)\}],$$

$$B_2(t_0) = \operatorname{Re} [(-\sin \theta + i \cos \theta) (-1) \pi i (t_0 - z_1) \bar{t}_0' \{H_0'(t_0) - H(t_0, z_1, \bar{z}_1, \bar{t}_0)\}],$$

$$N_1(t_0, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{H_0(t_0) t}{t_0^2 - t_0} - \int_0^{t_0} H(t_1, t_0) \frac{t}{t - t_1} dt_1 \right],$$

$$M_1(t_0, t) = \omega(x_0, y_0, x_1, y_1) + \operatorname{Re} \left\{ H_0(t_0) \left[\frac{t - z_1}{t - t_0} - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \right) \lg(t_0 - z_1) \right] - \int_0^{t_0} \left[\frac{t - z_1}{t - t_1} - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_1)} d\bar{\tau} \right) \lg(t_1 - z_1) \right] H(t_1, z_1, t_0, \bar{t}_0) dt_1 \right\},$$

$$N_2(t_0, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[\{H_0'(t_0) - H(t_0, t_0)\} \frac{t}{t - t_0} - \frac{H_0(t_0) t}{(t - t_0)^2} \int_0^{t_0} \frac{t}{t - t_1} \frac{\partial H(t_1, t_0)}{\partial z} dt \right] \right\},$$

$$M_2(t_0, t) = \frac{d\omega(x_0, y_0, x_1, y_1)}{dn} + \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[H_0'(t_0) \frac{t - z_1}{t - t_0} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} - H_0(t_0) \left\{ \frac{t - z_1}{(t - t_0)^2} + \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \frac{\partial H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t})}{\partial \bar{z}} d\bar{\tau} \right\} \right] \right\},$$

$$- \frac{1}{2\pi i (t_0 - z_1)} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \left\{ -H(t_0, \bar{z}_1, z_1, \bar{t}_0) \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_0} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \right\} - \int_0^{t_0} \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_1} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t})} d\bar{\tau} \right\} \frac{\partial H(t, \bar{z}_1, t_0, \bar{t}_0)}{\partial z} dt \right\} \right\},$$

$$N_3(t_0, t) = \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[\{H_0'(t_0) - H(t_0, t_0)\} \frac{t}{t - t_0} - \frac{H_0(t_0) t}{(t - t_0)^2} \int_0^{t_0} \frac{t}{t - t_1} \frac{\partial H(t, 0, t_0, \bar{t}_0)}{\partial z} dt \right] \right\},$$

$$M_3(t_0, t) = \frac{d\omega(x_0, y_0, x_1, y_1)}{dn} + \operatorname{Re} \left\{ (-\sin \theta + i \cos \theta) \left[H_0'(t_0) \frac{t - z_1}{t - t_0} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} - H_0(t_0) \left\{ \frac{t - z_1}{(t - t_0)^2} + \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \frac{\partial H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t})}{\partial \bar{z}} d\bar{\tau} \right\} \right] \right\},$$

$$- \frac{1}{2\pi i (t_0 - z_1)} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} - H(t_0, \bar{z}_1, z_1, \bar{t}_0) \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_0} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \right\} - \int_0^{t_0} \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_1} - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{t})} d\bar{\tau} \right\} \frac{\partial H(t, \bar{z}_1, t_0, \bar{t}_0)}{\partial z} dt \right\} \right\},$$

$$N_4(t_0, t) = \operatorname{Re} \left\{ (\cos \theta + i \sin \theta) \left[\{H_0'(t_0) - H(t_0, t_0)\} \frac{t}{t - t_0} + H_0(t_0) \frac{t}{(t - t_0)^2} \int_0^{t_0} \frac{t}{t - t_1} \frac{\partial H(t_1, t_0)}{\partial z} dt_1 \right] \right\},$$

$$M_4(t_0, t) = \frac{d\omega(x_0, y_0, x_1, y_1)}{ds} + \operatorname{Re} \left\{ (\cos \theta + i \sin \theta) \left[H_0'(t_0) \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_0} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\tau, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \Bigg\} + H_0(t_0) \left\{ \frac{t - z_1}{(t - t_0)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \frac{\partial H(\tau, z_1, z_1, \bar{t}_0)}{\partial \bar{z}} d\bar{\tau} - \right. \\
& \quad - \frac{1}{2\pi i (t_0 - z_1)} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\tau, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \Bigg\} - H(t_0, \bar{z}_1, z_1, t_0) \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_0} - \right. \\
& \quad - \frac{\lg(t_0 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\tau, z_1, z_1, \bar{t}_0)} d\bar{\tau} \Bigg\} - \int_0^{t_0} \left\{ \frac{t - z_1}{t - t_1} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\lg(t_1 - z_1)}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{t - z_1}{t - \bar{\tau}} \overline{H(\tau, z_1, z_1, \bar{t}_1)} d\bar{\tau} \right\} \frac{\partial H(t_1, z_1, t_0, \bar{t}_0)}{\partial z} dt_1 \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Подставляя (14)–(18) в граничные условия (2) и (3), для определения функций $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ получим системы сингулярных интегральных уравнений, эквивалентные нашей задаче в виде:

$$\left. \begin{aligned}
A_0(t_0) \mu_0(t_0) + \int_{\Gamma_0} N(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M(t_0, t) \mu_1(t) ds &= f(t_0) \\
B_0(t_0) \mu_1(t_0) + \int_{\Gamma_0} P(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} Q(t_0, t) \mu_1(t) ds &= f_1(t_0)
\end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где t_0 для первого уравнения точка на Γ_0 , а для второго уравнения — на Γ_1 , и причем

$$\begin{aligned}
A_0(t_0) &= A(t_0) A_2(t_0) + B(t_0) A_3(t_0) + C(t_0) A_1(t_0); \\
B_0(t_0) &= \kappa_1 B_1(t_0) - \kappa_2 B_2(t_0) \\
M(t_0, t) &= A(t_0) M_3(t_0, t) + B(t_0) M_4(t_0, t) + C(t_0) M_1(t_0, t); \\
N(t_0, t) &= A(t_0) N_3(t_0, t) + B(t_0) N_4(t_0, t) + C(t_0) N_3(t_0, t); \\
P(t_0, t) &= -\kappa_2 N_2(t_0, t) - \kappa_2 \int_{\Gamma_1} b_2(t_0, t_1) N_2(t_1, t) ds_1; \\
Q(t_0, t) &= \kappa_1 \left[P_1(t_0, t) + \int_{\Gamma_1} b_1(t_0, t) P_1(t_1, t) ds_1 \right] - \kappa_2 \left[M_2(t_0, t) + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\Gamma_1} b_2(t_0, t_1) M_2(t_1, t) ds \right]; \\
P(t_0, t) &= -\kappa_2 \left[N_2(t_0, t) + \int_{\Gamma_1} b_2(t_0, t_1) N_2(t_1, t) ds_1 \right].
\end{aligned}$$

Ядра $M(t_0, t)$ и $P(t_0, t)$ регулярны, а ядра $N(t_0, t)$ и $Q(t_0, t)$ при $t=t_0$ имеют особенность вида $(t-t_0)^{-1}$, соответственно, на Γ_0 и Γ_1 .

Рассмотрим следующую задачу.

2°. Найти регулярное в области $D_0 + D_1$ решение $U(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\sum_{p+q \leq m} \left[a^{pq}(t) \frac{\partial^{p+q} U^+}{\partial x^p \partial y^q} + \int_{\Gamma_0} b^{pq}(t_1, t) \frac{\partial^{p+q} U^+}{\partial x^p \partial y^q} ds_1 \right] = f_2(t) \text{ на } \Gamma_0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& \kappa_1 \left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^+ - \kappa_2 \left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^- + \\
& + \kappa_1 \int_{\Gamma_1} a_1(t_1, t) \left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^+ ds_1 - \\
& - \kappa_2 \int_{\Gamma_1} a_2(t_1, t) \left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^- ds_1 = f_3(x) \text{ на } \Gamma_1, \quad (21)
\end{aligned}$$

где m — некоторое натуральное число; $a^{pq}(t)$ и $f_2(t)$ — заданные действительные функции точки $t \in \Gamma_0$, удовлетворяющие условию Гельдера на Γ_0 , $ab^{pq}(t_1, t)$ — также заданные действительные функции двух точек t_1, t , кривой Γ_0 , удовлетворяющие условиям

$$b^{pq}(t_1, t) = \frac{b_0^{pq}(t_1, t)}{|t_1 - t|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad (22)$$

причем, $b_0^{pq}(t_1, t)$ — функции, удовлетворяющие условию Гельдера по обоим переменным; $\kappa_1 \neq \kappa_2$ — действительные положительные постоянные; $f_3(t)$, $a_1(t_1, t)$, $a_2(t_1, t)$ — заданные действительные функции, удовлетворяющие условию Гельдера на Γ_1 .

$$\left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^+ \text{ и } \left[\sum_{p, q=0, 1, \dots, m} \frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q} \right]^- \text{ предельные}$$

значения на Γ_1 из областей D_1 и D_0 , соответственно.

Мы предполагаем, что все функции $\frac{\partial^{p+q} U}{\partial x^p \partial y^q}$ ($p+q \leq m$; $p, q = 0, 1, \dots, m$) непрерывны в смысле Гельдера на Γ_0 , все функции $\frac{\partial^m U}{\partial x^p \partial y^q}$ $p+q=m$ непрерывны в смысле Гельдера на Γ_1 . Эту задачу назовем задачей (Γ_1) ,

Искомое решение задачи (Γ_1) также можно представить в виде (4). Из граничных условий вытекает, что функция $U(x, y)$ должна иметь производные до m -го порядка включительно (непрерывна, в смысле Гельдера), продолжимые до Γ_0 и удовлетворяющие условию Гельдера на Γ_0 , а производные m -го порядка непрерывно продолжимы на Γ_1 из D_1, D_0 и удовлетворяют на Γ_1 условию Гельдера.

В данном случае функции $p(z)$, $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ и β представим в следующем виде:

$$p(z) = \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) ds, \quad z \in D_1, \quad (23)$$

$$\varphi_0(z) = \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) \left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) ds, \quad z \in D_1 + \Gamma_1 + D_0, \quad (24)$$

$$\varphi_1(z) = \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \left(1 - \frac{t-z_1}{z-z_1}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t-z_1}{z-z_1}\right) ds, \quad z \in z_1 D_1, \quad z \in S, \quad (25)$$

$$\beta = \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) ds \quad (26)$$

где z_1 — фиксированная точка, лежащая внутри Γ_1 ; $\mu_0(t)$ — действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на Γ_0 ; μ_1 — действительная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на Γ_1 . Голomorphic функции $p(z)$ и $\varphi_0(z)$ можно подчинить условиям (*) и (**).

Под $\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right)$ и $\ln\left(1 - \frac{t}{z}\right)$ подразумевается ветвь, исчезающая

(при фиксированном t) в точках $z=0$ и $z=\infty$, соответственно.

Подставляя выражения (23)–(26) в (4), получим:

$$U(x, y) = \begin{cases} \int_{\Gamma_1} K_0(z, t) \mu_1(t) ds & z \in D_1, \\ \int_{\Gamma_0} N_0(z, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M_0(z, t) \mu_1(t) ds, & z \in D_1 \end{cases} \quad (27)$$

где

$$K_0(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ H_0(z) \left[\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1 \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^z H(z, t_1) \left[\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t_1}{t}\right) + 1 \right] ds_1, \right.$$

$$N_0(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ H_0(z) \left[\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1 \right] - \right.$$

$$\left. - \int_0^z \left[\left(1 - \frac{t_1}{t}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t_1}{t}\right) + 1 \right] H(t_1, 0, z, \bar{z}) dt_1, \right.$$

$$M_0(z, t) = \omega(x, y, x_1, y_1) + \operatorname{Re} \left\{ H_0(z) \left[\left(1 - \frac{t-z_1}{z-z_1}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t-z_1}{z-z_1}\right) - \right. \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left(1 - \frac{t-z_1}{\tau-z_1}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t-z_1}{\tau-z_1}\right) H(\bar{\tau}, z_1, z_1, \bar{z}) d\tau \right) \lg(z-z_1) - \right.$$

$$\left. - \int_0^z \left[\left(1 - \frac{t-z_1}{t_1-z_1}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t-z_1}{t_1-z_1}\right) \right] - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left(1 - \frac{t-z_1}{\tau-z_1}\right)^{m-1} \lg\left(1 - \frac{t-z_1}{\tau-z_1}\right) H(\bar{\tau}, z_1, z, \bar{t}_1) d\tau \right) \lg(t_1-z_1) dt_1, \right.$$

причем, в $K_0(z, t)$, $z \in D_1$, $t \in \Gamma_1$; в $N_0(z, t)$, $z \in D_1 + \Gamma_1 + D_0$, $t \in \Gamma_0$; в $M_0(z, t)$, $z \in S$, $t \in \Gamma_1$. Как известно (см. И. Н. Векуа [2] стр. 142), все частные производные от функций $K_0(z, t)$ и $N_0(z, t)$ по x и y до порядка $m-2$ включительно непрерывны в $D_1 + \Gamma_1$ и $D_1 + \Gamma_1 + D_0 + \Gamma_0$, производные порядка $m-1$ имеют логарифмическую особенность при $z=t$, а производные порядка m имеют особенность вида $(z-t)^{-1}$, соответственно, на Γ_1 и Γ_0 . Все производные функции $M_0(z, t)$ по x и y порядка $m-2$ включительно непрерывны в S , производные порядка $m-1$ имеют логарифмическую особенность при $z=t \in \Gamma_1$, а производные порядка m имеют особенность вида $(t-z)^{-1}$.

Принимая обозначения $t_0 = \xi + i\eta$, тогда при $p, q=0, 1, \dots, m-1$; $p+q \leq m-1$ переходя к пределу из области $D_0 + D_1 + \Gamma_1$ на Γ_0 , получаем

$$U_{pq}^+(t_0) = \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) \frac{\partial^{p+q} N_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^{p+q} M_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds, \quad (28)$$

из области D_1 на Γ_1

$$U_{pq}^+(t_0) = \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^{p+q} K_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds, \quad (29)$$

из области D_0 на Γ_1

$$U_{pq}^-(t_0) = \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) \frac{\partial^{p+q} N_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^{p+q} M_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds. \quad (30)$$

При $p+q=m$ переходя к пределу из области $D_1 + \Gamma_1 + D_0$ на Γ_0 , получаем

$$U_{pq}^+(t_0) = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^m (m-1)! H_0(t_0)}{t_0^{m-1} t_0'} \right] \mu(t_0) +$$

$$+ \int_{\Gamma_0} \mu_0(t) \frac{\partial^m N_0(t_0, t)}{\partial x^p \partial y^q} ds + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^m M_0(t_0, t)}{\partial x^p \partial y^q} ds, \quad (31)$$

из области D_1 на Γ_1

$$U_{pq}^+(t_0) = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^{m+1} (m-1)! H_0(t_0)}{t_0^{m-1} t_0'} \right] \mu(t_0) + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^m K_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds, \quad (32)$$

из области D_0 на Γ_1

$$U_{pq}^-(t_0) = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^{m+1} (m-1)! H_0(t_0)}{(t_0 - z_1)^{m-1} t_0'} \right] \mu_1(t_0) + \\ + \int_{\Gamma_0} \mu(x) \frac{\partial^m N_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds + \int_{\Gamma_1} \mu_1(t) \frac{\partial^m M_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds, \quad (33)$$

где

$$\frac{\partial^m N_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^m (m-1)! H_0(t_0)}{(t - t_0) t^{m-1}} + N_{pq}^*(t_0, t) \right], t_0 \in \Gamma_0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^m \kappa_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^m (m-1)! H_0(t_0)}{(t - t_0) t^{m-1}} + \kappa_{pq}^*(t_0, t) \right], t_0, t \in \Gamma_1, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^m M_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i^{q+1} (-1)^{m+1} (m-1)! H_0(t_0)}{(t - t_0) (t - z_1)^{m-1}} + M_{pq}^*(t_0, t) \right], t_0, t \in \Gamma_1, \quad (36)$$

функции $N_{pq}^*(t_0, t)$, $\kappa_{pq}^*(t_0, t)$, $M_{pq}^*(t_0, t)$ имеют особенность только логарифмического типа при $t=t_0$ соответственно на Γ_0 и Γ_1 , поэтому $(t-t_0)N_{pq}^*(t_0, t)$, $(t-t_0)\kappa_{pq}^*(t_0, t)$, $(t-t_0)M_{pq}^*(t_0, t)$ удовлетворяют условию Гельдера, следовательно, первый интеграл в (31), интеграл в (32) и последний интеграл в (33) надо понимать в смысле главного значения по Коши.

Подставляя выражения (28), (31)–(33) в граничные условия (20), (21) получим

$$\left. \begin{aligned} A_0(t_0) \mu_0(t) + \int_{\Gamma_0} N(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} M(t_0, t) \mu_1(t) ds &= f_2(t_0) \\ B_0(t_0) \mu_1(t_0) + \int_{\Gamma_0} P(t_0, t) \mu_0(t) ds + \int_{\Gamma_1} Q(t_0, t) \mu_1(t) ds &= f_3(t_0) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} t_0 \in \Gamma_0 \\ t_0 \in \Gamma_1, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$A_0(t_0) = \operatorname{Re} \left[\pi i (-1)^m (m-1)! t_0^{-m+1} t_0' H_0(t_0) \sum_{q=0}^m i^q a^{m-q, q}(t_0) \right], \\ N(t_0, t) = \sum_{p, q=0, 1, \dots, m}^{p+q \leq m} \left[a^{pq}(t_0) \frac{\partial^{p+q} N_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} + \int_{\Gamma_0} b^{pq}(t_0, t_1) \frac{\partial^{p+q} N_0(t_1, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds_1 \right], \\ M(t_0, t) = \sum_{p, q=0, 1, \dots, m}^{p+q \leq m} \left[a^{pq}(t_0) \frac{\partial^{p+q} M_0(t_0, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} + \int_{\Gamma_0} b^{pq}(t_0, t_1) \frac{\partial^{p+q} M_0(t_1, t)}{\partial \xi^p \partial \eta^q} ds_1 \right], \\ B_0(t_0) = \operatorname{Re} \left\{ \pi i (-1)^m (m-1)! H_0(t_0) \left(\sum_{q=0}^m i^q \right) \left[\kappa_1 t_0^{1-m} + \kappa_2 (t_0 - z_1)^{1-m} \right] \right\},$$

причем, $t_0 = \xi + i\eta$, $t_1 = \xi_1 + i\eta_1$, а ds_1 элемент дуги Γ_1 в точке t_1 . Ядра $M(t_0, t)$ и $P(t_0, t)$ регулярны, ядро $N(t_0, t)$ на Γ_0 , а ядро $Q(t_0, t)$ на Γ_1 при $t=t_0$ имеют особенность вида $(t-t_0)^{-1}$.

Таким образом, для определения функций $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ имеем систему сингулярных интегральных уравнений (37), которая, очевидно, эквивалентна задаче (Γ_1).

Выделяя характеристическую часть и учитывая, что $ds = t'dt$ и вводя следующие обозначения

$$\alpha_{11}(t_0) = A_0(t_0), \quad \beta_{11}(t_0) = N^*(t_0, t_0), \quad \gamma_{11}(t_0, t) = \frac{N^*(t_0, t) - N^*(t_0, t_0)}{t - t_0},$$

$$\alpha_{12}(t_0) = 0, \quad \beta_{12}(t_0) = 0, \quad \gamma_{12}(t_0, t) = M(t_0, t) \bar{t}', \quad \alpha_{21}(t_0) = 0, \\ \beta_{21}(t_0) = 0, \quad \gamma_{21}(t_0, t) = P(t_0, t) \bar{t}', \quad \alpha_{22}(t_0) = B_0(t_0), \quad \beta_{22}(t_0) = Q^*(t_0, t_0),$$

$$\gamma_{22}(t_0, t) = \frac{Q^*(t_0, t) - Q^*(t_0, t_0)}{t - t_0}, \quad N(t_0, t) \bar{t}' = \frac{N^*(t_0, t)}{t - t_0},$$

$$Q(t_0, t) \bar{t}' = \frac{Q^*(t_0, t)}{t - t_0}.$$

$$\nu_1(t) = \begin{cases} \nu_0(t), & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ 0, & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases} \quad \nu_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ \nu_1(t), & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases}$$

$$f_4(t) = \begin{cases} f_2(t), & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ 0, & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases} \quad f_5(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ f_3(t), & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases}$$

$$\gamma_{11}^*(t_0, t) = \begin{cases} \gamma_{11}(t_0, t), & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ 0, & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases} \quad \gamma_{12}^*(t_0, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ \gamma_{12}(t_0, t), & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases}$$

$$\gamma_{22}^*(t_0, t) = \begin{cases} \gamma_{22}(t_0, t), & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ 0, & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases} \quad \gamma_{32}^*(t_0, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \in \Gamma_0; \\ \gamma_{32}(t_0, t), & \text{при } t \in \Gamma_1; \end{cases}$$

систему (37), так же как и систему (19), можем записать в виде:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\alpha_{ik}(t_0) \nu_k(t_0) + \beta_{ik}(t_0) \int_{\Gamma} \frac{\nu_k(t)}{t - t_0} dt + \int_{\Gamma} \gamma_{ik}^*(t_0, t) \nu_k(t) dt \right] = f_{i+3}(t), \quad (38) \\ i = 1, 2,$$

причем, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$.

Система (38) есть система сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами и выделенной характеристической частью [3]. Систему (38) в матричной записи можно переписать в следующем виде:

$$A(t_0) \nu(t_0) + B(t_0) \int_{\Gamma} \frac{\nu(t)}{t - t_0} dt + \int_{\Gamma} \kappa(t_0, t) \nu(t) dt = f(t_0), \quad (39)$$

где

$A(t_0) = \|\alpha_{ik}(t_0)\|$, $B(t_0) = \|\beta_{ik}(t_0)\|$, $f(t_0) = (f_4, f_5)$ — заданные на Γ матрицы и вектор; $\kappa(t_0, t) = \|\gamma_{ik}^*(t_0, t)\|$ — матрица, заданная на Γ и удовлетворяющая условию Гельдера по отношению к каждому аргументу в отдельности; $\nu(t_0) = (\nu_1, \nu_2)$ — искомый вектор класса H_m .

В дальнейшем мы будем считать, что

$$\det \|A + B\| \neq 0, \quad \det \|A - B\|, \quad (\text{всюду на } \Gamma) \quad (40)$$

Уравнение (39) перепишем в следующем виде:

$$R \nu = \rho(t_0), \quad (41)$$

где

$$\rho(t_0) = f(t_0) - \int_{\Gamma} \kappa(t_0, t) \nu(t) dt. \quad (42)$$

¹ Определение класса H_m дано в работе [1].

Рассматривая временно правую часть (41) как известный вектор и пользуясь результатами § 16 [3], можно утверждать следующее: уравнение (41) разрешимо тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\int_{\Gamma} \rho(t) \omega_{\alpha}(t) dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \mu, \quad (43)$$

где $\omega_{\alpha}(t)$ — определенные линейно независимые векторы, удовлетворяющие условию Гельдера (μ — сумма отрицательных индексов). При этих условиях общее решение уравнения (41) дается формулой:

$$v(t_0) = R_0 \rho + \frac{1}{2} [\chi^+(t_0) - \chi^-(t_0)] p(t_0), \quad (44)$$

где

$$R_0 \rho = \frac{1}{2} \{ [A(t_0) + B(t_0)]^{-1} + [A(t_0) - B(t_0)]^{-1} \} + \frac{1}{2} [\chi^+(t_0) - \chi^-(t_0)] \int_{\Gamma} \frac{Z(t_1) \rho(t_1)}{t_1 - t_0} dt_1, \quad (45)$$

причем, матрица $\chi(t)$ — каноническая матрица однородной задачи Гильберта, матрица $Z(t)$ определяется следующей формулой

$$Z(t_0) = [\chi(t_0)]^{-1} [A(t_0) - B(t_0)]^{-1} = [\chi^+(t_0)]^{-1} [A(t_0) + B(t_0)], \quad (46)$$

$$p(t_0) = (p_{\lambda_1-1}, p_{\lambda_2-1}), \quad (47)$$

где $p_{\alpha} = p_{\alpha}(t_0)$ — полином степени α с произвольными коэффициентами ($p_{\alpha} \equiv 0$ при $\alpha < 0$).

Подставляя соотношение (42) в (44), мы получаем интегральное уравнение:

$$R^* v = v(t_0) + \int_{\Gamma} R(t_0, t) v(t) dt = f^*(t_0) + \frac{1}{2} [\chi^+(t_0) - \chi^-(t_0)] p(t_0), \quad (48)$$

где

$$f^*(t_0) = R_0 f \equiv A^{\circ}(t_0) f(t_0) + B^{\circ}(t_0) \int_{\Gamma} \frac{z(t_1) f(t_1)}{t_1 - t_0} dt_1,$$

$$R(t_0, t) = R_0 \kappa(t_0, t) \equiv A^{\circ}(t_0) \kappa(t_0, t) + B^{\circ}(t_0) \int_{\Gamma} \frac{z(t_1) \kappa(t_1, t)}{t_1 - t_0} dt_1.$$

Подставляя значения $\rho(t_0)$ из (42) в (43), получим

$$\int_{\Gamma} \tau_{\alpha}(t) v(t) dt = \int_{\Gamma} \omega_{\alpha}(t) f(t) dt, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \mu, \quad (49)$$

где

$$\tau_{\alpha}(t) = \int_{\Gamma} \kappa'(t_2, t) \omega_{\alpha}(t_1) dt_1,$$

причем $\kappa'(t_1, t)$ — матрица, получаемая транспозицией матрицы $\kappa(t_1, t)$.

Можно показать, что к интегральному уравнению (48) применимы основные теоремы Фредгольма. Уравнение (48) будем называть квазирегулярным уравнением Фредгольма. Полученные результаты формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Сингулярное интегральное уравнение (39) эквивалентно (в смысле нахождения решений) квазирегулярному интегральному уравнению Фредгольма (48) с μ дополнительными условиями (49).

Можно сформулировать аналогичные теоремы Нетера.

Теорема 1. Число линейно независимых решений однородного уравнения

$$R_1 v \equiv A(t_0) v(t_0) + B(t_0) \int_{\Gamma} \frac{v(t) dx}{t - t_0} \kappa(t_0, t) v(t) dt = 0, \quad (50)$$

конечно.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения

$$R v = f$$

заключается в следующем:

$$\int_{\Gamma} f(t) \omega_{\alpha}(t) dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, l',$$

где $\omega_{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, l'$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения

$$R_1' v \equiv A'(t_0) v(t_0) - \int_{\Gamma} \frac{B'(t) v(t)}{t - t_0} dt + \int_{\Gamma} \kappa'(t, t_0) v(t) dt = 0. \quad (51)$$

Теорема 3. $l - l' = \chi$,

где l — число линейно независимых решений однородного уравнения (50); χ — суммарный индекс этого уравнения; l' — число линейно независимых решений союзного однородного уравнения (51).

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Об одной нелинейной граничной задаче Римана. Труды Тбилисского матем. ин-та, т. XI, 1942.
2. Векуа И. Н. Новые методы решений эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
3. Векуа И. Н. Системы сингулярных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1950.
4. Гусейнов А. И. Об одной задаче теории потенциала. „Прикладная математика и механика“, 1948, т. XII.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярное интегральное уравнение. Гос. изд. физ.-матем. литер., М., 1962.

Г. М. Гасымов

Эллиптик тэнликлэр үчүн хэтти сэрхэд
мәсәлэләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә һәм нәзәри вә һәм дә тәчрүби әһәмијјәтә малик олан ики сэрхэд мәсәләси тәдгиг едилір.

Туталым ки, бир-бирини кәсмәјән Γ_0 вә Γ_1 гапалы һамар әјриләри верилмишдир, белә ки, Γ_0 әјрисини Γ_1 әјрисини өз дахилиндә сахлајыр. Γ_1 -лә әһатә олунмуш областы D_1 , Γ_0 вә Γ_1 әјриләри илә әһатә олунмуш областы D_0 илә ишарә едәк.

Ишдә ашағыдакы мәсәләләр һәлл едилир.
(1) тәнлијинин $D_0 + D_1$ областында елә регулјар һәллини тапмалы ки, (2) вә (3) сәрһәд шәртләрини өдәсин.
(1) тәнлијинин һәллини (4) шәклиндә ахтарыб, нәтичәдә мәсәлә онунла эквивалент олан (19) сингулјар интеграл тәнликләр системинин һәллинә кәтирилир.

Икинчи мәсәләдә (1) тәнлијинин (20), (21) сәрһәд шәртләрини өдәјән һәлли ахтарылып. Јенә дә мәсәләнин һәлли онунла эквивалент олан (37) сингулјар интеграл тәнликләр системинин һәллинә кәтирилир.

(37), һәмчинин (19) системи үчүн Нөтер теоремләринин доғру олдуғу кәстәрилир.

Т. А. АЛИЕВ

К ВВОДУ ГРАФИЧЕСКИХ ДАННЫХ В УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЦИФРОВЫЕ МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Статистический метод анализа систем автоматического управления связан с трудоемкими вычислениями. На практике статистический метод находит успешное применение в тех случаях, когда используются средства современной вычислительной техники. В последние годы проделана большая работа по созданию специализированных средств вычислительной техники, учитывающей специфику расчетов. Как правило, эти узкоспециализированные приборы могут быть предназначены для определения математических ожиданий, для вычисления функций распределения [5], для вычисления корреляционных функций [2] и, наконец, для решения интегральных уравнений, составленных на основе корреляционных функций [1]. Среди этих приборов наибольшее распространение, как известно, получили корреляторы.

Помимо создания специальных вычислительных устройств, в ряде случаев для решения статистических задач используются универсальные цифровые вычислительные машины (УЦВМ). В библиотеках программ отдельных вычислительных центров имеются программы для вычисления корреляционных функций, математических ожиданий, дисперсий и др. Удобства использования УЦВМ для этой цели заключаются в том, что научно-исследовательская, проектно-конструкторская организации и промышленные предприятия, имеющие в своем распоряжении УЦВМ, могут сочетать проведение статистических расчетов с другими расчетами и вычислениями.

На наш взгляд, практический интерес представляют вопросы, связанные с разработкой специализированных устройств для приспособления УЦВМ при решении статистических задач.

Как известно, непосредственное решение статистических задач на УЦВМ малоэффективно. Это объясняется тем, что УЦВМ предназначены для выполнения большого объема вычислений с относительно небольшим количеством исходных данных, в то время как для статистических задач характерно большое количество исходных данных.

Часто при инженерных исследованиях статистические расчеты требуют относительно невысокой точности, в то же время применение УЦВМ, как известно, целесообразно для решения задач с высокой точностью.

УЦВМ не имеет устройств для ввода графических функций, а ввод их вручную—трудная и кропотливая работа. При этом следует учесть, что и емкость оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) УЦВМ при решении некоторых задач может быть недостаточной.

Таким образом, одним из основных препятствий эффективного применения УЦВМ для решения статистических задач является отсутствие устройств ввода графических функций в УЦВМ.

Необходимо отметить, что для вычисления корреляционных функций с приемлемой точностью случайный процесс должен вводиться в машину достаточно подробно [4]. Обычно число ординат исследуемого процесса, принимаемых во внимание при вычислении корреляционных функций, составляет несколько сот, в отдельных случаях доходит до одной или полутора тысяч.

Для иллюстрации объема работы, связанного с обработкой статистических данных, приведем следующий пример: при обработке графических данных для исследования атмосферно-трубчатой установки опытным путем нами было установлено, что для определения корреляционных и взаимокорреляционных функций необходимо производить съем данных через 5÷10 минут в течении 50÷80 часов.

Процесс „снятия“ каждой ординаты с осциллограммы вручную, запись ее в виде таблиц, а затем перфорирувание для последующего ввода в УЦВМ, как было сказано выше, отнимает много времени у оператора, а при исследовании процесса со многими входами и выходами эта работа выполняется месяцами. Даже частичная автоматизация в данном случае является целесообразной, так как намного облегчит работу оператора и уменьшит время обработки.

Как известно, для снятия с какого-либо носителя данных, записанных в виде кривых, пользуются методом следящего [6] или развертывающего [7] преобразования. Созданы приборы, принцип работы которых основан на использовании особенностей этих двух методов одновременно. Указанные приборы в состоянии воспроизвести графические функции от узких лент или пленок. Ширина их ограничивается диаметром электронно-лучевой трубки, точность воспроизведения, помимо других причин, зависит также от отклонения луча от центра экрана [3].

Следует отметить, что такие приборы несколько сложны и им присуща относительно небольшая точность. Иногда информация „переписывается“ на магнитную ленту, затем производится считывание с лент и одновременное преобразование в двоичный код. Имеются и другие способы ввода.

Анализ предложенных решений приводит нас к заключению, что задача ввода графических функций в УЦВМ требует дальнейшего разрешения.

Нам представляется, что в зависимости от характера предприятия эта задача может быть решена в следующих вариантах.

1. Автоматизация „снятия“ координат с осциллограммы. Это означало бы разработку устройства, которое определяло бы значение каждой координаты с точностью, удовлетворяющей статистические расчеты. Это устройство значения координат либо печатало бы в виде таблиц, либо показывало бы в виде цифровых световых сигнализаций, которые оператор имел бы возможность использовать.

2. Автоматизация „снятия“ координат и перфорирувания полученных значений.

В этом варианте устройства для снятия графических функций служат приставкой перфоратора и при снятии каждой координаты значения ее перфорируются; таким образом, по окончании „чтения“ всей гра-

фической функции заканчивается также ее перфорирувание на перфоленты или же на перфокарты.

3. Автоматизация „снятия“ координат и ее ввод непосредственно в УЦВМ.

В этом варианте полученное значение каждой координаты записывается в ОЗУ УЦВМ. Полученное значение координат от регистра читающего устройства возможно подать в ОЗУ как непосредственно, так и через арифметическое устройство (АУ).

Разработка устройств, читающих графические функции в указанных вариантах, уменьшила бы трудности, связанные с обработкой графической функции.

Исследование возможных вариантов „чтения“ графических данных—графика, характер дискретности УЦВМ, а также требуемая точность статистических задач, привели к разработке метода, для которого характерны следующие особенности:

1. Лента не протягивается.
2. Имеется не один, а ряд чувствительных элементов, расположенных по одной прямой линии, которую можно назвать либо „чувствительной линейкой“, либо „аппроксиматором“.
3. Протягивается „чувствительная линейка“.
4. „Чтение“ производится не последовательно от начала графика, а от минимума или же от максимума функции.
5. Минимальное значение ординаты графика будет „считано“ первым, а максимальное—последним или наоборот.
5. При „считывании“ каждой точки графика определяются его координаты.

В предложенном методе конструктивно отличающимся способом реализуется аппроксимация заданной функции приближенно, с практически достаточной точностью ломанной линией, из прямолинейных

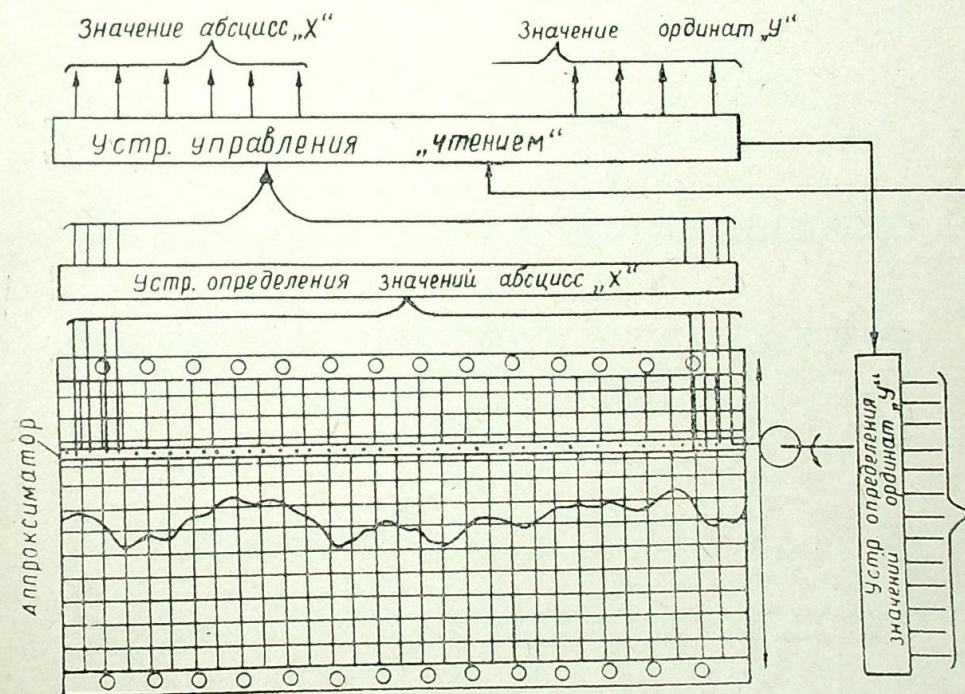


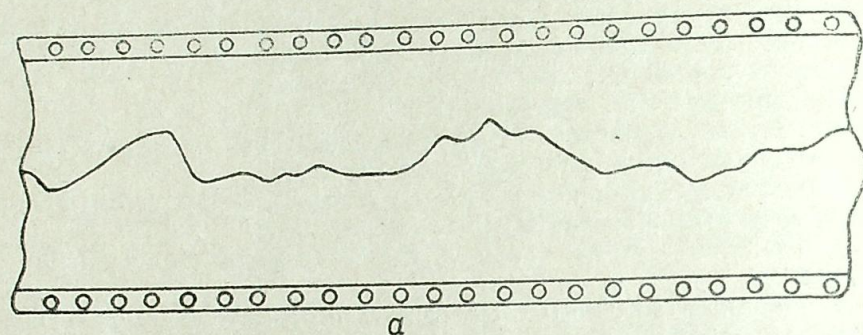
Рис. 1

отрезков. В дальнейшем значение каждой координаты (вершины) вводится в УЦВМ.

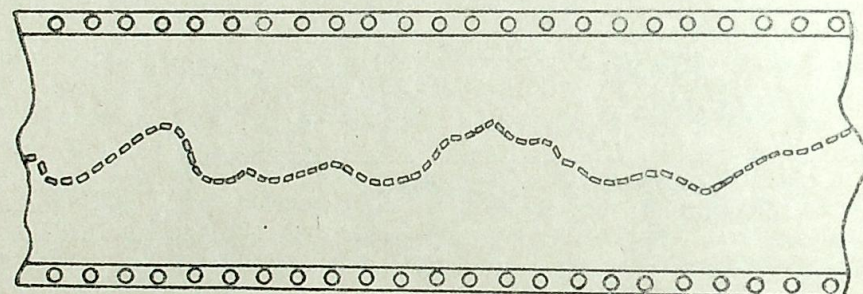
Теперь коротко опишем способы конструктивной реализации предлагаемого метода; отметим, что как чувствительный элемент могут быть применены фотодиоды или стальные иглы. У игл поверхность, кроме концов, покрывается изоляционным слоем. Собирая чувствительные элементы через равные расстояния по прямой линии, получим „чувствительную линейку“ (рис. 1).

Предлагаются следующие способы подготовки ленты для чтения:

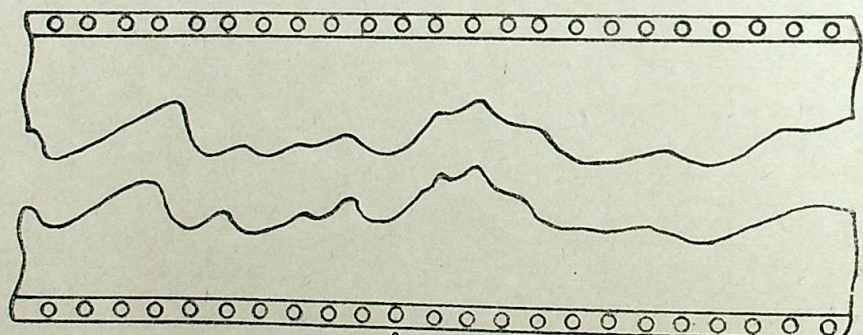
1. При „чтении“ с „чувствительной линейкой“, состоящей из фотодиодов, лента перфорируется со специальной зубчатой шестерней (рис. 2 б). При (ширина зубцов не более 1 мм) по профилю графика (рис. 2 в). При интенсивном и равномерном освещении снизу перфорированной ленты профиль графика получается в виде световой линии, а при встрече фотодиода с любой точкой этой линии на выходе получается сигнал.



а



б



в

Рис. 2

2. При „чтении“ с „чувствительной линейкой“, состоящей из стальных игл, лента разрезается по профилю графика специальной бритвы (рис. 2 в). В том случае под лентой расположена металлическая поверхность, и при продвижении „линейки“ чувствительный элемент дает сигнал в момент „встречи“ с профилем графика. Естественно, что в этом случае используется только одна половина ленты, разрезанная по профилю графической функции.

Подготовка ленты занимает незначительное время и после ее окончания она укладывается в специальный стол, причем края ленты параллельны краям стола и „чувствительной линейке“. При продвижении „линейки“ каждый чувствительный элемент в определенный момент времени дает сигнал о „встрече“ абсциссы с соответствующей ординатой графической функции. Определяя значение расстояния „линейки“ от опорной линии в момент сигнализации каждого чувствительного элемента, мы получаем значение абсциссы и ординаты каждой точки.

Вопрос же дальнейшего преобразования прямолинейного движения „линейки“ в двоичный код может быть решен в нескольких вариантах, что нашло свое освещение в литературе.

Исследования, проведенные в Вычислительном центре АН Азербайджанской ССР под руководством проф. С. А. Алескерова по разработке устройств с использованием вышеописанных принципов, указывают на целесообразность разработки подобных устройств.

Было выявлено, что такие устройства будут отличаться конструктивной простотой и несложностью в эксплуатации, надежностью и достаточной для практических расчетов точностью результата „чтения“, удовлетворяющего решение статистических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вальденберг Ю. С., Колотов Ю. Н. Синтезатор-вычислительная машина для решения интегральных уравнений. М., ЦИТЭИ, 1960.
2. Васманов В. В. Вычислительные математические приборы. Машгиз, М., 1958.
3. Самофалов К. Г. Вычислительные устройства. Киев, 1963.
4. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Машгиз, М., 1960.
5. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, М., 1959.
6. Hancock E. I. Protoformer design and performance. Proc. NEC, vol. 7, p. 228, 1951.
7. Polimeroy L. A New Method of Generating Functions. Tran. IRE. V. EC—3, № 3, sept. 1954.

Т. А. Әлијев

Универсал рәғәмһесаблајычы машинларда статистик мәсәләләрин һәлли үчүн график функцијаларын дахил едилмәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә автоматик идарә системләринин статистик методла анализ олунмасында универсал рәғәмһесаблајычы машинларын тәтбигинин ефектив олмасы үчүн бу тип мәсәләләрин һәлліндә истифадә едилән график функцијаларын машина автоматик дахил едилмәси үсулу верилир.

Бу үсулдан истифадә едәрәк, график функцијалары рәғәмһесаблајычы машина дахил едән гурғунун үч вариантда дүзәлдилмәсинин мүмкүн олдуғу көстәрилир.

Т. НАСИРОВА

ОБСЛУЖИВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ УСТАНОВОК

На систему, состоящую из n приборов, поступает ординарный пуассоновский поток интенсивности λ . Каждое требование потока обслуживается одним прибором. Каждый прибор обслуживает одно требование. Требование, заставшее все приборы занятыми, теряется. После обслуживания каждый прибор с вероятностью p может быть направлен на восстановление и с вероятностью $1 - p$ возвращен в число действующих. Длительности обслуживания приборов требования, профилактического осмотра и восстановления—случайные величины, ξ , η и I —числа обслуживаемых установок на профилактике и на восстановлении, соответственно, r и s .

Задача заключается в определении вероятностей p_{ijk} того, что в любой момент времени в системе обслуживания при стационарном режиме будет i приборов, занятых обслуживанием требований, j приборов в системе профилактического осмотра и k приборов на восстановлении.

а) Пусть

$$1. P(\xi < x) = F(x), P(\eta < x) = H(x), P(I < x) = G(x).$$

$$2. \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = f < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx = h < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} [1 - G(x)] dx = g < \infty.$$

$$3. r = s = n.$$

Последнее условие показывает, что и на профилактике, и на восстановлении имеется достаточное число установок, т. е. приборы не теряются и не ожидают ни на профилактике, ни на восстановлении.

Рассмотрим состояния $A_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k)$, означающие, что в момент t в обслуживании имеется i требований, которые к моменту t обслуживались уже в течение $x_1, \dots, x_i$ единиц времени, j приборов проходит профилактический осмотр, который длится к моменту t в течение $y_1, \dots, y_j$, k приборов находится на восстановлении, восстановление которых к моменту t уже длится $z_1, \dots, z_k$.

Т. НАСИРОВА

ОБСЛУЖИВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОФИЛАКТИЧЕСКИХ И ВОССТАНАВЛИВАЮЩИХ УСТАНОВОК

На систему, состоящую из n приборов, поступает ординарный пуассоновский поток интенсивности λ . Каждое требование потока обслуживается одним прибором. Каждый прибор обслуживает одно требование. Требование, заставшее все приборы занятыми, теряется. После обслуживания каждый прибор с вероятностью p может быть направлен на восстановление и с вероятностью $1 - p$ возвращен в число действующих. Длительности обслуживания приборов требования, профилактического осмотра и восстановления—случайные величины, ξ , η и l —числа обслуживаемых установок на профилактике и на восстановлении, соответственно, r и s .

Задача заключается в определении вероятностей p_{ijk} того, что в любой момент времени в системе обслуживания при стационарном режиме будет i приборов, занятых обслуживанием требований, j приборов в системе профилактического осмотра и k приборов на восстановлении.

а) Пусть

$$1. P(\xi < x) = F(x), P(\eta < x) = H(x), P(l < x) = G(x).$$

$$2. \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx = f < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} [1 - H(x)] dx = h < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} [1 - G(x)] dx = g < \infty.$$

$$3. r = s = n.$$

Последнее условие показывает, что и на профилактике, и на восстановлении имеется достаточное число установок, т. е. приборы не теряются и не ожидают ни на профилактике, ни на восстановлении.

Рассмотрим состояния $A_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k)$, означающие, что в момент t в обслуживании имеется i требований, которые к моменту t обслуживались уже в течение $x_1, \dots, x_i$ единиц времени, j приборов проходит профилактический осмотр, который длится к моменту t в течение $y_1, \dots, y_j$, k приборов находится на восстановлении, восстановление которых к моменту t уже длится $z_1, \dots, z_k$.

Рассматривается следующий процесс:

$$x(t) = \{A_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k), t \geq 0\}. \quad (1)$$

Предположим, что длительности обслуживания, требований и приборов независимы друг от друга и от потока требований.

Аналогично, как в [1], легко доказывается марковость процесса (1) и существование плотностей распределения вероятностей:

$$p_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k).$$

Здесь

$p_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k) \Delta x_1 \dots \Delta x_i \Delta y_1 \dots \Delta y_j \Delta z_1 \dots \Delta z_k$ есть вероятности того, что в момент t

$$(x_1 < \xi_1 < x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i; y_1 < \eta_1 < y_1 + \Delta y_1, \dots, y_j < \eta_j < y_j + \Delta y_j; z_1 < l_1 < z_1 + \Delta z_1, \dots, z_k < l_k < z_k + \Delta z_k).$$

При $i+j+k < n$ получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial x_\alpha} + \\ & + \sum_{\beta=1}^j \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial y_\beta} + \sum_{\gamma=1}^k \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial z_\gamma} + \lambda p_{ijk}^*(\dots) = \\ & = (1-p)(j+1) \int_0^\infty p_{i,j+1,k}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_{j+1}; z_1, \dots, z_k) dH(y_{j+1}) + \\ & + (k+1) \int_0^\infty p_{i,j,k+1}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k, z_{k+1}) dG(z_{k+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

при $i+j+k = n$ получим

$$\frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^j \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial y_\beta} + \sum_{\gamma=1}^k \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial z_\gamma} = 0$$

Легко находим граничные условия для системы

$$\begin{aligned} & \lambda p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k) = \\ & = (i+1) p_{i+1,j,k}^*(t; x_1, \dots, x_{i+1}; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k); i, j, k = 0, n \\ & (j+1) p_{i,j+1,k}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_{j+1}; z_1, \dots, z_k) dH(y_{j+1}) = \\ & = p_{i,j,k+1}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k, 0) \\ & (i+1) \int_0^\infty p_{i+1,j,k}^*(t; x_1, \dots, x_{i+1}; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k) dF(x_{i+1}) = \\ & = p_{i,j+1,k}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j, 0; z_1, \dots, z_k), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} & p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k) = \\ & = \frac{p_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k)}{\prod_{c=1}^i [1 - F(x_c)] \prod_{m=1}^j [1 - H(y_m)] \prod_{\varphi=1}^k [1 - G(z_\varphi)]}. \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ система, полученная из (2), при соответствующих граничных условиях имеет решение:

$$p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; z_1, \dots, z_k) = \frac{\lambda^{i+j+k} p^k}{i! j! k!} p_{000}, \quad (4)$$

где $0 \leq i+j+k \leq n$.

Это легко проверить подстановкой. При этом p_{000} определяется из условия нормировки:

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i+j+k=n} p_{ijk} = p_{000} + \sum_{0 \leq i+j+k=n} \int_0^\infty (i+j+k) \int_0^\infty p_{ijk}(x_1, \dots, x_i; y_1, \dots, y_j; \\ & z_1, \dots, z_k) dx_1 \dots dx_i dy_1 \dots dy_j dz_1 \dots dz_k = p_{000} + \\ & + p_{000} \sum_{0 \leq i+j+k=n} \frac{\lambda^{i+j+k}}{i! j! k!} p^k f^i h^j g^k = 1 \end{aligned}$$

Доказательство единственности и эргодичности распределения (4) проводится, как в [1], с небольшими изменениями частью технического характера, поэтому мы их здесь не воспроизводим.

Если $h=j=0$, то мы имеем дело с классической задачей Эрланга. Как показывают наши формулы, в этом случае $p_{ijk}=0$, если $j+k \neq 0$. Для $j=k=0$ наши формулы дают результат, найденный недавно Б. А. Севастьяновым [1] и А. Я. Хинчиным [2]:

$$p_{00}^* = \frac{\lambda^1}{1!} p_{000}$$

б) Пусть

$$1. P(\xi < x) = F(x), \quad P(\eta < x) = 1 - e^{-vx}, \quad P(l < x) = 1 - e^{-x}$$

$$2. \int_0^\infty [1 - F(x)] dx = f < \infty.$$

3. $0 < r \leq n; 0 < s \leq n$, т. е. прибор, заставший занятой установку на профилактике или на восстановлении, ожидает своей очереди.

Рассмотрим состояния $A_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i)$, означающие, что в момент t в системе обслуживания требований имеется i требований, которые обслуживаются к моменту t за время $x_1, \dots, x_i$; j приборов проходит профилактический осмотр или ожидает его начала, k приборов находится на восстановлении или ожидает его.

Здесь происходит следующий случайный процесс:

$$x(t) = \{A_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i), t \geq 0\} \quad (5)$$

Процесс (4) является марковским и существуют плотности распределения вероятностей:

$$p_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i).$$

Доказательства этих утверждений не будем проводить.

Теорема. При условии 2 пункта б) марковский процесс (5) имеет следующее стационарное распределение:

$$(A) \quad p_{ijk}(x_1, \dots, x_i) = \frac{\lambda^{i+j+k} p^k}{i! j! k! \varphi^{i+k}} p_{000} \prod_{c=1}^i [1 - F(x_c)],$$

если $j \leq r, k \leq s$, где $i = 1, n$;

$$(B) \quad p_{ijk}(x_1, \dots, x_i) = \frac{\lambda^{i+j+k} p^k}{i! r! s! r^{i-r} s^{k-s} \varphi^i x^k} p_{000} \prod_{l=1}^i [1 - F(x_l)],$$

если $j \geq r, k \geq s$.

Доказательство. При $j \leq r, k \leq s$ получим:

$$\frac{\partial p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial x_\alpha} + (\lambda + j\vartheta + kz) p_{ijk}^*(\dots) =$$

$$= (i+1) \int_0^\infty p_{i+1, j-1, k}^*(t; x_1, \dots, x_{i+1}) dF(x_{i+1}) +$$

$$+ (j+1) p x p_{i, j+1, k-1}^*(t; x_1, \dots, x_i) +$$

$$+ (j+1)(1-p) \vartheta p_{i, j+1, k}^*(t; x_1, \dots, x_i) + (k+1) z p_{i, j, k+1}^*(t; x_1, \dots, x_i)$$

При $i+j+k=n, j \leq r, k \leq s$

$$\frac{\partial p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial x_\alpha} + (j\vartheta + kz) p_{ijk}^*(\dots) =$$

$$= (i+1) \int_0^\infty p_{i+1, j-1, k}^*(t; x_1, \dots, x_i, x_{i+1}) dF(x_{i+1}) + (j+1) p \vartheta p_{i, j+1, k-1}^*(\dots).$$

При $j \geq r, k \geq s$

$$\frac{\partial p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i)}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^i \frac{\partial p_{ijk}^*(\dots)}{\partial x_\alpha} + (\lambda + r\vartheta + sz) p_{ijk}^*(\dots) =$$

$$= (i+1) \int_0^\infty p_{i+1, j-1, k}^*(t; x_1, \dots, x_i, x_{i+1}) dF(x_{i+1}) + p r \vartheta p_{i, j+1, k-1}^*(\dots) +$$

$$+ (1-p) r \vartheta p_{i, j+1, k}^*(\dots) + p z p_{i, j, k+1}^*(\dots).$$

Граничные условия для системы (6) будут

$$\lambda p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i) = (i+1) p_{i+1, j, k}^*(t; x_1, \dots, x_i; 0); i=0; i=n-1, \quad (7)$$

где

$$p_{ijk}^*(t; x_1, \dots, x_i) = \frac{p_{ijk}(t; x_1, \dots, x_i)}{\prod_{\alpha=1}^i [1 - F(x_\alpha)]}$$

Решение системы (6), удовлетворяющее граничным условиям (7), есть решения (А) и (В). Единственность и эргодичность этих стационарных распределений доказывается аналогичным образом, как в [1].

Постоянная p_{000} определяется из условия нормировки:

$$\sum_{0 \leq i+j+k \leq n} p_{ijk} = 1.$$

Отсюда

$$p_{000} = \frac{1}{1 + \sum_{\substack{0 \leq i+j+k \leq n \\ j < r \\ k < s}} \frac{\lambda^{i+j+k} p^k f^i}{i! j! k! \vartheta^j z^k} + \sum_{\substack{0 \leq i+j+k \leq n \\ j \geq r \\ k \geq s}} \frac{\lambda^{i+j+k} p^k f^i}{i! r! s! r^{j-r} s^{k-s} \vartheta^j z^k}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теория вероятностей и ее применение, т. 2, вып. 1, 1957.
2. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания, 1963.

Т. Нәсирова

Профилактика вэ тә'мир заманы хидмәт едилмәси

п эдәд чиһаза λ параметрли Пуассон сели дахил олур. Селин үнсүрләри $F(x)$ гануну илә хидмәт олунур. Чиһаз селин һәр бир үнсүрүнү хидмәт етдикдән сонра профилактикаја, сонра исә p еһтималы илә тә'мирә, даһа сонра $1-p$ еһтималы илә саз чиһазлар сыра-сына көндәрилир. Чиһазлар тә'мир вэ профилактикада ујғун олараг $G(x)$ вэ $H(x)$ гануну илә хидмәт олунур. Бу һалда итмә системи өјрә-нилир.

P_{ijk} ашағыдакы һадисәнин еһтималы олсун; селин i үнсүрү хидмәт олунур, j чиһаз профилактикададыр, k үнсүр тә'мирдәдир. Онда

$$P_{ijk} = \frac{\lambda^{i+j+k}}{i! j! k!} p^k f^i g^k p_{000}$$

$$\text{Бурада } f = \int_0^\infty [1 - P(x)] \lambda x, h = \int_0^\infty [1 - H(x)] \lambda x, g =$$

$$= \int_0^\infty [1 - G(x)] \lambda x, p_{000} = \frac{1}{1 + \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} \frac{\lambda^{i+j+k}}{i! j! k!} p^k f^i h^j g^k}$$

Әкәр $H(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ дирсә, көзләмә системинә бахы-лыр. Онда $j < r$ вэ $k < s$ олдугда

$$P_{ijk} = \frac{\lambda^{i+j+k}}{i! j! k! \vartheta^j z^k} p^k f^i P_{000},$$

$j \geq r, k \geq s$ олдугда

$$P_{ijk} = \frac{\lambda^{i+j+k}}{i! r! s! r^{j-r} s^{k-s} \vartheta^j z^k} p^k f^i P_{000}$$

алыныр. Бурада

$$p_{000} = \frac{1}{1 + \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} \frac{\lambda^{i+j+k} p^k f^i}{i! j! k! \vartheta^j z^k} + \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} \frac{\lambda^{i+j+k} p^k f^i}{i! r! s! r^{j-r} s^{k-s} \vartheta^j z^k}}$$

Д. Х. АМИРХАНОВА и Р. И. БАШИРОВ

ФОНОННОЕ УВЛЕЧЕНИЕ В АНТИМОНИДАХ ИНДИЯ И ГАЛЛИЯ

Эффекту Гуревича в полупроводниках посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. Изучение влияния этого эффекта на термомагнитные и термоэлектрические явления в германии [3, 7] позволило сделать важные выводы о характере электрон-фононного и фонон-фононного взаимодействия в исследованной области температур.

Термомагнитные свойства антимонида галлия и дырочного антимонида индия ниже 100°K никем не изучались. Между тем, именно в этой области температур следует ожидать проявление эффекта фононного увлечения. Кристаллическая решетка этих соединений относится к кубической системе. Термомагнитные свойства InSb и GaSb изучались при температурах, где фононное увлечение несущественно [1].

В настоящей работе приводятся результаты измерения поперечного и продольного эффектов Нернста-Эттингсгаузена (НЭ) на пяти образцах $p - \text{InSb}$ и $p - \text{GaSb}$ с различным содержанием примесей в интервале $20 - 300^\circ\text{K}$ и магнитных полях до 26000 эрстед . Кроме того, для интерпретации результатов были измерены термоэдс, электропроводность и эффект Холла.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для измерений гальвано- и термомагнитных эффектов мы использовали прибор, аналогичный описанному в работе [2]. Медь-константановые термодпары диаметром $0,15 \text{ мм}$, тщательно проградуйрованные по реперным точкам, припаивали тонким слоем чистого олова к образцу, сюда же припаивали холодильник и нагреватель.

Измерения проводились компенсационным методом на низкоомном потенциометре постоянного тока.

Образцы крестообразной формы вырезали из слитков, прошедших многократную зонную очистку. Потенциальные зонды для измерения поперечного эффекта НЭ припаивали к передней стенке креста. Продольные потенциальные зонды отстояли от торцов образца на расстоянии большем, чем его ширина. Отношение длины образца к его ширине было не менее трех.

Рентгеноструктурный анализ отдельных участков слитка GaSb и InSb показал, что образцы являются монокристаллами. Поверхность образцов шлифовали и травили в соответствующем травителе.

Д. Х. АМИРХАНОВА и Р. И. БАШИРОВ

ФОНОННОЕ УВЛЕЧЕНИЕ В АНТИМОНИДАХ ИНДИЯ И ГАЛЛИЯ

Эффекту Гуревича в полупроводниках посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ. Изучение влияния этого эффекта на термомагнитные и термоэлектрические явления в германии [3, 7] позволило сделать важные выводы о характере электрон-фононного и фонон-фононного взаимодействия в исследованной области температур.

Термомагнитные свойства антимонида галлия и дырочного антимонида индия ниже 100°K никем не изучались. Между тем, именно в этой области температур следует ожидать проявление эффекта фононного увлечения. Кристаллическая решетка этих соединений относится к кубической системе. Термомагнитные свойства InSb и GaSb изучались при температурах, где фононное увлечение несущественно [1].

В настоящей работе приводятся результаты измерения поперечного и продольного эффектов Нернста-Эттингсгаузена (НЭ) на пяти образцах $p - \text{InSb}$ и $p - \text{GaSb}$ с различным содержанием примесей в интервале $20 - 300^{\circ}\text{K}$ и магнитных полях до 26000 эрстед . Кроме того, для интерпретации результатов были измерены термоэдс, электропроводность и эффект Холла.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для измерений гальвано- и термомагнитных эффектов мы использовали прибор, аналогичный описанному в работе [2]. Медь-константановые термодпары диаметром $0,15 \text{ мм}$, тщательно проградуйрованные по реперным точкам, припаивали тонким слоем чистого олова к образцу, сюда же припаивали холодильник и нагреватель.

Измерения проводились компенсационным методом на низкоомном потенциометре постоянного тока.

Образцы крестообразной формы вырезали из слитков, прошедших многократную зонную очистку. Потенциальные зонды для измерения поперечного эффекта НЭ припаивали к передней стенке креста. Продольные потенциальные зонды отстояли от торцов образца на расстоянии большем, чем его ширина. Отношение длины образца к его ширине было не менее трех.

Рентгеноструктурный анализ отдельных участков слитка GaSb и InSb показал, что образцы являются монокристаллами. Поверхность образцов шлифовали и травили в соответствующем травителе.

Результаты измерений и обсуждение

В таблице приводятся значения концентрации и подвижности дырок при температурах жидкого азота и жидкого водорода.

Образец	$n, \text{см}^{-6}$ ($T=77^\circ\text{K}$)	$\mu, \text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ ($T=77^\circ\text{K}$)	$n, \text{см}^{-6}$ ($T=20^\circ\text{K}$)	$\mu, \text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ ($T=20^\circ\text{K}$)
GaSb II—3p	$8 \cdot 10^{15}$	900	$6,3 \cdot 10^{15}$	—
GaSb III—3p	$3 \cdot 10^{16}$	700	$1 \cdot 10^{16}$	230
GaSb IV—1p	$1 \cdot 10^{18}$	450	$1 \cdot 10^{18}$	480
InSb 42—p	$8 \cdot 10^{14}$	916	$1,7 \cdot 10^{14}$	415
InSb 3 p	$3 \cdot 10^{15}$	1200	$4,5 \cdot 10^{15}$	607

Температурная зависимость эффектов

Из таблицы видно, что образцы содержали разное количество электрически активных примесей. В соответствии с этим несколько разными оказались и результаты измерений. Поэтому мы сочли целесообразным проводить обсуждение результатов по образцам.

Более доступными для количественной интерпретации являются экспериментальные результаты для образцов, в которых заведомо можно положить известный механизм рассеяния. Таким является, например, образец GaSb II—3p. Измерения электропроводности и постоянной Холла в зависимости от температуры показали, что в области чисто примесной проводимости (ниже 300°K) подвижность является степенной функцией температуры, $R\sigma \sim T^{-1,2}$, вплоть до $T=30^\circ\text{K}$.

Можно предположить, что в этом интервале температур преобладающим механизмом рассеяния является рассеяние дырок на акустических фононах.

На рис. 1 изображены графики температурной зависимости безразмерных полей поперечного эффекта НЭ ε_y и для образцов GaSb. Поля ε_x и ε_y определяются из условия:

$$\varepsilon_x = \frac{E_x}{\frac{\kappa}{e} \frac{\partial T}{\partial x}}; \quad \varepsilon_y = \frac{F_y}{\frac{\kappa}{e} \frac{\partial T}{\partial x}}$$

где ε_x и ε_y — электрические поля поперечного и продольного эффектов НЭ, соответственно.

Анализируя графики $\varepsilon_y(T)$, остановимся прежде всего на знаке эффекта. При температурах $110-400^\circ\text{K}$ эффект НЭ в образцах GaSb II—3p и GaSb III—3p положителен. Классическая теория, исходящая из изотропной модели полупроводника и невырожденной полосы, предсказывает положительный знак ε_y для $r=0$ [4]. Подвижности, вычисленные в этом образце по данным ε_y и $R\sigma$, примерно совпадают при $T=300^\circ\text{K}$: $R\sigma = 580 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$; $\mu_{\text{из}} = 460 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$. Следовательно, в

области температур $110-300^\circ\text{K}$, согласно термомагнитным измерениям, основной механизм рассеяния носителей заряда — акустические колебания кристаллической решетки.

Ниже 110°K знак эффекта (НЭ) во всех образцах GaSb отрицателен и величина поля НЭ резко возрастает по абсолютной величине с уменьшением температуры. Отрицательный знак ε_y может быть обусловлен либо рассеянием на ионах примеси, либо эффектом фононного увлечения.

В образце GaSb II—3p роль рассеяния дырок на ионизированных атомах примеси, как мы уже говорили, невелика; подвижность дырок, вычисленная по электрическим измерениям, при понижении температуры ниже 110°K продолжает возрастать. Значения подвижностей, вычисленные ниже 110°K по $R\sigma$ и ε_y , отличаются по величине и температурной зависимости. Так, подвижность, вычисленная по эффекту НЭ при температурах ниже 110°K , подчиняется зависимости $\mu_{\text{из}} \sim T^{-4}$. Далее, как видно из рис. 2, термоэдс этого образца возрастает при понижении температуры.

Из всего сказанного следует, что при низких температурах в этом образце $\varepsilon_y(T)$, $\varepsilon_x(T)$ и α определяются эффектом фононного увлечения.

Чтобы оценить важную для теории зависимость времени релаксации длинноволновых фононов от температуры, надо разделить экспериментально измеренные значения ε_y , ε_x и α на фононные и электронные составляющие. При этом электронные составляющие определяются формулами (1)–(3) [4]:

$$\alpha_{\text{э}} = \pm \frac{\kappa}{e} (2 - \mu^*), \quad (1)$$

$$\varepsilon_{y\text{э}} = \left(\frac{1}{2} - r \right) a_r \frac{uH}{c}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{x\text{э}} = (1 - 2r) \left(b_r - \frac{a_r^2}{2} \right) \left(\frac{uH}{c} \right)^2 \quad (3)$$

Здесь a_r и b_r — табулированные коэффициенты, r — определяется механизмом рассеяния, μ^* — приведенный химический потенциал.

Известно, что для достаточно чистых образцов, когда параметр взаимодействия $s \sim \frac{\tau_{\text{э.ф}}}{\tau_{\text{ф.ф}}} \gg 1$, можно считать, что фононные и электронные доли термоэдс и полей НЭ аддитивно складываются:

$$\alpha = \alpha_{\text{ф}} + \alpha_{\text{э}}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{x\text{ф}} + \varepsilon_{x\text{э}}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y\text{ф}} + \varepsilon_{y\text{э}},$$

где значок ф относится к фононным составляющим, а значок э — к электронной доле. Для образцов GaSb II—3p и GaSb III—3p такое разделение допустимо. Для образца GaSb II—3p, полагая $r=0$, $m_p = 2m_0$ и подсчитывая электронные доли по формулам (1)–(3), мы получили, что в интервале $35-130^\circ\text{K}$ $\varepsilon_y \sim T^{-4,7}$, $\alpha_{\text{ф}} \sim T^{-3,2}$.

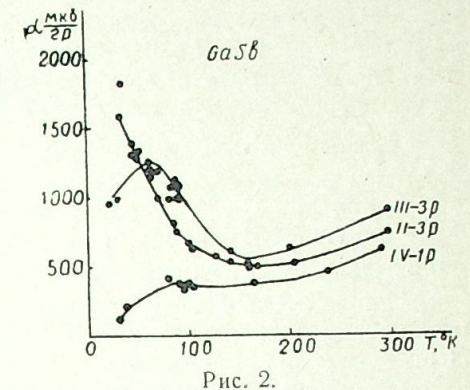


Рис. 2. Зависимость дифференциальной термоэдс от температуры для образцов антимонида галлия.

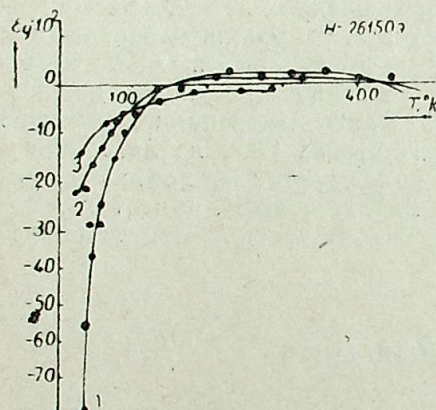


Рис. 1.

Зависимость поперечного безразмерного поля НЭ от температуры для образцов антимонида галлия:

- 1 образец II—3 p;
- 2 образец III—3 p;
- 3 образец IV—1 p.

Отсюда следует, что время релаксации длинноволновых фононов зависит от температуры как $\tau_f \sim T^{-4}$. Это очень хорошо соответствует теоретическим расчетам для кристаллов кубической симметрии при $T < \theta$ (для GaSb $\theta \sim 250^\circ\text{K}$).

Анализ кривых $\alpha(T)$ и $\varepsilon_y(T)$ (рис. 1 и 2) для образца GaSb III—3р убеждает нас в том, что и здесь при $T < 110^\circ\text{K}$ фононное увлечение в термоэдс и эффектах НЭ является определяющим. Концентрация дырок в этом образце выше, чем в GaSb II—3р. Кроме того, дырки при низких температурах рассеиваются не только акустическими колебаниями решетки, но и частично ионизированными примесями. Это не позволяет достаточно точно определить r и вычислить $\varepsilon_{y\phi}$ и α_ϕ . Тем не менее для оценки электронных долей ε_y и α можно положить $r \approx 1$. Тогда получаем, что в области температур ниже 150°K $\varepsilon_{y\phi} \sim T^{-3}$, $\alpha_\phi \sim T^{-2,9}$.

В образце GaSb IV—Iр, как видно из кривых $\alpha(T)$ и $\varepsilon_y(T)$, эффект фононного увлечения не играет заметной роли. Это связано с большой концентрацией носителей тока $p \approx 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

На рис. 3 и 4 представлены результаты измерений α , ε_y , ε_x и $R\sigma$ при низких температурах для образцов антимонида индия 42 и р3. В этих образцах величина и температурный ход термоэдс и полей несомненно обусловлены наличием фононного увлечения. До 50°K α , ε_y и ε_x в InSb-42 возрастают.

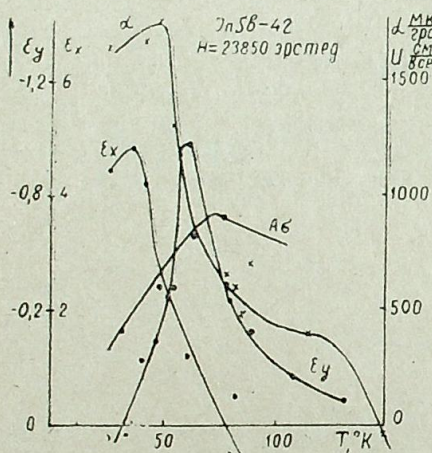


Рис. 3.

Кривые $\varepsilon_x(T)$, $\varepsilon_y(T)$, $\alpha(T)$ и $R\sigma(T)$ для образца InSb-42.

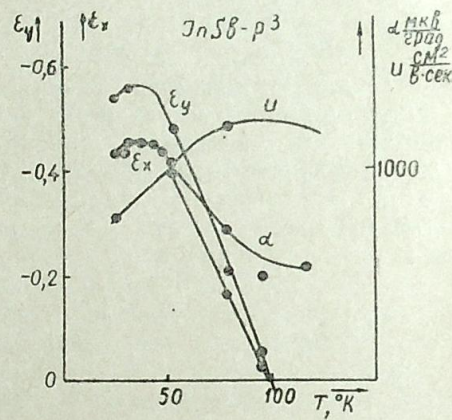


Рис. 4.

Кривые $\varepsilon_x(T)$, $\varepsilon_y(T)$, $\alpha(T)$ и $R\sigma(T)$ для образца InSb-p3; $H=23000$ эрстед.

Пренебрегая некоторой долей ионного рассеяния и полагая $r = 0$ и $m_p = 0,25 m_0$, по формулам (1), (2) мы определили α_ϕ и $\varepsilon_{y\phi}$. Затем, отделив фононные составляющие, определили, что для интервала $\sim 100 \div 50^\circ\text{K}$ $\varepsilon_{y\phi} \sim T^{-4,8}$ ($60 \div 110^\circ\text{K}$), $\alpha_\phi \sim T^{-3,1}$ ($50 \div 90^\circ\text{K}$). Отсюда время релаксации длинноволновых фононов $\tau_f \sim T^{-4}$. Разумеется, произведенный для этого образца расчет температурной зависимости τ_f носит приближенный и оценочный характер, так как механизм рассеяния здесь смешанный. Причем рассеяние на примесях начинает преобладать с понижением температуры. Это ясно видно из кривой $R\sigma(T)$.

Можно предположить, что ниже 50°K резерфордовский механизм рассеяния носителей тока является основным. Изменение знака ε_y при $T = 30^\circ\text{K}$ можно определить, предполагая, что фононная составляющая поля НЭ становится положительной, если носители тока рассеиваются на ионизированных примесях. Действительно, расчеты Паррота [8] показывают, что в случае $\gamma \rightarrow \infty$ (ионное рассеяние) и $s \rightarrow \infty$ (носителей тока мало) $\varepsilon_{y\phi} > 0$. Из анализа электрических характеристик следует, что примеси в этом образце компенсированы, а концентрация дырок мала. В образце InSb—р3 влияние фононного увлечения на термоэдс и термомагнитные эффекты также очень велико.

Как и в образце InSb-42, продольный эффект НЭ ε_x положителен по знаку и имеет очень большую величину, что однозначно указывает на эффект увлечения.

Таким образом, ниже $\sim 100^\circ\text{K}$ в достаточно чистых образцах InSb и GaSb эффект фононного увлечения в термомагнитных явлениях и термоэдс является доминирующим.

Зависимость от магнитного поля

На рис. 5, 6 и 7 показаны зависимости $\varepsilon_y(H)$, $\varepsilon_x(H)$ для образцов GaSb III—3р и InSb р—3 для различных температур. Общим для обоих образцов является то, что при слабых магнитных полях НЭ положительно. С увеличением магнитного поля ε_y уменьшается, меняет знак и при дальнейшем росте, растет по абсолютной величине, оставаясь во всей области больших магнитных полей отрицательным. С понижением температуры ε_y претерпевает инверсию знака при все более слабых магнитных полях. Эти результаты могут быть объяснены, если предполагать, что как в антимониде индия, так и в антимониде галлия в переносе заряда принимают участие два типа дырок: легкие и тяжелые. Легкие имеют высокие подвижности, тяжелые — во много раз меньше. Эффект фононного увлечения связан с тяжелыми дырками.

При слабых магнитных полях основную роль в явлениях переноса заряда играют легкие дырки, хотя концентрация их и мала. Лег-

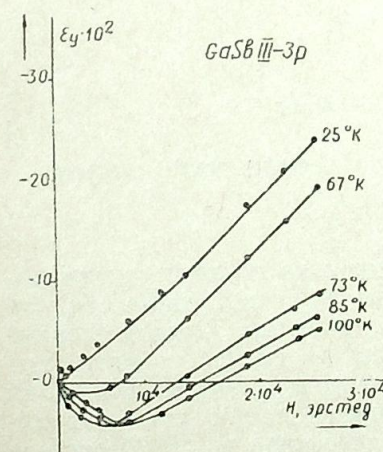


Рис. 5.

Зависимость поперечного поля НЭ от напряженности магнитного поля для GaSb III—3 р.

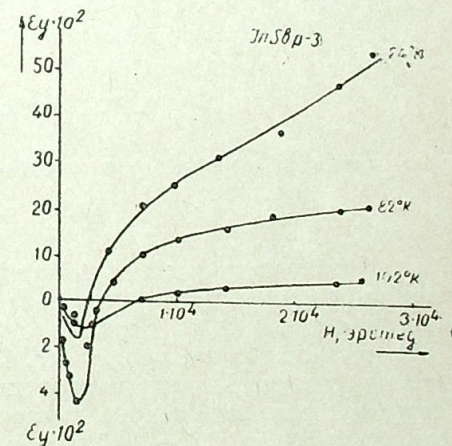


Рис. 6.

Зависимость поперечного поля НЭ от напряженности магнитного поля для образца InSb р-3.

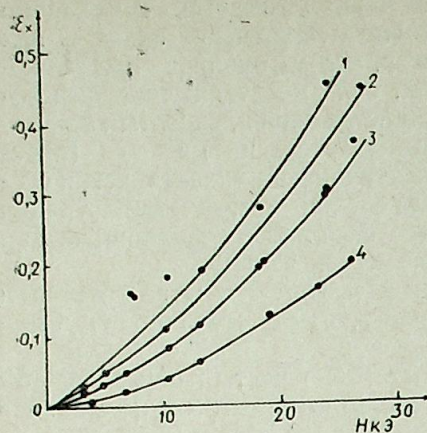


Рис. 7.

Зависимость продольного поля НЭ от H (эрстед) для образцов:

- 1—InSb 42, $T=27^\circ \text{ K}$;
- 2—InSb p3, $T=24^\circ \text{ K}$;
- 3—GaSb III—3 p, $T=84^\circ \text{ K}$;
- 4—GaSb II—3 p, $T=98^\circ \text{ K}$.

Пользуясь случаем, выражаем благодарность проф. Х. И. Амирханову за ценные советы и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амирханова Д. Х. „Изв. АН Азерб. ССР“, I, 45, 1960; ФТТ, II, 1125, 1960.
2. Амирханова Д. Х. и Баширов Р. И. ФТТ, II, 1957, 1960.
3. Мочан И. В., Образцов Ю. Н., Крылова Т. В. ЖТФ, 27, 242, 1957.
4. Цидильковский И. М. Терромагнитные явления в полупроводниках, Физматгиз, 1960.
5. Dresselhas G., Kip A. F., Kittel C. a. Wagoner G. Phys. Rev., 98 556 (1955).
6. Ehrenreich H. Appl. Phys., 32, 2155, 1961.
7. Herring C., Geballe T. H. a. Kunzler T. E. Phys. Rev., 111, 36, 1958; Bell. Syst. Techn. Journ., 38, 657, 1959.
8. Parrott J. F., Proc. Phys. Soc., 71, 82, 1958.

Ч. Х. Амирханова, Р. И. Баширов

Индиум в галлий-антимонидларинда фонон чэзб етмэси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә дәлик типли индиум антимониди вә галлий-антимонидинин 5 нүмунәсиндә Нернст-Эттингсхаузен узунуна вә енинә эффектларинин тәчрүби тәдгигат нәтичәләри әкс етдирилир. Бурада һәмчинин кәстәрилир ки, термо едс, Холл эффекти вә електрик кечирмә дә өлчүлмүшдүр. Ашағы омлу потенциометр вә жүксәк һәссаслыға малик галванометрлә сабит чәрәянын ади компенсацион схеми тәтбиг едилмишдир. Өлчмә 25° — 300° K температур фәсиләсиндә вә 26000 ерстедә гәдәр магнит саһәсиндә апарылмышдыр.

Кифәјәт гәдәр тәмиз нүмунәләрдә „фонон чэзб етмә“ мүшәһидә едилмишдир. Эффектләри тәшкил едән электрон вә фононлар ајрылмышдыр. Узундалғалы фононларын реаксия вахтынын температурдан

асылылығы мүәјјәнләшдирилмишдир. Мүәјјән олунмушдур ки, Нернст-Эттингсхаузен енинә саһәсини тәшкил едән фонон, әкәр енержи дашыҗы резерфордор сәпәләнмәсини һисс едирсә, әламәтинә кәрә мүсбәт олур.

Нернст-Эттингсхаузен енинә эффектнин магнит саһәсинин кәржинлијиндән асылылығыны изаһ етмәк үчүн истәр индиум антимониди, истәрсә дә галлий-антимониди үчүн валент зонасынын икидәликли моделини чәлб етмәк лазым кәлир. Бунунла да күман едилир ки, фонон чэзб етмә эффектиндә јүнкүл дәликләр иштирак етмир, ағыр дәликләр исә чэзб олунурлар. Валент зонасынын бу чүр модели башга мүәллифләрин тәдгигатларынын нәтичәләринә мүвафиг кәлир.

А. А. АБДУЛАЕВ

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ТЕПЛОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ р-п ПЕРЕХОДА

Известно, что рассеивание мощности внутри полупроводникового прибора приводит к повышению температуры перехода относительно температуры окружающей среды.

Для удобства анализа теплового режима работы, по аналогии с электрическими цепями, вводятся понятия эквивалентного теплового сопротивления R_t , эквивалентной тепловой емкости C_t и определяемой произведением их эквивалентной постоянной времени тепловой релаксации τ_t , которые характеризуют термические показатели конструкции полупроводникового прибора [3].

R_t характеризует увеличение температуры перехода на единицу рассеиваемой мощности в приборе ($^{\circ}\text{C}/\text{вт}$) и равно сумме тепловых сопротивлений составных элементов конструкции прибора (R_i), величина сопротивлений которых обратно пропорциональна коэффициенту теплопроводности соответствующих элементов, т. е.

$$R_t = \sum_i R_i.$$

τ_t характеризует время установления температуры перехода (сек). Необходимость характеризовать полупроводниковый прибор набором тепловых постоянных R_i и τ_i говорит о том, что температура в приборе устанавливается не мгновенно, а по истечении определенного времени.

Сначала происходит нагрев перехода и прилегающих к нему областей пластинки полупроводника ввиду их малой теплоемкости. Затем тепло, выделяемое на р-п переходе полупроводникового прибора, передается через теплопроводность пластинки полупроводника и элементов конструкции прибора к его корпусу и за счет конвекции и радиации от корпуса прибора в окружающую среду [4].

Суммарным эффектом всех этих тепловых процессов, проходящих в полупроводниковом приборе и определяемых термическими показателями его конструкции, является установление определенной темпе-

А. А. АБДУЛАЕВ

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ТЕПЛОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ р-п ПЕРЕХОДА

Известно, что рассеивание мощности внутри полупроводникового прибора приводит к повышению температуры перехода относительно температуры окружающей среды.

Для удобства анализа теплового режима работы, по аналогии с электрическими цепями, вводятся понятия эквивалентного теплового сопротивления R_t , эквивалентной тепловой емкости C_t и определяемой произведением их эквивалентной постоянной времени тепловой релаксации τ_t , которые характеризуют термические показатели конструкции полупроводникового прибора [3].

R_t характеризует увеличение температуры перехода на единицу рассеиваемой мощности в приборе ($^{\circ}\text{C}/\text{вт}$) и равно сумме тепловых сопротивлений составных элементов конструкции прибора (R_i), величина сопротивлений которых обратно пропорциональна коэффициенту теплопроводности соответствующих элементов, т. е.

$$R_t = \sum_i R_i.$$

τ_t характеризует время установления температуры перехода (сек).

Необходимость характеризовать полупроводниковый прибор набором тепловых постоянных R_i и τ_i говорит о том, что температура в приборе устанавливается не мгновенно, а по истечении определенного времени.

Сначала происходит нагрев перехода и прилегающих к нему областей пластинки полупроводника ввиду их малой теплоемкости. Затем тепло, выделяемое на р-п переходе полупроводникового прибора, передается через теплопроводность пластинки полупроводника и элементов конструкции прибора к его корпусу и за счет конвекции и радиации от корпуса прибора в окружающую среду [4].

Суммарным эффектом всех этих тепловых процессов, проходящих в полупроводниковом приборе и определяемых термическими показателями его конструкции, является установление определенной темпе-

ратуры перехода при заданных параметрах рассеиваемой на нем мощности (амплитуды, формы, частоты, длительности) и температуры окружающей среды.

При анализе тепловых режимов работы полупроводниковых приборов величины R_t и τ_t предполагают независимыми или мало зависящими от температуры. Если сказанное справедливо для τ_t , то значения R_t могут существенно измениться вследствие температурной зависимости коэффициента теплопроводности соответствующих элементов конструкции прибора. Естественно, что это может привести к ухудшению условий теплопередачи внутри полупроводникового прибора и, следовательно, тепловому режиму его работы. При этом наиболее сильное влияние на тепловой режим работы прибора будет оказывать изменение теплового сопротивления

перехода и прилегающих к нему областей пластинки полупроводника (R_n)*. Последнее особенно важно учитывать в импульсных режимах работы, когда возможны перегрузки прибора по току и напряжению, приводящие к значительному местному нагреву перехода. В то же время температура остальных элементов конструкции прибора может быть намного ниже вследствие большой их теплоемкости, превышающей примерно на порядок теплоемкость перехода и прилегающих к нему областей пластинки полупроводника [7].

Рассмотрим случай сферической модели теплового потока в полупроводниковом приборе (рис. 1). Для данной модели [1]

$$R_n = \frac{0,038}{\kappa r_0}, \quad (1)$$

где r_0 — радиус выпрямляющего контакта, см;

κ — коэффициент теплопроводности пластинки полупроводника, кал/см·сек·°С.

Из (1) следует, что R_n при всех прочих равных условиях зависит от величины коэффициента теплопроводности материала пластинки полупроводника. Значения κ для германия и кремния приведены в таблице [5, 6].

На рис. 2 показаны кривые (I, I') и (II, II'), характеризующие зависимость R_n от r_0 при 25 и 100°С для германиевых и кремниевых

* Для простоты в дальнейшем будем называть R_n тепловым сопротивлением перехода.

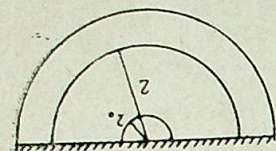


Рис. 1

Тепловая модель полупроводникового прибора

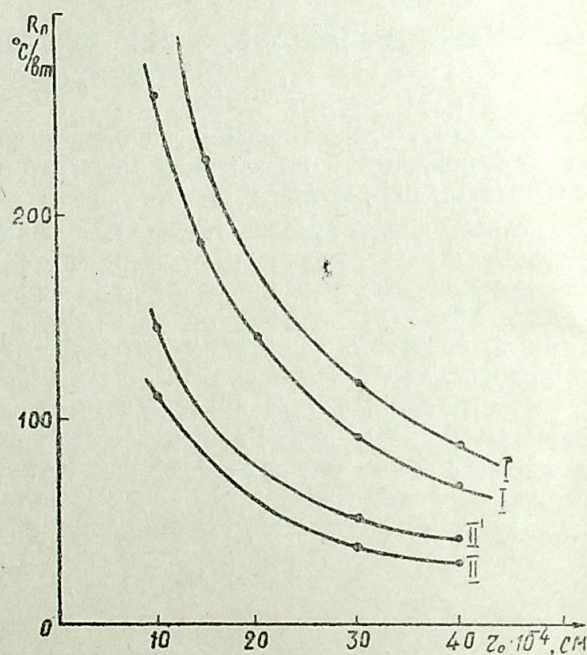


Рис. 2

Кривые зависимости теплового сопротивления от радиуса выпрямляющего контакта.

пластинок, соответственно. Как видно из рис. 2, R_n при 100°С намного превышает тепловое сопротивление перехода, соответствующее температуре 25°С.

Так, для германия

$$\frac{R_{n_{t=100^\circ\text{C}}}}{R_{n_{t=25^\circ\text{C}}}} = 1,27,$$

для кремния

$$\frac{R_{n_{t=100^\circ\text{C}}}}{R_{n_{t=25^\circ\text{C}}}} = 1,32,$$

т. е. величина $R_{n_{t=100^\circ\text{C}}}$ возрастает относительно $R_{n_{t=25^\circ\text{C}}}$ для германия на 27 %, а для кремния на 32 %.

Предположим, что на полупроводниковый прибор действуют периодические импульсы мощности прямоугольной формы, описываемые выражением:

$$P = P_0 d \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m \pi d}{m \pi d} \cos \omega m t \right]. \quad (2)$$

Тогда зависимость между максимальным мгновенным значением градиента температуры на переходе относительно теплоотводящей поверхности кристаллодержателя в квазистационарном тепловом режиме и параметрами воздействующих на прибор импульсов мощности можно представить в виде:

$$\Delta T_{\text{макс}} = C_1 P_0 R_n d^{(C_2 \log \beta + C_3)} \\ \beta = \tau_n / t_{\text{пер}}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные, зависящие от типа полупроводникового прибора и параметров импульсов;

P_0 — амплитуда импульсной мощности;

d — скважность импульсов;

τ_n — постоянная времени тепловой релаксации перехода;

$t_{\text{пер}}$ — период воздействующих на прибор импульсов мощности.

Следовательно,

$$\frac{\Delta T_{\text{макс}_{t=100^\circ\text{C}}}}{\Delta T_{\text{макс}_{t=25^\circ\text{C}}}} = \frac{R_{n_{t=100^\circ\text{C}}}}{R_{n_{t=25^\circ\text{C}}}},$$

т. е. увеличение теплового сопротивления перехода R_n приводит к пропорциональному увеличению $\Delta T_{\text{макс}}$.

Таким образом, уменьшение коэффициента теплопроводности на 27 % для германия и 32 % для кремния в интервале 25—100°С приводит к эквивалентному увеличению теплового сопротивления перехода и градиента температуры между охлаждающей поверхностью кристаллодержателя и переходом полупроводникового прибора.

В реальных условиях работы между переходом и охлаждающей поверхностью прибора имеется определенный перепад температуры, который приходится в основном на пластинку полупроводника, обладающего по сравнению с другими элементами конструкции полупроводникового прибора небольшим геометрическим размером и малой величиной коэффициента теплопроводности.

Этот перепад температуры эквивалентен увеличению температуры окружающей среды. Так что в реальных условиях коэффициент теплопроводности пластинки полупроводника будет всегда ниже его значения при комнатной температуре (см. табл.), что, как было показано

ранее, приводит к дополнительному повышению температуры и теплового сопротивления перехода.

Германий		Кремний	
$t = 25^\circ\text{C}$	$t = 100^\circ\text{C}$	$t = 25^\circ\text{C}$	$t = 100^\circ\text{C}$
Коэффициент теплопроводности <i>кал/сек. см. град.</i>			
0,14	0,11	0,33	0,25

Поэтому при анализе тепловых режимов работы полупроводникового прибора необходимо учитывать влияние температурной зависимости коэффициента теплопроводности на его термические характеристики.

Рассмотрим пример работы германиевого полупроводникового прибора типа $D2E$ в импульсном режиме.

Дано		
$f = 2000 \text{ гц}$	$r_t' = 260^\circ \text{ c/вт}$	типичные значения для $D2E$ [2]
$\beta = 0,1$	$R_n = 65^\circ \text{ c/вт}$	
$d = 0,05$	$R_t = 325^\circ \text{ c/вт}$	
$P_{cp} = P_0 d = 0,0875 \text{ вт}$	$\tau_n = 50 \text{ мксек}$	
	$T_{окр} = 25^\circ\text{C}$	
	$C_1 = 1, C_2 = 0,276, C_3 = 0,62$	

Требуется вычислить мгновенное значение температуры перехода с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности.

Из выражения [7] получим,

что $\Delta T_{\text{мак}} = 43,4^\circ\text{C}.$

Мгновенное значение температуры перехода будет равно: [1]

$$T_{\text{мак}} = T_{\text{окр}} + P_0 d r_t' + \Delta T_{\text{мак}} = 91^\circ\text{C}.$$

При этой температуре перехода коэффициент теплопроводности пластинки полупроводника изменится $\sim$ на 27 %, что приведет, как было показано ранее, к дополнительному увеличению $\Delta T_{\text{мак}}$ на ту же величину, т. е.

$$\Delta T'_{\text{мак}} = 1,27 \Delta T_{\text{мак}} = 55,1^\circ\text{C}$$

$$\text{или } \Delta T'_{\text{мак}} - \Delta T_{\text{мак}} = 11,7^\circ\text{C}.$$

Следовательно,

$$T'_{\text{мак}} = T_{\text{мак}} + 11,7^\circ = 102,7^\circ\text{C}.$$

Таким образом, учет температурной зависимости коэффициента теплопроводности пластинки полупроводника привел к увеличению мгновенного значения температуры перехода прибора $\approx$ на 15 %, что согласуется с результатами эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдулаев А. А. Исследование температуры точечного контакта германиевых диодов. „Вопросы радиоэлектроники“, серия II, вып. 1, 1959.
2. Абдулаев А. А. Методика определения термодинамических постоянных германиевых точечно-контактных диодов. „Вопросы радиоэлектроники“, серия II, вып. 1; 1959.
3. Абдулаев А. А. Аппаратура для изучения внутреннего разогрева в полупроводниковых приборах. „Вопросы радиоэлектроники“, серия II, вып. 1, 1961.
4. Абдулаев А. А., Буланова Н. Л. Импульсный перегрев германиевых транзисторов. „Вопросы радиоэлектроники“, серия II, вып. 2, 1960.
5. Германий. Сб. статей под ред. проф. Д. А. Петрова. ИЛ, 1957.
6. Кремний. Сб. статей под ред. проф. Д. А. Петрова. ИЛ, 1960.
7. Mortenson K. E. Transistor function temperature as a function of time. Proc. JRE, 1957, IV, vol. 55, № 4, p. 504—513.

А. А. Абдулаев

Жарымкечиричи чиназларын истилик характеристикалары
наггында

ХҮЛАСӨ

Мәгаләдә жарымкечиричи тәбәгәси истиликкечирмәсинин дәјишмәсинин $p-n$ кечидин температурауна тәсири тәдгиг едилмишдир.

Х. Г. БАРКИНХОВ, Ч. М. АСКЕРОВ, Г. М. АЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕСИ РТУТИ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕЛЕНА

Важность изучения влияния примесей на электрические свойства селена не требует доказательства. Это существенно не только для физики твердого тела, но и для техники, в которой широко используется селен при изготовлении выпрямителей и фотоэлементов. Известно, что выдерживание селена в парах ртути приводит к резкому ухудшению их выпрямляющих свойств.

Мосс [9] заметил, что прогрев селена в парах ртути приводит к резкому снижению сопротивления образцов. Эти опыты были повторены в работе [6], при этом показано, что примеси ртути увеличивают сопротивление селена. В работе [4] показано, что примеси ртути в 0,02% увеличивают электропроводность в $15 \cdot 10^4$ раз, оценено численное значение коэффициента диффузии ртути в селен из электрических свойств. Знак термоэдс образца селена с примесью 0,02% ртути указывает на электронную проводимость.

Хениш [5] показал, что пары ртути уменьшают термоэдс селена и что в некоторых случаях меняют даже ее полярность. Авторы [7] исследовали диффузию ртути в кристаллическом и аморфном селене с помощью радиоактивного изотопа Hg^{203} .

Стиб [10] и др. исследовали диффузию ртути в аморфном селене на пленках толщиной $\sim 1 \mu$, которые выдерживались в вакуированных сосудах, при заданном давлении паров ртути. Коэффициент диффузии определялся по изменению сопротивления этих пленок со временем. Согласно их данным, сопротивление уменьшается с увеличением времени выдержки. В опытах А. Кулиева и Д. Н. Наследова [3], выполненных с помощью Hg^{203} на селеновой фольге, коэффициент диффузии ртути в селене $\sim 8 \cdot 10^{13} \text{ см}^2/\text{сек}$, что на 6 порядков меньше значения, полученного в более ранней работе [4]. А. И. Блум и А. Р. Регель [1] показали, что скорость диффузии ртути в селене мала и растворимость ничтожна. В их опытах не обнаружено сильное уменьшение сопротивления селена примесями ртути.

Хенкельс и Мацук [8] показали, что примеси ртути в 0,00715 ат% и 0,0665 ат% увеличивают при 50°C удельное сопротивление чистого селена от $0,22 \cdot 10^4$ до $2,5 \cdot 10^4$ и $21 \cdot 10^4 \text{ ом} \cdot \text{см}$, соответственно.

Из приведенного обзора видно, что, несмотря на сравнительно большое число исследований, до сих пор все же нет надежных данных о влиянии примеси ртути на электрические свойства селена. В

работах, посвященных этому вопросу, ртуть в основном вводится путем диффузии из жидкой или парообразной фазы. Это может привести к образованию поверхностных проводящих пленок, сопротивление и тип проводимости которых будут резко отличаться друг от друга в зависимости от режима изготовления образцов. Видимо, этим только можно объяснить противоречивость литературных данных.

Целью настоящей работы является исследование влияния примеси ртути, введенной обычным способом (т. е. путем взвешивания компонентов) на электрические свойства селена.

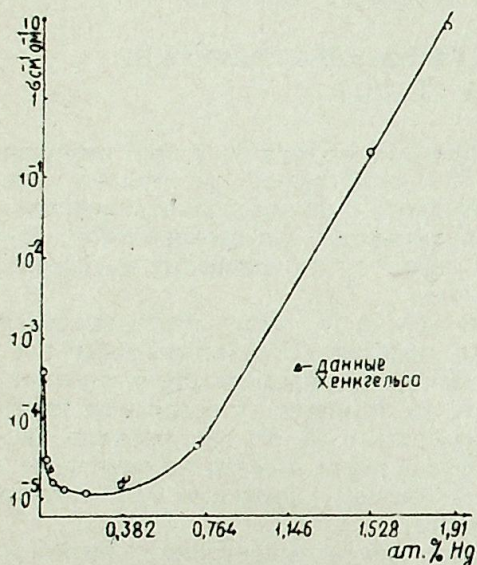


Рис. 1
Зависимость электропроводности от примесей ртути.

Для изготовления образцов молибденовые ампулы с селеном (99,999 процентов) чистоты—(В-3) и примесями ртути (0,00382; 0,0382; 0,0955; 0,192; 0,359; 0,382; 0,719; 1,49; 1,91 ат. %) откачивались до 10^{-4} мм рт. ст., затем смесь Se—Hg плавил и выдерживали 4 часа при 400°C. При выдержке ампулы несколько раз переворачивали и постоянно вибрировали. Было получено три серии образцов, достаточно однородных по сопротивлению. Кристаллизация проводилась при 210°C в течение 25 часов.

Измерение электропроводности σ и термоэдс α вели компенсационным методом. Графики построены по средним значениям нескольких измерений.

На рис. 1 дается зависимость электропроводности от примесей ртути при комнатной температуре. Примесная зависимость электропроводности имеет минимум при 0,192 ат. % Hg. При дальнейшем увеличении примесей ртути электропроводность растет, причем 1,49 и 1,91 ат. % Hg увеличивают ее в $\sim 10^4$ раз.

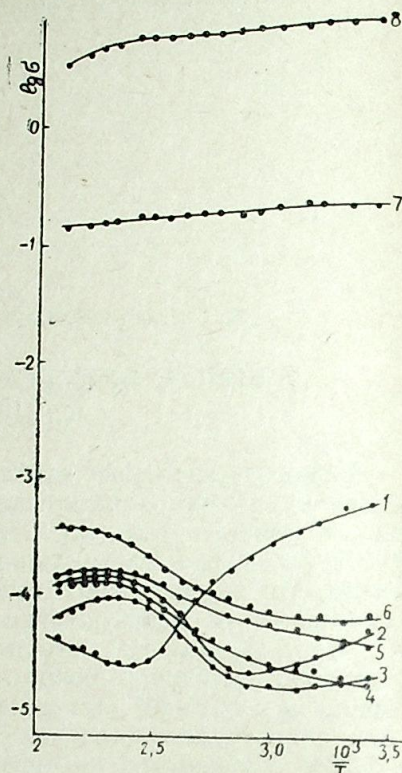


Рис. 2
Температурная зависимость электропроводности.
1—Se (В-3); 2—Se+0,0382 ат. % Hg;
3—Se+0,0382 ат. % Hg; 4—Se+0,0955 ат. % Hg;
5—Se+0,359 ат. % Hg;
6—Se+0,719 ат. % Hg; 7—Se+1,49 ат. % Hg;
8—Se+1,91 ат. % Hg.

Из рис. 2 видно, что температурная зависимость σ чистого селена отличается от температурной зависимости примесных образцов. Для чистого селена $\sigma = f(T)$ от комнатной температуры до 150°C падает, затем незначительно увеличивается (200°C). Электропроводность образцов, содержащих 0,00382 и 0,0382 ат. % Hg, падает до 70—80°C, затем растет. Примеси от 0,0955 до 0,719 ат. % Hg меняют металлический ход σ чистого селена на полупроводниковый. Можно заметить, что по мере увеличения примесей (до 0,719 ат. %) характер температурной зависимости σ меняется постепенно от металлического к полупроводниковому. Образцы с 1,49 и 1,91 ат. % Hg имеют металлический ход температурной зависимости.

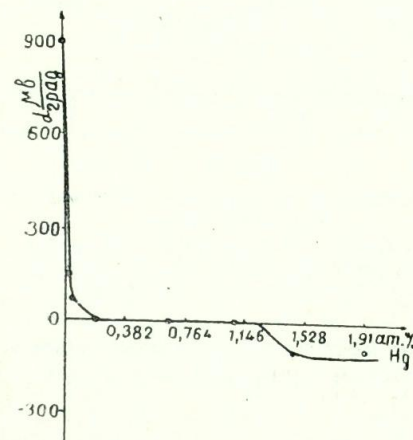


Рис. 3
Зависимость термоэдс от примесей ртути.

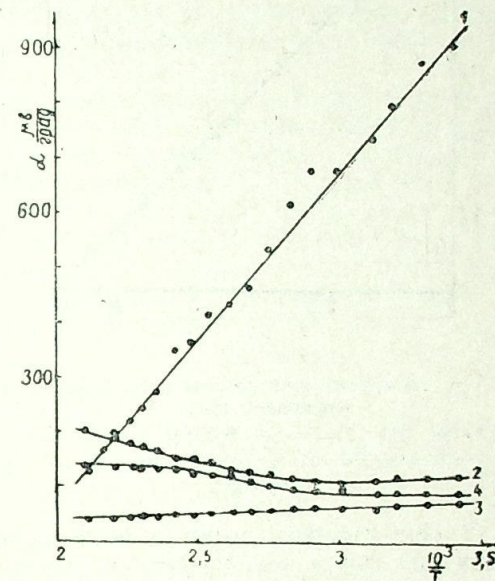


Рис. 4
Температурная зависимость термоэдс.
1—Se (В-3); 2—Se+0,0382 ат. % Hg;
3—Se+0,0382 ат. % Hg; 4—Se+1,91 ат. % Hg.

На тех же образцах были проведены измерения термоэдс относительно меди при градиенте 8—10°, в интервале 20—200°C.

На рис. 3 изображена примесная зависимость термоэдс при 20°C. Примеси ртути до 0,0382 ат. % уменьшают α чистого селена от 914 до 70 мВ/град, и при этом знак σ указывает на P -проводимость. Для примесей 0,0955—0,382 ат. % термоэдс обнаружить не удалось во всем исследованном интервале температур. Примеси ртути в 1,49 и 1,91 ат. % меняют дырочную проводимость чистого селена на электронную, при этом численные значения $\alpha \sim (-100)$ мВ/град.

Термоэдс образцов чистого селена с повышением температуры падает, а у примесных слабо зависит от температуры (рис. 4).

По формуле Писаренко, при данных α и T , вычислялась концентрация носителей тока. Применимость формулы Писаренко для качественной оценки концентрации рассмотрена П. Т. Козыревым в работе [2].

На рис. 5 показана температурная зависимость концентрации носителей тока. По кривым рисунка видно, что концентрация дырок для чистого селена с повышением температуры растет больше у примесных образцов и мало меняется с температурой.

Эффективная подвижность носителей тока, вычисленная по фор-

муле $\sigma = n\mu e$, при известной σ и n из эксперимента и формулы Писаренко, соответственно, представлена на рис. 6.

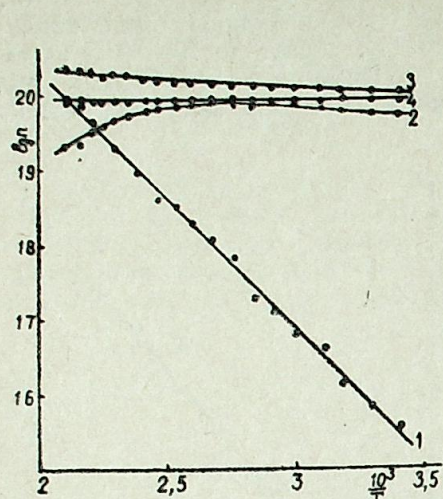


Рис. 5

Температурная зависимость концентрации носителей тока.

1—Se—(B—3); 2—Se+0,00382 ат. % Hg; 3—Se+0,0382 ат. % Hg; 4—Se+1,91 ат. % Hg.

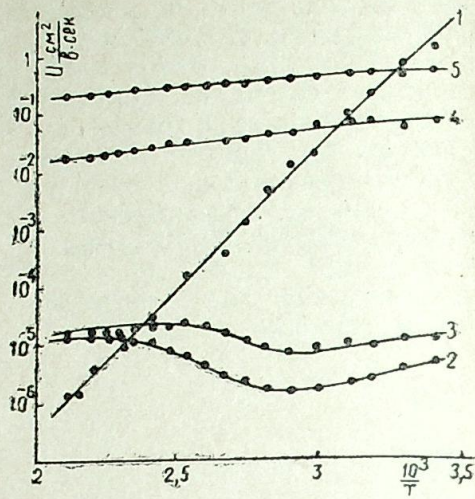


Рис. 6

Температурная зависимость подвижности носителей тока.

1—Se (B—3); 2—Se+0,00382 ат. % Hg; 3—Se+0,0382 ат. % Hg; 4—Se+1,44 ат. % Hg; 5—Se+1,91 ат. % Hg.

Подвижность дырок в чистом селене падает, в примесных образцах для дырок она растет, а для электронов незначительно падает с температурой.

Обсуждение результатов

Из опытных данных следует, что при малых концентрациях атомов ртути в селене имеет место уменьшение электропроводности селена. Это явление можно объяснить, предполагая, что атомы ртути в селене создают донорные уровни, которые возрастают по мере увеличения примесей и компенсация ими акцепторных уровней усиливается. Такое действие примесей до полной компенсации акцепторных уровней селена должно привести к уменьшению электропроводности. В области примесей полной компенсации, видимо, электропроводность осуществляется при одинаковой концентрации дырок и электронов за счет разности величин их подвижности.

Начиная с 0,382 ат. % примесей Hg действие доноров превалирует над действием акцепторов. Как видно из рис. 1, это приводит к увеличению электропроводности.

Объяснение, данное примесной зависимости σ , подтверждается примесной зависимостью α . При смещенной проводимости полупроводника $\alpha = \alpha_p - \alpha_n$, где α_p обязана дыркам, α_n — электронам.

В чистом селене при комнатной температуре $\alpha_p \gg \alpha_n$, но по мере увеличения примесей Hg α_n увеличивается, что приводит к уменьшению суммарной термоэдс ($\alpha = \alpha_p - \alpha_n$). Тот факт, что для образцов с примесями от 0,0955 до 0,382 ат. % Hg термоэдс равна нулю (рис. 3), указывает на $\alpha_p = \alpha_n$, т. е. концентрации дырок и электронов сравнимы между собой. Дальнейшее увеличение примесей (выше 0,382 ат. %)

приводит к росту термоэдс по абсолютной величине и к перемене знака ее — от плюса к минусу, т. е. при этом селен обладает электронной проводимостью.

Уменьшение σ при малых примесях Hg согласуется с данными [6, 8]; увеличение σ и перемена знака α при больших примесях Hg согласуется с данными [4, 5]. Следует отметить, что в работе [4] увеличение σ в $\sim 10^4$ раз и перемена знака α происходит при 0,02 % Hg, а в наших опытах указанные изменения происходят при 1,49 ат. % Hg и выше. Такое расхождение, по-видимому, связано с тем, что в работе [4] при соприкосновении образца селена с ртутью образовалась поверхностная, проводящая пленка, для образования которой требуется меньшее количество ртути.

Рост температурной зависимости концентрации и падение подвижности носителей тока в селене (B—3) являются естественными с точки зрения зонной теории. Подобные сведения в литературе отсутствуют. Как правило, все литературные данные показывают, что подвижность растет, концентрация носителей тока в селене падает с температурой.

По-видимому, такое „аномальное“ положение с температурной зависимостью концентрации и подвижности носителей тока в селене связано с недооценкой смешанной проводимости селена при применении формулы Писаренко, поэтому этот вопрос остается пока еще неясным [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Блум А. И., Регель А. Р. ЖТФ, 21, 3, 1951.
2. Козырев П. Т. ЖТФ, 27, 1, 1957.
3. Кулиев А. А. и Наследов Д. Н. ЖТФ, 28, 2, 259, 1958.
4. Наследов Д. Н., Малышев Е. М. ЖТФ, 15, 1—2, 1945.
5. Хениш Н. К. Полупроводниковые материалы. ИЛ, 1954.
6. Constable, A. — Word. Proc. For. Soc., 28, 479, 1932.
7. Henisch H. K., Saker G. W. Proc. Phys. Soc., 65, 149, 1952.
8. Henkels H. W., Maczuk J. App. Phys., 25, 1, 1954.
9. Moss R. Proc. Roy Soc., 25, 22, 1876.
10. Steeb, Jürgenson K., Mogun S. Zs. Elekt. Chem., 61, 6, 1957.

Х. Г. Баркинхојев, Ч. М. Эскеров, Г. М. Элијев

Чивэ ашгарларынын селенин електрик хассэлэринэ тэ'сири

ХҮЛАСЭ

Бу ишдэ эсас е'тибарилэ тэркибиндэ 0,00382; 0,0382; 0,0955; 0,192; 0,359; 0,382; 0,719; 1,49 вэ 1,91 ат. % чивэ олан нүмунэлэрин електрик вэ термоэлектрик һэрэкэт гүввэсинин температурдан асылылығы өјрәнилмишдир.

Чивэ ашгарлары селенин електриккечирмәсини кәскин азалдыр вэ 0,192 ат. % Hg олан нүмунэдэ минимум алыныр. Сонрадан ашгарларынын артмасы илә електриккечирмә дә артыр (1-чи шәкил). Белә ки, 1,49 вэ 1,91 ат. % Hg селенин електриккечирмәсини 4 тәртиб артырыр.

Тэркибиндэ чивэ ашгары олан нүмунэлэрин електриккечирмәсинин температурдан асылылығы тәмиз нүмунәјә нисбәтән кәскин фәргләнир (2-чи шәкил).

Тэркибиндэ 0,0382% чивэ олан нүмунэ селенин термоэлектрик һэрэкэт гүввәсини 914-дән 70 мкв-а гәдәр азалдыр вэ кечиричилијин типини дәјишдирмир. Чивэ ашгарларынын сонракы артмасы илә селенин термоэлектрик һэрэкэт гүввәси сыфра гәдәр дүшүр, лакин даһа

јуксак фаизләрдә(1,49 вә 1,91 ат. % Hg) термоелектрик һәрәкәт гүввәси јенидән јараныр вә кечиричилијин типини „Р“-дән „п“-ә дәјишдирир. Чәрәјан дашыјычыларын јүрүклүјү $\sigma = n e$ дүстуруна әсасән һесаблинмыш вә мүәјјән олмушдур ки, електронларын јүрүклүјү дешикләрин јүрүклүјүндән тәгрибән 2 тәртиб кичикдир.

Л. М. ИМАНОВ, А. А. АБДУРАХМАНОВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$

В предыдущих работах [2, 3, 4] сообщалось об изучении вращательного спектра молекулы этилового спирта. Впервые было обнаружено более ста спектральных линий молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$, идентифицирован ряд переходов Q , P , R ветвей, определены вращательные постоянные и дипольный момент.

Для уточнения структуры данной молекулы весьма интересно изучение изотопических разновидностей молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$. С этой целью был произведен предварительный расчет вращательного спектра молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ в шахматной конфигурации. Расчет проводился в предположении жесткой модели и на основании тех структурных данных, которые были определены для молекулы $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ [3]. Результаты расчета показали, что частоты некоторых переходов с малыми J попадают в диапазон 20—35 см^{-1} .

Для исследования был использован тридегтерированный этиловый спирт $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, содержащий обычный этиловый спирт. При наблюдении спектра в диапазоне 20—32 см^{-1} помимо спектральных линий этилового спирта, приведенных в работе [3], было обнаружено много линий, относящихся, по всей вероятности, к молекуле $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$. Некоторые из этих линий, частоты которых измерены волномером, приведены в нижеследующей таблице.

Частота, см^{-1}	Интенсивность	Частота, см^{-1}	Интенсивность
24435	CC	26585	CC
24515	CC	26604	CC
24540	CC	26610	CC
24597	CC	26727	C
24756	CC	26887	C
24686	CC	26899	C
24704	CC	26908	C
24776	CCC	27013	CC
25010	C	27274	C
25048	CC	27287	C
25098	CC	27392	CC
25153	CCC	27754	CC
25517	CC	27766	CC
25522	CCC	27782	CC
25614	CCC	27860	C
25753	CC	27914	C
25880	CCC	27924	C

Изучение спектра молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$ и ряда других молекул, результаты исследований которых будут опубликованы, производилось на специально сконструированном радиоспектрометре с электрической молекулярной модуляцией. Краткое описание сконструированного в лаборатории первого спектрометра и принципиальные схемы некоторых его блоков приводились в работе [1].

В настоящий вариант радиоспектрометра, более компактного и удобного в работе, внесены конструктивные изменения, а также усовершенствованы схемы (рис. 1).

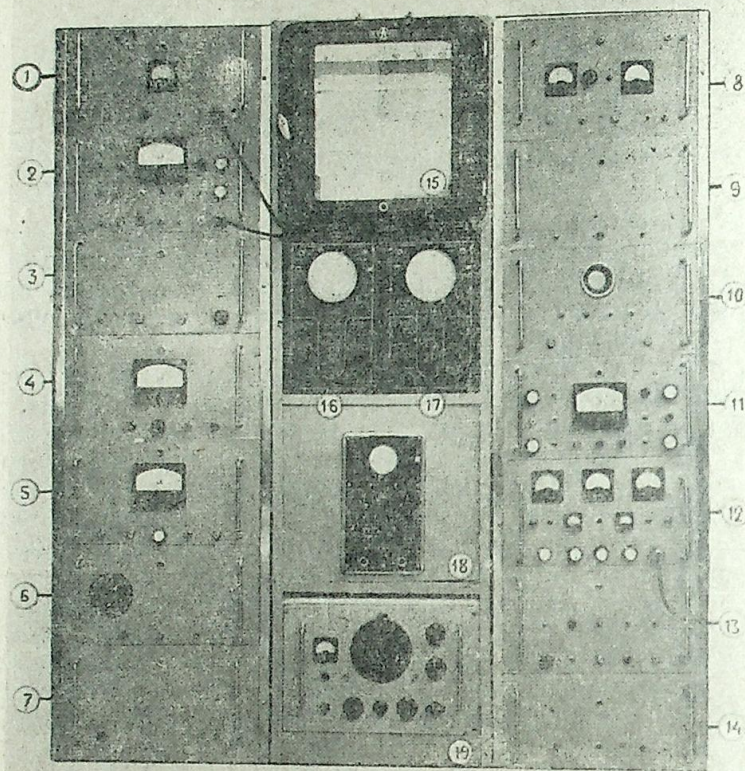


Рис. 1

Общий вид радиоспектрометра: 1—усилитель 125 кгц; 2—синхронный детектор; 3—генератор Ω -импульсов ($0 \div 100$ в); 4—источник постоянного напряжения ($0 \div 5$ кв); 5—генератор Ω -импульсов ($0 \div 500$ в); 6, 7—питание генератора Ω -импульсов; 8—умножитель частоты $10 \div 270$ мгц; 9—питание умножителя; 10—приемник эталонной частоты и система сравнения; 11—блок автоматической подстройки частоты клистрона; 12—питание клистрона; 13—генератор пилообразного напряжения; 14—питание приемника эталонной частоты; 15—самописец ЭПП-09; 16—осциллограф для наблюдения линий; 17—контрольный осциллограф; 18—осциллоскоп для измерения амплитуды Ω -импульсов; 19—звуковой генератор для плавного изменения частоты волномера.

Спектрометр собран в основном на пальчиковых лампах за исключением умножителя частоты. Каждый из блоков имеет индивидуальное питание от электронных стабилизаторов. Как показал опыт работы, нет необходимости использовать батареи постоянного тока для отра-

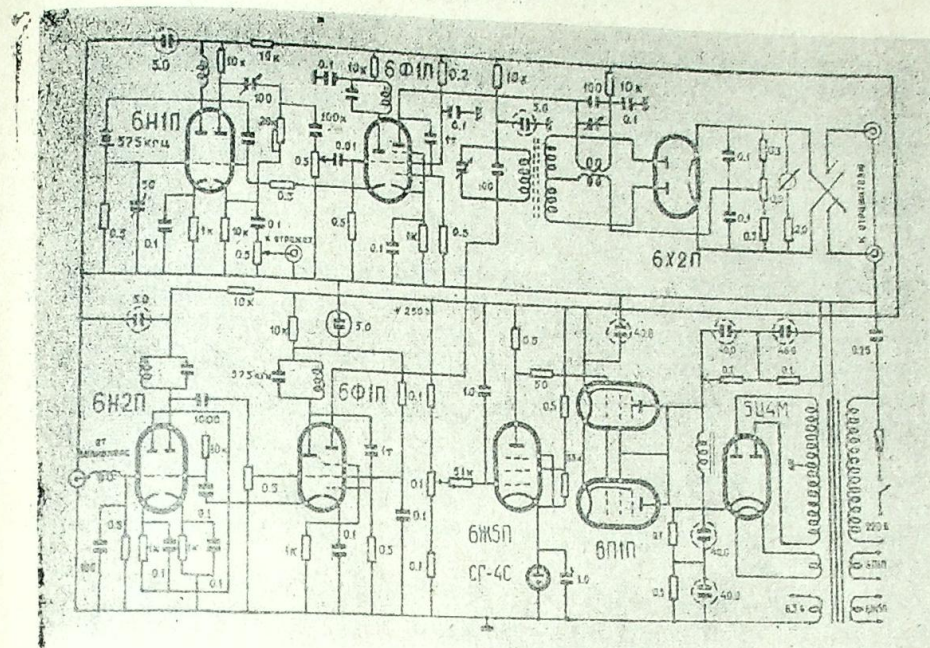


Рис. 2

Схема блока автоматической подстройки частоты.

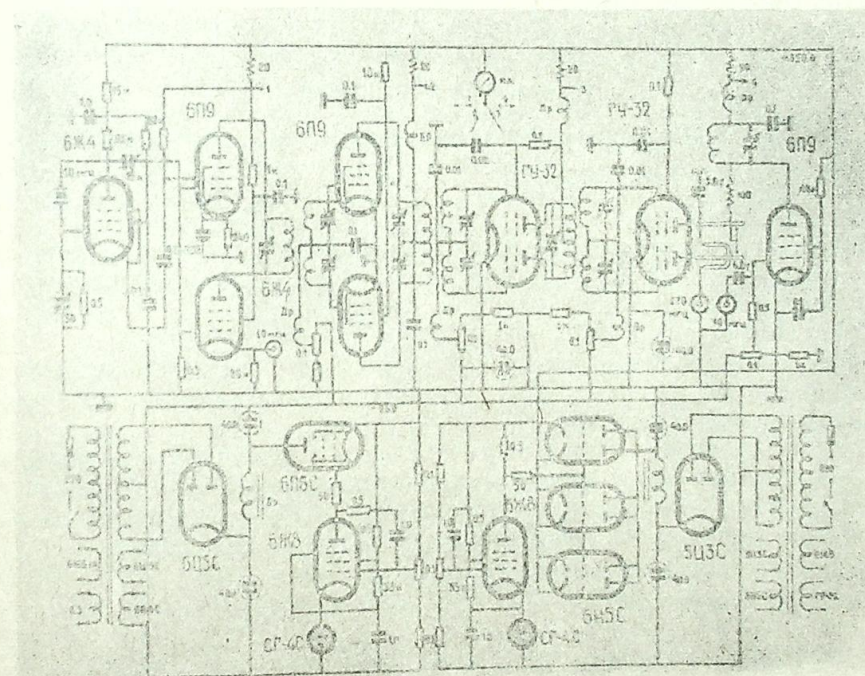


Рис. 3

Схема умножителя частоты $10 \div 270$ мгц.

жателя клистрона. Напряжение на отражатель и резонатор подается от электронных стабилизаторов с высоким коэффициентом стабилизации.

Для полноты описания молекулярного радиоспектрометра, приведенного в статье [1], ниже даются схемы блоков стабилизации частоты клистрона и умножителя частоты. Система стабилизации частоты (рис. 2) позволяет стабилизировать частоту клистрона в пределах $50 \div 100$ мГц, без механической подстройки. Контроль стабилизации производится стрелочным прибором с нулем в центре шкалы.

На рис. 3 изображена схема умножителя частоты с 10 до 270 мГц, являющегося вторичным эталоном частоты; за основу была принята схема умножителя, разработанная в лаборатории колебаний ФИАН.

Сигнал 10 мГц от кварцевого генератора подается на буферный каскад, затем умножается в $3 \times 3 \times 3$ раз. С выхода лампового умножителя сигнал 270 мГц поступает на кристаллический детектор и умножается до сверхвысоких частот. С того же детектора снимается сигнал разностной частоты на калиброванный коротковолновый приемник.

В радиоспектрометре предусмотрена система контроля частоты кварцевого генератора 10 мГц, состоящая из приемного устройства, настроенного на волну радиостанции, передающей сигналы эталонной частоты, и системы сравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1959, 4, 49.
2. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1961, 10, 861.
3. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1962, 4.
4. Иманов Л. М., Каджар Ч. О. „Оптика и спектроскопия“, т. XIV, вып. 2, 1963.

Л. М. Иманов, А. А. Эбдуррахманов

СД₃СН₂ОН молекулунун микродалгадакы спектри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә көстәрилик кн, этил спирти молекулунун гурулушуну дәгиг тә'йин етмәк үчүн бу молекулун мұхтәлиф изотоп бирләшмәләринин фырланма спектрини өйрәнмәк лазымдыр.

Бу мәгсәдлә СД₃СН₂ОН молекулунун микродалгадакы удма спектри өйрәнилмәжә башланьлыб. Мәгаләдә 25 ÷ 28 км/с диапазонунда мұшаһидә олунмуш 30-дан чох хәттин тезлији вә тәхмини интенсивлик дәрәчәси верилмишдир.

Тәдгигат електрик молекулјар модулјасија принципи илә ишләјән јени радиоспектрометр васитәси илә апарьлыр. Бу гурғу әввәлләр лабораторијада һазырланмыш радиоспектрометрдән даһа мұкәммәл олуб, кичик һәчмли вә ишдә стабил олмасы илә фәрғләнир.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, Р. Х. НАНИ, Я. Н. НАСИРОВ ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРОЙНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

II. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МОНОКРИСТАЛЛОВ CuSbS₂

В ранних работах авторов [1,3] было сообщено о получении и исследовании монокристаллов CuSbSe₂ соединений группы A^IB^VX₂^{VI}.

Настоящая же статья посвящена получению и исследованию термоэлектрических свойств монокристаллов другого соединения указанной группы — CuSbS₂.

Тройное полупроводниковое соединение CuSbS₂ впервые было синтезировано Уэрником и Бенсоном [6] на основе имеющегося в природе минерала халькостибита (вольфсбергита). В работе описывается метод синтеза (под давлением 2/3 атм азота) и дается температура плавления соединения.

Авторы утверждают, что данное соединение при температуре, превышающей температуру плавления на 100°С, устойчивое. Разложения при термических анализах не обнаруживаются и поэтому авторы предполагают о возможности получения монокристаллов методом зонной плавки. По предварительным данным авторы оценивают значение термической энергии активации носителей $\Delta E \leq 1,0$ эв.

Других работ, посвященных получению и исследованию соединения CuSbS₂ и тем более его монокристаллов, в литературе не встречено.

На наш взгляд, получение и исследование монокристаллов CuSbS₂, являющегося одним из компонентов системы CuSb_xS_xTe_{1-x} эффективного термоэлектрического материала [2, 4, 5], представляет определенный интерес.

Синтез соединения CuSbS₂ осуществляется нами путем непосредственного сплавления исходных компонентов, взятых в стехиометрическом соотношении, в вакуированной кварцевой ампуле (под вакуумом порядка $\sim 10^{-4}$ мм рт. ст). Исходные материалы имели следующую чистоту: медь — электролитическая, сурьма — Су-000 и сера — спектрально чистая.

Температура в печи поднималась со скоростью 200° в час до 1500°К, ампулу выдерживали при этой температуре 8—10 часов. В течение всего периода синтеза ампулу встряхивали при помощи электромагнитного вибратора. Вибрация ампулы продолжалась до ее окончательного остывания. Ампула охлаждалась вместе с печью. После синтеза в ампуле не обнаруживалось

никаких следов непрореагировавших компонентов. Полученные указанным путем слитки для гомогенизации переплавлялись при 1200° К. Величина навески составляла 10–15 г. Однородность синтезированных слитков проверялась четырехзондовым методом; слитки получались однородными. Слитки после синтеза были полукристаллическими; следы кристаллов не обнаруживались.

Электропроводность и термоэдс полукристаллических образцов (вырезанных из слитков размером 4×6×15 мм³) измерялись в интервале 300–700° К.

Электропроводность с температурой растет (от 0,08 ом⁻¹ см⁻¹ при комнатной температуре до 7 ом⁻¹ см⁻¹ при 700° К), а термоэдс уменьшается (950 мкВ/°К при комнатной температуре до 120 мкВ/°К при 700° К).

Значение энергии активации носителей тока, вычисленное из зависимости электропроводности от температуры ($\ln \sigma/\sigma_0 - \frac{1}{T}$) для полукристаллических образцов, равняется $\Delta E = 0,24$ эВ.

Далее, были получены и исследованы монокристаллы соединений CuSbS₂.

Попытки выращивания монокристаллов методом обычной зонной плавки под вакуумом (как вертикально, так и горизонтально) не дали положительных результатов. Получить отдельные (довольно мелкие) блоки кристаллов удалось под давлением инертного газа (2 атм аргона).

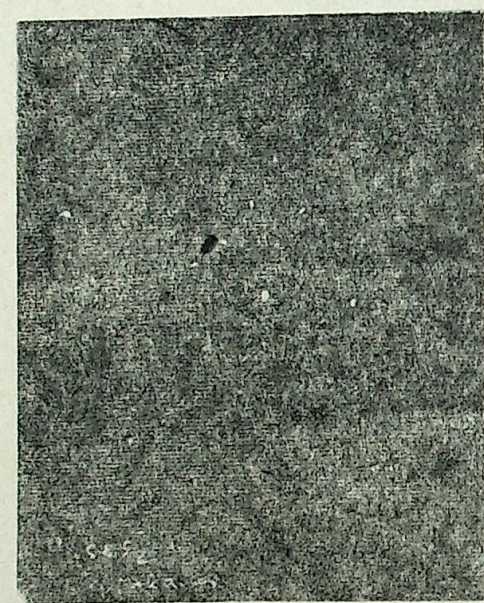


Рис. 1

Монокристаллы CuSbS₂, исследованию термоэлектрических свойств которых посвящена настоящая статья, получены методом зонной плавки под давлением аргона (2 атм) с применением дополнительного нагревателя (теплового экрана) во внезонном объеме, имеющего температуру немного (на 10–15° К) ниже температуры плавления исследуемого соединения. Число проходов составляло обычно 18–20. Скорость движения расплавленной зоны при этом была 12 мм/час. Рентгенографический анализ показывает наличие монокристалла с несколько искаженной структурой, которое, возможно, вызвано большой анизотропией коэффициента температурного расширения, на что указывают некоторые авторы [7]. Лауэграмма одного из кристаллов приведена на рис. 1. Кристаллы легко скалываются по направлениям параллельно оси роста.

Были проведены измерения электропроводности и термоэдс в интервале 300–600° К, а теплопроводности — 80–370° К. Ввиду малой подвижности носителей (табл.) э.д.с. Холла удалось лишь измерить при комнатной температуре.

Исследования велись на образцах, вырезанных из сколов размерами 5×6×8 мм³ (для электропроводности) и 2×3×8 мм³ (для э.д.с.

Некоторые параметры монокристаллов CuSbS₂ при комнатной температуре даны в нижеследующей таблице.

σ ом ⁻¹ см ⁻¹	α мкВ/°К	γ $\frac{10^{-3}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{г}}$	U $\frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}$	n см ⁻³	H кг/мм ²	$T_{\text{пл}}$ °С
0,024	1200	5,0	0,624	10 ¹⁷	267,8	535

Холла). Зависимость электропроводности от температуры (рис. 2) показывает, что электропроводность во всем исследуемом интервале увеличивается с ростом температуры.

Значение энергии активации носителей тока, вычисленное из зависимости $\ln \sigma/\sigma_0 - \frac{1}{T}$ в интервале 300–500° К равняется 0,8 эВ.

Необходимо при этом отметить, что значение ширины запрещенной зоны с увеличением атомного номера компонентов соединений исследуемой группы (A^IB^VX₂^{VI}) уменьшается, что обычно наблюдается в гомологических рядах известных полупроводниковых соединений. Значение энергии термической активации в области собственной проводимости для CuSbS₂ 0,8 эВ, для CuSbSe₂ 0,45 эВ*, а CuSbTe₂ по данным теплопроводности—0,18 эВ.

Зависимость термоэдс монокристаллов от температуры изображена на рис. 3.

Как видно из графика, во всем исследуемом интервале с ростом

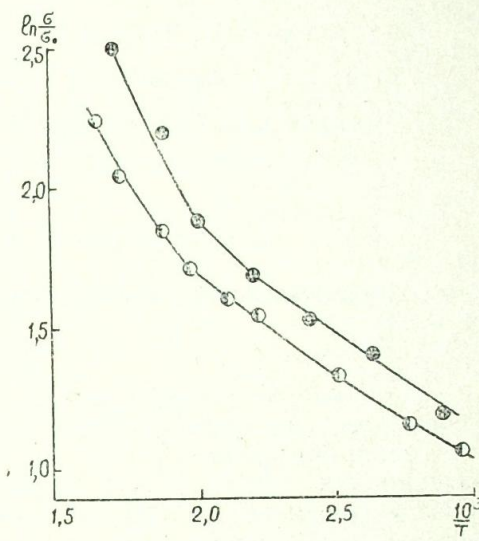


Рис. 2

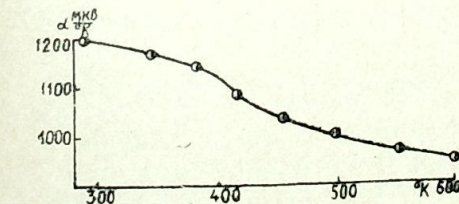


Рис. 3

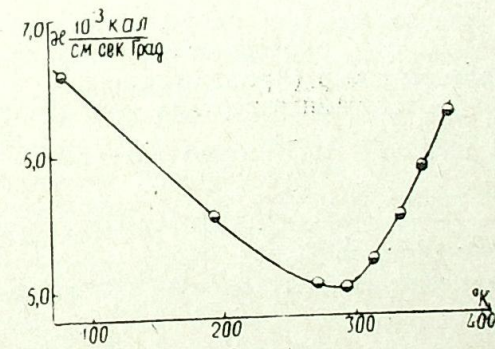


Рис. 4

температуры э.д.с. подает. Зависимость термоэдс от температуры как для монокристаллических, так и для поликристаллических образцов имеет одинаковый ход лишь с отличием в значениях.

* Необходимо отметить опечатки значений ΔE в работе [3].

Далее была измерена зависимость теплопроводности от температуры. Теплопроводность в интервале $80-300^\circ\text{K}$ с температурой уменьшается и затем растет (рис. 4), минимум обнаруживается при комнатной температуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Антонов В. Б., Нани Р. Х. и Насиров Я. Н. Тезисы докладов Всесоюзного совещания по полупроводниковым соединениям. Л., 1961.
2. Абдуллаев Г. Б., Антонов В. Б., Нани Р. Х. и Насиров Я. Н. Тезисы докладов второго Всесоюзного совещания по термоэлектричеству. Л., 1962.
3. Антонов В. Б., Нани Р. Х., Насиров Я. Н. Изв. АН. Азерб. ССР, 1961, № 5.
4. Бардеева С. П., Лискер И. С., Чудновский А. Ф. Сб. "Физика", Л., 1962.
5. Штрим Е. Л. Дисс., Л., ИПАН СССР, 1962.
6. Wernick J. H., Benson K. E. Phys. and chem. Sol. 1957, 3, 1—2.
7. Wernick J. H., Benson K. E. Phys. and chem. Sol. 1958, 4, 1—2.

Г. Б. Абдуллаев, Р. Х. Нани, Я. Н. Насиров

Үчгәт жарымкечирчи бирләшмәләрнин физики хассәләринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Үчгәт бирләшмәләрдән олан CuSbS_2 илк дәфә тәбиәтдә она охшар Волфсбергит минералы әсасында синтез едилмишдир.

Һәмин бирләшмә стехиометрик нисбәтдә көтүрүлмүш мис, күкүрдә сүрмәнин вакуум алтда әринтисиндән алынмышдыр. Синтездән сонра бирләшмәнин електриккечирмә әмсалы отаг температурунда $0,08 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$, јухары температурда 700°K -дә $7 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ олмушдур. Термо ehg исә отаг температурунда $950 \frac{\text{Mkl}}{^\circ\text{K}}$ -дән 700°K -дә $120 \frac{\text{Mkl}}{^\circ\text{K}}$ дүшмүшдүр.

Һәмин маддәнин поликристаллы үчүн гадаған олунмуш золагын ени $\Delta E = 0,24 \text{ эв}$ һесапланмышдыр.

CuSbS_2 бирләшмәсинин золаг әритмә үсулу илә монокристаллары алынмышдыр (Аргон мүһитиндә).

Отаг температурунда монокристалларын електриккечирмә әмсалы $0,024 \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ термо $ehg = 1200 \frac{\text{Mkl}}{^\circ\text{K}}$ вә истиликкечирмә әмсалы $5,10 \frac{\text{кал}}{\text{см. сам. дәр}}$ -дир.

Сәрбәст јүкдашыјычыларын јүрүклүјү $0,624 \frac{\text{см}^2}{\text{в. сам}}$ концентрасијасы 10^{17} см^{-3} һесапланмышдыр.

А. Х. ХАЛИЛОВ, А. П. МАМЕДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДВУХВАЛЕНТНЫХ ПРИМЕСЕЙ НА ЦЕНТРЫ ЗАХВАТА В $\text{NaCl}-\text{Ag}$ ФОСФОРАХ

1. Исследование активаторных центров захвата

Известно, что при введении ионов серебра в монокристаллы NaCl у длинноволнового края фундаментальной полосы поглощения появляются полосы с максимумами 209, 217 и $230 \text{ м}\mu$. Относительно интерпретации этих полос нет единой точки зрения [5, 11, 12]. После рентгенизации этих кристаллов в спектре поглощения возникают дополнительные полосы с максимумами при 225, 235, 275, 305, 415, 460, 520 и $720 \text{ м}\mu$, интенсивность которых зависит от концентрации серебра (рис. 1 а.). Некоторые из них ($\lambda_m = 225, 460$ и $720 \text{ м}\mu$) относятся к чистому кристаллу NaCl . Остальные полосы возбужденного поглощения ($\lambda_m = 235, 275, 305, 330$ и $410 \text{ м}\mu$), отсутствующие в спектре возбужденного поглощения кристалла NaCl , очевидно, связаны с центрами захвата, в образовании которых играют существенную роль атомы или ионы серебра. В литературе эти полосы известны под названием, соответственно, А, В, С, Д и Е полос [11].

Несмотря на то, что исследованию природы и структуры этих полос посвящено немало работ [9], однако до сего времени эти вопросы достаточно не выяснены. Введение неактивирующих примесей в фосфоры $\text{NaCl}-\text{Ag}$ может дать полезные сведения для выяснения природы и структуры А, В, С, Д, Е центров захвата, ибо добавление указанных примесей меняет не только число электронов или дырок, запасенных на центрах захвата, но и из-за изменения соотношения анионных и катионных вакансий могут исчезнуть ранее имевшиеся центры и образоваться новые центры захвата. Экспериментальные исследования этих вопросов очень важны для изучения возможностей сознательного регулирования оптических свойств кристаллофосфоров.

Нами исследованы монокристаллы $\text{NaCl}-\text{Ag}$ с различными концентрациями ионов Ag^+ и монокристаллы $\text{NaCl}-\text{Ag}$ (0,5 мол. %), содержащие ионы Ca^{++} , Sr^{++} , Ba^{++} , Cd^{++} , Zn^{++} .

Монокристаллы выращивались методом Киропулоса. Из полученных монокристаллов вырезались образцы размерами $1 \times 10 \times 12 \text{ мм}$. Спектры основного и возбужденного поглощения измерялись на спектрофотометрах СФ-4 и СФ-2М. Термооптические свойства изучались на фотоэлектрическом релаксационном комбайне, собранном в нашей лаборатории. Возбуждение осуществлялось с помощью рентгеновской трубки с вольфрамовым антикатодом (45 кВ , 10 мА). Аддитивное

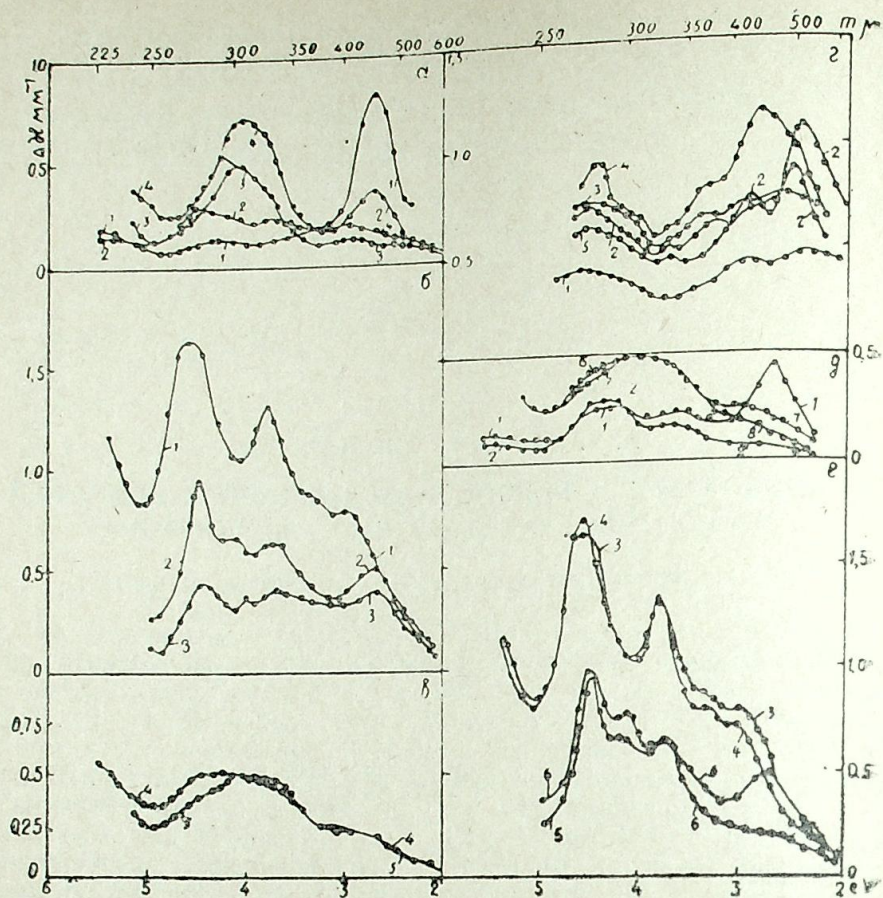


Рис. 1.

Спектры добавочного поглощения.

- а) NaCl—Ag 1—0,01; 2—0,05; 3—0,5; 4—2 мол. % после рентгенизации;
 б) и в) NaCl—Ag (0,5 мол. %), содержащие по 0,5 мол. % ионов Ca^{++} (1), Sr^{++} (2), Ba^{++} (3), Zn^{++} (4) и Cd^{++} (5) после рентгенизации;
 г) NaCl—Ag (0,5 мол. %) (1), содержащие по 0,5 мол. % ионов Ca^{++} (2), Sr^{++} (3), Ba^{++} (4) и Cd^{++} (5) после электронного аддитивного окрашивания;
 д) и е) NaCl—Ag (0,05 мол. %) (1), NaCl—Ag (0,5 мол. %), содержащие по 0,5 мол. % ионов Ca^{++} (3), Sr^{++} (5), Cd^{++} (7) после рентгенизации и после облучения (2, 4, 6, 8) видимым светом ($\lambda = 463 \text{ m}\mu$).

электронное окрашивание производилось при 700°C в насыщенных парах натрия.

Из рис. 1 а видно, что с повышением концентрации серебра наблюдается перераспределение интенсивностей полос возбужденного поглощения, в то время как при малой концентрации Ag^+ самой интенсивной является F полоса, при большой концентрации Ag^+ F полоса вообще не проявляется, но наблюдаются другие полосы, относительная интенсивность которых зависит от концентрации ионов Ag^+ . При малой концентрации Ag^+ (0,01 мол. %) наблюдаются F и V_2 полосы и полосы в области 290 и 335 $\text{m}\mu$. При концентрации AgCl 0,05 мол. % в расплаве образуются полосы при 275 и 305 $\text{m}\mu$ и усиливается полоса при 335 $\text{m}\mu$. F полоса при этом значительно ослабляется. При концентрации AgCl 0,5 и 2 мол. % в расплаве резко

усиливаются полосы при 305 и 330 $\text{m}\mu$. При этом F полоса полностью исчезает и возникают полосы при 420 и 520 $\text{m}\mu$. Из рис. 1 б видно, что двухвалентные примеси Ca^{++} , Sr^{++} , Ba^{++} , Cd^{++} , Zn^{++} влияют не только на относительную интенсивность полос добавочного поглощения, но в их присутствии наблюдаются новые полосы добавочного поглощения, расположенные в области 370—380 $\text{m}\mu$, а уже имеющиеся полосы несколько смещаются. В то время как для рентгенизованного NaCl—Ag наблюдаются полосы с максимумами при 275, 305, 330, 415 и 520 $\text{m}\mu$, для кристалла NaCl—Ag—Ca—270, 330, 380, 415, 520 и следы полос 305 и 465 $\text{m}\mu$. В спектре поглощения рентгенизованного NaCl—Ag—Sr наблюдаются полосы с максимумами 276, 300, 332, 375, 460 и 520 $\text{m}\mu$, из которых доминирующей является полоса при 276 $\text{m}\mu$. Для кристалла NaCl—Ag—Ba наблюдаются полосы при 278, 310, 335, 370 и 460 $\text{m}\mu$.

Как видно из рис. 1 б, в спектре добавочного поглощения кристалла NaCl—Ag (0,5 мол. %) наиболее интенсивной является C полоса, однако введение двухвалентных примесей Ca^{++} , Sr^{++} , Ba^{++} в этот фосфор приводит к значительному росту интенсивности B и D полос поглощения относительно полосы C . При этом B полоса растет гораздо сильнее, чем D . Это может быть объяснено тем, что в присутствии указанных ионов в решетке NaCl сильно возрастает число катионных вакансий.

Для определения знака полос добавочного поглощения фосфоров NaCl—Ag, а также NaCl—Ag с двухвалентными примесями эти кристаллы облучали видимым светом ($\lambda = 463 \text{ m}\mu$) и производили электронное аддитивное окрашивание. Как видно из сравнения кривых 1 и 2 рис. 1 д, при облучении F -светом монокристалла NaCl—Ag (0,05 мол. %) полосы с максимумами при 275 и 305 $\text{m}\mu$ растут, а полосы с максимумами при 225 и 335 $\text{m}\mu$ ослабевают, что указывает на электронную природу первых и дырочную природу последних.

Облучение видимым светом ($\lambda = 463 \text{ m}\mu$) рентгенизованных монокристаллов NaCl—Ag (0,5 мол. %) с двухвалентными примесями Ca^{++} , Sr^{++} и Cd^{++} показало (рис. 1 е и д), что при этом полосы с максимумами при 275, 305 и 330 $\text{m}\mu$ растут, а полоса при 225 $\text{m}\mu$ ослабляется. Таким образом, при введении ионов Ca^{++} , Sr^{++} и Cd^{++} в решетку монокристалла NaCl—Ag меняется природа полосы с максимумом при 330 $\text{m}\mu$. На рис. 1 г приводятся кривые добавочного поглощения аддитивно окрашенных кристаллов NaCl—Ag, содержащих двухвалентные примеси. Так как при этом в кристаллы вводятся только электроны, то полосы, наблюдаемые на рисунке, очевидно, имеют электронную природу. Из рисунка видно, что в присутствии двухвалентных примесей Ba^{++} , Sr^{++} и Ca^{++} в фосфоре NaCl—Ag образуются новые полосы поглощения, соответственно, при 370, 375 и 380 $\text{m}\mu$, обусловленные новыми активаторными центрами захвата. Эти центры, по-видимому, представляют собой комплексы, содержащие ион Ag^+ , анионную вакансию и двухвалентные ионы Ba^{++} , Sr^{++} и Ca^{++} .

Таким образом, изменение новых полос при введении в кристалл с $\lambda_m = 330 \text{ m}\mu$ и образование новых полос при введении в кристалл NaCl—Ag двухвалентных примесей, обнаруженное при рентгенизации кристаллов, наблюдается также при электронном аддитивном окрашивании. Как видно из рис. 1 г, в видимой части спектра поглощения аддитивно окрашенных монокристаллов NaCl—Ag (0,5 мол. %) с примесями Sr^{++} и Ba^{++} из-за усиливающегося влияния последних на акцепторную активность F центров, кроме полос с максимумами при 420 и 520 $\text{m}\mu$, наблюдается также полоса при 460 $\text{m}\mu$, обусловленная F центрами. Такое же воздействие ионов Sr^{++} и Ba^{++} на интенсивность

F полос поглощения мы наблюдали по спектрам добавочного поглощения при возбуждении этих кристаллов рентгеновскими лучами. Общим для спектров поглощения аддитивно окрашенных кристаллов NaCl—Ag с указанными двухвалентными примесями является то, что интенсивность полос, обусловленных коллоидными частицами серебра и натрия, больше, чем интенсивность атомарных полос.

2. Исследование центров захвата, обусловленных тепловыми микродефектами

Термовысвечивание кристаллов NaCl—Ag, а также NaCl—Ag с другими примесями изучалось в работах [3, 4, 6, 10]. В некоторых из них метод термовысвечивания применялся как самостоятельный метод для изучения центров захвата. Нами проводилось комплексное исследование термооптических свойств ряда кристаллофосфоров. Было изучено влияние температуры рентгенизации, нагревания рентгенизованных кристаллов до 110°C и влияние облучения светом из области F и M полос поглощения на кривые термовысвечивания кристаллофосфоров. Одновременно на релаксационном комбайне записывались кривые термообесцвечивания.

На рис. 2а изображены кривые термовысвечивания кристаллов NaCl, содержащих различные количества Ag^+ . Как видно из рисунка, кривые состоят из трех интенсивных пиков с температурами максимумов при 343, 393 и 443°K . Кроме этих основных пиков в более высокотемпературной области имеются следы слабого термопика. Несколько повышенные значения температур максимумов по сравнению с литературными [4, 10] данными обусловлены несколько повышенной скоростью нагрева— 1°град/сек . С повышением концентрации Ag^+ увеличивается интенсивность второго пика и уменьшается интенсивность первого и третьего. Из сравнения кривых на рис 2а видно, что с увеличением концентрации Ag третий пик, обусловленный F центрами, несколько смещается в низкотемпературную область. Изучение кривых термообесцвечивания F полосы кристаллов NaCl—Ag показало, что температура полуспада уменьшается с увеличением концентрации ионов Ag^+ .

Как видно из рис. 2 б, в, после облучения F светом рентгенизованного кристалла относительные интенсивности первого и третьего пиков падают, а интенсивность второго увеличивается. После облучения M светом относительная интенсивность первого и второго пиков уменьшается, а третьего—увеличивается. Нагрев такого кристалла после рентгенизации до 110°C приводит к полному исчезновению первого и ослаблению второго и третьего пиков. Рентгенизация при 90°C приводит к почти такому же результату. При облучении кристалла NaCl—Ag (0,01 мол. %), рентгенизованного при 90°C , F светом увеличивается интенсивность первого и второго пиков и уменьшается интенсивность третьего. При хранении кристалла NaCl—Ag (0,05 мол. %) в темноте в течение 4 суток сильно ослабляется первый пик и уменьшается интенсивность всех пиков термовысвечивания.

Кривые термовысвечивания монокристаллов NaCl—Ag (0,5 мол. %) и монокристаллов NaCl—Ag (0,5 мол. %) с примесями Ca^{++} , Sr^{++} и Cd^{++} представлены на рис. 2 г, из которого видно, что при нагревании рентгенизованных кристаллов NaCl—Ag (0,5 мол. %) до 110°C и при рентгенизации при повышенной температуре (90°C) полностью исчезает первый пик, значительно уменьшается интенсивность второго и несколько уменьшается интенсивность третьего пика термовысвечивания. Как видно из рисунка, при введении дополнительных примесей

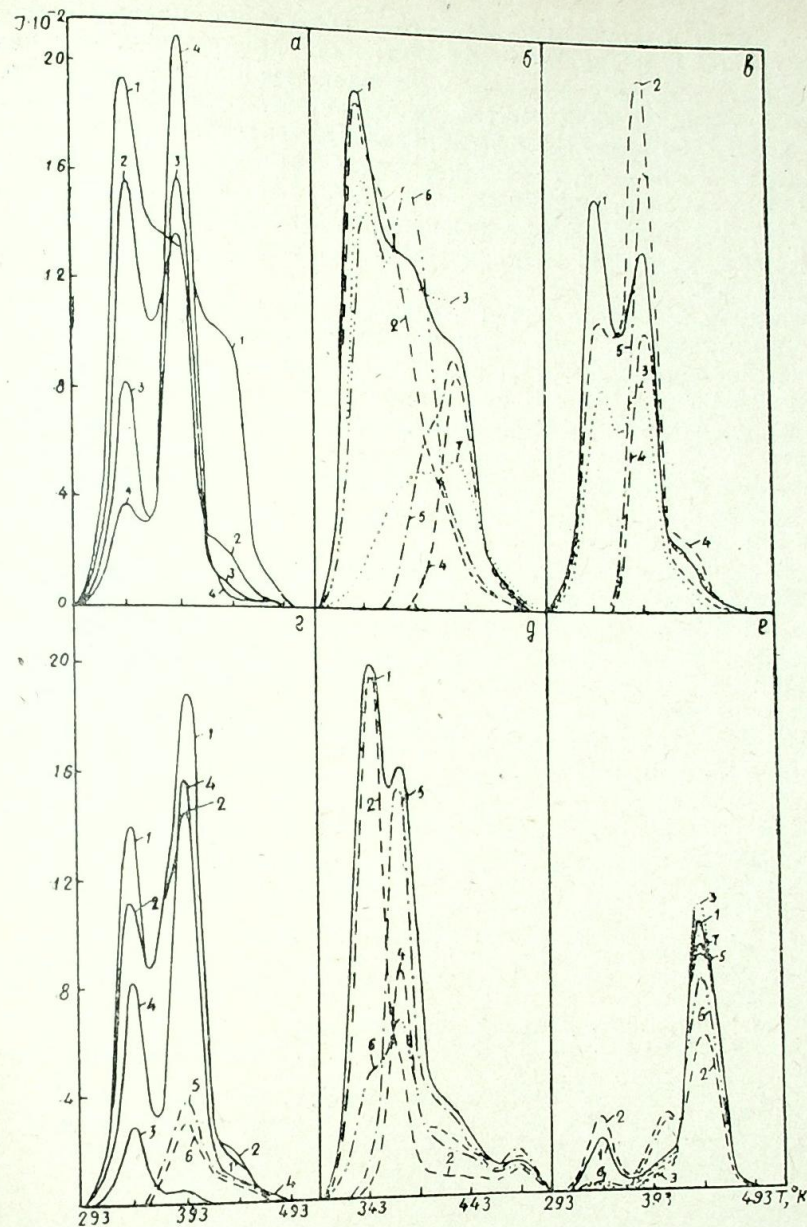


Рис. 2
Кривые термовысвечивания.

- а) NaCl—Ag 1—0,01; 2—0,05; 3—0,5 и 4—2 мол. %;
 - б) NaCl—Ag (0,01 мол. %);
 - в) NaCl—Ag (0,05 мол. %);
 - г) NaCl—Ag (0,5 мол. %) (4) с примесями Ca^{++} (1), Sr^{++} (2), Cd^{++} (3) после нагрева рентгенизованного кристалла NaCl—Ag (0,5 мол. %) до 110°C (5) и после рентгенизации при 90°C (6);
 - д) NaCl—Ag (0,5 мол. %); Ba (0,5 мол. %); е) NaCl.
- Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (указанные на б, в, д, е) указывают, соответственно, кривые термовысвечивания после рентгенизации (1), после облучения F и M светом (2, 3), после нагрева рентгенизованного кристалла до 110°C (4), после рентгенизации при 90°C (5), после облучения светом $\lambda = 463\text{ м}\mu$ рентгенизованного при 90°C кристалла (6) и после хранения рентгенизованного кристалла в темноте в течение 4 суток (7). Масштаб кривых на рис. 2 е увеличен в 20 раз.

Ca^{++} и Sr^{++} в кристалле $\text{NaCl}-\text{Ag}$ происходит перераспределение интенсивностей пиков термовысвечивания. Кроме того, при наличии этих примесей между первым и вторым пиком обнаруживается пик, обусловленный, по-видимому, Z_1 центрами. Если добавление примесей Ca^{++} и Sr^{++} не вызывает существенных изменений II пиков термовысвечивания $\text{NaCl}-\text{Ag}$, то введение ионов Cd^{++} значительно уменьшает интенсивность пиков термовысвечивания. При этом уменьшается также относительная интенсивность второго пика по сравнению с первым. В последнем случае пик, обусловленный F полосой поглощения, не обнаруживается.

Введение йодистого бария в фосфор $\text{NaCl}-\text{Ag}$ (0,5 мол.%) повышает интенсивность всех пиков термовысвечивания и приводит к появлению дополнительных пиков. Температура последнего пика, обусловленного освобождением электронов из F центров, становится на 40°C выше, чем температура пика, обусловленного F центрами в кристалле NaCl . Облучение этого кристалла F светом, нагрев рентгеноизлучением кристалла до 100°C и рентгенизация при 90°C приводят к возникновению пиков, находящихся между первым и последним пиком (см. рис. 2 д).

Для сравнения на рис. 2 е представлены кривые термовысвечивания кристаллов NaCl после указанных выше операций.

На основании кривых термовысвечивания и термообесцвечивания вычислены тепловые характеристики центров захвата. Таким образом, как видно из вышеизложенного, введение в монокристаллы NaCl различных дополнительных двухвалентных ионов может быть использовано для регулирования оптических и термооптических свойств монокристаллов NaCl и $\text{NaCl}-\text{Ag}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Витол И. К., Лушчик Ч. Б., Яэк И. В. Тр. ИФА АН ЭССР, № 12.
2. Гиндина Р. И., Лушчик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, 15.
3. Заитов Ф. Н. Дисс., Тарту, 1957.
4. Кац М. Л. „Оптика и спектроскопия“, 1, 198, 1956.
5. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочно-галогидных соединений. Изд. Саратовского Государственного университета, 1960.
6. Парфианович И. А. ЖЭТФ, 19, 7, 605, 1949.
7. Парфианович И. А., Шуралева Е. И. „Оптика и спектроскопия“, 7, 518, 1959.
8. Потехина Н. Д. „Оптика и спектроскопия“, 2, 388, 1957.
9. Халилов А. Х., Мамедов А. П. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1959, № 1.
10. Халилов А. Х., Мамедов А. П. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1960.
11. Etzel H., Schulman J. J. Chem. Phys., 22, 1549, 1954.
12. Kato M. Sci. Pap. Phys. Chem. Res. Tokyo, 41, 113, 1943.

Ә. Х. Хәлилов, Ә. П. Мәммедов

Бә'зи икивалентли ашгарларын $\text{NaCl}+\text{Ag}$ монокристалларында тутма мәркәзләринә тә'сиринин тәдгиги

ХҮЛАСӘ

$\text{NaCl}-\text{Ag}$ монокристалларынын әталәт вә аккумулясija хассәләрини тәнзим етмәк имканларыны ашкар етмәк үчүн Ca , Sr , Ba , Zn вә Cd ашгарларынын активатор вә мәнхуси тутма мәркәзләринә тә'сири өйрәнилмишдир.

Оптик вә термооптик үсулларла мүйәжән едилмишдир ки, гејд едилән ашгарларын тәбиәтиндән асылы олараг $\text{NaCl}-\text{Ag}$ монокристалларында тутма мәркәзләринә мәнхус локал сәвијјәләрин спектри, һәмин спектрдә электрон вә дешикләрин пајланмасы вә бу локал сәвијјәләрин термик характеристикасы әсаслы сурәтдә дәјишир.

М. А. МАМЕДОВ

УЛУЧШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ПЛАНЕТЫ (321) FLORENTINA

Для вычисления возможно точной орбиты планеты (321) Florentina была получена таблица прямоугольных особых координат планеты методом экстраполирования с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна с интервалом $\omega=40$ дней, за период 1950—1958 гг. в двух приближениях.

Прямоугольные координаты планеты были проинтерполированы на моменты наблюдений и вычисленные по ним α и δ сравнены с наблюдениями. На основании полученных неувязок произведено улучшение элементов вначале по четырем, а затем по пяти оппозициям.

В работе за основу была принята следующая система элементов планеты Florentina (321), опубликованная в сборнике „Эфемериды малых планет на 1963“.

Эпоха: 1951 декабрь 20.0 Всем.вр.

$$M_0 = 58^\circ 332$$

$$\omega = 35^\circ 448$$

$$\Omega = 40^\circ 465$$

$$i = 2^\circ 610$$

$$\varphi = 2^\circ 599$$

$$p = 725'' 458$$

$$a = 2.8813510$$

Эклиптика и равноденствие 1950.0

В табл. 1 даны результаты сравнения с наблюдениями до улучшения во время оппозиций 1952—1955 гг.

Таблица 1

Дата	Место наблюдения	O—C	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1952, февраль 20.2319*	Макдональд	—3 ^m 4	+19'
1952, март 17.10697	Индиана	—3 ^m 3	+18'
1953, май 6.91806*	Иоганнесбург	—5 ^m 0	+17'
1954, август 3.67381	Квасаи	—4 ^m 0	+20'
1954, август 27.12106*	Ла-Плата	—3 ^m 8	—19'
1955, декабрь 6.1000*	Индиана	—4 ^m 8	—18'

Наблюдения, отмеченные звездочкой, были использованы для определения орбиты. Впервые на основании этих разностей были исправлены элементы орбиты. Улучшение было произведено по методу Эккерта—Яхонтовой.

В табл. 2 приводится система элементов после первого их улучшения на основании четырех оппозиций с 1952 по 1955 г.

Таблица 2

Исходные элементы		Поправки	Улучшенные элементы
M_0	58°332	+2°051	60°383
ω	35.448	-2.401	33.047
Ω	40.465	-0.053	40.412
i	2.610	-0.007	2.603
φ	2.599	-0.100	2.499
μ	725"458	-1"362	724"095
a	2.8813510	+0.0036150	2.8849660

На основании этой исправленной системы элементов было проделано новое экстраполирование. Первое экстраполирование производилось с учетом возмущений от Юпитера, второе с учетом возмущений от Юпитера и Сатурна. Шаг интегрирования по-прежнему был равен 40 дням.

Если первый раз на основании исходных элементов мы вычислили прямоугольные особые координаты планеты на 1952—1955 гг., то второй раз вычисления производились на 1950—1958 гг. Точность вычислений—седьмой знак после запятой.

Разности между полученными координатами и наблюдениями в оппозициях 1950—1958 гг. приведены в табл. 3.

Таблица 3

Дата	Место наблюдения	О—С	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1950, октябрь 13.12702	Укль	-17 ^s .74	+5 ^{''} .6
1950, ноябрь 12.2583*	Макдональд	+19 ^s .10	+1 ^{''} .11
1952, февраль 20.23190	Макдональд	+1 ^s .0	+14 ^{''} .0
1952, март 17.10697	Индиана	-0 ^m .1	+1 ^{''} .2
1953, май 6.91806*	Иоганнесбург	-3 ^s .88	+27 ^{''} .2
1954, август 3.67381	Квасан	-2 ^s .7	-0 ^{''} .8
1954, август 27.12106*	Ла-Плата	-2 ^s .54	-26 ^{''} .70
1955, декабрь 6.10000	Индиана	-0 ^m .2	+0 ^{''} .3
1958, май 19.88264*	Хартбиспурт	-36 ^s .86	+55 ^{''} .7

Второе улучшение производилось по пяти оппозициям (1950—1958 гг.) на основании приведенных выше наблюдений тем же дифференциальным методом, как и в предыдущий раз. Вновь были составлены и решены условные уравнения. В результате получена следующая новая система элементов (табл. 4).

Эпоха и оскуляция 1951 декабрь 20.0 всем. время.

Новые элементы достаточно точно представляют наблюдения планеты Florentina (максимальная неувязка;—32"). Поэтому можно остановиться и считать полученные элементы окончательными. После исправ-

Таблица 4

Исходные элементы		Поправки	Улучшенные элементы
M_0	60°384	+0°02362	60°40762
ω	33.047	-0.00925	33.03775
Ω	40.412	+0.00642	40.41842
i	2.603	+0.00385	2.60685
φ	2.499	-0.00933	2.48967
μ	724"095	-0"18254	723"91246
a	2.8849660	+0.0004850	2.8854510

ления элементов второго приближения мы получили следующие элементы, которые показаны в табл. 4 (в графе улучшение элементов).

На основании этих элементов вычислили О—С на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2. Результаты показаны в табл. 5.

Таблица 5

Дата	Место наблюдения	О—С	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1950, октябрь 13.12702	Укль	—	—
1950, ноябрь 12.2583*	Макдональд	—	—
1952, февраль 20.23190*	Макдональд	—	—
1952, март 17.10697	Индиана	—	—
1953, май 6.91806*	Иоганнесбург	+0 ^s .08	+19 ^{''} .6
1954, август 3.67381	Квасан	+0 ^s .55	+13 ^{''} .1
1954, август 27.12106*	Ла-Плата	+0 ^s .90	+13 ^{''} .5
1955, декабрь 6.10000	Индиана	—	—
1958, май 19.88264*	Хартбиспурт	+4 ^s .17	+6 ^{''} .8

Приношу сердечную благодарность доктору физико-математических наук С. Г. Макову и канд. физико-математических наук В. А. Извекову за их ценные указания при выполнении работы.

М. Э. Маммадов

321 №-ли Florentina планети орбити элементларинин дүзэлиши

ХҮЛАСӘ

321 №-ли Florentina кичик планетинин орбитини мүмкүн гэдэр дәгиг тә'јин етмәк үчүн онун дүзбучаглы хусуси координатлары чәд-вәлини экстраполјасија етмә методу илә алараг мүшаһидә вахтына кәтириб, кичик планетин α вә δ мүшаһидә координаты илә мүгајисә етмәк лазымдыр.

Һесапланма вә мүшаһидә координатларыны мүгајисә едиб алынан фәргдән шәрти тәнлик дүзәлтмәк (максимум фәрг—5^m олмушдур) вә һәмин шәрти тәнлији һәлл едиб, нормал тәнлик алмаг лазымдыр. Нормал тәнлијин әмсаллары δM_0 , $\delta\omega$, $\delta\Omega$, δi , $\delta\mu$, $\delta\varphi$ -ләрән ибарәт ола-чагдыр. Бу әмсаллары планетин орбит элементларинә әлавә етдикдән сонра јени элементлар алмалыјыг.

Бу просес биринчи јахынлашма адланыр вэ планетин 1950—1958-чи иллэрдэки вэзијјэтини эһатэ едир. Интеграллама мүддэти $\omega=40$ күндүр. Һесаблама ики јахынлашмадан ибарэтдир. Биринчи јахынлашмада анчаг Јупитер планетинин кичик планетэ сарсыдычы тэ'сири, икинчи јахынлашмада исэ Јупитер вэ Сатурн планетлэринин сарсыдычы тэ'сири нэзэрэ алынмышдыр.

Биринчи јахынлашмадан сонра

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= +2^{\circ}.051 \\ \sigma \omega &= -2^{\circ}.401 \\ \sigma Q &= -0^{\circ}.053 \\ \sigma i &= -0^{\circ}.007 \\ \sigma \varphi &= -0^{\circ}.100 \\ \sigma \mu &= -1^{\circ}.362 \\ a &= +0.003615 \end{aligned}$$

олмушдур.

Биринчи јахынлашмадан алынган бу эмсаллары планетин башлангыч орбити элементлэринэ элавэ едиб, алынган элементлэрлэ икинчи јахынлашманы етмэк лазымдыр.

Икинчи јахынлашмадан сонра

$$\begin{aligned} \delta M_0 &= +0^{\circ}.02362 \\ \sigma \omega &= -0^{\circ}.00925 \\ \sigma Q &= +0^{\circ}.00642 \\ \sigma i &= -0^{\circ}.00385 \\ \sigma \varphi &= -0^{\circ}.00933 \\ \sigma \mu &= -0.18254 \end{aligned}$$

$$a = +0.000485 \text{ алынган кэмијјэтлэри планетин биринчи јахынлашмадан сонра алынган орбит элементлэринэ элавэ етдикдэ алынган}$$

тин биринчи јахынлашмадан сонра алынган орбит элементлэринэ элавэ етдикдэ алынган

$$\begin{aligned} M_0 &= 60^{\circ}.40762 \\ \omega &= 33^{\circ}.03775 \\ Q &= 40^{\circ}.41842 \\ i &= 2^{\circ}.60685 \\ \varphi &= 2^{\circ}.48967 \\ \mu &= 723.91246 \\ a &= 2.8854510 \end{aligned}$$

элементлэр планетин тэлэб олуан вэзијјэтини тэ'јин етмэк үчүн кифајэт олдуғундан просес сахланылыр.

Д. А. МАМЕДОВ

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ПОДХОДА ПОТОКА К ВОДОСЛИВУ НА КОЭФФИЦИЕНТ РАСХОДА

Проведенные нами опыты на модели водослива (сброс катастрофического паводка) Акстафинского гидроузла показали, что в зависимости от характера подхода потока к водосливу и оказываемого сопротивления при входе режим движения потока на сливной части водослива претерпевает изменения. Последнее выражается как внутренней, так и внешней деформацией потока. Естественно, что эта деформация должна отразиться на коэффициенте расхода. В дальнейшем мы приводим некоторые данные о характере изменения этого коэффициента в условиях лабораторных опытов.

В исследованиях водослива практического профиля значение коэффициента расхода на трех разных моделях определялось в масштабах 1:25; 1:40 и 1:100 н.в.:

а) при условии естественного потока;

б) с установлением горизонтальных вставок разной длины на гребне водослива;

в) при совмещении горизонтальных вставок с раскрылками; последние сопрягались под разными углами с устоями водослива;

г) раскрылками без горизонтальных вставок, с донным поступлением потока на гребень.

В каждом опыте для определенного напора коэффициент расхода определялся как среднее значение из пяти повторных опытов.

На рис. 1 изображены совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношения напоров для трех принятых нами моделей различного масштаба.

Как видно из рисунка, кривые зависимости идентичны между собой; значения коэффициента расхода для каждой модели при одинаковых

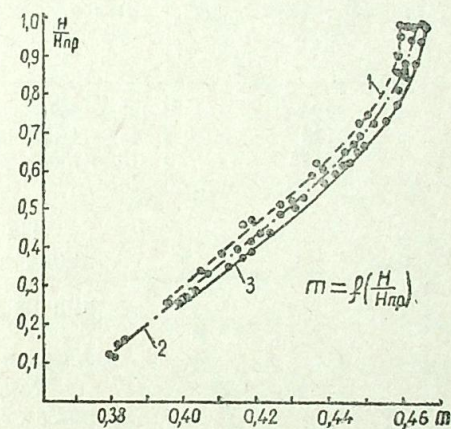


Рис. 1.

Совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношения напоров (на трех разных моделях водослива). 1—на модели 1:100 н. в.; 2—на модели 1:40 н. в.; 3—на модели 1:25 н. в.

значениях соотношения $\frac{H}{H_{пр}}$ незначительно (в пределах 1%) и отличаются друг от друга. Кривые идут почти параллельно друг другу и при $\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$ получают свои максимальные значения.

Коэффициент расхода в начале кривой растет резко (от $\frac{H}{H_{пр}} = 0,12$ до $\frac{H}{H_{пр}} = 0,8$) и изменяется в пределах от $m = 0,38$ до $m = 0,455$. На участке $\frac{H}{H_{пр}} = 0,8$ до $\frac{H}{H_{пр}} = 1$ нарастание кривой идет медленнее, при этом значения коэффициента изменяются от $m = 0,455$ до $m = 0,465$.

В целом можно сделать вывод, что разница значений коэффициента расхода для модели водослива практического профиля при различных масштабах невелика и составляет приблизительно 1%, и что с увеличением масштаба модели значение коэффициента расхода несколько возрастает.

Значения коэффициента расхода в зависимости от соотношения напоров для трех моделей приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Масштаб модели н. в.	Удельный расход, л/сек/м	При соотношении напоров $\frac{H}{H_{пр}} =$						
		0,143	0,286	0,429	0,572	0,715	0,858	1,0
1:25	192,0—869,0	—	0,402	0,420	0,436	0,452	0,462	0,466
1:40	65,0—428,0	0,380	0,399	0,417	0,433	0,450	0,459	0,465
1:100	16,5—106,7	—	0,397	0,414	0,431	0,448	0,457	0,460

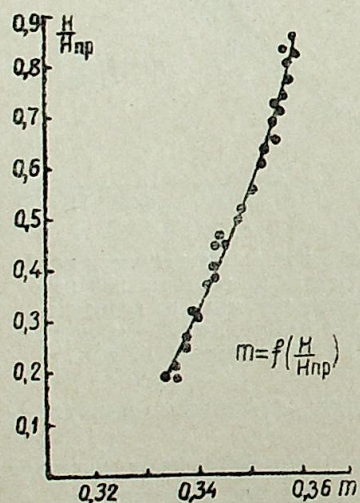


Рис. 2.

Кривая зависимости $m = f\left(\frac{H}{H_{пр}}\right)$.
(Работа водослива с подводящим лотком).

На рис. 2 показана зависимость изменения коэффициента расхода от соотношения напоров $m = f\left(\frac{H}{H_{пр}}\right)$ при работе водослива в условиях стесненного потока.

Как показывают исследования, в условиях стесненного потока работа водослива (т. е. режим потока) более устойчива, но граница изменения значений коэффициента расхода несколько сокращается. Как видно из рисунка, значения коэффициента расхода меняются в пределах от $m = 0,331$ до $m = 0,360$. Кривая имеет вид параболы и значение m растет с ростом напора.

Уменьшение в данном случае значений коэффициента расхода характеризуется появлением новых сил сопротивления от стенок и дна лотка и от сжатия потока. Изменение значений коэффициента расхода говорит о том, что при работе водослива в условиях стесненного потока коэффициент m уменьшается.

На рис. 3 и 4 даются совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношений $\frac{H}{H_{пр}}$ и $\frac{C}{H}$ при работе водослива с горизонтальными вставками разной длины на гребне.

Как видно из рис. 3, строение кривых и значение коэффициента расхода для отдельных случаев резко отличаются друг от друга и меняются в различных пределах. Так, например, при длине горизонтальной вставки $C = 0,60$ см значение коэффициента расхода меняется в пределах от $m = 0,350$ до $m = 0,383$; при $C = 87,5$ см от $m = 0,243$ до $m = 0,378,4$; при $C = 150$ см от $m = 0,340$ до $m = 0,364$.

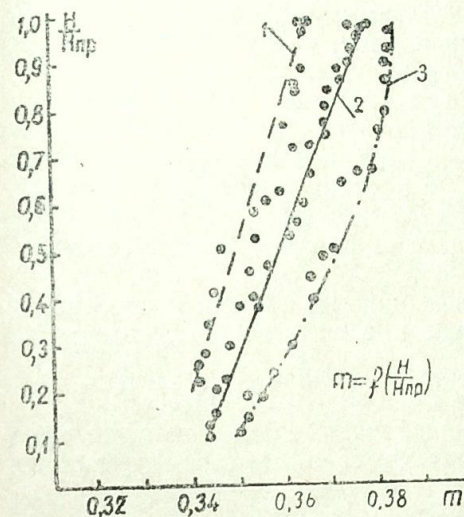


Рис. 3.

Совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношения напоров (с горизонтальными вставками).
1—при $C = 150$ см; 2—при $C = 87,5$ см; 3—при $C = 60$ см.

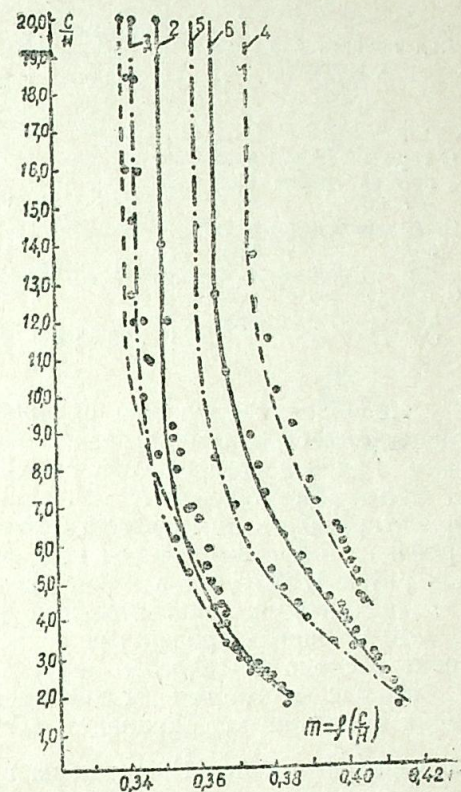


Рис. 4.

Совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от $\frac{C}{H}$ (горизонтальные вставки совмещены с раскрылками и без раскрылок).

1—при $C = 150$ см; 2—при $C = 87,5$ см; 3—при $C = 60$ см; 4—при $C = 150$ см и $\alpha = 6^\circ$; 5—при $C = 87,5$ см и $\alpha = 12^\circ$; 6—при $C = 60$ см и $\alpha = 20^\circ$.

Кривые по всей длине, изменяясь по параболе, идут почти параллельно и идентичны друг другу. С ростом напора на гребне значение коэффициента расхода для всех случаев растет в начале резко ($\frac{H}{H_{пр}} = 0,143$ до $\frac{H}{H_{пр}} = 0,715$), а затем с ростом соотношения $\frac{H}{H_{пр}}$ от 0,715 до 1,0 незначительно изменяется.

В процентном отношении разница между кривыми первой (при $C = 150$ см) и второй (при $C = 87,5$ см) в среднем достигает до 3,85%, между второй и третьей — до 2,16 и, наконец, между первой (при $C = 150$ см) и третьей (при $C = 60$ см) — 4,57%.

Наиболее повышенное значение коэффициента расхода, т. е. $m = 0,383$, получается при $C = 60$ см.

Сравнение изменения значений коэффициента расхода в зависимости от соотношения напоров при данных условиях работы водослива приводится в табл. 2.

Таблица 2

Вид изменения у входа к водосливу	Удельный расход, л/сек/м	При соотношении напоров $\frac{H}{H_{пр}} =$						
		0,143	0,286	0,429	0,572	0,715	0,858	1,0
С горизонтальной вставкой на гребне при $C = 60$ см	13,50—353,0	0,350	0,359	0,366	0,373	0,379	0,382	0,383
С горизонтальной вставкой на гребне при $C = 87,5$ см	11,0—347,0	0,343	0,349	0,355	0,361	0,366	0,373	0,378
С горизонтальной вставкой на гребне при $C = 150$ см	31,0—340,0	—	0,342	0,347	0,351	0,356	0,360	0,364

Подобное сооружение с горизонтальным подводящим участком, создающим спокойный и равномерный подход, спроектировано бакинским Гидроэнергопроектом на сбросном участке Чиркейской ГЭС р. Сулак Дагестанской АССР. При этом сбросная часть сооружения проектировалась по профилю безвакуумного водослива практического профиля. Расчетный расход водосброса Чиркейской гидроэлектростанции равен $1700 \text{ м}^3/\text{сек}$ и имеет арочную плотину высотой $P = 225 \text{ м}$.

Подводящий горизонтальный участок длиной более 100 м (при $H = 10 \text{ м}$) спроектирован как водослив с широким порогом (коэффициент расхода $m = 0,365$).

На рис. 4 изображены совмещенные кривые, показывающие изменение значений коэффициента расхода в зависимости от изменения длины горизонтальной вставки на гребне, т. е. $m = f\left(\frac{C}{H}\right)$ (здесь C — длина горизонтальной вставки). Как показывают кривые, значительное изменение коэффициента расхода происходит в начальных участках кривой, т. е. при малых значениях $\frac{C}{H}$.

Кривые, построенные для условий $C = 60 \text{ см}$ и $C = 87,5 \text{ см}$, в начале сливаются от $\frac{C}{H} = 1,8$ ($m = 0,38$) до $\frac{C}{H} = 4,5$ ($m = 0,36$), затем медленно растут и при $\frac{C}{H} = 8 \div 9$ коэффициенты расхода получают свои минимальные значения, а дальше на всем протяжении остаются постоянными и идут параллельно друг другу.

Сравнивая кривые для отдельных случаев, можно сказать, что с увеличением длины горизонтальной вставки на гребне значение коэффициента расхода уменьшается. Это вызывается, по-видимому, тем, что сперва вид водослива находится в пределах перехода от водослива практического профиля к водосливу с широким порогом и при этом длина горизонтальной вставки в данном пределах создает условия водослива с широким порогом [т. е. $C = (2 \div 3) H$], что и влияет на пропускную способность водослива.

Изменение значений коэффициента расхода в зависимости от длины горизонтальной вставки у входа дается в табл. 3.

Таблица 3

$\frac{H}{H_{пр}}$	При длине горизонтальной вставки $C =$		
	150 см	87,5 см	60 см
0,20	0,340		
0,50	0,349	0,346	0,354
0,80	0,358	0,358	0,370
1,0	0,364	0,370	0,381
		0,378	0,383

На рис. 5 показаны совмещенные зависимости коэффициента расхода от соотношений $\frac{H}{H_{пр}}$ и $\frac{C}{H}$ для условий работы водослива, совмещенного с раскрылками и горизонтальными вставками на входе.

Как видно из рисунка, кривые, построенные для условий $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = 12^\circ$ при длине горизонтальной вставки, соответственно, $C = 150 \text{ см}$ и $C = 87,5 \text{ см}$, с начального участка (от $\frac{H}{H_{пр}} = 0,143$ до $\frac{H}{H_{пр}} = 0,6$) сливаются друг с другом; при этом значение коэффициента расхода для обеих кривых меняется в пределах от $m = 0,364$ до $m = 0,396$; дальше этого участка кривые расходятся и с ростом напора (от $\frac{H}{H_{пр}} = 0,6$ до $\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$) значение коэффициента расхода увеличивается, принимая свои максимальные значения, т. е. $m = 0,406$ и $m = 0,408$. Разница между этими кривыми составляет 0,74%.

Кривая, построенная для условий $\alpha = 20^\circ$ и $C = 60 \text{ см}$, несколько отличается от прежних. Значение коэффициента расхода при этом меняется от $m = 0,363$ (при $\frac{H}{H_{пр}} = 0,143$) до $m = 0,415$ (при $\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$).

На всем протяжении значение коэффициента расхода для данного случая больше, чем у остальных, т. е. от $\alpha = 6$ и 12° ; так, например, при $\frac{H}{H_{пр}} = 0,143$ разница между коэффициентами равна 0,74%, при $\frac{H}{H_{пр}} = 0,428$ — 1% и, постепенно увеличиваясь, оно при $\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$ доходит приблизительно до 1,7%.

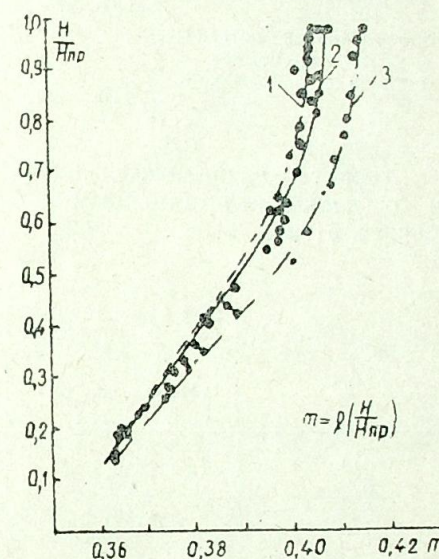


Рис. 5.

Совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношения напоров (горизонтальные вставки, совмещенные с раскрылками).
1—при $C = 150 \text{ см}$ и $\alpha = 6^\circ$; 2—при $C = 87,5 \text{ см}$ и $\alpha = 12^\circ$; 3—при $C = 60 \text{ см}$ и $\alpha = 20^\circ$.

Сравнение значений коэффициента расхода в зависимости от соотношения напоров при данных условиях работы водослива (с установлением раскрывок и горизонтальных вставок) приводится в табл. 4.

Таблица 4

Виды изменений у входа к водосливу	Удельный расход, л/сек/м	При соотношении напоров $\frac{H}{H_{пр}} =$						
		0,143	0,286	0,429	0,572	0,715	0,858	1,00
Горизонтальная вставка $C = 60$ см, совмещенная с раскрывкой $\alpha = 20^\circ$	20,0—382,0	0,362	0,376	0,488	0,40	0,409	0,412	0,415
Горизонтальная вставка $C = 87,5$ см, совмещенная с раскрывкой $\alpha = 12^\circ$	29,0—375,0	—	0,374	0,485	0,393	0,402	0,406	0,408
Горизонтальная вставка $C = 150$ см, совмещенная с раскрывкой $\alpha = 6^\circ$	от 28,0—370,0	—	0,374	0,485	0,393	0,400	0,404	0,406

Характер изменения значений коэффициента расхода в зависимости от длины горизонтальной вставки, совмещенной с раскрывками, показан в табл. 5.

Таблица 5

$\frac{H}{H_{пр}}$	При длине горизонтальной вставки, совмещенной с раскрывками $C =$		
	150 см, $\alpha = 6^\circ$	87,5 см, $\alpha = 12^\circ$	60 см, $\alpha = 20^\circ$
0,25	0,369	0,369	0,372
0,50	0,389	0,389	0,395
0,75	0,400	0,402	0,410
1,00	0,406	0,408	0,415

В литературе о работе раскрывок и влиянии их на величину коэффициента расхода приводятся сведения только для водосливов с широким порогом (без порога) и для коротких прямоугольных горизонтальных труб при $i=0$, для которых значение коэффициента расхода меняется в зависимости от условий входа в пределах от $m=0,30$ до $m=0,365$.

Исследованиями Д. Н. Кумина для водосливов без порога (т. е. при $p=0$) при различных условиях бокового сжатия установлено, что значение коэффициента расхода можно довести до $m=0,385$.

Исследования, проведенные нами в этой области, показали, что совместная работа раскрывок с горизонтальным подводящим участком перед водосливом дает положительный эффект в смысле создания спокойного и равномерного подхода, благоприятного рабочего режима и увеличения (около 5÷6%) коэффициента расхода сооружения по сравнению с горизонтальной вставкой без раскрывок.

Увеличение коэффициента расхода в данном случае объясняется тем, что образовавшаяся мертвая зона перед водосливом (за устоями) ликвидируется раскрывками, которые оказывают сопротивление потоку.

Опыты с раскрывками $\alpha=15^\circ$ и $\alpha=18^\circ$ (без горизонтальной вставки)

Для высоких водосливных плотин в литературе о применении раскрывок нет никаких данных. Между тем на всех гидроузлах принимают меры к плавному подводу потока к водосливным отверстиям. Однако до сих пор отсутствуют оценки того, как изменяется пропускная способность отверстий плотины в условиях работы с раскрывками.

Переходные сооружения, выполненные неправильно с точки зрения гидравлики, имеют большие потери напора и, как показывают

исследования, весьма неспокойный гидравлический режим и понижения пропускной способности сооружения. С этой целью в данном случае рассматривается работа водослива практического профиля с раскрывками на входе без горизонтальной вставки.

Кривые, указанные на рис. 6 $\left[m = f\left(\frac{H}{H_{пр}}\right) \right]$,

ясно характеризуют изменения значений коэффициента расхода в зависимости от условий работы водослива с раскрывками (там же для сравнения приводится кривая, полученная из опытов для условий работы водослива без изменения входа).

Как видно из рисунка, построения кривых идентичны друг другу;

кривые, построенные для данных опытов с раскрывками, вначале мало, а затем, с ростом соотношения $\frac{H}{H_{пр}}$, четко отличаются от кривой для водослива без изменений входа.

Значение коэффициента расхода для кривой с раскрывками при $\alpha = 18^\circ$ меняется от $m = 0,380$ (при $\frac{H}{H_{пр}} = 0,12$) до $m = 0,47$ (при

$\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$).

Максимальная разница между кривыми, построенными для водослива без изменений у входа и с раскрывками $\alpha = 15^\circ$ при $\frac{H}{H_{пр}} = 1,0$,

равняется приблизительно 1,5%.

Сравнения значений коэффициента расхода в зависимости от соотношения напоров с раскрывками при $\alpha = 15^\circ$ и $\alpha = 18^\circ$ и без изменений приводятся в табл. 6.

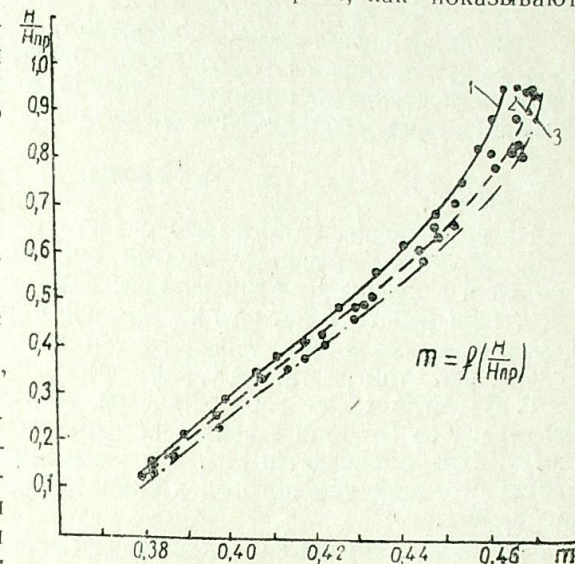


Рис. 6.

Совмещенные кривые зависимости коэффициента расхода от соотношения напоров (с раскрывками при $\alpha = 18^\circ$ и $\alpha = 15^\circ$)

- 1 — На модели 1:40 н. в. (без изменений);
- 2 — с раскрывками при $\alpha = 18^\circ$;
- 3 — с раскрывками при $\alpha = 15^\circ$.

Таблица 6.

Вид водослива и изменений у входа к нему	Удельный расход, л/сек/м	При соотношении напоров $\frac{H}{H_{пр}} =$						
		0,143	0,286	0,429	0,572	0,715	0,858	1,0
Без изменений	65,0—428,0	0,380	0,399	0,417	0,433	0,450	0,459	0,465
С раскрылками $\alpha = 18^\circ$		0,381	0,401	0,420	0,436	0,453	0,464	0,470
С раскрылками $\alpha = 15^\circ$		0,381	0,403	0,424	0,440	0,456	0,467	0,472

Результаты исследований показывают, что устройством раскрылок (созданием некоторой плавности входа потока на гребень водослива) с донным поступлением потока условия работы на водосливе улучшаются, и значение коэффициента расхода несколько увеличивается.

Выводы

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Изменение масштаба модели водослива не меняет характер изменения значений коэффициента расхода.

2. При работе водослива в условиях стесненного потока подводящая часть имела вид длинного лотка и значение коэффициента расхода при этом достигало 0,360.

3. С устройством горизонтальной вставки на гребне водослива практического профиля значение коэффициента расхода резко уменьшается. Это объясняется тем, что указанный водослив переходит к водосливу с широким порогом и силы трения влияют на пропускную способность.

4. Устройство раскрылок на горизонтальной вставке перед водосливом достигается спокойный и равномерный подход потока, и за счет ликвидации мертвой зоны перед водосливом значение коэффициента расхода несколько увеличивается.

5. Наиболее благоприятными и обеспечивающими нормальную работу водослива с повышением коэффициента расхода являются условия работы с раскрылками при $\alpha = 15^\circ$ с донным поступлением потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березинский А. Р. Пропускная способность водослива с широким порогом. М., 1950.
2. Киселев П. Г. Справочник по гидравлическим расчетам. М., 1957.
3. Офицеров А. С. Гидравлика водослива. М., 1938.
4. Проект Чиркейской ГЭС на реке Сулак. Бакгидэп, 1959—1960.
5. Справочник по гидротехнике. М., 1955.

Ч. Э. Маммадов

Суашыранын габагында едилэн дэжишмэнин сэрф эмсалына тэ'сири

ХҮЛАСЭ

Тэчрүбэ көстэрир ки, ахымын суашырана јахынлашма характериндэн вэ киришдэ олан мүгавимэтлэрдэн асылы олараг, суашыран үзэриндэ ахым режими дэжишир. Бу исэ ахымын һәм дахили вэ һәм дэ харичи деформасијасында өзүнү көстэрир.

Шүбһәсиз ки, бу деформасија сэрф эмсалына тэ'сир етмэлидир. Лабораторијада апарылмыш тэдгигат материаллары көстэрир ки, суашыранын габагында (кириш һиссәсиндэ) ахымын јахынлашма шәраитини дэжишдикдэ сэрф эмсалы дэжишир.

Тэдгигат ашағыдакы шәраитлэрдэ апарылмышдыр:

а) ахымын сыхылмыш шәраитиндэ;

б) суашыран гашында мүхтәлиф узунлуғлу үфиги гојмаларла;

в) үфиги гојмаларын ајрычыларла биркэ ишләмәси;

г) јалныз ајрычылар шәраитиндэ (үфиги гојмаларсыз).

Гејд етмәк лазымдыр ки, суашыран гашында ајрычылар гојулмасы шәраитиндэ суашыранын иши һаггында әдәбијатда һеч бир мә'лумат јохдур.

Тэдгигат материаллары көстэрир ки, суашыран модел мигјасынын дэжишмәсилэ сэрф эмсалы аз дэжишир вэ артмаға мејил көстэрир. Суашыран гашында әләвә едилмиш үфиги гојмалар сэрф эмсалыны ашағы салыр.

Ән әлверишли шәраит суашыран $\alpha = 15^\circ$ шәраитиндэ ајрычыларла ишләмәси заманы алыныр. Бу шәраитдэ сэрф эмсалы тәхминән 0,472 олур.

Тэдгигат Азәрбајчан ССР Су Проблемләри Институтунун һидравлика лабораторијасында апарылмышдыр.

А. И. ГУСЕЙНОВ, Х. Ш. МУХТАРОВ

О СТРУКТУРЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ТЕОРЕМЫ
СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ
УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ

В исследовании нелинейных интегральных уравнений трудности возникают в связи с нелинейными функциями, которые входят под знак интеграла. Подчинив нелинейные функции тем или иным условиям, удастся исследовать вопросы существования, единственности, разветвления, продолжаемости решения отдельных классов нелинейных интегральных уравнений в различных функциональных пространствах.

В настоящее время топологические принципы неподвижной точки успешно применяются в области нелинейных интегральных уравнений как в действительных, так и в комплексных пространствах типа Банаха.

А. А. Бабаев в работе [2] установил некоторые свойства оператора

$$Au = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F[U(s)] \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

в H_0^* в зависимости от свойств нелинейной функции $F(u)$ и применил полученные результаты к исследованию нелинейного сингулярного уравнения:

$$U(x) = AU + f(x).$$

Следует отметить, что действия и непрерывность оператора $F(u) = F[u(s)]$ ранее были исследованы в различных пространствах В. В. Немыцким, М. М. Вайнбергом, М. А. Красносельским и др. [3, 4, 6].

1°. Пусть функция $u(x)$, определенная в $[a, b]$, удовлетворяет условиям:

$$|U(x)| \leq K, \quad |U(x + \Delta x) - U(x)| \leq K_2 |\Delta x|^\delta, \quad K_1, K_2 = \text{const и } 0 < \delta < 1;$$

множество таких функций обозначим через H_δ .

Введем в H_δ норму;

$$\|U\|_{H_\delta} = \max_{x \in [a, b]} |U(x)|, \quad \sup_{x_1, x_2 \in [a, b]} \frac{|U(x_1) - U(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\delta}. \quad (1)$$

* Определение H_δ дается ниже.

А. И. ГУСЕЙНОВ, Х. Ш. МУХТАРОВ

О СТРУКТУРЕ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ

В исследовании нелинейных интегральных уравнений трудности возникают в связи с нелинейными функциями, которые входят под знак интеграла. Подчинив нелинейные функции тем или иным условиям, удастся исследовать вопросы существования, единственности, разветвления, продолжаемости решения отдельных классов нелинейных интегральных уравнений в различных функциональных пространствах.

В настоящее время топологические принципы неподвижной точки успешно применяются в области нелинейных интегральных уравнений как в действительных, так и в комплексных пространствах типа Банаха.

А. А. Бабаев в работе [2] установил некоторые свойства оператора

$$Au = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F[U(s)] \operatorname{ctg} \frac{s-x}{2} ds$$

в H_0^* в зависимости от свойств нелинейной функции $F(u)$ и применил полученные результаты к исследованию нелинейного сингулярного уравнения:

$$U(x) = AU + f(x).$$

Следует отметить, что действия и непрерывность оператора $F(u) = F[u(s)]$ ранее были исследованы в различных пространствах В. В. Немыцким, М. М. Вайнбергом, М. А. Красносельским и др. [3, 4, 6].

1°. Пусть функция $u(x)$, определенная в $[a, b]$, удовлетворяет условиям:

$|U(x)| \leq K$, $|U(x + \Delta x) - U(x)| \leq K_2 |\Delta x|^\delta$, $K_1, K_2 = \text{const}$ и $0 < \delta < 1$; множество таких функций обозначим через H_δ .

Введем в H_δ норму;

$$\|U\|_{H_\delta} = \max_{x \in [a, b]} |U(x)|, \sup_{x_1, x_2 \in [a, b]} \frac{|U(x_1) - U(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\delta}. \quad (1)$$

* Определение H_δ дается ниже.

В данной работе мы устанавливаем необходимое и достаточное условие ограниченного действия оператора

$$FU = F[U(s)] \text{ из } H_\delta \text{ в } H_{\delta'}, 0 < \delta < 1, 0 < \delta' < 1.$$

Такой результат порождает некоторые свойства оператора

$$BU = \int_a^b \frac{K(x, s) F[U(s)]}{s - x} ds,$$

с помощью которого доказывается существование и единственность ограниченного решения уравнения:

$$U(x) = BU + g(x) \quad (2)$$

в пространстве H_δ .

1. Теорема 1. Если оператор $FU = F[U(s)]$ действует из каждого шара S_r с $H_\delta (0 < r < R \leq \infty)$ в $H_{\delta'}$, то функция $F(U)$ непрерывна при $-R < U < +R (0 < \delta < 1, \delta' > 0)$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке $U_0 \in (-R, R)$ нарушается непрерывность функции $F(U)$. Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{\delta_n\}$, стремящихся к нулю при $n \rightarrow \infty$. В силу нашего допущения существует число $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность $\{U_n\}$ такая, что при $|U_n - U_0| < \delta_n$ имеет место

$$|F(U_n) - F(U_0)| \geq \varepsilon_0. \quad (3)$$

Построим функцию

$$\varphi(x) = U_0 - \delta_0 + \frac{2\delta_0}{(a-b)^{\delta}} (x-a)^{\delta}, \quad a \leq x \leq b, \text{ где } \delta_0 - \text{некоторое положительное число.}$$

Если

$$0 < \delta_0 < \min \left\{ \frac{R(x-a)^{\delta}}{2}, R - |U_0| \right\},$$

то

$$\|\varphi\|_{H_\delta} < R. \quad (4)$$

Очевидно, δ_n можно считать меньше δ_0 . Тогда

$$U_0 - \delta_0 < U_n < U_0 + \delta_0.$$

Так как $\varphi(a) = U_0 - \delta_0$, $\varphi(b) = U_0 + \delta_0$, то в силу непрерывности $\varphi(x)$ существует последовательность $\{x_n\} \in [a, b]$ такая, что

$$\varphi(x_n) = U_n.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \varphi(x_n) = U_0.$$

Из (4) имеем $\varphi(x) \in S_r$. Тогда по условию теоремы 1 $W(x) = F[\varphi(x)] \in H_{\delta'}$, C , т. е. $W(x)$ — непрерывная функция.

С другой стороны,

$|W(x_n) - W(x_0)| = |F[\varphi(x_n)] - F[\varphi(x_0)]| = |F(U_n) - F(U_0)| \geq \varepsilon_0$, что невозможно в силу непрерывности $W(x)$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Если $F[U(s)]$ переводит фиксированный шар S_r с H_δ в $H_{\delta'}$, то $F(U)$ непрерывна при всех $-r < U < r$.

Теорема 2. Для ограниченности действия оператора из каждого шара S_r с $H_\delta (0 < r < R \leq \infty)$ в $H_{\delta'}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $r (0 < r < R < \infty)$ существовало такое число $M(r) > 0$, чтобы при любых $-r \leq U, V \leq r$ имело место неравенство:

$$|F(U_1) - F(U_2)| \leq M(r) |U - V|^{\frac{\delta'}{\delta}}, \quad (5)$$

где

$$0 < \delta < 1, 0 < \delta' < 1.$$

Доказательство достаточности. Пусть имеет место (5) и $U(x) \in S_r$. Покажем, что оператор FU действует из S_r с H_δ в $H_{\delta'}$ и ограничен.

Из неравенства (5) получим:

$$\begin{aligned} |F[U(s)]| &\leq M(r) |U(s)|^{\frac{\delta'}{\delta}} + |F(0)| \leq M(r) r^{\frac{\delta'}{\delta}} + |F(0)|, \\ |F[U(s + \Delta s) - F[U(s)]]| &\leq M(r) |U(s + \Delta s) - U(s)|^{\frac{\delta'}{\delta}} < \\ &< M(r) r^{\frac{\delta'}{\delta}} |\Delta s|^{\frac{\delta'}{\delta}}. \end{aligned}$$

Из этих двух неравенств вытекает, что $F[U(s)] \in H_{\delta'}$. Остается показать ограниченность оператора F при отображении S_r с H_δ в $H_{\delta'}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|FU\|_{H_{\delta'}} &\leq \max \left\{ M(r) \|U\|_{H_\delta}^{\frac{\delta'}{\delta}} + |F(0)|, M(r) r^{\frac{\delta'}{\delta}} \|U\|_{H_\delta} \right\} \leq \\ &\leq M(r) \|U\|_{H_\delta}^{\frac{\delta'}{\delta}} + M(r) r^{\frac{\delta'}{\delta}} \|U\|_{H_\delta} + |F(0)|. \end{aligned}$$

Доказательство необходимости. Пусть при некотором $r_0 (0 < r_0 < R \leq \infty)$ условие (5) нарушается. Тогда существуют такие последовательности $\{U_n\}, \{V_n\}$ из $[-r_0, r_0]$, что выполняется неравенство:

$$|F(U_n) - F(V_n)| \geq n |U_n - V_n|^{\frac{\delta'}{\delta}}. \quad (6)$$

Не нарушая общности, положим $V_n > U_n$.

Предел последовательности $\{U_n\}$ обозначим через U_0 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U_0.$$

В силу теоремы 1

$$\max |F(U)| = B < \infty, \quad -r_0 \leq U \leq r_0$$

Исходя из (6), имеем:

$$\begin{aligned} |V_n - U_0| &\leq |V_n - U_n| + |U_n - U_0| \leq \frac{|F(V_n) - F(U_n)|^{\frac{\delta}{\delta'}}}{n^{\frac{\delta}{\delta'}}} + \\ &+ |U_n - U_0| \leq \frac{(2B)^{\frac{\delta}{\delta'}}}{n^{\frac{\delta}{\delta'}}} + |U_n - U_0|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = U_0.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_n(x) = U_n + \frac{\delta_0}{(b-a)^{\delta}} (x-a)^{\delta}, \quad \delta_0 > 0, (n = 1, \overline{\infty}).$$

Очевидно,

$$\|\varphi_n\|_{H_\delta} \leq |U_n| + \delta_0 + \frac{\delta_0}{(b-a)^{\delta}}.$$

По условию $|U_n| \leq r_0 < \infty$. Тогда, полагая

$$0 < \delta_0 \leq \frac{(r' - r_0)(b - a)^{\delta}}{(b - a)^{\delta} + 1}, \quad (r_0 < r' < R),$$

будем иметь:

$$\|\varphi_n(x)\|_{H_{\delta}} \leq r' < R.$$

Выше мы показали, что последовательность $\{V_n\}$ стремится к тому же пределу, что и последовательность $\{U_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U_0.$$

Тогда, не нарушая общности, можно положить

$$U_n + \delta_0 > v_n.$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi_n(a) = U_n, \quad \varphi_n(b) = U_n + \delta_0, \quad U_n + \delta > V_n > U_n.$$

Так как функция $U_n(x)$ непрерывна, то существует $x_n \in (a, b)$ такая, что

$$\varphi_n(x_n) = V_n.$$

Введем обозначение

$$W_n(x) = F[\varphi_n(x)].$$

Принимая во внимание (6), оценим норму:

$$\begin{aligned} \|W_n(x)\|_{H_{\delta'}} &\geq \frac{|W_n(x_n) - W_n(a)|}{|x_n - a|^{\delta'}} = \frac{|F[\varphi_n(x_n)] - F[\varphi_n(a)]|}{|x_n - a|^{\delta'}} = \\ &= \frac{n \left\{ \frac{\delta_0}{(b-a)^{\delta}} |x_n - a|^{\delta} \right\}^{\frac{\delta'}{\delta}}}{|x_n - a|^{\delta'}} = \frac{n \delta_0^{\frac{\delta'}{\delta}}}{(b-a)^{\delta'}}. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что при $\{\varphi_n(x)\} \subset S_r \subset H_{\delta}$ ($0 < r' < R \leq +\infty$)

$$\|F[\varphi_n(x)]\|_{H_{\delta'}} \geq \frac{\delta_0^{\frac{\delta'}{\delta}}}{(b-a)^{\delta'}} n,$$

что противоречит ограниченности оператора FU при отображении $S_r \subset H_{\delta}$ в $H_{\delta'}$.

При $R = +\infty$ имеем:

Следствие 1. Для того, чтобы оператор F действовал ограниченно из H_{δ} в $H_{\delta'}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $r > 0$ существовало такое число $M(r) > 0$, при котором $-r \leq U, V \leq r$ имело бы место неравенство (5).

Замечание 2. В условиях следствия 1 при $\delta' > \delta$ $F(U) = \text{const}$.

Следствие 2. Если оператор F действует ограниченно из любого шара $S_r \subset H_{\delta}$ ($0 < r < R \leq \infty$) в $H_{\delta'}$, то F действует из любого шара $S_r \subset H_{\delta}$, ($0 < r < R \leq +\infty$), $0 < \delta_1 < 1$) в $H_{\delta, \delta'}$ и ограничен.

2°. Пусть $g(x) \in H_{\delta}$, $\|g\|_{H_{\delta}} = r_1 < R$, $0 < r_1 < r_2 < R$.

Пользуясь результатами пункта 1°, установим некоторые свойства оператора

$$BU = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)F[U(s)]}{s - x} ds; \quad (7)$$

причем оператор FU ограниченно действует из любого шара $S_r \subset H_{\delta}$ ($0 < r < R \leq \infty$) в H_{δ} .

Оператор BU можно представить в следующем виде:

$$BU = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)\{F[U(s)] - F(0)\}}{s - x} ds + \lambda \int_a^b \frac{K(x, s)F(0)}{s - x} ds. \quad (8)$$

Обозначим

$$V(s) = F[U(s)] - F(0).$$

Так как оператор FU удовлетворяет условиям теоремы 2, то для $V(s)$ имеем:

$$\begin{aligned} |V(s)| &\leq M(r_2) |U(s)|, \\ |V(s + \Delta s) - V(s)| &\leq M(r_2) |U(s + \Delta s) - U(s)|. \end{aligned}$$

Или

$$|V(s)| \leq M(r_2)r_2, \quad (9)$$

$$|V(s + \Delta s) - V(s)| \leq M(r_2)r_2 |\Delta s|^{\delta}. \quad (10)$$

Пусть $K(x, s)$ и $U(s)$ удовлетворяют условиям:

$$K(a, a) = K(b, b) = 0, \quad (a)$$

$$|K(x, s) - K(x_1, s_1)| \leq A(|x - x_1|^{\delta_1} + |s - s_1|^{\delta}), \quad (b)$$

$$|U(x)| \leq K, \quad |U(s + \Delta s) - U(s)| \leq K|\Delta s|^{\delta}.$$

Тогда в силу леммы 2 из работы [5] функция

$$\phi(x) = \int_a^b \frac{K(x, s)U(s)}{s - x} ds$$

удовлетворяет условиям:

$$|\phi(x)| \leq LK, \quad (11)$$

$$|\phi(x + \Delta x) - \phi(x)| \leq LK |\Delta x|^{\delta}, \quad (12)$$

где $L = \text{const}$, не зависящая от K , $0 < \delta < \delta_1 < 1$.

Принимая во внимание (8), (10) аналогично (11), имеем:

$$|B_1 V| = |\lambda| \left| \int_a^b \frac{K(x, s)V(s)ds}{s - x} \right| \leq |\lambda| LM(r_2)r_2. \quad (13)$$

Для второго интеграла, стоящего в правой части (8), справедливо неравенство:

$$|B_2(x)| = |\lambda| \left| \int_a^b \frac{K(x, s)F(0)}{s - x} ds \right| \leq |\lambda| LA |F(0)|. \quad (14)$$

По условию $\|g\|_{H_{\delta}} = r_1$. Тогда в силу (13) и (14) из (8) получаем:

$$\begin{aligned} \|W(x)\|_{H_{\delta}} &= \|BU + g(x)\|_{H_{\delta}} = \|B_1 U + B_2(x) + g(x)\|_{H_{\delta}} \leq \\ &\leq L|\lambda| (M(r_2)r_2 + A|F(0)|) + r_1. \end{aligned} \quad (15)$$

При

$$|\lambda| < \frac{r_2 - r_1}{L(M(r_2)r_2 + A|F(0)|)} \quad (16)$$

имеем

$$\|W(x)\|_{H_{\delta}} < r_2. \quad (17)$$

Таким образом, мы показали, что оператор

$$\tilde{A}U = BU + g(x)$$

отображает $S_{r_2} \subset H_{\delta}$ в себя.

Если $K(x, s)$ и $F(U)$ удовлетворяют вышеуказанным условиям и функции $U(x), V(x) \in S_r \subset H_0$, то, пользуясь работой [5], легко получить неравенство:

$$\|\tilde{A}U - \tilde{A}V\|_{L_p} \leq |\lambda| \{A M(r_2) R_1 + A[(b-a)^{\delta_1} + (b-a)^{\delta_2} M(r_2) R_2]\|U - V\|_{L_p},$$

где

$$R_1 = \left\{ \int_a^B |s-x|^{q(\delta_2-1)} ds \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < q < q_0, \\ 0 < q_0(1-\delta_1) < 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

R_2 — норма линейного сингулярного интегрального оператора в смысле L_p .

Так как S_{r_2} замкнута в метрике L_p и сходимость в S_{r_2} в смысле L_p влечет за собой равномерную сходимость [1], то, пользуясь принципом сжатых отображений, получаем теорему.

Теорема 3. Если оператор F действует ограниченно из любого шара $S_r \subset H_0 (0 < r < R < \infty)$ в H_0 , $\|g\|_{H_0} = r_1 < R$ и $K(x, s)$ удовлетворяет условиям (а), (б), то при

$$|\lambda| < \min \left\{ \frac{r_2 - r_1}{L[M(r_2)r_2 + A|F(0)|]}, \frac{1}{A\{m(r_2)R_1 + [(b-a)^{\delta_1} + (b-a)^{\delta_2} M(r_2)R_2]\}} \right\}$$

уравнение (2) имеет единственное решение в $S_{r_2} \subset H_0$, где $0 < r_1 < r_2 < R < \infty$. Последовательные приближения сходятся равномерно, если за начальное приближение взять произвольную функцию $\varphi(x) \in S_r \subset H_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаев А. А. О характере сходимости последовательных приближений для нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. и хим. наук, 1961, № 1.
2. Бабаев А. А. О структуре одного нелинейного оператора и его приложения. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. и хим. наук, 1961, № 4.
3. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостоптехиздат, 1956.
4. Вайнберг М. М., Ширагин И. В. Оператор Немыцкого в обобщенных пространствах Орлича. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, т. 77, вып. 5, 1958.
5. Гусейнов А. И. и Мухтаров Х. Ш. Теорема существования ограниченного решения для нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.
6. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостоптехиздат, 1956.

Э. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров

Бир гејри-хатти операторун структурасы вэ Коши нүвэли сингулјар тэнликлэр үчүн мөһдуд һәллин варлығы һаггында теоремләр

ХУЛАСӘ

$Fu = F[u(s)]$ операторунун H_0 фәзасындан H_0 фәзасына мөһдуд тәһсир етмәси үчүн зәрури вэ кафи шәрт мөһјјән едилір. F операторунун бу хассәсиндән истифадә едәрәк

$$Bu = \lambda \int_a^B \frac{\kappa(x, s) F[u(s)]}{s-x} ds,$$

оператору үчүн бәзи теоремләр исбат едилір. Нәһәјәт,

$$u(x) = Bu + g(x), \quad g(x) \in H_0$$

тәнлијинин мөһдуд һәллинин варлығы вэ јеканәлији дә тәдгиг едил-
миндир.

З. Г. КЕРИМОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В БУРИЛЬНЫХ ТРУБАХ ПРИ СПУСКЕ БУРИЛЬНОГО ИНСТРУМЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКИМ И МЕХАНИЧЕСКИМ ТОРМОЗОМ БУРОВОЙ ЛЕБЕДКИ

В работе [2] приведена диаграмма изменения тормозного момента в зависимости от угла поворота подъемного барабана буровой лебедки и показано, что в период включения гидротормоза тормозной момент достигает максимально допустимой величины.

Из изложенного следует, что максимальное усилие в талевом канате и в буровой колонне возникает в период включения гидротормоза. Поэтому для определения усилий, действующих на буровую колонну, мы рассматриваем период включения гидротормоза.

На рис. 1 схематично показаны элементы системы спуска: 1 — подъемный барабан с массой m_1 , приведенный к центру подъемного крюка, на него действует тормозное усилие, равное [2]

$$S_T = \kappa U_1, \quad (1)$$

где κ — коэффициент пропорциональности,

U_1 — перемещение приведенной массы m_1 ,

2 — талевый канат с жесткостью C_K ,

3 — подвижные элементы талевого механизма с приведенной массой m_2 и весом P_2 ,

4 — колонна буровых труб длиной l , весом погонного метра q и поперечным сечением F .

Дифференциальные уравнения движения отдельных элементов системы спуска будут иметь вид:

1. Для массы m_1 :

$$m_1 \frac{d^2 U_1}{dt^2} = C_K (U_2 - U_1) - \kappa U_1; \quad (2)$$

$$U_1(0) = 0; \quad \left. \frac{dU_1}{dt} \right|_{t=0} = v.$$

2. Для массы m_2 :

$$m_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} = P_2 + EF \left. \frac{\partial U_3}{\partial x} \right|_{x=0} - C_K (U_2 - U_1); \quad (3)$$

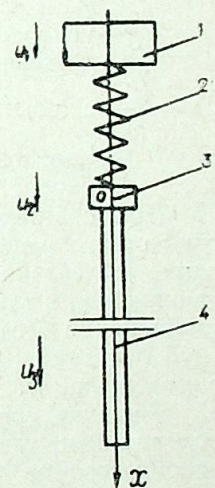


Рис. 1

З. Г. КЕРИМОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В БУРИЛЬНЫХ ТРУБАХ ПРИ СПУСКЕ БУРИЛЬНОГО ИНСТРУМЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКИМ И МЕХАНИЧЕСКИМ ТОРМОЗОМ БУРОВОЙ ЛЕБЕДКИ

В работе [2] приведена диаграмма изменения тормозного момента в зависимости от угла поворота подъемного барабана буровой лебедки и показано, что в период включения гидротормоза тормозной момент достигает максимально допустимой величины.

Из изложенного следует, что максимальное усилие в талевом канате и в бурильной колонне возникает в период включения гидротормоза. Поэтому для определения усилий, действующих на бурильную колонну, мы рассматриваем период включения гидротормоза.

На рис. 1 схематично показаны элементы системы спуска: 1 — подъемный барабан с массой m_1 , приведенный к центру подъемного крюка, на него действует тормозное усилие, равное [2]

$$S_T = k U_1, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности,

U_1 — перемещение приведенной массы m_1 ,

2 — талевой канат с жесткостью C_k ,

3 — подвижные элементы талевого механизма с приведенной массой m_2 и весом P_2 ,

4 — колонна бурильных труб длиной l , весом погонного метра q и поперечным сечением F .

Дифференциальные уравнения движения отдельных элементов системы спуска будут иметь вид:

1. Для массы m_1 :

$$m_1 \frac{d^2 U_1}{dt^2} = C_k (U_2 - U_1) - k U_1; \quad (2)$$

$$U_1(0) = 0; \quad \left. \frac{dU_1}{dt} \right|_{t=0} = v.$$

2. Для массы m_2 :

$$m_2 \frac{d^2 U_2}{dt^2} = P_2 + EF \left. \frac{\partial U_3}{\partial x} \right|_{x=0} - C_k (U_2 - U_1); \quad (3)$$

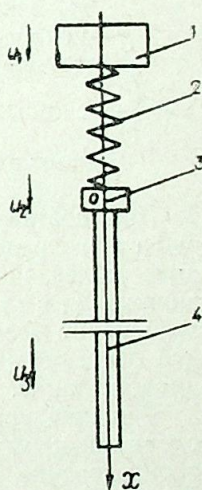


Рис. 1

$$U_2(0) = \frac{(g-w)(ql+P_2)}{g C_k}; \quad \left. \frac{dU_2}{dt} \right|_1 = v.$$

3. Для колонны буровых труб

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + g \quad (4)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$U_3(x;0) = \frac{(g-w)\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{a^2} + \frac{(g-w)(ql+P_2)}{g C_k}; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial U_3(x;t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v; \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial U_3(x;t)}{\partial x} \right|_{x=1} = 0. \quad (7)$$

Верхним граничным условием для $U_3(x;t)$ является (3), так как $U_2(t) = U_3(0;t)$.

В (2), (3), (4), (5), (6) и (7) приняты следующие обозначения:

U_2 — полное перемещение массы m_2 ,

U_3 — полное перемещение поперечного сечения труб при спуске,

t — время,

E — модуль Юнга материала труб,

x — координата рассмотренного сечения труб относительно массы m_2 при недеформированном состоянии системы,

g — ускорение свободного падения,

w — ускорение труб в момент включения гидротормоза,

$a^2 = \frac{E}{\rho}$ — скорость распространения звука в трубах,

ρ — плотность материала труб,

v — скорость спуска труб в момент включения тормоза.

При составлении уравнения (4) принято: а) колонна буровых труб строго вертикальная; б) влиянием сопротивления среды на затухание колебания пренебрегают, но в дальнейшем, при определении напряжений в элементах системы, вводится коэффициент, учитывающий уменьшение веса труб при погружении в глинистый раствор и трение труб о стенки скважины; в) трение в талевой системе учитывается при определении w .

Решение уравнения (4) с указанными начальными и граничными условиями произведен методами операционного исчисления. Применяя преобразование Карсона-Хевисайда, получаем следующее выражение для изображения $U_3(x;p)$:

$$\begin{aligned} \bar{U}_3(x;p) = & \frac{(g-w)\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{a^2} + \frac{(g-w)(ql+P_2)}{g C_k} + \frac{v}{p} + \frac{w}{p^2} + \\ & + \left\{ \frac{P_2 - m_2 w}{C_k} - \frac{m_1 w}{C_k + \kappa + m_1 p^2} - \frac{\kappa}{C_k + \kappa + m_1 p^2} \left[\frac{v}{p} + \frac{w}{p^2} + \frac{(g-w)(ql+P_2)}{g C_k} \right] - \right. \\ & \left. \left(\frac{m_2 p^2}{C_k} + \frac{\kappa + m_1 p^2}{C_k + \kappa + m_1 p^2} + \frac{pEF}{a C_k} \operatorname{th} \frac{pl}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{pl}{a} \right\} \operatorname{ch} \frac{p}{a} (l-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{m_1 p^2 (ql+P_2)(g-w)}{g C_k (C_k + \kappa + m_1 p^2)} \left\{ \operatorname{ch} \frac{p}{a} (l-x) \right. \\ & \left. \left(\frac{m_2 p^2}{C_k} + \frac{\kappa + m_1 p^2}{C_k + \kappa + m_1 p^2} + \frac{pEF}{a C_k} \operatorname{th} \frac{pl}{a} \right) \operatorname{ch} \frac{pl}{a} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Нами получен оригинал $\bar{U}_3(x;p)$ из (8), но ввиду ограниченности объема статьи это выражение не приводится. Ниже рассматривается частный случай, а именно: при большой длине буровой колонны упругостью каната и весом P_2 можно пренебречь [1].

Тогда выражение $\bar{U}_3(x;p)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_3(x;p) = & \frac{(g-w)\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{a^2} + \frac{v}{p} + \frac{w}{p^2} - \\ & - \frac{\left[mw + k \left(\frac{w}{p^2} + \frac{v}{p} \right) \right] \operatorname{ch} \frac{p}{a} (l-x)}{(mp^2 + k) \operatorname{ch} \frac{pl}{a} + \frac{pEF}{a} \operatorname{sh} \frac{pl}{a}} \end{aligned} \quad (9)$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем:

$$\begin{aligned} U_3(x;t) = & - \frac{wl^2}{\beta a^2} + \frac{2wl^2}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \frac{\gamma_n at}{l}}{N_n \gamma_n} + \\ & + \frac{2\beta wl^2}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \cos \frac{\gamma_n at}{l}\right)}{N_n \gamma_n^3} + \\ & + \frac{2\beta wl}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{\gamma_n at}{e}}{N_n \gamma_n^2} + \frac{(g-w)\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{a^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\beta = \frac{kl^2}{ma^2}$; $\mu = \frac{EF l}{ma^2}$; $m = m_1 + m_2$,

$$N_n = (\mu + 2) \gamma_n \cos \gamma_n + (\beta + \mu - \gamma_n^2) \sin \gamma_n.$$

Здесь γ_n являются положительными корнями уравнения:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\beta}{\gamma} - \gamma \right). \quad (11)$$

Напряжение в любом сечении труб определяется по закону Гука:

$$\begin{aligned} \sigma(x;t) = & E \frac{\partial U_3(x;t)}{\partial x} = \frac{(g-w)(l-x)E}{a^2} + \\ & + \frac{2wlE}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \gamma_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cos \frac{\gamma_n at}{e}}{N_n} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\beta \omega l E}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin v_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \cos \frac{v_n at}{e}\right)}{v_n^2 N_n} +$$

$$+ \frac{2\beta v E}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin v_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin \frac{v_n at}{e}}{v_n N_n}. \quad (12)$$

В верхнем сечении, т. е. при $x=0$:

$$\sigma(0; t) = \frac{(g - \omega) l E}{a^2} + \frac{2 \omega l E}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin v_n \cos \frac{v_n at}{e}}{N_n} +$$

$$+ \frac{2\beta \omega l E}{a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin v_n \left(1 - \cos \frac{v_n at}{e}\right)}{v_n^2 N_n} + \frac{2\beta v E}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin v_n \cdot \sin \frac{v_n at}{e}}{v_n N_n}. \quad (13)$$

Следовательно, пользуясь формулой (13), можно определить напряжение в верхнем сечении колонны бурильных труб в период включения гидротормоза.

Чтобы дать оценку влияния упругого продольного колебания на изменение напряжения в бурильных трубах, решим поставленную задачу, пренебрегая упругостью труб. При этом дифференциальное уравнение движения ходового конца каната будет иметь вид:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_{ст} - M_T \quad (14)$$

с начальными условиями: $\varphi(0)=0$; $\dot{\varphi}(0)=\omega = \frac{v}{R_6 k_n}$.

Здесь $M_T = \kappa_1 \varphi$; $I = m_{пр} R_6^2$; $M_{ст} = P_{тр} R_6 \varepsilon$; $\varepsilon = \frac{\eta^{k_n} (1 - \eta)}{1 - \eta^{k_n}}$,

где $m_{пр}$ — масса всех движущихся элементов системы спуска, приведенная к ходовому концу талевого каната, φ — угол поворота барабана, ε — коэффициент, учитывающий кратность полиспаста (k_n) и трение (η) в талевой системе.

Решая уравнение (14), получаем:

$$\varphi = \frac{\omega}{\alpha} \sin \alpha t - \frac{M_{ст}}{\kappa_1} \cos \alpha t + \frac{M_{ст}}{\kappa_1}, \quad (15)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{\kappa_1}{I}}$.

Ускорение колонны бурильных труб будет определяться из выражения:

$$\omega = \frac{M_{ст} R_6}{I \kappa_n} - \frac{\kappa_1 R_6}{I \kappa_n} \varphi = \frac{M_{ст} R_6}{I \kappa_n} \cos \alpha t - \frac{\omega \kappa_1 R_6}{\alpha I \kappa_n} \sin \alpha t. \quad (16)$$

В момент включения тормоза $\omega = \frac{M_{ст} R_6}{I \kappa_n}$.

Усилие в верхнем сечении колонны бурильных труб будет

$$Q = P_{тр} - m_{тр} \omega. \quad (17)$$

Учитывая (16) и (17), получаем:

$$Q = P_{тр} + \frac{\omega \kappa_1 R_6 m_{тр}}{I \alpha \kappa_n} \sin \alpha t - \frac{M_{ст} R_6 m_{тр}}{I \kappa_n} \cos \alpha t. \quad (18)$$

Напряжение в верхнем сечении колонны бурильных труб будет

$$\sigma = \frac{Q}{F} = \frac{P_{тр}}{F} + \frac{\omega \kappa_1 R_6 m_{тр}}{\alpha I \kappa_n F} \sin \alpha t - \frac{M_{ст} R_6 m_{тр}}{I \kappa_n F} \cos \alpha t. \quad (19)$$

введя коэффициент ξ , учитывающий уменьшение веса бурильных труб при погружении их в глинистый раствор и трении о стенки скважины. получим:

$$\sigma_1 = \xi \sigma. \quad (20)$$

Произведем численный расчет для случая: $l=5000$ м; $F=43$ см²;

$$q = 33,75 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}}; E = 2 \cdot 10^6 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}; \kappa_n = 10; \xi = 0,75; m = 36000 \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{сек}^2}{\text{м}};$$

$$m_{тр} = 17202 \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}; m_{тр} = \frac{m + m_{тр}}{\kappa_n^2} = 532,02 \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}; a = 5000 \text{ м/сек};$$

$$v = 3 \frac{\text{м}}{\text{сек}}; \omega = 2,996 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}; \kappa = \frac{\kappa_1 \kappa_n}{R_6^2 \varepsilon} = \frac{50 \cdot 10}{0,443^2 \cdot 0,0945} = 27000 \frac{\kappa\Gamma}{\text{м}}.$$

Кривые изменения напряжения, подсчитанные по формулам (13) и (19), с учетом ξ приведены на рис. 2: кривая a получена по формуле (13), а b — по формуле (19); пунктирной линией c показано напряжение в сечении бурильных труб от статической нагрузки с учетом коэффициента ξ .

Кривые a и b характеризуют изменение напряжения в бурильных трубах в первый период торможения бурильной колонны, т. е. в период включения гидротормоза.

По этим кривым видно, что в течение первых четырех секунд торможения максимальные значения напряжений, подсчитанные по формулам (13) и (19), мало отличаются друг от друга, но запаздывание между ними составляет примерно 2 сек.

В отдельные моменты торможения, например, при $t=2$ сек разность между σ_a и σ_b составляет:

$$\Delta \sigma = \sigma_a - \sigma_b = 4090,47 - 3388,07 = 702,4 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2};$$

при $t=4$ сек

$$\Delta \sigma = \sigma_a - \sigma_b = 3124,4 - 4001,1 = -876,7 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}.$$

Отсюда следует, что ошибка при расчете по формуле (19) колеблется в пределах от +23,8 до -29,7%, от статического напряжения, которое равно $2943,3 \frac{\kappa\Gamma}{\text{см}^2}$. Только в одной точке (d) результаты, полученные по формулам (13) и (19), совпадают.

Следовательно, неучет упругого продольного колебания бурильных труб приводит к ошибке в расчетах и требует своего учета.

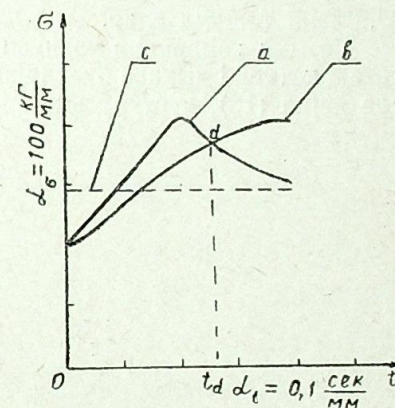


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонянц Л. Е. «Нефть и газ». 1959. № 11.
2. Шахмалиев Г. М., Грузинов Я. А., Коган Р. Н. АНХ. 1963. № 3.

3. Һ. Кәримов

Газыма аләтини бучургадын гидравлик вә механики
тормозларыҗа ендирдикдә газыма боруларында јаранан
кәркинликләрин тәјин олунмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Гидравлик тормозу ишә салма мүддәтиндә ендирилән газыма кәмә-
риндә јаранан кәркинликләр газыма кәмәринин узунуна рәгсләрин
бир һалда нәзәрә алмагла, дикәр һалда исә нәзәрә алмадан тәјин еди-
лир.

Ејни газыма кәмәри үчүн һәр ики һалда апарылан һесабатын нә-
тичәси 2-чи шәкилдә көстәрилмишдир. а әјриси биринчи һалы в әјриси
исә икинчи һалы характеризә едир.

Әкәр тормозлама мүддәти 2 санијә оларса, газыма кәмәринин уз-
нуна рәгсләрини нәзәрә алмадыгда апарылан һесабатын нәтичәси
 $702,4 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ аз олур ки, бу да бахылан һал үчүн статик кәрхинлијин
23,8%-ни тәшкил едир.

Газыма кәмәринин узунуна рәгсләринин нәзәрә алынмамасы бөјүк
хәтаја кәтириб чыхара биләчәјини нәзәрә алараг, һесабаты (19) дүстуру
илә дејил (13), дүстуру илә апармаг лазымдыр.

1963-чү ИЛДӘ «АЗӘРБАЈҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН
ХӘБӘРЛӘРИ» ЖУРНАЛЫНДА (ФИЗИКА-РИЈАЗИЈАТ ВӘ
ТЕХНИКА ЕЛМЛӘРИ СЕРИЈАСЫ) ДӘРҖ ЕДИЛМИШ
МӘГАЛӘЛӘРИН КӨСТӘРИЧИСИ

- Аббасов А. Ә. Фырланан вә тәрпәнмәјән коаксил цилиндрләр арасында өзлү-
пластик мајеләрин гәрарлашмамыш һәрәкәти һаггында, № 4, сәһ. 95.
- Абдуллајев Һ. Б. вә б. Дојма чәрәјанлы селен фотоелементләри, № 3, сәһ. 77.
- Абдуллајев Һ. Б., Нани Р. Х., Нәсиров Ј. Н. Уңгат јарымкечиричи бир-
ләшмәләрин физики хәссәләринин тәдгиги, № 6, сәһ. 75.
- Абдуллајев А. А. Јарымкечиричи чиназларын истилик характеристикалары
һаггында, № 6, сәһ. 59.
- Ағајев Һ. Н., Чәфәрли Г. М. Бир мултипликатив ортонормал функцијалар
системи һаггында, № 2, сәһ. 27.
- Ағаларов Ч. Һ. Өзлү-хејри хәтти-еластики далғаларын чубугларда јайылмасы,
№ 6, сәһ. 17.
- Асланов И. А. Күнәшин фырланма сүр'әтинә едилән дүзәлишләр, № 2, сәһ. 81.
- Ахундова Г. В., Әлијев А. А., Зәјналов С. К., Гасымов С. Г. Улдуз
хәјалы титрәмәси амплитудунун зенит мәсафәсиндән асылылығы, № 1, сәһ. 95.
- Ахундова Г. В. вә б. Ики мәнтәгәнин астроиғлим характеристикаларынын мұ-
јисәси, № 2, сәһ. 91.
- Ахундзаде М. Ј., Тағыјев И. Һ. Ихтијари азгабарығлы өртүкләрин мувази-
нәт тәликләринин јени тәгриби үсулла һәлли, № 4, сәһ. 127.
- Ахундов Г. Ә., Искәндәрзаде З. Ә., Чәфәров Е. Ә. Силисум диодла-
ры түтүмүнүн тәдгиги, № 5, сәһ. 95.
- Бағыров Х. Һ. Банах фәзасында Гурса мәсәләси һаггында, № 1, сәһ. 15.
- Бағыров М. Ә. вә б. Нефт лајларына термини тә'сиретмә просесинә фәсиләләр
һава вурманын тә'сири, № 3, сәһ. 109.
- Баркинхојев Х. Г., Әлијев Г. М. Тәмизлији мұхтәлиф олан селенин бәрк
вә маје һалында електрик хәссәләринә даир, № 3, сәһ. 95.
- Баркинхојев Х. Г., Әскәров Ч. М., Әлијев Г. М. Чивә ашгарларынын
селенин електрик хәссәләринә тә'сири, № 6, сәһ. 65.
- Бәкиров М. Ј., Гасымов Р. Б. Сүн'и р-п кечидли селен фотоелементләриндә
релаксација просесләринин арашдырылмасы, № 5, сәһ. 69.
- Ваһабов Р. М. Дәјишән мәсамәли җрунтларда филтрәсијанын радиометрик
үсулла тәдгиги, № 3, сәһ. 133.
- Вәкилов Ш. И. Бучаг хәтти олан облаstda еллиптик тәвлијә махсус Дирихле
мәсәләсинин һәлли, № 6, сәһ. 11.
- Вәлијев М. И., Кәримов И. Г., Әлијев Г. М., Әлијев М. И. Селенин
истиликкечирмәсинә кристаллашманын тә'сири, № 4, сәһ. 33.
- Ғалустјан С. Б. Гринин үмумиләшмиш функцијасы кәмәји илә дәјишән кәсик-
ли чубуғун енинә махсус рәгсләринин бир мәсәләсинин һәлли һаггында, № 5, сәһ. 3.
- Гасымов Р. Ј., Тимофејев Б. Б. Електрон рәғәмһесаблајычы машиналары
(ЕРһМ) васитәсилә симли веричиләрин тәзлијинин өлчүлмәсиндә мәркәзләшдирилмиш
нәзарәт васитәсилә хәталарын вә мә'луматларын ишләнилмәси мәсәләси, № 4, сәһ. 21.
- Гасымов Г. М. Еллиптик тәликләр үчүн хәтти сәрһәд мәсәләләри һаггында,
№ 6, сәһ. 45.
- Ғулијев Ј. Ә. Системин електрик стансијаларынын аз сулу илләрдә режими,
№ 4, сәһ. 53.
- Ғәдиров Н. Б., Исмајылзаде Ш. М. Истилик дәјишмә апаратларынын
јохлама һесабатынын графоаналитик методу, № 2, сәһ. 103.
- Ғәдиров Н. Г., Јусифова А. Д., Нәбибов А. Б. Бә'зи нормал шәкилли
маје алканларын рvт мұнасибәтләринин график анализи, № 4, сәһ. 85.
- Ғәдиров Н. Г. Тамамланмыш Браун диаграмы, № 5, сәһ. 119.
- Ғолубјева В. А. Сабит әмсаллы хусуси төрәмәли дифференциал тәлијин функ-
сионал һәлләринин махсусијәтләри, № 1, сәһ. 65.
- Домшлак Ј. И. Банах фәзасында тејри-мәһдуд сабит операторлу хәтти диффе-
ренциал тәлијин бә'зи хусусијәтләринә даир, № 1, сәһ. 44.

Эзимов С. М. Тутулан-дәјишән гоша улдузлар системиндә В вә А спектрал тип-
ли улдузларын сәһ температурунун спектrophотометрик үсулла тә'јини, № 1, сәһ. 89.
Әлијева Т. Ч., Хәлилов Ә. Х. Бә'зи фәаллашдырычы вә гејри-фәаллашды-
рычы ашгарларын KCl—монокристалларында F—мәркәзләрин әмәлә кәлмәси вә ләғв
едилмәсинә тә'сир, № 3, сәһ. 85.
Әлијев Н. Ш. Ох тә'сирләндиричи илә рекуперасија режиминин рекуперасија
характеристикаларыны һесабама методу, № 3, сәһ. 103.
Әлијев Е. Д. Дибдә истигамәтвечи астаналы, сүјүн истигамәтинин кәсән бир-
кәзлү гурғунун ашағы бјефиндә ахымын гидравлики режими, № 5, сәһ. 125.
Әлијев Т. А. Универсал рәгәмһесаблајычы машинларда статистик мәсәләләр
һәлли үчүн шафин функцияларын дахил едилмәсинә даир, № 6, сәһ. 33.
Әскәров Т. М. Азәрбајҗан ССР Халг Тәһрируфаты Шурасы системиндә мадди-
техники тәһизат мәсәләсинин «Урал-1» электрон рәгәмһесаблајычы машинында һәлли,
№ 3, сәһ. 51.
Әфәндијев В. С. Икитакты газодизел мұһәррикинә күчүн мигдарла тәңзим,
№ 2, сәһ. 65.
Әфәндизадә А. Ә., Листенгартен Б. А. Гејри-симметрик кәркинликдә
сәсләнән асинхрон электрик интегралынын статик характеристикалары, № 5, сәһ. 103.
Әһмәдов Т. Г. Тејлор-Дирихле сырасы һаггында, № 5, сәһ. 15.
Иманов Л. М., Мирзәјев Ф. Н. Сиркә туршусу вә онун бензолда мөһлулу-
нун диелектрик хассәләри, № 4, сәһ. 37.
Иманов Л. М., Әбдүррәһманов А. А. CD_3CH_2OH молекулунын микродал-
гадакы спектри, № 6, сәһ. 71.
Једуш В. Ј. Һәрәкәт едән гыса гапанмыш сарғылы вә бүтөв магнит кечиричили
индуктив чевирчи, № 3, сәһ. 121.
Кажлајева Р. И., Гулијев Ә. А. Күкүрдүн поликристал теллур диффузи-
јасы, № 1, сәһ. 137.
Казымов А. Ш. Икичәкили мајенин ајрылма сәрһәддиндә капилјар сычрајыш
тәзјигинин тә'јини, № 4, сәһ. 121.
Казымов А. Ш. В. П. Пилатовскинин мәсәләләринин үмумиләшдирилмәси,
№ 5, сәһ. 11.
Кәримбәјов М. Б., Һашымзадә М. У. Улдуз сајрышмаларынын өјрәнил-
мәсинә даир, № 2, сәһ. 61.
Кәримов З. Н. Газыма боруларында динамик кәркинлијин тә'јин олунмасы һаг-
гында, № 2, сәһ. 125.
Кәримов З. Н. Газыма әләтинин бучургадын гидравлик вә механики тормозла-
рыјла ендирдикдә газыма боруларында јаранан кәркинликләрин тә'јин олунмасы һаг-
гында, № 6, сәһ. 108.
Климанов Т. М. Унитар јарымевклид фәзалары, № 3, сәһ. 21.
Кубесов А. Нәсирәддин Түсидә иноринитезимал метод, № 4, сәһ. 147.
Лабскер Л. Г. Дәфәләрлә үмумиләшмиш дифференциалланан функцияларын
хәтти оператор илә јахынлашмасынын асимптотик мә'насы, № 1, сәһ. 29.
Лунтс Г. Ј. Ландау-Прингсхейм теоремин һаггында, № 1, сәһ. 73.
Маһмудов Ј. А., Атамов Ф. А., Бәдәлов Т. А. Әдәлләри әллә рәгәмһе-
саблајычы машина дахил етмәк вә онлары автоматик олараг онлуг сај системиндән
икилик сај системинә чевирмәк үчүн гургу, № 3, сәһ. 59.
Мәммәдов Р. Н. Функцијаларын хәтти мүсбәт операторлар аиләси васитәсилә
јахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гүјмәти һаггында бә'зи үмуми нәтичәләр,
№ 1, сәһ. 3.
Мәммәдханов Ч. И. Комплекс дәјишәнли рационал функциялар вә полинол-
лар үчүн бә'зи бәрабәрсизликләр, № 1, сәһ. 55.
Мәммәдов И. А. Листин јайылмасынын симметрик олмајан бир мәсәләси,
№ 2, сәһ. 71.
Мәммәдов Р. Н. Сонсуз (∞) областы үзәриндә тә'јин олунуш функциялар
синифләри һаггында, № 3, сәһ. 3.
Мәммәдов Б. Н. Торвары габыгларын гидростатик тәзјиг алтында статик һе-
сабланмасы, № 5, сәһ. 133.
Мәммәдов М. Г. Јарымкечиричиләрдә дешмәнин формалашмасы вахты,
№ 5, сәһ. 79.
Мәммәдов М. Ә. 321 №-ли Florentina планети орбити елементләринин дүзәлиши,
№ 6, сәһ. 85.
Мәммәдов Ч. Ә. Суашыран габагында едилән дәјишмәнин сәрф әмсалына тә'-
сири, № 6, сәһ. 85.
Минасјан Р. С. Мүрәккәб призматик брус күчү илә әјинти, № 2, сәһ. 113.
Мирзәјан А. А. Борунун башлангыч һиссәсиндә өзлү-пластик мајенин һәрәкә-
тина даир, № 4, сәһ. 65.
Мухтаров Н. А. F_2De-CD_2F молекулунын микродалгадакы спектри, № 5, сәһ. 59.
Намазов Г. К. Кәсилән әмсаллы параболлик тәңликләр үчүн бир сәрһәд мәсәләси
һаггында, № 2, сәһ. 3.
Нәсиров Т. Профилактика вә тә'мир заманы хидмәт едилмәси, № 6, сәһ. 39.

Новрузов Ә. Ә. Адамар вә Фрагмен-Линделјоф типли теоремләр, № 2, сәһ. 37.
Пашајев А. М., Иглитсин М. И., Воронков В. В. Јүксәк тезликләрдә
Si-ун хусуси мұгавимәтинин өлчүлмәсинә даир, № 3, сәһ. 139.
Пашајев А. М., Иглитсин М. И., Шунјајев. Јүксәк тезликләрдә сили-
сийумун хусуси мұгавимәтинин контактсыз үсулла өлчүлмәи, № 5, сәһ. 55.
Пучкова Л. В. Јарымеллиптик фәзаларда Френе дүстурлары, № 4, сәһ. 59.
Рәһманов П. Ә. Енинә зәрбә заманы мұгавимәтли мұһитдә еластики мембранын
һәрәкәтинин тәдиги, № 3, сәһ. 41.
Рәһманов П. Ә. Мұгавимәтли мұһитдә еластики телә енинә зәрбә мәсәләсинин
һәлли һаггында, № 4, сәһ. 3.
Рүстәмов М. И. Сүрүшмә сүртүнмәсиндә јејилмә давамына үстәритмә үсулла-
рынын тә'сири, № 5, сәһ. 143.
Садыхов Ф. С. Электронун тормозланма шүаланмасы вә чүтүн әмәлә кәлмәси
просеялариндә һиссәликләрин полјаризасија хассәләринә нүвәнин сонлу өлчүләринин
тә'сири, № 2, сәһ. 55.
Сејидов Ј. М., Һүсејнов Н. Г. $CuCl_2 \cdot 2H_2O$ бирләшмәсиндә спин далғала-
рынын спектри вә магнит нүфузлулуғу, № 5, сәһ. 75.
Сәбзијев Н. М. Үмумиләшмиш Лебег фәзасында периодик функцияларын три-
гонометрик чохәдлиләрдә јахынлашмасы, № 3, сәһ. 31.
Сәмәдзадә Ш. А. Суварма системләринин идәрәетмә мәрһәләләри, № 5, сәһ. 111.
Сүләјманов Н. М. Үмумиләшмиш функциялар синфиндә јарым мүстәви үзә-
риндә оператор тәңликләр үчүн коррект сәрһәд мәсәләләри һаггында, № 1, сәһ. 21.
Таһиров В. И., Гулијев Ә. А. Тантал вә таллумла ашгарлашмыш монокрис-
тал керманимум электриккечирмәсинин тәдиги, № 5, сәһ. 63.
Хәлилов Ә. Х., Салајев Е. Ј. Бә'зи фосфорларын электрон рекомбинасијалы
ишығ вермәсиндә иштирак едән зәбтәтмә мәркәзләринин тәдиги, № 1, сәһ. 127.
Хәлилов Т. А., Данилов Н. Ј. Бир актив дифференциаллајычы манганын
өтүрмә функциясынын чыхарылышы, № 3, сәһ. 117.
Хәлилов Ә. Х., Исәјев Ф. К. Бә'зи гарышығ әсаслы гәләви-һалокен кри-
сталлофосфорларында әсас анионларынын тутма мәркәзләринә тә'сиринин тәдиги,
№ 4, сәһ. 135.
Хәлилов Ә. Х., Салајев Е. Г. Гәләви торпаг металлларын ионлары дахил
олан KCl—Ag фосфорларында фәаллашдырычы зәбтәтмә мәркәзләринин тәдиги,
№ 5, сәһ. 85.
Хәлилов Ә. Х., Мәммәдов Ә. П. Бә'зи иквалентли ашгарларын $NaCl+Ag$
монокристалларында тутма мәркәзләринә тә'сиринин тәдиги, № 6, сәһ. 75.
Һашымзадә Ф. М. TeSe типли јарымкечиричиләрдә сәрбәст дашыјычаларда
Фарадәј һадисәси, № 1, сәһ. 133.
Һачыјев Л. М. Сүзүлмәнин ики режими илә газын гујуја гејри-стационар мүс-
тәви радионал ахыны, № 1, сәһ. 113.
Һачыјев А. Ч. Бир синиф сингулар интеграллары јығылмасынын сүр'әти һаг-
гында, № 6, сәһ. 27.
Һашымзадә Ф. М. Халкопирит типли дөшикли јарымкечиричиләрин енержи
спектри, № 3, сәһ. 67.
Һәмидов А. Ә. Функција вә онун истигамәтә кәрә төрәмәсинин ејни заманда
јахынлашдырылмасы һаггында, № 4, сәһ. 13.
Һәшимов Н. М. Дирихле сырасы үчүн јекәнәлик теорем. № 5, сәһ. 25.
Һәсәнова Н. А. β Cu_2S -ин бә'зи хассәләри һаггында, № 3, сәһ. 91.
Һәсәнов Г. Т. Сыхылмајан өзлү мајенин гәрарлашмамыш һәрәкәтинә даир бир
мәсәләнин һәлли, № 4, сәһ. 75.
Һүсејнов Н. Г. NiF_2 —гурулушлу кристалларын магнит хассәләри хусусијәтлә-
ринә даир, № 2, сәһ. 49.
Һүсејнов Н. Ч. Јарымкечиричиләрин электриккечирмә, холл ефекти вә теормо-
һесинин автоматик јазылышына даир, № 5, сәһ. 51.
Һүсејнов Н. П., Гәмбәров Н. С. Гејри-бирчинс еластики лајда сыхылан
мајенин гәрарлашмамыш мүстәви-радиал һәрәкәти, № 4, сәһ. 105.
Һүсејнов Ә. И. вә Мухтаров Х. Ш. Бир гејри-хәтти операторун структурасы
вә коши нүвәли сингулар тәңликләр үчүн мөһдуд һәллиин варлығы һаггында теоремләр,
№ 6, сәһ. 99.
Чавадов М. Ј. Јүксәк тәртиб төрәмәдә кичик параметри олан гиперболик тип
тәңлији үчүн коши мәсәләси, № 6, сәһ. 3.
Чәлилов Г. Н., Чәфәров Н. Ч. Кечирмәјән сәрһәдди лајда бәрабәрдебитли
гујуларын дүзхәтли батарејасынын сулашмасынын динамикасы, № 1, сәһ. 123.
Чәфәров Ә. С. L—р, φ фәзасынын нормасы үчүн дахилолма теоремләри,
№ 1, сәһ. 81.
Чәфәров Ә. С. Еспоненциал типли там функция үчүн мүхтәлиф чәкили норма-
лар арасында бәрабәрсизликләр, № 2, сәһ. 17.
Шәмијев Ф. Н. Минимум чәкили һалгашәкилли лөвһәләр лајһә етмәк һаггында,
№ 3, сәһ. 13.
Шәмијев Ф. Н. Минимум чәкили өртүкләр лајһә етмәк һаггында, № 5, сәһ. 37.

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В «ИЗВЕСТИЯХ, СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК» ЗА 1963 г.

- Аббасов А. А. О нестационарном движении вязко-пластичной жидкости между вращающимися и неподвижными коаксиальными цилиндрами, № 4, стр. 99.
Абдуллаев Г. Б. и др. Селеновые фотоэлементы с током насыщения, № 3, стр. 77.
Абдуллаев А. А. Влияние температуры на тепловое сопротивление Р-п перехода, № 6, стр. 59.
Абдуллаев Г. Б., Нани Р. Х., Насиров Я. Н. Исследование физических свойств тройных полупроводниковых соединений, № 6, стр. 75.
Агаев Г. Н., Джафарли Г. М. Об одном классе мультипликативных ортонормированных систем функций, № 2, стр. 27.
Агаларов Д. Г. Распространение вязко-нелинейно-упругих волн в стержнях, № 6, стр. 17.
Азизов С. М. Определение поверхностных температур звезд спектрального типа В и А в затемненных двойных системах спектрофотометрическим методом, № 1, стр. 89.
Алиева Т. Д., Халилов А. Х. Исследование влияния некоторых активизирующих и неактивизирующих примесей на образование и распад центров захвата в монокристаллах KCl, № 3, стр. 85.
Алиев Г. Ш. Метод расчета рекуперативных характеристик при рекуперации с осевым возбудителем, № 3, стр. 103.
Алиев Э. Д. Гидравлический режим потока в нижнем бьефе однопролетного перегораживающего сооружения с данными направляющими порогами, № 5, стр. 125.
Алиев Т. А. К вводу графических данных в универсальные цифровые машины для решения статических задач, № 6, стр. 33.
Аскеров Т. М. Решение одной задачи материально-технического снабжения в системе СНХ Азербайджанской ССР на ЭЦВМ «Урал-1», № 3, стр. 51.
Асланов И. А. Редукция к скорости вращения солнца, № 2, стр. 81.
Ахмедов Т. К. О рядах типа Тейлора-Дирихле, № 5, стр. 15.
Ахундова Г. В., Алиев А. А., Зейналов С. К., Касумов С. Г. О зависимости амплитуды дрожания изображения звезд от зенитного расстояния, № 1, стр. 95.
Ахундова Г. В. и др. Сравнение астроклиматических характеристик двух пунктов, № 2, стр. 91.
Ахундзаде М. Ю., Тагиев И. Г. Новый приближенный метод решения уравнений равновесия произвольных пологих оболочек, № 4, стр. 127.
Ахундов Г. А., Джафарова Э. А., Искендерзаде З. А. Исследование емкости кремниевых диодов, № 5, стр. 95.
Багиров Х. Г. О задаче гурса в пространстве Банаха, № 1, стр. 15.
Багиров М. А. и др. Влияние перерывов в подаче воздуха на ход процессов термического воздействия на нефтеносный пласт, № 3, стр. 109.
Бакиров М. Я., Гасумов Р. Б. Исследование процессов релаксации в селеновых фотоэлементах с искусственными р-п переходами, № 5, стр. 69.
Баркинхоев Х. Г., Алиев Г. М. Об электрических свойствах селена различной чистоты в твердой и жидкой фазах, № 3, стр. 95.
Баркинхоев Х. Г., Аскеров Ч. М., Алиев Г. М. Влияние примеси ртути на электрические свойства селена, № 6, стр. 65.
Вагабов Р. М. Исследование фильтраций в грунтах переменной проницаемости радиометрическим методом, № 3, стр. 133.
Векилов Ш. И. Применение теории потенциала к решению задач Дирихле для эллиптического уравнения в области с угловыми линиями, № 6, стр. 11.
Велиев М. И., Керимов И. Г., Алиев Г. М., Алиев М. И. Влияние кристаллизации на теплопроводность селена, № 4, стр. 33.
Гаджиев Л. М. Нестационарный плоскорадиальный приток газа к скважине при существовании двух режимов фильтрации, № 1, стр. 113.
Гаджиев А. Д. О скорости сходимости одного класса сингулярных интегралов, № 6, стр. 27.
Голубева В. А. Особенности фундаментальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, II, № 1, стр. 65.
Галустян С. Б. Решение одной задачи о собственных поперечных колебаниях стержня переменного сечения с помощью функций Грина, № 5, стр. 3.

- Гамидов А. А. Об одновременной аппроксимации функций и их производных по направлению в многомерном евклидовом пространстве, № 4, стр. 13.
Гасанова Н. А. О некоторых свойствах — Cu_2S , № 3, стр. 91.
Гасанов Г. Т. Решение одной задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости, № 4, стр. 75.
Гасумов Г. М. О некоторых линейных граничных задачах для эллиптических уравнений, № 6, стр. 43.
Гашимзаде Ф. М. Эффект Фарадея на свободных носителях в полупроводниковом соединении TiSe, № 1, стр. 133.
Гашимзаде Ф. М. Энергетический спектр дырок в полупроводниках со структурной халькопирита, № 3, стр. 67.
Гашимов Г. М. Теорема единственности для рядов Дирихле, № 5, стр. 25.
Гулиев Ю. Э. Режимы электростанций системы в маловодные годы, № 4, стр. 53.
Гусейнов Н. Г. Об особенностях в магнитных свойствах кристаллов со структурой типа NiF_2 , № 2, стр. 49.
Гусейнов Г. П., Камбаров Г. С. Не установившееся плоско-радиальное движение сжимаемой жидкости в упругом неоднородном пласте, № 4, стр. 105.
Гусейнов Г. Д. Об автоматической записи электропроводности, эффекта Холла и термо-ЭДС полупроводников, № 5, стр. 51.
Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш. О структуре одного нелинейного оператора и теоремы существования ограниченного решения для нелинейных сингулярных уравнений с ядром Коши, № 6, стр. 99.
Домшак Ю. И. О некоторых свойствах линейного дифференциального уравнения с неограниченным постоянным оператором в Банаховом пространстве, № 1, стр. 44.
Джафаров А. С. Теоремы вложения в нормах пространства $L - p\varphi$, № 1, стр. 81.
Джалилов К. Н., Джафаров Н. Д. О динамике обводнения прямо-линейной батареи равнодебитных скважин при наличии непроницаемой границы, № 1, стр. 123.
Джафаров А. С. Неравенства между различными весовыми нормами для целых функций экспоненциального типа, № 2, стр. 17.
Джавадов М. Г. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных, № 6, стр. 3.
Едуш В. Я. Индуктивный преобразователь с подвижным коротко замкнутым ветком и сплошным магнитопроводом, № 3, стр. 121.
Иманов Л. М., Мирзоев Ф. Г. Диэлектрические свойства уксусной кислоты и ее растворов в бензоле, № 4, стр. 37.
Иманов Л. М., Абдурахманов А. А. Микроволновый спектр молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$, № 6, стр. 71.
Кадиров Н. Б., Исмаилзаде Ш. М. Графо-аналитический метод поверочного расчета теплообменных аппаратов, № 2, стр. 103.
Кадымов Я. Б., Джуварлы Ч. М., Абдурахманов М. И., Кулиев З. Я. Численный метод расчета переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами без учета потерь, № 4, стр. 45.
Кадыров Н. К., Юсифова А. Д., Габиев А. Б. Графический анализ prg соотношений некоторых жидких алканов нормального строения, № 4, стр. 85.
Кадыров Н. К. Дополненный график Брауна, № 5, стр. 119.
Кажлаева Р. И., Кулиев А. А. Диффузия серы в поликристаллическом теллуре, № 1, стр. 137.
Казымов А. Ш. Определение капиллярного скачка давления на границе раздела двух вязких жидкостей по наблюдаемым значениям скорости перемещения, № 4, стр. 121.
Казымов А. Ш. Обобщение задачи В. П. Пилатовского, № 5, стр. 125.
Касумов Р. Я., Тимофеев Б. Б. Вопросы погрешностей и обработки информации при измерении частоты струнных датчиков в системах централизованного контроля с ЭЦВМ, № 4, стр. 21.
Керимбеков М. Б., Гашимзаде М. У. К изучению мерцания звезд, № 2, стр. 61.
Керимов З. Г. Об определении динамических напряжений в бурильных трубах, № 2, стр. 125.
Керимов З. Г. Об определении напряжений, возникающих в бурильных трубах при спуске бурильного инструмента гидравлическим и механическим тормозом буровой лебедки, № 6, стр. 107.
Климанова Т. М. Унитарные полуэллиптические пространства, № 3, стр. 21.
Кубесов А. Инфинитезимальные методы у Насиреддина Туси, № 4, стр. 147.
Лабскер Л. Г. Асимптотическое значение приближения многократнообобщенно дифференцируемых функций линейными операторами, № 1, стр. 29.
Луиц Г. Л. О теореме Ландау-Прингсхайма, № 1, стр. 73.
Мамедов Р. Г. Некоторые общие результаты об асимптотическом значении и о порядке приближения функций семейством линейных положительных операторов, № 1, стр. 3.

- Мамедханов Д. И. Некоторые неравенства для рациональных функций и многочленов комплексного переменного, № 1, стр. 55.
- Мамедов И. А. Одна из задач несимметричной прокатки полосы, № 2, стр. 74.
- Мамедов Р. Г. О некоторых классах функций определенных на $-\infty \infty$, № 3, стр. 3.
- Мамедов М. Г. Время формирования пробоя в полупроводниках, № 5, стр. 79.
- Мамедов Б. Н. Статистический расчет торообразной оболочки под гидростатическим давлением, № 5, стр. 133.
- Мамедов М. А. Улучшение элементов орбиты планеты (321) Florentina, № 6, стр. 85.
- Мамедов Д. А. Влияние условий подхода потока к водосливу на коэффициент расхода, № 6, стр. 89.
- Махмудов Ю. А., Атамов Ф. А., Бадалов Т. А. Устройство ручного ввода чисел в ЦВМ с автоматическим преобразованием их из десятичной системы счисления в двоичную, № 3, стр. 59.
- Минасян Р. С. Косой изгиб силой составного призматического бруса, № 2, стр. 113.
- Мирзоян А. А. О движении вязко-пластичной жидкости в начальном участке трубы, № 4, стр. 65.
- Мухтаров И. А. Микроволновый спектр молекулы F_2DC-CD_2F , № 5, стр. 59.
- Намазов Г. К. Об одной краевой задаче для параболического уравнения с разрывными коэффициентами, № 2, стр. 3.
- Насиров Т. Обслуживание при наличии профилактических и восстанавливающих установок, № 6, стр. 39.
- Новрузов А. А. Теоремы типа Адамара и Фрагменна-Ленделефа, № 2, стр. 37.
- Пашаев А. М., Иглицын М. И., Воронков В. В. К методике измерения удельного сопротивления кремниевых слитков на высокой частоте, № 3, стр. 139.
- Пашаев А. М., Иглицын М. И., Шуняев В. Г. Измерение удельного сопротивления кремния бесконтактным методом на высокой частоте, № 5, стр. 55.
- Рахманов П. А. Исследование поперечного удара по гибкой мембране, находящейся в сопротивляющейся среде, № 3, стр. 41.
- Рахманов П. А. О решении задачи поперечного удара по нити, которая находится в сопротивляющейся среде, № 4, стр. 3.
- Рустамов М. И. Влияние способов наплавки на износостойкость при трении скольжения, № 5, стр. 143.
- Пучкова Л. В. Формулы Френс в полуэллиптических пространствах, № 4, стр. 59.
- Сабзиев Н. М. Приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в обобщенном пространстве Лебега, № 3, стр. 31.
- Садыхов Ф. С. О влиянии конечных размеров ядра на поляризации частиц при тормозном излучении электрона и образовании пар, № 2, стр. 55.
- Самедзаде Ш. А. Этапы управления оросительных систем, № 5, стр. 111.
- Сеидов Ю. М., Гусейнов Н. Г. О спектре волн и магнитной восприимчивости соединения $CuCl_2 \cdot 2H_2O$, № 5, стр. 75.
- Сулейманов Н. М. О корректных краевых задачах для операторных уравнений в полупространстве в классе (абстрактных) обобщенных функций, № 1, стр. 21.
- Тагиров В. И. и Кулиев А. А. Электропроводность монокристаллов германия, легированного танталом и таллием, № 5, стр. 63.
- Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Исследование центров захвата, проявляющихся в электронном рекомбинационном свечении некоторых KCl — фосфоров, № 1, стр. 127.
- Халилов Т. А., Данилов Н. Е. Вывод передаточной функции одного активно-го дифференцирующего звена, № 3, стр. 117.
- Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Исследование влияния анионов оснований на центры захвата некоторых щелочно-голоидных кристаллофосфоров со смешанной основой, № 4, стр. 135.
- Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. Исследование активаторных центров захвата в KCl + Ag фосфорах, содержащих ионы щелочно-земельных элементов, № 5, стр. 85.
- Халилов А. Х., Мамедов А. П. Исследование влияния двухвалентных примесей на центры захвата в NaCl—Ag фосфорах, № 6, стр. 79.
- Шарифов К. А., Гаджиев С. Н., Гарибов И. М. Энтальпия образования арсенида индия, № 2, стр. 53.
- Шамиев Ф. Г. О проектировании кольцевых пластинок минимального веса, № 3, стр. 13.
- Шамиев Ф. Г. О проектировании оболочек минимального веса, № 5, стр. 37.
- Эфендиев В. С. Исследование количественного регулирования мощности в двух-тактном газодизеле, № 2, стр. 65.
- Эфендизаде А. А., Листенгартен Б. А. Статистические характеристики асинхронного электропривода при питании несимметричным напряжением, № 5, стр. 103.

МУНДЭРИЧАТ

- М. Н. Чавадов. Јуксак тәртиб төрәмәдә кичик параметри олан гиперболик тип тәңлији үчүн Коши мәсәләси 8
- Ш. И. Вәкилов. Бучаг хәтти олан областда еллиптик тәңлијә мәхсус Дирихле мәсәләсинин һәлли 11
- Ч. Н. Ағаларов. Өзлү-хәјри хәтти-еластики далғаларын чубугларда јайлмасы 17
- А. Ч. Начыјев. Бир синиф сингулјар интегралларын јығылмасынын сүр'әти һаггында 27
- Г. М. Гасымов. Еллиптик тәңликләр үчүн хәтти сәрһәд мәсәләләри һаггында 33
- Т. А. Әлијев. Универсал рәғәмһесаблајычы машиналарда статистик мәсәләләрин һәлли үчүн график функцијаларын дахил едилмәсинә даир 47
- Т. Нәсирова. Профилактика вә тәмир заманы хидмәт едилмәси 53
- Ч. Х. Әмирханова, Р. И. Бәширов. Индуум вә галлиум антимонидләриндә фонн чәзб етмәи 59
- А. А. Абдуллајев. Јарымкечиричи чиһазларын истилик характеристикалары һаггында 67
- Х. Г. Баркинхојев, Ч. М. Әскәров, Г. М. Әлијев. Чивә ашгарларынын селенин електрик хәсәләринә тә'сир 73
- Л. М. Иманов, А. А. Әбдүррәһманов. CD_3CH_2OH молекулунун микродалғадакы спектри 79
- Һ. Б. Абдуллајев, Р. Х. Нани, Ј. Н. Нәсиров. Үчгәт јарымкечиричи бирләшмәләрин физики хәсәләринин тәдгиги 83
- Ә. Х. Хәлилов, Ә. П. Мәммәдов. Бә'зи икивалентли ашгарларын $NaCl+Ag$ монокристалларында тутма мәркәзләринә тә'сиринин тәдгиги 87
- М. Ә. Мәммәдов. 321 №-ли Florentina планети орбити елементләринин дүзәлиши 93
- Ч. Ә. Мәммәдов. Суашыранын габагында едилән дәјишмәнин сәрф әмсалына тә'сир 104
- Ә. И. Нүсәјнов, Х. Ш. Мухтаров. Бир гејри-хәтти операторун структурасы вә Коши нүвәли сингулјар тәңликләр үчүн мәһдуд һәлли варлығы һаггында теоремләр 107
- З. Н. Қәримов. Газыма әләтини бучургадын гидравлик вә механики тормозларыјла ендирдикдә газыма боруларында јаранан кәркинликләрин тәјин олунмасы һаггында 115

СОДЕРЖАНИЕ

М. Г. Джавадов. Задача Коши для гиперболического уравнения с малым параметром пристарших производных	3
Ш. И. Векилов. Применение теории потенциала к решению задач Дирихле для эллиптического уравнения в области с угловыми линиями	11
Д. Г. Агаларов. Распространение вязко-нелинейно-упругих волн в стержнях	17
А. Д. Гаджиев. О скорости сходимости одного класса сингулярных интегралов	27
Г. М. Гасумов. О некоторых линейных граничных задачах для эллиптических уравнений	33
Т. А. Алиев. К вводу графических данных в универсальные цифровые машины для решения статистических задач	47
Т. Насирова. Обслуживание при наличии профилактических и восстанавливающих установок	53
Д. Х. Амирханова и Р. И. Баширов. Фоонное увлечение в антимонодах индия и галлия	59
А. А. Абдулаев. Влияние температуры на тепловое сопротивление p - n перехода	67
Х. Г. Баркинхоёв, Ч. М. Аскеров, Г. М. Алиев. Влияние примеси ртути на электрические свойства селена	73
Л. М. Иманов, А. А. Абдурахманов. Микроволновый спектр молекулы $\text{CD}_3\text{CH}_2\text{OH}$	79
Г. Б. Абдуллаев, Р. Х. Нани, Я. Н. Насиров. Исследование физических свойств тройных полупроводниковых соединений	83
А. Х. Халилов, А. П. Мамедов. Исследование влияния двухвалентных примесей на центры захвата в $\text{NaCl}-\text{Ag}$ фосфорах	87
М. А. Мамедов. Улучшение элементов орбиты планеты (321) Florentina	93
Д. А. Мамедов. Влияние условий подхода потока к водосливу на коэффициент расхода	97
А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров. О структуре одного нелинейного оператора и теоремы существования ограниченного решения для нелинейных сингулярных уравнений с ядром Коши	107
З. Г. Керимов. Об определении напряжений, возникающих в бурильных трубах при спуске бурильного инструмента гидравлическим и механическим тормозом буровой лебедки	115