

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

4

1963

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ-БАКУ

П. А. РАХМАНОВ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ПО НИТИ, КОТОРАЯ НАХОДИТСЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Задача о распространении упруго-пластических волн в деформируемых нитях рассматривалась рядом авторов. Х. А. Рахматулин [3] исследовал задачу об ударе с постоянной скоростью по прямолинейной нити. Он предполагал, что вследствие удара в нити сначала распространяются продольные волны, уменьшающие толщину нити, а затем распространяется поперечная ударная волна, мгновенно изменяющая форму нити. Уравнения задачи получаются из теоремы о сохранении количества движения и некоторых геометрических данных. В следующей работе [4] Рахматулин, пользуясь классическими уравнениями плоского движения нити, получил для этой задачи то же решение, что и в предшествующей статье. Оказалось, что форму нити в каждый момент времени можно представить с помощью отрезков прямой.

В настоящей работе рассматривается распространение упруго-пластических волн в нитях, движущихся в сопротивляющейся среде, когда сила сопротивления зависит от скорости частиц нити произвольного порядка.

§ 1. Уравнения движения

Постановка и решение задачи о точечном ударе по гибкой деформируемой нити бесконечной длины для случая движения ударяемого тела с переменной скоростью, когда сила сопротивления среды зависит от скорости частиц второго порядка, даны в работах [1, 2].

В рассматриваемом случае уравнения движения и граничные условия имеют вид [1, 2]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \theta) + A_2 y^n (1 + \varepsilon) \cos (\alpha + \theta), \quad (1, 1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial s_0} (T \sin \theta) - A_2 y^n (1 + \varepsilon) \sin (\alpha + \theta). \quad (1, 2)$$

Граничные условия:

1) в точке удара

$$x = 0; \quad y = y_0 = \int_0^t v_0(t) dt; \quad (1, 3)$$

п42503
Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
Академии наук Бирманской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

$$A_1 \frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} T_0 \sin \theta_0, \quad \text{где } \left(A_1 = \frac{m}{2F_0 \rho_0 n} \right); \quad (1, 4)$$

2) на волне сильного разрыва

$$\frac{dx^*}{dt} = u + (1 + \varepsilon) b^* = (1 + \varepsilon^*) \cos \theta^* b^*; \quad (1, 5)$$

$$y_1^* = (1 + \varepsilon^*) \sin \theta^* b^*; \quad (1, 6)$$

$$b^* = \frac{ds_0^*}{dt} = \sqrt{\frac{T^*}{\rho_0 (1 + \varepsilon^*)}}; \quad (1, 7)$$

$$u = - \int_0^{\varepsilon^*} a(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1, 8)$$

§ 2. Исследование и решение уравнения движения нити

Задаваясь ускорениями, как в работе [1], а именно полагая $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{dv_0}{dt}$, уравнения движения (1, 1) и (1, 2) приводим к следующему виду:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s_0} (T \cos \theta) + A y_1^n (1 + \varepsilon) \cos (\alpha + \theta) = 0; \quad (2, 1)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial s_0} (T \sin \theta) - A y_1^n (1 + \varepsilon) \sin (\alpha + \theta). \quad (2, 2)$$

Очевидно, что между деформациями и координатами частиц нити имеются следующие геометрические соотношения:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0} \right)^2} - 1; \quad (2, 3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s_0} = (1 + \varepsilon) \cos \theta; \quad (2, 4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s_0} = -(1 + \varepsilon) \sin \theta. \quad (2, 5)$$

Дифференцируя условия (1, 5), (1, 6), (1, 7) и соотношение (2, 5) по времени, получим:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + b^* \frac{d\varepsilon^*}{dt} + (1 + \varepsilon^*) \frac{db^*}{dt} &= b^* \cos \theta^* \frac{d\varepsilon^*}{dt} - (1 + \varepsilon^*) \sin \theta^* b^* \frac{d\theta^*}{dt} + \\ &+ (1 + \varepsilon^*) \cos \theta^* \frac{db^*}{dt}; \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = b^* \sin \theta^* \frac{d\varepsilon^*}{dt} + (1 + \varepsilon^*) b^* \cos \theta^* \frac{d\theta^*}{dt} + (1 + \varepsilon^*) \sin \theta^* \frac{db^*}{dt};$$

$$\frac{db^*}{dt} = \frac{a^2 - b^{*2}}{2(1 + \varepsilon^*) b^*} \frac{d\varepsilon^*}{dt};$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial s_0} = -\sin \theta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - (1 + \varepsilon) \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t}.$$

Кроме полученных соотношений, на волне сильного разрыва имеем следующие дифференциальные выражения:

$$\frac{dy_1^*}{dt} = \frac{\partial y_1^*}{\partial t} + \frac{\partial y_1^*}{\partial s_0^*} b^*;$$

$$\frac{d\theta^*}{dt} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{\partial \theta^*}{\partial s_0^*} b^*;$$

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial s_0^*} b^*.$$

После несложных преобразований полученные выражения можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left[2b^* (1 - \cos \theta^*) + \frac{a^2 - b^{*2}}{2b^*} (1 + \cos^2 \theta^* - 2 \cos \theta^*) \right] \frac{d\varepsilon^*}{dt} - 2 \cos \theta^* \frac{du}{dt} = \\ &= \sin \theta^* \frac{dv_0}{dt} + \sin^2 \theta^* b^{*2} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} \right)_{s_0=s_0^*} + (1 + \varepsilon^*) \sin \theta^* \cos \theta^* b^{*2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial s_0} \right)_{s_0=s_0^*}. \end{aligned} \quad (2, 6)$$

Уравнения движения (2, 1) и (2, 2) на касательной и нормали имеют следующий вид:

$$a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} = -\sin \theta \frac{dv_0}{dt} - A y_1^n (1 + \varepsilon) \cos \alpha; \quad (2, 7)$$

$$(1 + \varepsilon) b^2 \frac{\partial \theta}{\partial s_0} = -\cos \theta \frac{dv_0}{dt} - A y_1^n (1 + \varepsilon) \sin \alpha. \quad (2, 8)$$

Интегрируя уравнение (2, 2) от 0 до S_0^* и учитывая уравнение движения тела (1, 4), получим:

$$\frac{dv_0}{dt} = -\frac{(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \sin \theta^* + A z_0^2 (x^* \sin \alpha + y_0 \cos \alpha)}{A_1 + S_0^*}. \quad (2, 9)$$

Подставляя (2, 7), (2, 8) и (2, 9) в уравнение (2, 6), находим

$$\begin{aligned} &\left[2b^* (1 - \cos \theta^*) + \frac{a^2 - b^{*2}}{2b^*} (1 + \cos^2 \theta^* - 2 \cos \theta^*) + 2a \cos \theta^* \right] \frac{d\varepsilon^*}{dt} = \\ &= -\frac{a^2 - b^{*2}}{a^2} \sin^3 \theta^* \frac{(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \sin \theta^* + A z_0^2 (x^* \sin \alpha + y_0 \cos \alpha)}{A_1 + S_0^*} - \\ &- A y_1^n (1 + \varepsilon^*) \sin \theta^* \left(\frac{b^{*2}}{a^2} \sin \theta^* \cos \alpha + \cos \theta^* \sin \alpha \right). \end{aligned} \quad (2, 10)$$

Из полученного выражения следует, что ε^* убывает со временем при произвольном значении α .

Таким образом, поставленная задача в общем случае зависимости $T = T(\varepsilon)$ сводится к системе четырех обыкновенных уравнений первого порядка для определения функций x^* , S_0^* , v_0 , ε^* . Эти уравнения будут следующими: (1, 5), (1, 7), (2, 9), и (2, 10). Начальные условия определяются из условий на волне сильного разрыва при $t=0$.

Для определения напряжения в точке удара уравнения (2, 1) и (2, 2) интегрируем от 0 до S_0^* , учитывая при этом уравнение движе-

ния тела, получим:

$$T_0^2 = \frac{\rho_0^2 A_1^2}{(A_1 + S_0^*)^2} [(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \sin \theta^* + A \tau_0^n (x^* \sin \alpha + y_0 \cos \alpha)]^2 + \\ + \rho_0^2 [(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \cos \theta^* + A \tau_0^n (x^* \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)]^2. \quad (2, 11)$$

Угол наклона в точке удара определяется из следующего соотношения:

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{A_1}{A_1 + S_0^*} \cdot \frac{(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \sin \theta^* + A \tau_0^n (x^* \sin \alpha + y_0 \cos \alpha)}{(1 + \varepsilon^*) b^{*2} \cos \theta^* + A \tau_0^n (x^* \cos \alpha - y_0 \sin \alpha)}. \quad (2, 12)$$

§ 3. Исследование и решения в упругой области (малые деформации)

В рассматриваемом случае уравнения движения (2, 1) и (2, 2) принимают следующий вид:

$$a_0^2 \frac{\partial}{\partial s_0} (\varepsilon \cos \theta) + A y_t^n \cos (\alpha + \theta) = 0; \quad (3, 1)$$

$$\frac{d \tau_0}{dt} = -a_0^2 \frac{\partial}{\partial s_0} (\varepsilon \sin \theta) - A y_t^n \sin (\alpha + \theta), \quad (3, 2)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$.

Из условий на волне сильного разрыва находим:

$$\frac{dx^*}{dt} = a_0 \varepsilon^{*1/2} (1 - \varepsilon^{*1/2}); \quad (3, 3)$$

$$\frac{ds_0}{dt} = a_0 \varepsilon^{*1/2}; \quad (3, 4)$$

$$y_t^* = a_0 \sqrt{2} \varepsilon^{*3/4}; \quad (3, 5)$$

$$\cos \theta^* = 1 - \varepsilon^{*1/2}. \quad (3, 6)$$

Скорость деформации на волне сильного разрыва определяется из следующей формулы:

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{a_0} \varepsilon^{*3/4} \frac{d\tau_0}{dt} - A a_0^{n-1} 2^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{* \frac{3n+1}{4}} [\sqrt{2} \varepsilon^{*3/4} \cos \alpha + (1 - \varepsilon^{*1/2}) \sin \alpha]. \quad (3, 7)$$

Рассмотрим три частных случая наклона угла α :

1. $\alpha = 90^\circ$, когда сила сопротивления перпендикулярна к элементу нити (первый расчетный случай).
2. $\alpha = 90^\circ - \alpha$, когда сила сопротивления перпендикулярна к первоначальному положению нити (второй расчетный случай).
3. $\alpha = 0$, когда сила сопротивления касательна к элементу нити (третий расчетный случай).

Исследуем случай, когда $\alpha = 90^\circ$

Интегрируя уравнения (3, 2) и (2, 7) от 0 до S_0^* , получаем

$$\frac{d\tau_0}{dt} = - \frac{a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^* + A \tau_0^n x^*}{S_0^* + A_1}; \quad (3, 8)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon^* + \frac{y_0}{a_0^2} \frac{d\tau_0}{dt}. \quad (3, 9)$$

Из (3, 9) видно, что $\varepsilon_0 < \varepsilon^*$ и отсюда можно заключить, что ε_0 является невозрастающей функцией. Если рассмотреть удар с постоянной скоростью, то (3, 11) показывает, что $\varepsilon_0 = \varepsilon^*$. Значит ε_0 является убывающей функцией времени t . Здесь нужно заметить, что при $n=2$ получается результат, который совпадает с результатом, полученным в работе [1].

Так как деформация в точке удара убывает, практически этот случай не представляет интереса и для расчета достаточно рассмотреть задачу без сопротивляющейся среды.

Исследование и решение уравнения движения нити, когда $\alpha = 90^\circ - \theta$

В рассматриваемом случае уравнения (3, 1) и (2, 7) после интегрирования от 0 до S_0^* получают вид:

$$\frac{d\tau_0}{dt} = - \frac{a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^* + A \tau_0^n S_0^*}{A_1 + S_0^*}; \quad (3, 10)$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon^* + \frac{A A_1 \tau_0^n - a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^*}{a_0^2 (A_1 + S_0^*)} y_0. \quad (3, 11)$$

Подставляя (3, 10) в (3, 7), находим

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = - \frac{2a_0 \varepsilon^{*2} + \frac{\sqrt{2}}{a_0} A \tau_0^n S_0^* \varepsilon^{*3/4} + A a_0^{n-1} 2^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{* \frac{3n+1}{4}} (A_1 + S_0^*) (1 - 2\varepsilon^{*1/2})}{A_1 + S_0^*}.$$

Пренебрегаем малыми величинами, имеем

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = - A a_0^{n-1} 2^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{* \frac{3n+1}{4}}.$$

Интегрируя и учитывая, что $\varepsilon_{00} = \frac{\tau_{00}^{4/3}}{\sqrt[3]{4} a_0^{4/3}}$, находим

$$\varepsilon^* = \frac{4^{\frac{5-n}{3(n-1)}} \tau_{00}^{4/3}}{a^{4/3} [3(n-1) A \tau_{00}^{n-1} t + 4]^{1/3(n-1)}}. \quad (3, 12)$$

Нужно заметить, что при отсутствии сопротивления среды, т. е. при $A=0$, полученный результат совпадает с результатом Х. А. Рахматулина [3].

Таким образом, легко определяются все параметры на волне сильного разрыва и в точке удара, но при определении τ_0 нужно положить $\tau_0^n = \kappa y_t^{*n}$, где κ — постоянная величина, которая больше единицы.

Практически наиболее важен случай $n=2$.

Полагая в (3, 12) $n=2$ и подставляя в условия (3, 3) — (3, 6), получим:

$$\frac{ds_0}{dt} = \frac{2a_0^{1/3} \tau_{00}^{2/3}}{(3 A \tau_{00} t + 4)^{2/3}};$$

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{2a_0^{1/3} \tau_{00}^{2/3}}{(3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \left[1 - \frac{2\tau_{00}^{2/3}}{a_0^{2/3} (3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \right]; \quad (3, 13)$$

$$\cos \theta^* = 1 - \frac{2\tau_{00}^{2/3}}{a_0^{2/3} (3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}}; \quad y^* = \frac{4\tau_{00}}{3A \tau_{00} t + 4}; \quad (3, 14)$$

интегрируя (3, 13), находим:

$$S_0^* = \frac{2a_0^{1/3}}{A\tau_{00}^{1/3}} \left[(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - \sqrt[3]{4} \right];$$

$$x^* = \frac{2a_0^{1/3}}{A\tau_{00}^{1/3}} \left[(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - \sqrt[3]{4} \right] + \frac{2\tau_{00}^{1/3}}{Aa_0^{1/3}} \left[\frac{2}{(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3}} - \sqrt[3]{\frac{2}{4}} \right]. \quad (3, 15)$$

Таким образом, выражение (3, 10) приводится к следующему виду:

$$\frac{dv_0}{dt} = -8A \tau_{00}^2 \frac{(4\kappa + 1) (3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - 4\kappa \sqrt[3]{4}}{(3A \tau_{00} t + 4)^2 [2(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} + \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}. \quad (3, 16)$$

Интегрируя (3, 16), находим v_0 :

$$v_0 = v_{00} + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3A \tau_{00} t + 4} \right) - \beta \left[\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{4}{(3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \right] + \gamma \left[\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3}} \right] + \delta \ln \frac{2(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} + \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}}{\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}}, \quad (3, 17)$$

где

$$\alpha = \frac{32\sqrt[3]{4} \kappa \tau_{00}}{3(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})}; \quad \beta = \frac{4\tau_{00} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^2};$$

$$\gamma = \frac{16 \tau_{00} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^2}; \quad \delta = \frac{32 \tau_{00} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^4}.$$

Пренебрегая малыми величинами, находим

$$v_0 = v_{00} + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3A \tau_{00} t + 4} \right) - \beta \left[\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{(3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \right]. \quad (3, 18)$$

Подставляя (3, 17) в (1, 3) и интегрируя, будем иметь

$$y_0 = \int_0^t v_0(t) dt = \alpha_1 (3A \tau_{00} t + 4)^{2/3} + \beta_1 (3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - \gamma_1(t) \ln(3A \tau_{00} t + 4) + ct + \delta_1(t) \ln [2(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} + \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}] + c_1,$$

где

$$\alpha_1 = -\frac{16[(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})}; \quad \beta_1 = \frac{4[(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^2};$$

$$\gamma_1 = \frac{32\sqrt[3]{4} \cdot \kappa}{9A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})} + \frac{32[(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{9A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^4} (3A \tau_{00} t + 4);$$

8

$$\delta_1 = \frac{32[(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^4} \left[3A \tau_{00} t + 4 - \frac{(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^3}{8} \right];$$

$$c = v_{00} + \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{\gamma}{\sqrt[3]{4}} - \delta \ln \frac{\tau_{00}^{1/3} AA_1}{\sqrt[3]{4}};$$

$$c_1 = \frac{32\sqrt[3]{2} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^3} - \frac{4\sqrt[3]{4} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^2} +$$

$$+ \left[\frac{32\sqrt[3]{4} \kappa}{9A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})} + \frac{128[(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{9A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^4} \right] \ln 4 -$$

$$- \frac{32\sqrt[3]{2} [(4\kappa + 1) \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}]}{3A(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})} \left[4 - \frac{(\tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4})^3}{8} \right] \ln \tau_{00}^{1/3} AA_1.$$

Пренебрегая малыми величинами, получим

$$y_0 = ct - \frac{\alpha}{3A \tau_{00}} \ln \frac{3A \tau_{00} t + 4}{4} + \frac{\beta}{A \tau_{00}} [(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - \sqrt[3]{4}]. \quad (3, 19)$$

Подставляя (3, 19) в выражение (3, 11), имеем:

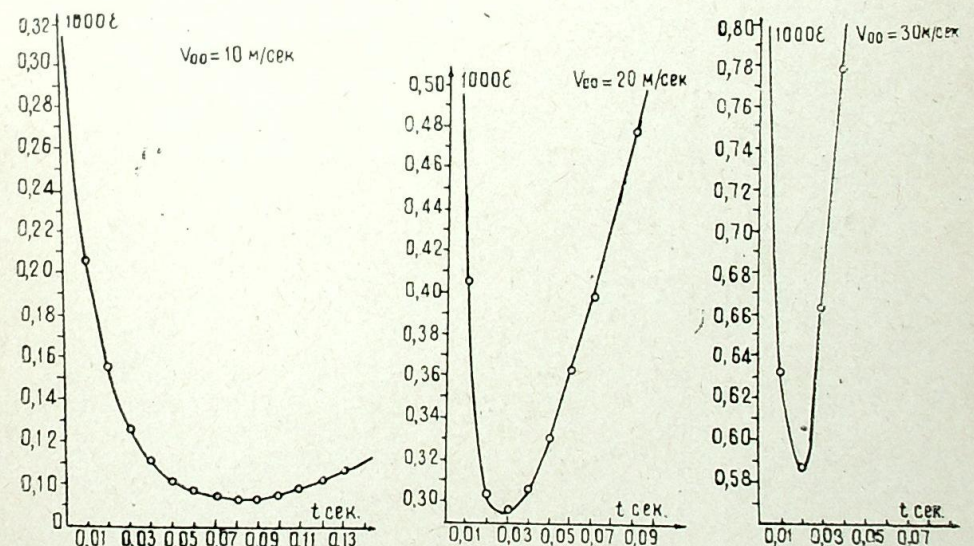
$$\varepsilon_0 = \frac{4 \tau_{00}^{1/3}}{(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3}} + \frac{A \tau_{00}^{1/3}}{a_0^2} \times$$

$$AA_1 \left\{ v_{00} + \alpha \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3A \tau_{00} t + 4} \right) - \beta \left[\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{(3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \right] \right\}^2 -$$

$$\times \frac{2(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} + \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}}{2(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} + \tau_{00}^{1/3} AA_1 - 2\sqrt[3]{4}} -$$

$$- 8a_0^2 \tau_{00}^{2/3} \frac{1}{(3A \tau_{00} t + 4)^{2/3}} \left\{ ct - \frac{\alpha}{3A \tau_{00}} \ln \frac{3A \tau_{00} t + 4}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta}{A \tau_{00}} [(3A \tau_{00} t + 4)^{1/3} - \sqrt[3]{4}] \right\}. \quad (3, 20)$$



На рис. 1 показано поведение функции ε_0 при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} v_{00} &= 10, 20, 30 \text{ м/сек}, & c &= 0,5, \\ a_0 &= 3000 \text{ м/сек}, & d &= 0,01 \text{ м}, \\ \rho_0 &= 600 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}, & n &= 5, \\ \rho_b &= 102 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}, & m &= 500 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}. \end{aligned}$$

Из рис. 1 видно, что ε_0 в начальный момент убывает, достигая минимума, а затем возрастает. Убывание ε_0 в начальный момент можно показать аналитическим.

Дифференцируя выражение (3, 11) по t , получим

$$\begin{aligned} a_0^2(S_0^* + A_1) \frac{d\varepsilon_0}{dt} &= -a_0^2 \varepsilon_0 \frac{ds_0^*}{dt} + a_0^2(S_0^* + A_1) \frac{d\varepsilon^*}{dt} + a_0^2 \varepsilon^* \frac{dS_0^*}{dt} + AA_1 v_0^3 + \\ &+ 2AA_1 v_0 y_0 \frac{dv_0}{dt} - a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^* v_0 - a_0^2 y_0 \sin \theta^* \frac{d\varepsilon^*}{dt} - a_0^2 \varepsilon^* y_0 \cos \theta^* \frac{d\theta^*}{dt}, \end{aligned}$$

при $t \rightarrow 0$ полученное выражение принимает следующий вид:

$$\left(\frac{d\varepsilon_0}{dt} \right)_{t=0} = -a_0 A \bar{v}_{00}^3 \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{\bar{v}_{00}^3}{\bar{v}_{00}^3} \right) - a_0 \frac{\bar{v}_{00}^3}{\sqrt{2}A_1}.$$

Отрицательный знак показывает, что ε_0 убывает при $t=0$.

Интересный случай представляет удар с постоянной скоростью. При этом уравнение (2, 7) после интегрирования принимает следующий вид:

$$a_0^2 \varepsilon_0 = a_0^2 \varepsilon^* + A \bar{v}_0^3 t. \quad (3, 21)$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \frac{d\varepsilon^*}{dt} + \frac{A \bar{v}_0^3}{a_0^2}.$$

Имея в виду уравнение для $\frac{d\varepsilon^*}{dt}$, полученное уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \sqrt{2} a_0 A (2 \varepsilon_{00}^{3/4} - \varepsilon^{3/4}). \quad (3, 22)$$

Отсюда видно, что ε_0 при $t=0$ убывает. Чтобы найти минимальную точку, продифференцируем (3, 22), затем, приравнявая выражение (3, 22) к нулю, находим

$$\varepsilon_{\min}^{3/4} = 2 \varepsilon_{00}^{3/4}; \quad \frac{d\varepsilon_0^2}{dt^2} > 0. \quad (3, 23)$$

Время достижения минимума ε_0 определяется следующей формулой:

$$t_{\min} = \frac{1}{3A \bar{v}_{00}} \left(\sqrt[7]{\frac{16^3}{\bar{v}_{00}^2}} - 4 \right).$$

Подставляя $t_{\min}$ в (3, 23), определим минимальное значение ε_0 :

$$(\varepsilon_0)_{\min} = \frac{\bar{v}_{00}^{12}}{7\sqrt{4}} + \frac{1}{3} \bar{v}_{00}^2 \sqrt[7]{\frac{16^3}{\bar{v}_{00}^2}} - 4.$$

Исследование движения нити, когда $\alpha = 0$

В этом случае уравнения (2, 2) и (2, 7) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= -a_0^2 \frac{\partial}{\partial s_0} (\varepsilon \sin \theta) - Ay_0^n \sin \theta; \\ a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0} &= -\sin \theta \frac{dv_0}{dt} - Ay_0^n. \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения, находим:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dt} &= -\frac{a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^* + A \tau_0^n y_0}{S_0^* + A_1}; \\ a_0^2 \varepsilon_0 &= a_0^2 \varepsilon^* + \frac{A \tau_0^n (S_0^* + A_1 S_0^* - y_0^2)}{A_1 + S_0^*} - a_0^2 \varepsilon^* \sin \theta^*. \end{aligned}$$

Не трудно проверить, что ε_0 с течением времени возрастает. При постоянной скорости удара поставленную задачу аналитически можно решить полностью. Ход решения задачи, когда сила сопротивления зависит от квадрата скорости частиц, такой же, как в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде (малые деформации). "Изв. АН Азерб. СССР", 1960, № 5.
2. Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде (большие деформации). "Изв. АН Азерб. СССР", 1960, № 6.
3. Рахматуллин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, т. IX, вып. 6, 1945.
4. Рахматуллин Х. А. Об ударе по гибкости нити. ПММ, т. IX, вып. 3, 1947.

П. Э. Рахманов

Мүгавимәтлi мүһитдә еластики телә енинә зәрбә мәсәләсинин һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә гојулмуш гејри-хәтти мәсәләнин мүәјјән тәгриби аналитик арашдырма нәтичәсиндә биринчи тәртибдән ади дифференциал тәнликләр системинә кәтирилмишдир. Кәркинликлә деформасија арасында асылылыг хәтти олдуғу һалда исә мәсәләнин һәлли сонлу шәкилдә тамамилә һәлл олунмушдур.

А. А. ГАМИДОВ

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ В МНОГОМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для приближения неограниченных функций во всем пространстве в работе [3] приняты в качестве аппроксимирующих функций целые функции $g(z_1, \dots, z_n)$ многих переменных, для которых

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(z_1, \dots, z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}} < +\infty,$$

т. е. целые функции сферической степени $\leq \sigma$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в n -мерном евклидовом пространстве (R_n) и данная функция $\varphi(x_1, \dots, x_n) \geq 1$ непрерывна в (R_n) , причем

$$\|f\|_{\varphi}^{(n)} = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \leq M < +\infty. \quad (1)$$

Обозначим через $H_{\varphi}^{(n)}$ класс функций $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию (1), и через $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$ класс целых функций $g_{\sigma}(z_1, \dots, z_n)$ сферической степени $\leq \sigma$ и принадлежащих пространству $H_{\varphi}^{(n)}$. Величину

$$A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} = \inf_{\{g_{\sigma}\}} \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \quad (2)$$

назовем наилучшим приближением с весом $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ функции $f(x_1, \dots, x_n) \in H_{\varphi}^{(n)}$ посредством целых функций $g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ сферической степени $\leq \sigma$ из класса $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$.

Пусть

$$\omega(f; \delta)_{\varphi}^{(n)} = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \\ h_1^2 + \dots + h_n^2 < \delta^2}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)}.$$

Если $\omega(f; \delta)_{\varphi}^{(n)} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$, то будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равномерно непрерывна в (R_n) .

А. А. ГАМИДОВ

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НАПРАВЛЕНИЮ В МНОГОМЕРНОМ ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для приближения неограниченных функций во всем пространстве в работе [3] приняты в качестве аппроксимирующих функций целые функции $g(z_1, \dots, z_n)$ многих переменных, для которых

$$\sigma = \lim_{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \rightarrow \infty} \frac{\ln |g(z_1, \dots, z_n)|}{\sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}} < +\infty,$$

т. е. целые функции сферической степени $\leq \sigma$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ определена в n -мерном эвклидовом пространстве (R_n) и данная функция $\varphi(x_1, \dots, x_n) \geq 1$ непрерывна в (R_n) , причем

$$\|f\|_{\varphi}^{(n)} = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \leq M < +\infty. \quad (1)$$

Обозначим через $H_{\varphi}^{(n)}$ класс функций $f(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию (1), и через $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$ класс целых функций $g_{\sigma}(z_1, \dots, z_n)$ сферической степени $\leq \sigma$ и принадлежащих пространству $H_{\varphi}^{(n)}$. Величину

$$A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} = \inf_{\{g_{\sigma}\}} \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \quad (2)$$

назовем наилучшим приближением с весом $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ функции $f(x_1, \dots, x_n) \in H_{\varphi}^{(n)}$ посредством целых функций $g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)$ сферической степени $\leq \sigma$ из класса $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$.

Пусть

$$\omega(f; \delta)_{\varphi}^{(n)} = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \\ h_1^2 + \dots + h_n^2 < \delta^2}} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)}.$$

Если $\omega(f; \delta)_{\varphi}^{(n)} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$, то будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ равномерно непрерывна в (R_n) .

В работе С. Н. Бернштейна [1] было доказано, что если функция $f(x)$ определена и ограничена на $(-\infty, \infty)$, то для того, чтобы

$$A_\sigma(f) = \inf_{\{g_\sigma\}} \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - g_\sigma(x)| \rightarrow 0, \quad \text{при } \sigma \rightarrow \infty$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, необходима и достаточна равномерная непрерывность функции $f(x)$ на всей вещественной оси.

Указанное выше говорит о том, что класс ограниченных и равномерно непрерывных на $(-\infty, \infty)$ функций состоит из тех и только тех функций, которые являются пределами таких последовательностей, ограниченных на числовой оси целых функций экспоненциального типа $g_n(x)$, для которых

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |g_n(x) - g_m(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow \infty$$

Аналогичное предложение доказано А. Ф. Тиманом [4] для класса всех ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций, которые имеют там ограниченную и равномерно непрерывную производную некоторого порядка. Приведем эту теорему.

Теорема (А. Ф. Тиман). Ограниченная на всей вещественной оси функция $f(x)$ имеет ограниченную и равномерно непрерывную на $(-\infty, \infty)$ производную r -го порядка тогда и только тогда, когда $A_\sigma(f) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$

$$\lim_{\min\{\sigma, r\} \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} |g_\sigma^{(r)}(f; x) - g_\tau^{(r)}(f; x)| = 0,$$

при этом

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f^{(r)}(x) - g_\sigma^{(r)}(f; x)| = 0 [A_\sigma(f^{(r)})].$$

В настоящей работе аналогичные теоремы доказываются для функций из класса $H_\varphi^{(n)}$.

При доказательстве мы пользуемся следующими утверждениями О. И. Иноземцева [3].

1) Пусть $g_\sigma(z_1, \dots, z_n)$ — целая функция сферической степени $\leq \sigma$ и

$$\|g_\sigma\|_\varphi^{(n)} \leq L$$

Тогда

$$\|(g_\sigma)_l\|_\varphi^{(n)} = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\left| \frac{\partial g_\sigma(x_1, \dots, x_n)}{\partial l} \right|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \leq L_1(\sigma + 1). \quad (3)$$

2) Если функция $f(x_1, \dots, x_n) \in H_\varphi^{(n)}$ и имеет производную порядков $K(K \geq 0)$ по любому направлению и $f_l^{(K)} \in H_\varphi^{(n)}$, то при любом $\sigma \geq 0$ имеем

$$\|f - g_\sigma\|_\varphi^{(n)} \leq \frac{A}{\sigma^K} \omega_\varphi\left(\frac{1}{\sigma}; f_l^{(K)}\right), \quad (*)$$

где A — постоянная.

Из работы [3] следует, что если $\omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то $A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$.

Теперь, следуя И. И. Ибрагимову [2], докажем обратное предложение.

Теорема 1. Если $A_\sigma(f)_\varphi^{(n)}$ есть наилучшее приближение функции $f(x_1, \dots, x_n) \in H_\varphi^{(n)}$ посредством целых функций сферической степени $\leq \sigma$ и $\omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)}$ модуль непрерывности в R_n , то имеет место неравенство

$$\omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)} \leq 2A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} + \omega\left(g; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)}.$$

Доказательство. Очевидно имеем:

$$\begin{aligned} \omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)} &\leq 2A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} + \\ &+ \sup_{\substack{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \\ h_1^2 + \dots + h_n^2 \leq \frac{1}{\sigma^2}}} \frac{|g_\sigma(f; x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - g_\sigma(f; x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} = \\ &= 2A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} + \omega\left(g_\sigma; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\omega\left(g_\sigma; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, мы замечаем, что если $A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$, то $\omega\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Таким образом, доказано, что функция $f(x_1, \dots, x_n) \in H_\varphi^{(n)}$ равномерно непрерывна на R_n тогда и только тогда, когда $A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$.

Приведенное предложение показывает, что класс функций из $H_\varphi^{(n)}$ равномерно непрерывных на R_n состоит из тех и только тех функций, которые являются пределами равномерно сходящихся на R_n последовательностей целых функций из $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$.

Теперь докажем следующую теорему, аналогичную теореме А. Ф. Тимана [4].

Теорема 2. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in H_\varphi^{(n)}$, то для того, чтобы $f(x_1, \dots, x_n)$ имела равномерно непрерывную на R_n производную r -го порядка по любому направлению, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} &\rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow \infty \text{ и} \\ \lim_{\min\{\sigma, r\} \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\left| \frac{\partial^r g_\sigma(f; x_1, \dots, x_n)}{\partial l^r} - \frac{\partial^r g_\tau(f; x_1, \dots, x_n)}{\partial l^r} \right|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} &= 0, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\left| \frac{\partial^r f(x_1, \dots, x_n)}{\partial l^r} - \frac{\partial^r g_\sigma(f; x_1, \dots, x_n)}{\partial l^r} \right|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} = 0 [A_\sigma(f_l^{(r)})]_\varphi^{(n)}, \quad (5)$$

где

$$A_\sigma(f)_\varphi^{(n)} = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|g_\sigma(f; x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)}$$

$$A_{\sigma}(f_l^{(n)})_{\varphi}^{(n)} = \inf_{\{g_{\sigma}\}} \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\left| g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n) - \frac{\partial^r f(x_1, \dots, x_n)}{\partial l^r} \right|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)},$$

где нижняя грань берется в семействе всех целых функций сферической степени $\leq \sigma$ из класса $W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$.

Доказательство. При выполнении условия (4) $f(x_1, \dots, x_n)$ в R_n имеет производную r -го порядка по любому направлению. Поскольку $\frac{\partial^r g_{\sigma}}{\partial l^r}$ сходится к $\frac{\partial^r f}{\partial l^r}$ в смысле метрики пространства $H_{\varphi}^{(n)}$, то в силу неравенства (3)

$$\begin{aligned} \|(g_{\sigma})_l^{(n)}\|_{\varphi}^{(n)} &\leq [M_1(\sigma+1)]^r \|g_{\sigma}\|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq [M_1(\sigma+1)]^2 \{ \|f\|_{\varphi}^{(n)} + A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} \}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial^r f}{\partial l^r}$ равномерно непрерывна и входит в $H_{\varphi}^{(n)}$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Для этого рассмотрим следующий оператор:

$$U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + u, \dots, x_n + u_n) K_{\sigma, 1+\frac{1}{r}}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n, \quad (6)$$

где $K_{\sigma, 1+\frac{1}{r}}$ — целая функция сферической степени $\leq \sigma \left(1 + \frac{1}{r}\right)$.

(6) является целой функцией сферической степени $\leq \sigma \left(1 + \frac{1}{r}\right)$, если $f(x_1, \dots, x_n) \in H_{\varphi}^{(n)}$.

Предположим, что (6) удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_{\sigma, 1+\frac{1}{r}}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n = 1;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\sigma, 1+\frac{1}{r}}(u_1, \dots, u_n)| \alpha(\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}) du_1, \dots, du_n \leq M < +\infty$$

где

$$\alpha(\sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}) = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n)}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} \varphi(x_1, \dots, x_n)}$$

и M — постоянная, не зависящая от σ и r ;

3) если $f(x_1, \dots, x_n) \in W_{\sigma, \varphi}^{(n)}$, то

$$U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n).$$

На основании условий 1) и 3) имеем:

$$\frac{U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n) - g_{\sigma}(f; x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)}{\varphi(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)} \times \\ &\times \frac{\varphi(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} K_{\sigma, 1+\frac{1}{r}}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n, \end{aligned}$$

где

$$A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{|f(x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)|}{\varphi(x_1, \dots, x_n)},$$

$g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)$ — целая функция сферической степени $\leq \sigma$.

В силу условия 2) имеем

$$A_{\sigma}(U_{\sigma})_{\varphi}^{(n)} \leq M A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)}. \quad (7)$$

На основании неравенства (3), при любом натуральном значении k

$$\begin{aligned} A_{\sigma}[(U_{\sigma})_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} &\leq \|(U_{\sigma})_l^{(k)} - (g_{\sigma})_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k \|U_{\sigma} - g_{\sigma}^k\|_{\varphi}^{(n)} = \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k A_{\sigma}(U_{\sigma})_{\varphi}^{(n)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$A_{\sigma}[(U_{\sigma})_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} \leq \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k A_{\sigma}(U_{\sigma})_{\varphi}^{(n)}, \quad (8)$$

где

$$A_{\sigma}(U_{\sigma})_l^{(n)} = \|U_{\sigma} - g_{\sigma}^*\|_{\varphi}^{(n)}.$$

Из (7) и (8) получим:

$$\begin{aligned} A_{\sigma}[(U_{\sigma})_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} &\leq \|(U_{\sigma})_l^{(k)} - (g_{\sigma}^*)_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k M_{\sigma}^k A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как

$$\omega\left(\frac{1}{\sigma}; f_l^{(k)}\right) \leq 2 \|f_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)},$$

то из (*) получим

$$A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} \leq \frac{2A}{\sigma^k} \|f_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)}. \quad (10)$$

На основании (10) имеем:

$$\begin{aligned} A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} &= A_{\sigma}(f - g_{\sigma,0})_{\varphi}^{(n)} = \frac{2B_1}{\sigma^k} \|f_l^{(k)} - (g_{\sigma,0})_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)} = \\ &= \frac{2B_1}{\sigma^k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $g_{\sigma,0}(x_1, \dots, x_n)$ есть целая функция сферической степени $\leq \sigma$, обладающая свойством:

$$A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} = \|(g_{\sigma,0})_l^{(k)} - f_l^{(k)}\|_{\varphi}^{(n)}$$

и B_1 — постоянная.

Из (9) и (11) имеем:

$$\begin{aligned} A_{\sigma}[(U_{\sigma})_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} &\leq \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k M_{\sigma}^k A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k M \frac{2B_1}{\sigma^k} \sigma^k A_{\sigma}[f_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} = C_{k,r} A_{\sigma}[f_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$A_{\sigma}[(U_{\sigma})_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)} \leq \| (U_{\sigma})_l^{(k)} - (g_{\sigma}^*)_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq C_{r,k} A_{\sigma} [f_l^{(k)}]_{\varphi}^{(n)}, \quad (12)$$

где $C_{r,k} = C_{k,r} = \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right]^k B_1 M$.

На основании свойства 3)

$$\begin{aligned} & \frac{f_l^{(k)}(x_1, \dots, x_n) - [U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)}}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_l^{(k)}(x_1, \dots, x_n) - f_l^{(k)}(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \times \\ & \quad \times K_{\sigma \left(1 + \frac{1}{r} \right)}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_l^{(k)}(x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(f_l^{(k)}; x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \times \\ & \quad \times K_{\sigma \left(1 + \frac{1}{r} \right)}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n - \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_l^{(k)}(x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n) - g_{\sigma}(f_l^{(k)}; x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \times \\ & \quad \times K_{\sigma \left(1 + \frac{1}{r} \right)}(u_1, \dots, u_n) du_1, \dots, du_n, \end{aligned}$$

тогда

$$\| f_l^{(k)} - [U_{\sigma}]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq M_2 A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}. \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13) получим:

$$\begin{aligned} \| f_l^{(k)} - [g_{\sigma}(U_{\sigma})]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} &\leq \| f_l^{(k)} - (U_{\sigma})_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} + \| (U_{\sigma})_l^{(k)} - (g_{\sigma}^*)_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq M_2 A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} + C_{r,k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} = (M_2 + C_{r,k}) A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\| f_l^{(k)} - (g_{\sigma}^*)_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq C_{r,k}^* A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}$$

равномерно для всех $k \leq r$,

где $C_{r,k}^*$ от σ не зависит.

Далее

$$\begin{aligned} & \| (g_{\sigma}^*)_l^{(k)} - [g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ & \leq \| [g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} - [U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} + \\ & + \| [U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} - [g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq C_{k,r} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} + \\ & + \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \sigma \right]^k \| U_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n) - g_{\sigma}(x_1, \dots, x_n) \|_{\varphi}^{(n)} \leq \\ & \leq C_{r,k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} + \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \sigma \right]^k M_2 A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} \leq \\ & \leq C_{r,k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} + \left[M_1 \left(1 + \frac{1}{r} \right) \sigma \right]^k M_2 \frac{2B_1}{\sigma^k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)} \leq \\ & \leq 3C_{r,k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\| [g_{\sigma}(U_{\sigma}); x_1, \dots, x_n]_l^{(k)} - [g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(k)} \|_{\varphi}^{(n)} \leq C_{r,k} A_{\sigma}(f_l^{(k)})_{\varphi}^{(n)}, \quad (14)$$

где (13) вместе с (14) показывают, что при фиксированном значении r

$$\| [f(x_1, \dots, x_n)]_l^{(r)} - [g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_l^{(r)} \|_{\varphi}^{(n)} = O\{A_{\sigma}(f_l^{(r)})_{\varphi}^{(n)}\}$$

равномерно относительно r .

Теорема доказана.

Следовательно, если $f_l^{(r)}(x_1, \dots, x_n) \in H_{\varphi}^{(n)}$ и равномерно непрерывна на R_n , то имеет место равенство (4).

Следствие 1. Нужно заметить, что если $\varphi(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$ и $n=1$, то получим теорему А. Ф. Тимана.

Следствие 2. Функция $f(x_1, \dots, x_n) \in H_{\varphi}^{(n)}$ имеет по x_i r -ую частную производную, входящую в $H_{\varphi}^{(n)}$ и равномерно непрерывную на R_n , тогда и только тогда, когда $A_{\sigma}(f)_{\varphi}^{(n)} \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$ и

$$\lim_{\min\{\sigma, \tau\} \rightarrow \infty} \| [g_{\sigma}(f; x_1, \dots, x_n)]_{x_i}^{(r)} - [g_{\tau}(f; x_1, \dots, x_n)]_{x_i}^{(r)} \|_{\varphi}^{(n)} = 0.$$

При этом

$$\| f_{x_i}^{(r)} - (g_{\sigma})_{x_i}^{(r)} \|_{\varphi}^{(n)} = O[A_{\sigma}(f_{x_i}^{(r)})_{\varphi}^{(n)}].$$

В заключение приношу благодарность проф. И. И. Ибрагимову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений, т. II, М., изд. АН СССР, 1954.
2. Ибрагимов И. И. О среднеквадратичном приближении функций комплексного переменного в бесконечных областях посредством целых функций конечной степени УМН, т. XI, вып. 5 (71), 1956.
3. Иноземцев О. И. К теории наилучшего приближения функций многих переменных с помощью целых функций конечной степени. УМЖ, т. VIII, 1956, № 4.
4. Тиман А. Ф. Вопрос об одновременной аппроксимации функций и их производных всей числовой оси. Изв. АН СССР, серия матем., 24. (1960).

А. Э. Хамидов

Функција вә онун истигамәтә көрә төрәмәсинин ејни заманда јахынлашдырылмасы наггында

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә кәсимләзлик модулу вә ән јахшы јахынлашма арасында бәрәбәрсизлик шәклиндә әлагә көстәрилер. Функција вә онун истигамәтә көрә төрәмәсинин сферик дәрәчәли функцијаларла ејни заманда јахынлашдырылмасына бахылыр.

Р. Я. КАСУМОВ, Б. Б. ТИМОФЕЕВ

ВОПРОСЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТОТЫ СТРУННЫХ ДАТЧИКОВ В СИСТЕМАХ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО КОНТРОЛЯ С ЭЦВМ

При рассмотрении различных конструкций частотных струнных датчиков было выяснено, что они могут состоять из одной рабочей струны, из рабочей и компенсационной и из двух рабочих струн.

1. Датчик состоит из одной рабочей струны (рис. 1).

Этот тип датчика отличается простотой конструкции, но имеет ряд недостатков:

а) необходимость температурной стабилизации начальной частоты $f_{\min}$ датчика (дрейф нуля). Для этого должна быть предусмотрена схема автоматического регулирования температуры или коррекция в ЭЦВМ.

Без применения температурной стабилизации эта погрешность доходит до 2—3,5% на каждые 10° С;

б) так как частота датчика изменяется не от нуля, то в результатах измерений всегда имеется постоянная составляющая, которая может быть учтена в преобразователе или в самой ЭЦВМ;

в) нелинейность зависимости $f = k\sqrt{F}$. Линеаризировать ее можно в ЭЦВМ с помощью специальной подпрограммы.

Частота датчика может быть преобразована в двоичный код подсчетом периодов за фиксированный интервал времени, а также измерением одного (или нескольких) периода частоты датчика.

II. Датчик состоит из двух струн (рис. 2): рабочей (1), связанной с измеряемым параметром F , и термокомпенсационной (2).

Недостатком такого типа датчика является нелинейность зависимости $f = k\sqrt{F}$. Частота его может быть преобразована в двоичный код теми же двумя способами, но с применением дополнительной логики (реверсивный счетчик, вентили суммы и разности) в преобразователе или в ЭЦВМ.

Блок-схема преобразователя для этого датчика представлена на рис. 3.

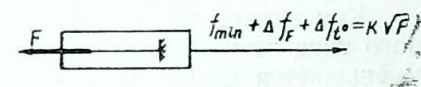


Рис. 1.

Δf_T — приращение частоты от изменения температуры, $f_{\min}$ — начальная частота датчика, Δf_F — приращение частоты от измеряемого параметра.

Р. Я. КАСУМОВ, Б. Б. ТИМОФЕЕВ

ВОПРОСЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТОТЫ СТРУННЫХ ДАТЧИКОВ В СИСТЕМАХ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО КОНТРОЛЯ С ЭЦВМ

При рассмотрении различных конструкций частотных струнных датчиков было выяснено, что они могут состоять из одной рабочей струны, из рабочей и компенсационной и из двух рабочих струн.

1. Датчик состоит из одной рабочей струны (рис. 1).

Этот тип датчика отличается простотой конструкции, но имеет ряд недостатков:

а) необходимость температурной стабилизации начальной частоты $f_{\min}$ датчика (дрейф нуля). Для этого должна быть предусмотрена схема автоматического регулирования температуры или коррекция в ЭЦВМ.

Без применения температурной стабилизации эта погрешность доходит до 2—3,5% на каждые 10°C ;

б) так как частота датчика изменяется не от нуля, то в результатах измерений всегда имеется постоянная составляющая, которая может быть учтена в преобразователе или в самой ЭЦВМ;

в) нелинейность зависимости $f = k\sqrt{F}$. Линеаризировать ее можно в ЭЦВМ с помощью специальной подпрограммы.

Частота датчика может быть преобразована в двоичный код подсчетом периодов за фиксированный интервал времени, а также измерением одного (или нескольких) периода частоты датчика.

II. Датчик состоит из двух струн (рис. 2): рабочей (1), связанной с измеряемым параметром F , и термокомпенсационной (2).

Недостатком такого типа датчика является нелинейность зависимости $f = k\sqrt{F}$. Частота его может быть преобразована в двоичный код теми же двумя способами, но с применением дополнительной логики (реверсивный счетчик, вентили суммы и разности) в преобразователе или в ЭЦВМ.

Блок-схема преобразователя для этого датчика представлена на рис. 3.

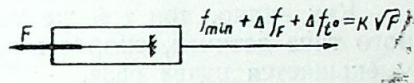


Рис. 1.

Δf_{t_0} — приращение частоты от изменения температуры, $f_{\min}$ — начальная частота датчика, Δf_F — приращение частоты от измеряемого параметра.

За первый такт на счетчик заносится число N_1 , эквивалентное $f_{\min} + \Delta f_F + \Delta f_{i^0}$, а за второй из числа N_1 вычитается $N_2 \equiv f_{\min} + \Delta f_{i^0}$. При этом на счетчике остается цифровой эквивалент числа $N \equiv (f_{\min} + \Delta f_F + \Delta f_{i^0}) - (f_{\min} + \Delta f_{i^0}) = f_{\Delta F}$.

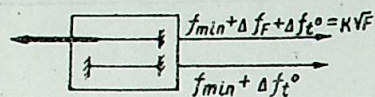


Рис. 2.

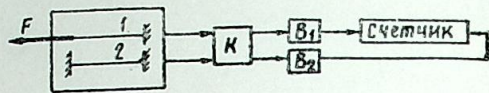


Рис. 3.

При вычислении этой операции в ЭЦВМ в запоминающее устройство вводятся поочередно числа N_1 и N_2 и в ЭЦВМ производится операция $N = N_1 - N_2 \equiv \Delta f_F$.

III. Для получения прямолинейной зависимости $f = \kappa \sqrt{F}$ чувствительный элемент конструируется так, чтобы он одновременно мог влиять на натяжение двух колеблющихся элементов в противоположном направлении (рис. 4).

Преобразование частоты аналогично предыдущему:

$$N = N_1 - N_2 \equiv (f_{\min} + \Delta f_F + \Delta f_{i^0}) - (f_{\min} - \Delta f_F + \Delta f_{i^0}) = 2\Delta f_F.$$

Очевидно, чувствительность датчика при тех же конструктивных параметрах, как и в первых двух случаях (размеры струны, напряжения в ней), повышается в два раза.

Эти выводы относятся к датчикам как с непрерывной генерацией, так и с затухающими колебаниями.

Как видно, при той же точности преобразования, что и для первого типа датчика, скорость преобразования для датчиков II и III типа уменьшается в два раза.

Рассмотрим подробно способы измерения частоты цифровыми методами.

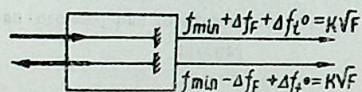


Рис. 4.

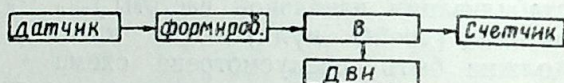


Рис. 5.

При первом способе производится подсчет числа периодов измеряемой частоты за фиксированный интервал времени, задаваемый от специального датчика временных интервалов. Количество импульсов, получаемых на счетчике, дает временной интеграл измеряемой частоты. Блок-схема преобразователя этого типа частота — код показана на рис. 5.

При максимальной девиации частоты струнного датчика

$$\Delta f_{\max} = f_{\max} - f_{\min},$$

максимальное изменение на счетчике числа импульсов за интервал времени Δt будет равно $N_{\max} = \Delta f_{\max} \cdot \Delta t$.

Из уравнения видно, что для обеспечения точности 0,1% для датчиков с девиацией 1000—1300 гц при $f_{\min}$ порядка 1000—1500 гц Δt лежит в пределах 0,8—1 сек.

Этот тип преобразователя обладает следующим недостатком: поскольку частота струнных датчиков не может изменяться от нуля, то в результатах измерения всегда имеется постоянная составляющая, которую нужно учесть.

Обозначим число импульсов, соответствующих $f_{\min}$, через $N_{\min}$, а число импульсов, соответствующих текущему значению частоты $f_i \equiv N_i$. Тогда число импульсов, соответствующее измеряемому параметру F_i , равно $N - N_{\min}$. Техническое выполнение этой задачи возможно в самой ЭЦВМ, а также в преобразователе. На счетчик преобразователя вместо установки „на ноль“ задается число, являющееся дополнением к $N_{\min}$, т. е. $N_{\text{доп}} = N_{\text{сг}} - N_{\min}$, где $N_{\text{сг}}$ — емкость счетчика. После подсчета $N_{\min}$ счетчик сбрасывается на ноль и при последующем отсчете на нем устанавливается число $N_i - N_{\min} \equiv F_i$. Существуют частотные датчики, в которых частота уменьшается с увеличением измеряемого параметра. В таком случае на вычитающий счетчик устанавливается число $N_{\max} \equiv f_{\max}$ и поступающее число импульсов $N_i \equiv f_i$ вычитается из $N_{\max}$. В результате на счетчике остается число $N_{\max} - N_i$.

Таким образом, при точности порядка 0,1% быстродействие этого типа преобразователя для частотных датчиков достигает 1—5 раз в секунду.

Преимущество этого типа преобразователя заключается том, что преобразуется не мгновенное значение измеряемого параметра и показания счетчика соответствуют интегралу входной величины за время интегрирования $T_{\text{двн}}$.

При втором способе период частоты (или несколько периодов) датчика преобразуется в двоичный код. Блок-схема преобразователя представлена на рис. 6.

Синусоидальное напряжение частотного датчика формируется в импульсы формирователем. Старт-импульс, отмечающий начало периода синусоиды частотного датчика, ставит вентиль в открытое состояние. Стоп-импульс, отмечающий начало другого периода, закрывает вентиль. Число

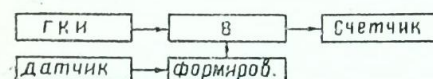
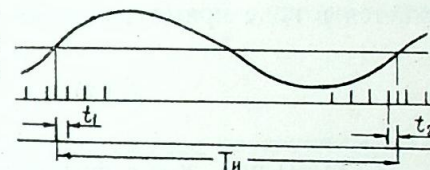


Рис. 6.



Бис. 7.

α — выход датчика; σ — ошибки t_1 и t_2 .

импульсов кварцевого генератора, просчитанных счетчиком, пропорционально временному интервалу между старт и стоп-импульсами.

Временные соотношения представлены на рис. 7.

Если не применять особых мер, то частота этого типа преобразователя лежит в пределах 1—5 кгц с точностью порядка 0,1%, а с использованием электронного нониуса, линий задержек и т. д. частота преобразования может быть повышена до 10—40 кгц.

Следовательно, этот метод дает более высокую частоту преобразования, но не обладает преимуществами предыдущего. Требование к девиации частоты и начальной частоте собственных колебаний $f_{\min}$ небольшие. При слишком большой $f_{\min}$ на входе устройства можно применить делители частоты для увеличения временного интервала (соответствующего 2 и 4 периодам частоты датчика) до 1 м сек.

При преобразовании временного интервала T_n ([2] второй способ измерения) возникают две погрешности: первая — t_1 имеет положительную величину, так как измеряемый временной интервал T_n больше фактического (T_n еще не достигла величины τ , а на счетчике уже устанавливается единица); вторая — t_2 имеет отрицательную величину, так как измеряемый временной интервал оказывается меньше фактического.

Рассмотрим функцию распределения ошибок t_1 и t_2 и определим суммарную плотность распределения (т. е. ошибку преобразования при измерении временного интервала).

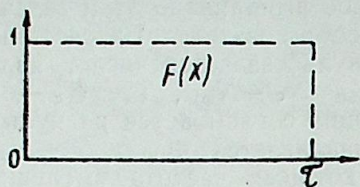


Рис. 8.

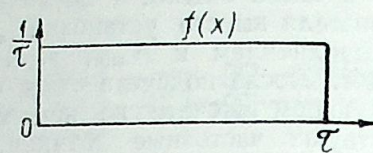


Рис. 9.

Так как запускаящий импульс может находиться только в одной, но любой точке множества τ (τ — период частоты генератора кодирующих импульсов) и неизвестно место расположения запускаящего импульса, то нет причин рассматривать в каждый данный момент, какое из положений запускаящего импульса будет наиболее вероятным. Следовательно, функция распределения является прямой линией (рис. 8) и описывается уравнением:

$$F_{t_1}(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ x/\tau; & 0 \leq x \leq \tau \\ 1; & x > \tau. \end{cases}$$

Плотность распределения ошибки t_1 равна $f_{t_1} = \frac{dF_{t_1}(x)}{dx}$, изображается в виде прямоугольника (рис. 9) и описывается уравнением:

$$f_{t_1}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad x > \tau \\ \frac{1}{\tau} & 0 \leq x \leq \tau. \end{cases}$$

$f_{t_1}(x) = 0$ при $x = \tau$ физически объясняется тем, что если стартовый импульс попадает в точку τ , то импульс кварцевого генератора не пройдет на счетчик и его следует рассматривать в следующем интервале. Среднее значение $E_{t_1}(x)$ случайной ошибки t_1 равно

$$E_{t_1}(x) = \int_0^{\tau} x f(x) dx = \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} x dx = \frac{\tau}{2}.$$

Для большей определенности предположим, что график функции $f(x)$ сдвинут по оси абсцисс на величину $-\frac{\tau}{2}$. В этом случае он равномерно распределен в интервале $\left[-\frac{\tau}{2}, +\frac{\tau}{2}\right]$ с нулевым средним значением, т. е.

$$f_{t_1}(x) = \begin{cases} 0; & x < -\frac{\tau}{2}; \quad x > \frac{\tau}{2} \\ \frac{1}{\tau}; & -\frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

Дисперсия случайной величины (ошибки t_1) равна:

$$\sigma_{t_1}^2 = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x^2 f(x) dx = \frac{\tau^2}{12},$$

а среднее квадратичное отклонение случайной величины составляет

$$\sigma_{t_1} = \frac{\tau}{2\sqrt{3}},$$

максимальная ошибка равна $\Delta = \frac{\tau}{2}$.

Для ошибок t_1 и t_2 графики функции распределения и все ее характеристики являются одинаковыми, следовательно

$$f_{t_2}(x) = \begin{cases} 0; & x < -\frac{\tau}{2}; \quad x > \frac{\tau}{2}; \\ \frac{1}{\tau}; & -\frac{\tau}{2} \leq x \leq \frac{\tau}{2}; \end{cases} \quad \sigma_{t_2}^2 = \frac{\tau^2}{12}; \quad \sigma_{t_2} = \frac{\tau}{2\sqrt{3}};$$

$$E_{t_2}(x) = 0; \quad \Delta = \frac{\tau}{2}.$$

Погрешность преобразования равна плотности распределения суммы независимых одинаково равномерно распределенных в интервале $\left(-\frac{\tau}{2} \text{ и } +\frac{\tau}{2}\right)$ случайных величин: ошибок t_1 и t_2 . Среднее значение суммы $E_t(x) = 0$, дисперсия $\sigma_t^2 = \sigma_{t_1}^2 + \sigma_{t_2}^2 = \frac{\tau^2}{6}$, среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_t = \frac{\tau}{\sqrt{6}}$.

Суммарная плотность распределения в случае независимых слагаемых [1] равна

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x-z) p_2(z) dz,$$

в нашем случае она примет вид:

$$f_1(x) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f_{t_1}(x-z) f_{t_2}(z) dz = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f_{t_1}(x-z) dz.$$

Подинтегральная функция равна нулю при

$$x-z < -\frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad x-z > \frac{\tau}{2},$$

что выполняется при $x < -\tau$ и $x > +\tau$. Следовательно, $f_1(x) = 0$ при $x < -\tau$, $x > \tau$.

Пусть теперь $-\tau < x < \tau$. Подинтегральная функция отлична от нуля только при тех значениях z , которые удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{\tau}{2} < x-z < +\frac{\tau}{2}$$

или, что то же самое, неравенствам $x - \frac{\tau}{2} < z < x + \frac{\tau}{2}$. Рассмотрим $f_1(x)$ при значениях $-\tau < x \leq 0$. Так как $x > -\tau$, то $x + \frac{\tau}{2} > -\frac{\tau}{2}$.

Очевидно, что $x + \frac{\tau}{2} \leq \frac{\tau}{2}$ и $x - \frac{\tau}{2} \leq -\frac{\tau}{2}$ при $x < 0$. Следовательно,

но, если $-\tau < x \leq 0$, то

$$f_1(x) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{x + \frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau^2} dz = \frac{\tau + x}{\tau^2}.$$

Точно также рассмотрим $f_1(x)$ при значениях $0 \leq x < \tau$. Так как $x \geq 0$, то $x - \frac{\tau}{2} \geq -\frac{\tau}{2}$, а также $x + \frac{\tau}{2} \geq \frac{\tau}{2}$ при $x < \tau$, то $x - \frac{\tau}{2} < \tau$.

Следовательно, при $0 \leq x < \tau$

$$f_1(x) = \int_{x - \frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau^2} dz = \frac{\tau - x}{\tau^2}.$$

Собрав вместе полученные результаты, получим:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0; & x \geq \tau \quad x \leq -\tau; \\ \frac{\tau + x}{\tau^2}; & -\tau < x \leq 0; \\ \frac{\tau - x}{\tau^2}; & 0 \leq x < \tau. \end{cases}$$

Таким образом, суммарная плотность распределения ошибок t_1 и t_2 имеет вид „треугольного распределения“ с параметрами, указанными на рис. 10.

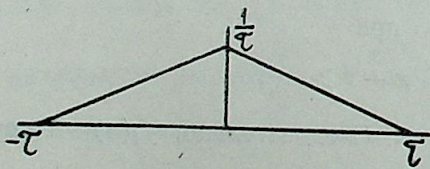


Рис. 10.

При подсчете числа периодов частоты датчика за фиксированный интервал времени (первый способ измерения) также возникают две погрешности: T_1 и T_2 (рис. 11).

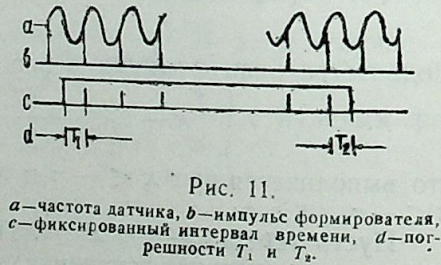


Рис. 11.

a—частота датчика, b—импульс формирователя, c—фиксированный интервал времени, d—погрешности T_1 и T_2 .

Функции распределения ошибок T_1 и T_2 , их суммарная плотность распределения (т. е. погрешность преобразования) имеют тот же вид, что и для второго способа преобразования.

Погрешность преобразователя (метода измерения) равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x > T; \quad x < -T; \\ \frac{T + x}{T^2}; & -T < x \leq 0; \\ \frac{T - x}{T^2}; & 0 \leq x < T; \end{cases}$$

и среднеквадратичным отклонением $\sigma = \frac{T}{\sqrt{6}}$ и $\Delta = \frac{T}{2}$ с дисперсией равной $\sigma^2 = \frac{T^2}{6}$.

Определим необходимую точность преобразования частоты струнных датчиков в цифровой код. Плотность распределения погрешности устройства „датчик—преобразователь“ равна сумме независимых погрешностей класса точности датчика, имеющего „нормальный“ закон плотности распределения погрешности, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}; & -a < x < a; \\ 0; & x > a; \quad x < -a; \end{cases}$$

где a —абсолютная погрешность датчика, σ^2 —дисперсия абсолютной погрешности датчика и преобразователя (метода измерения), имеющего треугольный закон плотности распределения, т. е.

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\tau + x}{\tau^2}; & -\tau < x \leq 0; \\ \frac{\tau - x}{\tau^2}; & 0 \leq x < \tau; \\ 0 & x > \tau; \quad x < -\tau. \end{cases}$$

Суммарная плотность распределения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ равна:

$$f(x) = \int_{-\tau}^{\tau} f_1(z) f_2(x - z) dz; \quad f(x) = \int_{-\tau}^{\tau} f_1(z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Подинтегральная функция $f_2(x - z)$ равна нулю при $x - z < -a$ и $x - z > a$, что выполняется при $x < -a - \tau$ и $x > a + \tau$. Следовательно, $f_1(x) = 0$ при $x < -a - \tau$ и $x > a + \tau$. Подинтегральная функция $f_2(x - z)$ отлична от нуля только при тех значениях z , которые удовлетворяют неравенствам

$$-a < x - z < a,$$

или

$$x - a < z < x + a$$

при значениях x , равных $-a - \tau < x < a + \tau$.

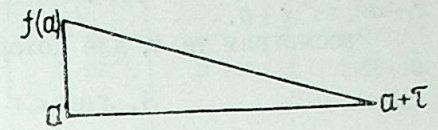


Рис. 12.

Таким образом, $f_1(z) \neq 0$ и $f_2(x-z) \neq 0$ при условии $-\tau < z < \tau$ $x-a < z < x+a$.

Рассмотрим те x , для которых выполняются следующие соотношения:

$$1. x+a < \tau \quad x < \tau-a$$

$$x-a < -\tau, \text{ откуда } x < a-\tau,$$

так как $\tau-a < 0$ и $a-\tau > 0$ при $a > \tau$, то имеем $-a-\tau < x < \tau-a$.

$$2. x+a > \tau \quad \text{откуда} \quad x > \tau-a$$

$$x-a > -\tau \quad x > a-\tau$$

так как $\tau-a < 0$ и $a-\tau > 0$ при $a > \tau$, то имеем: $a-\tau < x < a+\tau$. Поскольку смысл поставленной задачи заключается в определении вероятности попадания ошибки в области суммарной ошибки, т. е. при x равных $-a-\tau < x < -a$ и $a < x < a+\tau$, то рассмотрим значение $f(x)$ в этих областях.

Следовательно, если $-a-\tau < x < -a$, то

$$f(x) = \int_{-\tau}^{x-a} \frac{\tau+z}{\tau^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} dz$$

и если $a < x < a+\tau$, то

$$f(x) = \int_{x-a}^{\tau} \frac{\tau-z}{\tau^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Взяв интегралы обоих выражений, имеем:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tau+x}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau^2} \int_{-a}^{x+\tau} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\tau^2} \left[e^{-\frac{(x+\tau)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right]; & -a-\tau < x < -a \\ \frac{\tau-x}{\sqrt{2\pi}\sigma\tau^2} \int_{x-\tau}^a e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\tau^2} \left[e^{-\frac{(x-\tau)^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right]; & a < x < a+\tau \\ 0; & x < -a-\tau \quad x > a+\tau. \end{cases}$$

Подставляя в $f(x)$ значение $x=a'$, найдем значение плотности вероятности в этой точке. В точке $x=a+\tau$ $f(x)=0$. Следовательно, получается треугольник с основанием τ и высотой $f(a)$. Вероятность попадания результата измерения в этот треугольник равна:

$$p(a < x < a+\tau) = \frac{1}{2} f(a) \cdot \tau.$$

Так как ошибка измерения может быть и в области $-a-\tau < x < -a$, то, следовательно, $p(a < x < a+\tau; -a-\tau < x < -a) = f(a) \cdot \tau$. На основании полученных результатов составлена таблица при разных соотношениях ошибок датчика и преобразователя $\left(\frac{a}{\tau} = n\right)$.

Из нижеприведенной таблицы видно, что при отношении $\frac{a}{\tau} = 5$, лишь 4 измерения из 10^6 попадают в области $a < x < a+\tau; -a-\tau < x < -a$, где класс точности устройства „датчик-преобразователь“ равен $a+0,2a=1,2a$. Следовательно, с вероятностью равной $P=999996$ можно считать, что класс точности устройства равен a .

$n = \frac{a}{\tau}$	$\frac{6}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$
$f(a)$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$
$P(a < x < a+\tau; -a-\tau < x < -a)$	$1 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$

Полученная функция плотности распределения погрешности устройства „датчик-преобразователь“ дает возможность определить необходимую точность преобразователя.

Класс точности струнных датчиков, разработанных в настоящее время, при измерении различных параметров, кроме усилий, равен 0,5. Абсолютная погрешность длительности одного периода частоты датчика равна

$$a = \frac{\beta T_{\max}}{100\%},$$

где β — приведенная погрешность, численно равная классу точности, $T_{\max}$ — максимальная длительность одного периода частоты.

При рабочих частотах датчика порядка 1—2 кГц

$$a = \frac{0,5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{100} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

Дисперсия абсолютной погрешности датчика равна

$$\sigma_g^2 = \int_{-a}^a x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

Из таблиц нормального распределения при $a=5$ находим, что $\sigma_g^2=1$, а следовательно при $a=5 \cdot 10^{-6}$ сек среднеквадратичная ошибка равна

$$\sigma_g = 1 \cdot 10^{-6} \text{ сек.}$$

При первом способе преобразования частоты датчика в цифровой код максимальная погрешность измерения при тех же рабочих частотах датчика 1—2 кГц равна $T=1 \cdot 10^{-3}$ сек.

Необходимая длительность импульсов датчика временных интервалов равна

$$T_{\text{двн}} = \frac{N}{fg} = \frac{5T}{a \cdot fg} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ сек,}$$

где $N = \frac{5T}{a}$ — число периодов частоты струнного датчика; быстро-

действие этого преобразователя равно 1 гц.

При втором способе преобразования частоты датчика в цифровой код максимальная погрешность измерения равна периоду частоты генератора кодирующих импульсов τ .

При $\frac{a}{\tau}$, где $a=5 \cdot 10^{-6}$ сек, получаем $\tau=1 \cdot 10^{-6}$, т. е. частота генератора кодирующих импульсов равна 1 мГц и максимальное число импульсов на счетчике при $f_g=1-2$ кГц равно 1000, а быстродействие этого вида преобразователя составляет 1 кГц.

Так как линеаризировать зависимость $f=k\sqrt{F}$ предполагается в ЭЦВМ, определим время, необходимое для выполнения этой подпрограммы на примере машины УМШН.

При определении периода частоты датчика измеряемый параметр

$$F = \frac{k}{T^2};$$

где k — постоянная, определяемая конструктивными данными датчика;
 T — период частоты датчика.

Время обработки в ЭЦВМ этой подпрограммы складывается из:

1. вызов K из запоминающего устройства 30 мксек
2. вызов T из запоминающего устройства 30 мксек
3. возведение в квадрат T 200—300 мксек

4. деление $\frac{k}{T^2}$ 400 мксек

5. поместить значение F в запоминающее устройство 30 мксек.

Таким образом, время ввода T в з. у. и обработка подпрограммы равно 690—720 мксек и, следовательно, быстродействие устройства „датчик-преобразователь“ не может быть более 1—1,2 кгц.

Выводы

Из рассмотрения параметров датчиков и ЭЦВМ следует:

1. В централизованных системах телеизмерения с использованием ЭЦВМ целесообразно применять однострунные датчики как наиболее простые по конструкции безразлично — с предварительным „возбуждением“ (без применения термокомпенсации) или с непрерывной генерацией. Обработку результатов измерения производить в ЭЦВМ.

2. Возможно построение преобразующего устройства с быстродействием порядка 1 кгц и точностью 0,1% с последующей обработкой информации датчика на ЭЦВМ и с вероятностью получения результатов измерения, равных классу точности датчика $p = 0,999996$.

3. Возможно построение преобразующего устройства с быстродействием порядка 1—5 кгц и точностью 0,1%, с вероятностью получения результата измерения равного классу точности датчика $p = 0,999996$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика.
2. Гитис Э. И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. ГЭИ, 1961.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961.
4. Лэнди Р. и др. Справочник радиоинженера. ГЭИ, 1961.
5. Милман Я., Тауб Г. Импульсные и цифровые устройства. ГЭИ, 1960.

Р. Я. Гасымов, Б. Б. Тимофеев

Электрон рэгэм һесаблаычы машинлары (ЕРһМ) васитәсилә симли веричиләрин тезлијинин өлчүлмәсиндә мәркәзләшдирилмиш нәзарәт васитәсилә хәталарын вә мә'луматларын ишләнилмәси мәсәләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә симли конструксиялы веричиләрдән бәһс едилир. Бир ишчи, ишчи вә компенсациялы вә ики ишчи симдән ибарәт үч нөв веричиләр мөвчүдүр.

Мәгаләдә бу нөв веричиләрдән алынган мә'луматын икиәсәсли код системинә чеврилмәси вә бу мә'луматын чевиричинин өзүндә вә ја ЕРһМ-дә габагчадан ишләнилмәси верилмишдир. Симли конструксиялы веричиләрин әсас нөгсанлары ашкар едилир. Тезлијин рэгәм үсулу илә өлчүлмәсинә ашағыдакы үсулларла јанашылыр:

- 1) тезлијин бир периодунун мүддәтини өлчмәклә;
- 2) мүәјјән мүддәт әрзиндә периодларын сајылмасы илә.

Симли конструксиялы веричиләрин тезлијинин рэгәм үсулу илә өлчүлмәсиндә хәталарын јајылма сыхлығы тә'јин едилир. Бундан әлавә, характеристикалар, дисперсия вә орта квадратик мејлетмәләр тә'јин едилир.

Јухарыда дејилән үсулларла симли веричиләрин тезлијинин өлчүлмәсиндә веричи-чевиричи гурулушунун үмуми хәтасы јајылма сыхлығы „нормал“ ганунлу веричинин вә јајылмасы „үчбучаг“ ганунлу веричинин хәтасындан ибарәтдир.

Гаршыда гојулан мәсәләнин маһијјәти хәтанын үмуми хәта һүдудунда дүшмә еһтималынын тә'јинидир, башга сөзлә x әкәр: $-a - \tau < x \leq -a$ оларса вә $a \leq x < a + \tau$ (бурада a вә τ ујғун олараг веричинин вә чевиричинин максимум хәтасыдыр) оларса, онда јајылма сыхлығынын чәми: $f(x)$ бу һүдудда тә'јин олунур.

Алынган нәтичәләрә әсасән өлчү нәтичәсинин хәтанын чәми һүдудуна дүшмә еһтималы веричи вә чевиричинин хәталарынын мүхтәлиф нисбәтләриндә $\left(\frac{a}{\tau} = n\right)$ чәдвәл тәртиб олунмушдур.

Алынмыш хәтанын јајылма функцијасына әсасән һәр ики чевиричинин лазыми дәгиглик вә тез ишләмәси тә'јин едилмишдир.

Веричинин вә ЕРһМ-ин параметрләринә әсасән ашағыдакы нәтичәләрә кәлмәк олар:

1) ЕРһМ-дән истифадә едилән мәркәзләшдирилмиш телеөлчү системләриндә бирсимли веричидән (садә конструксиялы вә хусуси термокомпенсациясыз) өлчү нәтичәсинин әввәлчәдән тә'сирләнмә вә ја фасиләсиз кенерасия илә вә өлчүнүн нәтичәсини ЕРһМ-дә јенидән ишләнмәсинин фәрги олмадан истифадә едилмәси әлверишлидир;

2) веричинин өлчү нәтичәсинин $P = 0,999996$ дәгиглик синфиндә алынмасы еһтималы илә тез ишләмәси 1 кһерс вә дәгиглији 0,1% веричи нәтичәсинин ЕРһМ-дә сонрадан ишләнмәси илә чевиричи гурулушунун дүзәлдилмәси мүмкүндүр;

3) өлчү нәтичәсинин веричинин дәгиглик синфи $P = 0,999996$ олан өлчү нәтичәси алынган еһтималы илә тез ишләмәси (1÷5) һерс вә дәгиглији 0,1% олан чевиричи гурулушуну гурмаг мүмкүндүр.

М. И. ВЕЛИЕВ, И. Г. КЕРИМОВ, Г. М. АЛИЕВ, М. И. АЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЕЛЕНА

Исследованию теплопроводности аморфного и кристаллического селена в широком интервале температур посвящено несколько работ [1, 2, 3, 4, 5, 10]. Однако влияние степени отжига на его теплопроводность не изучено. Представляет интерес исследование изменения теплопроводности и ее температурного хода при непрерывном превращении селена из аморфной модификации в гексагональную.

В данной работе мы пользовались селеном с чистотой 99,9996%. Образцы были цилиндрические с высотой 0,7 см и сечением 0,64 см². Теплопроводность измерялась стационарным методом: для аморфных образцов в интервале от 77 до 300° К, а для кристаллических — до 373° К.

Аморфная фаза была преобразована в гексагональную путем отжига в вакууме. Вначале измерялась теплопроводность аморфного селена, затем тот же образец для кристаллизации отжигали последовательно при 100, 150, 200, 210, 215 и 218°С, каждый раз в течение одного часа. Зависимость теплопроводности селена от температуры графически показана на рис. 1.

Из кривых 1, 2 видно, что теплопроводность аморфного селена и отожженного при 100°С с понижением температуры уменьшается. Теплопроводность образца, отожженного дополнительно при 150°С, от температуры не зависит (кривая 3), а кривые 4, 5, 6, 7 указывают на кристаллический ход температурной зависимости теплопроводности образца, подвергнутого дальнейшей кристаллизации.

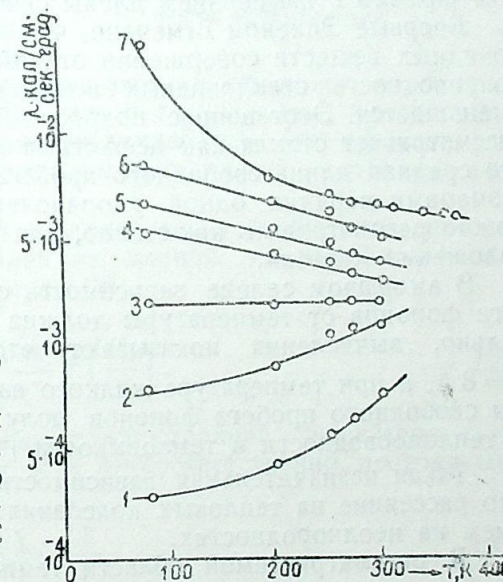


Рис. 1.
Зависимость теплопроводности селена от температуры.

М. И. ВЕЛИЕВ, И. Г. КЕРИМОВ, Г. М. АЛИЕВ, М. И. АЛИЕВ

ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЕЛЕНА

Исследованию теплопроводности аморфного и кристаллического селена в широком интервале температур посвящено несколько работ [1, 2, 3, 4, 5, 10]. Однако влияние степени отжига на его теплопроводность не изучено. Представляет интерес исследование изменения теплопроводности и ее температурного хода при непрерывном превращении селена из аморфной модификации в гексагональную.

В данной работе мы пользовались селеном с чистотой 99,9996%. Образцы были цилиндрические с высотой 0,7 см и сечением 0,64 см². Теплопроводность измерялась стационарным методом: для аморфных образцов в интервале от 77 до 300° К, а для кристаллических — до 373° К.

Аморфная фаза была преобразована в гексагональную путем отжига в вакууме. Вначале измерялась теплопроводность аморфного селена, затем тот же образец для кристаллизации отжигали последовательно при 100, 150, 200, 210, 215 и 218°С, каждый раз в течение одного часа. Зависимость теплопроводности селена от температуры графически показана на рис. 1.

Из кривых 1, 2 видно, что теплопроводность аморфного селена и отожженного при 100°С с понижением температуры уменьшается. Теплопроводность образца, отожженного дополнительно при 150°С, от температуры не зависит (кривая 3), а кривые 4, 5, 6, 7 указывают на кристаллический ход температурной зависимости теплопроводности образца, подвергнутого дальнейшей кристаллизации.

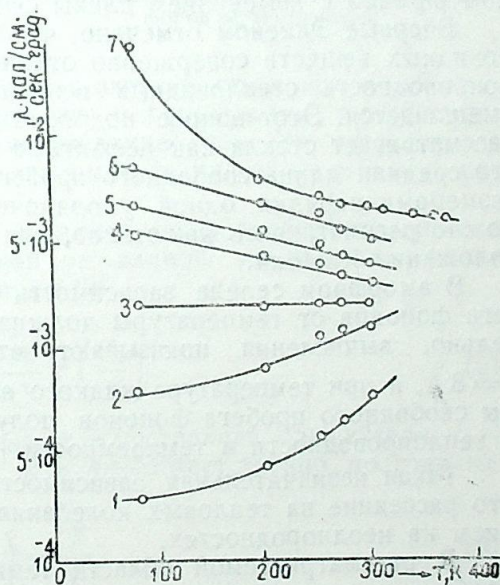


Рис. 1.
Зависимость теплопроводности селена от температуры.

Эти данные указывают на сильную зависимость теплопроводности селена от степени кристалличности. Исходя из данных о теплопроводности, можно судить о степени совершенствования и кристаллизации селена. Полнота кристаллизации селена нами была проверена исследованием теплопроводности селена, отожженного два раза при 218°С. Дополнительный отжиг при 218°С в течение одного часа никаких изменений в теплопроводности не дал.

Пользуясь данными работы [11] по теплоемкости, сжимаемости и плотности селена, нами на основании измерений по теплопроводности при помощи формулы

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \bar{v} \bar{l} \quad (1)$$

была вычислена длина свободного пробега фононов при комнатной температуре для образцов, подвергнутых различной степени кристаллизации.

Эти данные приводятся ниже.

№ образца	1	2	3	4	5	6	7
Средняя длина свободного пробега при комнатной температуре (Å)	8	21	23	34	44,7	59	76,78

Результаты показывают, что с увеличением температуры отжига длина свободного пробега растет.

Если не принимать во внимание незначительного изменения теплоемкости, плотности и сжимаемости селена при его кристаллизации, то можно утверждать, что изменение теплопроводности его в основном связано с изменением длины свободного пробега фононов.

Впервые Эйкенем отмечено, что температурная зависимость стекловидных веществ совершенно отлична от кристаллических, т. е. теплопроводность стекловидных веществ при понижении температуры уменьшается. Этот вопрос подробно был обсужден Киттелем [8]. Он рассматривает стекла как дефектные кристаллы и приходит к выводу, что средняя длина свободного пробега фононов в стеклах ограничена размерами порядка одной упорядоченной ячейки. Аморфный селен можно рассматривать как стекло, для которого удовлетворяется предположение Киттеля.

В аморфном селене зависимость средней длины свободного пробега фононов от температуры должна быть незначительной. Действительно, вычисления показывают, что при комнатной температуре $\bar{l} = 8 \text{ Å}$, а при температуре жидкого азота $\bar{l} = 8,8 \text{ Å}$. Эти значения длины свободного пробега фононов получены исходя из наших данных о теплопроводности и теплоемкости [9].

Такая незначительная зависимость $\bar{l}$ от температуры показывает, что рассеяние на тепловых колебаниях мало по сравнению с рассеянием на неоднородностях.

В рассматриваемой области температуры как длина свободного пробега, так и скорость фононов приблизительно постоянны, поэтому можно утверждать, что изменение теплопроводности аморфного селена с температурой в основном обусловлено изменением теплоемкости.

Наблюдаемые при отжигах изменения теплопроводности, по-видимому, можно связать с особенностями строения селена и процессом кристаллизации, что можно представить себе следующим образом: в

области температур замерзания в цепи, где атомы связаны главными валентностями, возбуждаются вращательные колебания и вращательная энергия превышает энергию связи атомов в цепи. При повышении температуры удастся разорвать главную валентность. После этого, как показал Кребс, происходит упорядочение центров [6].

Эти маленькие упорядоченные области окружены беспорядочными областями. С повышением температуры отжига упорядоченные области медленно растут за счет беспорядочных.

По мере совершенствования областей, т. е. кристаллизации селена, растет длина свободного пробега фононов, а следовательно и теплопроводность.

Постоянство теплопроводности (рис. 1, кривая 3) в температурном интервале 77—300°К, по-видимому, объясняется тем, что теплоемкость при этом уменьшается, а длина свободного пробега фононов увеличивается и происходит их компенсация.

При переходе к 4-ой кривой (рис. 1) начинается кристаллический ход теплопроводности, это, по-видимому, объясняется тем, что при понижении температуры длина свободного пробега увеличивается.

Используя данные [11] о теплоемкости и собственные результаты о теплопроводности кристаллического селена (рис. 1, кривая 7), нами была построена температурная зависимость длины свободного пробега фононов (рис. 2). Видно, что с понижением температуры длина свободного пробега фононов увеличивается. Это указывает на то, что фононы рассеиваются в основном на тепловых колебаниях решетки.

Вычисленную по формуле (1) среднюю длину свободного пробега фононов мы сопоставили со средней их длиной, их вычисленной на основании теоретической [7] формулы (2):

$$l = 0,06 \frac{\kappa}{h^2} \cdot \frac{\theta_1 \bar{m}^2}{\rho \gamma^2} f\left(\frac{\theta_1}{T}\right), \quad (2)$$

где $\bar{m}$ — средняя масса атома селена, γ — постоянная Грюнаизена, ρ — плотность, θ_1 — температура Дебая, κ и h — соответственно, постоянные Больцмана и Планка. При

$$T > \theta_1 f\left(\frac{\theta_1}{T}\right) = \frac{\theta}{T}, \quad (3)$$

а при

$$T < \theta_1 f\left(\frac{\theta_1}{T}\right) = \left(\frac{T}{\theta_1}\right)^3 \exp\left(\frac{\theta_1}{bT}\right). \quad (4)$$

В результате оказалось, что вычисленная из формулы (2) длина свободного пробега фононов при комнатной температуре почти в три

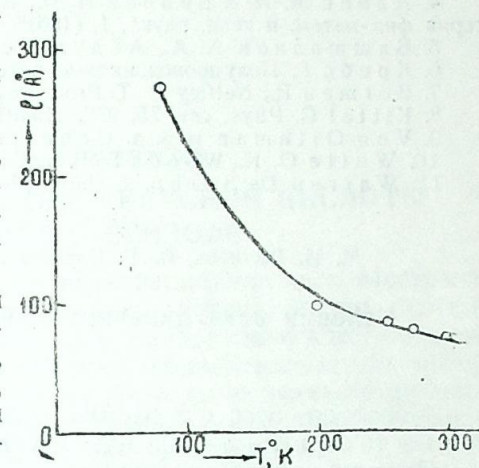


Рис. 2.

Зависимость длины свободного пробега фононов от температуры

раза превышает ее экспериментальные значения. Это указывает, по-видимому, на то, что в кристаллическом селене, кроме рассеяния на тепловых колебаниях решетки, имеют место и другие механизмы рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. А., Алиева М. И., Ахундова С. А. ФТТ, 3, 2, (1961).
2. Алиев Г. М., Абдуллаев Г. Б. ДАН СССР*, 1, 120, (1958).
3. Алиев Г. М., Алиев Б. Д., Керимов И. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук*, 5, (1960).
4. Алиев М. И. и Велиев Н. И., Керимов И. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук*, 1, (1961).
5. Башшалиев А. А., Абдуллаев Г. Б. ДАН Азерб. ССР*, 9, 8, (1957).
6. Кребс Г. Полупроводниковые материалы. ИЛ, 1954.
7. Berman R., Nettley P. T. Proc. Roy. soc. V. 253, 1274, 956, (1959).
8. Kittel C. Phys. rev. 75, 972, (1949).
9. Von Orthman H. J. a. Ueberriter K. Kolloidzs. 3, 147, (1953).
10. White G. K., Woods S. B. a. Elford M. T. Phys. rev. 112, 1, 111, (1958).
11. Warren De Sorbo. J. chem. phys. 21, 1114, (1958).

М. И. Вәлиев, И. Г. Кәримов, Г. М. Әлиев, М. И. Әлиев

Селенин истиликкечирмәсинә кристаллашманын тә'сири

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә, әсас е'тибарилә, селенин истиликкечирмәсинә кристаллашма тә'сиринин тәдгиг едилмәсиндән бәһс олунур.

Әввәлчә аморф селенин истиликкечирмәси, сонра һәммин аморф селен 100, 150, 200, 210, 215, 218°C температурда ујғун олараг бир саат кристаллашдырылараг истиликкечирмәси 77—300°K температур интервалында өлчүлмүшдүр. Тәчрүбә көстәрир ки, аморф селенин истиликкечирмәси 77—300°K температур интервалында температурун артмасы илә артыр, там кристаллашмыш селенин истиликкечирмәси исә азальыр.

Мараглы орасындадыр ки, аморф селени 100°C температурда бир саат вә 150°C температурда тәкрарән бир саат кристаллашдырдыгда, онун истиликкечирмәси 77—300°C температур интервалында температурдан асылы олмур. Көрүнүр, бу температур интервалында фононларын орта сәрбәст јолу узунлуғунун температурун артмасы илә азалмасы вә истилик тутумунун исә артмасы ејни асылылыгга дәјишдијиндән бир-бирини компенсә едир.

Ону да гејд етмәк лазымдыр ки, селенин кристаллашмасы фононларын орта сәрбәст јолу узунлуғуна, јә'ни истиликкечирмәјә чох бөјүк тә'сир етмишдир.

Бунунла јанашы, селенин истиликкечирмәсинин тәчрүбәдән алынган гијмәтинә, истилик тутумунун әдәбијјатдан көтүрүлмүш гијмәтинә көрә фононларын орта сәрбәст јолу узунлуғу Дебај дәстурундан һесаблинмыш вә тәчрүбәдән алынган гијмәт нәзәријјә илә тутушдурулмушдур.

Апарылан һесаблама көстәрмишдир ки, отаг температурунда фононларын орта сәрбәст јолу узунлуғунун нәзәри һесабламадан тапылан гијмәти тәчрүбәдән алынган гијмәтдән тәгрибән үч дәфә бөјүкдүр.

Әлбәтгә, реал кристаллара хас олан бу һал ону көстәрир ки, селендә дә истилији дашыјан гәфәс далғалары бир-бириндән сәпилмәклә бәрәбәр, һәм дә гәфәсдә олан мүхтәлиф тәбиәтли дефектләрдән сәпилир.

Л. М. ИМАНОВ, Ф. Г. МИРЗОЕВ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УКСУСНОЙ КИСЛОТЫ И ЕЕ РАСТВОРОВ В БЕНЗОЛЕ

В предлагаемой работе изучена концентрационная зависимость статической и комплексной диэлектрических проницаемостей системы уксусная кислота — бензол. Комплексная диэлектрическая проницаемость измерена на волне 3,26 см во всем концентрационном интервале. Исследовалось также влияние остатков воды на значение диэлектрической проницаемости и на характер кривых температурной зависимости диэлектрических коэффициентов уксусной кислоты.

1. Изучению диэлектрических свойств уксусной кислоты посвящен ряд работ [2, 7, 13, 15]. Однако в этих исследованиях, проведенных вне дисперсионной области, полученные значения диэлектрической проницаемости, как правило, сильно отличаются друг от друга, причем, различия превышают погрешности методов измерений. Смайс и его сотрудники [15] для статической диэлектрической проницаемости уксусной кислоты при комнатной температуре получили значение 6,13, Пекар—6,72 [13]; Осипов—6,46 [7]. Видимо, причиной этих различий является сильная зависимость диэлектрической проницаемости от степени чистоты образца.

С целью проверки влияния остатков воды на диэлектрические свойства уксусной кислоты для образцов, содержащих 1; 3 и 5% воды, проведены измерения статической диэлектрической проницаемости ϵ_0 и температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon''$ в интервале $+20 \div -30^\circ\text{C}$, при частоте 3 мГц.

Статическая диэлектрическая проницаемость измерена на мосте типа „Ульрих“ и на куметре типа „Тесла“ при частоте 1 мГц. Для измерения температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости был использован Q—метр типа КВ-1 с индуктивно связанным контуром [3]. Во всех случаях отклонения от средних значений для ϵ были не больше $1 \div 2\%$.

Образец охлаждался парами жидкого азота, пропускавшимися через рубашку конденсатора. Температура образца регулировалась терморегулятором [4].

Опыт показывает, что статическая диэлектрическая проницаемость линейно возрастает с увеличением содержания воды в образце. На рис. 1 показана зависимость ϵ_0 от объемной доли воды в уксусной кислоте x . Рассмотрение графика позволяет предположить, что несогласованность литературных данных вызвана различиями в степени

влажности образца. Присутствие воды в уксусной кислоте оказывает влияние и на характер зависимости комплексной диэлектрической проницаемости от температуры. На рис. 2 и 3, соответственно, показана температурная зависимость статической диэлектрической проницаемости чистой уксусной кислоты и диэлектрической проницаемости ϵ' и показателя потерь $\operatorname{tg} \delta$ образца, содержащего 1% воды.

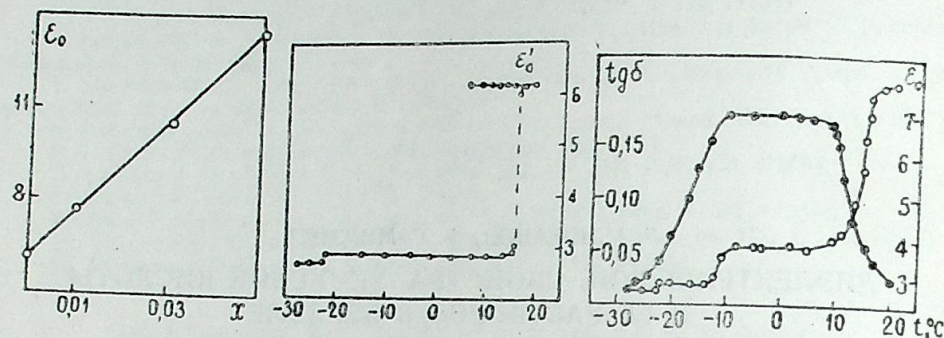


Рис. 1. Зависимость статической проницаемости ϵ_0 от объемной доли x воды в уксусной кислоте.
Рис. 2. Температурная зависимость статической диэлектрической проницаемости ϵ_0 уксусной кислоты: $\circ$ —переохлажденное состояние.
Рис. 3. Температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' ($\circ$) и показателя потерь $\operatorname{tg} \delta$ ($\bullet$) уксусной кислоты, содержащей 1% воды.

При изучении температурной зависимости диэлектрической проницаемости чистой уксусной кислоты при частоте 1 МГц при медленном охлаждении образца до $+5^\circ\text{C}$ обнаружено постоянство в значении $\epsilon_0 = 6,2$ (рис. 2). Это показывает, что образец остается в переохлажденном состоянии. При дальнейшем охлаждении образец переходит в твердое состояние, температура скачком поднимается до температуры плавления ($16,5^\circ\text{C}$), а ϵ_0 падает до 3,00. При дальнейшем охлаждении до 14°C ϵ_0 плавно падает до значения 2,85 и остается постоянной до $-22,5^\circ\text{C}$. При температуре $-22,5^\circ\text{C}$ ϵ_0 скачком падает до 2,7 и в дальнейшем с изменением температуры практически не меняется.

Из рис. 3 видно, что диэлектрическая проницаемость ϵ' образца, содержащего 1% воды, при температуре застеклования плавно падает до значения 3,80, а не до 2,85, как у чистого образца. В интервале от -8°C до -14°C ϵ' медленно падает до 2,85 и дальнейший ход зависимости точно совпадает с ходом для чистого образца.

С увеличением количества воды в составе образца уменьшается скорость изменения ϵ' в зависимости от температуры в основной и первой дополнительной дисперсиях, но величина перепада ϵ' растет. Характер температурной зависимости показателя потерь $\operatorname{tg} \delta$ одинаков для разных образцов и частот. $\operatorname{tg} \delta$ отличается только численными значениями.

Из вышесказанного можно предположить, что вторая дисперсия обусловлена релаксацией молекул воды, а потери являются структурными.

Положение дисперсии, обнаруженной вблизи температуры $-22,5^\circ\text{C}$, и изменение ϵ в этой области не зависят от количества воды в составе образца. По-видимому, эта дисперсия не связана с наличием воды и обусловлена либо изменением в структуре твердой уксусной кислоты, либо присутствием молекул неизвестной примеси.

2. Для измерения комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon^x = \epsilon' - i\epsilon''$ на волне 3,26 см использован волноводный метод. Блок-

схема установки показана на рис. 4. Модулированный сигнал с высокочастотного генератора подается на образец, помещенный в измерительной ячейке, и, отражаясь от образца, создает картину стоячей волны в волноводной измерительной линии. Волноводная измерительная линия представляет собой отрезок волновода, имеющий узкую щель посередине широкой стенки последнего. Через щель в волновод входит тонкий металлический зонд с настраиваемой измерительной головкой, который перемещается кареткой, помещенной над щелью. Микрометрическая система позволяет определять положение зонда с точностью до 0,01 мм. Отбираемый зондом сигнал выпрямляется кристаллическим детектором и подается на усилитель.

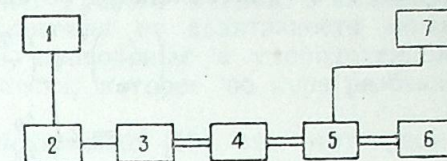


Рис. 4. Блок-схема измерительной установки на волне 3,26 см:

1—стабилизатор; 2—блок питания; 3—клистронный генератор; 4—аттенуатор; 5—измерительная линия; 6—измерительная ячейка; 7—индикатор.

Измерительная ячейка представляет собой отрезок волновода, соединенный волноводной линией с переходником, изогнутым на 90° от направления волноводной линии. Ячейка отделяется от переходника тонкой слюдой толщиной 0,01 мм. В ячейку помещается поршень, перемещаемый микрометрическим винтом, который позволяет определить толщину образца с точностью до 0,01 мм. С помощью такой ячейки можно измерять комплексную диэлектрическую проницаемость одновременно методами Хиппеля [9] и Поли [14]. При измерении использовались оба метода.

Метод Хиппеля основан на изучении распределения поля в измерительной линии при введении в ячейку образца определенной толщины. В общем случае, в части волновода, заполненного диэлектриком, постоянная распространения электромагнитных волн вычисляется с помощью сложного комплексного трансцендентного уравнения, но для диэлектриков с малыми потерями это уравнение упрощается и для вычисления ϵ' и ϵ'' даются формулы [1,5]:

$$\epsilon' = \frac{1 + \left(\frac{\beta l_c}{2\pi\lambda_d}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_d}\right)^2},$$

$$\epsilon'' = \frac{2q\lambda_d\lambda_c^2}{1 + \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_d}\right)^2} \left(\frac{\beta}{2\pi l}\right)^3 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi x_0}{\lambda_d}}{\beta \left[1 + \frac{\lambda_d}{2\pi l} \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_d} \left(1 + \beta^2 \frac{\lambda_d}{2\pi l} \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_d}\right)\right]}$$

Здесь β находится из трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} = -\frac{\lambda_d}{2\pi l} \operatorname{tg} \frac{2\pi x_0}{\lambda_d}, \quad (a)$$

где l —толщина образца, x_0 —расстояние от поверхности диэлектрика до первого минимума напряженности стоячей волны, λ_c —критическая длина волны, λ_d —длина волны в волноводе и q —коэффициент бегучести.

Для однозначного решения уравнения (a) проводится несколько измерений образцов различной толщины. Для диэлектриков с большими потерями уравнение (a) приводит к большой ошибке. Поэтому

концентрированные растворы уксусной кислоты измерялись методом, предложенным Поли [14]. Этот метод основан на измерении коэффициента стоячей волны κ , в зависимости от толщины образца. В этом случае ϵ' и ϵ'' вычисляются по следующим формулам:

$$\epsilon' = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_d} \right)^2 \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta}{2} \right).$$

$$\epsilon'' = 2 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_d} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}.$$

Здесь λ_0 —длина волны в вакууме, а λ_d —в диэлектрике. λ_d и $\operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}$ вычисляются по графику зависимости $K = \kappa(d)$. При построении графика $K = \kappa(d)$ были учтены отражения от слюды, от сочленений и др. Растворы уксусной кислоты в бензоле с концентрацией <40% измерялись по методу Хиппеля, а при остальных концентрациях измерения велись по методу Поли. Измерения при концентрациях 40 и 50% проводились по обоим методам, полученные значения совпадают. Во всех случаях отклонения от средних значений составляют для ϵ' 1%, а для ϵ'' 2%.

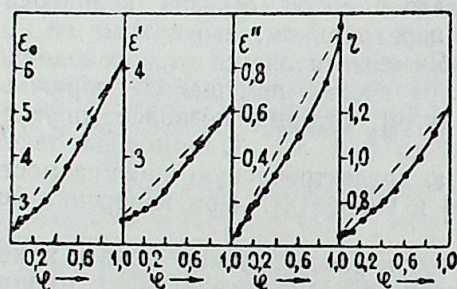


Рис. 5. Концентрационная зависимость ϵ_0 , ϵ' , ϵ'' и вязкости η_p системы бензол—уксусная кислота.

Вязкость во всем концентрационном интервале измерена методом, предложенным Х. М. Халиловым [8].

Изученные вещества (бензол и уксусная кислота) были марки „ХЧ“ и измеренные нами значения показателей преломления и плотности хорошо согласуются с литературными данными.

Таблица 1

φ (концентрация в молярных долях)	ϵ_0	ϵ'	ϵ''	η_p (с.п.)
0,0328	2,30	—	—	0,658
0,0667	2,40	—	—	0,669
0,1020	2,45	2,33	0,06	—
0,1385	2,57	—	—	—
0,153	2,68	2,35	0,13	0,673
0,2165	2,75	—	—	—
0,3000	2,99	2,41	0,20	0,715
0,3980	3,28	2,48	0,26	0,774
0,4910	3,74	2,62	0,32	0,801
0,6040	4,25	2,80	0,41	0,59
0,7220	4,84	2,99	0,50	0,920
0,8560	5,56	3,16	0,58	0,998
1,0000	6,20	3,40	0,74	1,104
		3,57	1,02	1,225

В табл. 1 приведены значения статической и комплексной диэлектрических проницаемостей, измеренные во всем интервале концентраций на волне 3,26 см при 20°C, а также значения вязкости. Соответствующие графики показаны на рис. 5.

На графиках концентрационной зависимости ϵ_0 , ϵ' и ϵ'' отмечаются отрицательные отклонения от аддитивности.

Такие отклонения характерны и для растворов некоторых других жидкостей. Но, к сожалению, пока нет единого мнения о механизме этого процесса. Отрицательные отклонения от аддитивности можно объяснить как результат ассоциации, приводящей к упорядоченному распределению диполей чистой жидкости, которое по мере разбавления ослабляется.

Шахпаронов и его сотрудники показывают [10], что этот процесс создается за счет флюктуаций концентрации.

Во второй таблице даны значения времени релаксации, вычисленные по формуле $\tau = \frac{\epsilon_0 - \epsilon'}{\omega \epsilon''}$; $\frac{\tau}{\eta_p}$ и рассчитанная по Фрелиху ориентационная часть поляризации P_d для всего интервала концентрации.

Следуя Фишеру [12], по времени релаксации можно судить о полимеризации дипольных молекул в растворе. Можно ожидать, что с увеличением размеров релаксирующей частицы значение $\frac{\tau}{\eta_p}$ будет возрастать с концентрацией (η_0 —вязкость бензола, а η_p —вязкость раствора).

Действительно, как видно из рис. 6, значение $\frac{\tau}{\eta_p}$ увеличивается с ростом концентрации уксусной кислоты. Следовательно, можно предполагать, что причиной отклонения диэлектрической проницаемости от аддитивности в данной системе является именно ассоциация молекул уксусной кислоты, которая усиливается по мере концентрирования раствора.

3. Некоторые авторы вычислили дипольный момент молекулы уксусной кислоты, используя дебаевскую формулу для поляризации полярной жидкости, растворенной в неполярном растворителе. Найденные таким образом значения дипольного момента μ из раствора уксусной кислоты в бензоле (Смайс [15], Пекар [13] и Капустин [6]) примерно в два раза меньше, чем значение 1,73 Д, полученное Цаном [17] на основе диэлектрических свойств паров уксусной кислоты.

В то же время Вильсон [16] нашел для дипольного момента уксусной кислоты, растворенной в диоксане, значение 1,74 Д. Поэтому предполагали, что причиной успеха Вильсона является правильный выбор растворителя. В дальнейшем Эльцин [2] нашел значение дипольного момента, согласующееся с результатом Цана, и показал, что вышеуказанные расхождения объясняются проведением измерения при больших концентрациях уксусной кислоты. Чтобы выяснить, какое из указанных соображений правильно, нами была вычислена по уравнению Фрелиха [11] ориентационная часть поляризации P_d в зависимости от концентрации на основе статических значений диэлектрических проницаемостей:

$$P_d = \frac{4 \pi N g \mu^2}{9 k T} = \frac{1}{x} \frac{M}{\rho} \frac{(2 \epsilon_0 + \epsilon_\infty)(\epsilon_\infty + 2)}{3 \epsilon_0(\epsilon_\infty + 2)} \left(\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 + 2} - \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} \right).$$

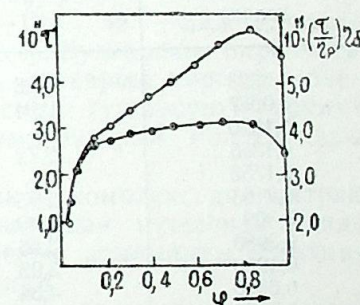


Рис. 6. Концентрационная зависимость времени релаксации (○) и значение $\frac{\tau}{\eta_p}$ (●).

где g — коэффициент корреляции, x — концентрация в объемных долях, остальные величины имеют обычный смысл. Для чистой уксусной кислоты $\epsilon_{\infty} = 2,00$ вычислена прибавлением к рефракции 10%, а для

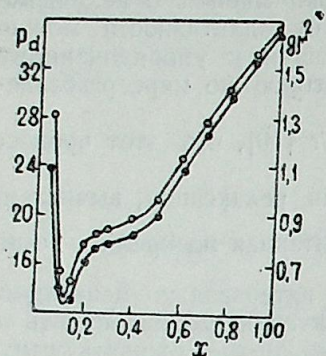


Рис. 7.

Концентрационная зависимость ориентационной части поляризации P_d (●) и значения $g\mu^2(0)$, вычисленные по формуле Фрелиха.

раствора было принято, что ϵ_{∞} меняется аддитивно.

Результаты вычисления для P_d и $g\mu^2$ даны в табл. 2 и на рис. 7.

Из графика видно, что ориентационная часть поляризации P_d и $g\mu^2$ с уменьшением концентрации уксусной кислоты уменьшается до минимума $x = 0,12$, а с дальнейшим уменьшением концентрации резко увеличивается. Для объяснения полученных концентрационных зависимостей P_d и $g\mu^2$ можно полагать, что чистая уксусная кислота состоит из мономеров, димеров и из цепочек. В растворе цепочки разрушаются. Приблизительно при концентрации $x = 0,12$ основная часть молекул находится в димерном состоянии с антипараллельными моментами.

При дальнейшем разбавлении раствора димеры также разрушаются, переходя в момеры.

Таблица 2

φ (концентрация в молярных долях)	$\tau \cdot 10^{11}$	$\frac{\tau}{\eta_p} \cdot 10^{11}$	P_d	$g\mu^2 \cdot 10^{33}$
0,0328	0,88	1,34	23,9	1,32
0,0667	2,04	3,06	13,9	0,67
0,1020	—	—	12,8	0,62
0,1385	2,72	4,05	16,2	0,78
0,1753	—	—	17,3	0,83
0,2165	2,95	4,14	17,6	0,85
0,300	3,40	4,40	18,4	0,88
0,3980	3,65	4,56	20,2	0,97
0,4910	3,98	4,64	23,5	1,13
0,6040	4,35	4,73	26,7	1,28
0,7220	4,86	4,87	29,6	1,42
0,856	5,16	4,65	32,7	1,57
1,000	4,55	3,72	34,7	1,67

Концентрационная зависимость времени релаксации (рис. 6), рассчитанная на основе измерений, произведенных на волне 3,26 см, также подтверждает, что при малых концентрациях ($x = 0,12$) уксусной кислоты в образце уменьшаются размеры релаксирующих частиц.

Таким образом, правильное значение для дипольного момента молекулы уксусной кислоты может быть получено только при измерениях с сильно разбавленными растворами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурдун Г. Д. ЖТФ, т. XX, вып. 7, (1950).
2. Эльцин И. А. Уч. зап. МГУ, вып. 95, физика, кн. 4, (1946).
3. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. Уч. зап. АГУ, серия физ.-матем. и химич. наук, № 1, (1926).
4. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, № 5, (1961).
5. Иманов Л. М. Вестник МГУ, № 5, (1950).

6. Капустин А. П. ЖЭТФ, т. 17, вып. 1, (1947).
7. Осипов О. А. ЖОХ, т. 32, вып. 10, (1958).
8. Халилов Х. М. Журнал ПТЭ, № 4, (1958).
9. Хиппель А. Диэлектрики и их применение. М., (1959).
10. Шахпаронов М. И. и др. Критические явления и флуктуации в растворах (тр. совещ.), 1960.
11. Brot, Soulard. Arch. des sci., 12, 9—13, (1959).
12. Fischer E. Naturforschung, 8a, S. 168—176, (1953).
13. Piakara A. et Piakara B. C. R. 198, 1018 (1934).
14. Poley P. Appl. Sci. Res. v. 4, (1955).
15. Smyth C. P. a. Rogers H. J. Amer. chem. soc. 52, 1824, (1930).
16. Wilson C. a. Wenzke H. J. chem. phys. 2, 546, (1934).
17. Zahn C. Phys. rev. 35, 1047, (1930).

Л. М. Иманов, Ф. Н. Мирзэев

Сиркэ туршусу вэ онун бензолда мѣллулунун диелектрик хассэлэри

ХҮЛАСӘ

Тәгдим олуна мѣгалә сиркэ туршусу вэ онун бензолда бүтүн консентрасија интервалында мѣллулунун диелектрик хассэлэринин тәдгигинә һәср едилир.

1. Тәмиз вэ тәркибиндә 1; 3 вэ 5% су олан сиркэ туршусунун статик диелектрик әмсалы ϵ_0 өлчүлмүш вэ мүәјјән едилмишдир ки, ϵ_0 нүмунәнин тәркибиндәки сујун мигдарындан асылы олараг хәтти артыр.

2. Һәммин нүмунәләрдә комплекс диелектрик әмсалынын $\epsilon^x = \epsilon' - i\epsilon''$ температур асылылығы өјрәниләркән, -10°C вэ $-22,5^\circ\text{C}$ әтрафында әлавә дисперсија мүшаһидә едилмишдир. Бунлардан биринчиси нүмунәдә сујун мигдарындан асылы олараг дәјишдијинә көрә су молекуллары һесабына, икинчисини исә донмүш сиркэ туршусунун гурулушундакы дәјишклик вэ ја башга намәлүм ашгарын молекуллары һесабына јаранмасы күман едилир.

3. Сиркэ туршусунун өзлүлүјүнүн, статик вэ комплекс диелектрик әмсалынын консентрасија асылылығы өјрәниләркән мүшаһидә едилмишдир ки, ϵ_0 , ϵ' , ϵ'' вэ η -нын консентрасијадан асылылығы аддитивликдән кәнара чыхыб мәнфи мейлә малик олур.

Бу һадисә сиркэ туршусу молекулларынын ассосасијасы нәтичәси кими изаһ едилир.

4. Јөнәлмә полјаризасијасы P_d вэ $g\mu^2$ һасилинин консентрасија асылылығыны изаһ етмәк үчүн фәрз едилир ки, тәмиз һалда сиркэ туршусу әсасән зәнчирвары комплексләрдән тәшкил олунмүш вэ мѣллулда сиркэ туршусунун азалмасы илә зәнчирләр парчаланыр. Тәхминән консентрасијанын $x = 0,12$ гијмәтиндә молекулларын әсас һиссәсини димер тәшкил едир. Консентрасијанын $x < 0,12$ гијмәтләриндә димерләр дә мономер молекуллара парчаланыр.

5. Сиркэ туршусунун дипол моментини тәјјин етмәк үчүн көстәрилир ки, сиркэ туршусунун гејри-полјар маддәдә чох дурулашмыш мѣллулунда, јәни консентрасијанын $x < 0,12$ гијмәтләриндә өлчү апармаг лазымдыр.

Я. Б. КАДЫМОВ, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. И. АБДУРРАХМАНОВ, З. Я. КУЛИЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ БЕЗ УЧЕТА ПОТЕРЬ

В настоящей статье применен численный метод, изложенный в работе [4], для приближенного расчета переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами. Метод этот используется для определения переходного процесса в любой точке цепи.

Решение ведется по рекуррентным формулам, позволяющим рассчитывать переходной процесс для любого момента времени и для любой точки цепи, минуя стадию отыскания корней характеристического уравнения, или полюсов передаточной функции, что значительно упрощает расчеты, позволяет легко программировать задачи на цифровых вычислительных машинах и вести расчет с достаточной точностью.

В качестве электрических цепей с распределенными параметрами рассмотрим однородные линии конечной длины.

При решении задач потерями в линии пренебрегаем: $R=0$, $G=0$. Как известно, в этом случае уравнения длинной линии имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где: R , L , G , C —сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость между проводом и землей, отнесенные к единице длины.

Рассмотрим включение конечной линии через линейные индуктивность L_1 и сопротивление R_1 к постоянному напряжению (рис. 1).

а. Для начала линии можно написать следующее уравнение в операторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(p) &= (R_1 + p L_1) \bar{i}_{1x}(p) + \\ &+ \bar{u}_{1x}(p), \end{aligned} \quad (2)$$

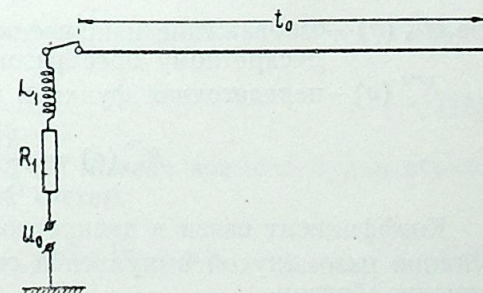


Рис. 1

Я. Б. КАДЫМОВ, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, М. И. АБДУРРАХМАНОВ, З. Я. КУЛИЕВ

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ БЕЗ УЧЕТА ПОТЕРЬ

В настоящей статье применен численный метод, изложенный в работе [4], для приближенного расчета переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами. Метод этот используется для определения переходного процесса в любой точке цепи.

Решение ведется по рекуррентным формулам, позволяющим рассчитывать переходной процесс для любого момента времени и для любой точки цепи, минуя стадию отыскания корней характеристического уравнения, или полюсов передаточной функции, что значительно упрощает расчеты, позволяет легко программировать задачи на цифровых вычислительных машинах и вести расчет с достаточной точностью.

В качестве электрических цепей с распределенными параметрами рассмотрим однородные линии конечной длины.

При решении задач потерями в линии пренебрегаем: $R=0$, $G=0$. Как известно, в этом случае уравнения длинной линии имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= L \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= C \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1)$$

где: R , L , G , C —сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость между проводом и землей, отнесенные к единице длины.

Рассмотрим включение конечной линии через линейные индуктивность L_1 и сопротивление R_1 к постоянному напряжению (рис. 1).

а. Для начала линии можно написать следующее уравнение в операторной форме:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(p) &= (R_1 + p L_1) \bar{i}_x(p) + \\ &+ \bar{u}_{1x}(p), \end{aligned} \quad (2)$$

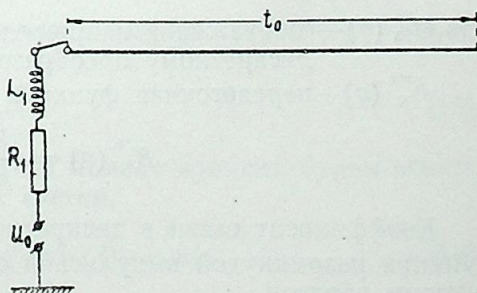


Рис. 1

где $\bar{u}_0(p)$, $\bar{i}_{1x}(p)$, $\bar{u}_{1x}(p)$ — изображения напряжения источника тока и напряжения в начале включенной линии.

Из уравнения (2) имеем:

$$\bar{i}_{1x}(p) = \bar{u}_0(p) \bar{\kappa}_1(p) - \bar{u}_{1x}(p) \bar{\kappa}_1(p), \quad (3)$$

где

$$\bar{\kappa}_1(p) = \frac{1}{R_1 + pL_1} \quad (4)$$

рассматриваем как передаточную функцию разомкнутой непрерывной системы.

Зависимость тока от напряжения в операторной форме представим в виде:

$$\bar{i}_{1x}(p) = \frac{1}{z} \bar{\kappa}_c(p) \bar{u}_{1x}(p), \quad (5)$$

где

$$\bar{\kappa}_c(p) = \frac{1 - e^{-2pt_0}}{1 + e^{-2pt_0}} \quad (6)$$

коэффициент, устанавливающий связь между током $\bar{i}_{1x}(p)$ и напряжением $\bar{u}_{1x}(p)$ в начальной точке линии при холостом ходе [5];

z — волновое сопротивление линии;

t_0 — время пробега волны в один конец.

Подставив выражение для тока (5) в уравнение (3), найдем выражение для напряжения:

$$\bar{u}_{1x}(p) = \frac{\bar{u}_0(p)}{1 + \frac{1}{z} \bar{\kappa}_c(p)}, \quad (7)$$

где

$$\bar{\kappa}_c(p) = \frac{\bar{\kappa}_c(p)}{\bar{\kappa}_1(p)}. \quad (8)$$

В выражении (7) напряжение $\bar{u}_{1x}(p)$ можно трактовать как выходную величину в непрерывной замкнутой системе, а $\bar{u}_0(p)$ — как входную.

Переводя непрерывную замкнутую систему в импульсную по правилам теории замкнутых импульсных систем [8], получим напряжение в дискретной форме:

$$U_{1x}^*(q) = \frac{u_0}{1 + \frac{1}{z} K_c^*(q)} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1}, \quad (9)$$

где $U_{1x}^*(q)$ — изображение напряжения в начале включенной линии по дискретному преобразованию Лапласа;

$K_c^*(q)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы,

$$K_c^*(q) = \frac{K_c(q)}{K_1(q)}. \quad (10)$$

Коэффициент связи в дискретной форме $K_c^*(q)$ и передаточная функция разомкнутой импульсной системы $K_1^*(q)$ определяются следующим образом.

Установим связь между параметром p при обычном преобразовании и параметром q при дискретном преобразовании Лапласа в виде:

$$p = \frac{\lambda q}{T}, \quad (11)$$

где λ и T — относительный и абсолютный периоды повторения решетчатой функции, причем $T = 2t_0$.

Подставив значение p в выражение (6), получим:

$$K_c^*(q) = \frac{e^{\lambda q} - 1}{e^{\lambda q} + 1}. \quad (12)$$

При амплитудно-импульсной модуляции с прямоугольными импульсами передаточную функцию разомкнутой импульсной системы $K_1^*(q)$ находим по правилу перехода от непрерывной системы к импульсной [8]:

$$K_1^*(q) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1 - e^{-a_1'}}{e^q - e^{-a_1'}}, \quad (13)$$

где

$$a_1' = T' \frac{R_1}{L_1} = \frac{2t_0}{\lambda} \cdot \frac{R_1}{L_1}. \quad (14)$$

Определив значение $K_c^*(q)$ из (10) и подставив его в выражение (9), получим:

$$U_{1x}^*(q) = \frac{B_\lambda e^{\lambda q} + B_0}{A_{\lambda+1} e^{(\lambda+1)q} + A_\lambda e^{\lambda q} + A_1 e^q + A_0} \cdot \frac{e^q}{e^q - 1} u_0, \quad (15)$$

где

$$B_\lambda = B_0 = \frac{z}{R_1} (1 - e^{-a_1'}),$$

$$A_{\lambda+1} = 1,$$

$$A_\lambda = \frac{z}{R_1} - \left(\frac{z}{R_1} + 1 \right) e^{-a_1'},$$

$$A_1 = -1,$$

$$A_0 = \frac{z}{R_1} - \left(\frac{z}{R_1} - 1 \right) e^{-a_1'}.$$

Выражение (15) представим в виде:

$$U_{1x}^*(q) = K_{3u_1}^*(q) \cdot F^*(q), \quad (16)$$

где $K_{3u_1}^*(q)$ — передаточная функция замкнутой импульсной системы по напряжению:

$$K_{3u_1}^*(q) = \frac{B_\lambda e^{\lambda q} + B_0}{A_{\lambda+1} e^{(\lambda+1)q} + A_\lambda e^{\lambda q} + A_1 e^q + A_0}, \quad (17)$$

$F^*(q)$ — изображение входной величины по дискретному преобразованию Лапласа:

$$F^*(q) = u_0 \frac{e^q}{e^q - 1}. \quad (18)$$

Переходной процесс в любой n -ый момент времени будем искать по правилам замкнутых импульсных систем:

$$u_{1x}[n] = \sum_{m=0}^n \kappa_{3u_1}[m] f[n-m], \quad (19)$$

где $f[n-m]$ — входная величина равная u_0 ;
 $\kappa_{3u_1}[m]$ — импульсные характеристики по напряжению, которые отыскиваются по рекуррентному соотношению [8];

$$\kappa_{3u_1}[s+l_2-l_1] = \frac{1}{A_{l_2}} \left\{ B_{l_1-s} - \sum_{\mu=1}^s \kappa_{3u_1}[s-\mu+l_2-l_1] A_{l_2-\mu} \right\}, \quad (20)$$

$l_1 = \lambda$ — наивысшая степень многочлена по e^q , находящегося в числителе выражения (17);

$l_2 = \lambda + 1$ — наивысшая степень многочлена по e^q , находящегося в знаменателе выражения (17).

6. Напряжение в любой точке линии может быть определено следующим образом.

Для любой точки линии с нагрузкой R_2 на конце при $L_2=0$ выражение напряжения в дискретной форме имеет вид [7]:

$$U^*(q) = u_{1x} \frac{e^{2q}}{(e^q - 1)(e^q - e^{\varphi})} [e^{-q\delta} - e^{\varphi} e^{-q(1-\delta)}], \quad (21)$$

где u_{1x} — напряжение в начале линии;

$e^{\varphi} = \frac{z - R_2}{z + R_2}$ — вещественный параметр;

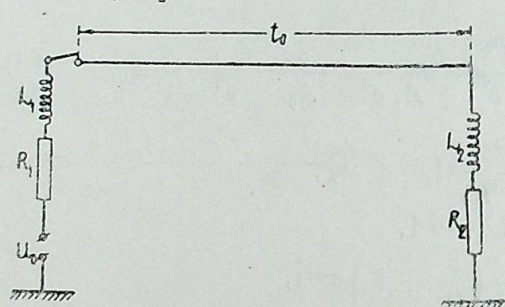


Рис. 2

$\delta = x/2l$ — отношение длины x к двойной длине линии.

Для холостой линии $e^{\varphi} = -1$, для конца $\delta = 0,5$. Подставив эти значения в выражение (21), получим:

$$U_{2x}^*(q) = 2U_{1x}^*(q) \frac{e^{0,5q}}{e^q + 1}. \quad (22)$$

Подставив значение $U_{1x}^*(q)$ из выражения (16) в (22), получим:

$$U_{2x}^*(q) = K_{3u_2}^*(q) \cdot F^*(q), \quad (23)$$

где

$$K_{3u_2}^*(q) = \frac{B'_{1,5\lambda} e^{1,5\lambda q} + B'_{0,5\lambda} e^{0,5\lambda q}}{A'_{2\lambda+1} e^{(2\lambda+1)q} + A'_{2\lambda} e^{2\lambda q} + A'_{\lambda} e^{\lambda q} + A'_1 e^q + A'_0}, \quad (24)$$

$$B'_{1,5\lambda} = B'_{0,5\lambda} = A'_{\lambda} = 2 \frac{z}{R_1} (1 - e^{-\alpha'_1}),$$

$$A'_{2\lambda+1} = 1,$$

$$A'_{2\lambda} = \frac{z}{R_1} - \left(\frac{z}{R_1} + 1 \right) e^{-\alpha'_1},$$

$$A'_1 = -1,$$

$$A'_0 = \frac{z}{R_1} - \left(\frac{z}{R_1} - 1 \right) e^{-\alpha'_1}.$$

По передаточной функции $K_{3u_2}^*(q)$ находим переходной процесс для напряжения в конце линии совершенно аналогично предыдущему случаю.

Расчет для тока ведется так же, как и для напряжения, имея в виду следующую связь между током и напряжением в дискретной форме [4]:

$$I_{1x}^*(q) = \frac{1}{z} \frac{e^{\lambda q} - 1}{e^{\lambda q} + 1} U_{1x}^*(q). \quad (25)$$

На рис. 3 изображены кривые зависимости напряжения от времени для начала линии. Кривые пунктиром рассчитаны по выражению

(19) при $\lambda = 10$ и $\lambda = 20$ непрерывная кривая рассчитана по известному методу Даламбера [5]. Во всех случаях принято

$$R_1 = z, \quad \frac{L_1}{z} = 2t_0.$$

Максимальная погрешность при $\lambda = 10$ составляет 9,57 % при $\lambda = 20$ — 2,86 %.

При расчете переходного процесса данным методом все операции сводятся к умножению, и сложению что позволяет легко программировать задачи на цифровых вычислительных машинах.

В таблице приведены значения напряжения в начале линии при $R_1 =$

$= 0,2 z, \quad \frac{L_1}{z} = 0,5 t_0$, полученные на ЭЦВМ и при ручном счете по методу Даламбера.

Для данного примера расчеты на ЭЦВМ велись при $\lambda = 10, 20, 30$ продолжительностью переходного процесса до $12 t_0$. В таблице даны значения напряжения при $\lambda = 30$ продолжительностью процесса до $6 t_0$.

Расчеты на ЭЦВМ выполнены Вычислительным центром Академии наук Азербайджанской ССР на машине Урал-1.

Рассмотрим процесс включения по схеме рис. 2. При учете нагрузки передаточная функция для начала линии будет иметь следующий вид:

$$K_{3u_1}^*(q) = \frac{B_{\lambda+1} e^{(\lambda+1)q} + B_{\lambda} e^{\lambda q} + B_1 e^q + B_0}{A_{\lambda+2} e^{(\lambda+2)q} + A_{\lambda+1} e^{(\lambda+1)q} + A_{\lambda} e^{\lambda q} + A_2 e^{2q} + A_1 e^q + A_0}, \quad (26)$$

где коэффициенты

$$B_{\lambda+1} = B_1 = \frac{z}{R_1} (1 - e^{-\alpha'_1}),$$

$$B_{\lambda} = \zeta_1 \cdot B_1,$$

$$B_0 = -\zeta_2 \cdot B_1,$$

$$A_{\lambda+2} = 1,$$

$$A_{\lambda+1} = B_1 + \zeta_1 - e^{-\alpha'_1}$$

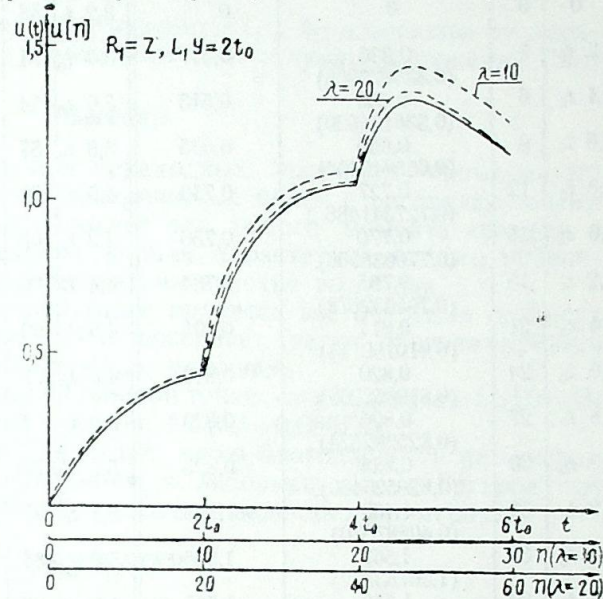


Рис. 3

t	n	Решение, полученное на ЭЦВМ урал-1	Решение, полученное при ручном счете по методу Даламбера	t	n	Решение, полученное на ЭЦВМ Урал-1	Решение, полученное при ручном счете по методу Даламбера
0	0	0	0	3,2 t_0	48	1,311 (1,31090672)	1,316
0,2 t_0	3	0,336 (0,335673968)	0,317	3,4 t_0	51	1,251 (1,25158916)	1,260
0,4 t_0	6	0,536 (0,536135520)	0,513	3,6 t_0	54	1,208 (1,20764106)	1,218
0,6 t_0	9	0,656 (0,655849404)	0,635	3,8 t_0	57	1,176 (1,17630506)	1,186
0,8 t_0	12	0,727 (0,727341486)	0,710	4,0 t_0	60	1,154 (1,15455142)	1,162
1,0 t_0	15	0,770 (0,770035930)	0,756	4,2 t_0	63	1,541 (1,54140328)	1,458
1,2 t_0	18	0,795 (0,795532678)	0,784	4,4 t_0	66	1,318 (1,31833214)	1,391
1,4 t_0	21	0,811 (0,810759114)	0,803	4,6 t_0	69	1,019 (1,01913674)	1,046
1,6 t_0	24	0,820 (0,819852208)	0,813	4,8 t_0	72	0,804 (0,804164592)	0,857
1,8 t_0	27	0,825 (0,825282524)	0,820	5,0 t_0	75	0,692 (0,691629108)	0,750
2,0 t_0	30	0,828 (0,828525460)	0,825	5,2 t_0	78	0,656 (0,656291936)	0,701
2,2 t_0	33	1,409 (0,40887670)	1,345	5,4 t_0	81	668 (0,667600948)	0,700
2,4 t_0	36	1,567 (1,56753772)	1,535	5,6 t_0	84	0,702 (0,701701656)	0,730
2,6 t_0	39	1,550 (1,55006472)	1,507	5,8 t_0	87	0,743 (0,743169804)	0,745
2,8 t_0	42	1,473 (1,74261082)	1,459	6,0 t_0	90	0,783 (0,783386888)	0,775
3,0 t_0	45	1,386 (1,38633276)	1,425				

$$A_\lambda = \zeta_1 \cdot (B_1 - e^{-a_1}),$$

$$A_2 = -1,$$

$$A_1 = B_1 + \zeta_2 + e^{-a_1},$$

$$A_0 = -\zeta_2 \cdot (B_1 + e^{-a_1}),$$

$$\zeta_1 = \frac{z}{R_2} - \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) e^{-a_2},$$

$$\zeta_2 = \frac{z}{R_2} + \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) e^{-a_2},$$

$$a_2 = T' \frac{R_2}{L_2} = \frac{2t_0}{\lambda} \cdot \frac{R_2}{L_2}$$

зависят от параметров схемы.

Выражение, при помощи которого можно осуществить переход к любой точке линии, находится аналогично выражению (21) и имеет следующий вид в дискретной форме:

$$U^*(q) = U_{in}^*(q) \cdot \frac{e^{\lambda q(1-\delta)} (e^q + \zeta_1) + e^{\delta \lambda q} (e^q - \zeta_2)}{e^{\lambda q} (e^q + \zeta_1) + e^q - \zeta_2}, \quad (27)$$

где

$$U_{in}^*(q) = K_{э_{ин}}^*(q) \cdot F^*(q). \quad (28)$$

Связь же между током и напряжением имеет вид:

$$I_{in}^*(q) = \frac{1}{z} \cdot \frac{e^{(\lambda+1)q} + \zeta_1 e^{\lambda q} - e^q + \zeta_2}{e^{(\lambda+1)q} + \zeta_1 e^{\lambda q} + e^q - \zeta_2} \cdot U_{in}^*(q). \quad (29)$$

Заметим, что приравняв коэффициенты ζ_1 и ζ_2 , зависящие от параметров нагрузки, к нулю в выражении (29), получим выражение (25).

Выводы

1. Численный метод расчета переходных процессов, примененный в данной работе для расчета электрических цепей с распределенными параметрами, позволяет вести расчет для любого момента времени и для любой точки, не определяя корней характеристического уравнения, что существенно упрощает математические выкладки.

2. При определении переходного процесса все операции сводятся к умножению и сложению, что позволяет легко программировать задачи на цифровых вычислительных машинах.

3. Расчеты можно вести с большой точностью, задаваясь $\lambda > 20 \div 30$, что соответствует интервалу времени $t < (0,1 \div 0,0667)t_0$.

В заключение авторы выражают свою благодарность инженерам М. М. Муслумову, А. К. Касумову и лаборанту Х. А. Багирову за проведенные числовые расчеты в вышеприведенных примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадымов Я. Б. Применение дискретного преобразования Лапласа к исследованию звеньев с распределенными параметрами. Изв. АН СССР, ОТН, энергетика и автоматика, 1959, № 5.
2. Кадымов Я. Б. Расчет переходных процессов электропривода, включающего звенья с распределенными параметрами. Изв. АН СССР, ОТН, энергетика и автоматика, 1960, № 3.
3. Кадымов Я. Б. Теория автоматизированного асинхронного электропривода с распределенными параметрами. Докт., дисс. 1960.
4. Кадымов Я. Б., Листенгартен Б. А. Приближенный метод расчета переходных процессов в системах автоматического регулирования, включающих звенья с распределенными параметрами. Автоматика и телемеханика, 1963.
5. Крук К. А. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Госэнергоиздат, М.—Л.
6. Машкиллейсон Л. Е. Переходные процессы и перенапряжения в электрических цепях. ОНТИ, Л.—М., 1938.
7. Разработка упрощенных методов расчета переходных процессов в однородных линиях электропередачи. Научный отчет лаборатории высокого напряжения и электрических цепей. ЭНИН АН Азерб. ССР, 1962.
8. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. Физматгиз, 1958.

Ю. Э. ГУЛИЕВ

РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ СИСТЕМЫ В МАЛОВОДНЫЕ ГОДЫ

В работе рассматриваются режим гидростанций и теплостанций систем в маловодные годы. Указанные режимы определяются, исходя из того, что речной сток является стохастическим процессом или случайной функцией времени. Трудности математического характера заставляют рассматривать непрерывный стохастический процесс речного стока как случайный процесс с дискретным временем, что дает возможность перейти от непрерывного случайного процесса к системе его случайных значений.

Процесс перехода осуществляется в следующем порядке: берется N реализаций (число лет наблюдений) случайной функции речного стока $Q(t)$ и рассматривается n сечений (число интервалов, на которое разбивается расчетный период) в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$.

В результате получается следующая таблица:

$$\begin{vmatrix} Q_1(t_1) & Q_1(t_2) & \dots & Q_1(t_n) \\ Q_2(t_1) & Q_2(t_2) & \dots & Q_2(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_N(t_1) & Q_N(t_2) & \dots & Q_N(t_n) \end{vmatrix} \quad (1)$$

Для N реализаций функции $Q(t)$ в различные моменты времени, т. е. для n различных сечений строятся функции распределения вероятностей:

$$P_s = P_s(Q_s, t_s). \quad (2)$$

Для построения (2) можно пользоваться функцией распределения плотности вероятностей Крицкого и Менкеля [2]:

$$\frac{dP_s}{dQ_s} = \frac{1}{\bar{Q}_s b \Gamma(\gamma)} \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{1}{b}} \exp - \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \frac{Q_s}{\bar{Q}_s} \right]^{\frac{1}{b}} \left(\frac{Q_s}{\bar{Q}_s} \right)^{\frac{1}{b} - 1}. \quad (3)$$

Постоянные γ и b для данного сечения определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 2b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^2} - 1; \\ \mu_3 &= \frac{[\Gamma(\gamma)]^2 \Gamma(\gamma + 3b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^3} - 3 \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 2b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^2} + 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\bar{Q}_s$ — средний расход s -го сечения;

Ю. Э. ГУЛИЕВ

РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ СИСТЕМЫ В МАЛОВОДНЫЕ ГОДЫ

В работе рассматриваются режим гидростанций и теплостанций систем в маловодные годы. Указанные режимы определяются, исходя из того, что речной сток является стохастическим процессом или случайной функцией времени. Трудности математического характера заставляют рассматривать непрерывный стохастический процесс речного стока как случайный процесс с дискретным временем, что дает возможность перейти от непрерывного случайного процесса к системе его случайных значений.

Процесс перехода осуществляется в следующем порядке: берется N реализаций (число лет наблюдений) случайной функции речного стока $Q(t)$ и рассматривается n сечений (число интервалов, на которое разбивается расчетный период) в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$.

В результате получается следующая таблица:

$$\begin{vmatrix} Q_1(t_1) & Q_1(t_2) & \dots & Q_1(t_n) \\ Q_2(t_1) & Q_2(t_2) & \dots & Q_2(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_N(t_1) & Q_N(t_2) & \dots & Q_N(t_n) \end{vmatrix} \quad (1)$$

Для N реализаций функции $Q(t)$ в различные моменты времени, т. е. для n различных сечений строятся функции распределения вероятностей:

$$P_s = P_s(Q_s, t_s). \quad (2)$$

Для построения (2) можно пользоваться функцией распределения плотности вероятностей Крицкого и Менкеля [2]:

$$\frac{dP_s}{dQ_s} = \frac{1}{\bar{Q}_s b \Gamma(\gamma)} \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\frac{1}{b}} \exp - \left[\frac{\Gamma(\gamma + b)}{\Gamma(\gamma)} \frac{Q_s}{\bar{Q}_s} \right]^{\frac{1}{b}} \left(\frac{Q_s}{\bar{Q}_s} \right)^{\frac{1}{b} - 1}. \quad (3)$$

Постоянные γ и b для данного сечения определяются из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 2b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^2} - 1; \\ \mu_3 &= \frac{[\Gamma(\gamma)]^2 \Gamma(\gamma + 3b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^3} - 3 \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma + 2b)}{[\Gamma(\gamma + b)]^3} + 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\bar{Q}_s$ — средний расход s -го сечения;

μ_2, μ_3 —соответственно второй и третий центральные моменты, которые определяются;

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\mu_2} \\ c_s &= \mu_3 / \mu_2^{-3/2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

σ, c_s —соответственно стандарт и коэффициент асимметрии сечения [3].

Перейдем к рассмотрению оптимальных годовых режимов ГЭС в маловодные годы. Как известно, в маловодные годы режимы гидроэлектростанций назначаются таким образом, чтобы суммарная мощность ТЭС системы за период регулирования была минимальной [6]:

$$\sum_{i=1}^K N_{Ti} = \min, \quad (6)$$

т. е. необходимо установить режимы уровней водохранилищ ГЭС:

$$Z_j = Z_j [Q_j(t), t], \quad (7)$$

подчиняющиеся условию (6).

Из выражения (7) видно, что отметки уровней водохранилищ Z_j являются случайными функциями аргумента Q_j , которые, в свою очередь, как было указано выше, являются случайными функциями времени.

Как доказывается в [3], условие (6) реализуется тогда, когда линия раздела нагрузок между ГЭС и ТЭС на годовом графике нагрузок горизонтальна. При распределении нагрузок между станциями учитываются мощности, выводимые на ремонт.

Следовательно, рабочая мощность теплостанций будет равна

$$\sum_{i=1}^K N_{\text{тп.р.б.}} = C - \sum_{i=1}^K N_{\text{тп.р.м.}}, \quad (8)$$

где C —наибольшая суммарная рабочая мощность теплостанций (верхняя минимальная искомая мощность теплостанций системы).

Минимум рабочей мощности теплостанций B найдется из условия:

$$\min C = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^K (N_{\text{тп.р.б.}} + N_{\text{тп.р.м.}}) = 0. \quad (9)$$

Решение задачи (9) достигается оптимизацией годовых режимов работы ГЭС. Эти режимы должны отвечать условию баланса нагрузок системы:

$$C - \sum_{j=1}^K N_{\text{тп.р.м.}} + \sum_{j=1}^m N_{\text{Г.Г.}} - N_{\text{ном.}} = P(t)$$

или

$$C = P_{\Phi}(t) - \sum_{j=1}^m N_{\text{Г.Г.}} + N_{\text{ном.}}, \quad (10)$$

где

$N_{\text{ном.}}$ —суммарная потеря мощности в сетях системы;
 $P(t)$ —график нагрузок системы;

$P_{\Phi}(t) = P(t) + \sum_{i=1}^K N_{\text{тп.р.м.}}$ —фиктивный график нагрузок системы [6],

причем $N_{\text{тп.р.м.}}$ заданы как функции времени,
 $N_{\text{Г.Г.}}$ —мощность j -ой ГЭС.

В первом приближении потери мощности не учитываются, тогда (10) переписывается в следующем виде:

$$C = P_{\Phi}(t) - \sum_{j=1}^m N_{\text{Г.Г.}}. \quad (11)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (11), содержащее m неизвестных функций времени $z_1, z_2, \dots, z_m$, решается методом итераций. Покажем решение уравнения (10). Мы будем рассматривать каскад гидроэлектростанций, нумерация которых принята сверху вниз. Выделим первую ГЭС, т. е. напишем (11) в виде

$$9,81 \eta_1 Q_1 H_1 + C_1 - P_{\Phi}(t) = 0 \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$t = 0; z_1 = z_{1\text{в.}}; t = T; z_1 = z_{1\text{к.}}, \quad (13)$$

здесь

$$C_1 = C + \sum_{j=1}^m N_{\text{Г.Г.}}$$

Примем соответственно расход ГЭС, расход нижнего бьефа, напор и характеристику зеркала водохранилища ГЭС в виде:

$$Q_1 = Q_{\text{б.1}}(t) - F_1(z_1) z_1' - Q_{\text{ис.1}}(z_1, t) - Q_{\Phi}(z_1, t) - Q_{\text{н.}}(t), \quad (14)$$

$$Q_{\text{нб.1}} = Q_{\text{б.1}}(t) - F_1(z_1) z_1' + Q_{\Phi}^*(z_1, t) + Q_{\text{н.}}^*(t), \quad (15)$$

$$H_1 = z_1 - a_0 - a_1 Q_{\text{нб.1}} - a_2 Q_{\text{нб.1}}^2, \quad (16)$$

$$F_1(z_1) = c_0 + c_1 z_1 + c_2 z_1^2, \quad (17)$$

здесь $Q_{\text{исп.}}(z, t)$ —расход на испарение с поверхности водохранилища;

$Q_{\Phi}(z_1, t), Q_{\Phi}^*(z, t)$ —соответственно полный фильтрационный расход из водохранилища и та его часть, которая попадает в нижний бьеф;

$Q_{\text{н.}}(t), Q_{\text{н.}}^*(t)$ —соответственно общие расходы энергетических водопользователей из водохранилища и часть их, попадающих в нижний бьеф.

Положим для краткости

$$\left. \begin{aligned} Q_1(z_1, t) &= Q_{\text{исп.}}(z_1, t) + Q_{\Phi}(z_1, t) + Q_{\text{н.}}(t) \\ Q_1^*(z_1, t) &= Q_{\Phi}^*(z_1, t) + Q_{\text{н.}}^*(t) - Q_1(z_1, t) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставляя (14), (15), (16) и (17) в (12) с учетом (18) и переходя к разностному уравнению получим

$$z_{1s+1} = z_{1s} + \frac{\Delta t}{F_1(z_{1s})} \cdot A_s, \quad (19)$$

где

$$A_s = B_s + \frac{1}{3a_2} [a_1 + a_2 (3Q_{\text{б.1}}(t_s) - Q_1(z_{1s}, t_s) - 2Q_1^*(z_{1s}, t_s))], \quad (20)$$

$$B_s = \sqrt[3]{-q_s + \sqrt{q_s^2 + p_s^3}} + \sqrt[3]{-q_s - \sqrt{q_s^2 + p_s^3}}, \quad (21)$$

значения q_s и p_s определяются из следующих выражений:

$$\begin{aligned} q_s &= -\frac{1}{27a_2^3} [a_1 + a_2 (3Q_{\text{б.1}}(t_s) - Q_1(z_{1s}, t_s) + 2Q_1(z_{1s}, t_s))]^3 + \\ &+ \frac{1}{6a_2^2} [a_1 + a_2 (3Q_{\text{б.1}}(t_s) - Q_1(z_{1s}, t_s) - 2Q_1(z_{1s}, t_s))] [Q_{\text{б.1}}(t_s) - \end{aligned}$$

$$-Q_1(z_{1s}, t_s)(a_1 + 2a_2(Q_{61}(t_s) - Q_1^*(z_{1s}, t_s)) - z_{1s} + a_0 + a_1(Q_{61}(t_s) - Q^*(z_{1s}, t_s)) + a_2(Q_{61}(t_s) - Q_1^*(z_{1s}, t_s))^2] + \frac{c_1 - P_\Phi(t_s)}{9,81 \eta_\Phi}, \quad (22)$$

$$p_s = \frac{1}{9a_2^2} \{3a_2[(Q_{61}(t_s) - Q_1(z_{1s}, t_s))(a_1 + 2a_2(Q_{61}(t_s) - Q_1^*(z_{1s}, t_s))) - z_{1s} + a_0 + a_1(Q_{61}(t_s) - Q_1^*(z_{1s}, t_s)) + a_2(Q_{61}(t_s) - Q_1^*(z_{1s}, t_s))^2] - [a_1 + a_2(3Q_{61}(t_s) - Q_1(z_{1s}, t_s) - 2Q_1^*(z_{1s}, t_s))]^2\}. \quad (23)$$

Выражение (19) является уравнением режима при однозначном задании расхода реки $Q_{61}(t)$, но так как мы можем построить функцию распределения этих расходов (2), то при заданных граничных условиях можем найти математическое искоемое режима ГЭС:

$$MZ_{1s+1} = MZ_{1s} + \frac{\Delta t}{F_1(MZ_{1s})} MA_s. \quad (24)$$

Выражение MA_s вычисляется:

$$MA_s = \int_{Q_1'}^{Q_1''} A_s P_s(Q_s, t_s) dQ_s. \quad (25)$$

Пределы интегрирования $Q_1' - Q_1''$ включают в себя расходы совокупности маловодных лет, которые могут составить от 10 до 25 % от общего числа наблюдений.

По рекуррентному уравнению (24), задавшись C_1 в формуле (12) и удовлетворяя граничным условиям (13), мы можем найти искомый режим в первом приближении:

$$z_1' = z_1''(t). \quad (26)$$

Найдя режим первой ГЭС (26), режим второй ГЭС ищем из условия:

$$9,81 \eta_2 Q_2 H_2 + C_2 + N_{Г1}(t) - P_\Phi(t) = 0, \quad (27)$$

где

$$C_2 = \sum_{j=3}^m N_{Гj} + C.$$

Граничные условия те же, что и (13) находят по формулам, аналогичным (14)–(17). К.п.д. в первом приближении для всех ГЭС можно принимать $\eta_\Phi = 0,89$, в дальнейшем он для каждой ГЭС при решении ее режимного уравнения уточняется шаг за шагом.

Аналогично задача решается для всех остальных ГЭС системы. Результаты решений составят первую итерацию расчета. Мощности, не покрываемые ГЭС, распределяются методом относительных приростов между теплотанциями [1].

Дальнейший расчет связан с учетом потерь активной мощности в сетях. Потери в сетях определяются зависимостью [4,7]:

$$N_{\text{пот}} = \sum_{\alpha=1}^v \sum_{\beta=1}^v B_{\alpha\beta} N_\alpha N_\beta. \quad (28)$$

Здесь $v = \kappa + m$ — число станций рассматриваемой системы;

$B_{\alpha\beta}$ — коэффициенты формулы потерь, принимаемые постоянными [5].

Приступаем ко второй итерации расчета. Снова выделяем первую ГЭС. Уравнение (12) теперь будет представлено в виде

$$9,81 \eta_1 Q_1 H_1 + \sum_{j=2}^m N_{Гj}(t) + C - \sum_{\alpha=1}^v \sum_{\beta=1}^v B_{\alpha\beta} N_\alpha(t) N_\beta(t) - P_\Phi(t) = 0 \quad (29)$$

с граничными условиями (13). Задаваясь величиной C и решая (29), найдем режим первой ГЭС с учетом потерь в сетях.

Аналогично поступаем для q -ой ГЭС.

$$9,81 \eta_q Q_q H_q + \sum_{j=1}^m N_{Гj}(t) + C - \sum_{\alpha=1}^v \sum_{\beta=1}^v B_{\alpha\beta} N_\alpha(t) N_\beta(t) - P_\Phi(t) = 0. \quad (30)$$

При решении каждого последующего уравнения (30) в него подставляются уже уточненные величины ранее определенных ГЭС. После определения режимов всех ГЭС снова распределяем между теплотанциями мощность, не покрываемую ГЭС, внося каждый раз поправки в характеристики относительных приростов ГЭС по формуле:

$$b_i'(t) = \frac{b_i(t)}{1 - \sum_{\alpha=1}^v B_{\alpha i} N_\alpha}. \quad (31)$$

Этим заканчивается вторая итерация. В дальнейшем такие же расчеты повторяем до тех пор, пока результаты решения в смежных итерациях не стабилизируются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гориштейн В. М. Наивыгоднейшие режимы работы гидроэлектростанций в энергетических системах. Госэнергоиздат, 1959.
2. Крицкий С. Н. и Менкель М. Ф. О приемах исследования случайных колебаний речного стока. Сток и гидрологические расчеты. Гидрометеоздат, 1946.
3. Крицкий С. Н. и Менкель М. Ф. Гидрологические основы речной гидротехники. Изд-во АН СССР, 1950.
4. Маркович И. М. Режимы энергетических систем. Госэнергоиздат, 1957.
5. Маркович И. М. Общая формула потерь мощности в сетях и вычисление удельных приростов потерь. "Электричество", 1962, № 4.
6. Никитин Б. И. Гидроэлектростанции в единой энергетической системе. Изд-во АН СССР, 1960.
7. Edelmann H. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Minimalaufgabe Wirtschaftlichster Verbundbetrieb. Archiv für Elektrotechnik. Bd. 47, H. 3, Berlin, 1962.

Л. Э. Гулиев

Системин електрик стансијаларынын аз сулу иллэрдэ режим

ХҮЛАСЭ

Мәгаләдә енеркетик системдә су електрик стансијаларынын чајда су аз олан иллэрдә оптимал иши изаһ едилір. Чај сујунун тәсадүфи олараг дәјишмәси илә әләғәдар олараг онун тәсвири үчүн еһтимал нәзәријјәси истифадә олунур. Стансијанын оптимал ишини тәсвир едәркән су анбарында сүзүлмә вә бухарланмаја сәрф олуна иткиләр, системин електрик шәбәкәсиндә исә електрик иткиләри нәзәрә алыныр.

Системин стансијаларынын оптимал ишини кәстәрән тәнликләр чыхарылыр вә онларын һәлләтмә үсулу кәстәрилір.

Л. В. ПУЧКОВА

ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ В ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Настоящая статья посвящена дифференциальной геометрии кривых линий в *полуэллиптическом пространстве* $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, т. е. в n -мерном пространстве проектной метрикой, абсолют которого состоит из мнимого гиперконуса второго порядка Q_0 с вершинной плоскостью A_0 , в которой находится мнимый конус второго порядка Q_1 с вершинной плоскостью A_1 и т. д., до мнимого конуса второго порядка Q_{r-1} с вершинной плоскостью A_{r-1} , в которой находится невырожденная мнимая квадрика Q_r , причем размерность абсолютной плоскости равна $n - m_a - 1$ [4,4].

Будем пользоваться такими проективными координатами x^i в пространстве $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$, в которых уравнения плоскости A_a имеют вид $x^{i_0} = \dots = x^{i_a} = 0$ ($0 \leq i_0 \leq m_0, \dots, m_{a-1} < i_a < m_a, \dots, m_{r-1} < i_r \leq n$), уравнение гиперконуса Q_0 имеет вид

$$\sum_{i_0} (x^{i_0})^2 = 0, \quad (1)$$

уравнение конуса Q_a в плоскости A_{a-1} имеет вид

$$\sum_{i_a} (x^{i_a})^2 = 0, \quad (2)$$

а уравнение квадрики Q_r в плоскости A_{r-1} имеет вид

$$\sum_{i_r} (x^{i_r})^2 = 0. \quad (3)$$

Будем нормировать координаты точек, не лежащих на плоскости A_0 , условием:

$$\sum_{i_0} (x^{i_0})^2 = 1. \quad (4)$$

Две точки пространства $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{r-1}}$ с координатами x^i и y^i , нормированными условием (4), обладают расстоянием δ , определяемым соотношением:

$$\cos \delta = \sum_{i_0} x^{i_0} y^{i_0}. \quad (5)$$

В том случае, когда $\delta=0$, эти точки обладают расстоянием d_a , определяемым соотношением:

$$d_a^2 = \sum_{i_a} (x^{i_a} - y^{i_a})^2, \quad (6)$$

где a —первое число, для которого правая часть выражения (6) не равна нулю.

Основным понятием дифференциальной геометрии кривых линий являются понятия *касательной* и *соприкасающихся плоскостей*: касательная T_1 к кривой в ее точке x_0 —это предельное положение прямой, проходящей через точки x_0 и x_1 кривой при стремлении точки x_1 к точке x_0 , а соприкасающейся плоскостью T_p в данной точке x называется предельное положение плоскости, порожденной точками $x_1, x_2, \dots, x_n$ при стремлении точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ к точке x .

В данной статье мы ограничимся рассмотрением того основного случая, когда соприкасающиеся плоскости кривой имеют максимальную размерность и минимальное пересечение с каждой из плоскостей $A_0, A_1, \dots, A_{\varepsilon-1}$. Таким образом, соприкасающаяся плоскость T_p p -мерна и не пересекается с плоскостями A_a при $m_a \geq p$, а с плоскостями A_a при $m_a < p$ пересекается по $(p - m_a - 1)$ -мерной плоскости. Поставим в соответствие каждой точке x_0 кривой $x(t)$ *сопровождающий симплекс* с вершинами $x_0, x_1, \dots, x_n$. Точка x_1 находится на касательной T_1 к кривой в точке x_0 в том случае, когда прямая T_1 не пересекается с плоскостью A_0 , точка x_1 полярно сопряжена с точкой x_0 относительно гиперконуса Q_0 , в том случае, когда прямая T_1 пересекается плоскостью A_0 , x_1 —точка пересечения прямой T_1 с плоскостью A_0 . Точка x_2 находится на плоскости T_2 ; в том случае, когда плоскость T_2 не пересекается с плоскостью A_0 , точка x_2 является полюсом прямой T_1 относительно гиперконуса Q_0 , в том случае, когда плоскость T_2 пересекается с плоскостью A_0 в точке, последняя принимается за точку x_2 ; когда плоскость T_2 пересекается с плоскостью A_0 по прямой, не пересекающейся с плоскостью A_1 , за точку x_2 принимается точка прямой, полярно сопряженная с точкой x_1 относительно гиперконуса Q_1 , в случае, если эта прямая пересекается с плоскостью A_1 , за точку x_2 принимается точка пересечения этой прямой с плоскостью A_1 .

Предположим, что мы построили точки сопровождающего симплекса $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, лежащие в соприкасающейся плоскости T_{k-1} .

В том случае, когда плоскость T_k не пересекается с плоскостью A_0 , за точку x_k принимается точка плоскости T_k , являющаяся полюсом плоскости T_{k-1} относительно гиперконуса Q_0 , если же плоскость T_k пересекается с некоторой плоскостью A_a в точке, последняя принимается за точку x_k , в случае, когда плоскость T_k пересекается с некоторой плоскостью A_a по плоскости, не пересекающейся с плоскостью A_{a+1} и, следовательно, плоскость T_{k-1} также пересекается с плоскостью A_a , за точку x_k принимается точка плоскости пересечения плоскостей T_k и A_a , являющаяся полюсом плоскости пересечения плоскостей T_{k-1} и A_a относительно конуса Q_{a+1} .

Таким образом, мы можем построить все вершины $x_0, x_1, \dots, x_n$ сопровождающего симплекса.

Координаты x^i , нормированные условием (4), можно рассматривать как координаты вектора полувеклидова пространства $R_{n+1}^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$, т. е. совокупности точек пространства $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$ не лежащих на гиперплоскости A_0 этого пространства, являющейся в данном случае

гиперплоскостью $x^0=0$. Пространство $R_{n+1}^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$ является метризованным аффинным пространством A_{n+1} , а условие (4) можно рассматривать как уравнение гиперсферы в нем. Каждой точке пространства $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$ соответствуют две диаметрально противоположные точки этой гиперсферы.

Координаты x^i точек кривой являются функциями

$$x^i = x^i(t) \quad (7)$$

ее параметра t , определенного неоднозначно. Будем предполагать, что функции (7) имеют n непрерывных производных.

Будем называть *натуральным параметром* кривой такой параметр s , для которого при $m_0 > 0$ выполняется условие

$$\sum_{i_0} \left(\frac{dx^{i_0}}{ds} \right)^2 = 1, \quad (8)$$

а при $m_0 = 0$ (когда $x^0 = 1$) выполняется условие

$$\sum_{i_1} \left(\frac{dx^{i_1}}{ds} \right)^2 = 1. \quad (9)$$

Определим *полюс гиперплоскости* пространства $S_n^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$ следующим образом: если эта гиперплоскость не пересекается с плоскостью A_0 , то полюсом является полюс гиперплоскости относительно гиперконуса Q_0 , а если гиперплоскость пересекается с плоскостью A_a и не пересекается с плоскостью A_{a+1} , то будем считать полюсом гиперплоскости полюс плоскости пересечения данной гиперплоскости с плоскостью A_a относительно конуса Q_{a+1} .

Будем нормировать координаты точек x_p , не лежащих на плоскости A_0 , условием

$$\sum_{i_0} (x_p^{i_0})^2 = 1, \quad (10)$$

а координаты точек x_p , лежащих на плоскости A_{a-1} , но не лежащих на плоскости A_a условием

$$\sum_{i_a} (x_p^{i_a})^2 = 1. \quad (11)$$

Если $a(t)$ —векторы пространства $R_{n+1}^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$, определенные в точках кривой

$$x = x(t) \quad (12)$$

гиперсферы и лежащие в касательных гиперплоскостях к гиперсфере в точках кривой (12), то определим *абсолютное дифференцирование* векторов $a(t)$ по параметру t следующим образом: вектор $\frac{da}{dt}$ при $t=t_0$ в общем случае не лежит в касательно гиперплоскости

в соответствующей точке кривой, поэтому будем называть абсолютной производной $\frac{Da}{dt}$ при $t=t_0$ вектор с началом в точке кривой (12) при $t=t_0$ и концом, являющимся проекцией на касательную гиперплоскость вектора $\frac{da}{dt}$ с тем же началом из полюса этой гиперплоскости.

Рассмотрим векторы $x_0, x_1, \dots, x_n$ пространства $R_{n+1}^{m_0 m_1 \dots m_{n-1}}$, соответствующие вершинам сопровождающего симплекса, причем будем

В силу выбора натурального параметра

$$\frac{dx_0}{ds} = x_1. \quad (13)$$

$$\sum_{i_0} x_0^{j_0} x^{i_0} = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i_a} \frac{Dx_1^a}{ds} x_1^a = 0, \quad (a = 0 \text{ или } 1) \quad (15)$$
$$\frac{Dx_1}{ds} = k_1 x_2. \quad (16)$$
$$\frac{Dx_1}{ds}, \frac{Dx_2}{ds}, \dots, \frac{Dx_{p-1}}{ds}.$$
$$\sum_{ja} x_p^{ja} x_q^{ja} = 0. \quad (17)$$
$$\sum_{i_a} \frac{Dx_{p^i_a}}{ds} x_{p^i_a} = 0, \quad (18)$$

62

$$\sum_{i_a} \frac{Dx_p^{i_a}}{ds} x_a^{i_a} + \sum_{i_a} x_p^{i_a} \frac{Dx_q^{i_a}}{ds} = 0, \quad (19)$$

Далее из построения точек x_p видно, что вектор $\frac{Dx_p}{ds}$ разлагается только по векторам $x_1, x_2, \dots, x_{p+1}$ и, если точка x_p не лежит в плоскости A_a , а точка x_{p+1} лежит в этой плоскости, коэффициенты разложения вектора $\frac{Dx_{p+1}}{ds}$ по векторам $x_1, \dots, x_p$ равны нулю.

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dx_1}{ds} &= k_1 x_2, \\ \frac{Dx_p}{ds} &= \begin{cases} -k_{p-1} x_{p-1} + k_p x_{p+1}, & \text{если } p \neq m_a + 1 \\ k_p x_{p+1}, & \text{если } p = m_a + 1 \end{cases} \\ \frac{Dx_n}{ds} &= \begin{cases} -k_{n-1} x_{n-1}, & \text{если } n \neq m_{r-1} + 1 \\ 0, & \text{если } n = m_{r-1} + 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Последняя формула (20) имеет место в случае, когда конус Q_{r-1} имеет точечную вершину, совпадающую с точкой x_n для всех сопрягающих симплексов, т. е. вектор x_n не зависит от S .

В предельном случае, когда $r = 0$, т. е. в случае эллиптического пространства S_n и в случае, когда $r = 1$, $m_0 = 0$, т. е. в случае евклидова пространства R_n формулы (20) принимают известный вид формул Френе пространств S_n и R_n [2].

В другом крайнем случае, когда $r=n$, т. е. в случае *флагового пространства* F_n формулы (20) принимают известный вид формул Френе в пространстве F_n [1].

63

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейцер Г. П. Кривые в n -мерном пространстве с вырожденным абсолютным. Уч. зап. Орехово-Зуевского пединститута, 1957, № 2.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1953.
3. Розенфельд Б. А., Климанова Т. М., Пецко Н. Д. Проективная теория векторов. 1. Изв. высших учебных заведений, математика, 1962, № 2 (27).
4. Ясинская Е. У. Полувеклидовы и полунеевклидовы пространства. ДАН СССР, 137, 1961, № 6.

Л. В. Пучкова

Жарымеллиптик фэзаларда Френе дүстурлары

ХУЛАСӘ

Мәлум олдуғу үзрә, проектив метрикалы ән кениш фэзалар жарымеллиптик фэзалары һесаһ олунур, бунлар исә еллиптик фэзаларын лимит һалы кими алына биләр. Бу ишдә жарымеллиптик фэзаларда хәтләрин дифференциал һәндәсәсиндән тәдгиг едилир. Еллиптик вә евклид фэзаларда дифференциал һәндәсәсиндән мәлум олан Френе дүстурлары жарымеллиптик фэзалар һалы үчүн үмумиләшдирилир. Хәттин мütәһәррик автополжар симплекси, хәттин натурал параметри, натурал параметрә көрә симплексин тәпәләринә ујғун векторларын мütләг дифференциалланмасы мütәјјән едилир. Сонра мütләг дифференциаллама нәтижәсиндә алынған векторларын биринчи векторлар үзрә әјрылышы верилир. Бу әјрылышын әмсаллары верилмиш хәттин әјриликләри адландырылыр. Хәттин әјриликләрини тәјјин едән бу дүстурлары мütәллиф Френе дүстурлары адландырыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫҢ ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазийат вә техника елмләри серијасы, 1963, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1963, № 4

А. А. МИРЗОЯН

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ В НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ТРУБЫ

Вопросу исследования движения вязких и вязко-пластичных жидкостей в начальном участке посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. В частности, в [4] были получены формулы для длины начального участка при движении вязко-пластичной жидкости в круглой и плоской трубах.

В данной статье приближенно определяются законы распределения давления, скорости ядра, а также влияние параметра Сен-Венана—Ильюшина на величину начального участка при структурном режиме движения вязко-пластичной жидкости в круглой и плоской трубах.

Рассмотрим движение вязко-пластичной жидкости в плоской трубе. В работе [4] было получено выражение для скорости ядра потока в начальном участке:

$$\frac{z}{Reh} = 0,3 \{ 9(\bar{V} - 1) - [8 + 6,75H + (10,125H^2 + 25,5H + 7) \times \\ \times (6H + 2,25H^2)^{-1/2}] \ln [\bar{V}^2 + 1,5H(\bar{V} - 1)] + \\ + 2(10,125H^2 + 25,5H + 7)(6H + 2,25H^2)^{-1/2} \times \\ \times \ln [\bar{V} + 0,75H(\bar{V} - 1) + 0,5(6H + 2,25H^2)^{1/2}(\bar{V} - 1)] \}, \quad (1)$$

где $\bar{V} = \frac{V(z)}{W}$, $V(z)$ —скорость ненарушенного потока вязко-пластичной жидкости на расстоянии z от начала плоской трубы, W —среднеобъемная скорость; $Re = \frac{hW\rho}{\eta}$ —параметр Рейнольдса; $H = \frac{h\tau_0}{\eta W}$ —параметр Сен-Венана—Ильюшина; $2h$ —толщина плоской трубы; ρ , η , τ_0 —соответственно плотность, структурная вязкость и предельное напряжение сдвига вязко-пластичной жидкости.

При $H=0$ (вязкая жидкость) из (1) получим формулу Л. С. Лейбензона [3]:

$$\frac{z}{Reh} = 0,3 \left(9\bar{V} - 2 - \frac{7}{\bar{V}} - 16 \ln \bar{V} \right).$$

Из условия постоянства расхода во входном сечении и в сечении, где $z = l_n$ (l_n — длина начального участка), имеем [4]:

$$\bar{V}^* = \frac{V(l_n)}{W} = \frac{3A_1}{2A_1 + 1}, \quad (2)$$

где $A_1 = \frac{h}{\delta_1}$, $2\delta_1$ — толщина ядра в области установившегося движения (эта область начинается с конца начального участка и в ней $z > l_n$).

Рассмотрим предельные случаи. При $\delta_1 = 0$ (случай движения вязкой жидкости) $A_1 = \infty$, $\bar{V}^* = 1,5$ и $l_n/Reh = 0,1036$. При $\delta_1 = h$ (случай движения упругого тела) $A_1 = 1$, $\bar{V}^* = 0$, $l_n/Reh = 0$. Отсюда следует, что при движении вязко-пластичной жидкости указанные величины будут изменяться в пределах:

$$0 < \delta_1 < h, \quad 1 < A_1 < \infty, \quad 1,0 < \bar{V}^* < 1,5, \quad 0 < \frac{l_n}{Reh} < 0,1036.$$

По формуле (1) построена зависимость $\bar{V}$ от z/Reh для $A_1 = 7$; ∞ (рис. 1).

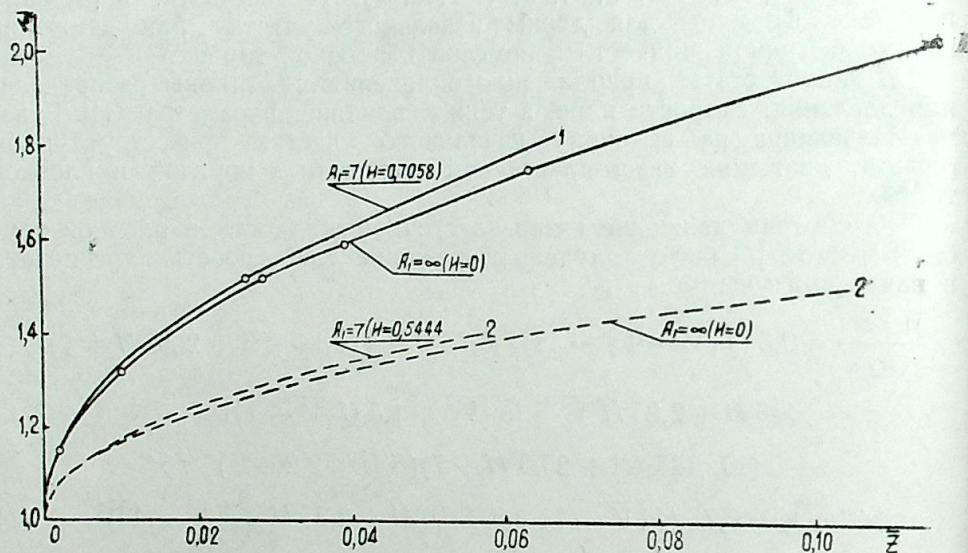


Рис. 1.

1 — для круглой трубы ($\bar{z} = \frac{z}{ReR}$);
2 — для плоской трубы ($\bar{z} = \frac{z}{Reh}$).

Следуя допущению Л. Прандтля для случая движения вязкой жидкости [5], здесь также примем, что в ядре начального участка справедливо уравнение Бернулли и в любом сечении давление пограничного слоя совпадает с давлением ядра движения. Такое допущение приемлемо для малых значений величин η и τ_0 . Для больших значений τ_0 , как будет показано ниже, длина начального участка оказывается величиной малой и ею можно пренебречь при гидравлических расчетах.

Тогда в начальном участке будем иметь:

$$\Delta p_1 = p_0 - p = (\bar{V}^2 - 1) \frac{\rho W^2}{2}, \quad (3)$$

где p_0 — давление во входном сечении ($z = 0$), p — давление в рассматриваемом сечении начального участка с координатой $z \leq l_n$.

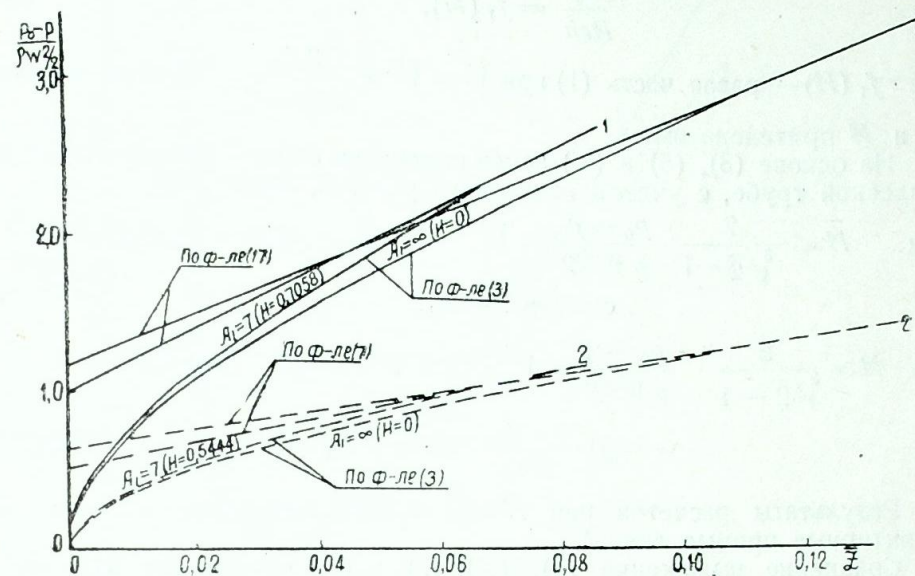


Рис. 2.

1 — для круглой трубы ($\bar{z} = \frac{z}{ReR}$);
2 — для плоской трубы ($\bar{z} = \frac{z}{Reh}$).

На рис. 2 изображен график изменения потери давления $\left(\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2}\right)$ в зависимости от z/Reh для $A_1 = 7$; ∞ . Из этого рисунка следует, что с увеличением значения параметра A_1 величина потери давления уменьшается.

За начальным участком плоской трубы, где $z > l_n$, формула для расхода Q , приходящегося на единицу ширины плоской трубы, имеет вид:

$$Q = \frac{2h^3 \Delta p_2}{3\eta z} \left(1 - \frac{3\delta_1}{2h} + \frac{1}{2} \frac{\delta_1^3}{h^3}\right), \quad (4)$$

где Δp_2 — потери давления без учета начального участка. Формула (4) впервые была получена М. П. Воларовичем и А. М. Гуткиным [1].

Учитывая, что $\delta_1/h = \tau_0 z / h \Delta p_2$, $W = Q/2h$, $\tau_0 = \eta HW/h$, после некоторых преобразований из (4) получим формулу для потерь давления:

$$\begin{aligned} \text{при } H \leq \frac{2}{\sqrt{2}-1} \quad \frac{\Delta p_2}{\rho W^2/2} &= (2+H)(1+2 \cos \varphi/3) \frac{z}{Reh}, \quad \cos \varphi = \\ &= 1 - B_1, \\ \text{при } H \geq \frac{2}{\sqrt{2}-1} \quad \frac{\Delta p_2}{\rho W^2/2} &= (2+H) [1+2 \cos (60^\circ - \varphi/3)] \frac{z}{Reh}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\cos \varphi = B_1 - 1, \quad (5')$$

где $B_1 = 2 \left(\frac{H}{2 + H} \right)^2$; $H = \frac{6 A_1^2}{2 A_1^3 - 3 A_1^2 + 1}$.

В конце начального участка, где $z = l_n$, $\bar{V} = \bar{V}^*$, из (1) имеем

$$\frac{l_n}{Reh} = f_1(H), \quad (6)$$

где $f_1(H)$ — правая часть (1) при $\bar{V} = \bar{V}^* = \frac{3 A_1}{2 A_1 + 1}$. А связь между A_1 и H приведена выше.

На основе (3), (5) и (5') закон изменения общих потерь давления в плоской трубе, с учетом начального участка, имеет вид:

при $H \leq \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 1}$ $\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2} = \bar{V}^{*2} - 1 + (2 + N)(1 + 2 \cos \varphi/3) \frac{z - l_n}{Reh}$,
 $\cos \varphi = 1 - B_1$; (7)

при $H \geq \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 1}$ $\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2} = \bar{V}^{*2} - 1 + (2 + N)[1 + 2 \cos(60^\circ - \varphi/3)] \frac{z - l_n}{Reh}$, $\cos \varphi = B_1 - 1$. (7')

Результаты расчетов при $N=0$; 0,5444 приведены на рис. 2 (пунктирные прямые линии).

Сравнение выражений (5), (5'), (7) и (7') показывает, что учет начального участка увеличивает потери давления в плоской трубе на величину

$$\bar{V}^{*2} - 1 - (2 + H)(1 + 2 \cos \varphi/3) \frac{l_n}{Reh}, \quad \cos \varphi = 1 - B_1 \quad \text{при } H \leq \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 1},$$

$$\bar{V}^{*2} - 1 - (2 + H)[1 + 2 \cos(60^\circ - \varphi/3)] \frac{l_n}{Reh}, \quad \cos \varphi = B_1 - 1$$

$$\text{при } H \geq \frac{2}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Расчеты показывают, что при $N \leq 1$ формулу (5) можно заменить более простой:

$$\Delta p_2: \frac{\rho W^2}{2} = 3(2 + H)z : Reh,$$

получаемой отбрасыванием третьего члена в правой части (4). При этом погрешность составляет менее 1 %.

По формуле (6) на рис. 3 изображена зависимость l_n/Reh от H (или A_1). Из этого рисунка видно, что с увеличением H величина начального участка уменьшается. В пределе, когда $H \rightarrow 0$, $\frac{l_n}{Reh} = 0,1036$, что соответствует случаю движения вязкой жидкости.

Таким образом, приходим к выводу, что при больших величинах H , в частности при больших значениях предельного напряжения сдвига τ_0 , можно пренебречь влиянием начального участка на перепад давления в плоской трубе.

Теперь рассмотрим движение вязко-пластичной жидкости в круглой трубе. В этом случае, также приняв параболический закон изме-

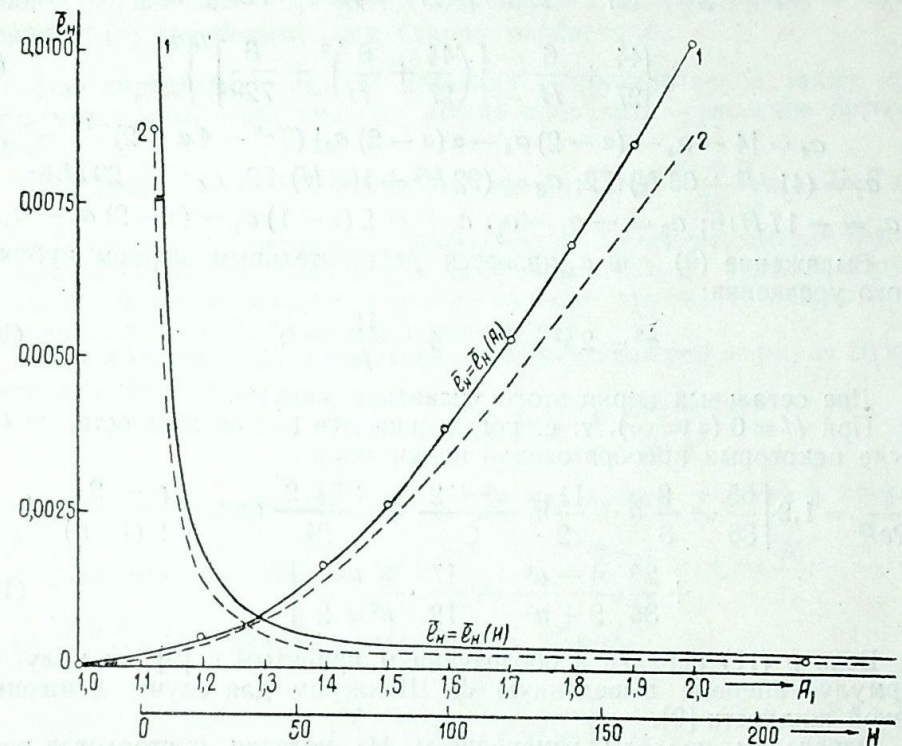


Рис. 3.

1 — для круглой трубы ($\frac{l_n}{ReR} = \frac{l_n}{ReR}$, $A_1 = \frac{R}{r_0}$);
 2 — для плоской трубы ($\frac{l_n}{Reh} = \frac{l_n}{Reh}$, $A_1 = \frac{h}{\delta_1}$).

нения скорости движения вязко-пластичной жидкости в пограничном слое начального участка круглой трубы, получим [4]:

$$\begin{aligned} \frac{z}{ReR} = & \frac{2,4}{H} \left\{ a_1 \ln \frac{\alpha - u}{\alpha - 2} + \frac{1}{2} a_2 \ln \frac{u^2 + 2}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2} a_3 \operatorname{arctg} \frac{u - 2}{\sqrt{2}(1 + u)} - \right. \\ & - \frac{1}{12} a_4 \frac{4 - u^2}{2 + u^2} + a_5 \left[\frac{u}{4(2 + u^2)} - \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \frac{u - 2}{\sqrt{2}(1 + u)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} a_6 \ln \frac{u^2 + (\alpha - 2)u + \alpha(\alpha - 2) + 2}{\alpha^2 + 2} + \left(a_7 - \frac{\alpha - 2}{2} a_6 \right) \times \\ & \times \frac{2}{3\alpha^2 - 4\alpha + 4} \operatorname{arctg} \frac{(u - 2)\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + 4}}{u(\alpha + 2) + 2\alpha(\alpha - 1)} \Big\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $u = \sqrt{6/V - 2}$; $Re = \rho W R / \eta$; $H = \tau_0 R / \eta W$;

R —радиус трубы;

$$\alpha = \frac{2}{3} + \left\{ \frac{44}{27} + \frac{6}{H} + \left[\left(\frac{44}{27} + \frac{6}{H} \right)^2 + \frac{8}{729} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} + \left\{ \frac{44}{27} + \frac{6}{H} - \left[\left(\frac{44}{27} + \frac{6}{H} \right)^2 + \frac{8}{729} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}; \quad (9)$$

$$a_1 = [4 - a_4 - (\alpha - 2) a_3 - \alpha (\alpha - 2) a_2] (3\alpha^2 - 4\alpha + 2)^{-1};$$

$$a_2 = (41 H^2 + 66 N) : 72; a_3 = (92 H^2 + 162 H) : 72; a_4 = -29 H : 6;$$

$$a_5 = -17 H : 6; a_6 = -a_1 - a_2; a_7 = -2(\alpha - 1) a_1 - (\alpha - 2) a_2 - a_3.$$

Выражение (9) для α является действительным корнем кубического уравнения:

$$\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 - \frac{12}{H} = 0. \quad (10)$$

Два остальных корня этого уравнения мнимые.

При $H = 0$ ($\alpha = \infty$), т. е. когда движется вязкая жидкость, из (8) после некоторых преобразований получим:

$$\frac{z}{ReR} = 1,2 \left[\frac{65}{36} - \frac{2}{3} u + \frac{11}{12} \ln \frac{u^2 + 2}{6} + \frac{37\sqrt{2}}{24} \arctg \frac{u - 2}{\sqrt{2}(1+u)} + \right. \\ \left. + \frac{29}{36} \cdot \frac{4 - u^2}{2 + u^2} - \frac{17}{12} \cdot \frac{u}{u^2 + 2} \right], \quad (11)$$

Если в (11) перейти к обозначениям, принятым в [9], то получим формулу, впервые выведенную Л. Шиллером для случая движения вязкой жидкости [9].

Определим пределы изменения u . Из условия постоянства расхода во входном сечении трубы ($z = 0$) и в конечном сечении начального участка ($z = l_n$), где $V = V(l_n) = \frac{(R-r)(R+r-r_0)}{(R-r_0)^2}$ (r_0 —радиус ядра в области установившегося движения), имеем

$$\bar{V}^* = \frac{V(l_n)}{W} = \frac{6A_1^2}{3A_1^2 + 2A_1 + 1}, \quad (12)$$

где $A_1 = \frac{R}{r_0}$.

Согласно принятому выше обозначению при $\bar{V} = \bar{V}^*$ имеем:

$$u^* = (6/\bar{V}^* - 2)^{1/2} = \frac{A_1 + 1}{A_1}.$$

Рассмотрим предельные случаи. При $r_0 = 0$ (случай движения вязкой жидкости) $A_1 = \infty$; $\bar{V}^* = 2$; $u^* = 1$; $l_n/ReR = 0,1149$, а при $r_0 = R$ (случай движения упругого тела) $A_1 = 1$; $\bar{V}^* = 1$; $u^* = 2$; $l_n/ReR = 0$. Следовательно, при движении вязко-пластичной жидкости в круглой трубе указанные величины изменяются в пределах:

$$0 < r_0 < R; 1 < A_1 < \infty; 1 < \bar{V}^* < 2; 1 < u^* < 2; 0 < \frac{l_n}{ReR} < 0,1149.$$

Приняв во внимание, что $\bar{V} = 6(u^2 + 2)^{-1}$, по формуле (8) построим зависимость $\bar{V}$ от z/ReR для $A_1 = 7$; ∞ (рис. 1, сплошные

линии). При этом верхний предел изменения $\bar{V}$ зависит от значения A_1 и $\bar{V} < \bar{V}^*$.

Из рис. 1 следует, что, как и в случае плоской трубы, с увеличением A_1 для данного z/ReR уменьшается скорость. Скорость изменения $\bar{V}(z)$ тем больше, чем больше параметр A_1 .

Для определения потери давления в круглой трубе также примем, что в начальном участке можно применять уравнение Бернулли (3).

На основе (8) и (3) построена зависимость $\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2}$ от z/ReR для

$A_1 = 7$; ∞ (рис. 2, сплошные линии). Из рис. 2 следует, что для одного и того же A_1 потери давления в начальном участке круглой трубы больше, чем в начальном участке плоской трубы. С возрастанием величины A_1 потери давления уменьшаются.

Для области установившегося движения напомним формулу Букингама для расхода Q :

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p_3}{8 \eta z} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \frac{r_0^4}{R^4} \right), \quad (13)$$

где Δp_3 —потери давления без учета начального участка в круглой трубе.

Учитывая соотношения $W = \frac{Q}{\pi R^2}$; $r_0 = \frac{2\tau_0 z}{\Delta p_3}$; $A_1 = \frac{R}{r_0}$;

$\tau_0 = \frac{\eta W H}{R}$ (13) получим связь между H и A_1 :

$$H = \frac{12 A_1^3}{3 A_1^4 - 4 A_1^3 + 1} \quad (14)$$

и уравнение четвертой степени для определения $\frac{\Delta p_3}{\rho W^2/2}$ в зависимости от z/ReR :

$$3x^4 - 16(3 + N)x^3 + 256N^4 = 0, \quad (15)$$

где

$$x = \frac{\Delta p_3}{\rho W^2/2} \cdot \frac{ReR}{z}. \quad (16)$$

Решением (15) для рассматриваемой задачи будет:

$$x = -\frac{1}{4}(m + n) + \sqrt{\frac{1}{16}(m + n)^2 - \left(1 + \frac{n}{m}\right)y_1}$$

или, учитывая (16),

$$\frac{\Delta p_3}{\rho W^2/2} = \left[-\frac{1}{4}(m + n) + \sqrt{\frac{1}{16}(m + n)^2 - \left(1 + \frac{n}{m}\right)y_1} \right] \frac{z}{ReR}, \quad (17)$$

где $m = -\sqrt{8y_1 + n^2}$; $n = -\frac{16}{3}(3 + H)$; $y_1 = \frac{32}{3} ch \varphi$;

$$ch \varphi = (3 + H)^2.$$

При $N \leq 2$ формулу (17) можно упростить:

$$\frac{\Delta p_3}{\rho W^2/2} = \frac{16}{3}(3 + H) \frac{z}{ReR},$$

при этом погрешность не превышает 0,5 %.

Полные потери давления в круглой трубе с учетом начального участка определяются формулой:

$$\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2} = \bar{V}^{*2} - 1 + \left[\frac{1}{4} (m + n) - \sqrt{\frac{1}{16} (m + n)^2 - \left(1 + \frac{n}{m}\right) y_1} \right] \frac{z - l_n}{ReR}. \quad (18)$$

При $I \leq 2$ выражение (18) можно упростить:

$$\frac{p_0 - p}{\rho W^2/2} = \bar{V}^{*2} - 1 + \frac{16}{3} (3 + I) \frac{z - l_n}{ReR}. \quad (19)$$

Погрешность не превышает 0,1 %.

По формуле (19) произведены численные расчеты для $I = 0; 0,7058$. Результаты расчетов показаны на рис. 2 (сплошные прямые линии).

Таким образом, учет начального участка в общем случае увеличивает потери давления в круглой трубе на величину

$$\left\{ \bar{V}^{*2} - 1 + \left[\frac{m+n}{4} - \sqrt{\left(\frac{m+n}{4}\right)^2 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) y_1} \right] \frac{l_n}{ReR} \right\} \frac{\rho W^2}{2}.$$

Величина в фигурных скобках для $A_1 = 7$ ($I = 0,70576$) составляет 0,9872 (см. рис. 2).

По формуле (8) при $u = u^*$ определено значение l_n/ReR в зависимости от A_1 , а с учетом (12) — в зависимости от I . Результаты расчетов показаны на рис. 3 (сплошные линии).

Из рис. 3 следует, что с увеличением A_1 (уменьшением N) величина l_n/ReR возрастает. Кроме того, для малых значений A_1 (больших I) величины начальных участков в круглой и плоской трубах близки между собой. При этом всегда величина начального участка круглой трубы больше, чем для плоской.

Полученные зависимости показывают, что для больших I (малых A_1), в частности при больших значениях величины предельного напряжения сдвига, можно пренебрегать влиянием начального участка на потери давления. При малых значениях I , в особенности, если движение жидкости происходит в коротких трубах, пренебрежение влиянием начального участка на гидравлические потери может привести к ощутимым погрешностям.

Автор выражает искреннюю признательность проф. А. Х. Мирзаджанзаде за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воларович М. П., Гуткин А. М. ЖТФ, т. 16, вып. 3, 1946.
2. Кичин И. Н. Определение коэффициентов гидравлических потерь для дросельных сопротивлений в системах гидроавтоматики. "Автоматика и телемеханика", т. XVIII, 1957, № 1.
3. Лейбензон С. Л. Собр. соч. т. III, изд. АН СССР. М., 1955.
4. Мирзаджанзаде А. Х., Мирзоян А. А. Приближенный метод расчета движения вязко-пластичной жидкости в начальном участке трубы. "ДАН СССР", т. 96, 1954, № 3.
5. Прандтль Л., Титъенс О. Гидро- и аэромеханика, т. II, ОНТИ, М.—Л., 1935.
6. Солодкин Е. Е. и Гиневский А. С. Турбулентное течение вязкой жидкости в начальных участках осесимметричных и плоских каналов. Тр. ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского, № 701. Оборонгиз, М., 1957.
7. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гос техиздат, М.—Л., 1951.

8. Торнер Р. В. Применение теории подобия для определения входных эффектов при течении резиновых смесей по каналам круглого сечения. "Коллоид. ж.", т. XXII, вып. 5, 1960.

9. Шиллер Л. Движение жидкостей в трубах. ОНТИ, М.—Л., 1936.

А. А. Мирзоян

Борунун башлангыч хиссэсиндэ өзлү-пластик мајенин һэрэкэтинэ даир

ХҮЛАСӘ

Борунун башлангыч хиссэсиндэ өзлү вә өзлү-пластик мајеләрин һэрэкэтинин тәдгигинә бир нечә нәзәри вә тәчрүби ишләр ([2,—8,9] вә б.) һәср олунмушдур. Мүстәви вә даирәви боруларда өзлү-пластик мајеләр һэрәкәт етдикдә башлангыч хиссә узунлуғуну тапмағ үчүн дүстурлар алынмышдыр [4].

Боруларда өзлү вә өзлү-пластик мајеләрин һэрәкәти заманы һидравлик иткиләри һесабадығда, башлангыч хиссәнин тәсири әксәр һалларда нәзәрдә тутулмур.

Тәгдим олунан мәғаләдә башлангыч хиссәнин тәзјиг дүшкүсүнә тәсиринин нә вахт нәзәрдә тутулмасы һаллары көстәрилмишдир.

Өзлү-пластик мајеләрин мүстәви (Л. С. Лејбензона көрә) вә даирәви цилиндр (Л. Шиллерә көрә) боруларда структур режими һэрәкәти заманы тәзјигин пајланмасы (7; 7'; 18), ахым нүвәсинин сүрәти (1; 8) вә Сен-Венан-Илјушин параметриндән асылы оларағ башлангыч хиссәнин узунлуғунун тапылмасы ((6) вә $I = I^*$ олдуғда (8)) үчүн тәгриби дүстурлар алынмышдыр. Әдәди һесабламаларын нәтичәләри мәғаләдәки 1, 2 вә 3-чү шәкилләрдә көстәрилмишдир. Бу шәкилләрдә ғырығ хәтләр мүстәви, бүтөв хәтләр исә даирәви цилиндр боруларда аиддир.

Алынмыш дүстурларын тәдгиги вә әдәди һесабламаларын нәтичәләри көстәрил ки, башлангыч хиссәнин һидравлик иткиләрә тәсири Сен-Венан-Илјушин параметринин (I) бөјүк гијмәтләриндә, хусусилә башлангыч сүрүшмә кәркинлијинин (τ_0) бөјүк гијмәтләриндә нәзәрә алмамағ олар. һәмин параметрин (I) кичик гијмәтләриндә вә хусусилә мајеләрин ғыса боруларда һэрәкәти заманы исә бу тәсири нәзәрә алынмасы хиссә едиләчәк хәтә верәр.

Хусуси һалда, јени $I = 0$ олдуғда, алдығымыз асылылығлар өзлү мајеләрин мүстәви вә даирәви цилиндр боруларда һэрәкәти дүстурларына чеврилir.

Г. Т. ГАСАНОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В последнее время в отечественной и зарубежной литературе уделяется большое внимание теоретическому и экспериментальному исследованиям изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе ее проводки, в частности при спуско-подъемных операциях [2].

В настоящее время можно считать установленным, что одной из решающих причин осложнений, возникающих в процессе проводки скважины, является изменение гидродинамического давления на стенки скважины.

В литературе [3] описан ряд случаев, когда в процессе спуска бурильного инструмента, вследствие повышенного гидродинамического давления на стенки скважины, имеют место поглощение и уход раствора, а в процессе подъема наблюдаются газо-нефте-водопроявления.

В [6] приведены данные о времени, затраченном на спуско-подъемные операции, выраженном в процентах к общему производительному времени для ряда скважин, пробуренных в НПУ Бузовнынефть, оно колеблется в пределах от 10 до 19%. В [6] отмечается, что с увеличением глубины скважины время, затрачиваемое на спуско-подъемные операции, растет более интенсивно, чем время, затрачиваемое на механическое бурение. Отмеченное свидетельствует о необходимости исследования изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуско-подъемных операций и учета этого фактора при разработке рационального режима спуска бурильного инструмента, под которым в настоящее время понимается режим, обеспечивающий спуск свечи за минимальное время при допуске значении динамических усилий, возникающих при этом в элементах системы спуска [6].

Мы полагаем, что приведенное определение рационального режима спуска должно быть дополнено требованием, чтобы гидродинамическое давление на стенки скважины было меньше давления, необходимого для гидравлического разрыва пласта. При подъеме бурильного инструмента необходимо, чтобы гидродинамическое давление на стенки скважины было не меньше пластового, что не должно приводить к осложнениям.

Учитывая величины времени, затрачиваемые на спуск свечи и подготовительные операции, не трудно установить, что для исследования

Г. Т. ГАСАНОВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В последнее время в отечественной и зарубежной литературе уделяется большое внимание теоретическому и экспериментальному исследованиям изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе ее проводки, в частности при спуско-подъемных операциях [2].

В настоящее время можно считать установленным, что одной из решающих причин осложнений, возникающих в процессе проводки скважины, является изменение гидродинамического давления на стенки скважины.

В литературе [3] описан ряд случаев, когда в процессе спуска бурильного инструмента, вследствие повышенного гидродинамического давления на стенки скважины, имеют место поглощение и уход раствора, а в процессе подъема наблюдаются газо-нефте-водопроявления.

В [6] приведены данные о времени, затраченном на спуско-подъемные операции, выраженном в процентах к общему производительному времени для ряда скважин, пробуренных в НПУ Бузовнынефть, оно колеблется в пределах от 10 до 19%. В [6] отмечается, что с увеличением глубины скважины время, затрачиваемое на спуско-подъемные операции, растет более интенсивно, чем время, затрачиваемое на механическое бурение. Отмеченное свидетельствует о необходимости исследования изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуско-подъемных операций и учета этого фактора при разработке рационального режима спуска бурильного инструмента, под которым в настоящее время понимается режим, обеспечивающий спуск свечи за минимальное время при допустимом значении динамических усилий, возникающих при этом в элементах системы спуска [6].

Мы полагаем, что приведенное определение рационального режима спуска должно быть дополнено требованием, чтобы гидродинамическое давление на стенки скважины было меньше давления, необходимого для гидравлического разрыва пласта. При подъеме бурильного инструмента необходимо, чтобы гидродинамическое давление на стенки скважины было не меньше пластового, что не должно приводить к осложнениям.

Учитывая величины времени, затрачиваемые на спуск свечи и подготовительные операции, не трудно установить, что для исследования

изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуска необходимо решение соответствующих нестационарных задач движения вязких и вязко-пластичных жидкостей.

Кларк [7], используя принцип квазистационарности, определяет забойное давление при спуске бурильного инструмента.

Как известно, приемлемость принципа квазистационарности проверяется экспериментальным путем. Установим для частного примера возможность использования этого принципа. Применяя принцип квазистационарности, решим задачу о нестационарном движении несжимаемой вязкопластичной жидкости в круглой цилиндрической трубе. Перепад давления определяется из:

$$\nabla P_1 \pi R^2 = \int_{r_0}^R 2\pi r \rho l \frac{\partial v}{\partial t} dr + \int_0^{r_0} 2\pi r \rho l \frac{\partial v_0}{\partial t} dr + \Delta p_2 \pi R^2, \quad (1)$$

где Δp_1 — перепад давления при нестационарном движении;

Δp_2 — перепад давления при стационарном движении;

R — радиус трубы;

r_0 — радиус ядра;

ρ — плотность жидкости;

v — скорость жидкости;

v_0 — скорость ядра.

Расход Q вязкопластичной жидкости в круглой цилиндрической трубе определяется из выражения:

$$Q = \int_{r_0}^R 2\pi r v(r, t) dr + \int_0^{r_0} 2\pi r v_0 dr. \quad (2)$$

Введя безразмерные величины:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\frac{\pi R^4 \Delta p_1}{8 \eta r}}, \quad \bar{t} = \frac{r}{\rho R^2} t$$

и сравнивая (1) и (2), получим:

$$\frac{d\bar{Q}}{d\bar{t}} = 8 \left(1 - \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} \right). \quad (3)$$

Для определения $\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}$ воспользуемся формулой Букингама:

$$\bar{Q} = \frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{\Delta p_0}{\Delta p_1}}{\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{\Delta p_0}{\Delta p_1} \right)^4}{\left(\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} \right)^4} \right]. \quad (4)$$

Следовательно, для определения расхода жидкости получается система уравнений (3) и (4). Для решения уравнений (3) и (4) при условии $\bar{t} = 0, \bar{Q} = 0$ был применен приближенный метод Эйлера.

Результаты численных расчетов по формулам (3) и (4) представлены в табл. 1. С целью сравнения полученных данных в эту таблицу помещены также осредненные по радиусу и по площади значения расхода вязкопластичной и вязкой жидкости согласно [2] (Q — по формулам (3) и (4), $\bar{Q}_1$ — осредненные по радиусу для вязкопластичной, Q_2 и $\bar{Q}_3$ — осредненные по радиусу и по площади для вязкой жидкости).

Таблица 1

$\bar{t}$	$\bar{r}_0=0,9$		$\bar{r}_0=0$		$\bar{t}$	$\bar{r}_0=0,8$		$\bar{r}_0=0$	
	$\bar{Q}$	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$		$\bar{Q}$	$\bar{Q}_1$	$\bar{Q}_2$	$\bar{Q}_3$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,0015	0,0120	0,0110	0,0089	0,0119	0,0077	0,0616	0,0437	0,0449	0,0601
0,0023	0,0131	0,0121	0,0139	0,0139	0,0129	0,0622	0,0524	0,0741	0,0978
0,0039	0,0185	0,0145	0,0227	0,0305	0,0191	0,0622	0,0612	0,1086	0,1418

Из табл. 1 видно, что осреднения по радиусу и по площади для вязкой жидкости дают погрешность меньше 20%, а для вязкопластичной — больше 20%. Следовательно, для вязкопластичной жидкости принцип квазистационарности неприемлем. Следует отметить, что к такому же выводу, но экспериментальным путем пришел и Г. Д. Розенберг [4].

В стационарной подстановке указанная в заголовке задача была решена А. М. Пирвердяном и Н. А. Гукасовым [2]. Как известно, труба спускается в скважину с переменной скоростью, поэтому выражение изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуска бурильного инструмента будет отличаться от выражения полученного в стационарной подстановке. С целью выявления влияния инерционного члена на изменение забойного давления сравнивались изменения давления в обоих случаях. Известно, что для нестационарного случая:

$$\Delta p_1 = \frac{m}{F_{к.п.}} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\rho l F_{\tau}}{F_{к.п.}} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (5)$$

где v — скорость жидкости,

V — скорость трубы.

Расчеты, проведенные при различных скоростях и диаметрах скважин и труб, по формулам стационарного и нестационарного случаев для воды при ламинарном режиме движения представлены на табл. 2, из которой видно, что изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуска бурильного инструмента при нестационарном случае в несколько раз больше, чем при стационарном.

Таблица 2

$\frac{v_0}{\text{сек}}$	$\frac{dv}{dt}$ $\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$	$d_1=11,43 \text{ см},$ $d_2=19,685 \text{ см}$		$d_1=8,89 \text{ см}, d_2=14,605 \text{ см}$			$d_1=16,8275 \text{ см},$ $d_2=24,765 \text{ см}$		
		Δp_1	Δp_2	Δp_1	Δp_2		Δp_1	Δp_2	
		$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$	$\frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$
		$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$	$\frac{e}{\text{см}^3}$
87	18	0,3130	0,0063	0,0017	0,2167	0,0065	0,0023	0,2252	0,0120
90	22	0,3230	0,0077	0,0018	0,2236	0,0079	0,0024	0,2323	0,0147
100	25	0,3589	0,0088	0,0023	0,2485	0,0090	0,0030	0,2581	0,0167
122	51	0,4379	0,0179	0,0034	0,3031	0,0184	0,0045	0,3149	0,0341
155	59	0,5563	0,0208	0,0055	0,3851	0,0213	0,0072	0,4001	0,0394
180	60	0,6460	0,0212	0,0074	0,4473	0,0216	0,0098	0,4647	0,0401
185	74	0,6639	0,0621	0,0076	0,4597	0,0267	0,0103	0,4776	0,0495

В статье приводятся точное и приближенное решения одной задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости, связанной с исследованием изменения гидродинамического давления на стенки скважины в процессе спуска бурильного инструмента. Полученные результаты указывают на необходимость постановки нестационарных задач и, кроме того, представляют некоторый самостоятельный интерес для условий, когда в качестве промывочной жидкости применяются нефть и вода. Для простоты предположим, что в скважине, представляющей круглую цилиндрическую трубу, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, медленно движется соосно расположенный круглый цилиндр (бурильный инструмент) с закрытым концом. При этом скорость цилиндра меняется по заданному закону, определяемому диаграммой спуска [6]. Пренебрегаем концевыми эффектами, что допустимо для достаточно длинных цилиндров, лобовым сопротивлением, а также колебанием бурильной колонны, принимаемой за абсолютно твердое тело.

Для рассматриваемого случая из дифференциальных уравнений движения Навье—Стокса получается:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\Delta p(t)}{l(t)} - \gamma, \quad (6)$$

где $\Delta p = p(t) - p_0$

$p(t)$ —давление в сечении, соответствующем конечному сечению спускаемой трубы;

p_0 —давление на устье, принимаемое равным атмосферному.

Условие равновесия сил на поверхности бурильной колонны, согласно принципу Д'Аламбера, имеет вид:

$$\pi R_1^2 \rho l \frac{\partial v}{\partial t} = -2\pi l \eta R_1 \frac{\partial v}{\partial r} + \pi (R_2^2 - R_1^2) \gamma_1 l + \pi (R_1^2 - R_0^2) \gamma_2 l + \pi R_0^2 \gamma_1 l + p_0 \pi R_1^2 - p \pi R_1^2 - F, \quad (7)$$

где R_0 —внутренний радиус трубы;

R_1 —внешний радиус трубы;

R_2 —радиус скважины;

γ_1, γ_2 —удельные веса, соответственно, жидкости и трубы;

F —приложенная сила, под действием которой движется бурильная труба.

Для случая заданного $\frac{\Delta p(t)}{l(t)}$ и заданных граничных и начальных условий точное решение задачи получено И. С. Громека [1]. Для рассматриваемого случая имеем следующие условия:

$$v(R_2, t) = 0, \quad (8)$$

$$v(R_1, t) = -V(t), \quad (9)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad (10)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\pi r v(r, t) dr = Q = \pi R_1^2 V(t), \quad (11)$$

$$l(t) = \int_0^t V(t) dt. \quad (12)$$

При заданных условиях требуется определить $p(t)$. Примем для определенности, что скорость спуска трубы изменяется по закону синуса [6], т. е.

$$\left. \begin{aligned} V(t) &= v_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ V(t) &= 0, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где v_0 —амплитуда скорости;

T —период цикла.

На всем интервале времени, разлагая $v(t)$ в ряд Фурье, получим:

$$V(t) = v_0 \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{T} t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \cos \frac{2n\pi}{T} t \right). \quad (14)$$

Введя безразмерные величины: $\bar{v} = \frac{v}{v_0}, \bar{r} = \frac{r}{R_2}$,

$$\bar{t} = \frac{\eta}{\rho R_2^2} t, \bar{\Delta p} = \frac{\Delta p}{p_0}, \bar{l}(\bar{t}) = \frac{\eta}{\rho R_2^2 v_0} l(t).$$

Уравнение (6) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} - \frac{p_0}{\rho v_0^2} \cdot \frac{\bar{\Delta p}(\bar{t})}{\bar{l}(\bar{t})} + \frac{\gamma}{\eta v_0}. \quad (15)$$

Следовательно, задача сводится к решению дифференциального уравнения (15) при условиях (8), (9), (10), (11) и (12). Точное решение этой задачи может быть получено операционным методом, применяя который (одностороннее преобразование Лапласа), получим:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta p}(\bar{t}) &= \frac{E}{\beta} \cdot \frac{\bar{T}}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\bar{T}} \bar{t} \right) + \\ &+ \frac{\left[(b_1 b_3 + b_2 b_4) \cos \frac{2\pi}{\bar{T}} \bar{t} + (b_1 b_4 - b_2 b_3) \sin \frac{2\pi}{\bar{T}} \bar{t} \right] \frac{\bar{T}}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\bar{T}} \bar{t} \right)}{\pi \beta (b_3^2 + b_4^2)} + \\ &+ \frac{2\pi}{\beta \bar{R}_1} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\bar{T}} \bar{t} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n^2 [a_2^{(n)} a_4^{(n)} - a_3^{(n)} a_5^{(n)}] e^{-\frac{\mu_n^2}{\bar{R}_1^2} \bar{t}}}{\left(\frac{\mu_n^4}{\bar{R}_1^4} + \frac{4\pi^2}{\bar{T}^2} \right) [a_2^{(n)^2} + a_3^{(n)^2}]}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} a_1^{(n)} &= J_0 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) - J_2 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) - \bar{R}_1^2 J_0(\mu_n) + \bar{R}_2^2 J_2(\mu_n); \\ a_2^{(n)} &= -\frac{\pi \bar{R}_1 a_1^{(n)}}{4 \mu_n} \left[J_0(\mu_n) - J_2 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) \right] + \frac{\pi \bar{R}_1}{2 \mu_n} \left[J_1 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) - \right. \\ &\left. - \bar{R}_1 J_1(\mu_n) \right] \cdot \left[\bar{R}_1 J_1(\mu_n) - J_1 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) \right] - \frac{\pi \bar{R}_1}{4 \mu_n} \left[J_0(\mu_n) - J_2 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) \right] \times \\ &\times \left[J_0 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) - J_2 \left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1} \right) - \bar{R}_1^2 J_0(\mu_n) + \bar{R}_2^2 J_2(\mu_n) \right] + \frac{\pi \bar{R}_1}{2 \mu_n} \left[J_1(\mu_n) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \cdot \left[J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1 J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] + \\
& + \frac{\pi(1-\bar{R}_1^2)}{4} \bar{R}_1 \cdot J_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) \times \left[J_1(\mu_n) - \bar{R}_1 J_1\left(\frac{\eta_n}{\bar{R}_1}\right) \right]; \\
a_3^{(n)} = & -\frac{\pi \bar{R}_1 a_1^{(n)}}{4 \mu_n} \left[N_0(\mu_n) - N_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] + \frac{\pi \bar{R}_1}{2 \mu_n} \left[I_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \right. \\
& \left. - \bar{R}_1 J_1(\mu_n) \right] \cdot \left[\bar{R}_1 N_1(\mu_n) - N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] - \frac{\pi \bar{R}_1^2}{4 \mu_n} \left[J_0(\nu_n) - J_0\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] \times \\
& \times \left[N_0\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - N_2\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1^2 N_0(\nu_n) + \bar{R}_1^2 N_2(\nu_n) \right] + \frac{\pi \bar{R}_1}{2 \mu_n} \left[J_1(\mu_n) - \right. \\
& \left. - J_1\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] \cdot \left[N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1 N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] + \frac{1-\bar{R}_1^2}{4 \mu_n} \left[J_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) N_0(\mu_n) - \right. \\
& \left. - J_0(\mu_n) N_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) \right] + \frac{\pi(1-\bar{R}_1)}{4} \left[\bar{R}_1 J_1(\mu_n) N_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) + \right. \\
& \left. + J_0(\mu_n) N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) N_0(\nu_n) - \bar{R}_1 J_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \right]; \\
a_4^{(n)} = & J_0\left(\frac{\nu_n}{\bar{R}_1}\right) \left[J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1 J_1(\mu_n) \right]; \\
a_5^{(n)} = & \frac{\bar{R}_1 \nu_n}{2} \left[J_0(\mu_n) N_0\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - J_0\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) N_0(\mu_n) \right] + N_0\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \times \\
& \times \left[J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1 J_1(\mu_n) \right] + \bar{R}_1 J_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) \cdot \left[N_1\left(\frac{\mu_n}{\bar{R}_1}\right) - \bar{R}_1 N_1(\mu_n) \right]; \\
A_1 = & \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \\
& - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} + \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}}; \\
A_2 = & \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} + \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \\
& - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}}; \\
A_3 = & \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) - \\
& - \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right); \\
A_4 = & \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) + \\
& + \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 = & \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(-\text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} + \bar{R}_1 \text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) + \\
& + \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right); \\
A_6 = & \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(-\text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} + \bar{R}_1 \text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) - \\
& - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \left(\text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right); \\
A_7 = & \left(\text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \right. \\
& \left. - \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right) - \left(\text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \right. \\
& \left. - \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right); \\
A_8 = & \left(\text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right) + \\
& + \left(\text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right) \left(\text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{bei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right); \\
A_9 = & \left(\text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{ber}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right) - \\
& - \left(\text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right); \\
A_{10} = & \left(\text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \bar{R}_1 \text{her}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \right. \\
& \left. - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right) + \left(\text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \text{hei}_1 \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \right) \left(\text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \right. \\
& \left. - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \right); \\
A_{11} = & \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \\
& - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 + \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1; \\
A_{12} = & \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} + \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} - \\
& - \text{ber} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{hei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1 - \text{bei} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \cdot \text{her} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} \bar{R}_1; \\
b_1 = & \frac{2\pi^2}{T} (A_3 - A_6) - (A_1 + A_2) \frac{\pi \bar{R}_1^2}{2T} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2\pi}{T}};
\end{aligned}$$

$$b_2 = (A_2 - A_1) \frac{\pi \bar{R}_1^2 \sqrt{2}}{2 \bar{T}} \sqrt{\frac{2 \pi}{\bar{T}}} + \frac{2 \pi}{\bar{T}} (A_4 - A_6);$$

$$b_3 = A_7 + A_9 - (A_{11} + A_{12}) \frac{1 - \bar{R}_1^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \pi}{\bar{T}}};$$

$$b_4 = A_8 + A_{10} + (A_{12} - A_{11}) \frac{1 - \bar{R}_1^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \pi}{\bar{T}}};$$

Как видно, полученное выражение для $\bar{\Delta p}(\bar{t})$ точным методом представляет собой громоздкую формулу и численный расчет по ней потребует много времени. Поэтому ниже предлагается приближенное решение данной задачи.

Как было показано ранее [2], для решения нестационарного движения несжимаемой вязкой жидкости может быть применен способ осреднения по радиусу, впервые предложенный Н. А. Слезкиным и С. М. Таргом [5].

Учитывая отмеченное, этот способ был применен и для решения рассматриваемой задачи. В результате было получено следующее выражение перепада давления:

$$\bar{\Delta p}(\bar{t}) = \frac{E}{\beta} l(\bar{t}) - \frac{\pi \bar{R}_1^2 - b_2}{\beta a_2} \left[V(t) - \left(a_1 + \frac{b_1 a_2}{\pi \bar{R}_1^2 - b_2} \right) \frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} \right] \bar{e}(\bar{t}); \quad (17)$$

$$E = \frac{\gamma R_2^2}{\eta v_0}; \quad \beta = \frac{p_0}{\rho v_0^2}; \quad \bar{R}_1 = \frac{R_1}{R_2}; \quad \bar{V} = \frac{V}{v_0};$$

$$a_1 = \frac{1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_1^2}{12} - \frac{1 + \bar{R}_1}{4 \ln \bar{R}_1} (1 + \bar{R}_1 \ln \bar{R}_1 - \bar{R}_1) - \frac{1}{4};$$

$$a_2 = 2 \pi \left[\frac{1 - \bar{R}_1^4}{16} - \frac{1 - \bar{R}_1^2}{4 \ln \bar{R}_1} \left(\frac{1}{4} + \frac{\bar{R}_1^2}{2} \ln \bar{R}_1 - \frac{\bar{R}_1^2}{4} \right) - \frac{1 - \bar{R}_1^2}{8} \right];$$

$$b_1 = \frac{1 + \bar{R}_1 \ln \bar{R}_1 - \bar{R}_1}{(1 - \bar{R}_1) \ln \bar{R}_1};$$

$$b_2 = \frac{2 \pi}{\ln \bar{R}_1} \left(\frac{1}{4} + \frac{\bar{R}_1^2}{2} \ln \bar{R}_1 - \frac{\bar{R}_1^2}{4} \right).$$

Для численных расчетов примем, что спуск одной 25-метровой свечи происходит за время $T = 90$ сек (из этого условия определяется v_0), $v = 0,225$ см²/сек, $d_1 = 6^{3/8}$ и $d_2 = 9^{3/4}$.

Результаты численных расчетов по изменению гидродинамического давления в концевом сечении колонны представлены в табл. 3, из которой видно, что с течением времени Δp увеличивается. Это объяс-

Таблица 3

$t, \text{сек}$	22,5	112,5	202,5	292,5	382,5	472,5	562,5	652,5	742,5
$\Delta p, \text{атм}$	1,26	3,76	6,28	8,79	11,30	13,81	16,33	18,84	21,35

няется увеличением $l(t)$ со временем, а также постоянством амплитуды скорости спуска. Для силы, под действием которой движется буровая труба, получено следующее выражение:

$$F = \frac{\pi R_2^4}{\eta} \bar{R}_1^2 \gamma v_0 \bar{l}(\bar{t}) \left[-\frac{\gamma v_0}{\gamma_1 R_2^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} - \frac{2 \gamma v_0}{\gamma_1 R_2^2 \bar{R}_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{R}_1} - 1 + \left(1 - \frac{\bar{R}_0^2}{\bar{R}_1^2} \right) \frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\bar{R}_0^2}{\bar{R}_1^2} - \frac{\eta p_0}{\gamma_1 v_0 \rho R_2^2} \frac{\Delta \bar{p}(\bar{t})}{\bar{l}(\bar{t})} \right]. \quad (18)$$

Результаты численных расчетов по формуле (18) представлены в табл. 4.

Таблица 4

$t, \text{сек}$	22,5	112,5	202,5	292,5	382,5	472,5	562,5	652,5	742,5
$F, \text{т}$	0,587	1,762	2,936	4,110	5,285	6,459	7,634	8,808	9,983

В процессе спуска буровых труб представляет интерес определение изменения гидродинамического давления на стенки скважины на определенной глубине. Результаты расчетов по изменению гидродинамического давления на глубине $H = 500$ м представлены в табл. 5.

Таблица 5

$t, \text{сек}$	1800	1822,5	1890	1912,5	1980	2002,5
$\Delta p, \text{атм}$	50,00	50,25	50,00	50,25	50,00	50,25

Из этой таблицы видно, что изменение Δp с течением времени на определенной глубине имеет циклический характер. Максимальное изменение давления составляет 0,25 атм.

Как известно, на практике с течением времени амплитуда скорости спуска уменьшается. Примем, что это уменьшение происходит по экспоненциальному закону, тогда

$$V(t) = v_0 \bar{e}^{kt} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \frac{2 \pi t}{T} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos \frac{2 n \pi t}{T} \right).$$

Результаты численных расчетов для вышеприведенного случая и $\bar{k} = 0,5$ представлены в табл. 6.

Таблица 6

$t, \text{сек}$	22,5	202,5	292,5	562,5	742,5	1012,5	1372,5	1462,5	∞
$\Delta p, \text{атм}$	1,22	5,84	7,96	13,46	16,56	20,50	24,68	25,57	38,45

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И. С. Собрание сочинений. Изд. АН СССР, 1952.
2. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Азербайджанский нефтяной институт, 1959.
3. Расизаде Я. М., Гурбанов С. Г. Гидравлический разрыв пласта и вопросы осложнений при бурении скважин. Азербайджанский нефтяной институт, 1960.
4. Розенберг Г. Д. "Нефть и газ". 1960, № 1.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. 1955.

6. Шахмалнев Г. М. Исследование работы механического тормоза буровой лебедки и разработка рационального режима спуска бурового инструмента. Азерб. нефтешпр., 1960.

7. Clark. Petroleum Engineer. January. 1955.

Г. Т. Насанов

Сыхылмажан өзлү мајенин гэрарлашмамыш һэрәкәтинә даир бир мәсәләнин һәлли.

ХҮЛАСӘ

Сон вахтлар әдәбијатда гују диварында һидродинамик тәзјигин дәјишмәсинин нәзәри вә тәчрүби өјрәнилмәсинә чох фикир верилир. Һазырда белә һесаб етмәк олар ки, нефт гујусу газылан заман јаранан чәтинликләрин әсас сәбәбләриндән бири гују диварында һидродинамик тәзјигин дәјишмәсидир.

Әдәбијатларда газыма аләтини гујуја салдыгда һидродинамик тәзјигин артмасы нәтичәсиндә лајын һидравлик јарылмасы вә килли мәнлулун удулмасы, газыма аләтини гујудан галдырдыгда исә газ-нефт-су туллантысынын олдуғу кәстәрилмишдир. Газыма ишләриндә јухарыда кәстәрилән чәтинликләрә гаршы мүбаризә үчүн гују диварында һидродинамик тәзјигин дәјишмәсинин тәдгиги мәсәләси мејдана чыхыр.

Газыма боруларыны гујуја салан заман гују диварында һидродинамик тәзјигин дәјишмәсини өјрәнмәк мәсәләси ујғун өзлү вә өзлү-пластик мајеләрин гэрарлашмамыш һэрәкәтинә даир мәсәләнин һәллине кәтирилир.

Тәдгиг едилән мәсәләнин гэрарлашмыш һалы А. М. Пирвердијан вә Н. А. Гукасов тәрәфиндән өјрәнилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазиијат вә техника елмләри серијасы, 1963, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1963, № 4

Н. К. КАДЫРОВ, А. Д. ЮСИБОВА, А. Б. ГАБИБОВ

ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ $p \cdot v \cdot t$ СООТНОШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЖИДКИХ АЛКАНОВ НОРМАЛЬНОГО СТРОЕНИЯ

В связи с ростом применения жидких углеводородных газов возникла необходимость иметь достоверные и проверенные данные по $p \cdot v \cdot t$ (давление—удельный объем—температура) или $p \cdot \beta \cdot t$ соотношениям основных жидких гомологов алканового ряда—этана, пропана и н-бутана. В последнем, т. е. в соотношении $p \cdot \beta \cdot t$, β обозначает сжимаемость жидкого углеводорода.

Пренебрежение сжимаемостью, например, при перекачке указанных летучих жидкостей насосами, при подсчете объемной производительности, мощности и других параметров агрегата может привести к значительным погрешностям [5].

Соответствующий учет величины β может найти также широкое применение при исследовании паро-жидкостных равновесий в углеводородных системах.

Однако при составлении графиков: сжимаемость—давление ($\beta \cdot p$) при $t = \text{const}$ и сжимаемость—приведенная температура ($\beta \cdot t$) при $p = \text{const}$ для жидких пропана и н-бутана по литературным данным [4], на базе удельных объемов, с использованием расчетных формул [1], нами были обнаружены некоторые явления, описанию которых и посвящена настоящая статья.

Прежде чем приступить к построению графиков $z \cdot p$ при $t = \text{const}$ на основании удельных объемов, представленных в справочнике [4] (табл. 14, 16 для C_2H_6 ; 20, 22—для C_3H_8 ; 29, 30, 33—для н- C_4H_{10}), вычислялись коэффициенты сжимаемости линий конца конденсации (табл. 1), критических точек и критических изотерм (табл. 2, 3) по исправленному уравнению состояния Клапейрона—Менделеева ($p \cdot v = z \cdot R \cdot T$) при данных давлениях и температурах. При этом жидкость в указанных состояниях рассматривалась как сильно сжатый или очень плотный газ [6].

Имея численные значения зависимости $z = f(p, t)$, не трудно построить линии конца конденсации для каждого углеводорода в отдельности [3].

Ввиду того, что почти все точки, составляющие в конечном итоге линии конца конденсации [3], легли на довольно плавную кривую, а в некоторых случаях данные одних авторов совпадали с данными других, нами было сделано заключение о правильном определении удельных объемов и следовательно, коэффициентов сжимаемости, по-

Таблица 1

№ пп	P _{ата}	t, °C	C ₂ H ₆		P _{ата}	t, °C	C ₃ H ₈		P _{ата}	t, °C	C ₄ H ₁₀		z
			v, см ³ /г	z			v, см ³ /г	z			v, см ³ /г	z	
1	23,81	0,2	2,411	0,0748	4,669	0	1,885	0,01675	1,0,9	0,0	1,669	0,004246	
2	27,22	6,0	2,485	0,08592	5,436	5	1,909	0,01940	1,367	8,0	1,693	0,005837	
3	30,62	11,1	2,568	0,09809	6,298	10	1,935	0,02238	1,797	16,0	1,718	0,007313	
4	34,02	15,9	2,660	0,1110	7,678	17	1,975	0,02717	2,041	19,78	1,741	0,008608	
5	35,72	17,61	2,875	0,1252	8,341	20	1,991	0,02946	2,389	24,0	1,747	0,009818	
6	37,42	19,78	2,917	0,1334	8,505	10,78	1,990	0,02993	2,722	29,06	1,749	0,010789	
7	37,42	20,2	2,765	0,1251	10,206	27,94	2,035	0,03586	3,402	36,67	1,779	0,013379	
8	39,12	21,83	3,008	0,1444	11,907	34,33	2,081	0,04189	4,08	43,17	1,805	0,015945	
9	40,82	23,89	3,082	0,1501	13,610	40,17	2,124	0,04796	3,76	48,94	1,827	0,018492	
10	40,82	24,3	2,908	0,1415	15,310	45,44	2,167	0,05414	5,44	54,06	1,848	0,02104	
11	42,52	25,83	3,181	0,1604	17,010	50,22	2,207	0,06035	6,12	58,72	1,869	0,02360	
12	44,23	27,72	3,315	0,1728	18,71	55,89	2,248	0,06646	6,80	63,06	1,889	0,02616	
13	44,23	28,10	3,137	0,1633	20,41	58,94	2,290	0,0737	8,51	72,56	1,988	0,03267	
14	45,93	29,61	3,516	0,1891	22,21	62,94	2,337	0,08024	10,21	80,72	1,987	0,03926	
15	47,63	31,49	3,870	0,2145	23,81	66,72	2,386	0,08690	11,91	96,94	2,038	0,04605	
16	47,63	31,70	3,716	0,2059	25,52	70,33	2,439	0,09421	13,61	94,44	2,086	0,05290	
17	48,68	32,56	4,728	0,2669	27,22	73,78	2,495	0,10180	15,31	100,39	2,136	0,05996	
18	—	—	—	—	28,91	76,94	2,553	0,1096	17,01	105,83	2,183	0,06710	
19	—	—	—	—	30,62	79,94	2,616	0,1179	18,71	110,94	2,235	0,07457	
20	—	—	—	—	32,32	82,72	2,682	0,1266	20,41	115,67	2,292	0,08240	
21	—	—	—	—	34,02	85,44	2,756	0,1360	—	—	—	—	
22	—	—	—	—	35,72	88,11	2,844	0,1462	—	—	—	—	
23	—	—	—	—	37,42	90,01	2,942	0,1573	—	—	—	—	
24	—	—	—	—	39,12	93,11	3,062	0,1700	—	—	—	—	
25	—	—	—	—	40,82	95,61	3,236	0,1862	—	—	—	—	

Таблица 2

№ пп	Углеводород	Критические параметры			Критический коэффициент сжимаемости
		давление, ата	температура, °C	объем, см ³ /г	
1	C ₂ H ₆	48,68	32,56	4,73	0,2669
2	C ₃ H ₈	42,8	96,8	4,42	0,2656
3	н-С ₄ H ₁₀	37,47	152,01	4,44	0,2682

Таблица 3

№ пп	C ₂ H ₆			C ₃ H ₈			н-С ₄ H ₁₀		
	P _{ата}	v, см ³ /г	z	P _{ата}	γ, мол/л	z	P _{ата}	γ, мол/л	z
1	40,82	12,28	0,58625	44,14	7,0	0,2011	37,46*	4,0*	—
2	47,63	7,267	0,41356	54,86	8,0	0,2187	37,76	5,0	0,20953
3	54,43	3,208	0,20277	88,89	9,0	0,3149	39,15	5,5	0,19749
4	68,04	2,912	0,23008	171,09	10,0	0,5455	43,4	6,0	0,20069
5	85,05	2,747	0,27131	—	—	—	53,34	6,5	0,22768
6	102,1	2,645	0,31360	—	—	—	73,27	7,0	0,29041
7	119,1	2,573	0,35580	—	—	—	108,96	7,5	0,40300
8	136,1	2,512	0,39702	—	—	—	168,11	8,0	0,58304
9	153,1	2,461	0,43750	—	—	—	260,68	8,5	0,25091
10	170,1	2,421	0,47820	—	—	—	—	—	—
11	187,1	2,385	0,51820	—	—	—	—	—	—
12	204,1	2,351	0,55720	—	—	—	—	—	—

* Критические параметры.

лученных [расчетным путем, исходя из этих объемов. Поэтому особых замечаний по указанным линиям у нас не имеется.

Что касается критических точек (табл. 2), то они были построены на основе данных различных авторов, приведенных в тех же таблицах.

Критические изотермы были определены на базе данных, включенных в табл. 13 (C₂H₆), 17 (C₃H₈) и 25 (н-С₄H₁₀) справочника, и подсчитаны аналогичными способами, а полученные значения коэффициента сжимаемости сведены в табл. 2.

Указанные изотермы [3] с точки зрения геометрии кривых почти полностью удовлетворяют тем требованиям, которые предъявляются к критическим изотермам.

Разброс точек вдоль проведенных кривых почти отсутствует и практически отклонения равны нулю. Сказанное в одинаковой мере относится к критическим изотермам всех трех углеводородов.

Имея линии конца конденсации и критические изотермы, мы приступили к построению графиков $[z = f_1(p_1 t), \beta = f_2(p_1 t)]$ и $\beta = f_3(\tau_1 p)$, которые, как известно, дают более наглядное представление о функциональных зависимостях, чем формулы для каждой жидкости в отдельности. Ниже приводится краткое описание этих графиков.

График этана [3], построенный по коэффициентам сжимаемости включает две изотермы—при 21,1 и 26,6° (табл. 4). Исходные данные

Таблица 4

№ пп	Давление, ата	C ₂ H ₆			
		21,1°		26,6°	
		<i>v</i> , см ³ /г	<i>z</i>	<i>v</i> , см ³ /г	<i>z</i>
1	4,082	—	—	—	—
2	6,804	—	—	—	—
3	10,21	—	—	—	—
4	13,61	—	—	—	—
5	15,31	—	—	—	—
6	17,01	—	—	—	—
7	18,71	—	—	—	—
8	20,41	—	—	—	—
9	23,81	—	—	—	—
10	27,22	—	—	—	—
11	30,62	—	—	—	—
12	34,02	—	—	—	—
13	37,42	—	—	—	—
14	40,82	2,911	—	—	—
15	47,63	2,805	0,1610	3,048	0,1720
16	51,03	—	—	—	—
17	54,43	2,736	0,1795	2,904	0,1872
18	61,64	—	—	—	—
19	68,04	2,638	0,2163	2,748	0,2215
20	85,1	2,555	0,2618	2,634	0,2654
21	102,1	2,493	0,3067	2,557	0,3092
22	119,1	2,444	0,3508	2,506	0,3535
23	136,1	2,400	0,3936	2,454	0,3956
24	153,1	2,368	0,4368	2,411	0,4372
25	170,1	2,339	0,4791	2,376	0,4787
26	187,1	2,309	0,5206	2,345	0,5197
27	204,1	2,280	0,5608	2,351	0,5684

и размерность для подсчета их [коэффициента сжимаемости следующие:

$$R = \frac{\kappa \Gamma \text{ м}}{\kappa \Gamma \cdot \text{град}}; T = ^\circ K; p = \frac{\kappa \Gamma}{\text{см}^2};$$

$$v = \frac{\text{см}^3}{\Gamma}.$$

Согласное этим размерностям исправленное уравнение состояния Клапейрона—Менделеева, решенное относительно коэффициента сжимаемости, примет следующий вид:

$$z = 10 \cdot \frac{pv}{28,2 \cdot T}.$$

Участки изотерм до линии конца конденсации строились путем экстраполяции, предварительно на этой линии определялась точка по формуле Антуана $\left(\lg p = A - \frac{B}{c+t} \right)$ с соответствующими постоянными, удовлетворяющими данному интервалу температур.

Характерным для изотерм жидкого этана является короткий участок вблизи линии конца конденсации со слабо выраженной кривизной, увеличивающейся по мере приближения изотерм к критической изотерме и, наоборот, уменьшающейся при удалении от нее.

Таблица 5

Значения постоянных, входящих в формулу (2)					
$A_0 = 0,100; r = 0,00487; B = 1671,26$					
$m_1 = -12,508,69; n = 23,325,89$					
H—C ₄ H ₁₀					
C ₃ H ₈					
Температура, °C					
№ пп	1	2	3	4	5
1	21,1	37,1	71,1	87,8	137,8
2	1,533 205,760	1,611 148,056	1,773 81,500	1,855 67,160	—
3	—	—	—	—	—
4	21,1	37,8	71,11	87,8	121,1
5	1,282 430,750	1,358 290,750	1,510 141,750	1,584 95,750	1,736 104,650
6	—	—	—	—	—
Коэффициенты A и B					
Коэффициенты A и B					
$A_0 = 0,058; r = 0,00455;$					
$B_0 = -3635,75; m_1 = 27,386,59;$					
$n_1 = 52,712,31$					

Как было отмечено выше, соблюдение закономерности, заключающейся в росте удельного объема с температурой, при постоянном давлении дает основание считать правильным определение экспериментальных данных, приведенных в табл. 14 справочника [4].

Графики для пропана и н-бутана. Истинные изотермические коэффициенты сжимаемости (β_T) были подсчитаны по уравнению состояния, предложенному проф. А. М. Мамедовым [1] для жидких алканов на базе уравнения Е. В. Бирона и имеющему вид:

$$\beta_T = \frac{(\sigma - A)^2}{B \cdot \sigma}, \quad (1)$$

где

$$A = A_0 + rt$$

$$B = B_0 + \frac{m_1}{\left(\frac{T}{100}\right)} + \frac{n_1}{\left(\frac{T}{100}\right)^2} \quad (2)$$

Данные, необходимые для вычисления постоянных A и B , взятые из [1], а также β_T для линии конца конденсации и для зависимости $\beta_T = f'(p_1 - t)$ [или $\beta_T = f''(\tau_1 p)$] сведены, соответственно, в табл. 5, 6 и 7.

Таблица 6

Пропан C_3H_8								
№ пп	$p_{атм}$	Температура			Удельный объем v , $см^3/г$	Постоянные		β_T
		$^{\circ}C$	$^{\circ}K$	$\tau = \frac{T}{T_{кр}}$		A	B	
1	4,669	0	273,16	0,738	1,885	1,430	314,260	0,0003493
2	8,341	20	293,16	0,794	1,991	1,527	212,260	0,0005080
3	13,61	40,17	313,33	0,846	2,124	1,623	132,260	0,0008920
4	20,41	58,94	332,10	0,898	2,290	1,715	93,260	0,0014790
5	25,52	70,33	343,49	0,929	2,439	1,771	75,260	0,0024400
6	32,32	82,72	355,88	0,961	2,682	1,830	71,260	0,0037900

Нормальный бутан $n-C_4H_{10}$

1	3,402	36,67	309,83	0,728	1,779	1,350	306,75	0,000337
2	5,44	54,06	327,32	0,769	1,848	1,429	195,75	0,000486
3	8,51	72,56	345,72	0,812	1,988	1,515	132,75	0,000849
4	10,21	80,72	353,88	0,831	1,987	1,550	119,75	0,000806
5	15,31	100,39	373,55	0,877	2,136	1,640	92,75	0,001240
6	18,71	110,94	384,10	0,902	2,235	1,688	90,75	0,001476

Вычисление истинного изотермического коэффициента сжимаемости для линии конца конденсации предпринято нами с целью проверки применимости формулы (1) к этой линии, хотя в работе [2] для гептана отмечено, „...что по мере приближения изотермы $250^{\circ}C$ к нижней пограничной кривой погрешность формулы (14) [т. е. формулы (1) Н. К.] заметно возрастает“.

Графики $\beta_T = f(p, t)$ для пропана и н-бутана изображены на рис. 1 и 2, нижним пределом которых служат изотермы $21,1^{\circ}C$.

Изотермы пропана расположены более подходяще к характеру закономерности, чем изотермы н-бутана, так как по мере повышения или, наоборот, увеличения температуры они удаляются, по мере роста

давления все изотермы приближаются друг к другу и можно предположить, что при соответствующих параметрах они пересекутся в определенных точках.

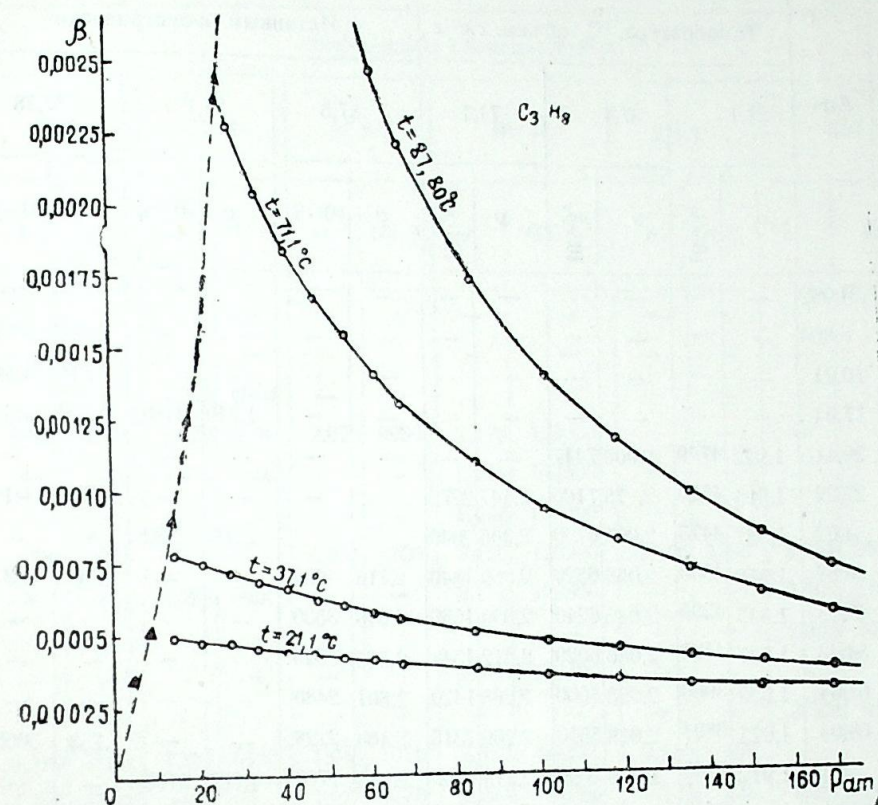


Рис. 1

○ — изотермы, полученные экспериментально;
 ▲ — линия кипения;
 ○ — экстраполированные части изотерм до линии кипения.

График н-бутана более запутан из-за пересечения изотерм друг с другом в нескольких точках. Но закономерность уменьшения β_T в зависимости от p сохранена как в области низких, так и высоких (близкритических) температур. Выделяется одна характерная изотерма $137,71^{\circ}C$, пересекающая все изотермы, за исключением изотермы $12,1^{\circ}C$. Но при наличии экспериментальных данных она пересекала бы и ее. Такое расположение изотермы $137,71^{\circ}C$ объясняется, очевидно, близостью последней к критической изотерме.

Приблизительно с $21,1^{\circ}C$ изотермы пропана и н-бутана начинают выпрямляться.

На рис. 3 и 4 представлены графические зависимости, вычисленные по формуле (1) на базе удельных объемов, определенных экспериментально (2), при $p = \text{const}$, соответственно, для пропана и н-бутана.

На графике пропана изображены 16 изобар в пределах давлений от 20,41 до 204,1 $атм$.

Далее нами была проверена применимость формулы (1) к линии конца конденсации. Для сравнения вычисленные по формуле (1) зна-

№ пп	Р _{ата}	Пропан											
		Температура, °С, объем, см³/г						Истинный изометрический					
		21,1		37,1		71,1		87,8		21,1		37,78	
		v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁶ ·β _T	v	10 ⁶ ·β _T	v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁷ ·β _T
1	4,082	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,794	3647
2	6,804	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,792	3600
3	10,21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,790	3590
4	17,01	—	—	—	—	—	—	—	—	1,710	2480	1,785	3518
5	20,41	1,972	4749	2,000	7417	—	—	—	—	—	—	—	—
6	27,22	1,965	4620	2, 78	7100	2,447	2275	—	—	—	—	1,778	3410
7	34,02	1,957	4475	2,067	6790	2,405	2040	—	—	1,700	2382	—	—
8	40,82	1,950	4350	2,056	6520	2,369	1840	2,718	4090	—	—	1,769	3283
9	47,63	1,943	4200	2,046	6240	2,339	1680	2,648	3530	—	—	—	—
10	54,43	1,937	4120	2,036	6020	2,312	1542	2,565	2920	—	—	—	—
11	61,64	1,930	3980	2,023	5660	2,288	1420	2,501	2480	—	—	—	—
12	68,04	1,925	3894	2,018	5550	2,266	1315	2,463	2228	—	—	1,753	3060
13	85,1	1,912	3658	1,999	5090	2,219	1109	2,384	1750	1,667	2160	—	—
14	102,1	1,900	3450	1,982	4680	2,182	937	2,325	1414	—	—	—	—
15	119,1	1,889	3272	1,967	4350	2,152	820	2,280	1180	1,664	2038	1,728	2720
16	136,1	1,879	3110	1,953	4040	2,127	722	2,243	9970	—	—	—	—
17	153,1	1,870	2944	1,941	3780	2,102	631	2,210	850	1,652	1920	—	—
18	170,1	1,862	2830	1,931	3570	2,081	558	2,179	720	1,647	1880	1,706	2444
19	187,1	1,855	2720	1,920	3360	2,062	495	2,153	614	—	—	—	—
20	204,1	1,848	2618	1,913	3220	2,045	442	2,130	527	1,641	1818	1,694	2282
21	238,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,682	2144
22	271,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	306,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
24	340,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,663	1920
25	408,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
26	476,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,636	1624
27	544,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28	612,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,608	1338
29	680,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
												1,582	1090

Таблица 7

Нормальный бутан													
коэффициент сжимаемости β _T													
54,4		71,11		87,8		104,44		121,1		137,78			
v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁷ ·β _T	v	10 ⁸ ·β _T	v	10 ⁶ ·β _T	v	10 ⁶ ·β _T	v	10 ⁶ ·β _T
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	1,945	6860	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1,839	4600	1,936	6620	2,025	9980	2,176	153400	—	—	—	—	—	—
—	—	1,923	6250	—	—	2,165	147800	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	2,144	137000	—	—	—	—	—	—
1,884	5550	—	—	1,996	8520	2,126	128200	2,126	1330	2,591	2670000	—	—
—	—	1,908	5860	—	—	2,110	118800	—	—	2,502	2170000	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,392	1610000	—	—
—	—	—	—	—	—	2,079	106400	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2,322	127600	—	—
1,799	3060	1,881	5150	1,948	7070	2,053	94300	2,179	859	—	—	—	—
1,786	3584	—	—	1,927	6375	2,025	82750	2,138	725	2,257	100400	—	—
1,776	3402	1,853	3980	1,908	5720	2,001	72800	2,104	617	2,207	80600	—	—
—	—	—	—	1,892	5200	1,979	64700	2,075	530	2,165	6573000	—	—
1,757	3065	1,829	3921	1,876	4720	1,960	57650	2,049	457	2,131	545000	—	—
—	—	—	—	1,862	4145	—	—	2,027	399	—	—	—	—
1,739	2620	1,807	3440	1,849	3830	1,928	46750	2,008	352	2,075	38000	—	—
—	—	—	—	1,841	3730	—	—	1,920	310	—	—	—	—
1,723	2510	1,789	3070	1,827	3361	1,900	38050	1,973	272	2,030	267200	—	—
—	—	—	—	—	—	1,876	29880	—	—	—	—	—	—
—	—	1,758	2320	—	—	1,855	26300	—	—	1,964	134500	—	—
—	—	—	—	—	—	1,835	20950	—	—	—	—	—	—
—	—	1,732	2008	—	—	—	—	—	—	1,914	62250	—	—
—	—	—	—	—	—	1,787	11320	—	—	—	—	—	—
—	—	1,687	1318	—	—	1,761	7270	—	—	—	—	—	—
—	—	1,668	1053	—	—	—	—	—	—	1,837	3945	—	—
—	—	—	—	—	—	1,715	2210	—	—	—	—	—	—
—	—	1,663	6070	—	—	1,696	961	—	—	—	—	—	—

чения удельных объемов линии конца конденсации и соответствующие им экспериментальные значения сведены в табл. 8.

Как видно, погрешность находится приблизительно в пределах от 0,5 до 4 %.

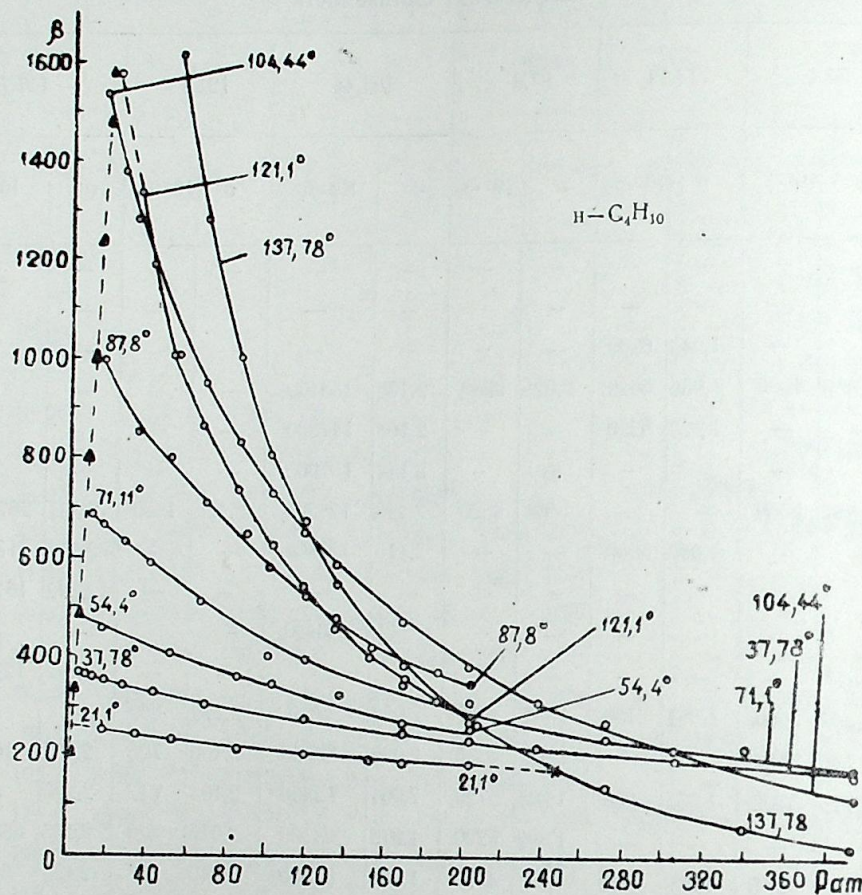


Рис. 2.

Таблица 8

C_3H_8					
№ пп	$p_{ата}$	$v_{экс.}$	$v_{выч.}$	$v_{экс.} - v_{выч.} = \Delta v$	Погрешность $\Delta v / v_{экс.} \%$
1	4,669	1,885	1,8442	+0,0408	+2,160
2	8,341	1,991	1,9720	+0,0180	+0,903
3	25,520	2,439	2,3710	+0,0680	+2,790
4	32,320	2,682	2,5620	+0,1200	+0,447
$n-C_4H_{10}$					
5	10,21	1,987	2,007	-0,0195	-0,98
6	15,31	2,136	2,192	-0,0560	-2,62
7	20,31	2,292	2,382	-0,0900	-3,92

График н-бутана включает 13 изобар, построенных в более широком интервале давлений—от 17,01 до 680,1 $атм$. Некоторые экспериментальные точки следует считать неправильно определенными. Это

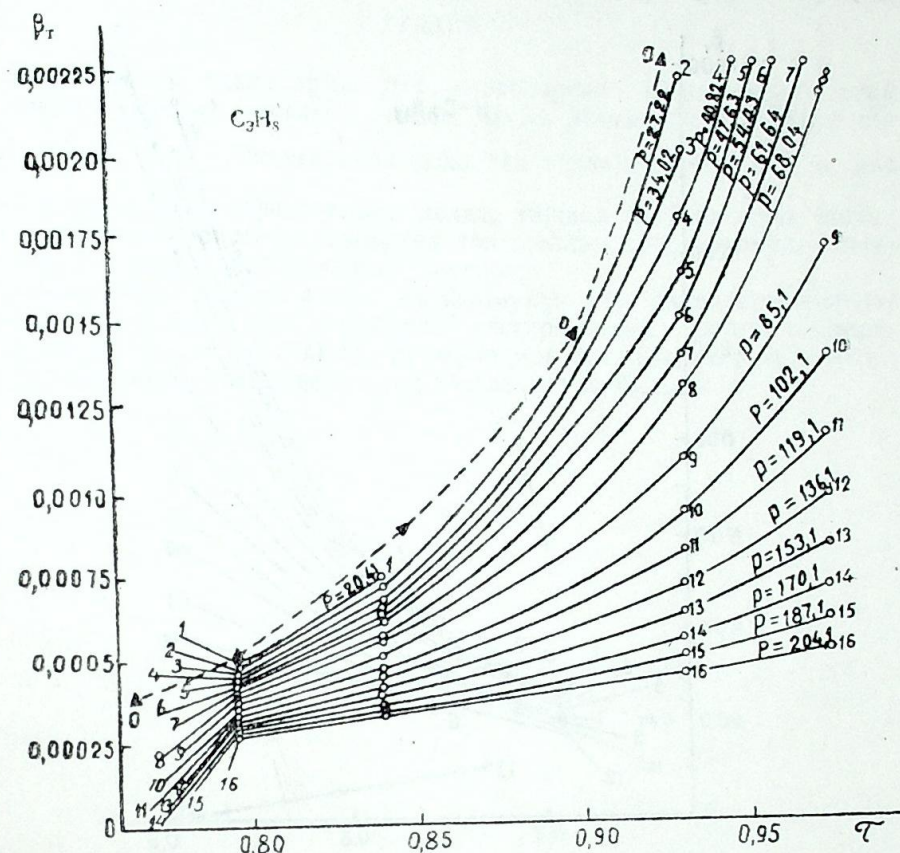


Рис. 3

Линии: $\circ-\circ$ кипения (точка Δ); 1—1 изобара при 20,41 $атм$; 2—2—27,28; 3—3—34,02; 4—4—40,82; 5—5—47,63; 6—6—54,43; 7—7—61,64; 8—8—68,04; 9—9—85,10; 10—10—102,1; 11—11—119,1; 12—12—136,1; 13—13—153,1; 14—14—170,1; 15—15—187,1; 16—16—204,1.

относится к точкам с параметрами: $p_1 = 102,1 \text{ атм}$, $\tau_1 = 0,810$ ($t_1 = 71,1^\circ$); $p_2 = 136,1 \text{ атм}$, $\tau_2 = 0,848$ ($t_2 = 87,8^\circ$); $p_3 = 34,02 \text{ атм}$, $\tau_3 = 769$ ($t_3 = 54,4^\circ \text{ C}$).

Первые два на рис. 4 показаны стрелками в направлении изобар, к которым они относятся, а последняя, обозначенная значком (оз), оказалась в области влажного пара.

Кроме этого, изобары 17,01; 34,02 и 40,82 $атм$ пересекают пограничную кривую, попадая также в область влажного пара.

Начиная примерно с давления 204,1 $атм$, изобары прямые. Анализ pvt соотношений жидких алканов нормального строения дает основание сделать следующие выводы.

1. Изобары пропана и н-бутана, начиная примерно с 204 $атм$, имеет прямолинейный характер.
2. Постоянные A_0 , r , B_0 , m_1 , n_1 , входящие в формулу (2), отсутствуют для метана и этана.

3. Уравнение состояния (1), приспособленное для вычисления удельных объемов жидких пропана и н-бутана, не удовлетворяет линии конца конденсации с той точностью, которая была получена в [1] при его проверке.

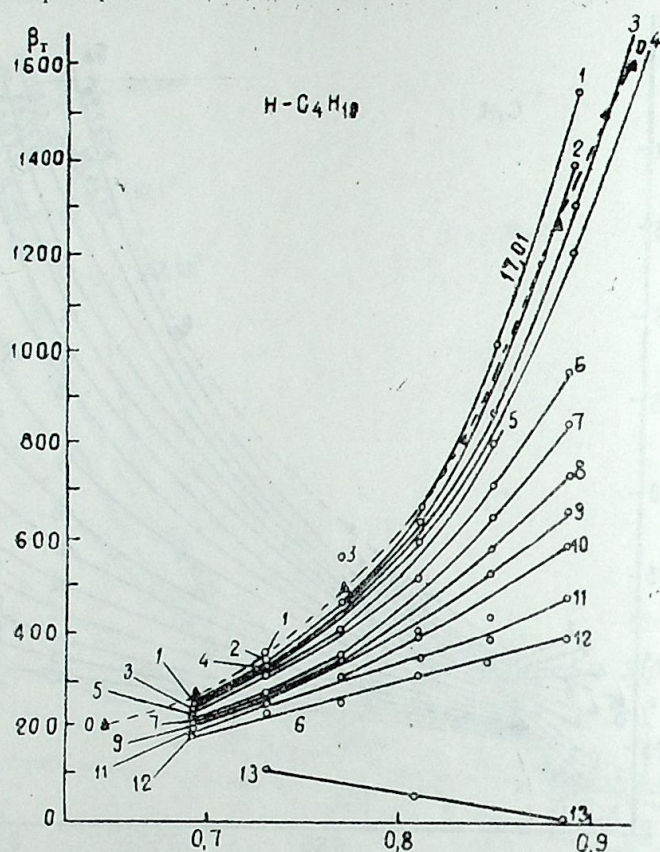


Рис. 4.

Линии: ○—○ кипения (точки ▲); 1—1 изобара 17,01 атм; 2—2—27,22; 3—3—34,02; 4—4—40,82; 5—5—51,03; 6—6—68,04; 7—7—85,1; 8—8—102,1; 9—9—119,1; 10—10—136,1; 11—11—170,1; 12—12—284,1; 13—13—680,4.

4. Применение низких температур в различных отраслях промышленности, а также важность, приобретаемая близкритической областью в связи с исследованиями газоконденсатных систем при высоких температурах и давлениях, требует дальнейшего усовершенствования уравнения состояния (1) с целью расширения интервала использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов А. М. Тр. Азерб. индустр. ин-та им. М. Азизбекова. Азнефтсиздат, вып. VII, 1954.
2. Мамедов А. М. Докт. дисс. АЗНИИ по переработке нефти. Баку, 1959.
3. Отчет лаборатории термодинамики пластовых систем Ин-та разработки нефтяных и газовых месторождений АН Азерб. ССР. Баку, 1962.
4. Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов. Вып. второй, Гостоптехиздат, 1947.
5. Grobholz R. K. Pet. Engr., 1952, IX, т. 24, № 10.
6. Newman A. Hall and Warren E. Jble. Engineering thermodynamics, New-York, 1960.

Н. Г. Гадиров, А. Д. Юсифова, А. Б. Габиев

Бә'зи нормал шәкилли маје алканларын pvt мүнәсибәтләринин график анализи

ХҮЛАСӘ

Мајешәкилли алканларын pvt әләгәләрини јахшы ифадә едән һал тәнликләриндән дәғиги, проф. Ә. М. Мәммәдовун тәклиф етдији: $v = A + \frac{B}{C+T}$ формасында олан һал тәнлијидир. Бу тәнлик pvt әләмәтләрини дәғиг ифадә етдији һалда, гајнама хәттини ејни дәғигликлә ифадә едә билмир. Апарылан тәдғигатлар хәтт үзәриндә хәтанын 4%-ә гәдәр ола биләчәјини көстәрир.

Үмумијјәтлә, график анализ бу формулун маје алканлары кифәјәт дәрәчәдә дәғигликлә ифадә етдијини көстәрмишдир. Ашағы температурларда (21°С-дән ашағы) бу формула pvt әләгәләрини, мүәллифин гејд етдији кими, һесабламағ үчүн тәтбиг едилә билмәз.

А. А. АББАСОВ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Большой интерес представляет теория нестационарных методов измерения физико-механических свойств жидкостей. Нестационарные методы, простые в экспериментальном отношении, получили гораздо меньшее распространение. Поэтому очень важно подробно проанализировать и разработать теорию нестационарного метода измерения физико-механических параметров жидкостей.

Отметим, что ротационные вискозиметры или вискозиметры с коаксиальными цилиндрами основаны на движении жидкости, помещенной между двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами, из которых один вращается, а другой неподвижен.

Известно, что разработка теории стационарного метода для ротационного вискозиметра, состоящего из двух соосных вертикальных цилиндров, между которыми испытывается вязко-пластичная жидкость, принадлежит Рейнеру и Ривлину [7, 8, 12, 13]. Этот метод проанализирован нами и по нему сделаны некоторые замечания [1].

Решению задачи об установившемся вращении вязко-пластичной жидкости между двумя цилиндрами посвящена работа Б. П. Вейнберга [6].

В дальнейшем решении задачи о вязко-пластичном течении среды, примыкающей к цилиндру, без учета инерционного члена занимался П. М. Огibalов [10], а с учетом этого члена—Ф. А. Бахшиян [5]. В [10] получено трансцендентное уравнение для определения границы вязко-пластического течения, зависящее от свойств жидкости, угловой скорости вращения и радиуса цилиндра.

В последнее время этими вопросами занимаются И. М. Астрахан [2, 3, 4] и А. И. Сафрончик [11]. Точное решение указанной задачи получено в [11] для нестационарного процесса с наличием подвижной границы, когда цилиндр вращается с переменной угловой скоростью в вязко-пластической среде. Решение, построенное А. И. Сафрончиком, годится только для конечных значений времени. Поэтому А. И. Сафрончик, не имея возможности получить уравнения распределения скоростей и распространения границы вязко-пластического течения для установившегося движения предельным переходом, приводит из литературы эти уравнения, которые получены из постановки задачи,

А. А. АББАСОВ

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМСЯ И НЕПОДВИЖНЫМ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Большой интерес представляет теория нестационарных методов измерения физико-механических свойств жидкостей. Нестационарные методы, простые в экспериментальном отношении, получили гораздо меньшее распространение. Поэтому очень важно подробно проанализировать и разработать теорию нестационарного метода измерения физико-механических параметров жидкостей.

Отметим, что ротационные вискозиметры или вискозиметры с коаксиальными цилиндрами основаны на движении жидкости, помещенной между двумя вертикальными коаксиальными цилиндрами, из которых один вращается, а другой неподвижен.

Известно, что разработка теории стационарного метода для ротационного вискозиметра, состоящего из двух соосных вертикальных цилиндров, между которыми испытывается вязко-пластичная жидкость, принадлежит Рейнеру и Ривлину [7, 8, 12, 13]. Этот метод проанализирован нами и по нему сделаны некоторые замечания [1].

Решению задачи об установившемся вращении вязко-пластичной жидкости между двумя цилиндрами посвящена работа Б. П. Вейнберга [6].

В дальнейшем решении задачи о вязко-пластичном течении среды, примыкающей к цилиндру, без учета инерционного члена занимался П. М. Огibalов [10], а с учетом этого члена—Ф. А. Бахшиян [5]. В [10] получено трансцендентное уравнение для определения границы вязко-пластического течения, зависящее от свойств жидкости, угловой скорости вращения и радиуса цилиндра.

В последнее время этими вопросами занимаются И. М. Астрахан [2, 3, 4] и А. И. Сафрончик [11]. Точное решение указанной задачи получено в [11] для нестационарного процесса с наличием подвижной границы, когда цилиндр вращается с переменной угловой скоростью в вязко-пластической среде. Решение, построенное А. И. Сафрончиком, годится только для конечных значений времени. Поэтому А. И. Сафрончик, не имея возможности получить уравнения распределения скоростей и распространения границы вязко-пластического течения для установившегося движения предельным переходом, приводит из литературы эти уравнения, которые получены из постановки задачи,

исходящей из наличия подвижной границы при установившемся движении.

И. А. Астрахан при решении задачи об устойчивости вращательного движения вязко-пластичной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами [3] использует уравнение распространения границы вязко-пластического течения.

Таким образом, исследователи утверждают, что при установившемся движении вязко-пластичной жидкости существует подвижная граница, т. е. движение не охватывает всю область жидкости по мере приближения процесса к установившемуся. Такое утверждение, на наш взгляд, физически необоснованно.

Нами установлено, что при установившемся вращении вязко-пластичной жидкости вся жидкость будет охвачена движением, если угловая скорость вращающегося цилиндра поддерживается постоянной*.

Однако еще не известно, с каким решением необходимо сравнивать получаемую экспериментально кривую при каждом конкретном случае для определения физико-механических параметров вязко-пластичной жидкости нестационарным методом. Поэтому в настоящей статье подробно исследуется теория нестационарного метода для ротационного вискозиметра, состоящего из двух цилиндров, между которыми испытывается вязко-пластичная жидкость.

Известно, что, независимо от того, какой цилиндр будет вращаться, а какой будет неподвижным, вращение жидкости вообще не начнется, если вращающий момент M_0 , действующий в начале движения на полосу поверхности цилиндра единичной длины, будет меньше $2\pi R_1^2 \tau_0$.

Здесь R_1 — радиус внутреннего цилиндра, τ_0 — предельное напряжение сдвига.

Чтобы началось вращение, должно быть $M_0 > 2\pi R_1^2 \tau_0$. При этом может быть три случая:

$$2\pi R_1^2 \tau_0 < M_0 < 2\pi R_2^2 \tau_0; \quad (I)$$

$$M_0 = 2\pi R_2^2 \tau_0; \quad (II)$$

$$M_0 < 2\pi R_2^2 \tau_0. \quad (III)$$

где R_2 — радиус внешнего цилиндра.

Обычно для измерения параметров жидкости ротационным вискозиметром поддерживается постоянная угловая скорость цилиндра и фиксируется вращающий момент по времени или наоборот**. Поэтому ниже для указанных случаев в отдельности сформулированы соответствующие граничные и начальные условия, при которых решение задачи позволит определить параметры жидкости.

§ 1. Пусть жидкость занимает область между коаксиальными круглыми цилиндрами бесконечной длины. Внутренний цилиндр неподвижен, а внешний начинает вращаться вокруг своей оси с состояния покоя***. При этом: 1°, если внешний цилиндр вращается с постоян-

ной угловой скоростью ω_2 , то вращающий момент, который должен быть приложен к цилиндру, чтобы поддерживать его угловую скорость постоянной, будет определяться, из выражения:

$$M = 2\pi r_0^2(t) \tau_0, \quad (1, 1)$$

где $r_0(t)$ — радиус границы вязко-пластичного течения, который подлежит определению.

Время, при котором граница течения с радиусом $r_0(t)$ достигнет поверхности внешнего цилиндра*, будет определяться из $r_0 = r_0(t)$ при условии $r_0 = R_2$. До этого момента времени жидкость, находящаяся в области $r_0(t) \leq r \leq R_2$, будет вращаться как упругое тело. Начиная с этого момента времени, вращающий момент будет определяться из выражения:

$$M = 2\pi R_2^2 \tau(r_0, t). \quad (1, 2)$$

Попутно отметим, что в данном случае постановка задачи, исходящая из наличия упругой области при установившемся движении (как отмечено нами ранее в [1])**, не соответствует характеру данного физического процесса.

Таким образом, чтобы получить все эти выражения, требуется решить дифференциальное уравнение;

$$\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r}; \quad (1, 3)$$

где

$$\tau_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} + \tau_0,$$

при следующих граничных и начальном условиях:

$$\omega(r, 0) = 0; \quad (1, 4)$$

$$\omega(R_1, t) = 0; \quad (1, 5)$$

$$\omega[r_0(t), t] = \omega_2, t > 0; \quad (1, 6)$$

$$\tau_{r\varphi}[r_0(t), t] = \tau_0. \quad (1, 7)$$

2°. Если вращающий момент M_0 поддерживается постоянным, то граничные и начальные условия будут:

$$\omega(r, 0) = 0; \quad (1, 8)$$

$$\omega(R_1, t) = 0; \quad (1, 9)$$

$$\omega[r_0(t), t] = \omega_2(t); \quad (1, 10)$$

$$\tau_{r\varphi}[r_0(t), t] = \tau_0. \quad (1, 11)$$

При этом область вязко-пластичного течения будет распространяться до радиуса $r_0 = \sqrt{\frac{M_0}{2\pi\tau_0}}$, если $M_0 < 2\pi R_2^2 \tau_0$, а если $M \geq 2\pi R_2^2 \tau_0$ — до R_2 . Следовательно, при $M_0 < 2\pi R_2^2 \tau_0$ жидкость, находящаяся в области $r_0 \leq r \leq R_2$, будет вращаться как упругое тело даже при установившемся движении.

* Исходя из физических соображений нами предполагается, что независимо от того, какой цилиндр будет вращаться, а также независимо от того $M_0 < 2\pi R_2^2 \tau_0$ или $M_0 > 2\pi R_2^2 \tau_0$, вязко-пластичное течение всегда будет начинаться от внутреннего цилиндра.

** В статье [1] формула (7) содержит знак $(\pm)$. Наличие минуса — упущенная ошибка. Независимо от того, какой цилиндр вращается, а какой неподвижен необходимо брать плюс.

* Полученный вывод физически не вызывает сомнения, но требует дальнейшего подтверждения, так как примененный нами метод не считается математически строгим при решении этих задач.

** Не лишне отметить, что имеется случай, когда задается переменная угловая скорость вращающегося цилиндра и фиксируется его момент по времени, или наоборот. Эти случаи в настоящей статье не рассматриваются.

*** Точная формулировка данного физического процесса, насколько нам известно, до сих пор оставалась открытой.

Для определения $\omega_2(t)$ составим уравнение вращательного движения цилиндра с учетом инерционного момента того слоя жидкости, который вращается как упругое тело:

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = M_0 - M, \quad (1, 12)$$

где $I_2 = I_{\text{ц}} + I_{\text{ж}}$; $I_{\text{ц}}$ — момент инерции цилиндра относительно оси вращения, т. е.

$$I_{\text{ц}} = 0,5 \pi \gamma_{\text{ц}} (R_{2\text{н}}^4 - R_2^4); \quad (1, 13)$$

$R_{2\text{н}}$ — наружный радиус цилиндра;

$\gamma_{\text{ц}}$ — плотность цилиндра;

$I_{\text{ж}}$ — момент инерции жидкого слоя, который вращается как упругое тело, т. е.

$$I_{\text{ж}} = 0,5 \pi \gamma_{\text{ж}} [R_2^4 - r_0^4(t)]; \quad (1, 14)$$

$\gamma_{\text{ж}}$ — плотность жидкости;

M — момент сил трения на границе вязко-пластичного течения, которое имеет радиус $r_0(t)$

Этот момент определяется из выражения:

$$M = 2 \pi r_0^2(t) \tau_0. \quad (1, 15)$$

При неустановившемся движении всегда будет иметь место $M < M_0$. Если принять во внимание тот факт, что влияние инерционного члена теоретически исчезает при $t \rightarrow \infty$, то из (1, 12) следует, что $M = M_0$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, если $M_0 < 2 \pi R_2^2 \tau_0$, то $r_0(t) \rightarrow r_0$ при $t \rightarrow \infty$. Если $M_0 = 2 \pi R_2^2 \tau_0$, то $r_0(t) \rightarrow R_2$ при $t \rightarrow \infty$, а если $M_0 > 2 \pi R_2^2 \tau_0$, то $r_0(t) = R_2$ при определенном моменте времени.

§ 2. Пусть жидкость занимает область между коаксиальными круглыми цилиндрами бесконечной длины. Внешний цилиндр неподвижен, а внутренний начинает вращаться вокруг своей оси с состояния покоя.

Рассматриваемая задача сводится к решению дифференциального уравнения:

$$\rho \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2 \tau_{r\varphi}}{r}, \quad (2, 1)$$

где

$$\tau_{r\varphi} = \mu r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \tau_0$$

при следующих граничных и начальных условиях.

1°. Если внутренний цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 , то будем иметь [5, 9, 10]:

$$\omega(r, 0) = 0, \quad (2, 2)$$

$$\omega(R_1, t) = \omega_1, t > 0; \quad (2, 3)$$

$$\omega[r_0(t), t] = 0; \quad (2, 4)$$

$$\tau_{r\varphi}[r_0(t), t] = -\tau_0. \quad (2, 5)$$

Вращающий момент, который должен быть приложен к цилиндру, чтобы поддерживать угловую скорость его постоянной, будет определяться из выражения:

$$M = 2 \pi R_1^2 \tau_{r\varphi}(R_1, t). \quad (2, 6)$$

В этом случае граница вязко-пластичного течения при определенном моменте времени достигнет внешнего цилиндра. Отсюда следует,

как отмечено нами выше, что при установившемся движении вся жидкость будет охвачена движением.

2°. Если вращающий момент M_0 поддерживается постоянным, то граничные и начальные условия будут:

$$\omega(r, 0) = 0; \quad (2, 7)$$

$$\omega(R_1, t) = \omega_1(t); \quad (2, 8)$$

$$\omega[r_0(t), t] = 0; \quad (2, 9)$$

$$\tau_{r\varphi}[r_0(t), t] = -\tau_0. \quad (2, 10)$$

При этом граница вязко-пластичного течения будет распространяться

до радиуса $r_0 = \sqrt{\frac{M_0}{2 \pi \tau_0}}$, если $M_0 < 2 \pi R_2^2 \tau_0$; а если $M_0 \geq 2 \pi R_2^2 \tau_0$ — до R_2 . Следовательно, при $M_0 < 2 \pi R_2^2 \tau_0$ жидкость, находящаяся в области $r_0 \leq r \leq R_2$, будет в покое даже при установившемся движении.

Для определения $\omega_1(t)$ составим уравнение вращательного движения внутреннего цилиндра:

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = M_0 - M, \quad (2, 11)$$

где

$$I_1 = 0,5 \pi \gamma_{\text{ц}} (R_1^4 - R_{1\text{в}}^4); \quad M = 2 \pi R_1^2 \tau_{r\varphi}(R_1, t);$$

$R_{1\text{в}}$ — внутренний радиус цилиндра.

В заключение отметим, что если угловая скорость вращающегося цилиндра поддерживается постоянной или же поддерживается постоянным вращающий момент, приложенный к вращающемуся цилиндру (когда $M_0 \gg 2 \pi R_2^2 \tau_0$), можно заменить $r_0(t)$ на R_2 . При такой замене удастся использовать математические методы решения линейных уравнений в частных производных для случая, когда краевые условия задаются на неподвижных границах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов А. А. О теории Рейнера и Ривлина для ротационного вискозиметра. „ДАН Азерб. ССР“, т. 18, 1962, № 8.
2. Астрахан И. М. Круговое вращательное движение вязко-пластичной жидкости в пограничном слое на круглом цилиндре. „Изв. вузов, нефть и газ“, 1960, № 7.
3. Астрахан И. М. Устойчивость вращательного движения вязко-пластичной жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами. Журн. ПМТФ, 1961, № 2.
4. Астрахан И. М. Нестационарные круговое движение вязко-пластичной жидкости, заключенной между двумя цилиндрами. „Изв. вузов, нефть и газ“, 1961, № 4.
5. Бахшиян Ф. А. Вращение жесткого цилиндра в вязко-пластической среде. ПММ, т. 12, вып. 6, 1948.
6. Вейнберг Б. П. К изучению тел с большими значениями коэффициента внутреннего трения. Журн. русск. физ.-хим. об-ва. ч. физическая, т. 44, вып. 4, 1912.
7. Волярович М. П., Толстой Д. М. Определение постоянных пластичного потока минеральных суспензий. Журн. физ. химии, т. 4, вып. 6, 1933.
8. Гатчек Э. Вязкость жидкостей. М., 1934.
9. Мирзаджанзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче. Азербайджанский нефтяной институт, 1959.
10. Огибалов П. М. О распространении вязко-пластичного течения с учетом упругости для случая вращения и сдвига. ПММ, т. 5, вып. 1, 1941.
11. Сафрончик А. И. Вращение цилиндра с переменной угловой скоростью в вязко-пластичной среде. ПММ, т. 23, вып. 6, 1956.
12. Царевич К., Шищенко Р., Бакланов Б. Глинистые растворы в бурении. Баку, 1935.
13. Reiner M., Rivlin R. Die Theorie der strömung einer elastischen Flüssigkeit im Couette-Apparat. Kolloidzs. Bd. 43, 1927, H. 1.

**Фырланан вә тәрпәнмәјән коаксиал цилиндрләр арасында
өзлү-пластик мәјәләрин гәрарлашмамыш һәрәкәти һаггында**

ХҮЛАСӘ

Мәјәләрин физики вә механики параметрләрини тә'јин етмәк үчүн гәрарлашмыш вә гәрарлашмамыш методлардан истифадә едилір. Бундан әввәлки мәғаләдә [1] гәрарлашмыш методла өзлү-пластик мәјәләрин физики вә механики параметрләрини тә'јин етмәк үчүн истифадә едилән нәзәријә үзәриндә әтрафлы дајанылмышдыр. Бурада исә гәрарлашмамыш методун нәзәријәси әтрафлы тәдгиг едилмиш вә лазыми һәләрин алынмасы үчүн физики мулаһизәләрә көрә сәрһәд шәртләри верилмишдир.

Беләликлә, гәрарлашмамыш методла тәчрүбәдән алынән әјриләрин, ујғун олараг верилмиш шәртләрдә алынән һәлләрлә, мугајисәсиндән истәнилән өзлү-пластик мәјәләрин физики-механики параметрләрини тә'јин етмәк олар.

Г. П. ГУСЕЙНОВ, Г. С. КАМБАРОВ

**НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ
СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ
ПЛАСТЕ**

Вопросу о радиальной фильтрации жидкости в неоднородном пласте посвящен ряд работ [1, 3, 9 и др.], которые в достаточной мере выявляют влияние неоднородности среды на дебит скважин и распределение давления в пласте. Однако классическими методами полученные точные формулы сложны, следовательно расчеты по ним трудоемки.

Применение метода осреднения [2] дает простые расчетные формулы для вычисления распределения давления в пласте и дебита скважин. В данной работе решается задача о радиальной неустановившейся фильтрации жидкости к скважине при заданном постоянном забойном давлении и постоянном отборе в приближенной и точной постановке и сравниваются полученные численные результаты при равных прочих условиях.

Предположим, что скважина пущена в эксплуатацию постоянным забойным давлением P_c . Вокруг скважины радиуса R_c имеется кольцеобразная зона (I) ($R_c \leq r \leq R_0$) с внешним радиусом R_0 . В этой зоне пласт имеет проницаемость k_1 , пористость m_1 , коэффициент пьезопроводности α_1^2 и коэффициент упругоэластичности β_1^* . Вне этой зоны (II) ($r > R_0$) соответствующие пластовые параметры обозначим через k_2 , m_2 , α_2^2 , β_2^* (рис. 1). В этих условиях требуется определить дебит скважины и распределение давления в пласте в любой момент времени t после пуска скважины в эксплуатацию.

Поставленная задача математически сводится к решению дифференциальных уравнений:

$$\alpha_1^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P_1}{\partial r} \right) = \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad (R_c \leq r \leq R_0) \quad (1)$$

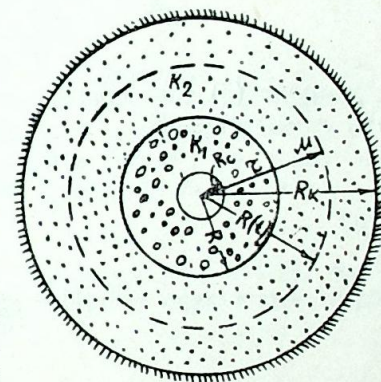


Рис. 1.

$$\alpha_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) = \frac{\partial P_2}{\partial t}, \quad (R_0 \leq r < \infty) \quad (2)$$

при следующих граничных условиях:

$$\text{при } r = R_0 \quad P_1 = P_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = \kappa_2 \frac{\partial P_2}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\text{при } r = R_c \quad P_1 = P_c = \text{const}, \quad (4)$$

$$\text{при } r \rightarrow \infty \quad P_2 = P_0 = \text{const}, \quad (5)$$

$$\text{при } t = 0 \quad P_1 = P_2 = P_0, \quad (6)$$

где $\alpha_i^2 = \frac{\kappa_i}{\mu \beta_i^*}$ — пьезопроводность;

P_i — давление в зонах ($i = 1, 2$);

R_0 — радиус границы раздела двух зон;

R_c — радиус скважины;

r — текущий радиус-вектор точки пласта;

μ — вязкость жидкости;

t — время.

1°. Для решения данной задачи при первой фазе фильтрации методом осреднения, уравнения (1) и (2) заменяются приближенными уравнениями вида

$$\alpha_1^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) = F_1(t), \quad (7)$$

$$\alpha_2^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_2}{\partial r} \right) = F_2(t), \quad (8)$$

а условие (5) следующими двумя условиями:

$$\text{при } r = R(t) > R_0 \quad P_2 = P_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial r} = 0, \quad (10)$$

где

$$F_1(t) = \frac{2}{R_0^2 - R_c^2} \int_{R_c}^{R_0} \frac{\partial P_1}{\partial t} r dr, \quad (11)$$

$$F_2(t) = \frac{2}{R^2 - R_0^2} \int_{R_0}^R \frac{\partial P_2}{\partial t} r dr, \quad (12)$$

$R(t)$ — радиус распространения условной зоны депрессии во (II) зоне. Решениями (7) и (8) при условиях (3), (4) и (9) будут

$$P_1(r, t) = \frac{r^2 - R_c^2}{4} \alpha_1 F_1 - \frac{R_0^2}{2} \alpha_1 F_1 \ln \frac{r}{R_c} + \frac{4\Delta P + \left(2R_0^2 \ln \frac{R}{R_0} - R^2 + R_0^2 \right) \alpha_2 F_2 + \left(2R_0^2 \ln \frac{R_0}{R_c} - R_0^2 + R_c^2 \right) \alpha_1 F_1}{4 \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \ln \frac{R}{R_0} + \ln \frac{R_0}{R_c} \right)} \times \times \ln \frac{r}{R_c} + P_c, \quad (13)$$

$$P_2(r, t) = \frac{r^2 - R^2}{4} \alpha_2 F_2 - \frac{R_0^2}{2} \alpha_2 F_2 \ln \frac{r}{R} + \frac{4\Delta P + \left(2R_0^2 \ln \frac{R}{R_0} - R^2 + R_0^2 \right) \alpha_2 F_2 + \left(2R_0^2 \ln \frac{R_0}{R_c} - R_0^2 + R_c^2 \right) \alpha_1 F_1}{4 \left(\ln \frac{R}{R_0} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \frac{R_0}{R_c} \right)} \times \times \ln \frac{r}{R} + P_0, \quad (14)$$

причем $\Delta P = P_0 - P_c$, $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_i^2}$ ($i = 1, 2$).

Используя на границе условие (10), из (14) получим:

$$\alpha_2 F_2 = - \frac{4\Delta P + 2R_0^2 \alpha_1 F_1 \ln \frac{R_0}{R_c} - (R_0^2 - R_c^2) \alpha_1 F_1}{2R^2 \ln \frac{R}{R_0} + (R^2 - R_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \frac{R_0}{R_c} - 1 \right)}. \quad (15)$$

С учетом (15) решения (13) и (14) примут вид:

$$P_1(r, t) = \frac{r^2 - R_c^2}{4} \alpha_1 F_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{2} \alpha_2 F_2 + \frac{R_0^2}{2} \alpha_1 F_1 \right) \cdot \ln \frac{r}{R_c} + P_c, \quad (16)$$

$$P_2(r, t) = \frac{1}{4} \left(r^2 - R^2 + 2R^2 \ln \frac{R}{r} \right) \alpha_2 F_2 + P_0. \quad (17)$$

Для определения $F_1(t)$ и $F_2(t)$ исходим из решений (16) и (17), имея в виду условия (11) и (12). При этом мы получим систему трансцендентных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $F_1(t)$ и $F_2(t)$, решение которой в замкнутом виде затруднительно. Поэтому полагаем, что для I фазы фильтрации

$$F_1(t) = \bar{c}, \quad (18)$$

т. е. течение в I зоне квазистационарное. Тогда из (17) и (12), имея в виду (15) и (18), для определения $R(t)$ получим следующее выражение:

$$\frac{2\alpha_2^2 \cdot (t - t_0)}{R_c^2} = \int_{\bar{R}_0}^{\bar{R}(t)} \left\{ 1 - \frac{2\bar{R}_0^2}{R^2 - \bar{R}_0^2} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{\left[\ln \bar{R} - \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \ln \bar{R}_0 \right] \cdot \left[\bar{R}^2 + \bar{R}_0^2 - \frac{4R^2 \cdot \bar{R}_0^2}{\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2} \ln \frac{R}{R_0} \right]}{2\bar{R}^2 \ln \frac{R}{R_0} + (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 - 1 \right)} \right\} \bar{R} d\bar{R}, \quad (19)$$

где t_0 — время распространения условной зоны депрессии $R(t)$ от R_c до R_0 ,
а t — время распространения $R(t)$ от R_c до $R(t)$, причем значения t_0 приведены, для различных $\bar{R}_0$, в табл. 6 работы [2].

Из выражений (11), (16) и (19) $\bar{c}$ определяется в виде;

$$\bar{c} = \frac{4 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \Delta P \rho_1 \rho_2 \alpha_2^2}{R_c^2 \left[\rho_3 (\rho_4 - \rho_5) - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \rho_2^2 \rho_1 (\bar{R}_0^2 - 1) \right]}, \quad (20)$$

где положены:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 2 \bar{R}_0^2 \ln \frac{R}{R_0} - (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2); \\ \rho_2 &= \frac{2 \bar{R}_0^2 \ln \bar{R}_0}{\bar{R}_0^2 - 1} - 1; \\ \rho_3 &= 2 \bar{R}^2 \ln \frac{R}{R_0} + (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 - 1 \right); \\ \rho_4 &= (\bar{R}^2 + \bar{R}_0^2) \ln \frac{R}{R_0} + (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 - 1 \right); \\ \rho_5 &= 4 \bar{R}_0^2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 \cdot \left(1 - \ln \frac{R}{R_0} \cdot \frac{\bar{R}_0^2}{\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Выражения (16), (17), (19) и (20) совместно дают решение поставленной задачи в приближенной постановке за период I фазы фильтрации. Безразмерный дебит скважины определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) &= \frac{2 \frac{\kappa_2}{\kappa_0} (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2)}{\kappa_0} - \\ &- 2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{\bar{R}_0^2 \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (\bar{R}^2 - 1)}{\rho_3 \left[\rho_3 (\rho_4 - \rho_5) - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \rho_2^2 \rho_1 (\bar{R}_0^2 - 1) \right]} (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2), \end{aligned} \quad (22)$$

полученной из (16),

$$\text{где} \quad \bar{Q}(t) = \frac{\mu Q(t)}{2 \pi \kappa_0 \Delta P h},$$

h — мощность пласта.

Ниже для различных $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ и $\bar{R}_0$ построены графики зависимости $\bar{Q}(\tau)$

от $\ln \tau$, где $\tau = \frac{\alpha_0^2 t}{R_c^2}$ (рис. 2, 3). В частности при $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$ из (22) получим дебит скважины в однородном пласте [2].

2°. Для точного решения задачи (1), (2), (3), (4), (5) и (6), применяя известное функциональное преобразование Лапласа [6], после некоторых выкладок получим распределение давления в I зоне пласта:

$$\begin{aligned} P_1(r, t) &= P_c + \frac{2 \Delta P}{\pi} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{(V_2 V_4 - V_1 V_3) \left[N_0 \left(\frac{ru}{\alpha_1} \right) I_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) - N_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) I_0 \left(\frac{ru}{\alpha_1} \right) \right] \cdot e^{-u^2 t}}{u \left\{ \left[I_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_1 - N_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_4 \right]^2 + \left[I_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_2 - N_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_3 \right]^2 \right\}} du \end{aligned}$$

опуская аналогичное выражение для $P_2(r, t)$. Здесь введены следующие обозначения:

$$V_1 = \varepsilon I_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) N_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right) - I_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right);$$

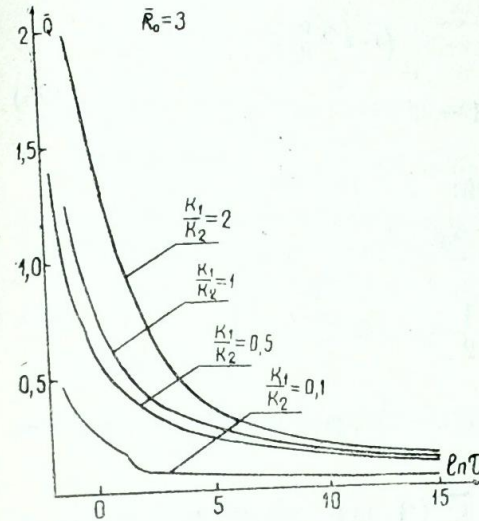


Рис. 2.

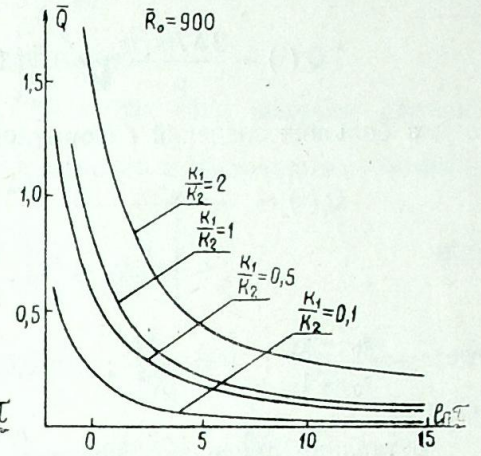


Рис. 3.

$$V_2 = \varepsilon_0 N_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) N_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right) - N_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right);$$

$$V_3 = \varepsilon_0 N_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) I_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right) - N_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) I_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right);$$

$$V_4 = \varepsilon_0 I_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) I_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right) - I_0 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_2} \right) I_1 \left(\frac{R_0 u}{\alpha_1} \right); \quad \varepsilon_0 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1};$$

$I_n(x)$, $N_n(x)$ — бесселевы функции, соответственно, I, II рода n -го порядка вещественного аргумента. Для дебита получим формулу в виде:

$$Q(t) = \frac{8 \kappa_1 h \Delta P}{\mu \pi} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{(V_2 V_4 - V_1 V_3) e^{-u^2 t} du}{u \left\{ \left[I_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_1 - N_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_4 \right]^2 + \left[I_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_2 - N_0 \left(\frac{R_c u}{\alpha_1} \right) V_3 \right]^2 \right\}} \quad (24)$$

Для однородного пласта $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$, $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_0^2$, следовательно, $\varepsilon_0 = 1$, $V_2 = V_4 = 0$, $V_1 = -V_3 = \frac{2 \alpha_0}{\pi R_0 u}$. В этом случае (24) примет вид

[8, 11]:

$$\bar{Q}_0(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta^2 \tau} d\eta}{\eta [I_0^2(\eta) + N_0^2(\eta)]}, \quad (25)$$

где $\bar{Q}_0(\tau) = \frac{Q_0(t)}{2\pi R_c^2 \beta^* h \Delta P}$; $\tau = \frac{\alpha_0^2 t}{R_c^2}$ — безразмерные переменные.

Для малых значений времени t удобно пользоваться, вместо (24), следующей простой формулой:

$$Q(\tau) = \frac{2\Delta P \kappa_1 h}{\mu} \sqrt{\frac{\pi}{4\tau}} \left[1 - \varepsilon e^{-\frac{(1-2\frac{\alpha_1 R_0}{\alpha_2 R_c})^2}{4\tau}} \right], \quad (26)$$

а для больших значений t формулой:

$$Q(\tau) = \frac{2\Delta P \pi \kappa_1 h}{\mu \left[\ln \bar{R}_0 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(\frac{1}{2} c_9 + \ln \frac{\alpha_1 R_0}{\alpha_2 R_c} \right) \right]}, \quad (27)$$

где $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 + 1}$; $\tau = \frac{\alpha_1^2 t}{R_c^2}$; $c_9 \approx 0,5772$ — постоянное Эйлера, причем $|\varepsilon| < 1$.

В таблице приведены значения $\bar{Q}(\tau)$ при различных малых и больших τ ; $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ и $\bar{R}_0 = 3$, вычисленных по приближенной формуле (23)

(II строки) и по формулам (26) и (27) (I строки).

Интервалы τ	$\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$					
	0,1		0,5		2	
	τ	$\bar{Q}(\tau)$	τ	$\bar{Q}(\tau)$	τ	$\bar{Q}(\tau)$
Малые	0,0085	{0,8620 0,8400	0,0085	{4,8090 4,2100	0,0085	{18,24 16,80
	0,192	{0,1817 0,1700	0,192	{1,011 0,850	0,192	{4,045 3,40
Большие	$5,895 \cdot 10^2$	{0,0590 0,0670	$2,857 \cdot 10^3$	{0,1715 0,1686	$1,044 \cdot 10^4$	{0,2071 0,2154
	$3,048 \cdot 10^6$	{0,0530 0,0526	$1,477 \cdot 10^7$	{0,0909 0,0979	$5,878 \cdot 10^7$	{0,1183 0,1166

3°. Решение уравнений (7) и (8) для второй фазы, т. е. после достижения условной зоны до непроницаемого контура, имеет вид:

$$P_1(r, t) = \frac{r^2 - R_c^2}{4} \chi_1 F_1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{R_k^2 - R_0^2}{2} \chi_2 F_2 + \frac{R_0^2}{2} \chi_1 F_1 \right) \ln \frac{r}{R_c} + P_c, \quad (28)$$

$$P_2(r, t) = \frac{1}{4} \left(r^2 - R_k^2 + 2R_k^2 \ln \frac{R_k}{r} \right) \chi_2 F_2 + P_k(t), \quad (29)$$

где

$$F_1(t) = \frac{2}{R_0^2 - R_c^2} \int_{R_c}^{R_0} \frac{\partial P_1}{\partial t} r dr, \quad (30)$$

$$F_2(t) = \frac{2}{R_k^2 - R_0^2} \int_{R_0}^{R_k} \frac{\partial P_2}{\partial t} r dr, \quad (31)$$

R_k — радиус непроницаемого контура пласта.

Подставляя $\frac{\partial P_1}{\partial t}$, $\frac{\partial P_2}{\partial t}$ из (28), (29) в (30), (31), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения $F_1(t)$, $F_2(t)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} AF_1'(t) + BF_2'(t) + F_1(t) &= 0 \\ CF_1'(t) + DF_2'(t) + F_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

где обозначены:

$$A = \frac{R_0^2}{R_0^2 - R_c^2} \chi_1 \left(R_0^2 \frac{\ln R_0}{2} - R_c^2 \frac{\ln R_c}{2} - \frac{R_0^2 - R_c^2}{4} \right) - \frac{R_0^2 - R_c^2}{8} \chi_1;$$

$$B = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{R_k^2 - R_0^2}{R_0^2 - R_c^2} \chi_2 \left(R_0^2 \frac{\ln R_0}{2} - R_c^2 \frac{\ln R_c}{2} - \frac{R_0^2 - R_c^2}{4} \right);$$

$$C = \frac{1}{2} R_0^2 \chi_1 \ln \frac{R_0}{R_c} - \frac{1}{4} (R_0^2 - R_c^2) \chi_1;$$

$$D = \frac{1}{2} \frac{R_k^2 \chi_2}{(R_k^2 - R_0^2)} (R_k^2 \ln R_k - R_0^2 \ln R_0) - \frac{1}{2} \chi_2 R_k^2 \ln R_k - \\ - \frac{R_k^2 + R_0^2}{8} \chi_2 + \frac{1}{2} R_k^2 \chi_2 \ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{1}{4} (R_k^2 - R_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \frac{R_0}{R_c} - 1 \right) \chi_2.$$

Общее решение системы (32) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1(t) &= c_1 e^{\lambda_1(t-t_1)} + c_2 e^{\lambda_2(t-t_1)}, \\ F_2(t) &= -c_1 \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{\lambda_1 B} \right) e^{\lambda_1(t-t_1)} - c_2 \left(\frac{A}{B} + \frac{1}{\lambda_2 B} \right) e^{\lambda_2(t-t_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения системы (32) и определяются по выражению:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{A+D}{CB-AD} \pm \sqrt{\left(\frac{A+D}{CB-AD} \right)^2 + \frac{4}{CB-AD}} \right], \quad (34)$$

t_1 — момент времени окончания первой фазы течения.

Произвольные постоянные c_1 и c_2 , входящие в (33), могут быть найдены из условий:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } t = t_1 \\ F_1 = \bar{c}, \\ F_2 = -\alpha_2^2 \frac{\frac{4\Delta P}{R_c^2} + \left[2\bar{R}_0^2 \ln \bar{R} - (\bar{R}_0^2 - 1) \right] \chi_1 \bar{c}}{2\bar{R}_k^2 \ln \frac{R_k}{R_0} + (\bar{R}_k^2 - \bar{R}_0^2) \left(2 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \ln \bar{R}_0 - 1 \right)}. \end{aligned} \right.$$

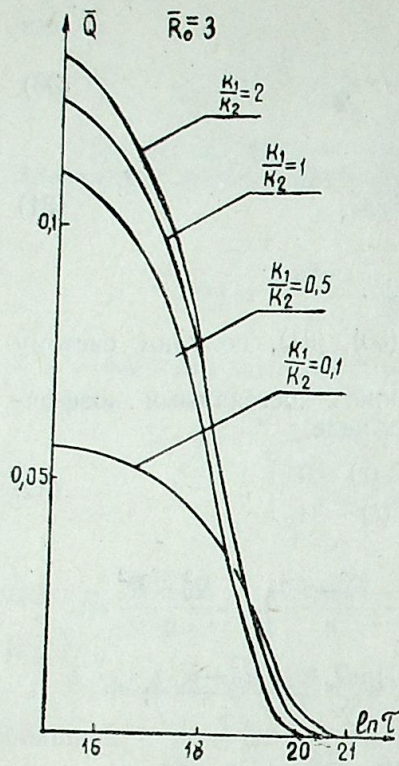


Рис. 4.

Безразмерный дебит скважины определяется на основании (28) по формуле:

$$\bar{Q}(t) = -\frac{R_c^2 \kappa_1}{2\Delta P \kappa_0} \left[x_1 F_1 (\bar{R}_0^2 - 1) + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} (\bar{R}_k^2 - \bar{R}_0^2) x_2 F_2 \right]. \quad (35)$$

Для однородного пласта из (28) и (29) получим распределение давления, приведенное в [2].

Ниже на основе (35) построены графики зависимости $\bar{Q}$ (τ) от $\ln \tau$ (рис. 4) для различных $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}$ и $\bar{R}_0$ при $\bar{R}_k = 5000$,

$R_c = 15$ см, $\kappa_2 = \kappa_0 = 1$ д.

4°. При точном решении задачи, в случае ограниченного пласта, будем исходить из условий (3), (4), (5) и

$$\frac{\partial P_2(r, t)}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_k. \quad (10')$$

Поступая аналогичным образом, как в 2°, для безразмерного дебита найдем

$$\bar{Q}(t) = 2 \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n^2 t}}{A_n} (\varepsilon_0 V_1 V_5 + V_6 V_2) \Big|_{u=\lambda_n}, \quad (36)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ являются корнями трансцендентного уравнения:

$$\varepsilon_0 V_1 V_4 + V_2 V_3 = 0, \quad (37)$$

причем

$$\begin{aligned} V_1 &= I_1 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) - I_1 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) N_1 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right); \\ V_2 &= I_0 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) N_1 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) - I_1 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) N_0 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right); \\ V_3 &= I_0 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) - I_1 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) N_0 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right); \\ V_4 &= I_0 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) N_0 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) - I_0 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) N_0 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right); \\ V_5 &= I_0 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) N_1 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) - I_1 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) N_0 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right); \\ V_6 &= I_1 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right) N_1 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) - I_1 \left(\frac{R_c u}{a_1} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{a_1} \right); \end{aligned} \quad (38)$$

$$V_7 = I_0 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) N_0 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) - N_0 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) I_0 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right);$$

$$V_8 = I_0 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) N_1 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right) - N_0 \left(\frac{R_k u}{a_2} \right) I_1 \left(\frac{R_0 u}{a_2} \right);$$

$$A_n = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \varepsilon_0 V_4 (\bar{R}_k V_8 - \bar{R}_0 V_2) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} V_3 (\bar{R}_k V_7 + \bar{R}_0 V_1) + \varepsilon_0 V_1 (V_5 - \bar{R}_0 V_3) + V_2 (V_6 + \bar{R}_0 V_4) \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

безразмерные величины.

Для однородного пласта $\varepsilon_0 = 1$, $\bar{R}_0 = \bar{R}_k$, следовательно, $V_1 = V_7 = 0$;

$V_2 = V_8 = -\frac{2\alpha_0}{\pi u R_k}$ и формула (36) примет вид, указанный в [11]. Отметим, что ряд в (36) быстро сходится при больших t , и можно ограничиться лишь только его первыми двумя членами.

Вычисления по точной (36) и приближенной (35) формулам почти совпали (рис. 4).

5°. Граничные условия, когда задан постоянный дебит скважины, на единицу мощности пласта в I фазе имеют вид:

$$\text{при } r = R_0 \quad P_1 = P_2, \quad \kappa_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = \kappa_2 \frac{\partial P_2}{\partial r}; \quad (39)$$

$$\text{при } r = R(t) \quad P_2 = P_0; \quad (40)$$

$$\text{при } r = R_c \quad 2\pi \frac{\kappa_1}{\mu} R_c \frac{\partial P_1}{\partial r} = Q. \quad (41)$$

При этих условиях решениями уравнений (7) и (8) будут:

$$P_1(r, t) = \frac{x_1 F_1}{4} (r^2 - R_0^2) + \frac{\mu Q}{2\pi \kappa_1} \ln \frac{r}{R_0} - \frac{x_1 F_1}{2} R_c^2 \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_0^2}{2} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} x_1 F_1 - x_2 F_2 \right) \ln \frac{R}{R_0} + x_1 F_1 \frac{R_c^2 \kappa_1}{2 \kappa_2} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{\mu Q}{2\pi \kappa_2} \ln \frac{R}{R_0} - \frac{x_2 F_2}{4} (R^2 - R_0^2) + P_0, \quad (42)$$

$$P_2(r, t) = \frac{x_2 F_2}{4} (r^2 - R^2) + \frac{R_0^2}{2} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} x_1 F_1 - x_2 F_2 \right) \ln \frac{r}{R} + \frac{\mu Q}{2\pi \kappa_2} \ln \frac{r}{R} - x_1 F_1 \frac{R_c^2 \kappa_1}{2 \kappa_2} \ln \frac{r}{R} + P_0. \quad (43)$$

Учитывая условие

$$\frac{\partial P_2(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R(t)} = 0,$$

из (43) получим:

$$x_2 F_2 = -\frac{\frac{\mu Q}{\pi \kappa_2} + x_1 F_1 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (R_0^2 - R_c^2)}{R^2 - R_0^2}, \quad (44)$$

где $R(t) \geq R_0$.

При этом решения (42) и (43) упрощаются и принимают вид:

$$P_1(r, t) = \frac{\kappa_1 F_1}{4} (r^2 - R_0^2) - \frac{\kappa_2 \kappa_1 F_2}{2} (R^2 - R_0^2) \ln \frac{r}{R_0} + \frac{\kappa_2 F_2}{2} \ln \frac{R}{R_0} \cdot R^2 - \frac{\kappa_2 F_2}{4} (R^2 - R_0^2) - \frac{\kappa_1 F_1}{2} R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} + P_0, \quad (45)$$

$$P_2(r, t) = \frac{F_2 \kappa_2}{4} (r^2 - R^2) - \frac{1}{2} \kappa_2 F_2 R^2 \ln \frac{r}{R} + P_0. \quad (46)$$

Полагая $F_1(t) = \tilde{c}$ ($=\text{const}$), будем иметь из (12), (46) и (44) следующее соотношение для определения $R(t)$:

$$\frac{\kappa_2^2 (t - t_0)}{R_0^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{R^2}{R_0^2} + 1 - \frac{4 \frac{R^2}{R_0^2} \ln \frac{R}{R_0}}{\frac{R^2}{R_0^2} - 1} \right), \quad (47)$$

где $\bar{R} = \frac{R}{R_c}$, $\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_c}$, t_0 — время достижения условной зоны депрессии от R_c до R_0 и определяется из выражения, указанного в [2]:

$$t_0 = \frac{R_c^2}{8\alpha_1^2} \left(\bar{R}_0^2 + 1 - \frac{4 \bar{R}_0^2 \ln \bar{R}_0}{\bar{R}_0^2 - 1} \right). \quad (48)$$

Постоянное $\tilde{c}$ определяется из (45), (47) и (11) виде:

$$\tilde{c} = \frac{2\alpha_1^2 \frac{\mu Q}{\pi \kappa_2}}{2R_c^2 + \frac{(R^2 - R_0^2)^2}{2R_0^2 \ln \frac{R}{R_0} - (R^2 - R_0^2)}}. \quad (49)$$

Формулы (44), (45), (46), (47), (49) дают приближенное решение задачи (1), (2), (10), (39), (40) и (41). Давление на стенке скважины определяется из (45) при $r = R_c$ в виде:

$$\Delta P_c(t) \equiv P_0 - P_c(t) = \frac{\mu Q}{\pi \kappa_1} \times \left\{ \left(\left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) (\bar{R}_0^2 - 1) - 2 \ln \bar{R}_0 + 2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \bar{R}^2 \cdot \frac{\bar{R}^2 - 1}{\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2} \ln \frac{R}{R_0} \right) \frac{1}{4 - \frac{2(\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2)^2}{2 \bar{R}_0^2 \ln \frac{R_0}{R} + (\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2)}} + \frac{1}{2} \left[\ln \bar{R}_0 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\bar{R}^2}{\bar{R}^2 - \bar{R}_0^2} \ln \frac{R_0}{R} \right) \right] \right\}. \quad (50)$$

В частном случае для однородного пласта, когда $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0$ ($\bar{R}_0 = 1$), формула (50) примет вид:

$$\Delta P_c(t) = \frac{\mu Q_0}{4\pi \kappa_0} \left(\bar{R}^2 \frac{\ln \bar{R}^2}{\bar{R}^2 - 1} - 1 \right), \quad (51)$$

где

$$\bar{R}(t) = \frac{R(t)}{R_c}.$$

Формулу (51), используя выражение (48), для $\bar{R}_0 = \bar{R}$, т. е.

$$8\tau = \bar{R}^2 + 1 - \frac{4 \bar{R}^2 \ln \bar{R}}{\bar{R}^2 - 1}, \quad (52)$$

можно представить в виде

$$\frac{\pi^3 \kappa_0 \Delta P_c(\tau)}{2\mu Q_0} = \frac{\pi^2}{8} \left[\frac{\bar{R}^2(\tau)}{2} - 4\tau - \frac{1}{2} \right], \quad (53)$$

где $\tau = \frac{\alpha_0^2 t}{R_c^2}$ — видоизмененный параметр Фурье.

6°. Отметим, что точное решение задачи (1), (2), (39), (41) и $P_2(\infty, t) = P_0$ по методу интегрального преобразования имеет вид:

$$P_1(r, t) = \frac{D \alpha_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left[N_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) I_0 \left(\frac{u r}{\alpha_1} \right) - N_0 \left(\frac{u r}{\alpha_1} \right) I_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) \right] (V_1^2 + V_2^2) (1 - e^{-u^2 t}) - I_0 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) (V_1 V_3 + V_2 V_4) + \left[I_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) \frac{4 \alpha_1 \alpha_2}{\pi^2 u^2 R_0^2 \epsilon_0} \right]^2}{u^4} du + P_0, \quad (54)$$

аналогичное выражение имеем для $P_2(r, t)$, где приняты обозначения:

$$V_1 = \epsilon_0 I_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) I_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right) - I_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) I_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right); \\ V_2 = \epsilon_0 I_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) N_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right) - I_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) N_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right); \\ V_3 = \epsilon_0 I_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right) N_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) - N_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) I_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right); \\ V_4 = \epsilon_0 N_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right) N_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right) - N_1 \left(\frac{u R_0}{\alpha_2} \right) N_0 \left(\frac{u R_0}{\alpha_1} \right); D = \frac{4 \alpha_1 \alpha_2 \epsilon_0 \mu Q}{\pi^3 R_c R_0^2 \kappa_1}.$$

Из (54) имеем следующую формулу для определения давления на стенке скважины:

$$\frac{\Delta P_c(t) \pi \kappa_1}{\mu Q} = \frac{8 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\pi^4 (R_0 R_c)^2} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(V_1^2 + V_2^2)(1 - e^{-u^2 t}) du}{u^5 \left\{ \left[I_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) \frac{4 \alpha_1 \alpha_2}{\pi^2 u^2 R_c^2 \varepsilon_0} \right]^2 + \left[N_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) (V_1^2 + V_2^2) - \right. \right.} \quad (55)$$

$$\left. \left. - I_1 \left(\frac{u R_c}{\alpha_1} \right) (V_1 V_3 - V_2 V_4) \right]^2 \right\}},$$

где $I_n(x)$ и $N_n(x)$ — бesselовы функции, соответственно, I и II рода, n -го порядка, вещественного аргумента. Для однородного пласта из формулы (54) получим формулу (VI-21) работы [11].

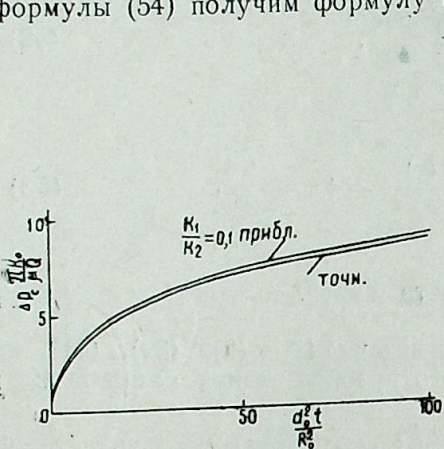


Рис. 5.

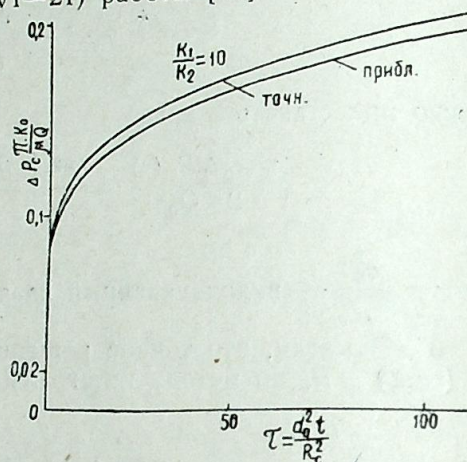


Рис. 6.

Для значений $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0,1; 10$ и $\bar{R}_0 = 900$ построены графики (рис. 5, 6) зависимости $\Delta P_c \frac{\pi \kappa_0}{\mu Q}$ от τ . Как видно из этих графиков, расчеты по приближенной (50) и точной (55) формулам дают достаточно близкие результаты.

7°. Решение задачи для второй фазы, аналогично I, имеет вид:

$$P_1(r, t) = \frac{\tilde{c} \kappa_1}{4} \left(r^2 - R_0^2 - 2 R_0^2 \ln \frac{r}{R_0} \right) +$$

$$+ \frac{\mu Q}{\pi \kappa_2} + \tilde{c} \kappa_1 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (R_0^2 - R_c^2) \cdot \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{R_k^2 - R_0^2}{2} \ln \frac{r}{R_0} - \frac{R_k^2}{2} \ln \frac{R_k}{R_0} + \frac{R_k^2 - R_0^2}{4} \right) +$$

$$+ P_k(t), \quad (56)$$

$$P_2(r, t) = P_k(t) - \frac{\mu Q}{\pi \kappa_2} + \tilde{c} \kappa_1 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} (R_0^2 - R_c^2) \cdot \left(\frac{R_k^2}{2} \ln \frac{r}{R_k} - \frac{r^2 - R_k^2}{4} \right), \quad (57)$$

где

$$\tilde{c} = \frac{2 \alpha_2^2 \mu Q}{\pi \kappa_2} \cdot \frac{1}{2 R_0^2 + \frac{(R_k^2 - R_0^2)^2}{2 R_0^2 \ln \frac{R_k}{R_0} - (R_k^2 - R_0^2)}}. \quad (58)$$

Для определения $P_k(t)$ из (57) имеем

$$P_0 - P_k(t) = \frac{\frac{\mu Q}{\pi \kappa_2} \left(r_k - 3 + \frac{4 \ln r_k}{r_k^2 - 1} \right)}{4 \ln r_k - (r_k^2 - 1)(2 - \bar{r}_k^2 - \bar{r}_0^2)} \cdot \frac{\alpha_2^2 (t - t_1)}{R_c^2}. \quad (59)$$

Падение давления на стенке скважины для II фазы определяется из выражения:

$$\Delta P_c(\tau) \frac{\pi \kappa_1}{\mu Q} = \Delta P_c(\tau_1) \frac{\pi \kappa_1}{\mu Q} +$$

$$+ \frac{r_k^2 - 3 + \frac{4 \ln r_k}{r_k^2 - 1}}{4 \ln r_k - (r_k^2 - 1)(2 - \bar{R}_k^2 - \bar{R}_0^2)} (\tau - \tau_1), \quad (60)$$

где $r_k = \frac{R_k}{R_0}$, $\bar{R}_k = \frac{R_k}{R_c}$, $\Delta P_c(\tau_1) \frac{\pi \kappa_1}{\mu Q}$ вычисляется по (50) при $\bar{R} = \bar{R}_k$,

а $\tau = \frac{\alpha_1^2 t_1}{R_c^2}$ — безразмерное время окончания I фазы фильтрации.

8°. В случае ограниченного неоднородного пласта для падения давления у стенки скважины получим:

$$\frac{\Delta P_c(\tau) \pi \kappa_1}{\mu Q} = \frac{1 + 4 \tau}{4(\bar{R}_k^2 - 1)} +$$

$$+ \frac{\bar{R}_k^2}{2(\bar{R}_k^2 - 1)} \cdot \left(\ln \bar{R}_0 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \ln \frac{R_0}{R_k} \right) - \frac{\kappa_1 \bar{R}_0^2}{4(\bar{R}_k^2 - 1)} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau_{cn}}} \cdot \frac{V_1 I_0 \left(\frac{1}{V \tau_{cn}} \right) + \varepsilon_0 V_2 I_1 \left(\frac{1}{V \tau_{cn}} \right)}{\frac{\omega_n}{\tau_{cn}} I_1 \left(\frac{1}{V \tau_{cn}} \right) \bar{A}_n}, \quad (61)$$

где

$$\tau_{оп} = \frac{\alpha_1^2}{\omega_n^2 R_0^2}; \quad \tau_{cn} = \frac{\alpha_1^2}{\omega_n^2 R_c^2}; \quad \tau = \frac{\alpha_1^2 t}{R_c^2}; \quad \bar{A}_n = V_1 V_4 + \varepsilon_0 V_2 V_3 +$$

$$+ V_1 V_6 \bar{R}_0 \left(1 - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{R}_k (V_5 \cdot V_8 + \varepsilon_0 V_6 V_7)$$

— безразмерные величины, V_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 8$) согласно обозначениям (38), ω_n — корни трансцендентного уравнения:

$$V_1 V_5 + \varepsilon_0 V_6 V_2 = 0. \quad (62)$$

На основе формул (60) и (61) при данных $\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = 0,1; 10$ и $\bar{R}_0 = 900$;

$\alpha_1^2 = 10^3, 10^5 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$, $\alpha_2^2 = 10^4 \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$ построены графики (рис. 7, 8). Как явст-

вует из этих графиков, расчеты по точной и приближенной формулам достаточно близки. Погрешность между точным и приближенным значениями $\frac{\Delta P_c(\tau) \pi \kappa_1}{\mu Q}$ не превышает 1%.

Из (60) ясно, что при эксплуатации скважины с постоянным дебитом для больших t наблюдается линейное падение давления на стенке скважины.

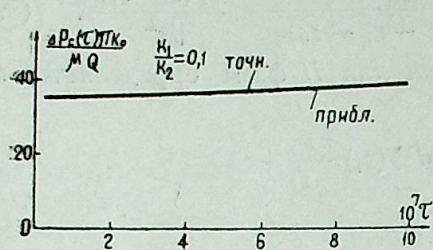


Рис. 7.

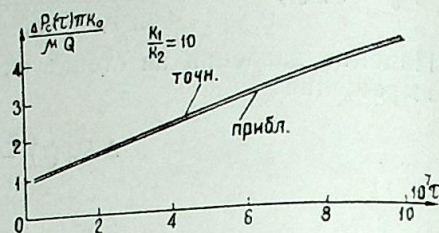


Рис. 8.

Как явствует из вышеизложенного, применение метода осреднения для подобных задач дает весьма простые расчетные формулы с погрешностью, вполне достаточной для практики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Максимов В. А. „Изв. АН СССР“, 1958, № 7.
2. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Азерб. нешр, 1961.
3. Джалилов К. Н. „ДАН Азерб. ССР“, 1957, № 12.
4. Камбаров Г. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1962, № 5.
5. Камбаров Г. С. Сб. Научно-технической информации, 1963, № 1, АЗИНТИ.
6. Лыков А. В. Теплопроводность нестационарных процессов. М., 1948.
7. Лю Цы-цунь „Изв. АН СССР, ОТН“, 1960, № 6.
8. Мускат М. Физические основы технологии добычи нефти. Гостоптехиздат, 1953.
9. Щелкачев В. Н. „ДАН СССР“, т. 79, 1951, № 5.
10. Chatas T. Petroleum Engineer, 25, № 5, 6, 9, 1953.
11. Van Everdingen A. F. and Hurst W. Journal of Petroleum Technology, v. 1, December, № 12, 1949.

Г. П. Гусейнов, Г. С. Гамбаров

Гејри-бирчинс еластики лајда сыхылан мајенин гэрарлашмамыш мүстэви-радиал хэрэкэти

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ шэрһ олунан мэсэлэјэ бир сыра эсэрлэр [1, 3, 9 вэ с.] хэср едилмишдир. Лакин классик методларла алынан дэгиг формуллар чох мүрэккэб олуб, хесабат апарылмасыны сон дэрэчэ чэтинлэшдирир. Тэтбиг олунан орталашдырма методу [2] исэ мэсэлэнин хэллини, дэгиг хэллин вердији нэтичэлэрэ јахын нэтичэлэр верэн, хејли садэ формулларла верир. Мэгалэдэ даирэви, сонлу вэ кечиричилијэ көрэ гејри-бирчинс лајда сыхылан мајенин гэрарлашмамыш сүзүлмэ мэсэлэсинэ бахылыр. Мэсэлэ хэм сабит гујудиби тэзјиг вэ хэм дэ сабит мэхсулдарлыг верилдикдэ орталашдырма методу илэ хэлл едилир. Алынан хэллэр мүэјјэн параметрлэр үчүн дэгиг хэллэрлэ мүгајисэ едилир вэ ујгун эјрилэр гурулур.

Ахынын биринчи фазасы сонсуз лај үчүн бу мэгалэдэ алынан дэгиг хэлл илэ, икинчи фазасы исэ сонлу лај үчүн алынан дэгиг хэлл илэ мүгајисэ едилир. Мэсэлэлэрин дэгиг хэллэри Лапласын функцио-нал чевирмэси васитэсилэ алынмышдыр. Хесабат нэтичэсиндэ алынан эјрилэр көстэрир ки, орталашдырма методу, бирчинс лајда олдуғу кими, гејри-бирчинс лајда да дэгиг хэллэ јахын нэтичэлэр верир вэ алынан хесабат формуллары садэ олуб, тэчрүбэ үчүн даһа элвериш-лидир.

Америка мүэллифлэринин [8, 10, 11] алдыглары ујгун формуллар мэгалэдэ алынан дэгиг формуллардан хусуси хал кими алыныр.

А. Ш. КАЗЫМОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИЛЛЯРНОГО СКАЧКА ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПО НАБЛЮДЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В работе [1] изучено влияние капиллярного скачка давления на ограниченность скорости относительного перемещения границы раздела Γ двух несжимаемых весоных жидкостей для известного мгновенного вертикального положения Γ , принимаемого за начальное. В работе [1] получено общее условие ограниченных значений скорости относительного перемещения границы Γ в точках стыка линии Γ с кровлей и подошвой пласта. Попутно указано решение задачи в случае, когда граница раздела Γ перемещается поступательно. Общее выражение относительной скорости перемещения границы раздела Γ , найденное в работе [1], имеет вид:

$$u^*(\eta) = - \frac{K \kappa_2}{2m(1+\chi) \mu_2 V_0 h} \int_0^\pi f(\sigma) \left(\operatorname{ctg} \frac{\sigma + \eta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} \right) d\sigma. \quad (1)$$

$0 \leq \eta \leq \pi$

Введенные здесь обозначения представляют:

$$\chi = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \left| \frac{\kappa_1}{\mu_1} \right|; \quad f(\sigma) = \chi - \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \sigma(\pi - \sigma)\psi(\sigma); \quad \chi = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)h}{\pi K};$$

$\psi(\sigma)$ — некоторая непрерывная функция;

K — масштаб капиллярного скачка давления;

V_0 — масштаб скорости;

$\omega(\sigma)$ — капиллярный скачок давления.

В данной статье рассматривается применение полученных результатов [1] к исследованию некоторых частных задач. Соотношение (1) определено на отрезке $0 \leq \sigma \leq \pi$. Продолжив функцию $f(\sigma)$ в формуле (1) нечетным образом на отрезок $-\pi \leq \sigma \leq 0$, получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта [2]:

$$-\frac{u^*(\eta)}{2\pi\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} d\sigma. \quad (2)$$

$0 \leq \eta \leq \pi$

А. Ш. КАЗЫМОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАПИЛЛЯРНОГО СКАЧКА ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ВЕСОМЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПО НАБЛЮДЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В работе [1] изучено влияние капиллярного скачка давления на ограниченность скорости относительного перемещения границы раздела Γ двух несжимаемых весоных жидкостей для известного мгновенного вертикального положения Γ , принимаемого за начальное. В работе [1] получено общее условие ограниченных значений скорости относительного перемещения границы Γ в точках стыка линии Γ с кровлей и подошвой пласта. Попутно указано решение задачи в случае, когда граница раздела Γ перемещается поступательно. Общее выражение относительной скорости перемещения границы раздела Γ , найденное в работе [1], имеет вид:

$$u^*(\eta) = - \frac{K \kappa_2}{2m(1+\chi) \mu_2 V_0 h} \int_0^\pi f(\sigma) \left(\operatorname{ctg} \frac{\sigma + \eta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} \right) d\sigma. \quad (1)$$

$0 \leq \eta \leq \pi$

Введенные здесь обозначения представляют:

$$\chi = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \left| \frac{\kappa_1}{\mu_1} \right|; \quad f(\sigma) = \chi - \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = \sigma(\pi - \sigma) \psi(\sigma); \quad \chi = \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) h}{\pi K};$$

$\psi(\sigma)$ — некоторая непрерывная функция;

K — масштаб капиллярного скачка давления;

V_0 — масштаб скорости;

$\omega(\sigma)$ — капиллярный скачок давления.

В данной статье рассматривается применение полученных результатов [1] к исследованию некоторых частных задач. Соотношение (1) определено на отрезке $0 \leq \sigma \leq \pi$. Продолжив функцию $f(\sigma)$ в формуле (1) нечетным образом на отрезок $-\pi \leq \sigma \leq 0$, получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта [2]:

$$-\frac{u^*(\eta)}{2\pi\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} d\sigma. \quad (2)$$

$0 \leq \eta \leq \pi$

Здесь обозначено

$$\lambda = \frac{K \kappa_2}{2m(1+\kappa) \mu_2 V_0 h}.$$

Решив уравнение (2), получаем

$$f(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^2 \lambda} \int_{-\pi}^{\pi} u^*(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} d\sigma + c_1. \quad (3)$$

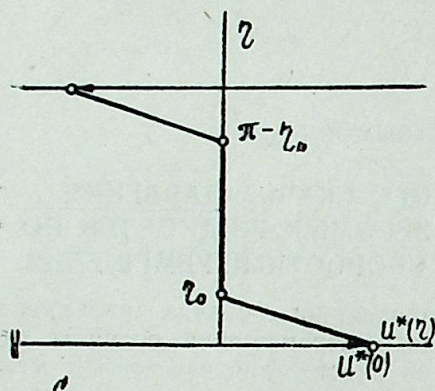


Рис. 1.

Учитывая вышесказанное и нечетность скорости перемещения границы Γ на отрезке $-\pi \leq \sigma \leq \pi$, выражение (3) приводим к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \chi - \frac{1}{(2\pi)^2 \lambda} \int_0^{\pi} u^*(\sigma) \left(\operatorname{ctg} \frac{\sigma + \eta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\sigma - \eta}{2} \right) d\sigma. \quad (5)$$

Функция $u^*(\eta)$ может быть определена по результатам наблюдений. Например, скорость перемещения границы раздела Γ задана графически (рис. 1). Аналитическое выражение этой функции определяем в следующем виде:

$$u^*(\eta) = \begin{cases} u^*(0) \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right) & \text{при } 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ 0 & \text{при } \eta_0 \leq \eta \leq \pi - \eta_0 \\ u^*(0) \left(\frac{\pi - \eta}{\eta_0} \right) & \text{при } \pi - \eta_0 \leq \eta \leq \pi \end{cases} \quad (6)$$

Ордината η_0 определяет положение точки $M_0(0, \eta_0)$, в которой начинает происходить деформирование границы раздела. Эта величина может быть известна из результатов специально поставленного экспериментального исследования. Для пластов малой мощности h величина $\eta_0 = 0$; в случае пластов большой мощности при рассмотренных условиях фильтрации величина η_0 всегда будет отлична от нуля, причем $\eta_0 > 0$.

Интегрирование выражения (5) приводит его к виду

$$\omega(\eta) = \chi \eta - \frac{1}{2\pi^2 \lambda} \int_0^{\pi} u^*(\sigma) \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \eta}{2}}{\sin \frac{\sigma - \eta}{2}} \right| d\sigma + c_2. \quad (7)$$

Постоянную c_2 определяем из граничного условия:

$$\omega(\eta) \Big|_{\eta=\pi/2} = 0. \quad (8)$$

Из выражений (7), (8) находим

$$\omega(\eta) = \chi \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2\pi^2 \lambda} \int_0^{\pi} u^*(\sigma) \ln \left| \frac{\sin \frac{\sigma + \pi/2}{2} \sin \frac{\sigma - \eta}{2}}{\sin \frac{\sigma - \pi/2}{2} \sin \frac{\sigma + \eta}{2}} \right| d\sigma. \quad (9)$$

Подставив выражение (6) в (9), после очевидных преобразований находим закон распределения капиллярного скачка давления по мощности пласта:

$$F(\eta) = \frac{\lambda}{u^*(0)} \chi \left(\eta - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\eta_0} \ln \left| \frac{\sin(\sigma - \eta)}{\sin(\sigma + \eta)} \right| d\sigma - \frac{1}{2\pi^2 \eta_0} \int_0^{\eta_0} \sigma \ln \left| \frac{\sin(\sigma - \eta)}{\sin(\sigma + \eta)} \right| d\sigma, \quad (10)$$

где введено обозначение

$$\frac{\lambda \omega(\eta)}{u^*(0)} = F(\eta).$$

В частности, полагая $\eta_0 = \pi/4$, производим замену переменных интегрирования σ и параметра η , соответственно, через $\frac{\pi x}{4}$ и $\frac{\pi x'}{4}$, тогда выражение (10) примет вид:

$$F^*(x') = -\frac{2\pi^2 \lambda \chi}{u^*(0)} (2 - x') + \int_0^1 (1 - x) \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{4} (x - x')}{\sin \frac{\pi}{4} (x + x')} \right| dx \quad (11)$$

Здесь введено обозначение $F^*(x') = 8\pi F(\eta)$. В предельном случае, когда $\eta_0 \rightarrow 0$, из выражений (10), (1) получаем решение задачи, рассмотренной в работе [1].

Непосредственной проверкой можно убедиться, что график функции $F^*(x')$ симметричен относительно точки $(0, 2)$, где имеет место

перегиб. Поэтому для построения графика функции $F^*(x')$ достаточно рассмотреть отрезок $0 \leq x' \leq 2$. Введем обозначение

$$T = \frac{2\pi^2\lambda}{x^*(0)} \chi = \frac{\pi\kappa_2(\gamma_1 - \gamma_2)}{m(1+\kappa)\mu_2 u(0)} = \frac{\pi U}{m(1+\kappa) u(0)}. \quad (12)$$

Задаваясь физическими величинами, входящими в (12), находим T . Подставив эту величину в выражение (11), получаем

$$H(x') = F^*(x') + T(2-x') = \int_0^1 (1-x) \ln \left| \frac{\sin \frac{\pi}{4}(x-x')}{\sin \frac{\pi}{4}(x+x')} \right| dx. \quad (13)$$

$$0 \leq x \leq 4$$

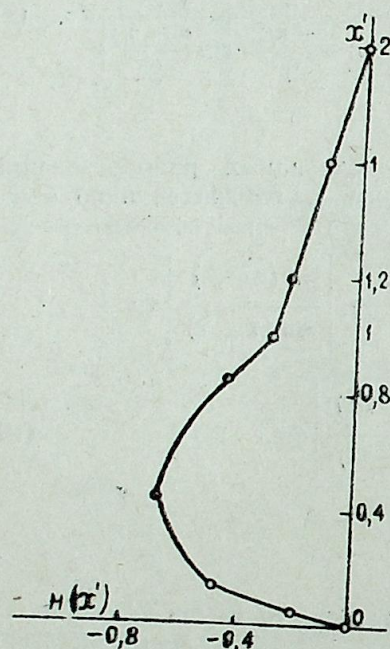


Рис. 2.

Правая часть выражения (13) не представляется через элементарные функции, поэтому для вычисления этого интеграла применяем численные методы. Здесь вычисление указанного интеграла для различных значений параметра $0 \leq x' \leq 2$ производим при помощи Формул трапеции. На (рис.2) построен график функции $H(x')$. Значение этой функции дано в таблице.

Рассмотренная здесь задача позволяет сделать следующие выводы.

1. В маломощных пластах граница раздела весоных жидкостей не деформируется. Вследствие возникающего капиллярного скачка давления граница раздела весоных жидкостей перемещается поступательно; в этом случае $u^*(\eta) = 0$ для всех

$$0 \leq \eta \leq \pi.$$

2. Деформирование границы раздела происходит в достаточно мощных пластах; в этом случае $u^*(\eta) \neq 0$ для $0 \leq \eta \leq \eta_0$, $\pi - \eta_0 \leq \eta \leq \pi$.

Значение функции $H(x')$

x'	0	0,05	0,15	0,45	0,85	1	1,2	1,6	2
$H(x')$	0	-0,200	-0,490	-0,676	-0,426	-0,308	-0,211	-0,09	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Казымов А. Ш., Пилатовский В. П. Капиллярный скачок давления устраняет парадокс перемещения границы раздела весоных жидкостей. ДАН Азерб. ССР. 1963 № 4.
2. Михлин С. Г. Интегральные уравнения. ГИТТЛ, 1949.

А. Ш. Казымов

Икичакили мајенин ајрылма сәрһәддиндә капилляр сычрајыш тәзјигинин тәјини

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә икичакили мајенин ајрылма сәрһәддинин верилмиш (мүшаһидәдән мә'лум) деформасија сүр'әтиндән асылы олараг, ајрылма сәрһәдди үзрә капилляр сычрајыш тәзјигинин пайланмасы мәсәләси өјрәнилир.

Мәгаләдә сүбут едилир ки, галынлығы аз олан лајларда маје ахынын гидромеханики мөхсусијјәтләриндән асылы олараг, икичакили мајенин башлангыч шагули сәрһәдди ирәлиләмә гануну үзрә һәрәкәт едир. Еләчә дә галын лајларда ајрылма сәрһәддинин (шагули) орта һиссәси дә ирәлиләмә гануну үзрә һәрәкәт едә биләр, ејни заманда лајын таван вә дабанына јахын олан нөгтәләрдә ајрылма сәрһәддинин кәнарлары деформасијаја уграјыр.

Верилмиш һалда деформасија сүр'әтинин пайланмасына әсасән, капилляр сычрајыш тәзјигинин пайланмасыны тәјин едән функција тапылмышдыр.

М. Ю. АХУНД-ЗАДЕ и И. Г. ТАГИЕВ

НОВЫЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Решение уравнений равновесия произвольных пологих оболочек при конкретных условиях закрепления краев связано с большими затруднениями, поэтому поиски ученых направлены на отыскание эффективных методов решения указанной выше задачи.

Настоящая статья посвящена разработке нового метода решения уравнения равновесия пологой оболочки, очерченной по любой поверхности.

Применяя метод разложения по малым параметрам, разработанный метод позволяет свести систему уравнений равновесия к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами; причем для оболочек с положительной гауссовой кривизной каждое уравнение указанной зацепляющейся системы получается в виде уравнений равновесия сферической оболочки, а в случае оболочек с нулевой гауссовой кривизной (цилиндрической) — в виде уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки.

В основу решения принята система уравнений равновесия пологих оболочек по технической моментной теории В. З. Власова.

§ 1. Теория тонких пологих упругих оболочек по В. З. Власову приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - E h \nabla_k^2 w &= 0 \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{D} D_k^2 \varphi &= \frac{z(\alpha, \beta)}{D} \end{aligned} \right\}, \quad (1,1)$$

где E, h, D — постоянные величины, соответственно, модуль упругости, толщина и цилиндрическая жесткость оболочки; φ и w — функции напряжения и нормального перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{A \cdot B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \\ \nabla_k^2 &= \frac{1}{A \cdot B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \kappa_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (1,2)$$

Здесь $A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты квадрата линейного элемента срединной поверхности, α, β — криволинейные ортогональные координаты, $\kappa_1(\alpha, \beta), \kappa_2(\alpha, \beta)$ — величины главной кривизны, соответствующие линиям $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$.

М. Ю. АХУНД-ЗАДЕ и И. Г. ТАГИЕВ

НОВЫЙ ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Решение уравнений равновесия произвольных пологих оболочек при конкретных условиях закрепления краев связано с большими затруднениями, поэтому поиски ученых направлены на отыскание эффективных методов решения указанной выше задачи.

Настоящая статья посвящена разработке нового метода решения уравнения равновесия пологой оболочки, очерченной по любой поверхности.

Применяя метод разложения по малым параметрам, разработанный метод позволяет свести систему уравнений равновесия к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами; причем для оболочек с положительной гауссовой кривизной каждое уравнение указанной зацепляющейся системы получается в виде уравнений равновесия сферической оболочки, а в случае оболочек с нулевой гауссовой кривизной (цилиндрической) — в виде уравнений равновесия круговой цилиндрической оболочки.

В основу решения принята система уравнений равновесия пологих оболочек по технической моментной теории В. З. Власова.

§ 1. Теория тонких пологих упругих оболочек по В. З. Власову приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - E h \nabla_{\kappa}^2 w &= 0 \\ \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1}{D} D_{\kappa}^2 \varphi &= \frac{z(\alpha, \beta)}{D} \end{aligned} \right\}, \quad (1,1)$$

где E, h, D — постоянные величины, соответственно, модуль упругости, толщина и цилиндрическая жесткость оболочки; φ и w — функции напряжения и нормального перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{A \cdot B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \\ \nabla_{\kappa}^2 &= \frac{1}{A \cdot B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \kappa_2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \kappa_1 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (1,2)$$

Здесь $A(\alpha, \beta), B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты квадрата линейного элемента срединной поверхности, α, β — криволинейные ортогональные координаты, $\kappa_1(\alpha, \beta), \kappa_2(\alpha, \beta)$ — величины главной кривизны, соответствующие линиям $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$.

Полагая в (1,2)

$$A = B_1 = A = l = \text{const},$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_1(\alpha, \beta)}, \quad \kappa = \frac{1}{r_2(\alpha, \beta)},$$

где l — некоторый линейный размер (в частности можно положить $l=1$), уравнения (1,1) приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta \varphi - l^2 E h \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] \varphi &= 0 \\ \Delta \Delta w + \frac{l^2}{L} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] w &= \frac{l^4 z}{L} \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ — оператор Лапласа.

Следуя И. Н. Векуа, путем введения новой комплексной функции L , связанной с функциями w, φ следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{L + \bar{L}}{2} \\ \varphi &= z \frac{L - \bar{L}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (1,4)$$

где $\bar{L}$ — комплексное сопряжение функции L , $z = \sqrt{E \cdot D \cdot h}$, уравнение (1,3) после некоторых преобразований и замены $r_1 = r_0 \rho_1(\alpha, \beta)$, $r_2 = r_0 \rho_2(\alpha, \beta)$, где r_0 — наибольшее значение радиуса кривизны рассматриваемой оболочки, приводится к виду:

$$\Delta \Delta L - i \lambda \left(\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} \right) + i \lambda \left(\frac{1}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \alpha} \frac{\partial L}{\partial \alpha} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \beta} \frac{\partial L}{\partial \beta} \right) = \frac{l^4 z}{L}, \quad (1,5)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{l^2 \sqrt{12(1-\mu^2)}}{h \cdot r_0}, \quad (1,6)$$

μ — коэффициент Пуассона.

Введенные безразмерные радиусы кривизны $\rho_1(\alpha, \beta)$ и $\rho_2(\alpha, \beta)$, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} 0 < \rho_1(\alpha, \beta) &\leq 1 \\ 0 < \rho_2(\alpha, \beta) &\leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (1,7)$$

при всех значениях α и β в рассматриваемой области.

Далее разложим $\frac{1}{\rho_1}$ и $\frac{1}{\rho_2}$ в следующие ряды:

$$\frac{1}{\rho_i} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q_i^n(\alpha, \beta), \quad (1,8)$$

где $i=1, 2$, $q_i = 1 - \rho_i$; причем наибольшие значения определяются равенствами:

$$q_{i \text{ наиб.}} = 1 - \rho_{i \text{ наим.}} = \nu_i, \quad (i=1, 2).$$

Очевидно, $\nu_i < 1$.

Полагая
можно писать
где

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &< \nu_2 = \nu, \\ \nu_1 &= m \nu, \\ 0 &< m < 1. \end{aligned} \right\}$$

Вводя новые функции $\sigma_i(\alpha, \beta) = \frac{1 - \rho_i}{1 - \rho_{i \text{ наим.}}}$, функции q_i ($i=1, 2$) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \nu_1 \sigma_1 = m \nu \sigma_1 \\ q_2 &= \nu_2 \sigma_2 = \nu \sigma_2 \end{aligned} \right\} \quad (1,9)$$

ясно, что $0 \leq \sigma_i \leq 1$, тогда разложения (1, 8) с учетом (1,9) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (m \nu \sigma_1)^n \\ \frac{1}{\rho_2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \sigma_2)^n \end{aligned} \right\} \quad (1,10)$$

Для производных ρ_1 и ρ_2 будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial \beta} &= -m \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial \alpha} &= -\nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (1,11)$$

С учетом вышеуказанных равенств (1,8) — (1,11) и полагая $l=1$, уравнение (1,5) принимает вид:

$$\Delta \Delta L - i \lambda \left(A_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} + B_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} + A_1 \frac{\partial L}{\partial \alpha} + B_1 \frac{\partial L}{\partial \beta} \right) = \frac{z}{D}, \quad (1,12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{V(12(1-\mu^2))}{h \cdot r_0} \\ A_2 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu \sigma_2)^n \\ B_2 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu m \sigma_1)^n \\ A_1 &= \nu \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} A_2^2 \\ B_1 &= m \nu \frac{\partial \sigma_1}{\partial \beta} B_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (1,13)$$

Решение уравнения (1,12) ищем в виде:

$$L = L_0 + \nu L_1 + \nu^2 L_2 + \dots \quad (1,14)$$

Подставляя (1,14) в уравнение (1,12), располагая обе части по степеням малого параметра ν и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ν , получим следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta L_0 - i \lambda \Delta L_0 &= \frac{z}{D} \\ \Delta \Delta L_1 - i \lambda \Delta L_1 &= \lambda F_1 \\ \Delta \Delta L_2 - i \lambda \Delta L_2 &= i \lambda F_2 \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1,15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= A_\alpha(L_0) + B_\beta(L_0) \\ F_2 &= \sum_{k=1}^n (\sigma_2^{n-k} A_\alpha(L_{k-1}) + (m\sigma_1)^{n-k} B_\beta(L_{k-1})) + \\ &+ \sigma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial \alpha} \frac{\partial L_0}{\partial \alpha} + m\sigma_1 \frac{\partial}{\partial \beta} (m\sigma_1) \frac{\partial L_0}{\partial \beta} \\ A_\alpha(L_i) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sigma_2 \frac{\partial L_i}{\partial \alpha} \right), \quad B_\beta(L_i) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(m\sigma_1 \frac{\partial L_i}{\partial \beta} \right) \\ i &= 0, 1, \quad n=2. \end{aligned} \right\} \quad (1,16)$$

Каждое уравнение системы (1,15) представляет собой уравнение с постоянными коэффициентами, совпадающее по виду с уравнением равновесия сферической оболочки с радиусом r_0 и с различными правыми частями; причем первое уравнение (нулевое приближение) в точности совпадает с уравнением сферической оболочки, подверженной нормальному давлению интенсивностью z .

Приведение уравнения равновесия любой пологой оболочки к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами и совпадающими по структуре с уравнением сферической оболочки имеет большое практическое значение, так как это намного облегчает решение конкретных краевых задач теории произвольных пологих оболочек.

Не трудно показать, что ряд (1,14) сходится очень быстро, так что для практических целей вполне достаточно ограничиться двумя — тремя членами разложения (1,14).

Влияние изменения радиусов кривизны на решение задачи учитывается дополнительными членами $\nu L_1, \nu^2 L_2$ и т. д.

Следует особо отметить, что решение конкретных краевых задач, краевые условия для функций должны быть удовлетворены в отдельности для функций L_0, L_1, L_2 , и т. д. Например, в случае закрепленных краев для L существуют краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} Re L &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} Re L &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{на границе области,}$$

т. е. для $L_0, L_1, L_2, \dots$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} Re L_i &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} Re L_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{на границе области} \\ (i=0, 1, 2, \dots) \end{array}$$

§ 2. В случае произвольных пологих цилиндрических оболочек, полагая в уравнениях равновесия (1, 3) $r_1 = \infty, r_2 = r_0 \cdot \rho(\beta)$ и считая r_0 наибольшим значениям r_2 , основное уравнение (1,13) пишем в виде

$$\Delta \Delta L - i\lambda A_2 \frac{\partial^2 L}{\partial \alpha^2} = \frac{z}{D}, \quad (2,1)$$

где

$$A_2 = \text{см. (1,13) при } \sigma_2 = \sigma(\beta) = \frac{1-\rho}{\nu}.$$

Представляя решение уравнения (2,1) в виде (1,14), аналогично § 1, легко получить следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta L_0 - i\lambda \left| \frac{\partial^2 L_0}{\partial \alpha^2} \right| &= \frac{z}{D} \\ \Delta \Delta L_1 - i\lambda \frac{\partial^2 L_1}{\partial \alpha^2} &= i\lambda \sigma \frac{\partial^2 L_0}{\partial \alpha^2} \\ \Delta \Delta L_2 - i\lambda \frac{\partial^2 L_2}{\partial \alpha^2} &= i\lambda \sigma \left(\sigma \frac{\partial^2 L_0}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial \alpha^2} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2,2)$$

и т. д.

($n+1$) уравнение пишется в виде:

$$\Delta \Delta L_n - i\lambda \frac{\partial^2 L_n}{\partial \alpha^2} = i\lambda \sigma \sum_{k=1}^n \sigma^{n-k} \frac{\partial^2 L_{k-1}}{\partial \alpha^2} \quad (2,3)$$

($n=1, 2, 3, \dots$).

Как видно из (2,2), каждое уравнение представляет собой уравнение с постоянными коэффициентами и по виду они совпадают с уравнением равновесия круговых пологих цилиндрических оболочек с радиусами r_0 , с различными правыми частями, причем нулевое приближение точно совпадает с уравнением цилиндрической оболочки с радиусом r_0 и нагруженной нормальным давлением интенсивностью z .

Предложенные В. З. Власовым уравнения равновесия для длинных пологих цилиндрических оболочек по выражению В. В. Новожилова для полубезмоментной теории, а также по предложенному нами методу могут быть легко приведены к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами, причем каждое уравнение имеет структуру уравнения длинной круговой цилиндрической оболочки.

Уравнения В. З. Власова по полубезмоментной теории в безразмерных координатах ξ, η при $A=B=r_0$, где r_0 — наибольшее значение радиуса кривизны, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{12 r_0}{\delta} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \xi^2} + \Lambda(T_1) &= 0 \\ r_0 \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} - \Lambda(M_2) &= r_0^2 \left[\frac{\partial^2 (\rho q_n)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right], \\ \Lambda(\dots) &= \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\rho(\eta) \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\rho(\eta)} \frac{\partial (\dots)}{\partial \eta} \right] \\ \rho(\eta) &= \frac{r(\eta)}{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (2,4)$$

где

Переходя от $M_2 T_1$ к комплексной функции L ,

$$\left. \begin{aligned} M_2 &= \frac{L + \bar{L}}{2} \\ T_1 &= z \frac{L - \bar{L}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (2,5)$$

где $x = \frac{\sqrt{12}}{\delta}$, δ — толщина оболочки, получим:

$$\Lambda(L) + i\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} = r_0 \left[\frac{\partial^2 (p q_n)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right], \quad \lambda = \frac{\sqrt{12} r_0}{\delta}. \quad (2,6)$$

Далее, разлагая $\frac{1}{\rho}$ в ряд и производя аналогичные действия как в § 1, получим следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 L_0}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^2 L_0}{\partial \eta^2} + i\lambda \frac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2} &= i r_0 \left[\frac{\partial^2 q_n}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right] \\ \frac{\partial^4 L_1}{\partial \eta^4} + \frac{\partial^2 L_1}{\partial \eta^2} + i\lambda \frac{\partial^2 L_1}{\partial \xi^2} &= -i r_0 \left[\frac{d^2 \sigma}{d\eta^2} q_n + 2 \frac{d\sigma}{d\eta} \frac{\partial q_n}{\partial \eta} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial q_2}{\partial \eta} - \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right) \right] - \left(2\sigma \frac{\partial^2 L_0}{\partial \eta^2} + i\lambda \sigma \frac{\partial^2 L_0}{\partial \xi^2} \right) + \\ &\quad + 2 \frac{d\sigma}{d\eta} \frac{\partial^3 L_0}{\partial \eta^3} - \frac{d\sigma}{d\eta} \frac{\partial L_0}{\partial \eta} + \frac{d^2 \sigma}{d\eta^2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial \eta^2} \\ &\quad \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2,7)$$

и т. д.

§ 3. Следует отметить, что уравнение равновесия произвольной цилиндрической (непологой) оболочки в комплексных усилиях В. В. Новожилов.

$$\Delta(p \Delta \tilde{T}) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) + i 2 b^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \delta^2} = i 2 b^2 r_0 f(\xi, \eta) \quad (3,1)$$

по предложенному методу может быть также приведено к системе зацепляющихся уравнений с постоянными коэффициентами.

Уравнение (3,1) в размерных координатах $\alpha = z$, $\beta = s$ и $A = B = 1$ преобразуется к виду:

$$\Delta \Delta \tilde{T} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \beta^2} + i \tilde{\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \alpha^2} + \left\{ \frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\beta^2} \Delta \tilde{T} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta \tilde{T} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{d\beta} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \beta} \right\} = i \tilde{\lambda} \frac{1}{r} \left[\Delta(r \tilde{q}_n) + \frac{\partial q_2}{\partial \beta} - \frac{d q_1}{d \alpha} \right], \quad (3,2)$$

где $\tilde{\lambda} = r_0 \lambda$.

Полагая здесь $r = r_0 \rho(\beta)$, где r_0 — наибольшее значение радиуса кривизны направляющей кривой цилиндра и аналогично предыдущим параграфам, путем разложения $\frac{1}{\rho}$ по степеням σ , получим следующую систему зацепляющихся уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \tilde{T}_0 + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \beta^2} + i \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \alpha^2} &= i \tilde{\lambda} \left(r_0 \Delta \tilde{q}_n + \frac{\partial q_2}{\partial \beta} - \frac{d q_1}{d \alpha} \right), \\ \Delta \Delta T_1 &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \beta^2} + i \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \alpha^2} = F_1, \\ \Delta \Delta T_2 + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \beta^2} + i \tilde{\lambda} \frac{\partial^2 \tilde{T}_1}{\partial \alpha^2} &= F_2, \end{aligned} \quad (3,3)$$

где, например,

$$F_1 = \frac{d^2 \sigma}{d\beta^2} \Delta \tilde{T}_0 - i \tilde{\lambda} \sigma \frac{\partial^2 \tilde{T}_0}{\partial \alpha^2} - \frac{2\sigma}{r_0^2} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \beta^2} + 2 \frac{d\sigma}{d\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \Delta \tilde{T}_0 - \\ - \frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma}{d\beta} \frac{\partial \tilde{T}_0}{\partial \beta} - i \tilde{\lambda} \left(r_0 \tilde{q}_n \frac{d^2 \sigma}{d\beta^2} + 2 r_0 \frac{d\sigma}{d\beta} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \beta} - \frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} \right). \quad (3,4)$$

Здесь также система (2, 6) получается с постоянными коэффициентами и по виду они совпадают с уравнением круговой цилиндрической оболочки в комплексных усилиях, представленных В. В. Новожиловым.

В случае пологих цилиндрических оболочек уравнения (2,6) существенно упрощаются, если отбросить члены, содержащие коэффициенты $\frac{1}{r_0^2}$, $\frac{1}{r_0^3}$.

Для решения полученных зацепляющихся систем с заданными краевыми условиями можно использовать существующие методы решения уравнений сферических и круговых цилиндрических оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Библиотека сборника механика „Упругие оболочки“, ИЛ, 1962.
2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике.
3. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, 1948.
4. Власов В. З. Избранные труды, т. I, 1962.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек, 1951.

М. J. Ахундзаде, И. Н. Тағыјев

Ихтијари азгабарыглы өртүкләрин мүвазинәт тәнликләринин јени тәгриби үсулла һәлли

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә В. З. Власовун ихтијари азгабарыглы өртүкләр үчүн јазылан (1,3) мүвазинәт тәнликләринин јени тәгриби үсулла һәлли верилир. (1,3) тәнликләри $L = W + \frac{i}{\sqrt{EhD}}$ φ комплекс функција-

сы васитәсилә (1,5) тәнлијинә кәтирилдикдән сонра өлчүсүз әјриликләр

$\frac{1}{\rho_1(\alpha, \beta)}$ вә $\frac{1}{\rho_2(\alpha, \beta)}$ кичик γ параметрин дәрәчәләринә көрә сыраја ајрылыр. Сонра (1,5) тәнлијинин һәлли L вә ујғун олараг, L функ- ајрылыр. Сонра (1,5) тәнлијинин һәлли L вә ујғун олараг, L функ- сијасы үчүн гојулан сәрһәд шәртләри дә кичик γ параметринин дәрә- чәләринә көрә сыраја ајрылыр. Бу васитә илә (1,5) тәнлијиндән или- шән (1,15) тәнликләр системи алыныр. (1,5) тәнлијиндән, хусуси һалда, ихтијари азгабарыглы цилиндрик өртүкләр үчүн илишәв (2,2) тәнликләри системи алыныр. (1,15) тәнликләри r_0 радиуслу азгабарыг- лы сферик өртүјүн мүвазинәт тәнлијинин вә (2,2) тәнликләри исә r_0 радиуслу азгабарыглы даирәви цилиндрик өртүјүн мүвазинәт тәнлији- нин ејнидир.

Азгабарыглы сферик вә даирәви цилиндрик өртүкләр үчүн гоју- лан сәрһәд мәсәләләри бир чох һалларда асанлыгла һәлл олундуғуна

көрә, алынган илишән тәнликләр системинин һәлиндә һәм ин нәтичә-
ләрден истифадә етмәк имканы јараныр. Беләликлә, ихтијари профилдә
олан азгабарыглы өртүкләр нәзәријјәсинин бир чох сәрһәд мәсәлә-
ри асанлыгла һәлл едилир.

Тәклиф едилән үсул В. З. Власовун азгабарыглы узун цилиндрик
өртүкләр үчүн верилән мұвазинәт тәнликләринә вә В. В. Новожило-
вун ихтијари цилиндрик өртүкләр үчүн вердији мұвазинәти тәнлијинә
дә мұвәффеғијјәтлә тәтбиг олуна биләр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазиијат вә техника елмләри сәријасы, 1963, № 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1963, № 4

А. Х. ХАЛИЛОВ, Ф. К. ИСАЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ АНИОНОВ ОСНОВАНИЙ НА ЦЕНТРЫ ЗАХВАТА НЕКОТОРЫХ ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛОФОСФОРОВ СО СМЕШАННОЙ ОСНОВОЙ

В настоящее время твердо установлено, что введение ионов акти-
ватора в щелочно-галоидные кристаллы является одним из методов
изменения спектра локальных уровней захвата. Активаторы помимо
их основных функций—создания центров свечения, участвуют также
в создании электронных и дырочных центров захвата [5, 6, 12, 15,
24, 25]. Исследование активаторных центров захвата имеет большое
значение для изучения структуры и природы активаторных уровней
захвата и механизма процессов, протекающих в них. Несмотря на
то, что исследованию активаторных центров захвата посвящено довольно
много работ, вопрос о расположении ионов активатора, которые входят
в состав активаторных центров захвата в кристаллической решетке,
о влиянии анионов ближайшего окружения активаторных центров
захвата на их свойства до сего времени изучен недостаточно [12,
19—21].

В настоящем сообщении приводятся результаты проведенных нами
исследований влияния разных анионов ближайшего окружения цент-
ров захвата на их свойства в смешанных хлористо-бромистых кри-
сталлах, активированных медью и серебром. Указанные исследования
проводились путем изучения спектров основного и возбужденного
поглощения.

Нами были выращены и изучены монокристаллические фосфоры
со смешанной основой с плавно меняющимся соотношением компо-
нентов (см. табл. 1 и 2). Монокристаллические фосфоры были выра-
щены из расплава по усовершенствованному методу Киропулоса из реак-
тивов марки „спектрально чистый“ и „особо чистый“. Концентрация
серебра и меди во всех образцах составляла 0,5 моль% в шихте
перед расплавлением. Фосфоры возбуждались излучением рентгеновс-
перед расплавлением. Фосфоры возбуждались излучением рентгеновс-
кой трубки с вольфрамовым антикатодом (45 кВ, 10 мА, 1,8 часов) при
комнатной температуре. Условия эксперимента были строго одинаковы
для всех исследованных нами образцов. Спектры поглощения изме-
рялись на спектрофотометре.

Кристаллофосфоры	A		A'	
	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$
KCl + AgCl	237	0,52	260	0,33
KCl(90 моль %)·KBr(10 моль %) + AgCl	242	0,37		
KCl(70 моль %)·KBr(30 моль %) + AgCl	245	0,39		
KCl(50 моль %)·KBr(50 моль %) + AgCl	248	0,50		
KCl(30 моль %)·KBr(70 моль %) + AgCl	250	0,37		
KCl(10 моль %)·KBr(90 моль %) + AgCl	252	0,27		
KBr + AgCl	253	0,34		

* Приводится содержание KCl и KBr в расплаве.

Кристаллофосфоры	1	
	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$
KCl + CuCl	239	0,33
KCl(90 моль %)·KBr(10 моль %) + CuCl	243	0,20
KCl(50 моль %)·KBr(50 моль %) + CuCl	248	0,15
KCl(10 моль %)·KBr(90 моль %) + CuCl	251	0,14
KBr + CuCl	252	0,09

* Приводится содержание KCl и KBr в расплаве.

§ 1. Фосфоры KCl + AgCl и KBr + AgBr

Активаторные центры захвата в фосфорах KCl+AgCl и KBr+AgCl изучались в работах [2, 4, 7, 8, 23, 25, 26]. Однако существуют противоречивые предположения относительно природы и структуры отдельных активаторных центров захвата.

Известно, что чистые монокристаллы KCl и KBr в области от 6,0 до 1,23 эв совершенно прозрачны. Однако в спектрах KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров появляются активаторные полосы поглощения с максимумами, соответственно, 5,71; 5,44; 5,06 эв и 5,79; 5,38; 5,10 эв (см. кривые 1 и 7 на рис. 1). Коэффициент поглощения в полосе с $E_m \approx 5,06$ эв для KCl+AgCl фосфора очень мал. Наши результаты относительно положения максимумов активаторных полос поглощения в указанных двух фосфорах хорошо согласуются с данными Этцеля и Шульмана [25], М. Л. Каца [4, 7, 8] Р. Н. Гиндиной и Ч. Б. Лушника [2].

Измеренные нами спектры возбужденного поглощения KCl+AgCl и KBr+AgCl фосфоров приведены на рис. 2 (кривые 1 и 7). Из рис. 2 видно, что после рентгенизации указанных двух фосфоров наблюдается серия полос возбужденного поглощения с максимумами при 5,58; 5,34; 5,23; 4,77; 4,33; 3,93; 3,65; 2,85; 2,23 эв для KCl+AgCl и 5,34; 4,90; 4,68; 4,06; 3,73; 3,24; 2,68 и 2,00 эв для KBr+AgCl.

Наши результаты относительно максимумов и интенсивности полос возбужденного поглощения фосфоров KCl+AgCl и KBr+AgCl согласуются с литературными данными [2, 4, 7, 8, 25]. Часть из них (5,58; 5,34; 2,23 эв для KCl+AgCl; 5,34; 2,00 эв для KBr+AgCl) создается и при рентгенизации чистых кристаллов KCl и KBr и соответствует

Таблица 1							
B		C		D		F	
$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$
266	0,36	315	0,29	340	0,40	435	0,82
292	0,47	—	—	353	0,33	443	0,54
296	0,55	—	—	362	0,29	449	0,33
299	0,67	—	—	368	0,35	454	0,22
302	0,44	329	0,23	375	0,22	458	0,09
304	0,30	331	0,19	380	0,15	461	0,055
305	0,245	332	0,19	382	9,12	463	0,03

Таблица 2			
2		3	
$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$	$\lambda, \text{мк}$	$\Delta\lambda, \text{мм}^{-1}$
288	0,13	350	0,11
294	0,10	385	0,09
303	0,06	370	0,03
309	0,05	376	0,02
311	0,04	378	0,01

электронам и дыркам, локализованным на анионных и катионных вакансиях. Вторая часть полос возбужденного поглощения (5,23; 4,77; 3,93, 3,65; 2,85 эв для KCl+AgCl и 4,90; 4,68; 4,06; 3,73; 3,24 и 2,69 эв для KBr+AgCl), отсутствующая в чистых кристаллах KCl и KBr, соответствует электронным и дырочным центрам захвата, в состав которых входят ионы активатора. Их принято обозначать символами A, A' (4,77 эв для KCl+AgCl; 4,68 эв для KBr+AgCl B, C, D, E [25]).

Природа и структура вышеперечисленных полос возбужденного поглощения, обусловленных присутствием активатора, была рассмотрена многими авторами [2, 4, 7, 8, 23, 25, 26]. Существует единое мнение только о природе и структуре B-центров захвата или атомарного центра серебра. Во всех этих работах придерживается мнение о том, что B-полоса является электронной и обусловлена ионом серебра, захватившим электрон и имеющим по соседству галогенную вакансию. В указанных работах представления различных авторов относительно других активаторных центров захвата существенно различаются.

Прямыми опытами по определению знака носителей тока [13] и другими методами [1, 11] доказано, что F-полоса является электронной. Это позволяет определить природу A, A', B, C, D, E полос путем исследования изменений их после оптического разрушения. F-центров исследования изменений их после оптического разрушения фосфоров KCl+AgCl и поглощения. Спектр возбужденного поглощения монохроматическим светом KBr+AgCl после обесцвечивания F-полосы максимумам F-полос поглощения 2,23 эв и $\lambda = 2,00$ эв, соответствующим максимумам F-полос поглощения указанных фосфоров, приведен на рис. 2 (кривые 1 и 7). Как видно из этих кривых, одновременно с оптическим обесцвечиванием F-центров из этих кривых, одновременно с оптическим обесцвечиванием F-центров поглощения уменьшается и A-полоса, что свидетельствует о ее ды-

рочной природе. Аналогично работам [8, 23, 25] можно предполагать, что А-полоса обусловлена сложными центрами, в состав которых входит ион Ag^+ и дырка.

Электронная природа В-центров подтверждается также нашими опытами. Об электронной природе В-центров свидетельствует и их наличие в аддитивно-окрашенных кристаллофосфорах $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ [10, 18].

Чтобы определить истинную природу полос Д, Е в фосфорах $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ мы исследовали спектр поглощения аддитивно окрашенных фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ в парах щелочного

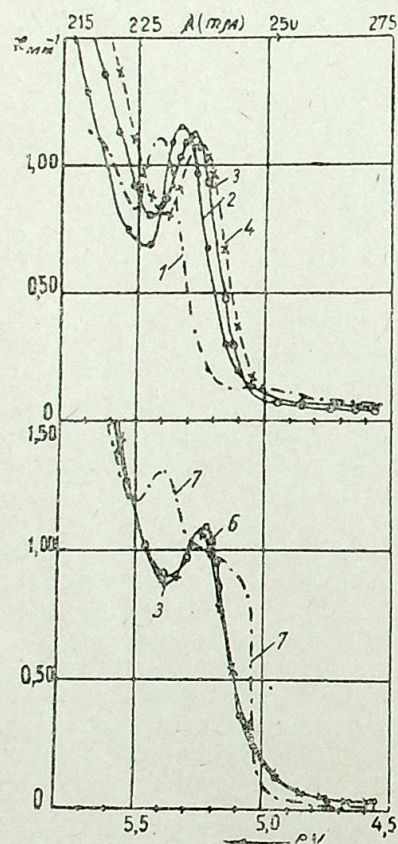


Рис. 1

металла, т. е. в условиях, при которых в кристаллы извне проникают только электроны и никаких положительных дырок в них не образуется.

На спектрах поглощения аддитивно-окрашенных фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ наряду с другими полосами наблюдаются В- и Е-полосы. При этом Д- и А-полос не наблюдается. Обнаружение В- и Е-полос в спектрах поглощения аддитивно-окрашенных фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и

$\text{KBr} + \text{AgCl}$ и отсутствие в указанных спектрах А- и Д-полос однозначно указывает на электронную природу первых и дырочную природу последних.

Сравнение спектра возбужденного поглощения, обусловленного поглощением в активаторных центрах захвата для $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфоров, показывает, что все полосы возбужденного поглощения, характерные для $\text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфора, заметно смещены в длинноволновую область по сравнению с положением максимумов соответствующих полос для $\text{KCl} + \text{AgCl}$ фосфора (сравни кривые 1 и 7 на рис. 2, и табл. 1).

§ 2. А. $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфоры

Спектр активаторного поглощения указанных фосфоров приведен на рис. 1 (кривые 2—6).

Как видно из рис. 1, при любом фиксированном соотношении компонент KCl и KBr спектр активаторного поглощения фосфоров $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ содержит в области 5,39—5,23 eV одну широкую полосу, хотя в фосфорах с соответствующими однокомпонентными основаниями всегда возникает три полосы активаторного поглощения (см. кривые 1 и 7 на рис. 1). По мере увеличения содержания KBr в таких смешанных фосфорах максимум полосы активаторного поглощения смещается в сторону длинных волн. Максимальная величина смещения положения максимума полосы активаторного поглощения в смешанных фосфорах составляет порядка 0,20 eV по сравнению с таковой для $\text{KCl} + \text{AgCl}$ фосфора.

Возникновение одной полосы в спектре активаторного поглощения у смешанных $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ фосфоров при варьировании содержания KBr от 10 до 90 моль % в основании наводит на мысль о том, что эта полоса характеризует центры поглощения в которых процесс поглощения обусловлен электронными переходами в ионе Ag^+ , энергетические уровни которого деформированы полем ионов Cl^- и Br^- .

Теперь проследим за поведением активаторных центров захвата в фосфорах со смешанной основой $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$. Кривые 2—6 на рис. 2 характеризуют спектр возбужденного поглощения таких фосфоров с содержанием KBr 10, 30, 50, 70 и 90 моль % в основании.

Из кривых 2—6 рис. 2 следует, что во всех смешанных фосфорах $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ после рентгенизации, как и в фосфорах $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$, наряду с другими полосами неактиваторного характера, возникают также А-, В-, С-, Д-, Е-полосы, максимумы А-, В-, С-, Д-, Е-полос и коэффициенты возбужденного поглощения приведены в табл. 1. Из сравнения кривых 1—7 на рис. 2 и данных табл. 1 становится очевидным следующее:

а) при переходе от фосфоров $\text{KCl} + \text{AgCl}$ и $\text{KBr} + \text{AgCl}$ к фосфорам со смешанной основой $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ с плавно изменяющимися содержаниями компонентов максимумы всех полос смещаются в сторону длинных волн;

б) при плавном изменении состава основания равномерного сдвига указанных полос не наблюдается; при увеличении содержания KBr в основании от 10 до 50 моль % включительно максимумы полос возбужденного поглощения активаторных центров захвата в смешанных фосфорах $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ значительно больше смещаются в длинноволновую область, чем в том случае, когда концентрация KBr превышает 70 моль %;

в) в фосфоре $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ с ростом содержания KBr относительная интенсивность полос возбужденного поглощения В, Д и Е

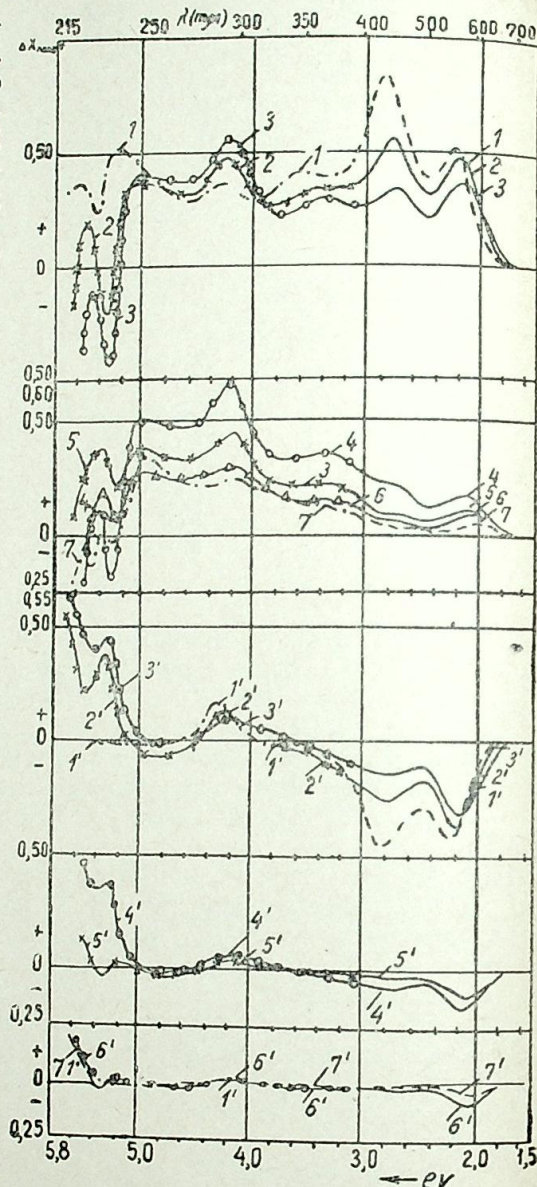


Рис. 2

меняется. Например, если для $KCl+AgCl$ фосфора полосы D и E значительно интенсивнее B -полоса, то для смешанных хлористо-бромистых фосфоров, активированных серебром, каждая из полос D и E даже при малом содержании (10 моль %) KBr в основании $KCl \cdot KBr$ менее интенсивна, чем B -полоса. Следует отметить, что с ростом количества KBr компоненты основания E -полоса поглощения ослабляется. Аналогичная картина наблюдается и в спектре $KBr+Ag$ фосфора;

г) в фосфоре $KCl \cdot KBr+AgCl$, так же как в фосфорах с однокомпонентным основанием, отчетливо наблюдается отрицательное возбужденное поглощение;

д) проведенные нами исследования влияния оптического обесцвечивания F -полосы поглощения в фосфорах $KCl \cdot KBr+AgCl$ показывает, что природа активаторных центров захвата не изменяется при переходе от однокомпонентных фосфоров $KCl+AgCl$ и $KBr+AgBr$ к фосфорам $KCl \cdot KBr+AgCl$ (см. кривые 2'–6' рис. 2);

е) если сравнить спектр возбужденного поглощения активаторных центров захвата фосфоров $KBr+AgCl$ с таковыми для смешанных $KCl \cdot KBr+AgCl$ фосфоров с 0, 10, 30, 50, 70, и 90 моль % KBr , то легко видеть, что поведение полос A , A' , B , C , D , E в смешанных фосфорах, где содержание KBr составляет больше 70 моль %, во всех отношениях мало отличается от поведения соответствующих полос для фосфора $KBr+AgCl$.

Б. Смешанные монокристаллы $KCl \cdot KBr$, активированные ионами меди

Спектр активаторного поглощения фосфоров $KCl+CuCl$ и $KBr+CuCl$ приведен на рис. 3, кривые 1 и 5, из которых следует что при выбранной нами концентрации активатора он состоит из двух полос с $E_m \approx 4,73 \text{ эВ}$ и $E_m = 3,54 \text{ эВ}$ для фосфора $KCl+CuCl$, и из одной полосы с $E_m = 4,73 \text{ эВ}$ для $KBr+CuCl$ фосфора. Максимумы этих полос по положению соответствуют данным работ [3, 9].

О природе центров, ответственных за длинноволновую полосу в спектре $KCl+CuCl$ фосфора, пока нет единого мнения.

Спектры возбужденного поглощения фосфоров $KCl+CuCl$ и $KBr+CuCl$ приведены на рис. 4 (кривые 1 и 5). Как видно из этих кривых, после рентгенизации в спектре поглощения указанных фосфоров наряду с неактиваторными полосами (F -полоса при $2,23 \text{ эВ}$ для KCl , V полоса при $5,39 \text{ эВ}$ и F -полоса при $2,00 \text{ эВ}$ для KBr) возникает также три полосы возбужденного поглощения с максимумами, соответственно, при $5,19$; $4,32$; $3,54 \text{ эВ}$ и $4,92$; $4,00$ и $3,28 \text{ эВ}$, которые обусловлены медными центрами захвата в решетках монокристаллов KCl и KBr .

Оптическое обесцвечивание F полос, как показывают кривые 1' и 5' рис. 4, приводит к усилению полос с $E_m = 5,16 \text{ эВ}$ и $E_m = 4,32 \text{ эВ}$ для $KCl+CuCl$ фосфора и полос с $E_m = 4,92 \text{ эВ}$ и $E_m = 4,00 \text{ эВ}$ для $KBr+CuCl$ фосфора, свидетельствует об их электронной природе.

Полоса с $E_m = 3,54 \text{ эВ}$ для $KCl+CuCl$ и $E_m = 3,28 \text{ эВ}$ для $KBr+CuCl$ при этом не только не усиливается, но даже ослабляется, что характеризует их как активаторные центры захвата дырочного типа. Дырочная природа указанных полос объясняется также тем, что они не наблюдаются в исследуемом нами спектре поглощения аддитивно-окрашенных фосфоров $KCl+CuCl$ и $KBr+CuCl$.

Проследим теперь за активаторными центрами захвата в фосфорах со смешанной основой $KCl \cdot KBr+CuCl$ с разным содержанием компонентов.

На рис. 3 представлен (кривые 2–4) спектр активаторного поглощения указанных фосфоров с 10, 50 и 90 моль % KBr . Спектр активаторного поглощения смешанных $KCl \cdot KBr+CuCl$ фосфоров с 30 и 70 моль % KBr близок к соответствующему спектру остальных смешанных фосфоров.

Из кривых 2–6 рис. 3 следует, что спектр активаторного поглощения фосфоров со смешанной основой $KCl \cdot KBr+CuCl$ при любом соотношении компонент состоит только из одной полосы в отличие от $KCl+CuCl$ фосфора. Это дает основание предполагать, что активаторная полоса поглощения при $4,73 \text{ эВ}$ у смешанных хлористо-бромистых фосфоров, активированных медью, обусловлена электронными переходами в ионах Cu^+ , изоморфно замещающими катионы основания в нормальных узлах смешанной решетки $KCl \cdot KBr$, энергетические уровни которых деформированы ионами Cl^- и Br^- .

Спектр возбужденного поглощения смешанных $KCl \cdot KBr+CuCl$ фосфоров с 10; 50 и 90 моль % KBr представлен на рис. 4 (кривые 2–6), из

которого следует, что в спектре поглощения в каждом из последних фосфоров после рентгенизации наряду с обычными полосами (соответственно, при $2,21 \text{ эВ}$, $2,13 \text{ эВ}$, $2,05 \text{ эВ}$), характерными для неактивированных решеток, также появляются три полосы возбужденного поглощения, обусловленные с присутствием активатора в решетке. Максимумы указанных полос и коэффициент возбужденного поглощения в них приведены в табл. 2.

Из кривых 1–5 рис. 4 и табл. 2 очевидно: в смешанных фосфорах $KCl \cdot KBr+CuCl$ даже при малом содержании бромида калия в основании все полосы возбужденного поглощения активаторных центров захвата, характерные для фосфора $KCl+CuCl$, смешаются в длинноволновую сторону спектра, как это имеет место у смешанных хлористо-бромистых кристаллов, активированных серебром (см. предыдущий параграф и работу [21]); при переходе от фосфоров с однокомпонентными основаниями $KCl+CuCl$ и $KBr+CuCl$ к смешанным фосфорам $KCl \cdot KBr+CuCl$ с плавным увеличением содержания KBr в основании интенсивность всех полос возбужденного поглощения, обусловленных активаторными центрами захвата, уменьшается; в фосфорах со смешанной основой $KCl \cdot KBr+CuCl$ с плавным увеличением содержания KBr не наблюдается равномерного сдвига полос.

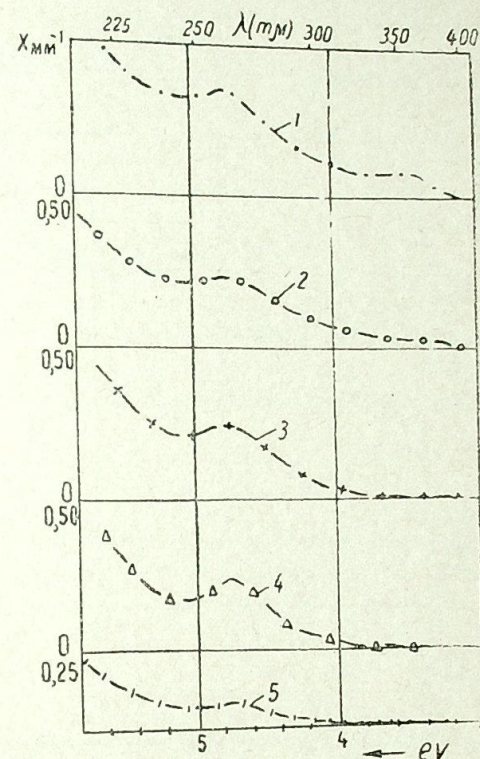


Рис. 3

Большой сдвиг происходит лишь до концентрации KBr 50 моль % включительно, затем сдвиг происходит незначительно.

Действие оптического обесцвечивания светом из области F -полос поглощения показало, что природа полос возбужденного поглощения, обусловленных активаторными центрами захвата, в фосфорах со смешанной основой $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{CuCl}$ не изменяется по сравнению с

таковой для соответствующих полос фосфоров $\text{KCl} + \text{CuCl}$ и $\text{KBr} + \text{CuCl}$ (см. кривые 2'–4' рис. 4).

Сравнение λ_m и интенсивности полос в спектре возбужденного поглощения смешанных хлористо-бромистых фосфоров KCl , $\text{KBr} + \text{CuCl}$ содержаниями бромидов калия в 0, 10, 50, 90 и 100 моль % в основании показывает, что поведение всех полос возбужденного поглощения, обусловленных активаторными центрами захвата в фосфорах со смешанной основой $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{CuCl}$ при содержании KBr больше, чем 70 моль %, близко к $\text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфору.

Смещение полос возбужденного поглощения активаторных центров захвата в длинноволновую область спектра, изменение относительной

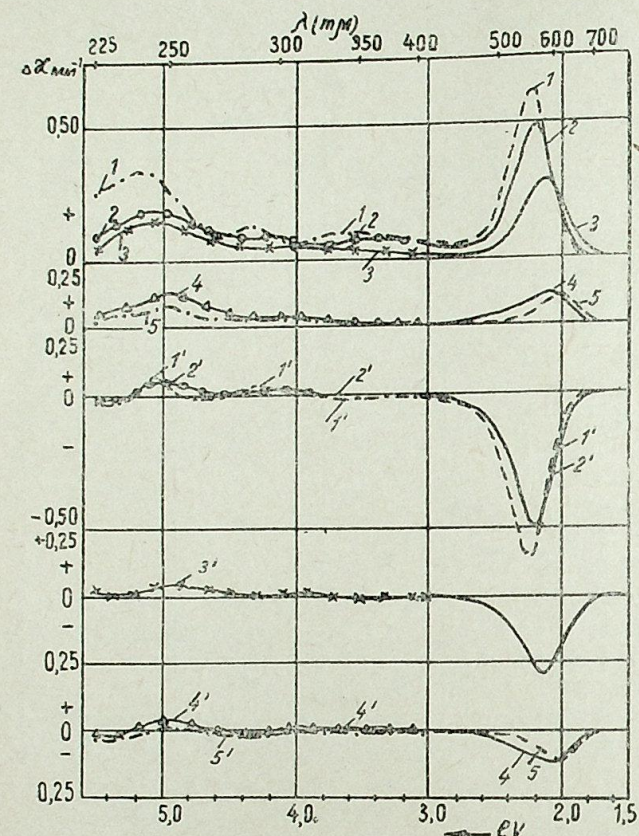


Рис. 4

интенсивности их, неизменность числа и природы активаторных центров захвата в смешанных кристаллах $\text{KCl} \cdot \text{KBr}$, активированных ионами серебра и меди, при плавном изменении содержания компонентов по сравнению тех же свойств для соответствующих фосфоров с однокомпонентным основанием можно объяснить, если предполагать, что в указанных выше смешанных фосфоров существуют активаторные центры захвата, содержащие в своем ближайшем окружении разные количества анионов Cl^- и Br^- , т. е. изоструктуры серебряных и медных центров захвата, физический смысл которых представляет собой серебряные или медные центры захвата, имеющие различное ближайшее окружение анионами основания.

Неравномерный сдвиг полос возбужденного поглощения серебряных и медных центров захвата в фосфорах $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{AgCl}$ и $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{CuCl}$ с различным содержанием KBr , по-видимому, можно объяснить тем, что в смешанных хлористо-бромистых фосфорах имеет

место склонность к предпочтительной группировке серебряных и медных центров захвата с ионами брома.

Близость значений λ_m полос возбужденного поглощения, обусловленных серебряными и медными центрами, обусловлено, по-видимому, небольшим различием ионизационных потенциалов атомов Ag и Cu .

§ 3. Влияние анионов оснований на неактиваторные центры захвата в щелочно-галогидных фосфорах со смешанной основой

Уже в предыдущих параграфах было указано, что под действием рентгеновых лучей в щелочно-галогидных фосфорах возникают свободные электроны и дырки, которые захватываются, как активаторными центрами [12], так и тепловыми центрами захвата [12, 14]. К числу последних относятся и электронные F -центры захвата. Эти центры являются наиболее глубокими неактиваторными центрами захвата в чистых и активированных кристаллах.

Несмотря на то, что изучению процесса образования F -центров при фотохимическом окрашивании некоторых чистых и активированных щелочно-галогидных кристаллов с однокомпонентным основанием посвящен ряд работ [5, 16, 22], однако до сего времени почти нет таких работ, посвященных изучению свойств F -центров захвата фосфоров со смешанными основаниями.

В настоящем параграфе излагаются результаты исследования влияния анионов основания на скорость образования F -центров и на другие свойства фосфоров, перечисленные в табл. 1 и 2 предыдущих параграфов. Положение максимумов, полуширины и интенсивности F -полос поглощения в смешанных $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфорах приведены в табл. 3.

Таблица 3

Кристаллофосфоры	λ_m^F , мμ	δ_{ev}^F	ϵ_{mm}^{-1}
$\text{KCl} + \text{CuCl}$	556	0.16	0.68
$\text{KCl}(90 \text{ моль } \%) \cdot \text{KBr}(10 \text{ моль } \%) + \text{CuCl}$	563	0.18	0.55
$\text{KCl}(70 \text{ моль } \%) \cdot \text{KBr}(30 \text{ моль } \%) + \text{CuCl}$	572	0.20	0.47
$\text{KCl}(50 \text{ моль } \%) \cdot \text{KBr}(50 \text{ моль } \%) + \text{CuCl}$	583	0.21	0.31
$\text{KCl}(30 \text{ моль } \%) \cdot \text{KBr}(70 \text{ моль } \%) + \text{CuCl}$	595	0.18	0.19
$\text{KCl}(10 \text{ моль } \%) \cdot \text{KBr}(90 \text{ моль } \%) + \text{CuCl}$	605	0.17	0.15
$\text{KBr} + \text{CuCl}$	620	0.13	0.12

Из этой таблицы видно, что F -полосы поглощения в фосфорах $\text{KCl} + \text{CuCl}$ и $\text{KBr} + \text{CuCl}$ отличаются друг от друга по положению, полуширине и интенсивности. Интенсивность F -полосы поглощения у $\text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфора в несколько раз меньше, чем у $\text{KCl} + \text{CuCl}$ фосфора, максимум F -полосы у первого фосфора расположен в более длинноволновой области и т. д.

Как видно из сравнения параметров F -полос поглощения смешанных $\text{KCl} \cdot \text{KBr} + \text{CuCl}$ фосфоров с плавным увеличением содержания KBr в основании смешанного фосфора максимум F -полосы поглощения приблизительно плавно смещается в сторону длинных волн. При этом величины оптической плотности в максимуме F -полосы поглощения монотонно уменьшается.

Далее, наличие анионов Br^- в основании смешанных фосфоров вызывает расширение F -полосы поглощения со стороны длинных

волн. Полуширина F -полосы поглощения в кристаллофосфорах со смешанной основой $KCl \cdot KBr + CuCl$ во всех случаях больше, чем полуширина F -полос у соответствующих фосфоров с однокомпонентным основанием.

Особенно следует отметить, что эта полуширина имеет наибольшее значение при эквимольном соотношении компонентов основания.

Надо отметить, что F -полосы поглощения в фосфорах со смешанной основой $KCl \cdot KBr + CuCl$ с разными содержаниями компонентов являются симметричными. Аналогичный результат относительно положения в спектре, полуширины и симметричности F -полос поглощения получен нами так же для фосфоров со смешанной основой $KCl \cdot KBr + AgCl$.

Однако в случае смешанных кристаллов $KCl \cdot KBr$, активированных серебром, интенсивность F -полосы поглощения, следовательно и число F -центров, значительно меньше, по сравнению с таковой для F -полос у смешанных кристаллов $KCl \cdot KBr$, активированных медью. Эта разница в интенсивности F -полос поглощения для указанных смешанных фосфоров, активированных серебром и медью обусловлено тем, что интенсивность полос возбужденного поглощения, обусловленных активаторными центрами захвата, в состав которых входит ионов серебра больше, чем соответствующих полос, обусловленных центрами захвата, в состав которых входят ионы меди (см. § 1 и § 2), т. е. повышенная концентрация активаторных центров захвата в $KCl \cdot KBr + AgCl$ фосфорах приводит к значительному уменьшению числа F -центров.

Анализ приведенных нами в этом параграфе данных показывает, что в кристаллофосфорах $KCl \cdot KBr + AgCl$ и $KCl \cdot KBr + CuCl$ наряду с изоструктурами активаторных центров захвата существует также изоструктуры F -центров захвата, физический смысл которых представляют собою F -центры, в ближайшем окружении которых располагаются химически разные анионы Cl^- и Br^- .

ЛИТЕРАТУРА

1. Витол И. К. Тр. ИФА АН ЭССР, № 8, 1958.
2. Гиндина Р. И., Лушик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 15, 1961.
3. Като М. Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res., Tokyo, т. 41, 113, 1943.
4. Кац М. Л. ЖЭТФ, т. 23, 1952.
5. Кац М. Л. ДАН СССР, т. 85, № 4, 1952.
6. Кац М. Л., Семенов Б. З. ДАН СССР, т. 105, 415, 1956.
7. Кац М. Л., Никольский В. К. Материалы V совещания по люминесценции. Тарту, 1957.
8. Кац М. Л. Люминесценция и электронно-дырочные процессы в фотохимически окрашенных кристаллах щелочно-галогидных соединений, Изд. Саратовского госуниверситета, 1960.
9. Кац М. Л. Изв. АН СССР, серия физич., т. XXVI, № 4, 1962.
10. Кац М. Л., Никольский В. К. Физика щелочно-галогидных кристаллов (Тр. II Всесоюзного совещания). Рига, 1962.
11. Лукирский П. Н. ЖРФХО, т. 56, 1918.
12. Лушик Ч. Б. Тр. ИФА АН ЭССР, № 3, 1955.
13. Мотт Н., Генри Г. Электронные процессы в ионных кристаллах, М., ИЛ, 1950.
14. Парфианович И. А. Изв. АН СССР, серия физич., т. 13, 1949.
15. Парфианович И. А. Изв. АН СССР, серия физич., т. XV, № 5, 1951.
16. Парфианович И. А. Опт. и спектр., т. IV, вып. 2, 1958.
17. Парфианович И. А. и Шуралева Е. И. Материалы VII совещания по люминесценции. Тарту, 1959.
18. Топорец А. С. ДАН СССР, т. 15, 1937.
19. Халилов А. Х., Мамедов А. П., Исаев Ф. К. Тезисы I Всесоюзного совещания по физике щелочно-галогидных кристаллов. Тарту, 1959.
20. Халилов А. Х., Исаев Ф. К. Изв. АН Азерб. ССР, серия [физич.], № 1, 1961.

21. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю., Мамедов А. П., Алиева Т. Д., Исаев Ф. К. Физика щелочно-галогидных кристаллов (Тр. II Всесоюзного совещания). Рига, 1962.
22. Шамовский Л. М. Опт. и спектр., т. I, 1956.
23. Eppler R., Dricamer H. J. Chem. Phys., т. 32, 1734, 1960.
24. Etzel H. W., Schulman J. H., Ginther R. J., Claffy E. W. Phys. Rev., т. 85, 1063, 1952.
25. Etzel H. W. and Schuman J. H. J. Chem. Phys., т. 22, 1549—1554, 1954.
26. W. Van der Vorst, W. Dekyser. Physica, т. 23, 903, 1957.

Э. Х. Халилов, Ф. К. Исаев

Бэ'зи гарышыг эсаслы гэлэви-налокен кристаллофосфорларында эсас анионларынын тутма мэркэзлэринэ тэ'сиринин тэдгиги

ХҮЛАСЭ

Мөгалэдэ күмүш вэ мис ионлары илэ активлэширилмиш гарышыг эсаслы $KCl \cdot KBr$ кристалларында эсас анионларынын активатор вэ истилик тутма мэркэзлэринэ тэ'сирин тэдгиги едилир. Тэдгигат ишнинин нэтичэсиндэ ашкар едилмишдир ки, мұхтэлиф нисбэтлэрдэ көтүрүлмүш эсас анионлар (Cl^- вэ Br^-) гарышыг эсаслы $KClKBr + AgCl$ вэ $KCl \cdot KBr + CuCl$ фосфорларында активатор вэ истилик тутма мэркэзлэри илэ алагадар олан алавэ удма золагларынын максимумларынын спектрдэки вэзијјэтинин, онларын нисби интенсивлијјини вэ жарыменини эһәмийјјэтли дэрэчэдэ дэјишдирир.

Көстэрилэн тэчрүби фактлар гарышыг эсаслы $KClKBr + AgCl$ вэ $KCl \cdot KBr + CuCl$ фосфорларында активатор вэ истилик тутма мэркэзлэринин изоструктурасынын олмасы илэ изаһ едилир.

А. КУБЕСОВ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ У НАСИРЭДДИНА ТУСИ

Родоначальниками инфинитезимальных методов были пифагорейцы и Демокрит (V в. до н. э.). Пифагорейцы считали, что геометрические тела состоят из дискретных точек, не имеющих размеров; но находящихся на некоторых расстояниях друг от друга. Такая точка зрения позволяет сводить все геометрические закономерности к арифметическим, которые они считали основными закономерностями мира. Демокрит считал, что все геометрические тела состоят из принципиально неделимых первотел, имеющих конечные, хотя и сверхчувственно малые размеры. И пифагорейцы и Демокрит применяли свои представления для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. На этих же представлениях основывается решение задачи квадратуры круга Антифона¹.

В IV в. до н. э. задачи, решавшиеся раньше при помощи методов пифагорейцев и Демокрита, которые к этому времени считались математически нестрогими, стали решать при помощи метода исчерпывания Евдокса.

Новая форма инфинитезимальных методов в соединении с методом исчерпывания широко применялась Архимедом (III в. до н. э.). В основе рассуждений Архимеда лежали представления о том, что плоские фигуры состоят из линий, а тела — из их плоских сечений. Окончательное доказательство теорем Архимед, как правило, приводил по методу Евдокса.

Комментатор Архимеда Евтокий Аскалонский (VI в. н. э.) принял попытку доказательства I и II аксиом Архимеда из его трактата „О шаре и цилиндре“ при помощи представлений близких к представлениям Демокрита и Антифона. Для доказательства I аксиомы („Из всех линий, имеющих общие концы, прямая есть кратчайшая“) Евтокий доказывает сначала, что прямая АВ меньше ломаной АСВ, вписанной в кривую с концами А и В, затем доказывает то же для ломаной АСЕВ, вписанную в ту же линию. Далее Евтокий говорит: „Делая это постоянно и все более приближаясь к линии АСВ, мы будем получать ломаные прямые все большие и большие, чем АВ. Отсюда, таким образом, ясно, что и сама линия будет больше, чем

¹ Об инфинитезимальных методах в древней Греции. См. С. Я. Лурье, Теория бесконечно малых у древних атомистов. М. — Л., 1935.

А. КУБЕСОВ

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ У НАСИРЭДДИНА ТУСИ

Родоначальниками инфинитезимальных методов были пифагорейцы и Демокрит (V в. до н. э.). Пифагорейцы считали, что геометрические тела состоят из дискретных точек, не имеющих размеров; но находящихся на некоторых расстояниях друг от друга. Такая точка зрения позволяет сводить все геометрические закономерности к арифметическим, которые они считали основными закономерностями мира. Демокрит считал, что все геометрические тела состоят из принципиально неделимых первотел, имеющих конечные, хотя и сверхчувственно малые размеры. И пифагорейцы и Демокрит применяли свои представления для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. На этих же представлениях основывается решение задачи квадратуры круга Антифона¹.

В IV в. до н. э. задачи, решавшиеся раньше при помощи методов пифагорейцев и Демокрита, которые к этому времени считались математически нестрогими, стали решать при помощи метода исчерпывания Евдокса.

Новая форма инфинитезимальных методов в соединении с методом исчерпывания широко применялась Архимедом (III в. до н. э.). В основе рассуждений Архимеда лежали представления о том, что плоские фигуры состоят из линий, а тела—из их плоских сечений. Окончательное доказательство теорем Архимед, как правило, приводил по методу Евдокса.

Комментатор Архимеда Евтокий Аскалонский (VI в. н. э.) принял попытку доказательства I и II аксиом Архимеда из его трактата „О шаре и цилиндре“ при помощи представлений близких к представлениям Демокрита и Антифона. Для доказательства I аксиомы („Из всех линий, имеющих общие концы, прямая есть кратчайшая“) Евтокий доказывает сначала, что прямая АВ меньше ломаной АСВ, вписанной в кривую с концами А и В, затем доказывает то же для ломаной АСЕВ, вписанную в ту же линию. Далее Евтокий говорит: „Делая это постоянно и все более приближаясь к линии АСВ, мы будем получать ломаные прямые все большие и большие, чем АВ. Отсюда, таким образом, ясно, что и сама линия будет больше, чем

¹ Об инфинитезимальных методах в древней Греции. См. С. Я. Лурье, Теория бесконечно малых у древних атомистов. М. —Л., 1935.

АВ, поскольку возможно через все ее точки провести соединяющие прямые и из этих прямых составить как бы самую линию АСВ, которая согласно доказательству будет больше чем АВ. Действительно не будет нелепым, если в доказательствах общепризнанных положений принимать и такого рода рассуждения¹. Аналогичными рассуждениями Евтокий доказывает вторую аксиому („Из двух выпуклых линий с общими концами объемлющая больше объемлемой“).

О III и IV аксиомах Архимеда („Из всех поверхностей с общим плоским краем плоскость меньше всех других“, „Из двух выпуклых поверхностей с общим плоским краем объемлющая больше объемлемой“) Евтокий говорит, что их можно доказать при помощи аналогичных рассуждений.

Инфинитезимальные методы Архимеда получили развитие на средневековом Востоке в работах иракского математика Сабита ибн Корры (830—901) его внука Ибрагима ибн Синана (908—946) и египетского математика Абу Али ибн Хайсама (965—1039). Ибн Корра и ибн Синан нашли несколько способов определения площадей сегмента и объема сегмента параболоида вращения², известных еще, Архимеду. Ибн Хайсам нашел объем сегмента тела вращения параболы вокруг произвольной ограничивающей ее ординаты³. Решение этих задач у ибн Корры, ибн Синана и ибн Хайсама выполнено методом исчерпывания. Однако, по существу, рассуждения этих математиков опираются на инфинитезимальные соображения, так как, например, доказательство ибн Хайсама основывается на выведенной им специально для этого доказательства формуле суммы четверных степеней натуральных чисел.

На средневековом Востоке были распространены и атомистические представления о пространстве и времени, напоминающие представления пифагорейцев и Демокрита. Такие представления выдвигались мутакаллимами, которые использовали их для обоснования того, что аллах каждый момент творит мир заново⁴.

Первое упоминание об атомистических представлениях у математиков средневекового Востока мы встречаем в переписке великих среднеазиатских ученых Бируни (970—ок. 1050) и ибн Сины (980—1037). Бируни задает ибн Сине вопрос: „Почему Аристотель считает порочным учение о неделимой частице, тогда как утверждение о делимости тел до бесконечности еще более порочно?... Атомистам присуще также (немало) спорных утверждений, хорошо известных среди геометров, но слова тех, кто возражает атомистам еще менее приемлемы“⁵.

¹ Archimedis opera omnia cum Commentariis Eutocii; ed. I. Heiberg, III, Leipzig, стр. 8. Мы пользовались неопубликованным переводом комментариев Евтокия, любезно представленным нам И. И. Веселовским.

² H. Suter. Über die Ansmessung der Parabel von Thabit ben Qurra al-Harrani, Sitzungsber. d. physik.-mediz. Sozietät, 48, Ereangen, 1918. H. Suter. Die Abhandlungen Thabit ben Qurra und Abn Sahl al. Kūhīs über die Ausmessung der Paraboloiden (там же). H. Suter. Die Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrahim ben Sinan ben Thābit ben Qurra Viertelja. hisschrist der Naturforsch. Gesellschaft, in Zürich, 63, 1918.

³ H. Suter. Die abhandlung über die Ausmessung der Paraboloides von Ibn al Haitham, Bibliotheca mathematica, № 12, 1912.

⁴ Маймонид. Путеводитель колеблющихся. Пер. А. П. Рубина, в кн. С. Н. Григорьян. Из истории философии Средней Азии и Ирана VII—XII в. в., М., 1960 стр. 286—308.

⁵ Бируни и ибн Сина. Десять вопросов Бируни о „физике“ Аристотеля и ответы ибн Сины. Восемь вопросов Бируни о книге Аристотеля „О небе“ и ответы ибн Сины. В кн.: Материалы по истории прогрессивной общественно-философской мысли в Узбекистане. Под ред. П. М. Мунинова. Ташкент, 1957, стр. 139—140.

Ибн Сина отвечает на этот вопрос в полном соответствии с установкой Аристотеля и ссылается на доказательства из его „физики“ о невозможности составления непрерывного из атомов.

Новое применение инфинитезимальных методов на средневековом Востоке мы встречаем у великого азербайджанского математика Мухаммеда Насирэддина Туси (1201—1273)¹ в его комментариях к упоминавшемуся трактату Архимеда „О шаре и цилиндре“ (Эти комментарии изучаются в настоящей работе впервые по арабской рукописи, хранящейся в Парижской Национальной библиотеке²). По словам самого Насирэддина, он познакомился с этим трактатом Архимеда по переводам Сабита ибн Корры (ок. 830—901) и Исхака ибн Хунейна (ум. 910 г.); он был знаком также с комментариями Евтокия, к этому трактату в переводе Исхака, который, несомненно, и привлек его внимание к атомистическим представлениям.

После разбора определений Архимеда в начале первой книги „О шаре и цилиндре“ Насирэддин переходит к комментированию аксиом Архимеда. Насирэддин начинает разбор этих аксиом со II аксиомы, о которой говорит: „Я утверждаю, что этот постулат нуждается в доказательстве, так как он доказывается внутри этой науки, а именно, он доказывается с помощью двадцатого и двадцать первого предложений первой книги „Стихий“ (т. е. „Начал“ Евклида—А. К.), а постулаты не должны доказываться в тех науках, во введениях к которым они находятся. Так как доказательство этого постулата—геометрическое и не изложено полностью ни в одной из известных книг, то следует изложить его, чтобы в этой книге не было ничего, основанного на недоказанных суждениях“³.

Эти слова Насирэддина весьма близки к его словам о V постулате в изложении Евклида: „Я утверждаю, что последнее утверждение не является аксиомой и может быть доказано только в геометрической науке. Лучше было бы поместить это вне постулатов и я разъясняю его в надлежащем месте“⁴.

Сначала, следуя Евтокию, Насирэддин доказывает это утверждение для выпуклых ломаных линий; причем, если Евтокий по существу ограничивается рассмотрением только частных примеров, он устанавливает общий алгоритм проведения доказательства, пригодный для общего случая.

Перед доказательством этой аксиомы для выпуклых кривых линий Насирэддин рассматривает вопрос об установлении равенства и неравенства кривых линий и поверхностей. Здесь он критикует точки зрения его предшественников по этому вопросу и указывает, что прямая линия может быть наложена на круговую или кривую линию без нарушения прямизны путем качения. Насирэддин указывает также аналогичный способ наложения плоскости на боковую поверхность круглого цилиндра или конуса. При этом подчеркивается, что наложение одной величины на другую—только одно из доказательств равенства величин. Эти рассуждения нужны Насирэддину для обоснования возможности сравнения прямых с кривыми линиями по длине, а плоскости с кривыми поверхностями по площади.

¹ См. Г. Д. Мамедбейли. Основатель Марагинской обсерватории Мухаммед Насирэддин Туси, Баку, 1961.

² Рукопись № 2467/8, лл. 90—139 об. Микрофильм этой рукописи был представлен нам В. А. Розенфельдом, получившим его благодаря любезности г-жи Мейер Шагал.

³ Насирэддин. Ук. рукопись, л. 92.

⁴ Г. Д. Мамедбейли. Мухаммед Насирэддин Туси о теории параллельных линий и теории отношений. Баку, 1959, стр. 13.

Далее Насирэддин переходит к доказательству аксиомы Архимеда для кривых линий: „Для этого,—говорит Насирэддин,—достаточно заменить кривую линию [другой линией,] состоящей из многих очень малых [прямых] линий на крайнем пределе возможной малости и состоящей из очень близких углов на пределе возможной близости так, что с помощью ощущения невозможно различить ни сторон, ни углов. Эта [ломаная] линия—как бы та же самая кривая линия, между ними нет ощутимого отличия и без противоречия справедливо утверждение о сравнении этой линии с другой прямой линией, будет ли она длиннее или короче ее или же равна ей, так как эта [ломаная] линия не будет ощутимо отличаться от данной кривой... Это утверждение имеет место также для кривой [линии], если имеет место для ломаной [линии]“¹.

Здесь Насирэддин, развивая идеи, изложенные Евтокием, кладет в основу своих рассуждений элементарную линию—„очень малую линию на крайнем пределе возможности“.

Далее Насирэддин доказывает I аксиому Архимеда. Для этого он делит дугу пополам и приводит хорды обеих частей. Ясно, что первая хорда короче их. Затем он делит каждую из двух половин пополам; также проводит хорды и устанавливает, что предыдущие хорды короче их. Затем Насирэддин говорит: „Далее будем делить таким образом пополам [каждую] часть одну за другой неограниченно большое число раз до тех пор, пока не получится выпуклая линия, состоящая из малых хорд, которая фактически не будет ощутимо отличаться от первоначальной дуги. Поэтому справедливо утверждение о том, что первая хорда короче ее“².

Насирэддин замечает также, что „другой вид [доказательства] утверждения о том, что хорда короче дуги, получится, если считать, что она составлена из касательных к ней“³.

Затем аналогичным рассуждением Насирэддин доказывает II аксиому Архимеда.

Далее Насирэддин переходит к доказательству III и IV аксиом Архимеда. По поводу IV аксиомы он пишет: „Я говорю, что это утверждение для поверхностей отличается от утверждения для линий. Это имеет место для [поверхностей], состоящих из плоских поверхностей. Сначала покажем, что [плоская] поверхность, соединяющая края выпуклых [поверхностей], состоящих из плоских поверхностей, меньше их“⁴.

После доказательства этого он рассматривает случай, когда объемлемая поверхность состоит из нескольких различных плоскостей и доказывает утверждение аксиомы с помощью различных положений геометрии Евклида.

Установив справедливость этих аксиом для поверхностей, состоящих из плоских поверхностей, Насирэддин переходит к выпуклым кривым поверхностям. Например, для кругового цилиндра доказательство Насирэddина имеет вид: „Что касается круглой цилиндрической поверхности, то возьмем на ней круг; это или круг основания цилиндра или круг, параллельный ему. Разделим окружность этого круга на малые части на пределе возможной малости так, что если соединить их, то получится многоугольная фигура, состоящая из прямых линий и нет ощутимого различия между ней и окружностью данного круга. Проведем из вершин углов параллельные поверхно-

¹ Насирэддин. Ук. рукопись, л. 93 об.

² Насирэддин. Там же.

³ Насирэддин. Там же.

⁴ Насирэддин. Там же, л. 94.

сти цилиндра... Тогда каждые две соседние параллельные линии необходимо образуют плоскую фигуру. Из совокупности этих плоских фигур образуется многоугольная цилиндрическая поверхность, состоящая из этих плоских фигур, так что нет ощутимого различия между ней и круглой цилиндрической поверхностью и они совсем не расходятся друг от друга. Затем будем делить пополам малые дуги окружности и будем повторять [то же] действие, тогда получится другая многоугольная [поверхность], больше первой... Если будем делить таким образом пополам каждую из частей последовательно до бесконечности и производить каждый раз указанное действие, то наше утверждение становится несомненным для разума и, таким образом, требуемое утверждение имеет место для круглой цилиндрической поверхности“¹.

Инфинитезимальные рассуждения Насирэddина в применении к поверхностям действительно отличаются от его рассуждений, применяемых к линиям. Здесь, разделив окружности на малые линии, Насирэддин в дальнейшем делит эти линии до бесконечности. Повидимому, это связано с тем, что Насирэддин считает, что стороны элементарных параллелограмов, из которых, по его мнению, состоит поверхность, могут не быть элементарными линиями.

Далее Насирэддин проводит аналогичное рассуждение для конических поверхностей, в которые он вписывает пирамиды, где роль элементарных плоских фигур играют треугольники.

Аналогичные рассуждения Насирэddином проводятся и для поверхности шара, в которую он вписывает ту же многогранную поверхность, что и Евклид (17 предложение XII книги „Начал“).

Далее Насирэддин приближает цилиндрическую, коническую и шаровую поверхности с помощью описанных многогранных поверхностей и обобщает свои рассуждения на другие выпуклые кривые поверхности.

Как мы видим, Насирэддин в своих попытках доказать аксиомы Архимеда отправлялся от Евтокия, но инфинитезимальные рассуждения Насирэddина значительно глубже и полнее рассуждений Евтокия.

Применение Насирэddином инфинитезимальных рассуждений для доказательства аксиом Архимеда существенно дополняют инфинитезимальные методы ибн Корры, ибн Синана и ибн Хайсама, применявших строго классические формы доказательств. Отступление от этих строгих форм естественно приводит Насирэddина к некоторой нечеткости в определении применяемых им элементарных линий и поверхностей. Однако эти рассуждения могли явиться отправным пунктом для инфинитезимальных идей позднейших математиков. Дальнейшее развитие этих идей мы находим у Кеплера и Кавальери, вплотную подошедших к интегральному исчислению.

А. Кубесов

Насирэддин Туси инфинитезимальный метод

ХУЛАСӘ

Парис милли китабханасында Насирэддин Тусинин гијмәтли бир әлјазмасы муһафизә олунур. Бу әлјазмасы Архимеддин „Күрә вә цилиндр һаггында“ әсәринин шәрһидир. А. Кубесов бу әлјазмасынын

Насирэддин. Ук. рукопись, л. 96—96 об.

фотосурəтини əлдə етмиш вə буну тəдгиг едэрək мүəјјən етмишдир ки, гəдим алимлəрин истифадə етдиклəри инфинитезимал метод Нəсирəддин тэрəфиндən бу əлјазмасында даһа да инкишаф етдирил-мишдир.

Белə бир елми нəтичə Нəсирəддин јарадычылыгында јени мараглы чəһəтлəри мејдана чыхарыр. Мүəллиф кəстəрир ки, Нəсирəддинин инфинитезимал метод һаггында мұлаһизэлəри ондан əввəl јашамыш бир сыра алимлəринкиндən даһа дəрин вə даһа тамамдыр.

МҮНДƏРИЧАТ

П. Ə. Рəһманов. Мүгавимəтли мұһитдə еластики телə енинə зəрбə мəсəлəсинин һəлли һаггында	3
А. Ə. Һəмидов. Функција вə онун истигамəтə кəрə тэрəмəсинин ејни заманда јахшылашдырылмасы һаггында	13
Р. Ј. Гасымов, Б. Б. Тимофејев. Електрон рəгəм һесаблајычы машынлары (ЕРҺМ) васитəсилə симли веричилəрин тезлијинин өлчүлмəсиндə мəркəзлəшдирилмиш нəзарəт васитəсилə хəталарын вə мəлүматларын ишлəнил-мəsi мəсəлəsi	21
М. И. Вəлијев, И. Г. Кəримов, Г. М. Əлијев, М. И. Əлијев. Селенин истиликкечирмəсинə кристаллашманын тəсири	33
Л. М. Иманов, Ф. Һ. Мирзəјев. Сиркə туршусу вə онун бензолда мəһлулунун диелектрик хəссəлəри	37
Ј. Ə. Гулијев. Системин електрик стансијаларынын аз сулу иллəрдə режим	53
Л. В. Пучкова. Јарымеллиптик фəзаларда Френе дүстурлары	59
А. А. Мирзојан. Борунун башлангыч һиссəсиндə өзлү-пластик мајенин һэрəkəтинə даир	65
Г. Т. Һəсəнов. Сыхылмајан өзлү мајенин гəрарлашмамыш һэрəkəтинə даир бир мəсəлəнин һəлли	75
Н. Г. Гəдиров, А. Д. Јусифова, А. Б. Һəбибов. Бəзи нормал шəкилли маје алканларын рvt мұнасибəтлəринин график анализи	85
А. Ə. Аббасов. Фырланан вə тəрпəнмəјən коаксиал цилиндрлəр арасында өзлү-пластик мајелəрин гəрарлашмамыш һэрəkəти һаггында	99
Һ. П. Һүсəјнов, Һ. С. Гəмбəров. Гејои-бирчинс еластики лəјдə сыхлан мајенин гəрарлашмамыш мұстəви-радиал һэрəkəти	105
А. Ш. Казымов. Икичəкили мајенин ајрылма сəрһəддиндə капилјар сычрајыш тəзјигинин тəјини	121
М. Ј. Ахундзадə, И. Һ. Тағыјев. Ихтијари азгабарыглы өртүклəрин мұвазинəт тənликлəринин јени тəгриби үсулла һəлли	127
Ə. Х. Хəлилов, Ф. К. Исајев. Бəзи гарышыг əсаслы гəлəви-һолокен кристаллофосфорларында əсас анионларынын тутма мəркəзлəринə тəсиринин тəдгиги	135
А. Кубесов. Нəсирəддин Тусидə инфинитезимал метод	147

СОДЕРЖАНИЕ

П. А. Рахманов. О решении задачи поперечного удара по нити, которая находится в сопротивляющейся среде	3
А. А. Гамидов. Об одновременной аппроксимации функций и их производных по направлению в многомерном евклидовом пространстве	13
Р. Я. Касумов, Б. Б. Тимофеев. Вопросы погрешностей и обработки информации при измерении частоты струнных датчиков в системах централизованного контроля с ЭЦВМ	21
М. И. Велиев, И. Г. Керимов, Г. М. Алиев, М. И. Алиев. Влияние кристаллизации на теплопроводность селена	33
Л. М. Иманов, Ф. Г. Мирзоев. Диэлектрические свойства уксусной кислоты и ее растворов в бензоле	37
Я. Б. Кадымов, Ч. М. Джуварлы, М. И. Абдуррахманов, З. Я. Кулиев. Численный метод расчета переходных процессов в электрических цепях с распределенными параметрами без учета потерь	45
Ю. Э. Гулиев. Режимы электростанций системы в маловодные годы	53
Л. В. Пучкова. Формулы Френе в полуэллиптических пространствах	59
А. А. Мирзоян. О движении вязко-пластичной жидкости в начальном участке трубы	65
Г. Т. Гасанов. Решение одной задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости	75
Н. К. Кадыров, А. Д. Юсифова, А. Б. Габибов. Графический анализ r/vt соотношений некоторых жидких алканов нормального строения	85
А. А. Аббасов. О нестационарном движении вязко-пластичной жидкости между вращающимся и неподвижным коаксиальными цилиндрами	99
Г. П. Гусейнов, Г. С. Камбаров. Не установившееся плоско-радиальное движение сжимаемой жидкости в упругом неоднородном пласте	105
А. Ш. Казымов. Определение капиллярного скачка давления на границе раздела двух весоных жидкостей по наблюдаемым значениям скорости перемещения	121
М. Ю. Ахунд-заде и И. Г. Тагиев. Новый приближенный метод решения уравнений равновесия произвольных пологих оболочек	127
А. Х. Халилов, Ф. К. Исаев. Исследование влияния анионов оснований на центры захвата некоторых щелочно-голоидных кристаллофосфоров со смешанной основой	135
А. Кубесов. Инфинитезимальные методы у Насирэдина Туси	147

Чапа имзаланмыш 9/IX-1963-чү ил. Кағыз форматы 70×108^{1/16}. Кағыз вәрәги 4,88.
 Чап вәрәги 13,36. Нәс.-нәшријат вәрәги 12,10. ФГ 05580. Сифариш 323.
 Тиражы 620. Гијмәти 80 гәп.

Азәрбајҹан ССР Мәдәнијәт Назирлијинин „Гызыл Шәрг“ мәtbәәси.
 Бақы, Һәзи Асламов күчәси, 80.