

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

3

1963

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Бақы—Баку

Р. Г. МАМЕДОВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ
НА $(-\infty, \infty)$

Пусть $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) и

$$\Delta_t^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt).$$

—конечная разность функции $f(x)$ m -го порядка с шагом t .
Положим

$$\varphi_m(f, x, t) = [\Delta_t^m + \Delta_{-t}^m] f(x). \quad (1)$$

В работе [5] были установлены некоторые прямые и обратные теоремы о приближении функций $f(x)$ посредством m -сингулярных интегралов

$$T_\lambda^{[m]}(f; x) = (-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] K_\lambda(t) dt. \quad (2)$$

Эти теоремы выражались в терминах преобразований Фурье приближаемой функции $f(x)$ и ядра $K_\lambda(x)$.

Кроме этого, в работах [2, 3, 4] мы исследовали порядки сходимости m -сингулярных интегралов (2) (в периодическом случае аналогичных m -сингулярных интегралов) к функции $f(x)$, в тех точках x , где имеют место равенства

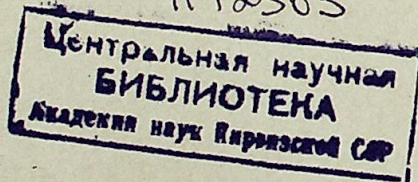
$$\int_0^h \varphi_m(f, x, t) dt = o(h^{\alpha+1})$$

и

$$\int_0^h |\varphi_m(f, x, t)|^p dt = o(h^{\alpha+1}),$$

при $h \rightarrow 0$, где $\alpha \geq 0$ — некоторое неотрицательное число. Там были указаны также теоремы о порядке сходимости m -сингулярных интегралов в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) при условии, что

$$\int_0^h w(t) dt = o(h^{\alpha+1}), \quad (3)$$



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

Чапа имзаланмыш 29/VII 1963-чү ил. Кағыз форматы $70 \times 108^{1/16}$. Кағыз вэреği 4,50. Чап вэреği 12,33. Нес.-нэшријјат вэреği 11,15. ФГ 06601. Сифариш 634. Тиражы 610. Гиймэти 80 гəп.

АзэрбајҶан ССР Елмлэр Академијасы Мəтбəəsi, Бакы, Фəһлэ грəспекти, 96.

где

$$w(t) = \| \varphi_m(f, x, t) \|_{L_p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} | \varphi_m(f, x, t) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В связи с этими результатами возникает вопрос об установлении соответствующих обратных теорем о приближении функций m -сингулярными интегралами (2) в терминах самой функции $f(x)$, т. е. в терминах условий (3).

Пользуясь методом преобразования Фурье, изложенным в работах Бутнера [10—11], мы доказываем здесь некоторые теоремы, в частности из которых следует, что изучение порядка сходимости m -сингулярных интегралов в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) при $\alpha > m+1$ не имеет смысла. Эти теоремы также позволяют сформулировать некоторые теоремы о приближении функций m -сингулярными интегралами в терминах самой функции $f(x)$, являющиеся в некотором смысле обратными к теоремам работы [2].

Теперь перейдем к изложению некоторых фактов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Известно, что преобразование Фурье функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$ определяется следующим образом:

$$F(f) = \hat{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx.$$

Если $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$), то функция

$$F_R(V) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R f(x) e^{-ivx} dx$$

при $R \rightarrow \infty$ сходится в метрике пространства $L_q(-\infty, \infty)$ к некоторой функции $\hat{f}(V)$, называемой преобразованием Фурье функции $f(x)$, где $p+q=pq$. Эта функция $\hat{f}(v)$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{f}(v) |^q dv \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4)$$

(см. [7], стр. 128).

Преобразование Фурье—Стилтьеса функции $f(x)$ с ограниченным изменением на $(-\infty, \infty)$, т. е. функции $f \in Bv(-\infty, \infty)$, обозначим через

$$Fs(f) = \check{f}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} df(x).$$

Лемма 1. Пусть $h(v)$ интегрируема на каждом конечном интервале. Для того, чтобы $h(v)$ могла быть представлена как преобразование Фурье—Стилтьеса некоторой функции $g(x) \in Bv(-\infty, \infty)$

$$h(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivx} dg(x) \quad (5)$$

почти всюду на $(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R} \right) h(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_1} = O(1) \quad (6)$$

при всех $0 < R < \infty$. Если функция $h(v)$ непрерывна, то представление (5) имеет место при всех действительных v .

Лемма 1 принадлежит Крамеру [13] (см. также [12]). Для функций из $L_p(-\infty, \infty)$ ($p > 1$) эта лемма формулируется следующим образом (см. [10]):

Лемма 2. Пусть $h(v)$ интегрируема на каждом конечном интервале. Для того, чтобы $h(v)$ могла быть представлена как преобразование Фурье некоторой функции $g(x) \in L_p(-\infty, \infty)$

$$h(v) = l.i.m_{R \rightarrow \infty}^{(q)} \int_{-R}^R g(x) e^{-ivx} dx$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R} \right) h(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_p} = O(1) \quad (7)$$

при всех $0 < R < \infty$.

Лемма 3. Справедливы равенства

$$S_{2k}(x) = 2^{2k} (-1)^k \sin^{2k} \frac{x}{2} \cos kx \quad (8)$$

$$S_{2k+1}(x) = 2^{2k+1} (-1)^{k+1} \sin^{2k+1} \frac{x}{2} \sin \frac{(2k+1)x}{2}, \quad (9)$$

где

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \cos kx.$$

В самом деле, если в тождестве

$$(1-z)^m = 1 - \binom{m}{1} z + \binom{m}{2} z^2 - \dots + (-1)^m z^m$$

считать, что $z = \cos x + i \sin x$, то имеем

$$S_m(x) + i S_m^*(x) = (1 - \cos x - i \sin x)^m = 2^m (-i)^m \sin^m \frac{x}{2} \left(\cos \frac{mx}{2} + i \sin \frac{mx}{2} \right).$$

Отделяя действительную и мнимую части из последнего равенства, получим (8) и (9).

Теорема 1. Пусть $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p \leq 2$). Если

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{2k}} \| \varphi_{2k}(f, x, t) \|_{L_p} = 0 \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{2k+2}} \| \varphi_{2k+1}(f, x, t) \|_{L_p} = 0, \quad (11)$$

то $f(x) = 0$ почти всюду на $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. 1. Пусть $p=1$. Легко проверить, что

$$F(\varphi_m) = 2(-1)^m S_m(tv) \hat{f}(v). \quad (12)$$

Отсюда, в силу (8) и (9), находим

$$F(\varphi_{2k}) = 2^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \hat{f}(v), \quad (13)$$

$$F(\varphi_{2k+1}) = 2^{2k+2} (-1)^{k+1} \sin^{2k+1} \frac{tv}{2} \sin \frac{(2k+1)tv}{2} \hat{f}(v). \quad (14)$$

Если имеет место (10), то на основании соотношения

$$\left| 2^{2k+1} \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \hat{f}(v) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{2k}(f, x, t)| dx,$$

вытекающего из (13), получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} 2^{2k+1} \cos ktv \hat{f}(v) \frac{\sin^{2k} \frac{tv}{2}}{t^{2k}} = 0$$

или

$$2v^{2k} \hat{f}(v) = 0$$

при всех v . Отсюда, в силу единственности преобразования Фурье следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на $(-\infty, \infty)$.

Если имеет место (11), то доказательство проводится аналогично, с использованием равенства (14).

II. Пусть $1 < p \leq 2$. Сперва предположим, что выполняется условие (10). По теореме Титчмарша [7, стр. 128] из (13) находим

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\varphi_{2k})|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{2k}(f, x, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $pq = p + q$, т. е.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |2^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \hat{f}(v)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{2k}(f, x, t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае соотношение (13) понимается в смысле пространства $L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$), как указано выше.

Теперь, из последнего неравенства, в силу (10), получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{2k}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |2^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \hat{f}(v)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Отсюда, на основании леммы Фату находим, что

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |2(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v)|^q dv \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Следовательно,

$$2(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) = 0$$

почти везде на $(-\infty, \infty)$. Отсюда следует заключение теоремы.

Заметим, что в случае, когда имеет место (11) доказательство проводится аналогично.

Теорема 2. Пусть $f \in L_1(-\infty, \infty)$. Тогда:

1°. Для того, чтобы имело место соотношение

$$\|\varphi_{2k}(f, x, t)\|_{L_1} = O(t^{2k}), \quad (15)$$

необходимо и достаточно, чтобы выражение $(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v)$ было преобразованием Фурье—Стилтьеса некоторой функции

$$g(x) \in Bv(-\infty, \infty), \text{ т. е.}$$

$$(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) = \hat{g}(v). \quad (16)$$

2°. Для того, чтобы имело место соотношение

$$\|\varphi_{2k+1}(f, x, t)\|_{L_1} = O(t^{2k+2}) \quad (17)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(-1)^{k+1} v^{2k+2} \hat{f}(v) = \hat{g}(v), \quad (18)$$

где $g(x) \in Bv(-\infty, \infty)$.

Доказательство. 1°. Необходимость. Рассмотрим частные интегралы

$$S_w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^w \left[2^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \right] \hat{f}(v) e^{ixv} dv, \quad 0 < w < \infty$$

Отсюда, в силу (13), находим

$$\begin{aligned} S_w(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-w}^w e^{ixv} dv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k}(f, u, t) e^{-ivu} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k}(f, u, t) \frac{\sin w(x-u)}{x-u} du. \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь, учитывая, что среднее Фейера от $S_w(x)$ равно

$$\begin{aligned} \sigma_R(x) &= \frac{1}{R} \int_0^R S_w(x) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{|v|}{R} \right) \left[2^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \right] \hat{f}(v) e^{ixv} dv \end{aligned} \quad (20)$$

на основании (19) получаем

$$\sigma_R(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{2k}(f, u, t) \frac{2 \sin^2 \frac{R(x-u)}{2}}{R(x-u)^2} du \quad (21)$$

Кроме того, известно, что

$$\|\sigma_R(x)\|_{L_1} \leq \|\varphi_{2k}(f, u, t)\|_{L_1}. \quad (22)$$

Следовательно, в силу (15), (21) и (22) находим

$$\|\sigma_R(x)\|_{L_1} = O(t^{2k})$$

или, на основании (20),

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) \left[2^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv\right] \hat{f}(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_1} = O(t^{2k}),$$

где O — не зависит от R и t .

Из последнего соотношения в силу леммы Фату и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) [2(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) e^{ivx}] dv \right\|_{L_1} = O(1)$$

Отсюда, на основании леммы 1 следует, что существует $g(x) \in Bv(-\infty, \infty)$, такая, что имеет место (16).

Достаточность. Известно, что преобразование Фурье функции $\tau(u) = \left(\frac{\sin u}{u}\right)^{2k}$ определяется равенством

$$F(|v|) = \begin{cases} (-1)^{k-2k} k\pi \left\{ (k!)^{-2} |v|^{2k-1} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^k \frac{(-1)^n [(2n+|v|)^{2k-1} + (|2n-|v||)^{2k-1}]}{(k+n)!(k-n)!} \right\} & \text{при } |v| \leq 2k \\ 0, & \text{при } |v| \geq 2k \end{cases}$$

(см. [1], стр. 177, 7.66).

Пусть

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x [F(|v|+2k) + F(|v|-2k)] dv.$$

Не трудно проверить, что

$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)^{2k} \cos 2ku = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} d\psi(x),$$

где $\psi(x) \in Bv(-\infty, \infty)$. Поэтому

$$\left(\frac{\sin \frac{tv}{2}}{\frac{tv}{2}}\right)^{2k} \cos ktv \equiv \hat{\psi}\left(\frac{tv}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ivx}{2}} d\psi(x). \quad (23)$$

Из (16) и (23) следует, что

$$\frac{(-1)^{k-2k+1} \sin^{2k} \frac{tv}{2} \cos ktv \cdot \hat{f}(v)}{t^{2k}} = \quad (24)$$

$$= 2 \left(\frac{\sin \frac{tv}{2}}{\frac{tv}{2}} \right)^{2k} \cos ktv \cdot (-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) = 2 \hat{\psi}\left(\frac{tv}{2}\right) \hat{g}(v).$$

Введем функцию

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) d\psi\left(\frac{2u}{t}\right).$$

По теореме о произведении двух преобразований Фурье—Стилтьеса (см. [14], стр. 251—255) имеем

$$\hat{\varphi}_t(v) = \hat{g}(v) \hat{\psi}\left(\frac{tv}{2}\right) \quad (25)$$

и

$$[var \varphi_t(x)]_{-\infty}^{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [var g(x)]_{-\infty}^{\infty} \cdot \left[var \psi\left(\frac{2x}{t}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} \leq M_1 M_2 = M < +\infty,$$

где M — не зависит от t .

Сравнение соотношений (13), (24) и (25) дает, что

$$\frac{2}{t^{2k}} F[\varphi_{2k}(f, x, t)] = FS[\varphi_t(x)].$$

Отсюда, по теореме о единственности преобразования Фурье—Стилтьеса находим

$$\varphi_t(u) = \frac{2}{t^{2k}} \int_{-\infty}^u \varphi_{2k}(f, x, t) dx.$$

Следовательно,

$$[var \varphi_t(u)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{t^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{2k}(f, x, t)| dx \leq M < +\infty,$$

т. е.

$$\|\varphi_{2k}(f, x, t)\|_{L_1} = O(t^{2k}),$$

что и доказывает достаточность.

2° Доказывается аналогично. В процессе доказательства необходимости условия приходится пользоваться соотношением

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\varphi_{2k+1})}{t^{2k+2}} = (2k+1)(-1)^{k+1} v^{2k+2} \hat{f}(v).$$

Пусть

$$\tau_\lambda(v) = \hat{K}_\lambda(v) = F[K_\lambda(t)].$$

Предположим, что существуют неотрицательные монотонно убывающие к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ функции $\gamma(\lambda)$ и $\rho(\lambda)$ такие, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j-1} \binom{2k}{j} \tau_\lambda(jv)}{\gamma(\lambda)} = (-1)^k v^{2k} \quad (26)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{2\pi} \sum_{j=1}^{2k+1} (-1)^{j-1} \binom{2k+1}{j} \tau_j(jv)}{\mu(\lambda)} = (-1)^{k+1} v^{2k+2} \quad (27)$$

и

при всех v .
В силу теоремы 2 заметки [5] и предыдущей теоремы 2 имеем:
Теорема 3. Пусть $f, K_\lambda \in L(-\infty, \infty)$ и удовлетворяются условия (26) и (27). Если

$$\|T_\lambda^{[2k]}(f; x) - f(x)\|_L = O[\gamma(\lambda)] \quad (28)$$

и

$$\|T_\lambda^{[2k+1]}(f; x) - f(x)\|_L = O[\mu(\lambda)] \quad (29)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, то для функции $f(x)$ удовлетворяются условия (15) и (17) соответственно.

Теорема 4. Пусть $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$), тогда

1°. Для того, чтобы имело место соотношение

$$\|\varphi_{2k}(f, x, t)\|_{L_p} = O(t^{2k}) \quad (30)$$

необходимо и достаточно, чтобы выражение $(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v)$ было преобразованием Фурье некоторой функции $g(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, т. е.

$$(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) = \hat{g}(v). \quad (31)$$

2°. Для того, чтобы имело место соотношение

$$\|\varphi_{2k+1}(f, x, t)\|_{L_p} = O(t^{2k+2}) \quad (32)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$(-1)^{k+1} v^{2k+2} \hat{f}(v) = \hat{g}(v), \quad (33)$$

где $g(x) \in L_p(-\infty, \infty)$.

Теорема 4 доказывается аналогично теореме 2. Например, при доказательстве необходимости 1° рассматриваем опять частные интегралы $S_w(x)$ и, продолжая рассуждение соответствующим образом, находим

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|v|}{R}\right) (-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) e^{ivx} dv \right\|_{L_p} = O(1).$$

Отсюда, на основании теоремы 5 заметки [5] и предыдущей теоремы 4 имеем

Теорема 5. Пусть $f \in L_p(-\infty, \infty)$ ($1 < p \leq 2$), $K_\lambda(t) \in L(-\infty, \infty)$ и удовлетворяются условия (26) и (27) при всех вещественных v . Если

$$\|T_\lambda^{[2k]}(f; x) - f(x)\|_{L_p} = O[\gamma(\lambda)] \quad (34)$$

и

$$\|T_\lambda^{[2k+1]}(f; x) - f(x)\|_{L_p} = O[\mu(\lambda)] \quad (35)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, то для функции $f(x)$ удовлетворяются условия (30) и (32) соответственно.

Заметим, что теоремы 3 и 5 в некотором смысле являются обратными к теоремам 7—10 работы [2].

Известно, что если $f, g \in L_p(-\infty, \infty)$ и $(-i)^n v^n \hat{f}(v) = \hat{g}(v)$, то функция $f(x)$ имеет производные $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ и $f^{(k)}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$ ($k=1, 2, \dots, n$) (см. [9] и [7]).

Поэтому, соотношения

$$(-1)^k v^{2k} \hat{f}(v) = (-i)^{2k} v^{2k} \hat{f}(v)$$

дают возможность характеризовать класс функций $f(x)$, для которых имеют место (16), (18), (31) и (33), существованием их производных соответствующего порядка, входящих в определенные классы функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А. и Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., 1961.
2. Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов. "ДАН. Азерб. ССР". 17, 1961, 1127—1131.
3. Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов периодической функции в обобщенных точках Лебега и в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$. "Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук", № 2, 1962, 15—26.
4. Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов периодических функций. "ДАН Азерб. ССР", 18, 1962.
5. Мамедов Р. Г. Прямые и обратные теоремы теории приближения функций, m -сингулярными интегралами. "ДАН СССР", 144, 1962, 272—274.
6. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., 1948.
8. Титчмарш Е. Теория функций. М.—Л., 1951.
9. Bochner S. and Chandrasekharan K. Fourier transforms, Princeton 1949.
10. Butzer P. L. Fourier—transform methods in the theory of approximation, Arch. Rat. Mech. Analysis, 5, 1960, 390—415.
11. Butzer P. L. Representation and approximation of functions by general singular integrals, Koninkl. nederl. acad. Wet., 63, A, 1960, 1—24.
12. Cooper J. L. B. Fourier—Stieltjes integrals, Proc. London Math. Soc., 50, 1950, 265—284.
13. Cramer H. On the representation of a function by certain Fourier integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 46, 1939, 191—201.
14. Widder D. V. The Laplace transform, Princeton, 1941.

Р. Г. Мамедов

Сонсуз $(-\infty, \infty)$ областы үзәриндә тә'јин олунмуш
функцијалар синифләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Фурје чевирмәси методундан истифадә едәрәк $L_p(-\infty, \infty)$ ($1 \leq p \leq 2$) фазасындан олан функцијаларын үмүмиләшмиш Липшис шәртини өдә-јән функцијалар синфинә дахил олмасы һаггында бир нечә теорем исбат олунур. Сонра бу теоремләрин көмәји илә функцијаларын m -сингул-јар интеграллар вәситәси илә јахынлашмасы һаггында тәрс теоремләр алыныр.

Ф. Г. ШАМИЕВ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНОК МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

В работе [2] автором рассмотрена задача проектирования круглых кольцевых слоистых пластинок минимального веса, свободно опертых по внешнему или внутреннему контуру, а также по обоим контурам.

В настоящей работе рассматривается задача проектирования круглых кольцевых слоистых пластинок минимального веса при различных (более общих чем в [2]) граничных условиях. Так же как и в работе [2], материал считается однородным (задача проектирования пластинок минимального веса совпадает с задачей проектирования пластинок минимального (объема), идеально упруго-пластическим, подчиняющимся условию текучести Треска и связанному с ним закону пластического течения. Переменная толщина несущих слоев h удовлетворяет условию $H \gg h$, где H —постоянная толщина заполнителя.

1. Круглая кольцевая пластинка, защемленная по внешнему контуру

Когда пластинка защемлена по внешнему контуру (рис. 1) и нагружена направленным вниз давлением p , то $\kappa \leq 0$, $\lambda \leq 0$. Поэтому напряженное состояние пластинки характеризуется точкой C шестиугольника текучести (рис. 2). Для этой точки условие постоянства диссипации (1. 3) работы [2] дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \alpha, \quad (1.1)$$

где α —положительная постоянная.

Отсюда, используя граничные условия $w(b) = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=b} = 0$, найдем:

$$w = \frac{\alpha}{2} (b-r)^2. \quad (1.2)$$

Для точки C , как видно из шестиугольника Треска, $M_r = -M_\theta$, $M_\varphi = 0$. Тогда из уравнения равновесия (1.1) работы [2] вместе с граничным

Ф. Г. ШАМИЕВ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНОК МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

В работе [2] автором рассмотрена задача проектирования круглых кольцевых слоистых пластинок минимального веса, свободно опертых по внешнему или внутреннему контуру, а также по обоим контурам.

В настоящей работе рассматривается задача проектирования круглых кольцевых слоистых пластинок минимального веса при различных (более общих чем в [2]) граничных условиях. Так же как и в работе [2], материал считается однородным (задача проектирования пластинок минимального веса совпадает с задачей проектирования пластинок минимального (объема), идеально упруго-пластическим, подчиняющимся условию текучести Треска и связанному с ним закону пластического течения. Переменная толщина несущих слоев h удовлетворяет условию $H \gg h$, где H —постоянная толщина заполнителя.

1. Круглая кольцевая пластинка, защемленная по внешнему контуру

Когда пластинка защемлена по внешнему контуру (рис. 1) и нагружена направленным вниз давлением p , то $\kappa \leq 0$, $\lambda \leq 0$. Поэтому напряженное состояние пластинки характеризуется точкой C шестиугольника текучести (рис. 2). Для этой точки условие постоянства диссипации (1.3) работы [2] дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \alpha, \quad (1.1)$$

где α —положительная постоянная.

Отсюда, используя граничные условия $w(b) = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=b} = 0$, найдем:

$$w = \frac{\alpha}{2} (b-r)^2. \quad (1.2)$$

Для точки C , как видно из шестиугольника Треска, $M_r = -M_\theta$, $M_\varphi = 0$. Тогда из уравнения равновесия (1.1) работы [2] вместе с граничным

условием $M_0(a)=0$, а также с условием непрерывности M_0 при $r=c$ получим:

$$M_0 = \sigma_0 h H = \begin{cases} \frac{p}{6} \frac{(r-a)^2(r+2a)}{r} & a \leq r \leq c \\ \frac{p}{6} \frac{2(a^3-c^3)-3(a^2-c^2)r}{r} & c \leq r \leq b \end{cases} \quad (1.3)$$

где p — равномерно распределенная по кольцу $a \leq r \leq c$ поперечная нагрузка.

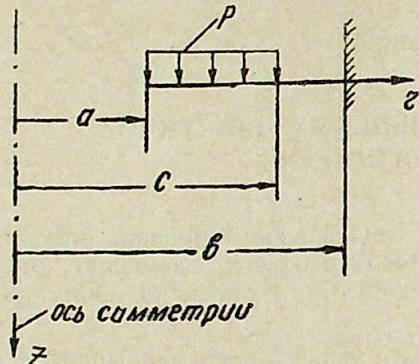


Рис. 1

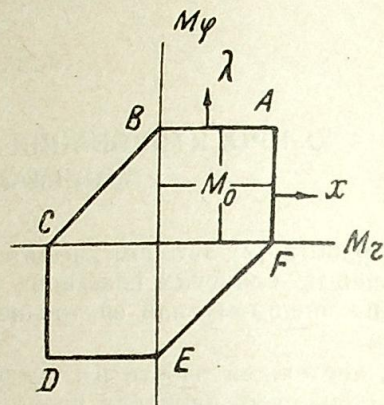


Рис. 2

Сравним вес пластинки переменной толщины с весом равнопрочной ей пластинки постоянной толщины, когда на нее действует равномерно распределенная повсюду поперечная нагрузка.

Пусть $c=b$, тогда для пластинки переменной толщины

$$h = \frac{M_0}{\sigma_0 H} = \frac{p}{\sigma_0 H} \frac{(r-a)^2(r+2a)}{6r} \quad (1.4)$$

Для пластинки постоянной толщины [3]

$$h' = \frac{p}{\sigma_0 H} \frac{(\rho-a)(\rho+2a)}{6} \quad (1.5)$$

где ρ — корень трансцендентного уравнения

$$5\rho^2 + 2\rho^2 \ln \frac{b}{\rho} + 2a\rho \left(1 + \ln \frac{b}{\rho}\right) + 2a^2 \ln \frac{b}{\rho} - 3b^2 - 4a^2 = 0.$$

Для частного случая, когда $b=2a$ объем пластинки постоянной толщины будет:

$$V_h' = 2\pi h' (b^2 - a^2) = 1,434 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (1.6)$$

Объем пластинки переменной толщины выражается:

$$V_h = \frac{\pi p b^4 - 3a^4 - 6a^2 b^2 + 8a^3 b}{\sigma_0 H 6} = 0,833 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (1.7)$$

Введем коэффициент веса $\beta = \frac{V_h}{V_h'}$. Сравнение (1.6) с (1.7) показывает, что коэффициент экономии веса для этого частного случая будет:

$$\beta' = 1 - \beta = 0,32$$

Как видно, вес пластинки переменной толщины на 32% меньше веса равнопрочной ей пластинки постоянной толщины.

2. Круглая кольцевая пластинка, защемленная по внутреннему контуру

Для защемленной по внутреннему контуру пластинки (рис. 3) и указанного вида нагружения $\lambda \leq 0$, $\lambda \leq 0$, и напряженное состояние пластинки характеризуется точкой D шестиугольника текучести. Для этого состояния условие (1.3) работы [2] дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \alpha \quad (2.1)$$

Отсюда, используя граничные условия $w(a) = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=a} = 0$,

получим:

$$w = \frac{\alpha}{4} \left(r^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{r}{a} \right). \quad (2.2)$$

Для состояния D, как видно из шестиугольника Треска, $M_r = M_\varphi = -M_0$. Уравнение равновесия (1.1) работы [2] вместе с граничным условием $M_0(b)=0$, а также с условием непрерывности M_0 при $r=c$, дает:

$$M_0 = \begin{cases} \frac{p}{4} \left[2 \left(c^2 \ln \frac{c}{r} + b^2 \ln \frac{r}{b} \right) + b^2 - c^2 \right] & a \leq r \leq c \\ -\frac{p}{4} \left(r^2 - b^2 - 2b^2 \ln \frac{r}{b} \right) & c \leq r \leq b \end{cases} \quad (2.3)$$

где p — равномерно распределенная по кольцу $c \leq r \leq b$ нагрузка. Когда на пластинку действует равномерно распределенная повсюду нагрузка, $c=a$. Для пластинки переменной толщины

$$h = \frac{p}{\sigma_0 H} \frac{b^2 - r^2 + 2b^2 \ln \frac{r}{b}}{4} \quad (2.4)$$

Для пластинки постоянной толщины [2]

$$h' = \frac{p}{\sigma_0 H} \frac{3b^2 \rho - \rho^3 - 3b^2 a + a^3}{6\rho} \quad (2.5)$$

$$2(\rho^3 + 3b^2 a - a^3) \ln \frac{b}{\rho} - 3\rho(b^2 - \rho^2) = 0$$

Для частного случая, когда $b=2a$ объем пластинки постоянной толщины будет:

$$V_h' = 2\pi h'(b^2 - a^2) = 2,412 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (2.6)$$

Объем пластинки переменной толщины имеет вид:

$$V_h = \frac{\pi p}{\sigma_0 H} \left(\frac{a^4 - b^4}{4} + a^2 b^2 \ln \frac{b}{a} \right) = 0,977 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (2.7)$$

Сравнение (2.6) с (2.7) показывает, что

$$\beta' = 1 - \beta = 0,595.$$

Итак, когда $b=2a$, вес пластинки переменной толщины на 59,5% меньше веса равнопрочной ей пластинки постоянной толщины.

Задача проектирования круглых кольцевых сплошных пластинок минимального веса, защемленных по внешнему или внутреннему контуру и находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, рассматривалась в работе Мруза [3].

3. Круглая кольцевая пластинка, защемленная по обоим контурам

Для защемленной по обоим контурам пластинки (рис. 4) в областях $a \leq r \leq \rho_1$, $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$, $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ и $\rho_3 \leq r \leq b$ должно быть, соответственно, $\kappa \leq 0$, $\lambda \leq 0$; $\kappa \geq 0$, $\lambda \leq 0$; $\kappa \geq 0$, $\lambda \geq 0$ и $\kappa \geq 0$, $\lambda \geq 0$.

Поэтому в этих областях напряженное состояние характеризуется соответственно точками D, F, A и C шестиугольника текучести. Условие постоянства диссипации (1.3) работы [2] дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \alpha \quad a \leq r \leq \rho_1,$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\alpha \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2,$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\alpha \quad \rho_2 \leq r \leq \rho_3,$$

Рис. 4

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \alpha \quad \rho_3 \leq r \leq b.$$

Отсюда, используя граничные условия

$$w(a) = w(b) = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{dw}{dr} \Big|_{r=b} = 0,$$

условия непрерывности w и $\frac{dw}{dr}$ при $r=\rho_1$, $r=\rho_2$ и $r=\rho_3$ получим:

$$w = \begin{cases} \frac{\alpha}{4} \left((r^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{r}{a}) \right) & a \leq r \leq \rho_1 \\ -\frac{\alpha}{4} \left\{ 2 \left[r^2 - (3\rho_1^2 - a^2) \frac{r}{\rho_1} \right] + 3\rho_1^2 - a^2 (1 - 2 \ln \frac{\rho_1}{a}) \right\} & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ -\frac{\alpha}{4} \left[r^2 - 3\rho_3^2 - b^2 + 4b\rho_3 - 2\rho_3(3\rho_3 - 2b) \ln \frac{r}{\rho_3} \right] & \rho_2 \leq r \leq \rho_3 \\ \frac{\alpha}{2} (b-r)^2 & \rho_3 \leq r \leq b \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнения, определяющие радиусы ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , имеют вид:

$$2\rho_1\rho_2 - 3\rho_1^2 + a^2 = 0$$

$$3\rho_3^2 + \rho_2^2 - 2b\rho_3 = 0$$

$$3\rho_3^2 + \rho_2^2 + 3\rho_1^2 - a^2 \left(1 - 2 \ln \frac{\rho_1}{a} \right) - 2(3\rho_1^2 - a^2) \frac{\rho_2}{\rho_1} + 2b_2 - 4b\rho_3(3\rho_3 - 2b) \ln \frac{\rho_2}{\rho_3} = 0$$

Уравнение равновесия

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = \frac{Qa}{r} - \frac{1}{r} \int_a^r p r dr \quad (3.2)$$

для точек D ($M_r = M_\varphi = -M_0$), F ($M_r = M_0$, $M_\varphi = 0$),

A ($M_r = M_\varphi = M_0$) и C ($M_r = -M_0$, $M_\varphi = 0$)

соответственно будет иметь вид:

$$\frac{dM_0}{dr} = -\frac{Qa}{r} + \frac{1}{r} \int_a^r p r dr \quad a \leq r \leq \rho_1$$

$$\frac{dM_0}{dr} + \frac{M_0}{r} = \frac{Qa}{r} - \frac{1}{r} \int_{\rho_1}^r p r dr \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2$$

$$\frac{dM_0}{dr} = -\frac{1}{r} \int_{\rho_2}^r p r dr \quad \rho_2 \leq r \leq \rho_3$$

$$\frac{dM_0}{dr} + \frac{M_0}{r} = \frac{1}{r} \int_{\rho_3}^r p r dr \quad \rho_3 \leq r \leq b$$

Отсюда, используя условия непрерывности M_0 при $r=\rho_1$, $r=\rho_2$ и $r=\rho_3$, находим:

$$M_0 = \begin{cases} \frac{p}{4} (r^2 - \rho_1^2) - \left(Qa + \frac{p}{2} a^2 \right) \ln \frac{r}{\rho_1} & a \leq r \leq \rho_1 \\ -\frac{p}{6} (r^2 - \rho_1^2) - \frac{3Qa + p\rho_1^2}{3} \frac{\rho_1}{r} + Qa & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ -\frac{p}{4} \left(r^2 - \rho_3^2 - 2\rho_2^2 \ln \frac{r}{\rho_3} \right) & \rho_2 \leq r \leq \rho_3 \\ \frac{p}{6} \frac{r^3 + 2\rho_3^3 - 3\rho_3^2 r}{r} & \rho_3 \leq r \leq b \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{где } Q = \frac{p}{12} \frac{\rho_2 \left[3(\rho_3^2 + 2\rho_2^2 \ln \frac{\rho_2}{\rho_3} - 2\rho_1^2) - \rho_2^2 \right] + 4\rho_1^3}{a(\rho_2 - \rho_1)}$$

Нетрудно видеть, что решение третьей задачи работы [2] для полного пластического изгибающего момента M_0 будет справедливо в области $\rho_1 \leq r \leq \rho_3$. Чтобы найти постоянные интегрирования, надо заменить в формуле (3.7) работы [2] a , ρ и b , соответственно, на ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 .

4. Круглая кольцевая пластинка, свободно опертая по внутреннему и защемленная по внешнему контурам

В этом случае (рис. 5) пластинку можно разбить на кольцевые зоны $a \leq r \leq \rho_1$, $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$, и $\rho_2 \leq r \leq b$, напряженное состояние которых характеризуется соответственно точками F , A и C (рис. 2). Тогда

$$w = \begin{cases} \frac{a}{2} (r-a) (2\rho_1 - a - r) & a \leq r \leq \rho_1 \\ \frac{a}{4} \left[3\rho_2^2 - r^2 + 2b^2 - 4b\rho_2 + 2\rho_2(3\rho_2 - 2b) \ln \frac{r}{\rho_2} \right] & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ \frac{a}{2} (b-r)^2 & \rho_2 \leq r \leq b \end{cases} \quad (4.1)$$

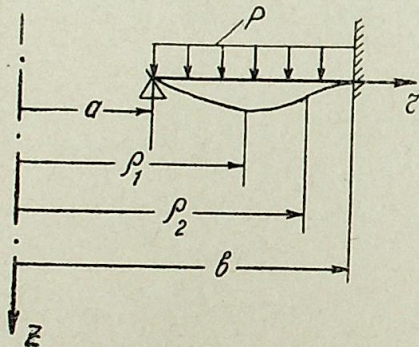


Рис. 5

где ρ_1 и ρ_2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho_1^2 - \rho_2(3\rho_2 - 2b) &= 0 \\ 3(\rho_2^2 - \rho_1^2) - 4(b\rho_2 - a\rho_1) + \\ + 2(b^2 - a^2) + 2\rho_2(3\rho_2 - 2b) \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы получить выражение для M_0 , надо заменить в формуле (3.3) ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 соответственно на a , ρ_1 и ρ_2 . В результате получим:

$$M_0 = \begin{cases} -\frac{p}{6} (r^2 - 3a^2) - \frac{3Qa + pa^2}{3} \frac{a}{r} + Qa & a \leq r \leq \rho_1 \\ -\frac{p}{r} \left(r^2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2 \ln \frac{r}{\rho_2} \right) & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ \frac{p}{6} \frac{r^3 - 2\rho_2^3 - 3\rho_2^2 r}{r} & \rho_2 \leq r \leq \rho_3 \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$Q = \frac{p}{12} \frac{\rho_1 \left[3 \left(\rho_2^2 + \rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} - 2a^2 \right) - \rho_1^2 \right] + 4a^3}{a(\rho_1 - a)}$$

Отсюда находим объем пластинки

$$V_h = \frac{4\pi}{\sigma_0 H} \left\{ \frac{p}{48} \left[5\rho_1^4 - 3\rho_2^4 + 6a^4 + 2b^4 + 12(a^2\rho_1^2 - \rho_1^2\rho_2^2 - \rho_2^2b^2 - \rho_1^4 \ln \frac{\rho_1}{\rho_2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + 16(\rho_2^3b - a^3\rho_1) \right] - \frac{Qa}{6} (6a\rho_1 - 5a^2 - \rho_1^2) \right\} \quad (4.4)$$

В частном случае, если $b=2a$, то $\rho_1=1,41a$, $\rho_2=1,72a$, и $Q=0,387pa$. Тогда для пластинки переменной толщины получим:

$$V_h = 0,920 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (4.5)$$

Объем пластинки постоянной толщины будет [1]:

$$V_h = 1,461 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (4.6)$$

Сравнение (4.5) с (4.6) показывает, что вес пластинки переменной толщины приблизительно на 37% меньше веса равнопрочной ей пластинки постоянной толщины.

5. Круглая кольцевая пластинка, защемленная по внутреннему и свободно опертая по внешнему контурам

Как видно из рис. 6, напряженное состояние пластинки в областях $a \leq r \leq \rho_1$, $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$ и $\rho_2 \leq r \leq b$ характеризуется соответственно точками D , F и A . Тогда для w получим:

$$w = \begin{cases} \frac{a}{4} \left(r^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{r}{a} \right) & a \leq r \leq \rho_1 \\ -\frac{a}{4} \left\{ 2 \left[r^2 - (3\rho_1^2 - a^2) \frac{r}{\rho_1} \right] + 3\rho_1^2 - a^2 \left(1 - 2 \ln \frac{\rho_1}{a} \right) \right\} & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ \frac{a}{4} \left(b^2 - r^2 + 2\rho_1^2 \ln \frac{r}{b} \right) & \rho_2 \leq r \leq b \end{cases} \quad (5.1)$$

Уравнения, определяющие ρ_1 и ρ_2 имеют вид:

$$3\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 - a^2 = 0$$

$$3\rho_1^2 + b^2 - 2(3\rho_1^2 - a^2) \frac{\rho_2}{\rho_1} + \rho_2^2 \left(1 - 2 \ln \frac{\rho_2}{b} \right) - a^2 \left(1 - 2 \ln \frac{\rho_1}{a} \right) = 0$$

Если в формуле (3.3) заменить ρ_3 на b , то найдем:

$$M_0 = \begin{cases} \frac{p}{4} (r^2 - \rho_1^2) - \left(Qa + \frac{p}{2} a^2 \right) \ln \frac{r}{\rho_1} & a \leq r \leq \rho_1 \\ -\frac{p}{6} (r^2 - 3\rho_1^2) - \frac{3Qa + p\rho_1^2}{3} \frac{\rho_1}{r} + Qa & \rho_1 \leq r \leq \rho_2 \\ -\frac{p}{4} (r^2 - b^2 - 2\rho_2^2 \ln \frac{r}{b}) & \rho_2 \leq r \leq b \end{cases} \quad (5.2)$$

где

$$Q = \frac{p}{12} \frac{\rho_2 \left[3(b^2 + 2\rho_2^2 \ln \frac{\rho_2}{b} - 2\rho_1^2) - \rho_2^2 \right] + 4\rho_1^2}{a(\rho_2 - \rho_1)}$$

Отсюда

$$V_h = \frac{4\pi}{\sigma_0 H} \left\{ \frac{p}{48} \left[3\rho_1^4 + 7\rho_2^4 - 9a^4 + 3b^4 + 12(a^2\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2^2 - b^2\rho_2^2 - \rho_2^2 \ln \frac{\rho_2}{b} - 16\rho_1^3\rho_2) \right] + \left(Qa + \frac{p}{2} a^2 \right) \frac{a^2}{2} \ln \frac{a}{\rho_1} + \right. \\ \left. + \frac{Qa}{4} (3\rho_1^2 - a^2 - 4\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2) \right\} \quad (5.3)$$

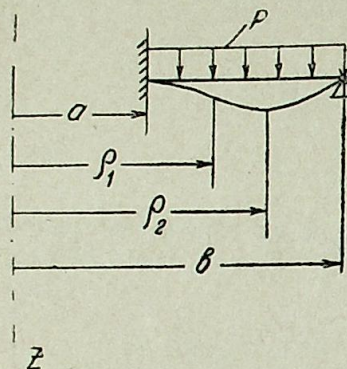


Рис. 6

Сравнение (5.4) с (5.5) показывает, что вес пластинки переменной толщины приблизительно на 60% меньше веса равнопрочной ей пластинки постоянной толщины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мруз З., Савчук А. Несущая способность кольцевых пластин, закрепленных по обоим краям. „Изв. АН СССР, ОТН“, № 3, 1960.
2. Шамиев Ф. Г. О проектировании пластинок минимального веса. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук“, № 6, 1962.
3. Mroz, Z. Nośność graniczna i kształtowanie wytrzymałościowe płyt pierścieniowych. Rozprawy inżynierskie, t. VI. № 4, 1958.

Ф. Н. Шамиев

Минимум чэкили һалгашэкилли лөвһәләр ләјһә етмәк һаггында

ХҮЛАСӘ

Ишдә минимум чэкили һалгашэкилли лөвһәләр ләјһә етмәк мәсәләсинә бахылыр. Мүәллифин әввәлки ишиндән фәргли олараг, бурада даһа мүрәккәб вә үмуми сәрһәд шәртләри арашдырылыр. Әввәлки ишдә олдуғу кими, бурада да материалын бирчинс (минимум чэкили лөвһә ләјһә етмәк мәсәләси илә минимум һәчмли лөвһә ләјһә етмәк мәсәләси үст-үстә дүшүр), идеал еластикпластик, Тресканын ахма шәртинә вә онунла әлагәдар олан пластик ахма ганунуна табе олдуғу гәбул едилір. Хүсуси һалда лөвһәнин харичи радиусу дахили радиусундан 2 дэфә бөјүк олдуғда ($v=2a$) дәјишән галынлыгы лөвһәнин чәкиси онунла ејни давамлыгы олан сабит галынлыгы лөвһәнин чәкиси илә мүгајисә олунар вә нә гәдәр гәнаәт алындығы көстәрилір.

Т. М. КЛИМАНОВА

УНИТАРНЫЕ ПОЛУЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Определение унитарных полуэллиптических пространств

Настоящая работа посвящена изучению пространств, аналогичных полуэллиптическим пространствам $S_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}$ (см., например, [1, 5]), но построенных не над полем действительных чисел, а над полем комплексных чисел и телом кватернионов; эти пространства, относящиеся к пространствам $S_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}$ так же, как комплексное и кватернионное унитарные эллиптические пространства $\bar{S}_n(i)$ и $\bar{S}_n(i, j)$ к действительному эллиптическому пространству S_n ([3], стр. 151 и 622), будем называть *унитарными полуэллиптическими пространствами*.

Определим унитарные полуэллиптические пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i)$ и $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ как, соответственно, комплексное проективное пространство $P_n(i)$ и кватернионное проективное пространство $P_n(i, j)$ ([3], стр. 275 и 578), в которых определен мнимый эрмитов гиперконус Q_0 второго порядка с плоской $(n-m_0-1)$ -мерной вершиной или дважды взятая гиперплоскость. В этой плоскости определен мнимый эрмитов конус Q_1 второго порядка с плоской $(n-m_1-1)$ -мерной вершиной или дважды взятая плоскость, в которой в свою очередь, определен еще один мнимый эрмитов конус Q_2 второго порядка с плоской $(n-m_2-1)$ -мерной вершиной или дважды взятая плоскость и т. д. до тех пор, пока в плоской вершине последнего эрмитова конуса Q_{r-1} или последней дважды взятой плоскости не будет определена невырожденная мнимая эрмитова квадрака Q_r ; в случае, когда вершина эрмитова конуса Q_{r-1} является точкой, невырожденная квадрака Q_r является дважды взятой точкой. Совокупность определенных таким образом мнимых эрмитовых конусов второго порядка или дважды взятых плоскостей и невырожденной квадраки называется *абсолютно унитарного полуэллиптического пространства*.

Размерности абсолютных плоскостей пространств $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i)$ и $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ равны $n-m_0-1$, $n-m_1-1$, ..., $n-m_{r-1}-1$ ($0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_{r-1} < m_r = n$).

В унитарных полуэллиптических пространствах можно ввести такую систему координат, в которой уравнение a -го абсолютного конуса Q_a имеет вид:

$$\sum_{i_a} \bar{x}^{i_a} x^{i_a} = 0 \quad (1)$$

($i_0=0,1,\dots,m_0$ при $a>0$ $i_a=m_{a-1}+1, m_{a-1}+2,\dots,m_a$, $a=0,1,\dots,r$).

При $a=r$ уравнение (1) является уравнением квадрики Q_r абсолютной. Эрмитову форму в левой части (1) будем обозначать $(x,x)_a$, а соответствующую ей билинейную форму $(xy)_a$. Уравнения a -й абсолютной плоскости A_a имеют вид $x^{i_a}=0$.

В случае, когда точки x и y пространств $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}$ и $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}(i,j)$ не лежат в абсолютной плоскости A_a , но, при $a>0$, лежат в плоскости A_{a-1} , проективные координаты этих точек можно нормировать условием:

$$(x,x)_a = \sum_{i_a} \bar{x}^{i_a} x^{i_a} = 1 \quad (2)$$

Поэтому точки x и y , лежащие в абсолютной плоскости A_{a-1} на прямой, не пересекающейся с плоскостью A_a , обладают эллиптическим расстоянием δ_a , определяемым соотношением

$$\text{Cos}^2 \delta_a = (xy)_a^2 = \sum_{i_a} \bar{x}^{i_a} y^{i_a} \sum_{j_a} \bar{y}^{j_a} x^{j_a} \quad (3)$$

Если же точки x и y лежат в абсолютной плоскости A_{a-1} на прямой пересекающейся с плоскостью A_a , то $\delta_a=0$ (так как в этом случае $\text{Cos} \delta_a=1$); тогда эти точки обладают евклидовым расстоянием d_a , определяемым соотношением

$$d_a^2 = (y-x, y-x)_{a+1} \quad (4)$$

или, если $d_a=0$, евклидовым расстоянием $d_a^{(k)}$, определяемым соотношением, получаемым из (5) заменой правой части на выражение $(y-x, y-x)_{a+k+1}$, где $a+k+1$ — наименьшее число, при котором это выражение отлично от нуля.

Будем называть прямые, пересекающиеся с одной из абсолютных плоскостей, *евклидовыми прямыми*, а прямые, не пересекающиеся ни с одной из этих плоскостей, или целиком лежащие в одной или нескольких из них — *эллиптическими прямыми*. Расстояния δ_a измеряются по эллиптическим прямым, а d_a и $d_a^{(k)}$ — по евклидовым прямым.

Движения пространств $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}(i)$ и $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}(i,j)$, т. е. преобразования этих пространств, сохраняющие расстояния δ_a и d_a в нашей системе координат, можно записать в виде:

$$\begin{cases} x^{i_0} = \sum_{j_0} U_{j_0}^{i_0} x^{j_0} \\ x^{i_1} = \sum_{j_0} T_{j_0}^{i_1} x^{j_0} + \sum_{j_1} U_{j_1}^{i_1} x^{j_1} \\ x^{i_r} = \sum_{j_0} T_{j_0}^{i_r} x^{j_0} + \sum_{j_1} T_{j_1}^{i_r} x^{j_1} + \dots + \sum_{j_{r-1}} T_{j_{r-1}}^{i_r} x^{j_{r-1}} + \sum_{j_r} U_{j_r}^{i_r} x^{j_r}, \end{cases} \quad (5)$$

где $U_{j_a}^{i_a}$ — унитарная матрица $(m_a - m_{a-1})$ -го порядка, т. е. матрица, удовлетворяющая условию унитарности

$$\sum_{i_a} \bar{U}_{j_a}^{i_a} U_{k_a}^{i_a} = \delta_{j_a k_a}, \quad (6)$$

а $T_{j_a}^{i_a}$ — прямоугольная матрица с $m_a - m_{a-1}$ строками и $m_b - m_{b-1}$ столбцами с произвольными элементами.

Частный случай пространства $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}(i)$ (квазиэллиптическое пространство $\bar{S}_n^{m_0}$) рассматривался Т. Г. Чахленковой [4].

2. Паратактичные прямые

Прямые проективных пространств P_n , $P_n(i)$ и $P_n(i,j)$, проходящие через x и y с проективными координатами x^i и y^i , задаются проективными матричными координатами [3], являющимися прямоугольными матрицами

$$X = \begin{pmatrix} x^0 & y^0 \\ x^1 & y^1 \\ \vdots & \vdots \\ x^n & y^n \end{pmatrix} \quad (7)$$

При переходе от точек $x(x^i)$ и $y(y^i)$ к точкам $z(z^i)$ и $w(w^i)$ той же прямой, для которых

$$z^i = dx^i + \beta y^i, \quad w^i = \gamma x^i + \delta y^i, \quad (8)$$

матричная координата заменяется на координату

$${}'X = X \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В том случае, когда точки x и y пространства $\bar{S}_n^{m_0,m_1,\dots,m_{r-1}}$ лежат в плоскости A_{a-1} и полярно сопряжены относительно абсолютного конуса Q_a , т. е.

$$\sum_{i_a} x^{i_a} y^{i_a} = 0, \quad (10)$$

и координаты этих точек нормированы условием

$$\sum_{i_a} (x_{i_a})^2 = 1, \quad (11)$$

матрица (7) нормирована условием

$$X_a^T E_a X_a = I, \quad (12)$$

где X_a — матрица, состоящая из строк матрицы (7) с номерами $i > m_{a-1}$, X_a^T — матрица, полученная из матрицы X_a транспонированием, а E_a — диагональная матрица с номерами строк и столбцов $i > m_{a-1}$ и с диагональными элементами $l_i i=1$ при $i < m_0$, $l_i i=0$ при $i > m_0$. Оба расстояния δ_0 и δ_1 положительны только в том случае, когда 3-мерная плоскость, порождаемая данными прямыми, является эллиптическим пространством S_3 . Здесь возможен случай равенства расстояний δ_0 и δ_1 . В этом случае данные прямые называются *паратактичными*. В общем случае 3-мерная плоскость, порождаемая данными прямыми, является полуэллиптическим пространством $S_3^{m_0}$, $S_3^{m_0,m_1}$ или $S_3^{0,1,2}$. В этих случаях одно или оба эллиптические экстремальные расстояния δ_0 и δ_1 равны нулю, и прямые обладают одним или двумя евклидовыми экстремальными расстояниями d_0 и d_1 . Расстояния d_0 и d_1 могут быть равны только в том случае, когда 3-мерная плоскость, порождаемая

данными прямыми, является квазиэллиптическим пространством S_3^1 . В этом случае данные прямые также называются *паратактичными*.

Как показала Е. У. Ясинская [5], квадраты косинусов экстремальных расстояний δ_0 и δ_1 двух прямых пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}$, лежащих в плоскости A_{a-1} и порождающих 3-мерную плоскость, являющуюся пространством S_3 , являются собственными числами матрицы

$$W = (Y_a^T E_a X_a)(X_a^T E_a Y_a) \quad (13)$$

а квадраты расстояний d_0 и d_1 двух прямых того же пространства, лежащих в той же плоскости и порождающих 3-мерную плоскость, являющуюся пространством S_3^1 , являются собственными числами матрицы

$$M_i = (Y_a^T - X_a^T) E_{a+1} (Y_a - X_a) \quad (14)$$

или, если матрица M является нулевой, — собственными числами матрицы, получаемой из матрицы M заменой матрицы E_{a+1} на матрицу E_{a+k+1} , где $a+k+1$ — наименьшее число, при котором эта матрица отлична от нулевой.

В том случае, когда точки x и y пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ лежат в плоскости A_{a-1} и полярно сопряжены относительно абсолютного конуса Q_a , т. е.

$$\sum_{i_a} \bar{x}^{i_a} y^{i_a} = 0, \quad (15)$$

и координаты этих точек нормированы условиями

$$\sum_{i_a} \bar{x}^{i_a} x^{i_a} = 1, \quad \sum_{i_a} \bar{y}^{i_a} y^{i_a} = 1, \quad (16)$$

матрица (7) нормирована условием:

$$\bar{X}_a^T E_a X_a = 1, \quad (17)$$

где $\bar{X}_a$ — матрица, полученная из матрицы X_a переходом к комплексно сопряженным элементам, а все остальные обозначения — те же что и раньше. Оба расстояния δ_1 и δ_2 положительны только в том случае, когда 3-мерная плоскость, порождаемая данными прямыми, является эллиптическим пространством $S_3(i)$. Здесь также возможен случай равенства расстояний δ_0 и δ_1 . В этом случае данные прямые называются *паратактичными*.

В общем случае 3-мерная плоскость, порождаемая данными прямыми, является полуэллиптическим пространством $S_3^{012}(i)$, $S_3^{m_0 m_1}(i)$ или $S_3^{012}(i)$. В этих случаях одно или оба эллиптические экстремальные расстояния δ_0 и δ_1 равны нулю, и прямые обладают одним или двумя евклидовыми экстремальными расстояниями d_0 и d_1 . Расстояния d_0 и d_1 равны только в том случае, когда 3-мерная плоскость, порождаемая данными прямыми, является квазиэллиптическим пространством $S_3^1(i)$. В этом случае данные прямые также называются *паратактичными*.

Аналогично доказательству Е. У. Ясинской, для случая пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}$, показывается, что квадраты косинусов экстремальных расстояний δ_0 и δ_1 двух прямых пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$, лежащих в плоскости A_{a-1} и порождающих 3-мерное эллиптическое простран-

ство $S_3(i)$, являются собственными числами матрицы

$$W = (\bar{Y}_a^T E_a X_a)(\bar{X}_a^T E_a Y_a), \quad (18)$$

а квадраты расстояний d_0 и d_1 двух прямых того же пространства, лежащих в той же плоскости A_{a-1} и порождающих 3-мерную плоскость, являющуюся пространством $S_3^1(i)$, будут собственными числами матрицы

$$M = (\bar{Y}_a^T - \bar{X}_a^T) E_{a+1} (Y_a - X_a), \quad (19)$$

или, если матрица M является нулевой, — собственными числами матрицы, получаемой из матрицы M заменой матрицы E_{a+1} на матрицу E_{a+k+1} , где $a+k+1$ — наименьшее число, при котором эта матрица отлична от нулевой.

3. Интерпретация пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ в пространстве $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$

Так как точка пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ с координатами $x^i = X^{2i} + iX^{2i+1}$ определяется и координатами $x^i k$, где $k = K + iL$, то этой точке пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ можно поставить в соответствие все точки пространства $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ удовлетворяющие условию

$$(X^{2i} + iX^{2i+1})(K + iL) = (KX^{2i} - LX^{2i+1}) + i(KX^{2i+1} + LX^{2i}). \quad (20)$$

Поэтому точке пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ с координатами x^i соответствует прямая пространства $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$, точки которой имеют координаты

$$'X^{2i} = KX^{2i} - LX^{2i+1}, \quad 'X^{2i+1} = KX^{2i+1} + LX^{2i} \quad (21)$$

т. е. прямая, соединяющая точку x с координатами X^i с точкой $\tilde{x}$ с координатами

$$\tilde{X}^{2i} = -X^{2i+1}, \quad \tilde{X}^{2i+1} = X^{2i}. \quad (22)$$

Переход от точки x к точке $\tilde{x}$ является *инволюционной коллинеацией*.

Если коллинеация (22) переводит точку x пространства $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ в точку $\tilde{x}$, то точка y прямой $X = x\tilde{x}$ переходит в некоторую точку $\tilde{y}$ той же прямой, так как, если точки $\tilde{x}, x, y$ лежат на одной прямой и переходят соответственно в точки $\tilde{x}, x, y$, также лежащие на одной прямой, то эта прямая совпадает с прямой X . Следовательно, точки пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ изображаются прямыми *конгруэнции прямых* пространства $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$.

Покажем, что прямые этой конгруэнции *паратактичны*. Пусть точки $x(x^i)$ и $y(y^i)$ пространства $S_n^{m_0, \dots, m_{r-1}}(i)$ лежат на эллиптической прямой. Тогда соответствующие им прямые X и Y в пространстве $S_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ порождают пространство S_3 и обладают эллиптическими расстояниями.

Поставим прямым X и Y в соответствие матричные координаты

$$X = \begin{pmatrix} X^0 & \tilde{X}^0 \\ X^1 & \tilde{X}^1 \\ \vdots & \vdots \\ X^{2n+1} & \tilde{X}^{2n+1} \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} Y^0 & \tilde{Y}^0 \\ Y^1 & \tilde{Y}^1 \\ \vdots & \vdots \\ Y^{2n+1} & \tilde{Y}^{2n+1} \end{pmatrix} \quad (23)$$

состоящие из координат точек, лежащих на этих прямых. В силу условия (22) эти матрицы можно переписать в виде:

$$X = \begin{pmatrix} X^0 & -X^1 \\ X^1 & X^0 \\ \vdots & \vdots \\ X^{2n} & -X^{2n+1} \\ X^{2n+1} & X^{2n} \end{pmatrix} \text{ и } Y = \begin{pmatrix} Y^0 & -Y^1 \\ Y^1 & Y^0 \\ \vdots & \vdots \\ Y^{2n} & -Y^{2n+1} \\ Y^{2n+1} & Y^{2n} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Матрица (13) в нашем случае имеет вид

$$W = (X_a^T E_a Y_a)(Y_a^T E_a X_a) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} - \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a+1} \\ - \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a} \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} - \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a} \\ - \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a+1} \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \delta_a & 0 \\ 0 & \cos^2 \delta_a \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\cos^2 \delta_a = \left(\sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} \right)^2 +$$

$$+ \left(\sum_{i_a} X^{2i_a} Y^{2i_a+1} - \sum_{i_a} X^{2i_a+1} Y^{2i_a} \right)^2$$

Так как собственные числа матрицы (25), равные квадратам косинусов экстремальных расстояний δ_a прямых X и Y равны, эти прямые *паратактичны*.

Рассмотрим теперь точки $x(x^j)$ и $y(y^i)$ пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i)$, лежащие в плоскости A_{a-1} на евклидовой прямой, пересекающейся с плоскостью A_a . Тогда соответствующие им прямые X и Y в пространстве $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$ порождают пространство S_3^1 и обладают евклидовыми экстремальными расстояниями.

Прямым X и Y поставим в соответствие матричные координаты (24) и вычислим матрицу (14), которая в нашем случае имеет вид

$$M = (Y_a^T - X_a^T) E_{a+1} (Y_a - X_a) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1})^2 + \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}})^2 & 0 \\ 0 & \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1})^2 + \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}})^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} d_a^2 & 0 \\ 0 & d_a^2 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где

$$d_a^2 = \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1})^2 + \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}})^2,$$

Так как собственные числа матрицы (28) равны квадратам экстремальных расстояний d_a прямых X и Y , эти прямые *паратактичны*. Поэтому точки пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i)$ изображаются прямыми паратактической конгруэнции, пространства $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}$. Эта теорема является аналогом известной теоремы от интерпретации пространства $\bar{S}_n(i)$ в пространстве S_{2n+1} ([3], стр. 641—645). Частный случай этой теоремы для квазиэллиптического пространства $\bar{S}_n^m(i)$ был доказан Т. Г. Чахленковой [4].

4. Интерпретация пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ в пространстве $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$

Так как точка пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ с координатами x^i , представляемыми комплексными матрицами второго порядка $\begin{pmatrix} X^{2i} - \bar{X}^{2i+1} \\ X^{2i+1} \bar{X}^{2i} \end{pmatrix}$,

определяются также и координатами x^l , где l —кватернион единичного модуля, представляемый комплексной матрицей $\begin{pmatrix} \alpha - \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, то точке

пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ соответствуют точки пространства $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} X^{2i} - \bar{X}^{2i+1} \\ X^{2i+1} \bar{X}^{2i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha - \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{2i} \alpha - \bar{X}^{2i+1} \beta & -X^{2i} \bar{\beta} - \bar{X}^{2i+1} \bar{\alpha} \\ X^{2i+1} \alpha + \bar{X}^{2i} \beta & -X^{2i+1} \bar{\beta} + \bar{X}^{2i} \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Поэтому точке пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ с координатами x^i соответствует прямая пространства $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$ точки которой имеют координаты:

$$'X^{2i} = \alpha X^{2i} - \beta \bar{X}^{2i+1}, \quad 'X^{2i+1} = \alpha X^{2i+1} + \beta \bar{X}^{2i}, \quad \bar{\alpha} \alpha + \bar{\beta} \beta = 1, \quad (28)$$

т. е. прямая, соединяющая точку x с координатами X^1 с точкой $\tilde{x}$ с координатами

$$\tilde{X}^{2i} = -\bar{X}^{2i+1}, \quad \tilde{X}^{2i+1} = \bar{X}^{2i}. \quad (29)$$

Так же как в случае пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i)$ показывается, что точки пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ изображаются прямыми конгруэнции прямых пространства $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$.

Покажем, что эти прямые *паратактичны*.

Пусть точки $x(x^i)$ и $y(y^i)$ пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$ лежат на эллиптической прямой. Тогда соответствующие им прямые X и Y в пространстве $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$ порождают пространство $\bar{S}_3(i)$ и обладают эллиптическими расстояниями.

Поставим прямым X и Y в соответствие матрицы (23), которые в силу условия (29) можно переписать в виде:

$$X = \begin{pmatrix} X^0 & -\bar{X}^1 \\ X^1 & \bar{X}^0 \\ \vdots & \vdots \\ X^{2n} & -\bar{X}^{2n+1} \\ X^{2n+1} & \bar{X}^{2n} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y^0 & -\bar{Y}^1 \\ Y^1 & \bar{Y}^0 \\ \vdots & \vdots \\ Y^{2n} & -\bar{Y}^{2n+1} \\ Y^{2n+1} & \bar{Y}^{2n} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\text{Тогда } W = (\bar{Y}_a^T E_a X_a)(\bar{X}_a^T E_a Y_a) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i_a} \bar{Y}^{2i_a} X^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} \bar{Y}^{2i_a+1} - \sum_{i_a} \bar{Y}^{2i_a} X^{2i_a+1} + \sum_{i_a} Y^{2i_a+1} \bar{X}^{2i_a} \\ \sum_{i_a} \bar{Y}^{2i_a} X^{2i_a+1} - \sum_{i_a} X^{2i_a} \bar{Y}^{2i_a+1} \quad \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} Y^{2i_a} \bar{X}^{2i_a} \\ \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a} Y^{2i_a} + \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a+1} Y^{2i_a+1} - \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a+1} Y^{2i_a} \\ - \sum_{i_a} Y^{2i_a} \bar{X}^{2i_a+1} + \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a} Y^{2i_a+1} \quad \sum_{i_a} X^{2i_a+1} \bar{Y}^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a} \bar{Y}^{2i_a} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Cos}^2 \delta_a & 0 \\ 0 & \text{Cos}^2 \delta_a \end{pmatrix},$$

где

$$\text{Cos}^2 \delta_a = \left(\sum_{i_a} \bar{Y}^{2i_a} X^{2i_a} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} \bar{Y}^{2i_a+1} \right) \left(\sum_{i_a} Y^{2i_a} \bar{X}^{2i_a} + \sum_{i_a} Y^{2i_a+1} \bar{X}^{2i_a+1} \right) +$$

$$+ \left(- \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a} Y^{2i_a+1} + \sum_{i_a} \bar{X}^{2i_a+1} Y^{2i_a} \right) \left(- \sum_{i_a} X^{2i_a} \bar{Y}^{2i_a+1} + \sum_{i_a} X^{2i_a+1} \bar{Y}^{2i_a} \right)$$

Так как собственные числа матрицы (33), равные квадратам косинусов экстремальных расстояний δ_a прямых X и Y , равны, эти прямые *паратактичны*.

Рассмотрим теперь точки $x(x^i)$ и $y(y^i)$ пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$, лежащие в плоскости A_{a-1} на евклидовой прямой, не пересекающейся с плоскостью A_a . Соответствующие им прямые X и Y в пространстве $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$ порождают пространство $\bar{S}_3^1(i)$ и обладают евклидовыми расстояниями.

Поставим прямым X и Y в соответствие матричные координаты (32) и вычислим матрицу (14), которая в нашем случае имеет вид

$$W = (\bar{Y}_a^T - \bar{X}_a^T) E_{a+1} (Y_a - X_a) =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i_{a+1}} (\bar{Y}^{2i_{a+1}} - \bar{X}^{2i_{a+1}}) (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}}) + \sum_{i_{a+1}} (\bar{Y}^{2i_{a+1}+1} - \bar{X}^{2i_{a+1}+1}) \\ (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1}) \\ 0 \quad \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}}) (\bar{Y}^{2i_{a+1}} - \bar{X}^{2i_{a+1}}) + \sum_{i_{a+1}} (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1}) \\ (\bar{Y}^{2i_{a+1}+1} - \bar{X}^{2i_{a+1}+1}) \end{pmatrix} = (32)$$

$$= \begin{pmatrix} d_a^2 & 0 \\ 0 & d_a^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } d_a^2 = \sum_{i_{a+1}} (\bar{Y}^{2i_{a+1}} - \bar{X}^{2i_{a+1}}) (Y^{2i_{a+1}} - X^{2i_{a+1}}) +$$

$$+ \sum_{i_{a+1}} (\bar{Y}^{2i_{a+1}+1} - \bar{X}^{2i_{a+1}+1}) (Y^{2i_{a+1}+1} - X^{2i_{a+1}+1})$$

Так как собственные числа матрицы (32) равны квадратам экстремальных расстояний d_a прямых X и Y , эти прямые *паратактичны*. Поэтому точки пространства $\bar{S}_n^{m_0, m_1, \dots, m_{r-1}}(i, j)$, изображаются прямыми паратактической конгруэнции пространства $\bar{S}_{2n+1}^{2m_0+1, 2m_1+1, \dots, 2m_{r-1}+1}(i)$.

Эта теорема является аналогом известной теоремы об интерпретации пространства $\bar{S}_n(i, j)$ в пространстве $\bar{S}_{2n+1}(i, j)$ ([3], стр. 650—652).

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. М., 1955.
2. Розенфельд Б. А., Климанова Т. М. и Пецко Н. Д. Проективная теория векторов. Изв. вузов, математика*, № 2 (27), 1962, стр. 130—140; № 3 (28) 1962, стр. 122—130.
3. Розенфельд Б. А. Прямоугольные матрицы и неевклидовы геометрии. Усп. матем. наук*, т. XIII, вып. 6(84), 1958, стр. 21—48.
4. Чахленкова Т. Г. Геометрия m -евклидовых пространств. Изв. вузов, математика*, № 1 (2), 1958, стр. 174—183.
5. Ясинская Е. У. Метрические инварианты пар плоскостей и уравнений квадрик в полунеевклидовых пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ. 1962, вып. 12, стр. 315—337.

Т. М. Климанова

Унитар ярымевклид фэзалары

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә комплекс эдәдләр мејданы вә кватернионлар чисми үзәриндә унитар ярымевклид фэзалары гурулур. Бу фэзаларда ики нөгтәнин мәсафәси, һәрәкәтләр групу вә дүз хәтләрин метрик инвариантлары мүүјән едилир. Сонра бу фэзаларын, башга даһа мәлүм олан фэзаларын объектләри васитәси илә интерпретасијалары верилир.

Н. М. САБЗИЕВ

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Обозначим через L_P ($P=p_1, \dots, p_n$) класс функций $f(x_1, \dots, x_n)$, заданных на всем пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$ имеющих по каждой из этих переменных период 2π , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_P = \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\dots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty$$

при любом $p_j \geq 1$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Заметим, что пространство L_P является линейным нормированным. Пусть

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P = \inf_{(T(m))} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\dots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n) - T_{(m)}(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right\}^{\frac{1}{p_n}},$$

где $E_{(m)}(f)_P$ — наилучшие приближения функций $f(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве L_P тригонометрическими полиномами порядка не выше $(m) = (m_1, \dots, m_n)$, а

$$\tilde{\omega}_{(\kappa)}(f; (h))_P = \sup_{\substack{|t_s| \leq h_s \\ (s=1, 2, \dots, n)}} \left\| \sum_{i_1=0}^{k_1} \dots \sum_{i_n=0}^{k_n} \prod_{j=1}^n (-1)^{k_j - i_j} \binom{k_j}{i_j} f(x_1 + i_1 t_1, \dots, x_n + i_n t_n) \right\|_P,$$

где $(\kappa) = (k_1, \dots, k_n)$, $(h) = (h_1, \dots, h_n)$ —

смешанный модуль гладкости порядка $(k) = (k_1, \dots, k_n)$ в пространстве L_P .

Назовем функции (от h_v) $\tilde{\omega}_{\kappa_v}(f, h_v)_P =$

$$= \sup_{\substack{|t_v| \leq h_v \\ (v=1, 2, \dots, n)}} \left\| \sum_{i_v=0}^{k_v} (-1)^{k_v - i_v} \binom{k_v}{i_v} f(x_1, \dots, x_v + i_v t_v, \dots, x_n) \right\|_P$$

Н. М. САБЗИЕВ

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Обозначим через L_P ($P=p_1, \dots, p_n$) класс функций $f(x_1, \dots, x_n)$, заданных на всем пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$ имеющих по каждой из этих переменных период 2π , удовлетворяющих условию

$$\|f\|_P = \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2} dx_2 \dots \right\}^{\frac{p_n}{p_n-1}} dx_n \Big\}^{\frac{1}{p_n}} < \infty$$

при любом $p_j \geq 1$ ($j=1, 2, \dots, n$).

Заметим, что пространство L_P является линейным нормированным. Пусть

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P = \inf_{(T(m))} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n) - T_{(m)}(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right]^{p_2} dx_2 \dots \right\}^{\frac{p_n}{p_n-1}} dx_n \Big\}^{\frac{1}{p_n}},$$

где $E_{(m)}(f)_P$ — наилучшие приближения функций $f(x_1, \dots, x_n)$ в пространстве L_P тригонометрическими полиномами порядка не выше $(m) = (m_1, \dots, m_n)$, а

$$\tilde{\omega}_{(\kappa)}(f; (h))_P = \sup_{\substack{|t_s| < h_s \\ (s=1, 2, \dots, n)}} \left\| \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} \dots \sum_{i_n=0}^{\kappa_n} \prod_{j=1}^n (-1)^{\kappa_j - i_j} \binom{\kappa_j}{i_j} f(x_1 + i_1 t_1, \dots, x_n + i_n t_n) \right\|_P,$$

где $(\kappa) = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$, $(h) = (h_1, \dots, h_n)$ —

смешанный модуль гладкости порядка $(k) = (k_1, \dots, k_n)$ в пространстве L_P .

Назовем функции (от h_v) $\tilde{\omega}_{\kappa_v}(f, h_v)_P =$

$$= \sup_{\substack{|t_v| < h_v \\ (v=1, 2, \dots, n)}} \left\| \sum_{i_v=0}^{\kappa_v} (-1)^{\kappa_v - i_v} \binom{\kappa_v}{i_v} f(x_1, \dots, x_v + i_v t_v, \dots, x_n) \right\|_P$$

частным модулем гладкости порядка k , относительно x , в пространстве L_p .

А. Ф. Тиманом (см. [5] стр. 288) была доказана следующая Теорема. Если $1 \leq p \leq \infty$ и

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

то при любых натуральных значениях $k_1, \dots, k_n$; $m_1 \geq 0, \dots, m_n \geq 0$

$$\tilde{E}_{m_1, \dots, m_n}(f)_p \leq C_n^{(k_1, \dots, k_n)} \sum_{v=1}^n \tilde{\omega}_{k_v} \left(f; \frac{1}{m_v + 1} \right)_p, \quad (1)$$

где $C_n^{(k_1, \dots, k_n)}$ — константа, зависящая только от n и $k_1, \dots, k_n$, а $\tilde{\omega}_{k_v}(f; h_v)_p$ — соответствующий частный модуль гладкости функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в L_p .

Заметим, что неравенство (1) в случае $p = \infty$, $n = 2$ доказано С. Н. Бернштейном [2].

И. И. Ибрагимов поставил задачу: как будет вести себя наилучшее приближение функции многих переменных тригонометрическими полиномами в пространстве L_p .

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $1 \leq p_j < \infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$) и $r_v \geq 0$ натуральное число, то

$$\tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p \leq h_v^{r_v} \tilde{\omega}_{k_v}(f^{(r_v)}; h_v)_p.$$

Для доказательства леммы мы будем пользоваться следующими тождествами:

$$\sum_{v=0}^{k+r} (-1)^{k+r-v} \binom{k+r}{v} f(x+v h) = \sum_{v=0}^k (-1)^{k-v} \binom{k}{v} \left\{ \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f[x+(v+j)h] \right\} \quad (2)$$

$$\sum_{v=0}^r (-1)^{r-v} \binom{r}{v} f(x+v h) = \int_0^h \dots \int_0^h f^{(r)}(x_1 + t_1 + \dots + t_r) dt_1 \dots dt_r \quad (3)$$

По определению частного модуля гладкости имеем:

$$\tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p = \sup_{|t_v| \leq h_v} \left\| \sum_{i_v=0}^{k_v + r_v} (-1)^{k_v + r_v - i_v} \binom{k_v + r_v}{i_v} \cdot f(x_1, \dots, x_v + i_v t_v, \dots, x_n) \right\|_p$$

Отсюда в силу тождества (2) и (3) находим:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p &= \sup_{|t_v| \leq h_v} \left\| \sum_{i_v=0}^{k_v} (-1)^{k_v - i_v} \binom{k_v}{i_v} \times \right. \\ &\times \int_0^{t_v} \dots \int_0^{t_v} f_{x_v}^{(r_v)} [x_1, \dots, (x_v + i_v t_v) + (\tau_1 + \dots + \tau_{r_v}), \dots, x_n] d\tau_1 \dots d\tau_{r_v} \left. \right\|_p \quad (4) \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского последовательно к интегралам относительно x_1 и τ_1 , x_1 и $\tau_2, \dots, x_1$ и τ_{r_v} , получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p &\leq \sup_{|t_v| \leq h_v} \left\{ \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{t_v} \dots \int_0^{t_v} \sum_{i_v=0}^{k_v} (-1)^{k_v - i_v} \binom{k_v}{i_v} \times \right. \right. \\ &\times f_{x_v}^{(r_v)} [x_1, \dots, (x_v + i_v t_v) + (\tau_1 + \dots + \tau_{r_v}), \dots, x_n] \left. \left. \right|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} d\tau_1 \dots d\tau_{r_v} \right\}^{p_2} dx_2 \dots \\ &\left. \right\}^{\frac{1}{p_n - 1}} dx_n \left. \right\}^{\frac{1}{p_n}}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс от x_2 до x_n , придем к оценке:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p &\leq \sup_{|t_v| \leq h_v} \int_0^{t_v} \dots \int_0^{t_v} \left\| \sum_{i_v=0}^{k_v} (-1)^{k_v - i_v} \binom{k_v}{i_v} f_{x_v}^{(r_v)} [x_1, \dots, (x_v + i_v t_v) + \right. \\ &\left. + (\tau_1 + \dots + \tau_{r_v}), \dots, x_n] \right\|_p d\tau_1 \dots d\tau_{r_v} \end{aligned}$$

В силу периодичности функции, имеем:

$$\tilde{\omega}_{k_v + r_v}(f; h_v)_p \leq h_v^{r_v} \tilde{\omega}_{k_v}(f_{x_v}^{(r_v)}; h_v)_p.$$

Лемма 2. Если $T_{(m)}(x_1, \dots, x_n)$ тригонометрический полином порядка $(m) = (m_1, \dots, m_n)$, то при любом p_j ($1 \leq p_j < \infty$) ($j = 1, 2, \dots, n$) имеет место неравенство:

$$\left\| \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} T_{(m)}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|_p \leq \prod_{j=1}^n (2m_j)^{k_j} \|T_{(m)}(x_1, \dots, x_n)\|_p, \quad (5)$$

где $P = (p_1, \dots, p_n)$

Эта лемма доказывается аналогично теореме Зигмунда (см. [1] стр. 895).

Заметим, что частный модуль гладкости порядка k , относительно переменного x_v ($v = 1, 2, \dots, n$) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ обладает следующими свойствами:

$$1. \tilde{\omega}_{k_v}(f; 0)_p = 0.$$

$$2. \tilde{\omega}_{k_v}(f; \delta_1 + \delta_2) \leq \tilde{\omega}_{k_v}(f; \delta_1)_p + \tilde{\omega}_{k_v}(f; \delta_2)_p.$$

$$3. \text{ При любом } \lambda > 0$$

$$\tilde{\omega}_{k_v}(f; \lambda \delta)_p \leq (\lambda + 1)^{k_v} \tilde{\omega}_{k_v}(f; \delta)$$

(если λ целое положительное число, то

$$\tilde{\omega}_{k_v}(f; \lambda \delta)_p \leq \lambda^{k_v} \tilde{\omega}_{k_v}(f; \delta)_p,$$

где $P = (p_1, \dots, p_n)$, $p_j \geq 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ и $f_{x_v}(x_1, \dots, x_n)$ ($r_v = 0, 1, 2, \dots$) принадлежат L_p и $f(x_1, \dots, x_n)$ относительно переменного x_v почти для всех $x_1, \dots, x_{v-1}, x_{v+1}, \dots, x_n$ имеет абсолютно непрерывную частную

производную $f_{x_j}^{(r_j-1)}(x_1, \dots, x_n)$. Тогда при любых натуральных значениях $k_1, \dots, k_n$; $m_1 \geq 0, \dots, m_n \geq 0$ и при $1 \leq p_j < \infty$ ($j=1, 2, \dots, n$) имеем

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P \leq C[(\kappa), (m), (r)] \sum_{v=1}^n \frac{1}{(m_v+1)^{r_v}} \tilde{\omega}_{\kappa_v} \left(f_{(x_v)}^{(r_v)}; \frac{1}{m_v+1} \right)_P, \quad (6)$$

где $C[(\kappa), (m), (r)]$ константа, зависящая от (m) , (r) и (κ) .
Доказательство. Для простоты докажем теорему в двумерном случае. Для этой цели, следуя А. Ф. Тиману [5], рассмотрим тригонометрический полином вида:

$$T_{(\kappa_1+2)(m_1-1), (\kappa_2+2)(m_2-1)}(f; x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^2 \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)} \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \cdot \left\{ \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} \sum_{i_2=0}^{\kappa_2} (-1)^{i_1+i_2} \binom{\kappa_1}{i_1} \binom{\kappa_2}{i_2} f(x_1+i_1 t_1, x_2+i_2 t_2) \right\} dt_1 dt_2,$$

где $\tau_{(\kappa_s+2)(m_s-1)}(t_s)$ — тригонометрический полином порядка $(\kappa_s+2)(m_s-1)$ относительно t_s ($s=1, 2$)

$$\gamma_{m_s}^{(\kappa_s)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_s+2)(m_s-1)}(t_s) dt_s$$

и

$$\tau_{(\kappa_s+2)(m_s-1)}(t_s) = \left(\frac{\sin m_s t_s / 2}{m_s \sin t_s / 2} \right)^{2\kappa_s+4}$$

— четный тригонометрический полином.

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} T_{(\kappa_1+2)(m_1-1), (\kappa_2+2)(m_2-1)}(f; x_1, x_2) - f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{\pi^2 \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)} \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \left\{ \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} \sum_{i_2=0}^{\kappa_2} (-1)^{i_1+i_2} \binom{\kappa_1}{i_1} \binom{\kappa_2}{i_2} \times \right. \\ &\times f(x_1+i_1 t_1, x_2+i_2 t_2) - \sum_{i_2=1}^{\kappa_2} (-1)^{i_2-1} \binom{\kappa_2}{i_2} f(x_1, x_2+i_2 t_2) \Big\} dt_1 dt_2 + \\ &+ \frac{1}{\pi^2 \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)} \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \left\{ \sum_{i_2=0}^{\kappa_2} (-1)^{i_2-1} \binom{\kappa_2}{i_2} \cdot \right. \\ &\cdot f(x_1, x_2+i_2 t_2) \Big\} dt_1 dt_2 = \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 + \Phi(x_1, x_2), \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2; t_2) &= \frac{1}{\pi \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \left\{ \sum_{i_2=0}^{\kappa_2} \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} (-1)^{i_1+i_2} \binom{\kappa_1}{i_1} \binom{\kappa_2}{i_2} \cdot \right. \\ &\cdot f(x_1+i_1 t_1, x_2+i_2 t_2) \Big\} dt_1, \quad \Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot \left\{ \sum_{i_2=0}^{\kappa_2} (-1)^{i_2-1} \binom{\kappa_2}{i_2} f(x_1, x_2+i_2 t_2) \right\} dt_2.$$

Тогда из равенства (7) получим:

$$\begin{aligned} \| T_{(\kappa_1+2)(m_1-1), (\kappa_2+2)(m_2-1)}(f; x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \|_P &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \left\| \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 \right\|_P + \|\Phi(x_1, x_2)\|_P. \quad (8) \end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в неравенстве (8).

$$\begin{aligned} \text{Так как } \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \left\| \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 \right\|_P &= \\ &= \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \left\{ \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 \right)^{p_1} dx_1 \right\}^{\frac{1}{p_1}}, \end{aligned}$$

то, применяя обобщенное неравенство Минковского последовательно к интегралам относительно x_1 и t_2 , а потом x_2 и t_2 , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \left\| \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 \right\|_P &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(\kappa_2)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_2+2)(m_2-1)}(t_2) \cdot \|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P dt_2. \quad (9) \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение $\|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)}} \left\| \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \left[\sum_{i_2=0}^{\kappa_2} \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} (-1)^{i_1+i_2-1} \binom{\kappa_1}{i_1} \binom{\kappa_2}{i_2} \cdot \right. \right. \\ &\cdot f(x_1+i_1 t_1, x_2+i_2 t_2) \Big\|_P dt_1 \quad (10) \end{aligned}$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского последовательно к интегралам относительно x_1 и t_1 , а потом x_2 и t_1 и в силу периодичности функции $f(x_1, x_2)$, получим:

$$\begin{aligned} \|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P &\leq \frac{2^{\kappa_2+1}}{\pi \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \cdot \\ &\cdot \left\| \sum_{i_1=0}^{\kappa_1} (-1)^{i_1-1} \binom{\kappa_1}{i_1} f(x_1+i_1 t_1, x_2) \right\|_P dt_1 \leq \\ &\leq \frac{2^{\kappa_1+1}}{\pi \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) \tilde{\omega}_{\kappa_1}(f; t_1)_P dt_1. \end{aligned}$$

На основании леммы 1 и в силу четности $\tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1)$ имеем, что

$$\|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P < \frac{2^{\kappa_2+2}}{\pi \gamma_{m_1}^{(\kappa_1)}} \int_0^{\pi} \tau_{(\kappa_1+2)(m_1-1)}(t_1) t_1^{\kappa_1-1} \tilde{\omega}_{\kappa_1-1}(f_{x_1}^{(\kappa_1)}; t_1)_P dt_1.$$

Отсюда в силу свойства частного модуля гладкости (см. свойства 3. в L_p) имеем:

$$\|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P \leq \frac{1}{(m_1+1)^{r_1}} \tilde{\omega}_{k_1-r_1} \left(f_{x_1}^{(r_1)}; \frac{1}{m_1+1} \right)_P \times \\ \times \frac{2^{k_2+2} (m_1+1)^{k_1}}{\pi \gamma_{m_1}^{(k_1)}} \int_0^{2\pi} \tau_{(k_1+2)(m_1-1)}(t_1) \cdot t_1^{r_1} \left(t_1 + \frac{1}{m_1+1} \right)^{k_1-r_1} dt_1. \quad (11)$$

Отсюда, так же как в книге А. Ф. Тимана (см. [5] стр. 291), получим:

$$\|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P \leq \frac{C[(k), m_1, r_1]}{(m_1+1)^{r_1}} \tilde{\omega}_{k_1-r_1} \left(f_{x_1}^{(r_1)}; \frac{1}{m_1+1} \right)_P,$$

где $C[(k), m_1, r_1]$ — константа, зависящая от m_1, r_1 и k_1, k_2 . Подставляя это значение в неравенство (9), получим:

$$\frac{1}{\pi \gamma_{m_2}^{(k_2)}} \left\| \int_0^{2\pi} \tau_{(k_2+2)(m_2-1)}(t_2) \psi(x_1, x_2; t_2) dt_2 \right\|_P \leq \\ \leq \frac{C[(k), m_1, r_1]}{(m_1+1)^{r_1}} \tilde{\omega}_{k_1-r_1} \left(f_{x_1}^{(r_1)}; \frac{1}{m_1+1} \right)_P. \quad (12)$$

Аналогично, оценки $\|\psi(x_1, x_2; t_2)\|_P$, получим что

$$\|\Phi(x_1, x_2)\|_P \leq C[(k), m_2, r_2] \frac{1}{(m_2+1)^{r_2}} \tilde{\omega}_{k_2-r_2} \left(f_{x_2}^{(r_2)}; \frac{1}{m_2+1} \right)_P \quad (13)$$

В силу неравенств (12) и (13) из неравенства (8) имеем:

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P \leq C[(k), (m), (r)] \sum_{v=1}^2 \frac{1}{(m_v+1)^{r_v}} \tilde{\omega}_{k_v-r_v} \left(f_{x_v}^{(r_v)}; \frac{1}{m_v+1} \right)_P.$$

Это и есть требуемое неравенство.

Если функция $f(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, кроме того, при $0 < a_v \leq 1$ ($v=1, 2, \dots, n$)

$$\tilde{\omega}_{k_v-r_v} \left(f_{x_v}^{(r_v)}; t_v \right) \leq M t_v^{a_v},$$

то

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P = O \left(\frac{1}{m_{v_1}^{r_{v_1}+a_{v_1}}} \right) \quad (14)$$

Заметим, что соотношение (14) в случае $p_1=p_2=\dots=p_n=p$ доказано А. Ф. Тиманом [5], а в случае $p=\infty, n=2$ доказано С. М. Бернштейном [3].

Приведем без доказательства еще один результат.

Теорема 2. Если $f(x_1, \dots, x_n) \in L_P$. Тогда при любых натуральных значениях $k_1, \dots, k_n, m_1 \geq 1, \dots, m_n \geq 1$ и при $1 \leq p_j < \infty$ ($j=1, 2, \dots, n$) имеет место неравенство:

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P \leq C[(k)] \omega_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P.$$

В заключение докажем еще одну теорему об оценке модуля непрерывности через наилучшее приближение.

Теорема 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in L_P$.

Каковы бы ни были натуральные числа $k_1, \dots, k_n$ справедливо неравенство.

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P \leq \frac{C[(k)]}{\prod_{j=1}^n m_j^{k_j}} \sum_{i=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} \prod_{j=1}^n (v_j+1)^{k_j-1} E_{(v)}(f)_P, \quad (15)$$

где

$$P = (p_1, \dots, p_n) \text{ и } (v) = (v_1, \dots, v_n),$$

$C[(k)]$ зависят только от $(k) = (k_1, \dots, k_n)$.

Доказательство. Проведем доказательство для двумерного случая. Пусть $T_{(m)}(x_1, x_2)$ тригонометрический полином наилучшего приближения для $f(x_1, x_2)$ в L_P , т. е.

$$\tilde{E}_{(m)}(f)_P = \|f - T_{(m)}\|_P = \\ = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x_1, x_2) - T_{(m)}(x_1, x_2)|^{p_1} dx_1 \right\}^{1/p_1} \left\{ \int_0^{2\pi} | \dots |^{p_2} dx_2 \right\}^{1/p_2}$$

При любых целых $s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$ имеем

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P = \sup_{|t_i| \leq \frac{1}{m_i} \atop (i=1,2)} \left\| \sum_{v_1=0}^{k_1} \sum_{v_2=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-v_1-v_2} \binom{k_1}{v_1} \binom{k_2}{v_2} \times \right. \\ \times f(x_1+v_1 t_1, x_2+v_2 t_2) \left. \right\|_P = \\ = \sup_{|t_i| \leq \frac{1}{m_i} \atop (i=1,2)} \left\| \sum_{v_1=0}^{k_1} \sum_{v_2=0}^{k_2} (-1)^{k_1+k_2-v_1-v_2} \binom{k_1}{v_1} \binom{k_2}{v_2} \{ f(x_1+v_1 t_1, x_2+v_2 t_2) - \right. \\ \left. - T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}(x_1, x_2) + T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}(x_1, x_2) \} \right\|_P \leq$$

$$\leq \tilde{\omega}_{(k)} \left(f - T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}; \frac{1}{(m)} \right)_P + \tilde{\omega}_{(k)} \left(T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}; \frac{1}{(m)} \right)_P$$

т. е.

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P \leq 2^{k_1+k_2} E_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}(f)_P + \tilde{\omega}_{(k)} \left(T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}; \frac{1}{(m)} \right)_P \quad (16)$$

На основании тождества (3): $\tilde{\omega}_{(k)} \left(T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}; \frac{1}{(m)} \right)_P =$

$$= \sup_{|t_i| \leq \frac{1}{m_i} \atop (i=1,2)} \left\| \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_2} \frac{\partial^{k_1+k_2} T_{(m)}(x_1+\tau_1+\dots+\tau_{k_1}, x_2+\eta_1+\dots+\eta_{k_2})}{\partial \tau_1 \dots \partial \tau_{k_1} \partial \eta_1 \dots \partial \eta_{k_2}} d\tau_1 \dots \right. \\ \left. \dots d\tau_{k_1} d\eta_1 \dots d\eta_{k_2} \right\|_P$$

Применив последовательно два раза обобщенное неравенство Минковского, получим:

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(T_{s_1+1, s_2+1}^{(k_1, k_2)}; \frac{1}{(m)} \right)_P \leq \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2} T_{(m)}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_P \quad (17)$$

Применив лемму (2) и неравенство

$$2^{(j+1)k} E^{2v}(f)_P \leq 2^{2k} \sum_{\mu=2^{j-1}+1}^{2j} \mu^{k-1} E_{\mu,1}(f)_P$$

по отдельному слагаемому к следующему тождеству

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k_1+k_2} T_{2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}}^{s_1+1, s_2+1}(f; x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} &= \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \{ T_{1,1}(x_1, x_2) + \\ &+ \sum_{j=0}^{s_1-1} [T_{2^{j+1}, 1}(f; x_1, x_2) - T_{1, 2^{j+1}}(f; x_1, x_2)] + \\ &+ \sum_{j=0}^{s_2-1} [T_{1, 2^{j+1}}(f; x_1, x_2) - T_{1, 2^j}(f; x_1, x_2)] + \\ &+ \sum_{j_1=0}^{s_1-1} \sum_{j_2=0}^{s_2-1} [T_{2^{j_1+1}, 2^{j_2+1}}(f; x_1, x_2) - T_{2^{j_1+1}, 2^{j_2}}(f; x_1, x_2) - \\ &- T_{2^{j_1}, 2^{j_2+1}}(f; x_1, x_2) + T_{2^{j_1}, 2^{j_2}}(f; x_1, x_2)] + \\ &+ T_{2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}}(f; x_1, x_2) - T_{2^{s_1}, 2^{s_2}}(f; x_1, x_2) \}, \end{aligned}$$

получаем

$$\left\| \frac{\partial^{k_1+k_2} T_{2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}}^{s_1+1, s_2+1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_P \leq 2^{3(k_1+k_2)+2} \sum_{v_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{v_2=0}^{2^{s_2}-1} \prod_{j=1}^2 (v_j+1)^{k_j-1} \tilde{E}_{(v)}(f)_P$$

Тогда неравенство (17) примет вид:

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(T_{2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}}^{s_1+1, s_2+1}; \frac{1}{(m)} \right)_P \leq \frac{2^{3(k_1+k_2)+2}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} \sum_{v_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{v_2=0}^{2^{s_2}-1} \prod_{j=1}^2 (v_j+1)^{k_j-1} \tilde{E}_{(v)}(f)_P$$

Таким образом, из неравенства (16) будем иметь:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P &\leq 2^{k_1+k_2} \tilde{E}_{2^{s_1+1}, 2^{s_2+1}}(f)_P + \\ &+ \frac{2^{3(k_1+k_2)+2}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} \sum_{v_1=0}^{2^{s_1}-1} \sum_{v_2=0}^{2^{s_2}-1} \prod_{j=1}^2 (v_j+1)^{k_j-1} \tilde{E}_{(v)}(f)_P \end{aligned}$$

Выбирая теперь s_1 и s_2 , так, чтобы $2^{s_1-1} < m_1 \leq 2^{s_1}$; $2^{s_2-1} < m_2 \leq 2^{s_2}$, имеем:

$$\tilde{\omega}_{(k)} \left(f; \frac{1}{(m)} \right)_P \leq \frac{2^{3(k_1+k_2)+2}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} \sum_{v_1=0}^{m_1} \sum_{v_2=0}^{m_2} \prod_{j=1}^2 (v_j+1)^{k_j-1} \tilde{E}_{(v)}(f)_P.$$

Заметим, что неравенство (15) в случае $p_1=p_2=\dots=p_n=p$ доказано М. Ф. Тиманом [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
2. Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении функций нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм, соч. т. II, стр. 540—545.

3. Бернштейн С. Н. О свойствах однородных функциональных классов, соч. т. II, стр. 421—432.

4. Тиман М. Ф. Обратные теоремы конструктивной теории функций многих переменных. ДАН СССР, 120, № 6, (1958).

5. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960.

Н. М. Сабзијев

Үмүмиләшмиш Лебег фәзасында периодик функцијаларын тригонометрик чохәдлиләрлә јахынлашмасы

ХҮЛАСӘ

Ишдә үмүмиләшмиш Лебег фәзасында периодик функцијаларын тригонометрик чохәдлиләрлә јахынлашмасынын дүз вә тәрс теоремләри исбат олунмүшдур.

П. А. РАХМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ПО ГИБКОЙ МЕМБРАНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ.

ВВЕДЕНИЕ

Учет влияния сопротивляющейся среды на движение упруго-пластических тел удастся провести достаточно просто в том случае, когда сопротивление среды зависит от скоростей перемещений точек упруго-пластических конструкций. В качестве примера нами рассмотрена задача о движении бесконечной гибкой нити, подвергнутой удару с переменной и постоянной скоростью, причем закон сопротивления среды принят в виде степенной функции от скоростей.

Задача о движении упруго-пластического тела в сопротивляющейся среде в строгой постановке требует совместного рассмотрения движений тела и среды и является весьма сложной. Существенное упрощение получается в том случае, когда закон сопротивления среды задается наперед. В такой постановке решено большое число задач. Например, движение упруго-пластической нити задается сопротивлением среды пропорциональным квадрату скорости перемещений и распределением ускорений движения частиц нити в продольно-поперечной области ([3,4]).

В данной работе предполагается, что силы сопротивления R связаны со скоростями смещений U степенной зависимостью $R = \beta U^n$, где β — постоянный множитель. Заметим, что при $n=2$ в случае удара по гибкой нити и мембране принимают

$$\beta = \frac{C \rho_1}{2},$$

где ρ_1 — плотность среды, а C — коэффициент сопротивления.

§ 1. Основные уравнения и граничные условия

Пусть по гибкой мембране бесконечной протяженности производится прямой удар с переменной скоростью $v_0 = v_0(t)$. Ударяемое тело соприкасается с мембраной по кольцу, радиусом r_0 . Скорость в момент удара обозначим через v_{00} .

П. А. РАХМАНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО УДАРА ПО ГИБКОЙ МЕМБРАНЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ.

ВВЕДЕНИЕ

Учет влияния сопротивляющейся среды на движение упруго-пластических тел удастся провести достаточно просто в том случае, когда сопротивление среды зависит от скоростей перемещений точек упруго-пластических конструкций. В качестве примера нами рассмотрена задача о движении бесконечной гибкой нити, подвергнутой удару с переменной и постоянной скоростью, причем закон сопротивления среды принят в виде степенной функции от скоростей.

Задача о движении упруго-пластического тела в сопротивляющейся среде в строгой постановке требует совместного рассмотрения движений тела и среды и является весьма сложной. Существенное упрощение получается в том случае, когда закон сопротивления среды задается наперед. В такой постановке решено большое число задач. Например, движение упруго-пластической нити задается сопротивлением среды пропорциональным квадрату скорости перемещений и разделением ускорений движения частиц нити в продольно-поперечной области ([3,4]).

В данной работе предполагается, что силы сопротивления R связаны со скоростями смещений U_1 степенной зависимостью $R = \beta U_1^n$, где β — постоянный множитель. Заметим, что при $n=2$ в случае удара по гибкой нити и мембране принимают

$$\beta = \frac{C \rho_1}{2},$$

где ρ_1 — плотность среды, а C — коэффициент сопротивления.

§ 1. Основные уравнения и граничные условия

Пусть по гибкой мембране бесконечной протяженности производится прямой удар с переменной скоростью $v_0 = v_0(t)$. Ударяемое тело соприкасается с мембраной по кольцу, радиусом r_0 . Скорость в момент удара обозначим через v_{00} .

Предполагается, что начальная толщина мембраны δ_0 постоянна, а сама она до удара не деформирована и расположена в одной плоскости.

Для решения поставленной задачи вводим систему координат x, y с началом в точке удара, осью ox , расположенной в плоскости пластины, и осью oy , перпендикулярной к последней и имеющей направление скорости v_0 . Дифференциальные уравнения мембраны при отсутствии массовых сил будут иметь вид [5]:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_s r \cos \theta) - \frac{\sigma_\varphi}{r} + \frac{R}{\delta_0} (1 + \epsilon_s)(1 + \epsilon_\varphi) \cos(d + \theta) \quad (1,1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_s r \sin \theta) - \frac{R}{\delta_0} (1 + \epsilon_s)(1 + \epsilon_\varphi) \sin(d + \theta) \quad (1,2)$$

Здесь ρ_0 — начальная плотность мембраны; r — лагранжева координата частицы мембраны, ϵ_s — деформация по длине, ϵ_φ — деформация по кольцу, σ_s, σ_φ — условные напряжения, отнесенные к первоначальной площади соответствующих граней, θ — угол между прогнутой частью мембраны и ее начальным направлением, α — угол между направлениями силы сопротивления и элемента мембраны. Как известно,

$$\epsilon_s = \frac{ds - dr}{dr} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2} - 1$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial r} = (1 + \epsilon_s) \cos \theta \quad (1,3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = -(1 + \epsilon_s) \sin \theta \quad (1,4)$$

$$\frac{x}{r} = 1 + \epsilon_\varphi \quad (1,5)$$

В данной работе предполагается, что скорость распространения цилиндрической волны сильного разрыва не превышает скорости распространения упругой цилиндрической волны. Следовательно, предполагается, что существуют две области чисто радиального и поперечно-радиального движения. Распространение волн в области радиального движения описывается уравнением

$$\rho_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{s1}}{\partial r} + \frac{\sigma_{s11} - \sigma_{\varphi 1}}{r} \quad (1,6)$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи следующие:

$$1. \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0, \quad r_0 \leq r \leq \infty \quad (1,7)$$

2. На волне сильного разрыва, очевидно, имеют место те же условия, которые были выведены в случае удара по гибкой нити [1]:

$$-\frac{\partial x_1}{\partial t} + (1 + \epsilon_s^*) b^* = -\frac{\partial x}{\partial t} + (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^* b^* \quad (1,8)$$

$$y_s^* = (1 + \epsilon_s) \sin \theta^* b^* \quad (1,9)$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial t} = b^* = \sqrt{\frac{\sigma_s^*}{\rho_0 (1 + \epsilon_s^*)}} \quad (1,10)$$

3. В точке удара при $r = r_0$

$$y_0 = \int_0^t v_0 dt \quad (1,11)$$

$$m \frac{dv_0}{dt} = -2\pi r_0 \delta_0 \sigma_{s0} \sin \theta_0 \quad (1,12)$$

§ 2 Исследование движения в упругой области

Точные уравнения движения (1,1), (1,2) являются системой двух нелинейных уравнений с частными производными второго порядка. Решить эти уравнения при данных граничных условиях аналитически весьма затруднительно. Поэтому, мы поставили задачу разработать приближенный метод решения указанных уравнений.

Итак, мы в первом приближении задаемся ускорением, а именно, в данном случае, можно полагать:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{dv_0}{dt}$$

Тогда, уравнения движения (1,1), и (1,2) в упругом случае приводятся к следующему виду

$$a_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\epsilon_s + v\epsilon_\varphi) \cos \theta] - a_0^2 \frac{\epsilon_\varphi + v\epsilon_s}{r} + Ay_1^n (1 + \epsilon_\varphi)(1 + \epsilon_s) \cos(\alpha + \theta) = 0 \quad (2,1)$$

$$\frac{dv_0}{dt} = -a_0^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(\epsilon_s + v\epsilon_\varphi) \sin \theta] - Ay_1^n (1 + \epsilon_s)(1 + \epsilon_\varphi) \sin(\alpha + \theta) \quad (2,2)$$

где $A = \frac{\beta}{\rho_0 \delta_0}$

Здесь учтено, что

$$\sigma_s = \frac{E}{1 - v^2} (\epsilon_s + v\epsilon_\varphi) = \rho_0 a_0^2 (\epsilon_s + v\epsilon_\varphi) \quad (2,3)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1 - v^2} (\epsilon_\varphi + v\epsilon_s) = \rho_0 a_0^2 (\epsilon_\varphi + v\epsilon_s) \quad (2,4)$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - v^2)}}$$

где E — модуль Юнга;

v — коэффициент Пуассона.

Граничные условия в упругом случае принимают следующий вид:

$$\frac{dx^*}{dt} = +u^* + (1 + \epsilon_s^*) b^* = +x_t^* + (1 + \epsilon_s^*) b^* \cos \theta^* \quad (2,5)$$

$$y_t^* = (1 + \epsilon_s^*) b^* \sin \theta^* \quad (2,6)$$

$$\frac{dr^*}{dt} = b^* = a_0 \sqrt{\frac{\epsilon_s^* + v\epsilon_\varphi^*}{1 + \epsilon_s^*}} \quad (2,7)$$

Уравнение движения тела напомним в виде

$$A_1 \frac{dv_0}{dt} = -a_0^2 r_0 \epsilon_{s0} \sin \theta_0 \quad (2,8)$$

$$\text{где } A_1 = \frac{m}{2\pi \delta_0 \rho_0};$$

m — масса тела

Уравнение (1,6) в упругом случае принимает вид:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a_0^2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial x_1}{\partial r} - \frac{x_1}{r^2} \right) \quad (2,9)$$

или

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial}{\partial r} (\epsilon_s + \epsilon_\varphi) \quad (2,10)$$

Очевидно, что характеристики и характеристические соотношения уравнения (2,9) будут следующие:

$$dr = \pm a_0 dt, \quad du = \pm a_0 dx_1 r + a_0^2 \left[\frac{x_r}{r} - \frac{x_1}{r^2} \right] dt \quad (2,11)$$

$$\left(u = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad x_r = \frac{\partial x_1}{\partial r} \right).$$

Из начальных условий следует, что максимальная скорость распространения возмущений a_0 . Так как граничные условия не совпадают с начальными, то волна a_0 есть волна сильного разрыва.

Очевидно, что за фронтом волны a_0 остается область упругих деформаций, поэтому поверхность сильного разрыва совпадает с характеристикой. Следовательно, на фронте указанной волны имеем три условия:

1. Условие непрерывности смещения

$$x = r = r_0 + a_0 t \quad (2,12)$$

2. Уравнение количества движения

$$u = a_0 (1 - x_r) \quad (2,13)$$

3. Условие совпадения характеристики с волной сильного разрыва

$$du = a_0 dx_r + a_0^2 \left(\frac{x_r}{r} - \frac{x}{r^2} \right) dt \quad (2,14)$$

Покажем тождественность (2,12) и (2,13). Дифференцируя (2,12), имеем

$$u dt + x_r dr = dr$$

и, так как на фронте волны $x = r$, то отсюда следует (2,13), т. е. условия (2,12) и (2,13) тождественны.

Уравнения (2,13) и (2,14) допускают интеграл.

$$u = -a_0 \epsilon_s^0 \sqrt{\frac{r_0}{r_0 + a_0 t}}; \quad \epsilon_s = \epsilon_s^0 \sqrt{\frac{r_0}{r_0 + a_0 t}} \quad (2,15)$$

Известно, что $\epsilon_\varphi = \frac{x_1}{r} - 1$, следовательно, вдоль линии

$$x_1 = r = r_0 + a_0 t; \quad \epsilon_\varphi = 0$$

Таким образом, интенсивность переднего фронта упругой волны падает обратно пропорционально корню из расстояния от центра симметрии.

Считая в уравнении (2,10) $\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2}$ известной функцией, проинтегрируем его

$$\int_{r_*}^r \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dr = a_0^2 (\epsilon_s + \epsilon_\varphi) - a_0^2 (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*) \quad (2,16)$$

Задаемся видом ускорения $\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = A_0(t) \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r}}$ (см. [2]), тогда из (2,16) получим:

$$A_0(t) \sqrt{r_0} \int_{r_*}^r \frac{dr}{r^{1/2}} = 2 A_0(t) \sqrt{r_0} [r^{1/2}]_{r_*}^r = a_0^2 (\epsilon_s + \epsilon_\varphi) - a_0^2 (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*), \text{ функ-}$$

цию $A_0(t)$ определим из условия совпадения значений ϵ_s и ϵ_φ на фронте волны с точным решением задачи. На переднем фронте удовлетворяется условие (2,15). При $r_0 = r_0 + a_0 t$ получим

$$2 A_0(t) r_0^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}] = a_0^2 \epsilon_s^0 \frac{r_0^{1/2}}{(r_0 + a_0 t)^{1/2}} - a_0^2 (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*),$$

откуда:

$$A_0(t) = \frac{a_0^2 \epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)}{2 r_0^{1/2} (r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} \quad (2,17)$$

Для деформации ϵ_s и ϵ_φ получаем следующее уравнение:

$$\epsilon_s + \epsilon_\varphi = \frac{[\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)] (r^{1/2} - r_*^{1/2})}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} + \epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^* \quad (2,18)$$

Так как

$\epsilon_s = \frac{\partial x_1}{\partial r} - 1$; $\epsilon_\varphi = \frac{x_1}{r} - 1$, то (2,18) является неоднородным обыкновенным линейным уравнением для определения $x_1(r, t)$.

При интегрировании этого уравнения имеем следующее граничное условие $x_1 = r = r_0 + a_0 t$.

Следовательно, из (2,18) получим

$$\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{x_1}{r} = \frac{[\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)] (r^{1/2} - r_*^{1/2})}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} + 2 + \epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*$$

Интегрируя, находим

$$x_1(r, t) = \frac{1}{10r} \left\{ 10(r_0 + a_0 t)^2 - 5 \left[2 + \epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^* - \frac{r_*^{1/2} [\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)]}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} \right] \right\} \times$$

$$\times [(r_0 + a_0 t)^2 - r^2] - 4 \frac{\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} [(r_0 + a_0 t)^{5/2} - r^{5/2}] \quad (2,19)$$

Разделив полученное выражение на r , определим

$$1 + \epsilon_\varphi = \frac{1}{10r^2} \left\{ 10(r_0 + a_0 t)^2 - 5 \left[2 + \epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^* - \frac{r_*^{1/2} [\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)]}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_*^{1/2}]} \right] \right\} \times$$

$$\times [(r_0 + a_0 t)^2 - r^2] - 4 \frac{\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r^{*1/2}]} \{ (r_0 + a_0 t)^{1/2} - r^{*1/2} \} \quad (2,20)$$

Так как из работы [5] известно, что

$$u = -a_0 \epsilon_\varphi - a_0 \int_{r(\tau)}^r \frac{\epsilon_s - \epsilon_\varphi}{r} dr \quad \left[r(\tau) = \frac{r_0 + a_0 t + r}{2} \right], \text{ то определив } \frac{\epsilon_s - \epsilon_\varphi}{r}$$

и из (2,18) и (2,20) выполнив интегрирование, получим для скорости частиц следующее выражение:

$$u = -a_0 \epsilon_s - \frac{2a_0 \beta}{5} \left[r^{1/2} - \frac{(r_0 + a_0 t + r)^{1/2}}{\sqrt{2}} \right] + \frac{a_0}{2} (r_0 + a_0 t)^2 \left[\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^* - \beta r^{*1/2} + \frac{4\beta}{5} (r_0 + a_0 t)^{1/2} \right] \left[\frac{1}{r^2} - \frac{4}{(r_0 + a_0 t + r)^2} \right], \quad (2,21)$$

где

$$\beta = \frac{\epsilon_s^0 r_0^{1/2} - (r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*)}{(r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r^{*1/2}]}$$

Дифференцируя условия на волне сильного разрыва (2,5), (2,6) и (2,7) по t получим

$$\begin{aligned} + \frac{du^*}{dt} + b^* \frac{d\epsilon_s^*}{dt} + (1 + \epsilon_s^*) \frac{\partial b^*}{\partial t} &= + \frac{dx_t^*}{dt} + b^* \cos \theta^* \frac{d\epsilon_s^*}{dt} - (1 + \epsilon_s^*) \times \\ &\times b^* \sin \theta^* \frac{d\theta^*}{dt} + (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^* \frac{db^*}{dt} \\ \frac{db^*}{dt} &= a_0^2 \frac{(1 - \nu \epsilon_s^*) \frac{d\epsilon_s^*}{dt} + \nu (1 + \epsilon_s^*) \frac{d\epsilon_\varphi^*}{dt}}{2(1 + \epsilon_s^*)^2 b^*} \end{aligned}$$

Кроме этих соотношений на волне сильного разрыва справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_s^*}{dt} &= \frac{\partial \epsilon_s^*}{\partial t} + \frac{\partial \epsilon_s^*}{\partial r^*} \frac{dr^*}{dt}; & \frac{d\theta^*}{dt} &= \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \frac{dr^*}{dt}; \\ \frac{dy_t^*}{dt} &= \frac{\partial y_t^*}{\partial t} + \frac{\partial y_t^*}{\partial r^*} \frac{dr^*}{dt}; & \frac{du^*}{dt} &= \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \frac{dr^*}{dt}. \end{aligned}$$

Дифференцируя соотношения (1,3) и (1,4) по t , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_t}{\partial r} &= -(1 + \epsilon_s) \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial \epsilon_s}{\partial t}, \\ \frac{\partial y_t}{\partial r} &= -(1 + \epsilon) \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \sin \theta \frac{\partial \epsilon_s}{\partial t}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований, полученные уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[2b^* + \frac{a_1^2 (1 - \nu \epsilon_\varphi^*)}{2(1 + \epsilon_s^*) b^*} \right] (1 - \cos \theta^*) \frac{d\epsilon_s^*}{dt} &= \frac{r_0^{1/2}}{r^{*1/2}} A_0 \cos \theta^* - b^{*2} \cos \theta^* \left(\frac{\partial \epsilon_s^*}{\partial r} \right)_1 + \\ + \sin \theta^* \frac{dv_0}{dt} + b^{*2} \frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} &- \frac{a_0^2 \nu (1 - \cos \theta^*)}{2b^*} \frac{d\epsilon^* u}{dt}. \end{aligned}$$

Из уравнения (2,10) определим $\left(\frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} \right)_1$

$$\left(\frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} \right)_1 = \frac{A_0}{a_0^2} \frac{r_0^{1/2}}{r^{*1/2}} - \frac{\epsilon_s^* - \epsilon_\varphi^*}{r^*}$$

Так как $\epsilon_\varphi^* = \frac{x^*}{r^*} - 1$, то дифференцируя по t , находим:

$$\frac{d\epsilon_\varphi^*}{dt} = - \frac{1 + \epsilon_\varphi^* - (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^*}{r^*} b^* \quad (2,22)$$

Из уравнений движения (2,1) и (2,2) определим $\frac{\partial \epsilon_s}{\partial r}$

$$\frac{\partial \epsilon_s}{\partial r} = - \frac{1}{a_0^2} \sin \theta \frac{dv_0}{dt} + \frac{\nu - \epsilon_s - (\nu - \epsilon_\varphi) \cos \theta}{r} - \frac{A}{a_0^2} y_t^n (1 + \epsilon_s). \quad (2,22')$$

Интегрируя уравнение (2,2) от r_0 до r^* и учитывая уравнение движения тела, определим $\frac{dv_0}{dt}$, полагая при этом $\alpha = 90^\circ$.

$$\frac{dv_0}{dt} = - \frac{2a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + \nu \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^* + A v_0^n (r^{*2} (1 + \epsilon_\varphi^*)^2)}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} \quad (2,23)$$

Таким образом, для скорости деформации на волне сильного разрыва находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left[2b^* + \frac{a_0^2 (1 - \nu \epsilon_\varphi^*)}{2(1 + \epsilon_s^*) b^*} \right] (1 - \cos \theta^*) \frac{d\epsilon_s^*}{dt} &= \\ = - \frac{(a_0^2 - b^{*2}) \cos \theta^* [(r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*) - \epsilon_s^0 r_0^{1/2}]}{2r^{*1/2} (r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r^{*1/2}]} + \\ + \frac{a_0^2 \nu (1 - \cos \theta^*) [1 + \epsilon_\varphi^* - (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^*]}{2r^*} + \frac{b^{*2} (\nu - \epsilon_s^*) (1 - \cos \theta^*)}{r^*} - \\ - \frac{a_0^2 - b^{*2}}{a_0^2} \frac{2a_0^2 r^* (\epsilon_s^* - \nu \epsilon_\varphi^*) \sin^2 \theta^* + A v_0^n [r^{*2} (1 + \epsilon_\varphi^*) - r_0^2] \sin \theta^*}{r^{*2} - r_0^2 - 2A_1} \quad (2,24) \end{aligned}$$

Уравнения (2,7), (2,22), (2,23) и (2,24) являются замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения функций r^* , ϵ_φ^* , v_0 и ϵ_s^* . Начальные условия для этих уравнений из условия на волне сильного разрыва при $t=0$, т. е. при $t=0$, $r^*=r_0$, $v_0=v_{00}$, $\epsilon_\varphi^*=0$, $\epsilon_s^0=\epsilon_s^0$, определяются из следующих условий:

$$v_{00} = \sqrt{u_0 [2(1 + \epsilon_s^0) b_0^* - u_0]}$$

$$b_0^* = a_0 \sqrt{\frac{\epsilon_s^0}{1 + \epsilon_s^0}} \quad u_0 = -a_0 \epsilon_s^0.$$

Исключив u_0 и b_0^* , получим

$$v_{00} = a_0 \sqrt{\epsilon_s^0 2 \sqrt{(1 + \epsilon_s^0) \epsilon_s^0 - \epsilon_s^0}};$$

при малых деформациях легко определяется ϵ_s^0

$$\epsilon_s^0 = \frac{v_{00}^{1/2}}{a_0^{1/2} \sqrt{4}};$$

Уравнение (2,22) напомним в следующем виде (при $\alpha = 90^\circ$):

$$a_0^2 \frac{\partial}{\partial r} [r(v - \epsilon_s)] = a_0^2 (v - \epsilon_\varphi) \cos \theta + r \sin \theta \frac{dv_0}{dt}.$$

Интегрируя от r_0 до r^* (при малых деформациях) получаем для ϵ_{s_0} следующую приближенную формулу:

$$a_0^2 r_0 \epsilon_{s_0} = a_0^2 r^* \left[1 - \frac{y_0(r^* + r_0) \sin \theta^*}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} \right] (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) - \frac{a_0^2}{2} (r^* - r_0) \epsilon_\varphi^* - \frac{a_0^2}{2} r^* \epsilon_\varphi^{*2} - \frac{A v_0^n y_0 (r^* + r_0)^2 (r^* - r_0)}{2(r^{*2} - r_0^2 + 2A_1)}. \quad (2,25)$$

Полученные выражения для определения параметров мембраны справедливы лишь при $\alpha = 90^\circ$. Этот случай мы будем считать первым расчетным случаем.

Второй расчетный случай будет при $\alpha = 90^\circ - \theta$. В этом случае уравнение для определения скорости деформации на волне сильного разрыва получает следующий вид:

$$\left[2b^* + \frac{a_0^2(1 - v \epsilon_\varphi^*)}{2(1 + \epsilon_s^*)b^*} \right] (1 - \cos \theta^*) \frac{d\epsilon_s^*}{dt} = \frac{(a_0^2 - b^{*2}) \cos \theta^* [(r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*) - \epsilon_s^0 r_0^{1/2}]}{2r^{*1/2} (r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_0^{1/2}]} + \frac{a_0^2 v (1 - \cos \theta^*) [1 + \epsilon_\varphi^* - (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^*]}{2r^*} + \frac{b^{*2} (v - \epsilon_s^*) (1 - \cos \theta^*)}{r^*} - \frac{a_0^2 - b^{*2}}{a_0^2} \frac{2a^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin^2 \theta^* + A v_0^n (r^{*2} - r_0^2) \sin \theta^*}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} - \frac{b^{*2}}{a_0^2} y_1^n (1 + \epsilon_s^*) (1 + \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^*. \quad (2,26)$$

Интегрируя уравнение (2,2) от r_0 до r^* , находим

$$\frac{dv_0}{dt} = - \frac{2a_0^2 (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^* + A v_0^n (r^{*2} - r_0^2)}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1}. \quad (2,27)$$

Таким образом, поставленная задача сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для определения неизвестных r^* , ϵ_s^* , ϵ_φ^* , v_0 .

Эти уравнения будут следующие: (2,7), (2,22), (2,26) и (2,27). Начальные условия для этих уравнений определяются из условий на волне сильного разрыва при $t \rightarrow 0$.

Для определения деформации ϵ_{s_0} уравнение движения мембраны преобразуем к следующему виду:

$$a_0^2 \frac{\partial}{\partial r} [r(v - \epsilon_s)] = a_0^2 (v - \epsilon_\varphi) \cos \theta + r \sin \theta \frac{dv_0}{dt} + A y_1^n (1 + \epsilon_s) (1 + \epsilon_\varphi) r \cos \alpha. \quad (2,28)$$

Интегрируя от r_0 до r^* , получим ($\alpha = 90^\circ - \theta$):

$$a_0^2 r_0 \epsilon_{s_0} = a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) - a_0^2 (r^* - r_0) \epsilon_\varphi^* - a_0^2 r^* \epsilon_\varphi^* + 2 \frac{A A_1 v_0^n - a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^*}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} \bar{r} y_0. \quad (2,29)$$

Из полученного выражения очевидно, что $\epsilon_{s_0} > \epsilon_s^*$. Если (2,29) сравнить с результатом, полученным для гибкой нити, то можно прийти к заключению, что ϵ_{s_0} при малых интервалах времени убывает, достигая минимума, а затем возрастает.

В третьем расчетном случае, т. е. когда $\alpha = 0$, подставляя значение α в уравнение (2,2) и затем интегрируя от r_0 до r^* , получим:

$$\frac{dv_0}{dt} = - \frac{a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^* + A v_0^n \bar{r} y_0}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1}. \quad (2,30)$$

В рассматриваемом случае формула скорости деформации на волне сильного разрыва получает вид:

$$\left[2b^* + \frac{a_0^2(1 - v \epsilon_\varphi^*)}{2(1 + \epsilon_s^*)b^*} \right] (1 - \cos^*) \frac{d\epsilon_s^*}{dt} = \frac{(a_0^2 - b^{*2}) \cos \theta^* [(r_0 + a_0 t)^{1/2} (\epsilon_s^* + \epsilon_\varphi^*) - \epsilon_s^0 r_0^{1/2}]}{2r^{*1/2} (r_0 + a_0 t)^{1/2} [(r_0 + a_0 t)^{1/2} - r_0^{1/2}]} + \frac{a_0^2 v (1 - \cos \theta^*) [1 + \epsilon_\varphi^* - (1 + \epsilon_s^*) \cos \theta^*]}{2r^*} + \frac{b^{*2} (v - \epsilon_s^*) (1 - \cos \theta^*)}{r^*} - 2 \frac{a_0^2 - b^{*2}}{a_0^2} \frac{a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin^2 \theta^* + A v_0^n \bar{r} y_0 \sin \theta^*}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} - \frac{b^{*2}}{a_0^2} A y_1^n (1 + \epsilon_s^*) (1 + \epsilon_\varphi^*). \quad (2,31)$$

В этом случае, как и в двух предыдущих случаях, поставленная задача сводится к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения будут следующие: (2,7) (2,22), (2,30) и (2,31).

Деформация в точке удара определяется по следующей формуле:

$$a_0^2 r_0 \epsilon_{s_0} = a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) - \frac{a_0^2}{2} \epsilon_\varphi^* (r^* - r_0) - \bar{r} y_0 \frac{a_0^2 r^* (\epsilon_s^* + v \epsilon_\varphi^*) \sin \theta^* + A v_0^n \bar{r} y_0}{r^{*2} - r_0^2 + 2A_1} + \frac{A v_0^n}{2} (r^{*2} - r_0^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения. ПММ, 1945, т. IX, в. 6.
2. Рахматулин Х. А. Об одном приближенном методе решения динамической задачи упругости и пластичности (в печати).
3. Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити находящейся в сплошной среде (малые деформации). Изв. АН Азерб. ССР, 1960, № 5.
4. Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сопротивляющейся среде (большие деформации). Изв. АН Азерб. ССР, 1960, № 6.
5. Рахманов П. А. Об исследовании поперечного удара по гибкой пластине, находящейся в сплошной среде. ДАН Азерб. ССР, 1960, № 12.

**Енинə зəрбə заманы мугавимəтли мунитдə еластики мембранын
хəрəкəтинин тəдгиги**

ХУЛАСƏ

Мəгалədə мугавимəтин мунитдə мембранын хəрəкəт тənликлəринин еластик хал учун тəгриби метод илə хəлли берилмишдир. Ејни заманда зəрбə нөгтəсиндə вə кучлү кəсилмə сəтхиндə деформасияларын замандан асылы олараг дəјишмəsi арашдырылмышдыр.

Т. М. АСКЕРОВ

**РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОГО
СНАБЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ СНХ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
НА ЭЦВМ «УРАЛ-1»**

Состояние технических средств, используемых для решения задач учета и планирования, должно соответствовать уровню развития народного хозяйства. Нарушение этого соответствия приводит к тому, что получение данных учета и их обобщение отстают по времени от потребностей планирования, затрудняя управление народным хозяйством.

Широкие возможности открывает применение ЭЦВМ (электронная цифровая вычислительная машина) при руководстве промышленностью и планировании в совнархозах, причем не только с точки зрения повышения эффективности управленческого труда, но и качественного улучшения системы управления предприятиями. Одной из важнейших задач СНХ является своевременное комплексное и качественное обеспечение всех предприятий и строек экономического административного района необходимыми материальными ресурсами.

С целью выявления основных характеристик экономической информации, используемой при составлении планов материально-технического снабжения в СНХ Азербайджанской ССР была проведена соответствующая исследовательская работа. При составлении планов в отделы материально-технического снабжения (ОМТС) отраслевых управлений входит около 30 тыс. различных документов и информации. После соответствующей обработки этих документов полученная новая информация посредством около 50 тыс. документов в различные сроки распространяется по разным инстанциям. Всего по отраслевым управлениям около 160 типов (разновидностей) документов. Они содержат в себе максимум 40000 тыс. числовых данных. В табл. 1 приведены основные показатели этой информации по отраслевым управлениям. Соответственно, обработка такого объема информации требует выполнения трудоемкой работы и затраты большого времени.

В Вычислительном Центре АН Азербайджанской ССР была сделана первая попытка составления программы решения ряда задач материально-технического снабжения в системе СНХ Азербайджанской ССР для ЭЦВМ „Урал-1“.

Был произведен расчет потребностей в подшипниках „прочей группы“ для машиностроительного завода им. Сардарова и Кишлинского машиностроительного завода (КМЗ).

Таблица 1

Отраслевые управления СНХ Азерб. ССР	Колич. типов документов	Разрядность чисел		Объем числовых данных (в тыс.)	Примечание
		целая часть	дробная часть		
Управл. машиностроения	40	6	4	12200	
строительства	21	7	2	460	
электротехнической и приборостроительной промышленности	9	6	6	2300	
нефтеперераб. и химической промышленности	10	8	3	35	
энергетики	8	5	3	134	
„Азнефть“	12	6	5	1242	
легкой промышленности	9	6	2	948	
промстройматериалов	16	7	5	2300	
пищевой промышленности	10	7	4	2300	
мясомолочной промышленности	16	6	2	16600	
хлопкоочистительной промышленности и заготовки хлопка	10	5	3	195	
Итого	161			38714	

Примечание. Разрядности числовых данных взяты в единицах измерения, принятых в типовых документах. Данные 1962 г.

Постановка задачи. Для расчета потребностей в различных материальных ресурсах какой-либо отрасли должны быть известны исходные данные:

1. Применяемый метод расчета определения потребностей.

2. Прогрессивные нормы расхода материалов для производства различных видов изделий каждого предприятия.

3. Программа производства каждого предприятия.

В результате соответствующей обработки вышеуказанной исходной информации (пункты 2, 3) должны быть определены следующие показатели:

1. Квартальные потребности расхода материалов для производства отдельных видов изделий.

2. Годичные потребности расхода материалов для производства отдельных видов изделий.

Вышеуказанное в виде блок-схемы изображено на рис. 1.

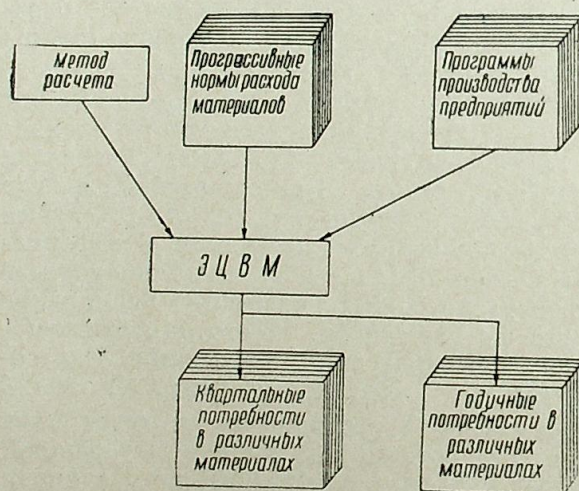


Рис. 1

Формулы расчета

Введем следующие обозначения:

α —шифр завода;

μ —шифр потребляемого материала;

β —шифр изделия;

$N_{\alpha\beta j}$ —объем выпускаемого изделия β заводом α в j -ом квартале, где $j=1; 2; 3; 4$;

$N_{\alpha\beta 0}$ —годовой объем выпускаемого изделия β заводом α .

Применяя наиболее точный метод определения потребностей в различных материальных ресурсах—метод прямого счета, получим:

1. Квартальные потребности завода α в материале μ для выпуска изделия β :

$$P_{\alpha\beta j}^{\mu} = N_{\alpha\beta j} \cdot a_{\alpha\beta\mu} \dots \quad (I),$$

где $j=1; 2; 3; 4$.

$a_{\alpha\beta\mu}$ —норма расхода материала μ для производства единицы изделия β заводом α .

2. Годичную потребность завода α в материале μ для производства изделия β

$$P_{\alpha\beta 0}^{\mu} = \sum_{j=1}^4 P_{\alpha\beta j}^{\mu} \dots \quad (II).$$

Данная задача может быть решена в двух вариантах:

а) при постоянной μ для различных видов изделий (она зависит непосредственно от номенклатуры выпускаемых изделий предприятием);

б) при постоянной β для различных потребляемых материалов μ .

Возможность решения задачи над выбранной ЭЦВМ

При постановке вопроса решения какой-либо планово-экономической задачи в первую очередь рассматривается возможность ее решения на выбранной ЭЦВМ, так как предельная емкость системы памяти машины ограничивает ее применение для решения вышеуказанного типа задач.

Определим возможно максимальный объем исходной информации для решения данной задачи для всех заводов (их 22) Управления.

Для данной задачи максимальная разрядность всех числовых данных не превышает трех десятичных разрядов. Это создает возможность записи каждого числа в одну неполную ячейку оперативной памяти ЭЦВМ „Урал-1“.

Определим максимальный объем исходной информации и предельную емкость системы памяти „Урал-1“.

1. Объем числовых данных в программах производства заводов: в единице—200 чисел

итого—4400 чисел.

2. Объем числовых данных в нормах расхода материалов заводов (в данном случае только подшипников „прочей группы“):

в единице—90 чисел (с типами подшипников)

итого—1980 чисел.

Параметры системы памяти ЭЦВМ „Урал-1“:

1. Оперативная память на магнитном барабане—2048 неполных чисел.

2. Дополнительная память на магнитной ленте—40000 полноразрядных чисел (9-и разрядных десятичных чисел).

В результате общий объем исходной информации около 6500 чисел, общий объем системы памяти ЭЦВМ—41024 полноразрядных чисел.

Значит данная задача может быть решена для всех заводов отрасли сразу.

Программа решения составлена таким образом, что задача может быть решена как для одного, так и для любого количества заводов отрасли.

В нашем случае эта задача решена только для двух заводов управления.

Система кодирования

Выпускаемые изделия кодируются следующим образом.

Первые три старших разряда являются признаком кода выпускаемого изделия, а последние три — его порядковым номером в восьмеричной системе счисления.

Например, изделие завода им. Сардарова ВП-4 кодируется кодом 100030.

Здесь старшие три разряда (100) являются признаком выпускаемого изделия, а последние три—его порядковым номером в восьмеричной системе счисления. Так как данная задача решается для каждого завода в отдельности, то принятые коды выпускаемых изделий для различных заводов остаются одни и те же.

Декодирование этих кодов производится для разных заводов соответствующими ключами, составленными для каждого завода в отдельности. В табл. 2 приведен пример кодирования изделий для двух заводов. Различные типы потребляемых подшипников кодируются следующим образом.

Таблица 2

З-д им. Сардарова	КМЗ	Код
	изделие	
ВП-4	УРБ-2т н/т	100030
СКР-650	АВБ-Т	100031
У2-4-5 кал/р	УРБ-2А	100032

Таблица 3

З-д им. Сардарова	КМЗ	Код
	тип подшипника	
110	130	177001
205	205	177002
212	210	177007

Первые три старших разряда являются признаком кода потребляемого материала, а последние три—его порядковым номером в восьмеричной системе счисления.

Например, подшипник типа 110, потребляемый заводом им. Сардарова, кодируется кодом 177001.

Здесь старшие три разряда (177) являются признаком кода потребляемого материала, а остальные три младших—его порядковым номером в восьмеричной системе счисления. Эти коды для различных заводов также считаются одними и теми же. В табл. 3 приведен пример кодирования потребляемых подшипников для двух заводов.

Ввод числового материала в память машины

ЭЦВМ „Урал-1“ может работать на двух режимах:

1. Режим „фиксированной запятой“.

2. Режим „плавающей запятой“

Так как при решении на ЭЦВМ планово-экономических задач приходится оперировать очень большим количеством исходных данных, то выбор режима работы машины имеет особо важное значение. В режиме „фиксированной запятой“ приходится применять так называемые „масштабные коэффициенты“, что значительно затрудняет процесс программирования задачи, а в режиме „плавающей запятой“ как бы увеличивается в два раза объем исходных данных (мантиссы и порядок числа). Соответственно, при переводе чисел перед расчетом из двоично-десятичной системы счисления в двоичную в первом случае затрачивается в два раза меньше машинного времени, чем во втором. При решении вышеуказанных задач на ЭЦВМ „Урал-1“ был принят первый режим—режим „фиксированной запятой“.

Таблица 4

Программа производства
з-да им. Сардарова

Изделие	Программа				Примечание
	I	II	III	IV	
ВП-4	38	38	37	37	
СКР-650	37	37	38	38	
У2—4-5	3	3	3	3	
и т. д.					

Нормы расхода материала КМЗ

Изделие	Материалы и нормы				
	под- шип- ники	норма	сталь	норма	и т.д.
УРБ-2т н/т	130	2			
АВБ-Т	205	1			
УРБ-2А	207	4			
и т. д.					

Программа была заперфорирована в третьей зоне перфоленты, которая при вводе в НМБ заняла ячейки от 0020 до 0325 (адреса ячеек в восьмеричной системе счисления). Для перфорации программ производства заводов и норм расхода материалов на перфоленте они были представлены в ВЦ в следующих видах (см. табл. 4).

Программа производства каждого завода и его норма расхода материалов была заперфорирована в последовательные зоны перфоленты (зоны № 4 и № 5). Для удобства оперирования кодами и числами они были заперфорированы на ленту так, как показано на рис. 2. Будем их называть, соответственно, картой программы производства—КПП и картой норм расхода—КНР завода. Конец КПП и КНР обозначается ячейкой, в которой заперфорировано число 177777.

КПП		КНР	
Код изделия	План I квартала	Код изделия	Код материала
— " II —	— " III —	Норма	Код материала
— " IV —	Код изделия	Норма	Код изделия
План I квартала	План I квартала	Код материала	Код материала
— " II —	— " III —	Норма	Норма
и т. д.	и т. д.	и т. д.	и т. д.

Рис. 2

Описание расширенного алгоритма решения задачи при помощи операторов в виде логической схемы

А—арифметический оператор.

Р—логический оператор.

О—оператор восстановления.

Z —оператор пересылки.
 H —нестандартный оператор.
 $Я$ —остановка машины.
 $П$ —оператор печати.
 $\Gamma; L_j$ —передача управления на оператор j .
 $\Gamma; L_k$ —получение управления от оператора k .
 Z_1 —ввод программы решения.
 A_2 —контрольное суммирование программы.
 P_3 —определение повторного ввода.
 O_4 —восстановление ячеек для последующего контрольного суммирования.
 P_5 —сравнение контрольных сумм.
 $Я_6$ —остановка машины при несовпадении контрольных сумм программы.
 Z_7 —ввод КПП и КНР.
 A_8 —контрольное суммирование КПП и КНР.
 P_9 —определение повторного ввода КПП и КНР.
 P_{10} —сравнение контрольных сумм КПП и КНР.
 R_{11} —остановка машины при несовпадении контрольных сумм КПП и КНР.
 P_{12} —нахождение в КПП признака кода выпускаемого изделия (100).
 $П_{13}$ —печать кода выпускаемого изделия.
 P_{14} —сравнение кода выпускаемого изделия КПП и КНР.
 P_{15} —нахождение признака кода потребляемого материала в КНР (177).
 $Я_{16}$ —остановка машины при ненахождении кода выпускаемого изделия в КНР (нет нормы).
 $П_{17}$ —печать кода потребляемого материала.
 P_{18} —выборка нормы из КНР и запись ее в рабочую ячейку.
 H_{19} —вход в программу и перевод чисел из 2/10 — 2 в систему счисления.

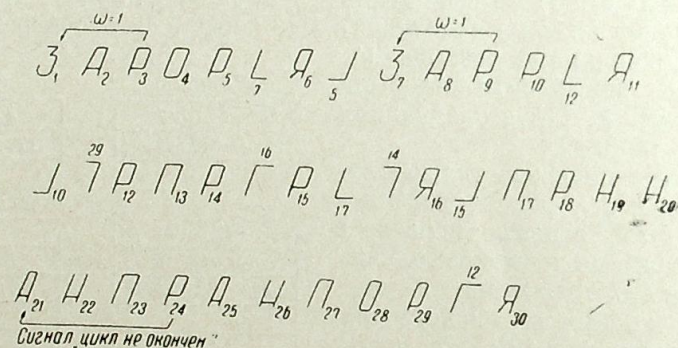


Рис. 3

H_{20} —начало циклической операции.
 A_{21} —расчет по формуле (I).
 H_{22} —перевод результата из 2→10/2 систему счисления (предварительно запоминая ее во 2-ой системе счисления).
 $П_{23}$ —печать квартальной потребности.
 P_{24} —определение конца цикла.
 A_{25} —расчет по формуле (II).

H_{26} —перевод результата из 2→10/2 систему счисления.
 H_{27} —печать годичной потребности.
 O_{28} —восстановление ячеек для последующего расчета.
 P_{29} —проверка конца задачи.
 $Я_{30}$ —остановка машины при окончании расчетов.
 Данная задача решалась для обоих заводов в течение 14 мин. Логическая схема программы дана на рис. 3.

Выводы

1. При наличии в ВЦ КПП и КНР всех заводов отрасли эту задачу возможно решить в среднем в течение 10 минут для каждого завода.
2. В ОМТС УМ СНХ Азербайджанской ССР имеется 8 групп по различным материалам и 22 завода. В течение 22 часов (не более двухдневной работы машины) можно решить данную задачу для всей отрасли.
3. При решении данной задачи на ЭЦВМ возможно сэкономить 30—35% затрат по управлению на составление планов материально-технического снабжения.

Т. М. Эскеров

Азәрбајҹан ССР Халг Тәсәррүфаты Шурасы системиндә бир мадди-техники тәһизат мәсәләсинин „Урал-1“ электрон рәғәмһесаблајычы машынында һәлли

ХҮЛАСӘ

Сон илләр өлкәмиздә халг тәсәррүфатынын мүхтәлиф сәһәләриндә идарә вә учот ишләринин апарылмасында чәлдишләјән электрон-рәғәмһесаблајычы машынларын тәтбиг едилмәси чәһдләри кәстәрилир.

Тәгдим олунан мәгаләдә илк дәфә олараг Халг Тәсәррүфаты Шурасы системиндә мадди-техники тәһизат планларынын тәртиб едилмәси просесинин јалныз бир һиссәсиндә һәмин машынлардан биринин („Урал-1“) нә чүр истифадә олунмасы материаллары шәрһ едилмишдир.

Азәрбајҹан ССР ЕА һесаблама Мәркәзиндә олан „Урал-1“ машынында Азәрбајҹан ССР Халг Тәсәррүфаты Шурасынын Машынгајырма Идарәсинин бир нечә заводу үчүн бир груп подшипникләрә олан тәләбат һесабланмышдыр. Бунун үчүн машынын јаддашына дахил олуначаг информасијанын кодлашдырылмасы, онун јаддаш дахилиндә ишләнилмәсинин мәнтиг схемләри, һесаблама дүстурлары вә бу кими мәсәләләр нәзәрдән кечирилмишдир. Нәтичәдә тәләбаты тәјин етмәк үчүн лазым олан алгоритм вә програм тәртиб едилмишдир. һәмин мәсәлә һәр завод үчүн орта һесабла 10 дәгигә әрзиндә һәлл олунмушдур.

Ю. А. МАХМУДОВ, Ф. А. АТАМОВ, Т. А. БАДАЛОВ

УСТРОЙСТВО РУЧНОГО ВВОДА ЧИСЕЛ В ЦВМ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ИХ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ

На практике обычно пользуются десятичными числами. Но десятичная система неудобна для использования в цифровых вычислительных машинах (ЦВМ). В основном в настоящее время в ЦВМ используется двоичная система счисления.

В цифровых машинах обычно при вводе десятичные числа после преобразования записываются в запоминающее устройство машины в двоично-десятичном коде. Перед выполнением операции эти числа по стандартной подпрограмме переводятся в двоичную систему. Все это приводит к нерациональному использованию внутренней памяти машины, так как, во-первых, двоично-десятичная запись числа длиннее его двоичной записи и значит разрядность памяти надо брать больше, чем разрядность двоичного числа, которыми оперирует машина, во-вторых, некоторое количество ячеек памяти отводится под стандартную подпрограмму для перевода двоично-десятичных чисел в двоичные. Кроме того, операция перевода занимает много времени, поэтому в специализированных машинах целесообразно исходные данные переводить в двоичную систему непосредственно на входе машины.

В данной статье описывается устройство для перевода десятичных чисел (дробей) в двоичные с ручным вводом чисел. Устройство рассчитано на семиразрядное десятичное число, что соответствует двадцатитрехразрядному двоичному числу. В принцип работы устройства положен следующий алгоритм перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную.

Обозначим через $A=0, u_1 u_2 u_3 \dots u_7$ двоично-десятичное число, а через B —двоичное изображение числа A , где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_7$ —двоичные тетрады десятичных цифр.

Не трудно убедиться, что

$$B = u_1 \cdot 10^{-1} + u_2 \cdot 10^{-2} + u_3 \cdot 10^{-3} + \dots + u_7 \cdot 10^{-7},$$

где $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-7}$ должны быть представлены в двоичной системе счисления. Таким образом, принцип работы устройства заключается в следующем. По мере введения десятичных цифр в устройство они преобразовываются в двоичные тетрады, умножаются в дво-

Ю. А. МАХМУДОВ, Ф. А. АТАМОВ, Т. А. БАДАЛОВ

УСТРОЙСТВО РУЧНОГО ВВОДА ЧИСЕЛ В ЦВМ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ИХ ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДВОИЧНУЮ

На практике обычно пользуются десятичными числами. Но десятичная система неудобна для использования в цифровых вычислительных машинах (ЦВМ). В основном в настоящее время в ЦВМ используется двоичная система счисления.

В цифровых машинах обычно при вводе десятичные числа после преобразования записываются в запоминающее устройство машины в двоично-десятичном коде. Перед выполнением операции эти числа по стандартной подпрограмме переводятся в двоичную систему. Все это приводит к нерациональному использованию внутренней памяти машины, так как, во-первых, двоично-десятичная запись числа длиннее его двоичной записи и значит разрядность памяти надо брать больше, чем разрядность двоичного числа, которыми оперирует машина, во-вторых, некоторое количество ячеек памяти отводится под стандартную подпрограмму для перевода двоично-десятичных чисел в двоичные. Кроме того, операция перевода занимает много времени, поэтому в специализированных машинах целесообразно исходные данные переводить в двоичную систему непосредственно на входе машины.

В данной статье описывается устройство для перевода десятичных чисел (дробей) в двоичные с ручным вводом чисел. Устройство рассчитано на семиразрядное десятичное число, что соответствует двадцатитрехразрядному двоичному числу. В принцип работы устройства положен следующий алгоритм перевода чисел из десятичной системы счисления в двоичную.

Обозначим через $A=0, u_1 u_2 u_3 \dots u_7$ двоично-десятичное число, а через B —двоичное изображение числа A , где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_7$ —двоичные тетрады десятичных цифр.

Не трудно убедиться, что

$$B = u_1 \cdot 10^{-1} + u_2 \cdot 10^{-2} + u_3 \cdot 10^{-3} + \dots + u_7 \cdot 10^{-7},$$

где $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots, 10^{-7}$ должны быть представлены в двоичной системе счисления. Таким образом, принцип работы устройства заключается в следующем. По мере введения десятичных цифр в устройство они преобразовываются в двоичные тетрады, умножаются в дво-

ичной системе на 10 с соответствующим отрицательным показателем степени и результаты умножения складываются.

В этом способе точность преобразования зависит от разрядности двоичного представления указанных констант.

Было определено, что для получения точных 23-двоичных разрядов переводимого числа достаточно представление констант с 28-двоичными разрядами.

На рис. 1 показана блок-схема устройства, которая состоит из: преобразователя десятичного кода в двоично-десятичный; датчика кодовых импульсов; входного распределителя разрядов числа; переключателя адресов констант; датчика констант; суммирующего звена с запоминающим регистром; выходного узла.

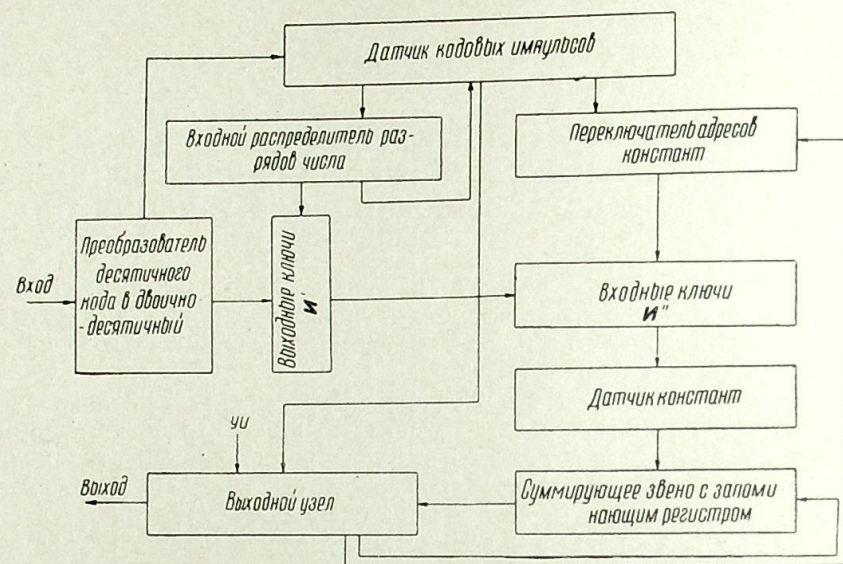


Рис. 1

Десятичное число вводится в устройство последовательно, начиная со старшего разряда. После введения первого старшего разряда преобразователь десятичного кода в двоично-десятичный преобразовывает десятичную цифру в ее двоичный эквивалент—тетраду.

Так как это есть старший разряд десятичного числа, то он должен умножаться на 10^{-1} . Значит надо возбуждать соответствующую входную шину датчика констант. С этой целью используется переключатель адресов констант, который после набора каждого разряда десятичного числа включает соответствующую шину.

Умножение выбранной константы на двоичную тетраду десятичного разряда осуществляется сдвигом множимого (константы) влево и последовательным суммированием частных произведений. Сдвиг осуществляется при помощи элементов задержки. Поскольку множитель содержится в четырехразрядном двоичном счетчике, то схематически это выполняется простым включением элементов $П$ на выходах элементов $И'$ (в количестве $n-1$, где n —номер разряда тетрады), которые стоят на выходе каждого разряда счетчика.

Частные произведения образуются, начиная с младшего разряда. Поэтому ключи $И'$ должны опрашиваться последовательно, начиная с младшего разряда счетчика, для чего используется входной распре-

делитель разрядов числа. Выходы ключей $И'$ через соответствующие элементы задержки соединены с входными ключами $И''$ датчика констант, которые управляются от переключателя адресов констант. Импульсы с выхода $И''$ попадают на выбранную шину датчика констант, на выходе которого получается частное произведение.

Таким образом, складывая частные произведения, в запоминающем регистре получаем произведение выбранной константы на тетраду введенного десятичного разряда. Аналогично производится преобразование следующих разрядов.

Допустим, что вводимое число $A=0,546...$, следовательно, в первую очередь вводится цифра 5. Значит в счетчике содержится 0101. После этого управляющим импульсом запускается датчик кодовых импульсов, который, в свою очередь, выдает управляющие импульсы для входного распределителя разрядов числа и переключателя адресов констант. Переключатель адресов констант возбуждает входной ключ датчика констант соответствующий 10^{-1} .

Входной распределитель разрядов числа начинает опрашивать ключи $И'$ на выходах счетчика. Так как в нашем примере в первом младшем разряде содержится единица, то импульс с выхода первого ключа $И'$ попадает на шину 10^{-1} датчика констант, который посылает двоичную запись 10^{-1} на сумматор. Через цикл при опросе второго ключа $И'$ на выходе импульс не вырабатывается, так как в соответствующем втором разряде тетрады содержится 0. В третьем цикле импульс с выхода ключа $И'$ после задержки на два такта поступает на вход датчика констант. Задержка этого импульса на два такта соответствует умножению выбранной константы на четыре.

Поскольку разрядность констант равняется 28, то и каждое следующее слагаемое должно поступать на вход сумматора последовательного действия через каждые 28 тактов, т. е. цикл равняется 28 тактам. Поэтому датчик кодовых импульсов вырабатывает импульсы частотой $1:28$.

При вводе второго десятичного разряда запускается датчик кодовых импульсов, выбирается входной ключ датчика констант, соответствующий 10^{-2} , двоичное изображение 10^{-2} умножается на двоичную тетраду второго десятичного разряда, результат складывается с содержимым сумматора и т. д. Процесс протекает аналогичным образом и после ввода последней десятичной цифры в устройство подается управляющий импульс на выдачу двоичной записи переведенного десятичного числа.

Рассмотрим несколько подробнее работу отдельных узлов устройства (рис. 2). В схеме использованы феррит-диодные элементы типов $И$; $Р$; $З$; $Т$; $П$, подробно описанные в [1].

Преобразователь десятичного кода в двоично-десятичный состоит из первичного вводного узла, который выдает одиночные импульсы в количестве, равном набираемой цифре, и четырехразрядного двоичного счетчика, который считает эти одиночные импульсы. Содержимое счетчика представляет собой двоичную тетраду вводимой десятичной цифры.

В качестве первичных вводных узлов вообще могут применяться различного рода клавиатуры, цифровые диски, 10-позиционные поворотные переключатели или устройства типа диска наборов телефона АТС. В данном устройстве в качестве вводного узла используется диск наборов телефона. При наборе цифр от 1 до 9 контакты I и $З$ замыкаются таким образом, что по отношению I (желтого) и II (красного) провода дают размыкания, количество которых равно набираемой цифре (рис. 3). При наборе же нуля получается 10 размыканий.

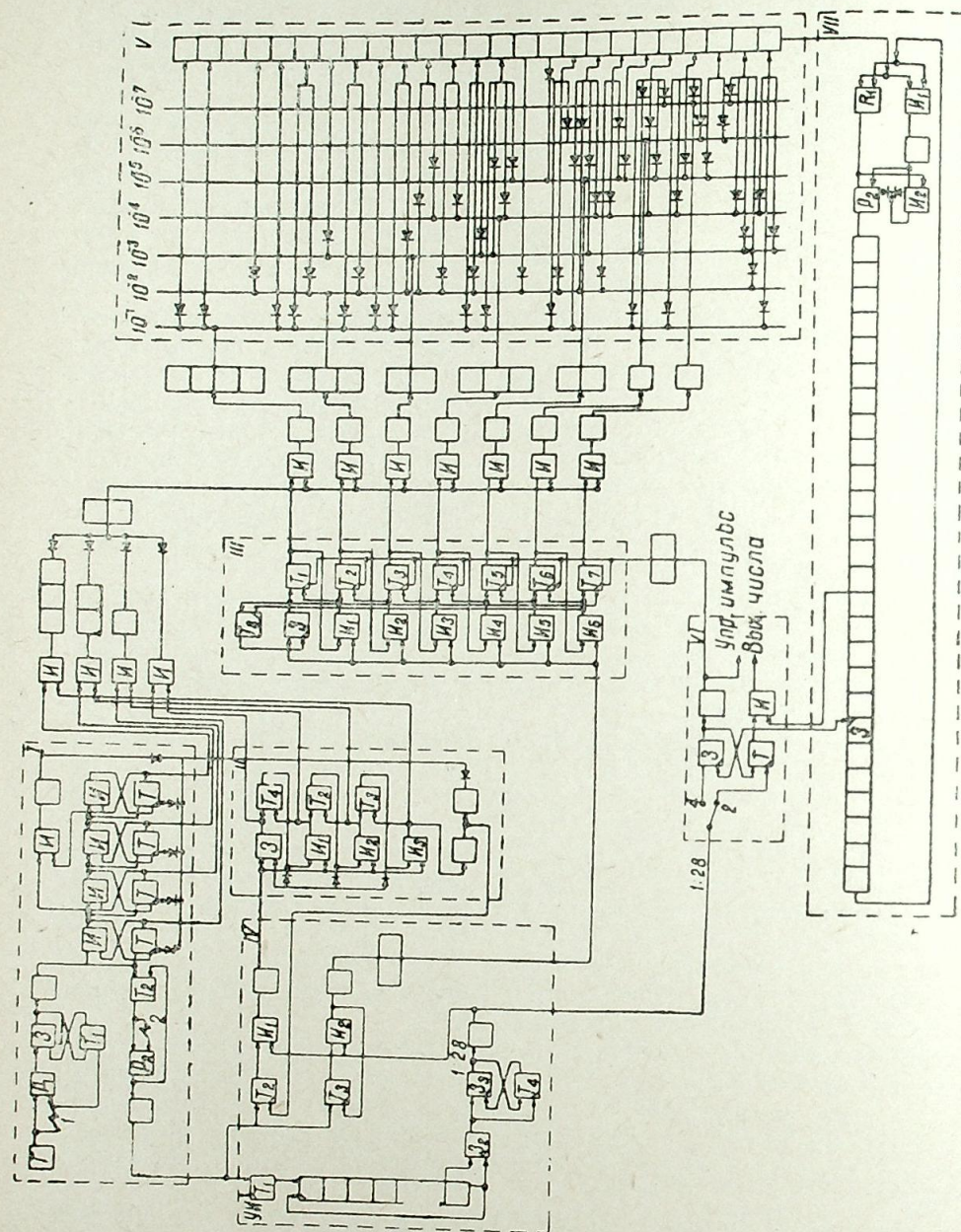


Рис. 2

В исходном состоянии контакты 1 замкнуты, а контакты 2 разомкнуты. Поэтому импульсы с выхода генерирующей ячейки Г не проходят на выход P_1 (рис. 2—I). После первого размыкания контактов 1 на входе P_1 получается серия импульсов, на выходе же 3 из этой серии выделяется только первый импульс. Одиночный импульс с выхода 3 после усиления на элементе П запускает триггер T_2 и поступает на вход счетчика из элементов И и Т, в котором образуется тетрада десятичной цифры. Поскольку контакты 2 пока замкнуты, то генерация триггера T_2 не проходит на выход элемента P_2 . После замыкания контактов 1 гасится триггер T_1 , и поэтому при втором размыкании на выходе 3 опять получается одиночный импульс. После последнего размыкания и замыкания контактов 1, размыкаются контакты 2, на выходе P_2 получается два импульса, которые используются как управляющие. Триггер T_2 гасится от импульсов с выхода P_2 . Таким образом, после набора одной десятичной цифры схема приходит в первоначальное состояние.

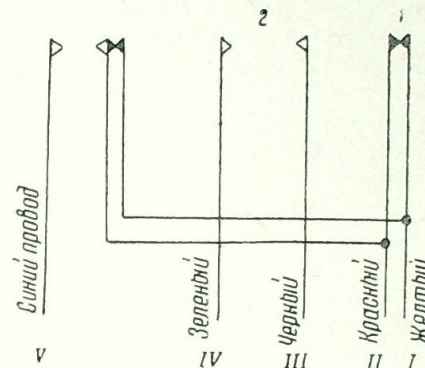


Рис. 3

Так как в данном вводимом узле нуль соответствуют десять импульсов, то в схеме четырехразрядного счетчика предусмотрена цепь сброса содержимого счетчика при наборе нуля.

Входной распределитель разрядов числа [2] (рис. 2—II) необходим для образования частных произведений. Так как десятичная цифра представляется четырьмя двоичными разрядами, то и схема входного распределителя разрядов числа имеет четыре выхода. На вход схемы импульсы 1:28 поступают от датчика кодовых импульсов. Первый импульс проходит только через элемент 3 и запускает триггер T_1 , который подготавливает элемент I_1 и запрещает прохождение следующего импульса через элемент 3. Второй импульс проходит через элемент I_1 , запускает триггер T_2 , гасит T_1 и запрещает прохождение следующего импульса на выход 3 и т. д.

Таким образом, первый импульс 1:28 получается на выходе 3, второй на выходе I_1 , третий на выходе I_2 и четвертый на выходе I_3 . Последний импульс с выхода I_3 поступает также на вход датчика кодовых импульсов для прекращения подачи импульсов 1:28 и на счетчик для сброса.

Переключатель адресов констант работает следующим образом (рис. 2—III). После каждого набора десятичной цифры на вход схемы подается одиночный импульс от датчика кодовых импульсов. Первый импульс проходит через элемент 3 и запускает триггеры T_1 и T_8 . Выход T_8 соединен с запрещающим входом элемента 3. Второй импульс проходит через I_1 , запускает T_2 и гасит T_1 и т. д.

Выходы триггеров T_1-T_7 соединены с соответствующими входными ключами адресных шин датчика констант.

Датчик кодовых импульсов служит для получения управляющих импульсов с частотой 1:28, необходимых для синхронной работы всего устройства.

С каждым набором десятичных разрядов на вход схемы подаются управляющие импульсы, которые запускают триггеры T_1 , T_2 и T_3 .

Как видно из схемы (рис. 2—IV), на выходе элемента Π_6 получается семь единиц и семь нулей. Из этих семи единиц на выход элемента Z_2 проходит только первая. Таким образом, на выходе Z_2 получается одна единица и 13 нулей, что соответствует коду с частотой 1:14. Затем эти импульсы с выхода Z_2 поступают на вход делителя частоты 1:2 (Z_3 и T_4), на выходе которого получают импульсы кода 1:28. Как было сказано выше, при каждом наборе десятичной цифры для работы входного распределителя разрядов числа необходимо четыре импульса 1:28 и для переключателя адресов констант один. Эти импульсы получают, соответственно, на выходах элементов I_1 и I_2 .

Датчик констант состоит из диодов и простых элементов Π (рис. 2—V). Простые элементы соединены последовательно и представляют собой регистр. Датчик констант имеет семь адресных шин. Диоды каждой шины включены в те входы регистра, которые соответствуют разрядам, содержащим 1.

Одиночный импульс, поданный на выбранную адресную шину, проходит на выход регистра как двоичная запись константы, соответствующей выбранной шине.

Узел вывода необходим для того, чтобы выдать двоичное изображение переведенного десятичного числа, начиная с младшего разряда, причем не все 28 разрядов числа (которыми оперирует описанное устройство), а его 23 разряда (согласно разрядности машины).

Выводной узел действует по команде „выдача“, для осуществления которой в схеме имеются кнопочные контакты (рис. 2—VI). На среднюю точку кнопки подаются импульсы с частотой 1:28 от датчика кодовых импульсов.

В исходном состоянии кнопка находится в положении 2. При команде „выдача“ она переводится в положение 1. При этом первый импульс 1:28 проходит через элемент 3 и запускает T , который запрещает последующие импульсы 1:28 на входе 3. Импульс с выхода 3 после усиления поступает на переключатель адресов констант для гашения триггеров (наличие такого гашения позволяет не вводить последние нулевые цифры вводимого числа). Элемент I служит для выдачи числа на выход устройства. Число на выход I подается начиная с шестого разряда (отбрасываются первые пять младших разрядов). Содержимое сумматора стирается импульсами триггера T .

Следует отметить, что описанное устройство может успешно применяться и для ввода целых чисел. При этом необходимо изменить только содержимое датчика констант.

Рассмотренное устройство может быть использовано также для автоматического преобразования двоично-десятичных чисел в двоичную систему при вводе их с перфолент, перфокарт или других внешних накопителей информации.

Вышеописанное устройство разработано в Вычислительном центре АН Азербайджанской ССР. Оно выполнено на серийно выпускаемых феррит-диодных элементах. Испытания показали надежную работу устройства. В нем использовано 166 магнитных элементов, из них 102 простых накопительных, 64 логических. Потребляемая мощность около 25 Вт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Авдеев Л. М., Корольков В. Анализ работы и расчет магнитных феррит-диодных элементов для цифровых вычислительных машин. АН СССР, 1962.
2. Махмудов Ю. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. наук“, 1958, № 6.
3. Ричардс Р. К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. ИЛ, 1957.

Ж. А. Махмудов, Ф. А. Атамов, Т. А. Бадалов

Әдәлләри әл илә рәгәм һесаблајычы машина дахил етмәк
вә онлары автоматик олараг онлуг сај системиндән икилик
сај системинә кечирмәк үчүн гурғу

ХҮЛАСӘ

Адәтән күндәлик ади һесабламаларда онлуг сај системиндән истифадә олунур. Лакин онлуг систем рәгәм һесаблајычы машинларда (РМ) әдәлләри тәсвир етмәк үчүн әлверишли дејилдир; одур ки, бу машинларда үмумијјәтлә икилик сај системиндән истифадә олунур.

Мөвчуд рәгәм һесаблајычы машинларда онлуг әдәлләри дахил едәркән, онлар мүүјән чевирмәдән сонра машинын јаддаш гурғусуна икилик-онлуг кодунда јазылыр. Мәсәләннн һәллинә башламаздан әввәл бу әдәлләр хүсуси стандарт програм васитәсилә икилик сај системинә кечирилир.

Мә'лум олдуғу кими, әдәдин икилик-онлуг системиндә коду онун икилик системиндәки кодуна нисбәтән даһа узундур. Одур ки, әдәлләр машинын дахили јаддаш гурғусунда даһа чох јер тутур. Бу исә јаддаш гуручусунун сәмәрәсиз јүкләнмәсинә сәбәб олур. Дикәр тәрәфдән, әдәлләрнн икилик-онлуг системдән икилик системинә кечирилмәсинә чох машин вахты сәрф едилир.

Ихтисаслашдырылмыш машинларда онлуг әдәлләрнн икилик сај системинә чеврилмәси әмәлијјатыны билаваситә машинын киришиндә апармаг даһа мәгсәдәүјүндур.

Мәгаләдә әдәлләри, онлуг системдән икилик системинә автоматик олараг чевирмәклә, рәгәм һесаблајычы машинларда әллә дахилетмә гурғусу тәсвир олунур.

Әдәлләри автоматик олараг онлуг системдән икилик системинә кечирмәк үчүн ишләнмиш схемдә ашағыдакы алгоритмдән истифадә олунмушдур.

Икилик-онлуг әдәдини $A = 0u_1u_2...u_n$ илә, A әдәдиннн икилик системиндәки јазылышыны B илә ишарә едәк. Бурада $u_1, u_2, ..., u_n$ — онлуг рәгәмләрннә еквивалент олан икилик дөрдлүкләрдир.

Ајдындыр ки,

$$B = u_1 \cdot 10^{-1} + u_2 \cdot 10^{-2} + ... + u_n \cdot 10^{-n},$$

бурада $10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-n}$ икилик сај системиндә тәсвир олунмалыдыр. Беләликлә, гурғунун иш принципи ашағыдакындан ибарәтдир: онлуг рәгәмләр гурғуја дахил едилдикчә онлар икилик системиндә дөрдлүкләрлә (тетрадаларла) әвәз едилир, икилик сај системиндә 10-ун ујғун мәнфи үстлү гүввәтинә вурулур вә вурмадан алыннн һасилләр бир-бирләри илә топланыр.

Мәгаләдә бахылан гурғу әсас е'тибарилә илк кириш блокундан вә әдәлләри икилик системинә автоматик олараг чевирән схемдән ибарәтдир. Илк кириш блоку кими телефонун нөмрәјығанындан истифадә едилмишдир. Лакин верилмиш схем әдәлләри автоматик олараг перфолент, перфокарт вә дикәр харици јаддаш гурғуларындан да машина дахил етдикдә онлары икилик системинә чевирмәк үчүн истифадә олуна биләр.

Гејд етмәк ләзимдыр ки, мәгаләдә тәсвир едилмиш гурғу нәинки кәср әдәлләри, һәмчинин там әдәлләри икилик системинә чевирмәјә имкан верир.

Гурғу Азәрбајҗан ССР ЕА-нын һесаблама Мәркәзиндә ишләнмиш, һазырланмыш вә сынагдан кечирилмишдир. Схем магнит (феррит) элементләриндән јығылмышдыр. Схемдә 166 магнит елементи истифадә едилмишдир, онлардан 102-си садә, 64-ү исә мәнтиги элементдир.

Ф. М. ГАШИМЗАДЕ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДЫРОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СТРУКТУРОЙ ХАЛЬКОПИРИТА

Среди тройных полупроводниковых соединений заметное место принадлежит соединениям, имеющим структуры подобные сфалериту. В сфалерите атомы металла и металлоида образуют между собой 4 связи ковалентного типа. Эти связи образуются за счет гибридизации внешних s и p электронов обоих атомов. Гибридизация происходит таким образом, что одна s -функция делится поровну между тремя p -функциями.

Анализ характера химической связи в соединениях с халькопиритной решеткой указывает на возможность sp^3 -гибридизации внешних электронов в этих структурах [2]. Кристаллическая структура халькопирита показана на рис. 1. Элементарная ячейка состоит как бы из удвоенной по высоте ячейки типа сфалерита. Координаты атомов в решетке, в предположении, что $c/a = 2$, следующие:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $A(a/2 \ a/2 \ 0)$ | 2. $A(0 \ a/2 \ a/2)$ |
| 1. $B(0 \ 0 \ 0)$ | 2. $B(a/2 \ 0 \ a/2)$ |
| 1. $X(-a/4 \ a/4 \ a/4)$ | 2. $X(a/4 - a/4 \ a/4)$ |
| 3. $X(a/4 \ a/4 - a/4)$ | 4. $X(-a/4 - a/4 - a/4)$ |

Здесь A и B —атомы металла, X —металлоидный атом.

Общая формула соединений с халькопиритной структурой: ABX_2 .

Для расчета энергетического спектра дырок в полупроводниках с преимущественно ковалентным характером химической связи хорошим приближением является метод локализованных орбит (эквивалентных орбит). В этом методе предполагается, что электроны, участвующие в связи, локализованы вдоль валентных штрихов, направленных, связывающих данный атом в решетке с его ближайшими соседями. Волновая функция электрона ищется в виде разложения по блоховским функциям, составленным из орбит (координатной части волновой функции электрона), локализованных вдоль этих направлений. Орбиты, отличающиеся друг от друга только ориентацией в пространстве и имеющие одинаковое распределение заряда, называются эквивалентными. Отсюда и другое название метода,

Локализованные орбиты удовлетворяют уравнениям [1]:

$$\hat{H}\varphi_m - \sum_n e_{mn}\varphi_n = 0, \quad (1)$$

Ф. М. ГАШИМЗАДЕ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДЫРОК В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СТРУКТУРОЙ ХАЛЬКОПИРИТА

Среди тройных полупроводниковых соединений заметное место принадлежит соединениям, имеющим структуры подобные сфалериту. В сфалерите атомы металла и металлоида образуют между собой 4 связи ковалентного типа. Эти связи образуются за счет гибридизации внешних s и p электронов обоих атомов. Гибридизация происходит таким образом, что одна s -функция делится поровну между тремя p -функциями.

Анализ характера химической связи в соединениях с халькопиритной решеткой указывает на возможность sp^3 -гибридизации внешних электронов в этих структурах [2]. Кристаллическая структура халькопирита показана на рис. 1. Элементарная ячейка состоит как бы из удвоенной по высоте ячейки типа сфалерита. Координаты атомов в решетке, в предположении, что $c/a = 2$, следующие:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $A(a/2 \ a/2 \ 0)$ | 2. $A(0 \ a/2 \ a/2)$ |
| 1. $B(0 \ 0 \ 0)$ | 2. $B(a/2 \ 0 \ a/2)$ |
| 1. $X(-a/4 \ a/4 \ a/4)$ | 2. $X(a/4 - a/4 \ a/4)$ |
| 3. $X(a/4 \ a/4 - a/4)$ | 4. $X(-a/4 - a/4 - a/4)$ |

Здесь A и B —атомы металла, X —металлоидный атом.

Общая формула соединений с халькопиритной структурой: ABX_2 .

Для расчета энергетического спектра дырок в полупроводниках с преимущественно ковалентным характером химической связи хорошим приближением является метод локализованных орбит (эквивалентных орбит). В этом методе предполагается, что электроны, участвующие в связи, локализованы вдоль валентных штрихов, направлений, связывающих данный атом в решетке с его ближайшими соседями. Волновая функция электрона ищется в виде разложения по блоховским функциям, составленным из орбит (координатной части волновой функции электрона), локализованных вдоль этих направлений. Орбиты, отличающиеся друг от друга только ориентацией в пространстве и имеющие одинаковое распределение заряда, называются эквивалентными. Отсюда и другое название метода,

Локализованные орбиты удовлетворяют уравнениям [1]:

$$\hat{H}\varphi_m - \sum_n e_{mn}\varphi_n = 0, \quad (1)$$

где

$$e_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{H} \varphi_n d\tau. \quad (2)$$

Собственные значения оператора энергии находятся из решения секулярного определителя системы уравнений:

$$E_{ii} T_{ni} = \sum_m e_{mn} T_{mi} \quad (3)$$

Здесь T_{ni} унитарная матрица, связывающая волновые функции электрона ψ_i и локализованные орбиты φ_n .

Используя трансляционную симметрию решетки, бесконечную систему уравнений (3) можно свести к конечной системе уравнений по числу валентных штрихов в одной элементарной ячейке кристалла. При этом T_{ni} будут выражаться через новые коэффициенты вида $T_{ks} = A_{ks} e^{i\vec{k}\vec{R}_n}$, где индекс s нумерует валентные штрихи, $\vec{R}_n$ — радиус-вектор координаты валентного штриха. Таким образом порядок

секулярного определителя для энергии будет равен числу валентных штрихов в элементарной ячейке кристалла.

В решетке халькопирита элементарная ячейка содержит 16 валентных штрихов. Из них 8 связывают атомы А с атомами Х и 8 — атомы В с атомами Х.

Ниже приведены элементы секулярного определителя для энергии соответствующего системе уравнений для 16 коэффициентов A_{ks} .

$$a_{1,2} = B_1 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y) \right]; \quad a_{1,3} = B_1 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right];$$

$$a_{1,4} = B_1 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; \quad a_{1,5} = 2C_1 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot$$

$$\exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; \quad a_{1,6} = C_2 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_z) \right] \right\};$$

$$a_{1,7} = B_2 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \quad a_{1,8} = 2C_1 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y + 2\kappa_z);$$

$$a_{1,9} = B_6 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y) \right]; \quad a_{1,10} = 2C_6 \cos \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_y);$$

$$a_{1,11} = 2C_5 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right];$$

$$a_{1,12} = 2C_5 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right];$$

$$a_{1,13} = B_6 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; \quad a_{1,14} = a_{1,12}^*;$$

$$a_{1,15} = 2C_5 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y - 2\kappa_z);$$

$$a_{1,16} = C_6 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_z) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] \right\};$$

$$a_{2,3} = B_1 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right]; \quad a_{2,4} = B_1 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]$$

$$a_{2,5} = B_2 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]; \quad a_{2,6} = 2C_2 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y - 2\kappa_z);$$

$$a_{2,7} = 2C_1 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right];$$

$$a_{2,8} = C_2 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y + \kappa_z) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] \right\};$$

$$a_{2,9} = a_{1,10}; \quad a_{2,11} = 2C_5 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \cdot \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right];$$

$$a_{2,10} = a_{1,9}; \quad a_{2,12} = 2C_5 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right];$$

$$a_{2,13} = a_{2,11}^*; \quad a_{2,14} = B_6 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right];$$

$$a_{2,15} = C_6 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] \right\};$$

$$a_{2,16} = 2C_5 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y + 2\kappa_z);$$

$$a_{3,4} = B_1 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y) \right]; \quad a_{3,5} = 2C_1 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y - \kappa_z);$$

$$a_{3,6} = 2C_1 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \cdot \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right];$$

$$a_{3,7} = C_2 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_y) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y + \kappa_z) \right] \right\};$$

$$a_{3,8} = B_2 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \quad a_{3,9} = a_{2,12}^*;$$

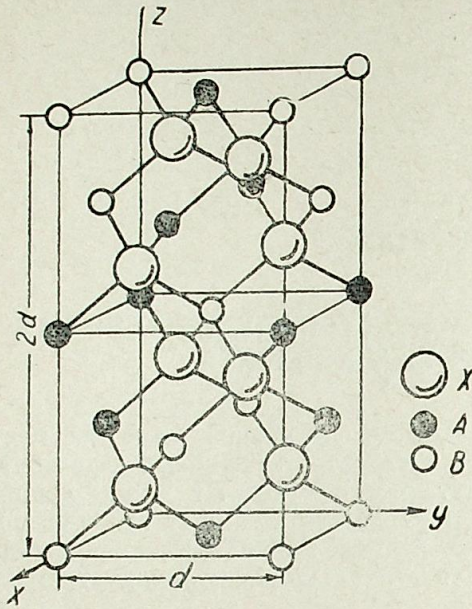


Рис. 1

$$\begin{aligned}
a_{3,10} &= a_{1,12}^*; & a_{3,11} &= B_6 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y) \right]; \\
a_{3,12} &= 2C_6 \cos \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_y); & a_{3,13} &= 2C_5 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y + 2\kappa_z); \\
a_{3,14} &= C_6 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y + \kappa_z) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_y) \right] \right\}; \\
a_{3,15} &= a_{3,9}^*; & a_{3,16} &= B_6 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \\
a_{4,5} &= C_2 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{4,6} &= B_2 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; & a_{4,7} &= 2C_1 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y + 2\kappa_z); \\
a_{4,8} &= 2C_1 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \cdot \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; & a_{4,9} &= a_{2,11}^*; \\
a_{4,10} &= 2C_5 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right]; & a_{4,11} &= a_{3,12}; \\
a_{4,12} &= a_{3,11}^*; & a_{4,14} &= 2C_5 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y - 2\kappa_z); \\
a_{4,13} &= C_6 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{4,15} &= B_6 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]; & a_{4,16} &= a_{1,11}; & a_{5,6} &= a_{1,4}^*; \\
a_{5,7} &= a_{3,4}^*; & a_{5,8} &= a_{2,4}^*; & a_{5,9} &= a_{2,11}; \\
a_{5,10} &= a_{1,13}^*; & a_{5,11} &= C_6 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{5,12} &= a_{3,13}; & a_{5,13} &= a_{4,11}; & a_{5,14} &= a_{4,12}; \\
a_{5,15} &= a_{2,11}^*; & a_{5,16} &= a_{4,10}; & a_{6,7} &= a_{1,3}; \\
a_{6,8} &= a_{1,2}; & a_{6,9} &= a_{2,16}; & a_{6,11} &= a_{4,10}; \\
a_{6,12} &= a_{3,16}^*; & a_{6,10} &= C_6 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{6,13} &= a_{4,10}^*; & a_{6,14} &= a_{3,10}^*; & a_{6,15} &= a_{1,9}; \\
a_{6,16} &= a_{1,10}; & a_{7,8} &= a_{2,3}^*; & a_{7,9} &= a_{2,14}^*; \\
a_{7,10} &= a_{1,12}; & a_{7,11} &= a_{4,14}; & a_{7,13} &= a_{3,11}; \\
a_{7,12} &= a_{3,14}^*; & a_{7,14} &= a_{3,12}; & a_{7,15} &= a_{3,9}; \\
a_{7,16} &= a_{3,10}; & a_{8,9} &= a_{2,15}^*; & a_{8,10} &= a_{1,15}; \\
a_{8,11} &= a_{4,15}^*; & a_{8,12} &= a_{7,15}; & a_{8,13} &= a_{2,11}; \\
a_{8,14} &= a_{8,12}^*; & a_{8,15} &= a_{1,10}; & a_{8,16} &= a_{1,9}^*;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{9,10} &= B_3 \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_y) \right]; & a_{9,11} &= B_3 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]; \\
a_{9,12} &= B_3 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; & a_{9,13} &= B_4 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]; \\
a_{9,14} &= 2C_3 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; \\
a_{9,15} &= C_4 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y + \kappa_z) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{9,16} &= 2C_3 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y - 2\kappa_z); \\
a_{10,11} &= B_3 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; & a_{10,12} &= B_3 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \\
a_{10,13} &= 2C_3 \cos \frac{a\kappa_x}{2} \cdot \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right]; \\
a_{10,14} &= B_4 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \\
a_{10,15} &= 2C_3 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y + 2\kappa_z); & a_{10,16} &= C_4 \left\{ \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] + \right. \\
& \left. + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_z) \right] \right\}; & a_{11,12} &= B_3 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_y) \right]; \\
a_{11,13} &= C_4 \left\{ \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_x - \kappa_z) \right] + \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_y - \kappa_z) \right] \right\}; \\
a_{11,14} &= 2C_3 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y + 2\kappa_z); \\
a_{11,15} &= 2C_3 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \cdot \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_x + \kappa_z) \right]; \\
a_{11,16} &= B_4 \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_y - \kappa_z) \right]; \\
a_{12,13} &= 2C_3 \cos \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_y - 2\kappa_z); \\
a_{12,14} &= C_4 \exp \left[-i \frac{a}{2} (\kappa_x + \kappa_z) \right] + \exp \left[i \frac{a}{2} (\kappa_y + \kappa_z) \right]; \\
a_{12,15} &= B_4 \exp \left[i \frac{a}{4} (\kappa_y + \kappa_z) \right]; \\
a_{12,16} &= 2C_3 \cos \frac{a\kappa_y}{2} \cdot \exp \left[-i \frac{a}{4} (\kappa_x - \kappa_z) \right]; \\
a_{13,14} &= a_{11,12}; & a_{13,15} &= a_{9,11}^*; & a_{13,16} &= a_{10,11}^*; \\
a_{14,15} &= a_{9,12}^*; & a_{14,16} &= a_{10,12}^*; & a_{15,16} &= a_{9,10};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{nn} &= A_1 - E & \text{для } n = 1 \div 8; \\ a_{nn} &= A_2 - E & \text{для } n = 9 \div 16; \\ a_{mn} &= a_{nm}; & \text{для } m, n = 1 \div 16. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали трансляционную симметрию объемно-центрированной тетрагональной решетки халькопирита при вышесделанном предположении $c = 2a$):

$$\vec{a}_1 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\right); \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, a\right); \quad \vec{a}_3 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -a\right);$$

а также ввели следующие обозначения для интегралов e_{mn} :

$e_{mn} = A_1$ для штрихов $A-X$
 $e_{mn} = A_2$ для штрихов $B-X$
 $e_{mn} = B_1$ и B_3 для интегралов между функциями двух валентных соседних штрихов, граничащих атомами A и B , соответственно.
 $e_{mn} = B_2$ для интегралов между двумя соседними штрихами $A-X$, граничащими атомом X ; $e_{mn} = B_4$ для таких же интегралов между штрихами $B-X$; $e_{mn} = B_6$ для интегралов между валентными штрихами $A-X$ и $B-X$, граничащих через атом X . Интегралы B_1, B_2, B_3, B_4, B_6 являются интегралами взаимодействия первых соседей. Для интегралов взаимодействия вторых соседей применены следующие обозначения; $e_{mn} = C_1$ для интегралов взаимодействия вторых соседей не параллельных штрихов $A-X$ с $A-X$; $e_{mn} = C_3$ для таких же интегралов между штрихами $B-X$ и $B-X$; $e_{mn} = C_5$ для таких же интегралов между штрихами $A-X$ и $B-X$; $e_{mn} = C_2, C_4$ и C_6 для интегралов взаимодействия вторых соседей параллельных штрихов, соответственно, $A-X$ с $A-X$; $B-X$ с $B-X$ и $A-X$ с $B-X$.

Порядок соседей мы определяем следующим образом: два валентных штриха называются первыми ближайшими соседями, если они примыкают к общему атому и вторыми соседями, если они примыкают к соседним атомам и т. д.

Интегралы $B_1, B_3, B_2, B_4, B_6, C_1, C_3$, и C_5, C_2, C_4, C_6 соответствуют по смыслу, интегралам типа B_1, B_2, C ; C_1 работы [1]. В работе [3] были определены знаки этих интегралов, а также их отношения для полупроводников типа алмаза и ряда соединений $A^{III}B^V$ со сфалеритной структурой. Все интегралы оказались отрицательными, за исключением C_1 , который положителен и между ними выполняются следующие приближенные соотношения:

$$|B_2| > |B_1| \gg |C| > C_1$$

Таким образом в нашем случае, имеем: $B_1, B_2, B_3, B_4, B_6, C_1, C_3, C_5 < 0$; $C_2, C_4, C_6 > 0$;

$$|B_1|, |B_3| < |B_2|, |B_4|, |B_6| \gg$$

$$|C_1|, |C_3|, |C_5| > C_2, C_4, C_6;$$

(4)

Получить аналитическое выражение для $E(\vec{k})$, для произвольного $\vec{k}$ из секулярного определителя не представляется возможным.

Однако в большинстве случаев достаточно рассмотреть зависимость $E(\vec{k})$ вдоль линий или плоскостей симметрии зоны Бриллюэна,

так как в полупроводниках ввиду слабой заполненности зон необходимо знать закон дисперсии лишь вблизи максимума валентной зоны (или минимума зоны проводимости), а расположение экстремальных точек вне симметричных линий или плоскостей является маловероятным.

На рис. 2 изображена зона Бриллюэна решетки халькопирита. Координаты симметричных точек, указанных на рис. 2 следующие:

$$\Gamma(000), P\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{2a}\right),$$

$$T\left(0, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right), N\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, 0\right), \Delta(oko,)$$

$$B\left(ok, \frac{\pi}{a}\right), D\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, k\right), A(ook), F(kkk_z), G\left(k, \frac{2\pi}{a} - k, k_z\right).$$

В симметричных точках не все из 16 коэффициентов $A_{\vec{k}s}^+$ оказываются независимыми и число уравнений для нахождения $A_{\vec{k}s}^+$ и, следовательно, порядок секулярного определителя для энергии уменьшается. Ниже приведены симметричные комбинации из локализованных орбит для различных неприводимых представлений групп волновых векторов, показанных на рис. 2.

$$\begin{aligned} \psi_{\Gamma_2} &= a_1(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \pm \varphi_5 \pm \varphi_6 \pm \varphi_7 + \varphi_8) + \\ &+ a_2(\varphi_9 + \varphi_{10} + \varphi_{11} + \varphi_{12} \pm \varphi_{13} \pm \varphi_{14} \pm \varphi_{15} \pm \varphi_{16}); \\ \psi_{\Gamma_4} &= a_1(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 \pm \varphi_5 \mp \varphi_6 \pm \varphi_7 \mp \varphi_8) + \\ &+ a_2(\varphi_9 + \varphi_{10} - \varphi_{11} - \varphi_{12} \pm \varphi_{13} \pm \varphi_{14} \mp \varphi_{15} \mp \varphi_{16}); \\ \psi_{\Gamma_5}^{1,2} &= a_1(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varphi_5 \mp \varphi_7) + a_2(\varphi_3 - \varphi_4 \mp \varphi_6 \pm \varphi_8) + \\ &+ a_3(\varphi_9 - \varphi_{10} \mp \varphi_{13} \pm \varphi_{14}) + a_4(\varphi_{11} - \varphi_{12} \mp \varphi_{15} \pm \varphi_{16}); \\ \psi_{P_1}^{1,2} &= a_1 \left[\varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_3 + \varphi_4) \pm i\varphi_6 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_5 + \varphi_7) \right] + \\ &+ a_2 \left[\varphi_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_3 - \varphi_4) \pm i\varphi_8 \mp \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_5 - \varphi_7) \right] + \\ &+ a_3 \left[\varphi_9 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_{11} - \varphi_{12}) \pm i\varphi_{15} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_{13} - \varphi_{14}) \right] + \\ &+ a_4 \left[\varphi_{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_{11} + \varphi_{12}) \pm i\varphi_{16} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_{13} + \varphi_{14}) \right]; \\ \psi_{P_2}^{1,2} &= a_1 \left[\varphi_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_2 + \varphi_4) \pm i\varphi_6 \mp \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_5 + \varphi_7) \right] + \\ &+ a_2 \left[\varphi_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_3 - \varphi_4) \pm i\varphi_8 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_5 - \varphi_7) \right] + \\ &+ a_3 \left[\varphi_9 + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_{11} - \varphi_{12}) \pm i\varphi_{15} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_{13} - \varphi_{14}) \right] + \end{aligned}$$

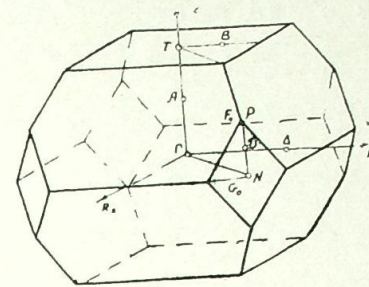


Рис. 2

$$\begin{aligned}
& + a_4 \left[\varphi_{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{8}} (\varphi_{11} - \varphi_{12}) \pm i\varphi_{16} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{3\pi}{8}} (\varphi_{13} + \varphi_{14}) \right]; \\
\psi_{T,T_2} &= a_1(\varphi_1 - \varphi_2 \mp ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_3 \pm ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_4 + e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_5 \mp \varphi_6 - e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_7 \pm \varphi_8) + \\
& + a_2(\varphi_9 - \varphi_{10} \mp ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_{11} \pm ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_{12} - e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{13} - e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{14} \mp \varphi_{15} \mp \varphi_{16}); \\
\psi_{T,T_1} &= a_1(\varphi_1 - \varphi_2 \pm ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_3 \pm ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_4 - e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_5 \mp \varphi_6 + e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_7 \mp \varphi_8) + \\
& + a_2(\varphi_9 - \varphi_{10} \pm ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_{11} + ie^{-i\frac{\pi}{4}} \varphi_{12} + e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{13} \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{14} \pm \varphi_{15} \mp \varphi_{16}); \\
\psi_{T_5}^{1,2} &= a_1(\varphi_1 - \varphi_2 \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_5 \mp e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_7) + a_2(\varphi_3 - \varphi_4 \pm ie^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_8 \mp ie^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_6) + \\
& + a_3(\varphi_9 - \varphi_{10} \mp e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{13} \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{14}) + a_4(\varphi_{11} - \varphi_{12} \mp ie^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{15} \pm ie^{i\frac{\pi}{4}} \varphi_{16}); \\
\psi_{A_1,A_2} &= a_1(\varphi_1 + \varphi_2 \pm \varphi_6 \pm \varphi_8) + a_2(\varphi_3 + \varphi_4 \pm \varphi_5 \pm \varphi_7) + \\
& + a_3(\varphi_9 + \varphi_{10} \pm \varphi_{15} \pm \varphi_{16}) + a_4(\varphi_{11} + \varphi_{12} \pm \varphi_{13} \pm \varphi_{14}); \\
\psi_{A_3,A_4} &= a_1(\varphi_1 - \varphi_2 \pm \varphi_6 \pm \varphi_8) + a_2(\varphi_3 - \varphi_4 \pm \varphi_5 \mp \varphi_7) + \\
& + a_3(\varphi_9 - \varphi_{10} \pm \varphi_{15} \mp \varphi_{16}) + a_4(\varphi_{11} - \varphi_{12} \mp \varphi_{13} \pm \varphi_{14}); \\
\psi_{\Delta_1,\Delta_2} &= a_1(\varphi_1 \pm \varphi_7) + a_2(\varphi_2 \pm \varphi_5) + a_3(\varphi_3 \pm \varphi_6) + a_4(\varphi_4 \pm \varphi_8) + \\
& + a_5(\varphi_9 \pm \varphi_{13}) + a_6(\varphi_{10} \pm \varphi_{14}) + a_7(\varphi_{11} \pm \varphi_{15}) + a_8(\varphi_{12} \pm \varphi_{16}); \\
\psi_{B_1,B_2} &= a_1(\varphi_1 \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi_7) + a_2(\varphi_2 \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi_5) + a_3(\varphi_3 \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \varphi_6) + \\
& + a_4(\varphi_4 \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \varphi_8) + a_5(\varphi_9 \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi_{13}) + a_6(\varphi_{10} \pm e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \varphi_{14}) + \\
& + a_7(\varphi_{11} \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \varphi_{15}) + a_8(\varphi_{12} \pm e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot \varphi_{16}); \\
\psi_{F_1,F_3} &= a_1(\varphi_1 \pm \varphi_8) + a_2(\varphi_2 \pm \varphi_6) + a_3(\varphi_3 \pm \varphi_7) + a_4(\varphi_4 \pm \varphi_5) + \\
& + a_5(\varphi_9 \pm \varphi_{16}) + a_6(\varphi_{10} \pm \varphi_{15}) + a_7(\varphi_{11} \pm \varphi_{13}) + a_8(\varphi_{12} \pm \varphi_{14}); \\
\psi_{G_1,G_2} &= \psi_{D_1}^{1,2} = \psi_{N_1}^{1,2} = a_1(\varphi_1 \pm i\varphi_6) + a_2(\varphi_2 \pm i\varphi_8) + \\
& + a_3(\varphi_3 \pm \varphi_5) + a_4(\varphi_4 \pm \varphi_7) + a_5(\varphi_9 \pm i\varphi_{15}) + \\
& + a_6(\varphi_{10} \pm i\varphi_{16}) + a_7(\varphi_{11} + \varphi_{14}) + a_8(\varphi_{12} \mp \varphi_{13});
\end{aligned}$$

ψ_{A_1} и ψ_{A_4} , ψ_{T_1} и ψ_{T_2} , ψ_{T_3} и ψ_{T_4} — относятся к одному значению энергии следовательно, вдоль всей тетрагональной оси имеет место слияние двух зон.

Приведенные выше симметричные комбинации локализованных орбит получены с помощью формулы:

$$\psi_{\Gamma_n} = \sum_{g,p} A_p \chi(\Gamma_n) \hat{G}_k^+ \varphi_p e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_p}, \quad (5)$$

Здесь ψ_{Γ_n} — волновая функция, преобразующаяся по неприводимому представлению Γ_n , $\chi(\Gamma_n)$ — характеры этого представления, $\hat{G}_k^+$ — элементы симметрии группы волнового вектора; суммирование идет по элементам группы g , а также по числу различных неэквивалентных орбит, характеры неприводимых представлений для пространственной группы D_{2d}^{12} халькопирита получены в работе [4].

Во всех известных в настоящее время полупроводниках со сфалеритоподобной структурой решетки максимум валентной зоны реали-

зуется в центре зоны Бриллюэна. Поэтому рассмотрим решения в этой точке. Мы не будем выписывать здесь громоздкие выражения для энергии различных представлений в точке Γ , которые легко получать с помощью приведенных нами базисных функций. Отметим только, что в самых общих предположениях (4) о знаках и величинах интегралов взаимодействия легко показать, что одна из зон типа Γ_4 расположена выше всех остальных зон $\Gamma_1 - \Gamma_4$. В приближении первых соседей одна из зон Γ_5 совпадает с верхней зоной Γ_4 . Так как для Γ_5 в приближении вторых соседей не удается получить аналитического выражения (необходимо решить секулярный определитель четвертого порядка), то непосредственно судить о том, какая из двух зон Γ_5 или Γ_4 расположена выше, с учетом интегралов вторых соседей не удастся. Однако можно привлечь косвенные доказательства в пользу расположения зоны Γ_5 выше Γ_4 .

Действительно, из таблиц совместности (15) работы [4] следует, что представление Γ_5 в направлении тетрагональной оси переходит в представления $A_3 + A_4$, а представление Γ_4 в представление A_1 . Записывая секулярный определитель в приближении первых соседей для этих представлений с помощью приведенных базисных функций для точки A убеждаемся, что представления A_3 и A_4 дают не зависящие от k_z решения, в то время как A_1 дает решения зависящие от k_z . Следовательно, кривизна зоны Γ_5 меньше, чем зоны Γ_4 и во избежание дополнительного пересечения зон не предусматриваемых симметрией решетки зону Γ_5 следует расположить выше Γ_4 . Ясно, что зона Γ_5 соответствует зоне тяжелых дырок, а зона Γ_4 зоне легких дырок, при условии, что максимум валентной зоны расположен в центре зоны Бриллюэна.

Интересно сравнить полученную картину расположения зон с картиной расположения зон в полупроводниках с решеткой сфалерита (например для соединений типа $A^{III}B^V$). В этих полупроводниках край валентной зоны трехкратно вырожден при $k = 0$ и имеются два сорта тяжелых и один сорт легких дырок (без учета спина) [3].

Таким образом, в результате понижения симметрии при переходе от структуры сфалерита к структуре халькопирита зона легких дырок отщепляется и уходит вниз. Это расщепление, называемое расщеплением кристаллическим полем, мало, как мы видели, порядка интегралов взаимодействия вторых соседей. Поскольку эффективная масса тяжелых дырок в направлении тетрагональной оси кристалла также определяется интегралами взаимодействия вторых соседей, то знание одной из этих величин может позволить оценить значение другой величины.

В заключение отметим, что учет спинорбитального взаимодействия слегка сдвигает экстремум из центра зоны Бриллюэна и существенно изменяет закон дисперсии вблизи края зоны. Имеется одна зона тяжелых дырок и несколько ниже ее зона легких дырок. Вторая зона тяжелых дырок отщепляется благодаря спинорбитальному взаимодействию и уходит вниз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губанов А. И., Нраньян А. А. ФТТ, 1, 1044, 1959.
2. Жузе В. П., Сергеева В. М. и Штрум Е. Л. ЖТФ, А, 28, 2094, 1958.
3. Нраньян А. А. ФТТ, 2, 474, 1960.
4. Чалдышев В. А. и Покровский В. Н. Изв. Вузов, физика, 2, 173, 1960.

Халкопирит типли дешикли жарымкечиричилэрин енержи спектри

ХУЛАСӘ

Локаллашмыш орбита методуна эсасланараг халко типли жарымкечиричилэрин енержи спектри һесабланмыш, јункүл дешиклэрин зонасынын парчаланмасы вә ашағы енмәси кестәрилмишдир. Спин-орбита гаршылыгы тә'сирин нәзәрә алынмасы, Бриллјуен зонасынын мәркәзиндән азча сүрүшмәси вә зонанын кәнарында дисперсија ганунунун кәскин дәјишмәси тапылмышдыр.

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, М. Я. БАКИРОВ, М. А. ТАЛИБИ, Р. Б. ГАСЫМОВ

СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОЭЛЕМЕНТЫ С ТОКОМ НАСЫЩЕНИЯ

В работе [1] сообщалось о наличии тока насыщения в $p-n$ переходах в селеновых выпрямителях, изготовленных из селена чистотой 99,9999. Было указано, что с повышением температуры величина тока насыщения растет.

Согласно теории Шокли [7], J_s выражается уравнением:

$$J_s = qni^2 \sqrt{\frac{kT}{q}} \left[\frac{1}{n_n} \sqrt{\frac{U_p}{\tau_p}} + \frac{1}{p_p} \sqrt{\frac{U_n}{\tau_n}} \right], \quad (1)$$

где ni —собственная концентрация; n_n —концентрация электронов в n -области; p_p —концентрация дырок в p -области; τ_n и τ_p —время жизни электронов и дырок; U_n и U_p —подвижности электронов и дырок; k —постоянная Больцмана; T —абсолютная температура; q —элементарный заряд.

Согласно (1), J_s является функцией концентрации, подвижности и времени жизни, которые сами являются функцией температуры.

Предполагая, что светом меняется только концентрация носителей, для объяснения роста тока насыщения, исследовали J_s в фотоэлементах.

На рис. 1 приведены темновые вольтамперные характеристики образца при различных температурах.

Из кривых видно, что в интервале температур $353 \div 393^\circ\text{K}$ с ростом напряжения обратный ток достигает насыщения и в дальнейшем изменяется весьма незначительно. При повышении температуры протяженность области насыщения расширяется. Для некоторых образцов область насыщения простирается до 40 вольт.

Согласно [2], J_s экспоненциально зависит от температуры.

$$J_s \sim \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right), \quad (2)$$

где ΔE —не зависящая от температуры часть ширины запрещенной зоны.

В интервале температур $353 \div 413^\circ\text{K}$ зависимость J_s от температуры довольно хорошо согласуется с формулой (2) (см. рис. 2.)

ΔE —определяемой из этой характеристики равен 0,4 эв. С целью определения решающего фактора в температурной зависимости J_s , исследовали температурную зависимость эффективного времени жизни неосновных носителей в $p-n$ переходе.

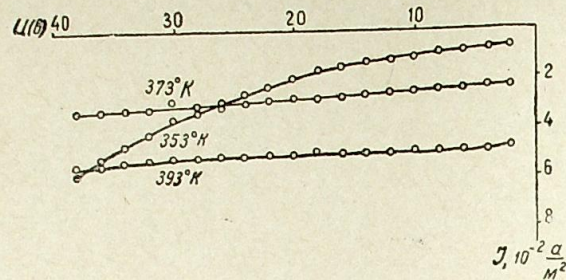


Рис. 1

Согласно (1), J_s сам по себе от времени жизни зависит слабо (пропорционален корню квадратному). Следовательно, в температурной зависимости J_s время жизни не может играть решающей роли.

Согласно литературным данным [5, 8, 9] в гексагональном селене с повышением температуры подвижность неосновных носителей экспоненциально растет. Причем, концентрация свободных носителей тока считается не зависящей от температуры [4, 10]. Однако ввиду сложных и далеко не ясных структурных особенностей вопрос о действии температуры на подвижность и концентрацию носителей тока в гексагональном селене нельзя считать окончательно решенным.

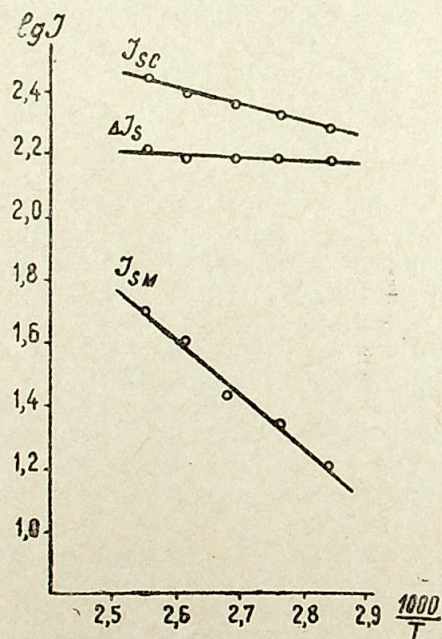


Рис. 2

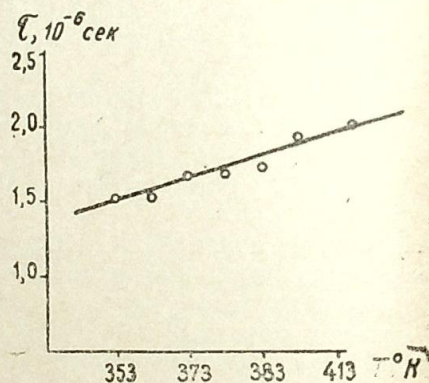


Рис. 3

В своих известных опытах А. Ф. Иоффе [3], сопоставляя зависимость темновой и фотопроводимости от напряженности электрического поля для ряда полупроводников, заключил, что быстрый рост электропроводности в сильных полях обязан возрастанию концентрации зарядов, а не их подвижности.

Используя наличие тока насыщения, сравнением температурной зависимости темновой вольтамперной характеристики и характерис-

тики в фотодиодном режиме, мы делаем попытку выявить роль подвижности и концентрации носителей тока в температурной зависимости тока насыщения.

Измеряя величину темнового тока J_{sm} и светового тока J_{sc} при различных температурах мы определили разность $\Delta J_s = J_{sc} - J_{sm}$, т. е. часть тока насыщения, обусловленную действием освещения. Изучение температурной зависимости ΔJ_s и J_{sm} показало, что J_{sm} чрезвычайно быстро возрастает с повышением температуры, а ΔJ_s гораздо слабее, чем J_{sm} (см. рис. 2). Подвижность фотоэлектронов не будет заметно отличаться от подвижности темновых носителей. Поэтому гораздо слабая температурная зависимость ΔJ_s по сравнению с зависимостью J_{sm} от температуры указывает на то, что с ростом температуры в области объемного заряда увеличивается концентрация, а не подвижность. В противном случае температурные холы для ΔJ_s и J_{sm} должны быть близкими.

Следует отметить, что селеновые фотоэлементы с током насыщения работают как фотодиоды, обладая в этом режиме значительно большей интегральной чувствительностью по сравнению с вентильным режимом.

ПЛОСКОСТНЫЕ СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОДИОДЫ

Наличие обратного тока насыщения в селеновых $p-n$ переходах позволило создать новые фотодиоды, весьма чувствительные как в видимой, так и рентгеновской области спектра. Величина темнового тока в них порядка 10^{-3} A/m^2 . Рабочий интервал температур 353—413°K.

На рис. 4 приведены вольт-амперные характеристики фотодиода при различных освещенностях, снятые при температуре 373°K. С увеличением освещенности величина тока растет, а область насыщения практически не меняется, что имеет место в германиевых фотодиодах [2, 11].

При 5000 лк ток в фотодиодном режиме в 40—50 раз больше тока в диодном режиме.

Как известно [7], плотность тока насыщения в темноте выражается:

$$J_{sc} = q \left(L_p \frac{p_n}{\tau_p} + L_n \frac{n_p}{\tau_n} \right), \quad (3)$$

где L_n и L_p —длина диффузионного смещения электронов и дырок в p - и n - части.

При освещении концентрация неосновных носителей увеличивается, на Δp и Δn . Величины Δp и Δn определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= R\tau_p \\ \Delta n &= R\tau_n \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

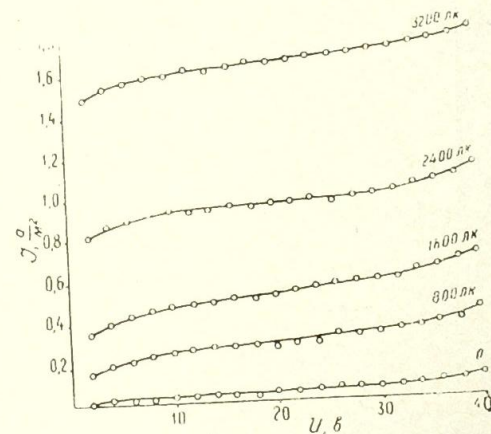


Рис. 4

где R — число электронно-дырочных пар, генерируемых в единице объема за единицу времени под действием света и пропорциональна интенсивности света.

С учетом (4) выражение (3) имеет вид:

$$J_s = q \left[L_p \frac{p_n + \Delta p}{\tau_p} + L_n \frac{n_p + \Delta n}{\tau_n} \right]$$

или

$$J_s = J_{s_0} + qR(L_p + L_n). \quad (5)$$

При напряжениях, достаточных для достижения тока насыщения, согласно (5) рост тока будет пропорционален R , т. е. интенсивности света, что подтверждается и для селеновых фотодиодов (рис. 4).

На рис. 5 показана зависимость фототока от интенсивности освещения в вентильном (при $U=0$) и фотодиодном (при $U \neq 0$) режимах.

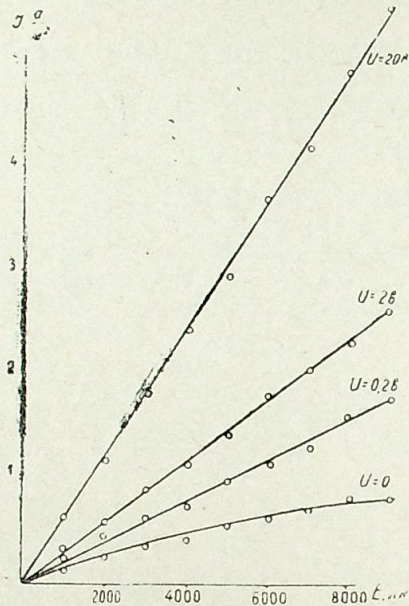


Рис. 5

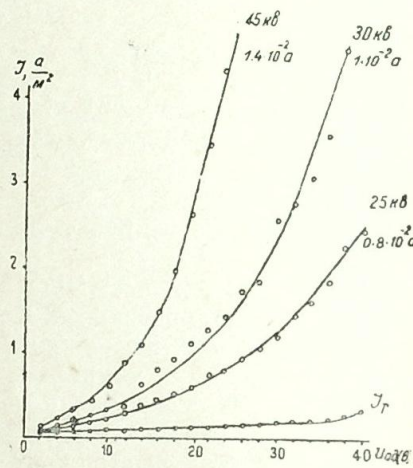


Рис. 6

В фотодиодном режиме зависимость фототока от освещенности линейная. В интервале 0,2—20 в с увеличением напряжения фототок растет. В вентильном режиме, при слабых освещенностях ($V_{xx} \sim \frac{KT}{q}$)

линейность сохраняется, а при больших освещенностях ($V_{xx} > \frac{KT}{q}$)

наблюдается отклонение от линейности. Это связано с нарушением режима короткого замыкания, вследствие уменьшения сопротивления образца.

При 5000 лк в фотодиодном режиме ($U=20$ в) ток в 5—10 раз больше, чем в вентильном режиме ($U=0$).

Спектральное распределение чувствительности селеновых фотодиодов практически совпадает со спектральной характеристикой селеновых вентилях.

Тауметрические измерения показывают, что образцы в фотодиодном режиме обладают меньшей инерционностью, чем в вентильном режиме. Время релаксации в фотодиодном режиме $\sim 10^{-2}$ сек, а в вентильном режиме $\sim 10^{-3}$ сек.

Емкостные измерения показали, что различные значения времен релаксации в фотодиодном и вентильном режиме обусловлены главным образом изменением ширины области объемного заряда.

Для данного образца при прочих равных условиях в фотодиодном режиме $c \sim 10^{-5} \frac{\Phi}{\text{м}^2}$, в вентильном режиме $c \sim 10^{-4} \frac{\Phi}{\text{м}^2}$.

На рис. 6 приведены вольтамперные характеристики фотодиода при различных интенсивностях и жесткостях рентгеновского излучения.

Облучение образцов производилось на рентгенустановке УРС-70 с молибденовым антикатодом. Под действием рентгеновских лучей, насыщение тока нарушается.

Наведенная проводимость зависит от величины ускоряющего напряжения, тока эмиссии и смещающего напряжения. При постоянном смещении и эмиссионном токе с увеличением ускоряющего потенциала наведенная проводимость вначале растет быстрее, затем замедляется (рис. 7). По мере увеличения тока эмиссии, кривые зависимости наведенной проводимости от уско-

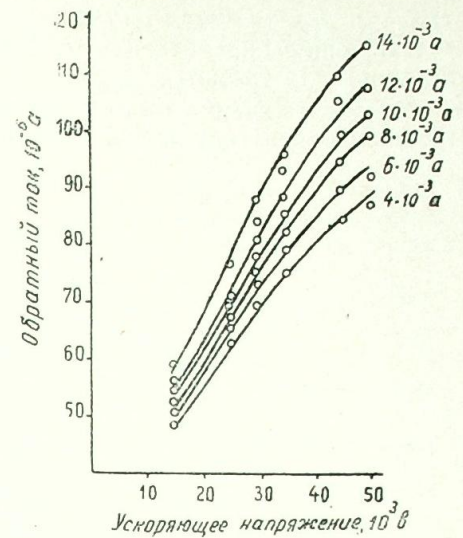


Рис. 7

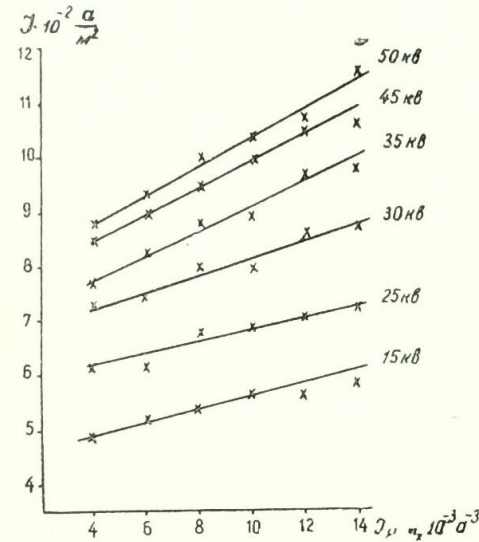


Рис. 8

ряющего напряжения, смещаются не изменяя своей формы.

При постоянном смещении и ускоряющем напряжении, с ростом тока эмиссии фототок растет линейно (рис. 8), что важно для рентгендозиметрии.

По мере увеличения ускоряющего напряжения, наклон прямых растет.

При облучении фотодиода рентгеновскими лучами по всей глубине проникновения луча создается электронно-дырочная пара. Однако в создании наведенной проводимости участвуют лишь те носители, которые образуются вблизи перехода ($L_p + L_n$ слое).

При увеличении ускоряющего напряжения и тока эмиссии увеличивается концентрация

пар как в объеме, так и в $L_p + L_n$ слое, что является причиной увеличения наведенной проводимости с ростом ускоряющего потенциала и тока эмиссии.

Для описываемых фотодиодов была проверена выполнимость соотношения вентильной фотодс

$$\varphi = \frac{KT}{q} \ln \left(\frac{J_f}{J_s} + 1 \right), \quad (7)$$

где φ и J_f — значения фотоэдс и фототока короткого замыкания, соответствующие определенной освещенности при температуре T ; J_s — ток насыщения в темноте.

Это соотношение было теоретически выведено и экспериментально проверено для германиевых фотодиодов С. М. Рывкиным [6].

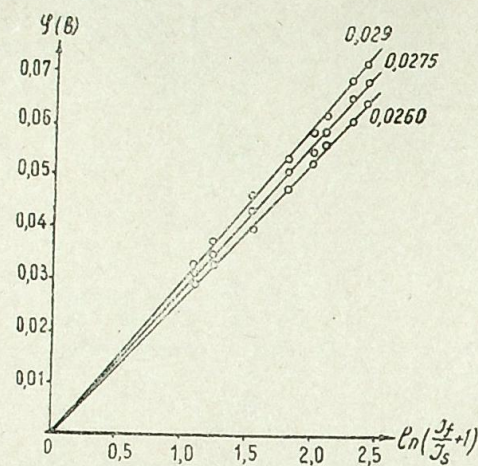


Рис. 9

На рис. 9 приводятся результаты, полученные на трех селеновых фотодиодах при температуре 373°K. Как видно, экспериментальные значения $\frac{KT}{q}$ близки к расчетному.

Максимальное отклонение менее 20%.

Выводы

1. Фотоэлементы, изготовленные из селена чистотой 99,99999, в интервале температур 353—413°K, обладают обратным током насыщения, величина которого порядка $10^{-3} \frac{A}{M^2}$. Область насыщения

простирается до 40 в. Протя-

женность области насыщения практически не зависит от освещенности.

2. Изготовлен селеновый фотодиод, чувствительный в видимой и рентгеновской области спектра.

3. Рабочий интервал температуры селенового фотодиода 353—413°K. В этом интервале с повышением температуры темновой ток экспоненциально растет, фототок практически не зависит от температуры. Рост J_s с температурой обусловлен главным образом увеличением концентрации неосновных носителей.

4. Чувствительность фотодиода на один порядок превосходит чувствительность селеновых фотоэлементов.

5. Инерционность фотодиода на один порядок ниже инерционности селеновых фотоэлементов.

6. При температуре 373°K в пределах ошибки измерения соотношения $\varphi = \frac{KT}{q} \ln \left(\frac{J_f}{J_s} + 1 \right)$ довольно хорошо выполняется для селеновых фотодиодов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Алекперова Ш. М., Талиби М. А., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б. ДАН Азерб. ССР, № 1, 1963.
2. Альферов Ж. И., Коноваленко Б. М., Рывкин С. М., Тучкевич В. М., Уваров А. И. ЖТФ. 25, 1955.
3. Иоффе А. Ф. Физика полупроводников, 1957.
4. Козырев П. Т. ЖТФ. 27, 35, 1957.
5. Мосс Т. С. Оптические явления в полупроводниках, 1961.
6. Рывкин С. М. ЖТФ. 25, 1, 1955.
7. Shockley W. Bell Syst. Techn. 7, 28, 435, 1949.
8. Spier W. E. Proc. phys soc. B. 70, 669, 1957.

9. Welmer P. K., Cope A. D. RCH Rev. 12, 314, 1947.
10. Plessner K. W. Proc. phys. soc., 13, 64, 651, 1951.
11. Shive J. N. J. Amer. Opt. Soc., V, 43, 239, 1953.

Г. Б. Абдуллаев, М. Я. Бакиров, М. Ә. Талиби, Р. Б. Гасымов

Дојма чэрэјанлы селен фотоэлементлэри

ХУЛАСӘ

99,99999% селендән һазырланмыш *p-n* кечидләрде 353—413°K-дә 4—40 в интервалында әкс чэрэјан дојма гијмәтини алыр. Температур вә ишыгланма артдыгча дојма чэрэјанын гијмәти экспоненциал олараг артыр.

Шокли нәзәријәсинә кәрә дојма чэрэјаны гејри-әсас јүкләрин јашама мүддәтиндән, консентрасијасындан вә јүрүклүјүндән асылдыр. Бу кәмијјәтләр өзләри температурдан асылы олдуғундан дојма чэрэјанынын температур асылылығыны өјрәнмәк үчүн *p-n* кечиддә гејри-әсас јүкләрин јашама мүддәти тәјин едилмишдир. Мүәјјән олунмушдур ки, 353—413°K температурда, јәни дојма мүшаһидә олунан областда јашама мүддәти температурдан чох зәиф асылдыр. Дојма чэрэјанынын ифадәсинә јашама мүддәти квадратик көк алтына дахилдир. Она кәрә дә гејри-әсас јүкләрин јашама мүддәти дојма чэрэјанынын температур асылылығында һәлледичи амил ола билмәз. Дојма чэрэјанынын температур асылылығында һәлледичи амил ашкар етмәк үчүн гаранлығыда вә ишыгланмада дојма чэрэјаны өлчүлүб, ишыгланмадагы гијмәтиндән гаранлыгдыкы гијмәти чыхылмышдыр. Сонра гаранлыгдыкы гијмәтин вә фәргин температур асылылығы өјрәнилмишдир. Мүәјјән едилмишдир ки, дојма чэрэјанын гаранлыгдыкы гијмәти температур артдыгча экспоненциал артыр, ишыгланмадагы гијмәтлә гаранлыгдыкы гијмәтләрин фәрги исә, башга сөзлә, јалныз ишығын һесабына олан артым температурдан чох зәиф асылдыр.

Ишыг јалныз јүкләрин консентрасијасыны дәјишдији үчүн вә ишыг һесабына јаранан чэрэјан температурдан асылы олмадығы үчүн һөкм етмәк олар ки, дојма чэрэјанын температур асылылығындан әсас һәлледичи амил гејри-әсас јүкләрин јүрүклүјү јох, онларын консентрасијасыдыр.

99,99999% тәмизлији олан селендән фотодиод һазырланмышдыр. Бу фотодиод көрүнән вә рентген шүаларына һәссас олуб, 353—413°K температур интервалында ишләјир. Гаранлыг чэрэјан $10^{-3} \frac{A}{M^2}$ тәртиндә олуб, температур артдыгча экспоненциал артыр. Фотодиод режиминдә чэрэјанын ишыгланмадан асылылығы хәттидир. Фоточэрэјан тәчрүби олараг температурдан асылы дејилдир. Фотодиод режиминдә нүмунәнин һәссаслығы вентил режиминдәкинә нисбәтән бир тәртиб чохдур. Селен фотодиодунун спектрал характеристикасы ади селен фотоэлементләринин спектрал характеристикасы илә үст-үстә дүшүр.

Тауметрик өлчмәләр кәстәрир ки, фотодиодун әталәти фотоэлементин әталәтиндән бир тәртиб аздыр.

Фотодиоду рентген шүалары илә шүаландырдыгда фоточэрэјан артыр. Фоточэрэјанын емисија чэрэјанындан асылылығы хәтти олуб, сүр'әтләндиричи потенциал артдыгча чохалыр. Бу да селен фотодиодларындан рентген дозиметријада истифадә етмәк имканы јарадыр.

Селен фотодиоду үчүн $\varphi = \frac{KT}{q} \ln \left(\frac{I}{I_s} + 1 \right)$ ифадәси тәчрүби

јохланылмышдыр. Тәчрүбәдән алынмыш $\frac{KT}{q}$ әдәдинин гијмәти 20% дәгигликлә һәмин ифадәнин һесабыланмыш гијмәтинә ујғун кәлир.

Т. Д. АЛИЕВА, А. Х. ХАЛИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ АКТИВИРУЮЩИХ И НЕАКТИВИРУЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПАД ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА В МОНОКРИСТАЛЛАХ KCl.

В последнее время щелочно-галогидные кристаллы являются предметом многочисленных исследований. Это объясняется возможностью сравнительно легко выращивать большие, прозрачные в широкой спектральной области монокристаллы этих соединений, а также возросшим их применением для разработки дозиметров ионизационных излучений, сцинтиляционных счетчиков, электронно-лучевых преобразователей и в других областях науки и техники. В связи с этим становится необходимым создание кристаллофосфоров с заранее заданными инерционными и аккумуляционными свойствами. Последние связаны со строением и свойствами центров захвата. Поэтому исследование центров захвата представляет несомненный теоретический и практический интерес.

Введение в щелочно-галогидные кристаллы различных примесей приводит к образованию новых глубоких центров захвата для электронов, а также значительно влияет на электронные центры захвата основного вещества. В присутствии различного рода примесей изменяется скорость образования F -центров, их оптическая и термическая стабильность, а также распределение электронов и дырок на других уровнях захвата основного вещества.

В работах [1, 3, 4, 9, 10] исследовалось влияние неактивирующих примесей Ca, Sr, Cd на окрашиваемость щелочно-галогидных кристаллов. Была обнаружена значительно лучшая окрашиваемость кристаллов с примесями Ca и Sr по сравнению с чистыми кристаллами KCl и NaCl. Лейтц [11] исследовал окрашиваемость кристаллов, активированных серебром и установил, что активатор повышает скорость образования F -центров в 1,8 раза. М. Л. Кац [2] и Л. М. Шамовский [8] обнаружили прямо противоположную роль примесей. По их мнению, активатор, создавая глубокие уровни захвата, уменьшает F -пелосу. Однако это имеет место лишь при больших концентрациях активатора. И. А. Парфианович и Е. И. Шуралева, исследовав кристаллы KCl активированные Cu и Ag показали, что малые добавки указанных примесей повышают чувствительность к образованию F -центров, а большие — понижают. [5,7]

Т. Д. АЛИЕВА, А. Х. ХАЛИЛОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ АКТИВИРУЮЩИХ И НЕАКТИВИРУЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ НА ОБРАЗОВАНИЕ И РАСПАД ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА В МОНОКРИСТАЛЛАХ KCl.

В последнее время щелочно-галогидные кристаллы являются предметом многочисленных исследований. Это объясняется возможностью сравнительно легко выращивать большие, прозрачные в широкой спектральной области монокристаллы этих соединений, а также возросшим их применением для разработки дозиметров ионизационных излучений, сцинтиляционных счетчиков, электронно-лучевых преобразователей и в других областях науки и техники. В связи с этим становится необходимым создание кристаллофосфоров с заранее заданными инерционными и аккумуляционными свойствами. Последние связаны со строением и свойствами центров захвата. Поэтому исследование центров захвата представляет несомненный теоретический и практический интерес.

Введение в щелочно-галогидные кристаллы различных примесей приводит к образованию новых глубоких центров захвата для электронов, а также значительно влияет на электронные центры захвата основного вещества. В присутствии различного рода примесей изменяется скорость образования F -центров, их оптическая и термическая стабильность, а также распределение электронов и дырок на других уровнях захвата основного вещества.

В работах [1, 3, 4, 9, 10] исследовалось влияние неактивирующих примесей Ca, Sr, Cd на окрашиваемость щелочно-галогидных кристаллов. Была обнаружена значительно лучшая окрашиваемость кристаллов с примесями Ca и Sr по сравнению с чистыми кристаллами KCl и NaCl. Лейтц [11] исследовал окрашиваемость кристаллов, активированных серебром и установил, что активатор повышает скорость образования F -центров в 1,8 раза. М. Л. Кац [2] и Л. М. Шамовский [8] обнаружили прямо противоположную роль примесей. По их мнению, активатор, создавая глубокие уровни захвата, уменьшает F -полосу. Однако это имеет место лишь при больших концентрациях активатора. И. А. Парфианович и Е. И. Шуралева, исследовав кристаллы KCl активированные Cu и Ag показали, что малые добавки указанных примесей повышают чувствительность к образованию F -центров, а большие — понижают. [5,7]

С целью изучения влияния, оказываемого различными примесями на захват электронов на F -уровнях и на свойства образующихся при этом электронных центров, нами было произведено параллельное исследование чувствительности к окрашиванию, а также оптической устойчивости F -центров в чистых кристаллах KCl и кристаллах KCl , активированных ионами Pb^{++} , Tl^{+} , Cu^{+} . Было изучено также влияние активирующих примесей Ca , Sr , Ba , Cd , Mg на свойства F -центров в кристаллах KCl , активированных таллием и свинцом. Кристаллы выращивались из расплава по методу Киропулоса с вращающимся холодильником. Образцы возбуждались путем длительной рентгенизации при комнатной температуре. Условия рентгенизации для всех исследованных кристаллов были постоянными.

На рис. 1а изображены кривые поглощения кристаллов KCl , активированных таллием с концентрацией активатора в расплаве 0,1 моль% (кривая 2) и 1 моль% (кривая 3) и $KCl \cdot Tl$ (1 моль%) фосфоров, содержащих ионы щелочно-земельных металлов — Ca^{++} , Sr^{++} , Mg^{++} , Cd^{++} .

На рис. 1 приведены также F -полосы кристаллов KCl , активированных свинцом с концентрациями свинца в расплаве 0,05; 0,1 и 0,5 моль% (рис. 1б), $KCl \cdot Pb \cdot Cu$ фосфоров с концентрацией меди 0,3 моль%, а свинца — 0,05; 0,5 и 1 моль% (рис. 1в) и $KCl \cdot Pb$ (0,1 моль%) фосфоров с примесями Ca^{++} , Ce^{++} , Mg^{++} , Cd^{++} , (рис. 1г).

Как видно из полученных данных, введение ионов Pb^{++} мало влияет на окрашиваемость кристаллов KCl . Однако заметно небольшое повышение интенсивности F -полос при малой концентрации активатора (0,05 моль%) и понижение ее при увеличении концентрации

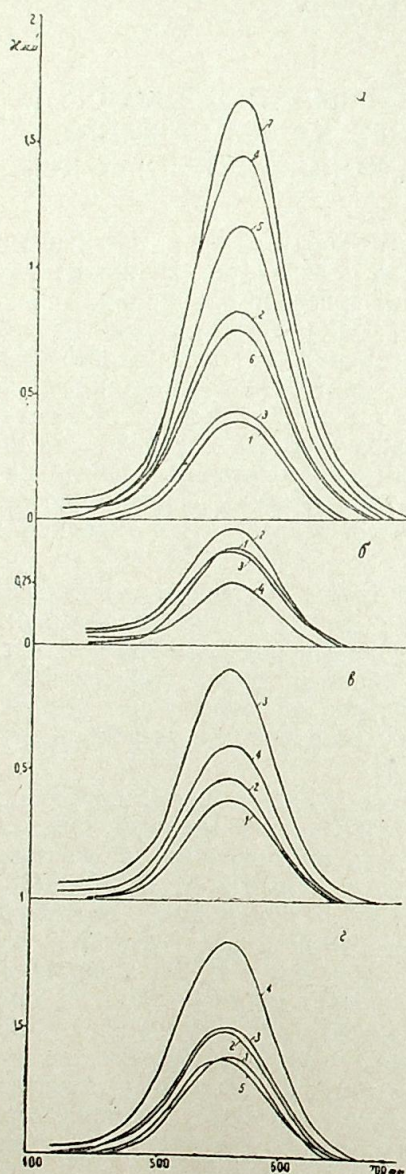


Рис. 1

F -полосы рентгенизованных кристаллов

а) 1— KCl ; 2— $KCl \cdot Tl$ (0,1 моль%); 3— $KCl \cdot Tl$ (1 моль%); 4— $KCl \cdot Tl \cdot Ca$; 5— $KCl \cdot Tl \cdot Mg$; 6— $KCl \cdot Tl \cdot Cd$; 7— $KCl \cdot Tl \cdot Sr$;

б) 1— KCl ; 2— $KCl \cdot Pb$ (0,05 моль%); 3— $KCl \cdot Pb$ (0,1 моль%); 4— $KCl \cdot Pb$ (0,5 моль%);

в) 1— KCl ; 2— $KCl \cdot Pb$ (0,05 моль%) Cu (0,3 моль%); 3— $KCl \cdot Pb$ (0,5 моль%); Cu (0,3 моль%); 4— $KCl \cdot Pb$ (1 моль%); Cu (0,3 моль%);

г) 1— KCl ; 2— $KCl \cdot Pb \cdot Mg$; 3— $KCl \cdot Pb \cdot Ca$; 4— $KCl \cdot Pb \cdot Cl$; 5— $KCl \cdot Pb \cdot Cd$

(0,1 и 0,5 моль%). В присутствии меди окрашиваемость кристаллов $KCl \cdot Pb$ значительно улучшается. Кроме того, если в $KCl \cdot Pb$ при концентрации свинца 0,1 моль% оптическая плотность в максимуме F -полосы уже меньше, чем в чистом KCl , то в кристаллах $KCl \cdot Pb \cdot Cu$ при такой концентрации свинца еще наблюдается рост F -полосы, а уменьшение ее происходит при более высоких концентрациях свинца (1 моль%). Введение неактивирующих примесей слабо сказывается на чувствительности к образованию F -центров в активированных свинцом кристаллах KCl (рис. 1г), лишь незначительно увеличивая ее.

Немонотонная зависимость концентрации F -центров от концентрации активатора гораздо резче наблюдается для $KCl \cdot Tl$ фосфора (рис. 1а). Введение в расплав 0,1 моль $TlCl$ сильно увеличивает чувствительность кристалла к окрашиванию, в то время как F -полоса кристалла $KCl \cdot Te$, выращенного из расплава, содержащего 1 моль% $TlCl$, мало отличается от F -полосы чистого KCl . Значительное влияние на свойства F -центров $KCl \cdot Tl$ фосфоров оказывает присутствие неактивирующих примесей. Оптическая плотность в F -полосе таких кристаллов растет в ряду Cd^{++} , Mg^{++} , Ca^{++} , Sr^{++} и в фосфоре $KCl \cdot Tl \cdot Sr$ более, чем вдвое превышает таковую в $KCl \cdot Tl$.

Таким образом, чувствительность кристаллов к окрашиваемости сильно зависит от наличия примесей и немонотонно меняется с изменением их концентрации. Увеличение окрашиваемости при малых и уменьшение ее при больших концентрациях активатора И. А. Парафианович [5] объясняет наличием двух противоположных факторов. С одной стороны, ввиду увеличения вероятности захвата электронов на уровнях захвата, создаваемых активатором (при больших концентрациях последнего) интенсивность F -полосы активированных кристаллов оказывается меньше чем чистых. С другой стороны, повышение чувствительности активированных кристаллов к окрашиванию объясняется образованием в присутствии активатора новых дырочных центров захвата.

Из всех изученных нами примесей только Cd и Pb мало влияют на концентрацию F -центров KCl . Аномальное поведение кадмия по сравнению с другими элементами второй группы было отмечено еще Этцелем [9]. Ч. Б. Луцки [4] объясняет его тем, что ионы Cd^{++} образуют при комнатной температуре устойчивые комплексы с пустыми анионными узлами. Если исходить из изложенной выше теории, двухзарядные ионы свинца также должны, по крайней мере, при малых концентрациях сильно увеличивать чувствительность к образованию F -центров.

Наши исследования показали, что введение даже малых концентраций свинца в KCl усиливает F -полосу незначительно. Это объясняется, по-видимому, следующим. Известно, что ионы Pb^{++} очень хорошо входят в решетку KCl . Поэтому даже при малых концентрациях $PbCl_2$ в расплаве (0,05 моль%) концентрация его в кристалле KCl оказывается значительной (об этом можно судить по плотности его основной полосы поглощения). Кроме того, ионы свинца являются хорошими центрами захвата для электронов. Поэтому в данном случае первый фактор превалирует.

Легко объясняется также влияние присутствия меди в $KCl \cdot Pb \cdot Cu$ фосфорах на ход зависимости оптической плотности в максимуме F -полосы от концентрации свинца. По-видимому, ионы Cu^{+} (при данной их концентрации), не увеличивая заметно число центров захвата для электронов, способствуют образованию (или стабилизации при комнатной температуре) дырочных центров захвата. Поэтому в их присутствии повышается интенсивность F -полосы, а также положение

максимума в зависимости коэффициента поглощения в максимуме F -полосы от концентрации свинца в $KCl \cdot Pb \cdot Cu$ фосфоре смещается в сторону более высоких концентраций.

Нами было также изучено влияние различных примесей на оптическую стабильность F -центров, а также влияние повышения температуры рентгенизации на рост и распад F -центров. Исследования показали, что оптическая устойчивость F -центров сильно зависит от присутствия и концентрации активатора и понижается с повышением последней.

В табл. 1 приведены относительные уменьшения оптической плотности в F -полосе после десятиминутного F -облучения рентгенизованных кристаллов. Здесь K_F — оптическая плотность в F -полосе рентгенизованного кристалла; K'_F — оптическая плотность в F -полосе рентгенизованного и облученного в F -полосе кристалла; $\frac{K_F - K'_F}{K_F}$ — относительное изменение оптической плотности после F -облучения.

Таблица 1

Образец	Рентгенизация при комнатной температуре			Рентгенизация при повышенной температуре (90°C)		
	K_F	K'_F	$\frac{K_F - K'_F}{K_F} \cdot 100\%$	K_F	K'_F	$\frac{K_F - K'_F}{K_F} \cdot 100\%$
$KCl \cdot Cu(0,1 \text{ моль}\%)$	21,5	5	72	9,5	4	58
$KCl \cdot Cu(1 \text{ моль}\%)$	16	2	88	12	2	83
$KCl \cdot Ti(0,1 \text{ моль}\%)$	19	7	63	15	12,5	17
$KCl \cdot Pb(0,05 \text{ моль}\%)$	9	1	90	—	—	—
$KCl \cdot Pb(0,5 \text{ моль}\%)$	8	0	100	—	—	—
KCl	6	4	33	4	3	25

Как видно из табл. 1 в присутствии активатора оптическая устойчивость F -центров значительно понижается. Это можно объяснить следующими причинами.

1. Активированные кристаллы содержат большее количество дырочных центров захвата, чем чистые и поэтому в них создаются благоприятные условия для рекомбинации электронов с захваченными дырками.

Как известно, ионы активатора могут служить эффективными центрами захвата для электронов и поэтому при F -облучении часть электронов, освобожденных с F -уровней, захватывается активаторами ловушками.

В примесных кристаллах число F -центров, образованных при повышенной температуре рентгенизации, в 1,5—2 раза меньше, чем в кристаллах, рентгенизованных при комнатной температуре. Кроме того, как следует из табл. 1, оптическая стабильность F -центров с повышением температуры рентгенизации кристалла повышается. Последний факт может быть объяснен, если предположить, что при повышенной температуре рентгенизации стабильность дырочных центров захвата, образованных с участием примесных ионов, уменьшается. Тем самым ухудшаются условия для рекомбинации электронов, освобо-

божденных из F -центров, и, следовательно, увеличивается вероятность повторных захватов.

Интересные результаты (рис. 2) были получены для фосфора $KCl \cdot TiJ$ (во всех остальных случаях активаторы вводились в виде хлористых солей). В нем при рентгенизации при повышенной температуре наблюдался прост оптической плотности в максимуме F -полосы по

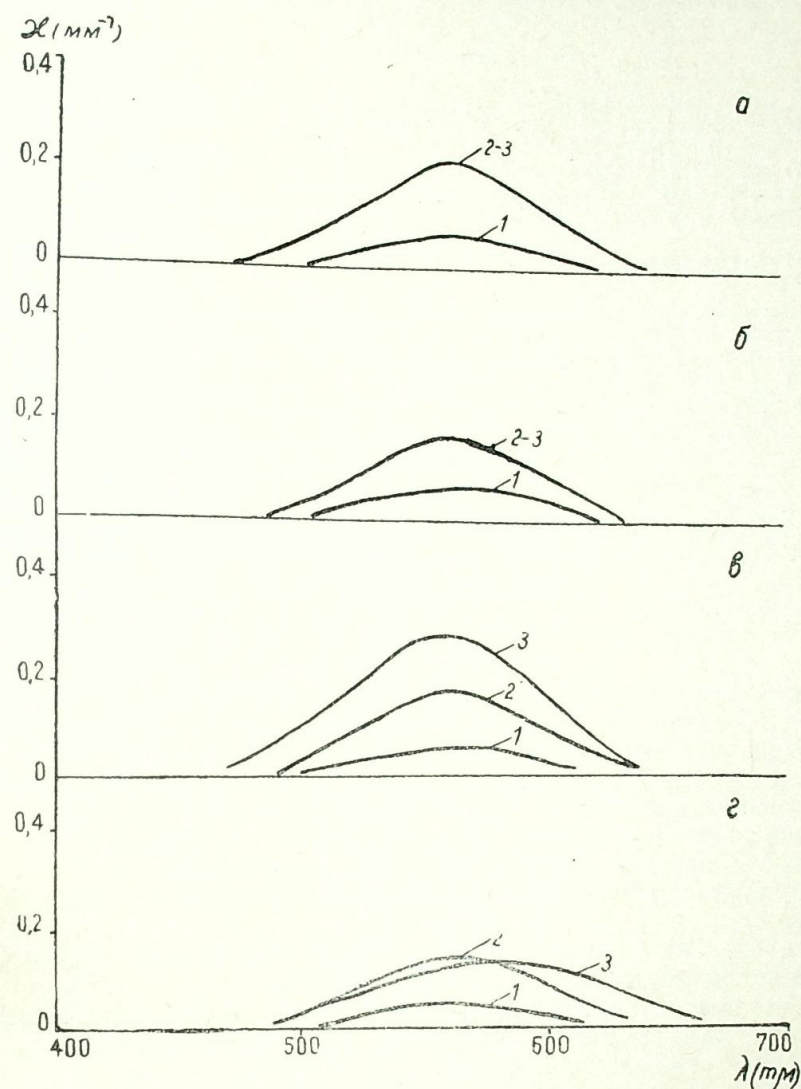


Рис. 2

F -полосы кристаллофосфоров

1— KCl ; 2— $KCl \cdot TiCl$; 3— $KCl \cdot TiJ$ сразу после рентгенизации (а); после F -облучения (б) после рентгенизации при повышенной температуре (в); после F -облучения последних (г).

сравнению с рентгенизованными при комнатной температуре кристаллами. После обесцвечивания такого кристалла его F -полоса сильно (на 8—10 $m\mu$) смещается в сторону длинных волн. Такого смещения не наблюдается у этих кристаллов, рентгенизованных при комнатной тем-

пературе. Не наблюдается его и в фосфорах $KCl \cdot TiCl$. По-видимому, в фосфорах TiJ при повышенной температуре рентгенизации образуются агрегаты с участием ионов иода, которые и обуславливают смещение полосы поглощения.

Таким образом, изучение скорости роста и оптического распада F -центров показывает, что эти свойства сильно зависят от наличия примесей в кристаллах, а также от его предыстории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заитов Ф. Н., Карк Ф. Я. Тр. ИФА АН СССР, 6, 28, 1957.
2. Кац М. Л. ДАН СССР, 85, 757, 1952.
3. Лушчик Ч. Б. ЖЭТФ. 30, 488, 1956.
4. Лушчик Ч. Б. Материалы V совещания по люминисценции. Тарту, 1957.
5. Парфианович И. А. Диссертация, М., 1958.
6. Парфианович И. А., Шуралева Е. И. Оптика и спектроскопия, 7, 518, 1959.
7. Парфианович И. А., Шуралева Е. А., Изв. АН СССР, серия физ., 26, 497, 1962.
8. Шамовский Л. М. Оптика и спектроскопия, 1, 407, 1956.
9. Etzel H. Phys. Rev., 87, 906, 1952.
10. Soufova P. Чех. физ. журнал, 9, № 68, 1959.
11. Leutz H. Zs. Phys., 145, 412, 1956.

Т. Ч. Элијева Э. Х. Халилов

Бә'зи фәаллашдырычы вә гејри-фәаллашдырычы ашгарларын KCl —монокристалларында F —мәркәзләрин әмәлә кәлмәси вә ләғв едилмәсинә тә'сири

ХҮЛАСӘ

Гәләви-һалокен монокристалларында F -мәркәзләрин әмәлә кәлмәси вә ләғв едилмәси һәмин кристалларын әталәт вә аккумуляјасија хассәләри үчүн бөјүк әһәмијјәтә маликдир.

Мәгаләдә Ca , Sr , Cd , Pb , Tl , Cu ашгарларынын ренткен шүалары илә һәјәчанландырылмыш KCl —монокристалында F -мәркәзләрин әмәлә кәлиб ләғв едилмә хассәсинә тә'сири өјрәнилмишдир.

Тәдгигат ишинин нәтичәсиндә ашкар едилмишдир:

1) Јухарыда гејд едилән ашгарлар F -мәркәзләрин дајаныглығны азалдыр.

2) Ca , Sr , Mg ионлары F -мәркәзләрин консентрасијасыны тәмиз KCl —монокристалына нисбәтән хејли артырыр.

3) Отаг температурундан јүксәк температурда ($90^{\circ}C$) F -мәркәзләрин әмәлә кәлмәси вә ләғв едилмәси отаг температурундакына нисбәтән јаваш сүр'әтлә баш верир.

Н. А. ГАСАНОВА

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ β - Cu_2S

По своим свойствам халькозит (Cu_2S) относится к полупроводниковым соединениям. Физические свойства данного соединения были изучены Хирахара [4] и Волокобинским [1], а структура—Ральфсом [5], Бюергерем [3] и Уеда [6]. Удельное сопротивление этого полупроводника порядка 10^{-3} ом·см, концентрация носителей тока 10^{19} — 10^{20} см $^{-3}$, а подвижность 10 — 12 см 2 /в·сек [1, 4].

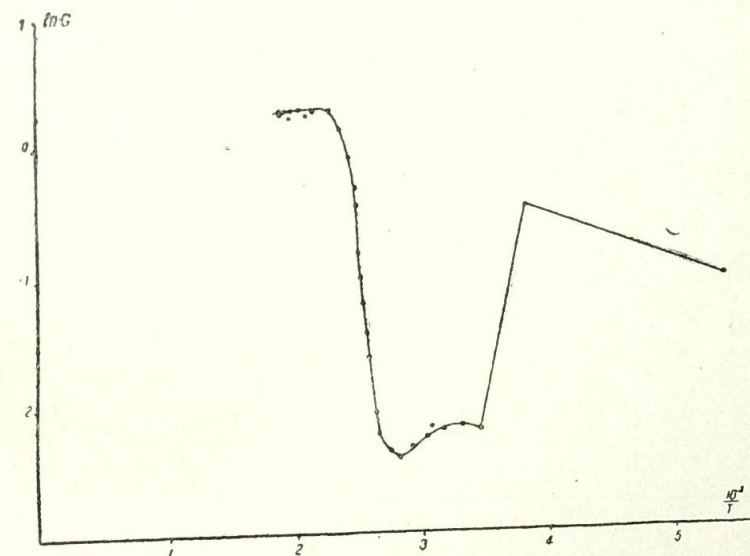


Рис. 1

По данным Ральфса и Бюергера, Cu_2S соответствует фазовому переходу при температуре $105^{\circ}C$, а по Уеда и Хирахара—при температуре 115 и $450^{\circ}C$. Известно, что небольшой избыток одной из компонент сильно влияет на свойства Cu_2S .

В порошкообразной форме Cu_2S впервые был использован Курча-товым и Дунаевой [2] для изготовления выпрямителей больших плот-

ностей прямого тока (25 а/см^2). Вышеизложенное и высокая точка плавления Cu_2S порождают особый интерес.

В литературе отсутствуют данные по режиму синтеза, о величине ширины запрещенной зоны этого полупроводника и др.

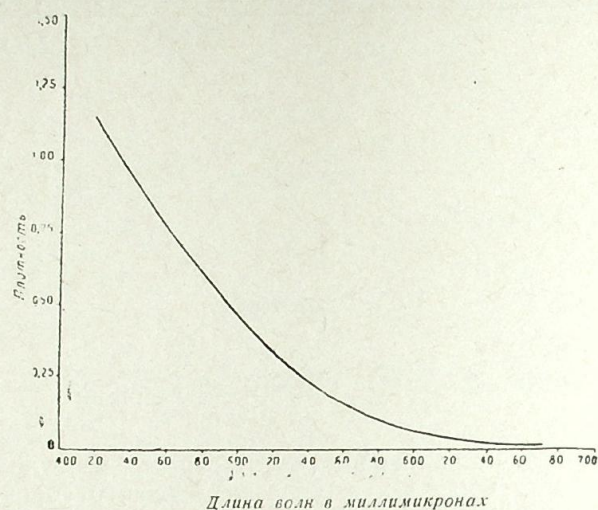


Рис. 2

Это соединение синтезировалось нами путем сплавления компонент. Порядок синтеза таков: после откачивания воздуха запаянную кварцевую ампулу, количество меди в которой было на 1,45% больше

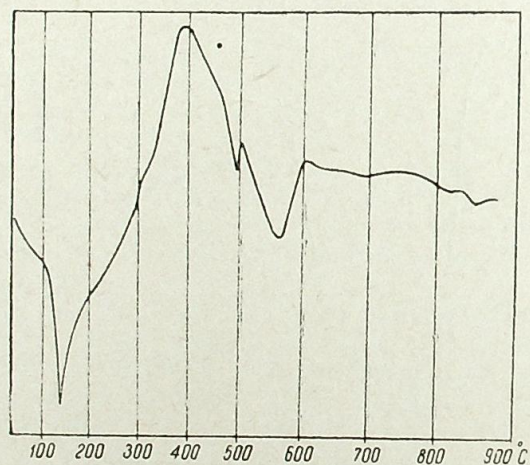


Рис. 3

стехиометрии, помещали в печь и подогревали до 110°C . В течение часа поддерживали температуру постоянной, после чего смесь постепенно нагревали до 1250°C ($t_{\text{пл.}} = 1127^\circ\text{C}$) и на протяжении двух часов температуру опять поддерживали постоянной. Затем печь медленно охлаждали до 800°C и выключали.

Рентген структурный анализ подтвердил, что полученное соединение $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$ — низкотемпературная ромбическая модификация Cu_2S .

Был определен тип проводимости $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$

как на массивном образце, так и на тонком слое. В обоих случаях он оказался полупроводником p -типа.

Измерения, проводимые компенсационным методом, показали, что этот полупроводник при температуре 290°K обладает следующими данными: удельное сопротивление $\approx 5,0 \text{ ом}\cdot\text{см}$, постоянная Холла $199,24 \text{ см}\cdot\text{в/а}\cdot\text{эрстед}$, э.д.с. Холла $E=148 \text{ в}$, а коэффициент термоэдс $\alpha=348 \text{ мв/град}$.

Подвижность и концентрация носителей тока, вычисленная по постоянной Холла, соответственно, равны: $30 \text{ см}^2/\text{в}\cdot\text{сек}$ и 10^{16} см^{-3} .

Ширина запрещенной зоны, вычисленная из температурной зависимости проводимости (рис. 1), составляет $1,71 \text{ эв}$, а из спектрального распределения поглощения (рис. 2) $\approx 2 \text{ эв}$.

На дифференциальной кривой (рис. 3), снятой в интервале температур $20\text{—}900^\circ\text{C}$, наблюдается 3 экзотермических и 2 эндотермических максимума. Можно предполагать, что первые две экзотермы соответствуют фазовым переходам, поскольку из кривой видно, что первая экзотерма глубже второй. По литературным данным [4] известно, что энергия первого перехода больше энергии второго.

А эндотермы соответствуют выделению серы и образованию SO_2 . Начиная с температуры 170°C , сера выделяется и образует с кислородом SO_2 . Этот процесс сопровождается выделением тепла, что соответствует образованию эндотерм.

В интервале температур $600\text{—}880^\circ\text{C}$ никаких изменений в веществе не наблюдается.

Выводы

Сопоставление наших данных с данными Хирахара, который изучал свойства стехиометрически правильного $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$, приводит к следующим выводам:

1. Избыток меди на 1,45% не меняет знака проводимости $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$.
2. Избыток меди на 1,45% сильно влияет на электропроводность $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$. Концентрация носителей тока и, следовательно, электропроводность уменьшаются в 1000 раз, подвижность носителей тока увеличивается в 3 раза, а коэффициент термоэдс в 4 раза.

Уменьшение электропроводности с увеличением содержания избыточной меди (по отношению к стехиометрии) указывает на то, что атомы меди ведут себя как донорные примеси. Так как $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$ дырочный полупроводник, в нем происходит компенсация акцепторных и донорных примесей, вследствие чего уменьшается концентрация дырок.

3. Ход температурной зависимости электропроводности остается постоянным и в случае стехиометрии, и в случае избытка меди на 1,45%, но перемещается в сторону более низких температур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волокобинский Ю. М. ДАН СССР, 1957, т. 113, 1239.
2. Дунаева Ю. А. и Курчатов Г. В. ЖТФ, 1940, т. 10, вып. 22.
3. Buerger N. W. Econ. Geol., 36 (1941) 19; Amer. mineral, 27 (1942) 712.
4. Hirahara E. J. of the Phys. soc. of Japan, 1951, vol. 6, № 6, 422—437.
5. Rahlfs P. Zs. Phys. Chem. 31 (1936), 157.
6. Ueda R. J. of the Phys. soc. of Japan, 1949, vol. 4, 287—292.

Н. А. Басанова

$\beta\text{-Cu}_2\text{S}$ -ин бэ'зи хассэлэри хаггында

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ тэркибиндэ стехиометрик чэкидэн 1,45% артыг мис олан бирвалентли мис сулфидинин ашагы температур модификасијасы олан ромбик $\beta\text{-Cu}_2\text{S}$ -ин бэ'зи хассэлэри верилмишдир.

Мүэјјән едилмишдир ки, мисин 1,45 % артыглыгы β - Cu_2S -ин кечиричилијинин типини дәјишмир, лакин әдәди гијмәтинин тәгрибән үч тәртиб азалмасына сәбәб олур. Һәмчинин термoeиtг әмсaлы вә јүкдашыјычыларын јүрүклүјү бир нечә дәфә артыр.

Кечиричилијин белә дәјишмәси мис атомларынын өзләрини донор ашгарлар кими апарарат, p -нөв кечиричилијә малик олан β - Cu_2S -дә аксептор ашгарлары компенсә етмәси илә изаһ олунур.

Мисин артыглыгы кечиричилијин температур асылылыгы әјрисинин характерини дәјишмәјиб, анчаг онун кичик температурлара доғру сүрүшмәсинә сәбәб олур.

Х. Г. БАРКИНХОЕВ, Г. М. АЛИЕВ

ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ СЕЛЕНА РАЗЛИЧНОЙ ЧИСТОТЫ В ТВЕРДОЙ И ЖИДКОЙ ФАЗАХ

Работы А. Р. Регеля с сотрудниками [5, 14] приводят к убеждению, что решающим в электрических свойствах является не дальний, а ближний порядок. Их результаты дали основание пересмотреть зонную теорию, учитывающую движение носителей тока в строго периодическом поле, т. е. при наличии дальнего порядка, и показать связь структуры энергетических зон с ближним порядком расположения атомов [7].

Для нас представляло интерес исследование электрических свойств селена разной чистоты в твердой и жидкой фазах в широком интервале температур, охватывающем и область плавления. В качестве объекта исследования мы взяли селен: 99,999; 99,9999 и 99,99999%, обозначаемый в дальнейшем изложении $B-3$, $B-4$ и $B-5$, соответственно. В литературе нам не удалось найти данных по физическим свойствам селена такой чистоты.

Таблица 1

Т°, С	34	70	110	120	160	210	250	362	380	400	445	452	485
α	941	1120	1000	1000	1210	1214	630	622	865	1000	1260	1312	1325

Селен и его соединения нашли наиболее широкое применение в электрофотографии, в выпрямителях, фотоэлементах, фотосопротивлениях, термоэлементах и др. Исследования селена, имеющего сложную структуру с разного рода химическими связями, представляет большой научный интерес. Он является интересным объектом исследования и потому, что его легко можно получить в аморфной и кристаллической модификациях и изучать свойства в зависимости от многих факторов. Исследованию электрических свойств гексагонального селена посвящено много работ, но область жидкого состояния остается малоизученной как в отношении электрических свойств, так и структуры [21, 22].

Борелиус [17] исследовал электрические свойства жидкого селена различной чистоты под углом зрения высказанной им гипотезы о двух

структурах и жидком состоянии. У него самый чистый селен был 99,995%. Однако исследования Хенкельса [21] не подтвердили существования двух структур в жидком селене. Работы обоих авторов не включают детального исследования электрических свойств в области плавления.

Нами была изучена температурная зависимость электропроводности в интервале 20—500°C, включая область плавления селена $B-3$, $B-4$, $B-5$, а также температурная зависимость электропроводности жидкого селена $B-4$ при нагреве и охлаждении.

Измерение и результаты

Для измерения электропроводности и термоэдс образцы изготавливали следующим образом. Пирексовые ампулы с предварительно впаянными платиновыми электродами и термодарами (хромель-алюмель) заполняли селеном. Затем их откачивали до 10^{-4} мм рт. ст. и запаивали. Селен плавился и кристаллизовался при 210°C в течение 25 часов.

Электропроводность измерялась несколько раз на различных образцах данной чистоты компенсационным методом и мостом постоянного тока типа МКМВ, результаты этих методов совпадают удовлетворительно. Термоэдс измерялась обычным компенсационным методом. Интервал между измерениями 10°, а в переходной области 3—5°. Измерения производились после тридцатиминутной выдержки при данной температуре, что обеспечивало стационарности как в твердой и жидкой фазах, так и в переходной области. Это указывает на то, что значение электропроводности при разных температурах не связано с кинетикой механических напряжений и плавления. Видимо, при таком температурном режиме в течение 30 минут механические напряжения, возникающие при переходе от одной температуры к другой, успевают рассасываться [10].

На рис. 1 изображены кривые температурной зависимости гексагонального селена разной чистоты в интервале 20—500°C. Как видно, в твердой фазе электропроводность и ее температурная зависимость очень существенно зависят от чистоты селена. Электропроводность селена $B-5$ в интервале 20—200°C имеет полупроводниковый ход, $B-3$ — металлический, $B-4$ — слабо зависящий от температуры, металлический.

Интересно отметить, что до плавления $B-5$ имеет большую электропроводность, чем $B-4$ и $B-3$. Это различие в характере хода температурной зависимости и в величинах электропроводности, видимо, связано с наличием взаимодействия и компенсацией примесных центров имеющихся в селене.

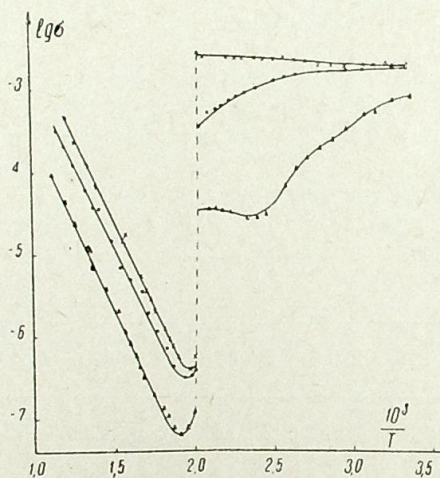


Рис. 1
Температурная зависимость электропроводности селена в интервале 20—500°C:
△—Se ($B-3$); ●—Se ($B-4$); ×—Se ($B-5$).

Согласно данным анализа, при переходе от $B-3$ к $B-5$ некоторые примеси уменьшаются больше, чем на один порядок. Известно, что примеси висмута и галогенов до определенных процентов увеличивают, а затем уменьшают электропроводность селена [1], примеси кадмия оказывают обратное действие [2]. При введении в селен примесей теллура, мышьяка, сурьмы, ртути и таллия до определенных процентов происходит компенсация акцепторных уровней и удельное сопротивление возрастает на несколько порядков [3]. Большее значение электропроводности $B-5$, видимо, связано с наличием меньшего количества компенсирующих примесей в нем, чем $B-4$ и $B-3$ (табл. 1). Эти вопросы, имеющие важное научное и практическое значение, исследованы недостаточно и могут быть изучены путем легирования более чистого селена одной, двумя и несколькими примесями.

Литературные данные показывают, что селен является аномальным полупроводником [1], т. е. концентрация дырок, определенная из температурной зависимости термоэдс уменьшается, а подвижность с температурой растет. Как показали наши результаты [4], $B-3$ является нормальным полупроводником, но с металлическим ходом температурной зависимости электропроводности. При введении примесей галлия в металлическом виде и в виде GaSe $B-3$ становится аномальным с полупроводниковым ходом температурной зависимости электропроводности. Эти результаты показывают, что разная температурная зависимость электропроводности $B-3$, $B-4$ и $B-5$ и аномалия селена связаны с качеством и количеством примесей и указывают путь управления параметрами селеновых приборов и их температурными характеристиками.

При плавлении селена электропроводность его уменьшается скачкообразно. Это связано с уменьшением плотности селена (примерно, на 13%), что обуславливается возрастанием расстояний между цепочками от 3,46 до 3,7 Å и атомами вдоль цепочек от 2,32 до 2,36 Å [13]. Увеличение расстояний между атомами приводит к уменьшению их взаимодействия, вследствие чего увеличивается амплитуда тепловых колебаний, приводящих к уменьшению подвижности носителей тока [16], а это, в свою очередь, приводит к уменьшению электропроводности.

Электропроводность $B-3$, $B-4$ и $B-5$ при переходе из твердой фазы в жидкую уменьшается в 250; 1080; 2000 раз, соответственно, что согласуется с данными Эккарта [20].

Нагрев плавленого селена приводит к тому, что у всех образцов электропроводность уменьшается в узком интервале температур (примерно, $t_{пл} \pm 15^\circ$). После плавления, видимо, сохраняется такая упорядоченность в размещении атомов, какая имела в кристаллическом веществе [9]. Уменьшение электропроводности с повышением температуры в этой узкой области, по-видимому, связано с разрушением упорядоченности в размещении цепочек, приводящей к увеличению центров рассеяния носителей тока. Аналогичное явление наблюдается при перегреве плавленого германия и $A^{111}Sb$ в узком интервале температур [6].

Начиная с 250°C, электропроводность растет экспоненциально у всех образцов, что указывает на ярко выраженный полупроводниковый ход. Очевидно, это область собственной проводимости. Данные рентгенографического анализа показали, что в жидком селене сохраняются спиральные молекулярные цепочки, из которых построена решетка „металлического“ селена [24].

Измерения вязкости подтвердили эти результаты [15]. Вероятно, „кристаллическая“ жидкость, образованная при плавлении селена

и состоящая из одномерных кристаллов—цепочек, при повышении температуры распадается на меньшие комплексы, вплоть до отдельных атомов [25]. Этот распад ведет к увеличению концентрации носителей тока, вследствие чего растет электропроводность. Наблюдаемое увеличение электропроводности иначе можно связать с тем, что при нагреве большее и большее число гомеоплярных связей, сохраняющихся при расплавлении, приобретает подвижность [24]. Такое изменение ориентаций ковалентных связей Т. А. Конторовой в

работе [12] названо „ориентационным плавлением“.

На рис. 2 представлены кривые температурной зависимости электропроводности плавленого кристаллического (а) и аморфного (б) селена В-5 при нагреве и охлаждении. Электропроводность при охлаждении от 280°C до точки плавления совпадает с температурным ходом нагрева той же области, а от 380°C имеет гистерезис, т. е. точки графика при охлаждении ложатся несколько выше. Это показывает, что чем выше температура жидкого селена, тем больше число разорванных цепочек или ковалентных связей, получивших „ори-

ентационное плавление“, несколько затрудняющее при охлаждении восстановление прежнего состояния. Полупроводниковый ход указывает на то, что радикальных изменений химических связей, как в плавленом Ge и $A^{III}Sb$ [6], в селене не происходит. Как видно из графиков, предыстория образца жидкого селена влияет на электропроводность лишь в узком интервале температур около точки плавления.

Результаты измерения термоэдс твердого и жидкого селена В-4 при разных температурах приведены в табл. 1, из которой видно, что термоэдс как в твердом, так и в жидком состояниях имеет большую величину и знак ее в той и другой области указывает на дырочную проводимость селена. На несколько большие значения термоэдс указывается в работе [18] (100—2000 мкв/град). Видимо, такое расхождение в численных значениях связано со степенью чистоты селена.

Сохранение цепочной структуры, ковалентных связей, малое изменение расстояний между атомами вдоль цепочек при переходе из одной фазы в другую позволяет применить результаты зонной теории

к жидкому селену [8]. В области собственной проводимости электропроводность σ меняется по эмпирическому закону:

$$\lg \sigma = A - \frac{B}{T} \quad (1)$$

Теория дает для электропроводности

$$\sigma = q(U_e n_e + U_p n_p),$$

где q —заряд электрона (кулон), n_e , n_p —концентрация электронов и дырок, соответственно, U_e , U_p —подвижности электронов и дырок, соответственно, но в области собственной проводимости

$$n_e = n_p \text{ и } U_e < U_p.$$

После учета этих фактов получаем $\sigma = q n_p U_p$. Учитывая, что

$$n_p = \frac{2(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}} \text{ и полагая } U_p = \frac{a}{T^{3/2}}, \text{ получим:}$$

$$\lg \sigma = \lg \frac{2(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot a \cdot q - \frac{\Delta E}{2kT} \cdot \lg e. \quad (2)$$

Если сопоставить (1) и (2), то

$$A = \lg \frac{2(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \cdot a \cdot q.$$

$$B = \frac{\Delta E}{2k} \cdot \lg e,$$

где h —постоянная планка (дж.сек), k —постоянная Больцмана (дж.град), a —коэффициент подвижности, m —масса электрона (кг).

Имея численные значения A и B , найденные по графику, находим ΔE и a для В-5, В-4 и В-3, соответственно (табл. 2).

Таблица 2

Элемент	A	B (°K)	ΔE (эВ)	a
В-3	-2,45	5086	2,05	8,14
В-4	-2,80	5009	2,01	4,98
В-5	-3,40	5181	2,08	0,22

Значение B (фактор энергии активации) по данным Борелиуса 2550—6700, Хенкельса—5850 и Лицелля—5760. Такой разброс в параметре B они объясняют присутствием SeO_2 в жидком селене. Как показал Козырев [11], это в полной мере относится и к твердой фазе. Энергия активации, найденная нами, согласуется со средним значением Борелиуса и несколько выше Эккарта (1,9 эВ), но меньше Лицелля (2,28 эВ) и Хенкельса (2,31 эВ).

Численные значения подвижности $U_p = \frac{8,14 \cdot 10^6}{T^{3/2}} \frac{см^2}{в.сек}$ носителей тока в селене В-5, найденные нами при 250 и 500°C, равны 67

и $397 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$, соответственно. Хенкельсом для тех же температур получены значения 702 и $380 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$, соответственно. Эти значения слишком велики, на наш взгляд, для жидкого селена. Поэтому можно

полагать, что подвижности подчиняются закону $U_p = \frac{a}{T^\alpha}$, но обяза-

тельно $\alpha > 3/2$.

В заключение авторы выражают благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву за предложенную тему и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Г. М. и Абдуллаев Г. Б. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1958, № 4.
2. Алиев Б. Д. и Алиев Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1960, № 5.
3. Алиев М. И. и Ахундова С. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1960, № 3.
4. Баркинхоев Х. Г., Алиев Г. М. и Керимов И. Г. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1961, № 3.
5. Блум А. И., Мокровский Н. П. и Регель А. Р. Изв. АН СССР, серия физич., 1952, 16, 2, 139.
6. Глазов В. М. и Чижевская С. Н. ФТТ, 1961, 3, 9.
7. Губанов А. И. ЖЭТФ, 1955, 28, 4.
8. Губанов А. И. ЖЭТФ, 1954, 26, 136.
9. Данилов В. И. и Радченко И. В. ЖЭТФ, 1937, 7, 1153.
10. Козырев П. Т. ЖТФ, 1956, 24, 2.
11. Козырев П. Т. ФТТ, 1959, 1, 1.
12. Конторова Т. А. ФТТ, 1959, 1, 11.
13. Музер Е. и Пирсон В. Полупроводниковые вещества. М., 1960.
14. Регель А. Р. Вопросы теории и исследования полупроводников и процессов полупроводниковой металлургии. Изд. АН СССР, М., 1955.
15. Халилов Х. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1959, № 6.
16. Шалыт С. С. Полупроводники в науке и технике, т. I, 1957.
17. Borelius G., Pihlstrand F., Andersson J. and Gullberg K. Ark. Mat. Astr. och Fysik. 30, № 14, 1, 1944.
18. Borelius G. and Gullberg K. Ark. Mat. Astr. och Fysik. B. 31, № 17, 1945.
19. Eckart F. Ann. phys., 14, 5, 8, 1955.
20. Eckart F. Ann. phys., 14, 233, 1954.
21. Henkels H. W., Moczuk J. J. appl. phys., vol. 24, 8, 1953.
22. Lizell B. The J. of chemical Physics. 20, 4, 1952.
23. Polebon M. H. Comt. rend. 173, 295, 1921.
24. Prins J. A. and Dekeyser. Physika., 4, 900, 1937.
25. Stanski N., Kraischew R., Krastanov L. Zs. Kryst., 88, 329, 1934.

Х. Г. Баркинхоєв, Г. М. Әлиєв

Тәмизлији мұхтәлиф олан селенин бәрк вә маје һалында
электрик хассәләринә даир

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә тәмизлији 99,999; 99,9999; вә 99,99999 олан селенин 20—500°C температур интервалында электрик кечирмәси вә термоэлектрик һәрәкәт гүввәси өйрәнилмишдир. Электрик кечирмә компенсација үсулу вә МКМВ типли сабит чәрәјан көрпүсү илә өлчүлмүш вә һәр ики үсулла өлчүдүкдә ејни нәтичә алынмышдир.

Мәғаләдәки 1-чи шәкилдә тәмизлији мұхтәлиф олан кристал селенин 20—500°C интервалында электрик кечирмәсинин температурдан асылылығы көстәрилмишдир. Шәкилдән көрүнүр ки, бәрк һалда электрик-

кечирмә вә онун температурдан асылылығы тәмизликдән асылы оларак кәскин фәргләнир. 20—200°C температур интервалында селен В-5 үчүн электрик кечирмәсинин температурдан асылылығы јарымкечирмәли характер. дашыдығы һалда, селен В-3 үчүн металл хассәјә малик олур.

Бәрк һалдан маје һалына кечдикдә В-3, В-4 вә В-5 типли (бу тип селенләрин тәмизлији 1-чи чәдвәлдә көстәрилмишдир) селенин электрик кечирмәси сычрајышла ујғун оларак 250, 1080 вә 2000 дәфә дәјишмишдир.

Электрик кечирмә 250°C-дән башлајараг експоненсиал оларак артыр, куман етмәк олар ки, бу температурдан етибарән мәхсуси кечиричли областы башлајыр.

2-чи шәкилдә кристал вә аморф селенин (В-5) әридикдән сонра гыздырдыгда вә сојутдугда электрик кечирмәсинин температурдан асылылығы көстәрилмишдир. 280°C температурдан башлајараг сојутдугда электрик кечирмәсинин температурдан асылылығы гыздырма заманы алынған гијмәтләрлә үст-үстә дүшүр. Бу һадисәни 380°C температурдан етибарән тәқрар етдикдә һистерезис һадисәси алыныр.

Маје һалында активләшмә енерјиси $\Delta E = 2,05 \text{ эв}$ оларак тәјин едилмишдир.

Г. Ш. АЛИЕВ

МЕТОД РАСЧЕТА РЕКУПЕРАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕКУПЕРАЦИИ С ОСЕВЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ

Осевой возбудитель (генератор с приводом от оси электроподвижного состава) успешно применяется на некоторых типах магистральных электровозов с рекуперативным торможением [2]. Такой возбудитель может быть применен и на городском электротранспорте.

В литературе [1, 2] приводятся различные методы расчета рекуперативных характеристик схем рекуперации с осевым возбудителем, однако, в них не учитывается влияние реакции якоря возбудителя.

Пренебрежение влиянием реакции якоря значительно упрощает расчет рекуперативных характеристик и вполне допустимо для условий, когда ток якоря возбудителя измеряется в небольших пределах, близких к номинальному (регулирование скорости движения на уклоне). В отличие от этого, ток возбудителя в схемах рекуперации, предназначенных для замедления перед остановками, колеблется в широких пределах, вплоть до 2÷3-кратного от номинального. В этом случае пренебрежение влиянием реакции якоря при расчете рекуперативных характеристик может привести к недопустимым погрешностям.

Предлагаемая методика позволяет учитывать как реакцию якоря тягового электродвигателя, так и реакцию якоря осевого возбудителя.

Сущность метода рассмотрим применительно к схеме, изображенной на рис. 1а.

1. Задаемся током возбуждения тягового электродвигателя $J_{в1} = \text{const}$ и различными значениями тока рекуперации $J_{р1}, J_{р2}, J_{р3}, \dots, J_{рк}$

2. По магнитной характеристике $C\Phi = f(J_{в})$ тягового электродвигателя (рис. 2а) находим значения $C\Phi_1, C\Phi_2, C\Phi_3, \dots, C\Phi_k$ соответствующие принятым значениям $J_{р1}, J_{р2}, J_{р3}, \dots, J_{рк}$ при постоянной величине $J_{в1}$.

3. Для каждой тройки значений $J_{в1}, J_{рк}$ и $C\Phi_k$ рассчитываем скорость вращения двигателя:

$$n_k = \frac{U_c + J_{рк} r_g + (J_{рк} + J_{в1}) \cdot r_c}{C\Phi_k}$$

(Обозначения, принятые как здесь, так и в последующих формулах, поясняются на рис. 1)

Г. Ш. АЛИЕВ

МЕТОД РАСЧЕТА РЕКУПЕРАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ РЕКУПЕРАЦИИ С ОСЕВЫМ ВОЗБУДИТЕЛЕМ

Осевой возбудитель (генератор с приводом от оси электроподвижного состава) успешно применяется на некоторых типах магистральных электровозов с рекуперативным торможением [2]. Такой возбудитель может быть применен и на городском электротранспорте.

В литературе [1, 2] приводятся различные методы расчета рекуперативных характеристик схем рекуперации с осевым возбудителем, однако, в них не учитывается влияние реакции якоря возбудителя.

Пренебрежение влиянием реакции якоря значительно упрощает расчет рекуперативных характеристик и вполне допустимо для условий, когда ток якоря возбудителя измеряется в небольших пределах, близких к номинальному (регулирование скорости движения на уклоне). В отличие от этого, ток возбудителя в схемах рекуперации, предназначенных для замедления перед остановками, колеблется в широких пределах, вплоть до 2÷3-кратного от номинального. В этом случае пренебрежение влиянием реакции якоря при расчете рекуперативных характеристик может привести к недопустимым погрешностям.

Предлагаемая методика позволяет учитывать как реакцию якоря тягового электродвигателя, так и реакцию якоря осевого возбудителя.

Сущность метода рассмотрим применительно к схеме, изображенной на рис. 1а.

1. Задаемся током возбуждения тягового электродвигателя $J_{в1} = \text{const}$ и различными значениями тока рекуперации $J_{р1}, J_{р2}, J_{р3}, \dots, J_{рк}$

2. По магнитной характеристике $C\Phi = f(J_B)$ тягового электродвигателя (рис. 2а) находим значения $C\Phi_1, C\Phi_2, C\Phi_3, \dots, C\Phi_k$ соответствующие принятым значениям $J_{р1}, J_{р2}, J_{р3}, \dots, J_{рк}$ при постоянной величине $J_{в1}$.

3. Для каждой тройки значений $J_{в1}, J_{рк}$ и $C\Phi_k$ рассчитываем скорость вращения двигателя:

$$n_k = \frac{U_c + J_{рк} r_g + (J_{рк} + J_{в1}) \cdot r_c}{C\Phi_k}$$

(Обозначения, принятые как здесь, так и в последующих формулах, поясняются на рис. 1)

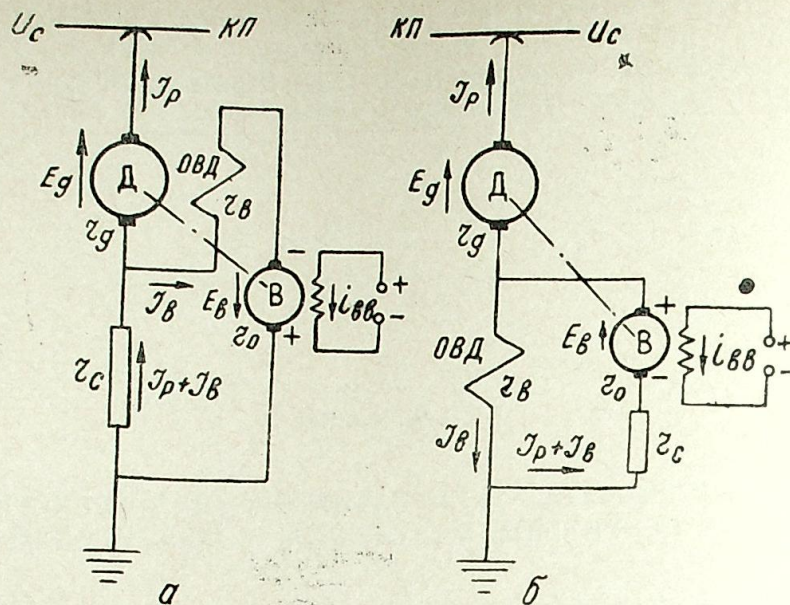


Рис. 1.

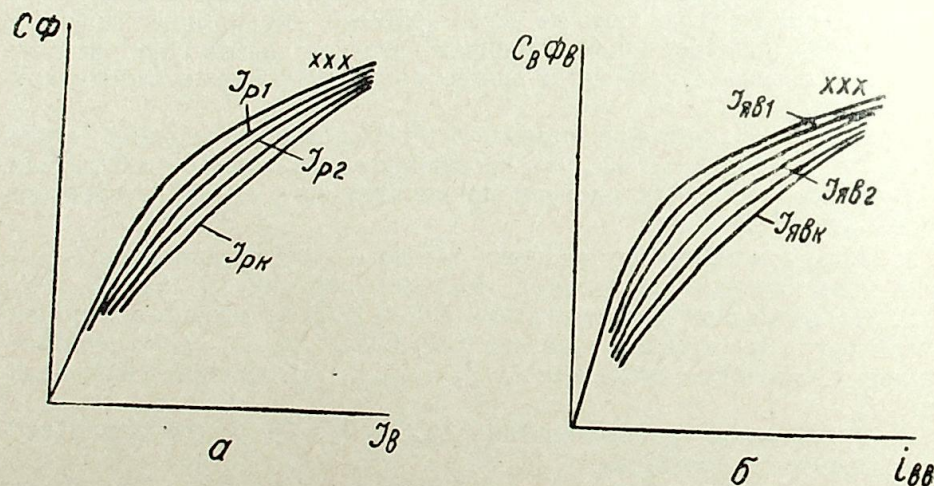


Рис. 2.

Магнитные характеристики

а) тягового электродвигателя; б) осевого возбудителя.

4. Для принятых значений $J_{p1}, J_{p2}, J_{p3}, \dots, J_{pk}$ и J_{v1} определяем величины э. д. с. возбудителя:

$$E_{vk} = (J_{v1} + J_{pk}) \cdot r_c + J_{v1} \cdot (r_o + r_v) + \Delta U_{ш};$$

где $\Delta U_{ш}$ — падение напряжения в щетках возбудителя.

5. По формуле $C_{\Phi vk} = \frac{E_{vk}}{a n_k}$ находим ряд значений $C_{\Phi vk1}, C_{\Phi vk2}, C_{\Phi vk3}, \dots, C_{\Phi vk},$ соответствующих рассчитанным $E_{v1}, E_{v2}, E_{v3}, \dots, E_{vk}$ и $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k,$ где a — коэффициент пропорциональности между скоростью вращения возбудителя n_v и скоростью вращения двигателя

$$n_v = a n$$

6. Из кривых $C_{\Phi v} = f(i_{vv})$ возбудителя (рис. 2б), по полученным значениям $C_{\Phi vk1}, C_{\Phi vk2}, C_{\Phi vk3}, \dots, C_{\Phi vk},$ и соответствующим значениям тока якоря возбудителя $J_{яv}$ (для рассматриваемой схемы $J_{яv} = J_{v1}$), находим токи возбуждения возбудителя — $i_{vv1}, i_{vv2}, i_{vv3}, \dots, i_{vvk}.$

Аналогично производится расчет и для других значений тока возбуждения двигателя: $J_{v2} = \text{const}, J_{v3} = \text{const}, \dots, J_{vk} = \text{const}.$ Для каждого значения тока возбуждения двигателя $J_{vk} = \text{const}.$ необходимо задаваться одними и теми же значениями тока рекуперации $J_{p1}, J_{p2}, J_{p3}, \dots, J_{pk}$ (рекомендуется $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}$ часового тока J_h).

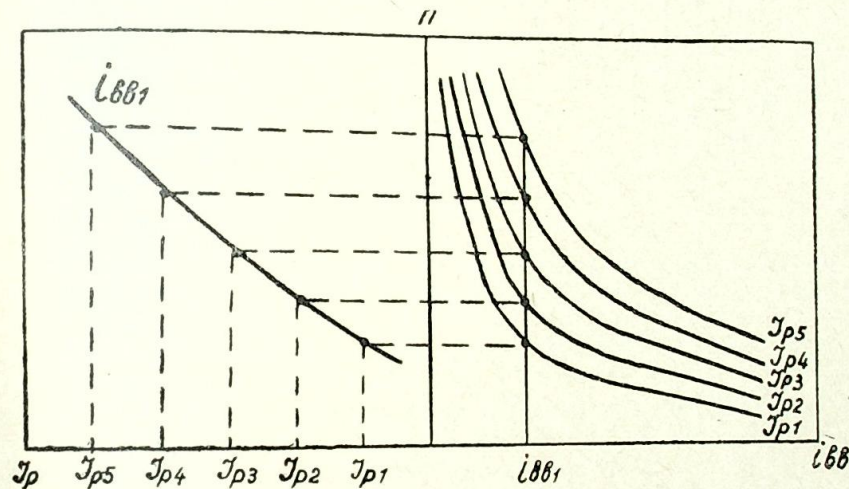


Рис. 3.

Семейство кривых $n = f(i_{vv})$ при разных $J_p = \text{const}$ и построение характеристики $n = f(J_p)$ при $i_{vv} = \text{const}.$

7. По полученным данным строится семейство кривых $n = f(i_{vv})$ для различных $J_{pk} = \text{const}$ (рис. 3).

8. По этим кривым можно построить рекуперативную характеристику $n = f(J_p)$ для любого значения тока возбуждения возбудителя $i_{vvk} = \text{const}$ (рис. 3). Принцип построения характеристики $n = f(J_p)$ виден из рис. 3.

Предлагаемый метод применим также и для схемы, изображенной на рис. 1б. При этом, однако, формулы для определения скорости

вращения двигателя (П. 3.), э. д. с. (П. 4) и тока якоря возбудителя (П. 6) должны быть представлены в следующем виде:

$$n = \frac{U_c + J_p r_g - J_v r_v}{C\Phi}$$

$$E_v = (J + J_p)(r_c + r_0) + J_v r_v + U_{\Delta_{ш}}$$

$$J_{яв} = J_v + J_p.$$

На рис. 4 представлены характеристики $n = f(J_p)$ при $i_{вв} = 2a$, $U_c = 300b$ и $r_c = 0,08$ ом для схемы рекуперативного торможения с осевым возбудителем (тип ПН-100, 110в, 155а), подключенным параллельно обмотке возбуждения тягового электродвигателя ДК-254 А.

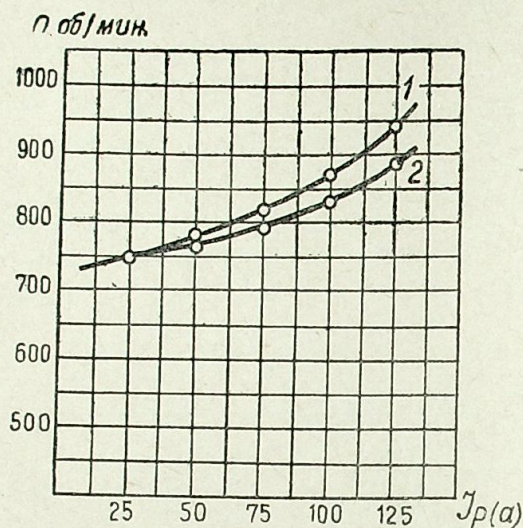


Рис. 4

Характеристика $n = f(J_p)$:
1—с учетом влияния реакции якоря возбудителя; 2—без учета влияния реакции якоря возбудителя.

Характеристика $n = f(J_p)$ позволяет учитывать влияние реакции якоря осевого возбудителя.

Погрешность по этому методу зависит от степени точности выполнения и обработки графической части расчета.

2. Зависимость $n = f(J_p)$, в отличие от других методов расчета, выводится непосредственно для любого значения тока возбуждения возбудителя, что значительно облегчает расчет ступеней регулирования реостата.

3. Во избежание грубых ошибок при расчете рекуперативных характеристик схем, где осевой возбудитель работает в режиме значительных перегрузок, необходимо учитывать влияние реакции якоря возбудителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд В. Е., Чеботарев Е. В., Сидоров Н. Н. и Болдов Н. А. Основы электрической тяги. Госэнергиздат, 1957.
2. Фергусон Т. Основы проектирования электрической тяги. Трансжелдориздат, 1957.

Н. Ш. Элиев

Ох тэ'сирлэндиричи илэ рекуперасија режиминин рекуперасија характеристикаларыны хесаблама методу

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә дартгы електрик мүһәррикинин вә ох тэ'сирлэндиричинин јакор реаксijasыны нәзәрә алан рекуперасија характеристикаларыны хесаблама методу верилир.

Методун маһијјәти ашағыдакындан ибарәтдир: Електрик мүһәррикинин тә'сирләнмә чәрәјанынын мүәјјән $J_{в1} = \text{const}$ гіјмәти вә рекуперасија чәрәјанларынын мүхтәлиф $J_{р1}, J_{р2}, J_{р3}, \dots, J_{рк}$ гіјмәтләри гәбул едилир вә бунлара ујғун мүһәррикин магнит характеристикасындан $C\Phi_1, C\Phi_2, C\Phi_3, \dots, C\Phi_k$ гіјмәтләри тә'јин едилир.

$J_{в1}, J_{рк}$ вә $C\Phi_k$ гіјмәтләринә көрә мүһәррикин фырланма сүр'әти — n_k , һабелә $J_{в1}$ вә $J_{рк}$ гіјмәтләринә көрә тә'сирлэндиричинин е. һ. г.-си $E_{вк}$ хесабланыр.

Алынмыш $E_{вк}$ вә n_k гіјмәтләринә көрә тә'сирлэндиричи үчүн $C_{в\Phi_{в1}}, C_{в\Phi_{в2}}, C_{в\Phi_{в3}}, \dots, C_{в\Phi_{вк}}$ гіјмәтләри хесабланыр вә бунлара ујғун олараг тә'сирлэндиричинин магнит характеристикасындан онун јакор чәрәјанына әсасән тә'сирләнмә чәрәјаны — $i_{вв1}, i_{вв2}, i_{вв3}, \dots, i_{ввк}$ тә'јин едилир.

Јухарыдакы әмәлијјат мүһәррикин диқәр тә'сирләнмә чәрәјанлары $J_{в2} = \text{const}, J_{в3} = \text{const}, \dots, J_{вк} = \text{const}$ шәраитиндә дә тәқрар олунур.

Алынмыш гіјмәтләрә әсасән $J_{рк} = \text{const}$ шәраитиндә $n = f(i_{вв})$ әјриләр аиләси гурулуру.

Алынмыш әјриләрә әсасән $i_{ввк} = \text{const}$ шәраитиндә $n = f(J_p)$ рекуперасија характеристикасы гурулуру.

Нәтичәләр

1. Рекуперасија характеристикаларынын көстәрилмиш графоаналитик хесаблама үсулу ох тә'сирлэндиричинин јакор реаксijasыны нәзәрә алмаг имканы верир.

Бу заман хәта хесабатын графики һиссәсинин ичрасы вә ишләнилмәсинин нә дәрәчәдә дәгиг олдуғундан асылы олачагдыр.

2. Диқәр методлардан фәргли олараг, көстәрилмиш методда $n = f(J_p)$ асылылығы тә'сирлэндиричинин тә'сирләнмә чәрәјанынын истәнилән гіјмәтләри үчүн билаваситә чыхарылыр ки, бу да тәнзим реостатынын пилләләрини хесабламағы олдуғча асанлашдыр.

3. Ох тә'сирлэндиричиси һәддиндән артыг јүкләмә режиминдә ишләдији заман схемаларын рекуперасија характеристикаларыны хесаблајаркән кобуд сәһвләрә јол вермәмәк үчүн тә'сирлэндиричинин јакор реаксijasынын тә'сирини нәзәрә алмаг лазимдыр.

М. А. БАГИРОВ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Э. М. ЭПШТЕЙН

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕРЫВОВ В ПОДАЧЕ ВОЗДУХА НА ХОД ПРОЦЕССА ТЕРМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕФТЕНОСНЫЙ ПЛАСТ

Рассматривается задача об остывании нагретой зоны после прекращения подачи воздуха при термическом воздействии на нефтеносный пласт. Задача решается для случая бесконечного плоского фронта горения. Обсуждается вопрос о возможности перерывов в подаче воздуха в ходе процесса термического воздействия. Определена длительность допустимого перерыва в зависимости от положения фронта горения.

1. Ранее нами была рассмотрена [1] задача о распределении температуры, создаваемом в нефтеносном пласте движущимся фронтом горения. При этом поток воздуха, закачиваемого в инъекционную скважину, принимался стационарным. Было проведено также качественное обсуждение устойчивости процесса горения по отношению к изменениям скорости потока воздуха.

Весьма важным представляется вопрос о влиянии перерывов в подаче воздуха на ход процесса подземного сжигания нефти. В частности, необходимо определить время после прекращения подачи воздуха, по истечении которого максимальная температура в нагретой зоне понижается ниже того значения, при котором еще возможно горение. Это время является критическим, так как возобновление подачи воздуха по прошествии этого времени не приведет к восстановлению процесса горения. Также нельзя будет повторить весь процесс заново, начиная с создания вокруг забоя высокотемпературной зоны, поскольку нефть к этому времени уже будет вытеснена из призабойной зоны, и создать там новый фронт горения не удастся.

Ниже рассматривается задача об остывании нагретой зоны после прекращения подачи воздуха.

2. Рассмотрим случай плоского бесконечного фронта горения, движущегося с постоянной скоростью.

Пусть в течение периода τ к зоне горения подавался стационарный поток воздуха, после чего подача воздуха была прекращена и прекратилось горение. Найдем распределение температуры при остывании нагретой зоны; для этого нужно решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2}, \\ \vartheta(x, 0) &= \psi_{\tau}(x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

М. А. БАГИРОВ, Г. В. ВЕЧХАЙЗЕР, Ч. М. ДЖУВАРЛЫ, Э. М. ЭПШТЕЙН

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕРЫВОВ В ПОДАЧЕ ВОЗДУХА НА ХОД ПРОЦЕССА ТЕРМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕФТЕНОСНЫЙ ПЛАСТ

Рассматривается задача об остывании нагретой зоны после прекращения подачи воздуха при термическом воздействии на нефтеносный пласт. Задача решается для случая бесконечного плоского фронта горения. Обсуждается вопрос о возможности перерывов в подаче воздуха в ходе процесса термического воздействия. Определена длительность допустимого перерыва в зависимости от положения фронта горения.

1. Ранее нами была рассмотрена [1] задача о распределении температуры, создаваемом в нефтеносном пласте движущимся фронтом горения. При этом поток воздуха, закачиваемого в инъекционную скважину, принимался стационарным. Было проведено также качественное обсуждение устойчивости процесса горения по отношению к изменениям скорости потока воздуха.

Весьма важным представляется вопрос о влиянии перерывов в подаче воздуха на ход процесса подземного сжигания нефти. В частности, необходимо определить время после прекращения подачи воздуха, по истечении которого максимальная температура в нагретой зоне понижается ниже того значения, при котором еще возможно горение. Это время является критическим, так как возобновление подачи воздуха по прошествии этого времени не приведет к восстановлению процесса горения. Также нельзя будет повторить весь процесс заново, начиная с создания вокруг забоя высокотемпературной зоны, поскольку нефть к этому времени уже будет вытеснена из призабойной зоны, и создать там новый фронт горения не удастся.

Ниже рассматривается задача об остывании нагретой зоны после прекращения подачи воздуха.

2. Рассмотрим случай плоского бесконечного фронта горения, движущегося с постоянной скоростью.

Пусть в течение периода τ к зоне горения подавался стационарный поток воздуха, после чего подача воздуха была прекращена и прекратилось горение. Найдём распределение температуры при остывании нагретой зоны; для этого нужно решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 \vartheta(x, t)}{\partial x^2}, \\ \vartheta(x, 0) &= \psi_\tau(x), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\psi_\tau(x)$ — распределение температуры в момент прекращения подачи воздуха, которое имеет вид [1]:

$$\psi_\tau(x) = \frac{T}{2} \exp\left(-\frac{Vx}{2a}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{V}{2a} |x|\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{V}{2} \sqrt{\frac{\tau}{a}} - \frac{|x|}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] - \exp\left(+\frac{V}{2a} |x|\right) \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V}{2} \sqrt{\frac{\tau}{a}} + \frac{|x|}{2\sqrt{a\tau}}\right) \right] \right\}. \quad (2)$$

Здесь координата x отсчитывается от положения фронта горения в момент времени $t = 0$; $V = v - aU$; v — скорость движения фронта горения; $\alpha = \frac{c_p \rho_p}{c_p \rho_g}$, c_p , c_g — теплоемкости, соответственно, породы и подаваемого газа; ρ_p , ρ_g — плотности породы и газа; U — скорость потока подаваемого газа, a — температуропроводность породы; T — установившееся значение температуры движущегося фронта горения.

Решение задачи (1), как известно, дает

$$\vartheta(x, t) = \int G_1(x, x', t) \psi_\tau(x') dx', \quad (3)$$

$$G_1(x, x', t) = \frac{\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4at}\right]}{2\sqrt{\pi at}}, \quad (4)$$

где G_1 — гриниан уравнения теплопроводности для одномерного случая (интегрирование в (3) ведется по всему пространству).

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}, \quad \lambda' = \frac{x'}{2\sqrt{a\tau}}, \quad \eta = \frac{V}{2} \sqrt{\frac{\tau}{a}}, \quad \omega = \frac{t}{\tau}. \quad (5)$$

Тогда решение задачи примет вид:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{T}{2\sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\lambda-\lambda')^2}{\omega} - 2\eta\lambda'\right] \left\{ \exp(-2\eta|\lambda'|) [1 + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erf}(\eta - |\lambda'|)] - \exp(2\eta|\lambda'|) [1 - \operatorname{erf}(\eta + |\lambda'|)] \right\} d\lambda' = \\ &= \frac{T}{2\sqrt{\pi\omega}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\omega}\right) \left[J_1\left(\omega^{-1}, \frac{2\lambda}{\omega} - 4\eta, \eta\right) + J_1\left(\omega^{-1}, -\frac{2\lambda}{\omega}, \eta\right) + \right. \\ &\quad \left. + J_2\left(\omega^{-1}, -\frac{2\lambda}{\omega} + 4\eta\right) - J_2\left(\omega^{-1}, \frac{2\lambda}{\omega} - 4\eta\right) - J_2\left(\omega^{-1}, -\frac{2\lambda}{\omega}\right) + \right. \\ &\quad \left. + J_2\left(\omega^{-1}, \frac{2\lambda}{\omega}\right) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$J_1(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-au^2 - bu) \operatorname{erf}(u + c) du, \quad (7)$$

$$J_2(a, b) = \int_0^{\infty} \exp(-au^2 - bu) du, \quad a > 0. \quad (8)$$

Интеграл $J_2(a, b)$ равен [2]

$$J_2(a, b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \left(1 - \operatorname{erf}\frac{b}{2\sqrt{a}}\right). \quad (9)$$

Вычислим интеграл $J_1(a, b, c)$. Дифференцируя его по c , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial c} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-c^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(a+1)u^2 - (b+2c)u] du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-c^2) [J_2(a+1, b+2c) + J_2(a+1, -b-2c)] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a+1}} \exp\left[-c^2 + \frac{(b+2c)^2}{4(a+1)}\right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Искомую функцию J_1 можно представить в виде.

$$J_1(a, b, c) = \int_{-\infty}^c \frac{\partial J_1}{\partial c} dc + J_1(a, b, -\infty). \quad (11)$$

Вычислим слагаемые в правой части этого равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^c \frac{\partial J_1}{\partial c} dc &= \frac{2}{\sqrt{a+1}} \int_{-\infty}^c \exp\left[-c^2 + \frac{(b+2c)^2}{4(a+1)}\right] dc = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a+1}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{c - \frac{b}{2a}} \exp\left(-\frac{a}{a+1} u^2\right) du = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\sqrt{\frac{a}{a+1}} \left(c - \frac{b}{2a}\right)\right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$J_1(a, b, -\infty) = -J_2(a, b) - J_2(a, -b) = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right). \quad (13)$$

Таким образом,

$$J_1(a, b, c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right) \operatorname{erf}\sqrt{\frac{a}{a+1}} \left(c - \frac{b}{2a}\right). \quad (14)$$

Подставляя (9) и (14) в (6), получим:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{T}{2} \left\{ \exp\left[-4\eta(\lambda - \omega\eta)\right] \left[\operatorname{erf}\frac{\eta - \lambda + 2\eta\omega}{\sqrt{1+\omega}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{erf}\frac{\lambda - 2\eta\omega}{\sqrt{\omega}} \right] + \operatorname{erf}\frac{\eta + \lambda}{\sqrt{1+\omega}} - \operatorname{erf}\frac{\lambda}{\sqrt{\omega}} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Для бывшего фронта горения ($\lambda = 0$) имеем:

$$\frac{\vartheta}{T} = \frac{1}{2} \left\{ \exp(4\eta^2\omega) \left[\operatorname{erf}\frac{\eta(1+2\omega)}{\sqrt{1+\omega}} - \operatorname{erf}2\eta\sqrt{\omega} \right] + \operatorname{erf}\frac{\eta}{\sqrt{1+\omega}} \right\}. \quad (16)$$

В табл. 1 приведены значения $\frac{\vartheta}{T}$ при различных η и ω .

3. Реальный фронт горения ограничен по ширине, в связи с чем необходимо учитывать составляющую теплового потока, перпендикулярную к направлению движения фронта, и распределение температуры в указанном направлении.

Таблица 1

ω	ϑ/T							
	$\eta=0,3$	$\eta=0,7$	$\eta=1,0$	$\eta=1,4$	$\eta=2$	$\eta=3$	$\eta=5$	$\eta=10$
0	0,33	0,68	0,84	0,95	0,99	1,00	1,00	1,00
0,005	0,31	0,62	0,77	0,85	0,87	0,83	0,76	0,67
0,01	0,30	0,61	0,75	0,82	0,83	0,78	0,72	0,64
0,02	0,29	0,58	0,71	0,78	0,79	0,74	0,69	0,62
0,05	0,27	0,54	0,66	0,72	0,72	0,67	0,65	0,60
0,1	0,25	0,51	0,61	0,67	0,67	0,61	0,59	0,57
0,2	0,21	0,44	0,56	0,62	0,63	0,57	0,57	0,51
0,5	0,17	0,37	0,47	0,54	0,58	0,55	0,52	
1,0	0,14	0,30	0,39	0,48	0,54	0,54	0,51	
2,0	0,10	0,22	0,34	0,42	0,48	0,50		
5,0	0,07	0,19	0,22	0,29	0,43			

Задача об остывании фронта горения конечной ширины в принципиальном отношении не сложнее рассмотренной выше, но ее решение не удастся выразить в известных табулированных функциях. Однако приближенно влияние конечной ширины фронта можно учесть следующим образом. Из результатов работы [1] следует, что если ширина фронта равна $2l$, то на фронте горения и поблизости от него температура в области $-l < y < l$ (ось Y направлена вертикально) будет всюду приблизительно одинаковой (равной T), а вне этой области температура будет быстро спадать с увеличением y . Что касается областей, более удаленных от фронта горения, то поскольку температура в них будет мала, любое распределение температур, принятое для этих областей не скажется сколько-нибудь заметно на конечном результате. Поэтому для учета влияния конечной ширины фронта горения мы будем рассматривать двумерную задачу

$$\frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} = \theta \left[\frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial y^2} \right], \quad (17)$$

$$\vartheta(x, y, 0) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(l - |y|)] \psi_\tau(x). \quad (18)$$

В этом случае

$$\vartheta(x, y, t) = \int G_2(x, x', y, y', t) \vartheta(x', y', 0) dx' dy', \quad (19)$$

где

$$G_2(x, x', y, y', t) = \frac{\exp \left[-\frac{(x-x')^2}{4at} + (y-y')^2 \right]}{4\pi at}. \quad (20)$$

Легко видеть, что конечный результат будет отличаться от (15) лишь наличием множителя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[-\frac{(y-y')^2}{4at} \right]}{\sqrt{4\pi at}} \cdot \frac{1}{2} [1 + \operatorname{sgn}(l - |y'|)] dy' =$$

где

$$= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{1+\zeta}{\sqrt{\rho}} + \operatorname{erf} \frac{1-\zeta}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (21)$$

$$\rho = \frac{4at}{l^2}, \quad \zeta = \frac{y}{l}.$$

Таким образом, для двумерного случая получаем

$$\vartheta = \frac{T}{4} \left[\exp[-4\eta(\lambda - \eta\omega)] \left(\operatorname{erf} \frac{\eta - \lambda + 2\omega\eta}{\sqrt{1+\omega}} + \operatorname{erf} \frac{\lambda - 2\omega\eta}{\sqrt{\omega}} \right) + \operatorname{erf} \frac{\eta + \lambda}{\sqrt{1+\omega}} - \operatorname{erf} \frac{\lambda}{\sqrt{\omega}} \right] \left(\operatorname{erf} \frac{1+\zeta}{\sqrt{\rho}} + \operatorname{erf} \frac{1-\zeta}{\sqrt{\rho}} \right). \quad (22)$$

В табл. 2 приведены значения функции

$$f(\rho, \zeta) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{1+\zeta}{\sqrt{\rho}} + \operatorname{erf} \frac{1-\zeta}{\sqrt{\rho}} \right), \quad (23)$$

Полученная нами приближенная формула (22) описывает распределение температуры в двумерном случае тем точнее, чем больше ω (с течением времени влияние начальных условий ослабевает), чем меньше $|\zeta|$ и λ (вблизи середины фронта принятое нами начальное распределение температуры (18) совпадает с истинным) и чем больше l (так как чем больше ширина фронта горения, тем ближе форма распределения температуры к П-образной).

Таблица 2

ρ	$A(\rho, \zeta)$					
	$\zeta=0$	$ \zeta =0,25$	$ \zeta =0,5$	$ \zeta =0,7$	$ \zeta =0,9$	$ \zeta =1,0$
0,2	1,00	0,99	0,94	0,83	0,62	0,50
0,5	0,95	0,93	0,84	0,72	0,58	0,50
1,0	0,84	0,82	0,74	0,66	0,55	0,50
2	0,68	0,67	0,62	0,57	0,51	0,48
5	0,47	0,47	0,45	0,43	0,41	0,40
10	0,34	0,34	0,34	0,33	0,32	0,31
20	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24
50	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
100	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
500	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
1000	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04

4. Обозначим промежуток времени после прекращения подачи воздуха, по истечении которого температура всюду становится меньше минимальной температуры $T_{\min}$, при которой еще возможно горение нефти, через $\tilde{t}$. Длительность $\tilde{t}'$ перерыва в подаче воздуха, после которого с уверенностью можно ожидать восстановления процесса, несколько меньше $\tilde{t}$. В самом деле, в работе [1] было получено необходимое условие устойчивости процесса горения:

$$\frac{Vl}{a} > 4. \quad (24)$$

Поскольку величина V , пропорциональная потоку закачиваемого в пласт воздуха, в каждом конкретном случае ограничена параметрами пласта, то для каждого v существует такое значение

$$l_{\min} = \frac{4a}{V}, \quad (25)$$

что при $l < l_{\min}$ процесс горения неустойчив. Таким образом, для возможности восстановления устойчивого процесса после периода остывания, температура, превышающая $T_{\min}$, должна быть, по крайней мере, в области

$$|y| \leq l_{\min}, \quad x = 0.$$

5. До сих пор мы считали, что фронт горения движется с постоянной скоростью v .

Для приближенного учета реальной ситуации можно принять [1], что фронт горения движется с переменной скоростью, обратно пропорциональной его расстоянию r от начальной точки (это соответствует цилиндрической геометрии процесса) и пользоваться в то же время результатами, полученными для $v = \text{const}$, т. е. считать во всех вышеприведенных результатах $v = \frac{B}{r}$. В этом случае η становится постоянной величиной, определяемой параметрами процесса

$$\eta = \frac{\frac{c_r \rho_r}{c_n} + \frac{y R_n}{2 z_n}}{2 \sqrt{\frac{4 \pi a y R_n \rho_n l}{z_n Q}}} = \frac{B'}{2 \sqrt{2 a B}}, \quad (26)$$

$$B' = r V = B \left(1 + \frac{z_n c_r}{y R_n c_n} \right).$$

(обозначения те же, что и в [1]), а для $l_{\min}$ получаем

$$l_{\min} = \frac{4a}{B'} \sqrt{2B\tau} \quad (27)$$

По мере удаления фронта от забоя скважины, как следует из (27), $l_{\min}$ увеличивается и в конце концов достигает значения l . Очевидно, что при таком удалении фронта от скважины даже самый короткий перерыв в подаче воздуха приведет к невозможности восстановления устойчивого процесса (величина B предполагается заданной).

Таким образом, если максимальное расстояние от инжекционной скважины, на которое предполагается продвинуть в ходе процесса фронт горения, равно $r_{\max}$, то параметры процесса должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие

$$B' > B'_{\min} = \frac{4a}{l} r_{\max} \quad (28)$$

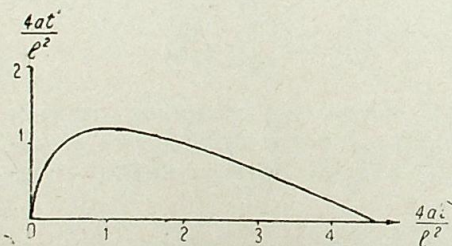


Рис. 1

Если $B' = B'_{\min}$, то по мере приближения расстояния r к значению $r_{\max}$ продолжительность допустимого перерыва t' стремится к нулю. С другой стороны, когда фронт находится вблизи скважины, время τ мало, и уже при небольших значениях t переменная ω приобретает перерыва. Очевидно, что также обуславливает малое значение времени t' имеет максимальное значение

Зависимость t' от τ при $B = B'_{\min}$ определяется из решения трансцендентного уравнения:

$$\frac{1}{4} \left\{ \exp(4\eta^2 \omega') \left[\operatorname{erf} \frac{\eta(1+2\omega')}{\sqrt{1+\omega'}} - \operatorname{erf} 2\eta \sqrt{\omega'} \right] + \operatorname{erf} \frac{\eta}{\sqrt{1+\omega'}} \right\} \left(\operatorname{erf} \frac{1+\zeta'}{\sqrt{\rho'}} + \operatorname{erf} \frac{1-\zeta'}{\sqrt{\rho'}} \right) = \frac{T_{\min}}{T}, \quad (29)$$

где

$$\omega' = \frac{t'}{\tau}, \quad \rho' = \frac{4at'}{l^2}, \quad \zeta' = \sqrt{\frac{4a\tau}{l^2}}$$

Здесь использованы соотношения (26) и (27).

Для представления о возможных временах перерыва на рис. 1 приведена зависимость t' от τ (в единицах $\frac{l^2}{4a}$) при $\eta = 2, \frac{T_{\min}}{T} = 0,47$.

Авторы выражают благодарность С. Ализаде и О. Каграмановой за помощь в проведении численных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багиров М. А., Вечхайзер Г. В., Джуварлы Ч. М., Эпштейн Э. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ. матем. и техн. наук, 1962, № 1.
2. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, 1951.

М. Э. Багиров, Г. В. Вечхайзер, Ч. М. Чуварлы, Е. М. Епштейн

Нефт лажларына термики тәсиретмә просесинә фасиләләрлә һава вурманын тәсири

ХҮЛАСӘ

Лаја һава верилмәсини кәсдикдән сонра термики тәсир илә гызмыш зонанын температуру замандан асылы олараг, о гәдәр ашагы дүшә биләр ки, һава вурулмасы тәкрар етдирилдикдә просес бәрпа олунмаја биләр.

Просеси лап әввәлиндән, јәни гујунун дибиндә јүксәк температуралы зона јаратмагдан да башламаг мүмкүн олмаја биләр. Чүнки бу заман артыг нефт гујунун дибиндән сыхышдырылмыш олачагдыр. Буна көрә дә просесин тәкрар бәрпа олунма биләчәји һава вурулмасынын фасиләсини билмәк лазымдыр. Бу мәгсәллә ишимиздә, гызмыш зонанын сојумасында температурун пајланмасы мәсәләси һәлл едилир. Сонсуз мүстәви чәбһәнин јанма мәсәләси дәгиг һәлл едилмишдир. Бунун әсасында мәһдуд енлиликдә мүстәви чәбһә үчүн тәхминән температурун пајланмасы тәјин олунур. Алынған нәтичәләр реал, температурун пајланмасы тәјин олунур. Алынған нәтичәләр реал, јәни јанманын чәбһәси цилиндрик олан һал үчүн истифадә олунур. Алынған транскендент тәнлијин һәлли, һава вурулмасынын бурахыла билән фасиләсинин просесин давам етмәси мүддәтиндән асылылығыны верир. Температурун пајланмасыны кәстәрән функцијаларын чәдвәлләри дүзәлдилмишдир.

Т. А. ХАЛИЛОВ, Н. Е. ДАНИЛОВ

ВЫВОД ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО АКТИВНОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ЗВЕНА

В каскадах широкополосного и импульсного усиления на экранированных лампах, кроме цепи автоматического смещения, применяется также корректирующий фильтр в цепи экранирующей сетки, состоящий из активного сопротивления $R_э$ и емкости $C_э$, шунтирующей сопротивление $R_э$.

Назначение этого корректирующего фильтра в радиосхемах — защита экранирующей сетки от помех, пульсаций и паразитных связей через источник анодного питания. Хорошо известно, что указанные фильтры, состоящие из RC элементов, как в цепи катода, так и в цепи экранирующей сетки искажают усиливаемые синусоидальные и импульсные сигналы.

Авторами данной статьи была проведена исследовательская работа по применению обычного каскада широкополосного и импульсного усиления в качестве активного дифференцирующего звена, входящего в прямую цепь системы автоматического регулирования.

На рис. 1 приведена исследуемая схема.

Так как на вход системы поступают возмущения в виде симметричных синусоидальных колебаний, то для выхода передаточной функции следует ограничиться рассмотрением части схемы, работающей в течение одного полупериода (рис. 2).

Вывод передаточной функции рассматриваемого контура удобно начать с уравнения, устанавливающего зависимость в операторной форме между анодным током и величиной входного напряжения:

$$i_a(p) = S_a[U_{bx}(p) - D_э U_э(p) - D_a U_a(p)]. \quad (1)$$

В данной формуле $U_{bx}(p)$ — напряжение на управляющей сетке относительно катода, S_a — статическая крутизна анодного тока, $D_a, D_э$ — проницаемость лампы, соответственно, по аноду и экранирующей сетке, U_a и $U_э$ — напряжение анода и экранирующей сетки относительно земли.

Для пентодов и экранированных ламп проницаемость по аноду D_a — настолько мала, что реакцией анода на входное можно пренебречь.

Преобразовываем уравнение (1) с учетом вышеуказанного.

Т. А. ХАЛИЛОВ, Н. Е. ДАНИЛОВ

ВЫВОД ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО АКТИВНОГО ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ЗВЕНА

В каскадах широкополосного и импульсного усиления на экранированных лампах, кроме цепи автоматического смещения, применяется также корректирующий фильтр в цепи экранирующей сетки, состоящий из активного сопротивления $R_э$ и емкости $C_э$, шунтирующей сопротивление $R_э$.

Назначение этого корректирующего фильтра в радиосхемах — защита экранирующей сетки от помех, пульсаций и паразитных связей через источник анодного питания. Хорошо известно, что указанные фильтры, состоящие из RC элементов, как в цепи катода, так и в цепи экранирующей сетки искажают усиливаемые синусоидальные и импульсные сигналы.

Авторами данной статьи была проведена исследовательская работа по применению обычного каскада широкополосного и импульсного усиления в качестве активного дифференцирующего звена, входящего в прямую цепь системы автоматического регулирования.

На рис. 1 приведена исследуемая схема.

Так как на вход системы поступают возмущения в виде симметричных синусоидальных колебаний, то для выхода передаточной функции следует ограничиться рассмотрением части схемы, работающей в течение одного полупериода (рис. 2).

Вывод передаточной функции рассматриваемого контура удобно начать с уравнения, устанавливающего зависимость в операторной форме между анодным током и величиной входного напряжения:

$$i_a(p) = S_a[U_{вх}(p) - D_э U_э(p) - D_a U_a(p)]. \quad (1)$$

В данной формуле $U_{вх}(p)$ — напряжение на управляющей сетке относительно катода, S_a — статическая крутизна анодного тока, $D_a, D_э$ — проницаемость лампы, соответственно, по аноду и экранирующей сетке, U_a и $U_э$ — напряжение анода и экранирующей сетки относительно земли.

Для пентодов и экранированных ламп проницаемость по аноду D_a — настолько мала, что реакцией анода на входное можно пренебречь.

Преобразовываем уравнение (1) с учетом вышеуказанного.

Кроме того, преобразуем выражение входного сигнала таким образом, чтобы учитывалось действие отрицательной обратной связи, т. е. введем выражение для сигнала, поданного на управляющую сетку относительно земли.

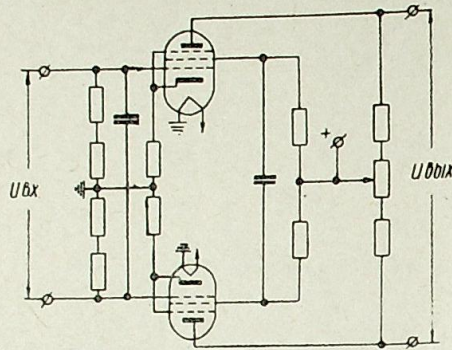


Рис. 1

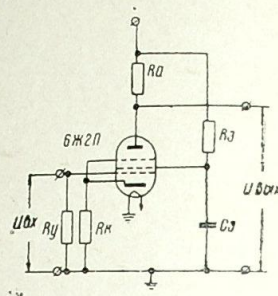


Рис. 2

В результате получаем уравнение:

$$i_a(p) = S_a[U_{вх}(p) - [i_a(p) + i_s(p)]R_k - D_s U_s(p) - [i_a(p) + i_s(p)]R_k D_s]. \quad (2)$$

Полагая в уравнении (2)

$$i_s(p) = \kappa i_a(p) \text{ и } S_s = \kappa S_a,$$

где κ — коэффициент пропорциональности меньше единицы, S_s — статическая крутизна экранирующей сетки, получаем:

$$i_a(p) = \frac{S_a U_{вх}(p)}{1 + S_a R_k (1 + \kappa) + \frac{R_k (1 + \kappa)}{\kappa R_{i3}} + \frac{R_s}{R_{i3} (1 + p R_s C_s)}} \quad (3)$$

где R_k — сопротивление в цепи катода, R_s и C_s — элементы, входящие в цепь экранирующей сетки,

$R_{i3} = \frac{1}{D_s S_s}$ — внутреннее сопротивление лампы на участке экранирующая сетка—катод.

Отсюда получаем выражение для передаточной функции рассматриваемого контура:

$$W(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{S_a R_a}{1 + S_a R_k (1 + \kappa) + \frac{R_k (1 + \kappa)}{\kappa R_{i3}} + \frac{R_s}{R_{i3} (1 + p \tau_s)}}, \quad (4)$$

где R_a — сопротивление анодной нагрузки,

$\tau_s = R_s C_s$ — постоянная времени дифференцирующего звена.

В результате промежуточных преобразований приходим к следующему выражению для передаточной функции:

$$W(p) = \frac{\kappa_0}{\alpha} \cdot \frac{1 + \tau_{эп} p}{1 + \frac{\tau_s}{\alpha} p}, \quad (5)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{A}{B},$$

$$\alpha = 1 + \frac{\kappa R_s}{B}, \quad (6)$$

$$A = S_a R_a \cdot \kappa R_{i3}, \quad (7)$$

$$B = \kappa R_{i3} + R_k (\kappa S_a R_{i3} + \kappa^2 S_a R_{i3} + \kappa + 1). \quad (8)$$

На рис. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики двухтактного активного дифференцирующего звена (рис. 1), полученные в результате экспериментального поиска варианта, обеспечивающего наиболее динамическое усиление.

Частотные характеристики, изображенные на рис. 3, построены, соответственно, при разных величинах R_k . Характеристике на рис. 3а соответствует величина $R_k = 120 \text{ ом}$, на рис. 3б — $R_k = 200 \text{ ом}$ и на рис. 3в — величина $R_k = 300 \text{ ом}$.

Амплитудно-частотные характеристики строились при неизменной амплитуде входного сигнала 3,5 в для диапазона частот от 0,1 до 10 гц.

Во всех трех рассматриваемых вариантах неизменными параметрами являются:

$R_a = 350 \text{ ком}$ — сопротивление анодной нагрузки,

$R_y = 330 \text{ ком}$ — сопротивление утечки.

Переменными параметрами, обеспечивающими изменение качества дифференцирования, являются:

R_s — сопротивление в цепи экранирующей сетки,

C_s — емкость, шунтирующая сопротивление R_s ,

R_k — сопротивление в цепи катода.

С помощью выведенной формулы (5) величины переменных параметров выбираются осмысленно.

Из формулы (5) совершенно очевидно, что значение коэффициента статического усиления κ_0 возрастает с уменьшением величины B . „Глубина“ дифференцирования, определяемая коэффициентом деления α , становится больше также с уменьшением величины B . Из выражения (8) следует, что наибольшее динамическое усиление можно получить при минимальном значении R_k , т. е. при минимальной отрицательной обратной связи.

Величина динамического усиления в основном определяется величиной отрицательной обратной связи и свойствами лампы.

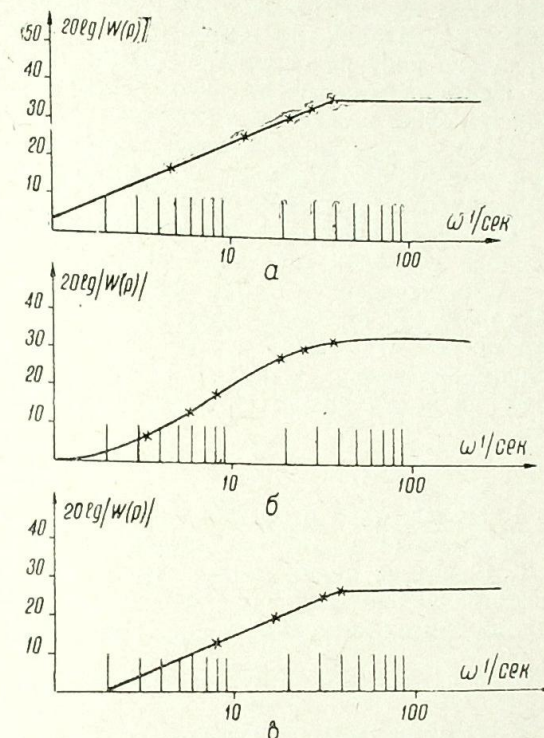


Рис. 3

Чем больше меняется динамическая крутизна анодного тока с уменьшением импеданса в цепи экранирующей сетки, по мере увеличения частоты входного сигнала, тем глубже происходит дифференцирование входного сигнала.

Экспериментально было установлено, что для сопряжения активного дифференцирующего каскада с остальной частью тракта системы автоматического регулирования необходимо выбрать величины:

$$C_2 = 1 \mu F,$$

$$R_2 = 150 \text{ ком.}$$

Из рассмотрения частотных характеристик (рис. 3) следует, что величина R_k влияет не только на величину коэффициента динамического усиления, но также и на постоянную времени дифференцирующего контура (формулой (8) это не учитывается).

Необходимо отметить, что передаточная функция (8) выведена для линейного участка характеристики лампы.

В то же время, поступаясь чистотой формы усиливаемого сигнала при уменьшении отрицательной обратной связи, можно получить динамическое усиление до 38 дБ на участке в две декады (рис. 3а).

С увеличением обратной связи уменьшается коэффициент динамического усиления и глубина дифференцирования (рис. 3б, в).

Авторами данной статьи на основании расчетных соотношений (см. формулу 8) были выбраны следующие значения переменных параметров: $R_k = 200 \text{ ом}$, $R_2 = 150 \text{ ком}$ и $C_2 = 1 \mu F$, обеспечившие заданную точность в реальной системе. R_k выбрана, исходя из соображений получения чистоты формы выходного напряжения.

Выводы

1. Предложено использование каскада широкополосного и импульсного усиления в качестве активного дифференцирующего звена.
2. Выведена передаточная функция дифференцирующего звена, позволяющая осмысленно изменять переменные параметры с целью улучшения дифференцирующих свойств рассматриваемого звена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамонкин И. Г. Импульсные усилители. М., 1958.
2. Основы автоматического регулирования, ч. I, под ред. Солодовникова В. В. М., 1954.

Т. А. Халилов, Н. J. Данилов

Бир актив диференсиаллајычы манганын өтүрмө
функцијасынын чыхарылышы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә, актив диференсиаллајычы манганын өтүрмә функцијасы чыхарылмыш вә алынган формуллара әсасән бахылан диференсиаллајычы манганын ән кејфијәтли динамик хассәләрини тәмин едән R_c -нин дәјишән параметрләри сечилмишдир.

В. Я. ЕДУШ

ИНДУКТИВНЫЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ С ПОДВИЖНЫМ КОРОТКО ЗАМКНУТЫМ ВИТКОМ И СПЛОШНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ

В НИПИ „Нефтехимавтомат“ разработан ряд автоматических быстродействующих регистраторов, предназначенных для записи сигналов, меняющихся с частотой до 2—2,5 гц.

В разработанных регистраторах одним из ответственных элементов является реохорд сравнения, поскольку при высоких коэффициентах усиления следящей системы регистратора, требуемых для обеспечения быстродействия, реохорд со скользящим контактом может служить одним из источников возникновения автоколебаний (из-за скачкообразного изменения напряжения, снимаемого с реохорда, при переходе контакта с витка на виток).

От указанных недостатков свободны индуктивные преобразователи больших линейных перемещений [3].

В НИПИ „Нефтехимавтомат“ разработаны индуктивные преобразователи больших линейных перемещений с подвижным короткозамкнутым витком, названные бесконтактными реохордами по идентичности функций с проволоочными реохордами. Магнитопроводы преобразователей выполняются как из шихтованной, так и из сплошной стали. При этом последние из названных, уступая первым по чувствительности, отличаются большей простотой изготовления, что дает им преимущество по экономичности перед преобразователями из шихтованной стали.

1. Особенности конструкции магнитопровода и принцип действия преобразователя

Принцип действия преобразователя аналогичен описанному в [2]. Одна из разработанных конструкций магнитопровода преобразователя показана на рис. 1.

Магнитопровод состоит из следующих основных частей: верхнего ярма 1, двух боковых П-образных сердечников 2, и среднего сердечника 3, конструктивно выполненного вместе с нижним ярмом 4 и ника 5, полюсным наконечником 5 из одной стальной заготовки. Все узлы полюсным наконечником 5 из одной стальной заготовки. Все узлы магнитопровода выполнены в виде полых цилиндров, распиленных по образующим для уменьшения потерь на вихревые токи, за исключе-

нием полюсного наконечника, представляющего собой полуцилиндр. Боковые сердечники плотно посажены в ярмо, причем на верхнем из последних расположен короткозамкнутый виток b (медный или алюминевый), оказывающий определенное сопротивление прохождению магнитного потока и перераспределяющий между крайними сердечниками поток первичной обмотки W_1 , посаженной на среднем сердечнике.

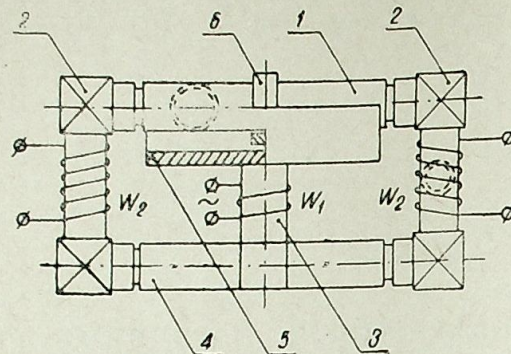


Рис. 1

В силу указанного перераспределения потока э. д. с. выхода, являющаяся разностью э. д. с. встречно включенных вторичных обмоток W_2 , размещенных на крайних стержнях, будет зависеть от положения витка на верхнем ярме магнитопровода.

Максимумы э. д. с. выхода будут иметь место при одном из крайних

положений витка, минимальная выходная э. д. с. будет соответствовать совпадению геометрических осей витка и среднего сердечника.

В некоторых системах большее удобство представляет такой реохорд, напряжение выхода которого минимально при одном из крайних положений. В бесконтактном реохорде это может быть достигнуто включением в выходную цепь последовательно соединенных дополнительных обмоток, которые, как показала практика, целесообразно размещать на всех трех стержнях.

Ниже будут рассмотрены основные соотношения, характеризующие работу преобразователя.

2. Схема замещения и вывод основной зависимости преобразователя

При анализе работы преобразователя приходится вводить ряд упрощений, которые хотя лишь приближенно отвечают действительности, однако приводят к сравнительно простым выражениям, позволяющим производить расчет преобразователя аналитическим методом в пределах допустимых погрешностей.

В приведенных ниже рассуждениях сделаны следующие допущения. Магнитное сопротивление стали считается сосредоточенным в крайних стержнях, причем магнитная проницаемость на поверхности стали принята независимой от перемещения витка, рассеянием пренебрегают, но учитывается проводимость выпучивания между боковыми сторонами полюсного наконечника и ярмом, ширина витка принята значительно меньше, чем ширина полюсного наконечника, вторичная обмотка преобразователя считается разомкнутой. Рассуждения ведутся для промышленной частоты питания преобразователя при отключенных дополнительных обмотках и положении витка, сдвинутом для определенности вправо от геометрической оси среднего сердечника на величину Δ , которая меньше половины ширины полюсного наконечника c .

Магнитное сопротивление стали, условно принятое сосредоточенным в крайних сердечниках, рассчитывается по известной формуле [3]:

$$z_c = (0,45 + j0,74) \frac{l_{cm}}{U_{cm}} \sqrt{\frac{\omega \gamma}{\mu_0 \mu}}, \quad (1)$$

где l_{cm} — длина стального участка для каждого из потоков в крайних стержнях,

U_{cm} — периметр сечения этого участка,

ω — круговая частота питания преобразователя,

γ — удельная электропроводность стали,

μ_0 — магнитная проницаемость воздуха,

μ — относительная магнитная проницаемость стали,

Для эквивалентного сопротивления короткозамкнутого витка запишем [1].

$$\dot{z}_s = j \frac{\omega}{r} = jx_s, \quad (2)$$

здесь r — активное сопротивление короткозамкнутого витка.

Можно показать, что магнитное сопротивление выпучивания между боковой стороной полюсного наконечника, представляющей собой основание полого полуцилиндра, и верхним ярмом определится по методу вероятных путей потока согласно (4) следующим образом:

$$R_n = \frac{1}{2\mu_0 r_n \left[0,26\pi + \ln \left(1 + \frac{t}{\delta} \right) \right] + \mu_0 t + 0,62\mu_0 \delta}, \quad (3)$$

где r_n — средний радиус полюсного наконечника,

t — толщина последнего,

δ — величина рабочего воздушного зазора.

Сопротивления суммарного и частичных воздушных зазоров (соответственно R_δ , R_{δ_1} и R_{δ_2}) при большой площади последних можно выразить:

$$R_\delta = \frac{\delta}{2\mu_0 l_a c}; \quad R_{\delta_1} = \frac{\delta}{\mu_0 l_a (c + \Delta)} = R_\delta \frac{2c}{c + \Delta} = R_\delta \frac{2S}{S + 2S(x)};$$

$$R_{\delta_2} = R_\delta \frac{2c}{c - \Delta} = R_\delta \frac{2S}{S - 2S(x)}, \quad (4)$$

где l_a — активная длина витка (длина части витка, находящейся в рабочем зазоре),

S — площадь суммарного воздушного зазора,

$S(x)$ — изменение площади частичных воздушных зазоров при перемещении витка на величину Δ .

На практике не удается плотно сочленить боковые сердечники и ярма из-за значительной длины последних и поэтому для удобства сборки предусматриваются определенные допуски на диаметры сочленяющихся узлов. Точный учет магнитного сопротивления, обусловленного конструктивным зазором между ярмом и боковым сердечником, невозможен из-за множества случайных факторов. Вместе с тем, даже при весьма тщательном изготовлении, между указанными частями магнитопровода будет иметь место воздушный зазор, который при малой площади может обладать существенным магнитным сопротивлением.

тивлением. Учет этого сопротивления может быть приближенно произведен по формуле:

$$R_3 = \frac{2\delta_3}{\mu_0 S_3} = \frac{\delta_3}{\pi \mu_0 r_3 l_3}, \quad (5)$$

где δ_3 — наибольшая вероятная величина зазора между сочленяющимися цилиндрами ярма и бокового сердечника, равная допуску на диаметры последних в месте посадки,

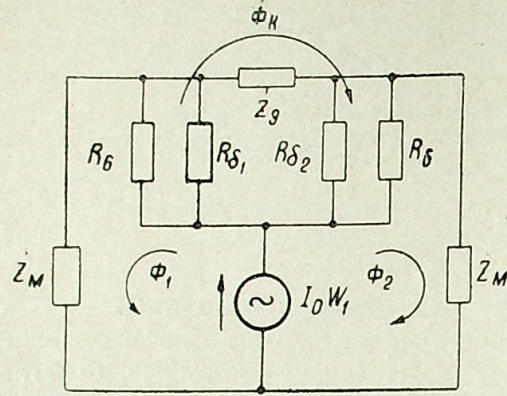


Рис. 2

в которой $I_0 W_1$ — м. д. с. первичной обмотки; Φ_1 и Φ_2 — потоки в крайних стержнях; Φ_K — поток, пронизывающий короткозамкнутый виток;

$$\dot{z}_M = \dot{z}_c + R_3 = jx_M + R_M$$

остальные обозначения соответствуют выражениям (2—4). Расчет схемы рис. 2 дает для магнитных потоков:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= I_0 W_1 \frac{R_2 \dot{z}_3 + \dot{z}_M (R_1 + R_2 + \dot{z}_3)}{R_1 R_2 (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_M) + \dot{z}_M (\dot{z}_3 + \dot{z}_M) (R_1 + R_2) + \dot{z}_M^2 \dot{z}_3}, \\ \dot{\Phi}_2 &= I_0 W_1 \frac{R_1 \dot{z}_3 + \dot{z}_M (R_1 + R_2 + \dot{z}_3)}{R_1 R_2 (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_M) + \dot{z}_M (\dot{z}_3 + \dot{z}_M) (R_1 + R_2) + \dot{z}_M^2 \dot{z}_3}, \\ \dot{\Phi}_K &= I_0 W_1 \frac{\dot{z}_M (R_1 - R_2)}{R_1 R_2 (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_M) + \dot{z}_M (\dot{z}_3 + \dot{z}_M) (R_1 + R_2) + \dot{z}_M^2 \dot{z}_3}. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом

$$R_1 = \frac{R_{\delta_1} \cdot R_b}{R_{\delta_1} + R_b}; \quad R_2 = \frac{R_{\delta_2} \cdot R_b}{R_{\delta_2} + R_b}.$$

Учитывая встречное включение вторичных обмоток и равенства (6), запишем для выходной э. д. с., опустив элементарные выкладки:

$$\dot{E}_2 = \frac{-j\omega I_0 W_1 W_2 \dot{z}_3 \frac{\Delta}{c}}{R_{\delta} (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_M) + \dot{z}_M (\dot{z}_3 + \dot{z}_M) (1 + 2\alpha) + \frac{\dot{z}_M^2 \dot{z}_3}{R_{\delta}} \left[\alpha (1 + \alpha) + \frac{c^2 - \Delta^2}{4c^2} \right]}, \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{R_{\delta}}{R_b},$$

обычно $\alpha \ll 1$.

Тогда выражение (6) легко переписать в виде:

$$E_2 = \frac{-j\omega I_0 W_1 W_2 \dot{z}_3 \frac{\Delta}{c}}{R_{\delta} (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_M) + \dot{z}_M (\dot{z}_3 + \dot{z}_M) + \frac{\dot{z}_M^2 \dot{z}_3}{4R_{\delta}} \cdot \frac{c^2 - \Delta^2}{c^2}}. \quad (8)$$

Уравнение (8) позволяет рассчитывать основную характеристику преобразователя $E_2 = f(\Delta)$ в режиме заданного тока при известных конструктивных и обмоточных данных преобразователя.

3. Вывод формулы электромагнитной силы, действующей на короткозамкнутый виток

В быстродействующих регистраторах весьма существенным является требование минимального воздействия внешних сил на подвижные части. Короткозамкнутый виток при правильной конструкции реохорда свободен от сил сухого трения, однако произвольный выбор электрических и магнитных параметров преобразователя может привести к возникновению значительных электромагнитных сил, действующих на виток, что опрокинет все преимущества бесконтактного реохорда по сравнению с проволочным. Весьма существенным поэтому является определение электромагнитных сил, действующих на короткозамкнутый виток.

Выразим мгновенное значение силы i на виток согласно закону Ампера:

$$f = i \cdot b \cdot l_a \cdot \sin \theta = i \cdot b \cdot l_a, \quad (9)$$

где i — мгновенное значение тока в короткозамкнутом витке, b — мгновенное значение индукции на участке зазора, занятой активной стороной витка,

$\theta = \frac{\pi}{2}$ — пространственный угол между током в короткозамкнутом витке и потоком на зазоре.

Если принять, что ток i и индукция b меняются во времени синусоидально:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_{km} \cdot \sin \omega t, \\ b(t) &= B_m \sin (\omega t - \varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

где I_{km} и B_m — амплитудные значения, соответственно, тока в короткозамкнутом витке и индукции в зазоре в зоне витка,

φ — угол сдвига между указанным током и индукцией, то среднее значение силы за период T можно выразить:

$$\begin{aligned} F &= \frac{I_{km} \cdot B_m \cdot l_a}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin (\omega t - \varphi) dt = \\ &= \frac{I_{km} \cdot B_m \cdot l_a}{2} \cos \varphi = I_{k\varphi} \cdot B_{\varphi} \cdot l_a \cdot \cos \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где $I_{k\varphi}$ и B_{φ} — эффективные значения тока и индукции.

Среднюю индукцию в части воздушного зазора, занятой витком (т. е. величину полного потока, пронизывающего активную часть витка, отнесенную к площади этой части), можно определить не решая вопроса о распределении индукции в зазоре в зоне витка.

Можно показать, что узел магнитной цепи на участке короткозамкнутого витка при малой ширине последнего $2b$ замещается эквивалентной Π -образной схемой с параметрами $\dot{z}_n = \dot{z}_a$ и $R_n = R_\delta \cdot \frac{2c}{b}$ с

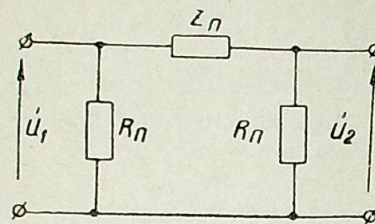


Рис. 3

действующими на противоположных концах витка магнитными напряжениями $\dot{U}_1$ и $\dot{U}_2$ (рис. 3).

Полный поток, пронизывающий активную часть витка, найдем из расчета схемы рис. 3:

$$\dot{\Phi}_{k\delta} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{2R_\delta \cdot \frac{c}{b}}, \quad (12)$$

Средняя индукция в зазоре на участке, заполненном активной частью витка, выразится:

$$B_m = \frac{\Phi_{k\delta}}{2bl_a} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{4R_\delta l_a \cdot c}. \quad (13)$$

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что электромагнитная сила, действующая на виток, максимальна при крайних положениях последнего, так как в этом случае $B_{эф}$ и $I_{кэф}$ максимальны, а незначительным изменением $\cos \varphi$ можно пренебречь. Путем расчета схемы рис. 2 найдем магнитные потоки непосредственно в воздушных зазорах:

$$\dot{\Phi}_{\delta_1} = (\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_k) \frac{R_b}{R_b + R_{\delta_1}} \quad \text{и} \quad \dot{\Phi}_{\delta_2} = (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_k) \frac{R_b}{R_b + R_{\delta_2}}. \quad (14)$$

Тогда для магнитных напряжений, действующих на каждой из сторон короткозамкнутого витка, можно записать, принимая во внимание (6) и (14) и учитывая, что при крайнем положении витка $R_{\delta_2} \rightarrow R_\delta$; $R_{\delta_1} \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{\Phi}_{\delta_1} \cdot R_{\delta_1} = (\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_k) \frac{R_\delta}{\alpha - \beta + 1} \\ &= I_0 W_1 \frac{R_\delta (\dot{z}_a + 2\dot{z}_m) + (\alpha + \beta)\dot{z}_a \cdot \dot{z}_m}{R_\delta (\dot{z}_a + 2\dot{z}_m) + \dot{z}_m (\dot{z}_m + \dot{z}_a)(2\alpha + 1) + \frac{\dot{z}_m^2 \dot{z}_a}{R_\delta} (\alpha - \beta + 1)(\alpha + \beta)}, \\ \dot{U}_2 &= \dot{\Phi}_{\delta_2} \cdot R_{\delta_2} = (\dot{\Phi}_2 - \dot{\Phi}_k) \frac{R_\delta}{\alpha + \beta} = I_0 W_1 \frac{R_\delta (\dot{z}_a + 2\dot{z}_m) + (\alpha - \beta + 1)\dot{z}_a \cdot \dot{z}_m}{R_\delta (\dot{z}_a + 2\dot{z}_m) + \dot{z}_m (\dot{z}_m + \dot{z}_a)(2\alpha + 1) + \frac{\dot{z}_m^2 \dot{z}_a}{R_\delta} (\alpha - \beta + 1)(\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{где } \beta = \frac{b}{2c} \ll 1.$$

Тогда, принимая во внимание (13) и считая приближенно

$$\alpha - \beta + 1 \approx 1; \quad 1 + 2\alpha \approx 1; \quad 1 - \beta \approx 1,$$

для среднего значения индукции в зазоре в зоне витка и тока в витке после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \dot{B}_m &= \frac{I_0 W_1}{4R_\delta \cdot l_a \cdot c} \cdot \frac{x_m \cdot x_a - 4R_\delta R_m - j2R_\delta (x_a + 2x_m) - jR_m x_a}{x_m (x_m + x_a) - R_m (R_m + 2R_\delta) + \frac{2R_m x_m x_a}{R_\delta}} \\ &= \frac{(\alpha + \beta) - j(x_a + 2R_m)(R_\delta + R_m) - j \frac{x_a (R_m^2 - x_m^2)}{R_\delta} (\alpha + \beta)}{x_m (x_m + x_a) - R_m (R_m + 2R_\delta) + \frac{2R_m x_m x_a}{R_\delta} (\alpha + \beta) - j(x_a + 2R_m)(R_\delta + R_m) - j \frac{x_a (R_m^2 - x_m^2)}{R_\delta} (\alpha + \beta)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{I}_k = -j \frac{\omega \dot{\Phi}_k}{r} = \frac{I_0 W_1 \cdot x_a (jR_m - x_m)}{x_m (x_m + x_a) - R_m (R_m + 2R_\delta) + \frac{2R_m x_m x_a}{R_\delta} (\alpha + \beta) - j(x_a + 2R_m)(R_\delta + R_m) - j \frac{x_a (R_m^2 - x_m^2)}{R_\delta} (\alpha + \beta)}$$

Угол φ между $\dot{I}_k$ и $\dot{B}_m$ определится совместным решением (16):

$$\varphi = \arctg \frac{2R_\delta [x_m x_a + 2(x_m^2 + R_m^2)]}{x_a [R_\delta R_m + x_m^2 + R_m^2]}. \quad (17)$$

Определение эффективных значений индукции в зазоре в зоне витка и така в последнем из (16) и учет (17) дают возможность найти по (11) значение максимальной электромагнитной силы, действующей на виток.

4. Улучшение линейности основной характеристики преобразователя

Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, основная характеристика преобразователя имеет нелинейный вид. Устранение этой нелинейности может быть достигнуто выполнением сопотвращения воздушного зазора неравномерным по ширине. В преобразователях из сплошной стали большое удобство представляет достижение линейности путем подбора определенной формы полюсного наконечника.

Запишем для эффективного значения э. д. с. выхода, разделив в (8) действительную и мнимую части с учетом (4):

$$E_{2эф} = \frac{2k S_{(x)}}{\sqrt{A_0^2 - B_0^2 S_{(x)}^2 + c_0^2 S_{(x)}^4}}, \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$A_0^2 = A_1^2 + B_1^2; \quad B_0^2 = 2(B_1 B_2 - A_1 A_2); \quad c_0^2 = A_2^2 + B_2^2,$$

причем

$$A_1 = R_m (2R_0 + R_m) - x_m (x_m + x_3) - \frac{R_m x_m x_3}{2R_0};$$

$$B_1 = (R_m + R_0)(x_3 + 2x_m) + \frac{x_3(R_m^2 - x_m^2)}{4R_0};$$

$$A_2 = \frac{2R_m x_m x_3}{R_0 S^2}; \quad B_2 = \frac{x_3(R_m^2 - x_m^2)}{R_0 S^2}; \quad k = \frac{\omega I_{03\Phi} W_1 W_2 x_3}{S}.$$

Чтобы характеристика преобразователя была линейной, необходимо выполнение равенства:

$$\sqrt{\frac{2kS_{(x)}}{A_0^2 - B_0^2 \frac{S^2}{4} + c_0^2 \frac{S^4}{16}}} k_1 \cdot x, \quad (19)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности.

Из (19) определим решением биквадратного уравнения изменение площади воздушных зазоров:

$$S_{(x)} = \sqrt{\frac{2k^2}{k_1^2 x^2 c_0^2} + \frac{B_0^2}{2c_0^2}} - \sqrt{\left(\frac{2k^2}{k_1^2 x^2 c_0^2} + \frac{B_0^2}{2c_0^2}\right)^2 - \frac{A_0^2}{c_0^2}}. \quad (20)$$

Отметим, что величина $S_{(x)}$ математически имеет четыре значения ($\pm$ перед каждым квадратным корнем). Однако отрицательная площадь не имеет физического смысла, а корень подкоренного выражения необходимо взять с отрицательным знаком, так как лишь в этом случае $\lim_{x \rightarrow 0} S_{(x)} = 0$, что отвечает действительности.

Изменение площади воздушных зазоров можно выразить иначе:

$$S_{(x)} = \int_0^x l_a(x) \cdot dx, \quad (21)$$

где $l_a(x)$ — активная длина витка в любом сечении x .

Взяв производные от (10) и (21) по x и приравняв их, будем иметь

$$\frac{d \left[\int_0^x l_{(x)} dx \right]}{dx} = l_a(x) = \frac{2k^2}{k_1^2 c_0^2 x^3} \sqrt{\frac{2k^2}{k_1^2 c_0^2 x^2} + \frac{B_0^2}{2c_0^2}} - \sqrt{\left(\frac{2k^2}{k_1^2 c_0^2 x^2} + \frac{B_0^2}{2c_0^2}\right)^2 - \frac{A_0^2}{c_0^2}}. \quad (22)$$

Для определения коэффициента пропорциональности k_1 заметим, что при $x = c$ имеет место равенство $S_{(x)} = \frac{S}{2}$. Подставив эти значения $S_{(x)}$ в (19), запишем для k_1 :

$$k_1 = \frac{kS}{c \sqrt{A_0^2 - B_0^2 \frac{S^2}{4} + c_0^2 \frac{S^4}{16}}}. \quad (23)$$

Как показывают расчеты и экспериментальные исследования, максимальное $l_a(x)$ будет иметь место при $x \rightarrow 0$. Взяв предел выражения (22) при $x \rightarrow 0$, найдем для l_{amax} :

$$l_{amax} = \lim_{x \rightarrow 0} l_a(x) = \frac{l_a A}{\sqrt{A_0^2 - B_0^2 \frac{S^2}{4} + c_0^2 \frac{S^4}{16}}} \approx l_a \left(1 + \frac{B_0^2 S^2}{8A_0^2}\right). \quad (24)$$

Последнее равенство верно при $A_0^2 \gg B_0^2 \frac{S^2}{4} \gg c_0^2 \frac{S^4}{16}$, что обычно имеет место. Минимальная длина l_{amin} соответствует $x = c$:

$$l_{amin} = \frac{4c^3}{S^3} \cdot \frac{A_0 \left(A_0^2 - B_0^2 \frac{S^2}{4} + c_0^2 \frac{S^4}{16} \right) \sqrt{A_0^2 + c_0^2 \frac{S^4}{16}}}{8 \frac{c^4}{S^4} \left(A_0^2 + c_0^2 \frac{S^4}{16} \right)^2 - A_0^2 c_0^2 c^4} \approx l_a \left(1 - \frac{B_0^2 S_0^2}{4A_0^2}\right). \quad (25)$$

Вычислив ряд значений $l_a(x)$, соответствующих нескольким x , можно определить форму полюсного наконечника, необходимую для получения линейной характеристики преобразования бесконтактного реохорда.

5. Сравнение экспериментальных данных с расчетными

Исследования показывают хорошее совпадение расчетных характеристик преобразователя с экспериментальными. Лабораторный экземпляр преобразователя был выполнен с магнитопроводом, показанным на рис. 1, и имел при питании током 0,13а, 50 гц следующие данные:

$$\begin{aligned} R_0 &= 0,93 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}; & 2c &= 9,2 \text{ см}; & \mu &= 400; \\ R_m &= 2,8 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}; & 2b &= 0,4 \text{ см}; & \gamma &= 0,83 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{см}}; \\ x_m &= 2 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}; & \pm \Delta_{\max} &= 4,6 \text{ см}; & W_1 &= 800; \\ x_3 &= 2,12 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}; & \delta &= 0,33 \text{ см}; & W_2 &= 1600; \\ R_b &= 22,5 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega \cdot \text{м}}; & l_a &= 3,3 \text{ см}; & W_{g_1} &= W_{g_2} = 350; \\ & & & & W_{g_3} &= 100 \div 150 \text{ (с отводами)}. \end{aligned}$$

Согласно соединенные между собой дополнительные обмотки W_{g_1} и W_2 размещаются, соответственно, на крайних и средних стержнях

и могут быть включены при необходимости расширить рабочий диапазон преобразователя. На рис. 4 приведены характеристики преобразователя: 1—экспериментальная, 2—расчетная по (8). Обе характеристики соответствуют $l_a = \text{const}$ и имеют кривизну одного знака.

Следует отметить, что исправление кривизны характеристики на практике иногда удобнее осуществлять изменением формы кривой готового полюсного наконечника с $l_a = \text{const}$.

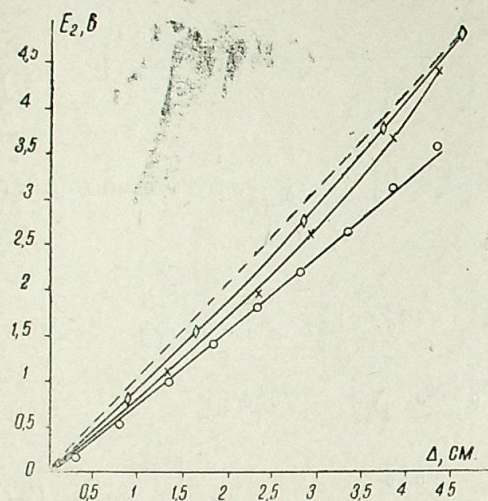


Рис. 4

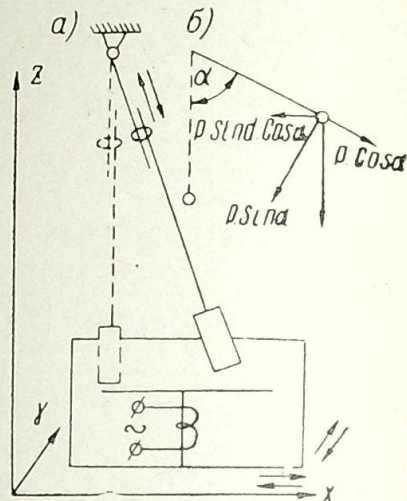


Рис. 5

При этом, разумеется, несколько нарушаются условия вывода выражения (22) из-за некоторого изменения суммарной площади воздушного зазора S и, как следствие, $-R_b$. Однако поскольку изменения S и R_b практически не будут превышать 5—8%, то ими можно пренебречь и рассчитывать минимальное значение l_{amin} по приближенной формуле, полученной делением (24) на (25):

$$l_{amin} = l_{amax} \frac{1 - \frac{B_0^2 S^2}{4 A_0^2}}{1 + \frac{B_0^2 S^2}{8 A_0^2}} \approx l_a \frac{1 - \frac{B_0^2 S^2}{4 A_0^2}}{1 + \frac{B_0^2 S^2}{8 A_0^2}}. \quad (26)$$

На практике достаточно знать $l_{amin} \approx l_a$ и l_{amax} из (26), чтобы, зная по (22) характер изменения $l_a(x) = f(x)$, конструировать полюсный наконечник. При этом, очевидно, из-за возрастания R_b чувствительность преобразователя несколько упадет, что видно из рис. 4, где 3—характеристика преобразователя с измененной, согласно (26), формой полюсного наконечника.

Экспериментальное определение электромагнитной силы производилось на специальной установке, показанной на рис. 5а.

Магнитопровод датчика может перемещаться посредством микрометрических винтов в двух координатах x и y относительно короткозамкнутого витка, закрепленного на тонкостенном алюминиевом стержне длиной l_0 . Второй конец стержня крепится к оси вращения таким образом, чтобы можно было регулировать положение витка по коор-

динате z . Регулировка по трем осям обеспечивает малые отклонения витка по координате x без трения последнего о магнитопровод.

Определение максимальной электромагнитной силы производится при одном из крайних положений витка, фиксированном контактным способом.

Под действием электромагнитной силы виток отклоняется от крайнего положения на некоторую величину; вращением микрометрического винта перемещают магнитопровод по координате x до тех пор, пока виток не займет прежнего положения.

В этом случае сила F , действующая на виток в его крайнем положении, уравнивается составляющей силы тяжести (рис. 5б):

$$F = P \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \approx P \cdot \alpha \approx P \frac{\Delta}{l_0},$$

где P —вес витка и алюминиевого стержня, приведенный к центру тяжести витка, Δ —линейное перемещение витка.

На рис. 6 приведены зависимости электромагнитной силы от м. д. с. первичной обмотки: 1—снятая экспериментально; 2—расчетная по (11). Как видно из характеристик, погрешность расчета не превышает 5%. Уменьшение электромагнитной силы, как показывает анализ выражений (11), (16) и (17), может быть достигнуто путем уменьшения z_m (при $|z_m| \rightarrow 0$; $I_k \rightarrow 0$; B_m —конечная величина, при увеличении R_b ($I_k \rightarrow B_m$), а также уменьшением z_a ($I_k \rightarrow 0$, а B_m —величина конечная).

Если выполнение первого условия повышает чувствительность преобразователя, то вторые снижают ее. Однако выполнение первого условия затруднительно при сплошной стали, поэтому приходится идти к увеличению R_b и уменьшению z_a , повышая при необходимости чувствительность датчика увеличением числа витков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буйлов А. Я. Основы электроаппаратостроения. ГЭИ, 1946.
2. Едуш В. Я. Бесконтактный реохорд. За технический прогресс, 1961, № 11.
3. Куликовский Л. Ф. Индуктивные измерители перемещений ГЭИ, 1961.
4. Нейман Л. Р. Поверхностный эффект в ферромагнитных телах. ГЭИ, 1949.
5. Ротерс. Электромагнитные механизмы. ГЭИ, 1949.

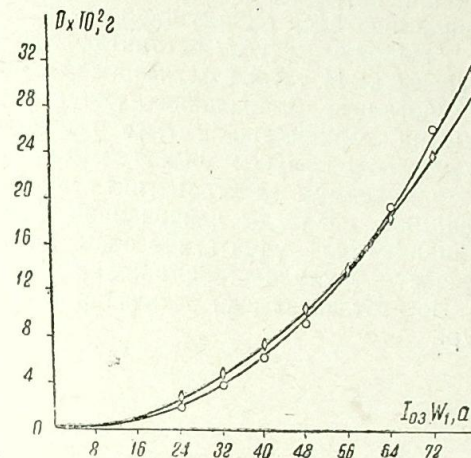


Рис. 6

Һәрәкәт едән ғыса гапанмыш сарғылы вә бүтөв магнит кечиричили индуктив чевиричи

ХУЛАСӘ

Мәгалә һәрәкәт едән ғыса гапанмыш сарғылы вә бүтөв магнит кечиричили бөјүк хәтти јердәјишмәләр чевиричисинин нәзәри вә тәчрүби тәһлилинә һәср олуиушдур.

Чевиричи хүсусән автоматик тәнзим гурғуларынын ишиндә мүгајисә чиназы кими тәтбиг олуна биләр (мәс: кантактсыз реохорд кими).

Мәгаләдә чевиричинин мүмкүн олан конструксијасы көстәрилмиш, чыхыш кәркинлијинин ғыса гапанмыш сарғынын јердәјишмәсиндән асылылығы ифадәси чыхарылмыш, ғыса гапанмыш сарғыја тә'сир едән максимум електромагнит гүввәси тәчрүби вә нәзәри олараг тә'јин едилмиш, еләчә дә чевиричинин әсас характеристикасынын хәтти-ләшдирилмәси үчүн вәчиб олан магнит кечиричисинин формасынын һесабаты үсулу көстәрилмишдир.

Һесабатдан алынан нәтичәләр тәчрүби нәтичәләрә тамамилә ујғун-дур.

Р. М. ВАГАБОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИЙ В ГРУНТАХ ПЕРЕМЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ РАДИОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Воды в каналах, водоемах и других гидротехнических сооружениях, расположенных на засоленных грунтах, в основании этих сооружений вызывают эффект выщелачивания солей, который способствует изменению состояния консолидации основания и появлению в нем дополнительных осадков. Это явление названо в литературе скрытой просадочностью. Иногда эта просадочность может быть столь значительной, что вызывает деформацию сооружения, нарушая его нормальную эксплуатацию.

Скрытая просадочность в настоящее время изучается во многих научно-исследовательских учреждениях.

Общепринятый метод изучения процесса выщелачивания во время фильтрации в лабораторных условиях заключается в промывании грунта дистиллированной водой в компрессионно-фильтрационной установке. При этом методе изучаемые вопросы фильтрации решаются путем химического анализа фильтратов с целью количественного определения солевого состава. Такой метод, кроме громоздкости проведения самих опытов, не позволяет выявить механику происходящих явлений, проследить динамику изменения явления во времени. Этим и вызвана необходимость разработки более усовершенствованных методов исследования выщелачивания солей.

Усовершенствование метода должно быть направлено на изучение процесса изменения содержания солей вдоль пути фильтрации без разрыва этого процесса, т. е. необходимо иметь возможность замерять концентрацию раствора на выходе и в любой точке сечения по фильтрующему элементу.

Этим требованиям может отвечать метод исследования, основанный на использовании радиоактивных индикаторов. Методы радиоактивных индикаторов широко применяются при изучении вопросов фильтрации как в гидротехнических исследованиях, так и в нефтедобывающей промышленности. Однако применение этих методов ограничивается значительной вредностью радиоактивных излучений и необходимостью в связи с этим создания специальной лабораторной базы.

Для упрощения экспериментальной техники и создания безопасных условий работы мы предлагаем использовать вместо искусственных

радиоактивных индикаторов соли, содержащие естественный радиоактивный элемент К. Таким индикатором является его соль KCl.

Как известно, природный калий представляет собой смесь трех изотопов в следующих соотношениях: K^{39} — 93,08%, K^{41} 6,91%, K^{40} — 0,0119%. Из них K^{40} радиоактивен, период полураспада его равен $1,2 \cdot 10^9$ лет, испускает β - и γ -лучи. На β -распад приходится 88% от общего числа распадов, энергия которых равна 1,38 мэв.

Указанные свойства калия могут быть использованы при применении его соединений в качестве радиоактивного индикатора. Но при небольшой энергии излучения K^{40} необходимо применение высокочувствительных радиометрических устройств. Нами проведены измерения калийсодержащих препаратов на различных радиометрах: Б-2, „Тобол“, ПС-5М „Волна“ и других с применением различных датчиков (сцинтилляционные, счетчики Гейгера—Мюллера). Наиболее подходящим оказался прибор ПС-5М „Волна“ с датчиками СТС-5 и АС-1.

Пересчетная установка типа ПС-5М „Волна“ имеет ряд преимуществ перед установками типов Б-2 и „Тобол“. Прежде всего эта установка новейшего типа с высокой разрешающей способностью — 5 мксек, она имеет электронный прецизионный секундомер, допускает автоматическую остановку счета после набора 1000, 10 000 или 100 000 импульсов или через 1, 10, 100 или 1000 сек после начала счета. Точность измерений импульсов установки $\pm 10\%$.

Опробование калиевого радиоактивного излучателя и измерительной аппаратуры подтвердило возможность использования предлагаемой методики.

Разработка предлагаемой методики исследований проводилась в порядке сотрудничества между Институтом водных проблем Академии наук Азербайджанской ССР и Азербайджанским научно-исследовательским институтом по добыче нефти в изотопной лаборатории последнего. Исследования осуществлялись под руководством начальника изотопной лаборатории В. К. Покидина с участием сотрудника той же лаборатории Н. П. Хилобок.

Методика проведения исследований

Опыты с грунтами определенного гранулометрического состава, имеющими заранее заданную степень засоленности, позволяют изучать процесс фильтрации в среде переменной проницаемости с целью выявления закономерностей этого процесса.

Процесс растворения и вымыва солей при фильтрации жидкости через пористую среду мы изучали на искусственно засоленных песках, состоящих из нерастворимой и растворимой частей. В качестве нерастворимой части использовали вольский песок в котором фракции 0,5—1,0 мм составляют 96%.

Перед загрузкой в прибор песок предварительно обрабатывали соляной кислотой, тщательно промывали дистиллированной водой и просушивали до воздушно-сухого состояния, затем взвешивали и заливали насыщенным раствором KCl. Соль вносили в песок в количестве 23% к весу сухой смеси. Засоленный песок просушивали в вытяжном шкафу до воздушно-сухого состояния. Таким образом достигалась равномерная засоленность образца грунта.

Приготовленный засоленный грунт загружался в фильтрационный суффозионный прибор (рис. 1). Прибор представляет собой вертикальный цилиндр из жести 21 см с внутренним диаметром 13,5 см. В

нижней части цилиндра встроена неподвижная решетка, на которую укладывается исследуемый образец грунта, помещаемый между трехслойными обратными фильтрами. Высота столба засоленного грунта составляет 6 см при диаметре 13,5 см.

Процесс фильтрации на установке (рис. 2) и регистрации эффекта выщелачивания осуществлялись следующим образом.

Загруженный образец грунта замачивался дистиллированной водой снизу вверх, после чего прибор включался в работу.

Из напорного подвижного бака дистиллированная вода подавалась на прибор. Фильтрация проходила снизу вверх до полного выщелачивания соли из песка. Весь процесс химической суффозии осуществлялся при постоянном градиенте напора. Температура помещения и фильтров была постоянной (20°C).

Для замеров интенсивности радиоактивного излучения, создаваемого в процессе химической суффозии в исследуемом грунте радиоактивным калием, была собрана радиометрическая установка, состоящая из детектора-датчика, выносного входного блока-усилителя, регистрирующего устройства, источников питания.

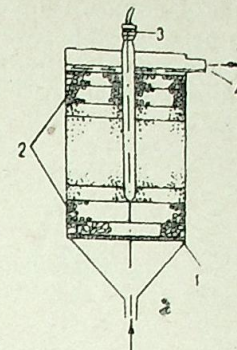


Рис. 1
Разрез фильтрационного прибора:
1 — сетка, 2 — трехслойный обратный фильтр, 3 — счетчик Гейгера СТС-5 в резиновом чехле, 4 — слив

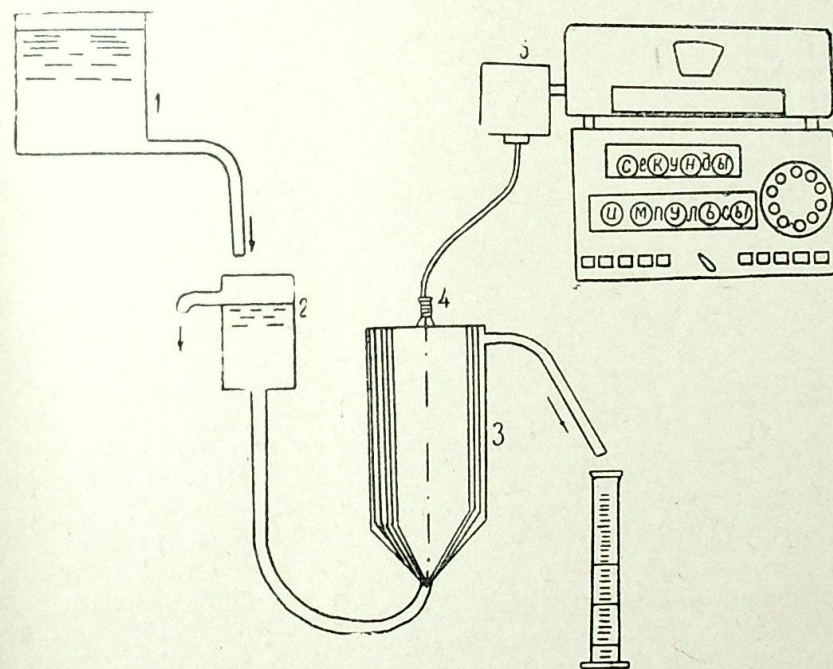


Рис. 2.

Схема установки. 1 — резервуар, 2 — регулирующий напорный бак, 3 — фильтрационный прибор, 4 — счетчик Гейгера, 5 — входной блок

В качестве детектора-датчика был применен газоразрядный счетчик Гейгера—Мюллера типа СТС-5. В измерительную установку входил также пересчетный прибор типа ПС-5М „Волна“.

Газоразрядный счетчик СТС-5, заключенный в резиновую оболочку, помещали в вертикальном положении в центре фильтрационно-суффозийного прибора так, чтобы рабочая поверхность его приходилась на слой грунта, активизированного солью KCl .

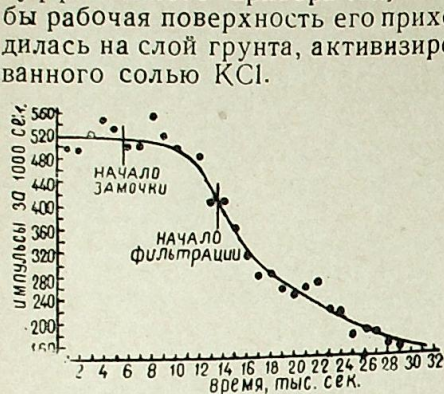


Рис. 3
Изменение интенсивности излучения при фильтрации

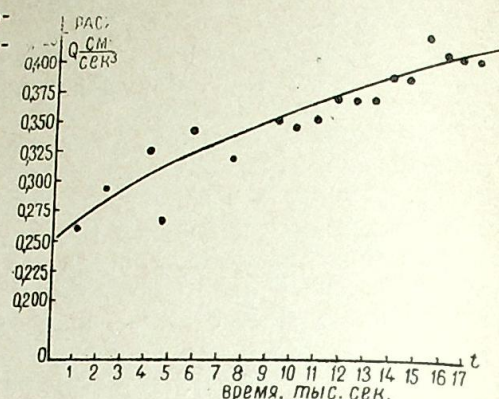


Рис. 4
Изменение расхода

Питание счетчика от стабилизированного высоковольтного выпрямителя установки ПС-5М „Волна“ величиной 400 в (соответствует прямолинейному участку плато счетчика) подавалось через выносной блок той же установки.

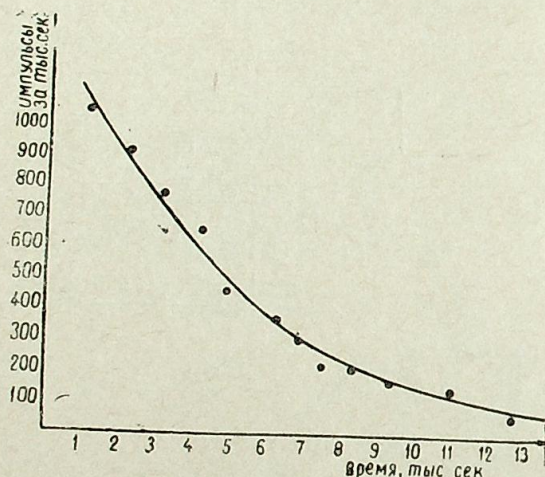


Рис. 5
Изменение интенсивности излучения фильтратов во времени

В ходе экспериментирования непрерывно измеряли изменения интенсивности излучения исследуемого образца грунта в процессе химической суффозии. Результаты регистрировались пересчетным устройством подсчетом количества импульсов, поступающих от счетчика в течение 1000 сек.

В течение всего опыта непрерывно брали также пробы фильтрата в объеме 300 см^3 , которые затем подвергались радио-

метрическим измерениям. В этом случае применялась та же самая пересчетная установка, только вместо счетчика СТС-5, который по своим конструктивным данным не позволяет производить замеры в жидкостной среде, был использован счетчик АС-1. Счетчик АС-1 устанавливался в свинцовом домике типа ДС, в котором и проводились дальнейшие измерения фильтратов.

Перед замером проб фильтрата в домик в стеклянном стакане помещали 300 см^3 дистиллированной воды, погружали в нее счетчики и измеряли фон.

Для измерения излучения проб фильтрата последний в стеклянном стакане (объем 300 см^3) помещали в домик, погружали в него счетчик, включали пересчетную установку и производили замер.

Для получения более точного значения каждую пробу фильтрата измеряли трижды и брали среднюю величину.

Путем фиксации времени взятия проб фильтрата в определенном объеме устанавливали изменение фильтрационных расходов во времени.

Полученные опытные данные графически изображены на рис. 3—5.

Выводы

1. Методически разработана и создана установка, позволяющая изучать вопросы химической суффозии.
2. Процесс фильтрации в грунте переменной проницаемости можно изучать без нарушения этого процесса.
3. Процесс выщелачивания при фильтрации происходит неравномерно во времени (рис. 3). В начальный момент происходит интенсивное растворение солей и изменение концентрации, в дальнейшем эта интенсивность заметно слабеет.
4. Изменение расходов при постоянном градиенте напора (рис. 4) свидетельствует о неравномерном и неустановившемся движении при химической суффозии.
5. Изменение интенсивности излучения проб фильтрата (рис. 5) идентично изменению интенсивности излучения при фильтрации в той его части, которая соответствует начальной стадии фильтрации (рис. 3). Оба эти графика могут дополнить друг друга и контролировать происходящие процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беликов М. П., Емельянов В. А. Применение радиоактивных изотопов в гидротехническом строительстве. Госстройиздат, 1961.
2. Патрашев А. Н., Павлич М. П., Праведный Г. Х. Исследование механической и химической суффозии в песчано-гравеллистых грунтах и скальных породах. Госэнергоиздат, 1959.
3. Сборник практических работ по радиохимии. Л., Изд-во ЛГУ, 1956.

Р. М. Вахабов

Дэжишэн мэсамэли грунтларда филтрасијанын радиометрик үсулла тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Дузлашмыш грунтларда тикилмиш каналлардан, су новузларын-дан вә башга гидротехники гургулардан ахан сулар, гургуларын асасында дузларын гәләвиләшмәсинә сәбәб олур ки, бу да гургуларын асасында әләвә чөкмә јарадыр. Грунтдан мајенин филтрасијасы-нын тәдгиги заманы тәтбиг едилән өлчмәнин кимјәви үсуллары чо-хәтин олмагла, вахтдан асылы олараг һадисәнин дәјишмәсинин дина-микасыны өјрәнмәјә вә просесин механикасыны ајдын етмәјә имкан јаратмыр. Буна көрә дә филтрасија заманы просес позулмадан грунт-ларын мәсамәләриндә олан дузларын тәркибинин дәјишмәси просесини өјрәнмәјә имкан јарадан јени үсуллар ахтармаг лазымдыр.

Мә'лум олан үсуллардан филтрасија тәдгигатларында радиоактив индикаторларын тәтбиг едилмәсидир. Анчаг бу үсулун тәтбиги лабораторија шәраитиндә радиоактив шүаларын чох зәрәрли олмасына көрә мөһдудлашыр вә бунун үчүн хусуси лабораторија базасы јарадылмасы тәләб едилир.

Бунунла әлагәдар олараг тәклиф едилән јени үсул дәгиг вә һәсас апаратларын тәтбиг едилмәси илә дузларын тәркибиндә олан элементларын тәбии радиоактивлијинин өлчүлмәсинә имкан вә тәһлүкәсиз шәраит јарадыр. Буна көрә дә бу үсулун кениш тәтбиг едилмәси мәсләһәт көрүлүр.

Бу мәсәлә Азәрбајчан Елми-Тәдгигат Нефтьһарма Институтунун изотоп лабораторијасында Су Проблемләри Институту илә әмәкдашылыг шәраитиндә тәдгиг едилмишдир. Тәчрүбәләрдән алынмыш нәтичәләр 1, 2, 3-чү шәкилләрдә көстәрилмишдир.

Апарылан тәдгигатлардан ашағыдакы нәтичәләри чыхармаг олар:

1. Тәдгигатлар нәтичәсиндә кимјәви суффозијаны өјрәнмәјә имкан јарадан гүрғу јарадылмыш вә тәчрүбә үсулу верилмишдир.

2. Бу прибор вә үсул дәјишән мәсамәли груннда филтрасија просесини онун позулмадан өјрәнилмәси үчүн имкан јарадыр.

3. Гәләвиләшмә просеси филтрасија заманы гејри-мүнтәзәм әмәләкәлир.

4. Сабит басгы градијенти заманы сәрфләрин дәјишмәси кимјәви суффозијада гејри-мүнтәзәм вә гәрарлашмамыш һәрәкәт олмасыны сүбут едир.

А. М. ПАШАЕВ, М. И. ИГЛИЦЫН, В. В. ВОРОНКОВ

К МЕТОДИКЕ ИЗМЕРЕНИЙ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КРЕМНИЕВЫХ СЛИТКОВ НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ

В работе [1] было показано, что сопротивление полупроводникового образца, включенное в цепь измерительного колебательного контура посредством емкости связи, определяется из выражения:

$$R = \omega L \frac{\Delta Q}{Q'Q}, \quad (1)$$

где $\Delta Q = Q - Q'$;

Q — добротность контура без образца,

Q' — добротность контура с образцом,

ω — частота.

Это без учета паразитной емкости.

Зная геометрию образца, можно определить его удельное сопротивление. Такие измерения обычно проводятся на высокой частоте (10—20 мГц). Поэтому необходимо рассмотреть вопросы, связанные с прохождением высокочастотного тока через образец.

Дело в том, что при использовании токов высокой частоты возможно завышение значения измеряемого активного сопротивления из-за неравномерного распределения плотности тока по поперечному сечению, т. е. благодаря скин-эффекту.

Для цилиндрического проводника отношение сопротивлений на переменном и постоянном токах $\frac{R_{\sim}}{R_{-}}$ зависит от параметра X , равного

$$X = \pi d \sqrt{\frac{2\mu\gamma}{\rho \cdot 10^9}}; \quad (2)$$

d — диаметр проводника (слитка), см;

ρ — удельное сопротивление, ом·см;

γ — частота, Гц;

μ — магнитная проницаемость.

Подсчитаем величину X для $d = 40$ мм, $\gamma = 20$ мГц, и $\rho = 2$ ом·см. [2].

Для кремния магнитная восприимчивость $\chi = 1,3 \cdot 10^{-5}$. Поэтому

$\frac{R_{\sim}}{R_{-}} = 1,02$,
 $\mu = 1 + 4\pi\chi \approx 1$. Легко видеть, что $X = 1,4$. При этом отношение

т. е. разница в сопротивлениях незначительна $\sim 2\%$.

При оценке качества полупроводниковых материалов большой интерес представляет исследование распределения удельного сопротивления вдоль слитка. Поэтому желательно, чтобы область усреднения удельного сопротивления по длине слитка были как можно меньше, т. е. ширина колец связи и расстояние между ними должны быть малыми [2].

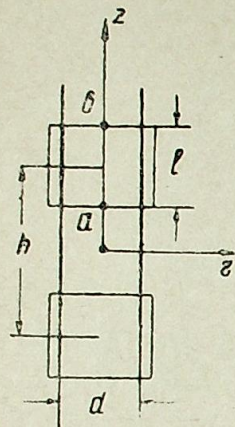


Рис. 1

Предел уменьшения ширины колец определяется требованием достаточной емкостной связи. При узких и близко расположенных кольцах омическое сопротивление, включенное между кольцами, не может быть выражено простой формулой $\frac{4h\rho}{\pi d^2}$, где h — расстояние между се-

рединами колец, a является более сложной функцией d , h и ширины колец l . Ниже произведен расчет этой функции.

При частотах $\omega = 2\pi\nu$ ($\nu = 20$ мГц) и сопротивлениях ρ , с которыми приходится иметь дело в данном методе, ток проводимости велик по сравнению с током смещения, а скин-эффект не имеет места, так что электрическое поле в слитке потенциально и его потенциал Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0. \quad (3)$$

Ток, нормальный к поверхности и направленный внутрь слитка, равен

$$j_n = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial r}.$$

Вне колец $j_n(z) = 0$.

Под кольцами $j_n(z) = i\omega c [\Phi_0 - \Phi(z)]$, (4)

c — емкость единицы площади кольца,

Φ_0 — потенциал кольца,

$\Phi(z)$ — потенциал поверхности под кольцом.

Выберем отсчет потенциала так, чтобы он был нечетной функцией z (рис. 1). Граничное условие (4) имеет простой вид, если $\Phi_0 \gg \Phi(z)$, т. е. емкостное сопротивление гораздо больше омического $\omega c R \ll 1$. Именно тогда имеем: $j_n(z) \approx i\omega c \Phi_0$, т. е. j_n постоянно вдоль кольца и граничное условие формулируется как условие постоянства j_n на кольцах и равенству нулю вне колец.

На верхнем кольце $j_n = j_0$, на нижнем $j_n = -j_0$.

Решая эту задачу, найдем $\Phi(z) = j_0 \cdot f(z)$ для поверхности слитка, так что омические потери равны $2 j_0 \int_S \Phi(z) = 2 j_0 \int_S f(z) j_0 \cdot ds = 2 j_0^2$

$\cdot S \cdot \bar{f}(z) = \frac{2 \cdot I_0^2}{S} \bar{f}(z)$, где S — площадь кольца, а $\bar{f}(z)$ — среднее от $f(z)$ по поверхности верхнего кольца.

С другой стороны, они равны $R I_0^2$. Таким образом, омическое сопротивление равно $\frac{2}{S} \bar{f}(z)$. Теперь, после окончательной постановки задачи, приступим к ее решению.

Разложим $\Phi(r, z)$ в интеграл Фурье по z :

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \varphi_k(r) \sin kz dk, \quad (5)$$

причем

$$\varphi_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^l \Phi(r, z) \sin kz dz,$$

$\varphi_k(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_k'' + \frac{1}{r} \varphi_k' - k^2 \varphi_k = 0, \quad (6)$$

т. е. уравнению для функций Бесселя от мнимого аргумента [3]. Из двух независимых решений (6) условию конечности в нуле удовлетворяет $I_0(kr)$.

Таким образом, имеем:

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty A k I_0(kr) \sin kz dk; \quad (7)$$

Фурье-образ тока $j_k(z)$, равного $\frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial r}$ является простой функцией z (рис. 2) и дается функцией

$$\frac{2j_0}{\pi k} (\cos ka - \cos kb) = \frac{4j_0}{\pi k} \sin \frac{kh}{2} \sin \frac{kl}{2}. \quad (8)$$

Учитывая, что $I_0'(x) = I_1(x)$, имеем:

$$\Phi(z) = \frac{4j_0}{\pi} \rho \int_0^\infty \frac{I_0(kr)}{I_1(kr)} \frac{\sin \frac{kl}{2} \sin \frac{kh}{2}}{k^2} \sin kz dk. \quad (9)$$

Выделяя отсюда $f(z)$ и усредняя по z на верхнем кольце, получим (имея в виду, что площадь кольца $S = \pi d e$) окончательное выражение для омического сопротивления:

$$R = \frac{4 \cdot d \cdot \rho}{\pi^2 l^2} \int_0^\infty \frac{I_0(x)}{x^3 I_1(x)} \sin^2 mx \cdot \sin^2 nx \cdot dx, \quad (10)$$

$$\text{где } m = \frac{h}{d}, n = \frac{l}{d}, x = kr.$$

Удобно представить R в виде

$$R = \frac{4 \cdot h \cdot \rho}{\pi \cdot d^2} \cdot K. \quad (11)$$

Поправочный множитель K дается функцией

$$K = \frac{\lambda}{\pi m n^2} \int_0^\infty \frac{x I_0(x)}{I_1(x)} \frac{\sin^2 mx \cdot \sin^2 nx}{x^4} dx. \quad (12)$$

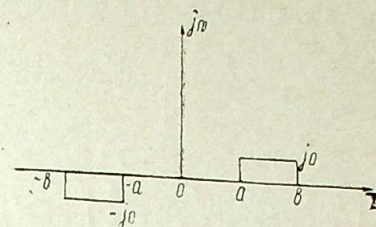


Рис. 2

Поскольку асимптотически $\frac{x I_0(x)}{I_1(x)}$ хорошо представляется линейной функцией $c+x$, а интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx \cdot \sin^2 nx}{x^4} dx = \frac{\pi m \cdot n^2}{2}, \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 mx \cdot \sin^2 nx}{x^3} dx = \frac{1}{4} \left[2mn \ln \frac{m+n}{m-n} - m^2 \ln \frac{m^2}{m^2-n^2} - n^2 \ln \frac{n^2}{m^2-n^2} \right], \quad (14)$$

то K можно без труда вычислить. Он рассчитывается следующим образом. Подинтегральный фактор $\frac{x I_0(x)}{I_1(x)}$ аппроксимируется с точностью, всюду лучшей 2,5%, функцией: $2 + \frac{x^2}{5}$ при $0 < x < 2$; $x + 0,8$ при $x > 2$. При этом, поскольку больший вклад в K дают области, где аппроксимация значительно лучше 2,5%.

Имеем

$$K = 0,4 + \frac{0,173}{n} + \frac{1}{\pi m n^2} \int_0^2 (1,2 - x + 0,2x^2) \frac{\sin^2 mx \cdot \sin^2 nx}{x^4} dx. \quad (15)$$

На рис. 3 приведены графики удельного сопротивления кремниевого слитка, измеренного двухзондовым и бесконтактным методами. Видно, что при использовании вычислительного выше поправочного коэффициента K получается удовлетворительное совпадение результатов: 1—измерения бесконтактным методом с учетом поправки K ; 2—без учета; 3—измерения двухзондовым методом. Далее следует заметить, что при измерениях бесконтактным методом нужно принимать меры против образования на поверхности слитка инверсионного слоя, легко возникающего на материале p -типа во влажной атмосфере, так как поверхностное сопротивление в этом случае может стать заметным по сравнению с объемным.

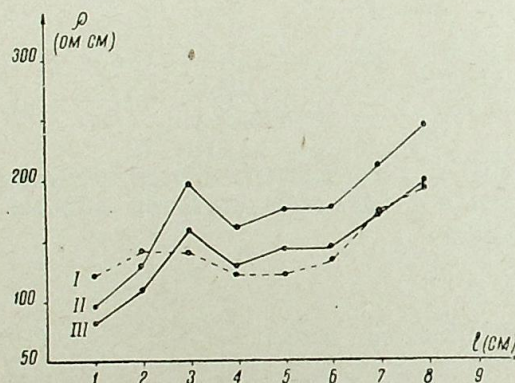


Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Иглицын М. И., Пашаев А. М. „Изв. АН Азерб. ССР. серия физ.-матем. и техн. наук.“ 1962, № 3.
2. Иглицын М. И., Пашаев А. М., Шуняев В. Г., Воронков В. В. „Заводская лаборатория“ (в печати).
3. Тихонов и Самарский. Уравнения математической физики. М., 1956 г.

МҮНДӘРИЧАТ

Р. Н. Мәммәдов. Сонсуз $(-\infty, \infty)$ областы үзәриндә тә'јин олунмуш функциялар снпифләри һаггында	3
Ф. Н. Шамијев. Минимум чәкили һалгашәкилли ләвһәләр ләјинә етмәк һаггында	13
Т. М. Климанова. Унитар јарымевклид фәзалары	21
Н. М. Сәбзијев. Умумиләшмиш Лебег фәзасында периодик функцияларын тригонометрик чохәдлиләрлә јахынлашмасы	31
П. Ә. Рәһманов. Енинә зәрбә заманы мүғавимәтли мүһитдә еластики мембранын һәрәкәтинин тәдгиги	41
Г. М. Әскәров. Азәрбајчан ССР Халг Тәсәррүфаты Шурасы системиндә мадди-техники тәһизат мәсәләсинин «Урал-1» электрон рәғәмһесаблајычы машинында һәлли	51
Ј. А. Маһмудов, Ф. А. Атамов, Т. А. Бәдәлов. Әдәлләри әллә рәғәмһесаблајычы машина дахил етмәк вә онлары автоматик олараг онлуг сәј системиндән икилик сәј системинә чевирмәк үчүн гурғу	59
Ф. М. Һашымзаде. Халкопирит типли дешикли јарымкечиричиләрин енержи спектри	67
Һ. Б. Абдуллајев вә б. Дојма чәрәјанлы селен фотоэлементләри	77
Т. Ч. Әлијева, Ә. Х. Хәлилов. Бә'зи фәаллашдырычы вә гејри-фәаллашдырычы ашгарларын КСІ-монокристалларында F-мәркәзләрин әмәлә кәлмәси вә ләғв едилмәсинә тә'сир	85
Н. А. Һәсәнова. β - Cu_2S -ин бә'зи хассәләри һаггында	91
Х. Г. Баркинхојев, Г. М. Әлијев. Тәмизлији мүхтәлиф олан селенин бәрк вә маје һалында електрик хассәләринә даир	95
Һ. Ш. Әлијев. Ох тә'сирләндиричи илә рекуперасија режиминин рекуперасија характеристикаларыны һесаблама методу	103
М. Ә. Бағыров вә б. Нефт ләјларына термики тә'сиретмә просесинә фәсиләләрлә һава вурманын тә'сири	109
Т. А. Хәлилов, Н. Ј. Данилов. Бир актив дифференциаллајычы манганын әтүрмә функциясынын чыхарылышы	117
В. Ј. Једуш. Һәрәкәт едән гыса гапанмыш сарғылы вә бүтөв магнит кечиричили индуктив чевиричи	121
Р. М. Ваһабов. Дәјишән мәсамәли грунтларда филтрасијанын радиометрик үсулла тәдгиги	133
А. М. Пашајев, М. И. Иглицын, В. В. Воронков. Јүксәк тезлик-ләрдә Si-ун хусуси мүғавимәтинин өлчүлмәсинә даир	139

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Мамедов. О некоторых классах функций, определенных на $-\infty, \infty$	13
Ф. Г. Шамиев. О проектировании кольцевых пластинок минимального веса	21
Т. М. Климанова. Унитарные полуэллиптические пространства	
Н. М. Сабзиев. Приближения периодических функций тригонометрическими полиномами в обобщенном пространстве Лебега	31
П. А. Рахманов. Исследование поперечного удара по гибкой мембране, находящейся в сопротивляющейся среде	41
Т. М. Аскеров. Решение одной задачи материально-технического снабжения в системе СНХ Азербайджанской ССР на ЭЦВМ «Урал-1»	51
Ю. А. Махмудов, Ф. А. Атамов, Т. А. Бадалов. Устройство ручного ввода чисел в ЦВМ с автоматическим преобразованием их из десятичной системы счисления в двоичную	59
Ф. М. Гашимаде. Энергетический спектр дырок в полупроводниках со структурой халькопирита	67
Г. Б. Абдуллаев и др. Селеновые фотоэлементы с током насыщения	77
Т. Д. Алиева, А. Х. Халилов. Исследование влияния некоторых активирующих и неактивирующих примесей на образование и распад центров захвата в монокристаллах KCl	85
Н. А. Гасанова. О некоторых свойствах $-\text{Cu}_2\text{S}$	91
Х. Г. Баркинхоев, Г. М. Алиев. Об электрических свойствах селена различной чистоты в твердой и жидкой фазах	95
Г. Ш. Алиев. Метод расчета рекуперативных характеристик при рекуперации с осевым возбудителем	103
М. А. Багиров и др. Влияние перерывов в подаче воздуха на ход процесса термического воздействия на нефтеносный пласт	109
Т. А. Халилов и Н. Е. Данилов. Вывод передаточной функции одного активного дифференцирующего звена	117
В. Я. Едуш. Индуктивный преобразователь с подвижным коротко замкнутым ветком и сплошным магнитопроводом	121
Р. М. Вагабов. Исследование фильтраций в грунтах переменной проницаемости радиометрическим методом	133
А. М. Пашаев, М. И. Иглицын, В. В. Воронков. К методике измерения удельного сопротивления кремниевых слитков на высокой частоте	139