

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2

1963

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАНУ

Г. К. НАМАЗОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При изучении различных тепловых процессов в кусочно-однородных средах встречается краевые задачи для линейных параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами и некоторыми дополнительными условиями на поверхностях раздела двух сред.

В настоящей статье, применяя методы, развитые в работах [4, 5], получено решение краевой задачи для параболического уравнения с разрывными коэффициентами при общем линейном условии сопряжения на поверхностях разрыва коэффициентов [2].

Рассмотрим параболическое уравнение

$$LU = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i} + C(x, t)U = \\ = A_0(x, t) \frac{\partial U}{\partial t} + F(x, t) \quad (1)$$

в цилиндре $Q = D \times (0, T]$, где D — ограниченная область пространства точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Пусть область D разделена на конечное число подобластей $L_i (i = 1, 2, \dots, m)$ непересекающимися замкнутыми и гладкими $(n-1)$ -мерными поверхностями.

Обозначим через Γ границу области D , а Γ_{ik} границу раздела областей D_i и $D_k (i, k = 1, 2, \dots, m-1)$. Тогда цилиндрические поверхности $S_{ik} = \Gamma_{ik} \times (0, T] (i, k = 1, 2, \dots, m-1)$ разбивают цилиндр Q на подцилиндры $Q_i = D_i \times (0, T] i = 1, 2, \dots, m$. Предположим, что коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции всюду в Q , кроме точек $\sigma = \sum_{ik} S_{ik}$, где они и их производные терпят разрывы первого рода по $x_1, \dots, x_n$. Кроме того,

$$A_0(x, t) \geq \lambda_0 > 0, A_{ij} = A_{ji}, \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \lambda > 0 \text{ и } C(x, t) \leq 0$$

для любого действительного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и точек $(x, t) \in Q$. Пусть поверхности $\Gamma_{ik} (i, k = 1, 2, \dots, m-1)$ такие, что в окрестности любой точки Γ_{ik} можно ввести локальные координаты

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

$y_i = \tau_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при которых поверхность разрыва коэффициентов переходит в плоскость $y_n = 0$, причем τ_i достаточно гладкие функции.

В цилиндре Q мы ищем функцию $U(x, t)$, которая удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $Q - \sigma$, начальному условию

$$U|_{t=0} = 0 \text{ на } D - \sum \Gamma_{ik}, \quad (2)$$

граничному условию

$$U|_S = 0 \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$\left. \begin{aligned} U|_{S_{pq}} - 0 &= U|_{S_{pq}} + 0 \\ l_{pq}U &\equiv K_p \frac{dU}{dN_p} + K_q \frac{dU}{dN_q} \delta_{pq}U = \chi_{pq} \text{ на } S_{pq} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

($p, q = 1, 2, \dots, m-1$), где $S = \Gamma \times (0, T]$, $K_i(x, t) \geq K_0 > 0$

гладкие функции в $\bar{Q}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), а $\delta_{pq} \geq 0$ и χ_{pq} — гладкие функции, заданные на поверхности S_{pq} . Здесь

$$\frac{d}{dN_k} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \cos(\nu, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$k = 1, 2, \dots, m-1$ означает производную по внешней, по отношению к области Q_k , конормали на поверхности разрыва (ν — внешняя нормаль). Кроме того, мы будем рассматривать только такие решения

$U(x, t)$ этой задачи, которые имеют производные $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ ($t = 1, 2, \dots, n$),

суммируемые с квадратом в $\bar{Q}$.

Будем говорить, что функция v принадлежит классу $C^{(k)} G$, если она имеет непрерывные производные до порядка k включительно во всех точках множества G .

Теорема 1. Пусть Γ — непрерывно дифференцируемая поверхность и каждой ее точки можно коснуться некоторым шаром, лежащим вне D . Пусть S_{pq} ($p, q = 1, 2, \dots, m-1$) непрерывно дифференцируемы до порядка $l+2$; функции $K_i, A_{ij} \in C^{(l+1)}(\bar{Q}_r)$, $B_i, C, A, F, \in C^{(l)}(\bar{Q}_r)$ ($r = 1, 2, \dots, m$) и $\chi_{pq}, \delta_{pq} \in C^{(l)}(S)_{pq}$. Тогда для $l > n + k + 1$ и $k \geq 2$ существует по крайней мере одно решение $U(x, t)$ задачи (1) — (4). Это решение принадлежит классу $C^{(k)}(Q \cap \bar{Q}_r)$, ($r = 1, 2, \dots, m$).

Доказательство. Покроем область D конечным числом достаточно малых областей ω_r , $r = 1, 2, \dots, m$ таких, что в области ω_r , содержащей точки Γ_{ik} ($r, k = 1, 2, \dots, m-1$), возможен переход к локальным координатам $y_1^r, \dots, y_n^r$ таким, что $y_n^i = y_n^j$ в пресечении ω_r и ω_j . Пусть $e_r(x, t)$, $r = 1, 2, \dots, N$ — гладкие функции, равные нулю вне $\omega_r \times (0, T]$ и в некоторой окрестности ее границы, причем всюду в Q $0 \leq e_r(x, t) \leq 1$ и $\sum_{r=1}^N e_r(x, t) \equiv 1$. Положим $\chi = \chi_i$ и $\bar{\delta} = \delta_i$ в Q_i , где χ_i и δ_i — гладкие функции в Q_i и $\chi_p - \chi_q = \chi_{pq}$, $\delta_p - \delta_q = \delta_{pq}$ на поверхности S_{pq} , $p, q = 1, 2, \dots, m-1$. Такое построение возможно ввиду гладкости поверхностей S_{pq} и функций χ_{pq} и δ_{pq} , заданных на них.

Построим следующие функции:

$$\chi_r^h = e_r(\chi)_r^h, \quad \delta_r^h = e_r(\bar{\delta})_r^h, \quad r = 1, 2, \dots, N,$$

$$A_0^h = \sum_{r=1}^N e_r(KA_0)_r^h, \quad A_{ij}^h = \sum_{r=1}^N e_r(KA_{ij})_r^h,$$

$$B_i^h = \sum_{r=1}^N e_r(KB_i)_r^h - \sum_{j=1}^n \frac{\partial K}{\partial x_j} A_{ij}^h, \quad C^h = \sum_{r=1}^N e_r(KC)_r^h - \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial(\bar{\delta}e_r)}{\partial y_n^r} \right)_r^h$$

$$\text{и } F^h = \sum_{r=1}^N e_r(KF)_r^h - \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial(\chi e_r)}{\partial y_n^r} \right)_r^h,$$

где $K(x, t) = K_i(x, t)$ в $\bar{Q}_i$, $a(\varphi)_r^h$ означает усреднение функции φ в области $\omega_r \times (0, T]$ с радиусом усреднения h по переменным $t, y_1^r, \dots, y_n^r$. В областях $\omega_r \times (0, T]$, не содержащих точек σ , за $(t, y_1^r, \dots, y_n^r)$ принимаем $(t, x_1, \dots, x_n)$.

Рассмотрим последовательность уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}^h \frac{\partial U_h}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} + C^h U_h - \sum_{r=1}^N \delta_r^h \frac{\partial U_h}{\partial y_n^r} + \\ + \sum_{r=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n^r} (\delta_r^h U_h) = A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} + F^h + \sum_{r=1}^N \frac{\partial \chi_r^h}{\partial y_n^r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Преобразуя в (5) члены, содержащие производные $y_n^1, \dots, y_n^N$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}^h \frac{\partial U_h}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n B_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} + C^h U_h - \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n p_{ir} \delta_r^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} + \\ + \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n p_{ir} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_r^h U_h) = A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} + F^h + \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n p_{ir} \frac{\partial \chi_r^h}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где p_{ir} — гладкие функции, определенные преобразованием координат.

Мы получим решение краевой задачи (1) — (4) как предел решений уравнений (6) при краевых условиях:

$$U_h|_{t=0} = 0, \quad U_h|_S = 0. \quad (7)$$

Установим некоторые интегральные оценки для функций U_h и их производных. Для этого умножим уравнение (6) на U_h и проинтегрируем его по цилиндру $Q_t = \{x \in D, t \geq 0\}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_D A_0^h(x, t) U_h^2(x, t) dD + \int_{Q_t} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} \frac{\partial U_h}{\partial x_j} dQ = \\ = \int_{Q_t} \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} U_h dQ - \int_{Q_t} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n p_{ir} \delta_r^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} U_h dQ - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_t} \mu_{ir} \chi_r^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} dQ - \int_{Q_t} \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \chi_r^h \frac{\partial \mu_{ir}}{\partial x_i} U_h dQ - \int_{Q_t} F^h U_h dQ + \\
& + \int_{Q_t} \left\{ C^h + \frac{1}{2} \frac{\partial A_0^h}{\partial t} - \sum_{r=1}^N \sum_{i=1}^n \delta_r^h \frac{\partial \mu_{ir}}{\partial x_i} \right\} U_h^2 dQ = \int_{Q_t} \sum_{r=1}^N P_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} U_h dQ + \\
& + \int_{Q_t} \sum_{i=1}^n Q_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} dQ + \int_{Q_t} R^h U_h dQ + \int_{Q_t} g^h U_h^2 dQ, \quad (8)
\end{aligned}$$

где функции $\tilde{B}_i^h$, P_i^h , Q_i^h , R^h и g^h равномерно ограничены по h .

После применения к первой части равенства (8), формулы

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad (9)$$

получим

$$\int_D U_h^2(x, t) dD \leq C_1 \int_0^t \left(\int_D U_h^2(x, \tau) dD \right) d\tau + C_2 \quad (10)$$

и

$$\int_{Q_t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U_h}{\partial x_i} \right)^2 dQ \leq C_3 \int_{Q_t} U_h^2 dQ + C_4. \quad (11)$$

Через C_i всюду обозначаем константы, не зависящие от h . Из (10) и (11) следует, что

$$\int_D U_h^2(x, t) dD < C_5 \text{ и } \int_{Q_t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U_h}{\partial x_i} \right)^2 dQ < C_6. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнение (6) и умножая его на обрезающие функции, можно обычным образом показать, что в любой области $Q' \subset Q - \sigma$ последовательность U_h равномерно ограничена в норме пространства W_2^l . Тогда из теорем вложения С. Л. Соболева [7] следует, что последовательность U_h компактна в пространстве $C^{(k)}$, если $l \geq \left[\frac{n+1}{2} \right] + k$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность

U_{h_k} из U_h , которая сходится к некоторой функции $U(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1) и обладающей вне точек σ непрерывными производными до порядка k .

Пусть теперь окрестность ω точки $P_0 \in \sigma$ целиком содержится в $\omega_r \times (0, T]$. Считая p_0 началом координат, перейдем в $\omega_r \times [0, T]$ к локальным координатам $t, y_1^r, \dots, y_n^r$.

Тогда уравнение (5) или то же самое (6) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,i,k=1}^n \alpha_{ik}^r \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\beta_{jkr}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \right) + \sum_{i=1}^n \gamma_{ir}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} + C^h U_h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i^r} (\delta_i^h U_h) - \\
& - \sum_{i=1}^n \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} = A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} + F^h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_i^r}, \quad (13)
\end{aligned}$$

где α_{ik}^r — гладкие функции, которые определяются функциями, задающими преобразование координат $(x_1, \dots, x_n, t)$ в $(y_1^r, \dots, y_n^r, t)$ в окрестности точки p_0 , а функции β_{jkr}^h и γ_{ir}^h равномерно ограничены по h . Подставляя значения выражений:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i^r} (\delta_i^h U_h) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\delta_i^h U_h)}{\partial y_i^r} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial (\delta_i^h U_h)}{\partial y_j^r} \frac{\partial y_j^r}{\partial y_i^r}, \\
\sum_{i=1}^n \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \frac{\partial y_j^r}{\partial y_i^r}, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_i^r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_i^r} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_j^r} \frac{\partial y_j^r}{\partial y_i^r}$$

в (13), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ik}^r \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\beta_{jkr}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \right) + \sum_{i=1}^n \gamma_{ir}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} \tilde{C}^h U_h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\delta_i^h U_h)}{\partial y_i^r} = \\
= A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} + F^h + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_i^r}, \quad (15)
\end{aligned}$$

где функции $\tilde{\gamma}_{ir}^h$, $\tilde{C}^h$ и $\tilde{F}^h$, полученные после учета (14), равномерно ограничены по h . Коэффициенты уравнения (15) имеют равномерно ограниченные производные порядка l по переменным $t, y_1^r, \dots, y_{n-1}^r$, так как переход от одних локальных координат $y_1^r, \dots, y_n^r$ к другим $y_1^i, \dots, y_n^i$ в пресечении ω_i и ω_j такой, что, $y_n^i = y_n^j$.

Рассмотрим вспомогательные функции

$$\Phi_k(y, t) = \left(t^2 - \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right)^2 \prod_{i=1}^n \left(y_i^2 - \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right)^2$$

$$\text{в кубе } R_k = \left\{ -\frac{\alpha}{k} \leq t \leq \frac{\alpha}{k}, -\frac{\alpha}{k} \leq y_i \leq \frac{\alpha}{k} \right\}$$

с центром в точке p_0 , где $\alpha > 0$ достаточно малое число.

Установим интегральную оценку для $\frac{\partial U_h}{\partial t}$ в окрестности точки P_0 .

Для этого умножим уравнение (15) на $\Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t}$ и проинтегрируем его по R_1 , тогда

$$\int_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t} \left\{ \sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ik}^r \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\beta_{jkr}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \right) + \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{ir}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} + \tilde{C}^h U_h + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n^r} \left(\delta_i^h U_h \right) - A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} - \tilde{F}^h - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_n^r} \Big\} dQ = 0. \quad (16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t} \sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ik}^r \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \right) dQ = - \\ &- \iint_{R_1} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\Phi_1 \alpha_{jk}^r \frac{\partial U_h}{\partial t} \right) \beta_{jrk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} dQ = \\ &= - \iint_{R_1} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i^r} \left(\Phi_1 \alpha_{ik}^r \right) \beta_{jkr}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \frac{\partial U_h}{\partial t} dQ - \frac{1}{2} \iint_{R_1} \Phi_1 \sum_{i,j=1}^n \gamma_{ijr}^h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U_h}{\partial y_i^r} \frac{\partial U_h}{\partial y_j^r} \right) dQ, \\ I_2 &= \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n^r} \left(\delta_i^h U \right) dQ = - \iint_{R_1} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n^r} \left(\Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t} \right) \delta_i^h U_h dQ = \\ &= - \iint_{R_1} \Phi_1 \sum_{i=1}^N \delta_i^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^r \partial t} U_h dQ - \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n^r} \sum_{i=1}^N \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial t} U_h dQ = \\ &= \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \delta_i^h U_h \right) \frac{\partial U_h}{\partial y_n^r} dQ + \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \sum_{i=1}^N \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_n^r} U_h dQ - \\ &- \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n^r} \sum_{i=1}^N \delta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial t} U_h dQ, \\ I_3 &= \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial t} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_n^r} dQ = - \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n \partial t} \sum_{i=1}^N \chi_i^h dQ - \\ &- \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n^r} \frac{\partial U_h}{\partial t} \sum_{i=1}^N \chi_i^h dQ = \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \chi_i^h \right) \frac{\partial U_h}{\partial y_n^r} dQ + \\ &+ \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \sum_{i=1}^N \chi_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_n^r} dQ - \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n^r} \sum_{i=1}^N \chi_i^h \frac{\partial U_h}{\partial t} dQ, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_{ijr}^h = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}^r \beta_{jkr}^h.$$

Подставляя значения I_1, I_2, I_3 в (16), применяя неравенство (9) и воспользовавшись оценками (12) и ограниченностью $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i^r} / \sqrt{\Phi_1}$, получим

$$\iint_{R_2} \left(\frac{\partial U_h}{\partial t} \right)^2 dQ < C_8.$$

Мы показали, что функции U_h имеют все производные первого порядка, равномерно ограниченные по h в норме пространства $L_2(R_2)$. В дальнейшем индекс r в (15) опускаем.

Пользуясь методом индукции, покажем, что семейство $\{U_h\}$ имеет равномерно ограниченные по h производные порядка l вида

$$\frac{\partial^l U_h}{\partial t^{l_0} \partial y_1^{l_1} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^l U_h}{\partial t^{l_0'} \partial y_1^{l_1'} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}'}} \partial y_n$$

в норме $L_2(R_{2l+1})$, где $l_0 + l_1 + \dots + l_{n-1} = l$ и $l_0' + l_1' + \dots + l_{n-1}' + 1 = l$.

Предполагая, что это утверждение верно для $l-1$, докажем его справедливость для l . Применяя к обеим частям уравнения (15) оператор

$$L^{l-1} \equiv \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l_0} \partial y_1^{l_1} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}}},$$

умножая полученное равенство на $\Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h$ и интегрируя его по области R_{2l-1} , получим

$$\begin{aligned} &\iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \left[\sum_{ijk=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \sigma_{iks} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(L^s \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) \right) \right] dQ + \\ &+ \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \left[\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_{i1}^h \frac{\partial^{l-1} U_h}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{l-2} \sigma_{is}^h \frac{\partial}{\partial y_j} (L^s U_h) + \right. \\ &\left. + D^{l-1} (\tilde{C}^h U_h - \tilde{F}^h) \right] dQ + \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \frac{\partial}{\partial y_n} L^{l-1} \sum_{i=1}^N (\delta_i^h U_h - \chi_i^h) dQ = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} A_0^h \frac{\partial (L^{l-1} U_h)}{\partial t} dQ + \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \sum_{k=0}^{l-2} \sigma_k^h D^k \left(\frac{\partial U_h}{\partial t} \right) dQ. \end{aligned}$$

Здесь функции σ_{is}^h и σ_k^h равномерно ограничены по h .

Рассмотрим интегралы:

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \left[\sum_{ijk=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \sigma_{iks} \frac{\partial}{\partial t_i} \left(L^s \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) \right) \right] dQ = \\ &= - \iint_{R_{2l-1}} \sum_{ijk=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\Phi_{2l-1} L^{l-1} U_h \sigma_{iks} \right) D^s \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) dQ = \\ &= - \iint_{R_{2l-1}} \sum_{ijk=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \Phi_{2l-1} \sigma_{iks} \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial y_i} D^s \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) dQ - \\ &- \iint_{R_{2l-1}} \sum_{ijk=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} D^{l-1} U_h \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\Phi_{2l-1} \sigma_{iks} \right) L^s \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) dQ = - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \iint_{R_{2l-1}} \sum_{j=1}^n \Phi_{2l-1} \gamma_{ij}^h \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial y_i} \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial y_j} dQ + \\
& + \iint_{R_{2l-1}} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \Phi_{2l-1} \tilde{\sigma}_{js}^h L^{l-1} U_h \frac{\partial L^s U_h}{\partial y_j} dQ + \\
& + \iint_{R_{2l-1}} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{l-1} \mu_{ijs}^h \frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial y_i} L^{l-1} U_h \frac{\partial L^s U_h}{\partial y_j} dQ + \\
& + \iint_{R_{2l-1}} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^{l-2} \Phi_{2l-1} \tilde{\mu}_{ijs}^h \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial y_i} \frac{\partial L^s U_h}{\partial y_j} dQ,
\end{aligned}$$

$$I_5 = \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} D^{l-1} U_h \frac{\partial}{\partial y_n} L^{l-1} \sum_{i=1}^N (\delta_i^h U_h - \chi_i^h) dQ =$$

$$= - \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial y_n} L^{l-1} \sum_{i=1}^N (\delta_i^h U_h - \chi_i^h) dQ -$$

$$- \iint_{R_{2l-1}} \frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial y_n} L^{l-1} U_h L^{l-1} \left[\sum_{i=1}^N (\delta_i^h U_h - \chi_i^h) \right] dQ$$

$$I_6 = \iint_{R_{2l-1}} \Phi_{2l-1} A_0^h \frac{\partial (L^{l-1} U_h)^2}{\partial t} dQ = - \iint_{R_{2l-1}} \frac{\partial (\Phi_{2l-1} A_0^h)}{\partial t} (U^{l-1} U_h) dQ,$$

где функции $\tilde{\sigma}_{js}^h$, μ_{ijs}^h и $\tilde{\mu}_{ijs}^h$ равномерно ограничены по h . Подставляя I_4 , I_5 и I_6 в (17) и пользуясь неравенством (9), предположением индукции и ограниченностью всех выражений $\frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial t} \Big| \sqrt{\Phi_{2l-1}}$ и $\frac{\partial \Phi_{2l-1}}{\partial y_i} \Big| \sqrt{\Phi_{2l-1}}$, $i=1, 2, \dots, n$, получим

$$\iint_{R_{2l}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial D^{l-1} U_h}{\partial y_i} \right)^2 dQ < C_9.$$

Таким образом, мы показали, что производные вида

$$\frac{\partial D^{l-1} U_h}{\partial y_i} = \frac{\partial^l U_h}{\partial t^l \partial y_1^{l_1} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}} \partial y_i}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

имеют равномерно ограниченные по h нормы в пространстве $L_2(R_{2l})$.

Далее, применяя к (15) оператор D^{l-1} , умножая на $\Phi_{2l} \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial t}$ и интегрируя по области R_{2l} , получим:

$$\begin{aligned}
& \iint_{R_{2l}} \frac{\partial}{\partial t} (L^{l-1} U_h) \Phi_{2l} L^{l-1} \sum_{ijk=1}^n \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{jk}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} \right) dQ + \\
& + \iint_{R_{2l}} \Phi_{2l} \frac{\partial}{\partial t} (L^{l-1} U_h) L^{l-1} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \tilde{C} U_h - \tilde{F}^h \right) dQ = \\
& = \iint_{R_{2l}} \Phi_{2l} \frac{\partial (L^{l-1} U_h)}{\partial t} L^{l-1} \left(A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} \right) dQ + \\
& + \iint_{R_{2l}} \Phi_{2l} \frac{\partial L^{l-1} U_h}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t_n} L^{l-1} \left(\sum_{i=1}^N (\chi_i^h - \delta_i^h U_h) \right) dQ. \quad (18)
\end{aligned}$$

Применяя неравенство (9) и пользуясь тем, что $\frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial t} \Big| \sqrt{\Phi_{2l}}$ и $\frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_i} \Big| \sqrt{\Phi_{2l}}$ ($i=1, 2, \dots, n$) ограничены, получим

$$\iint_{R_{2l+1}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (L^{l-1} U_h) \right]^2 dQ < C_{10}.$$

Таким образом, мы показали, что семейство $\{\xi U_h\}$, где функция $\xi(x, t)$ из $C^{(2)}$, равная нулю вне некоторой области $\omega \subset R_{2l+1}$ и равная 1 в окрестности точки P_0 , принадлежит пространству $H_{2, \dots, l, 1}^{l, \dots, l, 1}$ (определение пространства $H^{r_1, \dots, r_n}$ введено С. М. Никольским в [3] и имеет равномерно ограниченные по h нормы. Тогда в силу теоремы 12 работы [3] это семейство принадлежит пространству $H_{\infty}^{l, \dots, l, 1}$ и имеет там равномерно ограниченные нормы, если

$$\chi = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{r_i} = 1 - \frac{n}{2l} - \frac{1}{2} > 0.$$

Отсюда следует, что функции U_h удовлетворяют условию Гельдера с показателем χ и константой, не зависящими от h . Следовательно, решение $U(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} U_h$ непрерывно по всем переменным, если $l \geq n+1$.

Применяя теорему 12 [3], легко видеть, что утверждение верно и для производных вида $\frac{\partial^s U}{\partial t^s \partial y_1^{s_1} \dots \partial y_{n-1}^{s_{n-1}}}$, если $l \geq n+s+1$.

Используя уравнение (1), которому $U(x, t)$ удовлетворяет в Q -с, показываем, как в работе [4], что $U(x, t)$ имеет непрерывные производные порядка $l-n-1$ по всем переменным $t, y_1, \dots, y_n$ при $y_n \geq 0$ и $y_n < 0$ в окрестности P_0 .

Покажем теперь, что выполняется второе условие сопряжения. Так как при преобразовании систем координат конормаль переходит в конормаль, то достаточно доказать выполнение условия (4) в локальных координатах $t, y_1, \dots, y_n$. Рассмотрим окрестность ω точки $P_0 \in \sigma$. Будем считать, что начало координат находится в точке P_0 .

Интегрируя уравнение (15) по области $\tilde{\omega}$,

$$|t| \leq \beta, \quad |y_i| \leq \beta, \quad |y_n| < \gamma, \quad i=1, 2, \dots, n-1,$$

имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i,j,k=1}^n \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\beta_{ik}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \right) dt dy_1 \dots dy_{n-1} dy + \\ & + \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n} (\delta_i^h U_h) dt dy_1 \dots dy_n = \\ & = \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_n} dt dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n + \\ & + \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \left(\tilde{F}^h + A_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} - \tilde{C} U_h - \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \right) dt dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n. \end{aligned}$$

Последний интеграл стремится к нулю при h и γ , стремящихся к нулю, так как U_h , $\frac{\partial U_h}{\partial t}$ и $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ ($i=1, 2, \dots, n$) равномерно ограничены в $L_2(\tilde{\omega})$. Далее имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial y_n} (\delta_i^h U_h) dt dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n = \\ & = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^N \delta_i^h U_h|_{y_n=\gamma} - \sum_{i=1}^N \delta_i^h U_h|_{y_n=-\gamma} \right) dt dy_1 \dots dy_{n-1} = \\ & = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i=1}^N (e_i \tilde{\delta} U|_{y_n=\gamma} - e_i \tilde{\delta} U|_{y_n=-\gamma}) dt dy_1 \dots dy_{n-1} = \\ & = \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \delta_{pq} U dt dy_1 \dots dy_{n-1} \end{aligned}$$

для $P_0 \in S_{pq}$. Аналогично этому получим

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 0}} \int_{-\gamma}^{\gamma} \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \chi_i^h}{\partial y_n} dt dy_1 \dots dy_{n-1} dy_n = \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \chi_{pq} dt dy_1 \dots dy_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \left(K_p \frac{dU}{dN_p} + K_q \frac{dU}{dN_q} \right) dt dy_1 \dots dy_{n-1} + \\ & + \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \delta_{pq} U dt dy_1 \dots dy_{n-1} = \int_{-\beta}^{\beta} (n) \int_{-\beta}^{\beta} \chi_{pq} dt dy_1 \dots dy_{n-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

если $P_0 \in S_{pq}$.

Но так как $\beta > 0$ любое малое число, то из (19) и непрерывности подинтегральной функции вытекает, что второе условие сопряжения (4) удовлетворяется.

Для исследования поведения $U(x, t)$ на боковой поверхности и на нижнем основании цилиндра Q вне точек $\sum_{ik} \Gamma_{ik}$ можно использовать барьеры точно так же, как это делается в работе [4].

Теорема 2. Задача (1)–(4) может иметь не более одного решения.

Доказательство. Пусть задача (1)–(4) имеет два различных решения $U_1(x, t)$ и $U_2(x, t)$. Тогда непрерывная в Q функция $U(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$LU = A_0 \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (20)$$

в области $Q_i (i=1, 2, \dots, m)$ краевым условиям (2), (3) и условиям сопряжения вида

$$U|_{S_{pq}-0} = U|_{S_{pq}+0}, \quad l_{pq} U = 0 \quad \text{на } S_{pq}. \quad (21)$$

Умножим уравнение (20) на $K(x, t)$ и запишем его в $Q_i (i=1, 2, \dots, m)$ в виде

$$\sum_{ij=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \bar{C} U - \bar{A}_0 \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

где

$$\bar{A}_{ij} = K A_{ij}, \quad \bar{B}_i = K B_i, \quad \bar{C} = K C, \quad \bar{A}_0 = K A_0.$$

Обозначим через D_δ совокупность тех точек D , расстояние которых до Γ не больше δ .

Пусть ψ_δ — гладкая функция, равная нулю в $D_{\delta/2}$, равная 1 вне D_δ и такая, что

$$0 \leq \psi_\delta(x) \leq 1, \quad \left| \frac{\partial \psi_\delta}{\partial x_i} \right| \leq \frac{M}{\delta} \quad \text{и} \quad \left| \frac{\partial^2 \psi_\delta}{\partial x_i \partial x_j} \right| \leq \frac{M}{\delta^2}, \quad (23)$$

$i, j=1, 2, \dots, n$, где постоянная M не зависит от δ .

Теперь умножим уравнение (22) на $D\psi_\delta$ и проинтегрируем его по области $Q_\tau = \{x \in D, t \geq \tau > 0\}$. Тогда

$$\int_{\tau}^t \int_{D-D} \sum_{ij=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} dQ + \sum_{p,q} \int_{\tau}^t \int_{\Gamma_{pq}} \left[\bar{A}_{ij} \cos(\nu, x_i) \frac{\partial U}{\partial x_j} U \right]_{\Gamma_{pq}} ds -$$

$$- \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (U \psi_{\delta}) dQ + \int_{\tau}^t \int_{D-D_{\delta}} \left(\sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \bar{C}U - \right. \\ \left. - \bar{A}_0 \frac{\partial U}{\partial t_1} \right) U dQ + \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \left(\sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \bar{C}U - \bar{A}_0 \frac{\partial U}{\partial t_1} \right) U \psi_{\delta} dQ. \quad (24)$$

Очевидно, что последний интеграл в (24) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Далее имеем:

$$I_{\delta} = - \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (U \psi_{\delta}) dQ = - \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} \psi_{\delta} dQ - \\ - \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_j} U \frac{\partial \psi_{\delta}}{\partial x_i} dQ.$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial x_i} \in L_2(Q)$ ($i=1, 2, \dots, n$) и $L_{\delta} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то первый интеграл в правой части последнего равенства стремится к нулю, когда $\delta \rightarrow 0$.

С другой стороны, учитывая оценки (23) и ограниченность $\bar{A}_{ij}$ и их первых производных в D_{δ} , получим

$$\left| \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} U \frac{\partial \psi_{\delta}}{\partial x_j} dQ \right| = \left| - \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} U^2 \frac{\partial^2 \psi_{\delta}}{\partial x_i \partial x_j} dQ - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \bar{A}_{ij}}{\partial x_j} U^2 \frac{\partial \psi_{\delta}}{\partial x_i} dQ \right| \leq \left(\frac{M_1}{\delta^2} + \frac{M_2}{\delta} \right) \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} U^2 dQ,$$

где M_1 и M_2 — постоянные, не зависящие от δ . Так как $U|_s=0$, то, пользуясь леммой С. Л. Соболева ([7], § 12), не трудно показать, что

$$\int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} U^2 dQ < \delta^2 \int_{\tau}^t \int_{D_{\delta}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 dQ.$$

Следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0} I_{\delta} = 0$. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в (24) и пользуясь (21), получим

$$\int_{\tau}^t \int_D \sum_{i,j=1}^n \bar{A}_{ij} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} dQ + \sum_{\Gamma_{pq}} \int_{\tau}^t \delta_{pq} U^2 Q = \\ = \int_{\tau}^t \int_D \left(\sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} + \bar{C}U \right) U dQ - \int_{\tau}^t \int_D A_0 \frac{\partial U}{\partial t} U dQ. \quad (25)$$

Здесь

$$\int_{\tau}^t \int_D \bar{A}_0 \frac{\partial U}{\partial t} U dQ = \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_D \bar{A}_0(x, t) U^2(x, t) dL - \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_D \bar{A}_0(x, \tau) U^2(x, \tau) dL -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\tau}^t \int_D \frac{\partial \bar{A}_0}{\partial t} U^2 dQ \text{ и}$$

$$\left| \int_{\tau}^t \int_D \sum_{i=1}^n \bar{B}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} U dQ \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\tau}^t \int_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 dQ + \frac{C_{11}}{2\varepsilon} \int_{\tau}^t \int_D U^2 dQ.$$

Поэтому, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, учитывая, что $\delta_{pq} \geq 0$ и переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$ в (25), получим:

$$\int_D U^2(x, t) dD \leq C_{12} \int_0^t \int_D U^2 dQ.$$

Следовательно, $U=0$, т. е. $U_1=U_2$ в Q .

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю проф. О. А. Олейник за руководство и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Намазов Г. К. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, №3.
2. Намазов Г. К. „ДАН СССР“, 145, 1962, №6.
3. Никольский С. М. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, 1954, № 38.
4. Олейник О. А. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 25, 1961.
5. Олейник О. А. „ДАН СССР“, 124, 1959, № 6.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Физматгиз, 1961.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.

Г. К. Намазов

Кәсилән әмсаллы параболик тәнликләр үчүн бир сәрһәд мәсәләси һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) кәсилән әмсал ики тәртибли үмуми параболик тән-лининин (2), (3) вә (4) шәртләрини өдәјән һәлли тәдгиг едилир. Бу мәсәләнин һәлли мүәјјән гајда илә тәртиб едилмиш һамар әмсаллы тәнликләр ардычыллыгы үчүн гојулмуш (6), (7) мәсәләләринин ли-мити кими алынмышдыр.

Тапылан һәллин јеканәлији вә дифференциалланма хассәси өјрә-нилмишдир.

Бунун үчүн О. А. Олейник тәрәфиндән [4] вә [5] ишләриндә тәк-лиф олунан үсулдан истифадә едирик. Нәтичә 1 вә 2-чи теоремләрин васитәсилә верилир.

Гејд едәк ки, ики дәјишәнли һала [7] иши һәср олунмушдур.

А. С. ДЖАФАРОВ

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ НОРМАМИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Независимо друг от друга Л. Эренпрайс [8], Б. Мальгранж [10], Л. Хермандер [9], а после них П. Розенблум [11] для различных значений p доказали следующую теорему о целых функциях экспоненциального типа и применяли ее к уравнениям в частных производных.

Теорема 1. Если $f(z_1, \dots, z_n)$ — целая функция комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$ экспоненциального типа $\leq \nu$, $P(z_1, \dots, z_n)$ — алгебраический полином, тождественно не равный нулю, то существует постоянная $A = A(\nu, P)$ такая, что при $1 \leq p \leq \infty$ выполняется неравенство:

$$\|f\|_p^{(n)} \leq A \|Pf\|_p^{(n)}.$$

Здесь норма при $1 \leq p < \infty$ понимается как

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p},$$

а при $p = \infty$, как обычно,

$$\sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} |f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Первые три автора эту теорему доказали, когда $p = \infty$, $p = 1$, $p = 2$, причем близкими методами.

В своей работе П. Розенблум [11] доказал теорему 1 для $1 \leq p \leq \infty$ двумя методами, отличными от методов вышеуказанных математиков. При этом первый метод дал ему возможность доказать теорему 1 с оценкой

$$A \leq p_0^{-1} \left(\frac{2e\nu}{m} \right)^m, \quad (1)$$

где m — степень полинома $P(x_1, \dots, x_n)$ и если через $p_0(x_1, \dots, x_n)$ обозначить однородную часть степени m полинома $P(x_1, \dots, x_n)$, то

А. С. ДЖАФАРОВ

НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ НОРМАМИ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Независимо друг от друга Л. Эренпрайс [8], Б. Мальгранж [10], Л. Хермандер [9], а после них П. Розенблум [11] для различных значений p доказали следующую теорему о целых функциях экспоненциального типа и применяли ее к уравнениям в частных производных.

Теорема 1. Если $f(z_1, \dots, z_n)$ — целая функция комплексных переменных $z_1, \dots, z_n$ экспоненциального типа $\leq \nu$, $P(z_1, \dots, z_n)$ — алгебраический полином, тождественно не равный нулю, то существует постоянная $A = A(\nu, P)$ такая, что при $1 \leq p \leq \infty$ выполняется неравенство:

$$\|f\|_p^{(n)} \leq A \|Pf\|_p^{(n)}.$$

Здесь норма при $1 \leq p < \infty$ понимается как

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p},$$

а при $p = \infty$, как обычно,

$$\sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} |f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Первые три автора эту теорему доказали, когда $p = \infty$, $p = 1$, $p = 2$, причем близкими методами.

В своей работе П. Розенблум [11] доказал теорему 1 для $1 \leq p \leq \infty$ двумя методами, отличными от методов вышеуказанных математиков. При этом первый метод дал ему возможность доказать теорему 1 с оценкой

$$A \leq p_0^{-1} \left(\frac{2e\nu}{m} \right)^m, \quad (1)$$

где m — степень полинома $P(x_1, \dots, x_n)$ и если через $p_0(x_1, \dots, x_n)$ обозначить однородную часть степени m полинома $P(x_1, \dots, x_n)$, то

$$\rho_0 = \max_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1} |p_0(x_1, \dots, x_n)|.$$

Второе доказательство теоремы 1 (которое приводит к грубой оценке А) П. Розенблюма связано с теорией Доффина—Шеффера [6, 7] и основывается на известной теореме С. Н. Бернштейна [1] об оценке производной целой функции конечной степени в норме пространства $L_p(-\infty, \infty)$.

В данной работе мы в основном доказываем теорему 2 и некоторые ее следствия, частный случай которых является соответственно обобщением теоремы 1 и ее следствий [11], для норм, содержащих некоторый общий вес. Эта теорема и ее следствия получены с помощью модификации второго доказательства Розенблюма теоремы 1, с использованием одного нашего результата [3], обобщающего теорему С. Н. Бернштейна.

Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) > 0$ определена и непрерывна в n -мерном евклидовом вещественном пространстве

$$\alpha(t) = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \quad (2)$$

$$\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} < t.$$

Пусть далее

$$\int_0^\infty \frac{\ln \alpha(t)}{1+t^2} dt < \infty \quad (3)$$

и

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(n)} = \left\| \frac{f}{\varphi} \right\|_{p, \varphi}^{(n)}. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть f, P, ρ_0, p, φ удовлетворяют вышеуказанным условиям, $\rho = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ и $\beta \geq 0$.

Тогда

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \rho_0^{-1} B(\lambda) (\nu + \lambda)^{m+\beta} \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)} \quad (\nu \geq \nu_0)$$

($\lambda > 0$ произвольное), где $B(\lambda)$ зависит только от $\lambda, \varphi, p, m, \beta$ и для $0 < \lambda_0 \leq \lambda < \infty$ является ограниченной.

Доказательство. Теорему сначала докажем для случая $\beta = 0$ и $n = 1$. Пусть $h > 0$ — любое фиксированное число и x_k произвольно выбраны в интервале $kh \leq x_k \leq (k+1)h, k = 0, \pm 1, \dots$

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{f(x) - f(x_k)}{\varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p} = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{1}{\varphi(x)} \int_{x_k}^x f'(y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \alpha(h) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{kh}^{(k+1)h} |x - x_k|^{p-1} dx \right\} \left\{ \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{f'(y)}{\varphi(y)} \right|^p dy \right\} \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \alpha(h) h p^{-1/p} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^p \right]^{1/p} \|f\|_{p, \varphi}^{(1)} \leq c_p M(\lambda) \alpha(h) h (\nu + \lambda) \|f\|_{p, \varphi}^{(1)},$$

где $c_p = p^{-1/p} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^p \right]^{1/p}$, $M(\lambda)$ не зависит от h, ν, x_k и f . Применяя доказанное неравенство, имеем:

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{f(x_k)}{\varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p} \leq [1 + c_p M(\lambda) \alpha(h) h (\nu + \lambda)] \|f\|_{p, \varphi}^{(1)} \quad (5)$$

и

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(1)} \leq \frac{1}{1 - c_p M(\lambda) \alpha(h) h (\nu + \lambda)} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{f(x_k)}{\varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad (6)$$

если h удовлетворяет условию $1 - c_p M(\lambda) \alpha(h) h (\nu + \lambda) > 0$.

Обозначим через p коэффициент старшего члена полинома $P(x)$ и пусть x_k — точка, в которой модуль этого полинома на отрезке $[kh, (k+1)h]$ достигает своего наибольшего значения. Тогда на основании теоремы Т. Л. Чебышева

$$|P(x_k)| \geq 2p_0 \left(\frac{h}{4} \right)^m.$$

Если выполняется условие $A_h = 1 - c_p M(\lambda) \alpha(h) h (\nu + \lambda) > 0$, на основании (5) и (6) получаем

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(1)} \leq \frac{1}{A_h} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{f(x_k)}{\varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{1}{A_h} \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{P(x_k) f(x_k)}{P(x_k) \varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2p_0 A_h} \left(\frac{4}{h} \right)^m \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} \left| \frac{P(x_k) f(x_k)}{\varphi(x)} \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{2 - A_h}{2p_0 A_h} \left(\frac{4}{h} \right)^m \|P f\|_{p, \varphi}^{(1)}.$$

Таким образом, полагая $h = \frac{1}{\nu + \lambda}$ в случае $\beta = 0, n = 1$ теорему до-

казываем. Чтобы перейти к случаю $\beta = 0$ и произвольному n , повернем координатные оси так, чтобы $|p_0(1, 0, \dots, 0)| = p_0$ и затем применим полученный выше результат к f как функции от z_1 , возведем обе части полученного неравенства в p -ую степень и проинтегрируем по отношению к другим переменным.

Теперь докажем теорему для случая $\beta > 0, P(x_1, \dots, x_n) \equiv 1$. Пусть сначала $\varphi \equiv 1$. Очевидно, что в этом случае $f \in L_p^{(n)}(E_n)$ и поэтому на основании известного неравенства С. М. Никольского [5] f на E_n является ограниченной. Пусть $\mu = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} |f(x_1, \dots, x_n)|$. Тогда, очевидно,

существует точка $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, для которой $|f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \geq \frac{\mu}{2}$.

Далее пусть $h_1, \dots, h_n$ — произвольные вещественные числа и $h = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$. Очевидно, что на основании обобщенного неравенства С. Н. Бернштейна [3] имеем

$$|f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_n^{(0)} + h_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| =$$

$$= \left| \int_0^h \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \xi_n \right] f(x_1^{(0)} + t\xi_1, \dots, x_n^{(0)} + t\xi_n) dt \right| \leq nh\nu\mu,$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — направляющие косинусы направления, соединяющего точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и $(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_n^{(0)} + h_n)$.

Поэтому имеет место неравенство:

$$|f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_n^{(0)} + h_n)| - |f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| \leq nh\nu\mu.$$

Отсюда при $h \leq \frac{\eta}{n\nu}$, где $0 < \eta < \frac{1}{2}$ находим, что

$$|f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})| - \eta\mu \leq |f(x_1^{(0)} + h_1, \dots, x_n^{(0)} + h_n)|.$$

И, следовательно, в шаре Q с центром в точке $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и радиусом $\frac{\eta}{n\nu}$ выполняется неравенство:

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \geq \left(\frac{1}{2} - \eta\right)\mu.$$

Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \|\rho^\beta f\|_p^n &\geq \left(\int_Q |\rho^\beta f|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \geq \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \left(\int_Q \rho^{\beta p} dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p} \geq c_{p,\beta} \frac{\mu}{\nu^{\beta + \frac{n}{p}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть теперь φ — произвольная функция, удовлетворяющая условию теоремы. Мы будем пользоваться одной теоремой В. А. Марченко [3]. Пусть $\lambda > 0$ и

$$\alpha_i(t) = \sup_{\substack{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty \\ |t| \leq 1}} \frac{\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)}.$$

На основании указанной теоремы В. А. Марченко существует целая функция $K_i(x)$ степени 1, удовлетворяющая условиям

$$K_i(0) = 1, \quad Q \leq K_i(\lambda x) \leq \frac{M(\lambda)}{\alpha_i^2(x)} \quad -\infty < x < \infty,$$

где $M(\lambda)$ — величина, зависящая лишь от λ , ограниченная при всяком $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Рассмотрим функцию

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(t_1 + y_1, \dots, t_n + y_n) \prod_{i=1}^n K_i(\lambda y_i)$$

экспоненциального типа $0 \leq \nu$, где $t_1, \dots, t_n$ — произвольные фиксированные числа.

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right)^\beta g(y_1, \dots, y_n) \right|^p dy_1 \dots dy_n \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right)^\beta f(y_1, \dots, y_n) \prod_{i=1}^n K_i(\lambda(y_i - t_i)) \right|^p dy_1 \dots dy_n \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right)^\beta \frac{f(y_1, \dots, y_n)}{\varphi(y_1, \dots, y_n)} \frac{\varphi(y_1, \dots, y_n)}{\varphi(t_1, y_2, \dots, y_n)} \dots \right|^p dy_1 \dots dy_n \end{aligned}$$

$$\dots \frac{\varphi(t_1, \dots, t_{n-1}, y_n)}{\varphi(t_1, \dots, t_n)} \prod_{i=1}^n \frac{M(\lambda)}{\alpha_i^2(y_i - t_i)} \Big|^p dy_1, \dots, dy_n \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \right)^\beta \frac{f(y_1, \dots, y_n)}{\varphi(y_1, \dots, y_n)} \right|^p dy_1, \dots, dy_n \right\} M^{np}(\lambda) \varphi^p(t_1, \dots, t_n).$$

Итак,

$$\|\rho^\beta g\|_p^{(n)} \leq M^n(\lambda) \varphi(t_1, \dots, t_n) \|\rho^\beta f\|_{p,\varphi}^{(n)}. \quad (8)$$

Применим (7) к функции $g(y_1, \dots, y_n)$:

$$|g(y_1, \dots, y_n)| \leq \frac{(\nu + \lambda)^{\beta + \frac{n}{p}}}{c_{p,\beta}} \|\rho^\beta g\|_p.$$

Полагая в последнем $y_i = t_i$ и учитывая, что $K_i(0) = 1$, на основании (8) получим, что

$$|f(t_1, \dots, t_n)| \leq (\nu + \lambda)^{\beta + \frac{n}{p}} \frac{M^n(\lambda)}{c_{p,\beta}} \varphi(t_1, \dots, t_n) \|\rho^\beta f\|_{p,\varphi}^{(n)}. \quad (9)$$

Заметим теперь, что

$$\{\|f\|_{p,\varphi}^{(n)}\}^p = I_1 + I_2, \quad (10)$$

$$I_1 = \int \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\nu + \lambda} \right] \cdot \int \left| \frac{f}{\varphi} \right|^p dx_1 \dots dx_n \leq \frac{\alpha_n}{(\nu + \lambda)^n} \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \left| \frac{f}{\varphi} \right|^p$$

и поэтому на основании (9)

$$I_1^{1/p} \leq c_{p,\varphi}^*(\lambda) (\nu + \lambda)^\beta \|\rho^\beta f\|_{p,\varphi}^{(n)}. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$I_2 = \int \dots \int \left| \frac{f}{\varphi} \right|^p dx_1 \dots dx_n \leq (\nu + \lambda)^{\beta p} \{\|\rho^\beta f\|_{p,\varphi}^{(n)}\}^p \quad (12)$$

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\nu + \lambda}$$

Из (10), (11) и (12) окончательно получаем, что

$$\|f\|_{p,\varphi}^{(n)} \leq B(\lambda) (\nu + \lambda)^\beta \|\rho^\beta f\|_{p,\varphi}^{(n)}, \quad (13)$$

где $B(\lambda)$ не зависит от ν и f .

Таким образом, теорема для случая $\beta > 0, P = 1$ также доказана. Общий случай получается применением доказанных частных случаев.

Действительно, применив неравенство (13) к функции $P(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n)$, получим

$$\|Pf\|_{p,\varphi}^{(n)} \leq B(\lambda) (\nu + \lambda)^\beta \|\rho^\beta Pf\|_{p,\varphi}^{(n)}.$$

К левой части последнего неравенства применим доказанный выше частный случай нашей теоремы, соответствующий случаю $\beta = 0$. Теорема доказана полностью.

Следствие 1. Если в условии теоремы 2 дополнительно потребовать, чтобы $P(x_1, \dots, x_n)$ была неотрицательной в E_n , то

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq p_0^{-1/2} B_1(\lambda)(\nu+\lambda)^{\frac{m}{2}+\beta} \|\rho^\beta P^{1/2} f\|_{p, \varphi}^{(n)}, \quad (14)$$

где $B_1(\lambda)$ получается из $B(\lambda)$, если в ее выражении m заменить на $\frac{m}{2}$.

Конец доказательства теоремы 2 показывает, что следствие 1 достаточно доказать для случая $\beta=0$. Сначала следствие 1 докажем для случая $n=1$, ибо из последнего случая к произвольному n переход осуществляется так же, как и в доказательстве теоремы 2.

Итак, пусть полином $P(x)$ степени m неотрицателен на всей вещественной оси. Тогда полином $P(x)$ может быть представлен на основании теоремы Фейера в виде $|P_1(x)|^2$, где $P_1(x)$ — полином степени $\frac{m}{2}$. Остается применить теорему 2.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 для неотрицательных целых $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, причем $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$, имеет место

$$\left\| \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} P}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right) f \right\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \frac{B_2(\lambda) m!}{(m-2)!} (\nu+\lambda)^{\alpha+\beta} \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)}, \quad (15)$$

причем $B_2(\lambda)$ зависит только от φ, p, m, β и для $0 < \lambda_0 \leq \lambda < \infty$ является ограниченной.

Пусть $n=1$ и z_k ($1 \leq k \leq m$) — нули P . Тогда

$$P'(z) = \sum_{k=1}^m P_k(z), \quad (z - z_k) P_k(z) = P(z).$$

Следовательно, на основании теоремы 2 получим

$$\begin{aligned} \|P' f\|_{p, \varphi}^{(1)} &\leq \sum_{k=1}^m \|P_k f\|_{p, \varphi}^{(1)} \leq B(\lambda) \sum_{k=1}^m (\nu+\lambda)^{\beta+\alpha} \|\rho^\beta (z - z_k) P_k f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \\ &\leq m B(\lambda) (\nu+\lambda)^{\beta+1} \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(1)}. \end{aligned}$$

n -мерный случай следует, как и выше, а повторное применение этого результата для $\beta=0$ приводит к заключению для $\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} P}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ и $\beta > 0$.

Следствие 3. В условиях и обозначениях следствия 2 имеет место

$$\|P_\xi f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq B_p(\lambda) (1 + (\nu+\lambda) |\xi|)^m (\nu+\lambda)^\beta \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)}, \quad (16)$$

где $P_\xi = P(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n)$ и $\xi_1, \dots, \xi_n$ — любые вещественные числа, а $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$.

Если мы повернем координатные оси так, чтобы точка $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ перешла к точке $(|\xi|, 0, \dots, 0)$ и применим формулу Тейлора к P , а после — к каждому члену следствия 2, получим неравенство (16).

Примечание 1. Если не иметь в виду значения множителей $B_i(\lambda)$, все вышеприведенные результаты при $\beta=0$ и $\varphi \equiv 1$ получены Розенблумом в [11] (а более частные случаи этих его результатов принадлежат Хермандеру [9]); при $n=1, \varphi \equiv 1, P \equiv 1$ теорема 2 получена И. И. Ибрагимовым [4] (см. также [2]).

Пользуясь одним нашим (см. [3], теорема 1) неравенством, являющимся обобщением известного неравенства С. М. Никольского [5] о целых функциях конечной степени, теоремой 2, следствиями 1—3 из этой теоремы, а также следующим неравенством:

$$\|F\|_{p'}^{(n)} \leq (\|F\|_{\infty}^{(n)})^{1-\gamma} (\|F\|_{p''}^{(n)})^\gamma, \quad \gamma = \frac{p''}{p'}, \quad 1 \leq p, p'' < p' \leq \infty,$$

соответственно легко доказать следующие утверждения.

1. Если выполняется условие теоремы 2, то

$$\begin{aligned} \|(\rho^\beta P)^{1/2} f\|_{p', \varphi}^{(n)} &\leq p_0^{\gamma-1} c(\lambda)(\nu+\lambda)^{(m+\beta+\frac{n}{p})(1-\gamma)} \times \\ &\times (\|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)})^{1-\gamma} (\|\rho^\beta P f\|_{p'', \varphi}^{(n)})^\gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

2. Если выполняются условия следствия 1 теоремы 2, то

$$\begin{aligned} \|(\rho^\beta P^{1/2})^{1/2} f\|_{p', \varphi}^{(n)} &\leq p_0^{\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}} c(\lambda)(\nu+\lambda)^{(\frac{m}{2} + \mu + \frac{n}{p})(1-\gamma)} \times \\ &\times \left\{ \|\rho^\beta P^{1/2} f\|_{p, \varphi}^{(n)} \right\}^{1-\gamma} \left\{ \|\rho^\beta P^{1/2} f\|_{p'', \varphi}^{(n)} \right\}^\gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Если выполняются условия следствия 2 теоремы 2, то

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} P}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f \right\|_{p', \varphi}^{(n)} &\leq c(\lambda)(\nu+\lambda)^{\frac{n}{p}(1-\gamma) + \alpha + \beta} \times \\ &\times \left\{ \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)} \right\}^{1-\gamma} \left\{ \|\rho^\beta P f\|_{p'', \varphi}^{(n)} \right\}^\gamma. \end{aligned} \quad (19)$$

4. Если выполняются условия следствия 3 теоремы 2, то

$$\begin{aligned} \|P_\xi f\|_{p', \varphi}^{(n)} &\leq c(\lambda)(\nu+\lambda)^{\frac{n}{p}(1-\gamma) + \beta} (1 + (\nu+\lambda) |\xi|)^m \times \\ &\times \left\{ \|\rho^\beta P f\|_{p, \varphi}^{(n)} \right\}^{1-\gamma} \left\{ \|\rho^\beta P f\|_{p'', \varphi}^{(n)} \right\}^\gamma, \end{aligned} \quad (20)$$

где в неравенствах (17)–(20) константа $c(\lambda)$ не зависит от f и ν .

Примечание 2. Пусть $\alpha(t)_s$, определенное выше, удовлетворяет условию $\alpha(t) \leq \sum_{k=0}^s A_k t^k$, где $A_k \geq 0$ — постоянные. В этом случае теорема 2 и ее следствия при $\beta=0$ относительно некоторых констант могут быть уточнены. Так, например, теорема 3 уточняется в следующем виде.

Теорема 3. Пусть $f, \varphi, P, p_0, p, \lambda$ удовлетворяет условию теоремы 2, а $\alpha(t) \leq \sum_{k=0}^s A_k t^k$ ($A_k \geq 0$). Тогда

$$\|f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \frac{2^{2m-1} \alpha(h) h^{m-1} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^p \right]^{1/p} (\nu+\lambda s) M(\lambda)}{p_0 p^{1/p} \left[1 - \alpha(h) h (\nu+\lambda s) \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^p \right] p^{-1/p} M(\lambda) \right]} \|P f\|_{p, \varphi}^{(n)}, \quad (21)$$

где $h > 0$ — произвольное и такое число, что знаменатель в правой части неравенства (21) положителен.

Примечание 3. Доказательство теоремы 2, как легко видеть, позволяет доказать более общий результат, а именно справедлива

Теорема 4. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(s)})$, $\bar{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_{n_i}^{(i)})$,

$n_1 + \dots + n_s = n$, $f(\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(s)})$ — целая функция по совокупности переменных с экспоненциальными типами $\leq \nu_1, \dots, \nu_s$, соответственно, по $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(s)}$ φ и λ удовлетворяют условиям, указанным в теореме 2, $P_i(\bar{x}^{(i)})$ — многочлены не тождественно равны нулю степени m_i ,

$\rho_{oi} = \max_{|\bar{x}^{(i)}| = 1} |P_{oi}(\bar{x}^{(i)})|$, $P_{oi}(\bar{x}^{(i)})$ — однородная часть степени

m_i многочлена $P_i(\bar{x}^{(i)})$,

$\rho_i = |\bar{x}^{(i)}| = \sqrt{(x_1^{(i)})^2 + \dots + (x_{n_i}^{(i)})^2}$, $\beta_i \geq 0$, $1 \leq \rho_i \leq \infty$ — любые числа.

Тогда

$$\|f\|_{\bar{n}, \bar{\rho}, \varphi} \leq c(\lambda) \prod_{i=1}^s \rho_{oi}^{-1} (\nu + \lambda)^{m_i + \beta_i} \left\| \left(\prod_{i=1}^s \rho_i^{\beta_i} P_i \right) f \right\|_{\bar{n}, \bar{\rho}, \varphi},$$

где

$$\|f\|_{\bar{n}, \bar{\rho}, \varphi} = \left\| \left\{ \dots \left\| \left\| \frac{f}{\varphi} \right\|_{\rho_1}^{(n_1)} \right\|_{\rho_2}^{(n_2)} \dots \right\|_{\rho_s}^{(n_s)} \right\|$$

(норма $\|\cdot\|_{\rho_i}^{(n_i)}$ берется по переменному $\bar{x}^{(i)}$), $c(\lambda)$ не зависит от f и $\nu_1, \dots, \nu_s$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.—Л., 1947.
2. Бари Н. К. Изв. АН СССР, серия матем., т. 18, 1954.
3. Джафаров А. С. Изв. ВУЗов (математика), 1960.
4. Ибрагимов И. И. ДАН Азерб. ССР, т. XI, 1955, № 2.
5. Никольский С. М. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 38, 1951.
6. Duffin R., Schaeffer A. Amer. J. Math. 67 (1945), pp. 141—154.
7. Duffin R., Schaeffer A. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), pp. 341—366.
8. Ehrenpreis L. Amer. J. Math. 76. (1954) pp. 883—903; 77 (1955), pp. 286—292.
9. Hörmander L. Acta Math. 94 (1955), pp. 161—248.
10. Malgrange B. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Thèse, Paris (1955).
11. Rosenbloom P. Shomalaisen tiedeakatemia toimituksia Annales academiae Scientiarum Fennicae, Sarja A. Mathematica, 250/31 (1958).

Э. С. Чэфаров

Экспоненциал типли там функција үчүн мүхтәлиф чәкили нормалар арасында бәрабәрсизликләр

ХҮЛАСӘ

Бир-бириндән асылы олмајараг Еренпрајс, Малгранж, Һөрмандер вә онлардан сонра Розенблум p -нин мүхтәлиф гиймәтләри үчүн ашағыдакы теорем исбат етмиш вә ону хүсуси теоремли дифференциал тәнликләре тәтбиг етмишләр.

1-чи теорем. $f(z_1, \dots, z_n)$ өз дәјишәнләринин $\leq \nu$ экспоненциал типли там функцијасы исә, $P(z_1, \dots, z_n)$ ејниликлә сыфыр олмајан чәбри чоххәдли исә, елә $A = A(\nu, P)$ сабити вардыр ки, $1 \leq p \leq \infty$ ол-дугда

$$\|f\|_p \leq A \|Pf\|_p$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Розенблум бу теоремин ики исбатыны вермиш вә бу теоремдән бир сыра нәтичәләр алмышдыр. Һәмин исбатлардан бириндә, A сабити үчүн (1) бәрабәрсизлији алынмышдыр; бурада m , P чоххәдлисинин дәрәчәси, $\rho_0 = \max |p_0(x_2, \dots, x_n)|$, $p_0(x_2, \dots, x_n)$ исә P -нин

дәрәчәси m $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ олан бирчинсли һиссәсидир.

Тутаг ки, $\varphi(x_2, \dots, x_n) > 0$, h —өлчүлү E_n һәгиги евклид фәзасында тәјин олунмуш кәсилмәјән функцијадыр вә онун үчүн (2) функција-сыны дүзәлтсәк, о (3) шәртини өдәјир.

Хүсуси һалда бу ишдә 1-чи теорем (4) бәрабәрлији илә тәјин олунан $\|f\|_{\bar{n}, \bar{\rho}, \varphi}^{(n)}$ нормасы үчүн үмумиләшдирилир вә (14)—(21) шәк-линдә бәрабәрсизликләр исбат олунур; бурада $\lambda > 0$ ихтијари әдәддир, (14) вә (18) бәрабәрсизликләриндә P , E_n фәзасында мәнфи олмајан фәрз олунур, (16) вә (20) бәрабәрсизликләриндә, $P_\xi = P(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n)$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ ихтијари һәгиги әдәдләрди, бүтүн ишдә $\rho = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$, $\beta \geq 0$.

Г. Н. АГАЕВ и Г. М. ДЖАФАРЛИ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

В теории ортогональных систем функций важное место занимают мультипликативные системы, т. е. системы, обладающие свойством замкнутости относительно операции умножения и комплексного сопряжения.

Классическими примерами мультипликативных систем служат системы функций Уолша, Прайса, Иессена [3, 4] и др.

Наряду с другими вопросами в теории ортогональных рядов особое значение приобретает построение полных ортонормированных мультипликативных систем, обладающих свойством замкнутости относительно операции извлечения корня. На существование такой системы указал Н. Я. Виленкин [1]. В работе [2] построен один класс таких систем функций на отрезке $[0, 1]$ и подробно изучены их основные свойства. Эта система строится на базе произвольного простого числа p и функций вида:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_n(x) &= e^{\frac{2\pi i x'}{p^n}},\end{aligned}\quad (1)$$

где $x' = x_0 + x_1 p + \dots + x_n p^n + \dots$ есть p -адическое число, соответствующее p -ичной дроби $x = 0, x_0 x_1 \dots x_n \dots$ из отрезка $[0, 1]$. Система (1) пополняется путем включения в нее всевозможных произведений самих функций этой системы. А именно, для любого $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$ на отрезке $[0, 1]$ строится семейство функций:

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= 1, \\ \psi_n(x) &= \varphi_1^{a_0}(x) \varphi_2^{a_1}(x) \dots \varphi_{s+1}^{a_s}(x).\end{aligned}\quad (2)$$

Система функций (2) ортонормированна, мультипликативна, замкнута относительно операций извлечения корня любой степени, полна в пространстве $L(0, 1)$ и является системой характеров в группе p -адических чисел.

Цель настоящей статьи — построение одного более общего класса мультипликативной системы кусочно-постоянных функций, замкнутой относительно операции извлечения корня любой степени.

Г. Н. АГАЕВ и Г. М. ДЖАФАРЛИ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

В теории ортогональных систем функций важное место занимают мультипликативные системы, т. е. системы, обладающие свойством замкнутости относительно операции умножения и комплексного сопряжения.

Классическими примерами мультипликативных систем служат системы функций Уолша, Прайса, Иессена [3, 4] и др.

Наряду с другими вопросами в теории ортогональных рядов особое значение приобретает построение полных ортонормированных мультипликативных систем, обладающих свойством замкнутости относительно операции извлечения корня. На существование такой системы указал Н. Я. Виленкин [1]. В работе [2] построен один класс таких систем функций на отрезке $[0, 1]$ и подробно изучены их основные свойства. Эта система строится на базе произвольного простого числа p и функций вида:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1, \\ \varphi_n(x) &= e^{\frac{2\pi i x'}{p^n}},\end{aligned}\quad (1)$$

где $x' = x_0 + x_1 p + \dots + x_n p^n + \dots$ есть p -адическое число, соответствующее p -ичной дроби $x = 0, x_0 x_1 \dots x_n \dots$ из отрезка $[0, 1]$. Система (1) пополняется путем включения в нее всевозможных произведений самих функций этой системы. А именно, для любого $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$ на отрезке $[0, 1]$ строится семейство функций:

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= 1, \\ \psi_n(x) &= \varphi_1^{a_0}(x) \varphi_p^{a_1}(x) \dots \varphi_{p^s}^{a_s}(x).\end{aligned}\quad (2)$$

Система функций (2) ортонормированна, мультипликативна, замкнута относительно операций извлечения корня любой степени, полна в пространстве $L(0, 1)$ и является системой характеров в группе p -адических чисел.

Цель настоящей статьи — построение одного более общего класса мультипликативной системы кусочно-постоянных функций, замкнутой относительно операции извлечения корня любой степени.

1.° **Построение системы.** Пусть задана последовательность целых чисел $\{\alpha(n)\}$, где $\alpha(n) \geq 2$ при любом целом $n \geq 0$. Не теряя общности, мы можем считать все числа $\alpha(n)$ простыми.

Введем функцию $A(n)$ целочисленного аргумента с помощью соотношения:

$$A(0)=1, \\ A(n)=\alpha(0)\alpha(1)\dots\alpha(n-1).$$

Положим при $n \geq k$ $\frac{A(n)}{A(k)} = B_k(n).$

Ясно, что $B_k(n) = \alpha(k)\alpha(k+1)\dots\alpha(n-1).$

Рассмотрим систему функции

$$\Phi_n(x) = e^{\frac{2\pi i x'}{A(n)}},$$

где $x' = x_1 A(1) + \dots + x_n A(n) + \dots$

соответствует числу $x = \frac{x_0}{A(1)} + \frac{x_1}{A(2)} + \dots + \frac{x_{n-1}}{A(n)} + \dots$ $0 \leq x_n \leq \alpha(n)-1$,

взятому из отрезка $[0,1]$. Выразим каждое n в системе счисления $A(n)$:

$$n = a_0 + a_1 A(1) + a_2 A(2) + \dots + a_s A(s),$$

где $0 \leq a_k < \alpha_k$, $k=0, 1, 2, \dots, s$.

Ясно, что при этом для каждого n коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_s$ определяются единственным образом.

Отметим некоторые важные свойства системы $\{\Phi_n(x)\}$.

На отрезке вида

$$\frac{x_0 B_1(n) + \dots + x_{n-2} B_{n-1}(n) + x_{n-1}}{A(n)} \leq x < \\ < \frac{x_0 B_1(n) + \dots + x_{n-2} B_{n-1}(n) + x_{n-1} + 1}{A(n)}.$$

Функции $\Phi_n(x)$ имеют вид

$$\Phi_n(x) = e^{\frac{2\pi i (x_{n-1} A(n-1) + \dots + x_1 A(1) + x_0)}{A(n)}} \quad (3)$$

Ясно, что

$$(\Phi_n(x))^{\alpha(n-1)} = \Phi_{n-1}(x), \quad (4) \\ \Phi_n(x) = e^{\frac{2\pi i k}{\alpha(n-1)}} \text{ на отрезке } \left[\frac{k}{A(n)}, \frac{k+1}{A(n)} \right]. \\ k=0, \dots, \alpha(n-1)-1.$$

Легко проверить ортонормированность $\{\Phi_n(x)\}$ на $[0,1]$. Эта система неполна и не замкнута относительно операции умножения. Для построения системы, обладающей этими свойствами, дополним систему $\{\Phi_n(x)\}$ следующими функциями:

$$\Psi_n(x) = \Phi_1^{a_0}(x) \Phi_2^{a_1}(x) \dots \Phi_{s+1}^{a_s}(x), \quad (5)$$

где $n = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_s A(s)$, $0 \leq a_k \leq \alpha(k)-1$, $k=0, 1, \dots, s$.

Отметим, что если $\alpha(k)=p$, где p —простое, $k=0, 1, \dots$ из системы функций (5) получается система (2).

Докажем справедливость отмеченных свойств системы функций (5). Ортогональность построенной системы $\{\Psi_n(x)\}$ непосредственно вытекает из следующей леммы*.

Лемма 1. Для любых целых неотрицательных чисел $m_1, \dots, m_n$, из коих m_n не делится на $\alpha(n-1)$, имеет место тождество:

$$I_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \int_0^1 \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_n^{m_n}(x) dx = 0.$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на отрезки вида

$$\left[\frac{k}{A(n)}, \frac{k+1}{A(n)} \right], \text{ где } k=0, 1, \dots, \alpha(n-1)-1.$$

Имеем

$$I_{m_1, \dots, m_n} = \frac{k_0 B_1(n) + \dots + k_{n-2} B_{n-1}(n) + k_{n-1} + 1}{A(n)} \int \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_n^{m_n}(x) dx \\ = \sum_{k_0=0}^{\alpha(0)-1} \sum_{k_1=0}^{\alpha(1)-1} \dots \sum_{k_{n-1}=0}^{\alpha(n-1)-1} \frac{k_0 B_1(n) + \dots + k_{n-2} B_{n-1}(n) + k_{n-1}}{A(n)} \int \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_n^{m_n}(x) dx$$

$$\text{или } I_{m_1, \dots, m_n} = \sum_{k_0=0}^{\alpha(0)-1} \sum_{k_1=0}^{\alpha(1)-1} \dots \sum_{k_{n-2}=0}^{\alpha(n-2)-1} \Phi_1^{m_1}(x) \dots \Phi_{n-1}^{m_{n-1}}(x) \times \\ \times e^{\frac{2\pi i (k_{n-2} A(n-2) + \dots + k_1 A(1) + k_0)}{A(n)}} \cdot \frac{1}{A(n)} \sum_{k_{n-1}=0}^{\alpha(n-1)-1} e^{\frac{2\pi i m_n k_{n-1}}{\alpha(n-1)}}.$$

$$\text{Вычислим сумму: } s = \frac{1}{A(n)} \sum_{k_{n-1}=0}^{\alpha(n-1)-1} e^{\frac{2\pi i m_n k_{n-1}}{\alpha(n-1)}}.$$

Докажем, что $s=0$. Это будет достаточным для доказательства леммы.

Так как m_n не делится на $\alpha(n-1)$, то

$$s = \frac{1 - e^{\frac{2\pi i m_n}{\alpha(n-1)}}}{1 - e^{\frac{2\pi i m_n}{\alpha(n-1)}}} = 0.$$

Легко проверить, что доказанная лемма остается в силе, если подинтегральная функция содержит сомножители, сопряженные некоторым $\Phi_i(x)$.

2.° **Ортогональность системы.** Докажем, что система функций (5) является ортонормированной на отрезке $[0, 1]$. В самом деле, пусть $\Psi_k(x), \Psi_l(x)$ ($k \neq l$)—суть произвольные элементы семейства функций (5).

Пользуясь представлением (5), найдем представления для $\Psi_k(x)\Psi_l(x)$, предварительно произведя некоторые необходимые упрощения с помощью формулы (4). При этом будем иметь

$$\Psi_k(x)\Psi_l(x) = \Phi_1^{m_1}(x) \Phi_2^{m_2}(x) \dots (\overline{\Phi_i(x)})^{m_i} \dots (\overline{\Phi_j(x)})^{m_j} \dots \Phi_s^{m_s}(x),$$

* Отметим, что указанная лемма имеет места также для любых $m_1, m_2, \dots, m_n$, не делящихся, соответственно на $\alpha(0), \dots, \alpha(n-1)$.

где $0 \leq m_n \leq \alpha(n-1)-1$, $n=1, 2, \dots, s$.
Так как $k \neq l$, то хотя бы один из m_n отличен от нуля. В силу леммы 1 при $k \neq l$, мы получим

$$\int_0^1 \Psi_k(x) \overline{\Psi_l(x)} dx = \\ = \int_0^1 \Phi_1^{m_1}(x) \Phi_2^{m_2}(x) \dots (\overline{\Phi_1(x)})^{m_1} \dots (\overline{\Phi_j(x)})^{m_j} \dots \Phi_s^{m_s}(x) dx = 0,$$

что показывает ортогональность системы $\{\Psi_n(x)\}$.

Легко проверить также нормированность системы функций (5).

3°. Мультипликативность системы. Система функций $\{\Psi_n(x)\}$ мультипликативна. В самом деле, с помощью представления (5) и свойств (4) для двух функций $\Psi_k(x) \Psi_l(x)$ системы имеем:

$$\Psi_k(x) \Psi_l(x) = \Phi_1^{b_k}(x) \Phi_2^{b_l}(x) \dots \Phi_{n+1}^{b_n}(x) = \Psi_m(x),$$

где $0 \leq b_k \leq \alpha(k-1)-1$, $k=0, 1, \dots, h$, $m=b_0+b_1A(1)+\dots+b_nA(n)$,

что означает замкнутость относительно операций умножения системы функции (5).

Покажем теперь, что вместе с функцией $\Psi_n(x)$ системе принадлежит и функция $\frac{1}{\Psi_n(x)} = \overline{\Psi_n(x)}$.

Для этого достаточно установить, что указанным свойством обладают образующие $\Phi_n(x)$ системы функций (5). Пусть $\Phi_n(x)$ определяется формулой (3). В силу (4) имеем:

$$\frac{1}{\Phi_n(x)} = (\Phi_1(x))^{\alpha(0)-1} \cdot (\Phi_2(x))^{\alpha(1)-1} \dots (\Phi_{n-1}(x))^{\alpha(n-2)-1} (\Phi_n(x))^{\alpha(n-1)-1}$$

который показывает, что $\frac{1}{\Phi_n(x)}$ принадлежит системе $\{\Psi_n(x)\}$.

Тем самым доказана мультипликативность системы $\{\Psi_n(x)\}$.

4°. Замкнутость системы относительно операции извлечения корня. Замкнутость системы функций (5) относительно операции умножения мы указали для любой последовательности $\{\alpha(n)\}$ лишь при условии $\alpha(n) \geq 2$.

Для доказательства же замкнутости относительно извлечения корня требуется $\alpha(n)$ подчинять дополнительным условиям. Имеет место:

Теорема. Пусть каждое простое число p либо совсем не входит в последовательность $\{\alpha(n)\}$, либо входит в нее бесконечно много раз. Тогда система функций (5) замкнута относительно извлечения корня любой степени.

Доказательство. Справедливость этой теоремы достаточно проверить над образующими функциями (3). Итак, пусть простое число p бесконечно много раз входит в последовательность $\{\alpha(n)\}$. Тогда ясно, что найдется $\alpha(k)=p$ такое, что $k > n$. Пусть, например, $k=n+t$. Тогда $\Phi_k(x)$ в последовательности $\{\Phi_j(x)\}$ идет после последнего Φ_n , причем

$$\Phi_{k+1}^p(x) = \Phi_k(x).$$

Далее, так как $[\Phi_k(x)]^{B_n(k)} = \Phi_n(x)$, то $\Phi_n(x) = [\Phi_{k+1}^{B(k)}(x)]^p$.

Следовательно, в этом случае система функций (3) замкнута относительно операции извлечения корня p -ой степени. Аналогично доказывается замкнутость системы функций (5) относительно извлечения корня любой q -ой степени [2].

Докажем теперь первую часть теоремы.

Если p не равно ни одному $\alpha(k)$, значит p взаимно простое с $A(n)$. Поэтому разрешимо сравнение $pq \equiv 1 \pmod{A(n)}$.

Кроме того, $\Phi_n^{A(n)}(x) \equiv 1$. А тогда

$$[\Phi_n^q(x)]^p = [\Phi_n(x)]^{pq} = [\Phi_n(x)]^{A(n)+1} = \Phi_n(x),$$

что и требовалось доказать.

5°. Топологическая группа формальных рядов. С целью изучения других свойств построенной системы $\{\Psi_n(x)\}$ рассмотрим множество G всевозможных формальных рядов

$$a_0 + a_1A(1) + a_2A(2) + \dots + a_nA(n) + \dots, \quad (6)$$

где $0 \leq a_k \leq \alpha(k-1)-1$, и превратим это множество в топологическую группу.

1) сложение в G определим следующим образом:

почленно складывая два ряда вида (6) с коэффициентами a_k, b_k , соответственно, по mod $A(k)$, получим ряд

$$c_0 + c_1A(1) + \dots + c_nA(n) + \dots, \quad (7)$$

который и назовем суммой двух указанных элементов множества G . Относительно такой операции сложения множество G становится коммутативной группой.

2) введем в G топологию с помощью системы окрестностей: последовательность $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, соответствующую элементу $\bar{G}$:

$$a_0 + a_1A(1) + \dots + a_nA(n) + \dots$$

назовем точкой $\bar{G}$.

Рассмотрим множество $U_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$ всевозможных точек вида $(a_0, a_1, \dots, a_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$, в которых $a_0, a_1, \dots, a_n$ фиксированы, а $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ произвольно меняются в допустимых отрезках $[0, \alpha(j-1)-1]$, $j=n+1, n+2, \dots$. Определим $U_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ как n -ю окрестность точки $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. При этом мы получаем систему окрестностей $U_n(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ точки $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$.

Легко проверить, что определенная таким образом система окрестностей образует базис в G , а следовательно порождает топологию в G . Этим самым группа G с введенной топологией становится топологической коммутативной группой. В частности, n -я окрестность нуля состоит из всевозможных рядов вида: $0+0 \cdot A(1)+0 \cdot A(2)+\dots+0 \cdot A(n)+x_{n+1}A(n+1)+\dots$, каждый из которых делится на все $\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n)$ и на их всевозможные произведения.

3) далее введем в эту группу меру. Меру всей группы примем за единицу. Меру множества $\{a+U_n\}$, где $a+U_n$ есть множество всех элементов вида $a+u$ (u пробегает все U_n), определим $\frac{1}{A(n)}$. Отметим,

что система множества $\{a+U_n\}$ является полукольцом. Мера любого измеримого множества A определяется обычным образом. Определенная таким образом мера порождает свойство инвариантности меры любого измеримого множества A при сдвигах, т. е. $f(A) = f(a+A)$.

6. Модифицированный отрезок $[0, 1]$. Установим соответствия между элементами группы G и действительными числами отрезка $[0, 1]$. Каждому элементу

$$a = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_n A(n) + \dots$$

из G сопоставим число $\frac{a_0}{A(1)} + \frac{a_1}{A(2)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{A(n)} + \dots$

из отрезка $[0, 1]$. Это сопоставление осуществляет отображение группы G на отрезок $[0, 1]$. Такое отображение, очевидно, не взаимно-однозначно

В самом деле, два различных элемента из G

$$a_0 + a_1 A(1) + a_2 A(2) + \dots + a_n A(n), \\ a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_{n-1} A(n-1) + (a_n - 1) A(n) + (\alpha(n+1) - 1) A(n+1) + \\ (\alpha(n+2) - 1) A(n+2) + \dots$$

при таком отображении переходят в одно и то же действительное число

$$\frac{a_0}{A(1)} + \frac{a_1}{A(2)} + \dots + \frac{a_n}{A(n+1)} \text{ отрезка } [0, 1].$$

Но множество таких чисел счетно. Точки отрезка $[0, 1]$, каждый из которых соответствует двум различным элементам G , назовем A -рациональными. Ясно, что все функции вида (5), а также функции, представимые в сходящийся ряд по этим функциям, могут иметь в A -рациональных точках разрывы первого рода. Для устранения этих разрывов, а также для других целей установим взаимно-однозначное соответствие между элементами G и отрезка $[0, 1]$.

Для этой цели заменим отрезок $[0, 1]$ множеством более сложной природы, а именно: каждую точку вида $\frac{k}{A(n)}$ зачтем два раза — как

правый конец отрезка $\left[\frac{k-1}{A(n)}, \frac{k}{A(n)}\right]$ и как левый конец отрезка $\left[\frac{k}{A(n)}, \frac{k+1}{A(n)}\right]$. Полученное при этом множество назовем модифицированным отрезком $[0, 1]$, который будет топологическим пространством, если за базисное множество взять всевозможные интервалы с A -рациональными концами. Следует также отметить, что каждая функция вышеуказанного семейства на модифицированном отрезке становится непрерывной, а отображение группы G на модифицированный отрезок будет изоморфным. Легко проверить, что указанное отображение также сохраняет меру. Мера Хаара в G переходит в меру Лебега на отрезке $[0, 1]$.

Теперь введем понятия обобщенного сложения чисел модифицированного отрезка $[0, 1]$. Пусть дано два произвольных числа:

$$a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

и

$$b = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

отрезка $[0, 1]$, которые соответствуют следующим элементам G :

$$a' = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_n A(n) + \dots, \\ b' = b_0 + b_1 A(1) + \dots + b_n A(n) + \dots$$

Для сложения чисел a и b отрезка $[0, 1]$ сначала сложим соответствующие им элементы a' и b' группы G . Пусть c' является суммой этих элементов:

$$c' = c_0 + c_1 A(1) + \dots + c_n A(n) + \dots,$$

затем находим число $c = 0, c_0 c_1 \dots c_n \dots$ отрезка $[0, 1]$, соответствующее элементу c' группы G . При этом полученное число c назовем обобщенной суммой чисел a и b и обозначим это так: $c = a \dot{+} b$.

Аналогично определяется обобщенное вычитание.

После введения операции обобщенного сложения отрезок $[0, 1]$ становится коммутативной группой. Поэтому обобщенное сложение обладает свойством обычного сложения чисел.

Кроме того, из определения обобщенного сложения вытекает, что если число b лежит на отрезке $\left[0, \frac{1}{A(n)}\right]$, то число $a \dot{+} b$ лежит на том же отрезке $\left[\frac{k}{A(n)}, \frac{k+1}{A(n)}\right]$, на котором лежит точка a .

7. Система функций как система характеров. Как видим, модифицированный отрезок при введенной выше топологии есть также коммутативная топологическая группа.

Теперь докажем, что построенная система $\{\Psi_n(x)\}$ является системой характеров на коммутативной топологической группе — модифицированном отрезке, т. е. функции (5) являются непрерывными на указанной топологической группе и выполняются условия: для любых a и b , лежащих на модифицированном отрезке, имеет место

$$\Psi_n(a \dot{+} b) = \Psi_n(a) \Psi_n(b) \\ |\Psi_n(a)| = 1. \quad (8)$$

Так как остальные свойства $\Psi_n(x)$ очевидны, докажем свойства (8). Для этого достаточно указанное свойство доказать для систем образующих функций $\{\Phi_n(x)\}$. В самом деле, пусть $a, b \in [0, 1]$

$$a = \frac{a_0}{A(1)} + \frac{a_1}{A(2)} + \dots + \frac{a_{n-1}}{A(n)} + \dots$$

$$b = \frac{b_0}{A(1)} + \frac{b_1}{A(2)} + \dots + \frac{b_{n-1}}{A(n)} + \dots,$$

тогда соответствующие числа в системы $A(n)$ будут

$$a' = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_n A(n) + \dots$$

$$b' = b_0 + b_1 A(1) + \dots + b_n A(n) + \dots$$

По определению

$$\Phi_n(a) = e^{\frac{2\pi i a'}{A(n)}} \Phi_n(b) = e^{\frac{2\pi i b'}{A(n)}}.$$

Следовательно,

$$\Phi_n(a) \Phi_n(b) = e^{\frac{2\pi i (a' + b')}{A(n)}} = \Phi_n(a \dot{+} b).$$

8. Полнота системы. Докажем, что система $\{\Psi_n(x)\}$ полна относительно пространства абсолютно интегрируемых функций на отрезке $[0, 1]$, т. е. докажем, что если для функции $f(x) \in L(0, 1)$

$$\int_0^1 f(x) \overline{\Psi_n(x)} dx = 0$$

имеет место для любой функции (5), то $f(x)$ равна нулю почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для функций (5) и для любого номера $A(s)$ имеет место тождество.

$$\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi_j(x) = \begin{cases} A(s) & \text{если } 0 \leq x < \frac{1}{A(s)} \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Доказательство. Сначала докажем первую часть леммы.

Пусть $x \in [0, \frac{1}{A(s)}]$. В этом случае для любого $k < s$ $\Phi_k(x) \equiv 1$ и

$\Phi_{k+1}(x) \equiv 1$, так как $k+1 \leq s$.

Следовательно, для любого $j < A(s)$, где

$j = b_0 + b_1 A(1) + \dots + b_k A(k)$, $k < s$,

имеет место $\Psi_j(x) = \Phi_{b_0}^{b_0}(x) \Phi_{b_1}^{b_1}(x) \dots \Phi_{b_k}^{b_k}(x) \equiv 1$.

Итак, в этом случае имеем:

$$\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi_j(x) = A(s).$$

Если же $\frac{1}{A(s)} \leq x < 1$, то $\sum \Psi_j(x) \equiv 0$ при $0 \leq j \leq A(s)-1$.

Для этого достаточно доказать указанное утверждение для x , лежащих на отрезке $[\frac{1}{A(q)}, \frac{1}{A(q-1)}]$, где q — любое натуральное число $\leq s$.

Преобразуем сумму $\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi_j(x)$ следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi_j(x) = \sum_{l=0}^{A(q)-1} \sum_{t=0}^{B_q(s)} \Psi_{A(q)t+l}(x) \text{ в соответствии с}$$

$$j = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_{q-1} A(q-1) + a_q A(q) + a_{q+1} A(q+1) + \dots + a_s A(s) = \\ = l + A(q)[a_q + a_{q+1} B_q(q+1) + a_{q+2} B_q(q+2) + \dots + a_s B_q(s)] = A(q)t + l, \\ l = a_0 + a_1 A(1) + \dots + a_{q-1} A(q-1), \quad t = a_q + a_{q+1} B_q(q+1) + \dots + a_s B_q(s).$$

Так как $\Psi_j(x) = \Psi_{A(q)t+l}(x) = \Psi_t(x) \cdot F_t(x)$,

где $F_t(x) = \Phi_{a_q+1}^{a_q}(x) \dots \Phi_{a_s+1}^{a_s}(x)$, то

$$\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi_j(x) = \sum_{t=0}^{B_q(s)-1} F_t(x) \sum_{l=0}^{A(q)-1} \Psi_l(x).$$

Докажем, что при $\frac{1}{A(q)} \leq x < \frac{1}{A(q-1)}$ имеет место тождество

$\sum_{l=0}^{A(q)-1} \Psi_l(x) = 0$, что будет достаточным для справедливости нашего утверждения.

В самом деле, $\sum_{l=0}^{A(q)-1} \Psi_l(x) = \sum_{m=0}^{A(q-1)-1} \sum_{t=0}^{A(q-1)-1} \Psi_{A(q-1)m+t}(x)$, где $a_k \leq a(k-1)-1$.

Так как $\Psi_{A(q-1)m+t}(x) = \Psi_t(x) \cdot \Phi_q^m(x)$,

$$\text{то } \sum_{l=0}^{A(q)-1} \Psi_l(x) = \sum_{t=0}^{A(q-1)-1} \Psi_t(x) \sum_{m=0}^{A(q-1)-1} \Phi_q^m(x) = \\ = \sum_{t=0}^{A(q-1)-1} \Psi_t(x) \frac{1 - \Phi_q^{A(q-1)}(x)}{1 - \Phi_q(x)} = \sum_{t=0}^{A(q-1)-1} \Psi_t(x) \frac{1 - \Phi_{q-1}(x)}{1 - \Phi_q(x)} = 0,$$

ибо $\Phi_{q-1}(x) = 1$, а $\Phi_q(x) \neq 1$ для $\frac{1}{A(q)} \leq x < \frac{1}{A(q-1)}$.

Аналогично ведется доказательство леммы для оставшейся части отрезка $[\frac{1}{A(s)}, 1]$.

Следствие. Для любого номера $A(s)$ имеет место равенство:

$$\sum_{j=0}^{A(s)-1} \Psi(x \div a) = \begin{cases} A(s), & \text{если } x \text{ и } a \text{ лежат на одном и том же отрезке} \\ & \text{вида } \left[\frac{k}{A(s)}, \frac{k+1}{A(s)} \right] \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases}$$

В самом деле, по определению обобщенного вычитания точка $x \div a$ принадлежит отрезку $[0, \frac{1}{A(s)}]$ тогда и только тогда, когда x и a

принадлежат одному и тому же отрезку $[\frac{k}{A(s)}, \frac{k+1}{A(s)}]$.

Применяя следствие леммы 2, можно установить полноту построенной системы $\{\Psi_n(n)\}$. Итак, пусть $f(x) \in L(0,1)$ и пусть

$$\int_0^1 f(t) \cdot \Psi_n(t) dt = 0 \text{ для любого } n.$$

Тогда ясно, что для любого $x \in [0,1]$ и n будет иметь место соотношение:

$$\int_0^1 f(t) \Psi_n(t \div x) dx = 0,$$

$$\text{а также } \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^{A(s+1)-1} \Psi_n(t \div x) dx = 0. \quad (9)$$

В силу леммы 2 соотношение (9) принимает вид

$$A(s) \int_x^{x+\frac{1}{A(s)}} f(t) dt = 0. \quad (10)$$

Перейдем в (10) к пределу при $s \rightarrow \infty$.
Мы почти для всех x из $[0,1]$ будем иметь

$$\lim_{s \rightarrow \infty} A(s) \int_x^{x+\frac{1}{A(s)}} f(t) dt = f(x).$$

Следовательно, $f(x) \equiv$ почти всюду на отрезке $[0,1]$.
Авторы выражают глубокую благодарность Н. Я. Виленкину за ценные советы при оформлении данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Дополнения в книге Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
2. Джафарли Г. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и тех. наук, 1961, №6.
3. Качмаж С. и Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
4. Price I. Certain groups of orthonormal step functions. Canadian Journ. of Math. 9 (1957).

Н. Н. Агаев, Г. М. Чэфэрли

Бир мултипликатив ортонормал функцијалар системи наггында

ХҮЛАСЭ

Ортогонал функцијалар нэзэријјэсиндэ мултипликативлик хассэ, синэ малик системлэрин хүсуси эһэмијјэти вардыр. Белэ системлэрин Фурје нэзэријјэси тригонометрик функцијалар системинин Фурје нэзэријјэсинэ јахын олса да, онларын өзүнэ мэхсус фэрди [хүсуси]јэтлэри вардыр.

Мултипликатив ортонормал системлэрэ мисал олараг Уолш, Прајс-Иессен вэ башга бу кими системлэри көстөрмөк олар. Мә'лум олду-гуна көрө, бу системлэр ортонормал, там вэ вурма әмәлинэ көрө гапалыдыр. Лакин онлар көкалма әмәлинэ көрө гапалы дејилдир. Ејни заманда һәм вурма вэ һәм дә көкалма әмәлинэ көрө гапалы системлэри өјрәнмөк мултипликатив ортогонал системлэр нэзэријјэсинин актуал мәсәлэләриндән биридир. Г. М. Чэфэрли [2] һәммин шәртлэрә табе олан бир синиф функцијалар системи гурмушдур. һәммин функцијалар системи мәгаләдә (2) дүстуру васитәсилә верилмишдир.

Мәгаләдә көкалма әмәлинэ көрө гапалы олан дикәр даһа үмуми мултипликатив ортонормал системлэрин гурулмасындан бәһс едилир. һәммин системлэр мәгаләдә (3) дүстуру васитәсилә көстәрилмишдир. Системин ортонормаллығы, мултипликативлији, көкалма әмәлинэ көрө гапалылығы вэ тамлығы исбат едилмишдир. Ејни заманда көстәрилмишдир ки, (5) дүстуру илә тәјин олунмуш функцијалар системи элементлэри (6) сыралары шәклиндә олан мүәјјән топологији групун характерлэри системиндән ибарәтдир.

А. А. НОВРУЗОВ

ТЕОРЕМЫ ТИПА АДАМАРА И ФРАГМЕНА—ЛИНДЕЛЕФА

§ 1. В этой работе обобщаются некоторые результаты авторов [2, 3, 4, 5, 7, 8, 9]. В дальнейшем нам пригодятся две леммы из теории функций действительного переменного, принадлежащие Е. М. Ландису. Приведем эти леммы без доказательства.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ —функция одного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$, монотонно не убывает. Пусть $\alpha > 0$ некоторая константа, k —натуральное число и

$$0 < f(x) < \alpha(b-a)^k.$$

Пусть E —множество точек $x \in [a, b]$ таких, что

$$f'(x) \leq \frac{2^8 k \alpha^{\frac{1}{2k}} f(x)^{\frac{2k-1}{2k}}}{(b-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$\text{mes} E > \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)(b-a).$$

Лемма 2. Пусть $f(x)$ —непрерывная функция одного переменного, заданная на отрезке $[a, b]$. Пусть $f(x) > 0$ и $f(a), f(b) < \alpha(b-a)^k$, где α —некоторое положительное, а k —натуральное число. Тогда найдутся неперекрывающиеся отрезки $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_s, b_s]$, принадлежащие отрезку $[a, b]$ такие, что:

$$1) \frac{1}{2} f(a_i) \leq f(b_i) \leq 2 f(a_i), \quad i=1, 2, \dots, s;$$

$$2) f(x) \geq \min(f(a_i), f(b_i)) \text{ при } a_i < x < b_i;$$

$$3) b_i - a_i > \frac{(b-a)^{\frac{1}{2}}}{2'' \cdot k \cdot \alpha^{\frac{1}{2k}}} f^{\frac{1}{2k}}(x);$$

$$4) \sum_{i=1}^s (b_i - a_i) > \frac{b-a}{4}.$$

§ 2. В этом параграфе доказывается одна изопериметрическая лемма. Затем с ее помощью доказывается одно важное неравенство при более общих предположениях, чем в работе [4], и несколько иначе. Эти факты будут существенно использованы в начале координат.

Пусть K_R — n -мерный шар радиуса R с центром в начале координат O и G — область, лежащая внутри K_R , имеющая предельные точки на границе K_R и содержащая начало координат O . Пусть в G определена непрерывно дифференцируемая функция $U(x)$, где $x = x_1, x_2, \dots, x_n$. И, наконец, пусть $U(x)$ обращается в нуль на той части границы G , которая строго лежит внутри K_R и

$$\text{mes}_n G < \frac{R^n}{M}, \quad (1)$$

где M — достаточно большая константа. Пусть $\max_{x \in \bar{G}} U(x) = 2U_0$, где U_0 — положительное число. Обозначим через E_t множество уровня $t \in [0, 2U_0]$ функции $U(x)$.

Пусть G_t^+ — совокупность точек $x \in G$, для которых

$$U(x) > t \text{ и } G_t^+ = K_r \cdot G_t, \quad r \in [0, R],$$

$$E_t^+ = K_r \cdot E_t, \quad G(t, r) = \text{mes}_n G_t^+, \quad E(t, r) = \text{mes}_{n-1} E_t^+.$$

Рассмотрим функции $E(t, r)$ и $G(t, r)$ при любом фиксированном $t \in [0, 2U_0]$ как функции одного переменного r на отрезке $[0, R]$.

Лемма 3. Существует константа $\alpha_0 > 0$ (зависящая от константы M неравенства (1) и множество $H_t \subset [0, R]$, имеющее меру больше $(1 - \frac{1}{2^7})R$, такие, что при всех $r \in H_t$ имеет место неравенство:

$$E(t, r) > \alpha_0 [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Доказательство. Обозначим через S_t^+ границу множества G_t^+ и через S_r границу шара K_r . Очевидно, что $S_t^+ = E_t^+ + g_t^+$, где $g_t^+ = S_r \cdot G_t^+$.

Далее по известной теореме имеем

$$S(t, r) > [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}}, \quad (2)$$

где

$$S(t, r) = \text{mes}_{n-1} S_t^+ \text{ и } g(t, r) = \text{mes}_{n-1} g_t^+.$$

Очевидно, что

$$G(t, r) = \int_0^r g(t, \xi) d\xi$$

или

$$\frac{dG(t, r)}{dr} = g(t, r). \quad (3)$$

В силу неравенства (1) имеем

$$0 < G(t, r) < \frac{R^n}{M}. \quad (4)$$

Итак, функция $G(t, r)$ на отрезке $[0, R]$ удовлетворяет всем условиям леммы 1 § 1. Поэтому существует множество $H_t \subset [0, R]$, имеющее меру больше $(1 - \frac{1}{2^7})R$, такое, что при $r \in H_t$

$$\frac{dG}{dr} \leq \frac{2^8 n [G(t, r)]^{\frac{2n-1}{2n}}}{M^{\frac{1}{2n}} R^{\frac{1}{2}}}$$

или в силу (3),

$$\frac{dG}{dr} \leq \frac{2^8 n \cdot G^{\frac{n-1}{n}}}{M^{\frac{1}{n}}}. \quad (5)$$

Учитывая (3) и (5), из неравенства (2) имеем

$$E(t, r) > [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}} - \frac{2^8 \cdot n \cdot [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}}}{M^{\frac{1}{n}}} = \alpha_0 [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}},$$

где $\alpha_0 = 1 - \frac{2^8 \cdot n}{M^{\frac{1}{n}}} > 0$ (при достаточно большом M), что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к доказательству того важного неравенства, о котором уже выше говорилось.

Рассмотрим интеграл

$$\int_t^{2U_0} du \int_{E_t^+} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} = I(t, r) \quad (6)$$

(в силу теоремы А. Я. Дубовицкого [1] для почти всех t внутренний интеграл имеет смысл).

Тогда мы имеем

$$I(t, r) \leq G(t, r). \quad (7)$$

Представим (6) в виде

$$\int_t^{2U_0} dU \int_{E_t^+} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} = [I^{\frac{1}{n}}(t, r)]^n. \quad (8)$$

Дифференцируя обе части (8), получаем

$$\int_{E_t^+} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} = -n I^{\frac{n-1}{n}}(t, r) \frac{d}{dt} [I^{\frac{1}{n}}(t, r)]. \quad (9)$$

Так как $I(t, r)$ как функция t монотонно не возрастает, то в силу (7) множество N_r точек t , где

$$\left| \frac{d}{dt} [I^{\frac{1}{n}}(t, r)] \right| > \frac{2^7 R}{M^{\frac{1}{n}} U_0}$$

имеет меру меньше, чем

$$\frac{U_0}{2^6}, \text{ т. е. } \text{mes}_1 N_r < \frac{U_0}{2^6}. \quad (10)$$

При всех $t \in P_r = [0, 2U_0] - N_r$ имеем, согласно (7), (9), (10),

$$\int_{E_t^r} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} \leq \frac{2^7 \cdot R \cdot n}{M^{\frac{1}{n}} U_0} [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}} \quad (11)$$

Докажем, что существует точка t_0 такая, что множество $H_{t_0}^*$ таких точек $r \in H_{t_0}$ (см. лемму 3), при которых $t_0 \in P_r$ имеет меру больше

$$\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)R, \text{ т. е.} \\ \text{mes}_1 H_{t_0}^* > \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)R. \quad (12)$$

Обозначим через L_1 множество точек $(t, r): t \in [0, 2U_0], r \in [0, R]$ таких, что $r \in H_t$.

Тогда

$$\text{mes}_2 L_1 > \left(2 - \frac{1}{2^6}\right)RU_0. \quad (13)$$

Обозначим через L_2 множество точек $(t, r): t \in [0, 2U_0], r \in [0, R]$ таких, что $t \in P_r$.

Тогда

$$\text{mes}_2 L_2 > \left(2 - \frac{1}{2^6}\right)RU_0. \quad (14)$$

Положим $L = L_1 \cdot L_2$. Тогда при $(t, r) \in L$ справедливо $t \in P_r, r \in H_t$ и в силу (13), (14) получаем

$$\text{mes}_2 L > \left(2 - \frac{1}{2^5}\right)RU_0.$$

Обозначим через H_t^* множество точек r таких, что $(t, r) \in L$. Тогда

$$\text{mes}_2 L = \int_0^{2U_0} \text{mes}_1 H_t^* dt > \left(2 - \frac{1}{2^5}\right)RU_0.$$

Следовательно, найдется t_0 такое, что

$$\text{mes}_1 H_{t_0}^* > \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)R.$$

Итак, нужное t_0 найдено.

Для всех $r \in H_{t_0}^*$ мы имеем

$$\int_{E_{t_0}^r} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} \leq \frac{2^7 \cdot R \cdot n}{M^{\frac{1}{n}} U_0} [G(t, r)]^{\frac{n-1}{n}}$$

Так как далее $H_{t_0}^* \subset H_{t_0}$, то в силу леммы 3 имеем

$$E(t_0, r) > \alpha_0 [G(t_0, r)]^{\frac{n-1}{n}}$$

и значит

$$\int_{E_{t_0}^r} \frac{d\sigma}{|\text{grad} U|} \leq \frac{2^7 \cdot R \cdot n \cdot E(t_0, r)}{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0}$$

для всех

$$r \in H_{t_0}^*.$$

После небольшого вычисления отсюда имеем

$$\int_{E_{t_0}^r} |\text{grad} U| d\sigma \geq \frac{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0}{2^7 \cdot R \cdot n} [E(t_0, r)]$$

или

$$\int_{E_{t_0}^r} |\text{grad} U| d\sigma \geq \frac{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0^2}{2^7 \cdot R \cdot n} [G(t_0, r)]^{\frac{n-1}{n}} \quad (15)$$

при

$$r \in H_{t_0}^*.$$

§ 3. В дальнейшем будет рассматривать уравнение

$$\sum_{i,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik}(x) \frac{\partial U}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial U}{\partial x_i} + C(x)U = 0, \quad (16)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, относительно коэффициентов которого предполагается, что в области, где это уравнение рассматривается, $a_{ik}(x)$, $b_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции и выполняются неравенства:

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \xi_i \xi_k > \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha > 0 \quad (17)$$

для любых действительных

$$\xi_i, \quad \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$$

$$(\text{grad } F, x) - (\vec{b}, x) \geq -\frac{C_1}{R}, \quad (18)$$

$$\text{div } \vec{b} \geq -\frac{C_2}{R^2}, \quad (19)$$

$$|a_{ik}(x)| \leq a_0, \quad (20)$$

$$C(x) \leq 0, \quad (21)$$

где

$$F = \sum_{j=1}^n \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} \cos \alpha_i \cos \alpha_k, \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n);$$

α_i — угол между вектором x и осью x_i , а a_0 ; C_1 , C_2 — некоторые положительные константы.

Дадим пример уравнения, для которого выполняются все условия, наложенные на коэффициенты уравнения (16):

$$\Delta U - x_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0.$$

Обозначим через K_R открытый шар в n -мерном пространстве произвольного радиуса R и с центром в начале координат O . через $\mu_n E$ — n -мерную меру Лебега множества E , лежащего в n -мерном пространстве. Через G — область, лежащую внутри K_R , содержащую центр шара K_R и имеющую предельные точки на границе K_R , а через S_p^* — пересечения области G со сферой радиуса p и с центром в начале координат O .

Основная лемма

Пусть Γ — та часть границы области G , которая строго лежит внутри K_R . Пусть в G определено уравнение (16). Существует константа M , зависящая только от констант α , α_0 , C_1 , C_2 неравенств (17), (18), (19), (20) и размерности n пространства такая, что, если

$$\mu_n G < \frac{\mu_n K_R}{M}, \quad (22)$$

то для любого положительного решения $U(x)$ уравнения (16) в G , непрерывного в $\bar{G}$ и обращающегося в нуль на Γ , выполняется неравенство:

$$2U(0) < \max_{x \in \bar{G}} U(x).$$

Доказательство. Пусть лемма неверна, т. е. для как угодно большого M найдется шар K_R , область G в нем и решение $U(x)$ некоторого уравнения (16), удовлетворяющие условиям леммы и такие, что

$$U(x) \leq 2U_0, \quad \text{где} \quad U_0 = U(0).$$

Обозначим через E_t множество точек $x \in G$, для которых $U(x) = t$, $t \in [0, 2U_0]$. Обозначим через G_t множество точек $x \in G$, в которых $U(x) > t$.

Пусть

$$E_t^r = K_r \cdot E_t, \quad G_t^r = K_r \cdot G_t$$

и

$$E(t, r) = \mu_{n-1} E_t^r, \quad G(t, r) = \mu_n G_t^r, \quad r \in [0, R].$$

Тогда, согласно неравенству (15) § 2, найдется такое t_0 ($t_0 \in P_r$) и такое множество $H_{t_0}^* \subset [0, R]$, имеющее меру больше $\left(1 - \frac{1}{2^6}\right)R$, что для всех $r \in H_{t_0}^*$

$$\int_{E_{t_0}^r} |\text{grad} U| d\sigma \geq \frac{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0^2}{2^7 \cdot R \cdot n} [G(t_0, r)]^{\frac{n-1}{n}},$$

или

$$\int_{E_{t_0}^r} \left| \frac{\partial u}{\partial \tau} \right| d\sigma \geq \frac{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0^2}{2^7 \cdot R \cdot n} [G(t_0, r)]^{\frac{n-1}{n}}, \quad (23)$$

где τ — внешняя нормаль к поверхности $E_{t_0}^r$.

Рассмотрим функцию $f(r) = G(t_0, r)$ на отрезке $[0, R]$. В силу неравенства (22) функция $f(r)$ удовлетворяет всем условиям леммы § 1. Следовательно, найдутся неперекрывающиеся отрезки $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \dots, [a_s, b_s]$, принадлежащие отрезку $[0, R]$.

$$f(b_i) \leq 2f(a_i) \quad i=1, 2, \dots, s, \quad (24)$$

$$f(r) \geq \min[f(a_i), f(b_i)] \quad \text{при} \quad a_i < r < b_i, \quad (25)$$

$$b_i - a_i > \frac{R^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2n}}}{c_n} f(r), \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^s (b_i - a_i) > \frac{R}{4}, \quad (27)$$

где c_n — константа, зависящая только от n . Теперь докажем, существует ли такое $\lambda_{i_0} \in [a_{i_0}, b_{i_0}]$, что

$$\int_{E_{\lambda_{i_0}}^r} \left| \frac{\partial U}{\partial \tau} \right| d\sigma \geq \frac{M^{\frac{1}{n}} U_0 \alpha_0^2}{2^7 \cdot R \cdot n} [G(t_0, r)]^{\frac{n-1}{n}}, \quad (28)$$

$$f(b_{i_0}) \leq 2f(\lambda_{i_0}), \quad (29)$$

$$b_{i_0} - \lambda_{i_0} > \frac{R^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2n}}}{2c_n} f^{\frac{1}{2n}}(r), \quad (30)$$

$$f(r) \geq \min[f(\lambda_{i_0}), f(b_{i_0})] \quad \text{при} \quad \lambda_{i_0} < r < b_{i_0}. \quad (31)$$

Пусть $k_i = \frac{b_i + a_i}{2}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Рассмотрим отрезки $[a_1, k_1]$,

$[a_2, k_2], \dots, [a_s, k_s]$. В силу (24), (25), (26), (27) имеем

$$f(b_i) \leq 2f(k_i), \quad (32)$$

$$b_i - k_i > \frac{R^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2n}}}{2c_n} f^{\frac{1}{2n}}(r), \quad (33)$$

$$f(r) \geq \min[f(k_i), f(b_i)] \quad \text{при} \quad k_i < r < b_i, \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^s (k_i - a_i) > \frac{R}{8}. \quad (35)$$

Пусть

$$N = \sum_{i=1}^s [a_i, k_i] \quad \text{и} \quad N_1 = N \cdot H_{t_0}^*.$$

Докажем, что множество N_1 не пусто. Предположим обратное, т. е. $N \cdot H_{t_0}^* = 0$. Так как $N \subset [0, R]$, $H_{t_0}^* \subset [0, R]$, то имеем $R > \text{mes}_1 N +$

+ $\text{mes}_1 H_{t_0}^*$. В силу (35) и $\text{mes}_1 H_{t_0}^* > \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) R$ получаем

$$R > \frac{R}{8} + \left(1 - \frac{1}{2^6}\right) R,$$

что невозможно, т. е. N_1 не пусто. Следовательно, существует хотя бы одна точка, принадлежащая одному из отрезков $[a_i, k_i]$ ($i=1, 2, \dots, s$), которая содержится в множестве $H_{t_0}^*$. Обозначив ее через λ_{i_0} , мы видим, что в силу (23), (32), (33), (34) имеют место соотношения (28), (29), (30), (31).

Далее в силу неравенства (29) найдутся такие

$$r_0 \left(\bar{\lambda} < r_0 < \frac{3\bar{\lambda} + \bar{\beta}}{4} \right), \quad r_1 \left(\frac{\bar{\lambda} + \bar{\beta}}{2} < r_1 < \bar{\beta} \right), \quad \text{что}$$

$$\mu_{n-1} s_{r_0}^* < \frac{4f(\bar{\lambda})}{\bar{\beta} - \bar{\lambda}}, \quad (36)$$

$$\mu_{n-1} s_{r_1}^* < \frac{2f(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda} - \bar{\beta}}, \quad (37)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_{i_0}$, $\bar{\beta} = b_{i_0}$.

Действительно, рассмотрим функцию $g(r) = \mu_{n-1} s_r^*$, $r \in [0, R]$. Легко видеть, что

$$\int_{\bar{\lambda}}^{\frac{3\bar{\lambda} + \bar{\beta}}{4}} g(r) dr = f\left(\frac{3\bar{\lambda} + \bar{\beta}}{4}\right) - f(\bar{\lambda}) < f(\bar{\beta}) - f(\bar{\lambda}) < f(\bar{\lambda}),$$

откуда найдется такое $r_0 \left(\bar{\lambda} < r_0 < \frac{3\bar{\lambda} + \bar{\beta}}{4} \right)$, для которого

$$g(r_0) = \mu_{n-1} s_{r_0}^* < \frac{4f(\bar{\lambda})}{\bar{\beta} - \bar{\lambda}}.$$

Аналогично доказывается неравенство (37).

Рассмотрим интеграл

$$D(r) = \int_{S_r} \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x) \cos \gamma_i \frac{\partial U}{\partial x_{ik}} + \sum_{i=1}^n (U - t_0) b_i \cos \gamma_i \right) ds,$$

где $\cos \gamma_i$ — направляющая нормали к поверхности S_r^* . В силу неравенств (18), (20), (36), (37) найдется такое $r^1 (r_0 < r^1 < r_1)$, что

$$D(r^1) \leq \frac{(24U_0 a_0 n^2 + 32U_0 c_1) f(\bar{\lambda})}{(\bar{\beta} - \bar{\lambda})^2}. \quad (38)$$

В самом деле

$$\int_{r_0}^{r_1} D(r) dr = \int_{G^1} \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k \frac{\partial U}{\partial r} + \sum_{i=1}^n (U - t_0) b_i \cos \gamma_i \right) ds dr =$$

$$= \int_{S'} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k U ds - \int_{G^1} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k \right) - \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i \right] (U - t_0) ds dr,$$

где $G' = G_{t_0}^1 - G_{t_0}^0$, а S' — граница области G' .

Разбивая первый из интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, на два, получаем

$$\int_{S'} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k U ds = t_0 \int_{E_{t_0}'} \sum_{i,k=0}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k ds +$$

$$+ \int_{S_{r_0}^* + S_{r_1}^*} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k U ds = t_0 \int_{G'} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k ds dr +$$

$$+ \int_{S_{r_0}^* + S_{r_1}^*} (U - t_0) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k ds,$$

учитывая это, получаем

$$\int_{r_0}^{r_1} L(r) dr = \int_{S_{r_0}^* + S_{r_1}^*} (U - t_0) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k ds -$$

$$- \int_{G'} (U - t_0) \left[\frac{\partial}{\partial r} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k + \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i \right] ds dr.$$

Далее в силу неравенств (18), (20), (36) и (37) имеем

$$\left| \int_{S_{r_0}^* + S_{r_1}^*} (U - t_0) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k ds \right| \leq U_0 n^2 a_0 \mu_{n-1} (s_{r_0}^* + s_{r_1}^*) <$$

$$< \frac{6U_0 a_0 n^2 f(\bar{\lambda})}{\bar{\beta} - \bar{\lambda}},$$

$$\int_{G'} (U - t_0) \left(\frac{\partial}{\partial r} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k - \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i \right) ds dr > - \frac{8U_0 f(\bar{\lambda}) c_1}{\bar{\beta} - \bar{\lambda}},$$

учитывая последние два неравенства, окончательно получаем

$$\int_{r_0}^{r_1} D(r) dr < \frac{6U_0 a_0 n^2 f(\bar{\lambda}) + 8U_0 c_1 f(\bar{\lambda})}{\bar{\beta} - \bar{\lambda}}.$$

Так как $r_1 - r_0 > \frac{\bar{\beta} - \bar{\lambda}}{4}$, то получается неравенство (38). Обозначим через $s_{r'}$ границу области $G_{r'} = G_{r'_0} \cdot K_{r'}$. Очевидно, что $s_{r'}$ состоит из точек, принадлежащих $E_{r'_0}$ и $s_{r'_0}$. Применяя формулу Грина к левой части уравнения (16) в области $G_{r'}$, получаем

$$\int_{s_{r'}} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \frac{\partial U}{\partial x_k} ds + \int_{s_{r'}} \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i (U - t_0) ds - \iint_{G_{r'}} \operatorname{div} \bar{b} d\omega + \iint_{G_{r'}} C U d\omega = 0, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_{r'}} \left(\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \frac{\partial U}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i (U - t_0) \right) ds = \\ = \int_{E_{r'_0}} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k \frac{\partial U}{\partial \tau} ds + D(r'). \end{aligned}$$

В силу неравенства (17) и так как $\frac{\partial U}{\partial \tau} \leq 0$ на $E_{r'_0}$ и $E(t_0, r') > E(t_0, \bar{\lambda})$, то

$$\int_{E_{r'_0}} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k \frac{\partial U}{\partial \tau} ds < - \frac{M^{\frac{2}{n}} U_0 \alpha \cdot \alpha_0^2}{2^7 \cdot n} f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda}). \quad (40)$$

Таким образом, учитывая неравенства (30), (38), (40) получаем

$$\begin{aligned} \int_{s_{r'}} \left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \cos \gamma_i \cos \gamma_k \frac{\partial U}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i (U - t_0) \cos \gamma_i \right] ds < - \\ - \frac{M^{\frac{2}{n}} U_0 \alpha \cdot \alpha_0^2}{2^7 \cdot n} f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda}) + \frac{(2U_1 U_0 a_0 n^2 + 32U_0 C_1)}{M^{\frac{1}{n}}} f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda}). \end{aligned} \quad (41)$$

Также

$$t_0 \int_{E_{r'_0}} \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i ds - \iint_{G_{r'}} \operatorname{div} b U d\omega = - \iint_{G_{r'}} (U - t_0) \operatorname{div} \bar{b} d\omega.$$

На основании неравенств (16), (19) и (29) имеем

$$- \iint_{G_{r'}} (U - t_0) \operatorname{div} \bar{b} d\omega < \frac{2C_2 f^{2-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda}) U_0}{M^{\frac{2}{n}}}. \quad (42)$$

Теперь, соединяя неравенства (41) и (42) с равенством (39), в силу (21) имеем:

$$- \frac{M^{\frac{2}{n}} U_0 \alpha \cdot \alpha_0^2}{2^7 \cdot n} f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda}) + \frac{(24U_0 a_0 n^2 + 32U_0 C_1) f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda})}{M^{\frac{1}{n}}} + \frac{2U_0 C_2 f^{1-\frac{2}{n}}(\bar{\lambda})}{M^{\frac{1}{n}}} > 0$$

или

$$-(M^{\frac{2}{n}} \alpha - 2^9 n M^{\frac{1}{n}} \alpha - 2^{16} n^2 \alpha - 2^7 \cdot 24 a_0 - 2^7 n \cdot 32 C_1 - 2^9 U C_2) U_0 > 0,$$

откуда, если положить

$$M < \left[\frac{2^8 n + (2^{17} n^2 \alpha^2 + 2^7 \cdot 24 a_0 \alpha + 2^7 n 32 C_1 + 2^9 n C_2 \alpha)^{\frac{1}{2}}}{\alpha} \right]^n,$$

то получаем $U_0 < 0$, что невозможно. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть область G лежит внутри шара K_R (R произвольно), содержит начало координат 0 и имеет предельные точки на границе шара K_R . Пусть в G определено решение $U(x)$ уравнения (16), обращающееся в нуль на той части границы области G , которая расположена строго внутри K_R . Пусть V — объем области G и пусть выполняется неравенство:

$$V < \frac{\mu_n K_R}{2^{2n+2} M}; \quad (43)$$

через M здесь и всюду дальше обозначена константа основной леммы § 3. Пусть $U_0 > 0$, где $U_0 = U(0)$.

Тогда

$$\sup_{x \in \bar{G}} U(x) > U_0 \exp \left(\frac{\mu_n K_R}{M_1 V} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Теорема типа Адамара

Пусть на всем евклидовом пространстве определено решение $U(x)$ уравнения (16).

Пусть $N(R)$ — число связных областей постоянства знака $U(x)$, пересекающих шаровой слой $\frac{R^2}{4} < |x|^2 < R^2$. Положим $M(R) = \max_{|x|^2 = R^2} |U(x)|$.

Тогда отношение

$$\frac{N(R)}{\ln M(R)^{\frac{1}{n-1}}}$$

остается ограниченным при любом R , если $N(R) > 2^n M$, где M — константа основной леммы § 3.

Теорема Фрагмена—Линделефа

Пусть G — неограниченная область, обладающая следующим свойством. Существует число $\eta < \frac{1}{2^n M}$ такое, что если для натурального m обозначить через G_m пересечение G с K_2^m (K_2^m — шар радиуса 2^m с центром в начале координат 0), то

$$\frac{\mu_n G}{\mu_n K_2^m} < \eta$$

для всех m , начиная с некоторого m_0 .

Пусть в G определено решение $U(x)$ уравнения (16), непрерывное в G и неположительное на границе области G . Тогда либо 1) $U(x) \leq 0$ всюду в G , либо 2) если положить

$$M(R) = \sup_{|x|^2 = R^2} U(x),$$

то

$$\liminf_{R \rightarrow \infty} \frac{M(R)}{R \left(\frac{1}{M_2 \eta} \right)^{\frac{1}{n-1}}} > 0,$$

где M_2 — положительная константа, зависящая только от констант α , n , a_0 , C_1 , C_2 .

Все вышеприведенные теоремы с помощью основной леммы § 3 и теоремы 1 доказываются так же, как в работах [5] и [9], поэтому эти доказательства мы здесь не будем приводить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовицкий А. Я. „Изв. АН СССР, серия матем.“, 21 (1957).
2. Ландис Е. М. „ДАН СССР“, 107, 1956, № 5.
3. Ландис Е. М. „ДАН СССР“, 107, 1956, № 4.
4. Ландис Е. М. Докт. дисс., МГУ, 1956.
5. Ландис Е. М. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. УМН, т. XIV, вып. 1 (85), 1959.
6. Ландис Е. М. „ДАН СССР“, т. 123, 1958, № 4.
7. Новрузов А. А. „ДАН СССР“, т. 139, 1961, № 6.
8. Новрузов А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“ 1960, № 5.
9. Новрузов А. А. Канд. дисс., МОПИ, 1962.

Э. Э. Новрузов

Адамар вэ Фрагмен-Линделјоф типли теоремләр

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә икинчи тәртибли хәтти еллиптик тәнликләрин һәлләри үчүн бир нечә кејфијјәт теоремләри исбат олунур. Һәмин теоремләрдән икиси Адамарын аналитик функцијанын сыфырлары вә онун тәртиби арасында олан әләгә вә Фрагмен-Линделјофун аналитик функција үчүн онун сонсузлугда нечә артмасы һаггында олан теоремләри үмумиләшдирир.

Н. Г. ГУСЕЙНОВ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ В МАГНИТНЫХ СВОЙСТВАХ КРИСТАЛЛОВ СО СТРУКТУРОЙ ТИПА NiF_2

Во всех одноосных кристаллах инвариантом второго порядка в спиновом гамильтониане, дающим слабый ферромагнетизм, являются $m_x l_y - m_y l_x$. Исключение составляют только лишь тетрагональные кристаллы, ось (главная) которых связывают спины ($\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$), относящиеся к различным магнитным подрешеткам. В последних кристаллах слабый ферромагнетизм обусловлен инвариантом $m_x l_y + m_y l_x$. К кристаллам этого типа относится соединение NiF_2 .

Вышеуказанное отличие приводит к тому, что в кристаллах типа NiF_2 эффект слабого ферромагнетизма по отношению как к статическим, так и к динамическим магнитным свойствам ведет себя анизотропно в базисной плоскости [2]. Благодаря эффекту слабого ферромагнетизма в кристаллах типа NiF_2 проявляется добавочная энергетическая щель в одной ветви спиновой волны. Величина щели экспериментально может быть определена из резонансных опытов или по измерениям температурной зависимости спиновой теплоемкости [1], спонтанной намагниченности и магнитной восприимчивости.

В настоящей статье приводятся результаты расчетов температурной зависимости спонтанной намагниченности и магнитной восприимчивости в одноосных кристаллах со структурой типа NiF_2 , экспериментальная проверка которых даст возможность оценить щель.

1. Случай, когда намагничивающее поле ($\vec{H}$) лежит в плоскости базиса и составляет угол φ с осью [010].

Используя выражения энергетического спектра для спиновых волн [2], получим:

$$a) m(T, H, \varphi) = m_s(T, \varphi) + \chi(T)H \text{ при } \varepsilon_{01}(\varphi), \varepsilon_{02}(\varphi) \ll \kappa T,$$

$$\text{где } m_s(T, \varphi) = \frac{2M_0 H_d \cos 2\varphi}{H_E} (1 - 3\beta T^2);$$

$$\chi(T) = \frac{2M_0}{H_E} (1 - \beta T^2); \beta = \frac{\kappa^2 H_E}{24M_0 I^3};$$

$$b) m(T, H, \varphi) = m'_s(T, \varphi) + \chi(T)H \text{ при } \varepsilon_{02} \ll \kappa T \ll \varepsilon_{01};$$

$$m'_s(T, \varphi) = \frac{2M_0 H_d \cos 2\varphi}{H_E} \left(1 - \frac{5}{2} \beta T^2\right);$$

ε_{01} и ε_{02} — энергетические щели спиновых волн [2],
 H_d — поле, ответственное за неколлижарность спинов,
 H_E — „обменное поле“,
 M_0 — максимальное значение намагниченности каждой подрешетки

$$I = \sqrt{H_E H_Q},$$

H_Q — „обменное поле“, обусловленное неоднородностями магнитных моментов подрешеток.

2. Если поле направлено под углом θ к оси [001] кристалла, получим:

$$a) m(T, H, \theta) = m_s(T, \theta) + \chi(T)H \text{ при } \varepsilon_{01}(\theta), \varepsilon_{02}(\theta) \ll \chi T,$$

$$\text{где } m_s(T, \theta) = \frac{2M_0 H_d \sin \theta}{H_E} (1 - 3\beta T^2);$$

$$b) m(T, H, \theta) = m'_s(T, \theta) + \chi(T, \theta)H \text{ при } \varepsilon_{02} \ll \chi T \ll \varepsilon_{01},$$

$$\text{здесь } m'_s(T, \theta) = \frac{2M_0 H_d \sin \theta}{H_E} \left(1 - \frac{5}{2} \beta T^2\right);$$

$$\chi(T, \theta) = \frac{2M_0}{H_E} (1 - \beta T^2 \sin^2 \theta).$$

В последнем случае [2 б)], когда поле направлено вдоль оси [001] кристалла ($\theta = 0$), χ не зависит от температуры.

Эти зависимости могут пройти к экспоненциальному закону при $\chi T \ll \varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$.

Следует подчеркнуть, что вышеприведенные формулы могут отличаться от аналогичных выражений для кристаллов со структурой типа $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ лишь только коэффициентом. Однако в силу тетрагональной анизотропии, а также наличия добавочной щели в спектре для кристаллов NiF_2 ε_{01} может быть намного больше, чем для кристаллов типа $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$.

Интересно заметить, что вблизи состояния $\vec{l} \parallel [010]$, $[\vec{l} = \frac{1}{2S_0}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)]$

эффект неколлижарности не влияет на энергетическую щель. Следовательно, измерение резонанса вблизи этого состояния позволит определить энергетическую щель, обусловленную тетрагональной анизотропией в базисной плоскости.

В заключение приношу глубокую благодарность Ю. М. Сеидову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровик-Романов А. С., Калинкина И. Н. ЖЭТФ, 41, 1961, 1694.
2. Гусейнов Н. Г. ФММ, 12, 1961, 795.

Н. Г. Гусейнов

NiF_2 -гурулушлу кристалларын магнит хассэлэри хүсусијјэтлэринэ даир

ХҮЛАСЭ

Ишдэ спонтан магнит моменти $m_x l_y + m_y l_x$ -ин варианты илэ характеризэ олунан магнит кристаллары үчүн магнит нүфузлуғунун температурдан асылылығы һесаблинмышдыр. Көстәрилмишдир ки, алынмыш формуллар башга бир охлу ($\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ типли) кристаллар үчүн алынмыш ифадэләрдән сабит вуругла фәргләнир.

К. А. ШАРИФОВ, С. Н. ГАДЖИЕВ, И. М. ГАРИБОВ

ЭНТАЛЬПИЯ ОБРАЗОВАНИЯ АРСЕНИДА ИНДИЯ

Определение энтальпии образования арсенида индия произведено о методу прямого синтеза вещества из элементов в калориметрической бомбе, описанному ранее [1] на примере исследования InSb ; условия были аналогичными, за исключением интенсивности нагрева.

InAs имеет более высокую температуру плавления -942° (InSb лавится при 525°), поэтому с целью достижения этой температуры нагревательный элемент печки — нихромовая проволока бралась несколько большего диаметра (0,2 вместо 0,15 мм) и меньшей длины 150 вместо 170 см). Она имела сопротивление 50 ом и при 120 в развивала температуру в печке $\sim 950^\circ$ (через 50 сек).

При этих условиях сплавление и превращение вещества происходило удовлетворительно.

Для исследования брали индий чистотой 99,999% и мышьяк чистой 99,99%. Навеска индия составляла ~ 4 г, мышьяк брали с небольшим избытком.

Перед измерением заново определялось тепловое значение калориметра, причем в отличие от предыдущих калибровок при сжигании бензойной кислоты электродвигатель с редуктором находился в бомбе (ампула и кожух отсутствовали), что позволило, в основном, устранить неопределенности и погрешности, имеющие место при введении вычисляемых поправок на эти части.

Степень превращения определялась путем удаления возгонкой в вакууме (0,1 мм рт. ст.) при $600-650^\circ$ нереагировавшего остатка мышьяка [4]. Проверка на известных образцах показала надежность этого способа.

Рентгенанализом продуктов реакции установлено наличие InAs только кубической модификации.

Результаты опытов приведены в таблице.

Таким образом,

$$\Delta H_{293}^\circ \text{InAs}_{\text{кубич.}} = -13,8 \pm 0,8 \text{ ккал/моль.}$$

Для сравнения приводим литературные данные. Значение $\Delta H_{293}^\circ \text{InAs}$, определенное экспериментально на оловянном калориметре Шоттки и Бевером [8], является приближенным и равно $14,8 \pm 1,3$ ккал/моль.

К. А. ШАРИФОВ, С. Н. ГАДЖИЕВ, И. М. ГАРИБОВ

ЭНТАЛЬПИЯ ОБРАЗОВАНИЯ АРСЕНИДА ИНДИЯ

Определение энтальпии образования арсенида индия произведено о методу прямого синтеза вещества из элементов в калориметрической бомбе, описанному ранее [1] на примере исследования InSb ; условия были аналогичными, за исключением интенсивности нагрева.

InAs имеет более высокую температуру плавления -942° (InSb плавится при 525°), поэтому с целью достижения этой температуры нагревательный элемент печи — нихромовая проволока бралась несколько большего диаметра (0,2 вместо 0,15 мм) и меньшей длины (150 вместо 170 см). Она имела сопротивление 50 ом и при 120 в развивала температуру в печи $\sim 950^\circ$ (через 50 сек).

При этих условиях сплавление и превращение вещества происходило удовлетворительно.

Для исследования брали индий чистотой 99,999% и мышьяк чистотой 99,99%. Навеска индия составляла ~ 4 г, мышьяк брали с небольшим избытком.

Перед измерением заново определялось тепловое значение калориметра, причем в отличие от предыдущих калибровок при сжигании бензойной кислоты электродвигатель с редуктором находился в бомбе (ампула и кожух отсутствовали), что позволило, в основном, устранить неопределенности и погрешности, имеющие место при введении вычисляемых поправок на эти части.

Степень превращения определялась путем удаления возгонкой в вакууме (0,1 мм рт. ст.) при $600-650^\circ$ нереагировавшего остатка мышьяка [4]. Проверка на известных образцах показала надежность этого способа.

Рентгенанализом продуктов реакции установлено наличие InAs только кубической модификации.

Результаты опытов приведены в таблице.

Таким образом,

$$\Delta H_{298}^\circ \text{InAs}_{\text{кубич.}} = -13,8 \pm 0,8 \text{ ккал/моль.}$$

Для сравнения приводим литературные данные. Значение $\Delta H_{298}^\circ \text{InAs}$, определенное экспериментально на оловянном калориметре Шоттки и Бевером [8], является приближенным и равно $14,8 \pm 1,3$ ккал/моль.

Имеется еще расчетная величина $\Delta H^\circ \text{InAs} = -13,5 \text{ ккал/моль}$, вычисленная Реннером [7] из данных Квилла [6].

После того, как нами было сделано данное определение и сообщено о нем в [2], а также в [3], мы ознакомились с работой Гутбира [5],

Результаты опытов по определению $\Delta H^\circ \text{InAs}$

Навеска, г		Прореагировавшее вещество			Число оборотов стрелки счетчика	ΔT , исправлен. градус	Q, кал		$-\Delta H^\circ$ ккал/ моль
In	As	In, г	As, г	%			общее	за счет реакции	
3,8283	3,0581	3,1518	2,0563	82,33	147,75	2,2225	6515,26	365,29	13,3
4,2367	2,7639	2,2109	1,4424	52,18	146,87	2,1759	6378,65	265,73	13,8
4,2363	2,7637	2,7453	1,7911	64,80	139,99	2,1035	6166,31	339,67	14,2

который на основе собственных данных, полученных масс спектрометрическим методом вычислил энтальпию образования InAs и получил следующее значение:

$$\Delta H_{298}^\circ \text{InAs} = -13,8 \pm 1,0 \text{ ккал/моль}.$$

Как видно, результаты, полученные нами и Гутбиром, одинаковы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. „ДАН СССР“, 136, № 6, 1339 (1961).
2. Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. Доклад на Всесоюзном совещании по полупроводниковым соединениям. Тезисы докладов, М—Л., 1961.
3. Гаджиев С. Н. Дисс., М., 1961.
4. Шукарев С. А., Морозова М. Н., Ли-Мяо-сю. ЖОХ, 29, № 8, 2465 (1959).
5. Gutbier H. Zs. Naturforsch. 16a, № 3, 268 (1961).
6. Quill L. L. The Chemistry and Metallurgy of Miscellaneous Materials, N. I., 1950.
7. Renner T. Solid State Electronics, I, № 1, 39 (1960).
8. Schottky W. F., Bever M. B. Acta Metall. 6, № 4, 320 (1958).

К. Э. Шарифов, С. Н. Гачыжев, И. М. Гарибов

Индиум-арсенид и эмалэ кэлмэ энталпијасы

ХУЛАСӘ

Калориметрик бомбада элементләрден билаваситә синтез етмәк үсулу илә индиум-арсенид иң әмәлә кәлмә истилији тәјин едилмишдир. Тәчрүбәләрин шәраити әввәлләр тәсвир едилән кими олмуш, јалһыз микроскобанын гызма интенсивлији артырыларат температуру 950°-јә чатдырылмышдыр. Беләликлә, InAs әримә температурундан јүксәк температур әлдә едилмишдир. Көстәрилән шәраитдә синтез лазыми дәрәчәдә кетмиш вә маддәнин әмәлә кәлмә истилији тәминедиши дәгигликлә өлчүлмүшдүр.

Алынән нәтичә $\Delta H_{298}^\circ \text{InAs}_{\text{кубик}} = -13,8 \pm 0,8 \text{ ккал/мол}$, әдәбијатда олан, Гутбир тәрәфиндән алынмыш нәтичәјә тамамилә ујғундур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫҢ ХӘБӘРЛӘРИ

Физика-ријазиијат вә техника елмләри сәријасы, 1963, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Серия физико-математических и технических наук, 1963, № 2

Ф. С. САДЫХОВ

О ВЛИЯНИИ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ ЯДРА НА ПОЛЯРИЗАЦИИ ЧАСТИЦ ПРИ ТОРМОЗНОМ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОНА И ОБРАЗОВАНИИ ПАР

1. В наших предыдущих работах [2—6] изучалось влияние конечных размеров ядра на угловое распределение процессов тормозного излучения электрона и образование пары электрон—позитрон гамма-квантом при учете поляризационных состояний, участвующих в процессе частиц. Полученные в [2] результаты показывают, что влияние конечных размеров ядра на угловое распределение поляризованного по кругу излучения будет существенно в области больших углов вылета гамма-кванта ($\theta > 10^\circ$) и больших энергий падающего электрона.

В данной работе, являющейся дальнейшим развитием [2—6], подробно исследуется влияние конечных размеров ядра на угловые и продольные спиновые корреляции между начальным и конечным электроном, начальным электроном и гамма-квантом, конечным электроном и гамма-квантом, а также на угловые и спиновые корреляции между налетающим поляризованным по кругу гамма-квантом и образующейся электронно-позитронной парой.

2. В борновском приближении при больших энергиях для углового распределения тормозного излучения от продольно поляризованного электрона с учетом конечных размеров ядра имеем выражение (см. [7], формула (1)):

$$d\sigma_{\text{iss}}^T(\theta, \langle r^2 \rangle) d\Omega = d\sigma_{\text{iss}}^T(\theta) d\Omega - d\sigma_{\text{iss}}^C(\theta) d\Omega, \quad (1)$$

здесь

$$d\sigma_{\text{iss}}^T(\theta) = \pi a_T \{ \Phi_0(\theta) + ss' \Phi_6(\theta) + ls \Phi_1(\theta) + ls' \Phi_9(\theta) \}, \quad (2)$$

$$d\sigma_{\text{iss}}^C(\theta) = \pi a_T \{ \langle r^2 \rangle [\Phi_2(\theta) + ss' \Phi_7(\theta) + ls \Phi_3(\theta) + ls' \Phi_{10}(\theta)] - \langle r^2 \rangle^2 [\Phi_4(\theta) + ss' \Phi_8(\theta) + ls \Phi_5(\theta) + ls' \Phi_{11}(\theta)] \}. \quad (3)$$

В (1)—(3) $d\sigma_{\text{iss}}^T(\theta)$ — угловое распределение поляризованного по кругу тормозного излучения, производимого продольно поляризованным релятивистским электроном в поле точечного ядра с учетом продольной поляризации электрона в конечном состоянии (см. [7], формула (8)), $d\sigma_{\text{iss}}^C(\theta)$ характеризует угловое распределение поляризованного по кругу тормозного излучения от продольно поляризованного элект-

рона с учетом среднеквадратного радиуса ядра, функции $\Phi_i(\theta)$ ($i = 0 \div 11$), входящие в (2) и (3), определяются формулами (7) и (6) из [3, 7], соответственно, $\langle r^2 \rangle$ — среднеквадратичный радиус ядра [9]. Величина $l = \pm 1$ описывает круговую поляризацию гамма-квантов, а с левой для гамма-кванта с правой круговой поляризацией $l = 1$, а с левой круговой поляризацией $l = -1$; $s(s') = \pm 1$ определяет продольную поляризацию спина начального (конечного) электрона. При $s = 1 (s' = 1)$ имеем правополяризованный начальный (конечный) электрон, а при $s = -1 (s' = -1)$ — левополяризованный начальный (конечный) электрон.

Полученное выражение (1) для сечения тормозного излучения описывает влияние протяженности кулоновского заряда ядра на угловое распределение неполяризованных гамма-квантов ($\sim \Phi_2(\theta)$ и $\Phi_4(\theta)$), а также на корреляции спинов гамма-кванта и электрона в начальном и конечном состояниях (ls и ls') и электрона в начальном и конечном состояниях (ss'). Эта формула дает возможность в общем случае исследовать зависимость угловых и продольно-спиновых корреляций частиц от среднеквадратичного радиуса ядра.

После суммирования по конечным спиновым состояниям электрона ($s' = \pm 1$) из (1) получаем

$$d\sigma_{is}(\theta, \langle r^2 \rangle) d\Omega = d\sigma_{is}^T(\theta) d\Omega - d\sigma_{is}^C(\theta) d\Omega, \quad (4)$$

здесь

$$d\sigma_{is}^T(\theta) = \frac{1}{2} d\sigma_{B-\Gamma}(\theta) + ls d\sigma_1(\theta), \quad (5)$$

$$d\sigma_{is}^C(\theta) = 2\pi a_T \{ \langle r^2 \rangle [\Phi_2(\theta) + ls \Phi_3(\theta)] - \langle r^2 \rangle^2 [\Phi_4(\theta) + ls \Phi_5(\theta)] \}. \quad (6)$$

В формуле (5) $d\sigma_{B-\Gamma}(\theta)$ — известное выражение для распределения тормозного излучения без учета поляризационных состояний электрона и гамма-кванта (см. [1–2], формула (18)); $d\sigma_1(\theta)$ характеризует угловое распределение поляризованного по кругу тормозного излучения, производимого продольно поляризованным электроном и определяется формулой (19) работы [2]. $d\sigma_{is}^C(\theta)$ определяет поправку, обусловленную влиянием протяженности ядра на угловые и спиновые корреляции гамма-кванта и начального электрона.

Из (1) для угловой зависимости степени круговой поляризации тормозного излучения от продольного поляризованного электрона с учетом конечных размеров ядра и продольной поляризации конечного электрона получаем формулу

$$P_c(\theta, \langle r^2 \rangle, ss') = \frac{\{d\sigma_{iss'}\}_{l=1} - \{d\sigma_{iss'}\}_{l=-1}}{\{d\sigma_{iss'}\}_{l=1} + \{d\sigma_{iss'}\}_{l=-1}} = s P_c(\theta, \langle r^2 \rangle) \frac{1 + ss' A(\theta, \langle r^2 \rangle)}{1 + ss' B(\theta, \langle r^2 \rangle)}, \quad (7)$$

где

$$A(\theta, \langle r^2 \rangle) = \frac{\Phi_9(\theta) - \langle r^2 \rangle \Phi_{10}(\theta) + (\langle r^2 \rangle)^2 \Phi_{11}(\theta)}{\Phi_1(\theta) - \langle r^2 \rangle \Phi_3(\theta) + (\langle r^2 \rangle)^2 \Phi_5(\theta)},$$

$$B(\theta, \langle r^2 \rangle) = \frac{\Phi_6(\theta) - \langle r^2 \rangle \Phi_7(\theta) + (\langle r^2 \rangle)^2 \Phi_8(\theta)}{\Phi_0(\theta) - \langle r^2 \rangle \Phi_2(\theta) + (\langle r^2 \rangle)^2 \Phi_4(\theta)}, \quad (8)$$

здесь $P_c(\theta, \langle r^2 \rangle)$ определяется из [3] формулой (13).

Зависимость степени круговой поляризации при учете продольной поляризации электрона в конечном состоянии от угла вылета гамма-кванта приведена на рис. 1. В области больших углов ($\theta > 10^\circ$) поляризация с учетом конечных размеров ядра $P_c(\theta, \langle r^2 \rangle, ss')$ (кривая 1) значительно отклоняется от поляризации для точечного ядра $P^T(\theta, ss')$ (кривая 2).

3. В формулах (1)–(3), произведя замены

$$K \rightarrow -K_+, K' \rightarrow K_-, \vec{k} \rightarrow \vec{k}_+,$$

$$\vec{k}' \rightarrow \vec{k}_-, z \rightarrow -z, \vec{z} \rightarrow -\vec{z},$$

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_+ = -1, \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_- = 1,$$

$$s \rightarrow s_+, s' \rightarrow s_-, l \rightarrow -l,$$

для углового распределения продольно поляризованной пары с учетом влияния конечных размеров ядра на угловые и продольные спиновые корреляции электрон–позитрон, электрон–гамма-квант и позитрон–гамма-квант получим:

$$d\sigma_{is_+s_-}(\theta_+, \langle r^2 \rangle) d\Omega_+ = d\sigma_{is_+s_-}^T(\theta_+) d\Omega_+ - d\sigma_{is_+s_-}^C(\theta_+) d\Omega_+, \quad (10)$$

здесь

$$d\sigma_{is_+s_-}^C(\theta_+) = \eta_p \{ \langle r^2 \rangle [F_0(\theta_+) + s_+s_- F_2(\theta_+) - ls_+ F_4(\theta_+) - ls_- F_6(\theta_+)] - (\langle r^2 \rangle)^2 [F_1(\theta_+) + s_+s_- F_3(\theta_+) - ls_+ F_5(\theta_+) - ls_- F_7(\theta_+)] \}. \quad (11)$$

В (10) и (11) $d\sigma_{is_+s_-}^T(\theta_+)$ представляет угловое распределение

продольно поляризованной пары без учета конечных размеров ядра [6], функции $F_j(\theta_+)$ ($j = 0 \div 7$), входящие в (11), описывают влияние протяженности заряда ядра на спиновые корреляции позитрон–электрон, гамма-квант–позитрон и гамма-квант–электрон и определяются формулой (5) из [5].

Усреднив (10) по продольным поляризациям гамма-кванта, имеем:

$$d\sigma_{s_+s_-}(\theta_+, \langle r^2 \rangle) d\Omega_+ = d\sigma_{s_+s_-}^T(\theta_+) d\Omega_+ - d\sigma_{s_+s_-}^C(\theta_+) d\Omega_+, \quad (12)$$

здесь

$$d\sigma_{s_+s_-}^C(\theta_+) = \eta_p \{ \langle r^2 \rangle [F_0(\theta_+) + s_+s_- F_2(\theta_+)] - (\langle r^2 \rangle)^2 [F_1(\theta_+) + s_+s_- F_3(\theta_+)] \}. \quad (13)$$

В (12) $d\sigma_{s_+s_-}^T(\theta_+)$ — усредненное по поляризациям падающего гамма-кванта сечение образования пары на точечном ядре с учетом спиновой корреляции между электроном и позитроном [6].

Согласно (10) степень продольной поляризации с учетом конечных размеров в ядре для пар со спиновой корреляцией $s_+ = -s_-$ между электроном и позитроном можно определить по формуле:

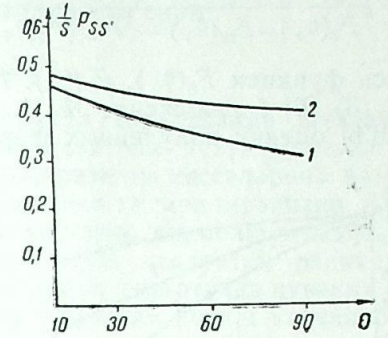


Рис. 1

Зависимость степени круговой поляризации излучения от угла вылета гамма-кванта θ при $E = 50 \text{ МэВ}$, $\varepsilon_7 = 25 \text{ МэВ}$, ($s = s' = \pm 1$): 1 — $\frac{1}{s} P_c(\theta, \langle r^2 \rangle, ss')$ для C_6^{12} ; 2 — $\frac{1}{s} P^T(\theta, ss')$.

Электронун тормозланма шүаланмасы вэ чүтүн эмэлэ кэлмэси просеслэриндэ һиссэчиклэрин полјаризасија хассэлэринэ нүвэнин сонлу өлчүлэринин тэ'сири

ХҮЛАСӘ

Ишдә јүксәк енержиләрдә электронун тормозланма шүаланмасы вэ гамма квантлар вәситәсилә электрон-позитрон чүтүнүн эмэлэ кэлмэси просеслэриндә һиссэчиклэрин полјаризасија хассэлэринэ вэ бучаг коррелјасијасына нүвэнин сонлу өлчүлэринин тэ'сири өјрәнилир. Алынган дүстурлара әсасән апарылан тәдгигат кәстәрир ки, полјаризасија дәрәчәси вэ бучаг коррелјасијасы нүвэнин орта квадратик радиусундан кәскин асылы олур. Чыхма бучағынын бөјүк гијмәтиндә нүвэнин сонлу өлчүлэри полјаризасија дәрәчәсини вэ еффе́ктив кәсији кәскин оларат азалдыр.

$$P_2(\theta_+, \langle r^2 \rangle) = \frac{\{d\sigma_{s_+s_-}\}_{s_+ = -s_- = 1} - \{d\sigma_{s_+s_-}\}_{s_+ = -s_- = -1}}{\{d\sigma_{s_+s_-}\}_{s_+ = -s_- = 1} + \{d\sigma_{s_+s_-}\}_{s_+ = -s_- = -1}} =$$

$$= -l \frac{F_9(\theta_+) - F_{11}(\theta_+) - \langle r^2 \rangle [F_4(\theta_+) - F_6(\theta_+)] + (\langle r^2 \rangle)^2 [F_5(\theta_+) - F_7(\theta_+)]}{F_8(\theta_+) - F_{10}(\theta_+) - \langle r^2 \rangle [F_0(\theta_+) - F_2(\theta_+)] + (\langle r^2 \rangle)^2 [F_1(\theta_+) - F_3(\theta_+)]}. \quad (14)$$

Здесь функции $F_8(\theta_+)$, $F_9(\theta_+)$, $F_{10}(\theta_+)$ и $F_{11}(\theta_+)$ определяются формулой (3) [6] (приложение №1).

Для оценки полученных формул (12) и (14) построим зависимость углового распределения пара от угла вылета позитрона θ_+ . Зависимость отношения сечений

$$d\sigma_{s_+s_-}(\theta_+, \langle r^2 \rangle) / d\sigma_{s_+s_-}^T(\theta_+),$$

$$d\sigma(\theta_+, \langle r^2 \rangle) / d\sigma^T(\theta_+)$$

от угла вылета позитрона при значениях энергии падающего гамма-кванта $\epsilon_\gamma = 50 \text{ МэВ}$, образующего позитрон, $E_+ = 35 \text{ МэВ}$ для ядра углерода ^{12}C показана на рис. 2. Мы видим, что учет конечных размеров ядра в случае, когда электроны и позитроны обладают продольными поляризациями одинакового направления ($s_- = s_+$), оказывает более сильное влияние на угловое распределение поляризованных электронно-позитронных пар (кривая 1), чем на угловое распределение неполяризованных пар (кривая 2). Угловое распределение для пар с электронами и позитронами, обладающими продольными поляриза-

циями противоположного направления ($s_- = -s_+$, кривая 3), с увеличением угла вылета позитрона спадает медленнее, чем угловое распределение поляризованных пар (кривая 2).

В заключение выражаю благодарность Б. К. Керимову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. ИЛ, М., 1956.
2. Керимов Б. К., Наджафов И. М. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 1958, 22, 886.
3. Керимов Б. К., Садыхов Ф. С. ЖЭТФ, вып. 40, 1951, 553.
4. Керимов Б. К., Садыхов Ф. С. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 1961, 25, 16.
5. Керимов Б. К., Садыхов Ф. С. „Изв. ВУЗов, физика“, 1961, 3, 14.
6. Керимов Б. К., Наджафов И. М. „Вестник МГУ, серия физ.-астроном“, 1961, 2, 41.
7. Садыхов Ф. С. „Вестник МГУ, серия физ.-астроном“, 1961, 6, 12.
8. Садыхов Ф. С. „Вестник МГУ, серия физ.-астроном“, 1962, 1, 19.
9. Hofstadter R., Rev. Mod. Phys. 28, 214, 1956.

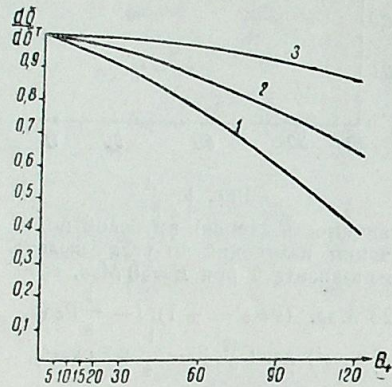


Рис. 2

Зависимость отношений сечений от угла вылета θ_+ позитрона для ^{12}C при $\epsilon_\gamma = 50 \text{ МэВ}$, $E_+ = 35 \text{ МэВ}$:

1 — $d\sigma(\theta_+, \langle r^2 \rangle) / d\sigma_{s_+s_- = 1}^T(\theta_+)$; 2 — $d\sigma(\theta_+, \langle r^2 \rangle) / d\sigma^T(\theta_+)$; 3 — $d\sigma_{s_+s_- = -1}(\theta_+, \langle r^2 \rangle) / d\sigma_{s_+s_- = -1}^T(\theta_+)$.

М. Б. КЕРИМБЕКОВ, М. У. ГАШИМЗАДЕ

К ИЗУЧЕНИЮ МЕРЦАНИЯ ЗВЕЗД

При астроклиматических исследованиях огромное практическое значение приобретает проблема мерцания звезд.

В связи с астроклиматическими исследованиями в г. Баку нами проводились наблюдения мерцания звезд, а также исследования дрожания звездного изображения. Коротко коснемся астроклиматических особенностей площадки, на которой проводились наблюдения. Отметим удачное расположение Астрономической станции, которое благоприятно сказывается на качестве изображения. Площадка для наблюдений находится на южной окраине г. Баку, рядом с большим парком. Высота площадки над уровнем Каспийского моря 120 м. Ввиду того, что весь город находится ниже и в стороне, то и запыленность атмосферы города мало сказывается при наблюдениях. Ореол по наблюдениям Солнца минимален.

Результаты многолетних наблюдений Баилдовской метеостанции г. Баку, находящейся недалеко от астрономической станции АГУ, показывают, что среднегодовое число ясных дней составляет 81,0, пасмурных — 105,7.

Если учесть число полупасмурных дней в количестве 178,6, то благоприятных для астрономических наблюдений общее число дней доходит до 270 в году [1].

Наблюдения проводились на инструменте АЗТ-7, установленном нами в хорошо проветриваемом павильоне. Обычно они велись в безветренную погоду. При этом отмечались метеорологические условия. Инструмент установлен на массивном каменном фундаменте, хорошо изолированном от пола. Все наблюдения велись в 10-метровом фокусе и при постоянном отверстии телескопа равном 200 мм.

Остановимся на методике наблюдений и обработки полученных данных. Вначале нами была получена серия фотографий следов звезд, позволившая установить некоторые характеристики процесса дрожания. По этим следам видно, что в дрожаниях звездных изображений преобладают медленные колебания с частотой до 10 гц. Исследование более быстрых процессов с помощью фотографирования звездных следов трудную задачу. Ввиду этого нами в дальнейшем применялся электрофотометрический метод исследования мерцания звездных изображений, позволяющий изучать более широкий диапазон частот.

М. Б. КЕРИМБЕКОВ, М. У. ГАШИМЗАДЕ

К ИЗУЧЕНИЮ МЕРЦАНИЯ ЗВЕЗД

При астроклиматических исследованиях огромное практическое значение приобретает проблема мерцания звезд.

В связи с астроклиматическими исследованиями в г. Баку нами проводились наблюдения мерцания звезд, а также исследования дрожания звездного изображения. Коротко коснемся астроклиматических особенностей площадки, на которой проводились наблюдения. Отметим удачное расположение Астрономической станции, которое благоприятно сказывается на качестве изображения. Площадка для наблюдений находится на южной окраине г. Баку, рядом с большим парком. Высота площадки над уровнем Каспийского моря 120 м. Ввиду того, что весь город находится ниже и в стороне, то и запыленность атмосферы города мало сказывается при наблюдениях. Ореол по наблюдениям Солнца минимален.

Результаты многолетних наблюдений Баиловской метеостанции г. Баку, находящейся недалеко от астрономической станции АГУ, показывают, что среднегодовое число ясных дней составляет 81,0, пасмурных — 105,7.

Если учесть число полупасмурных дней в количестве 178,6, то благоприятных для астрономических наблюдений общее число дней доходит до 270 в году [1].

Наблюдения проводились на инструменте АЗТ-7, установленном нами в хорошо проветриваемом павильоне. Обычно они велись в безветренную погоду. При этом отмечались метеорологические условия. Инструмент установлен на массивном каменном фундаменте, хорошо изолированном от пола. Все наблюдения велись в 10-метровом фокусе и при постоянном отверстии телескопа равном 200 мм.

Остановимся на методике наблюдений и обработки полученных данных. Вначале нами была получена серия фотографий следов звезд, позволившая установить некоторые характеристики процесса дрожания. По этим следам видно, что в дрожаниях звездных изображений преобладают медленные колебания с частотой до 10 гц. Исследования более быстрых процессов с помощью фотографирования звездных следов трудную задачу. Ввиду этого нами в дальнейшем применялся электрофотометрический метод исследования мерцания звездных изображений, позволяющий изучать более широкий диапазон частот.

Наряду с этим нами сфотографировано несколько следов спутника на различных зенитных расстояниях (см. рис. 1).

Предполагаем, что эти наблюдения позволяют исследовать атмосферные процессы по изменениям дрожания изображения, происходящим из-за перемещения спутника по большому участку неба в течение короткого времени. Следы спутника получались на фотопластинке чувствительностью в 90 единиц ГОСТа.

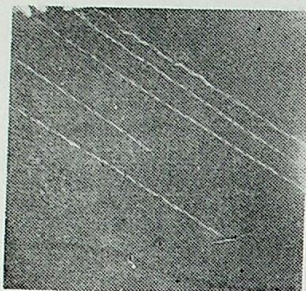


Рис. 1

Перейдем к данным электрофотометрических наблюдений. Для этой цели использовался электрофотометр АФМ-3. Запись производилась на восьмишлейфовом осциллографе. Использованный в работе усилитель обеспечивал линейность усиления в широком диапазоне исследуемых частот. Наряду с мерцанием записывались и шумы темнового тока. Вследствие того, что изменением чувствительности по поверхности ФЭУ можно пренебречь, флуктуацию фототока можно считать обусловленной звездным мерцанием. Для регистрации мерцания звезд изображения их проваливались в щель фотометра. Фотоэлектрическая запись велась на пленке Т-10, чувствительностью в 1200 единиц ГОСТа.

В качестве примера приведем результат электрофотометрической записи Веги от 13.7.62. Скорость записи составляла 250 мм/сек. Щель фотометра имела ширину в 0,1 мм. На рис. 2 приведена часть записи. По этому снимку можно отчетливо видеть наличие колебаний в 100 гц и выше. Имеются также неправильные колебания с низкими частотами от 0,1 до 1 гц.

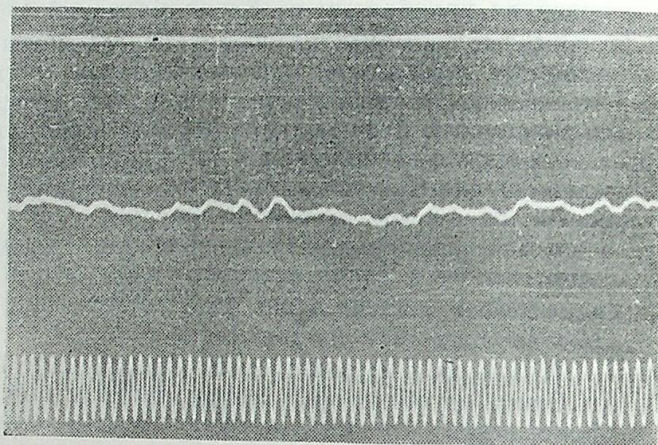


Рис. 2

С целью установления количественной характеристики изучаемого процесса (мерцания) необходимо привлечь методы корреляционного анализа. При этом отметим, что корреляционный анализ применим лишь к стационарным функциям. В общем же случае следует применять метод структурного анализа, разработанный Колмогоровым [2]. Основная идея, лежащая в основе этого метода, следующая. В случае, когда $f(t)$ (а в данном случае это обозначает отклонение от среднего положения) представляет собой нестационарную случайную функцию, т. е. меняется со временем, можно вместо $f(t)$ рассматривать $F_{\tau}(t) = f(t + \tau) - f(t)$. При не слишком большом τ медленные изменения не повлияют на значение этой разности и она может оказаться (хотя бы приближенно) стационарной функцией времени.

Если воспользоваться алгебраическим тождеством

$$(a - b)(c - d) = \frac{1}{2} [(a - d)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2],$$

то корреляционную функцию приращений можно представить в следующем виде:

$$B_F(t_1, t_2) = F_{\tau} = \overline{F_{\tau}(t_1) F_{\tau}(t_2)} = \frac{1}{2} \overline{[f(t_1 + \tau) - f(t_2)]^2} + \\ + \frac{1}{2} \overline{[f(t_1) - f(t_2 + \tau)]^2} - \frac{1}{2} \overline{[f(t_1 + \tau) - f(t_2 + \tau)]^2} - \\ - \frac{1}{2} \overline{[f(t_1) - f(t_2)]^2}.$$

Таким образом, $B_F(t_1, t_2)$ выражается через линейную комбинацию функций $D_f(t_i, t_j) = \overline{[f(t_i) - f(t_j)]^2}$. (1)

Функция (1) от аргументов t_i и t_j , где они принимают значения $t_1 + \tau$; t_1 ; t_2 ; $t_2 + \tau$ называется структурной функцией.

Для построения структурной функции исследуемого процесса нами было выбрано 500 точек. Точность построения этой функции зависит от числа выбранных точек, что в нашем случае выполняется.

Необходимые измерения проводились на универсальном микроскопе УИМ, позволяющим брать отсчеты по обеим осям с точностью до 1 микрона. Измерения проводили Гашимаев, Керимбеков и Азатов, их результаты были сравнены. Ошибка отдельного измерителя не превосходила, как правило, 0,01 мм, что составляет в среднем доли процента от измеряемой величины амплитуды. Измерения отсчитывались от нулевой линии электрофотометрической записи.

Результаты обработки сводятся к следующим величинам структурных функций (см. табл.):

Вначале, как видно из таблицы, структурная функция почти постоянна, дальше начинается ее рост.

Ход структурной функции указывает, что рассматриваемый нами процесс не является стационарным, а последнее не позволило бы нам прибегнуть к корреляционному анализу.

Ввиду того, что исследуемая функция оказалась нестационарной, мы не стали применять метод корреляционного анализа. Поэтому основываясь лишь на графическом анализе, мы можем сделать вывод, что изучаемый процесс (мерцание) носит случайный характер, а периодический компонент практически отсутствует и что в этом процессе имеются неправильные колебания частот до ста герц.

$D_f(\tau)$	Значение
$D_f(\tau_1)$	0,15
$D_f(\tau_2)$	0,13
$D_f(\tau_3)$	0,13
$D_f(\tau_4)$	0,17
$D_f(\tau_5)$	0,19
$D_f(\tau_{10})$	0,24
$D_f(\tau_{20})$	0,38
$D_f(\tau_{40})$	0,64

ЛИТЕРАТУРА

1. Климатологический справочник СССР (вып. 15—а) по Азерб. ССР, Дагестанской и Нахичеванской АССР. М., 1962.
2. Колмогоров А. Н. „ДАН СССР“, 30, 1941, 299.
3. Колмогоров А. Н. „ДАН СССР“, 32, 1941, 19.

Улдузларын сајрышмаларынын өјрәнилмәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Бакынын астроиглиминин өјрәнилмәси илә әлагәдар олараг Хәзәр дәнизи сәвијјәсиндән 120 м жүксәкликдә јерләшән астрономија стан-
сијасындакы АЗТ-7 типли телескопа гошулан электрофотометрлә
улдузларын сајрышмасы өјрәнилир. Фоточәрәјанын флүктуасијалары
осциллографын фотолентинә јазылмышдыр. Сонра бу һадисәнин харак-
тери А. Н. Колмогоров тәрәфиндән ишләнилмиш олан структур ана-
лизи илә тәдгиг едилмишдир. Структур функцијасынын кедишиндән
мә'лум олду ки, сајрышма гәрарлашмыш һадисә дејилдир. О, тәса-
дүфи характер дашыјыр. Периодик рәгсләр демәк олар ки, јохдур.
Бу һадисәдә јалныз периодик олмајан рәгсләр вардыр ки, бунларын
тезлији 100 һс вә даһа жүксәкдир.

В. С. ЭФЕНДИЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ МОЩНОСТИ В ДВУХТАКТНОМ ГАЗОДИЗЕЛЕ

Наиболее важным направлением совершенствования газодизелей является изыскание средств повышения эффективности рабочего про-
цесса при неполных нагрузках и малых дозах запального топлива.

Как показано в работе [4], количественное регулирование мощно-
сти газодизеля дает существенное улучшение рабочего процесса при
частичных нагрузках. Рассмотрим подробнее факторы, влияющие на
рабочий процесс.

При двухтактном процессе введение элементов количественного
регулирования путем уменьшения начального давления воздуха на
впуске P_k связано с ухудшением качества продувки цилиндра.

При снижении P_k уменьшается давление начала и конца сжатия
[P_a, P_c], что может ухудшить условия воспламенения жидкого топлива.

Действительно, снижение P_k в исследованном двухтактном газо-
дизеле ОД-100 при нагрузках 100 и 75% вызывает ухудшение рабо-
чего процесса. Однако при нагрузках меньше 75% уменьшение P_k от
1,37 до 1,10 кг/см² приводило к существенному улучшению индикатор-
ных и эффективных показателей двигателя.

На рис. 1 показано изменение некоторых параметров наполнения в
двухтактном газодизеле ОД-100 при изменении P_k .

Изменение этих параметров оценено расчетным путем с учетом
некоторых опытных данных. Отсюда следует, что при уменьшении
давления воздуха на впуске, а следовательно и его количества, уве-
личиваются γ , T_a и уменьшаются η_v , P_a .

При снижении давления продувки от P_k до P_{k1} коэффициент напол-
нения изменяется от η_v до η_{v1} . Причем отношение

$$\frac{\eta_{v1}}{\eta_v} = \frac{T_a}{T_{a1}} \cdot \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma_1}$$

будет определяться изменением температуры смеси в начале сжатия
 T_a и коэффициента остаточных газов γ . В данную зависимость не
входит P_k . Его влияние сказывается через изменение γ , а следова-
тельно и T_a .

Ввиду трудностей расчетного определения изменения γ и отсутствия
экспериментальных данных по параметрам газообмена в двигателе

Д-100 для оценки его были использованы опытные данные, полученные А. С. Орлиным [1] в МВТУ на двигателе ЯАЗ-204. Согласно этим данным в пределах изменения P_k от 1,40 до 1,10 кг/см² коэффициент остаточных газов γ увеличивается от 0,05 до 0,40.

Расчеты и результаты обработки индикаторных диаграмм (рис. 2) показали, что при уменьшении P_k в исследованных пределах (1,37—1—10 кг/см²) повышается температура конца сжатия (T_c), что обусловлено увеличением относительной доли и температуры остаточных газов.

Таким образом, уменьшение P_k должно не ухудшать, а улучшать условия воспламенения жидкого топлива.

Снижение начального давления воздуха на впуске от P_k до P_{k1} при данной нагрузке уменьшит коэффициент избытка воздуха в цилиндре от

$$\alpha_{ц} = \frac{M_a}{L_0 G_T (1 + \gamma)}$$

до

$$\alpha'_{ц} = \frac{M_{a1}}{L_0 G_T (1 + \gamma_1)},$$

где M_a и M_{a1} — мольные количества воздуха (в смеси с остаточными газами) при P_k и P_{k1} .

Уменьшение коэффициента избытка воздуха благоприятствует

эффективному сгоранию смеси и поэтому для поддержания заданной мощности необходимо уменьшение количества подаваемого в двигатель топлива (газа) до G_T .

Изменение коэффициента избытка воздуха при этом будет определяться отношениями:

$$\frac{\alpha'_{ц}}{\alpha_{ц}} = \frac{P_{k1}}{P_k} \cdot \frac{T_a}{T_{a1}} \cdot \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma_1} \cdot \frac{G_T}{G_{T1}}.$$

Отсюда следует, что на изменение α , кроме γ и T_a , влияет также отношение $\frac{P_{k1}}{P_k}$ (степень дросселирования) и $\frac{G_T}{G_{T1}}$ — отношение цикловых расходов топлива (газа). Уменьшение $\frac{P_{k1}}{P_k}$ уменьшает α и обогащает смесь, а увеличение обедняет ее.

Расход газа и коэффициенты избытка воздуха при уменьшении начального давления воздуха на впуске

	Нагрузка (%)											
	25				50				75			
1. Давление воздуха на впуске P_k , кг/см ²	1,35	1,30	1,20	1,10	1,36	1,30	1,20	1,10	1,37	1,30	1,20	
2. Расход газа G_T , кг/час	15,4	14,8	13,8	11,6	19,5	18,8	16,37	15,3	20,5	21,0	23,0	
3. Коэффициент избытка воздуха газовой смеси α_r	4,50	4,20	3,60	2,86	3,40	3,10	2,72	2,06	3,00	2,70	1,50	
4. Коэффициент избытка воздуха с учетом присадки жидкого топлива $\alpha_{гж}$	3,40	3,14	2,68	2,00	2,70	2,53	2,16	1,57	2,60	2,02	1,23	

Результаты расчетов изменения α_r , приведенные в табл. 1, показывают, что α_r уменьшается непропорционально изменению общего расхода воздуха двигателем, что в некоторой степени обусловлено снижением расхода газа при уменьшении количества воздуха*. Так, при уменьшении общего расхода воздуха от 1380 ($P_k = 1,35$ кг/см²) до 630 кг/час ($P_k = 1,10$ кг/см²), т. е. более чем в два раза, коэффициент избытка воздуха газовой смеси α_r при нагрузке 25% снижается от 4,50 до 2,86 — немного более, чем в 1,5 раза.

Показано [4], что увеличение η_i газодизельного процесса при уменьшении начального давления воздуха на впуске (P_k) обусловлено главным образом улучшением динамики тепловыделения. Улучшение

* Подсчеты α_r проводились с учетом изменения γ и T_a .

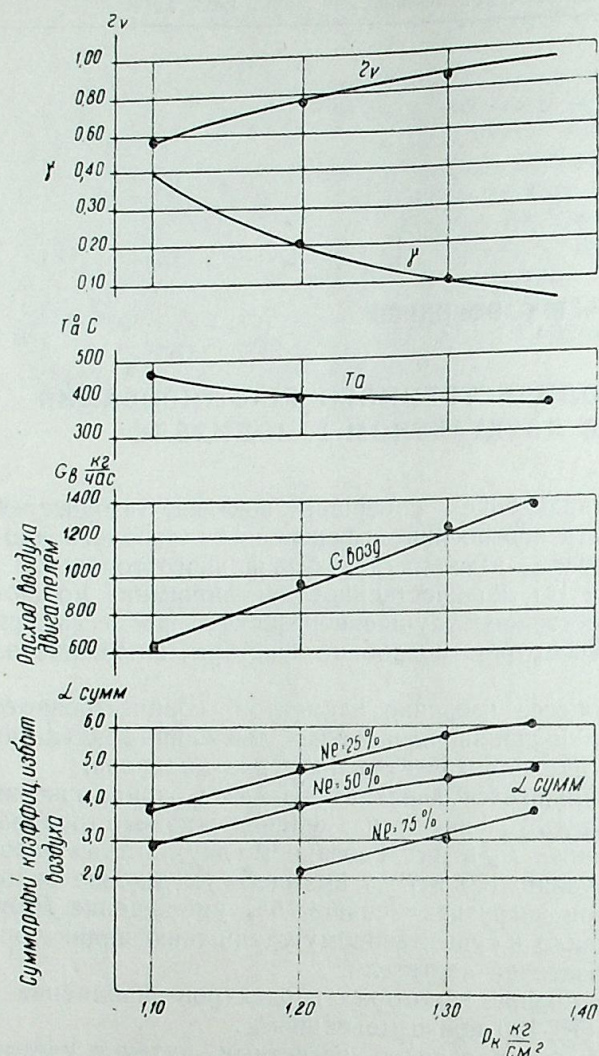


Рис. 1
Изменение некоторых параметров процесса наполнения в зависимости от начального давления воздуха на впуске P_k .

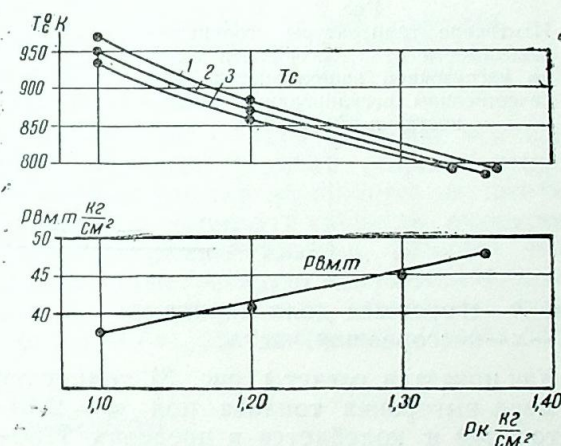


Рис. 2
Изменение температуры и давления в конце сжатия в зависимости от начального давления воздуха на впуске, $n=850$ об/мин:
1— $N_e=75\%$; 2— $N_e=50\%$; 3— $N_e=25\%$.

динамики тепловыделения при этом связано, по-видимому, не только с обогащением смеси. Следует полагать, что в этом случае оказывает определенное влияние повышение температурного уровня теплового процесса.

Для исследования влияния дросселирования воздуха на температурный уровень процесса расчетным путем было определено изменение температуры сгорания в зависимости от доли сгоревшего топлива $T_{сгор.} = f(x)$.

Для определения температурных условий горения расчетным путем по индикаторным диаграммам было найдено изменение температур сгоревшей и несгоревшей частей заряда в зависимости от доли сгоревшего топлива.

При определении температуры несгоревшей части принимается, что каждый сгоревший элемент заряда расширяется адиабатически и сжимает остальные элементы заряда подобно поршню [3]:

$$T_{несг. x} = T_c \left(\frac{P_x}{P_c} \right)^{\frac{n_{несг.} - 1}{n_{несг.}}},$$

где P_x — текущее давление в цилиндре. Как предлагает Расвейлер и Уитроу [2], можно принимать $n_{несг.} = n_1$ (показатель политропы сжатия).

Температура сгоревшей части заряда была определена по данным индикаторной диаграммы об осредненной температуре $T_{оср. x} = f(\varphi)$ и коэффициенте тепловыделения $\xi_x = f(\varphi)$:

$$T_{сгор. x} = \frac{T_{оср. x} - (1-x) T_{несг. x}}{x},$$

где x — сгоревшая доля заряда,
1 — x — несгоревшая часть.

Как показали расчеты (рис. 3), температура сгоревшей части заряда по мере выгорания топлива при $\alpha_r = 2,40-3,40$ остается, примерно, постоянной и колеблется в пределах 1750—1950°K. При дальнейшем увеличении α_r (качественное регулирование $P_k = 1,36 \text{ кг/см}^2 = \text{const}$) не только значительно снижается максимальная температура, но и наблюдается резкое падение ее по мере выгорания топлива.

Этим, главным образом, обусловлено недогорание значительной части заряда в газодизеле при частичных нагрузках, следовательно, больших α_r .

Другая картина получается при снижении начального давления воздуха на впуске. Из рис. 4 следует, что при уменьшении P_k увеличивается температура сгорания и не наблюдается сильного ее падения

по мере выгорания заряда. Повышается температура смеси и в начале воспламенения.

Так, при нагрузке 50% (рис. 4, а) и снижении P_k от 1,37 до 1,10 кг/см², что соответствует уменьшению α_r от 3,40 до 2,06, температура сгоревшей части заряда повышается от 1650 до 2000°K. Причем, по выгорании почти половины топлива $T_{сгор.}$ остается, примерно, постоянной. При нагрузке 25% (рис. 4, б) в том же диапазоне изменения P_k , $T_{сгор.}$ увеличивается от 1550 до 1770°K и при выгорании

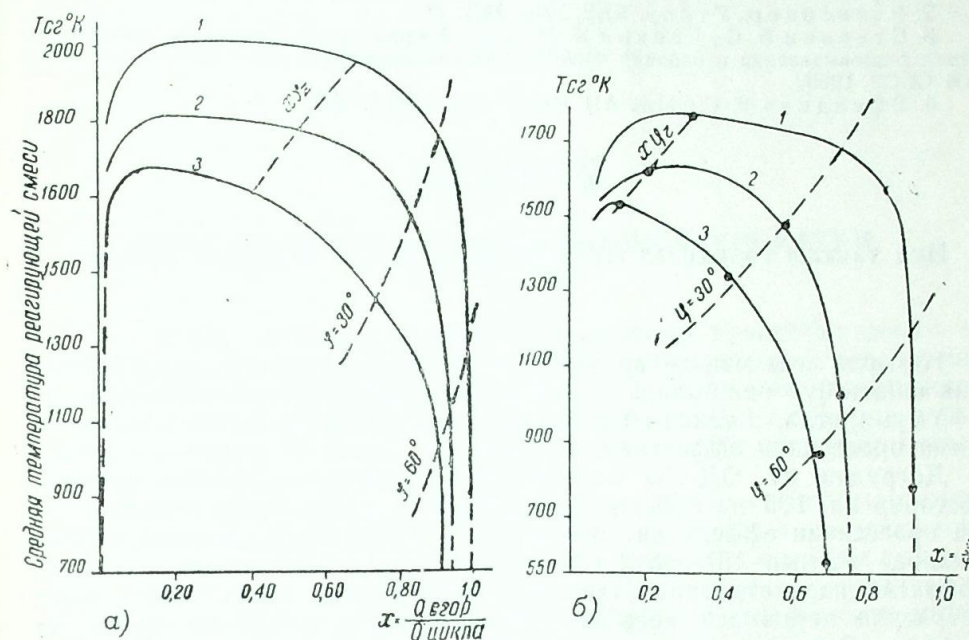


Рис. 4

Изменение температуры сгорания в зависимости от доли сгоревшей смеси при различных давлениях воздуха на впуске P_k ; $n=850 \text{ об/мин}$:
1 — $P_k = 1,37 \text{ кг/см}^2$; 2 — $P_k = 1,20$; 3 — $P_k = 1,10$; а — нагрузка 50%; б — нагрузка 25%

половины топлива падает лишь на 20—30°. Такое снижение температуры сгоревшей части заряда не ухудшает условий сгорания непрореагировавшей смеси, так как температура все же остается достаточно высокой. Рост температуры сгорания повышает скорость окисления метана и способствует полному выгоранию топлива. Влияние этих положительных факторов значительно превалирует над отрицательным влиянием ухудшения продувки и увеличения доли остаточных газов при уменьшении P_k от 1,36 до 1,1 кг/см², при нагрузках меньше 75%

Выводы

1. В исследованном двухтактном газодизеле снижение наполнения посредством уменьшения начального давления воздуха на впуске в пределах от 1,37 до 1,10 кг/см² является весьма эффективным средством улучшения эффективности рабочего процесса двигателя при нагрузках меньше 75%.

2. При снижении начального давления воздуха увеличение доли и температуры остаточных газов приводит к повышению температуры в начале воспламенения. Таким образом, не ухудшаются, а несколько

улучшаются условия воспламенения запального жидкого топлива при снижении P_k в исследованных пределах.

3. Физической причиной улучшения сгорания является повышение температуры сгорания, а главное—ее стабильность на протяжении выгорания основной части топлива.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлин А. С. и Круглов М. С. Двухтактные двигатели. Машгиз, 1960.
2. Расвейлер, Утроу. SAE, 1940. № 1, 12.
3. Стечкин Б. С., Генкин К. И. и др. Индикаторная диаграмма, характеристика тепловыделения и рабочий процесс быстроходных поршневых двигателей. Изд. АН СССР, 1960.
4. Эфендиев В. С. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1961, № 1.

В. С. Эфендиев

Ики тактлы газодизел мұһәррикинде күчүн мигдарла тәнзими

ХҮЛАСӘ

Һазырда әсас мәсәләрдән бири дә газ илә ишләјән мұһәррикләрин ашағы јүк режимләриндә иш ефектинин јахшылашмасыдыр.

Үмүмийәтлә, 2 тактлы просесләрдә һава тәзјигинин (P_k) азалмасы јанма просесинин ефектини азалдыр.

Доғрудан да ОД-100 ики тактлы дизелиндә апарылан тәчрүбә көстәрир ки, 100 вә 75%-ли јүкләрдә, P_k -нын азалмасы мұһәррикин иш просесинин ефектини ашағы салыр. Анчаг 75%-дән ашағы олан јүкләрдә P_k -нын 137-дән $1,10 \text{ кг/см}^2$ -ә гәдәр азалмасы индикатор вә эффектив параметрләрин јахшылашмасына сәбәб олур. Һәммин параметрләрин дәјишмәси һесапланмыш вә график шәклиндә көстәрилмишдир. Сабит јүкдә тәзјигин дәјишмәси цилиндрдә һава артымы әмсалынын (α) азалмасына сәбәб олур ки, онунла да гарышығын јанма ефекти артыр.

Јанманын јахшылашмасынын физики сәбәби јанма температурунун јүксәклији вә онун јанмада бир мүддәт сабит галмасыдыр.

И. А. МАМЕДОВ

ОДНА ИЗ ЗАДАЧ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПРОКАТКИ ПОЛОСЫ

Для более экономического конструирования прокатных станов и вспомогательных оборудований, а также регулирования технологии процесса прокатки с максимальным использованием всех возможностей оборудования необходимо знать кинематические и силовые параметры в процессе прокатки. Изучению этого вопроса посвящены многочисленные работы у нас и за рубежом.

В данной статье рассматривается процесс прокатки полосы между валком и матрицей. Матрица может быть подвижной и неподвижной. При этом предполагаем, что ширина полосы достаточно большая по сравнению с толщиной. В этом случае можно пренебречь уширением и рассматривать задачу как прокатку широкой полосы, решение которой сводится к решению плоской задачи пластичности.

В работе Закса и Клингера [7] показано, что решение задачи тонкостенной трубы с подвижными или неподвижными оправками сводится к решению данной задачи. Ими же показана идентичность некоторых задач волочения труб, прокатки полосы между валком и матрицей. Поэтому решение поставленной задачи имеет большое практическое значение.

Ввиду того, что решению задач прокатки посвящены многочисленные работы, можно сказать, что теория прокатки широкой полосы в определенной мере уже построена. Но при решении задач те или иные авторы делали различные упрощения и получали приближенные результаты.

В работе Кармана [6], опубликованной в 1925 г., впервые дается математическое решение задачи прокатки широкой полосы. При этом Карманом были сделаны некоторые упрощения. В частности, он предполагал валок жестким, недеформируемым. Поэтому при интегрировании уравнения равновесия следовало бы взять контактную кривую как кривую окружности (для плоской задачи). Но ввиду математической трудности и практической нецелесообразности решения многие исследователи при интегрировании уравнения равновесия заменили дугу окружности параболой следующего вида:

$$h = h_0 + \frac{x^2}{R}, \quad (0,1)$$

где R —радиус недеформированного вала, h_0 —толщина полосы после выхода из-под валков, а h —произвольная толщина полосы в очаге деформации.

В дальнейшем А. И. Целиков, исследуя влияние различных факторов на процесс прокатки [3], при интегрировании уравнения равновесия дугу окружности заменил хордой. Это сильно упрощает вычисление.

Точное решение задачи прокатки широкой полосы (как плоская задача теории пластичности) с двумя валками методом характеристик дано в работе К. Г. Шевченко [5]. Но в связи с тем, что задача решается численным методом практическая применимость результатов методом характеристик ограничена.

Позднее нами [1] при интегрировании уравнения равновесия элемента очага деформации (при прокатке изделия в круглом калибре) впервые кантактная кривая была заменена кривой, найденной при исследовании кинематики очага деформации, т. е. при интегрировании уравнения равновесия была учтена деформируемость поверхности вала.

При решении поставленной задачи определяются силовые и кинематические параметры для различных схем прокатки полосы между валком и матрицей и при различных законах трения. Задача решается в следующих условиях и предположениях: пренебрегают касательными напряжениями внутри полосы, изделия предлагаются идеально-пластическими, принимается логарифмический закон деформирования в направлении оси u , компоненты напряжения и скорости деформации в направлении прокатки осреднены, рассматривается стационарный процесс прокатки.

§ 1. Кинематика очага деформации

Схема процесса прокатки полосы валком и матрицей показана на рис. 1. Как видно из этой фигуры, контакты вала и матрицы с металлом непрерывны. Поэтому

толщина полосы не зависит от u и является функцией только x ($h=h(x)$).

В направлении оси u имеют место большие деформации. Положим

$$\epsilon_y = \ln \frac{h(x)}{h_1}, \quad (1.1)$$

где h_1 —толщина полосы при входе, а $h(x)$ —пока неизвестная функция, подлежащая определению.

Тогда скорость деформации в направлении u будет:

$$\epsilon_y = \frac{h'(x)}{h(x)} \cdot u; \quad (1.2)$$

u — компонента вектора скорости в направлении прокатки.

Так как $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, из условия несжимаемости металла ($\epsilon_y = -\epsilon_x$) для определения u получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h'(x)}{h(x)} \cdot u.$$

Интегрируя полученное уравнение и определяя постоянную интегрирования из граничных условий, для u при выходном сечении (т. е. при $x=0$, $u=u_0$) получаем:

$$u = u_0 h_0 h(x)^{-1}, \quad (1.3)$$

где u_0 —скорость течения металла на выходном сечении, которую необходимо определить из эксперимента.

Подставляя значение u в (1.2) и учитывая, что $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, для v получаем следующее значение:

$$v = u_0 h_0 h^{-2}(x) h'(x) \cdot y. \quad (1.4)$$

Для определения $h(x)$ и $h'(x)$ воспользуемся условием пренебрежения касательными напряжениями внутри полосы, которые равносильно нулю следующего выражения:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

После подстановки значения $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ из (1.3) и (1.4), интегрируя полученное уравнение в следующих условиях: $x=0$, $h=h_0$, $x=x_1$, $h=h_1$ для $h(x)$ получаем:

$$h(x) = \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) x + \frac{1}{h_0} \right]^{-1}, \quad (1.5)$$

где h_1 и h_0 , соответственно, толщина полосы до и после прокатки, $h(x)$ —толщина полосы при произвольном x в очаге деформации, а x_1 —координата входного сечения, которое необходимо определить из опыта. Полученная кривая является гиперболой. Расчеты показывают, что эта кривая находится между параболой (0,1) и хордой, проходящими через точки А и В.

Для u , v , ϵ_x и ϵ_y после подстановки значений $h'(x)$ и $h(x)$ окончательно получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u &= u_0 h_0 \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) x + \frac{1}{h_0} \right], \\ v &= u_0 h_0 \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) \right] y, \\ \epsilon_x &= u_0 h_0 \frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right), \\ \epsilon_y &= -u_0 h_0 \frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Как видно из (1.6), u и v являются линейными функциями соответствующих координат, а ϵ_x и ϵ_y —постоянные величины, зависящие от периметров очага деформации.

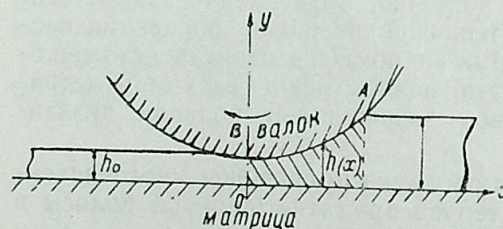


Рис. 1

§ 2. Исследования напряженного состояния

Известно, что для определения напряженного состояния при решении плоской теории пластичности, к которой сводится и решение прокатки широкой полосы, необходимо решать уравнения равновесия вместе с условием пластичности, т. е. следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 &= 4 \end{aligned} \right\} \quad (2,1)$$

Поскольку касательное напряжение внутри полосы равно нулю, то условие пластичности примет вид:

$$\sigma_x + p = 2, \quad (2,2)$$

где σ_y заменена на $-p$.

Схема прокатки показана на рис. 2.

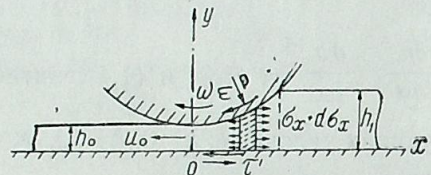


Рис. 2

Вместо уравнений (2,1) в связи с тем, что σ_y не зависит от толщины, при решении задачи приведено уравнение (осредненное) равновесия элемента в очаге деформации по Карману [6]. Это уравнение имеет вид:

$$d[\sigma_x h(x)] + \tau dx \cos \alpha + \tau' dx + p \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} dx = 0, \quad (2,3)$$

где τ — удельная контактная сила трения между металлом и валком, τ' — удельная контактная сила трения между металлом и матрицей, α — угол между касательной и контактной кривой и осью x .

Полагая $\sin \alpha = \frac{dh(x)}{dx}$, при малых значениях α получим:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\sigma_x + p}{h(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx} + \frac{\tau + \tau'}{h(x)} = 0, \quad (2,4)$$

где $h(x)$ определяется по формуле (1,5).

В общем случае τ и τ' являются функциями удельного давления (p) и относительной скорости течения металла, а некоторые авторы при интегрировании уравнения равновесия предполагают их постоянными по всему контакту. Ниже рассматриваются различные случаи законов контактных сил трения.

Заменим переменные согласно (2,2). Тогда получим:

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\tau + \tau'}{h(x)} - \frac{2}{h(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx} = 0. \quad (2,5)$$

Рассмотрим различные схемы прокатки.

1. Пусть валок не приводной, а матрица неподвижна, т. е. рассматриваем волочение полосы между валком и неподвижной матрицей.

В этом случае схема процесса имеет вид, указанный на рис. 3. Так как валок не приводной, то силой трения между валком и металлом можно пренебречь ($\tau=0$). Сила трения между металлом и матрицей направлена против течения металла. Чтобы в этом случае процесс был возможен, необходимо приложить силу натяжения. Допустим, что σ_0 есть натяжение при выходном сечении ($x=0, \sigma_x=\sigma_0$), а τ' — пропорциональна относительной скорости течения, т. е. $\tau' = -\mu p$. При этих предположениях уравнение (2,5) примет следующий вид:

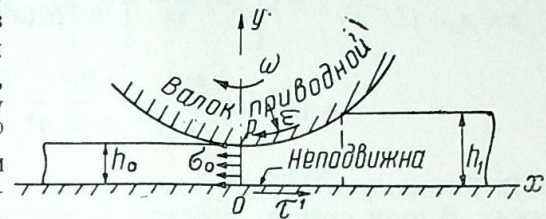


Рис. 3

$$\frac{dp}{dx} + \mu \left[\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) x + \frac{1}{h_0} \right]^2 + 2 \frac{\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right)}{\frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right) x + \frac{1}{h_0}} = 0 \quad (2,6)$$

где μ — коэффициент трения.

После интегрирования с граничным условием следующего вида $x=0, \sigma_x=\sigma_0$, а из (2,2), $p=2-\sigma_0=p_0$, для p получаем

$$p = p_0 + 2 \ln \frac{A}{Ax+B} - \mu \left(\frac{A^2 x^3}{3} + ABx^2 + B^2 x \right), \quad (2,7)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{x_1} \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right), \quad \text{а } B = \frac{1}{h_0}.$$

На рис. 4 приведены графики распределения удельного давления в очаге деформации при значении параметров $h_0=2\text{ мм}, h_1=4\text{ мм}$ и $0 \leq x \leq x_1=30\text{ мм}$, а также при различных значениях коэффициента силы трения:

$$0,05 \leq \mu \leq 0,4.$$

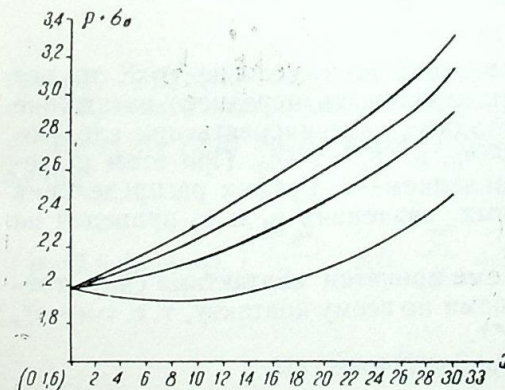


Рис. 4

По такой же схеме, если взять τ' как функцию от удельного давления, т. е. положить $\tau' = -\mu' p$, получаем:

$$\frac{dp}{dx} + \mu (Ax+B) p + 2 \frac{A}{Ax+B} = 0. \quad (2,8)$$

Общий интеграл последнего имеет вид:

$$p = l^{-\int \mu (Ax+B) dx} \left[C_3 - 2 \int \frac{A}{Ax+B} l^{\int \mu (Ax+B) dx} dx \right].$$

После вычисления интеграла и учета граничного условия получим:

$$p = p_0 - l^{\mu \left(\frac{Ax^2}{2} + Bx \right)} \left\{ l^{-\frac{B^2}{2A}} \left[\ln |K(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n K^n(x)}{2^n \cdot n \cdot n! A^n} - \ln B^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n B^{2n}}{2^n \cdot n \cdot n! A^n} \right] \right\}. \quad (2,9)$$

2. Рассмотрим случай, когда валок приводной, а матрица неподвижна. В этом случае процесс возможен, если сила трения между валком и металлом больше силы трения между металлом и матрицей ($\tau > \tau'$). Схема прокатки полосы в этом случае имеет вид, показанный на рис. 5. Положим, что τ и τ' являются функцией только удельного давления, т.е. имеют вид:

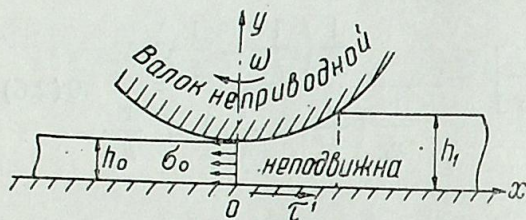


Рис. 5

$$\tau = \pm \mu_1 p,$$

$$\tau' = -\mu_2 p,$$

где μ_1 и μ_2 — соответствующие коэффициенты трения, тогда из уравнения

(2,5) получаем:

$$\frac{dp}{dx} + (\mu_2 \pm \mu_1)(Ax+B)p + 2 \frac{A}{Ax+B} = 0. \quad (2,10)$$

Интегрирование уравнения (2,10) при условии $x=0, \sigma_x=0, p=2$ дает

$$p = 2 - l^{-\mu(\mu_2 \pm \mu_1)} \left(\frac{Ax^2}{2} + Bx \right) \left\{ l^{-\frac{B^2}{2A}} \left[\ln |K(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \pm \mu_1)^n K^n(x)}{2^n n \cdot n! A^n} - \ln B^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \pm \mu_1)^n B^{2n}}{2^n n \cdot n! A^n} \right] \right\}, \quad (2,11)$$

где $K(x) = B^2 + Ax^2 + 2ABx$.

В данном случае, если не удовлетворяется условие $\tau > \tau'$, то для возможности процесса необходимо приложить переднее натяжение (σ_0). Тогда уравнение (2,10) необходимо интегрировать при следующем граничном условии: $x=0, \sigma_x=\sigma_0, p=p_0=2-\sigma_0$. При этом решение (2,11) изменится только прибавлением $-\sigma_0$. График распределения в очаге деформации при различных значениях μ_1 и μ_2 приведен на рис. 6 (а, б).

Предположим, что в данной схеме прокатки контактные силы трения являются постоянными величинами по всему контакту, т.е. $\tau = -\tau^*$, $\tau' = \tau^{**}$, $\tau^* > 0$, $\tau^{**} > 0$, причем $\tau^* > \tau^{**}$.

Из уравнения (2,5) в этом случае получим:

$$\frac{dp}{dx} + \frac{\tau^* + \tau^{**}}{h(x)} + 2 \frac{A}{Ax+B} = 0.$$

После интегрирования и определения постоянной из граничных условий: $x=0, x=x_1, p=2$ для p получим следующее выражение:

$$p = 2 + 2 \ln B - \frac{2 \ln B + 2 \ln D}{\frac{Ax_1^2}{2} + Bx_1} \left(\frac{Ax_1^2}{2} + Bx \right) - 2 \ln (Ax+B). \quad (2,12)$$

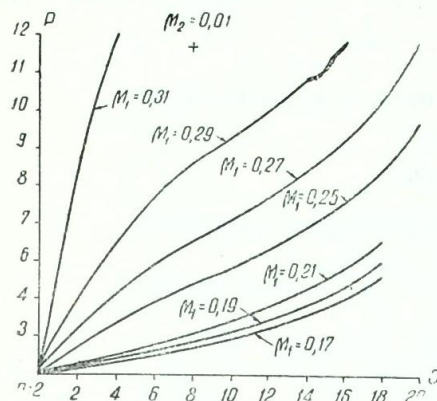


Рис. 6 а

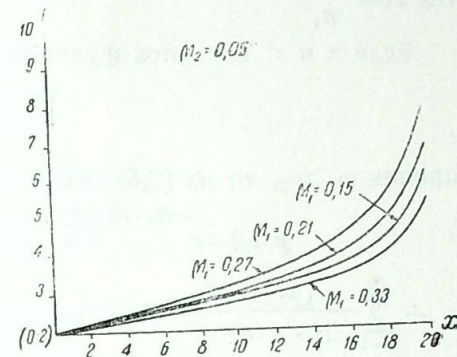


Рис. 6 б

3. Предположим, что имеет место прокатка полосы валком и подвижной матрицей. Предположим также, что в этом случае валок приводной.

Пусть коэффициенты трения на обоих контактах одинаковы, т.е. $\mu_1 = \mu_2$. В этом случае для осуществления процесса необходимо приложить натяжение. Допустим, что σ_0 является передним натяжением. Из уравнения (2,5) после интегрирования и определения постоянных интегрирования получим:

$$p = 2 - 2 \ln B + 2 \ln (Ax+B) - \sigma_0. \quad (2,13)$$

Пусть силы трения являются функциями относительной скорости течения, т.е.

$$\tau = -\mu_1 (u_B - u),$$

$$\tau' = -\mu_2 (u_M - u),$$

где u_B — окружная скорость вала,

u_M — скорость движения матрицы.

Тогда из (2,5) после интегрирования, при условии $x=0, p=2$, получим:

$$p = 2 + (\mu_1 + \mu_2) \left(\frac{A^2 x^3}{3} + AB \frac{x^2}{2} + B^2 x \right) - (\mu_1 u_B + \mu_2 u_M) \left(\frac{Ax^2}{2} + Bx \right) - 2 \ln (Ax+B) + 2 \ln B. \quad (2,14)$$

Так как при $x=x_1, p=2$, то окончательно получим:

$$p=2+\frac{\left[2\left(\frac{A^2x^3}{3}+AB\frac{x^2}{2}+B^2x\right)-(u_v+u_m)\left(\frac{Ax^2}{2}+Bx\right)\right](2\ln D-2\ln B)}{2\left(\frac{A^2x_1^3}{3}+AB\frac{x_1^2}{2}+B^2x_1\right)-(u_v-u_m)\left(\frac{Ax_1^2}{2}+Bx_1\right)}-2\ln(Ax+B)+2\ln B, \quad (2,15)$$

где $\mathcal{D} = \frac{1}{h_1}$.

Если τ и τ' являются функциями от p , т. е. имеет место:

$$\begin{aligned}\tau &= \pm \mu_1 p, \\ \tau' &= -\mu_2 p,\end{aligned}$$

причем $\mu_1 > \mu_2$, то из (2,5) после интегрирования получаем:

$$p=2-e^{-\frac{(\mu_2 \mp \mu_1)}{2A} \left(\frac{Ax^2}{2} + Bx\right)} \left\{ e^{-\frac{(\mu_2 \mp \mu_1)}{2A} Bx} \left[\ln |K(x)| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \pm \mu_1)^n}{2^n \cdot n \cdot n! \cdot A^n} K^n(x) - 2\ln B^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu_2 \pm \mu_1)}{2^n \cdot n \cdot n! \cdot A^n} B^{2n} \right] \right\}. \quad (2,16)$$

В рассмотренных случаях предполагается, что контактные силы трения между валком и металлом направлены в одном направлении. Не представляет трудности разделить очаг деформации на две зоны (зону отставания и зону опережения) и решить задачу отдельно для обеих зон. При этом вид полученных решений в общем не изменится. При определении постоянных интегрирования уравнения равновесия необходимо пользоваться граничными условиями на границе двух зон.

Несмотря на то, что некоторые формулы на первый взгляд кажутся трудными, при их практическом применении, при современных возможностях вычислительной техники ими можно пользоваться.

При конструировании волочильных станов целесообразно построить формы очага деформации по формуле (1,5). При этом касательные напряжения внутри изделия будут отсутствовать, качество изделия, соответственно, будет высоким.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов И. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“ 1961, № 6.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности, ГИТТЛ, 1450.
3. Целиков А. И. „Металлург“, 1939, № 6.
4. Целиков А. И. Распределение удельного давления по дуге захвата. Сталь, 1944, № 5-6.
5. Шевченко К. Н. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1962, № 3,4.
6. Karman. Beitrag zur theorie des wolvorganges, ZAMM, Bd 5, 1925.
7. Sachs G. and Klingler L. J. „J. appl. mech“, vol. 14, 1947, № 2.

И. А. Маммэдов

Листин јајылмасынын симметрик олмајан бир мөсэлэси

ХҮЛАСЭ

Ишдэ листин вал вэ матриса илэ јајылмасы просеси тэдгиг едилир-Бу налда илк дэфэ олараг валын сэтһинин деформасијасы нэзэрэ алын.

мышдыр. Валын сэтһинин деформасијасы деформасија зонасынын кинематикасы өјрөнилэркэн тэјин олунур.

Материал идеал-пластик көтүрүлүр, у оху истигамэтиндэ деформасија гануну логарифмик ганун һесаба олунур. Дахилдэ тохунан кэркинлик нэзэрэ алынмыр.

Мөсэлэнин һөллиндө мүхтәлиф схемләр арашдырылыр вэ мүхтәлиф сүртүнмә һаллары үчүн ујғун һесаблама формуллары вэ графикләр гурулмушдур.

И. А. АСЛАНОВ

РЕДУКЦИИ К СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ СОЛНЦА

В связи с тем, что за последние годы возросли технические возможности в измерении скорости осевого вращения Солнца возникла необходимость в улучшении методов измерения сдвигов линий. Известно, что для определения скорости вращения Солнца при редукциях необходимо ввести в измерения следующие поправки: 1) за обращение земли вокруг Солнца на луч зрения и 3) за осевое вращение Земли.

В зависимости от активности Солнца необходимость введения добавочных небольших поправок (ввиду флюктуаций в сдвигах) может быть специально оговорена.

Г. Лоренцони [5] (Lorenzoni) и А. Рикко [6] (Ricco), а также Н. Дунером [4] указанные поправки были внесены в таблицу для разного времени года. Однако в настоящее время эти таблицы не применяются потому, что они недостаточно удобны, недостаточно точны или неуниверсальны.

Таблицы Лоренцони неточны и составлены не для всех гелиографических широт. Поэтому для редукций при определении скорости осевого вращения Солнца необходимы дополнительные расчеты.

Таблицы Дунера точнее, но все же недостаточно пригодны для упомянутой цели, кроме того, они не вполне применимы по причинам, указанным ниже.

Таблицы Рикко, в отличие от предыдущих, более универсальны, но они слишком обширны и составлены недостаточно точно. Точность в доли градуса и грубее недостаточна при изучении изменения скорости осевого вращения Солнца и вообще интерпретации сдвигов фраунгоферовых линий.

Необходимо отметить, что Е. Я. Перепелкиным [3] для введения поправки были составлены соответствующие номограммы, точность которых, однако, тоже невысока, около $0^{\circ},5$.

1934 г. Ф. Цагар [7] (F. Zagar) составил новые, более полные, компактные и практически удобные таблицы, точность которых $0^{\circ},05$, что вполне достаточно.

В настоящее время они являются библиографической редкостью. В связи с этим мы коротко пересказываем сущность составления этих таблиц и воспроизводим численные значения. Это тем более необходимо, поскольку статья опубликована на итальянском языке.

И. А. АСЛАНОВ

РЕДУКЦИИ К СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ СОЛНЦА

В связи с тем, что за последние годы возросли технические возможности в измерении скорости осевого вращения Солнца возникла необходимость в улучшении методов измерения сдвигов линий. Известно, что для определения скорости вращения Солнца при редукциях необходимо ввести в измерения следующие поправки: 1) за обращение земли вокруг Солнца на луч зрения и 3) за осевое вращение Земли.

В зависимости от активности Солнца необходимость введения добавочных небольших поправок (ввиду флюктуаций в сдвигах) может быть специально оговорена.

Г. Лоренцони [5] (Lorenzoni) и А. Рикко [6] (Ricco), а также Н. Дунером [4] указанные поправки были внесены в таблицу для разного времени года. Однако в настоящее время эти таблицы не применяются потому, что они недостаточно удобны, недостаточно точны или неуниверсальны.

Таблицы Лоренцони неточны и составлены не для всех гелиографических широт. Поэтому для редукций при определении скорости осевого вращения Солнца необходимы дополнительные расчеты.

Таблицы Дунера точнее, но все же недостаточно пригодны для упомянутой цели, кроме того, они не вполне применимы по причинам, указанным ниже.

Таблицы Рикко, в отличие от предыдущих, более универсальны, но они слишком обширны и составлены недостаточно точно. Точность в доли градуса и грубее недостаточна при изучении изменения скорости осевого вращения Солнца и вообще интерпретации сдвигов фраунгоферовых линий.

Необходимо отметить, что Е. Я. Перепелкиным [3] для введения поправки были составлены соответствующие номограммы, точность которых, однако, тоже невысока, около $0^{\circ},5$.

1934 г. Ф. Цагар [7] (F. Zagar) составил новые, более полные, компактные и практически удобные таблицы, точность которых $0^{\circ},05$, что вполне достаточно.

В настоящее время они являются библиографической редкостью. В связи с этим мы коротко пересказываем сущность составления этих таблиц и воспроизводим численные значения. Это тем более необходимо, поскольку статья опубликована на итальянском языке.

Прежде чем вводить поправку скорости осевого вращения Солнца, необходимо знать точную гелиографическую широту наблюдаемой точки. Этот вопрос был рассмотрен [1—2] нами ранее (необходимые численные расчеты приведены ниже).

На рис. 1 представлена проекция диска Солнца на плоскость касательной к небесной сфере. Вводятся следующие обозначения: wP_NEP_S — видимый диск Солнца с центром в S ; $P_N S$ и $P_N' S$ — проекция кругов отклонений и широт, соответственно; P_N — точка пересечения направления на северный полюс мира; P_N' — направления на северный полюс эклиптики с краем Солнца; ESw — проекции плоскости эклиптики на диск Солнца; направление на Землю T соответствует перпендикуляру к видимой диску Солнца из точки S (поэтому схематично $S = T$); P_S — северный полюс оси вращения Солнца; RQ — дуга по экватору Солнца, от которой отсчитывается гелиографическая широта φ_{hel} и вдоль которой от восходящего узла эклиптики Q отсчитывается гелиографическая долгота; $PP_S S$ — проекция меридиана Солнца; $P_S O$ — дуга большого круга, соединяющая северный полюс оси вращения Солнца с точкой наблюдения O , равная $90^\circ - \varphi_{hel}$; $P_N O = P$ — дуга, соответствующая углу положения точки наблюдения, а $P_N P = P$ — углу положения северного полюса оси вращения Солнца и $P_N P_N'$ — углу положения точки пересечения края Солнца с направлением к северному полюсу эклиптики (то есть углу между кругом склонений и кругом широт); все эти три угла отсчитываются от точки пересечения направления на P_N с краем Солнца к востоку.

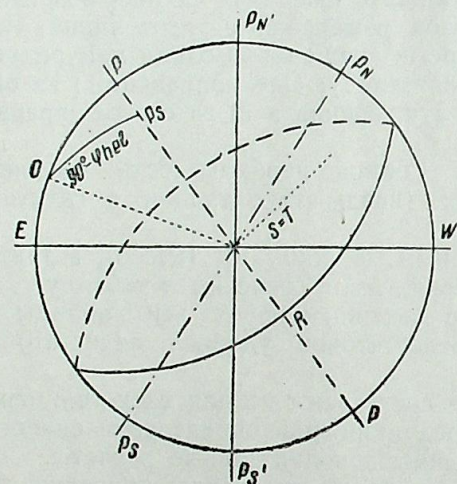


Рис. 1

Соответствующая дуга проектируется на рис. 1 в виде прямого отрезка SR .

Очевидно, этот угол есть φ_{hel} (то есть гелиографическая широта Земли). Из рисунка видно, что дуга большого круга PP_S (проектируется также прямым отрезком) равна B_0 .

Из сферического треугольника $OP_S P$ имеем

$$\cos(90^\circ - \varphi_{hel}) = \cos(p - P) \cos B_0. \quad (1)$$

Из ежегодника (например, Астрономический ежегодник СССР за истекший год) имеем P, B_0 на момент наблюдения, угол p известен из данных наблюдений. Уравнение (1) дает φ_{hel} .

Как видно из (1), для противоположных значений (в смысле знака) $(p - P)$ и B_0 соответствует одно и то же φ_{hel} .

Для облегчения редукции Цагар составил табл. 1. В ней проводится по аргументу $(p - P)$ и B_0 поправка, которую следует прибавить

Таблица 1

$B_0 \backslash p-P$	0°0	0°5	1°0	1°5	2°0	2°5	3°0	3°5	4°0	4°5	5°0	5°5	6°0	6°5	7°0	7°5	$B_0 \backslash p-P$
0°	0°0	0°5	1°0	1°5	2°0	2°5	3°0	3°5	4°0	4°5	5°0	5°5	6°0	6°5	7°0	7°5	180°
1	.0	.1	0.4	0.8	1.2	1.7	2.2	2.6	3.1	3.6	4.1	4.6	5.1	5.6	6.1	6.6	179
2	.0	.1	.2	.5	0.8	1.2	1.6	2.0	2.5	2.9	3.4	3.9	4.3	4.8	5.3	5.8	178
3	.0	.0	.2	.4	.6	0.9	1.2	1.6	2.0	2.4	2.8	3.3	3.7	4.2	4.6	5.1	177
4	.0	.0	.1	.3	.5	.7	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.1	4.5	176
5	.0	.0	.1	.2	.4	.6	0.8	1.1	1.4	1.7	2.1	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0	175
6	.0	.0	.1	.2	.3	.5	.7	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.5	2.8	3.2	3.6	174
7	.0	.0	.1	.2	.3	.4	.6	.8	1.1	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.9	3.2	173
8	.0	.0	.1	.1	.2	.4	.5	.7	0.9	1.2	1.4	1.7	2.0	2.3	2.6	2.9	172
9	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.5	.7	.8	1.1	1.3	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	171
10	.0	.0	.0	.1	.2	.3	.4	.6	.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.9	2.2	2.5	170
11	.0	.0	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.8	2.0	2.3	169
12	.0	.0	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.9	2.1	168
13	.0	.0	.0	.1	.2	.2	.3	.5	.6	.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	2.0	167
14	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.7	.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	166
15	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.8	1.0	1.1	1.3	1.5	1.7	165
16	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	0.9	1.1	1.2	1.4	1.6	164
17	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.3	.5	.6	.7	.8	1.0	1.2	1.3	1.5	163
18	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.2	.3	.4	.5	.7	.8	0.9	1.1	1.3	1.5	162
19	.0	.0	.0	.1	.1	.2	.2	.3	.4	.5	.6	.8	.9	1.0	1.2	1.4	161
20	.0	.0	.0	.1	.1	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	1.0	1.1	1.3	160

$B_0 \backslash p-P$	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	6.5	7.0	7.5	$B_0 \backslash p-P$
20°	0°0	0°1	0°2	0°4	0°6	0°8	1°0	1°1	1°3	160°
21	.0	.1	.2	.4	.6	.8	.9	1.1	1.2	159
22	.0	.1	.2	.3	.5	.8	.9	1.0	1.2	158
23	.0	.1	.2	.3	.5	.7	.9	1.0	1.1	157
24	.0	.1	.2	.3	.5	.7	.8	0.9	1.1	156
25	.0	.1	.2	.3	.5	.7	.8	.9	1.0	155
26	.0	.1	.2	.3	.4	.6	.7	.9	1.0	154
27	.0	.1	.2	.3	.4	.6	.7	.8	0.9	153
28	.0	.1	.1	.3	.4	.6	.7	.8	.9	152
29	.0	.1	.1	.3	.4	.6	.7	.8	.9	151
30	.0	.1	.1	.2	.4	.5	.6	.7	.8	150
31	.0	.1	.1	.2	.4	.5	.6	.7	.8	149
32	.0	.1	.1	.2	.3	.5	.6	.7	.8	148
33	.0	.1	.1	.2	.3	.5	.6	.7	.7	147
34	.0	.1	.1	.2	.3	.5	.5	.6	.7	146
35	.0	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	145

$B_0 \backslash p-P$	2°0	3°0	4°0	5°0	6°0	7°0	7°5	$B_0 \backslash p-P$
35°	0°0	0°1	0°2	0°3	0°4	0°6	0°7	145
36	.0	.1	.2	.3	.4	.6	.7	144
38	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	142
40	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	140
42	.0	.1	.2	.2	.3	.5	.5	138
44	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.5	136
46	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.5	134
48	.0	.1	.1	.2	.3	.4	.4	132
50	.0	.1	.1	.2	.2	.3	.4	130
52	.0	.1	.1	.2	.2	.3	.4	128
54	.0	.1	.1	.2	.2	.3	.4	126
58	.0	.0	.1	.1	.2	.3	.3	122
66	.0	.0	.1	.1	.1	.2	.2	114
74	.0	.0	.0	.1	.1	.1	.1	106
82	.0	.0	.0	.0	.0	.1	.1	98
90	.0	.0	.0	.0	.0	.0	.0	90

к $(p - P)$, чтобы получить $90^\circ - \varphi_{\text{hel}}$. Эта таблица годится как для положительных, так и для отрицательных значений $(p - P)$ и B_0 . Поправки можно прибавить к абсолютному значению $(p - P)$ с плюсом и минусом, в зависимости от того, будет ли абсолютное значение $(p - P)$ с поправкой больше или меньше 90° .

Из смещения или сдвигов спектральных линий двух диаметрально противоположных краев Солнца, сфотографированных одновременно, мы получим суммарную скорость по лучу зрения $2v_0$.

Пусть $v_{0,r}$ — истинная скорость осевого вращения Солнца по лучу зрения. Эта компонента суммируется с компонентами скорости по лучу зрения, обусловленным орбитальным обращением и осевым вращением Земли т. д. Это и дает фактически измеренную проекцию скорости на луч зрения $\frac{1}{2}(2v_0)$.

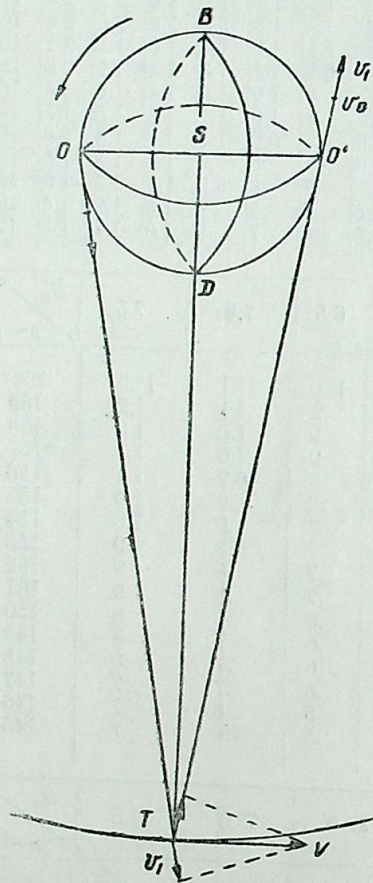


Рис. 2

При определении $2v_0$ мы, естественно, допускаем, что она по абсолютному значению одна и та же в двух диаметрально противоположных точках диска Солнца. С учетом сказанного очевидно, что $2v_0$ изменяется со временем.

Пусть на рис. 2 $OBO'D$ — Солнце, O и O' — две точки наблюдения, S — центр Солнца, T — Земля. Можем принять, что орбитальная скорость Земли V всегда перпендикулярна к радиусу-вектору Солнце — Земля ST . Если бы точки наблюдения находились в плоскости эклиптики,

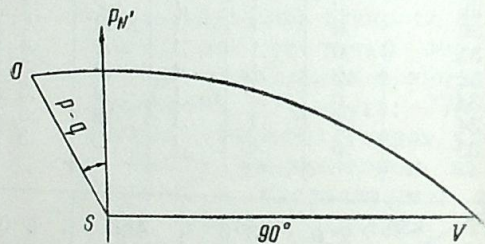


Рис. 3

тогда компоненты скорости орбитального обращения Земли по лучу зрения была бы $v_1 = V \sin \frac{R_0}{r}$. Если же указанные точки вне эклиптики, то компонента V по лучу зрения будет $V \cos \rho$, где ρ — угол между направлением движения Земли и лучом зрения.

Рис. 3 получается после проекции на небесную сферу пентра Солнца S , наблюдаемой точки O и апекса движения Земли V . На этом рисунке $SO = R_0$; $SV = 90^\circ$; $OCV = 90^\circ + p - q$; $OV = \rho$. Из треугольника OSV имеем

$$\cos \rho = -\sin \frac{R_0}{r} \sin(p - q).$$

Знак $\cos \rho$ к востоку отрицателен, а к западу — положителен и не указывает направления компоненты. Для нашей поправки достаточно иметь абсолютную величину:

$$v_1 = V \sin \frac{R_0}{r} |\sin(p - q)|, \quad (2)$$

где

$$V = AV \sqrt{k \frac{1}{1+m}} \sqrt{\frac{1}{r} - 1} \quad \cos q = \frac{\cos \epsilon}{\cos \delta_0}. \quad (2')$$

Здесь r — радиус-вектор Солнце — Земля, выраженный в астрономических единицах, δ_0 — склонение Солнца, ϵ — наклонение экватора к эклиптике. Все эти данные приводятся в астрономическом ежегоднике. Коэффициент $A = 1730,37$, тогда V получается в км/сек.

k — постоянный множитель; он изображает силу притяжения двух масс, равных единице, удаленных одна от другой на единицу расстояния.

m — масса Земли, выраженная в единицах массы Солнца.

На основании этих формул Цагар и составил вторую таблицу, которая также облегчает редукции. Эта таблица состоит из двух частей. Первая часть позволяет по датам наблюдения найти q , потом, составляя $(p - q)$ для точки наблюдения и зная даты наблюдения, во второй части таблицы мы получаем поправку v_1 , в тысячных долях км/сек. Эту поправку надо прибавить к v_0 . Только для высоких широт (больше, чем 83°), для которых северная наблюдаемая точка удовлетворяет условию $|p - q| < |P - q|$, поправку v_1 нужно вычитать из v_0 .

В табл. 2 интерполяция сведена до минимума.

Вторая поправка связана с тем, что измеряется не истинная скорость v_0 наблюдаемой точки, а ее компонента по лучу зрения. Только в случае, когда точка P_s (рис. 1) окажется на краю, будет измеряться полная скорость данной точки. Если мы обозначим через v_0 истинную скорость и через η угол между направлением измеряемой компоненты v_0 и направляемым измеряемой компоненты, тогда получим

$$(v_0 + v_1) = v_0 \cos \eta, \quad v_0 = (v_0 + v_1) \sec \eta. \quad (3)$$

Из сферического треугольника на рис. 1, который мы рассматривали получаем

$$\operatorname{ctg} \eta = \operatorname{ctg} B_0 \sin(p - P). \quad (4)$$

Третья таблица Цагара вычислена по формуле (4) и дает непосредственно множитель $\sec \eta$ как функцию $(p - P)$ и B_0 . Она разделена на несколько частей, в зависимости от гелиографической широты наблюдаемой точки, чтобы повысить точность редукции.

Следует отметить, что результаты редукций наблюдателей (Адамса и других), которые пользовались таблицами Дунера, в известной мере ошибочны.

Таблица 2

Дата	Разность	q	разность в град.	Дата	Разность дней	$p-q$	1	15	2	17	2	$p-q$
							январ.	февр.	апр.	мая	июля	
							31	16	1	17	2	
							дек.	нояб.	окт.	авг.	июля	
Сентябрь	24	11	+23.4	Сентябрь	23	11	0°	180°	0	0	0	180° 360°
Октябрь	5	10	23.0	"	12	11	1	179	3	2	2	181 359
"	15	6	22.0	"	1	11	2	178	5	5	5	182 358
"	21	6	21.1	Август	26	6	3	177	8	7	7	183 357
"	27	4	19.9	"	4	6	4	176	10	10	9	184 356
"	31	4	19.1	"	16	4	5	175	13	12	12	185 355
Ноябрь	4	4	18.0	"	11	5	6	174	15	15	14	186 354
"	8	3	16.9	"	7	4	7	173	17	17	16	187 353
"	11	3	16.0	"	4	3	8	172	20	19	19	188 352
"	14	3	15.1	"	1	3	9	171	22	22	21	189 351
"	18	4	13.9	Июль	28	4	10	170	25	25	24	190 350
"	21	3	12.8	"	25	3	11	169	27	26	26	191 349
"	24	2	11.8	"	22	3	12	168	30	29	28	192 348
"	26	3	10.9	"	19	3	13	167	32	31	30	193 347
Декабрь	29	2	9.8	"	16	2	14	166	35	34	33	194 346
"	1	3	9.0	"	14	2	15	165	37	36	35	195 345
"	4	2	7.8	"	11	3	16	164	40	39	37	196 344
"	6	2	7.0	"	9	3	17	163	42	41	39	197 343
"	8	3	6.0	"	6	2	18	162	44	43	41	198 342
"	11	2	5.0	"	4	3	19	161	47	46	44	199 341
"	13	2	4.0	"	1	2	20	160	49	47	46	200 340
"	15	2	3.0	Июнь	29	2	21	159	51	51	49	201 339
"	17	3	2.2	"	27	3	22	158	54	53	52	202 338
"	20	2	1.0	"	24	3	23	157	56	56	54	203 337
"	22	2	0.0	"	22	2	24	156	58	58	55	204 336
"	24	2	-1.0	"	19	2	26	154	63	62	61	205 335
"	26	3	1.8	"	17	3	28	152	67	67	65	206 334
"	29	2	3.0	"	14	3	30	150	72	71	69	207 333
Январь	31	2	4.0	"	12	2	32	148	76	75	74	208 332
"	2	2	5.0	"	10	3	34	146	80	79	78	209 331
"	4	3	5.8	"	7	2	36	144	84	84	82	210 330
"	7	2	7.0	"	5	3	38	142	88	87	85	211 329
"	9	2	7.9	"	2	2	40	140	92	91	89	212 328
"	11	3	8.7	Май	31	3	42	138	96	95	93	213 327
"	14	3	9.9	"	28	3	44	136	100	99	96	214 326
"	17	2	11.0	"	25	3	46	134	103	102	97	215 325
"	19	3	11.8	"	22	3	48	132	107	106	101	216 324
"	22	3	12.9	"	19	3	50	130	110	109	106	217 323
"	25	3	13.9	"	16	3	52	128	113	112	109	218 322
"	28	3	14.9	"	13	3	54	126	116	115	112	219 321
"	31	3	15.9	"	10	3	56	124	119	118	115	220 320
Февраль	4	4	17.1	Май	6	4	58	122	122	121	118	221 319
"	7	3	17.9	"	2	4	60	120	124	123	117	222 318
"	11	5	18.9	Апрель	28	5	62	118	127	125	122	223 317
"	16	5	20.0	"	23	5	64	116	129	128	125	224 316
"	21	7	21.0	"	18	5	68	112	133	132	129	225 315
"	28	9	22.1	"	11	10	72	108	136	135	132	226 314
Март	9	12	23.0	"	1	11	76	104	139	138	135	227 313
"	21	12	23.4	Март	21	11	80	100	141	140	137	228 312
							90	90	144	142	139	229 311
												230 310
												231 309
												232 308
												233 307
												234 306
												235 305
												236 304
												237 303
												238 302
												239 301
												240 300
												241 299
												242 298
												243 297
												244 296
												245 295
												246 294
												247 293
												248 292
												249 291
												250 290
												251 289
												252 288
												253 287
												254 286
												255 285
												256 284
												257 283
												258 282
												259 281
												260 280
												261 279
												262 278
												263 277
												264 276
												265 275
												266 274
												267 273
												268 272
												269 271
												270 270

Таблицы Дунера годятся только тогда, когда оба угла ($p-q$) и ($P-q$) имеют один и тот же знак. Например, обрабатывая наблюдения по таблицам Дунера, вычисленная Адамсом v_1 для пластинки № 19 12/1 1906 г. (углы ($p-q$) лежат между 0 и 90°, а ($p-q$) = -15°, 2) правильная, но для пластинки № 130 19/X 1906 г. (углы ($p-q$) лежат между 0 и -90°, а ($p-q$) = 4°, 8) неправильная.

Таблица 3

Т а б л и ц а 3														
$p-P$ \ B_0	0°.0	0°.5	1°.0	1°.5	2°.0	2°.5	3°.0	3°.4	3°.8	4°.2	4°.6	5°.0	B_0 \ $p-P$	
90°	1.0000	.0000	.0002	.0003	.0006	.0010	.0014	.0018	.0022	.0027	.0032	.0038	90°	
80	1.0000	.0000	.0002	.0004	.0006	.0010	.0014	.0018	.0023	.0028	.0033	.0039	100	
70	1.0000	.0000	.0002	.0004	.0007	.0011	.0016	.0020	.0025	.0030	.0037	.0043	110	
60	1.0000	.0001	.0002	.0005	.0008	.0013	.0018	.0024	.0029	.0036	.0043	.0051	120	
50	1.0000	.0001	.0003	.0006	.0010	.0016	.0023	.0030	.0038	.0046	.0055	.0065	130	
40	1.0000	.0001	.0004	.0008	.0015	.0023	.0033	.0043	.0053	.0065	.0078	.0092	140	
36	1.0000	.0001	.0004	.0010	.0018	.0028	.0040	.0051	.0064	.0078	.0093	.0110	144	
32	1.0000	.0001	.0005	.0012	.0022	.0034	.0049	.0063	.0078	.0096	.0115	.0135	148	
28	1.0000	.0002	.0007	.0016	.0028	.0043	.0062	.0080	.0100	.0122	.0146	.0172	152	

$p-P \backslash B_0$	0° 0	0° 5	1° 0	1° 5	2° 0	2° 5	3° 0	3° 4	3° 8	4° 2	4° 6	5° 0	5° 2	5° 4	$B_0 \backslash p-P$
28	1.000	.000	.001	.002	.003	.004	.006	.008	.010	.012	.015	.017	.019	.020	152°
24	1.000	.000	.001	.002	.004	.006	.008	.011	.013	.016	.019	.023	.025	.027	156
20	1.000	.000	.001	.003	.005	.008	.012	.015	.019	.023	.027	.032	.035	.037	160
18	1.000	.000	.002	.004	.006	.010	.014	.018	.023	.028	.033	.039	.042	.046	162
16	1.000	.001	.002	.005	.008	.012	.018	.023	.029	.035	.042	.049	.053	.057	174
14	1.000	.001	.003	.006	.010	.016	.023	.030	.037	.045	.054	.063	.068	.074	166
13	1.000	.001	.003	.007	.012	.019	.027	.034	.043	.052	.062	.073	.079	.085	167
12	1.000	.001	.004	.008	.014	.022	.031	.040	.050	.061	.072	.085	.092	.099	168
11	1.000	.001	.004	.009	.017	.026	.037	.047	.059	.072	.085	.100	.108	.116	169
10	1.000	.001	.005	.011	.020	.031	.045	.057	.071	.086	.102	.120	.129	.139	170
9.6	1.000	.001	.005	.012	.022	.034	.048	.062	.076	.093	.110	.129	.139	.149	170
9.2	1.000	.001	.006	.013	.024	.037	.052	.067	.083	.100	.119	.140	.151	.162	170.2
8.8	1.000	.002	.006	.015	.026	.040	.057	.073	.090	.109	.130	.152	.164	.175	171.2
8.4	1.000	.002	.007	.016	.028	.044	.062	.080	.099	.119	.142	.166	.178	.191	171.6
8.0	1.000	.002	.008	.018	.031	.048	.069	.087	.108	.131	.155	.181	.195	.209	172.0
7.6	1.000	.002	.009	.019	.034	.053	.076	.096	.119	.144	.171	.199	.214	.229	172.4
7.2	1.000	.002	.010	.022	.038	.059	.084	.107	.132	.159	.188	.220	.236	.253	172.8
7.0	1.000	.003	.010	.023	.040	.062	.089	.112	.139	.168	.198	.231	.248	.266	173.0
6.8	1.000	.003	.011	.024	.043	.066	.094	.119	.147	.177	.209	.243	.261	.280	173.2
6.6	1.000	.003	.011	.026	.045	.070	.099	.126	.155	.187	.221	.257	.276	.295	173.4
6.4	1.000	.003	.012	.027	.048	.074	.105	.133	.164	.198	.233	.271	.291	.311	173.6
6.2	1.000	.003	.013	.029	.051	.079	.112	.141	.174	.209	.247	.287	.308	.329	173.8
6.0	1.000	.003	.014	.031	.054	.084	.119	.150	.185	.222	.262	.304	.326	.348	174.0
5.8	1.000	.004	.015	.033	.058	.089	.126	.160	.197	.226	.278	.323	.346	.369	174.2
5.6	1.000	.004	.016	.035	.062	.096	.135	.171	.210	.252	.296	.343	.367	.392	174.4
5.4	1.000	.004	.017	.038	.067	.102	.145	.183	.224	.268	.316	.365	.391	.417	174.6
5.2	1.000	.005	.018	.041	.072	.110	.155	.196	.240	.287	.337	.390	.417	.445	174.8
5.0	1.000	.005	.020	.044	.077	.118	.167	.210	.257	.308	.361	.417	.446	.475	175.0

Продолжение табл. 3

B_0	5°0	5°2	5°4	5°6	5°8	6°0	6°2	6°4	6°6	6°8	7°0	7°2	7°4	B_0	$p-P$
$p-P$															
90°	1.0038	.0041	.0045	.0048	.0051	.0055	.0059	.0063	.0067	.0071	.0075	.0079	.0084	90°	
80	1.0039	.0043	.0046	.0049	.0053	.0057	.0061	.0065	.0069	.0073	.0077	.0082	.0087	100	
70	1.0043	.0047	.0050	.0054	.0058	.0062	.0067	.0071	.0076	.0080	.0085	.0090	.0095	110	
60	1.0051	.0055	.0059	.0064	.0069	.0073	.0078	.0084	.0089	.0094	.0100	.0106	.0112	120	
56	1.0056	.0060	.0065	.0070	.0075	.0080	.0085	.0091	.0097	.0103	.0109	.0115	.0122	124	
52	1.0061	.0066	.0072	.0077	.0083	.0089	.0095	.0101	.0107	.0114	.0121	.0128	.0135	128	
48	1.0069	.0075	.0081	.0087	.0093	.0100	.0106	.0113	.0120	.0128	.0136	.0143	.0152	132	
44	1.0078	.0085	.0092	.0099	.0106	.0114	.0122	.0130	.0138	.0146	.0155	.0164	.0173	136	
40	1.0092	.0100	.0108	.0116	.0124	.0133	.0142	.0151	.0161	.0171	.0181	.0191	.0202	140	
38	1.0100	.0109	.0117	.0126	.0135	.0145	.0154	.0165	.0175	.0186	.0197	.0208	.0220	142	
36	1.0110	.0119	.0128	.0138	.0148	.0159	.0169	.0180	.0192	.0204	.0216	.0228	.0241	144	
34	1.0122	.0132	.0142	.0153	.0164	.0175	.0187	.0199	.0212	.0225	.0238	.0252	.0266	146	
32	1.0135	.0146	.0158	.0170	.0182	.0195	.0208	.0222	.0236	.0250	.0265	.0280	.0296	148	
30	1.0152	.0164	.0177	.0190	.0204	.0219	.0233	.0249	.0264	.0280	.0297	.0314	.0332	150	
28	1.0172	.0186	.0201	.0216	.0231	.0248	.0264	.0281	.0299	.0318	.0336	.0356	.0376	152	

B_0	5°4	5°6	5°8	6°0	6°2	6°3	6°4	6°5	6°6	6°7	6°8	6°9	7°0	7°1	7°2	7°3	B_0	$p-P$
$p-P$																		
28°	1.020	.022	.023	.025	.026	.027	.028	.029	.030	.031	.032	.033	.034	.035	.036	.037	152°	
24	1.027	.029	.031	.033	.035	.036	.037	.038	.040	.041	.042	.043	.045	.046	.047	.048	156	
20	1.037	.040	.043	.046	.049	.051	.052	.054	.056	.057	.059	.061	.062	.064	.066	.068	160	
18	1.046	.049	.053	.056	.060	.062	.064	.066	.068	.070	.072	.074	.076	.078	.080	.083	162	
16	1.057	.061	.066	.070	.075	.077	.080	.082	.085	.087	.090	.092	.095	.097	.100	.103	164	
14	1.074	.079	.085	.090	.096	.099	.102	.105	.108	.112	.115	.118	.121	.125	.128	.132	166	
13	1.085	.091	.097	.104	.111	.114	.117	.121	.125	.128	.132	.136	.139	.143	.147	.151	167	
12	1.099	.106	.113	.121	.128	.132	.136	.140	.144	.149	.153	.157	.161	.166	.170	.175	168	
11	1.116	.124	.133	.142	.151	.155	.160	.165	.169	.174	.179	.184	.189	.194	.199	.204	169	
10	1.139	.148	.159	.169	.180	.185	.190	.196	.202	.207	.213	.219	.225	.231	.237	.243	170	
9.6	1.149	.160	.171	.182	.193	.199	.205	.211	.217	.223	.229	.236	.242	.248	.255	.261	170.4	
9.2	1.162	.173	.185	.197	.209	.215	.222	.228	.234	.241	.247	.254	.261	.268	.274	.281	170.8	
8.8	1.175	.188	.200	.213	.226	.233	.240	.247	.254	.261	.268	.275	.282	.290	.297	.304	171.2	
8.4	1.191	.204	.218	.232	.246	.253	.261	.268	.276	.283	.291	.299	.306	.314	.322	.330	171.6	
8.0	1.209	.223	.238	.253	.269	.276	.284	.292	.300	.309	.317	.325	.334	.342	.351	.359	172.0	
7.8	1.219	.234	.249	.265	.281	.289	.297	.306	.314	.323	.331	.340	.349	.357	.366	.375	172.2	
7.6	1.229	.245	.261	.277	.294	.303	.311	.320	.329	.337	.346	.355	.364	.374	.383	.392	172.4	
7.4	1.240	.257	.274	.291	.308	.317	.326	.335	.344	.353	.363	.372	.382	.391	.401	.410	172.6	
7.4	1.253	.270	.287	.305	.323	.333	.342	.351	.361	.371	.380	.390	.400	.410	.420	.430	172.8	
7.0	1.266	.283	.302	.321	.340	.349	.359	.369	.379	.389	.399	.409	.420	.430	.440	.451	173.0	
6.8	1.280	.298	.318	.337	.357	.367	.377	.388	.398	.409	.419	.430	.441	.451	.462	.473	173.0	
6.6	1.295	.314	.335	.355	.376	.387	.397	.408	.419	.430	.441	.452	.463	.475	.483	.497	173.4	
6.4	1.311	.332	.353	.374	.395	.407	.419	.430	.441	.453	.464	.476	.488	.500	.511	.523	173.6	
6.2	1.329	.351	.373	.395	.418	.430	.442	.454	.466	.478	.490	.502	.514	.526	.539	.551	173.8	
6.0	1.348	.371	.394	.418	.442	.454	.467	.479	.492	.504	.517	.530	.543	.556	.569	.582	174.0	
5.9	1.359	.382	.406	.430	.455	.467	.480	.493	.506	.519	.532	.545	.558	.571	.584	.598	174.1	
5.8	1.369	.393	.418	.443	.468	.481	.494	.507	.520	.533	.547	.560	.574	.587	.601	.615	174.2	
5.7	1.381	.405	.430	.456	.482	.495	.508	.522	.535	.549	.562	.576	.590	.604	.618	.632	174.3	
5.6	1.392	.418	.443	.470	.496	.510	.524	.537	.551	.565	.579	.593	.607	.622	.636	.650	174.4	
5.5	1.405	.431	.457	.484	.512	.525	.539	.553	.568	.582	.596	.611	.625	.640	.654	.669	174.5	
5.4	1.417	.444	.471	.499	.527	.541	.556	.570	.585	.599	.614	.629	.644	.659	.674	.689	174.6	
5.3	1.431	.458	.486	.515	.544	.558	.573	.588	.603	.618	.633	.648	.663	.679	.694	.710	174.7	
5.2	1.445	.473	.502	.531	.561	.576	.591	.606	.622	.637	.653	.668	.684	.700	.715	.731	174.8	
5.1	1.460	.489	.518	.549	.579	.594	.610	.626	.641	.657	.673	.689	.705	.721	.738	.754	174.9	
5.0	1.475	.505	.536	.567	.598	.614	.630	.646	.662	.678	.695	.711	.728	.744	.761	.778	179.0	

Кроме того, таблицы Дунера требуют поправки для η , а потом для ν_1 , которая неточна.

Кроме того, Цагаром вычислена таблица для третьей поправки, то есть поправки разности компонент для противоположных краев Солн-

ца $\Delta\nu_2$, скорости ν_2 по лучу зрения за счет суточного движения наблюдателя (осевого вращения Земли). Эта поправка, естественно, очень мала, ибо сама ν_2 вообще не превышает 0,464 км/сек.

Обозначим линейную скорость экваториальной точки Земли V_1 . Если широта наблюдателя φ , тогда линейная скорость вращения этой точки Земли будет $V_1 \cos \varphi$.

Пусть на рис. 4 pp' — часть проекции меридиана на небесную сферу; z — зенит наблюдателя; P — полюс мира; S — центр Солнца с часовым углом; t_0, d — дуга полярного расстояния центра Солнца, а O и O' — две наблюдаемые точки на противоположных краях Солнца. Кроме того, пусть $SQ, OQ', O'Q''$ — три дуги больших кругов, перпендикулярных к плоскости меридиана, с соответствующими центральными углами ψ, ψ', ψ'' . Тогда компоненты по лучу зрения скорости осевого вращения Земли для точек O и O' , соответственно, будут:

$$V_1 \cos \varphi \sin \psi', \quad V_1 \cos \varphi \sin \psi''.$$

Так как из сдвига спектральных линий мы получаем половину разности скоростей O и O' , поправка $\Delta\nu_2$ будет:

$$\Delta\nu_2 = \frac{1}{2} V_1 \cos \varphi (\sin \psi' - \sin \psi''),$$

$$\sin \psi' - \sin \psi'' = 2 \cos \frac{1}{2} (\psi' + \psi'') \sin \frac{1}{2} (\psi' - \psi'').$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2} (\psi' + \psi'') = \psi, \quad \frac{1}{2} (\psi' - \psi'') = r \sin p,$$

где p — угол положения наблюдаемой точки O на краю Солнца (как и ранее), тогда

$$\Delta\nu_2 = V_1 z \cos \varphi \sin p \cos \psi.$$

Благодаря малости $\Delta\nu_2$ можно пренебречь изменением склонения Солнца по сезонам и вычислить поправки для среднего $\delta_0 = 0$ (то есть $d = 90^\circ$).

Таблица 4

P	$\varphi=0^\circ$					$\varphi=\pm 30^\circ$					$\varphi=\pm 45^\circ$					$\varphi=\pm 60^\circ$					$\varphi=+75^\circ$			P	
	0h	1h	2h	3h	4h	0h	1h	2h	3h	4h	0h	1h	2h	3h	4h	0h	1h	2h	3h	4h	0h	1h	2h		
10°	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
50	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
70	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
90	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Из рис. 4 $\sin\psi = \sin d \sin t_0$, так как в нашем случае $d = 90$, $\psi = t_0$, тогда

$$\Delta v_2 = V_1 \frac{R_\odot}{r} \sin\varphi \sin p \sin t_0.$$

Здесь R —радиус Солнца, $\frac{R_\odot}{r}$ —видимый радиус Солнца.

В табл. 4 дается поправка в тысячных долях км/сек в зависимости от φ , p и t_0 .

Настоящая работа выполнена под руководством чл.-корр. АН СССР проф. О. А. Мельникова, сделавшего ряд важных замечаний по существу рассматриваемого вопроса, за что автор приносит ему свою искреннюю благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асланов И. А. Тр. Шемахинской астрофизической обсерватории, т. II, АН Азерб. ССР, 1962.
2. Асланов И. А. „Природа“, 1962, № 7.
3. Перепелкин Е. Я. Бюлл. КИСО, II, 1932.
4. Duner N. C. V Nova Acta K. Soc. Scient. Upsaliensis, serie IV, vol. I, № 6, 1907.
5. Lorenzoni G. Mat. Soc. Spett. Ital. vol. 1—18, 1871.
6. Ricco A. Mat. Soc. Spett. Ital. vol. X—21, 1881.
7. Zagar F. Osservazioni e Memorie del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri Fas. № 52, 1934.

И. А. Асланов

Күнәшин ғырланма сүр'әтинә едилән дүзәлишләр

ХУЛАСӘ

Күнәшин өз оху әтрафында ғырланма сүр'әтинин һәгиги ғыжмәти она едилән дүзәлишләрдән асылыдыр. Бу дүзәлишләр ашағыдакылардан ибарәтдир: 1) Јерин Күнәш әтрафында дөвр сүр'әтинин бахыш шүасына проексиясы вә онун фәсилләрдән асылы олараг дәјишмәси. 2) Јерин өз оху әтрафында ғырланма сүр'әти. 3) Мүшаһидәдән алынған сүр'әт Күнәшин өз оху әтрафында ғырланма сүр'әти олмајыб онун бахыш шүасы проексиясынын ғыжмәтидир. Демәли, мүшаһидәдән алынған сүр'әт, Јерин Күнәш әтрафында дөвр сүр'әтинин, Јерин өз оху әтрафында ғырланма сүр'әтинин вә Күнәшин өз оху әтрафында ғырланма сүр'әтинин, бахыш шүасы проексиясындан ибарәтдир. Оду рки, Күнәш сүр'әтинин дәгиги ғыжмәти јухарыдакы дүзәлишләрин дәгиги верилмәсиндән асылыдыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ

Физика-ријазиијат вә техника елмләри сәријасы, 1963, № 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Серия физико-математических и технических наук, 1963, № 2

Г. В. АХУНДОВА, А. А. АЛИЕВ, С. Г. ЗЕЙНАЛОВ, С. К. КАСУМОВ

СРАВНЕНИЕ АСТРОКЛИМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХ ПУНКТОВ

Три явления, влияющие на звездные изображения (мерцание, дрожание и расширение изображений), обуславливаются различными по высоте слоями атмосферы.

По свидетельству многих авторов можно считать установленным, что причиной мерцаний являются неоднородности высоких слоев атмосферы (Эльзессер, Шефлер, Барнхарт, Протеро, Галли и др.). Найдена хорошая корреляция между величиной мерцания и скоростью ветра на высоте 8—14 км.

Такое же согласие многих авторов существует в вопросе о том, что расширение изображений (вид дифракционной картины) обуславливается приземными слоями воздуха (Таккери, Смит, Гайдулик, Сондерс, Эльзессер).

Относительно причины дрожания более или менее единого мнения нет. Некоторые считают, что дрожания вызываются рефракцией света в больших неоднородностях на больших высотах, а дрожания — дифракцией на более мелких неоднородностях (Эллисон). Некоторые же считают, что дрожания обусловлены приземным слоем воздуха (Хэдзон).

Многочисленные попытки обнаружить корреляцию между этими тремя явлениями не дали положительных результатов.

Каких-либо закономерностей в изменении качества изображений в разных пунктах также пока не найдено. Установлено лишь в общих чертах, что изображения звезд лучше на горных плато, на изолированных вершинах, т. е. несомненно связь качества изображений с рельефом местности. Однако это не все. Иногда наблюдается сильное различие в качестве изображений в двух пунктах, отстоящих друг от друга на сравнительно небольшом расстоянии. Поэтому представляет интерес сравнение астроклиматических характеристик для близких пунктов, особенно, если они различаются по рельефу.

Интересен факт, что в Антарктиде наблюдаются очень хорошие изображения звезд (там совсем нет мерцаний).

1. Наблюдательный материал и его обработка

В Шемахинской Астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР в течение восьми месяцев (с 15 января по 15 сентября 1961 г.) проводились одновременные наблюдения качества изображений звезд в двух пунктах: на площадке обсерватории (Пиркули) и на плато горы Картдаг. Эти пункты близки друг к другу (по прямой расстояние между ними около 7 км), но высота их над уровнем моря различна (1450 и 1975 м, соответственно). Последнее обстоятельство и некоторые особенности рельефа позволяли ожидать разницу в их астроклиматических характеристиках.

Наблюдения на обоих пунктах проводились по совершенно идентичной программе, при помощи одинаковых инструментов (АЗТ-7, $D=200$ мм, $F=10$ м). В программу входили визуальные наблюдения вида дифракционной картины (расширения изображений) по методу Данжона—Кудера и исследование дрожаний по фотографическим следам звезд. В результате получались значения турбулентции в зените t_0 и 176 пластинок с 650 следами звезд; на Картдаге—73 значения t_0 и 127 пластинок с 488 следами. Кроме авторов, в сборе наблюдательного материала и его первичной обработке принимали участие сотрудники Шемахинской обсерватории: М. Мамедов, Л. Салманова, А. Сулейманов, С. Сулейманов, А. Якубов, за что приносим им свою благодарность.

Полученные пластинки измерялись на приборе МИР-12 самими наблюдателями. Метод измерения и обработки отличался от общепринятого [1], поскольку обычно используемый метод получения среднеквадратического отклонения от средней линии следа (σ'') очень трудоемкий и основывается на использовании нормального закона распределения (производится измерение в 100—150 точках вдоль следа). Мы измеряли непосредственно двойную амплитуду дрожания как разность между наведениями нити прибора на соседние выпуклость и впадину следа. При этом мы ограничивались 25 такими амплитудами (50 точек), что уменьшало вдвое-втрое количество затраченного на измерения времени, и столько же на обработку.

В мае 1961 г. 18 следов, измеренных нами в Пиркули, были измерены на полуавтоматической измерительной машине в Пулкове. Измерения были сравнены с нашими. Оказалось, что последние на 15—20% превышают результаты, полученные с помощью машины. Объяснение этого заключается в методе измерения. Машина интегрирует все отклонения от средней линии, включая те, которые для глаза неразличимы как волны. Таким образом, наши измерения дают своего рода верхний предел средней амплитуды дрожания. Для целей сравнения пунктов также, как и для оценки их качества, это не служит недостатком метода. Однако это надо иметь в виду при сравнении наших результатов с данными для других пунктов, полученными другими методами. Ошибка результатов, полученная несколькими способами, будет приведена ниже.

В измерениях пластинок принимали участие все наблюдатели (8 человек). Естественно, что прежде чем использовать результаты измерений, нужно было привести их в одну систему. Было обнаружено, что результатам отдельных измерителей свойственна ошибка уравнения блеска, т. е. ошибка, пропорциональная ширине следа (здесь мы имеем в виду различие в наведениях разными измерителями на следы разной ширины). Доказательством этого являются следующие обстоятельства.

1. Одна пластинка с пятью следами разной ширины была избрана в качестве стандартной и измерена всеми. Оказалось, что ошибка, полученная по отдельным измерениям каждого следа, есть функция его ширины.

2. Для каждого измерителя были выявлены ошибки уравнения блеска и построены кривые этих ошибок на функции ширины следа. Оказалось, что эти кривые различны для разных измерителей.

3. Как амплитуда дрожания, так и ширина следа увеличиваются с зенитным расстоянием. Может возникнуть подозрение, что, исключая ошибку уравнения блеска, мы тем самым искажаем зависимость амплитуды дрожания от зенитного расстояния. Это было нами проверено. В табл. 1 даются средние значения амплитуды внутри десятиградусных интервалов z до и после введения поправки за уравнение блеска для Пиркули (2 и 3 строки таблицы). Четвертая строка содержит разности между соответствующими амплитудами. Их постоянство говорит о том, что наши опасения напрасны. В пятой строке таблицы содержится число использованных амплитуд. Подобный же результат был получен и для Картдага.

Таблица 1
Сравнение средних амплитуд дрожания до и после введения поправки за уравнение блеска

Амплитуда \ Пределы z	0—9	10—19	20—29	30—39	40—49	50—59	60—69	70—79
С учетом уравн. блеска	0,42	0,41	0,45	0,46	0,48	0,51	0,52	0,61
Без учета уравн. блеска	0,49	0,48	0,52	0,53	0,55	0,59	0,61	0,71
Разность	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,09	0,10
Колич. использов. амплитуд	55	104	118	135	117	140	131	49

Введение в измерения поправок за уравнение блеска улучшает результат, примерно на 14%. Несмотря на это, мы считаем, что выявление этой ошибки необходимо при измерениях следов звезд также, как и при всех других астрометрических измерениях.

В табл. 2 приводятся поправки за уравнение блеска для отдельных измерителей (l мм—ширина следа, которая для большинства следов не превышает 0,100 мм).

Ошибка одной измеренной амплитуды A была получена несколькими способами.

1. По „стандартной“ пластинке, измеренной всеми измерителями, получено $\sigma_{Az} = \pm 0'',06$.

2. После приведения всех результатов к зениту можно найти ошибку одной амплитуды путем сравнения нескольких значений для одной пластинки. Ошибка $\sigma_{Az} = \pm 0'',05$ была получена по 10 пластинкам (по каждой 25-й пластинке).

3. Ошибку можно найти по разности нульпунктов кривых уравнения блеска (нульпункт—при значении $l = 0,030$ мм).

Получено: σ_{Az} (Пиркули) $= \pm 0'',04$;

σ_{Az} (Картдаг) $= \pm 0'',08$.

Сходимость σ , полученных совершенно различными методами, вполне удовлетворительная. В качестве среднего значения для ошибок

ки одной амплитуды можно принять $\sigma_{A_z} = \pm 0'',06$. Поскольку чаще всего на пластинке снималось 5 следов, ошибка A_0 — амплитуды дрожания в зените — будет в 2,24 раза меньше:

$$\sigma_{A_z} = \pm 0'',03.$$

Для приведения результатов по дрожаниям к зениту использовалась формула: $A = A_0 (\sec z)^\alpha$. Коэффициент α находился по методу пар звезд с разными зенитными расстояниями, время фотографирования которых различалось в пределах 10–15 мин [2]. Получено для Пиркули $\alpha = 0,33$ (по 841 паре) и для Картдага $\alpha = 0,18$ (по 488 парам).

Для приведения к зениту значений турбулентии t'' (оценок вида дифракционной картины) применялась зависимость, предложенная Данжоном и Кудером: $A = A_0 \sec z$ [4].

Таблица 2

Поправки за уравнение блеска

мм	Ахундова Г. В.	Алиев А. А.	Сулейманов С.	Мамедов М.	Касумов С. К.	Зейналов С. Г.	Якубов А. Н.	Сулейманов А. С.
0,040	0,00	−0,02	−0,02	−0,01	−0,03	−0,02	−0,02	−0,01
0,050	−0,03	,05	,04	,04	,06	,05	,05	,03
0,060	,05	,07	,06	,08	,08	,08	,08	,04
0,070	,10	,09	,08	,13	,11	,11	,11	,06
0,080	,12	,12	,09	,18	,13	,14	,14	,08
0,090	,14	,14	,11	,24	,16	,17	,17	,09
0,100	,15	,17	,13	,30	,19	,20	,20	,11
0,110	,17	,19	,15	,36	,21	,23	,23	,12
0,120	,18	,22	,17	,43	,24	,25	,26	,14
0,130	,20	,24	,18	,50	,27	,28	,29	,16
0,140	,21	,27	,20	,50	,30	,31	,32	,17
0,150	,22	,29	,22	,50	,32	,34	,35	,19

Последняя предполагает наличие небольшого „волнующегося слоя атмосферы“, влияние которого пропорционально длине пути, пройденной лучом в этом слое. В данном случае мы принимаем, что вид дифракционной картины обуславливается сравнительно небольшим по толщине приземным слоем воздуха (согласно мнению большинства авторов). Наши данные, приведенные в § 3 настоящей статьи, также подтверждают эту точку зрения.

§ 2. Сравнение результатов

Средние за ночь значения турбулентии в зените t''_0 и амплитуды дрожания в зените A_0 для Пиркули и Картдага представлены графически на рис. 1 и 2, соответственно. Верхние части рисунков показывают распределение амплитуд дрожания в зените (A_0) по датам наблюдений, нижние — турбулентии в зените (t''_0). Результаты для последовательных ночей соединены стрелками (направление стрелки указывает уменьшение или увеличение амплитуды). В тех случаях, когда за предыдущую и последующую ночи наблюдений нет, стоит изолированная точка. Прямые горизонтальные линии соответствуют среднему значению амплитуды дрожания или турбулентии в зените за весь период наблюдения.

Однако это среднее ввиду большой дисперсии величин A_0 и t''_0 не может характеризовать пункт. Пулковской группой по изучению

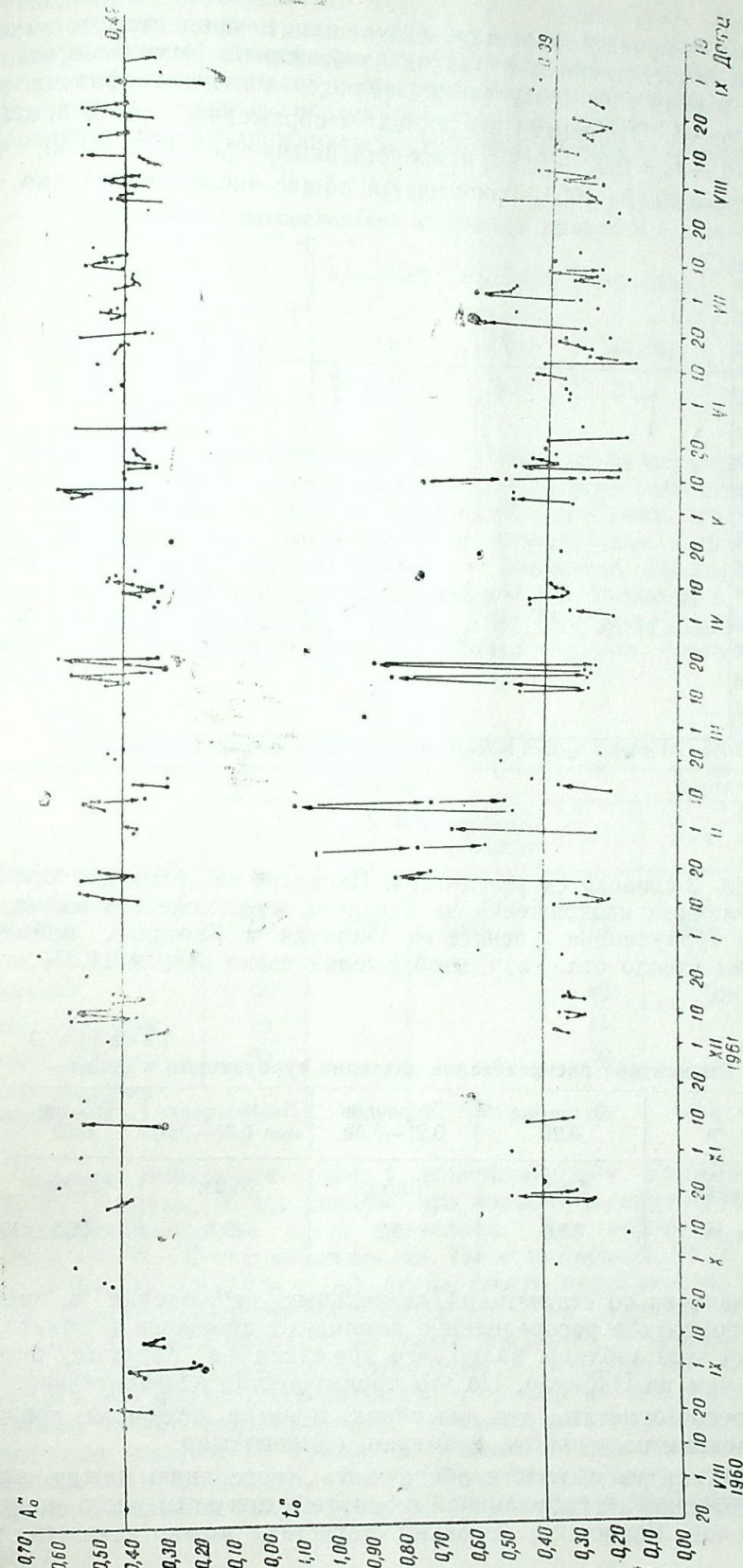


Рис. 1

астроклимата принято характеризовать пункт процентом отличных, хороших, посредственных и плохих изображений. Надо отметить, что имеются в виду здесь визуальные наблюдения вида дифракционной картины звезд. Отличными считаются изображения, когда $t_0'' \leq 0,20$; хорошими — $t_0'' = 0,20 - 0,30$; посредственными — $t_0'' = 0,30 - 0,50$; плохими — $t_0'' > 0,50$. За 100% принимается общее число наблюдений.

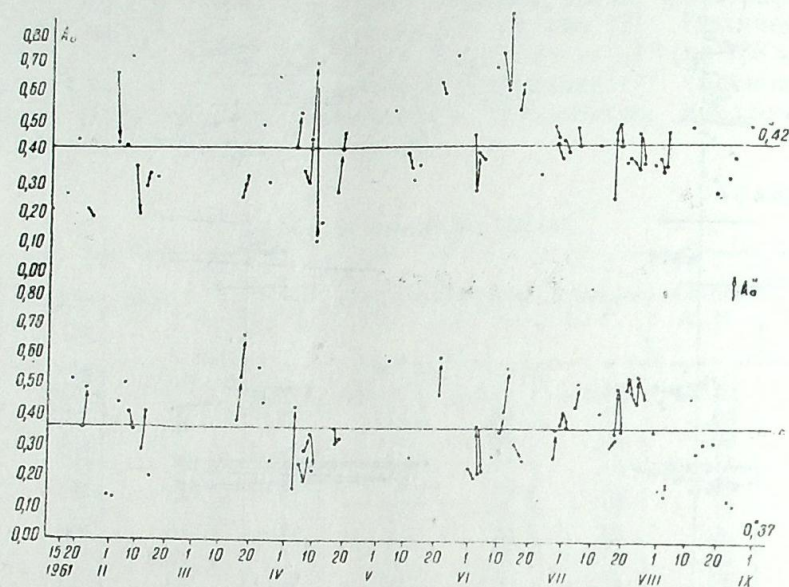


Рис. 2

В табл. 3 приводятся результаты. Несмотря на несколько большее число отличных изображений на Картдаге, можно сделать вывод, что значения турбуленции в зените на Пиркули и Картдаге, примерно, одинаковы (число отл.+хор. изображений равно 38% и 34,2%, соответственно).

Таблица 3
Процентное распределение значений турбуленции в зените

t_0''	Отличные 0,20	Хорошие 0,21—0,30	Посредственные 0,31—0,50	Плохие 0,50
Пиркули	6,5%	31,5%	34,2%	27,8%
Картдаг	15,0	19,2	49,3	16,5

По аналогии со статистикой визуальных наблюдений в табл. 4 дается процентное распределение амплитуды дрожания в зените. На основании этой таблицы видно, что дрожания на Картдаге немного меньше, чем на Пиркули. Но это преимущество незначительно.

Интересно отметить, что для обоих пунктов величины дрожания и турбуленции получились, примерно, одинаковыми.

Многие авторы пытаются обнаружить корреляцию между амплитудой дрожания и турбуленцией в зените и при этом часто получают облако точек. Возможно, методами статистики можно доказать, что с

определенной вероятностью корреляция существует. Однако мы знаем, что эти явления вызваны различными по своим размерам неоднородностями атмосферы. Если принять, что атмосферные неоднородности независимы друг от друга, т. е. не существует никакого соотношения между их численностью или ее изменением, то никакой корреляции между дрожанием и турбуленцией может не наблюдаться.

Таблица 4
Процентное распределение амплитуды дрожания в зените

A_0''	0,20	0,21—0,30	0,31—0,40	0,41—0,50	0,50
Пиркули	1,0%	5,9%	35,3%	43,1%	14,7%
Картдаг	5,2	11,7	32,5	31,1	19,5

Внимательно рассмотрим рис. 2. В большинстве случаев направления изменения (т. е. уменьшение или увеличение) амплитуды дрожания и турбуленции в зените совпадают. Особенно это отчетливо видно в тех случаях, когда имеются непрерывные наблюдения за несколько ночей. Когда увеличивается амплитуда дрожания, возрастает и турбуленция в зените, и наоборот (см. периоды с 5—10 IV; 1—4 VI; 17—20 VII; 22—27 VII; 2—4 VIII). Это может свидетельствовать о том, что оба явления обусловлены одними слоями воздуха (на Картдаге).

Таблица 5
Статистика ясных и пасмурных ночей с 15 I по 15 IX 1961 г.

	Пиркули			Картдаг		
	n	$n\%$	можно ожидать в году	n	$n\%$	можно ожидать в году
Колич. ясных ночей, всего	125	51,2	185	113	55,1	200
из них полностью ясных — 1	66			42		
ясных > 1/2 ночи	29			41		
ясных < 1/2 ночи	30			30		
Колич. пасмурных ночей	119	48,8	180	92	44,9	165

Если же обратиться к рис. 1, показывающему распределение A_0 и t_0 на Пиркули, то мы увидим, что подобие в изменении этих величин проявляется не столь отчетливо. Для периодов 11—18 III; 5—9 IV; 4—8 VII оно наблюдается. Но есть периоды (2—5 V; 8—15 V; 21—23 VI; 26—29 VII и т. д.), когда такого подобия нет. Более того, если сравнить одновременные наблюдения на Пиркули и Картдаге, то окажется, что в одно и то же время (например, конец июля) на Картдаге наблюдается подобие в изменении A_0 и t_0 , а на Пиркули его нет. Все это можно объяснить тем, что, если на вид дифракционной картины влияют неоднородности сравнительно небольшого приземного слоя воздуха, то дрожания вызывают одновременно и более высокие неоднородности, т. е. последние бывают распределены в довольно большой толще воздуха, возможно, во всей атмосфере.

В заключение сравним оба пункта в метеорологическом отношении. В табл. 5 дается статистика ясных и пасмурных ночей для обоих пунктов. Мы видим, что на Пиркули можно ожидать около 185 ясных ночей в году, а на Картдаге—около 200.

Таблица 6
Статистика скорости ветра на Пиркули и Картдаге

Пункт	$v = 0$	$0 < v \leq 2,5$	$2,5 < v < 5,0$	$5,0 \leq v < 10,0$	$v \geq 10,0$	n
Пиркули	64,9	24,5	5,3	5,3	2	208
Картдаг	28,9	15,1	15,1	29,4	11,5	218

Но, если обратиться к табл. 6, в которой дается статистика скорости ветра по всем случаям наблюдений, то увидим, что на Картдаге в 30% случаев скорость ветра превышает 5,0 м/сек. Такие ночи практически непригодны для астрономических наблюдений. Следовательно, в метеорологическом отношении Картдаг никаких преимуществ, по сравнению с Пиркули, не имеет (как и в отношении астро-климатических характеристик).

§ 3. Размер изображения звезд на Пиркули

Визуальные наблюдения методом Данжона—Кудера позволяют оценить влияние тех неоднородностей, размеры которых не превышают отверстия телескопа. Путем измерения следов звезд мы учитываем те неоднородности, которые при данной для используемого телескопа скорости движения изображения звезды по пластинке успевают проявиться как волны. Остается неучтенной та часть дрожаний, имеющих высокие частоты, которые на пластинке вызывают расширение следа.

Таким образом, если мы хотим для данного пункта получить полный диск дрожания, определяющий размеры звездных изображений, мы должны учесть все три составляющие, указанные выше. По мнению В. А. Крата, в первом приближении можно считать эти три составляющие независимыми и суммарную амплитуду полагать равной корню квадратному из суммы их квадратов (турбулентии, высокочастотных дрожаний и дрожаний, проявляющихся как волны).

Получить вторую составляющую непосредственно мы не можем, т. к. ширина следа является функцией двух величин—высокочастотных дрожаний и звездной величины, а влияние последней исключить очень трудно.

Поэтому мы сделали попытку оценить размер изображения звезд для АЗТ-7, хотя бы приблизительно, следующим образом. В течение 6 ночей было получено 26 пластинок, на которых экспонировались в близзенитной области 5 звезд разных звездных величин: α Вoo ($m = 0,24$); α Orh (2,13); α Brg (2,31); β Her (2,81); ζ Her (3,00). Затем на микрофотометре МФ-2 с 30-кратным увеличением промерялись профили следов этих звезд, в 3—5 сечениях средней части следа. Были построены профили для 169 следов. После этого получалась полуширина (W) как расстояние между точками профиля, в которой интенсивность равна половине максимальной. Ошибка одной полуширины, полученная по нескольким измерениям одного следа, равна $\pm 0,005$ мм ($\pm 0",1$). Пластинки калибровались с помощью трубч-

ного фотометра, изготовленного в Шемахинской астрофизической обсерватории.

Полученные величины полуширины профилей осреднялись по всем 26 пластинкам. Результаты приводятся в табл. 5. Четвертый и пятый столбцы таблицы показывают среднюю полуширину профиля и ее ошибку. На основании последних можно получить среднюю ошибку (умножением на корень квадратный из числа пластинок). Эти ошибки приводятся в шестом столбце таблицы. Они, естественно, больше ошибки, полученной из сравнения нескольких измерений на одной пластинке. Это говорит о том, что размер изображения велико, чтобы нельзя было говорить о каком-то среднем размере изображения для отверстия в 200 мм на Пиркули. Нужно отметить, что плотность изображения первой звезды (α Вoo попадает в область остальных звезд, примерно, соответствуют прямолинейному участку кривой. Можно сказать, что в пределах ошибок полуширины профилей для остальных четырех звезд примерно одинаковы (7-й столбец таблицы).

Мы принимаем, что размер фотографического изображения определяет ложный диск для звезд 2—3 звездной величины, у которых дифракционные кольца слабы. Следовательно, размер изображения может характеризовать полуширина профиля (а не его ширина, которая дает явно завышенное значение диаметра изображения и к тому же определяется очень неточно).

Для яркой звезды ($m = 0,24$) сказываются еще один или два максимума и, следовательно, размер изображения должен получиться больше, что мы и наблюдаем (см. 6-й столбец табл. 5).

Отсюда можно заключить, что при средних изображениях размер изображения звезд на Пиркули равен $1",72$ (это среднее для четырех последних звезд). Здесь оговорка: „при средних изображениях“ делается потому, что в данные ночи качество изображений звезд, оцененное по виду дифракционной картины, менялось от 2,0 до 5,0.

Полученный размер изображения включает в себя все три составляющие, о которых говорилось выше. То, что сюда входят турбулентия, влияющая на вид дифракционной картины, и высокочастотные дрожания, понятно. Третья составляющая—дрожания, проявляющиеся на пластинке как волны, учитывается здесь благодаря тому, что высота щели была выбрана большой (до 20 мм). В то же время расстояния между гребнями волн, измеряемые нами на пластинках, были равны 0,2—1,0 мм.

Таким образом, можно сказать, что мы оценили полный диск дрожания. При этом мы имеем основание считать, что полученный размер изображения близок к максимальному, поскольку здесь неизбежно должно было сказаться фотографическое расширение изображения. Выше говорилось, что полный диск дрожания можно принять равным корню квадратному из суммы квадратов трех составляющих, т. е. $d'' \approx W'' \approx \sqrt{(2t_0)^2 + (2a_1)^2 + (2a_2)^2}$, где t_0 — турбулентия в зените;

a_1 — амплитуда высокочастотных дрожаний;

a_2 — амплитуда дрожаний с частотами 1,5—7 гц, измеряемыми нами на пластинках, снятых с АЗТ-7.

Мы получили для Пиркули: $t_0'' = 0,42$ и $a_2'' = 0,42$. Следовательно, мы можем сказать, что a_1 — амплитуда высокочастотных дрожаний, по-

лучить которую непосредственно нельзя, имеет тот же порядок, и даже немного больше их.

На Пиркули наблюдаются минимальные значения $t_1' = 0'',08$ и $a_2' = 0'',10$. Принимая для минимального значения $a_1' = 0'',10$, мы получим, что минимальный размер изображения на Пиркули будет близок к $0'',3$.

Но это значение явно завышено, так как использованный нами метод измерения дрожаний не позволял обнаруживать дрожания с амплитудами $< 0'',2$ (см. выше).

Таблица 7

Название звезды	m	$\overline{w}$	σ_w	σ_w	$\overline{a''}$	σ_d
α Boo	0,24	0,120	$\pm 0,005$	$\pm 0,025$	2,5	0,1
α Oph	2,13	0,087	0,0032	0,017	1,79	0,07
α CBr	2,31	0,076	0,0026	0,014	1,57	0,05
β Her	2,81	0,084	0,0029	0,015	1,73	0,06
ζ Her	3,00	0,086	0,0035	0,017	1,81	0,07

В 1960 г. А. Н. Демидова и Н. В. Быстрова опубликовали статью о фотоэлектрическом определении размеров звездных изображений в Пулковке (с АЗГ-7) [3]. Они получили среднюю полуширину профиля— $3''$. В этой же статье приводятся данные по материалам других обсерваторий. На 100-дюймовом телескопе в Маунт-Вилсон при среднем качестве изображений полуширина профиля была равна $3''$. На 200-дюймовом Маунт-Паломарском телескопе наиболее часто наблюдавшийся диаметр изображения равен $2'',5$. Последние две цифры непосредственно сравнивать с нашими результатами нельзя, так как они соответствуют другим отверстиям телескопа. Сравнение же с Пулковым показывает, что средний размер изображения у нас ($1'',7$) много меньше.

Выводы

1. С 15 января по 15 сентября 1961 г. в Шемахинской астрофизической обсерватории АН Азербайджанской ССР изучались турбулентция и дрожание изображений звезд параллельно в двух пунктах: на Пиркули (площадка обсерватории) и на плато горы Картдаг. Близость пунктов, их разная высота над уровнем моря и некоторые особенности рельефа делают интересным сравнение их астроклиматических характеристик.

2. По большому наблюдательному материалу произведено сравнение значений амплитуды дрожания и турбулентции в зените. Оказалось, что эти величины, примерно, одинаковы для обоих пунктов. Анализ материала подтверждает мнение, что на вид дифракционной картины влияют неоднородности приземного слоя воздуха, а дрожания обуславливаются неоднородностями, распределенными по всей толще атмосферы.

3. Путем построения с помощью микрофотометра профилей следов получены размеры изображений звезд для телескопа с отверстием в 200 мм на Пиркули. Оказалось, что эти размеры, характеризующие полный диск дрожания, заключены в пределах $0'',3-1'',7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахундова Г. В. Алиев А. А. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 6.
2. Ахундова Г. В., Алиев А., А. Зейналов С. К., Касумов С. Г. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1962, № 6.
3. Демидова А. Н., Быстрова Н. В. „Изв. ГАО в Пулковке“, XXI, вып. 6. 1960, № 165.
4. Danjon A., Couder A. Lunettes et Telescopes, Paris, 1935.

Г. В. Ахундова, С. Н. Гасымов, Э. Э. Элиев, С. Г. Зейналов

Ики мәнәтәганин астроиглим характеристикаларынын мугајисәси

ХУЛАСӘ

Улдуз хәјалы кејфијәтинин ганунаујун сурәтдә дәјишмәсини ајдынлашдырмаг үчүн јахын мәнәтәгәләрин астроиглим шәраитинин мугајисә едилмәсинин бөјүк әһәмијјәти вардыр.

Шамахы Астрофизика рәсәдханасында 1960—61-чи илләрдә улдуз хәјалынын титрәмәси вә турбуленсијанын өјрәнилмәси үчүн ики мәнәтәгәдә бөјүк мүшаһидә материалы алынмышдыр. Бу мүшаһидә мәнәтәгәләри (Пиргулу вә Гартдаг) бир-биринә чох јахындыр, анчаг дәннз сәвијјәсиндән мүхтәлиф һүндүрлүкдәдир (1450 вә 1975 м). Гејд етдијимиз һүндүрлүкләр фәрги, һабелә релјеф хүсусијәтләриндәки фәргләр һәммин мәнәтәгәләрдә астроиглим шәраитинин мүхтәлифлијини көзләмәјә имкан верир. һәр ики мүшаһидә мәнәтәгәләриндә ејни програмла вә ејни чиһазла мүшаһидә апарылмышдыр (АЗТ-7, $D=200$ мм $F=10$ м).

Алынмыш материалларын ишләнилмәси үсулу үмуми гәбул едилмиш үсуллардан фәргләнмишдир. Анчаг алынан хәтә көстәрир ки, гәбул етдијимиз үсулун дүзкүнлүјү кифајәт гәдәрдир. Фотолөвһәләрин өлчүлмәсиндә бүтүн мүшаһидәчиләр (8 нәфәр) иштирак етмишдир. Бүтүн нәтичәләр $A_z = A_0(\sec z)^\alpha$ дүстуру илә зенит үчүн һесабыланмышдыр.

α әмсалы Пиргулу үчүн 0,33, Гартдаг үчүн исә 0,18 олдуғу мә'лум олмушдур. Пиргулу вә Гартдагда астроиглим шәраитинин өјрәнилмәси көстәрди ки, һәр ики мәнәтәгә ејни үстүнлүјә маликдир. Бундан башга, һәр ики мәнәтәгә үчүн метеороложни характеристикаларын мугајисәси дә апарылмышдыр. Гартдаг үчүн титрәмәнин амплитудасы вә турбуленсијанын гијмәтинин дәјишмәси зенит истигамәтиндә охшардыр. Пиргулу үчүн исә бу охшарлыг о гәдәр дә ајдын дејилдир.

Турбуленсијанын гијмәти јер гаты үзәриндәки һава гатынын дәјишмәсиндән, улдуз хәјалынын титрәмәси исә атмосферин бүтүн гатларындакы гејри бир чинслиликдән ирәли кәлир.

Астроиглим характеристикаларынын тә'јини заманы мүхтәлиф ишләрдә ајрыча олараг турбуленсијанын вә титрәмә амплитудунун зенитдәки гијмәтләри көстәрилмишдир. Бизим фикримизчә, титрәмәни улдуз хәјалынын бөјүклүјүнү тәшкил едән там диск үзәриндә апармаг лазымдыр.

Там дискин титрәмәси үч әламәтин тәшкилидән ирәли кәлир:

1. Турбуленсијанын зенитдәки гијмәти гејри бир чинслилијин тә'сири илә гијмәтләндирилир ки, бунун да елчүсү мүшаһидә етдијимиз телескопун көрүш саһәсини ачмыр.

2. Зенитдә титрәмәнин амплитуду ади улдуз изләринин өлчүлмәсиндән алыныр.

Титрэмədə нәзәрә алынмамыш бир һиссә дә галыр ки, бу да улдуз хәялынын верилмиш сүр'әтлә фотолөвһә үзәри илә һәрәкәти заманы далғашәкилли ашкарланмасынын чатышмамасыдыр. Бу жүксәк тезликли титрәмәни исә гијмәтләндирмәк чәтиндир.

Она көрә биз хәјал бөјүклүјүнү гијмәтләндирмәк үчүн долајы јол сечмәли олдуғ. Һәмнин метода көрә биз (б) пластинка алдығ. Һәр пластинкада 5 улдуз изи вар иди. Һәмнин улдузлар зенитә јахын вә мүхтәлиф улдузлар өлчүсүнә малик иди. Һәмнин изләрин МФ-2 микрофотометриндән профилләри өлчүлмүшдүр. Сонра Һәмнин профилләрин јарым ени алынмышдыр. Профил нөгтәләри арасындакы мәсафә интенсивлији максимум оланын јарысына бәрабәрди.

Нәтичә көстәрир ки, Пиргулуда хәялын бөјүклүјү $0'',30-1'',70$ арасында рәгс едир.

Н. Б. КАДИРОВ, Ш. М. ИСМАИЛ-ЗАДЕ

ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОВЕРОЧНОГО РАСЧЕТА ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

В нашей работе [2] были введены теоретические формулы для определения конечных и средних температур горячей и холодной жидкостей, а также средних температур их пограничных слоев и теплопередающей стенки теплообменного аппарата.

На базе указанных формул в следующей работе [3] дан общий аналитический метод поверочного расчета теплообменных аппаратов. С целью упрощения расчета этих аппаратов в настоящей работе дается графо-аналитический метод их поверочного расчета с помощью кривых обобщенных зависимостей, определяющих процесс теплопередачи в теплообменных аппаратах, с учетом последних формул теплообмена, рекомендуемых акад. М. А. Михеевым.

Ниже приводятся основные расчетные обобщенные зависимости, определяющие процесс теплообмена, происходящий в теплообменных аппаратах:

$$\pm \frac{t' - t''}{\Delta t'} = \frac{1 - e^{-mk_l L}}{GC_{pcp} m}, \quad (1)$$

$$\pm \frac{t' - t_{cp}}{\Delta t'} = \frac{1}{GC_{pcp} m} \left(1 - \frac{1 - e^{-mk_l L}}{mk_l L} \right), \quad (2)$$

$$\pm \frac{t_{cp} - t_{wcp}}{\Delta t'} = \frac{1 - e^{-mk_l L}}{mx_l L}, \quad (3)$$

$$\frac{mk_l L}{mx_l L} = \frac{1}{1 + \frac{mx_{l1} L \delta}{m\lambda_{lcp} L} + \frac{mL_{l1} L}{mx_{l2} L}}, \quad (4)$$

$$Nu_f = 0,021 \cdot Re_f^{0,8} \cdot Pr_f^{0,43} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad (5)$$

$$Nu_f = 0,17 \cdot Re_f^{0,43} \cdot Gr_f^{0,1} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25}, \quad (6)$$

$$Nu_f = 0,23 \cdot Re_f^{0,65} \cdot Pr_f^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25}, \quad (7)$$

$$Nu_f = 0,41 \cdot Re_f^{0,6} \cdot Pr_f^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25}. \quad (8)$$

Обобщенные зависимости (1), (2) и (3), выведенные нами для теплообменника, работающего по схеме прямого тока [2], пригодны как для горячей, так и для холодной жидкости. При этом левые части указанных зависимостей со знаком плюс надо отнести к горячей жидкости, а со знаком минус — к холодной.

В этих зависимостях приняты следующие обозначения:
 t'_1 и t''_1 — температура при входе и выходе горячей жидкости из теплообменника;

t'_2 и t''_2 — то же для холодной жидкости;

$\Delta t'$ и $\Delta t''$ — разности температур при входе и выходе из теплообменника горячей и холодной жидкостей, которые соответственно равны

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2; \Delta t'' = t''_1 - t''_2;$$

G_1 и G_2 — весовые расходы горячей и холодной жидкостей;

C_{p1cp} и C_{p2cp} — средние теплоемкости при постоянном давлении горячей и холодной жидкостей;

α_{l_1} и α_{l_2} — линейные коэффициенты теплоотдачи от горячей жидкости к стенке и от стенки к холодной жидкости, отнесенные к единице длины стенки, через которую происходит передача тепла от горячей жидкости к холодной;

K_l — линейный коэффициент теплопередачи от горячей жидкости к холодной, отнесенный к единице длины теплопередающей стенки;

λ_{lcp} — среднее значение линейного коэффициента теплопроводности стенки, отнесенный к единице длины этой стенки;

δ — толщина стенки;

L — ее длина;

t_{1cp} и t_{2cp} — средние температуры горячей и холодной жидкостей;

t_{w1cp} и t_{w2cp} — средние температуры поверхностей стенки, омываемых, соответственно, горячей и холодной жидкостями и величина

$$m = \frac{1}{G_1 C_{p1cp}} + \frac{1}{G_2 C_{p2cp}}. \quad (9)$$

Критериальные уравнения теплообмена (5) и (6) рекомендуются акад. М. А. Михеевым [1] для случая движения жидкости в прямой трубе, соответственно, при турбулентном и ламинарном режимах движения этой жидкости.

Зависимости же (7) и (8) пригодны для случаев движения жидкости в межтрубном пространстве теплообменника, когда жидкость омывает пучок труб в поперечном направлении под углом атаки $\phi = 90^\circ$.

Формула (7) рекомендуется для пучка труб, расположенных в коридорном порядке, а формула (8) пригодна для случая шахматного расположения труб в пучке [1].

В формулах (5), (6), (7) и (8) величины Nu_f , Re_f , Pr_f и Gr_f представляют соответствующие критерии Нуссельта, Рейнольдса, Прандтля и Грасгофа, вычисленные по средней температуре данной рабочей жидкости, а величина Pr_w выражает критерий Прандтля, вычисленный по средней температуре теплопередающей стенки.

На рис. 1—7 приведены кривые, построенные на базе вышеуказанных обобщенных зависимостей (1)—(8).

Пользуясь этими кривыми, можно значительно упростить поверочный расчет теплообменных аппаратов, сопровождающийся некоторыми необходимыми аналитическими вычислениями.

Ниже дается подробное описание указанного графо-аналитического метода поверочного расчета теплообменных аппаратов.

Пусть дан готовый теплообменник кожухо-трубчатого типа, поверхность нагрева которого представляет пучок трубок, завальцованных в трубных досках (решетках), помещенных в общий корпус (бочку).

Длина трубок равна L , внутренний их диаметр — d_1 , внешний — d_2 .

Требуется определить конечные температуры t'_1 и t'_2 горячей и холодной жидкостей, протекающих через данный теплообменник, а также найти количество тепла Q , передаваемое от горячей жидкости к холодной в час, если известны:

t''_1 и t''_2 — начальная температура (при входе в теплообменник) горячей и холодной жидкостей,

$G_1 C_{p1cp}$ и $G_2 C_{p2cp}$ — водяные эквиваленты этих жидкостей.

Рассмотрим сначала расчет теплообменника, работающего по схеме прямого тока.

Графо-аналитический метод поверочного расчета теплообменных аппаратов, работающих по схеме прямого тока

Рассмотрим оба случая режима движения рабочих жидкостей в теплообменных аппаратах: турбулентный и ламинарный режимы, наиболее характерные для практики.

Турбулентный режим. Зададимся подходящим исходным значением безразмерной величины $mK_l L$.

Принимая далее за исходные значения средних теплоемкостей горячей и холодной жидкостей

$$C_{p1cp} = a_1 + b_1 t'_1 \text{ и } C_{p2cp} = a_2 + b_2 t'_2$$

в первом приближении, из выражения (9) определяем сначала величину m , а затем вычисляем значения величин $G_1 C_{p1cp} m$ и $G_2 C_{p2cp} m$. Тогда по известным уже величинам $mK_l L$, $G_1 C_{p1cp} m$ и $G_2 C_{p2cp} m$ из рис. 1 находим в первом приближении значения конечной и средней температуры горячей и холодной жидкостей: t'_1 , t'_2 , t_{1cp} и t_{2cp} .

Принимая найденные значения t_{1cp} и t_{2cp} за определяющие температуры, вычисляем критерии Прандтля Pr_{f_1} , Pr_{f_2} и Рейнольдса Re_{f_1} и Re_{f_2} , соответственно, для горячей и холодной жидкостей.

Принимая далее за исходные значения симплексов

$$\frac{Pr_{f_1}}{Pr_{w_1}} \approx \frac{Pr_{f_2}}{Pr_{w_2}} \approx 1,$$

по найденным выше значениям критериев Re_{f_1} , Re_{f_2} , Pr_{f_1} и Pr_{f_2} из рис. 2 находим критерии Нуссельта Nu_{f_1} и Nu_{f_2} для горячей и холодной жидкостей.

По этим значениям критериев Нуссельта вычисляем сначала частные коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , а затем определяем величины $ma_{l_1} L = \pi d_1 \alpha_1 m L$ и $ma_{l_2} L = \pi d_2 \alpha_2 m L$ для горячей и холодной жидкостей**.

** Для цилиндрической стенки (трубки), как известно, имеем:

$$\alpha_{l_1} = \pi d_1 \alpha_1, \alpha_{l_2} = \pi d_2 \alpha_2 \text{ и } \frac{\delta}{\lambda_{lcp}} = \frac{1}{2\pi \lambda_{lcp}} \ln \frac{d_2}{d_1}.$$

По известным значениям величин ma_1L , ma_2L и $\frac{ma_1Lb}{m\lambda_{1cp}L}$ из рис. 3

находим mK_1L в первом приближении.

Если найденное значение величины mK_1L значительно разнится от ее первоначально заданного, исходного значения, то, принимая это новое значение mK_1L за исходное, необходимо определить ее во втором приближении.

Для этого, подставляя найденные в первом приближении значения конечных температур t'_1 и t'_2 рабочих жидкостей в выражения средних теплоемкостей горячей и холодной жидкостей:

$$C_{p1cp} = a_1 + b_1 \frac{t'_1 + t'_2}{2}$$

$$\text{и } C_{p2cp} = a_2 + b_2 \frac{t'_2 + t'_2}{2}, \quad (10)$$

определяем их в первом приближении.

Далее из выражения (9) находим сначала величину m , после чего вычисляем значения $G_1C_{p1cp}m$ и $G_2C_{p2cp}m$ для горячей и холодной жидкостей.

Принимая найденные в первом приближении значения ma_1L , ma_2L и mK_1L за исходные, по известным величинам $G_1C_{p1cp}m$ и $G_2C_{p2cp}m$ сначала из рис. 1 определяем значения конечных и средних температур t'_1 , t'_2 , t_{1cp} и t_{2cp} горячей и холодной жидкостей, а затем из рис. 5 находим средние температуры t_{w1cp} и t_{w2cp} поверхностей теплопере-

дающей стенки, омываемых, соответственно, горячей и холодной жидкостями.

Принимая далее новые значения t_{1cp} , t_{2cp} , t_{w1cp} и t_{w2cp} за определяющие температуры, вычисляем значения критериев Re_{f1} , Re_{f2} , Pr_{f1} , Pr_{f2} , Pr_{w1} и Pr_{w2} .

По известным значениям указанных критериев из рис. 2 определяем критерии Нуссельта Nu_{f1} и Nu_{f2} для горячей и холодной жидкостей, по которым вычисляем сначала коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , а затем величины ma_1L и ma_2L .

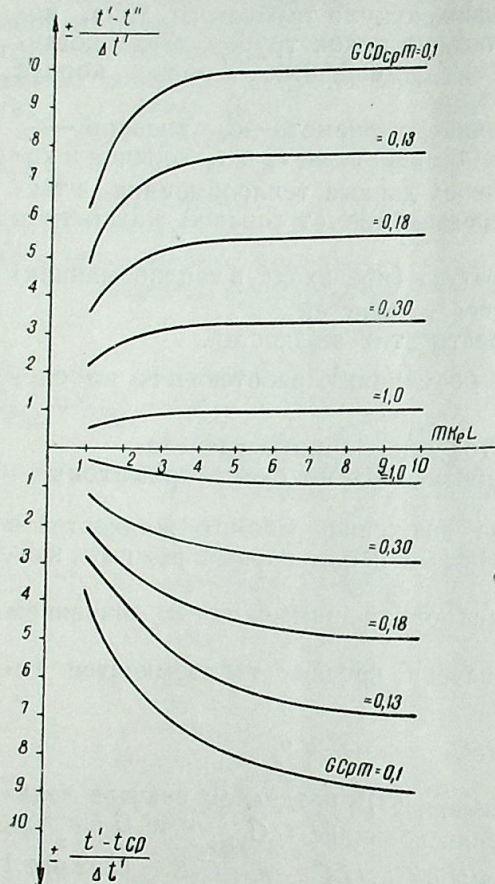


Рис. 1

Зная ma_1L и ma_2L , из рис. 3 находим, наконец, величину mK_1L во втором приближении.

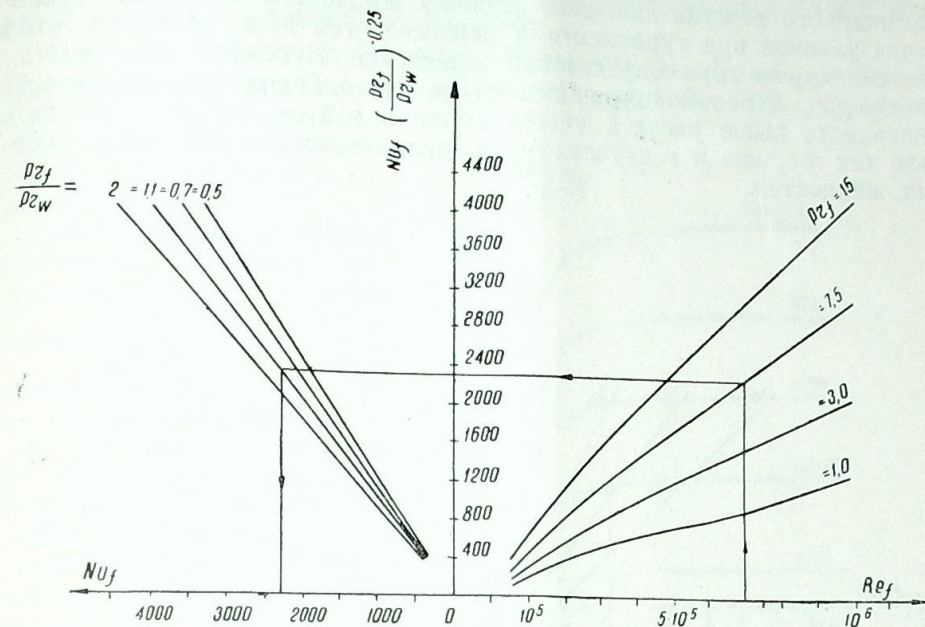


Рис. 2

Продолжая указанным методом подбора определение величины mK_1L в третьем, четвертом приближениях, и т. д. найдем окончательно то значение mK_1L , которое будет пренебрежимо мало отличаться от исходного в последнем приближении.

Тогда найденные в предпоследнем приближении значения конечных температур t'_1 и t'_2 горячей и холодной жидкостей следует принимать за их окончательные искомые значения.

Подставляя последние значения t'_1 и t'_2 , а также средние значения теплоемкостей горячей и холодной жидкостей C_{p1cp} и C_{p2cp} , найденные в предпоследнем приближении, в уравнение теплового баланса, находим количество тепла, передаваемого от горячей жидкостности к холодной, из выражения:

$$Q = G_1 C_{p1cp} (t'_1 - t'_1) = G_2 C_{p2cp} (t'_2 - t'_2). \quad (11)$$

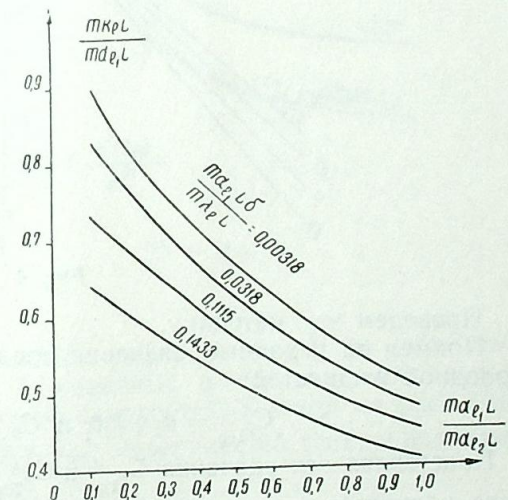


Рис. 3

Этим заканчивается поверочный расчет теплообменника в рассматриваемом случае турбулентного режима движения рабочих жидкостей.

Ламинарный режим. Методика расчета теплообменника в случае ламинарного режима движения рабочих жидкостей совершенно аналогична таковой при турбулентном режиме с той лишь разницей, что в данном случае при определении критериев Нуссельта Nu_{f1} и Nu_{f2} вместо рис. 2 необходимо пользоваться рис. 4. Вся последовательность в описанного выше расчета теплообменника в этом случае остается в силе так же, как и в случае турбулентного режима движения рабочих жидкостей.

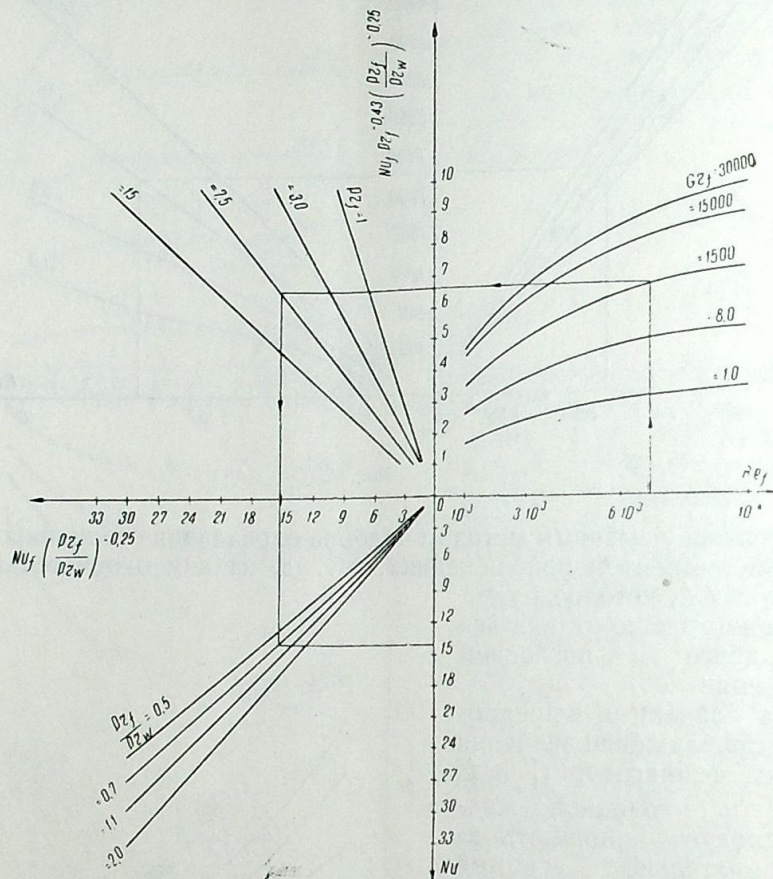


Рис. 4

Приведем эту методику.

Примем за исходные значения средних теплоемкостей горячей и холодной жидкостей:

$$C_{p1cp} = a_1 + b_1 t'_1 \text{ и } C_{p2cp} = a_2 + b_2 t'_2.$$

Подставляя эти значения C_{p1cp} и C_{p2cp} в выражение (9), находим сначала величину m , а затем вычисляем значения величин $G_1 C_{p1cp} m$ и $G_2 C_{p2cp} m$.

Задаемся далее подходящими исходными значениями $m\alpha_{i1} L$, $m\alpha_{i2} L$ и $mK_i L$.

По этим значениям величин $mK_i L$, $m\alpha_{i1} L$, $m\alpha_{i2} L$, $G_1 C_{p1cp} m$ и $G_2 C_{p2cp} m$ из рис. 1 находим сначала значения конечных и средних температур

горячей и холодной жидкостей: t'_1 , t'_2 , t_{1cp} и t_{2cp} , а затем из рис. 5 определяем в первом приближении средние температуры t_{w1cp} и t_{w2cp} поверхностей теплопередающей стенки, соприкасающихся, соответственно, с горячей и холодной жидкостями.

Принимая найденные значения температур t_{1cp} , t_{2cp} , t_{w1cp} и t_{w2cp} за определяющие, вычисляем критерии Рейнольдса Re_{f1} , Re_{f2} , Прандтля Pr_{f1} , Pr_{f2} , Pr_{w1} , Pr_{w2} и Грасгофа Gr_{f1} , Gr_{f2} , соответственно, для горячей и холодной жидкостей.

По найденным значениям указанных критериев, вычислив сначала значения симплексов $\frac{Pr_{f1}}{Pr_{w1}}$ и $\frac{Pr_{f2}}{Pr_{w2}}$, соответственно, для горячей и холодной жидкостей, из рис. 4 находим критерии Нуссельта Nu_{f1} и Nu_{f2} для этих жидкостей. Зная значения критериев Nu_{f1} и Nu_{f2} , вычисляем частные коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , после чего определяем величины $m\alpha_{i1} L$ и $m\alpha_{i2} L$.

По найденным значениям $m\alpha_{i1} L$, $m\alpha_{i2} L$ и $\frac{m\alpha_{i1} L b}{m\lambda_{1cp} L}$ из рис. 3 находим величину $mK_i L$ в первом приближении.

Подставляя найденные в первом приближении значения t'_1 и t'_2 в выражения (10), определяем сначала средние теплоемкости C_{p1cp} и C_{p2cp} , а затем из выражения (9) находим величину m .

Вычислив далее значения $G_1 C_{p1cp} m$ и $G_2 C_{p2cp} m$ и

принимая найденные в первом приближении величины $mK_i L$, $m\alpha_{i1} L$ и $m\alpha_{i2} L$ за исходные, определяем сначала из рис. 1 конечные и средние температуры t'_1 , t'_2 , t_{1cp} и t_{2cp} горячей и холодной жидкостей, а затем из рис. 5 находим средние температуры t_{w1cp} и t_{w2cp} поверхностей теплопередающей стенки во втором приближении.

Принимая t_{1cp} , t_{2cp} , t_{w1cp} и t_{w2cp} за определяющие температуры, вычисляем критерии Re_{f1} , Re_{f2} , Pr_{f1} , Pr_{f2} , Pr_{w1} , Pr_{w2} , Gr_{f1} и Gr_{f2} , на основании которых из рис. 4 находим значения критериев Nu_{f1} и Nu_{f2} .

По известным уже значениям этих критериев, определив частные коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 , вычисляем сначала значения $m\alpha_{i1} L$ и $m\alpha_{i2} L$, а затем из рис. 3 находим $mK_i L$ во втором приближении.

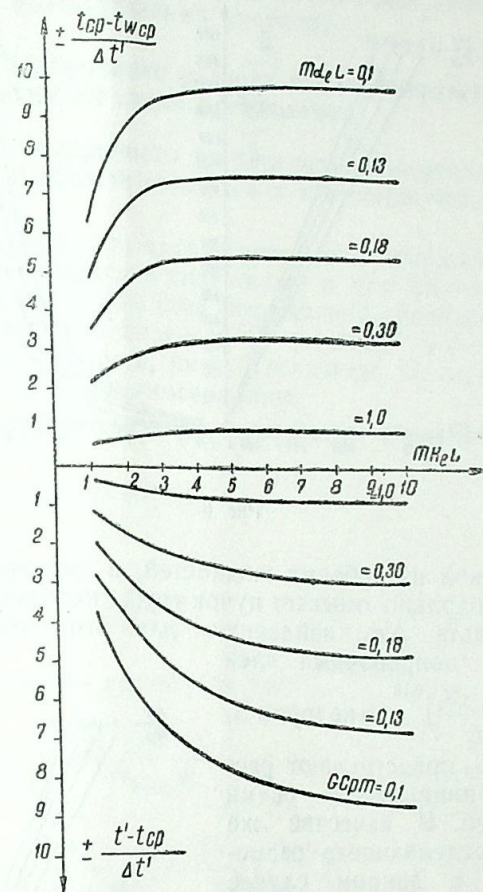


Рис. 5

Продолжая указанным методом подбора определение величины mK_iL в третьем, четвертом и т. д. приближениях, мы найдем то окончательное значение величины mK_iL , которая должна пренебрежимо мало отличаться от ее исходного значения в последнем приближении.

Тогда найденные в предпоследнем приближении значения конечных температур t_1'' и t_2'' , а также средних теплоемкостей C_{p1cp} и C_{p2cp}

горячей и холодной жидкостей следует принимать за их окончательные значения.

Подставляя эти значения t_1'' , t_2'' , C_{p1cp} и C_{p2cp} , а также заданные t_1' , t_2' , G_1 и G_2 в выражение (11), определяем, наконец, количество тепла, передаваемого от горячей жидкости к холодной в данном теплообменнике в рассматриваемом режиме его работы.

Следует отметить, что в случае движения

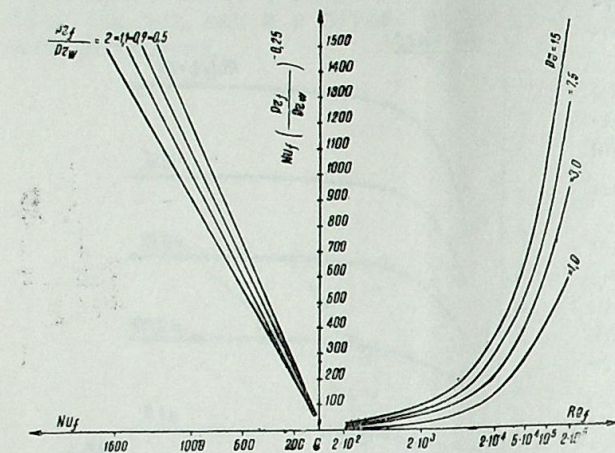


Рис. 6

одной из рабочих жидкостей в межтрубном пространстве, когда она продольно омывает пучок труб, необходимо величину критерия Нуссельта Nu_f , найденную для этой жидкости из рис. 2, умножить на поправочный член

$$\left(\frac{S_1 \cdot S_2}{d_2}\right)^{0.18}, \text{ в котором } S_1$$

и S_2 представляют расстояния между осями труб. В качестве же определяющего размера в данном случае следует принимать эквивалентный диаметр d_3 всего канала с пучком труб с внешним диаметром d_2 [1].

Рассмотрим, наконец, методику поверочного расчета теплообменника в случае, когда одна из рабочих жидкостей, например, горячая жидкость движется и межтрубном пространстве трубчатого теплообменника, омывая пучок трубок в поперечном направлении под некоторым углом атаки ψ , причем режим движения этой жидкости является турбулентным. Другая же (холодная) жидкость движется по трубкам.

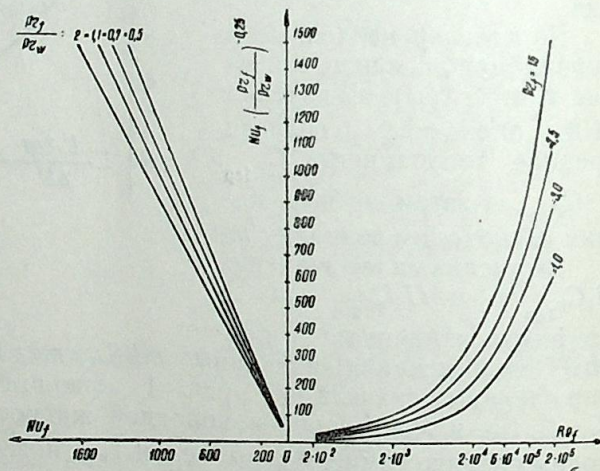


Рис. 7

Методика расчета теплообменника в данном случае будет совершенно аналогична вышеописанной методике его поверочного расчета с той лишь разницей, что в данном случае при определении критериев Нуссельта вместо кривых рис. 2 необходимо пользоваться кривыми рис. 6 или 7.

При этом найденное из рис. 6 или 7 значение коэффициента теплоотдачи α необходимо умножить на поправочный коэффициент ϵ_ψ , учитывающий отклонение угла атаки ψ потока от угла $\psi=90^\circ$, для которого и справедливы кривые на вышеуказанных рисунках.

Графо-аналитический метод поверочного расчета теплообменных аппаратов, работающих по схеме противотока

Рассмотрим теперь методику поверочного расчета теплообменника, в котором горячая и холодная жидкости движутся в конечном итоге в противоположном направлении.

Как известно, приведенные нами для случая прямотока обобщенные зависимости (1), (2) и (3) остаются в силе также и для случая противотока с той лишь разницей, что во всех выражениях, содержащих параметры холодной жидкости (с индексом 2) в данном случае движущейся навстречу горячей жидкости, вместо величины G_1 надо подставить G_2 , а температуры t_2' и t_2'' взаимозаменить.

Тогда для случая противотока будем иметь следующие обозначения:

$$\Delta t' = t_1' - t_2'', \quad \Delta t'' = t_1'' - t_2'$$

и

$$m = \frac{1}{G_1 C_{p1cp}} - \frac{1}{G_2 C_{p2cp}},$$

а формулы (1) и (2) в данном случае запишутся так:

$$\frac{t_2'' - t_2'}{\Delta t'} = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2''} = \frac{1 - e^{-mK_iL}}{G_2 C_{p2cp} m},$$

$$\frac{t_1'' - t_2''}{\Delta t'} = \frac{t_1'' - t_2''}{t_1'' - t_2''} = \frac{1}{G_2 C_{p2cp} m} \left(1 - \frac{1 - e^{-mK_iL}}{mK_iL}\right).$$

При этом величина $\Delta t' = t_1' - t_2''$ в данном случае содержит неизвестную температуру t_2'' , а потому заранее неизвестна.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что методика поверочного расчета теплообменника, работающего по схеме противотока, будет совершенно аналогична вышеописанной для случая прямотока с той лишь разницей, что при определении конечных температур рабочих жидкостей в последовательных приближениях необходимо сначала из рис. 1 определить конечную температуру t_2'' холодной жидкости, а затем по известному уже значению $\Delta t' = t_1' - t_2''$ из того же рис. 1 найти конечную температуру t_1' горячей жидкости.

Кроме того, при определении средней температуры холодной жидкости i_{2cp} из рис. 1 вместо величины $\pm \frac{t' - t_{cp}}{\Delta t'}$, отложенной по орди-

нате вниз, необходимо принимать $\frac{t_2'' - t_{2\text{ср}}}{\Delta t'}$. При определении же конечной температуры t_2'' из рис. 1, как очевидно, вместо величины $\pm \frac{t' - t''}{\Delta t'}$, отложенной по ординате вверх, следует принимать $\frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2''}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михеев М. А. Основы теплопередачи. Госэнергоиздат, 1956.
2. Тр. АЗИИ им. М. Азизбекова, вып. IX, 1955.
3. Тр. АЗИИ им. М. Азизбекова, вып. IX, 1955.

Н. Б. Гадиров, Ш. М. Исмайлзаде

Истилик дэјишмэ апаратларынын јохлама һесабатынын графоаналитик методу

ХҮЛАСЭ

Истилик дэјишмэ апаратлары халг тасарруфатында кениш тэтбиг олунур. Бу апаратлар хусусан нефт е'малы сенајесиндэ даһа чох јылмышдыр ки, бурада мухтэлиф конструксиялы вэ ишчи мајелерин һэрэкэтинин мухтэлиф схемлери үзрэ ишлэјэн апаратлара раст кэлмэк олар. Буна көрэ дэ истилик дэјишмэ апаратлары һесабатынын тэкмиллэшдирилмэси мәсэлэси чох бөјүк практики әһәмијјәтэ маликдир.

Мәгаләдэ дүз ахынлы вэ әкс ахынлы схемләр үзрэ ишлэјэн истилик дэјишмэ апаратларынын јохлама һесабатынын графоаналитик методу тәклиф олунур.

Бу мәсәдлә истилик дэјишмэ апаратларында баш верән истилик өтүрмә просесини тәјин едән әсас үмумилэшдирилмиш параметрләр (критерләр) арасындакы асылылыг әриләри гурулмушдур. Нәмин әјриләрдән истифадә едәрәк мүәллиф тәрәфиндән тәклиф олунмуш методла истилик дэјишмэ апаратларынын јохлама һесабатыны әһәмијјәтли дәрәчәдә садәләшдирмәк олар.

Р. С. МИНАСЯН

КОСОЙ ИЗГИБ СИЛОЙ СОСТАВНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО БРУСА

Вопросу теории косо́го изгиба в нелинейной теории упругости посвящены работы [3,5].

В настоящей статье рассматривается задача косо́го изгиба силой составного призматического бруса в квадратичной теории упругости.

Следуя Н. И. Мусхелишвили, предположим, что имеем призматический брус, состоящий из m не касающихся друг друга параллельных сплошных стержней из различных материалов (с упругими постоянными $\lambda_j, \mu_j, E_j, \sigma_j$), окруженных упругой средой, заполняющей пространство между стержнями (с упругими постоянными $\lambda_0, \mu_0, E_0, \sigma_0$). Образующие боковых поверхностей составляющих стержней и упругой среды параллельны.

Поперечное (нормальное) сечение такого составного бруса состоит из S_j односвязных областей с границами L_j ($j=1,2,\dots,m$), соответствующих стержням и области S_0 , соответствующей окружающему материалу с границей $L=L_1+L_2+\dots+L_{m+1}$, где L_{m+1} — наружный контур.

1. Вспомогательные задачи о плоском деформированном состоянии. Положим, что $u^{(j)}(\xi, \eta)$, $v^{(j)}(\xi, \eta)$ в каждой из областей S_j ($j=0,1,2,\dots,m$) удовлетворяют однородным уравнениям равновесия:

$$(\lambda_j + \mu_j) \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial \xi} + \mu_j \Delta u^{(j)} = 0,$$

$$(\lambda_j + \mu_j) \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial \eta} + \mu_j \Delta v^{(j)} = 0, \quad \theta^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial \eta} \quad (1,1)$$

на контурах раздела L_j ($j=1,2,\dots,m$) претерпевают разрывы вида

$$u_j^{(1)} - u_0^{(1)} = (\sigma_j - \sigma_0)\xi, \quad v_j^{(1)} - v_0^{(1)} = (\sigma_j - \sigma_0)\eta, \quad (1,2)$$

а соответствующие компоненты напряжения $\tau_{(11)}^{(j)}$, $\tau_{(22)}^{(j)}$, $\tau_{(12)}^{(j)}$ удовлетворяют граничным условиям:

$$(X_n^{(j)})_0 = 0, \quad (Y_n^{(j)})_0 = 0 \quad (1,3)$$

на наружном контуре L_0 , а также условиям:

$$(X_n^{(1)})_0 = (X_n^{(1)})_j, \quad (Y_n^{(1)})_0 = (Y_n^{(1)})_j \quad (1,4)$$

на контурах раздела L_j ($j=1,2,\dots,m$),
причем

$$X_n^{(1)} = \tau_{11}^{(1)} \cos n \hat{\xi} + \tau_{12}^{(1)} \cos n \hat{\eta},$$

$$Y_n^{(1)} = \tau_{21}^{(1)} \cos n \hat{\xi} + \tau_{22}^{(1)} \cos n \hat{\eta}.$$

Значки 0 и j указывают, что соответствующие выражения следует брать в области S_0 или же, соответственно, в области S_j . Д. И. Шерман [9] показал, что такая плоская задача всегда имеет решение. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $u^{(1)}$ и $v^{(1)}$ известны.

Через $u^{(2)}(\xi, \eta)$, $v^{(2)}(\xi, \eta)$, а также $u^{(3)}(\xi, \eta)$, $v^{(3)}(\xi, \eta)$ обозначим решения аналогичных плоских задач, претерпевающих на границах L_j ($j=1,2,\dots,m$) разрывы вида:

$$u_j^{(2)} - u_0^{(2)} = -\frac{1}{2} (\sigma_j - \sigma_0) (\xi^2 - \eta^2),$$

$$v_j^{(2)} - v_0^{(2)} = -(\sigma_j - \sigma_0) \xi \eta. \quad (1,5)$$

Соответствующие компоненты напряжений обозначим через $\tau_{11}^{(2)}$, $\tau_{22}^{(2)}$, $\tau_{12}^{(2)}$.

Разрывы $u_j^{(3)}$, $v_j^{(3)}$ получим, если в условиях (1,5) переставим u и v , а также ξ и η .

2. „Обобщенный“ центр инерции. „Обобщенные“ главные оси. Понятия „обобщенного“ центра инерции и „обобщенных“ главных осей были введены акад. Н. И. Мухелишвили [4] и проф. А. К. Рухадзе [7].

В нашей статье мы будем в основном придерживаться терминов и обозначений проф. А. К. Рухадзе.

„Обобщенным“ центром инерции поперечного сечения бруса S называется такой центр инерции, который получается, если отдельным участкам S_j ($j=1,2,\dots,m$) приписывать поверхностные плотности соответственно равные $E_j + \lambda_j \theta^{(1)}$. Тогда координаты обобщенного центра сечения S определяются формулами:

$$\xi_c = \frac{\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) \xi d\xi d\eta}{\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) d\xi d\eta}, \quad \eta_c = \frac{\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) \eta d\xi d\eta}{\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) d\xi d\eta}. \quad (2,1)$$

Если же начало координат взять в „обобщенном“ центре инерции сечения, то справедливы равенства:

$$\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) \xi d\xi d\eta = 0, \quad \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) \eta d\xi d\eta = 0. \quad (2,2)$$

„Обобщенными“ главными осями инерции сечения S называются такие главные оси площади S , которые получаются, если площадям S_j приписать указанные выше плотности, т. е:

$$\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) \xi \eta d\xi d\eta = 0. \quad (2,3)$$

Как доказывается [7], в этом случае также справедливы равенства

$$\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \xi - \lambda_j \theta^{(2)}) d\xi d\eta = 0, \quad \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \eta - \lambda_j \theta^{(3)}) d\xi d\eta = 0, \\ \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \xi - \lambda_j \theta^{(2)}) \eta d\xi d\eta = 0, \quad \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \eta - \lambda_j \theta^{(3)}) \xi d\xi d\eta = 0. \quad (1,4)$$

Также доказывается [7], что если оси „обобщенные главные“, то имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) d\xi d\eta > 0, \quad \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \xi^2 - \lambda_j \theta^{(2)} \xi) d\xi d\eta > 0, \\ \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \eta^2 - \lambda_j \theta^{(3)} \eta) d\xi d\eta > 0. \quad (2,5)$$

3. Косой изгиб силой. Как принято, расположим брус горизонтально. Примем начало координат в обобщенном центре инерции, а оси $O\xi$ и $O\eta$ направим по обобщенным главным осям левого (закрепленного) основания.

Ось $O\xi$ направим слева направо, параллельно образующей боковой поверхности бруса.

Предположим, что объемные силы отсутствуют, боковая (внешняя) поверхность бруса свободна от напряжений, а усилия, действующие на правое основание, эквивалентны силе W , приложенной к обобщенному центру инерции и параллельной плоскости $O\xi\eta$. К левому основанию приложены соответствующие реактивные усилия.

Разложим силу W на составляющие W_ξ и W_η , параллельные, соответственно, осям $O\xi$ и $O\eta$.

Определение упругого равновесия составного бруса сведется к определению компонентов напряжения τ_{11} , τ_{22} ,... удовлетворяющих в областях S_j уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} = 0, \dots \quad (3,1)$$

на боковой поверхности—условиям:

$$(X_n)_0 = 0, \quad (Y_n)_0 = 0, \quad (Z_n)_0 = 0, \quad (3,2)$$

а на поверхностях раздела—условиям:

$$(X_n)_j = (X_n)_0, \quad (Y_n)_j = (Y_n)_0, \quad (Z_n)_j = (Z_n)_0, \quad (3,3)$$

где x, y, z — координаты точки после деформации,

$$X_n = \tau_{11} \cos \hat{n}x + \tau_{12} \cos \hat{n}y + \tau_{13} \cos \hat{n}z, \dots$$

причем $\cos \hat{n}x, \cos \hat{n}y, \cos \hat{n}z$ — направляющие косинусы нормали к соответствующей боковой поверхности после деформации.

На свободном основании бруса усилия должны быть эквивалентны заданным силам W_ξ и W_η .

Зависимость между компонентами напряжений и компонентами деформации принимается „квадратичная“.

Руководствуясь выражениями компонентов смещений в линейной теории упругости при изгибе составного призматического бруса силами W_ξ и W_η , примем компоненты искомых смещений в виде:

$$u = -\tau \xi + (l - \zeta)(\gamma_1 u^* + \gamma_2 u^{**}) + \gamma_1 \left(\frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) + \gamma_1 \gamma_2 u_1 + \gamma_1^2 u_2 + \gamma_2^2 u_3,$$

$$v = \tau \xi + (l - \zeta)(\gamma_1 v^* + \gamma_2 v^{**}) + \gamma_2 \left(\frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) + \gamma_1 \gamma_2 v_1 + \gamma_2^2 v_2 + \gamma_2^2 v_3, \quad (3,4)$$

$$w = \tau \varphi - \left(l - \frac{1}{3} \zeta \right) (\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta) \zeta + \gamma_1 (\chi_1 - \xi \eta^2) + \gamma_2 (\chi_2 - \xi^2 \eta) + \gamma_1 \gamma_2 w_1 + \gamma_1^2 w_2 + \gamma_2^2 w_3,$$

где ξ, η, ζ — координаты точки до деформации,

$$u^* = \frac{\sigma_1}{2} (\xi^2 - \eta^2) + u^{(2)}, \quad u^{**} = \sigma_j \xi \eta + u^{(3)},$$

v^* и v^{**} получаются, соответственно, из u^{**} и u^* при перестановке ξ и η и замене $u^{(2)}$ на $v^{(2)}$ и $u^{(3)}$ на $v^{(3)}$, $v^{(2)}$ и $v^{(3)}$ — решения вспомогательных плоских задач,

$$\gamma_1 = \frac{W_\xi}{\sum_{j=0}^m \int \int_{S_j} (E_j \xi - \lambda_j \theta^{(2)}) \xi d\xi d\eta}, \quad \gamma_2 = \frac{W_\eta}{\sum_{j=0}^m \int \int_{S_j} (E_j \eta - \lambda_j \theta^{(3)}) \eta d\xi d\eta},$$

τ — постоянная, u_1, v_1, w_1 — функции, подлежащие определению (u_2, v_2, w_2 , а также u_3, v_3, w_3 определять в настоящей работе не будем, так как они относятся к задаче „вторичных“ эффектов при изгибе поперечной силой), φ — функция кручения, χ_1 и χ_2 — функции изгиба.*

Зависимость между ξ, η, ζ и x, y, z выражается формулами $x = \xi + u, y = \eta + v, z = \zeta + w$.

Во всех последующих вычислениях соответственно поставленной задаче будем сохранять лишь члены с коэффициентами γ_1 или γ_2 в первой степени и их произведением.

Используя формулы перехода от производных $\left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$ к производным $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, по формулам вида

* Условия для определения χ_1 , даны в труде [4], а также в статье [6]. Условия для определения χ_2 получим из соответствующих условий χ_1 , при замене $u^{(2)}$ на $v^{(2)}$, $u^{(3)}$ на $v^{(3)}$ и перестановке ξ и η .

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

вычисляем компоненты деформации, соответствующие смещениям (3,4). Компоненты напряжений, вычисленные по формулам нелинейного закона Гука, имеют вид:

$$\tau_{11} = (l - \zeta)(\gamma_1 \tau_{11}^{(2)} + \gamma_2 \tau_{11}^{(3)}) + \gamma_1 \gamma_2 \left[\left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) (\lambda_j V - 2\mu_j u^{(3)} - 2\mu_j X_x^*) + X_x^{(1)} + \tau_{11}' \right],$$

$$\tau_{22} = (l - \zeta)(\gamma_1 \tau_{22}^{(2)} + \gamma_2 \tau_{22}^{(3)}) + \gamma_1 \gamma_2 \left[\left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) (\lambda_j V - 2\mu_j v^{(2)} - 2\mu_j Y_y^*) + Y_y^{(1)} + \tau_{22}' \right],$$

$$\tau_{33} = (l - \zeta) [\gamma_1 (\lambda_j \theta^{(2)} - E_j \xi) + \gamma_2 (\lambda_j \theta^{(3)} - E_j \eta)] + \gamma_1 \gamma_2 \left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) [3\lambda_j + 6\mu_j + E_j] \xi \eta - (\lambda_j + 2\mu_j) \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} \right) - 2\mu_j Z_z^* + \gamma_1 \gamma_2 (Z_z^{(1)} + \tau_{33}'), \quad (3,5)$$

$$\tau_{12} = (l - \zeta)(\gamma_1 \tau_{12}^{(2)} + \gamma_2 \tau_{12}^{(3)}) + \gamma_1 \gamma_2 \left[\mu_j \left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 - u^{(2)} - v^{(3)} - 2X_y^* \right) + X_y^{(1)} + \tau_{12}' \right],$$

$$\tau_{13} = \gamma_1 X_z^{(1)} + \gamma_2 X_z^{(2)} - \gamma_1 \gamma_2 (l - \zeta) \left[\left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\xi + \frac{\partial u^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} \right) - X_z^* \right] + \gamma_1 \gamma_2 \tau_{13}',$$

$$\tau_{23} = \gamma_1 Y_z^{(1)} + \gamma_2 Y_z^{(2)} - \gamma_1 \gamma_2 (l - \zeta) \left[\left(\zeta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\xi + \frac{\partial v^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \eta} \right) - Y_z^* \right] + \gamma_1 \gamma_2 \tau_{23}',$$

где

$$V = 3\xi \eta - \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} - u^{(3)} - v^{(2)},$$

$$X_z^{(1)} = -\mu_j \left[\frac{\sigma_j}{2} (\xi^2 - \eta^2) + \eta^2 + u^{(2)} - \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \right], \quad X_z^{(2)} = -\mu_j \left[(\sigma_j + 2)\xi \eta + u^{(3)} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \right],$$

$$X_x^{(1)} = X_x^{(0)} + l^2 X_x^* + K^{(0)} + \left[l^2 \lambda_j \sigma_j + m_j u^{(2)} + \frac{\lambda_j}{2} \left((\sigma_j - 2)v^{(3)} \right) \right] \xi \eta + \frac{l_j}{2} [(\eta_2 + 5u^*)u^{(3)} + \chi^{**}],$$

$$Z_x^{(1)} = \frac{4\mu_j - 3\lambda_j}{4} (u^{(2)} + v^{(3)}) \xi \eta + \frac{4\mu_j \sigma_j + 3\lambda_j}{8} V^* + \frac{4\mu_j - 4\mu_j \sigma_j - 7\lambda_j}{4} V^{**} + \\ + \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} U^* + \frac{\lambda_j - \mu_j}{2} (\chi^* + \chi^{**}) + Z_z^{(0)} + l^2 Z_z^*,$$

$$\chi^* = u^{(2)} \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + u^{(3)} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi},$$

$$X_y^{(1)} = l^2 X_y^* + \mu_j \left[X_y^{(0)} + \frac{5}{4} (u^{(2)} v^{(3)} + u^{(3)} v^{(2)}) + \frac{1-5\sigma_j}{4} (\xi^2 u^{(2)} + \eta^2 v^{(3)}) + \right. \\ \left. + \frac{5\sigma_j}{4} (\xi^2 v^{(3)} + \eta^2 u^{(2)}) + \frac{5\sigma_j + 2}{4} (u^{(3)} + v^{(2)}) \xi \eta - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} v^{(2)} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} v^{(3)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} u^{(3)} + \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} u^{(2)} \right) \right],$$

$$X_z^* = \frac{15\sigma_j^2 + 11\sigma_j - 4}{4} \xi^2 \eta + \frac{5\sigma_j - 5\sigma_j - 2}{4} \eta^3 + X_z + \frac{5\sigma_j + 1}{2} \xi u^{(3)} - \\ - \sigma_j \eta \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} + \frac{1-2\sigma_j}{2} \xi \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} - 2\xi \eta \right) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} - \xi^2 \right) \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \eta} + \\ + X_z^{(2)} \left(\frac{\lambda_j - \mu_j}{2\mu_j^2} \theta^{(2)} - \frac{1}{2\mu_j} \frac{\partial v^2}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{4\mu_j^2} Y_z^{(2)} \tau_{12}^{(2)},$$

$$K^{(0)} = \frac{\lambda_j}{2} \left[U^* - \frac{2+3\sigma_j}{4} V^{**} + \frac{3}{2} \sigma_j V^* \right], \quad m_j = \frac{\mu_j \sigma_j + 2\mu_j - 3\lambda_j \sigma_j}{2},$$

$$V^* = \eta^2 v^{(2)} + \xi^2 u^{(3)}, \quad V^{**} = \eta^2 u^{(3)} + \xi^2 v^{(2)}, \quad U^* = u^{(2)} u^{(3)} + v^{(2)} v^{(3)}.$$

Значения $X_x^{(0)}$, $Y_y^{(0)}$, $Z_z^{(0)}$, $X_y^{(0)}$ приведены в статье [3], а значения X_x^* , Y_y^* , Z_z^* , X_y^* , X_z^* — в статье [2]*. Y_z^* , $Y_z^{(1)}$, χ^{**} , $Y_z^{(2)}$ и $Y_z^{(1)}$ получим, соответственно, из X_z^* , $X_x^{(1)}$, χ^* , $X_z^{(1)}$ и $X_z^{(2)}$ при замене местами ξ и η , $u^{(2)}$ и $v^{(3)}$, $v^{(2)}$ и $u^{(3)}$, χ_1 и χ_2 , $\tau_{11}^{(1)}$, $\tau_{22}^{(1)}$, ..., —искомые напряжения, соответствующие смещениям u_1 , v_1 , w_1 .

Уравнения равновесия получаем в виде:

$$\frac{\partial \tau'_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau'_{12}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{13}}{\partial \zeta} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\mu_j \frac{\partial H}{\partial \xi} - (\lambda_j + \mu_j) \theta^{(3)} \right] + \\ + \mu_j \frac{\partial U_1}{\partial \xi} = 0, \quad (3,6)$$

$$\frac{\partial \tau'_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau'_{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{23}}{\partial \zeta} + \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\mu_j \frac{\partial H}{\partial \eta} - (\lambda_j + \mu_j) \theta^2 \right] + \mu_j \frac{\partial U_2}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau'_{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau'_{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau'_{33}}{\partial \zeta} - (\lambda_j + \mu_j) (l - \zeta) \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) K^* + \mu_j (l - \zeta) P = 0,$$

* В обозначениях статьи [2] $\chi \equiv \chi_1$.

в областях S_j ($j=1, 2, \dots, m$), где

$$\mu_j H = (3\lambda_j + 7\mu_j + 2\lambda_j \sigma_j) \xi \eta - 2\lambda_j (H^{(0)} + H^{(23)}) - (\lambda_j + \mu_j) \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} + \right. \\ \left. + u^{(3)} + v^{(2)} \right),$$

причем $H^{(0)}$ имеет то же значение, что и в статье [2],

$$\mu_j U_1 = \int U_1^* d\xi, \quad \mu_j U_2 = \int U_2^* d\eta,$$

$$\mu_j H^{(23)} = \frac{\lambda_j + \mu_j}{2} \left(\frac{\lambda_j + 3\mu_j}{\lambda_j + 2\mu_j} U^{(2)} U^{(3)} - \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\mu_j} \theta^{(2)} \theta^{(3)} \right),$$

$$\mu_j P = -E_j (v^* + u^{**}) + \frac{\lambda_j \sigma_j}{2} (\xi^2 - \eta^2) \left(\frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \eta} \right) + P_1^* + P_2^* + Z_z,$$

$$U_1^* = \frac{\partial X_x^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial X_y^{(1)}}{\partial \eta} - \mu_j X_z^* + l^2 \frac{\partial H}{\partial \xi} + v^* \frac{\partial X_z^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_j}{2} (\eta^2 - \xi^2) \left(\frac{\partial X_z^{(1)}}{\partial \eta} - \right. \\ \left. - \frac{\partial X_z^{(2)}}{\partial \xi} \right) + v^{(3)} \frac{\partial X_z^{(1)}}{\partial \eta} + u^{(2)} \frac{\partial X_z^{(2)}}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} - \eta^2 \right) \tau_{11}^{(3)} + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} - 2\xi \eta \right) \tau_{11}^{(2)} + \\ + \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} - 2\xi \eta \right) \tau_{13}^{(3)} + \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} - \xi^2 \right) \tau_{12}^{(2)},$$

$$P_1^* = \mu_j \frac{\partial X_z^*}{\partial \xi} - \frac{\partial u^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial X_z^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v^{(2)}}{\partial \xi} \frac{\partial Y_z^{(2)}}{\partial \eta} - \frac{\partial v^*}{\partial \eta} \frac{\partial \chi_z^{(2)}}{\partial \eta} + \frac{\partial u^*}{\partial \eta} \frac{\partial Y_z^{(2)}}{\partial \xi} + \\ + \lambda_j \delta_j \xi \eta \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi} + \lambda_j \left(u^{(3)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \eta} + v^{(3)} \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad K^* = \frac{\partial \theta^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \eta}.$$

Значения U_2^* и P_2^* можно получить, соответственно, из U_1^* и P_1^* , поменяв местами в соответствующих выражениях ξ и η , $u^{(2)}$ и $v^{(3)}$, $v^{(2)}$, $u^{(3)}$, χ_1 и χ_2 .

Так как зависимость между τ'_{11} , τ'_{22} , ... и соответствующими компонентами деформаций линейная, то не трудно составить условия совместимости, соответствующие уравнениям равновесия (3,6).

Используя выражения компонентов напряжений, а также зависимость между направляющими косинусами нормали к поверхности до и после деформации, получаем граничные условия:

$$\left\{ \left[\tau'_{11} + \mu A^{(0)} - \mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) A \right]_j \cos \alpha + \left[\tau'_{12} + \mu B^{(0)} - \mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) B + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right)^2 \right] \cos \beta \right\}_j = \{id.\}_0,$$

$$\left\{ \left[\tau'_{21} + \mu C^{(0)} - \mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) C + \mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right)^2 \right] \cos \alpha + \left[\tau'_{22} + \mu L^{(0)} - \right. \right.$$

$$-\mu \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) L \Big] \cos \beta \Big\}_j = \{id.\}_0, \quad (3,7)$$

$$\left\{ \tau'_{31} \cos \alpha + \tau'_{32} \cos \beta + \nu (l - \zeta) \left[\left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \frac{d\Psi}{dn} + N^{(0)} \cos \alpha + M^{(0)} \cos \beta \right] \right\}_j = \{id.\}_0,$$

на контурах L_j ($j=1, 2, \dots, m+1$), причем при $j=m+1$ левые части принимаем равными 0.

В граничных условиях (3,7) $\cos \alpha$, $\cos \beta$ — направляющие косинусы нормали к соответствующей боковой поверхности до деформации.

$$\mu_j A_j = 2\mu_j u^{(3)} + X_z^{(2)} - \lambda_j V + \lambda_j (\xi U^{(2)} - \eta U^{(3)}) - 2\lambda_j \sigma_j \xi \eta + 2\mu_j A_j^{(23)},$$

$$\nu_j B_j = \mu_j (u^{(2)} + v^{(3)}) + X_z^{(1)} + \lambda_j (\xi \theta^{(2)} - \eta \theta^{(3)}) + 2\mu_j B_j^{(23)},$$

$$\mu_j A_j^{(0)} = l^2 (\mu_j A_j^{(23)} - \lambda_j \sigma_j \xi \eta) + \frac{1}{2} \lambda_j l^2 (\xi U^{(2)} - \eta U^{(3)}) + X_z^{(1)} u^{**} + X_z^{(2)} u^* + X_x^{(1)},$$

$$\mu_j B_j^{(0)} = \frac{1}{2} \lambda_j l^2 (\xi \theta^{(2)} - \eta \theta^{(3)}) + \nu_j l^2 B_j^{(23)} + X_y^{(1)} + Y_z^{(1)} u^{**} + Y_z^{(2)} u^*,$$

$$N_j^{(0)} = -X_z^{(1)} \frac{\partial u^{**}}{\partial \xi} - X_z^{(2)} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - Y_z^{(1)} \frac{\partial u^{**}}{\partial \eta} + Y_z^{(2)} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + (\lambda_j \theta^{(3)} - E_j \eta) u^* +$$

$$+ (\lambda_j \theta^{(2)} - E_j \xi) u^{**}, \Psi = (1 + 2\sigma_j) \xi \eta + u^{(3)} + v^{(2)}.$$

Значения D_j , C_j , $D_j^{(0)}$, $C_j^{(0)}$, $M_j^{(0)}$ получим, соответственно, из значений A_j , B_j , $A_j^{(0)}$, $B_j^{(0)}$, $N_j^{(0)}$ при перестановке ξ и η , $u^{(2)}$ и $v^{(3)}$, $v^{(2)}$ и $u^{(3)}$, χ_1 и χ_2 . $A_j^{(23)}$, $B_j^{(23)}$ определяются формулами (2,7) статьи [1] при $i=2$, $k=3$.

Примем выражения искомых напряжений τ'_{11} , τ'_{22} , ... в виде:

$$\tau'_{11} = \mu_j \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - H - \frac{c}{\mu_j} \tau_{11}^{(1)} \right) + \mu_j \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \int L d\xi + h_1 + h_4 \right) +$$

$$+ \tau_{11}^* - U_1 - c \int u^{(1)} d\xi,$$

$$\tau'_{22} = \mu_j \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - H - \frac{c}{\mu_j} \tau_{22}^{(1)} \right) + \mu_j \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + h_2 \right) + \tau_{22}^* -$$

$$- U_2 - c \int v^{(1)} d\eta,$$

$$\tau'_{33} = \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\nu_j \sigma_j (\Delta \Phi - 2H) - c (E_j + \lambda_j \theta^{(1)}) + \frac{3\lambda_j + 2\mu_j}{2} N \right] +$$

$$+ \mu_j \sigma_j (\Delta \Psi - U_1 - U_2) - l^2 E_j \xi \eta - c \frac{E_j}{4} (\xi^2 + \eta^2) - \mu_j (1 + \sigma_j) \Phi - c \sigma_j \left(\int u^{(1)} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int v^{(1)} d\eta \right) - \mu_j \left(\int L d\xi + h_1 + h_2 + h_4 \right) - \tau_{11}^* - \tau_{22}^*, \quad (3,8)$$

$$\tau'_{12} = -\nu_j \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{c}{\mu_j} \tau_{12}^{(1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} (b-1) \xi^2 + \frac{3}{2} (b+1) \eta^2 \right] - \mu_j \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi \partial \eta} +$$

$$+ \frac{\nu_j}{8} [(b-1) \xi^4 - (b+1) \eta^4 - 4bl^2 (\xi^2 - \eta^2)] - \frac{a}{2} \mu_j (\xi^2 - \eta^2),$$

$$\tau'_{13} = \mu_j (l - \zeta) \left(a \eta - \frac{1}{2} b \eta^3 - c u^{(1)} + \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + L \right) + \tau_{13}^*, \tau'_{23} = \mu_j (l - \zeta) \left(-a \xi + \right.$$

$$\left. + \frac{b}{2} \xi^3 - c v^{(1)} - \frac{\partial h_2}{\partial \eta} \right) + \tau_{23}^*$$

где

$$\tau_{11}^* = \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left[3\mu_j (\xi \eta - \Psi + b\varphi) + (\lambda_j + \nu_j) \int \theta^{(3)} d\xi \right] - \nu_j \left(\int d\xi \int u^{(3)} d\xi - \right.$$

$$\left. - \omega^* - \frac{1}{2} \xi^3 \eta \right) + c \left(\frac{1}{4} E_j \xi^2 - \frac{1}{2} \mu_j \sigma_j \eta^2 \right),$$

$$\tau_{13}^* = \mu_j (l - \zeta) \left[\omega_\xi' + \frac{3}{2} \xi^2 \eta - a \varphi_\xi' + c (1 + \sigma_j) \xi - \frac{1}{2} \eta^3 - \int u^{(3)} d\xi - \right.$$

$$\left. - \left(\kappa - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \left(\Psi_\xi' - b \varphi_\xi' \right) \right],$$

τ_{22}^* , τ_{23}^* получим, соответственно, из τ_{11}^* , τ_{13}^* вышеуказанной перестановкой,

$$L = \int \left[u^{(3)} + v^{(2)} + \frac{\lambda_j + 2\nu_j}{2\mu_j} N - 3\Psi - (1 - 2\sigma_j) H + (1 - \sigma_j) \Delta \Phi - \right.$$

$$\left. - 3b\varphi \right] d\xi + h_3(\eta),$$

$$\omega^* = \omega + l^2 (\Psi - b\varphi) - a\varphi, N = \int \theta^{(3)} d\xi + \int \theta^{(2)} d\eta,$$

h_1 , h_2 , h_3 , h_4 определяются как частные решения уравнений:

$$\Delta \left[h_1(\xi, \eta) - \frac{\lambda_j + \mu_j}{\nu_j} \int \theta^{(3)} d\xi - \int d\xi \int u^{(3)} d\xi \right] = 0, \quad \Delta \left[h_2(\xi, \eta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_j + \nu_j}{\mu_j} \int \theta^{(2)} d\eta - \int d\eta \int v^{(2)} d\eta \right] = 0,$$

$$\Delta L = 0, \quad \Delta \left[h_4(\eta) + \int L d\xi \right] = 0,$$

h_3 и h_4 можно подобрать так, чтобы они зависели только от η , так как $\frac{\partial \Delta h}{\partial \xi} = 0$, а также $\frac{\partial \Delta h_4}{\partial \xi} = 0$.

Напряжения (3,8) будут удовлетворять уравнениям равновесия (3,6), условиям совместности, а также граничным условиям (3,7), если функции Φ , Ψ и ω определены условиями:

$$\mu_j \Delta \Delta \Phi = -(\lambda_j + \nu_j) \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int \theta^{(2)} d\eta + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \int \theta^{(3)} d\xi \right) - \frac{5\lambda_j + 6\mu_j}{2(1 - \sigma_j)} K^* +$$

$$+ \nu_j \frac{1 - 2\sigma_j}{1 - \sigma_j} \Delta H,$$

$$\Delta\Delta\psi = \frac{\lambda_j + \nu_j}{\mu_j} \left(\frac{l^2}{1-\sigma_j} K^* + N - 2c\theta^{(1)} \right) + 2(\Delta\Phi - H) + \\ + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} + c\Delta \left(\int u^{(1)} d\xi + \int v^{(1)} d\eta \right) + \frac{1}{1-\sigma_j} \left(P - \sigma_j \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - \sigma_j \frac{\partial^2 U_2}{\partial \eta^2} \right), \quad (3,9)$$

$$\Delta\omega = H^{(1)} - \Delta\Phi - P + b\varphi - 3\Psi - \frac{\lambda_j + \nu_j}{\mu_j} (N - c\theta^{(1)}),$$

в каждой из областей S_j ($j=0,1,\dots,m$):

$$\mu_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_j - \nu_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_0 = \int \left\{ \left[\lambda(\xi\theta^{(2)} - \eta\theta^{(3)}) - \mu T - Y_z^{(2)} \right]_j \cos\alpha - [id.]_0 \cos\alpha + \right. \\ \left. + \left[\mu_j \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \int \theta^{(2)} d\eta - v^{(2)} - R \right)_j - \nu_0 (id.)_0 \right] \cos\beta \right\} ds, \\ \nu_j - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_j - \nu_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_0 = \int \left\{ \left[\nu_j \left(R + u^{(3)} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \int \theta^{(3)} d\xi - \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} \right)_j - \right. \right. \\ \left. \left. \nu_0 (id.)_0 \right] \cos\alpha + \left[\nu T + \lambda(\xi\theta^{(2)} - \eta\theta^{(3)}) + X_z^{(1)} \right]_j \cos\beta - [id.]_0 \cos\beta \right\} ds, \quad (3,10) \\ \nu_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_j - \nu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_0 = \int \left\{ \left[\nu_j (F + C^{(0)})_j - \nu_0 (F + C^{(0)})_0 \right] \cos\alpha + [\omega^* + h_2 - U_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \xi \eta^3 - \int d\eta \int v^{(2)} d\eta + c \left(\frac{1+\sigma}{2} \eta^2 - \frac{\sigma}{2} \xi^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \int v^{(1)} d\eta \right) \right] \cos\beta - \nu_0 [id.] \cos\beta \right\} ds, \\ \nu_j \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_j - \nu_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_0 = \int \left\{ \left[\mu_j \left[U_1 - \int L d\xi - h_1 - h_4 + \int d\xi \int u^{(3)} d\xi - \omega^* - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \xi^3 \eta - c \left(\frac{1+\sigma}{2} \xi^2 - \frac{\sigma}{2} \eta^2 \right) + c \int u^{(1)} d\xi - A^{(0)} \right]_j \cos\alpha - \nu_0 [id.]_0 \cos\alpha - \right. \\ \left. - [\nu_j (F + B^{(0)})_j - \nu_0 (F + B^{(0)})_0] \cos\beta \right\} ds, \\ \nu_j \left(\frac{d\omega}{dn} \right)_j - \nu_0 \left(\frac{d\omega}{dn} \right)_0 = \mu_j \left\{ \left[\frac{b+1}{2} \eta^3 + \int u^{(3)} d\xi - \frac{3}{2} \xi^2 \eta + cu^{(1)} - c(1+\sigma)\xi - L - \right. \right. \\ \left. \left. - N^{(0)} - \frac{\partial h_1}{\partial \xi} \right] \cos\alpha + \left[\frac{\partial h_2}{\partial \eta} + \int v^{(2)} d\eta + \frac{1-b}{2} \xi^3 + cv^{(1)} - c(1+\sigma)\eta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \xi \eta^2 \right] \cos\beta \right\} - \nu_0 [id.]_0, \\ \omega_j - \omega_0 = -(\omega_j - \omega_0)$$

на контурах L_j ($j=1,2,\dots,m+1$), причем $\mu_{m+1} = \lambda_{m+1} = 0$. В выражениях (3,10):

$$R_j = 5(1+\sigma_j)\xi\eta + 2(u^{(3)} + \tau^{(2)} - H^{(0)} - N^{(3)}) - \varepsilon b\varphi + \frac{\lambda_j}{\nu_j} (\xi U^{(2)} - \eta U^{(3)}),$$

$$T_j = 2K^{(23)} + \frac{3}{2} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{3}{2} b(\eta^2 - \xi^2) + u^{(2)} + v^{(3)},$$

$$F_j = \frac{1}{8} \left[(b-1)\xi^4 - (b+1)\eta^4 - 4bl^2(\xi^2 - \eta^2) - \frac{a}{2} (\xi^2 - \eta^2) \right],$$

$K^{(23)}$, $N^{(23)}$ имеют, соответственно, значения $K^{(ik)}$, $N^{(ik)}$ при $i=2$, $k=3$, определяемые формулами (2,11) статьи [2].

Используя формулу Грина, не трудно показать, что условие однозначности $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ при обходе всех контуров L_j ($j=1,2,\dots,m+1$), соответственно, приводится к выражениям:

$$-3 \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \xi - \lambda_j \theta^{(2)}) d\xi d\eta, \quad 3 \sum_{j=0}^m \iint_{S_j} (E_j \eta - \lambda_j \theta^{(3)}) d\xi d\eta,$$

каждое из которых равно 0, так как начало координат взято в обобщенном центре инерции основания.

Для выполнения того же условия для функции ψ следует на полученное решение (3,8) наложить решение Г. М. Хатиашвили [8].

Постоянные a и b определяются из условия однозначности, соответственно, функций ψ и Φ при обходе контуров L_j ($j=1,2,\dots,m+1$).

Постоянная c определяется из условия существования функции ω , постоянная τ — из условия отсутствия крутящего момента на основаниях.

Вычисления показывают, что усилия на правом основании не приводятся к заданным силам W_ξ и W_η . Однако оказывается, что для выполнения этого условия достаточно к полученному решению присовокупить решение определенной линейной задачи Сен-Венана.

Смещение ω непрерывно при переходе из одного материала в другой. Непрерывность компонентов смещения u и v , как показывают вычисления, можно обеспечить соответствующим определением Φ и ψ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Минасян Р. С. Тр. Азерб. ин-та нефти и химии, № 23, 1961.
2. Минасян Р. С. Тр. Груз. политехн. ин-та, № 6 (67), 1961.
3. Минасян Р. С. Косой изгиб силой однородного призматического бруса. Сообщ. АН Груз. ССР, № 3, 1962.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1949.
5. Пожалостин А. И. и Риз Г. М. Прикл. матем. и мех., т. VI, 1942.
6. Рухадзе А. К. Тр. Груз. политехн. ин-та, № 19, 1949.
7. Рухадзе А. К. Тр. Груз. политехн. ин-та, № 30, 1954.
8. Хатиашвили Г. М. Статическое равновесие составного цилиндрического бруса с нагруженной боковой поверхностью. Сообщ. АН Груз. ССР, № 1, 1955.
9. Шерман Д. И. Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, № 86, 1938.

З. Г. КЕРИМОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В БУРИЛЬНЫХ ТРУБАХ

В работе [3] приведен расчет для определения напряжения в колонне бурильных труб при ударе колонны о ротор, но исходная формула для вычисления динамического напряжения выбрана не совсем удачно, так как принятое в [3] выражение для определения динамического напряжения справедливо для случая, когда груз падает на свободный конец стержня. В рассматриваемом случае стержень падает на ротор, принимаемый за абсолютно твердое тело. В книге [1] рассмотрен случай, когда стержень ударяется о гладкую плоскость, но здесь не были учтены его продольные колебания.

В настоящей статье преследуется цель—определить динамические напряжения в колонне бурильных труб с учетом их продольных упругих колебаний.

Предположим, что колонна бурильных труб из-за несвоевременности процесса торможения падает с высоты h и ударяется о ротор со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Дифференциальное уравнение колебания колонны бурильных труб после удара имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial t^2} = b + a^2 \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$b = g \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right); \quad a^2 = \frac{Eg}{\gamma_1},$$

где $U(x;t)$ —упругое продольное перемещение после удара,

E —модуль упругости,

γ_1 и γ_2 —удельный вес материала бурильных труб и глинистого раствора,

g —ускорение свободного падения.

Принимаются следующие начальные и граничные условия для

$$U(x;0)=0; \quad \frac{\partial U(x;0)}{\partial t} = v_0; \quad U(0,t)=0; \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = 0... \quad (2)$$

Для приведения уравнения (1) к однородному введем вместо $U(x;t)$ новую функцию $v(x;t)$ так, чтобы

З. Г. КЕРИМОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В БУРИЛЬНЫХ ТРУБАХ

В работе [3] приведен расчет для определения напряжения в колонне бурильных труб при ударе колонны о ротор, но исходная формула для вычисления динамического напряжения выбрана не совсем удачно, так как принятое в [3] выражение для определения динамического напряжения справедливо для случая, когда груз падает на свободный конец стержня. В рассматриваемом случае стержень падает на ротор, принимаемый за абсолютно твердое тело. В книге [1] рассмотрен случай, когда стержень ударяется о гладкую плоскость, но здесь не были учтены его продольные колебания.

В настоящей статье преследуется цель—определить динамические напряжения в колонне бурильных труб с учетом их продольных упругих колебаний.

Предположим, что колонна бурильных труб из-за несвоевременности процесса торможения падает с высоты h и ударяется о ротор со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$.

Дифференциальное уравнение колебания колонны бурильных труб после удара имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial t^2} = b + a^2 \frac{\partial^2 U(x;t)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$b = g \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right); \quad a^2 = \frac{Eg}{\gamma_1},$$

где $U(x;t)$ —упругое продольное перемещение после удара,

E —модуль упругости,

γ_1 и γ_2 —удельный вес материала бурильных труб и глинистого раствора,

g —ускорение свободного падения.

Принимаются следующие начальные и граничные условия для

$$U(x;0)=0; \quad \frac{\partial U(x;0)}{\partial t} = v_0; \quad U(0,t)=0; \quad \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = 0... \quad (2)$$

Для приведения уравнения (1) к однородному введем вместо $U(x;t)$ новую функцию $v(x;t)$ так, чтобы

$$U(x; t) = v(x; t) + S(x); a^2 \frac{d^2 S(x)}{dx^2} = -b \quad (3)$$

Тогда функция $v(x; t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v(x; t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

С целью получения нулевых граничных условий для $v(x; t)$ примем:

$$S(0) = 0; \frac{dS(l)}{dx} = 0; S = \frac{bx}{a^2} \left(l - \frac{x}{2} \right). \quad (5)$$

Запишем начальные и граничные условия для функции $v(x; t)$:

$$v(x; 0) = -\frac{bx}{a^2} \left(l - \frac{x}{2} \right); \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = v_0; v(0; t) = 0; \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (4), полученное методом Фурье, удовлетворяющее условиям, (6) имеет вид*:

$$v(x; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{16bl^2}{a^2 \pi^3 (2n+1)^3} \cdot \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t + \frac{8v_0 l}{a \pi^2 (2n+1)^2} \cdot \sin \frac{(n+1)a\pi}{2l} t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad (7)$$

Учитывая (3), (5) и (7), для $U(x; t)$ получаем:

$$U(x; t) = \frac{bx}{a^2} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{16bl^2}{a^2 \pi^3 (2n+1)^3} \cdot \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t + \frac{8v_0 l}{a \pi^2 (2n+1)^2} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t \right] \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (8)$$

Напряжение, согласно закону Гука, определяется из выражения:

$$\sigma(x; t) = \frac{bEl}{a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{8Ebl}{a^2 \pi^2 (2n+1)^2} \cdot \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t + \frac{4v_0 l E}{a \pi (2n+1)} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t \right] \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (9)$$

В верхнем закрепленном сечении:

$$\sigma(0; t) = \frac{bEl}{a^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{8Ebl}{a^2 \pi^2 (2n+1)^2} \cdot \cos \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t + \frac{4v_0 l E}{a \pi (2n+1)} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi}{2l} t \right]. \quad (10)$$

* Решение аналогичной задачи имеется в (2), в которой допущены опечатки.

Нетрудно получить выражения для σ , соответствующие моментам времени: $0; \frac{l}{a}; \frac{2l}{a}; \frac{3l}{a} \dots$ и т. д.

$$\sigma(0; 0) = 0; \quad (11)$$

$$\sigma\left(0; \frac{l}{a}\right) = (\gamma_1 - \gamma_2)l + \frac{v_0 E}{a}; \quad (12)$$

$$\sigma\left(0; \frac{2l}{a}\right) = 2(\gamma_1 - \gamma_2)l; \quad (13)$$

$$\sigma\left(0; \frac{3l}{a}\right) = (\gamma_1 - \gamma_2)l - \frac{v_0 E}{a}; \quad (14)$$

$$\sigma\left(0; \frac{4l}{a}\right) = 0 \text{ и т. д.} \quad (15)$$

Следовательно, максимальное напряжение при ударе надо определять по формуле (13) при $\frac{v_0 E}{a} < (\gamma_1 - \gamma_2)l$ и по формуле (12) при $\frac{v_0 E}{a} > (\gamma_1 - \gamma_2)l$.

В случае, если колонны бурильных труб движутся с постоянной скоростью и ударяются о ротор, для $U(x; t)$ и $\sigma(x; t)$ получены следующие выражения:

$$U(x; t) = \frac{bx}{a^2} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \frac{8v_0 l}{a \pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi x}{2l}; \quad (16)$$

$$\sigma(x; t) = \frac{bE(l-x)}{a^2} + \frac{4v_0}{a \pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \sin \frac{(2n+1)a\pi t}{2l} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (17)$$

В верхнем закрепленном сечении напряжения соответствующие моментам времени $0; \frac{l}{a}; \frac{2l}{a}; \frac{3l}{a} \dots$ и т. д. определяются:

$$\sigma(0; 0) = (\gamma_1 - \gamma_2)l;$$

$$\sigma\left(0; \frac{l}{a}\right) = (\gamma_1 - \gamma_2)l + \frac{v_0 E}{a};$$

$$\sigma\left(0; \frac{2l}{a}\right) = (\gamma_1 - \gamma_2)l;$$

$$\sigma\left(0; \frac{3l}{a}\right) = (\gamma_1 - \gamma_2)l - \frac{v_0 E}{a}.$$

Максимальное напряжение в колонне бурильных труб, когда они, двигаясь с постоянной скоростью, ударяются о ротор, определяется так:

$$\sigma_{\max}^0 = (\gamma_1 - \gamma_2)l + \frac{v_0 E}{a}. \quad (18)$$

В этом выражении вместо $\sigma_{\max}$, подставляя предел текучести σ_T , можно определить, каково должно быть предельное значение скорости колонны бурильных труб при их равномерном спуске:

$$v_{\max} = \frac{a}{E} [\sigma_T - (\gamma_1 - \gamma_2)l]. \quad (19)$$

Численные расчеты выполнены для случая: $l = 3000 \text{ м}$; $\gamma_T = 0,0078 \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}$;

$$\gamma_2 = 0,0012 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; h = 10 \text{ см} (v_0 = 1,4 \text{ м/сек}).$$

Для рассматриваемого случая

$$\frac{v_0 E}{a} = \frac{1,4 \cdot 2 \cdot 10^6}{\sqrt{\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 981}{0,0078}}} = 558 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

$$(\gamma_T - \gamma_2)l = (0,0078 - 0,0012)300000 = 1980 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Отсюда видно, что $\frac{v_0 E}{a} < (\gamma_T - \gamma_2)l$; следовательно, максимальное напряжение при ударе будет $\sigma_{\max}^0 = 2(\gamma_1 - \gamma_2)l = 3960 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$.

Рассмотрим для короткой колонны $l = 300 \text{ м}$; $(\gamma_1 - \gamma_2)l = 198 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$; следовательно, максимальное напряжение надо определять из выражения (18): $\sigma_{\max}^0 = 198 + 558 = 756 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Значит при $l = 3000 \text{ м}$ $\sigma_{\max}^0$ в 3,8 раза больше статического напряжения.

В [3] при $l = 3000 \text{ м}$ было получено $\sigma_{\text{дин}} = 4150 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ и при $l = 300 \text{ м}$ $\sigma_{\text{дин}} = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Расчет по [1] для $\sigma_{\max}$ при $l = 300 \text{ м}$ и 3000 м дает

$$1048 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \text{ и } 2946 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Сравнивая численные значения, легко выяснить значительные расхождения полученных результатов для одних и тех же условий.

Определим по формуле (19) предельное значение скорости колонны бурильных труб при их равномерном спуске.

Для труб из стали марки $E\sigma_T = 5500 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$;

$$v_{\max} = \frac{5016}{2 \cdot 10^6} (5500 - 0,0066 \cdot 300000) = 8,83 \text{ м/сек}.$$

Отсюда получаем, что данный материал позволяет спуск колонны бурильных труб до скорости $8,83 \text{ м/сек}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М., 1956.
3. Сароян А. Е. Основы расчета колонны бурильных труб. Гостехиздат, 1961.

З. Н. Кәримов

Газыма боруларында динамик кәркинлијин тәјин олунмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәғаләдә газма кәмәринин һәр һансы сәбәбдән ротор үзәринә дүшмәси нәтиҗәсиндә зәрбәдән јаранан кәркинликләр, бору кәмәринин узунуна рәгси дә нәзәрә алынмагла, тәјин едилир.

Бундан әлавә, бору кәмәринин ғырылмасы тәмин олунмаг шәрти илә мүмкүн олан максимум ендирмә сүр'әтинин тәјини үчүн дүстур чыхарылыр.

МҮНДЭРИЧАТ

Г. К. Намазов. Кэсилэн эмсалы параболит тэнликлэр үчүн бир сэрхэдд мэсэлэсн хаггында	3
Э. С. Чэфэров. Еспоненсиал типли там функција үчүн мұхтэлиф чэкили нормалар арасында бэрэбэрсизликлэр	17
Н. Н. Агајев, Г. М. Чэфэрли. Бир мултипликатив ортонормал функци- јалар системи хаггында	27
Э. Э. Новрузов. Адамар вэ Фрагмен-Линделјоф типли теоремлэр	37
Н. Г. Гусейнов. NiF_2 -гурулушлу кристалларын магнит хассэлэри хусу- сијјэтлэринэ даир	49
К. Э. Шэрифов, С. Н. Гачыјев, И. М. Гэрибов. Индиум-арсенидин эмэлэ кэлмэ енталпијасы	53
Ф. С. Садыхов. Електронун тормозланма шүалганмасы вэ чүтүн эмэлэ кэл- мэси просеслэриндэ хиссэчиклэрин полјаризација хассэлэринэ нүвэнин сонлу өл- чүлэринин тэсири	55
М. Б. Керимбэјов, М. У. Гашимзаде. Улдуз сарышмаларынын өј- рэнилмэсинэ даир	61
В. С. Эфэндијев. Ики тактлы газодизел мұһэррикиндэ күчүн мигдар- ла тэнзими	65
И. А. Мэммедов. Листин јајылмасынын симметрик олмајан бир мэсэлэсн	71
И. А. Асланов. Күнэшин фырланма сүр'этинэ едилэн дүзэлишлэр	81
Г. В. Ахундова вэ б. Ики мэнтэгэнин астронглим характеристикалары- нын мугајисэси	91
Н. Б. Гэдилов, Ш. М. Исмајылзаде. Истилик дэјишмэ апаратлары- нын јохлама несабатынын графоаналитик методу	103
Р. С. Минасјан. Мүрэккэб призматик брус күчү илэ эјинти	113
З. Н. Керимов. Газыма боруларында динамик кэркинлијин тэјин олун- масы хаггында	125

СОДЕРЖАНИЕ

Г. К. Намазов. Об одной краевой задаче для параболического уравнения с разрывными коэффициентами	3
А. С. Джафаров. Неравенства между различными весовыми нормами для целых функций экспоненциального типа	17
Г. Н. Агаев и Г. М. Джафарли. Об одном классе мультипликативных ортонормированных систем функций	27
А. А. Новрузов. Теоремы типа Адамара и Фрагмена—Ленделёфа	37
Н. Г. Гусейнов. Об особенностях в магнитных свойствах кристаллов со- структурой типа NiF_2	49
К. А. Шарифов, С. Н. Гаджиев, И. М. Гарибов. Энтальпия обра- зования арсенида индия	53
Ф. С. Садыхов. О влиянии конечных размеров ядра на поляризации частиц при тормозном излучении электрона и образовании пар	55
М. Б. Керимбеков, М. У. Гашимзаде. К изучению мерцания звезд	61
В. С. Эфендиев. Исследование количественного регулирования мощности в двухтактном газодизеле	65
И. А. Мамедов. Одна из задач несимметричной прокатки полосы	71
И. А. Асланов. Редукции к скорости вращения солнца	81
Г. В. Ахундова и др. Сравнение астроклиматических характеристик двух пунктов	91
Н. Б. Кадиров, Ш. М. Исмаил-заде. Графо-аналитический метод поверочного расчета теплообменных аппаратов	103
Р. С. Минасян. Косой изгиб силой составного призматического бруса	113
З. Г. Керимов. Об определении динамических напряжений в бурильных трубах	125

Чапа имзаланмыш 22/V 1963-чү ил. Кағыз форматы $70 \times 108^{1/16}$. Кағыз вәрәги 4,13.
Чап вәрәги 11,30. Нәс-нәшријјат вәрәги 10,38. ФГ 06526. Сифариш 434. Тиражы 630.
Гимәти 80 гәп.

Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасы Мәтбәәси, Бақы, Фәһлә проспекти, 96.