

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

6

1962

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
БАКЫ — БАКУ

Р. Г. МАМЕДОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ
ЗНАЧЕНИИ И О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ
СЕМЕЙСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Второе сообщение)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена развитию и обобщению некоторых результатов работы [2]* и является ее естественным продолжением.

В этой работе мы пользуемся обозначениями и определениями, введенными в [2].

Нам здесь понадобятся некоторые классы функций.

Пусть $H(n, x)$ — совокупность всех функций $f(t)$, определенных на $\langle a, b \rangle$ и имеющих производные до n -го порядка включительно в точке $t = x \in \langle a, b \rangle$.

Обозначим через $H(n, x, \pm)$ совокупность всех функций $f(t)$ из множества $H(n, x)$, имеющих конечную левую и правую производные $f_-^{(n+1)}(x)$ и $f_+^{(n+1)}(x)$ в точке $t = x \in \langle a, b \rangle$.

Пусть $\varphi(t)$ — некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$ и удовлетворяющая условиям $\varphi(t) > 0$ при всех $x \in \langle a, b \rangle$ и $\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t) = 1$.

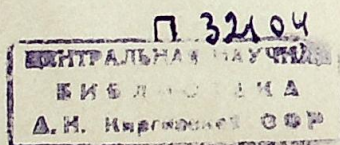
Мы рассмотрим класс $H_{\varphi P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ всех функций $f(t)$ из множества $H(2m-1, x, \pm)$, для которых

* Пользуясь случаем, укажем на некоторые опечатки и неточности в работе [2]. Вместо „ $\Phi(x)$ — некоторая“ (стр. 5, 8 строка снизу) должно быть „ $\Phi(x) \in H$ — некоторая“.

Вместо „ $f(x)$ из H^* “ (стр. 5, 5 строка снизу) должно быть „ $f(x)$ ($x \in \langle a, b \rangle$)“*. В конце стр. 5 нужно добавить: „В дальнейшем всюду предполагаем, что $H_{\Phi} \subset H^*$ “. Слово „любую“ (стр. 6, 17 строка сверху) заменяется словом „соответствующую“.

Вместо „ $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ “ (стр. 7, 12 строка сверху) будет „ $\Phi(x_1, \dots, x_n) \in H^{(n)*}$ “. Вместо „из $H^{(n)*}$ “ (стр. 7, 19—20 строки сверху) будет „ $x \in E^*$ “.

Далее, предполагается, что $H_{\Phi}^{(n)} \subset H^{(n)}$ и все функции $\varphi(t) P_n(t)$, $\varphi(t) | P_n(t)|$, $\varphi_2(t) \varphi(t) P_n(t)$ и $\varphi_2(t) |\varphi(t) P_n(t)|$ также $\in H$.



РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: М. А. Джавадов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, А. С. Ализаде, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, А. Х. Мирзаджанзаде, Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде (зам. редактора), А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция „Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)“.

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k - \left[\frac{f_+^{(2m)}(x) - f_-^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{|t-x|(t-x)^{2m-1}}{(2m)!} \right| \leq \frac{\varphi(t) P_{2m}(t)}{\leq M_\delta < +\infty}$$

при всех $|t-x| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$, где $P_k(t) = (t-x)^k$ ($k=0, 1, 2, \dots$).

Обозначим через $H_{\varphi|P_{2m+1}}(2m, x, \pm)$ совокупность всех функций $f(t)$ из множества $H(2m, x, \pm)$, для которых

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k - \left[\frac{f_+^{(2m+1)}(x) + f_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{(t-x)^{2m+1}}{(2m+1)!} \right| \leq \frac{\varphi(t) |P_{2m+1}(t)|}{\leq M_\delta < +\infty}$$

при всех $|t-x| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$.

Аналогично определяются и классы функций

$$\bar{H}(n, x, \pm), \bar{H}_{\varphi P_{2m}}(2m-1, x, \pm) \text{ и } \bar{H}_{\varphi|P_{2m+1}}(2m, x, \pm).$$

В дальнейшем мы всюду предполагаем, что $H(n, x) \subset H$,

$$\varphi(t) P_n(t) \in H, \varphi(t) |P_n(t)| \in H, \nu_\delta(t) \varphi(t) P_n(t) \in H, \nu_\delta(t) \varphi(t) |P_n(t)| \in H \text{ и т. п.}$$

§ 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАВЕНСТВА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ $H_{\varphi P_{2m}}$ И $H_{\varphi|P_{2m+1}}$ ПОСРЕДСТВОМ Л. П. О.

Если промежуток $\langle a, b \rangle$ конечен, то для функций из множества $H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ справедлива

Теорема 1. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{f_+^{(2m)}(x) - f_-^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m-1]}(1)}{(2m)!}}{L_\lambda(\psi; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{\psi_+^{(2m)}(x) - \psi_-^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m-1]}(1)}{(2m)!}} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{\psi_+^{(2m)}(x) + \psi_-^{(2m)}(x)}, \quad (1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)}{\tau_\lambda^{[2m]}(1)} = 0 \quad (2)$$

по крайней мере при одном значении j ($j=1, 2, \dots$), где

$$\tau_\lambda^{[k]}(\varphi) = L_\lambda[\varphi(t)|t-x|P_k(t); x].$$

Необходимость. Рассмотрим функции $P_{2m}(t) = (t-x)^{2m}$ и $P_{2m+2j}(t) = (t-x)^{2m+2j}$ при $j=1, 2, \dots$. В силу конечности промежутка $\langle a, b \rangle$ имеем $P_{2m} \in H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ и $P_{2m+2j} \in H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$.

при каждом $j \geq 1$. Поэтому, если имеет место (1), то для этих функций находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)}{\tau_\lambda^{[2m]}(1)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(P_{2m+2j}; x)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = 0,$$

т. е. справедливо (2), так как $P_{2m+2j}^{(k)}(x) = 0$ ($k=0, 1, \dots, 2m+1$),

$$P_{2m}^{(i)}(x) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, 2m-1) \text{ и } P_{2m}^{(2m)}(x) = (2m)!$$

Достаточность. Пусть $f \in H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$. Рассмотрим функцию

$$F_1(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k - \left[\frac{f_+^{(2m)}(x) - f_-^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{|t-x|(t-x)^{2m-1}}{(2m)!}. \quad (3)$$

Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{F_1(t) - F_1(x)}{P_{2m}(t)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f^{(2m-1)}(t) - f^{(2m-1)}(x) - \left[\frac{f_+^{(2m)}(x) - f_-^{(2m)}(x)}{2} \right] |t-x|}{(2m)!(t-x)} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!}. \quad (4)$$

Так как

$$R_\lambda(\delta) = L_\lambda[\nu_\delta(t)(t-x)^{2m}; x] \leq \frac{1}{\delta^{2j}} L_\lambda[\nu_\delta(t)(t-x)^{2m+2j}; x] \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)$$

при $j \geq 1$ для каждого $\delta > 0$, то, учитывая монотонность Л. П. О. $L_\lambda(f; x)$, из (2) находим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = 0$$

при всяком $\delta > 0$. Отсюда, на основании теоремы 1 работы [2] заключаем, что из (4) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(F_1; x) - F_1(x)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!}$$

или

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{f_+^{(2m)}(x) - f_-^{(2m)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m-1]}(1)}{(2m)!}}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!}.$$

Отсюда следует (1).

Сделаем некоторые замечания о теореме 3, вытекающие из ее доказательства.

При доказательстве необходимости мы фактически установили, что если имеет место равенство (1) для функции из множества $H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$, то условие (2) справедливо при всех $j=1, 2, \dots$.

Достаточность условий теоремы 1 справедлива и при слабых условиях. Именно, если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda[v_\delta(t) P_{2m+2j}(t); x]}{\tau_\lambda^{[2m]}(1)} = 0$$

при одном значении $j(j=1, 2, \dots)$, то соотношение (1) справедливо для функций из множества $H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$.

Из теоремы 1 следует теорема 3 работы [2]. Для функций из множества $H_{|P_{2m+1}|}(2m, x, \pm)$ справедлива следующая

Теорема 2. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{f_+^{(2m+1)}(x) + f_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)}{(2m+1)!}}{L_\lambda(\psi; x) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{\psi_+^{(2m+1)}(x) + \psi_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)}{(2m+1)!)}} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{\psi_+^{(2m+1)}(x) - \psi_-^{(2m+1)}(x)} \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)} = 0 \quad (6)$$

по крайней мере при одном значении $j(j=1, 2, \dots)$, где

$$\tau_\lambda^{[k]}(\varphi) = L_\lambda[\varphi(t) | P_k(t); x] \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Необходимость. Пусть имеет место (5). Рассмотрим функции $|P_{2m+1}(t)|$ и $P_{2m+2j}(t)$ ($j=1, 2, \dots$). Для этих функций имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(P_{2m+2j}; x)}{L_\lambda(|P_{2m+1}|; x)} = 0,$$

т. е. справедливо (6), так как $P_{2m+2j}^{(k)}(x) = 0$ ($k=0, 1, \dots, 2m+1$),

$$(|P_{2m+1}(t)|)^{(k)}_{t=x} = 0 \quad (k=0, 1, \dots, 2m) \text{ и } |P_{2m+1}(x)|_+^{(2m+1)} = -|P_{2m+1}(x)|_-^{(2m+1)} = (2m+1)!.$$

Достаточность. Пусть $f \in H_{|P_{2m+1}|}(2m, x, \pm)$. Возьмем функцию

$$F_2(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k - \left[\frac{f_+^{(2m+1)}(x) + f_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{(t-x)^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (7)$$

Легко проверить, что

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{F_2(t) - F_2(x)}{|t-x|^{2m+1}} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f^{(2m)}(t) - f^{(2m)}(x) - \left[\frac{f_+^{(2m+1)}(x) + f_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] (t-x)}{(2m+1)! |t-x|} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!} \quad (8)$$

Кроме того, так как

$$R_\lambda(\delta) = L_\lambda[v_\delta(t) |t-x|^{2m+1}; x] \leq \frac{1}{\delta^{2j-1}} L_\lambda[(t-x)^{2m+2j}; x] = \frac{1}{\delta^{2j-1}} \tau_\lambda^{[2m+2j]}(1)$$

при $j \geq 1$ для всякого $\delta > 0$, то из (6) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{L_\lambda(|P_{2m+1}|; x)} = 0 \quad (9)$$

для каждого $\delta > 0$.

В силу (8) и (9) из теоремы 1 работы [2] следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(F_2; x) - F_2(x)}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!},$$

т. е. справедливо (5).

Все замечания, сделанные к теореме 1, относятся и к теореме 2.

При $\psi(t) = |t-x|^{2m+1}$ из (5) следует асимптотическое равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\{ L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}(1) - \left[\frac{f_+^{(2m+1)}(x) + f_-^{(2m+1)}(x)}{2} \right] \frac{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)}{(2m+1)!} \right\} \frac{1}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(1)} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!}.$$

Теперь укажем обобщения теорем 1 и 2 для бесконечного промежутка $\langle a, b \rangle$, которые охватывают все неограниченные функции, имеющие некоторую мажоранту на промежутке $\langle a, b \rangle$.

Докажем следующую теорему для функций из множества $H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ при любом промежутке $\langle a, b \rangle$.

Теорема 3. Если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(\varphi)}{\tau_\lambda^{[2m]}(\varphi)} = 0 \quad (10)$$

при одном значении $j(j=1, 2, \dots)$, то справедливо соотношение (1) для функций $f(t)$ и $\psi(t)$ из множества $H_{P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$.

Доказательство. Обозначим через $P_k^*(t)$ функцию $\tilde{P}_k^*(t) = \varphi(t)(t-x)^k$. Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{F_1(t) - F_1(x)}{P_{2m}^*(t)} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!}, \quad (11)$$

где F_1 определяется равенством (3). Кроме того, так как

$$\beta_\delta(t) = v_\delta(t) F_{2m}(t) \leq \frac{1}{\delta^{2j}} v_\delta(t) \varphi(t) (t-x)^{2m+2j} \leq \frac{P_{2m+2j}^*(t)}{\delta^{2j}}$$

при $j \geq 1$ и для всякого $\delta > 0$, то, пользуясь монотонностью Л. П. О. $L_\lambda(f; x)$, имеем

$$R_\lambda(\delta) = L_\lambda[\beta_\delta(t); x] \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \tau_\lambda^{[2m+2j]}(\varphi).$$

Отсюда, в силу (10), находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{L_\lambda(P_{2m}^*; x)} = 0. \quad (12)$$

Из (11) и (12), в силу теоремы 1 работы [2], заключаем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(F_1; x) - F_1(x)}{L_\lambda(P_{2m}^*; x)} = \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!},$$

т. е. справедливо (1).

Теорема 4. Если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}(\varphi)}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(\varphi)} = 0 \quad (13)$$

при одном значении j ($j=1,2,\dots$), то справедливо (5) для функций $f(t)$ и $\psi(t)$ из множества $H_{\varphi|P_{2m+1}|}(2m, x, \pm)$.

В самом деле, так как

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{F_2(t) - F_2(x)}{\varphi(t) |t-x|^{2m+1}} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!}$$

и по условию (13)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{L_\lambda[\varphi(t) |t-x|^{2m+1}; x]} = 0,$$

где $R_\lambda(\delta) = L_\lambda[v_\delta(t) \varphi(t) |t-x|^{2m+1}; x]$ и функция $F_2(t)$ определяется равенством (7), то из теоремы 1 работы [2] следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(F_2; x) - F_2(x)}{L_\lambda[\varphi(t) |t-x|^{2m+1}; x]} = \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!},$$

т. е. справедливо (5).

Заметим, что теоремы 3 и 4 справедливы и при более слабых условиях. Именно, имеет место

Теорема 5. Если выполняются условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda[v_\delta(t) \varphi(t) (t-x)^{2m+2j}; x]}{\tau_\lambda^{[2m]}(\varphi)} = 0 \quad (14)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda[\tau_\delta(t) \varphi(t) |t-x|^{2m+j+1}; x]}{\tau_\lambda^{[2m+1]}(\varphi)} = 0 \quad (15)$$

при одном значении j ($j=0,1,\dots$), то справедливы соотношения (1) и (5) соответственно для функций из множеств $H_{\varphi|P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ и $H_{\varphi|P_{2m+1}}(2m, x, \pm)$.

Справедливость теоремы 5 следует из доказательств теорем 3 и 4. Утверждения теоремы 5 в некоторых случаях обратимы.

Из доказательства необходимости теорем 1 и 2 следует, что справедлива следующая

Теорема 6. Если имеют места соотношения (1) и (5) для функций из множеств $H(2m-1, x, \pm)$ и $H(2m, x, \pm)$ соответственно, то справедливы условия (10) и (13) при всех $j=1,2,\dots$

Объединяя теоремы 3, 4 и 6, получим следующие общие утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2.

Теорема 7.

I. Для того, чтобы имело место равенство (1), необходимо, а в случае $f, \psi \in H_{\varphi|P_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ также и достаточно, чтобы выполнялось условие (10) при некотором значении j ($j=1,2,\dots$).

II. Для того, чтобы имело место равенство (5), необходимо, а в случае $f, \psi \in H_{\varphi|P_{2m+1}}(2m, x, \pm)$ также и достаточно, чтобы выполнялось условие (13) при некотором значении j ($j=1,2,\dots$).

Из приведенных рассуждений фактически становятся ясными пути дальнейшего обобщения и получения утверждений типа результатов теорем 1—7. Это дает возможность обобщить указанные теоремы для функций из более широких классов $H_{\varphi}(n, x, \pm)$ определенные соответствующим образом.

Заметим, что теоремы 1—7 обобщаются соответствующим образом для функций от нескольких переменных.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ § 2 К НЕКОТОРЫМ КОНКРЕТНЫМ Л. П. О.

Рассмотрим интегральный оператор

$$A_\lambda(f; x; p) = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-\lambda|t|^p} dt. \quad (16)$$

Выражение (16) при $p=2$ превращается в сингулярный интеграл Вейерштрасса, а при $p=1$ — в сингулярный интеграл Пикара.

Введем обозначения

$$\Delta_\lambda^{[k]}(\varphi) = A_\lambda[\varphi(t) t^k; 0; p] = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) t^k e^{-\lambda|t|^p} dt,$$

$$\bar{\Delta}_\lambda^{[k]}(\varphi) = A_\lambda[\varphi(t) |t|^k; 0; p] = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) |t|^k e^{-\lambda|t|^p} dt,$$

$$\hat{\Delta}_\lambda^{[k]}(\varphi) = A_\lambda[\varphi(t) |t| t^k; 0; p] = \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{p}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) |t| t^k e^{-\lambda|t|^p} dt.$$

Очевидно, что

$$\Delta_{\lambda}^{[2k]}(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{2k}{p}}}, \Delta_{\lambda}^{[2k+1]}(1) = 0, \Delta_{\lambda}^{*[2k+1]}(1) = 0$$

и

$$\bar{\Delta}_{\lambda}^{[k]}(1) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{k}{p}}} (k=0, 1, 2, \dots).$$

Таким образом, имеют место условия

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\lambda}^{[2m+2j]}(1)}{\Delta_{\lambda}^{[2m]}(1)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2m+2j+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{p}\right)} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{2j}{p}}} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{\lambda}^{[2m+2j]}(1)}{\Delta_{\lambda}^{[2m+1]}(1)} = 0$$

при любом $j=1, 2, \dots$, т. е. удовлетворяются условия (10) и (13) теорем 3 и 4 при $\varphi(t)=1$. Поэтому справедливы асимптотические равенства (1) и (5) для линейного интегрального оператора (16) и для функций $f(t)$ и $\psi(t)$ из множеств $H_{p_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ и $H_{[p_{2m+1}]}(2m, x, \pm)$ соответственно.

В частности, при $\psi(t) = (t-x)^{2m}$ и $\psi(t) = |t-x|^{2m+1}$ из указанных равенств соответственно получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\frac{2m}{p}} \left[A_{\lambda}(f; x; p) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{p}\right) f^{(2k)}(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2k)! \lambda^{\frac{2k}{p}}} \right] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2m+1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{f_+^{(2m)}(x) + f_-^{(2m)}(x)}{2(2m)!} \quad (17)$$

и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\frac{2m+1}{p}} \left[A_{\lambda}(f; x; p) - \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{p}\right) f^{(2k)}(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) (2k)! \lambda^{\frac{2k}{p}}} \right] =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2m+2}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \cdot \frac{f_+^{(2m+1)}(x) - f_-^{(2m+1)}(x)}{2(2m+1)!} \quad (18)$$

для функций из классов $H_{p_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ и $H_{[p_{2m+1}]}(2m, x, \pm)$ соответственно.

Из теорем 3—6 следует, что равенства (17) и (18) справедливы соответствующим образом для более общих классов функций.

При близких к нулю положительных значениях p формулы (17) и (18) дают весьма высокий порядок приближения функциям из класса $H(n, x, \pm)$ посредством Л. П. О. (16). Это является ценным качеством Л. П. О. (16).

Из формулы (17) при $m=1$ получается соответствующий результат П. Л. Бутцера [3] для дважды дифференцируемых функций.

В случае, когда

$$L_{\lambda}(f; x) = \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x+t) \Phi_{\lambda}(t) dt$$

из теоремы 5 при $m=0$, $\psi(t) = |t|$ и $\varphi(t) = 1$ получается теорема 1 работы [1].

Мы здесь не имеем возможности применить доказанные теоремы и к другим известным Л. П. О. Применение указанных теорем к Л. П. О. Джексона, Ландау, Валле-Пуссена, Фейера, Бернштейна и другим дают соответствующие конкретные результаты.

§ 4. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Имеются различные обобщения формулы Тейлора. Результаты предыдущих разделов наводят на мысль обобщить формулу Тейлора соответствующим образом для функции из классов $H(n, x, \pm)$.

Пользуясь обобщенной теоремой Ролля, указанной Гуднером [4], покажем здесь и одно возможное обобщение формулы Тейлора.

Пусть $f(x)$ — некоторая функция, определенная и непрерывная на отрезке $a < x < b$. Обозначим через D^+f , D_+f , D^-f и D_-f соответственно правое верхнее, правое нижнее, левое верхнее и левое нижнее производные числа функции f . Кроме того, пусть $pD(+)f + qD(-)f$ обозначает любое из выражений $p_1D^+f + q_1D^-f$, $p_2D^+f + q_2D_-f$, $p_3D_+f + q_3D^-f$, $p_4D_+f + q_4D_-f$.

Рассмотрим систему функций $\{\varphi_k(x)\}_0^n$, непрерывных на $[a, b]$ и удовлетворяющих условиям:

1°. Функции $\varphi_k(x)$ ($k=0, n$) ($n-1$) — кратно дифференцируемы при $a < x < b$;

2°. $\varphi_k^{(i)}(a) = 0$ при $0 \leq i < k \leq n$;

3°. $\varphi_k^{(k)}(a) \neq 0$ при $0 \leq k \leq n-1$;

4°. Функции $\varphi_k(x)$ ($k=0, n$) имеют конечные производные числа $D^+ \varphi_k^{(n-1)}$, $D_+ \varphi_k^{(n-1)}$, $D^- \varphi_k^{(n-1)}$ и $D_- \varphi_k^{(n-1)}$ в каждой точке интервала $a < x < b$, причем

$$pD(+) \varphi_n^{(n-1)}(x) + qD(-) \varphi_n^{(n-1)}(x) \neq 0$$

при всех $x \in (a, b)$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ и $p+q=1$.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n-1)}(x)$ $n-1$ -го порядка на отрезке $a \leq x \leq b$ (в точках a и b правая и левая производные соответственно) и существуют конечные производные числа $D^+f^{(n-1)}$, $D_+f^{(n-1)}$, $D^-f^{(n-1)}$ и $D_-f^{(n-1)}$ от производной $f^{(n-1)}(x)$ в каждой точке интервала $a < x < b$.

Тогда существует точка $a < \xi < b$ и числа $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$ такие, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) + R_n, \quad (19)$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_j^{(k)}(a)}{\varphi_k^{(k)}(a)} \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$$

и

$$R_n(x) = \frac{PD(+)f^{(n-1)}(\xi) + qD(-)f^{(n-1)}(\xi) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j [PD(+) \varphi_j^{(n-1)}(\xi) + qD(-) \varphi_j^{(n-1)}(\xi)]}{PD(+) \varphi_n^{(n-1)}(\xi) + qD(-) \varphi_n^{(n-1)}(\xi)} \varphi_n(x).$$

Доказательство. Определим из равенства

$$f^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^k a_j \varphi_j^{(k)}(a) \quad (k=0, 1, \dots, n-1) \quad (20)$$

числа a_j рекуррентно ($j=0, 1, \dots, n-1$). Это возможно в силу совместности системы (20) (все диагональные элементы отличны от нуля).

Теперь определим a_n так, чтобы было

$$f(b) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(b). \quad (21)$$

Это возможно в силу того, что $\varphi_n(b) \neq 0$. В самом деле, если бы было $\varphi_n(b) = 0$, то, применяя последовательно $n-1$ раз теорему Ролля, а в конце — обобщенную теорему Гуднера — Ролля, получили бы

$$PD(+) \varphi_n^{(n-1)}(\xi_n) + qD(-) \varphi_n^{(n-1)}(\xi_n) = 0$$

в некоторой точке $\xi_n \in (a, b)$, где $p \geq 0$, $q \geq 0$ и $p + q = 1$. А это невозможно по условию 4°.

Составим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x). \quad (22)$$

Очевидно, $F(a) = F(b) = 0$ и существует $F^{(n-1)}(x)$ на полуинтервале $a < x < b$ и $F^{(k)}(a) = 0$ ($k=0, 1, \dots, n-1$). Применяя теорему Ролля последовательно $n-1$ раз, можно найти такую точку c ($a < c < b$), что удовлетворяются равенства $F^{(n-1)}(a) = F^{(n-1)}(c) = 0$.

Теперь применима обобщенная теорема Гуднера — Ролля к функции

$$\varphi(x) = f^{(n-1)}(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j^{(n-1)}(x)$$

на интервале (a, c) . Следовательно, существует точка $a < \xi < b$ и числа $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$ такие, что

$$pD(+) \varphi(\xi) + qD(-) \varphi(\xi) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$a_n = \frac{PD(+)f^{(n-1)}(\xi) + qD(-)f^{(n-1)}(\xi) - \sum_{j=0}^{n-1} a_j [pD(+) \varphi_j^{(n-1)}(\xi) + qD(-) \varphi_j^{(n-1)}(\xi)]}{pD(+) \varphi_n^{(n-1)}(\xi) + qD(-) \varphi_n^{(n-1)}(\xi)}$$

Подставляя это значение a_n в равенство (21), получим формулу (19) при $x=b$.

Условия теоремы выполняются и на любом $[a, x]$ ($x \in [a, b]$), поэтому формула (19) справедлива всюду на $[a, b]$.

Теорема 8 допускает дальнейшее обобщение и на некотором бесконечном интервале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов Р. Г. „Изв. АН Азерб. ССР“, серия физ.-мат. и техн. наук. 1961, № 3.
2. Мамедов Р. Г. „Изв. АН Азерб. ССР“, серия физ.-мат. и техн. наук, 1962, № 4.
3. Butzer P. L. Math. Z., 1958, 70, 1.
4. Goodner D. B. Amer. Math. Monthly, 1960, vol. 67, № 9.
5. Коровкин П. П., УМН, XIII, 6 (1958).

Р. Н. Маммедов

Функцияларын хэтти мүсбэт операторлар аиләси васитәсилә
јахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гіјмәти һаггында
бә'зи үмуми нәтичәләр (икинчи мәгалә)

ХҮЛАСӘ

Бу мәгаләдә $H(n, x, \pm)$ синфиндән олан функцияларын хэтти мүсбэт операторларла јахынлашмасы һаггында бир сыра асимптотик бәрабәрликләри батедилир вә мә'лум Тејлор дүстуру үмумиләшдирилир.

1-чи теорем. $H_{p_{2m}}(2m-1, x, \pm)$ синфинә дахил олан f вә ψ функциялары үчүн (1) мүнәсибәтинин өдәнилмәсиндән өтрү (2) шәртинин доғрулуғу зәрури вә кафидир.

2-чи теорем. $H_{|p_{2m+1}|}(2m, x, \pm)$ синфинә дахил олан f вә ψ функциялары үчүн (5) мүнәсибәтинин өдәнилмәсиндән өтрү (6) шәртинин доғрулуғу зәрури вә кафидир.

Бу теоремләр, сонра даһа кениш $H_{q_{p_{2m}}}(2m-1, x, \pm)$ вә $H_{q_{|p_{2m+1}|}}(2m, x, \pm)$ синфиндән олан функциялар үчүн дә үмумиләшдирилир (3-7-чи теоремләр).

Исбат едилгн теоремләр § 3-дә бир сыра конкрет хэтти мүсбэт операторлаға тәтбиг еилир.

Мәгаләнин сонунда Тејлор дүстурунун үмумиләшмәси кәстәрилир § 4).

А. Д. ГАДЖИЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ПРОИЗВОДНЫХ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно много работ, посвященных вопросу нахождения асимптотического значения приближения функций посредством семейства линейных операторов. Ввиду их многочисленности мы не будем на них останавливаться.

Настоящая работа посвящена нахождению асимптотического значения приближения производных функций посредством производных довольно общего семейства линейных операторов.

Общий принцип нахождения асимптотического значения семейства операторов заключается в следующем.

Оператор $B_\lambda(f; x)$ подчиняется таким свойствам, что для фиксированной функции $f(x)$, принадлежащей области определения этого оператора, представляется в виде

$$B_\lambda(f; x) = \psi(x) \cdot b_\lambda + \omega_\lambda(x),$$

где $b_\lambda \neq 0$, а $\psi(x)$ и $\omega_\lambda(x)$ — конечные величины. Тогда ясно, что для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_\lambda(f; x)}{b_\lambda} = \psi(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\omega_\lambda(x)}{b_\lambda} = 0.$$

Проиллюстрируем этот принцип нахождения асимптотического значения семейства операторов на частных случаях.

§ 1. Пусть оператор $B_\lambda(f; x)$ задан в виде:

$$B_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} A_\lambda[f(x + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x - \beta_{k,\lambda} t)], \quad (1,1)$$

где $A_\lambda(f; x)$ — линейный оператор; $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — вещественные числа.

Будем считать, что $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — положительные. Зафиксируем натуральные числа n и m , причем $m \leq n-1$, и обозначим

$$R_{n,\alpha,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n,$$

А. Д. ГАДЖИЕВ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ ПРОИЗВОДНЫХ СЕМЕЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно много работ, посвященных вопросу нахождения асимптотического значения приближения функций посредством семейства линейных операторов. Ввиду их многочисленности мы не будем на них останавливаться.

Настоящая работа посвящена нахождению асимптотического значения приближения производных функций посредством производных довольно общего семейства линейных операторов.

Общий принцип нахождения асимптотического значения семейства операторов заключается в следующем.

Оператор $B_\lambda(f; x)$ подчиняется таким свойствам, что для фиксированной функции $f(x)$, принадлежащей области определения этого оператора, представляется в виде

$$B_\lambda(f; x) = \psi(x) \cdot b_\lambda + \omega_\lambda(x),$$

где $b_\lambda \neq 0$, а $\psi(x)$ и $\omega_\lambda(x)$ — конечные величины. Тогда ясно, что для того, чтобы имело место соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_\lambda(f; x)}{b_\lambda} = \psi(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\omega_\lambda(x)}{b_\lambda} = 0.$$

Проиллюстрируем этот принцип нахождения асимптотического значения семейства операторов на частных случаях.

§ 1. Пусть оператор $B_\lambda(f; x)$ задан в виде:

$$B_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} A_\lambda[f(x + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x - \beta_{k,\lambda} t)], \quad (1, 1)$$

где $A_\lambda(f; x)$ — линейный оператор; $P_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — вещественные числа.

Будем считать, что $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — положительные. Зафиксируем натуральные числа n и m , причем $m \leq n-1$, и обозначим

$$R_{n,\alpha,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n,$$

$$R_{n, \beta, \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} \beta_{k, \lambda}^n.$$

Подчиним оператор $A_{\lambda}(f; x)$ и числа $p_{k, \lambda}$; $\alpha_{k, \lambda}$; $\beta_{k, \lambda}$ следующим условиям:

$$1^{\circ}. \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda}^m + (-1)^m \beta_{k, \lambda}^m] A_{\lambda}(t^m) = 1 \quad (m \leq n-1)$$

2°. Пусть $\Delta_{\lambda} = A_{\lambda}(\Phi(t)) > 0$, где $\Phi(t)$ неотрицательная неубывающая функция, для которой

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(t)}{t^n} = 1.$$

$$3^{\circ}. \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A_{\lambda}(t^s)}{\Delta_{\lambda}} = 0, \quad \text{где } s \neq m \text{ и } 0 \leq s \leq n-1.$$

$$4^{\circ}. \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda}^s + (-1)^s \beta_{k, \lambda}^s] < +\infty, \quad \text{где } s \text{ из } 3^{\circ}.$$

В дальнейшем будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) , если она в окрестности некоторой точки x_0 имеет производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, а в самой точке x_0 имеет конечные правую и левую n -ые производные $f_+^{(n)}(x_0)$ и $f_-^{(n)}(x_0)$.

Итак, пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) , причем n — нечетное число. Случай четного n исчерпывается совершенно аналогично.

По формуле Тейлора имеем:

$$f(x_0 + \alpha_{k, \lambda} t) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \alpha_{k, \lambda} t + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (\alpha_{k, \lambda} t)^m + \dots + \frac{f_+^{(n)}(x_0) + \gamma_1(\alpha_{k, \lambda} t)}{n!} (\alpha_{k, \lambda} t)^n$$

(1,2)

и аналогично

$$f(x_0 - \beta_{k, \lambda} t) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} \beta_{k, \lambda} t + \dots + (-1)^m \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (\beta_{k, \lambda} t)^m + \dots - \frac{f_-^{(n)}(x_0) + \gamma_2(\beta_{k, \lambda} t)}{n!} (\beta_{k, \lambda} t)^n$$

где $\gamma_1(\alpha_{k, \lambda} t)$ и $\gamma_2(\beta_{k, \lambda} t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow +0$.

Складывая выражения (1,2) и подставляя в (1,1) получим в силу линейности оператора A_{λ} :

$$B^{\lambda}(f; x_0) = 2f(x_0) A_{\lambda}(1) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} + \frac{f'(x_0)}{1!} A_{\lambda}(t) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda} - \beta_{k, \lambda}] + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} A_{\lambda}(t^m) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda}^m + (-1)^m \beta_{k, \lambda}^m] + \dots + A_{\lambda} \left(\frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot t^n + \gamma_{\lambda}(t) t^n \right), \quad (1,3)$$

где $\gamma_{\lambda}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda}^n \gamma_1(\alpha_{k, \lambda} t) - \beta_{k, \lambda}^n \gamma_2(\beta_{k, \lambda} t)]$ и $\gamma_{\lambda}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$.

Видоизменим последнее слагаемое. Для этого введем функцию $\sigma_{\lambda}(t)$, определяемую из тождества:

$$\sigma_{\lambda}(t) \equiv \frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0) t^n + \gamma_{\lambda}(t) t^n}{n! \Phi(t)} - \frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad (1,4)$$

где $\Phi(t)$ берется из свойства 2°.

Из 2° и (1,4) ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_{\lambda}(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \gamma_{\lambda}(t) = 0.$$

Из (1,4) находим:

$$\frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!} t^n + \gamma_{\lambda}(t) t^n = \sigma_{\lambda}(t) \Phi(t) + \frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \Phi(t). \quad (1,5)$$

Подставляя (1,5) в (1,3) и учитывая, что $A_{\lambda}(\Phi(t)) = \Delta_{\lambda}$ и кроме того перенеся член с $f^{(n)}(x_0)$, коэффициент которого в силу свойства 1° равен единице, влево, получим:

$$B_{\lambda}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0) = 2f(x_0) A_{\lambda}(1) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} + \frac{f'(x_0)}{1!} A_{\lambda}(t) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k, \lambda} [\alpha_{k, \lambda} - \beta_{k, \lambda}] + \dots + \frac{R_{n, \alpha, \lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n, \beta, \lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta_{\lambda} + A_{\lambda}(\sigma_{\lambda}(t) \Phi(t)) \quad (1,6)$$

Теорема 1. Пусть оператор $B_{\lambda}(f; x)$ задан в виде (1,1) и пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) . Если при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место

$$A_{\lambda}(\sigma_{\lambda}(t) \Phi(t)) = o(\Delta_{\lambda}), \quad (1,7)$$

где $\sigma_{\lambda}(t)$ определяется из (1,4), то:

1) при выполнении условий

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_{n, \alpha, \lambda} = M < +\infty,$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_{n, \beta, \lambda} = N < +\infty$$

справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_{\lambda}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{\Delta_{\lambda}} = \frac{M f_+^{(n)}(x_0) \pm N f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак (+) или (-) в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n ;

2) при m — четном, $\alpha_{k, \lambda} = \beta_{k, \lambda}$ и $R_{n, \lambda} \geq \rho > 0$, где ρ не зависит от λ ($R_{n, \lambda} = R_{n, \alpha, \lambda} = R_{n, \beta, \lambda}$), справедливо равенство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_{\lambda}(f; x) - f^{(m)}(x_0)}{R_{n, \lambda} \cdot \Delta_{\lambda}} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак (+) или (-) в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n .

Доказательство. Деля обе части (1,6) на Δ_λ , переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$ и учитывая 3°—4° и (1,7), получаем:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_\lambda(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{\Delta_\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_{n,\alpha,\lambda} f_+^{(n)}(x_0) - R_{n,\beta,\lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Отсюда непосредственно следует теорема.

Рассмотрим теперь два частных случая.

Пусть оператор $B_\lambda(f; x)$ имеет вид:

$$B_\lambda(f; x) = \frac{d^m}{dx^m} L_\lambda(f; x) = L_\lambda^{(m)}(f; x), \quad (1,8)$$

где

$$L_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) K_\lambda(t) dt \quad (1,9)$$

$\lambda > 0$ — параметр.

Фиксируем натуральные числа n и m , причем m — четное число и $m \leq n-1$. Пусть вещественные числа $p_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ и функция $K_\lambda(t)$ обладают следующими свойствами:

$$а) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} = 1, \quad \text{причем} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{p_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \right| \leq M < +\infty;$$

$$б) R_{n,m,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^{n-m} \neq 0 \quad \text{и} \quad R_{n,m,\lambda} \geq \rho > 0, \quad \text{где } \rho \text{ не зависит от } \lambda.$$

Кроме того, для любого четного $s \neq m$ ($0 \leq s \leq n$) $R_{s,m,\lambda} = 0$;

в) $K_\lambda(t)$ — суммируемая на $-\infty < t < \infty$ функция, имеющая суммируемые же производные до m -го порядка включительно, и кроме того $K_\lambda^{(m)}(t)$ — четная и неотрицательная функция, для которой

$$\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} t^m K_\lambda^{(m)}(t) dt = 1;$$

г) существует неотрицательная, неубывающая на полуоси $[0, \infty]$ функция $\Phi(t)$, для которой $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(t)}{t^n} = 1$. Кроме того, пусть

$$\Delta_\lambda = \int_0^\infty \Phi(t) K_\lambda^{(m)}(t) dt > 0;$$

д) $\sup_{k,\lambda} \{\alpha_{k,\lambda}\} = \alpha^* < +\infty$, причем, не ограничивая общности, считаем, что все $\alpha_{k,\lambda}$ — положительные;

$$е) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\lambda \left(\frac{t-x}{\alpha_{k,\lambda}} \right) dt \text{ сходится равномерно};$$

$$ж) \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) K_\lambda(t) dt$$

сходится на всей оси.

$$з) \text{ ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) K_\lambda^{(m)}(t) dt \text{ сходится равномерно}$$

по x .

Преобразуем (1,9) путем замены $x + \alpha_{k,\lambda} t = t$ к виду:

$$L_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\lambda \left(\frac{t-x}{\alpha_{k,\lambda}} \right) \frac{dt}{\alpha_{k,\lambda}}.$$

Учитывая условия е)—з) можем при дифференцировании последнего выражения перейти под знак интеграла, т. е.

$$L_\lambda^{(m)}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{\alpha_{k,\lambda}^m} K_\lambda^{(m)} \left(\frac{t-x}{\alpha_{k,\lambda}} \right) \frac{dt}{\alpha_{k,\lambda}}.$$

Произведя в последнем выражении обратную замену, получим:

$$L_\lambda^{(m)}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) K_\lambda^{(m)}(t) dt.$$

Учитывая четность $K_\lambda^{(m)}(t)$, преобразуем последнее выражение к виду

$$L_\lambda^{(m)}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \int_0^\infty [f(x + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x - \alpha_{k,\lambda} t)] K_\lambda^{(m)}(t) dt. \quad (1,10)$$

Оператор $B_\lambda(f; x) = L_\lambda^{(m)}(f; x)$ в записи (1,10) отвечает случаю II теоремы 1. Учитывая свойства а) — в), непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что оператор $L_\lambda^{(m)}(f; x)$ удовлетворяет всем свойствам оператора $A_\lambda(f; x)$ из (1,1).

Для операторов (1,8) справедлива следующая

Теорема 2. Пусть измеримая функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) и, кроме того, пусть $|f(x)| \leq \varphi(x)$ ($-\infty < x < +\infty$), где $1 \leq \varphi(x) < +\infty^*$.

Если для произвольного $\delta > 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ выполняется условие

$$\int_0^\infty \beta(t) \Phi(t) K_\lambda^{(m)}(t) dt = 0 \quad (\Delta_\lambda) \quad (1,11)$$

где $\beta(t) = \max\{\mu(\alpha^* t); t^m\}$, а

$$\mu(t) = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{\varphi(x+y)}{|y| < t} < +\infty, \text{ то справедливо равенство}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda^{(m)}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{R_{n,m,\lambda} \cdot \Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак (+) или (-) в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n .

Доказательство. Докажем теорему для случая нечетного n , так как случай четного n исчерпывается аналогично.

В силу свойств а) и б) и теоремы 1, выражение (1,10) приводится к виду:

* Это условие подразумевается и во всех остальных теоремах.

$$L_1^{(m)}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0) = R_{n,m,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta_\lambda + \int_0^\infty \sigma_\lambda(t) \Phi(t) K_\lambda^{(m)}(t) dt, \quad (1, 12)$$

где Δ_λ определено в г);

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{R_{n,m,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} t^n + \gamma_\lambda(t) t^n}{\Phi(t)} - R_{n,m,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad (1, 13)$$

$$\gamma_\lambda(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} P_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^{n-m} [\gamma_1(\alpha_{k,\lambda} t) - \gamma_2(\alpha_{k,\lambda} t)] \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +0, \text{ равно-}$$

мерно по λ .

γ_1 и γ_2 получены из разложения Тейлора (1, 2).

В силу свойства г) для $\Phi(t)$ отсюда получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_\lambda(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \gamma_\lambda(t) = 0 \quad (1, 14)$$

равномерно по λ .

Оценим $|\sigma_\lambda(t)|$. Так как в силу (1, 3)

$$R_{n,m,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} t^n + \gamma_\lambda(t) t^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} [f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)] - \frac{2}{m!} f^{(m)}(x_0) t^m,$$

то будем иметь:

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{\varphi(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{P_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \right| \left| \frac{f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)} - \frac{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} \right| + \left| \frac{f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)} - \frac{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} \right| + C_0 t^m}{\Phi(t)} + C_1 \leq \frac{2 \varphi(x_0) \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{P_{k,\lambda}}{\alpha_{k,\lambda}^m} \right| \mu(\alpha_{k,\lambda} t) + C_0 t^m}{\Phi(t)} + C_1,$$

где

$$C_0 = \frac{2}{m!} |f^{(m)}(x_0)|, \quad \text{а} \quad C_1 = (\alpha^*)^{n-m} \sum_{k=1}^{\infty} |P_{k,\lambda}| \left| \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$$

и, как видно, C_0 и C_1 не зависят от t и λ . Так как $\mu(t)$ не убывает на $[0, \infty)$, то

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{2 \varphi(x_0) \mu(\alpha^* t) M + C_0 t^m}{\Phi(t)} + C_1. \quad (1, 15)$$

В силу (1, 14) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 \leq t < \delta$ будем иметь

$$|\sigma_\lambda(t)| < \varepsilon. \quad (1, 16)$$

Если же $t \geq \delta$, то из (1, 15) получим:

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{2 \varphi(x_0) \mu(\alpha^* t) M + C_0 t^m}{\Phi(\delta)} + C_1$$

и окончательно, учитывая, что $\beta(t) = \max\{\mu(\alpha^* t); t^m\}$, получаем,

$$|\sigma_\lambda(t)| < C \cdot \beta(t), \quad (1, 17)$$

где $C = 2 \varphi(x_0) M + C_0 + C_1 \Phi(\delta)$ не зависит от t и λ .

Теперь оценим интеграл, стоящий в правой части (1, 12), учитывая (1, 11), (1, 16) и (1, 17):

$$\left| \int_0^\infty \sigma_\lambda(t) \Phi(t) K_\lambda^{(m)}(t) dt \right| \leq \left\{ \int_0^\delta + \int_\delta^\infty \right\} |\sigma_\lambda(t)| \Phi(t) K_\lambda^{(m)}(t) dt \leq \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

Таким образом, из (1, 12) получаем:

$$L_1^{(m)}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0) = \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda) + R_{n,m,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta_\lambda.$$

Деля обе части на Δ_λ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$, в силу произвольности ε , закончим доказательство теоремы.

Пусть теперь

$$F_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} [P_{k,\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) K(\lambda t) dt]. \quad (1, 18)$$

Оператор (1, 18) получается из оператора (1, 9) при $K_\lambda(t) = K(\lambda t)$.

Допустим, что числа $P_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ обладают свойствами а), б), д), а функция $K_\lambda^{(m)}(t)$ (m — четное число) четная неотрицательная и такая, что

$$\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} t^m K^{(m)}(t) dt = 1 \quad \text{и} \quad q = \int_0^\infty t^n K^{(m)}(t) dt < +\infty.$$

За функцию $\Phi(t)$ возьмем t^n .

В этом случае

$$\Delta_\lambda = \lambda^{m+1} \int_0^\infty t^n K^{(m)}(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda^{n-m}} \int_0^\infty t^n K^{(m)}(t) dt = \frac{q}{\lambda^{n-m}}. \quad (1, 19)$$

Для операторов (1, 18) справедлива

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) и кроме того для функции $\beta(t) = \max\{\mu(t), t^m\}$, где $\mu(t) = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}$, существует и конечен интеграл

$$\int_0^\infty t^n \beta(t) K^{(m)}(t) dt.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{n-m}}{R_{n,m,\lambda}} [F_{\lambda}^{(m)}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)] = q \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

где знак (+) или (-) в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n .

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно показать, что для любого $\delta > 0$

$$\frac{\lambda^{m+1}}{\Delta_{\lambda}} \int_{\delta}^{\infty} t^n \beta(t) K^{(m)}(\lambda t) dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

где Δ_{λ} определяется равенством (1, 19)

Действительно

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{m+1}}{\Delta_{\lambda}} \int_{\delta}^{\infty} t^n \beta(t) K^{(m)}(\lambda t) dt &= \frac{\lambda^{m+1} \cdot \lambda^{n-m}}{q} \int_{\delta}^{\infty} t^n \beta(t) K^{(m)}(\lambda t) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{q} \int_{\delta \lambda}^{\infty} t^n \beta(t) K^{(m)}(t) dt, \end{aligned}$$

а интеграл справа в силу условия теоремы существует и стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Замечание. При $m=0$ из теоремы 2 и 3 следуют теоремы 1 и 3, доказанные в [1].

§ 2. Пусть оператор $B_{\lambda}(f; x)$ имеет вид

$$B_{\lambda}(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} U_{\lambda}[f(x + \alpha_{k,\lambda} t) - f(x - \beta_{k,\lambda} t)], \quad (2, 1)$$

где $U_{\lambda}(f; x)$ — линейный оператор $p_{k,\lambda}$; $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — вещественные числа, причем $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ — положительные. Зафиксируем натуральные числа n и m , причем $m \leq n-1$, и обозначим

$$R_{n,\alpha,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n,$$

$$R_{n,\beta,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \beta_{k,\lambda}^n.$$

Подчиним оператор $U_{\lambda}(f; x)$ и числа $p_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ и $\beta_{k,\lambda}$ следующим условиям:

$$1^{\circ}. \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} [\alpha_{k,\lambda}^m - (-1)^m \beta_{k,\lambda}^m] U_{\lambda}(t^m) = 1.$$

2°. Пусть $\Delta_{\lambda} = U_{\lambda}(\Phi(t)) > 0$, где $\Phi(t)$ неотрицательная, неубывающая функция, для которой

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(t)}{t^n} = 1.$$

$$3^{\circ}. \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{U_{\lambda}(t^l)}{\Delta_{\lambda}} = 0, \quad \text{где } l \neq m \text{ и } 0 < l \leq n-1.$$

$$4^{\circ}. \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} [\alpha_{k,\lambda}^l - (-1)^l \beta_{k,\lambda}^l] < +\infty, \quad \text{где } l \text{ из } 3^{\circ}.$$

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) и n — нечетное. Как и в случае теоремы 1 из § 1 напомним разложение Тейлора (1, 2) и определим функцию $\sigma_{\lambda}(t)$ из тождества

$$\sigma_{\lambda}(t) = \frac{R_{n,\alpha,\lambda} f_+^{(n)}(x_0) + R_{n,\beta,\lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!} t^n + \gamma(t) t^n - \frac{R_{n,\alpha,\lambda} f_+^{(n)}(x_0) + R_{n,\beta,\lambda} f_-^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad (2, 2)$$

$$\text{где } \gamma_{\lambda}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} [\alpha_{k,\lambda}^n \gamma_1(\alpha_{k,\lambda} t) + \beta_{k,\lambda}^n \gamma_2(\beta_{k,\lambda} t)] \text{ и } \gamma_{\lambda}(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0,$$

а γ_1 и γ_2 получаются из (1, 2). Для операторов (2, 1) справедлива Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (W_n) .

Если при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место

$$U_{\lambda}(\sigma_{\lambda}(t) \Phi(t)) = O(\Delta_{\lambda}^{-1}),$$

где $\sigma_{\lambda}(t)$ определяется из (2, 2), то:

1) при выполнении условий

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_{n,\alpha,\lambda} = M < +\infty;$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_{n,\beta,\lambda} = N < +\infty$$

справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_{\lambda}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{\Delta_{\lambda}} = \frac{M f_+^{(n)}(x_0) \mp N f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак (-) или (+) в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n ;

2) при m — нечетном $\alpha_{k,\lambda} = \beta_{k,\lambda}$ и $R_{n,\lambda} \geq d > 0$, где d не зависит от λ ($R_{n,\lambda} = R_{n,\alpha,\lambda} = R_{n,\beta,\lambda}$) справедливо равенство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{B_{\lambda}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{R_{n,\lambda} \Delta_{\lambda}} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \mp f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак (-) или (+) берется в зависимости от четности или нечетности n .

Доказательство завершается как и в случае теоремы 1.

Вернемся теперь к оператору (1, 8) и зафиксируем нечетные натуральные числа n и m , причем $m \leq n-1$.

Соответственно изменим некоторые из условий а) и з), а именно условия б) и в) заменим следующими:

$$б') R_{n,m,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^{n-m} \neq 0 \quad \text{и} \quad R_{n,m,\lambda} \geq d > 0,$$

где d не зависит от λ .

Кроме того, для любого нечетного $s \neq m$ ($0 < s < n$) $R_{s,m,\lambda} = 0$.

в) $K_\lambda(t)$ — суммируемая на $(-\infty, \infty)$ функция, имеющая суммируемые же производные до m -го порядка включительно и, кроме того, $K_\lambda^{(m)}(t)$ — нечетная и неотрицательная функция, для которой

$$\frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} t^m K_\lambda^{(m)}(t) dt = 1.$$

Для операторов (1, 8), удовлетворяющих такой системе свойств, справедлива

Теорема 5. При условиях теоремы 2 справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda^{(m)}(f; x_0) - f^{(m)}(x_0)}{R_{n,m,\lambda} \cdot \Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \mp f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак $(-)$ или $(+)$ в правой части берется в зависимости от четности или нечетности n .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаджиев А. Д., Джафаров А. С., Лабскер Л. Г., Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1962, № 3.
2. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., 1954.

А. Ч. Гачыжев

Функцијаларын төрәмэләринин хәтти операторлар аиләсинин төрәмәләри илә җахынлашмасынын асимптотик гijмәти һаггында

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә функцијаларын төрәмэләринин хәтти операторлар аиләсинин төрәмәләри вәситәсилә җахынлашмасынын асимптотик гijмәти тапылыр.

Биринчи параграфда функцијаларын чүт тәртибдән төрәмәләринин

$$B_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} A_\lambda(f(x + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x - \beta_{k,\lambda} t))$$

операторлары илә җахынлашмасы апарылыр вә бу җахынлашманын асимптотик гijмәти һаггында 1-чи теорем сәләнир. Хүсуси һал кими, бу теоремдән функцијаларын чүт тәртибдән төрәмәләринин интеграл операторларын төрәмәләри вәситәсилә җахынлашмасынын асимптотик гijмәти һаггында 2-чи теорем алыныр.

Икинчи параграфда аналогичи теоремләр функцијаларын тәк тәртибдән төрәмәләринин

$$B_\lambda(f; x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} U_\lambda(f(x + \alpha_{k,\lambda} t) - f(x - \beta_{k,\lambda} t))$$

операторлары илә җахынлашмасынын асимптотик гijмәти һаггында алыныр. Алынган нәтиҗәләр 1—5 теоремләри илә ифадә олунур.

М.-Б. А. БАБАЕВ

О НАИЛУЧШЕМ СТЕПЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯМИ ВИДА $\varphi(x) + \psi(y)$

С представлением функций многих переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных связана 13-я проблема Гильберта. Этим вопросом занимались акад. А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин, В. И. Арнольд и др.

Недавно Ю. П. Офман [4] рассмотрел задачу о наилучшем приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$ в пространстве S (непрерывных функций).

Через L_p обозначим пространство функций, p -я степень абсолютного значения которых интегрируема в смысле Лебега.

Пусть на подмножестве Q плоскости oxy задана функция $F(x, y) \in L_p(Q)$, $p \geq 1$. Рассмотрим класс всех функций вида $\varphi(x) + \psi(y) \in L_p(Q)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ определены на проекциях Q соответственно на оси ox и oy . Определим расстояние между функциями $F(x, y)$ и $G(x, y)$ в виде

$$\rho[F, G]_p = \left(\int_Q |F(x, y) - G(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

и назовем наилучшим приближением в среднем степени p функции $F(x, y)$ посредством функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$ следующую величину

$$E_F^{(p)} = \inf_{\varphi + \psi} \rho[F, \varphi + \psi]_p = \inf_{\varphi + \psi} \left(\int_Q |F(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В настоящей работе нами рассмотрено наилучшее приближение функций $F(x, y) \in L_p(Q)$ посредством функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$.

Эти вопросы были рассмотрены Ю. П. Офманом для случая $p = \infty$.

Прежде всего нами устанавливается существование наилучшей в смысле $L_p(Q)$ приближающей функции, т. е. такой функции $\varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y)$, для которой

$$\rho[F(x, y), \varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y)]_p = E_F^{(p)}.$$

В случае, когда Q — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, указывается способ нахождения величины $E_F^{(p)}$. Далее доказывается существование наилучшего приближения функции

$F(x, y) \in L_p(Q)$ функцией из класса $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$, где существует определенная связь между модулями непрерывности функций φ , ψ и F .

По пути установления основных результатов получен критерий монотонности произвольной функции двух переменных.

Все основные результаты обобщены для функций n -переменных, определенных на множестве n -мерного Евклидова пространства

$$E_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^*.$$

1. Следуя Ю. П. Офману, дадим некоторые определения:

Пусть A_{x_0} и B_{y_0} есть пересечение Q соответственно с прямой $x=x_0$ (т. е. совокупность точек $(x_0, y) \in Q$) и с прямой $y=y_0$. Будем называть подфункцией $F(x, y)$, соответствующей подмножеству $A_{x_0} \subset Q$ ($B_{y_0} \subset Q$), функцию $F_{A_{x_0}}(y)$ ($F_{B_{y_0}}(x)$), областью определения которой является подмножество $A_{x_0}(B_{y_0})$ и которая совпадает на нем с функцией $F(x, y)$.

Далее обозначим через $A'_x(B'_y)$ проекцию множества $A_x(B_y)$ на ось $ou(ox)$, а через $F_{A'_x}(F_{B'_y})$ функцию, которая определяется на $A'_x(B'_y)$ следующим образом

$$F_{A'_x}(y) = F_{A_x}(x, y), \quad (F_{B'_y}(x) = F_{B_y}(x, y)).$$

Сопоставим каждому $x \in Q'$ (проекции Q на ось ox) функцию $F_{A'_x}$. Тогда множеству Q' будет сопоставлено семейство функций $\{F_{A'_x}(y)\}$. Аналогично множеству Q'' (проекции Q на ось oy) сопоставляется семейство $\{F_{B'_y}(x)\}$.

Назовем первым (вторым) семейством функции $F(x, y)$ семейство функций $\{F_{B'_y}(x)\}$ ($\{F_{A'_x}(y)\}$).

Определим расстояние между функциями $F_{B'_{y_1}}(x)$ и $F_{B'_{y_2}}(x)$ семейства $\{F_{B'_y}(x)\}$ в виде

$$\rho[F_{B'_{y_1}}(x), F_{B'_{y_2}}(x)]_p = \left(\int_{x \in B'_{y_1} \cap B'_{y_2}} |F_{B'_{y_1}}(x) - F_{B'_{y_2}}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если $B'_{y_1} \cap B'_{y_2} = 0$, то полагаем

$$\rho[F_{B'_{y_1}}(x), F_{B'_{y_2}}(x)]_p = 0.$$

Теорема 1. Пусть $F(x, y) \in L_p(Q)$ и $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$ класс функций, у которого функции и их вариации ограничены одним числом. Тогда в этом классе существует наилучшая приближающая, т. е. функция $\varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y) \in \{\varphi(x) + \psi(y)\}$ такая, что

$$\rho(F, \varphi^\circ + \psi^\circ)_p = \left(\int \int_Q |F(x, y) - \varphi^\circ(x) - \psi^\circ(y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = E_F^{(p)},$$

где Q есть ограниченное множество плоскости oxy (заметим, что функции с ограниченным изменением входят в L_p , так как $|f(x)|^p$ имеет лишь конечное число точек разрыва. Это следует из того, что аналогично одномерному случаю можно ввести понятие вариации функций двух переменных вида $\varphi(x) + \psi(y)$).

* Пользуясь случаем, считаю приятным долгом выразить признательность своему учителю И. И. Ибрагимову за руководство при выполнении настоящей работы.

Доказательство. Из определения $E_F^{(p)}$ следует, что существует последовательность функций $\{\varphi_n(x) + \psi_n(y)\}$ такая, что

$$\rho[F(x, y), \varphi_n(x) + \psi_n(y)]_p \rightarrow E_F^{(p)}.$$

Из условия теоремы ясно, что функции из $\{\varphi_n(x) + \psi_n(y)\}$ образуют равномерное ограниченное семейство функций. Каждая из них, $\varphi_n(x) + \psi_n(y)$, разлагается на функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(y)$ однозначно с точностью до констант, так как $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(y)$ являются подфункциями $\varphi_n(x) + \psi_n(y)$, соответствующими проекциям множества Q на оси ox и oy . Очевидно, эти константы можно подобрать так, что два семейства $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(y)\}$ будут равномерно ограничены, а функции этих семейств $\{\varphi_n(x)\}$ и $\{\psi_n(y)\}$ будут ограниченного изменения. Тогда эти семейства функций будут удовлетворять условиям принципа выбора Хелли (см. [3]). По этому принципу можно выделить из семейства $\{\varphi_n(x)\}$ подпоследовательность $\{\varphi_{k_n}(x)\}$ сходящуюся к некоторой функции $\varphi^\circ(x)$ (тоже с ограниченной вариацией), т. е.

$$\{\varphi_{k_n}(x)\} \rightarrow \varphi^\circ(x) \quad \text{в } L_p$$

(в принципе Хелли под сходимостью подразумевается сходимость в метрике пространства C , из которого для ограниченного множества Q следует сходимость в пространстве $L_p(Q)$).

Далее из последовательности $\{\psi_{k_n}(y)\}$ выделим подпоследовательность $\{\psi_{k_n}(y)\}$, сходящуюся к некоторой функции $\psi^\circ(y)$, и рассмотрим последовательность

$$\{\varphi_{k_n}(x) + \psi_{k_n}(y)\} \rightarrow \varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y) \quad \text{в } L_p.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что при любом $k_n > N$ будут верны неравенства:

$$\rho[\varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y), \varphi_{k_n}(x) + \psi_{k_n}(y)]_p \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\rho[F(x, y), \varphi_{k_n}(x) + \psi_{k_n}(y)]_p \leq E_F^{(p)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\rho[F, \varphi^\circ + \psi^\circ]_p \leq \rho[F, \varphi_{k_n} + \psi_{k_n}]_p + \rho[\varphi_{k_n} + \psi_{k_n}, \varphi^\circ + \psi^\circ]_p \leq E_F^{(p)} + \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\rho[F, \varphi^\circ + \psi^\circ]_p = E_F^{(p)}.$$

(знак строгого неравенства не может иметь места в силу определения $E_F^{(p)}$). Теорема доказана.

2. В дальнейшем нам понадобятся следующие определения: Назовем диаметром первого семейства функции $F(x, y)$ выражение

$$d^1[F] = \left(\frac{1}{mQ''} \int \int_{Q''} \int_{x \in B'_{y_1} \cap B'_{y_2}} |F_{B'_{y_1}}(x) - F_{B'_{y_2}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}},$$

где через mQ'' обозначена мера Q'' . Далее, некоторое семейство $\{G_{B'_y}(x)\}$, скажем, эквивалентно первому семейству $\{F_{B'_y}(x)\}$ функции $F(x, y)$, если каждая функция семейства $\{G_{B'_y}(x)\}$ отличается от некоторой функции семейства $\{F_{B'_y}(x)\}$ лишь на функцию, зависящую от

у, или абсолютную постоянную. Будем говорить, что семейство, эквивалентное первому семейству $F(x, y)$, удовлетворяет условию (A), если для каждой функции этого семейства будет верно соотношение

$$2G_{B'_{y_1}}(x) \geq \|G_{B'_{y_1}}(x) - G_{B'_{y_2}}(x)\|_{y_1, y_2} = \left(\frac{1}{mQ''} \int_{Q''} \int_{Q''} |G_{B'_{y_1}}(x) - G_{B'_{y_2}}(x)|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (A)$$

где $G(x, y)$ функция, первое семейство которой эквивалентно первому семейству функции $F(x, y)$ и точки $(x, y_1), (x, y_2) \in Q$. Нижняя грань всех семейств, эквивалентных первому семейству функции $F(x, y)$ и удовлетворяющих условию (A), называется истинным диаметром первого семейства функции $F(x, y)$ и обозначается через

$$d_0^1[F] = \inf_{\substack{\text{экв. сем. 1} \\ \text{удов. (A)}}} d^1[F].$$

Для второго семейства функции $F(x, y)$ аналогично определяется диаметр

$$d^2[F] = \left(\frac{1}{mQ'} \int_{Q'} \int_{Q'} \int_{y \in A'_{x_1} \cap A'_{x_2}} |F_{A'_{x_1}}(y) - F_{A'_{x_2}}(y)|^p dy dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}};$$

семейства, эквивалентные второму семейству функции $F(x, y)$, удовлетворяют условию аналогичному условию (A) и истинный диаметр;

$$d_0^2[F] = \inf_{\substack{\text{экв. сем. 2} \\ \text{удов. (B)}}} d^2[F].$$

Пусть $E_{F_1}^{(p)}$ есть наилучшее приближение посредством $\varphi + \psi$, где $F - \varphi$ удовлетворяют условию (A). Аналогично определим $E_{F_2}^{(p)}$.

Теорема 2. Пусть функция $F(x, y) \in L_p$ определена на прямоугольнике $[a, b; c, d]$ со сторонами параллельными координатным осям, длина сторон которого не превышает единицы. Тогда имеют место равенства:

$$d_0^1[F] = 2E_{F_1}^{(p)}, d_0^2[F] = 2E_{F_2}^{(p)}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$x(x, y) = F(x, y) - \varphi(y)$$

Ясно, что первые семейства функций $x(x, y)$ и $F(x, y)$ эквивалентны. Покажем, что диаметр первого семейства $x(x, y)$ не превышает $2\rho[F, \varphi(x) + \psi(y)]_p$.

Это видно из цепи неравенств, где, в частности, применяется неравенство Минковского:

$$d^1[x] = \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |x_{B'_{y_1}}(x) - x_{B'_{y_2}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |F_{B'_{y_1}}(x) - \varphi(y_1) - (F_{B'_{y_2}}(x) - \varphi(y_2))|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |F_{B'_{y_1}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_1) - (F_{B'_{y_2}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_2))|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |F_{B'_{y_1}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_1)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |F_{B'_{y_2}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_2)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_a^b \int_c^d |F_{B'_{y_1}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_1)|^p dy_1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_a^b \int_c^d |F_{B'_{y_2}}(x) - \varphi(x) - \varphi(y_2)|^p dy_2 dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d dy_1 \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2\rho[F(x, y), \varphi(x) + \psi(y)]_p.$$

Следовательно, принимая во внимание определение $d_0^1[F]$ получим

$$d_0^1[F] \leq 2\rho[F, \varphi + \psi]_p.$$

Левая сторона этого неравенства — постоянное число, а функция $\varphi(x) + \psi(y)$ произвольна; поэтому

$$d_0^1[F] \leq 2E_{F_1}^{(p)}.$$

Чтобы доказать обратное неравенство, допустим, что нашлось семейство, эквивалентное первому семейству $F(x, y)$, диаметр которого

$$d^1 = 2(E_{F_1}^{(p)} - \varepsilon), \quad \varepsilon > 0$$

и пусть это семейство образовано при помощи некоторой функции $\Phi(x, y) \in L_p(Q)$. Определим вспомогательную функцию

$$\varphi^0(x) = \| \Phi_{B'_{y_1}}(x) - \Phi_{B'_{y_2}}(x) \|_{y_1, y_2}^{(p)} = \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |\Phi_{B'_{y_1}}(x) - \Phi_{B'_{y_2}}(x)|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

* Здесь мы подразумеваем что рассматриваемые функции $\varphi(x) + \psi(y) \in L'_p(\varphi)$

Покажем, что функция $\varphi^\circ(x)$ приближает каждую из функций семейства, эквивалентного первому семейству функции $F(x, y)$ с точностью, не меньшей, чем $E_F^{(p)} - \varepsilon$. В силу условия (A) получаем

$$[\varphi^\circ(x) \leq 2 \Phi_{B_y}(x),$$

$$\frac{1}{2} \varphi^\circ(x) - \Phi_{B_y}(x) \leq 0,$$

$$\varphi^\circ(x) - \Phi_{B_y}(x) \leq \frac{1}{2} \varphi^\circ(x) = \frac{1}{2} \|\Phi_{B_{y_1}}(x) - \Phi_{B_{y_2}}(x)\|_{y_1, y_2}^{(p)}.$$

Тогда для любой функции $\Phi_{B_y}(x) \in \{\Phi_{B_y}(x)\}$ имеем:

$$\begin{aligned} \rho[\varphi^\circ(x), \Phi_{B_y}(x)]_p &= \left(\int_a^b \|\Phi_{B_{y_1}}(x) - \Phi_{B_{y_2}}(x)\|_{y_1, y_2}^{(p)} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\int_a^b \left| \frac{1}{2} \|\Phi_{B_{y_1}}(x) - \Phi_{B_{y_2}}(x)\|_{y_1, y_2}^{(p)} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |\Phi_{B_{y_1}}(x) - \Phi_{B_{y_2}}(x)|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_a^b |\Phi_{B_{y_1}}(x) - \Phi_{B_{y_2}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{1}{2} d^1 [\Phi] = \frac{1}{2} \cdot 2[E_F^{(p)} - \varepsilon] = E_F^{(p)} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, каждой функции первого семейства $F_{B_y}(x)$ можно сопоставить постоянную C_y так, что

$$\rho[F_{B_y}(x) + C_y, \varphi^\circ(x)]_p \leq E_F^{(p)} - \varepsilon.$$

Определим на $[c, d]$ функцию $\psi^\circ(y)$ следующим образом:

$$\psi^\circ(y) = -C_y.$$

Тогда

$$\rho[F_{B_y}(x) - \varphi^\circ(y), \varphi^\circ(x)]_p \leq E_F^{(p)} - \varepsilon$$

или

$$\int_a^b |F_{B_y}(x) - \varphi^\circ(x) - \psi^\circ(y)|^p dx \leq [E_F^{(p)} - \varepsilon]^p.$$

Проинтегрируем обе части по $[c, d]$:

$$\int_a^b \int_c^d |F_{B_y}(x) - \varphi^\circ(x) - \psi^\circ(y)|^p dy dx \leq \int_c^d [E_F^{(p)} - \varepsilon]^p dy = (d-c)[E_F^{(p)} - \varepsilon]^p.$$

Следовательно, имея в виду, что $d-c \leq 1$, получим

$$\left(\int_a^b \int_c^d |F(x, y) - \varphi^\circ(x) - \psi^\circ(y)|^p dy dx \right)^{\frac{1}{p}} = \rho(F, \varphi^\circ + \psi^\circ) \leq E_F^{(p)} - \varepsilon.$$

Но это противоречит определению $E_F^{(p)}$. Противоречие получили исходя из предположения $d^1 = 2[E_F^{(p)} - \varepsilon]$.

Итак, для всех классов функций, эквивалентных первому семейству функции $F(x, y)$, $d^1 \geq 2 E_F^{(p)}$, следовательно, $d_0^1[F_1] \geq 2 E_F^{(p)}$.

Сопоставляя это соотношение с ранее выведенным

$$d_0^1[F] \leq 2 E_F^{(p)},$$

получаем

$$d_0^1[F] = 2 E_F^{(p)}.$$

Аналогично доказывается второе равенство: $d_0^2[F_2] = 2 E_F^{(p)}$, для чего мы пользуемся функциями

$$\eta(x, y) = F(x, y) - \varphi(x),$$

$$\psi^\circ(y) = \|f_{A_{x_1}}(y) - f_{A_{x_2}}(y)\|_{x_1, x_2}^{(p)} = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f_{A_{x_1}}(y) - f_{A_{x_2}}(y)|^p dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, для установления результата $d_0^1[F] = 2 E_F^{(p)}$ достаточно, чтобы прямоугольник $[a, b; c, d]$ удовлетворял условию $d-c \leq 1$; a и b произвольные числа. Аналогично, для доказательства $d_0^2[F] = 2 E_F^{(p)}$ достаточно взять $b-a \leq 1$. Следовательно, равенствам

$$d_0^1[F] = 2 E_F^{(p)} \quad (d_0^2[F] = 2 E_F^{(p)})$$

можно пользоваться для определения наилучшего приближения функции $F(x, y)$ при помощи функций вида $\varphi(x) + \psi(y)$ на полосе параллельной оси $ox(oy)$, ширина которой не превосходит единицы.

3. Теорема 3. Пусть Q есть прямоугольник $[a, b; c, d]$, на плоскости oxy со сторонами, параллельными координатным осям, длины сторон которого не превышают единицы, и допустим, что на Q задана функция $F(x, y) \in L_p(Q)$. Тогда для нее в классе $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$, функции которого и их вариации ограничены одним числом, существует наилучшая приближающая в смысле L_p функция $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$ такая, что

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p = \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b |\varphi^*(x+h) - \varphi^*(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2 \sup_{\sigma < \sqrt{|h|^2 + |l|^2} < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = 2 \omega(\delta, F)_p \quad (1)$$

$$\omega(\delta, \psi^*)_p \leq 2 \omega(\delta, F)_p. \quad (2)$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует существование функции $\varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y) \in \{\varphi(x) + \psi(y)\}$, для которой

$$\rho[F(x, y), \varphi^\circ(x) + \psi^\circ(y)]_p = E_F^{(p)}.$$

Рассмотрим первые семейства функций $F(x, y)$ и $F(x, y) - \psi^\circ(y)$. Ясно, что они эквивалентны. Все функции первого семейства имеют одну и ту же область определения — проекцию прямоугольника на ось ox .

Определим функцию

$$\varphi^*(x) = \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x) - \psi^\circ(y_1) - (F_{B_{y_2}}(x) - \psi^\circ(y_2))|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

и покажем, что она удовлетворяет (1):

$$\begin{aligned} \omega(\delta, \varphi^*)_p &= \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b |\varphi^*(x+h) - \varphi^*(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \left| \frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x+h) - \psi^\circ(y_1) - F_{B_{y_2}}(x+h) + \psi^\circ(y_2)|^p dy_1 dy_2 \right|^{\frac{1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x) - \psi^\circ(y_1) - F_{B_{y_2}}(x) + \psi^\circ(y_2)|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Воспользуемся известным неравенством

$$| \|f\|_p - \|g\|_p | \leq \|f-g\|_p.$$

Получим

$$\begin{aligned} \omega(\delta, \varphi^*)_p &\leq \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \left| \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x+h) - F_{B_{y_2}}(x+h) - F_{B_{y_1}}(x) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + F_{B_{y_2}}(x) \right|^p dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \sup_{0 < |h| < \delta} \left[\left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x+h) - F_{B_{y_1}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_2}}(x+h) - F_{B_{y_2}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} \right] = \\ &= \sup_{0 < |h| < \delta} [I_1 + I_2] \leq \sup_{0 < |h| < \delta} I_1 + \sup_{0 < |h| < \delta} I_2. \end{aligned}$$

Вычислим $\sup_{0 < |h| < \delta} I_1$

$$\begin{aligned} \sup_{0 < |h| < \delta} I_1 &= \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\frac{1}{d-c} \int_a^b \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x+h) - F_{B_{y_1}}(x)|^p dx dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x+h) - F_{B_{y_1}}(x)|^p dx dy_1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \sup_{0 < \sqrt{|h|^2 + |l|^2} < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right) = \omega(\delta, F)_p. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\sup_{0 < |h| < \delta} I_2 \leq \omega(\delta, F)_p.$$

Итак

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p \leq 2 \omega(\delta, F)_p.$$

Мы будем рассматривать эквивалентные семейства, удовлетворяющие условию (A). Установим, что определенная нами функция $\varphi^*(x)$ обладает свойством

$$\rho[F(x, y), \varphi^*(x) + \psi^\circ(y)]_p = E_F^{(p)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \rho[F, \varphi^* + \psi^\circ]_p &= \left(\int_a^b \int_c^d |F - \varphi^* - \psi^\circ|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \int_c^d |\varphi^* - (F - \right. \\ &\quad \left. - \psi^\circ)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

$F(x, y) - \psi^\circ(y)$ функция, первое семейство которой эквивалентно первому семейству $F(x, y)$. Воспользуемся условием (A) для первого семейства функции $F(x, y) - \psi^\circ(y) = \Phi(x, y)$:

$$\varphi^*(x) \leq 2 \Phi_{B_y}(x),$$

$$\varphi^*(x) \leq 2 (F_{B_y}(x) - \psi^\circ(y)).$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \varphi^*(x) - F_{B_y}(x) + \psi^\circ(y) \leq 0,$$

$$\varphi^*(x) - F_{B_y}(x) + \psi^\circ(y) \leq \frac{1}{2} \varphi^*(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho[F, \varphi^* + \psi^\circ]_p &\leq \left(\int_a^b \int_c^d \left\{ \frac{1}{2} |\varphi^*(x)| \right\}^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \int_c^d \left| \frac{1}{d-c} \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x) - \psi^\circ(y_1) - (F_{B_{y_1}}(x) - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\psi^0(y_2))^p dy_1 dy_2 \Big| \Big|^{1/p} dx dy \Big)^{1/p} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d-c} \right)^{1/p} \int_a^b \int_c^d \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x) - \\
& -\psi^0(y_1) - F_{B_{y_2}}(x) + \psi^0(y_2)^p dx dy dy_1 dy_2 \Big|^{1/p} = \\
& = \frac{1}{2} \left(\int_c^d dy \right)^{1/p} \left(\frac{1}{d-c} \int_a^b \int_c^d \int_c^d |F_{B_{y_1}}(x) - \psi^0(y_1) - F_{B_{y_2}}(x) + \right. \\
& \left. + \psi^0(y_2)^p dx dy dy_2 \right)^{1/p} = (d-c) \cdot \frac{1}{2} d^1 [F - \psi^0] \leq (d-c) \times \\
& \times \frac{1}{2} \cdot 2 E_F^{(p)} \leq E_F^{(p)}.
\end{aligned}$$

Знак строгого неравенства не может быть в силу определения $E_F^{(p)}$. Итак

$$\rho[F, \varphi^* + \psi^0]_p = E_F^{(p)}.$$

Теперь определим новую функцию

$$\psi^*(y) = \left(\frac{1}{b-c} \int_a^b \int_a^b |F_{A_{x_1}}(y) - \varphi^*(x_1) - (F_{A_{x_2}}(y) - \varphi^*(x_2))|^p dx_1 dx_2 \right)^{1/p}.$$

Пользуясь приведенными рассуждениями, можно показать, что

$$\omega(\delta, \varphi^*) \leq 2\omega(\delta, F)$$

и

$$\rho[F, \varphi^* + \psi^*]_p = 2E_F^{(p)}.$$

Этим доказательство теоремы 3 завершается.

Лемма. Монотонная функция $F(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_2, y_2)| \leq |F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)|, \quad (1)$$

где $(x_1, y_1), \dots, (x_2, y_2)$ произвольные точки из области определения функции $F(x, y)$ и $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$.

Доказательство. Допустим, что функция $F(x, y)$ возрастает. Тогда $|F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)| = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$ и мы получаем двойное неравенство

$$\begin{aligned}
F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) & \leq F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + \\
& + F(x_2, y_2) \leq F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1).
\end{aligned} \quad (2)$$

Левая часть неравенства (2) нам дает

$$F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) \leq 2F(x_2, y_2),$$

справедливость которого очевидна в силу возрастания $F(x, y)$.

Из правой части (2) получаем

$$2F(x_1, y_1) \leq F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1),$$

которое также верно, что и завершает доказательство леммы в случае, когда функция $F(x, y)$ возрастает.

Случай убывания функции $F(x, y)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

По пути мы докажем теорему, устанавливающую критерий монотонности по каждому переменному произвольной функции двух переменных*.

Теорема 4. Неравенства

$$|F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_2, y_2)| \leq F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \quad (3)$$

и

$$|F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_2, y_2)| \leq F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2), \quad (4)$$

где $(x_1, y_1), \dots, (x_2, y_2)$ произвольные точки из области определения функции $F(x, y)$, являются необходимыми и достаточными соответственно для возрастания и убывания функции $F(x, y)$

$$(x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2).$$

Доказательство. Сначала докажем, что (3) является необходимым и достаточным для возрастания функции $F(x, y)$. Необходимость условия (3) следует из леммы. Докажем его достаточность. Пусть верно (3); т. е.

$$\begin{aligned}
F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) & \leq F(x_1, y_1) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + \\
& + F(x_2, y_2) \leq F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)
\end{aligned} \quad (3')$$

Из левой и правой части двойного неравенства (3') соответственно получаем

$$\begin{aligned}
F(x_1, y_2) + F(x_2, y_1) & \leq 2F(x_2, y_2); \\
2F(x_1, y_1) & \leq F(x_2, y_1) + F(x_1, y_2),
\end{aligned}$$

которое нам дает

$$F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2). \quad (5)$$

Это неравенство доказывает достаточность условия (3) для возрастания функции $F(x, y)$. Аналогично доказывается достаточность условия (4) для убывания функции $F(x, y)$ (его необходимость также следует из леммы). Теорема 4 доказана.

4. Обозначим через L_p^* класс монотонных функций $F(x, y) \in L_p$, для которых удовлетворяются неравенства (при некотором l_0 и h_0)

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l_0) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p} \leq \\
& \leq \sup_{0 < \sqrt{|h|^2 + |l|^2} < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{1/p}
\end{aligned} \quad (6)$$

* Функцию $F(x, y)$ назовем монотонной, если при $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ выполняется неравенство $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ (возрастающая) или $F(x_1, y_1) \geq F(x_2, y_2)$ (убывающая) при любых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in Q$.

$$\sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sup_{0 < \sqrt{|h|^2 + |l|^2} < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h_0, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

Теорема 5. Пусть Q есть прямоугольник $[a, b; c, d]$ на плоскости oxy со сторонами, параллельными координатным осям, для сторон которых не превышают единицы. Для любой функции $F(x, y) \in L_p$, заданной на Q в классе $\{\varphi(x) + \psi(y)\}$, функции которого и их вариации ограничены одним числом, существует наилучшая приближающая $\varphi^*(x) + \psi^*(y)$ такая, что

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p \leq \omega(\delta, F)_p, \quad (1^*)$$

$$\omega(\delta, \psi^*)_p \leq \omega(\delta, F)_p. \quad (2^*)$$

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 3, существует функция $\varphi^0(x) + \psi^0(y)$, удовлетворяющая

$$\rho[F(x, y), \varphi^0(x) + \psi^0(y)]_p = E_F^{(p)}$$

и функция $F(x, y) - \psi^0(y)$, первое семейство которой эквивалентно первому семейству $F(x, y)$. Определим функцию

$$\varphi^*(x) = \left(\int_c^d |F_{By+l_0}(x) - \psi^0(y+l_0) - (F_{By}(x) - \psi^0(y))|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Эта функция удовлетворяет (1*). Действительно

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p = \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b |\varphi^*(x+h) - \varphi^*(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \left| \int_c^d |F_{By+l_0}(x+h) - \psi^0(y+l_0) - F_{By}(x+h) + \psi^0(y)|^p dy \right|^{\frac{1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} -$$

$$- \left(\int_c^d |F_{By+l_0}(x) - \psi^0(y+l_0) - F_{By}(x) + \psi^0(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$\leq \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l_0) - F(x+h, y) - F(x, y+l_0) + F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теперь воспользуемся утверждением леммы

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p \leq \sup_{0 < |h| < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l_0) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

и условием (6)

$$\omega(\delta, \varphi^*)_p \leq \sup_{0 < \sqrt{|h|^2 + |l|^2} < \delta} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x+h, y+l) - F(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \omega(\delta, F)_p.$$

Таким образом, (1*) доказана.

Теперь установим, что нами определенная функция $\varphi^*(x)$ обладает свойством

$$\rho[F(x, y), \varphi^*(x) + \psi^0(y)]_p = E_F^{(p)}.$$

Мы будем рассматривать эквивалентные семейства, удовлетворяющие условию

$$2 \Phi_{By}(x) \geq \left(\int_{Q''} |\Phi_{By+l}(x) - \Phi_{By}(x)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (C)$$

где $\Phi(x, y)$ функция, первое семейство которой эквивалентно первому семейству функции $F(x, y)$ и $y+l \in Q''$ (естественно, функция $\varphi^*(x)$, отличная от подобной функции, определенной в теореме 3, требует условия, отличного от условия (A),

Итак

$$\rho[F, \varphi^* + \psi^0]_p = \left(\int_a^b \int_c^d |F - \varphi^* - \psi^0|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \int_c^d |\varphi^* - (F - \psi^0)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Воспользуемся [условием (C) для первого семейства функции $F(x, y) - \psi^0(y)$.

$$\varphi^*(x) \leq 2(F_{By}(x) - \psi^0(y)),$$

$$\frac{1}{2} \varphi^*(x) - F_{By}(x) + \psi^0(y) \leq 0$$

или

$$\varphi^*(x) - F_{By}(x) + \psi^0(y) \leq \frac{1}{2} \varphi^*(x).$$

Отсюда

$$\rho[F, \varphi^* + \psi^0]_p \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b \int_c^d |\varphi^*(x)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_c^d dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\varphi^*(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} \left(\int_a^b |\varphi^*(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \int_c^d |F(x, y+l_0) - \psi^0(y+l_0) - F(x, y) + \psi^0(y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_a^b \int_c^d |F(x, y+l_0) - \psi^0(y+l_0) - \varphi^0(x)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_a^b \int_c^d |F(x, y) - \psi^0(y) - \varphi^0(x)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot 2 \rho[F, \varphi^0 + \psi^0]_p = \rho[F, \varphi^0 + \psi^0]_p = E_F^{(p)}.$$

Знак строгого неравенства отсутствует в силу определения $E_F^{(p)}$.
 Далее, строится функция $\psi^*(y)$ и вышеуказанным образом доказывается, что она удовлетворяет (2*). Аналогично устанавливается, что

$$\rho[F, \varphi^* + \psi^*]_p = E_F^{(p)},$$

чем и завершается доказательство теоремы 5.

5. Чтобы сформулировать некоторые из вышеприведенных теорем для случая от n -переменных, нам понадобится обобщение наших определений.

Пусть функция $z = F(x_1, \dots, x_n)$ задана на множестве Q , n -мерного Евклидова пространства $E_n(x_1, \dots, x_n)$. Аналогично предыдущему можно ввести понятие семейства функции F . Очевидно функция $F(x_1, \dots, x_n)$ имеет n семейств, расположенных соответственно в плоскостях $z \propto x_1, \dots, z \propto x_n$. Назовем диаметром k -го семейства функции $F(x_1, \dots, x_n)$ выражение

$$d^k[F] = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{1}{mQ^{(i)}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q^{(n)}} \int_{Q^{(n)}} \dots \int_{Q^{(k+1)}} \int_{Q^{(k+1)}} \int_{x_k \in Q_1^{(k)}} \int_{Q_2^{(k)}} \int_{Q^{(k-1)}} \int_{Q^{(k-1)}} \dots \right. \\ \left. \dots \int_{Q^{(1)}} \int_{Q^{(1)}} |F_{Q_1^{(k)}}(x_k) - F_{Q_2^{(k)}}(x_k)|^p dx_1' dx_1'' \dots dx_{k-1}' dx_{k-1}'' dx_k' dx_k'' dx_{k+1}' dx_{k+1}'' \dots \right. \\ \left. \dots dx_n' dx_n'' \right)^{\frac{1}{p}},$$

где через $mQ^{(l)}$ обозначена мера множества

$$Q^{(l)} (l=1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

Далее по аналогии вводим понятие семейства, эквивалентного k -му семейству. Будем говорить, что семейство эквивалентное k -му семейству $F(x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет условию (K), если для каждой функции этого семейства будет верно соотношение

$$2G_{Q^{(k)}}(x_k) \geq \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{1}{mQ^{(i)}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q^{(n)}} \int_{Q^{(n)}} \dots \int_{Q^{(k+1)}} \int_{Q^{(k+1)}} \int_{Q^{(k-1)}} \int_{Q^{(k-1)}} \dots \right. \\ \left. \dots \int_{Q^{(1)}} \int_{Q^{(1)}} |F_{Q_1^{(k)}}(x_k) - F_{Q_2^{(k)}}(x_k)|^p dx_1' dx_1'' \dots dx_{k-1}' dx_{k-1}'' dx_{k+1}' dx_{k+1}'' \dots \right. \\ \left. \dots dx_n' dx_n'' \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $G(x_1, \dots, x_n)$ функция, k -е семейство которого эквивалентно k -му семейству функции $F(x_1, \dots, x_n)$ и точки $(x_1', \dots, x_{k-1}', x_k', x_{k+1}', \dots, x_n')$, $(x_1'', \dots, x_{k-1}'', x_k'', x_{k+1}'', \dots, x_n'') \in Q$.

Нижняя грань всех семейств, эквивалентных k -му семейству функции $F(x_1, \dots, x_n)$ и удовлетворяющих условию (K), называется истинным диаметром k -го семейства функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и обозначается через

$$d_0^k[F] = \inf_{\substack{\text{экв. сем. к.} \\ \text{удов. (K)}}} d^k[F].$$

Теорема 1*. Пусть $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p(Q)$ и $\{\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)\}$ класс функций, у которого функции и их вариации ограничены одним числом. Тогда в этом классе существует наилучшая приближающая, т. е. функция $\varphi_1^0(x_1) + \dots + \varphi_n^0(x_n) \in \{\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)\}$ такая, что

$$\rho(F, \varphi_1^0 + \dots + \varphi_n^0)_p = \left(\int_Q \dots \int_Q |F(x_1, \dots, x_n) - \varphi_1^0(x_1) - \dots - \varphi_n^0(x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p}} = E_{F,p}^{(n)}$$

где Q есть ограниченное множество n -мерного Евклидова пространства.

Теорема 2*. Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p$ определена на параллелепипеде $[a_1, b_1; \dots; a_n, b_n]$ со сторонами, параллельными координатным осям, длина сторон которого не превышает единицы. Тогда имеет место равенство:

$$d_0^k[F] = 2E_{F,k,p}^{(n)}, \quad k=1, \dots, n,$$

Теорема 3*. Пусть Q есть n -мерный параллелепипед $[a_1, b_1; \dots; a_n, b_n]$ пространства $E_n(x_1, \dots, x_n)$ со сторонами, параллельными координатным осям, длина сторон которого не превышает единицы, и допустим, что на Q задана функция $F(x_1, \dots, x_n) \in L_p(Q)$. Тогда для нее в классе $\{\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x_n)\}$, функции которого и их вариации ограничены одним числом, существует наилучшая приближающая в смысле L_p функция $\varphi_1^*(x_1) + \dots + \varphi_n^*(x_n)$ такая, что

$$\omega(\delta, \varphi_k^*)_p = \sup_{0 < |h_k| < \delta} \left(\int_{Q_k} |\varphi_k^*(x_k + h_k) - \varphi_k^*(x_k)|^p dx_k \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \frac{2 \sup_{0 < \sqrt{|h_1|^2 + \dots + |h_n|^2} < \delta}}{\left(\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} |F(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - F(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p}}} = 2\omega(\delta, F)_p.$$

Доказательства этих теорем мы не приводим, так как в них используются такие же рассуждения, как в доказательствах соответствующих теорем при $n=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. „Математическое просвещение“, 1958, т. 3.
2. Колмогоров А. Н. „ДАН СССР“, 1956, т. 108, № 2.
3. Натансон И. П. Теория функций вещественного переменного. М., 1947.
4. Офман Ю. П. „Изв. АН СССР“, серия мат., 1961, т. 15, № 2.

Икидәјишәнли функцијаларын $\varphi(x) + \psi(y)$ шәклиндә
функцијаларла үстлү јахынлашмасы һаггында

ХҮЛАСӘ

Чохдәјишәнли функцијалары, дәјишәнләринин сајы аз олан функл
сијаларын суперпозијасы шәклиндә көстәрмәк мәсәләси Гилбертиә
мәшһур 13-чү проблеми илә әләгәдардыр. Сонралар бу мәсәлә ил-
Акад. А. Н. Колмогоров, А. Г. Витушкин, В. И. Арнолд вә с. мәшғун
олмушлар.

Тәгдим олунан мәгаләдә L_p фәзасында олан икидәјишәнли $F(x, y)$
функцијаларынын $\varphi(x) + \psi(y)$ шәклиндә олан функцијаларла јахын-
лашмасы мәсәләсинә бахылмышдыр.

Бу мәсәлә илә $p = \infty$ һагында Ј. П. Офман мәшғул олмушдур.
Алынмыш нәтичәләр ихтијари n дәјишәнли функцијалар үчүн үмуми-
ләшдирилмишдир.

Ф. Г. ШАМИЕВ

О ПРОЕКТИРОВАНИИ ПЛАСТИНОК МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА

Проектированию круглых пластинок минимального веса посвящены
работы Геспкинса и Прагера [1], Фрайбергера и Текиналпа [4], Друк-
кера и Шилда [2], Оната, Шумана и Шилда [6], Исона [3], Прагера
и Шилда [7].

В работе Мруза [5] рассмотрены вопросы несущей способности
круглых кольцевых пластинок, а также проектирования статически
определимых круглых кольцевых пластинок минимального веса при
различных условиях опирания. Однако в задачах проектирования пла-
стинок, свободно опертых по внутреннему или по внешнему контуру,
в [5] допущены некоторые неточности, о которых будет сказано ниже.

В настоящей работе рассматривается задача проектирования круг-
лых кольцевых слоистых пластинок минимального веса, находящихся
под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. В
отличие от [5] рассмотрены не только статически определимые, но и
статически неопределимые задачи. Слоистая пластинка мыслится как
пластинка, состоящая из двух одинаковых слоев переменной толщины
 h , разделенных заполнителем из легкого материала постоянной тол-
щины $H \gg h$. Задача сводится к определению такой переменной толщины
 h наружных слоев, чтобы пластинка, находясь на грани разрушения,
имела минимальный вес. Материал наружных слоев пластинки счи-
тается однородным (задача проектирования пластинок минимального
веса совпадает с задачей проектирования пластинок минимального
объема), идеально упруго-пластическим, подчиняющимся условию те-
кучести Треска, а также связанному с ним закону пластического те-
чения.

1. Круглая кольцевая пластинка, свободно опертая
по внешнему контуру

Рассмотрим круглую кольцевую пластинку, свободно опертую
(рис. 1) по внешнему контуру. Пусть a —внутренний, b —внешний ра-
диусы пластинки. Если обозначить через M_r и M_φ соответственно ра-
диальный и тангенциальный изгибающие моменты, то тогда условие
текучести Треска в плоскости $M_r M_\varphi$ изображается шестиугольником
 $ABCDEF$ (рис. 2). Изгибающие моменты должны удовлетворять урав-
нению равновесия:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} \int_a^r p r dr \quad (1.1)$$

где p — равномерно распределенная по кольцу $a \leq r \leq c$ поперечная нагрузка.

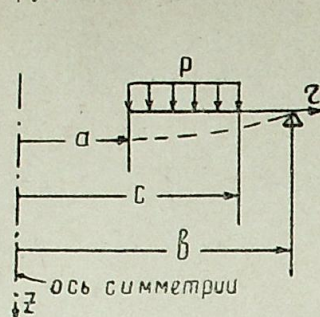


Рис. 1

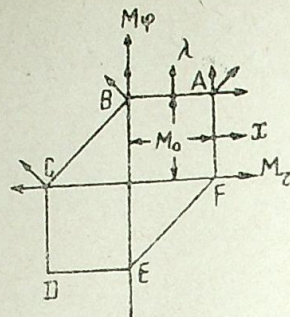


Рис. 2

Скорости радиальной и тангенциальной кривизны κ и λ выражаются через скорости прогиба w следующим образом:

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \lambda = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (1,2)$$

Как указывалось в работе [2], проект, удовлетворяющий условию

$$\frac{D}{h} = \frac{M_r \kappa + M_\phi \lambda}{h} = \text{const}, \quad (1,3)$$

где D — скорость диссипации энергии, отнесенной к единице площади срединной поверхности пластинки, является проектом минимального веса. Это условие накладывает ограничение на множество допустимых положений точки момент в на шестиугольнике текучести. Нетрудно показать, что только состояния, характеризующиеся точками A , C , D и F , удовлетворяют условию (1,3). Например, для стороны AB шестиугольника текучести

$$M_\phi = M_0, \quad 0 \leq M_r \leq M_0,$$

где

$$M_0(r) = \sigma_0 H h(r)$$

есть полный пластический изгибающий момент, а σ_0 — предел текучести при простом растяжении или сжатии. Скорость радиальной кривизны $\kappa = -\frac{d^2 w}{dr^2} = 0$. Тогда $\lambda = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{C'}{r}$ (C' — постоянная).

Подставляя соответствующие значения в условие (1,3) убеждаемся, что оно не удовлетворяется.

Когда пластинка свободно опирается по внешнему контуру и нагружается направленным вниз давлением p , λ является неотрицательной и напряженное состояние может характеризоваться точками A или C на шестиугольнике текучести. Мы берем точку A , так как она соответствует минимальному весу.

Для точки A условие (1,3) дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\alpha, \quad (1,4)$$

где α — положительная постоянная. Отсюда, используя граничное условие $w(b) = 0$, получим:

$$w = \frac{\alpha}{4} \frac{b^2 \ln \frac{a}{r} + r^2 \ln \frac{b}{a} + \left(a^2 + \frac{4}{a} w_a\right) \ln \frac{r}{b}}{\ln \frac{a}{b}}, \quad (1,5)$$

где w_a — скорость прогиба на внутреннем контуре.

Для точки A

$$M_r = M_\phi = M_0. \quad (1,6)$$

Тогда уравнение равновесия (1,1) вместе с граничными условиями $M_0(a) = M_0(b) = 0$, а также с условием непрерывности M_0 при $r = c$ дает:

$$M_0 = \begin{cases} \frac{p}{4} \frac{a^2 \ln \frac{r}{c} + c^2 \ln \frac{a}{r} + r^2 \ln \frac{c}{a} + 2(c^2 - a^2) \ln \frac{b}{c} \ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{a}{c}} & a \leq r \leq c \\ \frac{p}{2} (c^2 - a^2) \ln \frac{r}{b} & c \leq r \leq b \end{cases} \quad (1,7)$$

Аналогичная задача для сплошных кольцевых пластинок рассматривалась в [5], однако приведенное там решение не удовлетворяет граничному условию $M_0(a) = 0$.

Если пластинка постоянной толщины находится под действием равномерно распределенной повсюду поперечной нагрузки, то на грани разрушения она имеет объем [4]:

$$V_{h=\text{пост.}} = \frac{1}{3} \frac{\pi p}{\sigma_0 H} (b-a)^2 (a+b) \quad (1,8)$$

Объем пластинки переменной толщины будет;

$$V_{h=\text{перем.}} = \frac{1}{4} \frac{\pi p}{\sigma_0 H} \left[b^4 - a^4 - \frac{(b^2 - a^2)^2}{\ln \frac{b}{a}} \right]. \quad (1,9)$$

На рис. 3 показана зависимость коэффициента веса

$$\beta = \frac{V_{h=\text{перем.}}}{V_{h=\text{пост.}}},$$

который позволяет сравнить вес пластинки постоянной толщины с весом равнопрочной ей пластинки переменной толщины от $\frac{b}{a}$ (кривая I).

2. Круглая кольцевая пластинка, свободно опертая по внутреннему контуру

Для свободно опертой по внутреннему контуру пластинки (рис. 4) и указанного вида нагружения $\lambda \leq 0$. Поэтому напряженное состояние может характеризоваться точками D или F на шестиугольнике текучести.

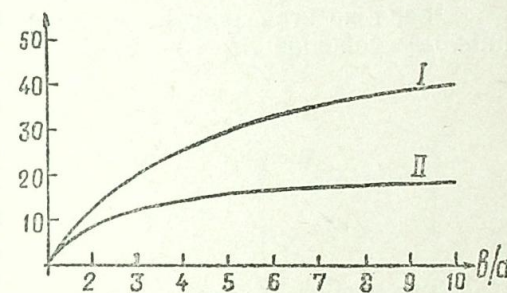


Рис. 3

чести. Мы берем точку D , так как она соответствует минимальному весу. Для этой точки условие (1,3) дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \alpha. \quad (2,1)$$

Используя граничное условие $w(a) = 0$, получим:

$$w = \frac{\alpha}{4} \frac{a^2 \ln \frac{r}{b} + r^2 \ln \frac{b}{a} + \left(b^2 - \frac{4}{a} w_b\right) \ln \frac{a}{r}}{\ln \frac{b}{a}}, \quad (2,2)$$

где w_b — скорость прогиба на внешнем контуре.

Для точки D $M_r = M_\varphi = -M_0$. Тогда из (1,1) получим:

$$M_0 = \begin{cases} \frac{\rho}{2} (b^2 - c^2) \ln \frac{r}{a} & a \leq r \leq c \\ \frac{\rho}{4} \frac{c^2 \ln \frac{r}{b} + b^2 \ln \frac{c}{r} + r^2 \ln \frac{b}{c} + 2(b^2 - c^2) \ln \frac{a}{c} \ln \frac{b}{r}}{\ln \frac{c}{b}} & c \leq r \leq b \end{cases} \quad (2,3)$$

где ρ есть равномерно распределенная нагрузка в кольце $c \leq r \leq b$.

Решению этой задачи, приведенное в [5], не удовлетворяет граничному условию $M_0(a) = 0$.

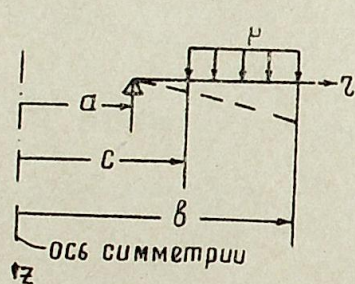


Рис. 4

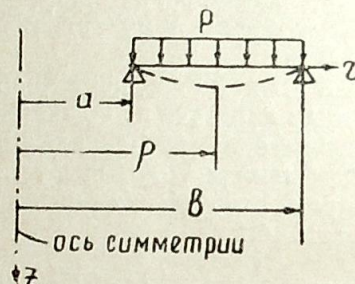


Рис. 5

Пластика постоянной толщины имеет на грани разрушения объем [5]:

$$V_{h-\text{пост.}} = \frac{1}{2} \frac{\pi \rho}{\sigma_0 H} \frac{(b^2 - a^2) \left(2b^2 \ln \frac{b}{a} - b^2 + a^2 \right)}{\ln \frac{b}{a}}. \quad (2,4)$$

Объем пластинки переменной толщины выражается формулой (1,9). На рис. 3 показана зависимость β от $\frac{b}{a}$ (кривая II).

3. Круглая кольцевая пластинка, свободно опертая по краям

Рассмотрим круглую кольцевую пластинку (рис. 5), свободно опертую по краям и находящуюся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Задача является статически неопределимой.

В этом случае вблизи внутреннего контура $\kappa \geq 0$, $\lambda \leq 0$ и поэтому напряженное состояние может характеризоваться точкой F . Вблизи внешнего контура $\kappa \geq 0$, $\lambda \geq 0$, поэтому напряженное состояние характеризуется точкой A на шестиугольнике текучести.

Предположим, что напряженное состояние в области $a \leq r \leq \rho$ характеризуется точкой F , а в области $\rho \leq r \leq b$ — точкой A .

Условие (1,3) дает:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\alpha \quad a \leq r \leq \rho \quad (3,1)$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\alpha \quad \rho \leq r \leq b \quad (3,2)$$

Условие непрерывности $\frac{dw}{dr}$ при $r = \rho$ показывает, что $\frac{dw}{dr} = 0$

при $r = \rho$. Учитывая это, используя граничные условия $w(a) = w(b) = 0$, а также условие непрерывности w при $r = \rho$, из (3,1) и (3,2) получим:

$$w = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} (a - r) (a - 2\rho + r) & a \leq r \leq \rho \\ \frac{\alpha}{4} \left(b^2 - r^2 + 2\rho^2 \ln \frac{r}{b} \right) & \rho \leq r \leq b \end{cases}, \quad (3,3)$$

где ρ есть корень уравнения:

$$\ln \frac{\rho}{b} = \frac{3\rho^2 - 4a\rho - b^2 + 2a^2}{2\rho^2}. \quad (3,4)$$

Пусть Q есть опорная реакция на внутреннем контуре, отнесенная к единице длины. Тогда уравнение равновесия (1,1) дает:

$$\frac{dM_0}{dr} + \frac{M_0}{r} = \frac{a}{r} Q - \frac{1}{r} \int_a^r p r dr \quad a \leq r \leq \rho \quad (3,5)$$

$$\frac{dM_0}{dr} = -\frac{1}{r} \int_\rho^r p r dr \quad \rho \leq r \leq b \quad (3,6)$$

Откуда получим:

$$M_0 = \begin{cases} aQ - \frac{1}{6} p (r^2 - 3a^2) + \frac{C_1}{r} & a \leq r \leq \rho \\ -\frac{1}{4} p (r^2 - 2\rho^2 \ln r) + C_2 & \rho \leq r \leq b \end{cases}, \quad (3,7)$$

где C_1 и C_2 постоянные интегрирования.

Граничные условия $M_0(a) = M_0(b) = 0$, а также условие непрерывности M_0 при $r = \rho$ дают:

$$M_0 = \begin{cases} a \left(Q + \frac{1}{2} p a \right) - \frac{a^2}{r} \left(Q + \frac{1}{3} p a \right) - \frac{1}{6} p r^2 & a \leq r \leq \rho \\ \frac{p}{4} \left(b^2 - a^2 + 2 \rho^2 \ln \frac{r}{b} \right) & \rho \leq r \leq b \end{cases}, \quad (3,8)$$

где

$$Q = \frac{p}{12} \frac{\rho \left[3 \left(b^2 + 2 \rho^2 \ln \frac{\rho}{b} - 2 a^2 \right) - \rho^2 \right] + 4 a^3}{a(\rho - a)}. \quad (3,9)$$

Пластика постоянной толщины на грани разрушения имеет объем [5]:

$$V_{h=\text{пост.}} = \frac{\pi p}{\sigma_0 H} (a^2 - b^2) (\rho_2^2 - \rho_1^2), \quad (3,10)$$

где ρ_1 и ρ_2 есть корни уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2 \rho_1^2 \ln \frac{\rho_1}{a} + \rho_1^2 + a^2 - 2 \rho_2^2 &= 0 \\ 6 b \rho_2^2 - 2 \rho_2^3 - b^3 - 3 b \rho_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3,11)$$

Объем пластинки переменной толщины будет:

$$V_{h=\text{перем.}} = \frac{4 \pi}{\sigma_0 H} \left[\left(A_1 \frac{\rho^2 - a^2}{2} - B'(\rho - a) \right) - \frac{p}{24} (\rho^4 - a^4) + \right. \\ \left. + \frac{p}{4} \left(\frac{(b^2 - \rho^2)^2}{2} - \frac{b^4 - \rho^4}{4} + \rho^4 \ln \frac{b}{\rho} \right) \right], \quad (3,12)$$

где

$$A' = a \left(Q + \frac{1}{2} p a \right), \quad B' = a^2 \left(Q + \frac{1}{3} p a \right).$$

В частном случае, если $b = 2a$, то

$$V_{h=\text{пост.}} = 0,6 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (3,13)$$

$$V_{h=\text{перем.}} = 0,468 \frac{\pi p}{\sigma_0 H} a^4. \quad (3,14)$$

Сравнение (3,13) с (3,14) показывает, что вес пластинки переменной толщины на 22% меньше веса равнопрочной ей пластинки постоянной толщины.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Г. С. Шапиро за ценные советы при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гопкинс и Прагер. Сб. „Механика“, 1956, № 6 (40).
2. Друккер Д. и Шилд Р. Сб. „Механика“, 1958, № 3 (49).
3. Eason G. J. appl. Math. Phys. (ZAMP), 1960, 11.
4. Freiburger W. and Tekinalp. J. Mech. Phys. Sdids, 1956, 4.
5. Mroz Z. Rozprawy inzynierskie, 1958, VI, № 4, CXIV.
6. Onat E. T., Schumann W. and Shield P. T. J. appl. Math. Phys. (ZAMP), 1957, 8.
7. Prager W. and Shield R. T. J. appl. Math. Phys. (ZAMP), 1959, 10.

Ф. Н. Шамишев

Минимум чэкили лөвһәләр лајиһә етмәк һаггында

ХҮЛАСӘ

Мүхтәлиф дајаг шәртләри дахилиндә минимум чэкили даирәви һәлгәви (мүхтәлиф тәбәғәли) лөвһәләр лајиһә етмәк мәсәләсинә бахылыр.

Илк дэфә оларак статик һәлл едилә билмәјән мәсәлә арашдырылыр. Бу һал үчүн, хусуси һалда, $b = 2a$ (a вә b —ујғун оларак дахили вә харичи радиуслардыр) оlanda дәјишән галынлыглы лөвһәнин чэкисинин онун да ејни да амлылығы олан сабит чэкили лөвһәнин чэкисиндән 22% аз олдуғу көстәрилир.

З. А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, Г. А. АХУНДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ И ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЕМНИЕВЫХ ДИОДОВ

Как известно, в кремниевых $p-n$ -переходах обратный ток не имеет насыщения и по своей абсолютной величине значительно больше токов, вычисленных в предположении идеальных $p-n$ -переходов, а прямые токи при небольших напряжениях изменяются с напряжением медленнее, чем это следует по теории Шокли [16].

Дальнейшая разработка теории $p-n$ -переходов, проведенная Са, Нойсом и Шокли [14], а также Рашбой и Толпыго [3], показала, что эти отступления от теории идеального $p-n$ -перехода обусловлены генерационно-рекомбинационными процессами носителей зарядов в слое объемного заряда через рекомбинационные центры.

Таковыми рекомбинационными центрами могут служить неконтролируемые примеси, остающиеся в монокристаллах во время их получения и очистки, термоцентры, создающиеся в кристалле, а также примеси, вводимые при последующих обработках его. Особенно большое количество дефектов в кристаллической решетке создается во время процесса изготовления приборов. Этим и объясняется актуальность изучения рекомбинационных процессов, выявления природы рекомбинационных центров и влияния их на свойства изготавливаемых приборов с $p-n$ -переходами.

Данная работа посвящена изучению рекомбинации носителей в базе отечественных плоскостных кремниевых диодов, изготовленных по известной технологии, выяснению влияния ее на характеристики диодов.

Для этой цели проводилось исследование времени жизни выпрямляющих и емкостных свойств диодов при различных температурах.

Чтобы иметь возможность непосредственно измерять время жизни неравновесных носителей в базе диодов был использован метод переходных характеристик. Этот метод позволяет измерять также коэффициент инжекции исследованных диодов. Вольтамперные характеристики диодов снимались на постоянном токе. Емкость измерялась мостовым методом на звуковых частотах при различных температурах и обратных смещениях.

Теория переходных процессов в полупроводниковых диодах была разработана в трудах Кингстона [11], Гоуссика [10], Ледехандлера и Джаколетто [13], Локса и Нейесшандтера [12].

З. А. ИСКЕНДЕР-ЗАДЕ, Г. А. АХУНДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ И ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЕМНИЕВЫХ ДИОДОВ

Как известно, в кремниевых $p-n$ -переходах обратный ток не имеет насыщения и по своей абсолютной величине значительно больше токов, вычисленных в предположении идеальных $p-n$ -переходов, а прямые токи при небольших напряжениях изменяются с напряжением медленнее, чем это следует по теории Шокли [16].

Дальнейшая разработка теории $p-n$ -переходов, проведенная Са, Нойсом и Шокли [14], а также Рашбой и Толпыго [3], показала, что эти отступления от теории идеального $p-n$ -перехода обусловлены генерационно-рекомбинационными процессами носителей зарядов в слое объемного заряда через рекомбинационные центры.

Таковыми рекомбинационными центрами могут служить неконтролируемые примеси, остающиеся в монокристаллах во время их получения и очистки, термоцентры, создающиеся в кристалле, а также примеси, вводимые при последующих обработках его. Особенно большое количество дефектов в кристаллической решетке создается во время процесса изготовления приборов. Этим и объясняется актуальность изучения рекомбинационных процессов, выявления природы рекомбинационных центров и влияния их на свойства изготавливаемых приборов с $p-n$ -переходами.

Данная работа посвящена изучению рекомбинации носителей в базе отечественных плоскостных кремниевых диодов, изготовленных по известной технологии, выяснению влияния ее на характеристики диодов.

Для этой цели проводилось исследование времени жизни выпрямляющих и емкостных свойств диодов при различных температурах.

Чтобы иметь возможность непосредственно измерять время жизни неравновесных носителей в базе диодов был использован метод переходных характеристик. Этот метод позволяет измерять также коэффициент инжекции исследованных диодов. Вольтамперные характеристики диодов снимались на постоянном токе. Емкость измерялась мостовым методом на звуковых частотах при различных температурах и обратных смещениях.

Теория переходных процессов в полупроводниковых диодах была разработана в трудах Кингстона [11], Гоуссика [10], Ледехандлера и Джаколетто [13], Локса и Нейесшандтера [12].

Методика и результаты измерения времени жизни

Измерение времени жизни неравновесных носителей тока по переходным характеристикам $p-n$ -перехода основано на следующем. При включении диода в прямом направлении в базу диода из эмиттера инжектируются неравновесные неосновные носители. Если теперь скачком переключить диод из прямого направления на обратное, то в течение некоторого времени величина обратного тока будет велика (одного порядка с прямым током) и постоянна, а затем начнет быстро падать, достигая своего стационарного значения, характерного для данного $U_{обр}$. Теоретическое рассмотрение этого вопроса [11, 12] приводит к следующей зависимости времени жизни носителей от времени, в течение которого значение обратного тока остается постоянным:

$$\operatorname{erf} \sqrt{\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{1 + I_{пр}/I_{обр}} \quad (1)$$

t — время постоянного значения $I_{обр}$,
 $I_{пр}$ — ток в прямом направлении,
 $I_{обр}$ — ток в обратном направлении,
 τ — эффективное время жизни носителей в базе диода.

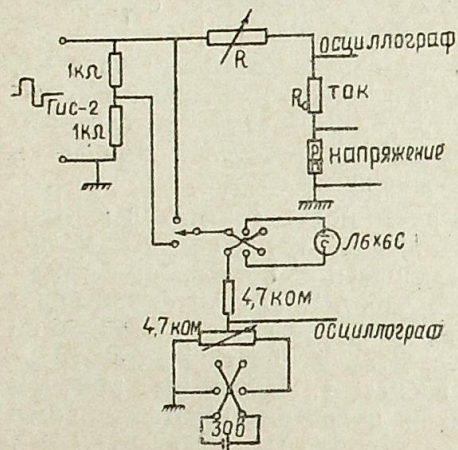


Рис. 1. Электрическая схема измерения τ методом Локса-Нейстадтера.

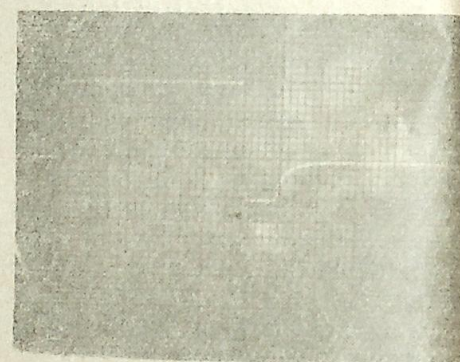


Рис. 2. Осциллограмма токов, наблюдаемая при использовании метода Локса.

На рис. 1 представлена электрическая схема измерения τ . На $p-n$ -переход от генератора прямоугольных импульсов (рис. 2) подаются последовательно положительные и отрицательные импульсы. Длительность положительного импульса выбирается такой, чтобы был обеспечен стационарный режим. Отрицательный импульс включается с задержкой, равной длительности положительного импульса. Величина тока через $p-n$ -переход измеряется с помощью осциллографа 25-И, а длительность „полочки“ постоянного значения $I_{обр}$ с помощью ИО-4. Рабочий ток устанавливается при помощи сопротивления R , включенного последовательно с образцом.

Для того, чтобы иметь возможность измерять зависимость τ от уровня инжекции, согласно [3] измерения τ проводились при отношении $\frac{I_{обр}}{I_{пр}} = 0,5$. Тогда $\tau = \frac{t}{0,47}$.

Чтобы отношение токов выдерживалось с большой точностью, в схеме использован ограничитель.

Для наглядности на рис. 2 приведена осциллограмма тока.

Измерение τ проводилось также по методу спада посленинжекционной э.д.с. на $p-n$ -переходе [13]. Осциллограмма напряжения на $p-n$ -переходе, наблюдаемого при использовании этого метода, приведена на рис. 3. По наклону прямолинейного спада находим:

$$V = V_0 - \frac{kT}{q} \frac{t}{\tau_p}$$

$$\tau_p = \frac{kT}{q} \frac{\Delta t}{\Delta V}$$

V_0 — напряжение на $p-n$ -переходе непосредственно после устранения прямого импульса.

V — напряжение на $p-n$ -переходе в момент времени t ,

k — постоянная Больцмана,

q — заряд электрона,

T — абсолютная температура.

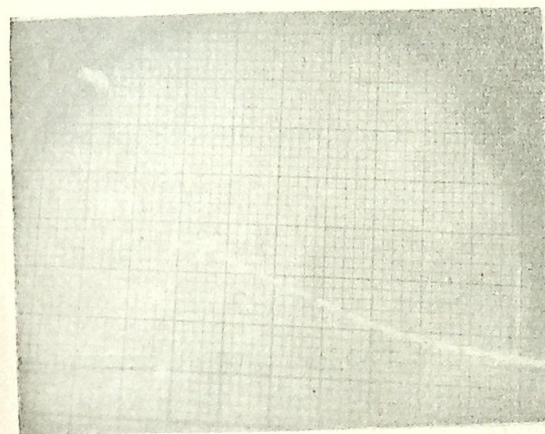


Рис. 3. Осциллограмма посленинжекционного напряжения на $p-n$ -переходе.

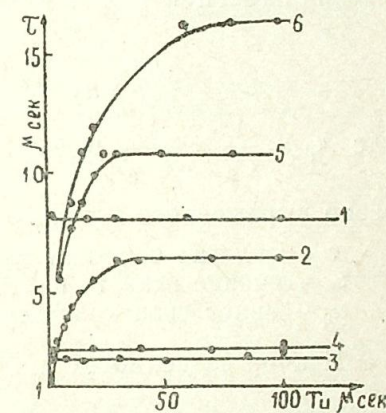


Рис. 4. Зависимость измеренного времени инжектирующего импульса.

При использовании обоих этих методов проверялась зависимость измеренного времени жизни от длительности инжектирующего импульса, т. е. импульса в прямом направлении. Наблюдаемые зависимости представлены на рис. 4. При использовании метода Ледехандлера (кривые 1, 4) τ не зависит от T_u . При измерении методом Локса (кривые 2, 3, 5, 6) наблюдается зависимость τ от длительности импульса, причем имеет место область постоянства τ . Это можно объяснить тем, что теоретический расчет переходного процесса производился с учетом таких длительностей прямого тока, чтобы в положительный период приложенного напряжения имело место установившееся распределение неосновных носителей у $p-n$ -перехода.

Как показывает теоретическое рассмотрение Носовым [5] вопроса о переходных процессах в полупроводниковых диодах, импульсные

параметры достигают своих установившихся значений при длительности импульса прямого тока:

$$T_u > 0,8 \tau_p,$$

Все исследованные диоды были изготовлены по известной технологии. Исходным материалом служил n -Si с сопротивлением около 20 ом·см. p - n -переход создавался сплавлением Si и алюминиевой фольги с последующей термодиффузией. Сплавление с Al производилось в вакууме 10^{-4} мм рт. ст. при температуре 850° C в течение 30 мин. Термодиффузия производилась при температуре 1160° C в течение 10 час. Невыпрямляющим омическим контактом служил никель, нанесенный электролитически в восстановительной среде.

Размеры используемых переходов $0,4 \times 0,4$ см, толщина базы около 300 μ .

В полупроводниковых материалах, таких как Si, имеющих широкую запрещенную зону, рекомбинация носителей происходит через рекомбинационные центры. Теория такой рекомбинации была разработана в работах Шокли—Рида [9], Холла [8], Адировича и Гуро [10].

Для времени жизни неравновесных дырок в материале n -типа при предположении, что концентрация основных носителей много больше концентрации центров рекомбинации и при предположении малости уровня инжекции теория приводит к следующему:

$$\tau = \frac{\tau_{po}}{n_0} \frac{2}{h^3} (2\pi m_n k)^{3/2} T^{3/2} e^{-\frac{\Delta E_1}{kT}}, \quad (4)$$

где $\tau_{po} = \frac{1}{C_p} = \frac{1}{v \sigma_p}$ время жизни дырок, инжектированных в образцы

резко выраженного n -типа.

v —тепловая скорость дырок,

σ_p —сечение захвата центром дырки,

n_0 —равновесная концентрация основных носителей.

Наклон зависимости $\ln \tau = f\left(\frac{1}{T}\right)$ соответствует энергии активации ловушек.

При низких температурах до тех пор, пока уровень Ферми будет на несколько kT выше уровня центров рекомбинации, время жизни постоянно и равно τ_{po} .

Таким образом, при наличии центров рекомбинации одного типа в температурной зависимости имеется два участка:

1—низкотемпературный участок, область постоянного значения τ ,
2—область экспоненциального роста τ с температурой. Эта область продолжается вплоть до наступления собственной проводимости, далее τ убывает с температурой [9]. В качестве примера на рис. 5 представлена температурная зависимость времени жизни для трех типичных диодов. Все исследованные диоды по характеру этой зависимости можно было разбить на 3 группы. Для всех них энергия активации, соответствующая самому крутому наклону, равна $0,24 \div 0,04$ эв. Для некоторых диодов наблюдается участок $\ln \tau = f\left(\frac{1}{T}\right)$, имеющий меньший наклон. Энергия, соответствующая этому менее крутому участку, ме-

няется от образца к образцу в пределах 0,07—0,09 эв (рис. 5, кривая 2, 3). Наконец, при низких температурах наблюдается область плато в зависимости $\ln \tau = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (кривая 1, 3).

Появление области с меньшим наклоном, вероятно, связано с наличием второго рекомбинационного центра глубиной 0,09 эв.

Как показано в [6], для германиевых диодов влияние мелких центров рекомбинации будет затухать при возрастании концентрации глубоких центров. Возможно, этим можно объяснить отсутствие области с мелким наклоном у ряда исследованных диодов.

Зависимость τ от уровня инжекции согласно Шовли—Риду:

$$\tau = \tau_0 \frac{1 + ap}{1 + cp}, \quad (5)$$

где τ —время жизни при произвольном уровне инжекции,

τ_0 —время жизни при малом уровне инжекции,

p —избыточная концентрация дырок.

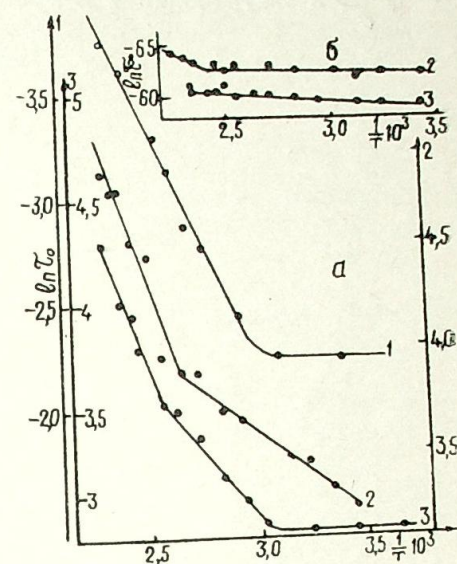


Рис. 5. Температурная зависимость τ_0 и τ_{∞} исследованных диодов.

$$a = \frac{\tau_{po} + \tau_{no}}{\tau_{po}(n_0 + n_1) \tau_{no}(p_0 + p_1)}, \quad (5a)$$

$$c = \frac{1}{n_0 + p_0}, \quad (6a)$$

τ_{po} , τ_{no} —время жизни дырок и электронов, соответственно в материале с резко выраженным n - и p -типом проводимости, характеризует эффективное сечение захвата центром носителей;

n_1 , p_1 —вспомогательные числа, характеризующие концентрации электронов и дырок, когда квазиуровень Ферми совпадает с уровнем центров рекомбинации.

Согласно (2) время жизни монотонно изменяется с уровнем инжекции.

При $\Delta p \rightarrow \infty$ $\tau_{\infty} = \tau_{po} + \tau_{no}$.

Таким образом, время жизни при очень большом уровне инжекции целиком определяется эффективным сечением захвата рекомбинационных центров.

На рис. 6 представлена зависимость τ от величины инжектирующего тока в прямом направлении $I_{пр}$. С увеличением прямого тока (уровня инжекции) время жизни падает $\left(\frac{a}{c} < 1\right)$.

Используя расчетную формулу [4], связывающую уровень инжекции $\frac{p}{n_0 + p_0}$ с током в прямом направлении, строим зависимость $\tau(1 +$

$\frac{p}{n_0 + p_0} = f\left(\frac{p}{n_0 + p_0}\right)$. В согласии с теорией Шокли—Рида [9] такая зависимость дает прямую линию (рис. 7), наклон которой равен $\tau_\infty = \frac{a}{c}$, а экстраполяция к нулевому уровню инжекции дает τ_0 .

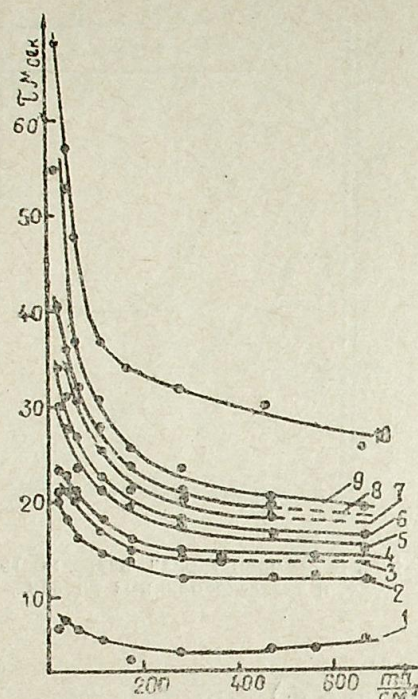


Рис. 6. Зависимость τ от тока в прямом направлении при различных температурах: 1—75° C; 2—3° C; 3—+10° C; 4—+27° C; 5—+56° C; 6—+71° C; 7—89° C; 8—120° C; 9—137° C; 10—157° C.

В табл. 1 представлены пересчитанные, вычисленные из рис. 7 и измеренные τ_0 и τ_∞ для двух диодов.

Таблица 1

Образцы	Время жизни в	Вычисленное в мксек	Измеренное в мксек
Д215	τ_0	33	23,4
Д215А		47	32
Д215	τ_∞	12	13,8
Д215А		24	24,5

Таким образом, можно определить температурную зависимость как τ_0 , так и τ_∞ . На рис. 5 б представлена $\tau_\infty = f\left(\frac{1}{T}\right)$. Можно ска-

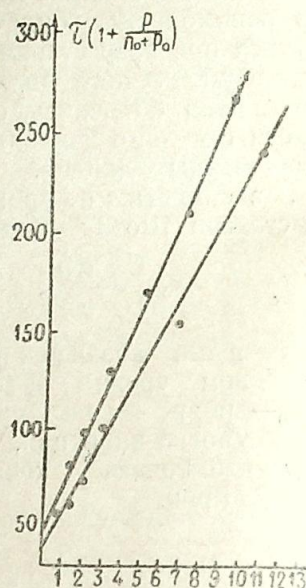


Рис. 7. Зависимость времени жизни неосновных носителей от уровня инжекции.

зать, что для всех исследованных диодов τ_∞ не зависит от температуры. Таким образом, эффективное сечение захвата носителей центром рекомбинации от температуры не зависит.

Вольтамперные характеристики образцов

Известно, что вольтамперная характеристика p — n -перехода с учетом рекомбинации в слое объемного заряда [14] выражается в виде

$$I = I_0^* \left(e^{\frac{qU}{\beta kT}} - 1 \right), \quad (17)$$

где $1 \leq \beta \leq 2$ —предэкспоненциальный член I_0^* не имеет насыщения в обратном направлении как I_0 в [15] и состоит из двух компонентов:

$$I_0^* = I_{0D} + I_{0rg},$$

I_{0D} —диффузионная компонента, обусловленная генерацией носителей в толще полупроводника и имеющая насыщение при больших значениях обратного напряжения;

I_{0rg} —рекомбинационно-генерационная компонента, обусловленная генерационными процессами в слое объемного заряда. Так как толщина слоя объемного заряда зависит от обратного смещения, то этот ток не имеет насыщения.

Са, Нойс и Шокли [2] в предположении постоянства скорости рекомбинации G во всей области объемного заряда и независимости ее от приложенного напряжения получили:

$$I_{0rg} = q S W G, \quad (8)$$

где S —площадь диода, W —ширина слоя объемного заряда, G —скорость рекомбинации в слое объемного заряда.

Закон изменения I_{0rg} с приложенным напряжением определяется зависимостью $W = f(U)$, которая получается из емкостных измерений $C_{зар} \sim \frac{A}{U^{1/2}}$

$$I_{0rg} \sim q S W G^{1/2}. \quad (9)$$

Для данного из 15 изученных диодов в качестве примера на рис. 8 дается вольтамперная характеристика в обратном направлении в двойном логарифмическом масштабе. Как видно из рисунка, в зависимости от приложенного напряжения характеристика распадается на 2 участка:

I участок $U_{обр} \leq 50$ мв,

II участок $50 \text{ мв} \leq U_{обр} \leq 80$ в.

Величина наклона I участка для всех диодов находится в пределах 0,8—1,2.

Это дает в среднем $I_{обр} \sim U_{обр}$.

Наклон II-го участка для всех исследованных диодов находился в области $2 \leq \gamma \leq 3$. Причем для одного и того же диода величина этого наклона меняется с изменением температуры.

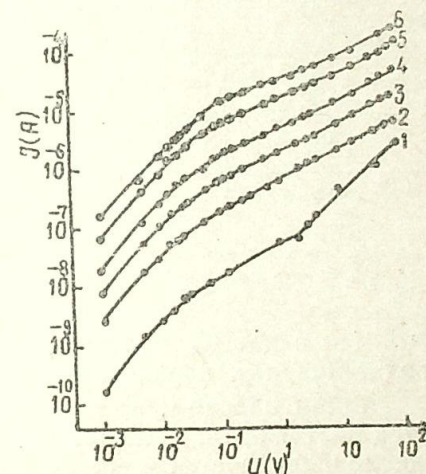


Рис. 8. Обратная вольтамперная характеристика в двойном логарифмическом масштабе: 1—17° C; 2—60° C; 3—80° C; 4—100° C; 5—120° C; 6—140° C.

Согласно (8) и (9) произведение емкости перехода и тока генерации в слое объемного заряда при больших обратных смещениях есть величина постоянная и не зависит от вида распределения электростатического потенциала внутри перехода.

В табл. 2 приведены показатели степени напряжения, полученные из вольтамперных характеристик и емкостных измерений при различных температурах для четырех типичных диодов.

Таблица 2

Т°, С	γ	I	II	III	IV
17	γ_b γ_c	1,6 2,85	1,5 2,44	2 3	1,8 2,86
40	γ_b γ_c	1,8 2,64	1,8 2,4	2 2,7	1,9 2,76
60	γ_b γ_c	1,7 2,5	2 2,62	2 2,69	2,5 3
80	γ_b γ_c	1,5 2,47	1,9 2,45	2 2,54	2,21 2,22
100 90	γ_b γ_c	2 2,1	2,2 2	2,5 2,1	2,2 1,83
120	γ_b	2,2	2,4	2,3	2,4
140	γ_b	2,6	2,5	2,2	2,8

$1/\gamma_c$ —показатель степени U , полученный из емкостных измерений.

$1/\gamma_b$ —показатель степени U , полученный из вольтамперных характеристик.

Как видно из таблицы, показатели степени U , полученные из вольтамперных характеристик и из емкостных измерений, отличаются.

Таким образом, произведение емкости на ток генерации не остается постоянным. Следовательно, остается предположить, что с напряжением изменяется один из параметров, характеризующих рекомбинационный центр.

В слое объемного заряда при больших $U_{обр}$ почти все подвижные носители уходят в поле и $p=n=0$, так что

$$G = \frac{n_i^2}{\tau_{po} + n_1 + \tau_{no} p_1} \quad (10)$$

Как указано выше, в теории Са [14] принято, что G не зависит от приложенного напряжения. Однако τ_{no} и τ_{po} , входящие в G могут зависеть от $U_{обр}$. Это может привести к изменению произведения

$I_{обр} \cdot C_{зар}$ с ростом обратного напряжения $\frac{\gamma_c - \gamma_b}{\gamma_b \cdot \gamma_c}$;

$$I_{обр} \cdot C_{зар} \sim U_{обр}$$

В табл. 3 представлены показатели степени G .

Из таблицы видно, что при больших обратных смещениях скорость рекомбинации в слое объемного заряда не остается постоянной. На последнее имеется указание и в работе Сандифорда [15].

Таблица 3

Диоды	17°C	40°C	60°C	80°C
I	0,27	0,175	0,19	0,25
II	0,26	0,14	0,12	0,12
III	0,17	0,13	0,13	0,106
IV	0,2	0,16	0,68	0,26

Для $I_{орг}$ согласно (8) и (11) получаем, что

$$I_{орг} = q W \frac{n_i^2}{\tau_{po} n_1 + \tau_{no} + p_1} = q W \frac{n_1 p_1}{\tau_{po} n_1 + \tau_{no} p_1}$$

Это приводит к тому, что

$$I_{орг} \sim n_1 \sim e^{-\frac{\Delta E_1}{kT}}$$

Са показал, что генерационно-рекомбинационные центры наиболее эффективны, если они расположены близко к середине запрещенной зоны, когда время жизни всех носителей одинаково. Поэтому, если мы имеем центры, находящиеся в различном энергетическом положении в запрещенной зоне, то для тока существенны только те центры, которые лежат наиболее близко к середине запрещенной зоны.

Итак, температурная зависимость $I_{обр}$ позволяет определить положение самого глубокого уровня рекомбинации в запрещенной зоне.

На рис. 9 и 10 представлены вольтамперные характеристики в прямом и обратном направлении полулогарифмическом масштабе при различных температурах.

Экстраполируя прямолинейные участки кривых $\ln I_{пр} = f(U)$ к нулю напряжений, находим предэкспоненциальный множитель $I_{опр}$, а экстраполяция прямолинейных участков $\ln I_{обр} = f(U)$ к нулю напряжения дает $I_{ообр}$. На рис. 11 представлены температурные зависимости $I_{опр}$ и $I_{ообр}$. Все точки хорошо ложатся на прямую, наклон которых соответствует энергии активации $\Delta E = 0,57 \pm 0,04$ эв, что совпадает с полушириной запрещенной зоны кремния.

Кроме температурной зависимости аппроксимированных значений тока были также построены температурные зависимости обратного тока при различных смещающих напряжениях.

Одна из таких зависимостей представлена на рис. 12.

Значение энергии активации, полученное при различных $U_{обр}$ и усредненное по всем исследованным диодам, представлено в табл. 4.

Согласно (7) ток в прямом направлении с напряжением растет медленнее, чем в случае идеальных $p-n$ -переходов. Для определения β строим зависимость $\ln I_{пр} = f(V)$, одна из которых представлена на рис. 9. Значения β для 8 диодов при трех температурах приведены в табл. 5.

Для всех исследованных диодов в интервале температур $-75 \div +140^\circ\text{C}$ величина β лежит в пределах

$$1 \leq \beta \leq 2.$$

Емкостные измерения позволяют не только уточнить зависимость $I_{обр}$ от $U_{обр}$ и выяснить наличие или отсутствие зависимости τ_{no} и τ_{po} от приложенного напряжения, то также получить сведения о концент-

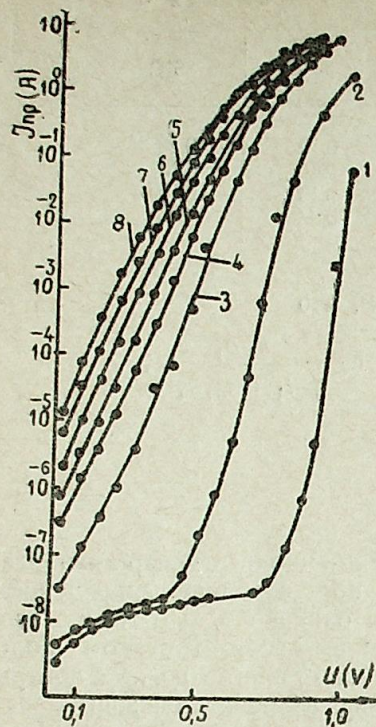


Рис. 9. Прямая вольтамперная характеристика в полулогарифмическом масштабе: 1—19 °С; 2—75° С; 3—17° С; 4—60° С; 5—80° С; 6—100° С; 7—120° С; 8—140° С.

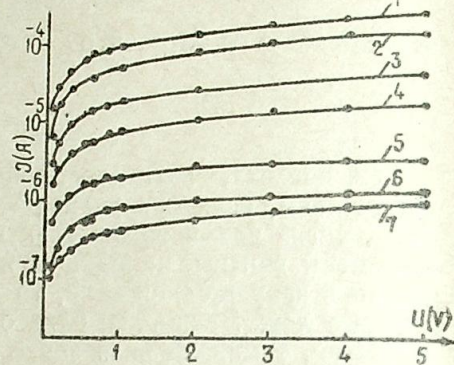


Рис. 10. Обратная вольтамперная характеристика в полулогарифмическом масштабе: 1—140° С; 2—120° С; 3—100° С; 4—80° С; 5—60° С; 6—40° С; 7—17° С.

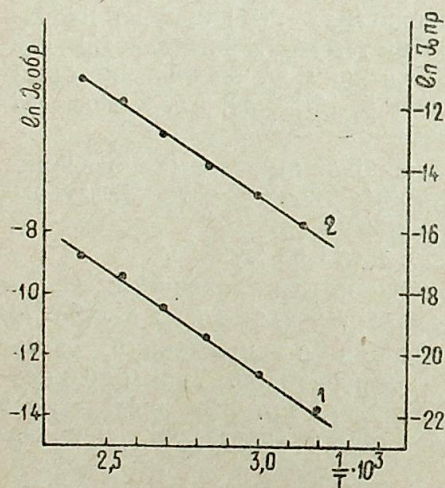


Рис. 11. Температурная зависимость J_{np} , полученных экстраполяцией к нулю напряжения в обратном (кривая 1) и прямом (кривая 2) направлениях.

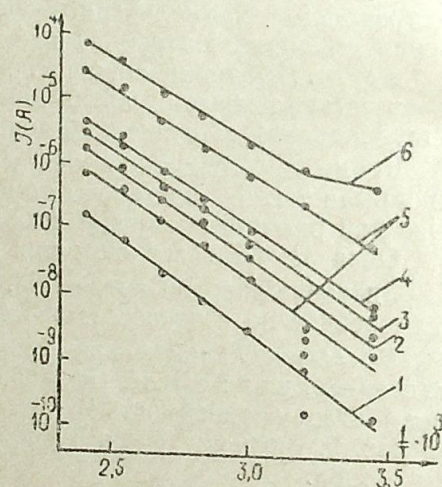


Рис. 12. Температурная зависимость обратного тока при различных смещающих напряжениях: 1—1 мВ, 2—10 мВ, 3—20 мВ, 4—30 мВ, 5—1 в, 6—10 в.

Таблица 4

$U_{обр.} (мВ)$	1	5	10	20	30	10^3	10^4
$\Delta E (эВ)$	$0,52 \pm 0,06$	$0,51 \pm 0,05$	$0,51 \pm 0,05$	$0,53 \pm 0,05$	$0,53 \pm 0,05$	$0,53 \pm 0,05$	$0,51 \pm 0,05$

Таблица 5

$T, ^\circ C$	1	2	3	4	5	6	7	8	Среднее значение
-75	1,5	1,7	1,4	1,5	1,3	1,3	2	1,6	$1,6 \pm 0,25$
+17	1,2	1,5	1,3	1,2	1,3	1,4	1,7	1,3	$1,4 \pm 0,25$
+140	1	1,4	1,2	1,1	1,3	1,3	1,2	1,1	$1,2 \pm 0,1$

рации и рекомбинационных центров, знание которой позволит оценить эффективное сечение захвата носителей рекомбинационным центром.

В формулу для генерационной компоненты обратного тока плотности центров рекомбинации непосредственно не входит, однако она содержится в выражении для G , включающем в себя τ_p и τ_n .

По теории рекомбинации Шокли—Рида

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{N_t}{N_c} \int_{E_c}^{\infty} e^{\frac{E_c - E}{kT}} v(E) \sigma N(E) dE,$$

где σ —эффективное сечение захвата центров,

N_c —плотность состояний,

$v(E)$ —плотная скорость электронов, так как рассматриваются электроны только малых скоростей, то она вычисляется согласно классической теории:

$$v(E) = \sqrt{\frac{2(E - E_c)}{m}}.$$

Тогда

$$\tau = \frac{1}{\sigma N_t} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi m}{kT}}. \quad (11)$$

Зная τ и N_t , из измерений переходных характеристик и емкостных измерений можно найти σ .

Известно, что емкость диодов при больших обратных смещениях целиком обусловлена объемным зарядом ионизованных примесей. Как емкость, обусловленная малоподвижными инерционными зарядами, $C_{зар}$ не должна зависеть от частоты. Кроме того, будучи обусловленной ионизованными примесями, распределение которых не зависит от температуры, $C_{зар}$ не должна зависеть и от температуры.

Однако наличие рекомбинационных центров в слое объемного заряда приводит к некоторой зависимости $C_{зар}$ от частоты и температуры [2].

При низких частотах (400 ÷ 800 гц) и при высоких температурах ($t > 30^\circ C$) наблюдается возрастание емкости, обусловленное присутствием центров, способных удерживать с определенной силой электроны и дырки. Теоретический анализ приводит к выражению:

$$\frac{C - C_0}{2} = \frac{2 N_t}{a x_m} \frac{1 - x_1/x_m}{1 + \frac{x_1}{x_m}}, \quad (12)$$

C_0 —экстраполяция от более высоких частот к 220 гц, где $\frac{C-C_0}{C}$ — относительная величина ступеньки на характеристике $C=f(U)$,

$$ax_m = N_d - N_a,$$

$2x_m$ —ширина слоя объемного заряда,

x_1 —сечение, в котором уровень ловушек совпадает с квазиуровнем Ферми,

$$3 \left(\frac{x_1}{x_m} \right) - \left(\frac{x_1}{x_m} \right)^3 = 2 \frac{\psi_1 + U/2}{U_D + U/2}, \quad (13)$$

ψ_1 —расстояние в эв между уровнем центров рекомбинации и средней запрещенной зоны,

$$N_t = \frac{C-C_0}{C} \frac{N_d-N_a}{2} \frac{1+x_1/x_m}{1-x_1/x_m}. \quad (14)$$

Таблица 6

$T, ^\circ C$	17	30	40	50	60	70
U_D, mb	320	280	250	220	200	180
$(N_d-N_a) \times 10^{-13}, cm^3$	4,6	2,3	5	3	3	3,3
$\frac{x_1}{x_m}$	0,12	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22
$\frac{1+x_1/x_m}{1-x_1/x_m}$	1,27	1,32	1,38	1,44	1,5	1,56
$\frac{C-C_0}{C}$	0,06	0,167	0,21	0,18	0,28	0,31
B^*	0,038	0,11	0,145	0,13	0,21	0,24
$N_t \times 10^{-12}, cm^{-3}$	0,16	2,5	7,2	3,9	6,4	6

$$*B = \frac{C-C_0}{C} \frac{1}{2} \frac{1+x_1/x_m}{1-x_1/x_m}$$

Выше, в табл. 6 приведены для одного из исследованных диодов при различных температурах значения всех коэффициентов, входящих в (14). N_d-N_a —концентрация ионизованных примесей, характеризующая плотность объемного заряда ($\rho = q [N_d-N_a]$) и U_D —диффузионное напряжение на $p-n$ -переходе определены из емкостных измерений.

$\frac{x_1}{x_m}$ находим из уравнения (13), принято $U=0, \psi_1=0,6 \text{ эв} - 0,57 \text{ эв} = 0,03 \text{ эв}$.

Концентрация рекомбинационных центров $N_t \approx 4,7 \cdot 10^{12} cm^3$. Приняв $\tau_r \sim 10^{-10} \text{ сек}$, для эффективного сечения захвата σ получаем порядок $\sim 10^{-16} cm^2$, что совпадает с обычно приводимым в литературе значением.

Выводы

1. Температурная зависимость τ приводит к $\Delta E_t 0,24 \text{ эв} \pm 0,04 \text{ эв}$.
2. Зависимость τ от уровня инжекции подчиняется теории Шокли-Рида.
3. τ_∞ не зависит от температуры.
4. Энергия активации, вычисленная из вольтамперной характеристики, равна 0,57 эв.
5. Показатель степени в зависимости $I_{обр}$ от $I_{обр} 2 \leq \gamma \leq 3$.
6. $1 \leq \beta \leq 2$.
7. Скорость генерации G в слое объемного заряда не остается постоянной и зависит от $U_{обр}$.
8. Концентрация центров рекомбинации

$$N_t \sim 4 \cdot 10^{12}$$

$$N_d-N_a \sim 4 \cdot 10^{13}$$

9. Площадь эффективного сечения захвата рекомбинационного центра $\sigma \sim 10^{-16} cm^2$.

Авторы приносят благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву и проф. В. М. Тучкевичу за обсуждение работы, а также И. Г. Аксянову, принимавшему участие в измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адирович Э., Гуро И. Тр. ФИАН, т. VIII, 1956.
2. Ахундов Г. А., Джафарова Э. А. „Изв. АН Азерб. ССР серия физ.-техн. наук“, 1962, № 5.
3. Иглицын М. И., Концевой Ю. А. и Сидоров А. И. ЖТФ, т. 27 вып. 11.
4. Иглицын М. И., Концевой Ю. А., Сидоров А. А. „Радиотехника и электротехника“, 1961, № 3.
5. Носов Ю. Р. „Радиотехника и электроника“, 1960, № 12.
6. Пелл и Роу. I Appl. Phys., 26, № 6, p. 658, 1955.
7. Рашба и Толпыго. Тр. ИФАН УССР, вып. 7, 1956.
8. Холл Р. Н. Phys. Rev., 87, p. 387, 1952; см. перевод сб. „Полупроводниковые электронные приборы“ под ред. Ржанова, 1957.
9. Шокли В., Рид В. Статистика рекомбинации электронов и дырок. Phys. Rev., 87, 835, 1952; см. перевод сб. „Полупроводниковые электронные приборы“ под ред. Ржанова, 1957.
10. Gossick B. R. J. Appl. Phys., 1956, 27, 8, p. 905.
11. Kingston R. H. Proc. IRE, 1954, 42, 5, p. 829.
12. Lax, Neustadter. J. Appl. Phys., 1954, v. 25, № 9, 1148.
13. Lederhandler, Giacoletto. Proc. JRE, 1955, 43, № 4, p. 477.
14. Sah, Shockley, Nojce. Proc. JRE, 1957, p. 1228—1243.
15. Sandiford. J. Appl. Phys., v. 30, № 12, 1959.
16. Shockley W. Bell. Syst. Techn. 1., 28, 435, 1949.

З. Э. Искендерзаде, Г. Э. Ахундов

Силисум диодларынын јашама мүддәти вә волтампер характеристикаларынын тәдгиги

ХҮЛАСЭ

Силисум диодлары базасында гејри-эсас јукдашычыларын јашама мүддәти вә һәмин диодларын волтампер характеристикалары экспериментал өјрәнилмишдир. Јашама мүддәти Шокли-Рид рекомбинасија нәзәријјәсинә табедир. Бу диодларда әкс истигамәтдә кечән чәрәјанын дојмасы мүшәһидә олунмамышдыр; бу исә һәчми јүк областында кенерасија процессләри илә изаһ едилмәлидир.

А. Х. ХАЛИЛОВ, Э. Ю. САЛАЕВ

О РОЛИ ПРИМЕСЕЙ В ОБРАЗОВАНИИ ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА В НЕКОТОРЫХ KCl-ФОСФОРАХ

Для выяснения механизма и кинетики рекомбинационных процессов в кристаллофосфорах необходимо расширить наши знания о роли примесей в образовании центров захвата в кристаллофосфорах, о структуре этих центров захвата, термической и оптической устойчивости отдельных центров захвата и влияние на эти свойства природы и концентрации активирующих и неактивирующих примесей, введенных в решетку кристаллофосфоров.

Указанный вопрос нами изучен по спектрам возбужденного поглощения в видимой и ультрафиолетовой областях в монокристаллических кристаллофосфорах с основной KCl, активированных ионами Ag, Cu, Tl и некоторыми их парными комбинациями.

Нами изучено также влияние на спектры поглощения неактивирующих примесей Ca, Sr, Ba, Cd, температуры возбуждения фосфоров рентгеновскими лучами, облучения их F-светом и нагревания фосфоров после их возбуждения. Результаты экспериментов приведены на рис. 1, 2.

На рис. 1 цифрами 1—6 обозначены соответственно спектральные кривые возбужденного поглощения монокристаллов KCl, KCl+Ag(0,05), KCl+Tl(0,05), KCl+Cu(0,05), KCl+Ag(0,05)+Tl(0,05), KCl+Ag(0,05)+Cu(0,05); на рис. 2—соответственно KCl, KCl+Ag(0,5), KCl+Ag(0,15), KCl+Ag(1,5) KCl+Ag(0,5)+Cd(0,6) и KCl+Ag(0,15)+Pb(1,0).

Буквенные обозначения на этих рисунках: а—кривые возбужденного поглощения в видимой области указанных монокристаллов сразу после их облучения рентгеновскими лучами; б—то же после рентгенизации и облучения кристаллов F-светом; в и г—такие же кривые, что на а и б, но полученные при температуре рентгенизации в 85°С; д—те же кривые, полученные после рентгенизации и нагрева фосфоров до 105°С; е—кривые возбужденного поглощения после облучения фосфоров в области 440 мμ, которую в дальнейшем назовем Е-светом.

На всех кривых поглощения для KCl-фосфоров (рис. 1, 2) наблюдается F-полосы поглощения с $\lambda_m = 560$ мμ. Однако для KCl-фосфоров с примесями Ag, кроме F-полос наблюдаются также полосы возбужденного поглощения с $\lambda_m = 440$ мμ (Е-полоса поглощения).

По величине поглощения в максимуме (K_{max}) F-полос и по их

А. Х. ХАЛИЛОВ, Э. Ю. САЛАЕВ

О РОЛИ ПРИМЕСЕЙ В ОБРАЗОВАНИИ ЦЕНТРОВ ЗАХВАТА В НЕКОТОРЫХ KCl-ФОСФОРАХ

Для выяснения механизма и кинетики рекомбинационных процессов в кристаллофосфорах необходимо расширить наши знания о роли примесей в образовании центров захвата в кристаллофосфорах, о структуре этих центров захвата, термической и оптической устойчивости отдельных центров захвата и влияние на эти свойства природы и концентрации активирующих и неактивирующих примесей, введенных в решетку кристаллофосфоров.

Указанный вопрос нами изучен по спектрам возбужденного поглощения в видимой и ультрафиолетовой областях в монокристаллических кристаллофосфорах с основной KCl, активированных ионами Ag, Cu, Tl и некоторыми их парными комбинациями.

Нами изучено также влияние на спектры поглощения неактивирующих примесей Ca, Sr, Ba, Cd, температуры возбуждения фосфоров рентгеновскими лучами, облучения их F-светом и нагревания фосфоров после их возбуждения. Результаты экспериментов приведены на рис. 1, 2.

На рис. 1 цифрами 1—6 обозначены соответственно спектральные кривые возбужденного поглощения монокристаллов KCl, KCl+Ag(0,05), KCl+Tl(0,05), KCl+Cu(0,05), KCl+Ag(0,05)+Tl(0,05), KCl+Ag(0,05)+Cu(0,05); на рис. 2—соответственно KCl, KCl+Ag(0,5), KCl+Ag(0,15), KCl+Ag(1,5), KCl+Ag(0,5)+Cd(0,6) и KCl+Ag(0,15)+Pb(1,0).

Буквенные обозначения на этих рисунках: *a*—кривые возбужденного поглощения в видимой области указанных монокристаллов сразу после их облучения рентгеновскими лучами; *б*—то же после рентгенизации и облучения кристаллов F-светом; *в* и *г*—такие же кривые, что на *a* и *б*, но полученные при температуре рентгенизации в 85°С; *д*—те же кривые, полученные после рентгенизации и нагрева фосфоров до 105°С; *е*—кривые возбужденного поглощения после облучения фосфоров в области 440 мμ, которую в дальнейшем назовем E-светом.

На всех кривых поглощения для KCl-фосфоров (рис. 1, 2) наблюдается F-полосы поглощения с $\lambda_m = 560$ мμ. Однако для KCl-фосфоров с примесями Ag, кроме F-полос наблюдаются также полосы возбужденного поглощения с $\lambda_m = 440$ мμ (E-полоса поглощения).

По величине поглощения в максимуме (K_{max}) F-полос и по их

полуширине ($H_{\max}$), пользуясь формулой $N_F = A \cdot K_{\max} \cdot H_{\max}$, где A — постоянный множитель, равный $1,1 \cdot 10^{16} \text{ см}^2 \text{ эв}^{-1}$ для KCl, можно определить число F -центров захвата в указанных фосфорах и влияние на это различных факторов.

Как было показано нами [4—6] и как видно из сравнения кривых 1—6 на рис. 1а, наличие в решетке KCl

ионов Tl, Cu до 1 моль % благоприятствует процессу образования F -центров, ибо при стандартизации всех условий получения кривых на рис. 1,2 для всех KCl-фосфоров с указанными примесями величина возбужденного поглощения в F -полосах больше, чем у чистых монокристаллов KCl.

Однако введение ионов Ag в решетку KCl более чем 0,001 моль % тормозит образование F -центров.

Как видно из наших данных, ускоряющее влияние указанных ионов на образование F -центров при одинаковой их концентрации растет в ряду Ag, Tl, Cu.

Чем же объяснить эти экспериментальные факты?

В литературе этот вопрос обсуждался до нас в работах И. А. Парфиановича [3], М. Л. Каца [1], Л. М. Шамовского [7], Ч. Б. Лушика [2] и других авторов [4, 5, 8—11]. Ч. Б. Лушик [2], Этцель и Шульман установили [9], что ионы Ca^{++} повышают окрашиваемость монокристаллов KCl и NaCl, т. е. ускоряют процесс образования F -центров в KCl и NaCl.

М. Л. Кац [1] и Л. М. Шамовский [7] установили, что примеси Ca^{++} в монокристаллах KCl и NaCl создают более глубокие ловушки и поэтому уменьшают их окрашиваемость.

И. А. Парфианович установил, что примеси Cu и Ni в монокристаллах NaCl до определенной концентрации повышают, а затем понижают окрашиваемость кристаллов NaCl.

Наши опыты с большим количеством KCl-фосфоров, содержащих примеси с различными ионными радиусами и валентностями, позволили нам выяснить многие детали влияния примесей на скорость образования F -центров или окрашиваемость монокристаллов KCl.

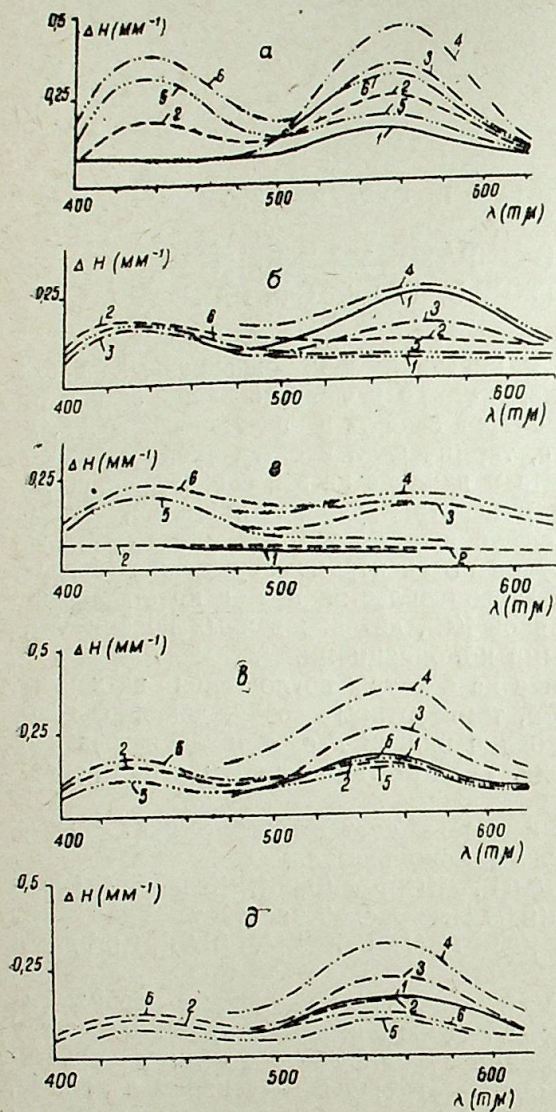


Рис. 1.

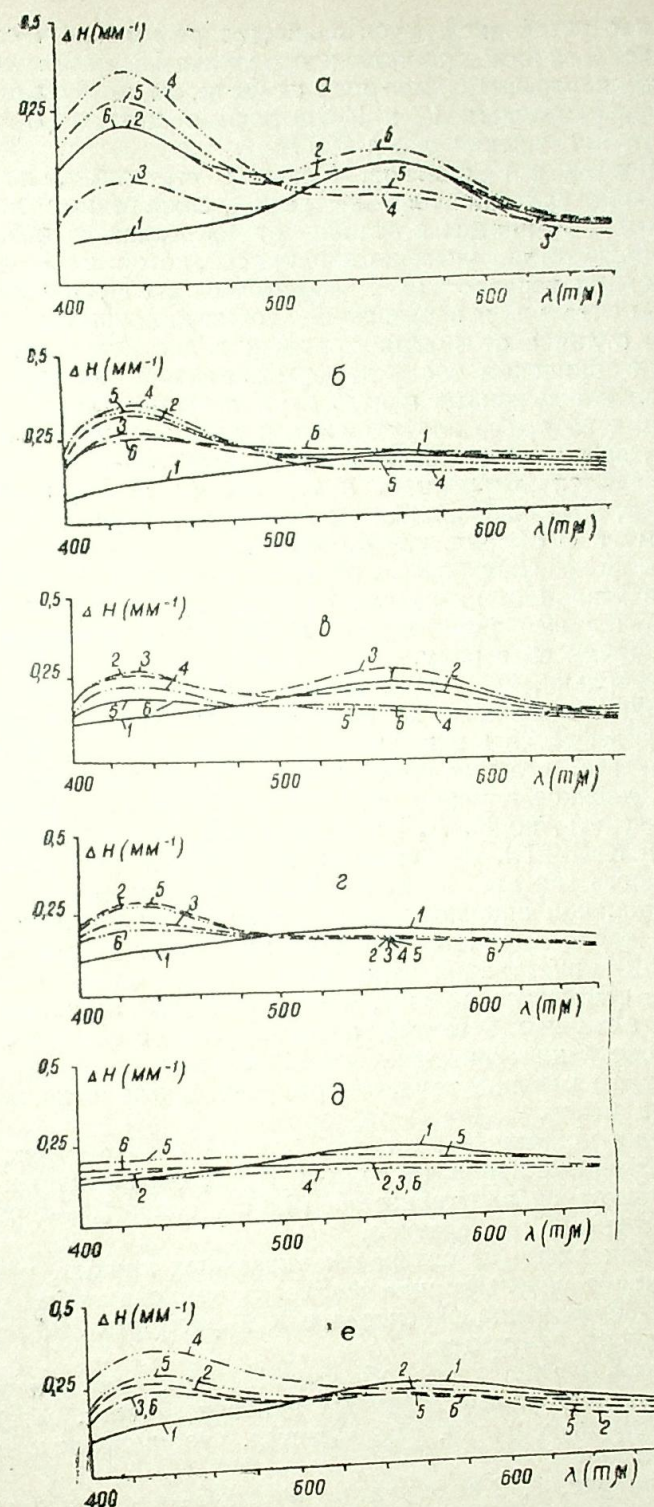


Рис. 2.

Согласно установившемуся в литературе мнению число F -центров в рентгенизированных кристаллах определяется числом анионных вакансий и концентрацией дырочных центров, из которых при комнатной температуре устойчивы V_2 и V_3 дырочные центры (λ_m полосы возбужденного поглощения равна 226 $m\mu$).

Из этих V_2 и V_3 -центров, имеющих структуру, по Зейцу [11], соответственно как одна или две дырки, захваченные парой катисных вакансий, V_3 -центры в отличие от V_2 обладают избыточным зарядом. В присутствии указанных примесей, которые обычно в фосфоре распределяются неравномерно, наблюдается ассоциация этих примесей с V_2 и V_3 -центрами и образование новых дырочных центров захвата. Поэтому в отличие от чистых монокристаллов KCl в KCl-фосфорах с различными примесями число дырочных центров захвата значительно возрастает. Эти дырочные центры служат местами локализации дырок, возникающих во время возбуждения фосфоров рентгеновскими лучами, при котором всегда возникает пара электрон—дырка. Если дырки не захватываются дырочными центрами, то они рекомбинируют с электронами, локализованными на F -центрах, и уничтожают их.

Поэтому в фосфорах, где больше дырочных центров захвата, чем в чистых монокристаллах KCl, образуется больше F -центров.

С приведенной точки зрения легко объясняется рост ускоряющего влияния на процесс образования F -центров в монокристаллах KCl указанных примесей в ряду.

Действительно, ионы этих примесей отличаются от ионов основной решетки своими ионными радиусами, за счет чего увеличивается число микродефектов в решетке KCl и, следовательно, число дырочных центров захвата, которые обуславливают возрастание числа F -центров.

Далее, двоякое влияние ионов Ag и Cu на образование F -центров можно объяснить, по И. А. Парфиановичу, исследовавшему фосфоры NaCl+Cu и NaCl+Ni, следующим: при малых концентрациях Ag и Cu вероятность захвата электронов на активаторных уровнях захвата меньше, чем анионных вакансиях, поэтому активаторы Ag и Cu, увеличивая число дырочных центров, повышают число F -центров; но при большой концентрации вероятность захвата на активаторных центрах захвата становится больше, чем на анионных вакансиях и большее количество анионных вакансий ассоциируется с ионами активаторов, поэтому число F -центров резко уменьшается.

Рассмотрим влияние температуры рентгенизации на процесс образования F -центров.

Сравнение кривых 1—6 на рис. 1, а и 1, б показывает, что в присутствии указанных ионов число F -центров, образованных при повышенной температуре рентгенизации (80°С), почти 1,5—2 раза меньше, чем при комнатной температуре.

Далее, как видно из сравнения указанных кривых, при повышенной температуре рентгенизации фосфоров тормозящее влияние ионов Ag и Cu на образование F -центров в KCl-фосфорах наблюдается при еще меньшей концентрации.

Эти факты, по-видимому, объясняются тем, что при повышенной температуре стабильность дырочных центров захвата, образованных с участием примесных ионов, уменьшается, что приводит к уменьшению числа F -центров.

Далее, на рис. 1, 2 содержатся интересные результаты об оптической устойчивости F -центров захвата в KCl-фосфорах.

Действительно, как видно из сравнения кривых 1—6 на рис. 1, а, б и 2, а, б, наличие в решетках KCl-ионов Ag, Cu и их парных комбинаций уменьшает оптическую устойчивость F -центров, т. е. число

распадающихся F -центров от одинаковой дозы F -облучения в присутствии этих ионов становится значительно большим, чем у чистых KCl.

Влияние указанных примесей на оптическую устойчивость F -центров можно объяснить теми же соображениями, что были высказаны для объяснения образования F -центров.

Из сравнения кривых 1—6 на рис. 1, а и 2, а видно также, что ионы Cu, Tl, Cd ускоряют процесс образования не только F -центров, но и E -центров, обусловленных наличием в решетке KCl-ионов Ag.

Кроме того, если при комнатной температуре рентгенизации KCl+Ag фосфоров число E -центров резко растет с ростом концентрации ионов Ag, то при повышенной температуре (+80°С) рентгенизация этого не наблюдается, т. е. с ростом концентрации Ag от 0,05 до 1,5% число F -центров не только не растет, а даже несколько уменьшается.

Нами были изучены спектры возбужденного поглощения рентгенизированных и аддитивно окрашенных KCl+Ag фосфоров, в которые при выращивании из расплава были добавлены в отдельности ионы Ca, Sr, Ba, Cd и Zn. Сравнение этих спектров в интервале от 220 до 500 $m\mu$ для KCl+Ag фосфора и такого же фосфора с примесями Ca, Sr, Ba, Zn, Cd показало, что указанные ионы сильно влияют на распределение электронов и дырок по центрам захвата KCl+Ag фосфора.

В спектрах возбужденного поглощения KCl+Ag с примесями Ca, Sr, Ba, Zn, Cd наблюдается очень сильное перераспределение интенсивности полос поглощения. В отличие от KCl+Ag(0,5)+Zn(0,6), KCl+Ag(0,5)+Cd(0,6) фосфоров в фосфорах KCl+Ag(0,5)+Ca(0,6), KCl+Ag(0,5)+Sr(0,6), KCl+Ag(0,5)+Ba(0,6) после их рентгенизации интенсивность всех полос возбужденного поглощения KCl+Ag(0,5) сильно растет и возникает интенсивная полоса поглощения с $\lambda_m = 264 m\mu$, которая несколько раз усиливается после аддитивного окрашивания этих фосфоров. Возрастание интенсивности полосы 264 $m\mu$ после F -облучения и после аддитивного окрашивания этих фосфоров указывает на электронную природу этой полосы.

Сравнение спектров возбужденного поглощения рентгенизированных и аддитивно окрашенных KCl+Ag(0,5) с примесями Ca, Sr, Ba, Zn и KCl+Ag(0,5) без этих примесей показывает, что если полоса поглощения с $\lambda = 292 m\mu$ является доминирующей в спектрах возбужденного поглощения рентгенизированных фосфоров, то в спектрах аддитивно окрашенных фосфоров, особенно у KCl+Ag+Sr фосфора, наблюдается значительное ослабление интенсивности этой полосы.

В спектре KCl+Ag+Ba с заметной интенсивностью наблюдаются полосы 238, 245 $m\mu$.

Сравнение спектров возбужденного поглощения до и после F -облучения этих фосфоров указывает на электронный характер этих полос поглощения. Отсутствие полосы 348 $m\mu$, обусловленной поглощением A' -центрах захвата в спектрах возбужденного поглощения аддитивно окрашенных KCl+Ag, KCl+Ag, Ca, KCl+Ag, Sr и KCl+Ag, Ba фосфоров, подтверждает дырочную природу этой полосы поглощения.

Таким образом, экспериментальные результаты показывают, что распределение электронов по уровням захвата основного вещества и другие свойства этих центров сильно зависят от наличия в решетке монокристаллов активирующих и неактивирующих примесных ионов.

При этом существенную роль играют условия, в которых примесные ионы взаимодействуют с тепловыми микродефектами основной решетки фосфора. Глубокое исследование этого вопроса необходимо для выявления возможностей регулирования и управления оптических и других свойств щелочно-галогидных кристаллофосфоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац М. Л. „ДАН СССР“, 1952, 85, 757.
2. Лушик Ч. Б. Труды ИФА АН ЭССР, № 3, 1925.
3. Парфианович И. А. „Оптика и спектроскопия“, 1958, 4, 1; 4, 5; 5, 5 1959, 6, 2; 7, 4; 1961, 10, 5.
4. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „Изв. АН Азерб. ССР“, № 958, № 5, 6; 1959, № 6.
5. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. „ДАН Азерб. ССР“, 1959, № 1.
6. Халилов А. Х., Салаев Э. Ю., Мамедов А. П. Материалы VIII все-союзного совещания по люминесценции. Тарту, 1959.
7. Шамовский Л. М. „Оптика и спектроскопия“, 1956, 1, 407.
8. Etzel H. W. Phys. Rev., 1952, 87, 906.
9. Etzel H. W., Schulman J. H. J. Chem. Phys., 1954, 22, 1549.
10. Schulman J. H. J. Chem. Phys., 1953, 57, 13.
11. Seitz F. Rev. Mod. Phys., 1959, 16, 7.

Э. Х. Халилов, Е. Ю. Салаев

КСІ фосфорларында зэбт мэркэзлэринин эмэлэ кэлмэсиндэ
мүхтэлиф ашгарларын ролу

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ Ag, Cu, Ti ионлары илэ фэаллашдырылмыш КСІ монокристалларында зэбт мэркэзлэринин эмэлэкэлмэ сүр'этинэ вэ оптик дајаныглыгына активлэширичи маддэнин концентрасијасынын, кристаллары ренткенлэширмэ температурунун вэ мүхтэлиф далға узундуглу шүаларла ишыгландырылманын тэ'сиринин удма спектрлэрини тэдгиг етмэ үсулу илэ өјрөнилмэсиндэн алынмыш нэтичэлэр шэрһ едилмишидир.

Јухарыда көстэрилэн монокристалларда активлэширичилэрин концентрасијасынын мүэјјэн гијмэтинэ гэдэр F —мэркэзлэрин эмэлэкэлмэ сүр'эти тэмиз монокристалларына нисбэтэн даһа чохдур. Лакин концентрасијанын бундан чох гијмэтлэриндэ F —мэркэзлэрин эмэлэкэлмэси ити сүр'этлэ азалыр вэ нэһајэт, концентрасијанын чох бөјүк гијмэтиндэ F —мэркэзлэр даһа эмэлэ кэлмир.

Бундан башга, мэгалэдэ Ag ашгарларынын КСІ гэфэсиндэ јаратдығы атомар мэркэзлэрин хассэлэринэ аид экспериментал нэтичэлэр шэрһ едилмишидир.

АЗЕРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛЭР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХЭБЭРЛЭРИ
Физика-ријазиијат вэ техника елмлэри серијасы, 1962, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 6

Г. Б. АБДУЛЛАЕВ, М. Я. БАКИРОВ, Р. Б. ГАСЫМОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОЛЩИНЫ p - и n -СЛОЕВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЛЕНОВЫХ ФОТОЭЛЕМЕНТОВ

Селеновые фотоэлементы являются одними из первых полупроводниковых фотоэлементов, получивших широкое распространение.

С момента изобретения селенового фотоэлемента технология его претерпела ряд изменений и в настоящее время имеется определенная технология [1÷7]. Однако в просы ее дальнейшей доработки и совершенствования до сих пор актуальны.

Для создания высокочувствительного и стабильного фотоэлемента необходимо детальное исследование влияния отдельных элементов конструкции на характеристики элемента.

Как известно, селеновые фотоэлементы представляют собой систему, состоящую из металлической подложки, поликристаллического слоя селена и верхнего полупрозрачного электрода.

Одним из основных факторов, влияющих на характеристики фотоэлементов, является толщина полупроводников.

В производстве селеновых фотоэлементов толщину слоя селена обычно берут 100 м. Однако до настоящего времени вопрос об оптимальной толщине слоя селена не решен.

Анализ вольтамперной характеристики показывает, что отдаваемая мощность фотоэлемента, при прочих постоянных условиях, определяется значением последовательного сопротивления системы, которое состоит из сопротивления толщи полупроводника и контактов. Незначительное увеличение R_n приводит к ухудшению вольтамперной характеристики и, следовательно, к уменьшению мощности элемента [8, 9].

Поэтому исследование влияния толщины p и n -слоев на характеристики фотоэлементов и выбор оптимальной толщины представляет особый интерес.

В данной работе излагаются результаты исследования влияния толщины p - и n -слоев на характеристики селеновых фотоэлементов.

Для исследования влияния толщины p -слоя селена были изготовлены образцы с различной толщиной.

Селен наносился возгонкой в вакууме, а толщина его определялась методом взвешивания. Используемый нами селен имел чистоту 99,99999%.

В качестве подложки взята алюминиевая пластинка площадью 10 см². При вычислениях за удельный вес селена взяты 4,3 г/см³.

Верхним электродом во всех образцах служил кадмий толщиной $\sim 0,1 \mu$.

На рис. 1 показана зависимость фототока, фотоэдс и последовательного сопротивления системы от толщины селена при 5000 лк освещенности и 20°C температуры.

Из графика видно, что с увеличением толщины слоя селена до 50μ фотоэдс и фототок растут, а при дальнейшем увеличении толщины слоя — уменьшаются.

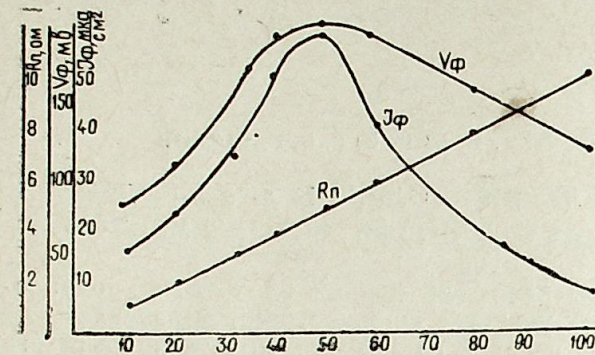


Рис. 1

Уменьшение фототока происходит сильнее, чем уменьшение фотоэдс. Последовательное сопротивление системы в прямом направлении в режиме диода с увеличением толщины слоя селена растет линейно. Удельное сопротивление, определяемое из наклона зависимости $R = f(h)$, равно $\sim 10^4 \text{ ом} \cdot \text{см}$.

Изменение фототока и фотоэдс в зависимости от толщины слоя селена обусловлено тем, что при малой толщине слоя селена из-за наличия пористости в селене при нанесении верхнего электрода образуются дендриты (элементарные мостики), которые закорачивают верхний электрод с нижним. Это обуславливает возникновение тока утечки через $p-n$ -переход, вследствие чего фототок и фотоэдс незначительны. С ростом толщины слоя селена число дендритов уменьшается, что приводит к уменьшению тока утечки, следовательно, к росту фототока и фотоэдс.

Оптимальная толщина слоя селена, при которой э. д. с. и ток получают максимальное значение, соответствует 50μ .

Дальнейшее увеличение толщины слоя селена обуславливает значительное увеличение последовательного сопротивления системы, что приводит к уменьшению фототока и фотоэдс.

Известно, что при освещении сопротивление селена уменьшается. Однако из-за экспоненциального поглощения света в толстых образцах свет не проникает на всю толщину селена. Та часть селена, в которую не проникает свет, ведет себя как дополнительное сопротивление.

С целью определения глубины проникновения света в селене проведен следующий опыт.

Кварцевые пластинки были покрыты селеном различной толщины. После кристаллизации селена пластинку помещали в щель измерительной камеры (рис. 2). Внутри камеры на постоянном расстоянии от щели ($l = 4 \text{ см}$) располагали обычный селеновый фотоэлемент. В цепи фотоэлемента был включен гальванометр. При освещении белым светом пластинки со слоем селена измеряли величину фототока, возникающего в цепи фотоэлемента. Измерение производили при 5000 лк освещенности и 20°C .

Установлено, что с увеличением толщины слоя селена до 80μ величина фототока, возникающего в цепи фотоэлемента, уменьшается по закону $I^{-\beta h}$, где β — коэффициент поглощения света (рис. 3 а). Значение β , определяемое из этой характеристики, равно $2,85 \cdot 10^{-5} \text{ см}^{-1}$.

В селеновых фотоэлементах свет падает в селен, проходя через верхний электрод и через слой селенида кадмия, который образуется между селеном и кадмием. С целью определения максимальной глубины проникновения света в селен в фотоэлементах приведенным способом была измерена зависимость поглощения света от толщины слоя селена с кадмиевым электродом толщиной $0,1 \mu$ (рис. 3, б). При этом найдено, что в пределах ошибки измерения максимальная глубина проникновения света в селен с кадмиевым электродом толщиной $0,1 \mu$ составляет $\sim 50 \mu$.

Эффективность работы фотоэлемента в значительной степени обуславливается числом пар, достигающих $p-n$ -перехода.

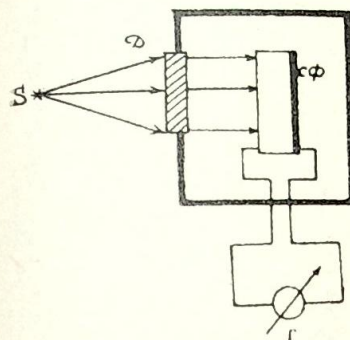


Рис. 2

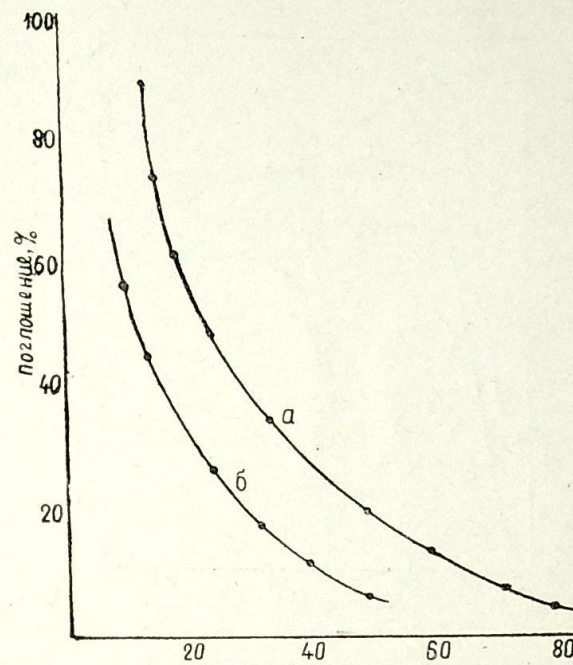


Рис. 3

Важно, чтобы при всех прочих постоянных условиях число пар, достигающих $p-n$ -перехода, было максимальным. Поэтому расстояние от $p-n$ -перехода до места возникновения пар должно быть меньше диффузионной длины носителей заряда. В противном случае число дошедших до $p-n$ -перехода носителей будет очень мало и вызываемая ими э. д. с. будет ничтожной.

Для исследования влияния глубины $p-n$ -перехода на характеристики селеновых фотоэлементов были изготовлены образцы с различной глубиной $p-n$ -перехода. Для этого на поверхность кристаллического селена наносили слой CdSe n -типа с различной толщиной. Так как $p-n$ -переход образуется на границе соприкосновения селена и селенида кадмия, мы получили фотоэлементы с различной глубиной $p-n$ -перехода.

На рис. 4 показана зависимость фототока и фотоэдс от толщины n -слоя. Из рисунка видно, что с утолщением n -слоя фототок и фотоэдс растут, при толщине n -слоя $\sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ они достигают максимума, а при дальнейшем увеличении n -слоя падают.

Изменение фототока и фотоэдс с утолщением n -слоя объясняется изменением соотношения между глубиной проникновения света и длиной диффузионного смещения носителей тока.

В селеновых фотоэлементах свет падает перпендикулярно к плоскости барьера (рис. 5), p и n -части перехода освещаются по-разному.

В n -слое число создаваемых светом пар убывает в направлении к барьеру, а в селене, наоборот, убывает от p - n -перехода вглубь.

Несмотря на то, что в образцах с тонким n -слоем свет проникает на достаточное расстояние в селен, из-за несовершенства p - n -перехода имеют место обратного тока утечки. Вследствие этого фототок и фотоэдс малы. С утолщением n -слоя p - n -переход усвершенствуется, эдс малы. С утолщением n -слоя фототок и фотоэдс растут, токи утечки уменьшаются и в результате фототок и фотоэдс растут.

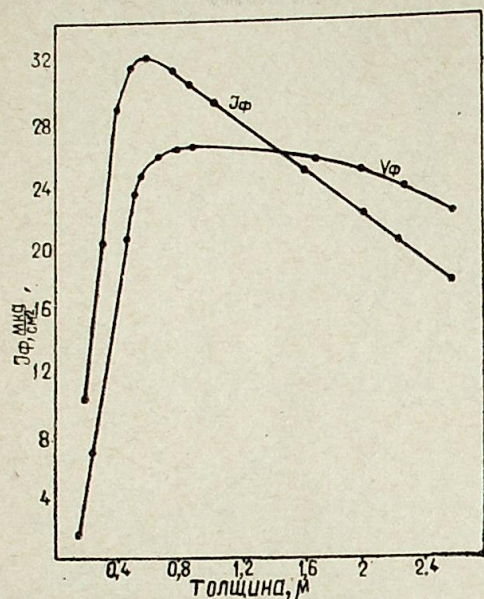


Рис. 4

Когда n -слой достигает оптимальной толщины ($\sim 5 \cdot 10^{-5}$ см), фототок и фотоэдс получают максимальное значение. При этом глубина проникновения света в p -части L_A становится равной длине диффузионного смещения электронов $-L_n$, а толщина n -слоя l_n — длине диффузионного смеще-

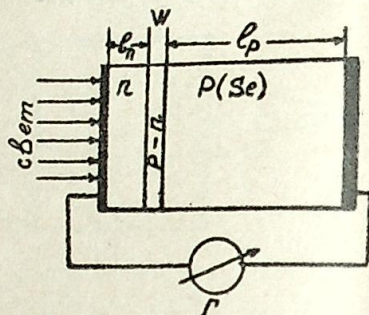


Рис. 5

ния дырок (L_p). Поэтому в обоих сторонах p - n -перехода число пар, участвующих в создании фототока достигает максимума.

Дальнейшее увеличение n -слоя приводит к тому, что толщина его становится больше длины диффузии дырок, т. е. $l_n \gg L_p$, а глубина проникновения света в селен резко уменьшается.

С одной стороны, не все носители, созданные светом в n -слое, доходят до p - n -перехода, а с другой, — число пар, возникающих в селене, уменьшается. Это приводит к снижению фототока.

Анализ кривых зависимости фототока и фотоэдс от глубины p - n -перехода показывает, что старение селеновых фотоэлементов обусловлено углублением p - n -перехода.

За счет диффузии со временем n -слой утолщается, что приводит к углублению p - n -перехода. Из-за углубления p - n -перехода расстояние от него до места возникновения пар становится больше, чем длина диффузионного смещения заряда. При этом часть носителей прежде чем дойти до p - n -перехода на пути рекомбинируется, что приводит к снижению чувствительности фотоэлемента, т. е. к старению.

Заключение

В селеновых фотоэлементах оптимальная толщина слоя селена соответствует $\sim 50 \mu$, а n -слоя $5 \cdot 10^{-5}$ см.

Старение селеновых фотоэлементов обусловлено углублением p - n -перехода.

Авторы благодарят лаборантку Л. Г. Приходько за помощь при проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломиец Б. Т. ЖТФ, 1937, 7, 4, 393.
2. Курчатова И. В. и Синельников К. Д. ЖТФ, 1931, 1, 7, 665.
3. Лепешинская В. ЖТФ, 1934, 4, 5, 1077.
4. Молдавер Т. И. Изв. АН СССР, 1938, 5—6, 705.
5. Наследов Д. Н., Неменов Л. М. Твёрдые выпрямители и фотоэлементы. М., 1937.
6. Субашиев В. К. и Соминский М. С. Полупроводники в науке и технике, т. 2, 1958.
7. Фрейверт С. И., Бердников Н. Б. ЖТФ, 1937, 7, 13, 1333.
8. Loferski J. J. J. of Appl. phys., 1956, 27, 777.
9. Princke M. J. Appl. phys., 1955, 26, 534.

Н. Б. Абдуллаев, М. Ж. Бәкиров, Р. Б. Гасымов

P в n тәбәгәләри галынлығынын селен фотоэлементләринин характеристикаларына тәсири

ХҮЛАСӘ

Селен фотоэлементләри кениш тәтбиг едилән жарымкечиричи фотоэлементләрдән биридр.

Селен фотоэлементләри кәшф олундуғу күндән онун технологијасы бир нечә дәфә дәјишилмишдир вә һал-һазырда мұәјјән дәрәчәдә ишләниш технологијасы вардыр. Лакин технологијанын тәкмилләшдирилмәси мәсәләси јенә дә актуал оларағ галыр.

Јүксәк һассаслы вә сабит ишләјән фотоэлемент һазырламағ үчүн элементни ајры-ајры һиссәләринин онун характеристикаларына тәсирини арашдырмағ лазымдыр.

Фотоэлементләрин характеристикаларына тәсир едән мұһим амилләрдән бири дә жарымкечиричинин галынлығыдыр.

Бу ишдә P в n һиссәләрин галынлығынын селен фотоэлементләринин характеристикаларына тәсири арашдырыларағ, мұәјјән едилмишдир ки, селенин (P —һиссәсинин) галынлығы 50μ -а гәдәр артдыгча фотоһг вә фотоһәрәјән артыр, сонра исә азалыр. Фотоһәрәјянын вә фотоһг-нин бу чүр дәјишмәси назик тәбәгәли фотоэлементләрдә «утечка» һәрәјянын јаранмасы илә, галын фотоэлементләрдә исә дахили мұғавимәтин артмасы илә изаһ олунур.

n —тәбәгәнин галынлығы $5 \cdot 10^{-5}$ см-ә гәдәр артдыгча фотоһг вә вә фотоһәрәјән артыр. n —тәбәгәнин $5 \cdot 10^{-5}$ см-дән бөјүк гијмәтләриндә фотоһг вә фотоһәрәјән азалыр. Фотоһәрәјянын вә фотоһг-нин n —тәбәгәнин галынлығындан асылы оларағ бу чүр дәјишмәси ишығын дахилолма дәринлији илә јүкләрин диффузија дәринлији арасындакы мұнасибатын дәјишмәси илә изаһ олунур.

Фотоһәрәјянын n —тәбәгә галынлығындан асылылығ графикинин тәһлили көстәрир ки, селен фотоэлементләриндә кедән көһнәлмә просесинин механизми p — n кечидин дәринләшмәси илә әләғәдардыр. p — n кечид дәринләшдикчә p — n кечиддән чүтләрин јарандығы јерә гәдәр олан мәсафә јүкләрин диффузија дәринлииндән бөјүк олур. Она көрә дә чүт p — n кечидә чатмамыш јолда рекомбинә олунур. Бунун нәтичәсиндә дә элементни һассаслығы азалыр.

Л. М. ИМАНОВ, К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ В КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРАХ НЕКОТОРЫХ ГАЛОГЕНОПРОИЗВОДНЫХ БЕНЗОЛА

В настоящее время изучение релаксационных свойств полярных молекул проводится либо с помощью дебаевской теории [5], либо в рамках теории абсолютных скоростей реакций. [1]. Если в первом

Таблица 1

Хлорбензол—бензол										
t, °C	x ₂ =0,179		x ₂ =0,363		x ₂ =0,567		x ₂ =0,778		x ₂ =1,000	
	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''
Жидкое состояние										
20	3,05	0,10	3,81	0,22	4,54	0,35	5,12	0,45	5,60	0,54
10	3,08	0,11	3,86	0,25	4,60	0,40	5,22	0,52	5,72	0,65
0	3,12	0,13	3,91	0,29	4,67	0,47	5,32	0,61	5,83	0,78
-10	3,15	0,15	3,94	0,33	4,73	0,54	5,41	0,72	5,95	0,90
-20	—	—	3,98	0,39	4,79	0,63	5,50	0,86	6,07	1,09
-26	—	—	4,02	0,42	4,82	0,70	5,54	0,95	6,13	1,18
-30	—	—	—	—	4,84	0,75	5,57	1,02	6,15	1,31
-40	—	—	—	—	4,87	0,89	5,61	1,21	6,16	1,51
-45	—	—	—	—	4,87	0,96	5,62	1,32	6,12	1,70
-50	—	—	—	—	—	—	5,62	1,46	—	—
-56	—	—	—	—	—	—	5,60	1,66	—	—
Твердое состояние										
-11	3,12	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—
-15	2,04	0,17	—	—	—	—	—	—	—	—
-20	2,98	0,18	—	—	—	—	—	—	—	—
-27	2,95	0,21	3,96	0,43	—	—	—	—	—	—
-30	2,93	0,24	3,80	0,49	—	—	—	—	—	—
-35	2,89	0,27	3,72	0,55	—	—	—	—	—	—
-40	2,85	0,32	3,65	0,62	—	—	—	—	—	—
-45	2,83	0,37	3,60	0,68	—	—	—	—	—	—
-46	2,82	0,39	3,08	0,43	3,44	0,64	—	—	3,18	0,30
-49	2,81	0,42	2,72	0,18	3,06	0,41	—	—	3,00	0,18
-50	2,57	0,19	2,58	0,09	2,93	0,31	—	—	2,96	0,17
-52	2,46	0,08	2,56	0,04	2,74	0,16	—	—	2,91	0,12
-54	2,42	0,02	2,54	0,01	2,68	0,07	—	—	2,86	0,05
-57	2,41	—	2,52	—	2,62	0,02	3,22	0,40	2,83	0,03
-60	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,89	0,18	2,81	0,02
-65	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,72	0,05	2,81	—
-70	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,69	0,01	2,80	—
-80	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,68	—	2,81	—

Л. М. ИМАНОВ, К. Э. ЗУЛЬФУГАРЗАДЕ

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ РЕЛАКСАЦИИ В КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ РАСТВОРАХ НЕКОТОРЫХ ГАЛОГЕНОПРОИЗВОДНЫХ БЕНЗОЛА

В настоящее время изучение релаксационных свойств полярных молекул проводится либо с помощью дебаевской теории [5], либо в рамках теории абсолютных скоростей реакций. [1]. Если в первом

Таблица 1

Хлорбензол—бензол										
t, °C	x ₂ =0,179		x ₂ =0,368		x ₂ =0,567		x ₂ =0,778		x ₂ =1,000	
	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''	ε'	ε''
Жидкое состояние										
20	3,05	0,10	3,81	0,22	4,54	0,35	5,12	0,45	5,60	0,54
10	3,08	0,11	3,86	0,25	4,60	0,40	5,22	0,52	5,72	0,65
0	3,12	0,13	3,91	0,29	4,67	0,47	5,32	0,61	5,83	0,78
-10	3,15	0,15	3,94	0,33	4,73	0,54	5,41	0,72	5,95	0,90
-20	—	—	3,98	0,39	4,79	0,63	5,50	0,86	6,07	1,09
-26	—	—	4,02	0,42	4,82	0,70	5,54	0,95	6,13	1,18
-30	—	—	—	—	4,84	0,75	5,57	1,02	6,15	1,31
-40	—	—	—	—	4,87	0,89	5,61	1,21	6,16	1,51
-45	—	—	—	—	4,87	0,96	5,62	1,32	6,12	1,70
-50	—	—	—	—	—	—	5,62	1,46	—	—
-56	—	—	—	—	—	—	5,60	1,66	—	—
Твердое состояние										
-11	3,12	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—
-15	2,04	0,17	—	—	—	—	—	—	—	—
-20	2,98	0,18	—	—	—	—	—	—	—	—
-27	2,95	0,21	3,96	0,43	—	—	—	—	—	—
-30	2,93	0,24	3,80	0,49	—	—	—	—	—	—
-35	2,89	0,27	3,72	0,55	—	—	—	—	—	—
-40	2,85	0,32	3,65	0,62	—	—	—	—	—	—
-45	2,83	0,37	3,60	0,68	—	—	—	—	—	—
-46	2,82	0,39	3,08	0,43	3,44	0,64	—	—	3,18	0,30
-49	2,81	0,42	2,72	0,18	3,06	0,41	—	—	3,00	0,18
-50	2,57	0,19	2,58	0,09	2,93	0,31	—	—	2,96	0,17
-52	2,46	0,08	2,56	0,04	2,74	0,16	—	—	2,91	0,12
-54	2,42	0,02	2,54	0,01	2,68	0,07	—	—	2,86	0,05
-57	2,41	—	2,52	—	2,62	0,02	3,22	0,40	2,83	0,03
-60	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,89	0,18	2,81	0,02
-65	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,72	0,05	2,81	—
-70	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,69	0,01	2,80	—
-80	2,40	—	2,52	—	2,60	—	2,68	—	2,81	—

случае время релаксации полярной молекулы истолковывается в связи с ее величиной и вязкостью окружающей среды, то во втором случае принимается во внимание скоростной характер релаксационного процесса, а время релаксации выражается посредством термодинамических величин активации.

Последний подход требует знания температурной зависимости времени релаксации.

Таблица 2

Хлорбензол—гексан								
$t, ^\circ\text{C}$	$x_2=0,300$		$x_2=0,562$		$x_2=0,794$		$x_2=1,000$	
	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
Жидкое состояние								
20	2,84	0,08	3,74	0,18	4,75	0,34	5,60	0,54
10	2,88	0,09	3,80	0,20	4,83	0,38	5,72	0,65
0	2,92	0,10	3,86	0,23	4,91	0,45	5,83	0,78
-10	2,96	0,12	3,92	0,27	4,99	0,53	5,95	0,90
-20	3,00	0,14	3,98	0,32	5,07	0,63	6,07	1,09
-30	3,04	0,16	4,03	0,37	5,14	0,73	6,15	1,31
-40	3,07	0,19	4,08	0,44	5,20	0,88	6,16	1,51
-45	3,09	0,20	4,10	0,48	5,22	0,96	6,12	1,70
-52	3,11	0,23	4,12	0,53	5,24	1,07	—	—
-59	3,12	0,26	4,12	0,61	—	—	—	—
-70	3,14	0,31	—	—	—	—	—	—
Твердое состояние								
-46	—	—	—	—	—	—	3,18	0,30
-50	—	—	—	—	—	—	2,96	0,17
-53	—	—	—	—	3,37	0,38	2,88	0,09
-56	—	—	—	—	3,09	0,27	2,84	0,04
-60	—	—	3,41	0,40	2,74	0,21	2,81	0,02
-64	—	—	2,85	0,22	2,67	0,12	2,80	—
-67	—	—	2,66	0,16	2,64	0,07	2,81	—
-71	3,07	0,26	2,54	0,07	2,63	0,04	2,81	—
-74	2,72	0,18	2,50	0,04	2,62	0,02	2,81	—
-77	2,50	0,11	2,48	0,03	2,62	0,01	2,81	—
-80	2,39	0,07	2,47	0,01	2,62	—	2,81	—
-84	2,28	0,03	2,46	—	2,62	—	2,81	—
-87	2,26	0,02	2,46	—	2,62	—	2,81	—
-90	2,24	0,01	2,46	—	2,62	—	2,81	—

Продолжая начатое ранее [4] исследование диэлектрической релаксации в концентрированных растворах галогенопроизводных бензола, мы провели измерение диэлектрической проницаемости ϵ' и показателя поглощения ϵ'' двойных систем хлорбензол—бензол, хлорбензол—гексан, бромбензол—бензол, бромбензол—гексан при длине волны $\lambda=12,80$ см в интервале от 20 до -80°C . Возможность измерений при одной длине волны вытекает из того факта, что диэлектрические свойства этих систем на сантиметровых волнах вполне удовлетворительно могут быть описаны с помощью единственного времени релаксации [3, 4, 6].

Методика эксперимента описана нами в [2]. Все соединения подверглись тщательной очистке с помощью ректификационной колонки.

В табл. 1—4 сведены результаты измерений. Они получены при непрерывном охлаждении со скоростью около 0,1—0,2 град/мин. В большинстве случаев в точке затвердевания наблюден резкий спад

Таблица 3

Бромбензол—бензол								
$t, ^\circ\text{C}$	$x_2=0,459$		$x_2=0,560$		$x_2=0,718$		$x_2=1,000$	
	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
Жидкое состояние								
20	3,98	0,33	4,27	0,40	4,66	0,52	5,25	0,73
10	4,02	0,37	4,32	0,45	4,74	0,58	5,35	0,83
0	4,06	0,43	4,39	0,52	4,82	0,69	5,39	0,97
-10	4,10	0,51	4,45	0,63	4,90	0,82	5,43	1,12
-20	4,13	0,60	4,50	0,75	4,94	0,98	5,38	1,31
-30	4,15	0,70	4,52	0,88	4,93	1,16	5,29	1,49
-33	4,16	0,74	4,53	0,94	4,92	1,21	—	—
-40	—	—	4,54	1,04	4,90	1,32	—	—
-42	—	—	4,54	1,07	4,88	1,35	—	—
-47	—	—	—	—	4,84	1,43	—	—
Твердое состояние								
-31	—	—	—	—	—	—	3,12	0,31
-34	3,38	0,52	—	—	—	—	2,98	0,16
-38	3,00	0,22	—	—	—	—	2,87	0,08
-43	2,63	0,07	3,25	0,40	—	—	2,84	0,02
-48	2,57	0,02	2,81	0,12	3,17	0,34	2,83	—
-50	2,56	—	2,69	0,06	2,90	0,19	2,83	—
-52	2,55	—	2,64	0,03	2,79	0,15	2,83	—
-58	2,55	—	2,63	0,01	2,74	0,04	2,83	—
-60	2,55	—	2,62	—	2,72	0,02	2,83	—
-70	2,55	—	2,62	—	2,71	—	2,83	—
-80	2,55	—	2,62	—	2,71	—	2,83	—

Таблица 4

Бромбензол—гексан								
$t, ^\circ\text{C}$	$x_2=0,294$		$x_2=0,555$		$x_2=0,745$		$x_2=1,000$	
	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''	ϵ'	ϵ''
Жидкое состояние								
20	2,80	0,10	3,60	0,23	4,34	0,40	5,25	0,73
10	2,84	0,11	3,65	0,25	4,42	0,45	5,35	0,83
0	2,88	0,13	3,69	0,29	4,49	0,53	5,39	0,97
-10	2,92	0,15	3,72	0,34	4,53	0,62	5,43	1,12
-20	2,95	0,17	3,75	0,39	4,52	0,71	5,38	1,31
-30	2,99	0,20	3,75	0,44	4,49	0,81	5,29	1,49
-34	3,00	0,21	3,75	0,48	4,46	0,86	—	—
-40	3,02	0,24	3,75	0,51	—	—	—	—
-50	3,04	0,29	—	—	—	—	—	—
-55	3,04	0,32	—	—	—	—	—	—
Твердое состояние								
-31	—	—	—	—	—	—	3,12	0,31
-35	—	—	—	—	3,52	0,57	2,96	0,15
-38	—	—	—	—	3,19	0,32	2,87	0,08
-41	—	—	3,58	0,42	2,96	0,20	2,85	0,06
-45	—	—	3,02	0,21	2,75	0,11	2,84	0,01
-51	—	—	2,79	0,09	2,70	0,04	2,83	—
-53	—	—	2,66	0,05	2,67	0,01	2,83	—
-56	2,92	0,24	2,55	0,03	2,65	—	2,83	—
-58	2,77	0,14	2,52	0,01	2,65	—	2,83	—
-60	2,62	0,11	2,50	—	2,65	—	2,83	—
-65	2,45	0,04	2,50	—	2,65	—	2,83	—
-70	2,33	0,02	2,50	—	2,65	—	2,83	—
-80	2,32	—	2,50	—	2,65	—	2,83	—

ϵ' и ϵ'' . При этом было отмечено, что при начале затвердевания коэффициент бегучести $q = E_{\min}/E_{\max}$ (E — напряженность электрического поля) проходит через остро выраженный максимум, который, однако, не проявляется в значениях ϵ'' , поскольку одновременно происходит очень быстрое и значительное смещение узла стоячей волны. Возможно, что в данном случае для получения более полной информации требуется снятие большего числа экспериментальных точек в весьма узком интервале температур около точки затвердевания. После скачка происходит дальнейшее уменьшение ϵ' и спад ϵ'' до нуля. Такое поведение уже было отмечено для чистых полярных компонентов [6] и приписано существованию в жидкостях наряду с микроразнообразиями отдельных „свободных“ молекул, которые создают вклад ориентационной поляризации в небольшом температурном участке ниже точки затвердевания. Эта точка зрения в известной степени подтверждается в случае растворов в гексане, где такой переход заметно растянут по сравнению с чистым полярным компонентом (рис. 1, 2). В бензольных растворах это выражено слабее.

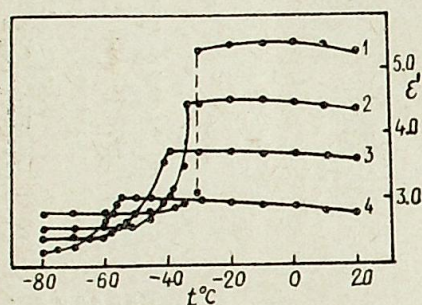


Рис. 1. Температурная зависимость ϵ' для системы $C_6H_5Br-C_6H_{14}$: 1—1,000; 2—0,745; 3—0,556; 4—0,294 (содержание C_6H_5Br в мольных долях)

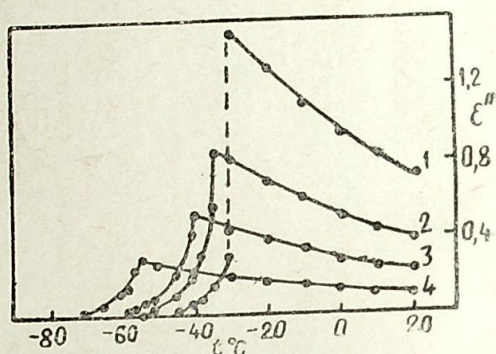


Рис. 2. Температурная зависимость ϵ'' для системы $C_6H_5Br-C_6H_{14}$ (обозначения см. рис. 1).

Другой тип кривой $\epsilon^* = f(T)$ обнаружен в системе хлорбензол—бензол при концентрациях бензола в мольных долях $x_2 = 0,368$ и $x_2 = 0,179$. В обоих случаях в точке затвердевания происходит небольшое падение ϵ' , тогда как ϵ'' продолжает расти, причем с большей скоростью (рис. 3, 4).

Более наглядно это проявляется на графике температурной зависимости тангенса угла потерь $tg\delta = \epsilon''/\epsilon'$ (рис. 5). Утрата молекулами вращательной подвижности происходит только при охлаждении на $\sim 20^\circ$ ниже точки затвердевания для $x_2 = 0,368$ и на $\sim 40^\circ$ — для $x_2 = 0,179$.

На рис. 6 показана температурная зависимость времени релаксации. Как видно, в точке перехода прямая испытывает излом. Энергия активации U , определенная из наклона двух отрезков прямой, согласно соотношению

$$\tau = A \exp(U/RT)$$

равна 1,77 ккал/моль в жидкости и 4,5 ккал/моль — ниже точки затвердевания ($x_2 = 0,368$) и 1,65 и 4,7 соответственно для $x_2 = 0,179$.

Таким образом, при данных концентрациях твердое состояние характеризуется наличием двух фаз — промежуточной метастабильной фазы, переходящей с дальнейшим охлаждением в устойчивую низкотемпературную фазу.

Когда температура достигает примерно $-60^\circ C$, диэлектрическая проницаемость почти во всех случаях перестает изменяться и практически можно считать вклад ориентационной поляризации устранен-

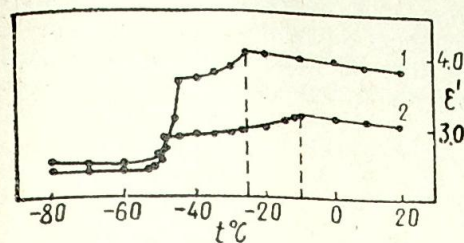


Рис. 3. Температурная зависимость ϵ' для системы $C_6H_5Cl-C_6H_6$. Для рис. 3—6: 1 — $x_2 = 0,368$, 2 — $x_2 = 0,179$

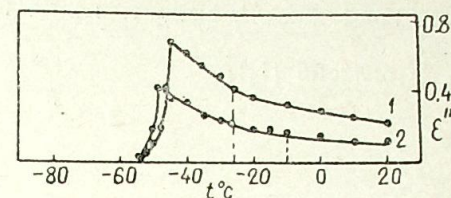


Рис. 4. Температурная зависимость ϵ'' для системы $C_6H_5Cl-C_6H_6$

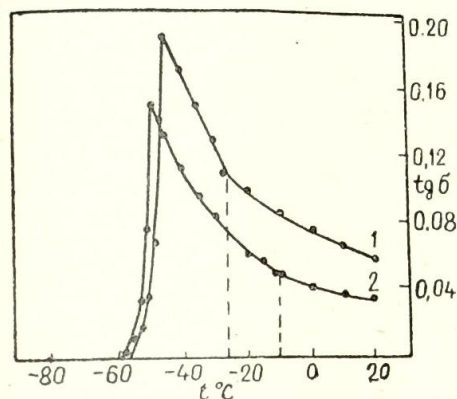


Рис. 5. Температурная зависимость $tg\delta$ для системы $C_6H_5Cl-C_6H_6$

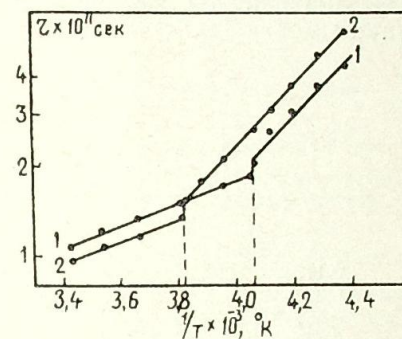


Рис. 6. Температурная зависимость времени релаксации для системы $C_6H_5Cl-C_6H_6$

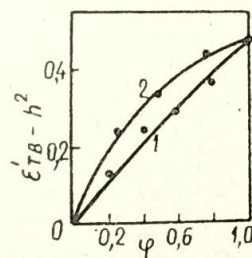


Рис. 7. Зависимость $\epsilon'_{TB} - n^2$ от содержания C_6H_5Cl в объемных долях для систем $C_6H_5Cl-C_6H_6$ (1) и $C_6H_5Cl-C_6H_{14}$ (2)

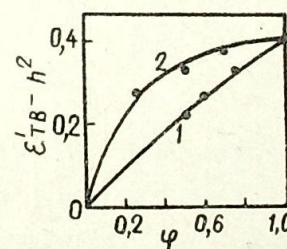


Рис. 8. Зависимость $\epsilon'_{TB} - n^2$ от содержания C_6H_5Br в объемных долях для систем $C_6H_5Br-C_6H_6$ (1) и $C_6H_5Br-C_6H_{14}$ (2)

ным. Однако, как видно из рис. 7 и 8, диэлектрическая проницаемость в твердом состоянии намного превышает соответствующую величину квадрата показателя преломления n^2 при $20^\circ C$. Поскольку изменение плотности с температурой составляет незначительную величину, разность $\epsilon'_{TB} - n^2$ следует объяснить вкладом инфракрасной поляризации. Интересно отметить, что высокочастотная диэлектрическая про-

нищаемость ϵ_{∞} при 20° , полученная из круговой диаграммы, также превышает значение n^2 при всех концентрациях [4].

С другой стороны, ϵ_{∞} несколько больше ϵ_{∞} . Это подтверждает высказанное в [4] предположение о том, что разность $\epsilon_{\infty} - n^2$ в основном обусловлена дополнительной дисперсией резонансного характера.

Трактовка диэлектрической релаксации как кинетического процесса дает возможность выявить новые подробности механизма этого явления.

Согласно [1]:

$$\tau = \frac{h}{kT} \exp(\Delta F/RT), \quad (1)$$

$$\Delta F = \Delta H - T \Delta S. \quad (2)$$

где

Здесь ΔF — свободная энергия, ΔH — энтальпия, ΔS — энтропия активации для процесса диэлектрической релаксации. Остальные величины имеют обычный смысл.

Значение ΔF рассчитывается по формуле (1), ΔH — из наклона зависимости $\lg(\tau) = \Phi(1/T)$, ΔS — по формуле (2).

Таблица 5

x_2	ΔF				$T \Delta S$				ΔH
	20°	0°	-20°	-40°	20°	0°	-20°	-40°	
Хлорбензол—бензол									
0,179	2,37	2,28	—	—	-1,13	-1,04	—	—	1,24
0,368	2,44	2,35	2,27	—	-1,10	-1,01	-0,93	—	1,34
0,567	2,48	2,40	2,32	2,24	-1,06	-0,98	-0,90	-0,82	1,42
0,778	2,50	2,42	2,35	2,27	-1,04	-0,96	-0,89	-0,81	1,46
1,000	2,50	2,47	2,39	2,31	-1,01	-0,99	-0,90	-0,82	1,49
Хлорбензол—гексан									
0,300	2,20	2,09	2,03	1,95	-1,20	-1,09	-1,03	-0,95	1,00
0,562	2,28	2,19	2,11	2,04	-1,16	-1,07	-0,99	-0,92	1,12
0,794	2,40	2,31	2,25	2,17	-1,07	-0,98	-0,92	-0,84	1,33
1,000	2,50	2,47	2,39	2,31	-1,01	-0,99	-0,90	-0,82	1,49
Бромбензол—бензол									
0,459	2,61	2,52	2,44	—	-1,18	-1,09	-1,01	—	1,43
0,560	2,64	2,53	2,47	2,38	-1,15	-1,04	-0,98	-0,89	1,49
0,718	2,70	2,60	2,52	2,44	-1,14	-1,04	-0,96	-0,88	1,56
1,000	2,76	2,70	2,61	—	-1,11	-1,05	-0,96	—	1,65
Бромбензол—гексан									
0,294	2,36	2,26	2,16	2,08	-1,30	-1,20	-1,10	-1,02	1,06
0,556	2,49	2,38	2,31	2,23	-1,24	-1,13	-1,05	-0,98	1,25
0,745	2,60	2,50	2,43	—	-1,18	-1,08	-1,01	—	1,42
1,000	2,76	2,70	2,61	—	-1,11	-1,05	-0,96	—	1,65

В таб. 5 даны результаты соответствующих вычислений. Значения времени релаксации определялись по формуле

$$\tau = \frac{1}{\omega} \frac{\epsilon''}{\epsilon' - \epsilon_{\infty}}.$$

Было принято, что ϵ_{∞} в растворе меняется аддитивно. Исходя из анализа влияния внутреннего поля, проведенного в [4], и независи-

мости его от температуры, было сочтено возможным пренебречь в первом приближении различием между макроскопическим и молекулярными временами релаксации.

Рассмотрение данных табл. 5 показывает, что высота потенциального барьера, разделяющего два равновесных положения полярной молекулы, является наибольшей в состоянии чистой полярной жидкости и уменьшается с разбавлением в неполярном растворителе, причем в гексане это выражено сильнее, чем в бензоле. Характерно, что величина ΔH_B , определенная из вязкостных измерений, во всех случаях имеет большое значение; разность $\Delta H_B - \Delta H_D$ уменьшается с переходом от растворов в бензоле к гексану. Это дает основание предположить, что ориентация полярных молекул в окружении молекул гексана носит более сложный характер. Энтропия ΔS отрицательна, что указывает на возрастание упорядоченности при наложении поля. Этот процесс выражен более четко в растворах в гексане. Незменность упорядоченности при растворении в бензоле свидетельствует о плотной упаковке молекул, практически такой же, как и в чистой жидкости. Упорядоченность растет также с увеличением размеров полярной молекулы.

Заклучение

Измерены диэлектрическая проницаемость ϵ' и показатель поглощения ϵ'' двойных систем хлорбензол—бензол, хлорбензол—гексан, бромбензол—бензол, бромбензол—гексан при длине волны $\lambda = 12,80$ см и температурах от 20 до -80°C .

Почти во всех случаях фазовый переход сопровождается резким спадом ϵ' и ϵ'' . В системе хлорбензол—бензол при концентрациях полярного компонента в мольных долях $x_2 = 0,367$ и $x_2 = 0,179$ обнаружено сохранение вращательной подвижности молекул ниже точки затвердевания в значительном интервале температур.

На основании температурной зависимости времени релаксации определены значения термодинамических параметров для процесса диэлектрической релаксации. Результаты обсуждены в связи с размерами и формой молекул растворителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций. М., 1948.
2. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „Изв. АН. Азерб. ССР“. серия физ.-мат. и техн. наук, 1960, № 6.
3. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „ДАН Азерб. ССР“, 1962, т. XVIII, № 3.
4. Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1962, № 5.
5. Фрелих Г. Теория диэлектриков. М., 1960.
6. Van Eick A. I., Poley J. Ph. Appl. Sci. Res., 1957, 4(6), 359.

Л. М. Иманов, К. Е. Зулфугарзаде

Бензолун бэ'зи халогенли төрэмэлэринин мэхлулларында диелектрик релаксацијасынын температур асылылығы

ХҮЛАСӘ

Мәгалә 12,8 см-лик далға узунлугунда хлорбензол-бензол, хлорбензол-гексан, бромбензол-бензол вә бромбензол-гексан икигат системләриндә диелектрик әмсалы (ϵ') вә удма кәстәричисинин (ϵ'') 20° —

— 80°C интервалында температур асылылыгынын тэдигинэ бәср едилмишдир.

Өҗрәнилән мәһлулларын әксәријјәтиндә донма температурундан кечәркән ϵ' вә ϵ'' кәскин азалараг, температурун сонракы дүшмәси илә ϵ'' сыфыр олур, ϵ' исә сабит гијмәтә чатыр. Анчаг мәһлулда полјар компонентин консентрасијасы азалдыгча ϵ' вә ϵ'' -ин дәјишмә сүр'әти кичилір.

Хлорбензол-бензол системиндә 40 вә 20%-ли мәһлулларда бәрк һалында ики модификасијанын олдуғу мүәјјән едилмишдир. Донма температурундан ашағыда ујғун олараг 20 вә 40 дәрәчә интервалында алыннан биринчи модификасијада полјар молекуллар өз фырланма габилијјәтини сахлајыр. Даһа алчаг температурда алыннан икинчи модификасијада јөнәлмә полјаризасијасы арадан чыхыр.

Релаксасија вахтынын температур асылылыгына әсасән диелектриј релаксасија просеси үчүн термодинамик параметрләр һесапланмышдыр.

Ф. М. ГАШИМЗАДЕ

ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И СТРУКТУРА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОН В ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КРИСТАЛЛАХ ТИПА TlSe

Исследование свойств симметрии энергетических зон в TlSe показало, что в этих кристаллах поверхности постоянной энергии вблизи экстремумов представляют собой трехосные эллипсоиды [1, 2]. Отсутствие сложных эквипотенциальных поверхностей энергии позволяет воспользоваться простой теорией гальваномагнитных явлений для экспериментального установления некоторых деталей энергетического спектра, как например, положения эквивалентных экстремумов в зоне Бриллюэна и анизотропию изоэнергетических поверхностей.

В работе [2], пользуясь критериями Рашби [3] и Шека [4], для определения точек нулевого наклона было установлено, что экстремумы энергии могут быть расположены в точках Γ , T , N , а также на линиях A , Δ , Σ , D , G и на плоскости Λ зоны Бриллюэна решетки TlSe, показанной на рисунке. Не исключено также расположение экстремумов на плоскостях $\kappa_x = 0$, $\kappa_y = 0$, $\kappa_z = 0$. При этом эквипотенциальными поверхностями являются:

- 1) в точках Γ , T и A — соответственно 1 или 2 эллипсоида вращения с выделенной осью, направленной вдоль тетрагональной оси;
- 2) в точках Σ , D , G и N — соответственно 4 или 2 эллипсоида общего вида с главными осями, направленными вдоль тетрагональной оси и диагоналей двух других координатных осей;
- 3) в точке Δ — трехосных эллипсоида с главными осями, направленными вдоль трех координатных осей;
- 4) в точке Λ — 8 трехосных эллипсоидов с главными осями, расположенными на диагональных плоскостях симметрии;

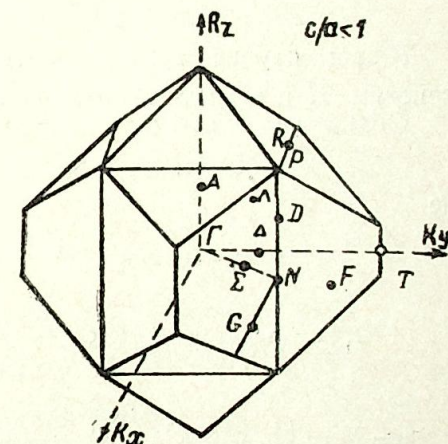


Рис.

5) 8-трехосных эллипсоида, две оси которого лежат на плоскости симметрии, а третья — перпендикулярна к ней.

Для того, чтобы записать в общем виде выражения для гальваномагнитных коэффициентов при любом расположении экстремумов, проведем расчеты для трехосного эллипсоида, приведенного к главным осям в системе координат $(x'y'z')$, связанной со старой системой координат преобразованием:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где φ — азимутальный угол, θ — полярный угол, причем φ может принимать значения $\varphi + n \cdot \frac{\pi}{2}$, а также $-\varphi + n \cdot \frac{\pi}{2}$ ($n = 1, 2, 3, 4$), а

θ — значения θ и $\pi - \theta$. Все указанные случаи расположения экстремумов получаются из (1) при соответствующем выборе углов φ и θ .

В дальнейшем мы будем полагать закон дисперсии заданным в виде:

$$E(\vec{\kappa}) = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\kappa_1^2}{m_1} + \frac{\kappa_2^2}{m_2} + \frac{\kappa_3^2}{m_3} \right), \quad (2)$$

§ 1. Гальваномагнитные коэффициенты в слабых магнитных полях

В этом случае вектор плотности тока можно разложить по степеням $\vec{H}$ и вычислить коэффициенты при H и H^2 .

Общий вид такого разложения в тензорной форме дан в [5]:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + \sigma_{ikl} E_k H_l + \sigma_{iklm} E_k H_l H_m, \quad (3)$$

где

$$\sigma_{ik} = -e^2/4 \pi^3 \hbar^2 \int \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \kappa_i} \frac{\partial E}{\partial \kappa_k} (d\vec{\kappa}), \quad (4)$$

$$\sigma_{ikl} = e^3/4 \pi^3 \hbar^4 \int \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \kappa_i} \frac{\partial E}{\partial \kappa_l} \frac{\partial E}{\partial \kappa_k} \left(\tau \frac{\partial E}{\partial \kappa_k} \right) \epsilon_{lrs} (d\vec{\kappa}), \quad (5)$$

$$\sigma_{iklm} = -e^4/4 \pi^3 \hbar^5 \int \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial \kappa_i} \frac{\partial E}{\partial \kappa_l} \frac{\partial E}{\partial \kappa_s} \left[\tau \frac{\partial E}{\partial \kappa_t} \frac{\partial E}{\partial \kappa_u} \left(\tau \frac{\partial E}{\partial \kappa_k} \right) \right] \times \quad (6)$$

$$\times \epsilon_{mrs} \epsilon_{ltu} (d\vec{\kappa}).$$

Здесь $\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = 1$, а все другие равны нулю. Интегралы (4) — (6) легко берутся в предположении изотропного времени релаксации $\tau = \tau_0 E^{r-1/2}$.

Далее мы будем также пренебрегать переходами между состояниями различных экстремумов и в конечном счете при вычислении полной плотности тока будем суммировать токи от всех эллипсоидов. При этом получаются следующие выражения для необходимых нам коэффициентов магнитопроводимости в системе координат, отнесенных к осям x, y, z .

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{2} A \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right);$$

$$\sigma_{33} = A \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right);$$

$$\sigma_{123} = B \cdot \frac{1}{m_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right),$$

$$\sigma_{231} = \sigma_{312} = \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} + \frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} \right),$$

$$\sigma_{1111} = \sigma_{2222} = C \left\{ \frac{1}{m_3} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_3} \right)^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right)^2 \left(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\};$$

$$\sigma_{3333} = C \cdot \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta;$$

$$\sigma_{1122} = C \left\{ \frac{1}{2m_3} \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} \right) \cos^2 \theta (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2m_1} \left(\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_3^2} \right) \sin^2 \theta (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right)^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{2}{m_1 m_2 m_3} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi \right\};$$

$$\sigma_{1133} = \frac{1}{2} C \left\{ \frac{1}{m_2^2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_1} \right) + \frac{1}{m_2} \left(\frac{\cos^4 \theta}{m_1^2} + \frac{\sin^4 \theta}{m_3^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{1}{m_1 m_2 m_3} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\};$$

$$\sigma_{3311} = \frac{1}{2} C \left\{ \frac{1}{m_1 m_3} \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right) + \frac{1}{m_2} \left(\frac{\cos^4 \theta}{m_3^2} + \frac{\sin^4 \theta}{m_1^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{m_1 m_2 m_3} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right\},$$

где

$$A = e^2 \tau_0 N (\kappa T)^{r-1/2} \frac{(r+1) F_r(\bar{\mu})}{3/2 F_{1/2}(\bar{\mu})},$$

(7)

$$B = e^3 c^{-1} \tau_0^2 N (\kappa T)^{2r-1} \frac{(2r+1/2) F_{2r-1/2}(\bar{\mu})}{3/2 F_{1/2}(\bar{\mu})},$$

$$C = e^4 c^{-2} \tau_0^3 N (\kappa T)^{3r-3/2} \frac{3r F_{3r-1}(\bar{\mu})}{3/2 F_{1/2}(\bar{\mu})},$$

N — полная концентрация носителей тока.

Для получения гальваномагнитных коэффициентов следует решить

уравнения (3) относительно $\vec{E}$.

$$E_i = \Lambda_{ik} I_k + \Lambda_{ikl} I_k H_l + \Lambda_{iklm} I_k H_l H_m. \quad (8)$$

85

Коэффициенты Δ_{ik} , Δ_{ikl} , Δ_{iklm} выражаются через коэффициенты уравнения (3) следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta_{ik} &= \frac{1}{\sigma_{ik}} \cdot \sigma_{ik}, \\ \Delta_{ikl} &= -\frac{1}{\sigma_{il} \sigma_{kk}} \sigma_{ikl}, \\ \Delta_{iklm} &= -\frac{1}{\sigma_{il} \sigma_{kk}} (\sigma_{iklm} - \frac{1}{\sigma_{nn}} \sigma_{inn} \cdot \sigma_{nkl}).\end{aligned}\quad (9)$$

Приведенные формулы позволяют вычислить все гальваномагнитные коэффициенты для любого типа расположения экстремума и для произвольного кристаллографического направления.

Ниже приводятся выражения для проводимости, коэффициента Холла, изменения сопротивления в продольных и поперечных магнитных полях для первых трех случаев расположения экстремума.

1. В общих формулах следует положить $\theta = 0$ и $m_1 = m_2$.

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{1}{2} A \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right); \quad \sigma_{33} = A \cdot \frac{1}{m_3} = \sigma_0 \quad (10)$$

$$R_{100}^{001} = R_{010}^{100} = R_{001}^{010} = a_r \cdot \frac{1}{Nec} = R_0; \quad (11)$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100}^{010} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001}^{100} = \frac{m_3}{m_1} (1 - b_r) R_0^2 \sigma_0^2 H^2; \quad (12)$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100}^{001} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001}^{001} = (1 - b_r) R_0^2 \sigma_0^2 H^2; \quad (13)$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{110} = 0.$$

Здесь нижние индексы указывают направление тока, а верхние — направление магнитного поля, если оно отлично от направления тока. Коэффициенты a_r и b_r зависят от механизма рассеяния и степени вырождения носителей тока:

$$a_r = \frac{(2r + 1/2) F_{2r-1/2}(\bar{\mu}) \cdot 3/2 F_{1/2}(\bar{\mu})}{[(r+1) F_r(\bar{\mu})]^2}$$

$$b_r = \frac{(r+1) F_r(\bar{\mu}) \cdot 3r F_{3r-1}(\bar{\mu})}{[(2r + 1/2) F_{2r-1/2}(\bar{\mu})]^2}.$$

2. В общих формулах следует положить $\theta = \pi/2$ и $\varphi = \pi/4$, а также заменить $m_1 \rightarrow m_3$.

Формулы для проводимости такие же, как (10).

Для коэффициента Холла имеем:

$$R_{100}^{001} = 4 \cdot \frac{m_1}{m_2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-2} \cdot R_0,$$

$$R_{010}^{100} = R_{001}^{010} = R_0. \quad (14)$$

Изменение сопротивления в продольном магнитном поле:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{010} = \frac{1}{2} \frac{m_3}{m_1} \cdot \frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right)^2}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)} b_r R_0^2 \sigma_0^2 H^2, \quad (15)$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{11} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{1\bar{1}0} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001} = 0. \quad (16)$$

Изменение сопротивления в поперечном магнитном поле:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100}^{010} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001}^{100} = \frac{1}{2} \frac{m_3}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) (1 - b_r) R_0^2 \sigma_0^2 H^2 \quad (17)$$

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100}^{001} = 4 \left(\frac{m_3}{m_1} \right)^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{m_2}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2 b_r \right\} R_0^2 \sigma_0^2 H^2.$$

3. В общих формулах следует положить $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$ и заменить $m_1 \rightarrow m_3$.

Формулы для проводимости и коэффициента Холла такие же, как в случае 2. Формулы для изменения сопротивления в поперечном поле также не изменяются за исключением:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100}^{010} = \frac{1}{2} \frac{m_3}{m_2} \left(1 + \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \right) \left\{ 1 - \frac{2 \left(1 + \frac{m_1^2}{m_2^2} \right)}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2} b_r \right\} R_0^2 \sigma_0^2 H^2. \quad (18)$$

Формулы для изменения сопротивления в продольном магнитном поле для $\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{110}$ и $\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{1\bar{1}0}$ такие же, как (15), а

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{100} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{010} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} \right)_{001} = 0.$$

§ 2. Гальваномагнитные коэффициенты в произвольных магнитных полях. Предельный случай сильных магнитных полей

В принципе возможно получить гальваномагнитные коэффициенты при вышесделанных предположениях, о законе дисперсии и времени релаксации, не прибегая к разложению (3), а записывая более общее выражение для плотности тока [4]:

$$I_i = S_{ik} (\vec{H}) E_k. \quad (19)$$

Несложные, но трудоемкие вычисления дают:

$$S_{11} = \left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_3} \right) \alpha(\theta, \varphi) + H_1^2 \cdot \beta(\theta, \varphi);$$

$$S_{22} = \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_3} \right) \alpha(\theta, \varphi) + H_2^2 \cdot \beta(\theta, \varphi);$$

$$S_{33} = \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right) \alpha(\theta, \varphi) + H_3^2 \cdot \beta(\theta, \varphi);$$

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} - \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right) \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \alpha (\theta, \varphi) - \\
&- \frac{1}{m_2} \left\{ \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \cos \theta \sin \theta \cos \varphi H_1 + \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \cos \theta \sin \theta \times \right. \\
&\times \sin \varphi \cdot H_2 + \left. \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right) H_3 \right\} \cdot \gamma (\theta, \varphi) \\
S_{31} &= \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1} \right) \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \cdot \alpha (\theta, \varphi) - \\
&- \left\{ \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} - \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} \right) \cos \varphi \sin \varphi H_1 + \right. \\
&+ \left(\frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1 m_2} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_2 m_3} \right) H_2 + \\
&+ \left. \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \cdot H_3 \right\} \gamma (\theta, \varphi); \\
S_{23} &= \left(\frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_1} \right) \cos \theta \sin \theta \sin \varphi \cdot \alpha (\theta, \varphi) - \\
&- \left\{ \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1 m_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_2 m_3} \right) H_1 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} - \right. \right. \\
&- \left. \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} \right) \cos \varphi \sin \varphi \cdot H_2 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \times \\
&\times \cos \theta \sin \theta \cos \varphi \cdot H_3 \left. \right\} \gamma (\theta, \varphi),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha &= -e^2 \tau_0 (kT)^{r-1/2} \cdot n \cdot \frac{\int_0^\infty x^{r+1} (1 + bx^{2r-1})^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx}{^{3/2} F_{1/2}(\bar{\mu})}, \\
\beta &= -\frac{e^4 \tau_0^3 (kT)^{3r-3/2}}{c^2 m_1 m_2 m_3} \cdot n \cdot \frac{\int_0^\infty x^{3r} (1 + bx^{2r-1})^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx}{^{3/2} F_{1/2}(\bar{\mu})}, \\
\gamma &= -e^3 c^{-1} \tau_0^2 (kT)^{2r-1} \cdot n \cdot \frac{\int_0^\infty x^{2r+1/2} (1 + bx^{2r-1})^{-1} \frac{\partial f_0}{\partial x} dx}{^{3/2} F_{1/2}(\bar{\mu})}.
\end{aligned}$$

Здесь n — концентрация носителей тока для одного эллипсоида. Коэффициент b есть функция углов θ, φ и магнитного поля

$$\begin{aligned}
b(\theta, \varphi) &= (kT)^{2r-1} \left(\frac{e \tau_0}{c} \right)^2 \left\{ \left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_1 m_3} + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1 m_2} \right) H_1^2 + \left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1 m_2} \right) H_2^2 + \\
&+ \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_1} \right) \cdot \frac{1}{m_2} \cdot H_3^2 + \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} - \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} \right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\times \sin 2\varphi \cdot H_1 H_2 + \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \cos \varphi \cdot \sin 2\theta \cdot H_1 H_3 + \\
&+ \frac{1}{m_2} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_3} \right) \sin \varphi \cdot \sin 2\theta \cdot H_2 H_3 \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Выражения для остальных эллипсоидов получаются заменой

$$\varphi \rightarrow \varphi + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \rightarrow -\varphi + n \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, 4 \text{ и } \theta \rightarrow \pi - \theta.$$

Для получения гальваномагнитных коэффициентов следует просуммировать токи от всех эллипсоидов и обратить уравнение (19). Это легче сделать для каждого конкретного случая направления тока и магнитного поля. Например, для $I_y = 0$ $H_1 = H_2 = 0$ имеем:

$$R_{100}^{001} = \frac{S_{12}/H}{S_{11}^2 + S_{12}^2},$$

$$\rho_{100}^{001}(H) = \frac{S_{11}}{S_{11}^2 + S_{12}^2},$$

$$\rho_{001}(H) = \frac{1}{S_{33}},$$

где

$$S_{11} = 4 \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right) \cdot \alpha,$$

$$S_{33} = 8 \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right) \alpha + 8 \beta H^2,$$

$$S_{12} = -8 \frac{1}{m_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right) \gamma \cdot H,$$

α, β, γ — коэффициенты, определенные ранее, в которых параметр b имеет вид:

$$b = \frac{1}{m_2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_1} \right) H^2.$$

Аналогично можно определить и остальные гальваномагнитные коэффициенты.

Приведенные выше формулы позволяют записать выражения для гальваномагнитных коэффициентов для всех случаев расположения экстремума и для произвольного поля (не квантующего). Однако в общем случае в эти выражения входят интегралы (см. выражения для α, β, γ), которые не сводятся к известным.

В частом случае рассеяния на акустических колебаниях решетки $r=0$ и невырожденной статистики эти интегралы можно свести к протабулированным интегралам [5].

В заключение приведем выражения для гальваномагнитных коэффициентов в асимптотическом пределе.

Коэффициент Холла равен:

$$R(H \rightarrow \infty) = 1/ecN$$

и не зависит от механизма рассеяния.

$$\rho_{100}(H \rightarrow \infty) = \frac{\left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{m_1 m_2} \right) m_1 m_2 m_3}{\left(\frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} \right)} \times$$

$$\times \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1 m_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_{11}(0)};$$

$$\rho_{001}(H \rightarrow \infty) = \left(\sin^2 \theta + \frac{m_3 \cos^2 \theta}{m_1} \right) \left(\sin^2 \theta + \frac{m_1 \cos^2 \theta}{m_3} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_{33}(0)};$$

$$\rho_{100}^{001}(H \rightarrow \infty) = \frac{\left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right)^2}{4 \cdot \frac{1}{m_2} \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right)} \times$$

$$\times \frac{(2-r) F_{1-r}(\bar{\mu}) (1+r) F_r(\bar{\mu})}{\left[\frac{3}{2} F_{1/2}(\bar{\mu}) \right]^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}(0)};$$

$$\rho_{001}^{100}(H \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_3} \right)}{\left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1 m_2} \right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_3} \right)}{\left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\cos^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1 m_2} \right)} \right\} \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right) \times$$

$$\times \frac{(2-r) F_{1-r}(\bar{\mu}) (1+r) F_r(\bar{\mu})}{\left[\frac{3}{2} F_{1/2}(\bar{\mu}) \right]^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{33}(0)};$$

$$\rho_{010}^{100} = \frac{1/4 \left(\frac{\sin^2 \theta}{m_1} + \frac{\cos^2 \theta}{m_3} \right) \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_2 m_3} + \frac{1}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta}{m_1 m_2} \right)}{\left(\frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\sin^2 \varphi}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{m_1 m_2} \right)} \times$$

$$\times \frac{\left(\frac{\cos^2 \theta}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{\sin^2 \theta}{m_3} \right)}{\left(\frac{\cos^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_2 m_3} + \frac{\cos^2 \theta}{m_1 m_3} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{m_1 m_2} \right)} \times$$

$$\times \frac{(2-r) F_{1-r}(\bar{\mu}) (1+r) F_r(\bar{\mu})}{\left[\frac{3}{2} F_{1/2}(\bar{\mu}) \right]^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{11}(0)}.$$

Эти формулы охватывают все случаи расположения экстремумов энергии в зоне Бриллюэна.

Полученные результаты требуют обобщения для анизотропного времени релаксации. Однако, по-видимому, вклад от анизотропии энергетических поверхностей является решающим в определении анизотропии гальваномагнитных коэффициентов. Вклад от анизотропии τ может проявить себя в температурной зависимости коэффициентов анизотропии.

Анализ экспериментальных данных на основе приведенных теоретических формул удобно производить следующим образом. Сначала измеряем поле Холла, располагая магнитное поле вдоль оси z и направляя ток вдоль оси x , затем меняем местами направления тока и магнитного поля. Если результаты измерений совпадут, то имеет место модель 1—один или два эллипсоида вращения на тетрагональной оси. Если же они не совпадут, то модель 1 исключается. Дальнейшие результаты можно получить из измерения сопротивления в продольном магнитном поле. Если измерение сопротивления вдоль оси z равно нулю, то экстремумы расположены на плоскости xoy . Если же оно не равно нулю, то следует, вращая направление тока и магнитного поля в плоскости (110), найти направление, в котором изменение сопротивления будет равно нулю. Экстремумы будут расположены на этом направлении и эквивалентном ему направлениях.

Действуя аналогичным образом и в других случаях, можно найти направления, на которых лежат экстремумы и затем из измерений эффекта Холла и сопротивления определить анизотропию эффективных масс носителей тока.

Автор признателен Б. М. Аскерову за просмотр рукописи и некоторые замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гашимзаде Ф. М. ФТТ. 1960, 2, 3040.
2. Гашимзаде Ф. М. Диск. ФТИ им. А. Ф. Иоффе, 1962.
3. Рашба Э. ФТТ, 1959, 1, 407.
4. Шека В. ФТТ, 1960, 2, 1211.
5. Abeles B., Meiboom S. Phys. Rev., 1954, 95, № 1, 31.

Ф. М. Гашимзаде

TiSe типли жарымкечиричилерде энерги спектри вэ гальваномагнит надиселэр

ХҮЛАСӘ

Ихтијары магнит саһәси үчүн TiSe типли жарымкечиричилерде гальваномагнит әмсаллары (Холл еффеќти вэ мугавимәтин дәјишмәси) һесаблинмышдыр. Алынған нәтијәләри тәчрүбәдә јохламагла бу жарымкечиричиләр үчүн энерги спектрини мүәјјән дәрәчәдә дәгигләшдирмәк олар.

Ф. Г. ГАСАНОВ, К. Н. ДЖАЛИЛОВ

О ДИНАМИКЕ ОБВОДНЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ БАТАРЕИ НЕРАВНОДЕБИТНЫХ СКВАЖИН ПРИ НАЛИЧИИ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЫ

Динамика обводнения прямолинейной батареи скважин с чередующимися дебитами q_1 и q_2 в бесконечном пласте исследовалась в работе [2]. Задачи стягивания контура нефтеносности к прямолинейной батарее равнодебитных скважин в однородном пласте при наличии непроницаемой границы по характерным (главной и нейтральной) линиям и по линии тока, когда угол наклона касательной составляет 90° , рассматривались в [3, 4, 5].

Известно, что прямолинейный контур нефтеносности до половины расстояния между скважинами к прямолинейной батарее равнодебитных скважин стягивается, сохраняя первоначальную форму [5].

В данной статье исследуются особенности стягивания контура нефтеносности к прямолинейной батарее скважин с чередующимися дебитами q_1 и q_2 при наличии непроницаемой границы (рис. 1). Законы движения по характерным линиям установлены теоретическим путем, а общая картина течения получена на электрической модели ЭМ-8.

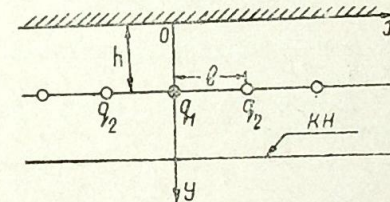


Рис. 1

Характеристическая функция в рассматриваемом случае примет вид:

$$F(z) = -\frac{q_1}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z - hi) - \frac{q_1}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z + ih) - \\ - \frac{q_2}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z - ih - l) - \frac{q_2}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z + ih - l) + F_0, \quad (1)$$

где q_1 и q_2 — дебиты скважин,
 F_0 — произвольная постоянная.

Отсюда функция эквипотенциальных линий и уравнение семейства линий тока, примут вид:

$$\varphi = -\frac{q_1}{4\pi} \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y-h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l} \right] + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y+h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l} \right] \right\} -$$

Ф. Г. ГАСАНОВ, К. Н. ДЖАЛИЛОВ

О ДИНАМИКЕ ОБВОДНЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ БАТАРЕИ НЕРАВНОДЕБИТНЫХ СКВАЖИН ПРИ НАЛИЧИИ НЕПРОНИЦАЕМОЙ ГРАНИЦЫ

Динамика обводнения прямолинейной батареи скважин с чередующимися дебитами q_1 и q_2 в бесконечном пласте исследовалась в работе [2]. Задачи стягивания контура нефтеносности к прямолинейной батарее равнодебитных скважин в однородном пласте при наличии непроницаемой границы по характерным (главной и нейтральной) линиям и по линии тока, когда угол наклона касательной составляет 90° , рассматривались в [3, 4, 5].

Известно, что прямолинейный контур нефтеносности до половины расстояния между скважинами к прямолинейной батарее равнодебитных скважин стягивается, сохраняя первоначальную форму [5].

В данной статье исследуются особенности стягивания контура нефтеносности к прямолинейной батарее скважин с чередующимися дебитами q_1 и q_2 при наличии непроницаемой границы (рис. 1). Законы движения по характерным линиям установлены теоретическим путем, а общая картина течения получена на электрической модели ЭМ-8.

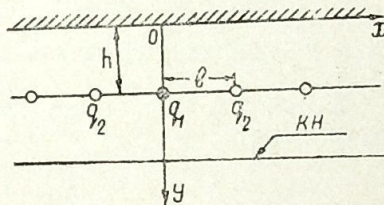


Рис. 1

Характеристическая функция в рассматриваемом случае примет вид:

$$F(z) = -\frac{q_1}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z - hi) - \frac{q_1}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z + ih) - \\ - \frac{q_2}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z - ih - l) - \frac{q_2}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2l} (z + ih - l) + F_0, \quad (1)$$

где q_1 и q_2 — дебиты скважин,
 F_0 — произвольная постоянная.

Отсюда функция эквипотенциальных линий и уравнение семейства линий тока, примут вид:

$$\varphi = -\frac{q_1}{4\pi} \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y-h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l} \right] + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y+h)}{l} - \cos \frac{\pi x}{l} \right] \right\} -$$

$$-\frac{q_2}{4\pi} \left\{ \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y-h)}{l} + \cos \frac{\pi(y-h)}{2l} \right] + \ln \left[\operatorname{ch} \frac{\pi(y+h)}{l} + \cos \frac{\pi x}{l} \right] \right\} \quad (2)$$

$$\operatorname{arctg} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi(y-h)}{2l} \right] + \operatorname{arctg} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi(y+h)}{2l} \right] - \frac{q_2}{q_1} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi(y-h)}{2l} \right] - \frac{q_2}{q_1} \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi(y+h)}{2l} \right] = c. \quad (3)$$

В общем виде по любой линии тока трудно находить уравнение движения контура нефтеносности, поэтому рассмотрено движение частицы жидкости по главным и нейтральным линиям.

Подставляя (2) в $m \frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dy}$ при $x=0$ (т. е. по главной линии к скважине с дебитом q_1) и интегрируя полученное выражение по y (от y_0 до y) и по t (от 0 до t) находим:

$$\tau = \frac{2}{\pi(1+s)^2(n^2-1)} \left\{ (1+s) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l} \left[\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} + n \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y_1}{2l}}{\operatorname{th} \frac{\pi y}{l}} - \frac{4s}{1+s} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} - n}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - n} \right] \right\}, \quad (4)$$

$$\text{где } s = \frac{q_2}{q_1}; \quad n = \frac{s-1}{s+1} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}; \quad \tau = \frac{q_1 t}{m l^2},$$

y_1 и y — координаты начального и конечного положения частицы жидкости.

А при $x=l$ (т. е. по главной линии к скважине с дебитом q_2) будем иметь:

$$\tau = \frac{2}{(1+s)^2(n^2-1)} \left\{ (1+s) \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l} \left[\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} - n \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{th} \frac{\pi y}{l}} - \frac{4s}{1+s} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} + n}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + n} \right] \right\}. \quad (5)$$

Принимая $y=0$, из (4) и (5) находим время прорыва воды в скважины с дебитом q_1 и q_2 . В частности, при $q_1=q_2$ по главной и нейтральной линиям находим [3—5]:

$$\tau = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} - 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{l}} \right) \quad (6)$$

$$\tau = \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} + 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{tg} \frac{\pi y}{l}} \right). \quad (7)$$

Уравнение движения частицы жидкости по нейтральной линии при $4b_2 - a_2^2 < 0$ получается в следующем виде:

$$\tau = \frac{2}{\pi(1+S)} \left[\alpha_1 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} - x_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - x_1} + \beta_1 \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} + \eta_1 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y_1}{2l}}{\operatorname{th} \frac{\pi y}{2l}} + \frac{\lambda_1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi y_1}{l} + a_2 \operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} + b_2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + a_2 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + b_2} + \frac{2\xi_1 - a_2\gamma_1}{2\sqrt{4b_2 - a_2^2}} \ln \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} + a_2 - \sqrt{4b_2 - a_2^2}}{2 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + a_2 + \sqrt{4b_2 - a_2^2}} \right] \quad (8)$$

А при $4b_2 - a_2^2 > 0$

$$\tau = \frac{2}{\pi(1+S)} \left[\alpha_1 \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} - x_1}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} - x_1} + \beta_1 \ln \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}} + \eta_1 \ln \frac{\operatorname{th} \frac{\pi y_1}{l}}{\operatorname{th} \frac{\pi y}{l}} + \frac{\gamma_1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi y_1}{l} + a_2 \operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} + b_2}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + a_2 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + b_2} + \frac{2\xi_1 - a_2\gamma_1}{\sqrt{4b_2 - a_2^2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi y_1}{l} + a_2}{\sqrt{4b_2 - a_2^2}} - \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + a_2}{\sqrt{4b_2 - a_2^2}} \right) \right], \quad (9)$$

где x_1 — действительный корень кубического уравнения

$$\operatorname{ch}^3 \frac{\pi y}{l} + a_1 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi y}{l} + b_1 \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} + c_1 = 0,$$

$$a_1 = \frac{s-1}{s+1} \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l}; \quad b_1 = a^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{l} - 2a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l};$$

$$c_1 = -\frac{1-s}{1+s} a \operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{\pi h}{l} + a^2 \right); \quad a = \cos \frac{\pi x_0}{l},$$

(x_0 — расстояние до нейтральной линии)

$$d_1 = -\left(a^2 + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi h}{l} \right)^2$$

$$a_2 = a_1 + x_1; \quad b_2 = b_1 + x_1(a_1 + x_1).$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \eta_1, \xi_1$ определяются из системы уравнений:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 1, \\ a_2 a_1 + (a_2 - x_1) \beta_1 - x_1 \gamma_1 + \xi_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} a_2 a_1 + x_1 b_2 \beta_1 + x_1 a_2 \eta_1 - x_1 \gamma_1 + \xi_1 &= 0, \\ (b_2 - 1) a_1 + (b_2 - x_1 a_2) \beta_1 - x_1 \eta_1 - \gamma_1 \xi_1 &= 2 b_1, \\ x_1 \xi_1 - x_2 b_2 \eta_1 &= d_1 + b_2. \end{aligned}$$

Представим выражение (3) в следующем виде:

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} - \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} \cos \frac{\pi x}{l}} - S \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi x}{l} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} + \operatorname{ch} \frac{\pi y}{l} \cos \frac{\pi x}{l}} = c$$

Отсюда для скважины с дебитом q_1 (в точке $(0, h)$)

$$c = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad (10)$$

а для скважины с дебитом q_2 (в точке (l, h)):

$$c = s \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \quad (11)$$

где θ — угол обводнения.

По формулам (4) и (5) проводились расчеты при следующих данных:

$$h = l; y = 5l \quad y_1 = 3l.$$

Результаты расчетов представлены в табл. 1, 2.

Таблица 1

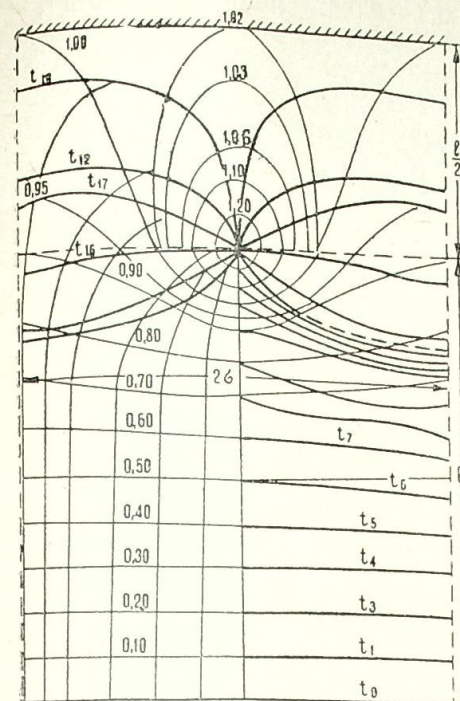
S	τ для скважин							
	с дебитом q_1				с дебитом q_2			
	$y=l$	$y=2l$	$y=3l$	$y=4l$	$y=l$	$y=2l$	$y=3l$	$y=4l$
1	3,6834	2,9623	2,0000	0,9999	3,6834	2,9623	2,0000	0,9999
2	2,6127	2,0508	1,3323	0,6670	2,5229	1,9469	1,2528	0,6670
5	1,3460	1,0145	0,6665	0,3332	1,2428	0,9550	0,5533	0,3332
10	0,7490	0,6267	0,3635	0,1817	0,6740	0,5381	0,3608	0,1817

Таблица 2

S	τ для скважин	
	с дебитом q_1	с дебитом q_2
	$y=l$	$y=l$
1	2,0000	2,0000
2	1,2794	1,1914
5	0,6797	0,5760
10	0,3812	0,3068

На основании данных таблиц можно сделать ряд выводов: для случая $y_1 = sl$; $y = l$ при $s=2$; 5; 10 время прорыва частицы жидкости по главным линиям к скважинам с дебитом q_1 и q_2 отличается друг от друга на 3,4; 7,7 и 10%, а в случае $y_1 = 3l$; $y = l$ на 7; 15 20% (проценты вычислены относительно времени прорыва воды к скважине с дебитом q_1). Обводнение скважины

с дебитом q_2 начинается раньше, чем скважины с дебитом q_1 . Разность во времени прорыва воды к скважинам с дебитом q_1 и q_2 с увеличением s растет. Сравнение таблиц показывает, что эта разность остается почти постоянной для обоих значений y_1 при одинаковых величинах s . Следовательно, с удалением контура нефтеносности



от неравнодебитного чередующегося ряда эксплуатационных скважин перемещение контура нефтеносности приближается к условиям равномерного его стягивания.

С целью установления влияния расстояния от ряда эксплуатационных скважин до непроницаемой границы расчеты проводились для тех же условий, но при $h = \frac{l}{2}$. Значения τ для обоих h оказались близкими.

Ниже приводятся некоторые результаты исследований рассматриваемой задачи, полученные на электрической модели ЭМ-8.

Известная методика моделирования [1] позволяет получить полную гидродинамическую картину течения, т. е. стягивание контура нефтеносности по любой линии тока и процесс обводнения.

На модели рассмотрены следующие случаи: $s = 1; 1,668;$

$7, h = \frac{l}{2}; y_1 = \frac{3l}{2}; \frac{5l}{2}$. Гидродинамическое поле потока и последовательное перемещение контура нефтеносности приведены на рис.

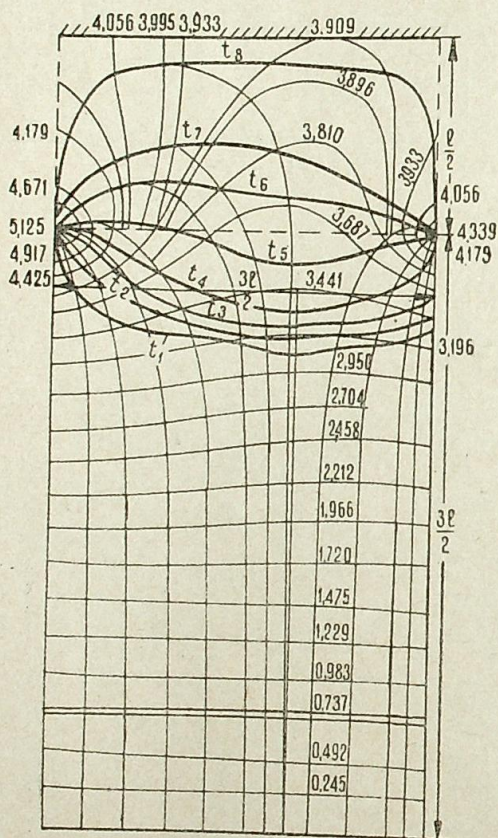


Рис. 6

ную форму дольше, чем в области скважины с дебитом q_2 . В заключение отметим, что теоретические исследования проводились К. Н. Джалиловым, а экспериментальные — на модели ЭМ-8 Ф. Г. Гасановым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белаш П. М., Максимов М. И. Труды ВНИИ, вып. X, 1957.
2. Джалилов К. Н. Джафаров Н. Д. Изв. АН Азерб. ССР, серия геол. геогр. наук и нефти, 1912, № 1.
3. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1961.
4. Розенберг М. Д. Труды МНИ им. Губкина XI, 1951.
5. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Техтопиздат, 1949.

Ф. Г. Гасанов, Г. Н. Чалилов

Дебитлэри бəрəбəр олмəјан дүзхəтли батəрəјə гујуларынын кечирмəз сəрһəд олдуғда сулашмасынын динамикасы һағгында

ХҮЛАСƏ

Нефт контурунун һəрəкəти вə гујуларын сулашмасы мəсəлəлэри [2, 3, 4, 5] ишлэриндə мүəјјəн һаллар үчүн арашдырылмышдыр. Мəғалəдə дебитлэри бəрəбəр олмəјан дүзхəтли батəрəјə гујуларынын кечирмəз сəрһəд олдуғда сулашмасынын нəзəри вə електрик моделиндə һəлли верилир.

Алынмыш һесабы нəтичəлэр (6), (7), (8) вə (9) дүстурлары илə əлдə едилмишдыр. Мајенин там ахымыны кəстəрən (2), (3), (4) вə (5) нөмрəли шəкиллэр исə ЕМ-8 типли електрик моделиндə алынмышдыр. Алыннан јекунлар əсасында тəчрүбəви əһəмијјəтə малик олан нəтичəлэр ашқара чыхарылмышдыр.

2—6. Линии равных давлений и тока на рисунках показаны сплошными тонкими линиями, а положение водонефтяного контакта — жирными линиями.

В дополнение к ранее сделанным выводам можно отметить следующее.

В зависимости от значения s для скважин с дебитами q_1 и q_2 поле течения разбивается на две самостоятельные области и в каждой из них перемещение контура нефтеносности протекает по-разному. Причем с увеличением s область питания скважины с дебитом q_2 расширяется, а для скважины с дебитом q_1 сужается. Это и видно из формул (10) и (11).

Моменты прорыва воды к скважинам и полное их обводнение зависят как от s , так и от y_1 .

Несмотря на то, что обводнение скважины с дебитом q_2 начинается раньше, чем скважины с дебитом q_1 , полное обводнение ее завершается позже. В области скважины с дебитом q_1 контур нефтеносности сохраняет свою первоначаль-

И. Э. ИБРАГИМОВ, Т. И. КОПЫСИЦКИЙ, Г. А. КАПЛАН, З. С. МАРБИН
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА
КРАТНОСТИ ЦИРКУЛЯЦИИ СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ КАТАЛИТИЧЕСКОГО
КРЕКИНГА ПУТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Применение в производственных процессах регулирующих устройств улучшает режим технологического процесса производства и, как следствие этого, качество вырабатываемой продукции и увеличивает производительность установки. В частности, в процессе каталитического крекинга путем регулирования уровня кипящего слоя в реакторе и кратности циркуляции катализатора из реактора в регенератор вследствие стабилизации теплового баланса и возможности управления степенью превращения сырья могут быть получены значительные технический и экономический эффекты.

В процессе каталитического крекинга одной из возможных схем регулирования является взаимосвязанная схема регулирования уровня реактора и кратности циркуляции с коррекцией кратности циркуляции по производной уровня реактора. Принципиальная схема регулирования процесса приведена на рис. 1. Структурная схема рассматриваемой системы автоматического регулирования (САР) представлена на рис. 2. Настоящая статья посвящена исследованию этой схемы САР.

Регулируемый объект представляет собой интегрирующее

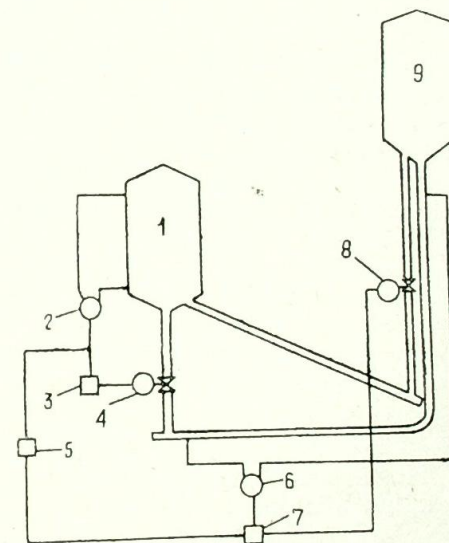


Рис. 1

1—реактор, 2—диффометр уровня, 3—регулятор уровня, 4—сервомотор задвижки под реактором, 5—корректор по производной уровня, 7—регулятор кратности циркуляции, 8—сервомотор задвижки под регенератором, 9—регенератор

звено с передаточной функцией $w_1(p) = \frac{k_0}{p}$. Сервомотор задвижки под регенератором с отнесенным к нему запаздыванием τ на линии сырья—

И. Э. ИБРАГИМОВ, Т. И. КОПЫСИЦКИЙ, Г. А. КАПЛАН, З. С. МАРБИН
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА
КРАТНОСТИ ЦИРКУЛЯЦИИ СИСТЕМЫ
АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ КАТАЛИТИЧЕСКОГО
КРЕКИНГА ПУТЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Применение в производственных процессах регулирующих устройств улучшает режим технологического процесса производства и, как следствие этого, качество вырабатываемой продукции и увеличивает производительность установки. В частности, в процессе каталитического крекинга путем регулирования уровня кипящего слоя в реакторе и кратности циркуляции катализатора из реактора в регенератор вследствие стабилизации теплового баланса и возможности управления степенью превращения сырья могут быть получены значительные технико-экономические эффекты.

В процессе каталитического крекинга одной из возможных схем регулирования является взаимосвязанная схема регулирования уровня реактора и кратности циркуляции с коррекцией кратности циркуляции по производной уровня реактора. Принципиальная схема регулирования процесса приведена на рис. 1. Структурная схема рассматриваемой системы автоматического регулирования (САР) представлена на рис. 2. Настоящая статья посвящена исследованию этой схемы САР.

Регулируемый объект представляет собой интегрирующее

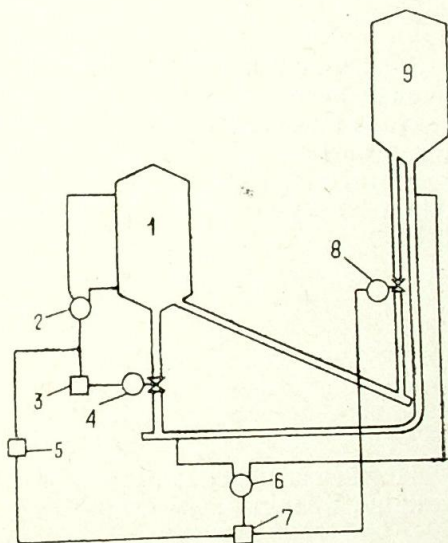


Рис. 1

1—реактор, 2—диффометр уровня, 3—регулятор уровня, 4—сервомотор задвижки под реактором, 5—корректор по производной уровня, 7—регулятор кратности циркуляции, 8—сервомотор задвижки под регенератором, 9—регенератор

звено с передаточной функцией $w_1(p) = \frac{k_0}{p}$. Сервомотор задвижки под регенератором с отнесенным к нему запаздыванием τ на линии сырье—

реактор имеет передаточную функцию $w_2(p) = k_2 e^{-p\tau}$. Дифманометры уровня и кратности циркуляции и сервомотор задвижки под реактором являются усилительными звеньями и их передаточные функции соответственно обозначены:

$$w_3(p) = k_{\text{дм}_1}, \quad w_4(p) = k_{\text{дм}_2}, \quad w_5(p) = k_1.$$

Корректор по производной уровня представляет собой дифференцирующее звено с передаточной функцией $w_6(p) = lp$.

Применяемые регуляторы с упругой обратной связью имеют следующие линеаризованные передаточные функции:

$$\text{для регулятора уровня } w_{\text{рег}_1}(p) = -\frac{T_{u_1}p + 1}{T_{u_1}V_{\text{св}_1}p},$$

$$\text{для регулятора кратности циркуляции } w_{\text{рег}_2}(p) = \frac{T_{u_2}p + 1}{T_{u_2}V_{\text{св}_2}p}.$$

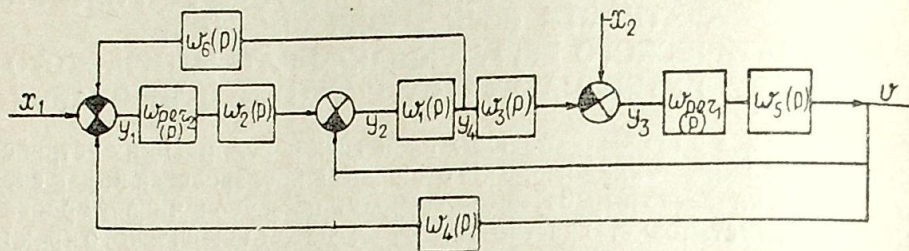


Рис. 2

Знак минус в выражении $w_{\text{рег}_1}(p)$ объясняется тем, что при увеличении рассогласования в результате воздействия на задвижку под реактором расход катализатора из реактора в регенератор уменьшается и наоборот.

Согласно структурной схеме (рис. 2) можно составить следующую систему уравнений, описывающую динамику рассматриваемой САР:

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 - w_6(p) \bar{y}_4 - w_4(p) \bar{v},$$

$$\bar{y}_2 = w_2(p) w_{\text{рег}_2}(p) \bar{y}_1 - \bar{v},$$

$$\bar{y}_3 = -\bar{x}_2 - w_3(p) \bar{y}_4,$$

$$\bar{y}_4 = w_1(p) \bar{y}_2,$$

$$\bar{v} = w_5(p) \cdot w_{\text{рег}_1}(p) \bar{y}_3.$$

Исключая переменные $\bar{v}$ и $\bar{y}_4$ и подставляя значения передаточных функций, получим:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{x}_1 - k_0 l \bar{y}_2 + \frac{T_{u_1}p + 1}{T_{u_1}V_{\text{св}_1}p} k_1 k_{\text{дм}_2} \bar{y}_3, \\ \bar{y}_2 &= \frac{T_{u_2}p + 1}{T_{u_2}V_{\text{св}_2}p} k_2 e^{-p\tau} \bar{y}_1 + \frac{T_{u_1}p + 1}{T_{u_1}V_{\text{св}_1}p} k_1 \bar{y}_3, \\ \bar{y}_3 &= -\bar{x}_2 - k_{\text{дм}_1} \frac{k_0}{p} \bar{y}_2. \end{aligned}$$

Настроечные параметры регулятора уровня были определены ранее и имеют значения:

$$T_{u_1} = 8, \quad T_{u_1}V_{\text{св}_1} = 20 k_0 k_1 k_{\text{дм}_1}.$$

Подставляя эти значения и произведя некоторые простые преобразования, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{x}_1 - \frac{k_0 l}{k_{\text{дм}_2}} \bar{y}_2 + \frac{8p + 1}{20p} \frac{\bar{y}_3}{k_0 k_{\text{дм}_1}}, \\ \bar{y}_2 &= \frac{T_{u_2}p + 1}{\frac{T_{u_2}V_{\text{св}_2}}{k_2 k_{\text{дм}_2}} p} e^{-p\tau} \frac{\bar{y}_1}{k_{\text{дм}_2}} + \frac{8p + 1}{20p} \frac{\bar{y}_3}{k_0 k_{\text{дм}_1}}, \\ \bar{y}_3 &= -\frac{\bar{x}_2}{k_0 k_{\text{дм}_1}} - \frac{1}{p} \bar{y}_2. \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_1}{k_{\text{дм}_2}} &= \bar{X}_1, & \frac{\bar{x}_2}{k_0 k_{\text{дм}_1}} &= \bar{X}_2, & \frac{\bar{y}_1}{k_{\text{дм}_2}} &= \bar{Y}_1, & \bar{y}_2 &= \bar{Y}_2, & \frac{\bar{y}_3}{k_0 k_{\text{дм}_1}} &= \bar{Y}_3, \\ \frac{k_0 l}{k_{\text{дм}_2}} &= L, & T_{u_2} &= \beta, & \frac{T_{u_2}V_{\text{св}_2}}{k_2 k_{\text{дм}_2}} &= \eta, \end{aligned}$$

получаем систему уравнений (1):

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= \bar{X}_1 - L \bar{Y}_2 + \frac{8p + 1}{20p} \bar{Y}_3, \\ \bar{Y}_2 &= \frac{\beta p + 1}{\eta p} e^{-p\tau} \bar{Y}_1 + \frac{8p + 1}{20p} \bar{Y}_3, \\ \bar{Y}_3 &= -\bar{X}_2 - \frac{1}{p} \bar{Y}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Необходимо определить значения настроечных параметров из условий устойчивости рассматриваемой САР и удовлетворения качества переходного процесса заранее заданным условиям. Выбор удовлетворяющих этим условиям оптимальных значений параметров регулятора для рассматриваемой системы с запаздыванием аналитическим способом представляет значительные трудности, тем более, что при проектировании САР требуется рассмотреть большое количество вариантов. В частности, в нашем случае необходимо определить оптимальные параметры регулятора кратности циркуляции при вариации значений времени запаздывания τ и коэффициента усиления корректора L . Расчетные работы при аналитическом выборе оптимальных параметров затрудняются еще из-за того, что необходимо рассмотреть устойчивость и качество переходного процесса системы при изменении заданий каждому регулятору в отдельности, а также одновременно, т. е. при поочередной и одновременной подаче возмущений $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$. Поэтому исследуемая САР, описываемая системой (1), была промоделирована на структурной электронной модели МПТ-9.

В настоящее время режим реактора устанавливается вручную и при этом задания обоим регуляторам—уровня и кратности циркуляции—меняются неодновременно. Однако более тяжелым случаем работы рассматриваемой САР является одновременное и разнозначное изменение заданий обоим регуляторам. Такое изменение заданий возможно при полном автоматическом управлении процессом крекинга с помощью вычислительных устройств. Поэтому и возникла необходимость рассмотрения этого случая.

Определение оптимальных параметров регулятора кратности при уже известных параметрах регулятора уровня производилось, исходя из следующих критериев качества переходного процесса:

1. Продолжительность переходного процесса t_0 не должна превышать 30 мин.

2. Максимальное значение перерегулирования σ не должно превышать 30%.

При моделировании в качестве выходных величин системы рассматривались $Y_1(t)$ и $Y_3(t)$. Система исследовалась сначала при изменении заданий обоим регуляторам одновременно в виде единичных скачков, определяемых равенствами:

$$X_1 = X_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Оптимальные параметры регулятора определялись для трех значений времени запаздывания τ . Для каждого из значений τ рассматривались всевозможные комбинации следующих значений параметров β и η и коэффициента L :

$$\beta = 1; 2; 2,5; 3; 3,5; 4;$$

$$\eta = 5; 10; 15;$$

$$L = 0; 0,5; 1; 2.$$

Из рассмотренных вариантов выбирались оптимальные. Эти варианты дополнительно исследовались при изменении заданий каждому регулятору в отдельности, т. е. при поочередной подаче единичных скачков X_1 и X_2 . Кроме того, оптимальные варианты рассматривались при вариации коэффициента L вокруг его оптимального значения.

Теперь перейдем к составлению машинных уравнений для набора на электронной модели.

После перехода к обычной форме записи, а также введения масштаба времени, $t = k\theta$, система (1) будет иметь вид:

$$Y_1 = X_1 - L Y_2 + 0,4 Y_3 + 0,05 k \int_0^\theta Y_3 d\theta,$$

$$Y_2 = -\frac{\beta}{\eta} Y_1 \left(\theta - \frac{\tau}{k} \right) + \frac{k}{\eta} \int_0^\theta Y_1 \left(\theta - \frac{\tau}{k} \right) d\theta + 0,4 Y_3 + 0,05 k \int_0^\theta Y_3 d\theta, \quad (2)$$

$$Y_3 = -X_2 - k \int_0^\theta Y_2 d\theta.$$

Начальные условия:

$$Y_2(0) = Y_3(0) = 0, Y_1 \left(\theta - \frac{\tau}{k} \right) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\tau}{k}.$$

Моделирование производилось при трех значениях времени запаздывания $\tau = 2, 6$ и 10 мин. Запаздывание функции $Y_1(\theta)$ осуществлялось по схеме, собранной из блоков операционных усилителей (рис. 3). В основу этой схемы положено разложение передаточной функции запаздывающего звена $e^{-\tau s}$ в дробный ряд Пада [2]. Следует отметить, что запаздывание функции $Y_1(\theta)$ осуществлялось также с помощью блока с запоминающими конденсаторами. Результаты моделирования исследуемой системы в обоих случаях были практически одинаковыми.

Значения постоянных коэффициентов, указанных на схеме рис. 3, вычислены для случая $\tau = 2$. Для того, чтобы для всех трех значений τ применять схему рис. 3 с неизменными коэффициентами, масштаб времени k для $\tau = 6$ принимался равным трем, а для $\tau = 10$ $k = 5$; таким образом, во всех трех случаях сохраняется отношение $\frac{\tau}{k} = 2$.

При $\tau = 2$ и $k = 1$ будем иметь следующую систему машинных уравнений:

$$Y_1 = X_1 - L Y_2 + 0,4 Y_3 + 0,05 \int_0^\theta Y_3 d\theta,$$

$$Y_2 = -\frac{\beta}{\eta} Y_1 (\theta - 2) + \frac{1}{\eta} \int_0^\theta Y_1 (\theta - 2) d\theta + 0,4 Y_3 + 0,05 \int_0^\theta Y_3 d\theta,$$

$$Y_3 = -X_2 - \int_0^\theta Y_2 d\theta,$$

начальные условия:

$$Y_2(0) = Y_3(0) = 0, Y_1(\theta - 2) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq 2.$$

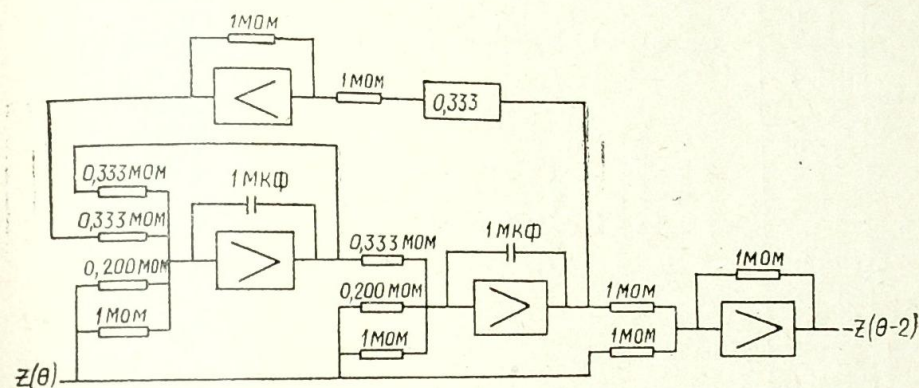


Рис. 3

Система (3) решалась по блок-схеме рис. 4. Единичные скачки X_1 и X_2 были приняты равными 10 в. При $\tau = 2$ для указанных значений β , η и L рассматривалось 72 варианта всевозможных комбинаций. Из них было выбрано 5 удовлетворительных вариантов, которые дополнительно исследовались при более мелком шаге изменения L в окрестности его оптимального значения, а именно при $\Delta L = 0,25$. Эти варианты исследовались также при поочередной подаче возмущений X_1 и X_2 .

Результаты дополнительного исследования пяти вариантов приведены в табл. 1.

При $\tau = 6$ мин для всевозможных комбинаций указанных значений β , η и L также рассматривалось 72 варианта, из которых дополнительно исследовались 4 удовлетворительных варианта. Результаты исследования этих вариантов приведены в табл. 2.

Система (2) моделировалась для $\tau = 10$ мин аналогично случаям $\tau = 2$ и 6 мин в 72 вариантах. Однако ввиду того, что для $\tau = 10$ мин при $\eta = 5$ процесс расходился, минимальные значения этого параметра принимались равными 6, 7 или 8. Увеличение η ускоряет сходимость процесса.

Таблица 1

№ варианта	Возмущения	L	β	η	У ₁			У ₂		
					Характер процесса	t ₀ , мин.	σ , %	Характер процесса	t ₀ , мин.	σ , %
I	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	2	5	Апериодич.	13	48,5	Затух. колебания	31	15
I.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	2	5	Затух. колебания	13	49,3	"	32	18
I.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	2	5	Апериодич.	13	75,7	"	31	15
I.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	5	—	13	62,5	"	32	—
I.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	5	—	—	—	"	20	0
II	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	2	10	Апериодич.	27	30,0	"	44	0
II.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	2	10	"	26	25,6	"	44	0
II.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	2	10	"	27	36,8	"	44	0
II.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	10	—	27	30,0	"	44	—
II.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	10	—	—	—	"	18	0
III	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	2,5	10	Апериодич.	26	40	"	44	0
III.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	2,5	10	"	29	30,3	"	45	0
III.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	2,5	10	"	27	45,2	"	45	0
III.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2,5	10	—	27	38,8	"	45	—
III.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2,5	10	—	—	—	"	19	0
IV	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	3	10	Апериодич.	27	39,0	"	43	0
IV.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	3	10	"	30	35,1	"	46	0
IV.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	3	10	"	28	56,3	"	43	0
IV.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	3	10	—	28	45,5	"	47	—
IV.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	3	10	—	—	—	"	18	0
V	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	3,5	10	Апериодич.	29	43,5	"	42	0
V.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	3,5	10	"	30	43,7	"	46	0
V.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	3,5	10	"	29	68,8	"	42	0
V.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	3,5	10	—	29	55,4	"	44	—
V.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	3,5	10	—	—	—	"	18	0

Таблица 2

№ варианта	Возмущения	L	β	η	У ₁			У ₂		
					Характер процесса	t ₀ , мин.	σ , %	Характер процесса	t ₀ , мин.	σ , %
I	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	1	10	Затух. колебания	27	0	Затух. колебания	33	23
I.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	1	10	"	60	0	"	75	38
I.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	1	10	"	15	0	"	33	25
I.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	1	10	—	24	—	"	20	—
I.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	1	10	—	—	—	"	—	0
II	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	2	10	Апериодич.	15	0	"	33	25
II.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	2	10	Затух. колебания	42	0	"	55	35
II.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	2	10	Апериодич.	24	0	"	33	21
II.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	10	"	18	—	"	36	—
II.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2	10	"	—	—	"	12	0
III	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	1	2,5	10	Апериодич.	15	0	"	30	25
III.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,75	2,5	10	Затух. колебания	40	0	"	48	37
III.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	1,25	2,5	10	Апериодич.	24	0	"	35	22
III.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2,5	10	—	18	—	"	35	—
III.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	1	2,5	10	—	—	—	"	18	0
IV	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же	0,50	2,5	15	Апериодич.	30	0	"	33	0
IV.1	$X_1 \neq 0, \ddot{X}_2 = 0$	0,25	2,5	15	"	40	0	"	54	0
IV.2	$X_1 = 0, \ddot{X}_2 \neq 0$	0,75	2,5	15	"	33	0	"	50	0
IV.3	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	0,5	2,5	15	"	36	0	"	54	—
IV.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$	0,5	2,5	15	"	15	0	"	18	0

Таблица 3

№ варианта	Возмущения	L	β	η	Y_1		Y_3	
					Характер процесса	t_0 , мин	Характер процесса	t_0 , мин
I I.1 I.2 I.3 I.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же $X_1 \neq 0, X_2 = 0$ $X_1 = 0, X_2 \neq 0$	1 0,75 1,25 1	1 1 1 1	15 15 15 15	Затух. колебания " " " " " "	40 35 40 40	Затух. колебания " " " " Апериодич.	10 12 12 0
						30 40 30 25		10 10 10 0
						15		0
						50 75 65 50		8 12 11 0
II II.1 II.2 II.3 II.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же $X_1 \neq 0, X_2 = 0$ $X_1 = 0, X_2 \neq 0$	1 0,75 1,25 1	2,5 2,5 2,5 2,5	15 15 15 15	Затух. колебания " " " " Апериодич.	30 40 30 25	Затух. колебания " " " " Апериодич.	10 10 10 0
						15		0
						50 75 65 50		8 12 11 0
						30 30 30 30		15 15 16 0
III III.1 III.2 III.3 III.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же $X_1 \neq 0, X_2 = 0$ $X_1 = 0, X_2 \neq 0$	1 0,75 1,25 1	3,5 3,5 3,5 3,5	15 15 15 15	Затух. колебания " " " " Апериодич.	50 75 65 50	Затух. колебания " " " " Апериодич.	45 40 45 35
						15		15
						40 40 40 40		15 15 16 0
						25		0
IV IV.1 IV.2 IV.3 IV.4	$X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$ То же $X_1 \neq 0, X_2 = 0$ $X_1 = 0, X_2 \neq 0$	1 0,75 1,25 1	4 4 4 4	15 15 15 15	Апериодич. " " " " " "	30 30 30 30	Затух. колебания " " " " Апериодич.	40 40 45 25
						30		15
						40 40 40 40		15 15 16 0
						25		0

В табл. 3 даются результаты более подробного исследования оптимальных вариантов для $\tau = 10$ аналогично предыдущим случаям. Система (2) для $\tau = 6$ и 10 мин также решалась по блок-схеме рис. 4 с соответствующими изменениями постоянных коэффициентов. Контроль за ходом решения задачи осуществлялся методом подстановки в уравнения численных значений переменных величин для определенных моментов времени. Несоответствие при этом не превышало 8,3%.

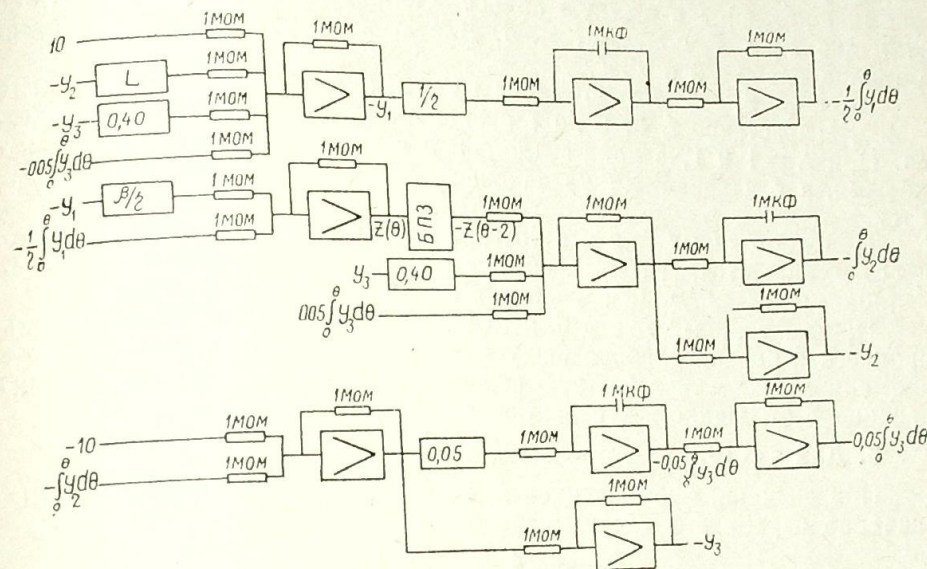


Рис. 4

Анализ результатов моделирования позволяет сделать некоторые выводы:

1. Для $\tau = 2$.

При значениях коэффициента $0,75 \leq L < 1$ параметры регулятора имеют следующий оптимальный диапазон:

$$2 \leq \beta \leq 3, \quad \eta = 10.$$

В оптимальном диапазоне значений β , η и L наилучшие показатели переходного процесса при одновременном изменении заданий обоим регуляторам имеют место при $\beta = 2$, $\eta = 10$ и $L = 0,75$. При этом время вхождения в 5%-ную полосу стабилизации составляет 26 и 44 мин для Y_1 и Y_3 соответственно. Для этих же функций перерегулирование равно 26% и 0.

При постоянных значениях β и η увеличение L от 0 до 1 несколько улучшает качество переходного процесса. Однако при $L = 2$ показатели процесса ухудшаются, в частности, в этом случае для большинства вариантов перерегулирование превышает 30%.

При постоянных L и η с возрастанием β от 1 до 3 длительность процесса регулирования остается примерно на одном уровне, а величина перерегулирования возрастает; при дальнейшем увеличении β до 4 качество процесса ухудшается.

При постоянных L и β с возрастанием η от 5 до 15 длительность процесса регулирования возрастает и превышает 30 мин, перерегулирование же, наоборот, убывает.

2. Для $\tau = 6$.

При значениях коэффициента $1 \leq L \leq 1,25$ диапазон оптимальных параметров следующий:

$$1 \leq \beta \leq 2,5; \quad \eta = 10.$$

В диапазоне оптимальных значений β , η и L при одновременном изменении заданий обоим регуляторам наилучшие показатели переходного процесса достигаются при $\beta = 2,5$; $\eta = 10$ и $L = 1$. При этом время вхождения в 5%-ную полосу стабилизации составляет 15 и 30 мин для U_1 и U_2 соответственно. Для этих же функций перерегулирование равно 32 и 25%.

При $\tau = 6$, аналогично случаю $\tau = 2$, при постоянных значениях η и L с возрастанием β от 0 до 1 несколько улучшает качество процесса. При $L = 1$ и 1,25 показатели качества процесса остаются примерно одинаковыми, а с дальнейшим увеличением L качество процесса ухудшается.

При постоянных L и η с возрастанием β от 1 до 4 качество процесса ухудшается, главным образом, ввиду роста величины перерегулирования. При $L = 0$ и $\eta = 5$ для любых β процесс расходится.

При постоянных L и β с изменением η от 5 до 10 длительность процесса и перерегулирование убывают, при $\eta = 15$ отмечается рост времени вхождения в 5%-ную полосу стабилизации, а перерегулирование в большинстве вариантов продолжает убывать.

3. Для $\tau = 10$.

При значениях коэффициента $1 \leq L \leq 1,25$ диапазон оптимальных значений параметров следующий:

$$2,5 \leq \beta \leq 4, \quad \eta = 15.$$

В диапазоне оптимальных значений β , η и L при одновременном изменении заданий обоим регуляторам переходный процесс имеет наилучшие показатели при $\beta = 2,5$, $\eta = 15$ и $L = 1$. Для этого варианта время вхождения в 5%-ную полосу стабилизации составляет по 30 мин для U_1 и U_2 , а перерегулирование для этих же функций—29 и 10%.

Влияние коэффициента L на качество процесса здесь примерно аналогично его влиянию в случаях $\tau = 2$ и 6.

При постоянных L и η с изменением β от 1 до 4 длительность процесса в большинстве вариантов медленно убывает, перерегулирование же возрастает.

При $\eta = 5$ и любых рассмотренных значениях L и β процесс расходится; с увеличением η до 8 при $L = 0$ процесс остается неустойчивым, а для $L = 0,5$; 1; 2—сходится, но качество его не удовлетворяет поставленным условиям; с возрастанием η от 8 до 15 качество процесса в большинстве вариантов по обоим показателям улучшается.

Исследуемая САР была испытана на промышленной установке. Картограмма кратности циркуляции одного из испытаний системы (от 17 до 20 часов) приведена на рис. 5.

Во время испытаний запаздывание уровня при притоке катализатора было около 2 мин, а коэффициент L равнялся единице. Согласно результатам моделирования при этих значениях τ и L оптимальными значениями параметров β и η являются соответственно 2—3 и 10. Однако при испытании время изотропа β пришлось увеличить до 5 мин, так как при меньших значениях β регулятор входил в автоколебательный режим, возникающий в результате высокого уровня помех в сигнале измерения в сочетании со свойствами самого регулятора.

В начале испытания коэффициент усиления разомкнутой системы $\frac{1}{\eta}$ был взят минимально возможным, порядка 0,03 ($\eta = 30$). При этом время переходного процесса при изменении задания кратности циркуляции составляло около 2 часов. При увеличении $\frac{1}{\eta}$ примерно до

0,06, т. е. уменьшении η до 15, время переходного процесса сократилось до 20 мин. Несколько повышенное значение η объясняется тем, что во время испытаний было увеличено значение β .

О колебаниях расхода катализатора в реактор можно судить только косвенно: колебание температуры реактора, для которого колебания расхода являются возмущением, не превышали 2°C , поэтому можно считать, что они находились в приемлемых пределах.

Проведенная работа показала, что математическое моделирование САР на структурной модели является эффективным способом исследования САР и определения оптимальных значений параметров регуляторов.

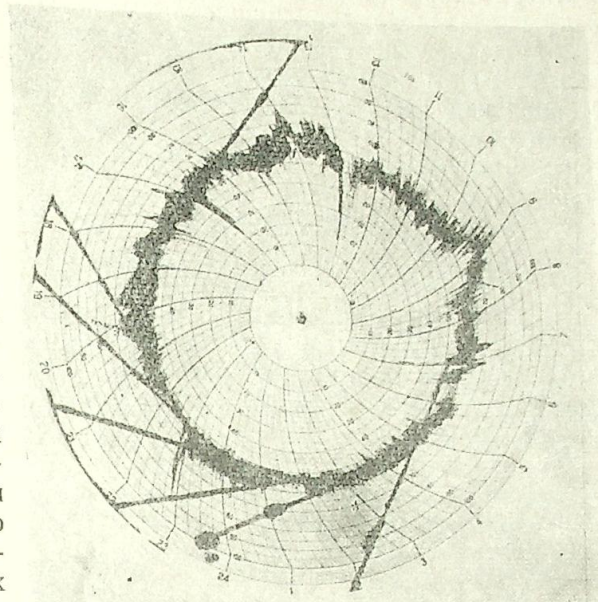


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко Б. И. Каталитический крекинг. Гостоптехиздат, 1958.
2. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, 1959.

И. Э. Ибрагимов, Т. И. Копыситски, Г. А. Каплан, З. С. Марбин

Риџи моделлэшдирмэ үсулу илэ каталитик крекинг автоматик тэнзим системинин тэкарлама циркуласија тэнзимчисинин оптималь параметрлэринин сечилмэси

ХҮЛАСЭ

Тэдгиг едилэн автоматик тэнзим системинин структур схемэ мэгалэдэ икинйи шэкилдэ кестэрилмишдир. Бурада $w_1(p) - w_2(p)$, $w_{\text{рег}_1}(p)$ вэ $w_{\text{рег}_2}(p)$ системин ајры-ајры элементлэринин в изотроп тэнзимчилэринин өтүрмэ функцијаларыдыр. Бу схемэ эсасэн тэртиб едилмиш вэ системин динамикасыны ифаде едэн тэнликлэр системин

(2) мүэјјән башланғыч шәртләри дахиліндә, 3—4-чү шәкилләрдә көстәрилән схемләр үзрә МПТ-9 электрон структур моделіндә јығылмыш вә чохла мүхтәлиф вариантлар үчүн һәлл едилмишдир.

Сабит кечикмәнин τ -нун 2, 6 вә 10 дәгигә гijмәтләриндә чәмиси 216 вариантда апарылмыш моделләшдирмәнин нәтичәсиндә тә'јин едилмиш әлвәришли вариантлар L әмсалынын даһа кичик аддымла дәјишән гijмәтләри шәраитиндә јенидән тәдгиг едилмиш вә нәтичәләр 1, 2 вә 3-чү чәдвәлләрдә верилмишдир.

Моделләшдирмәнин нәтичәләри анализ едилмиш вә вариасија едилән әјры-әјры параметрләрин системин дајаныглыгына вә кечид процесинин кәјфијјәтинә тә'сири әјдынлашдырылмышдыр. Моделләшдирмәнин нәтичәсиндә тә'јин едилмишдир ки, тәкрарлама сиркулјасија тәнзимчисинин параметрләринин оптимал гijмәтләри диапозону беләдир:

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \text{ вә } 0,75 \leq L \leq 1 \text{ олдугда } 2 \leq \beta \leq 3 \text{ вә } \eta = 10 \text{ олур,} \\ \tau &= 6 \text{ вә } 1 \leq L \leq 1,25 \text{ олдугда } 1 \leq \beta \leq 2,5 \text{ вә } \eta = 10 \text{ олур,} \\ \tau &= 10 \text{ вә } 1 \leq L \leq 1,25 \text{ олдугда } 2,5 \leq \beta \leq 4 \text{ вә } \eta = 15 \text{ олур.} \end{aligned}$$

Мәгаләнин ахырында тәдгиг едилән автоматик тәнзим системинин үзәриндә завод шәраитиндә апарылмыш тәчрүбәнин нәтичәси ријазии моделләшдирмәдән алынмыш нәтичәләрлә мүгајисә едилир.

Я. М. НАЗИЕВ, И. Ф. ГОЛУБЕВ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ УГЛЕВОДОРОДОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ И ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ

Накопившееся количество экспериментальных данных по теплопроводности предельных углеводородов при различных температурах и высоких давлениях позволяет обобщить их.

Экспериментально определена различными исследователями теплопроводность метана до 500 [6, 8, 11, 14, 15], этана до 270 [11, 13, 15], пропана до 292 [13], *n*-бутана до 1132 [12] и *n*-гексана, *n*-гептана, *n*-октана до 500 кг/см² [5].

Известно большое число теоретических и эмпирических формул, выражающих зависимость теплопроводности от температуры и давления. Применяемость большинства этих формул по различным причинам ограничена.

Для обобщения опытных данных по теплопроводности газов применяется функциональная зависимость, полученная на основе принципа соответственных состояний, в виде

$$\frac{\lambda_{p,t}}{\lambda_t} = f(\pi, \tau), \quad (1)$$

где $\lambda_{p,t}$ — теплопроводность при давлении p и температуре t ,
 λ_t — теплопроводность при атмосферном давлении и температуре t ,

$$\pi — \text{приведенное давление, } \pi = \frac{p}{p_k},$$

$$\tau — \text{приведенная температура, } \tau = \frac{T}{T_k}.$$

Соотношение (1) было проверено нами для предельных углеводородов (рис. 1). Для построения графика зависимости (1) экспериментальные данные сначала интерполировались на одинаковые значения приведенных температур. Графики строились по изотермам $\tau = 0,9$; 1,0; 1,1 и 1,2 в интервале давления π от 1 до 16. Значения λ_t брались из [4].

Из рис. 1 видно, что закон соответственных состояний дает только качественную картину изменения теплопроводности предельных углеводородов с температурой и давлением; изотермы одинаковых τ для

различных углеводородов сильно расходятся. В то же время с увеличением τ и атомности углеводородов расхождения заметно уменьшаются.

Известна зависимость, связывающая теплопроводность жидкости и газов с удельным весом:

$$\lambda_{p,t} - \lambda_t = f(\gamma), \quad (2)$$

где γ — удельный вес жидкости (газа).

Эта зависимость проверялась нами с построением графика в координатах $(\lambda_{p,t} - \lambda_t) - \gamma$ для метана, этана, пропана, *n*-бутана, *n*-гексана, *n*-гептана и *n*-октана для всех исследованных интервалов давлений и температур. Значения γ брались из [7, 10, 17].

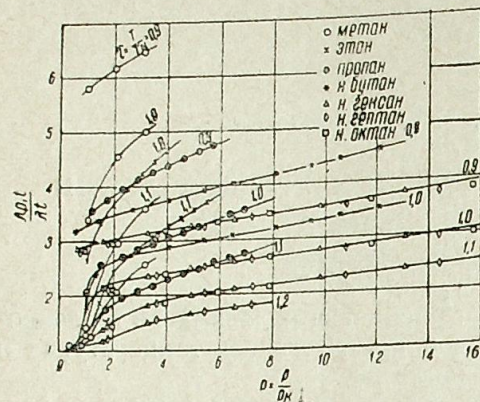


Рис. 1. Зависимость $\frac{\lambda_{p,t}}{\lambda_t}$ для предельных углеводородов от приведенного давления π при различных приведенных температурах τ .

зависимости (2). Разброс точек для каждого углеводорода около наиболее вероятной кривой, соединяющей экспериментальные точки, в среднем составляет 2—3%. Причем большие отклонения имеют место для газообразного состояния.

Соответственно зависимости (2) Н. Б. Варгафтик [2] предложил следующее эмпирическое уравнение:

$$\lambda_{p,t} = \lambda_t + B \gamma^n, \quad (3)$$

где B и n — постоянные, определяемые для каждого вещества по экспериментальным данным.

Наши вычисления и вычисления других исследователей показывают, что уравнение (3) справедливо лишь в ограниченном интервале удельного веса.

Обобщающую зависимость теплопроводности от удельного веса для класса предельных углеводородов можно получить, пользуясь законом соответственных состоя-

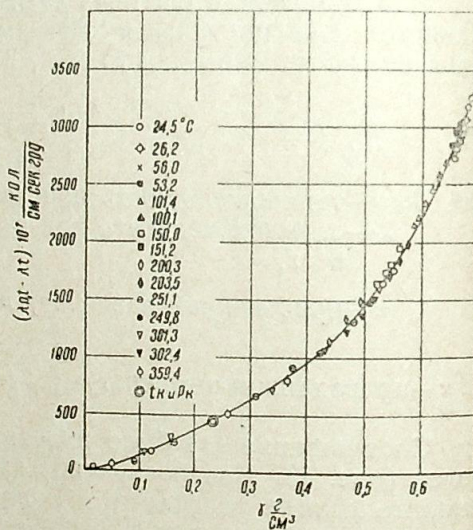


Рис. 2. Зависимость теплопроводности *n*-гексана от удельного веса.

Таблица 1
Зависимость теплопроводности предельных углеводородов от удельного веса $(\lambda_{p,t} - \lambda_t) \cdot 10^7$, кал/см·сек·°C

γ , г/см ³	Метан CH ₄	Этан C ₂ H ₆	Пропан C ₃ H ₈	<i>n</i> -Бутан C ₄ H ₁₀	<i>n</i> -Гексан C ₆ H ₁₄	<i>n</i> -Гептан C ₇ H ₁₆	<i>n</i> -Октан C ₈ H ₁₈
0,05	157	100	85	85	60	57	56
0,10	380	235	195	193	150	140	140
0,15	650	385	315	300	250	240	237
0,20	950	550	440	420	365	350	348
0,25	1316	740	582	555	490	475	475
0,30	1800	960	730	716	628	615	610
0,35	2430	1225	905	907	785	764	760
0,40	3280	1575	1110	1120	980	923	935
0,45	4275	2050	1360	1364	1176	1125	1155
0,50	—	—	1740	1645	1455	1382	1410
0,55	—	—	2285	2030	1800	1710	1715
0,60	—	—	—	2575	2230	2125	2090
0,65	—	—	—	—	2760	2575	2520
0,70	—	—	—	—	3400	3115	3025
0,75	—	—	—	—	—	3695	3600

ний, подобно тому, как это было сделано в [3] для зависимости вязкости газов и жидкостей от температуры и давления.

Согласно принципу соответственных состояний можно полагать, что значения $\frac{\lambda_{p,t} - \lambda_t}{\lambda_{(p,t)_k} - \lambda_{t_k}}$ в зависимости от $\frac{\gamma}{\gamma_k}$ будут располагаться

на одной и той же кривой для всех алканов.

Здесь $\lambda_{(p,t)_k}$ — теплопроводность при критическом давлении и критической температуре,

λ_{t_k} — теплопроводность при атмосферном давлении и критической температуре,

γ_k — удельный вес при критическом давлении и критической температуре.

Чтобы применить такую зависимость, прежде всего необходимо знать величину $\Delta\lambda_k = \lambda_{(p,t)_k} - \lambda_{t_k}$ для каждого углеводорода. Эту величину можно найти из графиков зависимости (2), зная значение удельного веса в критической точке.

Таблица 2

Критические величины для предельных углеводородов

Углеводороды	Критическое давление, ата	Критическая температура, °K	γ_k , г/см ³	$\lambda_{t_k} \cdot 10^7$, кал/см·сек·°C	$\Delta\lambda_k \cdot 10^7$, кал/см·сек·°C	$\lambda_{(p,t)_k} \cdot 10^7$, кал/см·сек·°C
Метан	47,3	191,06	0,1623	487	720	1207
Этан	49,8	305,46	0,203	534	561	1095
Пропан	43,4	369,96	0,224	650	505	1155
<i>n</i> -Бутан	37,2	425,96	0,2275	755	488	1243
<i>n</i> -Пентан	34,1	470,36	0,234	823	—	—
<i>n</i> -Гексан	30,6	507,96	0,234	872	453	1325
<i>n</i> -Гептан	27,8	539,96	0,2341	895	437	1332
<i>n</i> -Октан	25,5	569,36	0,2327	910	427	1337

В табл. 2 приводятся найденные нами значения критических величин для алканов.

На рис. 3 представлена зависимость

$$\frac{\lambda_{p,t} - \lambda_t}{\lambda_{(p,t)_K} - \lambda_{t_K}} = f\left(\frac{\gamma}{\gamma_K}\right), \quad (4)$$

из которой видно, что все экспериментальные данные предельных углеводородов лежат на одной кривой со средним отклонением $\pm 3\%$, т. е. в пределах допускаемых при опытах ошибок измерений. Таким образом, имеет место весьма хорошее подтверждение закона соответственных состояний для класса предельных углеводородов в координатах $\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_K} - \frac{\gamma}{\gamma_K}$.

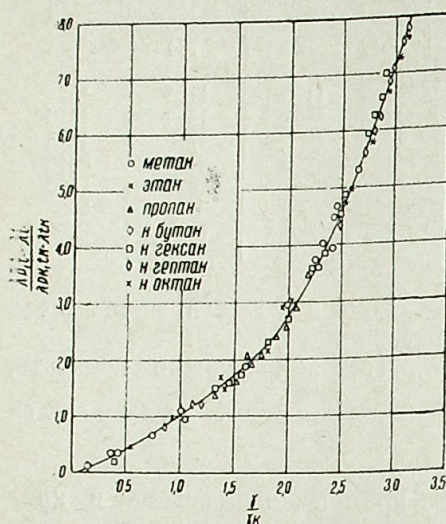


Рис. 3. Теплопроводность предельных углеводородов в координатах

$$\frac{\lambda_{p,t} - \lambda_t}{\lambda_{(p,t)_K} - \lambda_{t_K}} = \frac{\gamma}{\gamma_K}$$

нению энтропии $\Delta s = s'_1 - s_1$; $q_{\Delta s} = \lambda_{\Delta s}(t'_1 - t_1)$,
 q — поток тепла при изменении энтропии на $s_2 - s_1$;
 $q = \lambda(t_2 - t_1)$.

Зависимость (5) мы использовали для обобщения экспериментальных данных по теплопроводности n -гексана и n -гептана. Для теплопроводности метана такое обобщение уже сделано Усмановым [9]. При этом он получил хороший результат.

Обобщение по этану, пропану и n -бутану не представлялось возможным, так как сведения по теплопроводности этих углеводородов охватывают небольшой диапазон температур.

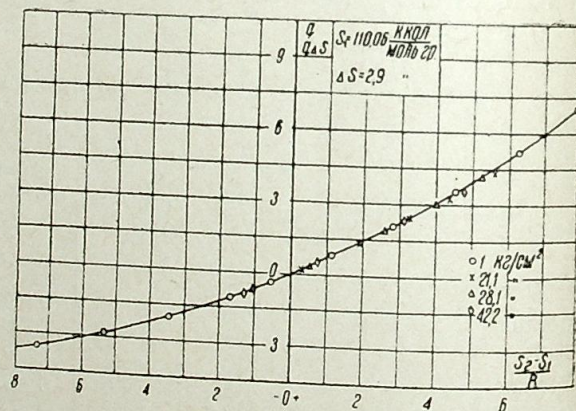


Рис. 4. Зависимость $\frac{q}{q_{\Delta s}}$ от $\frac{s_2 - s_1}{R}$ для n -гексана

Значение энтропии n -гексана и n -гептана брались из [16, 18]. Для выражения значений энтропии в абсолютной величине пользовались литературой [1].

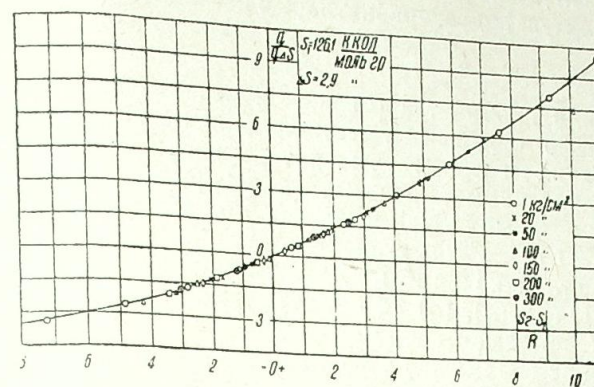


Рис. 5. Зависимость $\frac{q}{q_{\Delta s}}$ от $\frac{s_2 - s_1}{R}$ для n -гептана

На рис. 4 и 5 проиллюстрированы результаты обобщений по (5). Как видно из рисунков, экспериментальные точки хорошо располагаются на одной кривой зависимости с незначительным разбросом (порядка 3%). Значительные отклонения наблюдаются лишь около кривой насыщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вукалович М. П., Кирилин В. А., Ремизов С. А., Силецкий В. С., Тимофеев В. Н. Термодинамические свойства газов. Машгиз, 1953.
2. Варгафтик Н. Б. Докторск. дисс. ЭНИН, 1952.
3. Голубев И. Ф. Вязкость газов и газовых смесей. Физматгиз, 1959.
4. Голубев И. Ф., Назиев Я. М. Изв. АН. Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1961, № 5.
5. Голубев И. Ф., Назиев Я. М. Труды Энергич. ин-та АН Азерб. ССР, т. 5, 1962.
6. Павлович Н. В. Газовая промышленность, 1959, № 5.
7. Павлович Н. В., Тимрот Д. Л. Теплоэнергетика, 1958, № 4.
8. Столяров Е. А., Ипатьев В. В., Теодорович В. П., ЖФХ, 1950, т. 24, вып. 2 и 3.
9. Усманов А. Г. Сб. Теплопередача и тепловое моделирование. Изд-во АН СССР, 1959.
10. Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов, вып. 2. Под ред. М. Д. Тиличеева. ГНТК, 1947.
11. Keyes F. Trans. of the ASME, 1954, vol. 76, № 5; 1955, vol. 77, № 8.
12. Kramer F. R. and Comings E. W. J. Chem. and Engin. Data, 1960, vol. 5, № 4.
13. Leng D. E. and Comings E. W. Ind. and Engin. Chem., 1957, vol. 49, № 12.
14. Lenoir J. M. and Comings E. W. Chem. Engin. Progr., 1951, vol. 47, № 5.
15. Lenoir J. M., Junk W. A. and Comings E. W. Chem. Engin. Progr., 1953, vol. 49, № 10.
16. Stuart E. B., Yu K. T. and Coull J. Chem. Engin. Progr., 1950, vol. 46, № 6.
17. Timmermans J. Physico-chemical constants of pure organic compounds. N. Y., 1950.
18. Weber T. H. AIChE Journal, 1956, vol. 2, № 4.

Мүхтәлиф температурда вә жүксәк тәзјигдә дојмуш гидрокарбонатларын истиликкечирмәси

ХУЛАСӘ

Дојмуш гидрокарбонатларын истиликкечирмәсинә аид әдәбијатда олан мәлуматлар онларын үмумиләшдирилмәсинә һал-һазырда им- кан верир. Мүхтәлиф тәдгигатчылар тәрәфиндән експериментал јолла гидрокарбонатлардан метанын истиликкечирмәси 500, етанын 270, пропанын 292, *n*-бутанын 1132, *n*-һексанын, *n*-һептанын вә *n*-октанын исти- ликкечирмәси 500 кг/см^2 тәзјигинә гәдәр тәјин олунмушдур.

Мәгаләдә истиликкечирмә мәлуматларыны үмумиләшдирмәк үчүн мәлум олан (1), (2), (3), (5) вә мүәллифләрин тәклиф етдији (4) асы- лылыгларындан истифадә едилмишдир.

Функционал асылылыг (1) кејфијјәт чәһәтинчә истиликкечирмәнин температур вә тәзјигдән асылылыгыны дүзкүн әкс етдирдијинә бах- мајараг, дојмуш гидрокарбонатлар синфи үчүн јарамыр (1-чи шәклә бах). Истиликкечирмәнин маје вә газларын хүсуси чәкиси илә әла- гәсини көстәрән асылылыг (2) метана, етана, пропана, *n*-бутана, *n*-һек- сана, *n*-һептана вә *n*-октана тәтбиг едилмәклә јохланылмышдыр. Јох- лама көстәрмишдир ки, истиликкечирмәнин сыхлыгдан биртәрәфли асылылыгы доғрудур (2-чи шәклә бах). Н. Б. Варгафтикин тәклиф ет- дији тәнлик (3) јалныз мәһдуд сыхлыг интервалында дүзкүндүр.

Ујғун һаллар ганунундан алынмыш вә мүәллифләрин тәклиф етдик- ләри функционал асылылыг (4) бүтүн дојмуш гидрокарбонатлар син- фи үчүн чох јахшы нәтичә вермишдир (3-чү шәклә бах).

Ејни заманда, мәгаләдә А. Г. Усмановун истиликкечирмәнин ен- тропијадан асылылыгыны верән тәнлији (5) *n*-һексана вә *n*-һептана тәтбиг едилмәклә јохланылмыш вә кифајәтләндиричи нәтичә алын- мышдыр (4—5-чи шәкилләр).

Ф. Г. ГУСЕЙНОВ, Ч. К. НАБИБЕКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РАБОТЫ КОМПАУНДИРОВАННОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ ПОМОЩИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ТИПА МПТ-9

Исследуемая схема (рис. 1) была предложена в [5] для регули- рования возбуждения самовозбуждающихся генераторов малой мощ- ности частотой в 400 Гц при изолированной работе, а затем исследо- вана в [6] применительно к самовозбуждающимся генераторам частотой в 50 Гц как при изолированной, так и при параллельной работе. В дальнейшем данная схема была исследована и внедрена на генера- торе средней мощности с машинным возбудителем [1, 4]. Простота, быстроедействие, хорошие регулировочная и форсировочная способно- сти данной схемы компаундирования побудили рассмотреть возмож- ность применения ее также для крупных турбогенераторов.

Ниже приводятся результаты исследования устойчивости данной схемы при помощи математической моделирующей машины „МПТ-9“. Такое исследование представляет практический и теоретический ин- терес, так как одновременно оценивается количественная и качествен- ная характеристики системы регулирования, при малых колебаниях.

Как известно [3], при исследовании системы регулирования на устойчивость обычно ограничиваются только рассмотрением режима холостого хода генератора. Такое рассмотрение не дает полной ха- рактеристики устройства компаундирования, не выявляет особенности и возможности компаундированного генератора.

Более полной оценкой устойчивости системы автоматического ре- гулирования возбуждения является исследование режима холостого хода и нагрузочных режимов при параллельной работе регулируемо- го генератора с мощной энергосистемой с определением при этом области значений коэффициентов усиления по напряжению и току.

Однако такие исследования аналитическими методами представ- ляют большие трудности. Поэтому в настоящее время они выполня- ются при помощи вычислительных машин.

Рассмотрим устойчивость параллельной работы генератора мощ- ностью 12,5 Мва , оборудованного системой автоматического регули- рования возбуждения (рис. 1) с энергосистемой бесконечной мощно- сти.

Исследуемая схема была ранее проверена [2] на устойчивость в семнадцати исходных режимах при оптимальном значении коэффици- ента усиления, которые дали положительные результаты. В настоя-

Малые колебания компаундированного генератора, работающего параллельно с системой, выражаются следующими уравнениями:

1. Уравнения электромагнитной мощности:

(1)

(2)


$$-\Delta P = (T_1 P^2 + Dp) \Delta \delta. \quad (3)$$
$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial I}{\partial Fd} \Delta Fd. \quad (4)$$
$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial \delta} \Delta \delta + \frac{\partial U}{\partial E d} \Delta E d. \quad (5)$$
$$\Delta E d_e = \Delta E d + T d_{op} \Delta E' d. \quad (5)$$
$$\Delta E d_e = \frac{K_u \Delta U + K_l \Delta I}{1 + T_B \rho} \quad (7)$$


S_{Ed} , M_{Ed} , $S_{E'd}$, $M_{E'd}$ — режимные коэффициенты;

K_1 — коэффициент усиления по току, определяется из условия устойчивости и поддержания номинального напряжения при номинальной нагрузке.

Ниже приводим численные значения постоянных и режимных коэффициентов, необходимых для расчета устойчивости при работе генератора на шины бесконечной мощности при нагрузке $p = 0,75$ и $Q = 0,75$ (в относительных единицах):

Параметры	Величина	Параметры	Величина
T_1	7,5 сек	D	0,32 сек
T'_{d_0}	7,53 сек	$\frac{\partial U}{\partial \delta}$	0,4
S_{Ed}	1,32	$\frac{\partial \delta}{\partial I}$	0,55
$S_{E'd}$	2,0	$\frac{\partial d}{\partial U}$	-0,0476
M_{Ed}	0,28	$\frac{\partial U}{\partial E_d}$	0,038
$M_{E'd}$	0,18	K_1	1,68
T_B	0,27 сек	K_{II}	1,04

Приведенные значения даны в относительных единицах, когда за базисные величины приняты:

$$I_0 = I_n = 1150 \text{ а и } U_0 = U_n = 6300 \text{ в.}$$

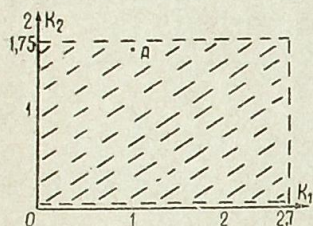


Рис. 3

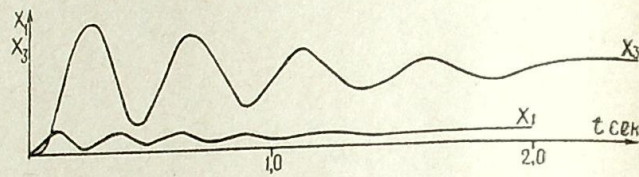


Рис. 4

Подставляя значения этих коэффициентов в уравнения (1—7) и вводя обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta \delta &= X_1; & \Delta E_d &= X_2; & \Delta E_{d_e} &= X_3 \\ \Delta I &= X_4; & \Delta U &= X_5; & K_4 &= K_1 \text{ и } K_1 = K_2, \end{aligned}$$

получим следующую систему машинных уравнений с учетом масштаба времени:

$$\left. \begin{aligned} 1) & -pX_2 = -2,43pX_1 + 0,0086X_2 - 0,0086X_3 \\ 2) & -p^2X_1 = 0,00427pX_1 + 0,00176X_1 + 0,000374X_2 \\ 3) & X_4 = 0,4X_1 + 0,55X_2 \\ 4) & X_5 = -0,0476X_1 + 0,038X_2 \\ 5) & -pX_3 = -0,37K_1X_5 - 0,37K_2X_4 + 0,38X_2 \end{aligned} \right\} (8)$$

На рис. 2 приведена структурная схема набора системы (8) на модели.

Прикладывая возмущение, равное (-0,0133), к правой части уравнения (8, 2), соответствующее увеличению мощности турбины на 10 % и варьируя коэффициентами K_1 и K_2 , строим область устойчивости компаундированного генератора на плоскости K_1, K_2 (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что

1) значение коэффициента K_1 , при котором система остается устойчивой, находится в области $0 < K_1 < 2,7$;

2) максимальное значение коэффициента K_2 , при котором система остается устойчивой, составляет $K_{2\max} = 1,75$, а минимальное $K_{2\min} = 0,006$;

3) при работе схемы регулирования с расчетными коэффициентами усиления ($K_1 = 1,04$ и $K_2 = 1,68$, точка A на рис. 3) минимальный запас устойчивости составляет 4 %.

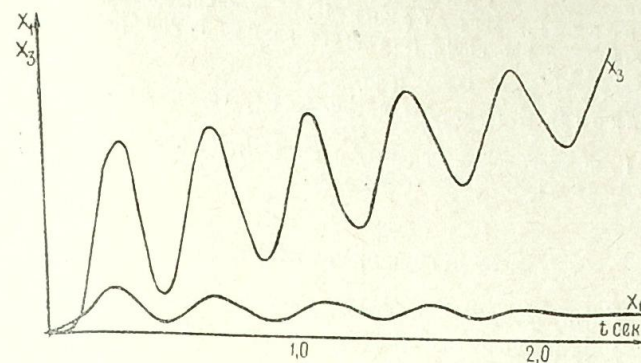


Рис. 5

На рис. 4 приведена кривая изменения $X_1(\Delta \delta)$ и $X_3(\Delta E_d)$ при $K_1 = 1,04$; $K_2 = 1,68$, а на рис. 5 те же функции при неустойчивом процессе, когда $K_1 = 0,8$; $K_2 = 2$ (точка B рис. 3).

На рис. 6 проведена область устойчивости на плоскости коэффициентов K_1 и K_2 , когда в схему включено стабилизирующее звено в виде отрицательной обратной связи, охватывающей возбудитель (B), выпрямитель (B_1) и трансформаторы (ТП).

Сравнивая рис. 3 и 6, видим, что наличие в схеме регулирования стабилизирующего звена увеличивает область и запас устойчивости.

На рис. 7 приведены кривые изменения X_1 и X_3 при $K_1 = 1,04$; $K_2 = 1,68$.

Сравнивая кривые X_1 и X_3 , приведенные на рис. 4 и 7, видим, что при наличии стабилизирующего звена в системе регулирования резко улучшаются количественные и качественные показатели

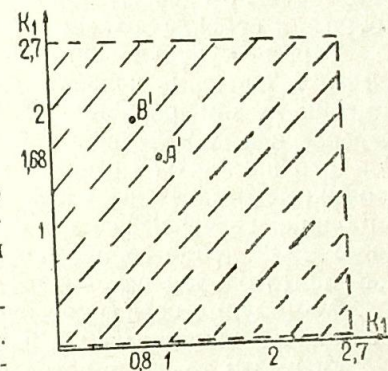


Рис. 6

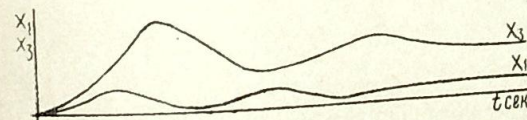


Рис. 7

системы регулирования (уменьшается время переходного процесса, число колебаний и перерегулирование).

В результате исследований можно сделать следующие выводы:

1. Система регулирования обеспечивает устойчивую работу генератора параллельно с мощной системой при заданном статизме (порядка 1 %) без стабилизирующего звена с минимальным запасом устойчивости в 4 %.

2. Включение стабилизирующего звена на схему резко увеличивает запас и область устойчивости и улучшает количественные и качественные показатели данной системы регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Ф. Г., Калантаров М. И., Набибеков Ч. К. Научный отчет по фазовому компаундированию синхронных генераторов за 1958 г. Лаборатория энергосистем ЭНИН АН Азерб. ССР.
2. Гусейнов Ф. Г., Набибеков Ч. К. Научный отчет по исследованию устойчивости компаундированного генератора за 1961 г. Лаборатория энергосистем ЭНИН АН Азерб. ССР.
3. Костюк О. М. Дисс. Киев, 1960.
4. Набибеков Ч. К. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1960, № 3.
5. Сторм Г. Ф. Магнитные усилители. М., ИЛ, 1960.
6. Талышинский Р. И. Дисс. М., 1955.

Ф. Г. Гусейнов, Ч. К. Набибеков

Компаундланан паралел ишлэжэн кенераторун
дажаныгынын МПТ-9 типли несаблажычы
машында арашдырылмасы

ХҮЛАСӘ

Тәһлил олунан фаз компаундланмасы схеми кичик вә орта күчлү синхрон машиналарда тәтбиг олунмуш вә мүсбәт нәтичә вермишдир. Мәгаләдә схемин бөјүк күчлү турбогенераторда тәтбиг олунмасы илә әлағәдар олараг, дажаныгыг мәсәләләринин структур моделиндән истифадә етмәклә јохланымасынын нәтичәләри верилмишдир.

Турбин күчүнүн сабит олмасы һалы үчүн системлә паралел ишлэжән вә тәсирләнмә чәрәјаны фаз компаундланмасы гурғусу илә автоматик тәнзим олунан 12,5 мва күчлү кенераторун хәттиләшмиш диференсиал тәнликләри јазылмыш вә бу тәнликләрин әмсаллары $P = 0,75$ вә $Q = 0,75$ режими үчүн мүәјјән едилмишдир. Бу тәнликләр мигјас нәзәрә алынмагла МПТ-9 моделиндә јығылдыгдан сонра кәркинлик вә чәрәјана көрә күчләнмә әмсаллары (K_n вә K_y) мүстәвсиндә D —бөлүнмә сәрһәдди гурулмушдур; бу сәрһәд стабилләшдиричи әкс рабитә олдуғу вә олмадығы һаллар үчүн көстәрилмишдир.

D —бөлүнмә сәрһәддини гурмагла K_n вә K_y әмсалларынын дајанаглы иш режимини тәмин едән бүтүн гијмәтләри тапылмыш олур.

Апарылан тәдгигат нәтичәсиндә тапылмышдыр ки, стабилләшдиричи әкс рабитә сечмәклә кенераторун дајаныгы ишләмәсинин сәрһәддини хејли кенишләндирмәк вә кечид просесинин кедишатын јажшылашдырмаг мүмкүн олур.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазийат вә техника елмләри серијасы, 1962, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 6

А. А. АББАСОВ

ОБ ОДНОМ АВТОМОДЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ГОРЯЧИМ АГЕНТОМ ИЗ ПЛАСТА

Решению задачи о распределении температуры при вытеснении нефти горячим агентом из пласта посвящен ряд работ [3—6 и др.]. При решении этой задачи в указанных работах граница температурного поля, на которой значение температуры сохраняется постоянным во времени и равным первоначальной пластовой температуре, принималась находящейся в бесконечности.

Ранее нами было определено распределение температуры по зонам с подвижными границами с учетом различия физических и тепловых свойств отдельных зон и без учета тепловой инерции и теплопотерь через кровлю и подошву пласта [2].

В настоящей статье эта задача решается в более общей постановке с учетом инерционного члена.

Исходя из физических соображений, очевидно, что в начальный период времени граница температурного поля будет перемещаться с большей скоростью, чем в последующий период. Учитывая это обстоятельство, при решении задачи примем следующий закон перемещения этой границы: $R_2 = C\sqrt{t}$, где R_2 —расстояние от центра нагнетательной скважины до границы температурного поля; C —некоторая постоянная.

§ 1. Формулировка задачи. Процесс нагревания нефтяного пласта при неустановившемся и плоскорадиальном движении горячего агента описывается следующими уравнениями:

$$c_i \rho_i \frac{\partial \Delta T_i}{\partial t} + \frac{q c_i \rho_i}{2 \pi r h m} \frac{\partial \Delta T_i}{\partial r} = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 \Delta T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T_i}{\partial r} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (1, 1)$$

Начальные и граничные условия сформулируем следующим образом:

$$\Delta T_i(r, 0) = 0; \quad (1, 2)$$

$$\Delta T_1(0, t) = \Delta T_n(t > 0); \quad (1, 3)$$

$$\Delta T_1[R_1(t), t] = \Delta T_2[R_1(t), t]; \quad (1, 4)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \Delta T_1[R_1(t), t]}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial \Delta T_2[R_1(t), t]}{\partial r}; \quad (1, 5)$$

$$\Delta T_2[R_2(t), t] = 0, \quad (1, 6)$$

где $\Delta T_i = T_i - T_0$ — прирост температуры в текущей точке пласта относительно его начальной температуры;
 T_0 — начальная пластовая температура;
 $\Delta T_n = T_n - T_0$; T_n — температура нагнетаемого горячего агента на забое скважин;
 λ_1 ; c_1 ; ρ_1 — соответственно теплопроводность, теплоемкость и плотность насыщенной породы;
 h — мощность пласта;
 m — пористость пласта;
 q — расход нагнетаемого горячего агента;
 $R_1(t)$ — расстояние от центра нагнетательной скважины до границы горячего агента;
 $i=1, 2$. Индекс „1“ соответствует величинам, характеризующим первую зону, а „2“ — вторую зону.

Как известно $R_1(t)$ при $q = \text{const}$ и без учета радиуса скважины определяется из $R_1 = b\sqrt{t}$, где

$$b = \sqrt{\frac{q}{\pi h m}}.$$

§ 2. Решение задачи. Для удобства введем безразмерные величины:

$$x = \frac{r}{R}; \quad x_1 = \frac{R_1}{R}; \quad x_2 = \frac{R_2}{R}; \quad \tau = \frac{\lambda_1 t}{c_1 \rho_1 R^2};$$

$$U_i = \frac{\Delta T_i}{\Delta T_n}; \quad k = Pe_1 - 1; \quad n = Pe_1 - a$$

Pe_1 , Pe_2 — параметры Пекле:

$$Pe_1 = \frac{q}{2\pi h m a_1}; \quad Pe_2 = \frac{q}{2\pi h m a_2}; \quad a = \frac{a_2}{a_1}; \quad \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

где R — расстояние между нагнетательной и эксплуатационной скважинами;

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1}; \quad a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2}$$

Подставив эти безразмерные величины в (1, 1) и (1, 2) — (1, 6), получим:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{k}{x} \frac{\partial U_1}{\partial x}; \quad (2, 1)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{n}{x} \frac{\partial U_2}{\partial x}; \quad (2, 2)$$

$$U_1(x, 0) = U_2(x, 0) = 0; \quad (2, 3)$$

$$U_1(1, \tau) = 1 \quad (\tau > 0); \quad (2, 4)$$

$$U_1(x_1, \tau) = U_2(x_1, \tau); \quad (2, 5)$$

$$\frac{\partial U_1(x_1, \tau)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial U_2(x_1, \tau)}{\partial x}; \quad (2, 6)$$

$$U_2(x_2, \tau) = 0; \quad (2, 7)$$

$$x_1 = a\sqrt{\tau}; \quad (2, 8)$$

$$x_2 = \beta\sqrt{\tau}; \quad (2, 9)$$

где

$$a = b\sqrt{\frac{c_1 \rho_1}{\lambda_1}}; \quad \beta = C\sqrt{\frac{c_1 \rho_1}{\lambda_1}}.$$

Решения уравнений (2, 1) и (2, 2) будут автомодельны и с учетом (2, 3), (2, 4) и (2, 7) имеют вид:

$$U_1 = 1 + A_1 \int_0^{\xi} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi; \quad (2, 10)$$

$$U_2 = A_2 \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\xi} \xi^n e^{-\xi^2} d\xi, \quad (2, 11)$$

где $\xi = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}$; A_1 , A_2 — постоянные интегрирования, определяются из условий (2, 5) и (2, 6).

Для определения β из уравнения баланса тепла [2] имеем:

$$\frac{n_1(k+1)}{4} = n_2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} U_1 \xi d\xi + \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} U_2 \xi d\xi, \quad (2, 12)$$

где

$$n_1 = \frac{c_{ж} \rho_{ж} T_n}{c_2 \rho_2 \Delta T_n}; \quad n_2 = \frac{c_1 \rho_1}{c_2 \rho_2};$$

$c_{ж}, \rho_{ж}$ — соответственно теплоемкость и плотность нагнетаемого горячего агента.

В частном случае¹, когда $\lambda = 1$; $n_2 = 1$, получим:

$$U = 1 - \frac{\int_0^{\xi} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi}{\int_0^{\frac{\beta}{2}} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi}; \quad (2, 13)$$

$$\frac{n_1(k+1)}{4} = \frac{\beta^2}{8} - \frac{\int_0^{\frac{\beta}{2}} \left(\int_0^{\xi} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi \right) \xi d\xi}{\int_0^{\frac{\beta}{2}} \xi^k e^{-\xi^2} d\xi}. \quad (2, 14)$$

Нами получены расчетные формулы для любых значений параметра Pe . Учитывая, что обычно в реальных условиях $Pe \gg 4$, ниже

¹ Этот случай, когда граница температурного поля меняется во времени по известному закону, определяемому из уравнения теплового баланса, содержащего искомую функцию, несмотря на то, что при решении нестационарных задач с подвижными границами применение операционного метода математически не считается строгим, решена нами ранее операционным методом [1, 2]; с целью получить качественную и предельную характеристики данного физического процесса.

приводятся расчетные формулы лишь для случаев, когда $Pe \geq 4$ и четное:

$$\begin{aligned}
 U = 1 - & \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{1}{2} \xi^{k-1} e^{-\xi^2} - \\
 & - \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+1}{2}}} - \frac{1}{2} \beta_1^{k-1} e^{-\beta_1^2} - \\
 & - \frac{k-1}{2^2} \xi_1^{k-3} e^{-\xi_1^2} - \frac{(k-1)(k-3)}{2^3} \xi_1^{k-5} e^{-\xi_1^2} - \\
 & - \frac{k-1}{2^2} \beta_1^{k-3} e^{-\beta_1^2} - \frac{(k-1)(k-3)}{2^3} \beta_1^{k-5} e^{-\beta_1^2} - \\
 & - \frac{(k-1)(k-3)(k-5)}{2^4} \xi_1^{k-7} e^{-\xi_1^2} - \dots - \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\xi^2} - \\
 & - \frac{(k-1)(k-3)(k-5)}{2^4} \beta_1^{k-7} e^{-\beta_1^2} - \dots - \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\beta_1^2} \quad (2, 15) \\
 \frac{n_1(k+1)}{4} = & \frac{\beta_1^2}{2} - \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+3}{2}}} \beta_1^2 - \\
 & - \frac{k+1}{2} \cdot \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+3}{2}}} + \frac{1}{2^2} \beta_1^{k-1} e^{-\beta_1^2} + \\
 & - \frac{1}{2} \beta_1^{k-1} e^{-\beta_1^2} - \frac{k-1}{2^2} \beta_1^{k-3} e^{-\beta_1^2} - \\
 & + \frac{2(k-1)}{2^3} \beta_1^{k-3} e^{-\beta_1^2} + \frac{3(k-1)(k-3)}{2^4} \beta_1^{k-5} e^{-\beta_1^2} + \\
 & - \frac{(k-1)(k-3)}{2^3} \beta_1^{k-5} e^{-\beta_1^2} - \\
 & + \frac{4(k-1)(k-3)(k-5)}{2^5} \beta_1^{k-7} e^{-\beta_1^2} + \frac{5(k-1)(k-3)(k-5)(k-7)}{2^6} \beta_1^{k-9} e^{-\beta_1^2} + \\
 & - \frac{(k-1)(k-3)(k-5)}{2^4} \beta_1^{k-7} e^{-\beta_1^2} - \\
 & + \dots + \frac{k+1}{2} \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+3}{2}}} e^{-\beta_1^2} - \\
 & - \dots - \frac{(k-1)(k-3) \dots [k-(k-2)]}{2^{\frac{k+1}{2}}} e^{-\beta_1^2} \quad (2, 16)
 \end{aligned}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\beta}{2}.$$

Предварительный анализ показал, что в практических пределах изменения значений параметров, входящих в уравнение (2, 16), $\beta_1 > 3$. Тогда расчетные формулы (2, 15), (2, 16) намного упрощаются. Результатам расчетов будет посвящена отдельная статья.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов А. А. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1961, № 2.
2. Аббасов А. А., Кисель В. А. Научн. зап. УкрНИИПроекта, 1961, вып. 4.
3. Малофеев Г. Е. Изв. вузов. Нефть и газ, 1959, № 9.
4. Малофеев Г. Е. Изв. вузов. Нефть и газ, 1960, № 7.
5. Рубинштейн Л. И. Сб. трудов Уфимского нефтяного ин-та, вып. 2, 1958.
6. Чекалюк Э. Б. НХ, 1955, № 4.

А. Э. Аббасов

Лајдан нефтин гыздырылмыш акентлә сыхышдырылмасына
аид мәсәләнин бир автомодел һәлли һаггында

ХҮЛАСӘ

Лајдан нефтин гыздырылмыш акентлә сыхышдырылмасы заманы температурун пајланмасына аид бир чох мәсәләләр һәлл едилмишдир. Бурада исә лајдан нефтин сыхышдырылмасы заманы температурун пајланмасына аид мәсәләнин бир автомодел һәлли верилмишдир.

Хүсуси қал олараг, нефтли вә ишчи акентин аид олдуғу зоналары характеризә едән истилик вә физики кәмијәтләрин гијмәтләрини ејни көтүрдүкдә мәсәләнин һәлли садәләшир. Бу һал үчүн һесабат формуллары (2, 15) вә (2, 16) шәкилләриндә алынмышдыр.

Тәхмини јохламадан сонра белә нәтичәјә кәлмәк олар ки, һесабат заманы (2, 15), (2, 16) формулларынын сурәт вә мәхрәчләриндә ишгирак едән һәдләрин чохуну верилмиш кәмијәтләрин гијмәтләриндән асылы олараг атмаг олар. Бу барәдәки һесабата ајрыча мәгалә һәср олунчагдыр вә (2, 15), (2, 16) формуллары ајры-ајры һаллар үчүн садәләшмиш шәкилдә вериләчәкдир.

Н. Д. ДЖАФАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБВОДНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ В ПЛАСТЕ КОЛЬЦЕВЫХ БАТАРЕЙ НАГНЕТАТЕЛЬНЫХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СКВАЖИН

Особенности стягивания контура нефтеносности к кольцевой батарее эксплуатационных скважин по характерным (главной и нейтральной) линиям исследовались В. Н. Щелкачевым [6]. Эта же задача в общем случае (для любых линий тока) решена К. Н. Джалиловым [2].

В настоящей статье рассматриваются вопросы стягивания контура нефтеносности к кольцевой батарее эксплуатационных скважин при наличии в пласте кольцевой батареи нагнетательных скважин (см. рис. 1).

Предположим, что в бесконечном однородном пласте имеются кольцевые батареи n эксплуатационных и нагнетательных скважин. Различием в вязкостях нефти и воды пренебрегаем и батареи в отдельности считаем равнодебитными. Характеристическая функция течения будет иметь следующий вид:

$$W(z) = -\frac{q_1}{2\pi} [\ln(z^n - R_1^n) - s \ln(z^n - R_2^n)], \quad (1)$$

где

$$z = x + iy, \quad s = \frac{q_2}{q_1} \quad (0 \leq s < \infty);$$

q_1 и q_2 — дебиты эксплуатационной и нагнетательной скважин;
 R_1 и R_2 — радиусы кольцевых батарей эксплуатационной и нагнетательной скважин.

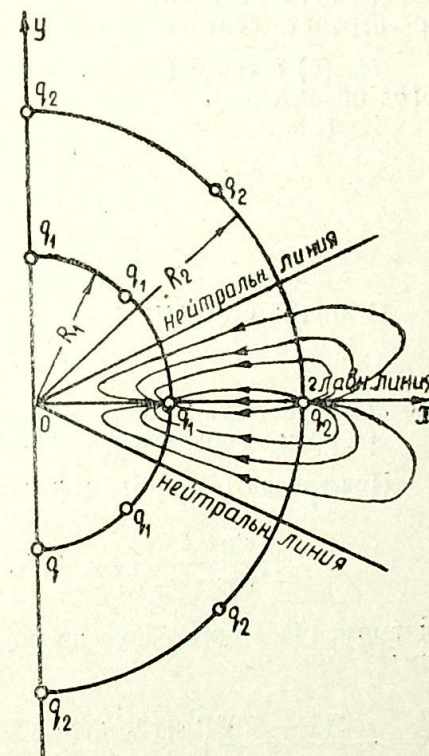


Рис. 1.

Н. Д. ДЖАФАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБВОДНЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ В ПЛАСТЕ КОЛЬЦЕВЫХ БАТАРЕЙ НАГНЕТАТЕЛЬНЫХ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ СКВАЖИН

Особенности стягивания контура нефтеносности к кольцевой батарее эксплуатационных скважин по характерным (главной и нейтральной) линиям исследовались В. Н. Щелкачевым [6]. Эта же задача в общем случае (для любых линий тока) решена К. Н. Джалиловым [2].

В настоящей статье рассматриваются вопросы стягивания контура нефтеносности к кольцевой батарее эксплуатационных скважин при наличии в пласте кольцевой батареи нагнетательных скважин (см. рис. 1).

Предположим, что в бесконечном однородном пласте имеются кольцевые батареи n эксплуатационных и нагнетательных скважин. Различием в вязкостях нефти и воды пренебрегаем и батареи в отдельности считаем равнодебитными. Характеристическая функция течения будет иметь следующий вид:

$$W(z) = -\frac{q_1}{2\pi} [\ln(z^n - R_1^n) - s \ln(z^n - R_2^n)], \quad (1)$$

где

$$z = x + iy, \quad s = \frac{q_2}{q_1} \quad (0 \leq s < \infty);$$

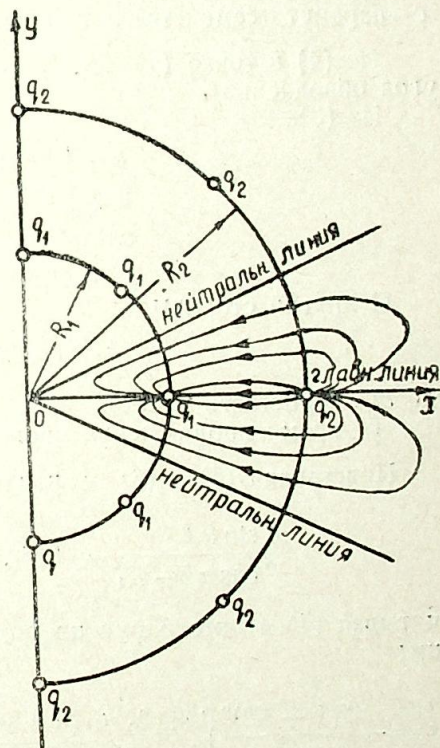


Рис. 1.

q_1 и q_2 — дебиты эксплуатационной и нагнетательной скважин;
 R_1 и R_2 — радиусы кольцевых батарей эксплуатационной и нагнетательной скважин.

В полярных координатах (1) примет вид:

$$F(\rho, \theta) = W(z) = -\frac{q_1}{2\pi} \left\{ \ln[(\rho^n \cos n\theta - R_1^n) + i\rho^n \sin n\theta] - s \ln[(\rho^n \cos n\theta - R_2^n) + i\rho^n \sin n\theta] \right\}. \quad (2)$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (\rho \text{ и } \theta -$$

полярные координаты).

Из (2) выражение распределения давления и уравнение семейства линий тока получаются соответственно в следующем виде:

$$P(\rho, \theta) = -\frac{q_1 \mu}{4\pi k} [\ln(\rho^{2n} - 2R_1^n \rho^n \cos n\theta + R_1^{2n}) - s \ln(\rho^{2n} - 2R_2^n \rho^n \cos n\theta + R_2^{2n})] + P_0, \quad (3)$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\rho^n \sin n\theta}{\rho^n \cos n\theta - R_1^n} - s \operatorname{arctg} \frac{\rho^n \sin n\theta}{\rho^n \cos n\theta - R_2^n}, \quad (4)$$

где

P_0 — некоторая постоянная,
 k — проницаемость пласта,
 μ — вязкость жидкости,
 s — параметр семейства линий тока.

Из (4) в точке ($\rho = R_1$, $\theta = 0$) легко определяется, что $s = \alpha$ (α — угол обводнения).

Из (3):

$$v_r = -\frac{nq_1}{2\pi\rho} \left[\frac{\rho^n (\rho^n - R_1^n \cos n\theta)}{\rho^{2n} - 2R_1^n \rho^n \cos n\theta + R_1^{2n}} - \frac{s\rho^n (\rho^n - R_2^n \cos n\theta)}{\rho^{2n} - 2R_2^n \rho^n \cos n\theta + R_2^{2n}} \right]. \quad (5)$$

С другой стороны

$$dt = m \frac{d\rho}{v_r}, \quad (6)$$

где m — пористость пласта,

t — время продвижения частицы по любой линии тока.

Подставляя (5) в (6) и вводя согласно [3] новые переменные

$$\frac{\rho^n \sin n\theta}{\rho^n \cos n\theta - R_1^n} = \operatorname{tg} \theta_1, \quad \frac{\rho^n \sin n\theta}{\rho^n \cos n\theta - R_2^n} = \operatorname{tg} \theta_2,$$

учитывая (4) и интегрируя по t от нуля до t и по ρ от ρ_2 до ρ находим:

$$\tau = -\frac{2(1-R^n)^2}{n^2} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\sin \theta_2 \sin(\alpha + s\theta_2) \cdot \sin^{-\frac{n+2}{n}} [\alpha - \frac{(1-s)\theta_2}{n}] d\theta_2}{\{(1-R^n)^2 \sin^2 \theta_2 \sin^2(\alpha + s\theta_2) + [\cos \theta_2 \sin(\alpha + s\theta_2) - R^n \sin \theta_2 \cos(\alpha + s\theta_2)]\}^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (7)$$

где $\tau = \frac{q_1 t}{\pi m R_1^2}$ (τ — безразмерное время); $R = \frac{R_2}{R_1}$ ($R > 1$); α и β определяется из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} (1-R^n)^2 \sin^2 \beta_2 \sin^2(\alpha + s\beta_2) + [\cos \beta_2 \sin(\alpha + s\beta_2) - R^n \sin \beta_2 \cos(\alpha + s\beta_2)]^2 = R^{2n} \sin^2 [\alpha - (1-s)\beta_2], \\ (1-R^n)^2 \sin^2 \beta \sin^2(\alpha + s\beta) + [\cos \beta \sin(\alpha + s\beta) - R^n \sin \beta \cos(\alpha + s\beta)]^2 = \\ = \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{2n} \sin^2 [\alpha - (1-s)\beta], \\ (R_1 \leq \rho \leq R_2) \end{aligned}$$

где R_2 и ρ соответственно координаты начального и текущего положений частицы жидкости.

При $s=1$ для случаев $\alpha=0$, $\theta = \frac{\pi}{n}$ (по главной и нейтральной линиям) соответственно получаются формулы [4]:

$$\tau = \frac{2}{n(R^n - 1)} \left[\frac{(R^n + 1)(R^2 - r^2)}{2} + \frac{R^2(r^{n-2} - R^{n-2})}{(n-2)r^{n-2}} - \frac{R^{n+2} - r^{n+2}}{n+2} \right], \quad (8)$$

$$\tau = \frac{2}{n(R^{-n} - 1)} \left[\frac{(R^n + 1)(R^2 - r^2)}{2} + \frac{R^2(r^{n-2} - R^{n-2})}{(n-2)r^{n-2}} + \frac{R^{n+2} - r^{n+2}}{n+2} \right], \quad (9)$$

$r R_1 = \rho, (r \geq 1)$

где

После несложных преобразований при $s=1$ (7) приводится к виду:

$$\tau = A - B \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(1 - b \cos \xi) d\xi}{(1 - a \cos \xi)^{\frac{n-1}{n}}}, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{(R^{2n} - 1)(R^2 - 1)}{n[(R^n - 1)^2 + 4R^n \sin^2 \alpha]},$$

$$B = \frac{(R^n - 1)^2 \cos \alpha}{2^{\frac{1}{n}} n^2 [(R^n - 1)^2 + 2R^n \sin^2 \alpha]^{\frac{n-1}{n}} \sin^{\frac{n+2}{n}} \alpha},$$

$$a = \frac{(R^n - 1) \sqrt{(R^n - 1)^2 + 4R^n \sin^2 \alpha}}{(R^n - 1)^2 + 2R^n \sin^2 \alpha}, \quad b = \frac{R^n - 1}{\sqrt{(R^n - 1)^2 + 4R^n \sin^2 \alpha}},$$

$$\xi_1 = \arccos \frac{(R^n - 1)^2 + 2(R^n - r^{2n}) \sin^2 \alpha}{\sqrt{(R^n - 1)^2 + 4R^n \sin^2 \alpha}},$$

$$\xi_2 = \arccos \frac{R^n - 1 - 2R^n \sin^2 \alpha}{\sqrt{(R^n - 1)^2 + 4R^n \sin^2 \alpha}}.$$

Из (10) при $\alpha = 90^\circ$, т. е. по линии, касательная которой образует угол 90° , найдем:

$$\tau = \frac{(R^2 - 1)(R^n - 1)}{n(R^n + 1)} \quad (11)$$

После некоторых упрощений из (7) при $R^n \gg 1$, пренебрегая единицей относительно R^n , получим:

$$\tau = -\frac{2R^2}{n^2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sin \theta_2 \sin(\alpha + s\theta_2)}{\sin^{\frac{2n-2}{n}} \sin \theta_2 \sin^{\frac{n+2}{n}} [\alpha - (1-s)\theta_2]} d\theta_2, \quad (12)$$

где

$$R^n \sin \beta = \left(\frac{\rho}{R_1}\right)^n \sin [\alpha - (1-s)\theta], \quad \beta_2 = \frac{\alpha}{2-s}$$

Отсюда при $\rho = \rho_1 = R_1$

$$\tau = \frac{2R^2}{n^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2-s}} \frac{\sin \theta_2 \sin(\alpha + s\theta_2)}{\sin^{\frac{2n-2}{n}} \theta_2 \sin^{\frac{n+2}{n}} [\alpha - (1-s)\theta_2]} d\theta_2$$

В случае $s = 1$:

$$\tau = R^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{\cos \alpha}{n^2 \sin^{\frac{n+2}{n}} \alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin^{\frac{2}{n}} \theta_2 d\theta_2 \right)$$

При $\alpha = 90^\circ$; $\alpha = 180^\circ$ будем иметь:

$$\tau = \frac{R^2}{n}; \quad \tau = \infty.$$

В случае $R_2 = 0$ из (7) получается формула стягивания контура нефтеносности из внутренней стороны к кольцевой батарее эксплуатационных скважин при действии центральной нагнетательной скважины с дебитом $q_2 = sq_1$ (рис. 2) (n — количество эксплуатационных скважин, $0 < s \leq 1$).

Законы движения частицы жидкости по главной и нейтральной линиям для этого случая получены в [5].

Практически радиус нагнетательной скважины можно принять равным нулю, т. е. $r_c \approx 0$. Тогда для этого случая формула приводится к виду:

$$\tau = \frac{1}{n} - \frac{\cos \alpha}{2^n n^2 \sin^{\frac{n+2}{n}} \alpha} \int_{2\alpha}^{\pi} (1 - \cos \xi)^{\frac{1}{n}} d\xi \quad (13)$$

По главной и нейтральной линиям:

$$\tau = \frac{r^2}{n} \left(1 - \frac{2r^n}{n+2} \right), \quad \tau = \frac{r^2}{n} \left(1 + \frac{2r^n}{n+2} \right), \quad (0 < r \leq 1). \quad (14)$$

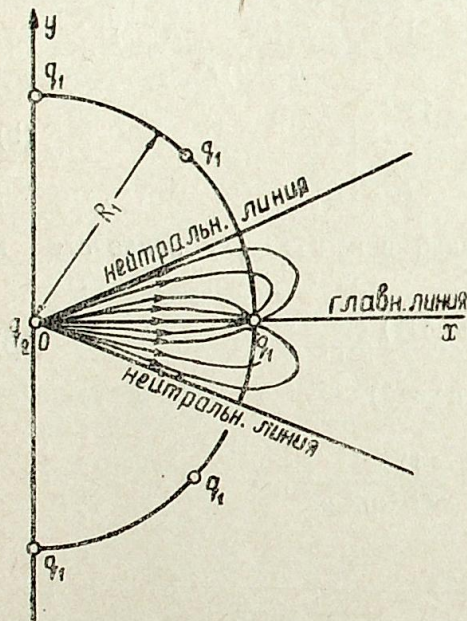


Рис. 2.

Таблица 1

n	3	4	5	10	50	100
τ_r	0,3114	0,3000	0,2842	0,2089	0,0578	0,02901
$\tau_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	0,7778	0,6618	0,5636	0,2994	0,0600	0,0300
τ_n	2,2571	1,4000	0,9932	0,3922	0,0639	0,0310

Таблица 2

n	3	4	5	10	50	100
τ_r	0,6667	0,5625	0,4833	0,2751	0,0591	0,0298
τ_n	1,3333	0,9375	0,7167	0,3249	0,0608	0,0302

В случае, когда угол наклона касательной к линии тока составляет 90° , будем иметь:

$$\tau = \frac{1}{n}. \quad (15)$$

Нужно отметить, что для частных случаев, т. е. при $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$ и $\theta = \frac{\pi}{n}$, получены простые расчетные формулы. Эти значения времени к моменту прорыва обозначим τ_r , $\tau_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ и τ_n . При $R = 2$, $r = 1$ по формулам (8), (9), (11) и (14), (15) составлены соответственно табл. 1 и 3. При отсутствии закачки результаты расчетов по фор-

Таблица 3

n	3	4	5	10	50	100
τ_r	0,2000	0,1667	0,1428	0,0833	0,0199	0,00998
$\tau_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	0,3333	0,2500	0,200	0,100	0,0200	0,0100
τ_n	0,46667	0,3333	0,2571	0,1167	0,0208	0,01002

мулам, полученным по главной и нейтральной линиям в [6], указаны в табл. 2. Из таблицы видно, что с увеличением n значения τ для случаев $\alpha = 0$; 90° ; $\theta = \frac{\pi}{n}$ близки, при $n = 50$; 100 почти совпадают. При больших n τ_r , $\tau_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ и τ_n увеличиваются пропорционально с увеличением n . Сравнение табл. 1, 3 показывает изменение τ_r , $\tau_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ и

τ_n в зависимости от количества скважин кольцевой батареи. На основании табл. 1, 2 можно отметить, что закачка жидкости сильно влияет на процессе обводнения скважины кольцевой батареи.

При $R = 2$; $r = 1$ результаты численного интегрирования по формуле (10) представлены в табл. 4.

Таблица 4

α		0	0,524	1,047	1,571	2,094	2,618	3,142
τ	$n = 5$	0,2842	0,2949	0,3533	0,5636	0,8081	0,9414	∞
	$n = 10$	0,2089	0,2155	0,2346	0,2994	0,3648	0,3904	∞
Q_H/Q		0	0,1667	0,3333	0,500	0,6667	0,8667	1,0

По этой таблице отметим, что основная часть обводнения происходит за короткое время в начале процесса. Видно также влияние изменения количества эксплуатационных скважин на процессе обводнения. При $\tau = \infty$ скважины обводняются полностью.

Нами рассмотрены также вопросы обводнения скважин двух кольцевых батарей в неоднородном пласте, состоящем из двух зон с проницаемостями k_1 и k_2 . Этим вопросам будут посвящены отдельные статьи.

Считаем своим долгом выразить благодарность К. Н. Джалилову за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А. Справочник по математике. М., 1955.
2. Джалилов К. Н. ДАН Азерб. ССР, 1962, т. XVIII, № 3.
3. Джалилов К. Н., Джафаров Н. Д. Изв. АН Азерб. ССР, серия геол. географ. наук и нефти, 1962, № 1.
4. Золотов М. Т., Михайловский Н. К., Щелкачев В. Н. Труды МНИ им. Губкина, вып. 12, 1953.
5. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1961.
6. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат 1949.
7. Щелкачев В. Н. Труды МНИ им. Губкина, вып. 12, 1953.

Н. Ч. Чәфәров

Лајда инжексија вә истисмар гујуларынын даирәви батарејалары мөвчуд олдугда сулашма просесинин арашдырылмасы

ХУЛАСӘ

[2, 4] ишләриндә бирчинсли сонсуз лајда бәрабәр дебитли гујуларынын даирәви батарејасына су-нефт сәрһәддинин һәрәкәти вә гујуларынын сулашмасы мәсәләси һәлл едилмишдир. [4, 7] ишләри исә бирчинсли сонсуз лајда инжексија вә истисмар гујуларынын даирәви батарејалары мөвчуд олдугда характерик (баш вә нејтрал) хәтләр бојунча су-нефт сәрһәддинин һәрәкәтинә һәср едилмишдир.

Маје һиссәчикләринин мәркәзи инжексија гујусундан истисмар гујуларынын даирәви батарејасына доғру баш вә нејтрал хәтләр бојунча һәрәкәти [5]-дә өјрәнилмишдир.

Бу мәгаләдә исә бирчинсли сонсуз лајда инжексија вә истисмар гујуларынын даирәви батарејалары мөвчуд олдугда ихтијари чәрәјан хәтти бојунча су-нефт сәрһәддинин һәрәкәти вә гујуларынын сулашмасы мәсәләси үмуми шәкилдә һәлл едилмишдир. Нәтичәдә (7) дүстуру алынмышдыр. (7)-дә $q_1 = q_2$ гәбул едиләрәк (q_1, q_2 —истисмар вә инжексија гујуларынын дебитидир) вә хүсуси һаллар үчүн $\left(\alpha = 0; \frac{\pi}{2}; \theta = \frac{\pi}{n}; \alpha \text{—сулашма бучағы, } \theta \text{—полјар бучагдыр} \right)$ алынмыш дүстурларә әсасән һесаблама апарылмыш аә нәтичәләри 1, 2, 3, 4 чәдвәлләрдә верилмишдир. һесаблама $R = \frac{R_2}{R_1} = 2; r = \frac{\rho}{R_1} = 1$ һалы үчүн едилмишдир (R_1, R_2 —истисмар вә инжексија батарејаларынын радиусу, ρ —полјар ох истигамәтиндә полјар координатдыр). Чәдвәлләрә әсасән тәчрүби әһәмијјәти олан нәтичәләр әлдә едилмишдир.

А. Ш. КАЗЫМОВ

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ВОДЫ И НЕФТИ К КРУГОВОЙ БАТАРЕЕ СКВАЖИН В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА

§ 1. Постановка и решение поставленной задачи

В работе рассматривается задача о перемещении границы раздела воды и нефти в тонком неограниченном горизонтальном пласте к скважинам круговой батареи (рис. 1). Считается, что жидкости (и нефть и вода) несжимаемы, имеют соответственно вязкости $\mu_1 = \text{const}$ и $\mu_2 = \text{const}$; эффективные проницаемости пласта в отношении воды и нефти различны. Пористость $m = \text{const}$ принимает одно и то же значение по пласту. Расход жидкости во всех скважинах полагаем равным $q = q(t)$. Начальная граница раздела воды и нефти представляет некоторую окружность.

Движение границы раздела определяем в полярных координатах в виде комплексной функции двух действительных аргументов s и t :

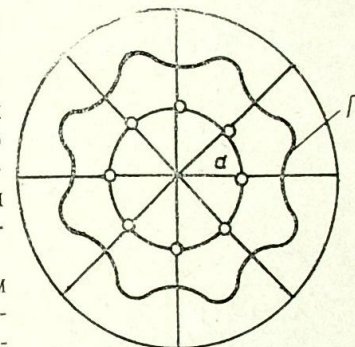


Рис. 1.

$$\zeta(s, t) = [R(t) - \omega(s, t)]e^{is} \quad (i = \sqrt{-1}, -\pi \leq s \leq \pi, 0 \leq t) \quad (1,1)$$

где $R(t)$ —заданная функция, определяющая среднее радиальное перемещение границы раздела Γ , а $\omega(s, t)$ —функция возмущения для этого перемещения границы Γ . Это возмущение обусловлено действием круговой батареи скважин.

Система функциональных уравнений неоднородного фильтрационного потока в тонком горизонтальном пласте (угол наклона $\alpha = 0$) имеет вид (1):

$$2\lambda \operatorname{Re} F(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \Phi(s, t) + \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \int_{(\sigma)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - \zeta(s, t)} = 0; \quad (1,2)$$

$$m \operatorname{Im} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} = \operatorname{Im} F(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \int_{(\sigma)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - \zeta(s, t)}, \quad (1,3)$$

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} = F(z, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - z}. \quad (1,4)$$

А. Ш. КАЗЫМОВ

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ВОДЫ И НЕФТИ К КРУГОВОЙ БАТАРЕЕ СКВАЖИН В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОТОКА

§ 1. Постановка и решение поставленной задачи

В работе рассматривается задача о перемещении границы раздела воды и нефти в тонком неограниченном горизонтальном пласте к скважинам круговой батареи (рис. 1). Считается, что жидкости (нефть и вода) несжимаемы, имеют соответственно вязкости $\mu_1 = \text{const}$ и $\mu_2 = \text{const}$; эффективные проницаемости пласта в отношении воды и нефти различны. Пористость $m = \text{const}$ принимает одно и то же значение по пласту. Расход жидкости во всех скважинах полагаем равным $q = q(t)$. Начальная граница раздела воды и нефти представляет некоторую окружность.

Движение границы раздела определяем в полярных координатах в виде комплексной функции двух действительных аргументов s и t :

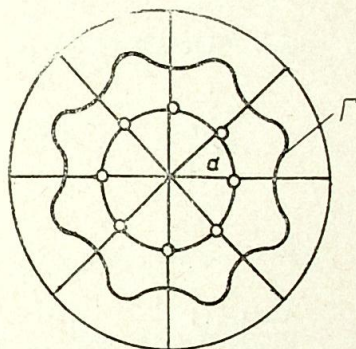


Рис. 1.

$$\zeta(s, t) = [R(t) - \omega(s, t)]e^{is} \quad (i = \sqrt{-1}, \quad -\pi \leq s \leq \pi, \quad 0 \leq t) \quad (1,1)$$

где $R(t)$ —заданная функция, определяющая среднее радиальное перемещение границы раздела Γ , а $\omega(s, t)$ —функция возмущения для этого перемещения границы Γ . Это возмущение обусловлено действием круговой батареи скважин.

Система функциональных уравнений неоднородного фильтрационного потока в тонком горизонтальном пласте (угол наклона $\alpha = 0$) имеет вид (1):

$$2\lambda ReF(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \Phi(s, t) + \frac{\lambda}{\pi} Im \frac{\partial \zeta}{\partial s} \int_{(s)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - \zeta(s, t)} = 0; \quad (1,2)$$

$$m Im \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} = Im F(\zeta, t) \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{1}{2\pi} Re \frac{\partial \zeta}{\partial s} \int_{(s)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - \zeta(s, t)}, \quad (1,3)$$

$$\frac{\partial \omega(z, t)}{\partial z} = F(z, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(s)} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(\sigma, t) - z}. \quad (1,4)$$

Здесь введены обозначения

$$\lambda = (1 - \kappa) / (1 + \kappa), \quad \kappa = \frac{k_1}{\mu_1} \left| \frac{k_2}{\mu_2} \right|, \quad z = x + iy$$

$\Phi(s, t)$ — вспомогательная действительная функция, которая связывает уравнения (1,2)–(1,4) в систему. Учитывая характер особенностей комплексного потенциала

$$w(z, t) = \varphi + i\psi, \quad \varphi = -\frac{k}{\mu} p, \quad (1,5)$$

аналитическую функцию $F(z, t)$ на плоскости комплексного переменного z определяем выражением

$$F(z, t) = -\frac{q(t)}{2\pi} \frac{nz^{n-1}}{z^n - a^n}. \quad (1,6)$$

Полосы $F(z, t)$ в точке $z = ae^{2\pi ik/n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) определяют логарифмические особенности комплексного потенциала $w(z, t)$ при $q(t) > 0$. Указанные особенности в точках $z = ae^{2\pi ik/n}$ представляют стоки (эксплуатационные скважины).

Полагаем, что величина $\omega(s, t)$ и $\partial\omega/\partial s$ малы по сравнению с $R(t)$, а функция $\Phi(s, t)$ по аргументу s имеет период 2π . Тогда путем очевидных преобразований из (1,2)–(1,4) получаем следующую систему уравнений:

$$\Phi(s, t) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\sigma, t) d\sigma + \frac{\lambda}{\pi} q(t) \operatorname{Re} \frac{inR^n e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n} \quad (1,7)$$

$$m \frac{\partial \omega}{\partial t} = m \frac{dR}{dt} + \frac{1}{4\pi R} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\sigma, t) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \frac{qt}{2\pi R} \operatorname{Im} \frac{inR^n e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n}, \quad (1,8)$$

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial z} = -\frac{q(t)}{2\pi} \frac{nz^{n-1}}{z^n - a^n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\Phi(\sigma, t) d\sigma}{R e^{i\sigma} - z}. \quad (1,9)$$

В случае, когда $n \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений, найденную в работе [2] при $\nu = 0$.

Соотношение (1,7) является интегральным уравнением с вложенным ядром, решение которого получается применением теорем о вычетах аналитической функции. Это решение имеет вид:

$$\Phi(s, t) = \frac{\lambda}{\pi} q(t) \operatorname{Re} \frac{inR^n e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n}. \quad (1,10)$$

Для решения уравнения (1,8) воспользуемся преобразованием:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\sigma, t) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma = -2\lambda q(t) \operatorname{Re} \frac{nR^n e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n} - 2\lambda q(t) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{ae^{2\pi ik/n} + Re^{is}}{ae^{2\pi ik/n} - Re^{is}}, \quad (1,11)$$

которое легко доказать, используя выражение (1,10) и применяя теоремы о вычетах аналитической функции.

Подставляя (1,11) в (1,8), учитывая известное свойство $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} iz$, путем элементарного действия получим:

$$m \frac{\partial \omega}{\partial t} = m \frac{dR}{dt} + \frac{1-\lambda}{2\pi R} q(t) \operatorname{Im} \frac{inR^n e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n} - \frac{\lambda}{2\pi R} q(t) \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{ae^{2\pi ik/n} + Re^{is}}{ae^{2\pi ik/n} - Re^{is}}. \quad (1,12)$$

Функция возмущения $\omega(s, t)$ должна удовлетворять начальному условию

$$\omega(s, t) \big|_{t=0} = f(s). \quad (1,13)$$

Интегрируя уравнение (1,12) с учетом (1,13), получим выражение для функции возмущения

$$\omega(s, t) = R(t) - R(0) + \frac{1-\lambda}{2\pi m} \operatorname{Im} \int_0^t q(\tau) \frac{inR^{n-1} e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n} d\tau - \frac{\lambda}{2\pi m} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \int_0^t q(\tau) \frac{ae^{2\pi ik/n} + Re^{is}}{R(ae^{2\pi ik/n} - Re^{is})} d\tau + f(s). \quad (1,14)$$

В случае когда имеет место $R(t) = R = \text{const}$, $q(t) = q = \text{const}$ то из выражения (1,14) находим:

$$\omega(s, t) = \frac{1-\lambda}{2\pi m} qt \operatorname{Im} \frac{inR^{n-1} e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n} - \frac{\lambda}{2\pi m} qt \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{ae^{2\pi ik/n} + Re^{is}}{R(ae^{2\pi ik/n} - Re^{is})} + f(s). \quad (1,15)$$

Движение точек границы раздела Γ жидкостей по главному и нейтральному направлению потока определяется значением $s = 0, \frac{\pi}{n}$.

В случае $s = 0$ находим:

$$\omega(0, t) = \frac{1-\lambda}{2\pi m} qt \frac{nR^{n-1}}{R^n - a^n} - \frac{\lambda}{2\pi m} qt \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{ae^{2\pi ik/n} + R}{R(ae^{2\pi ik/n} - R)} + f(0). \quad (1,16)$$

В случае $s = \frac{\pi}{n}$ находим:

$$\omega\left(\frac{\pi}{n}, t\right) = \frac{1-\lambda}{2\pi m} qt \frac{nR^{n-1}}{R^n + a^n} - \frac{\lambda}{2\pi m} qt \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{ae^{2\pi ik/n} + Re^{i\pi/n}}{R(ae^{2\pi ik/n} - Re^{i\pi/n})} + f(\pi/n). \quad (1,17)$$

Для однородного потока имеем

$$\alpha = \frac{k_1}{\mu_1} \left| \frac{k_2}{\mu_2} \right| = 1, \quad \lambda = 0.$$

Тогда зависимость (1,15) при $f(s) \equiv 0$ приводим к виду

$$\omega(s, i) = \frac{qt}{2\pi m} \operatorname{Im} \frac{i n R^{n-1} e^{ins}}{R^n e^{ins} - a^n}. \quad (1,18)$$

Когда $n \rightarrow \infty$, получаем решение задачи, рассмотренной в работе [2] при $U=0$ для однородной жидкости.

§ 2. Сопоставление с точным решением задачи в случае однородного потока

Из формулы (1,18) при $s=0$ получается закон движения частицы однородной жидкости по главному направлению

$$\omega^*(0, t) = \frac{qt}{2\pi m} \frac{n R^{n-1}}{R^n - a^n}. \quad (2,1)$$

Закон движения частицы однородной жидкости по нейтральному направлению находим из (1,18) при $s = \pi/n$:

$$\omega^*(\pi/n, t) = \frac{qt}{2\pi m} \frac{n R^{n-1}}{R^n + a^n}. \quad (2,2)$$

Очевидно формулы (2,1) и (2,2) являются следствием выражения (1,16) и (1,17), когда $\lambda = 0$ и $f(s) \equiv 0$.

Вводим безразмерные величины:

$$\tau = \frac{qt}{2\pi m a^2}, \quad \frac{a}{R} = d, \quad U_0 = \frac{1}{a} \omega^*(0, t), \quad U_* = \frac{1}{a} \omega^*(\pi/n, t). \quad (2,3)$$

Зависимости (2,1) и (2,2) с учетом (2,3) приводим соответственно к виду

$$U_0 = \frac{n \cdot d \cdot \tau}{1 - d^n}, \quad U_* = \frac{n \cdot d \cdot \tau}{1 + d^n}. \quad (2,4)$$

Сопоставим U_0, U_* (2,4) с аналогичными выражениями, которые можно найти в точном решении аналогичной задачи в случае однородного потока ($\lambda = 0$) в горизонтальном пласте ($U = 0$) при $f(s) \equiv 0$ и $q = \text{const}$.

После интегрирования выражения (8) работы [1], соответствующие зависимости U_0, U_* и τ в точном решении задачи о перемещении отмеченной частицы однородной жидкости в однородном пласте по главному и нейтральному направлениям к круговой батарее скважин находятся в виде соотношений:

$$\begin{aligned} n\tau &= \frac{1}{2} [1/d^2 - (1/d - U_0)^2] - \frac{1}{n-2} [1/(1/d - U_0)^{n-2} - d^{n-2}] \\ n\tau &= \frac{1}{2} [1/d^2 - (1/d - U_*)^2] + \frac{1}{n-2} [1/(1/d - U_*)^{n-2} - d^{n-2}] \end{aligned} \quad (2,5)$$

при $n = 3$ получаем:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{U_0}{3d} - \frac{U_0^2}{6} - \frac{d}{3(1-d \cdot U_0)} + \frac{d}{3}, \\ \tau &= \frac{U_*}{3d} - \frac{U_*^2}{6} + \frac{d}{3(1-d \cdot U_*)} - \frac{d}{3}. \end{aligned} \quad (2,6)$$

На рис. 2 дано графическое сравнение законов перемещения по главному направлению $\tau(U_0)$ соответственно точной (2,6) и линеаризованной (2,4) теории однородного потока ($\lambda = 0, V = 0$) при $d = 0,25$.

Сопоставление говорит о большой степени приближения линеаризованной теории перемещения в горизонтальном пласте границы раздела воды и нефти к круговой батарее скважин. В таблице даны

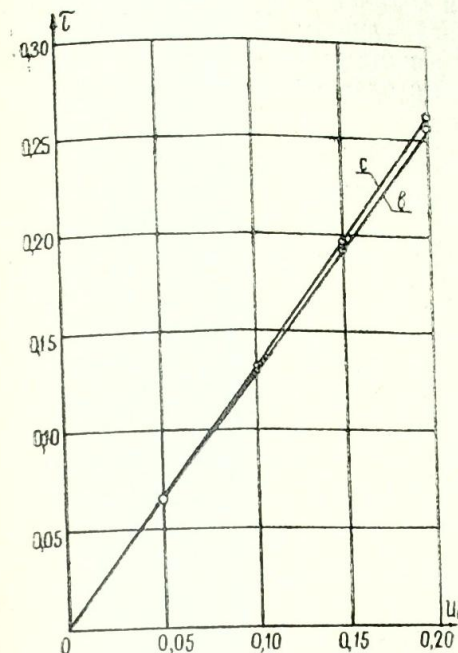


Рис. 2.

b — по приближенной формуле (2,4),
c — по точной формуле (2,6)

d	U ₀	по (2,4)	по (2,6)	η
0,25	0	0	0	0
	0,05	0,0656	0,0652	0,0061
	0,10	0,13125	0,1295	0,0135
	0,15	0,1969	0,1930	0,0203
	0,20	0,2625	0,2555	0,0274
0,50	0	0	0	0
	0,05	0,0292	0,0286	0,0210
	0,10	0,0583	0,0562	0,0374
	0,15	0,0875	0,0827	0,0580
	0,20	0,1167	0,1081	0,0795

ординаты $\tau(2,4)$ и $\tau(2,6)$ в зависимости от перемещения и для двух значений $d = 0,25; 0,5$. В этой таблице $\eta = \frac{|\tau(2,6) - \tau(2,4)|}{\tau(2,6)}$.

Автор выражает благодарность В. П. Пилатовскому за ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казымов А. Ш. НТС по добыче нефти ВНИИ, 1961, № 14.
2. Казымов А. Ш., Пилатовский В. П. Изв. АН СССР, о. т. н., 1962, № 4.
3. Пилатовский В. П. Укр. мат. ж., 1953, т. X, № 2.

А. Ш. Казымов

Бирчинсли олмајан ахында нефт вэ су сэрһэддинин
даирэви гујулар батарејасына доғру һэрәкәти

ХҮЛАСЭ

Бу ишдә бирчинсли олмајан ахында нефт вэ су сэрһэддинин
галынлығы аз олан сонсуз үфги лајда даирэви гујулар батарејасына

доғру һәрәкәти мәсәләсинә бахылып. Мәжеләр (нефт вә су) сыхылма-
 јан һесабы едиләрәк, өзлүкләри ујғун оларағ мүхтәлиф вә сабит,
 лајын су вә нефтә нәзәрән еффе́ктив кечиричилији дә мүхтәлифди.
 Мәсамәлилик— m сабитдир; маје сәрфи бүтүн гујулар үчүн e ни олуб
 $q(t)$ -ә бәрабәрдир. Башланғыч анда нефт вә су сәрһәдди мүәјән
 чеврәдән ибарәтдир. Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн галынлығы аз
 олан үғи лајда бирчинсли олмајан сүзүлмәдән өтрү чыхарылмыш
 әсас функционал тәнликләр системи (1) көтүрүләрәк, комплекс дәи-
 шәнли функцијалар үсулу тәтбиг едилир. Сонра бирчинсли ахында
 баш вә нејтрал истигамәтләрдә һәммин мәсәләнин дәғиг һәлли (3) илә
 бурада алынған тәғриби һәлл мүғәјисә слунур. Мүғәјисә һәр ики
 һалда баш истигамәтләрдә һәрәкәт ганунларынын, јағни $\tau = \tau(u_0)$
 асылылығларынын бир-биринә чоҳ јахын олдуғуну көстәрир.

АЗЕРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-ријазийат вә техника елмләри сәријасы, 1962, № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 6

1962-чи илдә „АЗЕРБАЙҖАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН
 ХӘБӘРЛӘРИ“ ЖУРНАЛЫНДА (ФИЗИКА-РИЈАЗИЈАТ ВӘ ТЕХНИКА
 ЕЛМЛӘРИ СЕРИЈАСЫ) ДӘРҖ ЕДИЛМИШ МӘҒАЛӘЛӘРИН
 КӨСТӘРИЧИСИ

- Абасов М. Т., Гулијев А. М. Нефт-газ јатағларынын ишләмәсинә даир
 һесабламаларын бәзи нәтичәләри. № 1, сәһ. 131.
- Абасов М. Т. Галығ нефтлә дојманын газ-нефт јатағларынын ишләмәсинин
 гидродинамик көстәричиләринә тәсири. № 4, сәһ. 113.
- Аббасов А. Ә. Лајдан нефтин ғыздырылмыш агентлә сыхышдырылмасына
 аид мәсәләнин бир автомодел һәлли һағгында. № 6, сәһ. 143.
- Аббасов А. Ә. Лајдан нефтин исти агент илә сыхышдырылмасы заманы
 температурун пәјланмасы. № 4, сәһ. 105.
- Абдуллајев Н. Б., Бәкиров М. Ј., Гасымов Р. Б. Р вә л тәбәғләри
 галығларынын селен фотоэлементләринин характеристикаларына тәсири. № 6, сәһ. 69.
- Бабајев М.-Б. Ә. Икидәјишәнли функцијаларын $\varphi(x) + \varphi(y)$ шәклиндә
 функцијаларла үстлү јахынлашмасы һағгында. № 6, сәһ. 25.
- Бағыров М. Ә., Вечхәјзер Г. В., Чуварлы Ч. М., Епштейн Е. М.
 Нефтли лаја термини тәсир заманы истилик вермә просеси. № 1, сәһ. 77.
- Бәкиров М. Ј., Гасымов Р. Б. Чивә-селен тәбәғәнин селен фотоэлементләри.
 № 3, сәһ. 89.
- Вәкилов Ш. И. Бучағ нөггәләри олан һиссәләрдән тәшкил олунмуш
 областда Лаплас тәнлији үчүн Дирихле мәсәләси. № 2, сәһ. 27.
- Ваһабов Р. М. Мәсамәли бетонун сүзүлмә хассәләринин тәдғиги. № 1,
 сәһ. 89.
- Ваһабов М. Ј. Лилләрин һәрәкәтинин бөһран (критик) сүрәтләринин мүәјјән
 едилмәси. № 1, сәһ. 97.
- Гасымов И. Ф. Газма шамы ғыфыл јивинин сәтһиндә јаранан температурун
 гејри-стационар режимдә тәјини. № 4, сәһ. 101.
- Гасымов Ә. Ф., Мәһдијев В. М. Өзлү мајенин диқәр өзлү маје илә гәрар-
 лашмамыш һалда бору кәмәриндә сыхышдырылмасы тәјининә даир. № 4, сәһ. 121.
- Гәдиров Н. Б. Сүрүшән јастығларын сүртүнмә моменти вә јүкләнмә габи-
 лијјәтинин тәјини мәсәләсинә даир. № 1, сәһ. 123.
- Гәмбәров Н. С. Бирчинс олмајан еластики лајда сыхылан бирчинс мајенин
 һәрәкәти тәнлијинин тәғриби һәлли. № 5, сәһ. 113.
- Голубева В. А. Сабит әмсаллы хүсуси төрәмәли диференсиал тәнликләрин
 фундаментал һәлләринин хүсусијјәтләри һағгында. № 1, сәһ. 15.
- Гулијев С. М., Әбдуллазәдә Ә. М., Шәмсијев А. Ә. Балта шарошка-
 рынын дишләри алтында кәркинлијин пәјланмасы. № 2, сәһ. 95.
- Гулијев Ј. Ә. Су анбарында верилмиш ишләтмә һәчминин чајын чоҳ сулу
 дөврүндә су-електрик стансијасы тәнәфиндән оптимал ишләдилмәси. № 5, сәһ. 75.
- Гурбанов Р. С., Гасымов Ә. Ф. Өзлү мајенин дар јарыгда гејри-стасио-
 нар ахымы мәсәләсинин башланғыч шәртсиз һәлли. № 5, сәһ.
- Дадашов Ч. Р. Миник автомобилләри сүрәтләр гутусунда сүрәт пиллә-
 ләри сајынын вә өтүрмә әдәлләринин сечилмәси һағгында. № 1, сәһ. 107.
- Домшляк Ј. И. Гејри-хәтти һәддә вәситәси илә һәјәчанландырылмыш гејри-
 мәһдуд операторлу еволүсион тәнлијин һәлләринин сонсузлугда тәбиәти. № 1, сәһ. 3.
- Әбилов Ә. Н. Дахили чарпаз әләғәни нәзәрә аларағ атмосфер гурғусундакы
 борулу собанын оптимал сазланмасынын тәјини. № 2, сәһ. 75.

Әзімов С. М. RV Per системинин спектрофотометрик тәдгиги. № 3, сәһ. 119.
 Әзімов С. М. Тутулан гоша улдуз системләриндә пејкләр. № 4, сәһ. 71.
 Әлизадә А. С., Гулијев Д. А. Шамаһы чөл лабораториясында гасырға һадисәләринин бә'зи мәсәләләринин тәдгиги. № 2, сәһ. 57.
 Әзімов С. М. Тутулан гоша улдуз системләриндә субнәһәшкләр (тутулан дәјишән RSCVn). № 5, сәһ. 67.
 Әлијарова З. А., Әләкбәрова Ш. М., Келлер И. Х. Селен дүзләндирчиләриндә әкс чәрәјанын температур асылылығынын тәдгиги. № 3, сәһ. 81.
 Әскәров Б. М. Квант механикасында енержи селнин сыжлығы үчүн ифадә. № 3, сәһ. 77.
 Әскәров Ч. М. Әлијев Г. М. Күкүрд ашгарларынын селенин истиликкечирмәсинә тәсири. № 5, сәһ. 45.
 Әфәндијев Н. Ә., Султанов Ф. С., Искәндәров Р. Н. Назик Вi тәбәгәләриндә термоһг. № 4, сәһ. 65.
 Ибраһимов И. И., Чәфәров Ә. С. Умумиләшмиш Лебег синфинин норма-сында сонлу дәрәчәли там функциялар үчүн бәрәбәрсизликләр. № 5, сәһ. 17.
 Ибраһимов И. Ә., Копытский, Каплан Г. А., Мартин З. С. Ријазии моделләшдирмә үсулу илә каталитик крекинг автоматик тәнзим системинин тәкгарлама циркулясия тәнзимчисинин оптимал параметрләринин сечилмәси. № 6 сәһ. 101.
 Иглисин М. И., Пашајев А. М. Јарымкечиричиләрдә актив мугавимәтин, жүксәк тезликдә контактсыз үсулла өлчүлмәси. № 3, сәһ. 69.
 Иманов Л. М., Аббасов Ј. М. Бутил спиртләриндә диелектрик релаксация. № 2, сәһ. 39.
 Иманов Л. М., Аббасов Ј. М. Пропил спиртләриндә диелектрик релаксация. № 3, сәһ. 59.
 Иманов Л. М., Гачар Г. О. Етил спирти молекулунун ифрат жүксәктезликли спектри, ғырланма сабитләри вә дипол моменти. № 4, сәһ. 55.
 Иманов Л. М., Зүлфугарзадә К. Ә. Бензолун бә'зи һаллокенли төрәмәләринин һәлулларында диелектрик релаксациясы. № 5, сәһ. 39.
 Иманов Л. М., Зүлфугарзадә К. Ә. Бензолун бә'зи һаллокенли төрәмәләринин һәлулларында диелектрик релаксациясынын температур асылылығы. № 6, сәһ. 75.
 Искәндәрзадә З. Ә., Ахундов Г. Ә. Силисум диодларынын јашама мүддәти вә вольтампер характеристикаларынын тәдгиги. № 6, сәһ. 49.
 Јағубов С. Г. Гејри-симметрик нүвәли интеграл вә интегро-дифференциал тәнликләр үчүн Һилберт-Шмидт нәзәријәси. № 1, сәһ. 35.
 Јесман В. И. Азәрбајҗан ССР-дә күләјиң енержетик сакитлијинин даваметмә мүддәтинин характеристикасы. № 1, сәһ. 115.
 Казымов А. Ш. Бирчинли ормајан ахында нефт вә су сәрһәддинин даирәви гујулар батареясына доғру һәрәкәти. № 6, сәһ. 161.
 Кажлајева Р. И., Гулијев Ә. А., Ибраһимов Н. И. Поликристал теллурун өзүнә диффузиясынын тәдгиги. № 3, сәһ. 95.
 Кәримбәјов М. Б. Күнәш хәјалы титрәмәсинин тәдгиги һағгында. № 3, сәһ. 133.
 Кәримов К. Ә. Јүкләмәдә әјилмә нөгтәси олан Т (е) әјрисини үчүн Т кәрилмә илә Е деформация арасында дичамик асылылығын тәјини. № 5, сәһ. 3.
 Лабскер Ј. Г., Һачыјев А. Ч. Икигәт сингулар интегралларын бә'зи синифләри һағгында. № 4, сәһ. 37.
 Мәммәдханов Ч. И. Чәбри чохһәдди вә рационал функциялар үчүн бә'зи бәрәбәрсизликләр. № 5, сәһ. 9.
 Мәммәдзадә Н. Ә. СЕС-ин нисби артым характеристикасынын кәсилән нөгтәдә дүз хәтлә әвәз едилмәсинин графика үсулу. № 1, сәһ. 147.
 Мәммәдов Р. Һ. Периодик функцияларын т-сингулар интегралынын умумиләшмиш лебег нөгтәләриндә вә L_p (- π , π) фәзасында јығылмасынын тәртиби һағгында. № 2, сәһ. 15.
 Мәммәдов К. П., Нуријева З. Ч. Алюминий лөвһәси үзәринә чәкилмиш селен тәбәгәсинин кристаллашма просесинин вә електрик мугавимәтинин дәјишил-мәсинин тәдгиги. № 2, сәһ. 45.
 Мәммәдзадә М. С. Кишчәј һөвзәсиндә сел һадисәләри вә онларла мубаризә тәдбирләри һағгында. № 2, сәһ. 101.
 Мәммәдов С. Һ. 1960-чы ил сентјабр зәиф хромосфер алышмасынын Н вә К Са-|| хәтләри. № 3, сәһ. 111.
 Мәммәдов Р. Һ. Функцияларын хәтти мүсбәт операторлар аиләси вә ситә-тичәләр. № 6, сәһ. 3.
 Мәммәдов Р. Һ. Функцияларын хәтти мүсбәт операторлар аиләси вә ситәтичәләр. № 4, сәһ. 3.
 Мәммәдов Ш. Н., Осипова Б. А. Нахчыван дуз мәдәниндә сүхурларын дағ тәјиги нәтичәсиндә дәјишклијә уграмасы һағгында. № 5, сәһ. 108.

Мәммәдзадә Н. Ә. Сәрфи мәнсәбә доғру азајан су ахынларынын дери-вация СЕС пилләләринә бөдүнмәсинин енержетик үгулу. № 4, сәһ. 97.
 Мухтаров Н. А. 1,1-, 2-үчфторетан молекулунун микродалгалар спектри. № 4, сәһ. 59.
 Муштафајев М. М. Фасиләсиз ишләән силос јүкләјиңи машиналарын фрез-барабаны кәсичи органынын параметрләринин әсасландырылмасы. № 4, сәһ. 81.
 Назијев Ј. М., Голубјев И. Ф. Мүхтәлиф температурда вә жүксәк тәјиги-дә дојмуш һидрекарбонатларын истиликкечирмәси. № 6, сәһ. 131.
 Намазов Г. К. Кәсилән әмсаллы ади дифференциал тәнликләрә анд сәрһәд-мәсәләләри. № 2, сәһ. 3.
 Намазов Г. К. Ики тәртибли кәсилән әмсаллы параболик тәнликләр нәзәриј-јәсинә даир. № 3, сәһ. 37.
 Нәсибов Ф. Һ. Риман-Лаувилл мә'нада кәсир төрәмәси олан функцияларын әң јакшы јакынлашмасынын тәртиби һағгында. № 3, сәһ. 51.
 Нәзирова Р. К., Гулијев И. П., Ибраһимов А. М., Әли мәммә-гургуларынын дәјиһәдә дичилмәсиндә онун һесаба алынмасы. № 1, сәһ. 151.
 Нәчәфова Г. Ә. Бир синиф хәтти олмајан мүхтәлиф параметрли јүкләнмиш интеграл тәнликләрин һәллинин тәдгиги. № 1, сәһ. 29.
 Рәсулов М. М. Синхрон кенераторундан гидаланмыш асинхрон електрик мүһәррикинин термозланмасы просесинин һесабланмасына даир. № 3, сәһ. 99.
 Салманова Д. Г. Тәңлиһи баш һиссәсинин хусуи функцияларына кәрә јојулмыш гарышыг мәсәләсинин һәлли. № 5, сәһ. 29.
 Сатурјанс А. Б., Мәммәдов А. Р. Метанын дросселләмә әмсалы. № 3, сәһ. 137.
 Сәмәдзадә Ш. А. Ирригация (суварма) системләринин телеавтоматлаш-дырылмасы. № 5, сәһ. 83.
 Талишинский Р. И., Бајрамова Ф. А. „Азәрбајҗан“ типли кондиционе-рин бирфазлы конденсатор мүһәррикинин тәдгиги. № 4, сәһ. 89.
 Таһиров В. И., Гулијев Ә. А. Панталын монокристал керманиума диф-фузиясынын тәдгиги. № 1, сәһ. 65.
 Хасмәммәдов Ф. И. Икнахылы конвексия типли ғыздырычы борулу собаларын динамика тәнликләри (јанаһаг икнахылы верилир). № 5, сәһ. 89.
 Хәлилов Х. М. Мајеләрин өзлүлүјүнүн тәдгигинин бә'зи јекунлары. № 1, сәһ. 69.
 Хәлилов Ә. Х., Салајев Е. Ј. КСl фосфорларында зәбт мәркәзләринин әмәлә кәлмәсиндә мүхтәлиф ашгарларын ролу. № 6, сәһ. 63.
 Хропика. № 2, сәһ. 113.
 Һашымзадә Ф. М. TiSe типли јарымкечиричиләрдә енержи спектри вә галваномангнит һадисәләр. № 6, сәһ. 83.
 Һачыјев С. Н., Шәрифов К. Ә. Теллур 4-оксидин әмәләкәлмә јентал-нијасы. № 1, сәһ. 47.
 Һачыјев А. Ч. Функцияларын төрәмәләринин хәтти операторлар аиләсинин төрәмәләри илә јакынлашмасынын асимптотик гијмәти һағгында № 6, сәһ. 14.
 Һачыјев А. Ч., Чәфәров Ә. С., Лабскер Ј. Г. Функцияларын бә'зи хәтти операторларла јакынлашмасынын асимптотик гијмәти һағгында. № 3, сәһ. 19.
 Һәсәнов Ф. Һ., Гәһрәмәнов А. Г. Лај һаһында олан мајенин гујуларла гәрарлашмамыш ахыны. № 5, сәһ. 55.
 Һәсәнов Ф. Һ., Чәлилов Г. Н. Дебитләри бәрәбәр олмајан дүзхәтли батареја гујуларынын кечирмәз сәрһәд олдуғда сулашмасынын динамикасы һағ-гында. № 6, сәһ. 93.
 Һүсәјнов Н. Г. Ромбик антиферромагнит вә зәиф ферромагнит кристал-ларда спин далгалары һағгында. № 1, сәһ. 55.
 Һүсәјнов Ф. Һ., Кәләнтәров М. И., Исмајлы И. Д. Кичик күчлү кенераторлары термозламағ үсуллары. № 2, сәһ. 69.
 Һүсәјнов Ф. Һ., Нәбибәјов Ч. К. Компанудланан паралел ишләјән кенераторун дајанылығынын МПТ-9 типли һесаблајычы машинада арашдырылмасы. № 6, сәһ. 137.
 Чавадов М. Һ. Кичик параметрлән асылы дәрәдәрәчәли бир тәнлик үчүн јојулмыш гарышыг мәсәләсинин арашдырылмасы. № 3, сәһ. 29.
 Чәлилов Г. Н. Нефт контурунун һәрәкәти вә гујуларын бирчинли олмајан лајда сулашмасы мәсәләләри. № 2, сәһ. 89.
 Чәфәров Ә. С. Функцияларын хәтти интеграл операторларла јакынлашмасы-нын тәртиби һағгында. № 3, сәһ. 3.
 Чәфәри Г. М. Бир синиф ортонормал мултипликатив системә кәрә Фурјә сырасынын јығылмасы һағгында. № 4, сәһ. 17.
 Чәфәрова Е. Ә. Силисум диодларынын тутумунун тәдгиги. № 5, сәһ. 49.

Чәфәров А. С., Мәмәдов Р. Г. Ибраһим Ибишоглу Ибраһимов (анадан олмасынын 50 иллији мүнәсибәтилә). № 5, сәһ. 135.
 Чәфәров Н. Ч. Лајда инъексија вә истисмар гујуларынын даирәви батареја-лары мөвчуд олдугда сулашма прәссесинин арашдырылмасы. № 6, сәһ. 153.
 Шәмсијев А. Ә., Әбдүлзадә Ә. М. Шарошка охлары кәнара чыхан балта кинематикасынын бә'зи мәсәләләри. № 4, сәһ. 131.
 Шәмсијев Ф. Н. Минимум чәкили лөвһәләр лаһијә етмәк һаггында. № 6 сәһ. 41.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
 Физика-ријазийјат вә техника елмләри сәријасы, 1962, № 6.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
 Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 6

УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В „ИЗВЕСТИЯХ, СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК“

- Абасов М. Т. Влияние остаточной нефтенасыщенности на гидродинамические показатели разработки газонефтяных месторождений, № 4, стр. 113.
 Абасов М. Т., Кулиев А. М. О разработке газонефтяных месторождений на истощение, № 1, стр. 131.
 Аббасов А. А. Распределение температуры при вытеснении нефти горячим агентом из пласта, № 4, стр. 105.
 Аббасов А. А. Об одном автомодельном решении задачи о вытеснении нефти горячим агентом из пласта, № 6, стр. 143.
 Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б. Исследование влияния толщины p -и n -слоев на характеристики селеновых фотоэлементов, № 6, стр. 69.
 Абилов А. Г. Определение оптимальных настроек систем автоматического регулирования трубчатой печи атмосферной установки с учетом внутренней перекрестной связи, № 2, стр. 75.
 Азимов С. М. Спектрофотометрическое исследование, № 3, стр. 119.
 Азимов С. М. Звезды—спутники в системах затменных двойных звезд, № 4, стр. 71.
 Азимов С. М. Звезды—субгиганты в системах затменных двойных звезд (затменная переменная RSCVn), № 5, стр. 67.
 Али-заде А. С., Кулиев Д. А. Исследование некоторых вопросов грозовых явлений в Шемахинской полевой лаборатории, № 2, стр. 57.
 Алиязрова З. А., Алекперова Ш. М., Геллер И. Х. Исследование температурной зависимости обратного сопротивления в селеновых выпрямителях, № 3, стр. 81.
 Аскеров Б. М. Квантово-механическое выражение плотности потока энергии, № 3, стр. 77.
 Аскеров Ч. М., Алиев Г. М. Влияние примеси серы на теплопроводность кристаллического селена, № 5, стр. 45.
 Бабаев М.-Б. А. О наилучшем степенном приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$, № 6, стр. 25.
 Багиров М. А., Вечхайзер Г. В., Джуварлы Ч. М., Эпштейн Э. М. Распределение температуры и некоторые условия устойчивости горения при термическом воздействии на нефтеносный пласт, № 1, стр. 77.
 Багиров М. Я., Гасымов Р. Б. Селеные фотоэлементы со слоем селенида ртути, № 3, стр. 89.
 Вагабов М. Ю. Установление критических скоростей сдвига наносов, № 1, стр. 97.
 Вагабов Р. М. Исследование фильтрационных свойств пористого бетона, № 1, стр. 89.
 Векилов Ш. И. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа с составной области с угловыми точками, № 2, стр. 27.
 Гаджиев А. Д. Об асимптотическом значении приближения производных функций посредством производных семейства линейных операторов, № 6, стр. 14.
 Гаджиев А. Д., Джафаров А. С., Лабскер Л. Г. Об асимптотическом значении приближения функций некоторым семейством линейных операторов, № 3, стр. 19.
 Гаджиев С. Н., Шарифов К. А. Энтальпия образования двуокиси теллура, № 1, стр. 47.

Гасанов Ф. Г., Джалилов К. Н. О динамике обводнения прямолинейной батареи неравнодебитных скважин при наличии непроницаемой границы. № 6, стр. 93.

Гасанов Ф. Г., Каграманов А. К. Неустановившийся приток пластовой жидкости к скважинам. № 5, стр. 55.

Гашимзаде Ф. М. Гальваномагнитные явления и структура энергетических зон в полупроводниковых кристаллах типа TlSe. № 6, стр. 83.

Голубева В. А. Особенности фундаментальных решений уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. № 1, стр. 15.

Гулиев Ю. Э. Оптимальная сработка водохранилища гидростанции при гидрологических условиях повышенной водности и заданном объеме сработки. № 5, стр. 75.

Гурбанов Р. С., Касимов А. Ф. Решение одной задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости в узкой щели без начальных условий. № 5, стр. 125.

Гусейнов Н. Г. Спиновые волны в ромбических антиферромагнетиках и слабых ферромагнетиках. № 1, стр. 55.

Гусейнов Ф. Г., Калантаров М. И., Исмаилов И. Д. Способы торможения генераторов малой мощности. № 3, стр. 69.

Гусейнов Ф. Г., Набибеков Ч. К. Исследование устойчивости параллельной работы компандированного генератора при помощи вычислительной машины типа МПТ-9. № 6, стр. 137.

Дадашев Д. Р. О выборе числа ступеней и передаточных чисел в коробках передач легковых автомобилей. № 1, стр. 107.

Джавадов М. Г. Исследование смешанной задачи для одного уравнения четвертого порядка с малым параметром. № 3, стр. 29.

Джалилов К. Н. Вопросы перемещения контура нефтеносности и обводнения скважин в макроеднородном пласте. № 2, стр. 89.

Джафарли Г. М. О сходимости рядов Фурье по одному классу ортонормированных мультипликативных систем. № 4, стр. 17.

Джафаров А. С. О порядке приближения функций семейством линейных интегральных операторов. № 3, стр. 3.

Джафаров Н. Д. Исследование процесса обводнения при наличии в пласте кольцевых батарей нагнетательных и эксплуатационных скважин. № 6, стр. 153.

Джафаров А. С., Мамедов Р. Г. Ибрагим Ибисевич Ибрагимов (к пятидесятилетию со дня рождения). № 5, стр. 135.

Джафарова Э. А. Исследование емкости кремниевых диодов. № 5, стр. 49.

Домшляк Ю. И. О поведении на бесконечности решений эволюционного уравнения с неограниченным оператором при наличии нелинейного возмущения. № 1, стр. 3.

Есьман В. И. Характеристика длительности энергетических затиший ветра в Азербайджанской ССР. № 1, стр. 115.

Ибрагимов И. И., Джафаров А. С. Некоторые неравенства для целых функций конечной степени в норме обобщенного класса Лебега. № 5, стр. 17.

Ибрагимов И. Э., Копысицкий Т. И., Каплан Г. А., Марбин З. С. Определение оптимальных параметров регулятора кратности циркуляции системы автоматического регулирования каталитического крекинга путем математического моделирования. № 6, стр. 101.

Иглицын М. И., Пашаев А. М. Бесконтактное измерение активного сопротивления полупроводников на высокой частоте. № 3, стр. 69.

Иманов Л. М., Аббасов Я. М. Диэлектрическая релаксация в бутиловых спиртах. № 2, стр. 39.

Иманов Л. М., Аббасов Я. М. Диэлектрическая релаксация в пропиловых спиртах. № 3, стр. 59.

Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. Э. Диэлектрическая релаксация в концентрированных растворах некоторых галогенопроизводных бензола. № 5, стр. 39.

Иманов Л. М., Зулфугарзаде К. З. Температурная зависимость диэлектрической релаксации в концентрированных растворах некоторых галогенопроизводных бензола. № 6, стр. 75.

Иманов Л. М., Каджар Ч. О. Сверхвысокочастотный спектр, вращательные постоянной и дипольный момент молекулы этилового спирта. № 4, стр. 55.

Искендерзаде З. А., Ахундов Г. А. Исследование времени жизни и вольтамперных характеристик кремниевых диодов. № 6, стр. 49.

Кадиров Н. Б. К вопросу определения момента трения и нагрузочной способности подшипников скольжения. № 1, стр. 123.

Кажлаева Р. И., Кулиев А. А., Ибрагимов Н. И. Самодиффузия в поликристаллическом теллуре. № 3, стр. 95.

Казымов А. Ш. О перемещении границы раздела воды и нефти к круговой батарее скважин в случае неоднородного потока. № 6, стр. 161.

Камбаров Г. С. Приближенное решение уравнения движения однородной сжимаемой жидкости в неоднородном упругом пласте. № 5, стр. 113.

Касимов И. Ф. Определение температуры на поверхности резбы, возникающей при свинчивании замковой резбы, с учетом нестационарности температурного режима. № 4, стр. 101.

Касимов А. Ф., Мехтиев В. М. К определению времени вытеснения одной вязкой жидкости другой в колонне труб с учетом нестационарности. № 4, стр. 121.

Керимбеков М. Б. Об исследованиях дрожания солнечного изображения. № 3, стр. 133.

Керимов К. А. Определение динамической зависимости между натяжением T и деформацией e при нагружении, когда кривая $T(e)$ имеет точку перегиба. № 3, стр. 133.

Кулиев С. М., Абдулзаде А. М., Шамсиев А. А. Распределение напряжений под зубьями шарошки долота. № 2, стр. 95.

Лабскер Л. М., Гаджиев А. Д. О некоторых классах двойных сингулярных интегралов. № 4, стр. 37.

Мамедзаде М. С. Селевые потоки бассейна р. Кишчай и меры борьбы с ними. № 2, стр. 101.

Мамедзаде Н. А. Энергетический метод разбивки ступеней каскада деривационных ГЭС на водотоках с убывающими к устью расходами. № 4, стр. 97.

Мамедзаде Н. А. Графический прием спрямления характеристики относительных приростов ГЭС в точках разрыва ее непрерывности. № 1, стр. 147.

Мамедов К. П., Нуриева З. Д. Исследование процесса кристаллизации и изменения электросопротивления слоя селена, нанесенного на Al подкладку. № 2, стр. 45.

Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов периодической функции в обобщенных точках Лебега и в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$. № 2, стр. 15.

Мамедов Р. Г. Некоторые общие результаты от асимптотическом значении о порядке приближения функций семейством линейных положительных операторов. № 4, стр. 3.

Мамедов Р. Г. Некоторые общие результаты об асимптотическом значении о порядке приближения функций семейством линейных положительных операторов. № 6, стр. 3.

Мамедов Ш. Н., Осипова Б. А. О характере деформации горных пород под влиянием подземных выработок нахсольрудника. № 5, стр. 108.

Мамедов С. Г. Линии H и KCa II слабых хромосферной вспышки 8 сентября 1960 года. № 3, стр. 111.

Мамедханов Д. И. Некоторые неравенства для алгебраических полиномов и рациональных функций. № 5, стр. 3.

Мустафаев М. М. Обоснование параметров режущего органа фрезбарбана погрузчика силоса непрерывного действия. № 4, стр. 81.

Мухтаров И. А. Микроволновый спектр молекулы 1,1—2-трифторэтана. № 4, стр. 59.

Наджафов К. А. Исследование одного класса нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами. № 1, стр. 29.

Назиев Я. М., Голубев И. Ф. Теплопроводность предельных углеводородов при различных температурах и высоких давлениях. № 6, стр. 131.

Назирова Р. К., Кулиев И. П., Ибрагимов А. М., Алимамедов Л. С. Обращение стальных конструкций в морской воде и учет его при проектировании морских нефтепромысловых сооружений. № 1, стр. 151.

Намазов Г. К. К теории параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. № 3, стр. 37.

Намазов Г. К. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. № 2, стр. 3.

Насибов Ф. Г. О порядке наилучших приближений функций, имеющих производную в смысле Римана—Лиувилля. № 3, стр. 51.

Расулов М. М. К расчету процесса торможения асинхронного электродвигателя при питании от синхронного генератора соизмеримой мощности. № 3, стр. 99.

Салманова Д. Г. Применение метода разложения по собственным функциям главной части уравнения в решении смешанных задач для уравнения второго

порядка на интервале $(0, \infty)$. № 5, стр. 29.

Самедзаде Ш. А. Телеавтоматизация ирригационных систем. № 5, стр. 83.

Тагиров В. И., Кулиев А. А. Диффузия тантала в монокристаллическом германии. № 1, стр. 65.

Галышинский Р. И., Байрамова Ф. А. Исследование однофазного конденсаторного двигателя кондиционера "Азербайджан", № 4, стр. 89.
 Халилов Х. М. Некоторые итоги исследования вязкости жидкостей, № 1, стр. 69.
 Халилов А. Х., Салаев Э. Ю. О роли примесей в образовании центров захвата в некоторых КСІ-фосфорах, № 6, стр. 63.
 Хасмамедов Ф. И. Уравнения динамики двухпоточных нагревательных трубчатых печей конвекционного типа (конвекционных камер) в случае, когда топливо подается двумя потоками. № 5, стр. 89,
 Хроника, № 2, стр. 113.
 Цатурянц А. Б., Мамедов А. Р. Коэффициент дросселирования метана № 3, стр. 137.
 Шамиев Ф. Г. О проектировании пластинок минимального веса, № 6, стр. 41.
 Шамсиев А. А., Абдуд-заде А. М. Некоторые вопросы кинематики доломитов со смещенными осями шарошек, № 4, стр. 131.
 Эфендиев Г. А., Султанов Ф. С., Искендеров Р. Н. Термоэды тонких слоев ВІ, № 4, стр. 65.
 Якубов С. Я. Теория Гильберта—Шмидта для интегральных и интегродифференциальных уравнений с несимметричным ядром, № 1, стр. 35.

МҮНДӘРИЧАТ

Р. Н. Мәммәдов. Функцияларын хәттә мүсбәт операторлар айләси васитәсизлә яхынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гүмәти һаггында бә'зи үмуми нәтичәләр	3
А. Ч. Нәчәйев. Функцияларын тәрәмәләринин хәтти операторлар айләсинин тәрәмәләри илә яхынлашмасынын асимптотик гүмәти һаггында	15
М.-Б. Ә. Бабајев. Икидәјишәнли функцияларын $\varphi(x) + \psi(y)$ шәклиндә функцияларла үстләү яхынлашмасы һаггында	21
Ф. Н. Шәмиев. Минимум чәкили ләвһәләр ләјиһә етмәк һаггында	45
З. Ә. Искәндәрзаде, Г. Ә. Ахундов. Силициум диодларынын јашама мүддәти вә вольтампер характеристикаларын тәдгиги	49
Ә. Х. Хәлилов, Е. Ј. Салајев. КСІ фосфорларында зәбт мәркәзләринин әмәлә кәлмәсиндә мүхтәлиф ашгарларын ролу	63
Н. Б. Абдуллајев, М. Ј. Бәкиров, Р. Б. Гасымов. Р вә n тәбәгәләри галыңлыгынын селен фотоэлементләринин характеристикаларына тәсири	69
Л. М. Иманов, К. Е. Зүлфугарзаде. Бензолун бәзи һалокенди тәрәмәләринин мәһлулларында диелектрик релаксациясынын температур асылылығы	75
Ф. М. Нәширзаде. ТІSe типла јарымкечиричләрдә спектрик вә галваномагнит һадисәләр	83
Ф. Н. Нәсәнов, Г. Н. Чәлилов. Дебитләри бәрәбәр олмајан дүзхәтли батареја гујуларынын кечирмәз сәһәд олдуғда сулашмасынын динамикасы һаггында	93
И. Ә. Ибраһимов, Т. И. Коньситски, Г. А. Каплан, З. С. Марвин. Ријазии моделләшдирмә үсулу илә каталитик крекинг автоматик тәнзим системинин тоқрарлама циркулясия тәнзимчисинин оптимал параметрләринин сечилмәси	101
Ј. М. Нијазии, И. Ф. Голубјев. Мүхтәлиф температурда вә јүксәк тәзјигдә дојмуш гидрокарбонатларын истиликкечирмәси	113
Ф. Н. Нүсәјнов, Ч. К. Нәбибәјов. Компаундланан паралел ишләјән кенераторун дајанычлыгынын МРТ-9 типли һесаблајычы машында арашдырылмасы	119
А. Ә. Аббасов. Лајдан нефтин ғыздырылмыш акентлә сыхышдырылмасына аид мәсәләнин бир автомодел һәлли һаггында	125
Н. Ч. Чәфәров. Лајда инъексия вә истисмар гујуларынын даирәви батарејалары мөвчуд олдуғда сулашма просесинин арашдырылмасы	131
А. Ш. Казымов. Бирчинсли олмајан ахында нефт вә су сәһәддинин даирәви гујулар батарејасына доғру һәрәкәти	139

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Г. Мамедов. Некоторые общие результаты об асимптотическом значении и о порядке приближения функций семейства линейных положительных операторов	3
А. Д. Гаджиев. Об асимптотическом значении приближения производных функций посредством производных семейства линейных операторов	15
М. Б. А. Бабаев. О наилучшем степенном приближении функций двух переменных функциями вида $\varphi(x) + \psi(y)$	25
Ф. Г. Шамиев. О проектировании пластинок минимального веса	41
З. А. Искендер-заде, Г. А. Ахундов. Исследование времени жизни и вольтамперных характеристик кремневых диодов	49
А. Х. Халилов, Э. Ю. Салаев. О роли примесей в образовании центров захвата в некоторых КС1 фосфорах	63
Г. Б. Абдуллаев, М. Я. Бакиров, Р. Б. Гасымов. Исследования влияния толщины р-и n- слоев на характеристики селеновых фотоэлементов	69
Л. М. Иманов, К. Э. Зулфугарзаде. Температурная зависимость диэлектрической релаксации в концентрированных растворах некоторых галогенно-производных бензола	75
Ф. М. Гашимзаде. Гальваномагнитные явления и структура энергетических зон в полупроводниковых типа TlSe	83
Ф. Г. Гасанов, К. Н. Джалилов. О динамике обводнения прямолинейной батареи неравнодебитных скважин при наличии непроницаемой границы	93
И. Э. Ибрагимов, Т. И. Колысицкий, Г. А. Каплан, З. С. Марбин. Определение оптимальных параметров регулятора кратности циркуляции системы автоматического регулирования каталитического крекинга путем математического моделирования	101
Я. М. Назиев, И. Ф. Голубев. Теплопроводность предельных углеводородов при различных температурах и высоких давлениях	113
Ф. Г. Гусейнов, Ч. К. Набибеков. Исследование устойчивости параллельной работы компаундированного генератора при помощи вычислительной машины типа МПТ-9	119
А. А. Аббасов. Об одном автомодельном решении задачи о вытеснении нефти горячим агентом из пласта	125
Н. Д. Джафаров. Исследование процесса обводнения при наличии в пласте кольцевых батарей нагнетательных и эксплуатационных скважин	131
А. Ш. Казымов. О перемещении границы раздела воды и нефти к круговой батарее скважин в случае неоднородного потока	139

Чапа мизаланмыш 31/І-чү ил. Кағыз форматы 70×108¹/₁₆. Кағыз вәрәги 4,88.
 Чап вәрәги 13,36. Нәс.-нәшријәт вәрәги 11,93. ФГ 06425. Сифариш 535. Тиражи 660.
 Гижәти 80 гәп.

Азәрбајҹан ССР Мәдәнијәт Назирлијинин
 «Гызыл Шәрг» мәтбәәси. Бақы, Гәзи Асланов күчәси, 80.