

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

4

1962

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Бакы—Баку

Р. Г. МАМЕДОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ
ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ И О ПОРЯДКЕ
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЕМЕЙСТВОМ
ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Первое сообщение)

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие удобные аппараты приближения функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами являются по сути дела приближениями с помощью линейных положительных операторов (Л. П. О.). Поэтому не случайно, что в конструктивной теории функций все большее место занимает изучение семейств линейных процессов приближения. Среди этих методов (процессов) приближения особо выделяются Л. П. О.

В 1953 г. П. П. Коровкин [4] указал некоторые достаточные условия для того, чтобы последовательность Л. П. О. сходилась в точках непрерывности ограниченных функций. Он доказал также ряд теорем о порядке сходимости Л. П. О. Среди этих результатов приведем теорему [5] о последовательности $\{L_n(f; x)\}$ Л. П. О., значение которых не зависит от поведения функций $f(x)$ за пределами отрезка $[a, b]$.

Теорема А. Пусть $\Phi(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равная нулю в точке $x = x_0$, положительная в других точках отрезка $\Phi(x) > 0$, $x \neq x_0$, и $f(x)$ — некоторая функция, ограниченная на отрезке $[a, b]$. Для того, чтобы из равенства

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Phi(x)} = \tau \quad (1)$$

следовало

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(f; x_0) - f(x_0)}{L_n(\Phi; x_0)} = \tau, \quad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n(\delta)}{L_n(\Phi; x_0)} = 0 \quad (3)$$

имело место при всяком $\delta > 0$, где

1739230
Центральный научная
Библиотека
Академии наук Азербайджанской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

$$\alpha_n(\delta) = L_n[v_\delta(t); x_0]$$

$$v_\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x - x_0| < \delta \\ 1, & \text{если } |x - x_0| \geq \delta \end{cases} \quad (4)$$

для каждого $\delta > 0$.

Теорема А дает возможность установить некоторые асимптотические равенства для приближения ограниченных на конечном отрезке функций посредством Л. П. О. В этом направлении отметим также следующую теорему П. П. Коровкина [6].

Теорема В. Для того, чтобы имело место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n(f; x) - f(x)}{L_n(\psi; x) - \psi(x)} = \frac{D_2 f(x)}{D_2 \psi(x)} \quad (5)$$

необходимо и достаточно, чтобы было верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} = 4, \quad (6)$$

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) u_n(t) dt \quad (7)$$

$$u_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt \geq 0, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \quad (8)$$

В соотношении (5) $D_2 f(x)$ обозначает вторую обобщенную производную функции $f(x)$ в точке x , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{t^2} = D_2 f(x).$$

Очевидно, что теорема А и вытекающие из нее асимптотические равенства (в частности, и равенство (5)) относятся к функциям, ограниченным на конечном отрезке вещественной оси. Однако во многих задачах математического анализа возникает необходимость выяснить порядки сходимости Л. П. О. на бесконечных областях, и еще чаще для неограниченных функций. Исследованию этого вопроса посвящено немало работ. Однако эти работы полностью не раскрывают существующей в общем случае закономерности.

В данной работе излагаются некоторые общие результаты об асимптотическом значении и о порядке приближения функций семейством Л. П. О. на любом конечном или бесконечном промежутке $\langle a, b \rangle$. При этом вышеуказанные результаты П. П. Коровкина обобщаются для некоторого класса неограниченных функций на любом промежутке $\langle a, b \rangle$.

Заметим, что почти все полученные результаты соответствующим образом переносятся на пространство функций от нескольких переменных. Но формулировки полученных в этом случае результатов обычно очень громоздки. Поэтому они, за исключением некоторых, не приводятся.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем здесь некоторые определения и обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть $\{L_\lambda(f; x)\}$ — семейство Л. П. О., область определения которых содержит данное множество $H = \{f(x)\}$ функций $f(x)$, определенных на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$, причем

$$L_\lambda(f; x) = L_\lambda[f(t); x].$$

В дальнейшем нас будет интересовать, вообще говоря, скорость сходимости Л. П. О. $L_\lambda(f; x)$ к функции $f(x)$, при стремящемся к некоторому предельному значению λ_0 параметра λ . Не уменьшая общности, предположим, что $\lambda_0 = \infty$.

Если промежуток $\langle a, b \rangle$ не является всей вещественной осью, то предполагаем, что значение операторов $L_\lambda(f; x)$ не зависит от поведения функций $f(x)$ за пределами $\langle a, b \rangle$.

В некоторых местах специально выделяем Л. П. О., определенные на соответствующем множестве H 2π -периодических функций $f(x)$. Такие Л. П. О. обозначаем через $W_\lambda(f; x)$.

Пусть

$$P_k(t) = (t-x)^k \quad (9)$$

при данном x . Положим

$$\tau_\lambda^{[k]} = L_\lambda(P_k; x), \quad \bar{\tau}_\lambda^{[k]} = L_\lambda(|P_k|; x)$$

и

$$\tau_\lambda^{*[k]} = L_\lambda(|t-x| P_k(t); x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что

$$\tau_\lambda^{[2i]} = \bar{\tau}_\lambda^{[2i]}$$

при $i = 0, 1, 2, \dots$

Кроме указанных, пользуемся и следующими обозначениями

$$\tau_\lambda^{[k]} = W_\lambda(q_k; x), \quad \bar{\mu}_\lambda^{[k]} = W_\lambda(|q_k|; x)$$

и

$$\tau_\lambda^{*[k]} = W_\lambda(|q_1| q_k; x), \quad \text{где}$$

$$q_k(t) = 2^k \sin^k \frac{t-x}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

В дальнейшем мы будем иметь дело и с некоторыми классами функций.

Обозначим через $H(n, x)$ совокупность всех функций из множества H , имеющих производные до n -го порядка включительно в точке $t = x \in \langle a, b \rangle$. $H(n, x)$ обозначает соответствующий класс 2π -периодических функций.

Не уменьшая общности, предполагаем, что все рассматриваемые Л. П. О. удовлетворяют условию $L_\lambda(1; x) = 1$.

Введенные обозначения (и определения) соответствующим образом распространяются и на функции от нескольких переменных.

§ 3. ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ П. П. КОРОВКИНА

Пусть $\Phi(x)$ — некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$ и удовлетворяющая условиям $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = 0 = \Phi(x_0)$ и $\Phi(x) > 0$

при всех $x \in \langle a, b \rangle$, $x \neq x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Рассмотрим множество $H_\Phi = \{f(x)\}$ всех функций $f(x)$ из H , удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{\Phi(x)} \right| \leq M_\delta < +\infty \quad (11)$$

при всех $|x - x_0| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$, где M_δ — некоторое постоянное, зависящее от δ .

Положим

$$R_{\lambda}(\delta) = L_{\lambda}[\beta_{\delta}(t); x_0] \quad (12)$$

при всяком $\delta > 0$, где

$$\beta_{\delta}(x) = v_{\delta}(x) \Phi(x) \quad (13)$$

и $v_{\delta}(x)$ определяется равенством (4).

Теорема 1. Пусть $f \in H_{\Phi}$. Для того чтобы из равенства (1) следовало (2) (вместо n подразумеваем λ), необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_{\lambda}(\delta)}{L_{\lambda}(\Phi; x_0)} = 0 \quad (14)$$

имело место при всяком $\delta > 0$.

Необходимость. Пусть из (1) следует (2), но (14) не удовлетворяется. Тогда найдется последовательность $\lambda_k \rightarrow \infty$, для которой

$$L_{\lambda_k}(\Phi; x_0) \leq C R_{\lambda_k}(\delta) \quad (15)$$

при $\delta > 0$, где $C < +\infty$. Положим $f(x) = \Phi(x) \psi(x)$, где $\psi(x)$ — некоторая непрерывная и ограниченная на $\langle a, b \rangle$ функция, удовлетворяющая условиям $\psi(x_0) = 0$ и $\psi(x) > 0$ при $x \neq x_0$ (такая функция существует сколь угодно много, в качестве $\psi(x)$ берем любую из них). Для этой функции $f(x)$ удовлетворяется условие (11) и

$$f(x) - f(x_0) \geq m_{\delta} v_{\delta}(x) \Phi(x),$$

где m_{δ} — наименьшее значение функции $\psi(x)$ на множестве $|x - x_0| \geq \delta > 0$. Следовательно,

$$L_{\lambda_k}(f; x_0) \geq m_{\delta} R_{\lambda_k}(\delta) \quad (16)$$

при всяком $\delta > 0$. Из (15) и (16) следует, что отношение

$$\frac{L_{\lambda_k}(f; x_0) - f(x_0)}{L_{\lambda_k}(\Phi; x_0)} \text{ не стремится к нулю, хотя } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Phi(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = 0$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность. Если имеет место (1), то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ удовлетворялось бы неравенство

$$(\tau - \varepsilon) \Phi(x) \leq f(x) - f(x_0) \leq (\tau + \varepsilon) \Phi(x). \quad (17)$$

Из (11) и (17) следует, что справедливо неравенство $-\gamma \beta_{\delta}(x) + (\tau - \varepsilon) \Phi(x) < f(x) - f(x_0) < \gamma \beta_{\delta}(x) + (\tau + \varepsilon) \Phi(x)$ при всех $x \in \langle a, b \rangle$, где $\gamma = M_{\delta} + |\tau| + \varepsilon$ и $\beta_{\delta}(x)$ определяется равенством (13). Отсюда, пользуясь монотонностью Л. П. О. $L_{\lambda}(f; x)$, имеем $-\gamma R_{\lambda}(\delta) + (\tau - \varepsilon) L_{\lambda}(\Phi; x_0) < L_{\lambda}(f; x_0) - f(x_0) < (\tau + \varepsilon) L_{\lambda}(\Phi; x_0) + \gamma R_{\lambda}(\delta)$ или

$$-\gamma \frac{R_{\lambda}(\delta)}{L_{\lambda}(\Phi; x_0)} - \varepsilon < \frac{L_{\lambda}(f; x_0) - f(x_0)}{L_{\lambda}(\Phi; x_0)} - \tau < \varepsilon + \gamma \frac{R_{\lambda}(\delta)}{L_{\lambda}(\Phi; x_0)}$$

В силу (14) из последнего неравенства следует (2).

Теорема 1 является обобщением теоремы А. П. П. Коровкина [5].

В самом деле, при условиях теоремы А имеем:

$$m v_{\delta}(x) \leq \beta_{\delta}(x) = v_{\delta}(x) \Phi(x) \leq M v_{\delta}(x)$$

и потому

$$m_{\lambda}(\delta) \leq R_{\lambda}(\delta) = L_{\lambda}(\beta_{\delta}; x_0) \leq M_{\lambda}(\delta),$$

где m и M — некоторые положительные постоянные и $\Phi(x) \leq M$ при $x \in \langle a, b \rangle$ и $\Phi(x) \geq m$ при $|x - x_0| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$. Следовательно, если удовлетворяется условие (3), то удовлетворяется и условие (14), справедливо и обратное. Остальное ясно.

Заметим, что метод доказательства теоремы 1 фактически принадлежит П. П. Коровкину [5].

Теорема 1 переносится и на пространство функции от нескольких переменных.

Пусть $E = \{X\}$ некоторое множество точек $X = (x_1, \dots, x_n)$ n -мерного евклидова пространства R_n и $X_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ некоторая точка этого множества.

Рассмотрим функцию $\Phi(X) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$, определенную на E и удовлетворяющую условиям $\lim_{X \rightarrow X_0} \Phi(X) = 0 = \Phi(X_0)$ и $\Phi(X) > 0$ при всех $X \neq X_0 (X \in E)$. Обозначим через $\rho(X_1, X_2)$ расстояние между двумя точками X_1 и X_2 множества E . Пусть

$$v_{\delta, n}(X) = \begin{cases} 0, & \rho(X, X_0) < \delta \\ 1, & \rho(X, X_0) \geq \delta \end{cases}$$

для каждого $\delta > 0$. Положим

$$\beta_{\delta, n}(X) = v_{\delta, n}(X) \Phi(X).$$

Пусть $H_{\Phi}^{(n)} = \{f(X)\}$ — множество всех функций $f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$ из $H^{(n)}$, и удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{f(X) - f(X_0)}{\Phi(X)} \right| \leq M_{\delta} < +\infty$$

при всех $\rho(X, X_0) \geq \delta > 0$ из множества E .

Для функций множества $H_{\Phi}^{(n)}$ аналогично теореме 1 доказываем

Теорема 2. Пусть $f \in H_{\Phi}^{(n)}$. Для того чтобы из равенства

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{f(X) - f(X_0)}{\Phi(X)} = \tau$$

следовало

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ \lambda_n \rightarrow \infty}} \frac{L_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(f; X_0) - f(X_0)}{L_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(\Phi; X_0)} = \tau,$$

необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow \infty \\ \dots \\ \lambda_n \rightarrow \infty}} \frac{R_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(\delta)}{L_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(\Phi; X_0)} = 0$$

имело место при всяком $\delta > 0$.

В следующих разделах покажем применение теорем 1 и 2.

§ 4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОКРАТНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПОСРЕДСТВОМ Л. П. О.

Теоремы 1 и 2 дают возможность установить асимптотическую зависимость приближения многократно дифференцируемых функций посредством Л. П. О. от производных различного порядка приближаемых функций.

Пусть $H_{p_{2m}}(2m, x)$ совокупность всех функций из множества $H(2m, x)$, для которых удовлетворяется соотношение

$$\left| \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k}{P_{2m}(t)} \right| \leq M_\delta < +\infty$$

при всех $|t-x| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$, где M_δ — некоторое постоянное, зависящее от δ .

Докажем следующую теорему для функций множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$ в случае, когда промежуток $\langle a, b \rangle$ конечен.

Теорема 3*. Для того чтобы имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}}{L_\lambda(\psi; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}} = \frac{f^{(2m)}(x)}{\psi^{(2m)}(x)}, \quad (18)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}}{\tau_\lambda^{[2m]}} = 0 \quad (19)$$

по крайней мере при одном значении $j (j=1, 2, \dots)$.

Необходимость. Рассмотрим функции $P_{2m}(t) = (t-x)^{2m}$ и $P_{2m+2j}(t) = (t-x)^{2m+2j} (j=1, 2, \dots)$.

В силу конечности промежутка $\langle a, b \rangle$ имеем

$$P_{2m}(t) \in H_{P_{2m}}(2m, x) \text{ и } P_{2m+2j}(t) \in H_{P_{2m}}(2m, x).$$

Если имеет место (18), то для этих функций находим:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2j]}}{\tau_\lambda^{[2m]}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(P_{2m+2j}; x)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = \frac{P_{2m+2j}^{(2m)}(x)}{P_{2m}^{(2m)}(x)} = 0,$$

т. е. справедливо (19).

Достаточность. Возьмем функцию

$$\Phi_1(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k$$

Очевидно, что $\Phi_1(t) \in H_{P_{2m}}$

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(x)}{P_{2m}(t)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f^{(2m-1)}(t) - f^{(2m-1)}(x)}{(2m)! (t-x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!} \quad (20)$$

Так как

$$\beta_\delta(t) = \nu_\delta(t)(t-x)^{2m} \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \nu_\delta(t)(t-x)^{2m+2j} \leq \frac{1}{\delta^{2j}} (t-x)^{2m+2j}$$

для каждого $\delta > 0$ и при $j \geq 1$, то, учитывая монотонность Л. П. О. $L_\lambda(f; x)$, имеем

$$R_\lambda(\delta) = L_\lambda[\beta_\delta(t); x] \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \tau_\lambda^{[2m+2j]}.$$

Следовательно, в силу (19), находим

* Нам придется много раз встречаться с равенствами вида (18) и (19). Мы здесь и в дальнейшем имеем в виду, что знаменатели таких выражений не обращаются в нуль в рассматриваемых точках $t=x \in \langle a, b \rangle$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = 0$$

для каждого $\delta > 0$. Поэтому, на основании (21) и теоремы 1 заключаем, что из (20) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(\Phi_1; x) - \Phi_1(x)}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}$$

или

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_\lambda^{[k]}}{L_\lambda(P_{2m}; x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}.$$

Отсюда немедленно получается (18).

Сделаем некоторые замечания о теореме 3, вытекающие из ее доказательства.

Прежде всего отметим, что если имеет место равенство (18) для всех функций из множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$, то условие (19) справедливо при всех $j=1, 2, \dots$.

Достаточность условий теоремы 3 справедлива и при более слабых условиях. Именно, если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda[\nu_\delta(t)P_{2m+2j}(t); x]}{\tau_\lambda^{[2m]}} = 0$$

по крайней мере при одном значении $j (j=0, 1, 2, \dots)$, то соотношение (18) справедливо для всех функций из множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$. В некоторых случаях это утверждение обратимо.

В доказательстве достаточности теоремы 3 мы опирались на теорему 1. Это показывает, что если промежуток $\langle a, b \rangle$ бесконечен, то достаточность теоремы 3 справедлива фактически для тех функций из множества $H(2m, x)$, которые возрастают не быстрее, чем функция $(t-x)^{2m}$ в бесконечности.

Мы здесь укажем обобщение теоремы 3, которое охватывает все неограниченные функции, имеющие некоторую мажоранту на бесконечном промежутке $\langle a, b \rangle$, после чего становятся ясными пути дальнейшего обобщения утверждений типа теоремы 3 и отпадает необходимость сформулировать возможные обобщения в каждом случае в отдельности. Остается добавить, что некоторые другие обобщения доказанных ниже теорем получаются аналогично и не представляют больших трудностей.

Предположим, что $\varphi(t)$ — некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$ и удовлетворяющая условиям $\varphi(t) > 0$ при всех $t \in \langle a, b \rangle$ и $\lim_{t \rightarrow x} \varphi(t) = 1$.

Пусть $H_{\varphi P_{2m}}(2m, x)$ совокупность всех функций из множества $H(2m, x)$ для которых

$$\left| \frac{f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k}{\varphi(t)P_{2m}(t)} \right| \leq M_\delta < +\infty$$

при всех $|t-x| \geq \delta > 0$ из промежутка $\langle a, b \rangle$.

Введем обозначения

$$\tau_\lambda^{[k]}(\varphi) = L_\lambda[\varphi(t)P_k(t); x], \quad k=0, 1, \dots$$

Очевидно, что

$$\tau_{\lambda}^{[k]} = \tau_{\lambda}^{[k]}(1)$$

при всех $k=0,1,2,\dots$

Докажем следующую теорему для функций множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$ при любом промежутке $\langle a, b \rangle$.

Теорема 4. Если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_{\lambda}^{[2m+2j]}(\varphi)}{\tau_{\lambda}^{[2m]}(\varphi)} = 0, \quad (22)$$

по крайней мере при одном значении $j(j=1, 2, \dots)$, то справедливо (18) для всех функций $f(t)$ и $\psi(t)$ из множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$.

Доказательство. Обозначим через $P_k^*(t)$ функцию $\varphi(t)(t-x)^k$. Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\Phi_1(t) - \Phi_1(x)}{P_{2m}^*(t)} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f^{(2m-1)}(t) - f^{(2m-1)}(x)}{(2m)! (t-x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}, \quad (23)$$

где

$$\Phi_1(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right) (t-x)^k.$$

Так как

$$\beta_{\delta}(t) = \nu_{\delta}(t) P_{2m}^*(t) \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \nu_{\delta}(t) \varphi(t) P_{2m+2j}(t) \leq \frac{1}{\delta^{2j}} P_{2m+2j}^*(t)$$

при $j \geq 1$ и каждого $\delta > 0$, то, учитывая монотонность Л. П. О. $L_{\lambda}(f; x)$, имеем

$$R_{\lambda}(\delta) = L_{\lambda}[\beta_{\delta}(t); x] \leq \frac{1}{\delta^{2j}} \tau_{\lambda}^{[2m+2j]}(\varphi).$$

Отсюда, в силу (22) находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_{\lambda}(\delta)}{L_{\lambda}(P_{2m}^*; x)} = 0 \quad (24)$$

при всяком $\delta > 0$. Следовательно, на основании (24) и теоремы 1 заключаем, что из (23) следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_{\lambda}(\Phi_1; x) - \Phi_1(x)}{L_{\lambda}(P_{2m}^*; x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}$$

или

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_{\lambda}(f; x) - f(x) - \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_{\lambda}^{[k]}(\varphi)}{L_{\lambda}(P_{2m}^*; x)} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}$$

Отсюда следует (18).

Заметим, что теорема 4 справедлива и при более слабых условиях. Именно, имеет место

Теорема 5. Если выполняется условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_{\lambda}[\nu_{\delta}(t) P_{2m+2j}^*(t); x]}{\tau_{\lambda}^{[2m]}(\varphi)} = 0, \quad (25)$$

по крайней мере при одном значении $j(j=0, 1, \dots)$, то справедливо соотношение (18) для любых функций $f(t)$ и $\psi(t)$ из множества $H_{P_{2m}}(2m, x)$, где $P_{2m+2j}^*(t) = \varphi(t)(t-x)^{2m+2j}$.

Справедливость теоремы 5 следует из доказательства теоремы 4.

Не уменьшая общности, предположим, что функция $\varphi(t)$ дифференцируема до $2m$ -го порядка включительно в точке $t = x \in \langle a, b \rangle$. Тогда справедлива следующая теорема для класса $H(2m, x)$.

Теорема 6. Если имеет место (18) для всех функций из множества $H(2m, x)$, то справедливо условие (22) при всех $j=1, 2, \dots$

Доказательство. Рассмотрим функции $P_{2m}^*(t) = \varphi(t)(t-x)^{2m}$ и $P_{2m+2j}^*(t) = \varphi(t)(t-x)^{2m+2j}$ ($j=1, 2, \dots$), принадлежащие к множеству $H(2m, x)$. Если имеет место (18), то для этих функций имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_{\lambda}(P_{2m+2j}^*; x)}{L_{\lambda}(P_{2m}^*; x)} = \frac{P_{2m+2j}^{*(2m)}(x)}{P_{2m}^{*(2m)}(x)} = 0$$

или

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_{\lambda}^{[2m+2j]}(\varphi)}{\tau_{\lambda}^{[2m]}(\varphi)} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_{\lambda}(P_{2m+2j}^*; x)}{L_{\lambda}(P_{2m}^*; x)} = 0,$$

так как $P_{2m+2j}^{*(k)}(x) = 0$ ($k=0, 1, \dots, 2m+1$), $P_{2m}^{*(i)}(x) = 0$ ($i=0, 1, \dots, 2m-1$) и $P_{2m}^{*(2m)}(x) \neq 0$.

Теоремы 4 и 6 можно объединить в следующем виде.

Теорема 7. Для того чтобы имело место равенство (18), необходимо, а в случае $f, \psi \in H_{P_{2m}}(2m, x)$ и достаточно, чтобы выполнялось условие (22) при некотором значении $j(j=1, 2, \dots)$.

Заметим, что некоторые результаты работ [7, 10] и Бутцера [13] следуют из теорем 3—7. Некоторые асимптотические соотношения для приближения неорганических функций интегральными Л.П.О. получены также А. С. Джафаровым [14].

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ МНОЖЕСТВА $\bar{H}(2m, x)$ ПОСРЕДСТВОМ Л.П.О.

Рассмотрим теперь семейство $\{W_{\lambda}(f; x)\}$ Л.П.О., определенных на множестве $\bar{H}(2m, x)$ 2π -периодических функций $f(x)$.

Очевидно, для применений удобно иметь специальные теоремы для $W_{\lambda}(f; x)$, подобные теоремам 3—7, в терминах периодических функций. Такие теоремы получаются несложно.

Докажем лишь одну теорему в этом случае относительно функций из множества $\bar{H}(2, x)$ ограниченных 2π -периодических функций.

Теорема 8. Для того чтобы имело место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{W_{\lambda}(f; x) - f(x) - f'(x) \mu_{\lambda}^{[1]} - f''(x) \mu_{\lambda}^{[2]}}{W_{\lambda}(\psi; x) - \psi(x) - \psi'(x) \mu_{\lambda}^{[1]} - \psi''(x) \mu_{\lambda}^{[2]}} = \frac{f'''(x)}{\psi'''(x)}, \quad (26)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\nu_{\lambda}^{[2+2j]}}{\mu_{\lambda}^{[2]}} = 0 \quad (27)$$

по крайней мере при одном значении $j(j=1, 2, \dots)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Пусть $q_k(t) = 2^k \sin^k \frac{t-x}{2}$.

Необходимость условия теоремы следует из равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\mu_\lambda^{[2+2j]}}{\mu_\lambda^{[2]}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{W_\lambda(q_{2+2j}; x)}{W_\lambda(q_2; x)} = \frac{q_{2+2j}(x)}{q_2(x)} = 0.$$

Для доказательства достаточности рассмотрим функцию

$$F(t) = f(t) - f(x) - 2f'(x) \sin \frac{t-x}{2}.$$

Нетрудно доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{F(t) - F(x)}{q_2(t)} = \frac{f''(x)}{2}.$$

Отсюда, на основании теоремы 1 и равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{R_\lambda(\delta)}{\mu_\lambda^{[2]}} = 0,$$

вытекающего из условия (27), где $R_\lambda(\delta) = W_\lambda[\nu_\delta(t)q_2(t); x]$, следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{W_\lambda(f; x) - f(x) - f'(x)\mu_\lambda^{[1]}}{W_\lambda(q_2; x)} = \frac{f''(x)}{2}.$$

Заметим, что теорема 8 допускает дальнейшее обобщение подобно теоремам 3—7.

В частности, имеем следующее усиление необходимости условия теоремы 8.

Если имеет место равенство (26) для всех функций из класса $\bar{H}(2, x)$, то справедливо условие (27) при всех $j=1, 2, \dots$

Для справедливости достаточности условий теоремы 8 достаточно потребовать, чтобы имело место

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{W_\lambda[\nu_\delta(t)q_{2+2j}(t); x]}{\mu_\lambda^{[2]}} = 0$$

по крайней мере при одном значении $j(j=0, 1, \dots)$.

Из теоремы 8 следуют, в частности, некоторые результаты работ [3, 10].

Кроме того, если $\lambda = n$ — целое положительное число, и, в частности

$$W_\lambda(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_k^{(n)} \cos kt \right] dt = L_n(f; x),$$

то из теоремы 8 следует также теорема В. П. П. Коровкина [6].

В самом деле,

$$\mu_n^{[2]} = L_n(q_2; x) = 2[1 - \rho_1^{(n)}]$$

$$\text{и } \mu_n^{[4]} = L_n(q_4; x) = 2[1 - \rho_1^{(n)}] \left[4 - \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} \right],$$

то условие (27) при $j=1$ принимает вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^{[4]}}{\mu_n^{[2]}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[4 - \frac{1 - \rho_2^{(n)}}{1 - \rho_1^{(n)}} \right] = 0,$$

т. е. превращается в условие (6) теоремы В. П. П. Коровкина, поэтому из теоремы 8 следует теорема В.

В случае

$$W_\lambda(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos kt \right] dt = L_1(f; x),$$

где

$$U_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos kt \geq 0, \quad -\pi \leq t \leq \pi, \quad r \in E \text{ и}$$

$r \rightarrow r_0$ — предельная точка множества $E = \{r\}$, из теоремы 8 следует и одна теорема работы [8].

Заметим, что теоремы 3—8 соответствующим образом переносятся на функции от нескольких переменных.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ДОКАЗАННЫХ ТЕОРЕМ К НЕКОТОРЫМ КОНКРЕТНЫМ Л. П. О.

1. Пусть

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (28)$$

— полином С. Н. Бернштейна. В этом случае $\langle a, b \rangle = [0, 1]$ и H — множество всех функций $f(t)$, ограниченных на $[0, 1]$.

Так как

$$\tau_n^{[k]}(1) = B_n[(t-x)^k; x] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^k C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

то из рекуррентных соотношений

$$\tau_n^{[k+1]}(1) = \sum_{i=1}^k x C_n^i \frac{(1-x) \tau_n^{[k-i]}(1) - \tau_n^{[k-i+1]}(1)}{n^i},$$

указанных С. Н. Бернштейном [2], следует, что имеет место условие (19) теоремы 3 при каждом $j=1, 2, \dots$ В самом деле, учитывая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m \tau_n^{[2m]}(1) = (2m-1)!! [x(1-x)]^m$$

при каждом $m \geq 1$, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{[2m+2j]}(1)}{\tau_n^{[2m]}(1)} = \left[\frac{x(1-x)}{2} \right]^j \frac{(2m+2j-1)!!}{(2m-1)!!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^j} = 0.$$

Следовательно, для функций из множества $H(2m, x)$ справедливо (18). При $\psi(t) = (t-x)^{2m}$ для каждой функции $f \in H(2m, x)$ из (18) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^m \left[B_n(f; x) - f(x) - \sum_{k=1}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_n^{[k]}(1) \right] = \frac{f^{(2m)}(x)}{(m)!} \left[\frac{x(1-x)}{2} \right]^m. \quad (29)$$

Асимптотическое равенство (29) доказано С. Н. Бернштейном [2]. При $m=1$ из (29) следует соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [B_n(f; x) - f(x)] = \frac{x(1-x)}{2} f''(x) \quad (30)$$

так как $\tau_n^{[1]}(1) = 0$.

Равенство (30) доказано Е. В. Вороновской [3].

Наконец, из соотношения (29) следует, что для всякой бесконечно дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ справедливо асимптотическое разложение

$$B_n(f; x) \sim f(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \tau_n^{[k]}(1).$$

II. Пусть

$$\Phi_\lambda(f; x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) K(\lambda t) dt \quad (31)$$

—Л. П. О. с ядром типа Фейера [1]. Предположим, что неотрицательная функция $K(t)$ удовлетворяет условиям: а) $\int_{-\infty}^{\infty} K(t) dt = 1$, б) $\gamma_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k K(t) dt < +\infty$ при $k=0, 1, \dots, 2m+2$.

Так как

$$\tau_\lambda^{[2m]}(1) = \frac{\gamma_{2m}}{\lambda^{2m}} \quad \text{и} \quad \tau_\lambda^{[2m+2]}(1) = \frac{\gamma_{2m+2}}{\lambda^{2m+2}},$$

то удовлетворяется условие (22) теоремы 4 (при $\varphi(t)=1$)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\tau_\lambda^{[2m+2]}(1)}{\tau_\lambda^{[2m]}(1)} = 0.$$

Следовательно, в силу теоремы 4 для каждой функции $f \in H_{P_{2m}}(2m, x)$

$$\text{имеем:} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2m} \left[\Phi_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{\gamma_k}{\lambda^k} \right] = \gamma_{2m} \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!}. \quad (32)$$

Соотношение (32) при четном $K(t)$ доказано Бутцером [13] для функций $f \in H(2m, x)$, ограниченных на всей вещественной оси.

При $K(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ Л. П. О. (31) превращается в сингулярный интеграл Вейерштрасса:

$$B_\lambda(f; x) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-\lambda^2 t^2} dt. \quad (33)$$

В этом случае $\gamma_{2k+1} = 0$ и

$$\gamma_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \frac{(2k-1)!!}{2^k}, \quad k=0, 1, \dots$$

Поэтому в силу (32) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2m} \left[B_\lambda(f; x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{2^{2k} k!} \frac{1}{\lambda^{2k}} \right] = \frac{1}{2^{2m} m!} f^{(2m)}(x)$$

для Л. П. О. Вейерштрасса (33) и каждой $f \in H_{P_{2m}}(2m, x)$.

III. Пусть

$$v_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \cos kt \right] dt \quad (34)$$

—сингулярный интеграл Валле—Пуссена. Из соотношения

$$\cos^{2n} \frac{t}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} 2 \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} \cos kt \right]$$

следует, что (34) является Л. П. О. В этом случае

$$\mu_n^{[2]} = \frac{2}{n+1} \quad \text{и} \quad \mu_n^{[4]} = \frac{2}{n+1} \left(4 - \frac{4n+2}{n+2} \right).$$

Следовательно, удовлетворяется условие (27) теоремы 8:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^{[4]}}{\mu_n^{[2]}} = 0$$

и поэтому по теореме 8 находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(f; x) - f(x) - f'(x) \mu_n^{[1]}}{v_n(\psi; x) - \psi(x) - \psi'(x) \mu_n^{[1]}} = \frac{f''(x)}{\psi''(x)}.$$

Отсюда, при $\psi(t) = 4 \sin^2 \frac{t-x}{2}$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) [v_n(f; x) - f(x)] = f''(x). \quad (35)$$

для каждой функции $f \in \bar{H}(2, x)$.

Равенство (35) доказано И. П. Натансоном [11].

IV. Пусть

$$F_n(f; x) = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \quad (36)$$

—Л. П. О. Фейера для функций $f \in \bar{H}$.

Так как

$$F_n(1; x) = 1, \quad \mu_n^{[1]} = 0, \quad \mu_n^{[2]} = \frac{2}{n} \quad \text{и} \quad \mu_n^{[4]} = \frac{4}{n},$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^{[4]}}{\mu_n^{[2]}} = 2 \neq 0,$$

т. е. не удовлетворяется условие (27) теоремы 8. Следовательно равенство (26) для Л. П. О. Фейера (36) не имеет места.

Мы здесь не имеем возможности применить вышедшие теоремы к другим известным Л. П. О. Применение указанных теорем к Л. П. О. Джексона, Пикара, Ландау и другим дают соответствующие результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации, М., 1947.
2. Бернштейн С. Н. Добавление к статье Е. В. Вороновской „Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна“, ДАН СССР, А, 1932.

3. Вороновская Е. В. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна. „ДАН СССР“, А. 1932.
4. Коровкин П. П. О сходимости линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций. „ДАН СССР“, т. XIII, 1953, № 6.
5. Коровкин П. П. О порядке приближения функций линейными положительными операторами. „ДАН СССР“, 1957, т. 114, № 6.
6. Коровкин П. П. Об одном асимптотическом свойстве положительных методов суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса Z_2 линейными положительными операторами. „Усп. матем. наук“, 1958, т. XIII, вып. 6.
7. Мамедов Р. Г. Асимптотическое значение приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами. „ДАН СССР“, 1959, т. 128, № 3.
8. Мамедов Р. Г. О порядке и об асимптотическом значении приближения функций линейными положительными операторами. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. техн.“, 1961, № 2.
9. Мамедов Р. Г. О порядке приближения функций линейными интегральными операторами в точках Лебега данного порядка. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. техн.“, 1961, № 3.
10. Мамедов Р. Г. Асимптотическое значение приближения многократно дифференцируемых функций m -сингулярными интегралами. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. техн.“, 1961, № 6.
11. Натансон И. П. Некоторые оценки, связанные с сингулярным интегралом Валле—Пуссена. „ДАН СССР“, 1944, 45.
12. Натансон И. П. Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.
13. Butzer P. L. Representation and approximation of functions by general Singular integrals, Proc. Koninkl. nederl. Akad. Wet., A 63, 1960.
14. Джафаров А. С. О сходимости семейства сингулярных интегралов. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. техн.“, 1961, № 4.

Р. Г. Мамедов

Функцияларын хэtti мүсбэт операторлар аилэси васитэсилэ
jaxынлашмасынын тэртиби вэ асимптотик гijмэти хаггында
бэ'зи үмүми нэтичэлэр (биринчи мэгалэ)

ХУЛАСЭ

Бу ишдэ функцияларын хэtti мүсбэт операторлар васитэсилэ
jaxынлашмасынын асимптотик гijмэти хаггында бир сыра теоремлэр
исбат олунур.

1-чи теорем. Н_φ синфинэ дахил олан f функцијасы үчүн (1)-дэн
(2)-нин чыхмасындан өтрү (14) шэртинин өдэнилмэси зэрури вэ
кафидир.

Бу теорем сонра чохдэјишэнли функциялар үчүн үмүмилэшдири-
лир (2-чи теорем).

3-чү теорем. Н_{P_{2m}} (2m, x) синфиндэн олан f вэ φ функциялары
үчүн (18) мунасибэтинин өдэнилмэсиндэн өтрү (19) шэртинин
өдэнилмэси зэрури вэ кафидир.

Бу теорем даһа кениш функциялар синфи үчүн дэ доғрудур (4-чү,
5-чи, 6-чы вэ 7-чи теоремлэр).

§ 5-дэ 2π-периодлу функциялар синфи үчүн сөйлэнилэн типли
теоремлэр исбат олунур.

Нэһајэт, мэгалэнин сонунда исбат едилэн теоремлэр конкрет хэtti
мүсбэт операторлара (Бернштейн полиномуна, Фејер типли нүвэси олан
операторлара, Валле—Пуссен вэ Фејер операторларына) тэтбиг едилир.

Г. М. ДЖАФАРЛИ

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОДНОМУ КЛАССУ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СИСТЕМ

В этой работе рассматриваются некоторые теоремы о сходимости
рядов Фурье по ортонормированной мультипликативной системе $\{\psi_n(x)\}$,
замкнутой относительно операции извлечения корня. Определение этой
системы функций $\{\psi_n(x)\}$ и связанной с ней системы функций $\{\varphi_n(x)\}$
даны в работе [4]. Здесь мы получаем аналог признаков сходимости
Дини и Гарди-Литтльвуда для тригонометрической системы функций
и некоторых теорем о сходимости почти всюду ряда Фурье по три-
гонометрической системе функций.

§ 1. Ядро Дирихле и константы Лебега

В теории сходимости рядов по ортогональной системе функций
 $\{\psi_n(x)\}$ на отрезке $[0, 1]$ основную роль играют ядро Дирихле

$$D_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \overline{\psi_k(y)}$$

и функции Лебега

$$L_n(x) = \int_0^1 |D_n(x, y)| dy$$

Так как рассматриваемая нами система функций мультипликативна,
то $D_n(x, y)$ зависит лишь от $x - y^*$ и $L_n(x)$ не зависит от x [3].
Мы будем поэтому писать

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)$$

и

$$L_n(x) = \int_0^1 |D_n(x)| dx$$

* Через $x - y$ обозначена обобщенная разность чисел x и y .

Из общих результатов Н. Я. Виленкина о мультипликативных системах [3] вытекает, что если $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$, то

$$D_n(x) = \psi_n(x) \left[\frac{D_{p^s}(x)}{\varphi_{s+1}^{a_s}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(x)}{1 - \varphi_{s+1}(x)} + \frac{D_{p^{s-1}}(x)}{\varphi_s^{a_{s-1}}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_s^{a_{s-1}}(x)}{1 - \varphi_s(x)} + \dots + \frac{D_0(x)}{\varphi_1^{a_0}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_1^{a_0}(x)}{1 - \varphi_1(x)} \right]. \quad (1)$$

Кроме того,

$$D_{p^k}(x) = \begin{cases} p^k, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{p^k} \\ 0, & \text{если } \frac{1}{p^k} < x \leq 1 \end{cases}$$

Введем функцию $\left[\frac{1}{x} \right]_p$, положив $\left[\frac{1}{x} \right]_p = p^k$ на отрезке $\left[\frac{1}{p^k}, \frac{1}{p^{k+1}} \right]$.

Из формулы (1) легко следует, что

$$|D_n(x)| < 2 \left[\frac{1}{x} \right]_p.$$

Поэтому, если x лежит на отрезке $\left[\frac{1}{p^k}, \frac{1}{p^{k+1}} \right]$, то

$$|D_n(x)| < 2p^k$$

Рассмотрим теперь константы Лебега L_n для нашей системы. Начнем с вывода рекуррентной формулы для этих констант. Для этого запишем константу Лебега в виде:

$$L_n(x) = \int_0^1 |D_n(x)| dx$$

и подставим указанное ранее значение для $D_n(x)$

$$L_n(x) = \int_0^1 \psi_n(x) \left[\frac{D_{p^s}(x)}{\varphi_{s+1}^{a_s}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(x)}{1 - \varphi_{s+1}(x)} + \frac{D_{p^{s-1}}(x)}{\varphi_s^{a_{s-1}}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_s^{a_{s-1}}(x)}{1 - \varphi_s(x)} + \dots + \frac{D_0(x)}{\varphi_1^{a_0}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_1^{a_0}(x)}{1 - \varphi_1(x)} \right] dx, \quad (2)$$

где $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s = n^{(s-1)} + a_s p^s$

Заметим, что $|\psi_n(x)| = 1$ и потому этот множитель может быть опущен.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на части $\left[0, \frac{1}{p^s} \right]$ и $\left[\frac{1}{p^s}, 1 \right]$

Рассмотрим сначала последний отрезок. Из формулы для $D_n(x)$ ясно, что

$$\int_{\frac{1}{p^s}}^1 |D_n(x)| dx = \int_{\frac{1}{p^s}}^1 |D_{n^{(s-1)}}(x)| dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\frac{1}{p^s}}^1 |D_n(x)| dx = \int_0^1 |D_{n^{(s-1)}}(x)| dx - \int_0^{\frac{1}{p^s}} |D_{n^{(s-1)}}(x)| dx = L_{n^{(s-1)}} - \int_0^{\frac{1}{p^s}} |D_{n^{(s-1)}}(x)| dx,$$

но на отрезке $\left[0, \frac{1}{p^s} \right]$ все функции $\varphi_k(x)$, для которых $k < \frac{1}{p^s}$, равны единице [4]. Значит, на этом отрезке

$$D_{n^{(s-1)}}(x) = n^{(s-1)}$$

Отсюда имеем:

$$\int_{\frac{1}{p^s}}^1 |D_n(x)| dx = L_{n^{(s-1)}} - \frac{n^{(s-1)}}{p^s}.$$

Рассмотрим теперь отрезок $\left[0, \frac{1}{p^s} \right]$. На этом отрезке $D_{p^k}(x) = p^k$, а все функции $\varphi_k(x) = 1$, $k \leq s$ [4].

Значит на этом отрезке $D_n(x)$ имеет вид:

$$D_n(x) = \psi_n(x) \left[\frac{D_{p^s}(x)}{\varphi_{s+1}^{a_s}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(x)}{1 - \varphi_{s+1}(x)} + p^{s-1} \cdot a_{s-1} + p^{s-2} a_{s-2} + \dots + a_0 \right] = \psi_n(x) \left[\frac{D_{p^s}(x)}{\varphi_{s+1}^{a_s}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(x)}{1 - \varphi_{s+1}(x)} + n^{(s-1)} \right].$$

Значит

$$\int_0^{\frac{1}{p^s}} |D_n(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{p^s}} \left| \frac{D_{p^s}(x)}{\varphi_{s+1}^{a_s}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(x)}{1 - \varphi_{s+1}(x)} + n^{(s-1)} \right| dx.$$

Но на отрезке $\left[\frac{\kappa}{p^{s+1}}, \frac{\kappa+1}{p^{s+1}} \right]$ функция $\varphi_{s+1}(x) = e^{\frac{2\pi i \kappa}{p}}$ ($0 \leq \kappa < p-1$)

Отсюда легко следует, что

$$\int_0^{\frac{1}{p^s}} |D_n(x)| dx = \frac{1}{p} \sum_{\kappa=0}^{p-1} \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi a_s}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} + \frac{n^{(s-1)}}{p^s} \cdot e^{\frac{\pi i \kappa (a_s + 1)}{p}} \right|;$$

окончательно получаем, если $n = a_s p^s + n^{(s-1)}$, то

$$L_n = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi a_s}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} + \frac{n^{(s-1)}}{p^s} \cdot e^{\frac{\pi i \kappa (a_s + 1)}{p}} \right| + L_{n^{(s-1)}} - \frac{n^{(s-1)}}{p^s} \quad (3)$$

Мы получили рекуррентную формулу для констант Лебега. Теперь можно получить общую формулу для констант Лебега. А именно, пусть

$$n = a_s p^s + a_{s-1} p^{s-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

Тогда, повторно применяя рекуррентную формулу, получаем:

$$L_n = \sum_{j=0}^s \left[\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi a_j}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} + \frac{n^{(j-1)}}{p^j} \cdot e^{\pi i \kappa (a_j + 1)} \right| - \frac{n^{(j-1)}}{p^j} \right],$$

где через $n^{(j-1)}$ обозначено $a_{j-1} p^{j-1} + \dots + a_1 p + a_0$ и $n^{(-1)} = 0$. Таким образом, мы получили формулу для констант Лебега. Выведем из этой формулы некоторые следствия.

$$1) \text{ Так как } \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi a_j}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} \right| < a_j \text{ и } n^{(j-1)} < p^j,$$

то

$$L_n \leq \sum_{j=0}^s \left[\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (a_j + 1) \right] \leq p \cdot (s + 1),$$

откуда

$$L_n = O(\lg p n).$$

Мы видим, таким образом, что константы Лебега возрастают не быстрее, чем функции вида $C \cdot \lg p n$.

Докажем, что эта оценка точна. Для этого возьмем число n следующего вида:

$$n = p^{2s} + p^{2s-2} + p^{2s-4} + \dots + 1.$$

В этом случае L_n запишется так:

$$L_n = \sum_{j=0}^s \left[\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| 1 + \frac{n^{(2j-1)}}{p^{2j}} \cdot e^{\frac{\pi i \kappa (a_{2j} + 1)}{p}} \right| - \frac{n^{(2j-1)}}{p^{2j}} \right],$$

но в силу нашего выбора числа n

$$n^{(2j-1)} \leq p^{2j-1}.$$

Отсюда

$$L_n < \sum_{j=0}^s \left[\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| 1 - \frac{1}{p} \right| \right]$$

Если $p \geq 3$, то имеем:

$$L_n < \frac{1}{3} (s + 1) < \frac{1}{3} \lg_p n$$

Аналогичная оценка получается при $p=2$, если положить

$$n = 4^s + 4^{s-2} + \dots$$

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существует такое число $C > 0$, что $L_n < C \cdot \ln p n$ и такое число $C_1 > 0$, что для любого N найдется такое $n > N$, что $L_n > C_1 \ln n$.

Заметим, что $L_{p^s} = 1$, так как

$$L_{p^s} = \int_0^1 |D_{p^s}(x)| dx = p^s \int_0^{\frac{1}{p^s}} dx = 1$$

Из этого равенства вытекает, в силу теоремы Алексича (см. Качмаж и Штейнгауз, стр. 400), следующий результат:

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x)$ суммируем методом (C, α) почти всюду для любого $\alpha > 0$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 < \infty.$$

Иными словами, ряд Фурье любой функции с интегрируемым квадратом почти всюду суммируется методом (C, α) .

Мы видим здесь, что наша система отличается от тригонометрической. Для тригонометрической системы существует асимптотическая формула для констант Лебега, а именно:

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2} \ln n.$$

В нашем случае константа Лебега при возрастании n колеблется, причем они бесконечно много раз принимают значение единицы и бесконечно много раз становятся больше, чем $C_1 \ln n$.

Отметим еще следующее свойство констант Лебега:

$$L_{p \cdot n} = L_n$$

В самом деле, пусть $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_s p^s$

Тогда $N = np = a_0 p + a_1 p^2 + \dots + a_s p^{s+1}$

Но

$$\frac{N^{(j)}}{p^{j+1}} = \frac{a_{j-1} p^j + \dots + a_0 p}{p^{j+1}} = \frac{a_{j-1} p^{j-1} + \dots + a_0}{p^j} = \frac{n^{(j-1)}}{p^j}$$

Отсюда видно, что выражение (3) для L_n не меняется при замене n на np .

Укажем еще одну любопытную формулу для констант Лебега, именно найдем L_n , если

$$n = (p-1)p^s + n^{s-1}$$

Из формулы (3) получаем при $a_s = p - 1$

$$L_n = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi (p-1)}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} + \frac{n^{(s-1)}}{p^s} \cdot e^{\pi i \kappa} \right| + L_{n^{(s-1)}} - \frac{n^{(s-1)}}{p^s} = L_{n^{(s-1)}} + 1 - 2 \cdot \frac{n^{(s-1)}}{p^s}$$

Итак,

$$L_{(p-1)p^s + n^{(s-1)}} = L_{n^{(s-1)}} - 2 \frac{n^{(s-1)}}{p^s} + 1$$

Укажем, наконец, формулу для $L_{a_s p^s}$.
Из формулы (3)

$$L_{a_s p^s} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left| \frac{\sin \frac{\kappa \pi a_s}{p}}{\sin \frac{\kappa \pi}{p}} \right|$$

§ 2. Критерии сходимости в точке рядов Фурье по ортонормированной мультипликативной системе функций $\{\psi_n(x)\}$

Н. Я. Виленкин установил, что для мультипликативных ортонормированных систем [3]

$$S_n(x) - f(x) = \int_0^1 |f(x-t) - f(x)| D_n(t) dt,$$

где $S_n(x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$. Из этой формулы могут быть получены различные признаки сходимости для рядов Фурье по ортонормированной системе $\{\psi_n(x)\}$.

Предварительно рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Если функция $f(x)$ суммируема, а функция $g(x)$ — ограничена, то интеграл

$$\int_0^1 f(x+t) g(t) \overline{\psi_n(t)} dt \quad (4)$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, причем это стремление равномерно относительно x .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы из § 31 в [1], стр. 105.

Замечание 1. Лемма сохраняет силу, если вместо интеграла (4) рассмотреть такой же интеграл, только от a до b , где $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Действительно, для этого достаточно положить

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t) & \text{на } [a, b] \\ 0 & \text{вне } [a, b], \end{cases}$$

чтобы свести этот случай к предыдущему.

Замечание 2. Лемма сохраняет силу, если вместо $g(t)$ рассмотреть функцию $g_x(t)$, для которой выполнены условия:

$$|g_x(t)| \leq M$$

при $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$,
кроме того, при $h \rightarrow 0$

$$\int_0^1 |g_x(t+h) - g_x(t)| dt \rightarrow 0$$

равномерно относительно x на отрезке $[0, 1]$.

Действительно, в этом случае доказательство леммы проходит слово в слово.

Замечание 3: Если $f(x)$ непрерывная функция, то

$$\left| \int_0^1 f(x+t) g(t) \overline{\psi_n(x)} dt \right| \leq A \omega\left(\frac{1}{p^s}, f\right) + B \cdot \omega_1\left(\frac{1}{p^s}, g\right),$$

где A и B — постоянные; ω — модуль непрерывности, а ω_1 — интегральный модуль непрерывности.

Заметим еще, что

$$D_n(x) = \psi_n(x) \cdot T_n(x),$$

где

$$T_n(x) = \left[\frac{D_{p^{k-1}}(x)}{\varphi_k^{a_{k-1}}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_k^{a_{k-1}}(x)}{1 - \varphi_k(x)} + \dots + \frac{D_0(x)}{\varphi_1^{a_0}(x)} \cdot \frac{1 - \varphi_1^{a_0}(x)}{1 - \varphi_1(x)} \right]$$

При этом значение функции $T_n(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{p^k}, 1\right]$ зависит лишь

от первых k коэффициентов p -ичного разложения числа n .

Докажем теперь аналог интегрального признака сходимости Дини. Если интеграл

$$\int_0^1 |f(x-u) - f(x)| \left[\frac{1}{u} \right]_p du \quad (5)$$

сходится в точке x , то ряд Фурье сходится в точке x .

Доказательство. Зададим число $\varepsilon > 0$. Так как интеграл (5) сходится, то найдется такое k , что

$$\frac{1}{p^k} \int_0^1 |f(x-u) - f(x)| \left[\frac{1}{u} \right]_p du < \varepsilon.$$

Так как $|\psi_n(x)| = 1$, а $D_n(u) = \psi_n(u) T_n(u)$, где

$$|T_n(u)| < 2 \left[\frac{1}{u} \right]_p,$$

то

$$\left| \int_0^1 [f(x-u) - f(x)] D_n(u) du \right| \leq 2 \int_0^1 |f(x-u) - f(x)| \left[\frac{1}{u} \right]_p du < 2\varepsilon.$$

Но в силу леммы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x+u) - f(x)] \cdot T_n(u) \psi_n(u) du = 0. \quad (6)$$

В самом деле, функция $f(x)$ суммируема, функции $T_n(u)$ — ограничены и совпадают на отрезке $\left[\frac{1}{p^k}, \frac{1}{p^s}\right]$ с конечным числом ограниченных функций. Применяя лемму к каждой из этих функций убеждаемся в справедливости равенства (6).

Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x+u) - f(x)] D_n(u) du = 0$$

и, следовательно, наш ряд сходится в точке x к функции $f(x)$, что и требовалось доказать.

Будем говорить, что $f(x)$ удовлетворяет в окрестности точки x условию Липшица порядка $\alpha > 0$, если найдется такое k , что на всех

отрезках $\left[0, \frac{1}{p^s}\right]$, $s \geq k$, выполняется неравенство:

$$|f(x+u) - f(x)| < K \cdot \frac{1}{p^{s\alpha}},$$

где K — некоторая постоянная величина.

Следствие 1. Если в окрестности точки x функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, то ее ряд Фурье сходится в этой точке*.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. Мы имеем } \int_0^1 |f(x+u) - f(u)| \left[\frac{1}{u}\right]_p du = \\ = \int_0^{\frac{1}{p^k}} |f(x+u) - f(x)| \left[\frac{1}{u}\right]_p du + \int_{\frac{1}{p^k}}^1 |f(x+u) - f(x)| \left[\frac{1}{u}\right]_p du. \end{aligned}$$

Второй интеграл сходится, так как функция $\left[\frac{1}{u}\right]_p$ ограничена на отрезке $\left[\frac{1}{p^k}, 1\right]$; первый же интеграл разобьем на интегралы по отрезкам $\left[\frac{1}{p^{s+1}}, \frac{1}{p^s}\right]$.

В силу условий Липшица, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{p^k}} |f(x+u) - f(x)| \left[\frac{1}{u}\right]_p du = \sum_{s=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{p^{s+1}}}^{\frac{1}{p^s}} |f(x+u) - f(x)| \cdot \left[\frac{1}{u}\right]_p du \leq \\ \leq K \sum_{s=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{p^{s+1}}}^{\frac{1}{p^s}} \frac{1}{p^{s\alpha}} \cdot p^s du = K \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{p^{s(\alpha-1)}} \left(\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{s+1}} \right) = \end{aligned}$$

$$= K \frac{p-1}{p} \sum_{s=k}^{\infty} \frac{1}{p^{s\alpha}} < +\infty, \text{ так как } \alpha > 0$$

Следствие 2. Пусть существует такое k , что при $s \geq k$ и $u \in \left[0, \frac{1}{p^s}\right]$ выполняется неравенство:

$$|f(x+u) - f(x)| < K \cdot \frac{1}{s^{1+\varepsilon}}, \text{ где } \varepsilon > 0$$

Тогда ряд Фурье сходится в точке x .

В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{s=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{p^{s+1}}}^{\frac{1}{p^s}} |f(x+u) - f(x)| \left[\frac{1}{u}\right]_p du \leq K \sum_{s=k}^{\infty} \int_{\frac{1}{p^{s+1}}}^{\frac{1}{p^s}} \frac{1}{s^{1+\varepsilon}} p^s du = \\ = K \cdot \frac{p-1}{p} \sum_{s=k}^{\infty} p^s \cdot \frac{1}{s^{1+\varepsilon}} \cdot \frac{1}{p^s} < +\infty. \end{aligned}$$

Поэтому, рассуждая так же как и в следствии 1, убеждаемся в справедливости следствия.

Совершенно так же доказывается, что ряд Фурье сходится в точке x , если найдется такое k , что при $s \geq k$ на отрезке $\left[0, \frac{1}{p^s}\right]$ выполняется неравенство: $|f(x+u) - f(x)| < \frac{1}{s^{1+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$.

Докажем теперь признак, аналогичный признаку Гарди—Литтльвуда, который основан как на поведении функции в рассматриваемой точке, так и на скорости стремления к нулю коэффициентов ряда.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$1. \int_0^1 |f(x_0+u) - f(x_0)| du = o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right)$$

$$2. C_n = O(n^{-\delta}), \delta > 0.$$

Тогда ряд Фурье сходится в точке x к значению $f(x_0)$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x_0+x) - f(x_0)$$

Ряд Фурье этой функции имеет вид:

$$-f(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \psi_n(x_0+x) = -f(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x_0) \psi_n(x)$$

функция $g(x)$ удовлетворяет первому условию в точке $x_0=0$ и условию на коэффициенты, так как ее коэффициенты Фурье равны:

* Другим способом это утверждение доказал Н. Я. Виленкин (2).

$$C_n \psi_n(x_0) = O(n^{-\delta})$$

Следовательно, нам достаточно доказать следующее утверждение.
Пусть интеграл

$$\int_0^h |f(u)| du = o\left(\frac{h}{|\ln h|}\right)$$

и

$$C_n = O(n^{-\delta}), \text{ где } C_n = \int_0^1 f(x) \overline{\psi_n(x)} dx$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(o) = g(o)$.

(т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = 0$).

Рассмотрим $S_n(o) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \psi_k(o)$

Мы уже знаем, что

$$S_n(x) = \int_0^1 f(x-t) D_n(t) dt$$

$$\text{Значит } S_n(o) = \int_0^1 f(-t) D_n(t) dt.$$

$$\text{Пусть } n = a_s p^s + n^{(s-1)}$$

Тогда как мы знаем,

$$D_n(t) = D_{p^s}(t) \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(t)}{1 - \varphi_{s+1}(t)} + \varphi_{s+1}^{a_s}(t) \cdot D_{n^{(s-1)}}(t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_n(o) &= \int_0^1 f(-t) \left(D_{p^s}(t) \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(t)}{1 - \varphi_{s+1}(t)} + \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) \right) dt = \\ &= \int_0^1 f(-t) D_{p^s}(t) \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(t)}{1 - \varphi_{s+1}(t)} dt + \int_0^1 f(-t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый интеграл. Мы знаем, что $D_{p^s}(t) = 0$ на отрезке $\left[\frac{1}{p^s}, 1\right]$ и p^s на отрезке $[0, p^s]$.

Выражение же

$$\left| \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(t)}{1 - \varphi_{s+1}(t)} \right| < p.$$

Значит

$$\left| \int_0^1 f(-t) D_{p^s}(t) \cdot \frac{1 - \varphi_{s+1}^{a_s}(t)}{1 - \varphi_{s+1}(t)} dt \right| \leq p^{s+1} \int_0^{p^s} |f(-t)| dt = p^{s+1} \cdot o\left(\frac{1}{sp^s}\right) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow \infty$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое:

$$\int_0^1 f(-t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) dt$$

Мы знаем, что $C_n = o(n^{-\delta})$

Положим $r = \frac{\delta}{p}$ и разобьем отрезок $[0, 1]$ на три отрезка $\left[0, \frac{1}{p^s}\right]$,

$\left[\frac{1}{p^s}, \frac{1}{p^m}\right]$ и $\left[\frac{1}{p^m}, 1\right]$, где m — целая часть от rs , т. е. $m = [rs]$.

$$\text{Имеем: } I_1 = \left| \int_0^{\frac{1}{p^s}} f(-t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) dt \right| \leq$$

$$\leq n^{(s-1)} \int_0^{\frac{1}{p^s}} |f(-t)| dt \leq p^s \cdot o\left(\frac{1}{s \cdot p^s}\right) \rightarrow 0, \text{ когда } s \rightarrow \infty$$

Далее

$$I_2 = \left| \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} f(-t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) dt \right| \leq \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} |f(-t)| \cdot 2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt$$

Но из определения функции $\left[\frac{1}{t} \right]_p$ вытекает, что при $t > 0$

$$\left[\frac{1}{t} \right]_p < \frac{p}{-t}.$$

$$\left| \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} f(-t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_{n^{(s-1)}}(t) dt \right| \leq p \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} |f(t)| \frac{dt}{t}$$

Проинтегрируем по частям

$$I_2 = p \cdot F(t) \cdot \frac{1}{t} \Big|_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} + p \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} F(t) \frac{dt}{t^2},$$

где

$$F(t) = \int_0^t |f(t)| dt$$

так как по условию $F(t) = o\left(\frac{t}{|\ln t|}\right)$.

то

$$I_2 = p \cdot o\left(\frac{1}{|\ln t|}\right) \Big|_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} + p \int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} o\left(\frac{1}{t|\ln t|}\right) dt \leq \\ \leq o(1) + o\left(\int_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}} \frac{dt}{t|\ln t|}\right) = o(1) + o\left(\ln |\ln t| \Big|_{\frac{1}{p^s}}^{\frac{1}{p^m}}\right),$$

и, подставляя, имеем:

$$I_2 < o(1) + o\left(\ln \frac{s}{m}\right)$$

Но

$$m = [rs] = \left[\frac{\delta}{p} \cdot s\right]$$

Значит $I_2 < o(1) + o\left(\frac{p}{\delta}\right)$, так как p и δ — постоянные, то $I_2 = o(1)$, т. е.

$I_2 \rightarrow 0$.

Нам осталось оценить интеграл

$$I_3 = \int_{\frac{1}{p^m}}^1 f(\cdot t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt.$$

Чтобы оценить этот интеграл разложим $f(\cdot t)$ в ряд Фурье и почленно проинтегрируем.

Это возможно, так как функция $f(x)$ суммируема, а функция

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{p^m} \\ \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) & \text{при } \frac{1}{p^m} < t \leq 1 \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию, поскольку она кусочно-постоянна.

$$\text{Так как } f(\cdot t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \psi_j(\cdot t) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \overline{\psi_j(t)},$$

то

$$I_3 = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\psi_j(t)} \cdot \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt.$$

Нам надо доказать, что $I_3 \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Для этого разобьем сумму на три суммы:

$$[0, p^s - 1], [p^s, p^{s+1} - 1] \text{ и } [p^{s+1}, \infty].$$

Покажем, что первая и третья суммы равны нулю. Для этого заметим, что

$$\varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) = \sum_{k=0}^{n^{(s-1)}-1} \varphi_{s+1}^{a_s}(t) \psi_k(t) = \sum_{k=a_s p^s}^{a_s p^s + n^{(s-1)}-1} \psi_k(t).$$

Если $0 \leq j \leq p^{s-1}$, то функция $\psi_j(t)$ постоянна на отрезках вида:

$$\left[\frac{u}{p^m}, \frac{u+1}{p^m}\right], \text{ а интегралы от функции } \psi_k(t) \text{ по таким отрезкам равны}$$

нулю при $k \geq p^s$.

$$\text{Значит } \sum_{j=0}^{p^s-1} C_j \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \psi_j(t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt = 0.$$

Точно также доказывается, что

$$\sum_{j=p^{s+1}}^{\infty} \overline{\psi_j(t)} \cdot \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt = 0,$$

так как при $k < p^{s+1}$ функции $\psi_k(t)$ постоянны на отрезках вида

$$\left[\frac{u}{p^{s+1}}, \frac{u+1}{p^{s+1}}\right], \text{ а интегралы от функций } \overline{\psi_k(t)} \text{ по таким отрезкам при}$$

$j \geq p^{s+1}$ равны нулю.

Нам осталось оценить выражение вида:

$$I_4 = \sum_{j=p^s}^{p^{s+1}-1} C_j \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\psi_j(t)} \cdot \varphi_{s+1}^{a_s}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt$$

Перепишем I_4 в следующем виде:

$$I_4 = \sum_{b=1}^{p-1} \sum_{d=0}^{p^s-1} C_{bp^s+d} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\psi_{bp^s+d}(t)} \varphi_{s+1}^{a_s}(t) dt.$$

Но

$$\psi_{bp^s+d}(t) = \varphi_{s+1}^b(t) \psi_d(t)$$

Поэтому

$$I_4 = \sum_{b=1}^{p-1} \sum_{d=0}^{p^s-1} C_{bp^s+d} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\varphi_{s+1}^b(t)} \cdot \varphi_{s+1}^{a_s}(t) \psi_d(t) D_n^{(s-1)}(t) dt,$$

так как $d < p^s$ и $n^{(s-1)} < p^s$, то функция $\overline{\psi_d(t)} D_n^{(s-1)}(t)$ — постоянна на

отрезках $\left[\frac{u}{p^s}, \frac{u+1}{p^s}\right]$. Но интеграл от функции $\varphi_{s+1}^b(t) \varphi_{s+1}^{a_s}(t)$ по

такому отрезку равен нулю, если $b \neq a_s$. Если же $b = a_s$, то

$$\overline{\varphi_{s+1}^b(t)} \cdot \varphi_{s+1}^{a_s}(t) = 1$$

Поэтому

$$I_4 = \sum_{d=0}^{p^s-1} C_{a_s p^s+d} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \psi_d(t) D_n^{(s-1)}(t) dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{p^{s-m}-1} \sum_{j=0}^{p^m-1} C_{a_s p^s + l p^m + j} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \psi_{l p^m + j}(t) D_n^{(s-1)}(t) dt.$$

Пусть $n^{(s-1)} = k_1 p^m + k_2$, где $0 \leq k_1 < p^{s-m}$, $0 \leq k_2 < p^m$.

Тогда на отрезке $\left[\frac{1}{p^m}, 1\right]$ выполняется равенство:

$$D_n^{(s-1)}(t) = \psi_{k_1 p^m}(t) D_{k_2}(t).$$

Поэтому

$$I_4 = \sum_{l=0}^{p^{s-m}-1} \sum_{j=0}^{p^m-1} C_{a_s p^s + l p^m + j} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \psi_{l p^m + j}(t) \cdot \psi_{k_1 p^m}(t) D_{k_2}(t) dt.$$

Но

$$\psi_{l p^m + j}(t) = \psi_{l p^m}(t) \psi_j(t),$$

значит

$$I_4 = \sum_{l=0}^{p^{s-m}-1} \sum_{j=0}^{p^m-1} C_{a_s p^s + l p^m + j} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\psi_{l p^m}(t)} \psi_{k_1 p^m}(t) \psi_j(t) D_{k_2}(t) dt$$

функция $\psi_j(t) D_{k_2}(t)$ постоянна на отрезках $\left[\frac{u}{p^m}, \frac{u+1}{p^m}\right]$, интеграл же

от $\overline{\psi_{l p^m}(t)} \psi_{k_1 p^m}(t)$ по такому отрезку равен нулю, если $l \neq k_1$.

Если же $l = k_1$, то $\overline{\psi_{l p^m}(t)} \cdot \psi_{k_1 p^m}(t) = 1$.

Отсюда

$$I_4 = \sum_{j=0}^{p^m-1} C_{a_s p^s + k_1 p^m + j} \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \overline{\psi_j(t)} \cdot D_{k_2}(t) dt,$$

$$\text{но} \quad \left| \int_{\frac{1}{p^m}}^1 \psi_j(t) D_{k_2}(t) dt \right| \leq \int_0^1 |D_{k_2}(t)| dt = I_{k_2},$$

так как $k_2 < p$, то $I_{k_2} < p(m+1)$

$$\text{Значит} \quad I_4 < \sum_{j=0}^{p^m-1} p(m+1) |C_{a_s p^s + l p^m + j}|$$

По условию теоремы $|C_n| = o(n^{-\delta})$

$$\text{Поэтому} \quad |C_{a_s p^s + l p^m + j}| = O(p^{-s\delta})$$

Следовательно, $I_4 < p^{m+1}(m+1) \cdot O(p^{-s\delta})$,

$$\text{но} \quad m = [r \ s] = \left[\frac{\delta s}{p} \right].$$

Поэтому

$$I_4 = p^{\left[\frac{\delta s}{p} \right] + 1} \left(\left[\frac{\delta s}{p} \right] + 1 \right) \cdot O(p^{-s\delta})$$

Очевидно, что это выражение стремится к нулю, когда $s \rightarrow \infty$. Тем самым наша теорема доказана.

§ 3. Сходимость рядов Фурье на множестве

В книге Качмажа и Штейнгауза [5] (стр. 205) приведена следующая теорема:

Если функция $w(n)$ положительна и неограниченно возрастает и $L_n(t) < k w^2(n)$ на множестве E и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 w^2(n) < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ сходится почти всюду на множестве E .

В рассматриваемом нами случае Лебеговы функции $L_n(t)$ являются постоянными и, как доказал Н. Я. Виленкин [2],

$$L_n = O(\ln n).$$

Отсюда получаем такой вывод:

если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \ln n$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(t)$ сходится почти всюду.

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат, то для частичных сумм ее ряда Фурье по системе $\{\psi_n(x)\}$ имеет место оценка

$$|s_n(t)| = o(\sqrt{\ln n}) \text{ почти всюду [2].}$$

Сформулируем другие условия сходимости ряда почти всюду. Если интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x+t) - f(x-t)|^2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt dx \quad (7)$$

сходится, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду.

Доказательство. Образует функцию

$$a(x, t) = f_1(x+t) \quad \text{и функция}$$

$$A(t) = \int_0^1 |a(x, t)|^2 dx.$$

Функцию $a(x, t)$ разложим в ряд Фурье по переменному x .

$$a(x, t) = f(x+t) - f(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x+t) - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x-t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}] \psi_n(x)$$

по теореме Парсеваля

$$A(t) = \int_0^1 |a(x, t)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \cdot |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2.$$

Положим

$$A_m(t) = \sum_{n=1}^{m-1} |C_n|^2 \cdot \psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2.$$

Ясно, что

$$A_1(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p < A_2(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p < \dots < A_m(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p,$$

причем, все эти функции неотрицательны, интегрируемы и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A_m(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p = A(t) \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p$$

Так как по условию $\int_0^1 A(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p dt$ существует, то по теореме об интегрировании возрастающих последовательностей неотрицательных функций

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 A_m(t) \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt < \infty.$$

$$\text{Но } \int_0^1 A_m(t) \left[\frac{1}{t} \right]_p dt = \sum_{n=1}^m |C_n|^2 \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt.$$

Поэтому из сходимости интеграла (7) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt. \quad (8)$$

Мы докажем сейчас, что

$$a_1 \ln n < \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt < a_2 \ln n,$$

где a_1 и a_2 — положительные постоянные.

В самом деле, пусть $n = a_s p^s + \dots + a_0$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt &= \sum_{k=0}^s \int_{\frac{1}{p^{k+1}}}^{\frac{1}{p^k}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt^* = \\ &= \sum_{k=0}^s p^{k+1} \int_{\frac{1}{p^{k+1}}}^{\frac{1}{p^k}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 dt. \end{aligned}$$

Так как

$$|\psi_n(t)| = 1,$$

* На отрезке $\left[0, \frac{1}{p^{s+1}}\right]$, $\psi_n(t) = 1$ и потому подинтегральное выражение равно нулю.

то

$$\int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt \leq 4 \sum_{k=0}^s p^{k+1} \left(\frac{1}{p^k} - \frac{1}{p^{k+1}} \right) = 4(p-1)(s+1). \quad (9)$$

Так как $s < \log_p n$, то при достаточно большом $a_2 > 0$,

$$4(p-1)(s+1) < a_2 \ln n.$$

Докажем теперь существование такого $a_1 > 0$, что

$$a_1 \ln n < \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt &= \sum_{k=0}^s p^{s+1} \int_{\frac{1}{p^{k+1}}}^{\frac{1}{p^k}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 dt. \\ \text{Но } \int_{\frac{1}{p^{k+1}}}^{\frac{1}{p^k}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 dt &= \sum_{b=ps-k}^{p^{s-k+1}-1} \int_{\frac{b}{p^{s+1}}}^{\frac{b+1}{p^{s+1}}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 dt \end{aligned} \quad (10)$$

по определению функции $\psi_n(t)$ при $n = a_s p^s + \dots + a_0$

$$\psi_n(t) = \varphi_{s+1}^{a_s}(t) \cdot \varphi_s^{a_{s-1}}(t) \dots \varphi_1^{a_0}(t)$$

Пусть $b = b_{s-k} p^{s-k} + b_{s-k-1} p^{s-k-1} + \dots + b_0$.

Тогда на отрезке $\left[\frac{b}{p^{s+1}}, \frac{b+1}{p^{s+1}} \right]$ имеем:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \dots = \varphi_k(t) = 1$$

$$\varphi_{k+1}(t) = e^{\frac{2\pi i b_{s-k}}{p^2}}$$

$$\varphi_{k+2}(t) = e^{\frac{2\pi i (b_{s-k-1} p + b_{s-k})}{p^2}}$$

$$\dots$$

$$\varphi_{s+1}(t) = e^{\frac{2\pi i (b_0 p^{s-k} + \dots + b_{s-k})}{p^{s-k+1}}}$$

Потому на отрезке $\left[\frac{b}{p^{s+1}}, \frac{b+1}{p^{s+1}} \right]$ имеем:

$$\psi_n(t) = e^{\frac{2\pi i A}{p^{s-k+1}}},$$

где

$$\begin{aligned} A &= (a_s b_0 + \dots + a_k b_{s-k}) p^{s-k} + (a_s b_1 + \dots + a_{k+1} b_{s-k-1}) p^{s-k-1} + \\ &+ \dots + (a_s b_{s-k-1} + \dots + a_{s-1} b_{s-k}) p + a_s b_{s-k}. \end{aligned}$$

У нас b_{s-k} меняется в пределах от 1 до $(p-1)$, а остальные $b_{s-k-1}, \dots, b_0$ — в пределах от нуля до $(p-1)$. Кроме того, $a_s \neq 0$. Легко видеть, что при изменении $b_0, \dots, b_{s-k}$ число A будет пробегать все числа от 1 до $p^{s-k}-1$, кроме чисел, делящихся на p , причем каждое такое число, не делящееся на p , появится только один раз.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{b=p^{s-k}}^{p^{s-k+1}-1} \int_{\frac{b}{p^{k+1}}}^{\frac{b+1}{p^{k+1}}} |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 dt &= \frac{1}{p^{k+1}} \sum_{A=1}^{p^{s-k}-1} \left| e^{\frac{2\pi i A}{p^{s-k+1}}} - e^{-\frac{2\pi i A}{p^{s-k+1}}} \right|^2 = \\ &= \frac{4}{p^{k+1}} \sum_{A=1}^{p^{s-k}-1} \sin^2 \frac{2\pi A}{p^{s-k+1}} \geq \frac{4}{p^{s+1}} \sum_{A=1}^{p^{s-k}-1} \sin^2 \frac{2\pi A}{p^{s-k+1}} \geq \frac{64}{p^{3s-2k+3}} \sum_{A=1}^{p^{s-k}-1} \\ &A^2 \geq \frac{C_1^*}{p^{k+1}} \end{aligned}$$

подставляя полученные значения в формулу (10) получим, что интеграл

$$\int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt \geq C_1(s+1) \geq a_1 \ln n. \quad (11)$$

Из неравенств (9) и (11) вытекает:

$$a_1 \ln n < \int_0^1 |\psi_n(t) - \overline{\psi_n(t)}|^2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt < a_2 \ln n.$$

Но тогда из сходимости ряда (8) вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \ln n$$

Но тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(t)$ сходится почти всюду на основании доказанной ранее теоремы.

Точно также доказывается следующая теорема.

Теорема. Ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду, если

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt dx < \infty \quad (12)$$

Следствие 1. Если ряд $\sum_{n=2}^{\infty} |C_n|^2 \ln n$ сходится и

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \psi_n(x), \text{ то интегралы}$$

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x-t)|^2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt \quad (13)$$

* Штрих показывает, что пропускаются значения A , делящиеся на p .

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt \quad (14)$$

существуют для почти всех значений x и суммируемы по x на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Мы видим, что из сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty} |C_n|^2 \ln n$ вытекает сходимость двойных интегралов (7) и (12). Но тогда по теореме Фубини интегралы (13) и (14) существуют почти всюду и суммируемы по x .

Следствие 2. Если модуль непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет условию $\omega\left(\frac{1}{p^s}, f\right) \leq \frac{C}{s^{\frac{1}{2}+\epsilon}}$, то ряд Фурье $\sum C_n \psi_n(x)$ функции

$f(x)$ сходится почти всюду.

Доказательство. Из условия вытекает, что

$$|f(x+t) - f(x-t)| < \frac{C}{s^{\frac{1}{2}+\epsilon}}, \quad \text{если}$$

$$t \in \left[0, \frac{1}{p^s}\right].$$

Но тогда

$$|f(x+t) - f(x-t)|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p \leq \frac{1}{s^{1+2\epsilon}} p^{s+1}, \text{ если } t \text{ принадлежит отрезку}$$

$$\left[\frac{1}{p^{s+1}}, \frac{1}{p^s} \right]; \text{ но тогда}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x+t) - f(x-t)|^2 \left[\frac{1}{t} \right]_p dt &= \sum_{s=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{p^{s+1}}}^{\frac{1}{p^s}} |f(x+t) - f(x-t)|^2 \cdot \left[\frac{1}{t} \right]_p dt \leq \\ &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s^{1+2\epsilon}} p^{s+1} \left[\frac{1}{p^s} - \frac{1}{p^{s+1}} \right] = (p-1) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1+2\epsilon}}, \end{aligned}$$

а этот ряд сходится.

Следствие 3. Если

$$\omega_2\left(\frac{1}{p^s}, f\right) = \sup_{0 < t < \frac{1}{p^s}} |f(x+t) - f(x-t) - 2f(t)| < \frac{C}{s^{\frac{1}{2}+\epsilon}},$$

где $\epsilon > 0$ и C не зависит от s , то ряд Фурье функций $f(x)$ сходится почти всюду.

Доказательство протекает аналогично доказательству следствия 2.

Автор выражает большую благодарность профессору Н. Я. Виленину за весьма полезные советы и замечания при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. Физматгиз, М., 1961.
2. Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортонормальных систем. Изв. АН СССР, 11 (1947), стр. 363—400.
3. Виленкин Н. Я. Дополнения к книге С. Качмажа и Г. Штейнгауза "Теория ортогональных рядов". Физматгиз, М., 1958.
4. Джафарли Г. М. О мультипликативных ортогональных системах функций, замкнутых относительно операции извлечения корня. Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-матем. и техн. наук, 1961, № 6.
5. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.

Г. М. Чәфәрли

Бир синиф ортонормал мултипликатив системә көрә Фурје сырасынын жыгылмасы наггында

ХҮЛАСӘ

Мәгалә мұәллифин бундан габагкы мәгаләсиндә гурдуғу вурма вә көкалма әмәлләринә көрә гапалы системләрин $\{\psi_n(x)\}$ Фурје сырасынын нөгтәдә вә санки һәр јердә жыгылма әләмәтләринә һәср едилмишдир.

Бу мәгсәдлә мәгаләдә $\{\psi_n(x)\}$ системинә көрә, Дирихле нүвәси вә Лебег функцијалары гурулур вә дәгиг сурәтдә гијмәтләндирилир. Бу әләмәтләр тригонометрик функцијалар системинә аид Фурје сыраларынын нөгтәдә вә чохлағда жыгылмасыны тәмин едән әләмәтләрә охшар олуб, $\{\psi_n(x)\}$ функцијалары үзрә Фурје сыраларынын жыгылмасыны тәмин едир.

Гејд едилән сыраларын жыгылмасы (5), (7) вә (12) интеграллары васитәси илә формула едилир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазийат вә техника елмләри серијасы, 1962, № 4
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 4

Л. Г. ЛАБСКЕР и А. Д. ГАДЖИЕВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДВОЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В данной работе рассматриваются два класса двойных сингулярных интегралов (соответственно в § 1 и в § 2), которыми ведется приближение дифференцируемых функций двух переменных; устанавливаются асимптотические значения этих приближений.

Исследуемые здесь вопросы являются аналогом для двумерного случая вопросов, рассмотренных нами совместно с А. С. Джафаровым в работе [2].

§ 1. Пусть

$$L_{\lambda}(f; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t, y + \alpha_{k,\lambda} \tau) \right] K_{\lambda}(\sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau, \quad (1.1)$$

где $\lambda \geq 0$ — параметр, а вещественные числа $p_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ ($k = 1, 2, \dots; \lambda \geq 0$) и ядро $K_{\lambda}(\rho)$ обладают следующими свойствами:

$$(1.1^{\circ}) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \leq M < +\infty, \text{ где } M \text{ не зависит от } \lambda;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} = 1 \text{ для каждого } \lambda;$$

$$\alpha_{k,\lambda} \geq 0^*, \quad \sup_{k,\lambda} \{\alpha_{k,\lambda}\} = \alpha^* < +\infty;$$

$$|R_{n,\lambda}| \geq d > 0 \text{ (} d \text{ не зависит от } \lambda \text{), а } R_{s,\lambda} = 0 \text{ для всякого четно-$$

го $s < n$ ($s \neq 0$), где $R_{n,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n$, а n — фиксированное натуральное число.

(1.2°) $K_{\lambda}(\rho)$ — положительная функция при $\rho \geq 0$, для всех $\lambda \geq 0$, такая, что $2\pi \int_0^{\infty} \rho K_{\lambda}(\rho) d\rho = 1$; существует неотрицательная неубывающая

на $[0, \infty)$ функция $F(\rho)$, для которой $\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{F(\rho)}{\rho^n} = 1$ и существует интеграл

$$\Delta_{\lambda} = \int_0^{\infty} F(\rho) \rho K_{\lambda}(\rho) d\rho < +\infty.$$

* Это условие не нарушает общности.

Существование и конечность двойного интеграла (1.1) будут обеспечены дальнейшими предположениями относительно функции $f(x, y)$.

Отметим, что числа $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ ($k=1, 2, \dots; \lambda \geq 0$), выбранные следующим образом:

$$p_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^{k+1} C_n^k, & k=1, 2, \dots, n; \\ 0, & k=n+1, n+2, \dots; \end{cases} \quad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} k, & k=1, 2, \dots, n; \\ 0, & k=n+1, n+2, \dots; \end{cases}$$

обладают свойствами (1.1°).

Определим класс $\Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$ функций $f(x, y)$, заданных и измеримых на всей плоскости, следующим образом.

Измеримая функция $f(x, y) \in \Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$, если выполняются условия:

а) функция $f(x, y)$ для любого y имеет в окрестности точки (x_0, y) частные производные по x до $(n-1)$ -го порядка включительно, а в самой точке (x_0, y) имеет конечные правую и левую частные n -ые производные по x , непрерывные по y в точке y_0 .

б) функция $f_{x_i}^{(i)}(x_0, y)$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) имеет в окрестности точки y_0 производные до $(n-i-1)$ -го порядка включительно, а в самой точке y_0 имеет конечные правую и левую $(n-i)$ -е производные $f_{x_i y_+}^{(n)}(x_0, y_0)$ и $f_{x_i y_-}^{(n)}(x_0, y_0)^*$;

в) $|f(x, y)| \leq \varphi(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$, где $1 \leq \varphi(x, y) < \infty$;

г) существует и конечен интеграл $\int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^* \rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho$, где

$$\varphi(\rho) = \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ |\xi| < \rho, |\eta| < \rho}} \frac{\varphi(x + \xi, y + \eta)}{\varphi(x, y)}.$$

Классу $\Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$, например, принадлежат функции вида $E(x) \times G(y)$, $\xi(x) + G(y)$, где $E(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, а в самой точке x_0 имеет конечные правую и левую производные, $G(y)$ обладает таким же свойством относительно точки y_0 , а их произведение $E(x)G(y)$ и сумма $E(x) + G(y)$ удовлетворяют условиям в) и г) определения класса $\Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$.

Очевидно, что для функции $f(x, y)$ из класса $\Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$ двойной интеграл (1.1) существует и конечен.

Действительно,

$$\begin{aligned} |L_\lambda(f; x, y)| &= \left| \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) \right] \rho K_\lambda(\rho) d\theta d\rho \right| \leq \\ &\leq \varphi(x, y) \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty |p_{k,\lambda}| \frac{|f(x + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)|}{\varphi(x + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\varphi(x + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)}{\varphi(x, y)} \right] \rho K_\lambda(\rho) d\theta d\rho \leq \\ &\leq 2M\pi \varphi(x, y) \int_0^\infty (\alpha^* \rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho < +\infty. \end{aligned}$$

* $f_{x_i}^{(i)}(x_0, y)$, $f_{x_i y_+}^{(n)}(x_0, y_0)$ и $f_{x_i y_-}^{(n)}(x_0, y_0)$ при $i=0$ означают, соответственно, $f(x_0, y)$, $f_{y_+}^{(n)}(x_0, y_0)$ и $f_{y_-}^{(n)}(x_0, y_0)$.

Теорема (1.1). Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$. Если для любого $\varepsilon > 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\int_0^\infty (\alpha^* \rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho = o(\Delta_\lambda), \quad (1.2)$$

то имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{R_{n,\lambda} \Delta_\lambda} [L_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] &= \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{E_m(n)}{(2m)!} \left[f_{x_+^{2m} y_+^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^n f_{x_-^{2m} y_-^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[1 + (-1)^{n+1}] 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\}^*, \end{aligned}$$

где

$$E_m(n) = \begin{cases} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - m} \left[\left(\left[\frac{n}{2} \right] - m \right)! \right]^{(-1)^{n+1}} \cdot \left[\frac{2}{(n-2m)!} \right]^{\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}} \cdot \pi^{\frac{1+(-1)^n}{2}} \end{cases} \quad (1.3)$$

Доказательство. Рассуждения проведем для нечетного n . Случай, когда n — четное, исчерпывается аналогично.

Рассмотрим разность $L_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$. Переходя к полярным координатам заменой $t = \rho \cos \theta$, $\tau = \rho \sin \theta$ и учитывая некоторые из свойств (1.1°) и (1.2°), нетрудно убедиться в том, что

$$L_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_0^\infty B_\lambda(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho, \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_\lambda(\rho) &= \int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} [f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) + f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) + \\ &\quad + f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) + f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) - 4f(x_0, y_0)] d\theta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

По формуле Тейлора для функций одной переменной имеем:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} f_{x_i}^{(i)}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) (\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta)^i + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) + \rho_n^{(+,+)}(\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) \right] (\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta)^n, \\ f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} f_{x_i}^{(i)}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) (\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta)^i + \end{aligned} \quad (1.6)$$

* $f_{x_+^{2m} y_+^{n-2m}}^{(n)}$ и $f_{x_-^{2m} y_-^{n-2m}}^{(n)}$ при $m=0$ означают, соответственно, $f_{y_+}^{(n)}$ и $f_{y_-}^{(n)}$.

а при n — четном и $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, соответственно, $f_{x_+^n}^{(n)}$ и $f_{x_-^n}^{(n)}$. (Здесь и в дальнейшем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ означает, как обычно, целую часть $\frac{n}{2}$).

$$+\frac{1}{n!}\left[f_{x_+}^{(n)}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) + \beta_n^{(+,-)}(\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta)\right](\alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta)^n, \quad (1.7)$$

$$f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} f_{x_1}^{(i)}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) (\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)^i - \frac{1}{n!} \left[f_{x_1}^{(n)}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) + \beta_n^{(-,+)}(\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) \right] (\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)^n, \quad (1.8)$$

$$f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} f_{x^i}^{(i)}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) (\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)^i - \frac{1}{n!} \left[f_{x^n}^{(n)}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda} \rho \cos \theta) + \beta_n^{(-, \cdot)}(\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) \right] (\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta)^n, \quad (1.9)$$

где $\beta_n^{(+,+)} , \beta_n^{(+,-)} , \beta_n^{(-,+)} , \beta_n^{(-,-)}$ стремятся к нулю, при $\varphi \rightarrow +0$, равномерно относительно k, λ и θ .

Далее, снова по формуле Тейлора для функций одной переменной, написав разложения

$$f_{x_i}^{(i)}(x_0, y_0 + \alpha_{k, \lambda} \rho \sin \theta) = f_{x_i}^{(i)}(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} f_{x_i y}^{(i+1)}(x_0, y_0) (\alpha_{k, \lambda} \rho \sin \theta) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-i-1)!} f_{x_i y^{n-i-1}}^{(n-1)}(x_0, y_0) (\alpha_{k, \lambda} \rho \sin \theta)^{n-i-1} + \frac{1}{(n-i)!} \left[f_{x_i y_+^{n-i}}^{(n)}(x_0, y_0) + \right.$$

$$\left. + \beta_i^{(+, +)}(\alpha_{k, \lambda} \rho \sin \theta) \right] (\alpha_{k, \lambda} \rho \sin \theta)^{n-i},$$

где $i=0, 1, \dots, n-1$; $\beta_i^{(+,+)}$ стремится к нулю равномерно относительно k , λ и θ , при $\rho \rightarrow +0$, и, в силу непрерывности $f_{x_0}^{(n)}(x_0, y)$ в точке y_0 , написав разложение

$$f_{x_{\pm}^{(n)}}^{(n)}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta) = f_{x_{\pm}^{(n)}}^{(n)}(x_0, y_0) + \beta^{(+,+)}(\alpha_{k,\lambda} \rho \sin \theta),$$

где $\beta^{(+,+)}_{\lambda}$ стремится к нулю равномерно относительно k, λ и θ , при $\rho \rightarrow +0$, а также, написав аналогичные разложения для $f^{(i)}_{x_i}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda}\rho \sin \theta)$ и $f^{(n)}_{x_n}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda}\rho \sin \theta)$, $f^{(i)}_{x_i}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \cos \theta)$ и $f^{(n)}_{x_n}(x_0, y_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \cos \theta)$, $f^{(i)}_{x_i}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda}\rho \cos \theta)$ и $f^{(n)}_{x_n}(x_0, y_0 - \alpha_{k,\lambda}\rho \cos \theta)$, ($i=0, 1, \dots, n-1$),

и, подставив их, соответственно, в (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), а затем полученное в (1.5), и, используя равенство нулю $R_{s,\lambda}$ для всякого четного $s < n$ ($s \neq 0$), получим

$$B_{\lambda}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ R_{n,\lambda} \rho^n \left[\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{\sin^{n-2m}\theta \cos^{2m}\theta + \cos^{n-2m}\theta \sin^{2m}\theta}{[(2m)!][(n-2m)!]} \left(f_{x_+^{2m} y_+^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - f_{x_-^{2m} y_-^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right) + \frac{2}{n!} \left(f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) \cos^n \theta - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \sin^n \theta \right) \right] + \right. \\ \left. + \rho^n \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_k^n \left[\sum_{j=0}^n \frac{1}{[(n-1)!](j!)} \left(\beta_j^{(+,+)} + (-1)^{j+1} \beta_j^{(+,-)} \right) \sin^{n-j}\theta \cos^j\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^j \beta_j^{(-,+)} + (-1)^{j+1} \beta_j^{(-,-)} \right) \cdot \cos^{n-j}\theta \sin^j\theta \right] + \left((\beta^{(+,+)} + \beta^{(+,-)}) \sin\theta \cos^n\theta - \right. \\ \left. - (\beta^{(-,+)} + \beta^{(-,-)}) \cos\theta \sin^n\theta \right) \Bigg] d\theta \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 & -(\beta(-,+) + \beta(-,-))\cos\theta\sin^n\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \left[\sum_{q=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(\alpha_{k,\lambda}\rho)^{2q-1}}{(2q-1)!} \left[\sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-q} \frac{(\alpha_{k,\lambda}\rho)^{2p}}{(2p)!} \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times f_{x_+^{2q-1}y_+^{2p}}^{(2p+2q-1)}(x_0, y_0)(\sin^{2p}\theta\cos^{2q-1}\theta - \cos^{2p}\theta\sin^{2q-1}\theta) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(\alpha_{k,\lambda}\rho)^{n-2q+1}}{(n-2q+1)!} \left(f_{x_+^{2q-1}y_+^{n-2q+1}}^{(n)}(x_0, y_0) + f_{x_-^{2q-1}y_-^{n-2q+1}}^{(n)}(x_0, y_0) \right) \right] \right] \times \\
 & \times (\sin^{n-2q+1}\theta\cos^{2q-1}\theta - \cos^{n-2q+1}\theta\sin^{2q-1}\theta) \Big] d\theta,
 \end{aligned}$$

где $\beta_i^{(+,+)} , \beta_i^{(+,-)} , \beta_i^{(-,+)} , \beta_i^{(-,-)} , \beta^{(+,+)} , \beta^{(+,-)} , \beta^{(-,+)} , \beta^{(-,-)}$, стремятся к нулю, при $\rho \rightarrow +0$, равномерно относительно k, λ и θ .

Так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2m}\theta \cos^{2m}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2m}\theta \sin^{2m}\theta d\theta = \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]-m} \left[\left(\left[\frac{n}{2}\right]-m\right)!\right] [(2m-1)!!]^*}{n!!}$$

n — нечетное, $m=0,1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$ (см. [4], 2.411, 2.412(2); 2.413, стр. 106—107), а

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2q+1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2q+1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta, \\ q = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right], \quad p = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] - q,$$

TO

$$B_{\lambda}(\rho) = R_{n,\lambda} \rho^n \frac{1}{n!!} \left\{ \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - m + 1} \frac{\left[\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - m \right) ! \right]}{[(2m)!!][(n-2m)!]} [f_{x_+^{2m} y_+^{n-2m}}(x_0, y_0) -$$

$$-f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0)] + \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} [f_{x^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x^n}^{(n)}(x_0, y_0)] + \rho^n \gamma_\lambda(\rho), \quad (1.10)$$

где

$$\gamma_{\lambda}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{[(n-j)!(j!)]} [(\beta_j^{(+,+)}) + (-1)^{j+1} \beta_j^{(+,-)}] \sin^{n-j} \theta \dots \right. \\ \left. \dots \cos^j \theta + (-1)^j (\beta_j^{(-,+)}) + (-1)^{j+1} \beta_j^{(-,-)} \cos^{n-j} \theta \sin^j \theta \right] + \frac{1}{n!} \left[(\beta^{(+,+)}) - \right. \\ \left. - \beta^{(+,-)} \sin \theta \cos^n \theta - (\beta^{(-,+)}) + \beta^{(-,-)} \cos \theta \sin^n \theta \right] d\theta.$$

* Значение $(2m-1)!!$ при $m=0$ принимаем за 1.

Очевидно, $\gamma_\lambda(\rho) \rightarrow 0$, при $\rho \rightarrow +0$, равномерно относительно λ .
Введем в рассмотрение функцию

$$\sigma_\lambda(\rho) = \frac{B_\lambda(\rho)}{F(\rho)} - R_{n,\lambda} \frac{1}{n!!} \left\{ \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]-m+1} \left[\left(\left[\frac{n}{2}\right]-m\right)!\right]}{[(2m)!!][(n-2m)!]} \left[f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right] + \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\}. \quad (1.11)$$

Из определения функции $\mu(\rho)$ видно, что она не меньше единицы и не убывает на $[0, \infty)$. Имея это в виду, а также равенство (1.5), для функции $\sigma_\lambda(\rho)$ получим оценку

$$|\sigma_\lambda(\rho)| \leq \frac{|B_\lambda(\rho)|}{F(\rho)} + \\ + C_0 \leq \frac{\varphi(x_0, y_0)}{F(\rho)} \int_0^{\pi/2} \sum_{k=1}^{\infty} |P_{k,\lambda}| \left[\frac{|f(x_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \cos\theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \sin\theta)|}{|\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \cos\theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \sin\theta)|} \times \right. \\ \left. \times \frac{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \cos\theta, y_0 + \alpha_{k,\lambda}\rho \sin\theta)}{\varphi(x_0, y_0)} + \dots + 4 \frac{|f(x_0, y_0)|}{\varphi(x_0, y_0)} \right] d\theta + \\ + C_0 \leq 4\pi M \varphi(x_0, y_0) \frac{\mu(\alpha^*\rho)}{F(\rho)} + C_0, \quad (1.12)$$

где C_0 не зависит ни от ρ , ни от λ .

В силу равенств (1.10) и (1.11), заключаем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \sigma_\lambda(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \gamma_\lambda(\rho)$$

равномерно относительно λ .

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное положительное число. Тогда найдется такое $\delta > 0$ что

$$|\sigma_\lambda(\rho)| < \varepsilon \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq \delta. \quad (1.13)$$

При $\rho > \delta$ из (1.12) получим:

$$|\sigma_\lambda(\rho)| \leq \frac{4\pi M \varphi(x_0, y_0)}{F(\delta)} \mu(\alpha^*\rho) + C_0 \leq C \mu(\alpha^*\rho), \quad (1.14)$$

где постоянная C не зависит ни от ρ , ни от λ .

Определяя $B_\lambda(\rho)$ из соотношения (1.11) и подставляя в (1.4) получим

$$L_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = \\ = R_{n,\lambda} \frac{1}{n!!} \left\{ \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]-m+1} \left[\left(\left[\frac{n}{2}\right]-m\right)!\right]}{[(2m)!!][(n-2m)!]} \left[f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right] + \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\}.$$

$$- f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \Big] + \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \Big\} \Delta_\lambda + \\ + \int_0^\infty \sigma_\lambda(\rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho. \quad (1.15)$$

Используя (1.13), (1.14) и условие теоремы, оценим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \sigma_\lambda(\rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho.$$

$$|I(\lambda)| \leq \int_0^\delta |\sigma_\lambda(\rho)| F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho + \int_\delta^\infty |\sigma_\lambda(\rho)| F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho < \\ < \varepsilon \int_0^\delta F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho + C \int_0^\infty \mu(\alpha^*\rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho = \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda).$$

В силу произвольности ε ,

$$|I(\lambda)| = o(\Delta_\lambda). \quad (1.16)$$

Подставляя (1.16) в (1.15), закончим доказательство теоремы.

Теперь рассмотрим некоторые частные случаи операторов (1.1).

(1.1). Пусть

$$\Phi_\lambda(f; x, y) = \lambda^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda}t, y + \alpha_{k,\lambda}\tau) \right] \kappa(\lambda \sqrt{t^2 + \tau^2}) dt d\tau,$$

где $\lambda \geq 1$ — параметр, вещественные числа $p_{k,\lambda}, \alpha_{k,\lambda} (k=1, 2, \dots; \lambda \geq 1)$ обладают свойствами (1.1°), а функция $\kappa(u)$ — положительная и такая, что

$$2\pi \int_0^\infty u \kappa(u) du = 1, \quad \chi_n = \int_0^\infty u^{n+1} \kappa(u) du < +\infty.$$

Легко видеть, что оператор $\Phi_\lambda(f; x, y)$ есть частный случай оператора (1.1), когда $K_\lambda(\sqrt{t^2 + \tau^2})$ есть ядро типа Фейера $\lambda^2 \kappa(\lambda \sqrt{t^2 + \tau^2})$, а $F(\rho) = \rho^n$.

(Свойства (1.2°) для данного ядра легко проверяются).

В этом случае

$$\Delta_\lambda = \lambda^2 \int_0^\infty \rho^{n+1} \kappa(\lambda \rho) d\rho = \frac{\chi_n}{\lambda^n}. \quad (1.17)$$

Для операторов $\Phi_\lambda(f; x, y)$ имеет место следующая

Теорема (1.2). Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$. Если существует и конечен интеграл

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^*u) u^{n+1} \kappa(u) du,$$

то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda}} [\Phi_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] = \frac{\chi_n}{n!!} \left\{ \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{E_m(n)}{(2m)!!} \left[f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) + \right. \right. \\ \left. \left. - f_{x^{2m}y^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right] + \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} \left[f_{x_+^n}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-^n}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\}.$$

$$+ (-1)^n f_{x_0 y_0}^{(n)}(x_0, y_0) \left] + \frac{[1 + (-1)^{n+1}] 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\left[\frac{n}{2} \right]! \right)}{n!} \left[f_{x_0}^{(n)}(x_0, y_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - f_{x_0}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\},$$

где $E_m(n)$ определяется равенством (1.3).

Доказательство. В силу теоремы (1.1) достаточно проверить выполнимость условия (1.2), в котором Δ_λ уже будет определено посредством (1.17).

$$\frac{\lambda^{n+2}}{\chi_n} \int_0^\infty \mu(\alpha^* \rho) \rho^{n+1} \kappa(\lambda \rho) d\rho \leq \frac{1}{\chi_n} \int_0^\infty \mu(\alpha^* u) u^{n+1} \kappa(u) du.$$

Но интеграл справа в силу условия теоремы стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$. Таким образом, условие (1.2) выполнено.

(1.11). Теперь пусть

$$A_\lambda(f; x, y) = \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t, y + \alpha_{k,\lambda} \tau) \right] \frac{dt d\tau}{[1 + \lambda^2(t^2 + \tau^2)]^{3/2}},$$

где $\lambda \geq 0$ — параметр, а вещественные числа $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ ($k = 1, 2, \dots; \lambda \geq 0$) обладают свойствами (1.1°) при $n=1$.

Оператор $A_\lambda(f; x, y)$ также является частным случаем оператора (1.1), когда $K_\lambda(\sqrt{t^2 + \tau^2})$ есть ядро типа Абеля—Пуассона

$$\frac{\lambda^2}{2\pi[1 + \lambda^2(t^2 + \tau^2)]^{3/2}}, \text{ а} \\ F(\rho) = \begin{cases} \rho, & 0 \leq \rho \leq 1, \\ 1, & \rho > 1. \end{cases} \quad (1.18)$$

Проверка свойств (1.2°) не представляет трудности. Для данного случая

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left[\int_0^1 \frac{\rho^2 d\rho}{(1 + \lambda^2 \rho^2)^{3/2}} + \int_1^\infty \frac{\rho d\rho}{(1 + \lambda^2 \rho^2)^{3/2}} \right] = \frac{1}{2\pi\lambda} \left[\ln \lambda + \ln \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1} + 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + 1}} \right] + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \approx \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\ln \lambda}{\lambda}.$$

Для операторов $A_\lambda(f; x, y)$ справедливо такое утверждение.

Теорема (1.3) Пусть функция $f(x, y) \in \Delta_1[\varphi; (x_0, y_0)]$, где $\varphi \equiv \text{const}$. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{R_{1,\lambda} \ln \lambda} \left[A_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) \right] = 4\pi \left[f'_{x_+}(x_0, y_0) - f'_{x_-}(x_0, y_0) + \right. \\ \left. + f'_{y_+}(x_0, y_0) - f'_{y_-}(x_0, y_0) \right].$$

Доказательство. Так как $\varphi \equiv \text{const}$, то $\mu(\rho) \equiv 1$, а потому, учитывая, что $F(\rho) \leq 1$ (см. (1.18)), для любого $\delta > 0$ будем иметь

$$\frac{1}{\Delta_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* \rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho = \frac{1}{\Delta_\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^\infty F(\rho) \rho \frac{d\rho}{(1 + \lambda^2 \rho^2)^{3/2}} \leq \\ \leq \frac{1}{\Delta_\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(1 + \lambda^2 \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{\Delta_\lambda 2\pi \sqrt{1 + \delta^2 \lambda^2}} \approx \frac{1}{\delta \ln \lambda},$$

и следовательно,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* \rho) F(\rho) \rho K_\lambda(\rho) d\rho = 0,$$

т. е. выполняется условие (1.2) теоремы (1.1). Тогда, приняв во внимание, что $E_0(1) = 2$, из теоремы (1.1) получаем требуемое.

(1.111). Наконец, рассмотрим оператор вида

$$B_\lambda(f; x, y) = \frac{1}{2\pi L_\lambda} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t, y + \alpha_{k,\lambda} \tau) \right] \frac{(V t^2 + \tau^2)^\alpha}{L^\lambda(V t^2 + \tau^2)} dt d\tau,$$

где $L_\lambda = \int_0^\infty \frac{\rho^{\alpha+1} d\rho}{L^\lambda(\rho)}$, $\alpha \geq 0$ — вещественное число, $\lambda \geq 1$ — параметр, $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ обладают свойствами (1.1°), а функция $L(\rho)$ такова, что

- а) $L(0) = 1$,
- б) $L(\rho)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$,

в) существует и конечен интеграл $\int_0^\infty \frac{\rho^{\alpha+1} d\rho}{L(\rho)}$,

г) $L(\rho)$ дифференцируема на $[0, \infty)$ (в точке $\rho=0$ имеет производную справа),

д) существует такое число $\beta \geq 1$, что $\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{L'(\rho)}{\rho^{\beta-1}} = A \neq 0$,

е) существует такое число $\nu \geq 0$, что отношение $\frac{|L'(\rho)|}{L^\nu(\rho)}$ ограничено на $[0, \infty)$.

За функцию $F(\rho)$ выберем ρ^n . Тогда

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{2\pi L_\lambda} \int_0^\infty \frac{\rho^{\alpha+1+n} d\rho}{L^\lambda(\rho)}.$$

Если n и β таковы, что $\frac{n}{\beta}$ — натуральное число, то в силу леммы, доказанной А. С. Джафаровым (см. [2]), имеем

$$\Delta_\lambda \approx \frac{B_{n/\beta}}{2\pi A^{n/\beta}} \cdot \frac{1}{\lambda^{n/\beta}}, \quad (1.19)$$

$$B_{\frac{n}{\beta}} = (\alpha+2)(\alpha+2+\beta) \dots \left[\alpha+2 + \left(\frac{n}{\beta} - 1 \right) \beta \right]. \quad (1.20)$$

* Оператор $B_\lambda(f; x, y)$ при $p_{k,\lambda} = \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k=2, 3, \dots \end{cases}$ $\alpha=0$ и несколько менее общих предположениях относительно функции L_ρ является аналогом для двумерного случая оператора, рассмотренного В. А. Баскаковым и Г. А. Фоминным в работе [1].

Очевидно, оператор $B_\lambda(f; x, y)$ получается из оператора (1.1) при

$$K_\lambda(\sqrt{t^2 + \tau^2}) = \frac{1}{2\pi D_\lambda} \cdot \frac{(V\sqrt{t^2 + \tau^2})^\alpha}{L^\lambda(V\sqrt{t^2 + \tau^2})}.$$

Теорема (1.4). Пусть функция $f(x, y) \in \Lambda_n[\varphi; (x_0, y_0)]$ и существует такое λ_0 , что

$$\frac{\mu(\alpha^* \rho) \rho^n}{L^{\lambda_0}(\rho)} \leq C, \quad \rho \in [0, \infty). \quad (1.21)$$

Если n и β таковы, что $\frac{n}{\beta}$ является натуральным числом, то

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^{n/\beta}}{R_{n,\lambda}} [B_\lambda(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] = \\ = \frac{B_{\frac{n}{\beta}}}{2\pi A^{n/\beta}(n!!)} \left\{ \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{E_m(n)}{(2m)!!} \left[f_{x_+^{2m} y_+^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) + (-1)^n f_{x_-^{2m} y_-^{n-2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right] + \right. \\ \left. + \frac{[1 + (-1)^n] 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(\left[\frac{n}{2}\right]!\right)}{n!} \left[f_{x_+}^{(n)}(x_0, y_0) - f_{x_-}^{(n)}(x_0, y_0) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $B_{\frac{n}{\beta}}$ и $E_m(n)$ определяются, соответственно, равенствами (1.20) и (1.3).

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ — любое. Так как

$$D_\lambda > \frac{\chi^{\alpha+2}}{(\alpha+2)L^\lambda(\chi)}$$

при любом $\chi > 0$, то, полагая $\chi = \delta^{1/2}$ и используя условие (1.21) теоремы находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi D_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* \rho) \frac{\rho^{\alpha+1+n} d\rho}{L^\lambda(\rho)} < \frac{(\alpha+2)L^\lambda\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha+2}} \cdot C \cdot \int_0^\infty \frac{\rho^{\alpha+1} d\rho}{L^{\lambda-\lambda_0}(\rho)} \leq \\ \leq \frac{(\alpha+2)CL^\lambda\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha+2} L^{\lambda-\lambda_0-1}(\delta)} \int_0^\infty \frac{\rho^{\alpha+1} d\rho}{L(\rho)} = \frac{(\alpha+2)CL^{\lambda_0+1}(\delta)D_1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\alpha+2}} \left[\frac{L\left(\frac{\delta}{2}\right)}{L(\delta)} \right]^\lambda. \end{aligned}$$

Отношение $\frac{L\left(\frac{\delta}{2}\right)}{L(\delta)} < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi D_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* \rho) \frac{\rho^{\alpha+1+n} d\rho}{L^\lambda(\rho)} = O(\omega^\lambda), \quad 0 < \omega < 1.$$

Отсюда и из (1.19) следует выполнимость условия (1.2) теоремы (1.1). Применяя теорему (1.1) для данного случая, заканчиваем доказательство.

§ 2. В этом параграфе мы будем рассматривать класс операторов вида

$$L_{\lambda,\eta}(f; x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda,\eta} f(x + \alpha_{k,\lambda,\eta} t, y + \alpha_{k,\lambda,\eta} \tau) \right] H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau, \quad (2.1)$$

где $\lambda \geq 0$, $\eta \geq 0$ — параметры, а вещественные числа $p_{k,\lambda,\eta}$, $\alpha_{k,\lambda,\eta}$ и функции $H_\lambda(t)$, $Q_\eta(\tau)$ обладают следующими свойствами:

$$(2.1^\circ) \quad \sum_{k=1}^\infty |p_{k,\lambda,\eta}| \leq M < +\infty, \quad \text{где } M \text{ не зависит ни от } \lambda, \text{ ни от } \eta;$$

$$\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda,\eta} = 1 \quad \text{для каждой пары } \lambda, \eta;$$

$$\alpha_{k,\lambda,\eta} \geq 0^*, \quad \sup_{k,\lambda,\eta} \{\alpha_{k,\lambda,\eta}\} = \alpha^* < \infty;$$

$$R_{n,\lambda,\eta} = \sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda,\eta} \alpha_{k,\lambda,\eta}^{(n)} \neq 0, \quad \text{а } R_{s,\lambda,\eta} = 0 \quad \text{для всякого четного } s < n \quad (s \neq 0),$$

где n — фиксированное четное число.

(2.2°) $H_\lambda(t)$ и $Q_\eta(\tau)$ — четные положительные функции, соответственно, при $t \geq 0$ и $\tau \geq 0$ такие, что

$$\int_{-\infty}^\infty H_\lambda(t) dt = \int_{-\infty}^\infty Q_\eta(\tau) d\tau = 1;$$

существует неотрицательная функция $F(t, \tau)$, неубывающая по каждому из аргументов t и τ $[0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau < \infty]$, для которой

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow +0}} \frac{F(t, \tau)}{(t^2 + \tau^2)^{n/2}} = 1 \quad \text{и существует интеграл}$$

$$\Delta_{\lambda,\eta} = \int_0^\infty \int_0^\infty F(t, \tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau < +\infty,$$

причем для любого фиксированного $t = t_0 > 0$, $F(t_0, \tau) > \xi > 0$ (ξ не зависит от τ); для любого фиксированного $\tau = \tau_0 > 0$, $F(t, \tau_0) > \zeta > 0$ (ζ не зависит от t).

Теорема (2.1). Пусть 1) измеримая функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно (n — четное число) и, кроме того,

* Из условия четности, наложенного ниже на функции $H_\lambda(t)$ и $Q_\eta(\tau)$, следует, что требование неотрицательности чисел $\alpha_{k,\lambda,\eta}$ не нарушает общности.

$|f(x, y)| \leq \varphi(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$, где $1 \leq \varphi(x, y) < \infty$;

2) Для любого $\delta > 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$, $\eta \rightarrow +\infty$,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\alpha^* t, \alpha^* \tau) F(t, \tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau = o(\Delta_{\lambda, \eta}) \quad (2.2)$$

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* u) F(u, u) [H_\lambda(u) + Q_\eta(u)] du = o(\Delta_{\lambda, \eta}), \quad (2.3)$$

где

$$\mu(t, \tau) = \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ |q| \leq t, |h| \leq \tau}} \frac{\varphi(x+q, y+h)}{\varphi(x, y)} < +\infty.$$

Тогда имеет место следующее асимптотическое равенство

$$L_{\lambda, \eta}(f; x_0, y_0) = f(x_0, y_0) +$$

$$+ 4R_{n, \lambda, \eta} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \int_0^\infty \int_0^\infty F(t, \tau) \frac{t^{n-2m} \tau^{2m}}{(t^2 + \tau^2)^{n/2}} H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau + o(\Delta_{\lambda, \eta}).$$

Доказательство. Используя некоторые из свойств чисел $p_{k, \lambda, \eta}$, $\alpha_{k, \lambda, \eta}$ и функции $H_\lambda(t)$, $Q_\eta(\tau)$, нетрудно убедиться в том, что

$$L_{\lambda, \eta}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_0^\infty \int_0^\infty B_{\lambda, \eta}(t, \tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau, \quad (2.4)$$

где

$$B_{\lambda, \eta}(t, \tau) = \sum_{k=1}^\infty p_{k, \lambda, \eta} [f(x_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) + f(x_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) + f(x_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) + f(x_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) - 4f(x_0, y_0)]. \quad (2.5)$$

По формуле Тейлора для функций двух переменных

$$f(x_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m f_{x^{m-i} y^i}^{(m)}(x_0, y_0) \alpha_{k, \lambda, \eta}^m t^{m-i} \tau^i +$$

$$+ \frac{1}{n!} [\beta_1(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)^n + \beta_2(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)^n],$$

$$f(x_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^i f_{x^{m-i} y^i}^{(m)}(x_0, y_0) \alpha_{k, \lambda, \eta}^m t^{m-i} \tau^i +$$

$$+ \frac{1}{n!} [\beta_3(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)^n + \beta_4(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)^n],$$

$$f(x_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 + \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} f_{x^{m-i} y^i}^{(m)}(x_0, y_0) \alpha_{k, \lambda, \eta}^m t^{m-i} \tau^i +$$

$$+ \frac{1}{n!} [\beta_5(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)^n + \beta_6(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)^n],$$

$$f(x_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} t, y_0 - \alpha_{k, \lambda, \eta} \tau) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{i=0}^m f_{x^{m-i} y^i}^{(m)}(x_0, y_0) \alpha_{k, \lambda, \eta}^m t^{m-i} \tau^i +$$

$$+ \frac{1}{n!} [\beta_7(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)^n + \beta_8(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)(\alpha_{k, \lambda, \eta} t)^n],$$

где β_j ($j=1, 2, \dots, 8$) стремятся к нулю, при $t \rightarrow +0$, $\tau \rightarrow +0$, равномерно относительно k, λ и η .

Откуда, учитывая равенство нулю $R_{s, \lambda, \eta}$ для всякого четного $s < n$ ($s \neq 0$), получим

$$B_{\lambda, \eta}(t, \tau) = R_{n, \lambda, \eta} 4 \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) t^{n-2m} \tau^{2m} +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^\infty p_{k, \lambda, \eta} \alpha_{k, \lambda, \eta}^n \sum_{j=1}^4 [t^n \beta_{2j-1}(\alpha_{k, \lambda, \eta} t) + \tau^n \beta_{2j}(\alpha_{k, \lambda, \eta} \tau)] \quad (2.6)$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma_{\lambda, \eta}(t, \tau) = \frac{B_{\lambda, \eta}(t, \tau)}{F(t, \tau)} - R_{n, \lambda, \eta} 4 \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \frac{t^{n-2m} \tau^{2m}}{(t^2 + \tau^2)^{n/2}}. \quad (2.7)$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что равномерно относительно λ и η

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +0 \\ \tau \rightarrow +0}} \sigma_{\lambda, \eta}(t, \tau) = 0. \quad (2.8)$$

Учитывая, что функция $\mu(t, \tau)$ не меньше 1 и не убывает по каждому из аргументов t и τ на $(0 \leq t < \infty, 0 \leq \tau < \infty)$, из (2.7) и (2.5) для $\sigma_{\lambda, \eta}(t, \tau)$ получаем оценку:

$$|\sigma_{\lambda, \eta}(t, \tau)| \leq \frac{|B_{\lambda, \eta}(t, \tau)|}{F(t, \tau)} + 4 \frac{(\alpha^*)^n M}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} \left| f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \right| \leq$$

$$\leq 8M \varphi(x_0, y_0) \frac{\nu(\alpha^* t, \alpha^* \tau)}{F(t, \tau)} = C_0, \quad (2.9)$$

где постоянная C_0 не зависит от t, τ, λ и η .

Пусть $\epsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда в силу (2.8) найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau)| < \varepsilon, \quad (2.10)$$

при $t \leq \delta, \tau \leq \delta$.

Для $t > \delta, \tau > \delta$ из (2.9) находим

$$|\sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau)| \leq \frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{F(\delta,\delta)} \mu(\alpha^*t, \alpha^*\tau) + C_0 \leq C \mu(\alpha^*t, \alpha^*\tau), \quad (2.11)$$

где постоянная C не зависит от t, τ, λ и η .

Определяя $B_{\lambda,\eta}(t,\tau)$ из (2.7) и подставляя в (2.4), получим

$$L_{\lambda,\eta}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau + \\ + R_{\lambda,\eta} 4 \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^n f_{x^{n-2m} y^{2m}}(x_0, y_0) \int_0^\infty \int_0^\infty F(t,\tau) \frac{t^{n-2m} \tau^{2m}}{(t^2 + \tau^2)^{n/2}} H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau. \quad (2.12)$$

Рассмотрим подробнее интеграл

$$I(\lambda, \eta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau = \int_0^\delta \int_0^\delta + \int_\delta^\infty \int_\delta^\infty + \int_0^\delta \int_\delta^\infty + \int_\delta^\infty \int_0^\delta.$$

В силу (2.10)

$$\int_0^\delta \int_0^\delta \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau \leq \varepsilon \cdot \Delta_{\lambda,\eta}$$

В силу (2.11) и условия (2.2) теоремы

$$\int_\delta^\infty \int_\delta^\infty \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau = o(\Delta_{\lambda,\eta}).$$

В силу (2.9) и условия (2.3) теоремы

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau + \int_0^\infty \int_0^\delta \sigma_{\lambda,\eta}(t,\tau) F(t,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) d\tau \leq \\ \leq \int_0^\infty \int_0^\delta \left[\frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{F(t,\delta)} + C_0 \right] \mu(\alpha^*\tau, \alpha^*\tau) F(\tau,\tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau + \\ + \int_0^\infty \int_\delta^\infty \left[\frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{F(\delta,\tau)} + C_0 \right] \mu(\alpha^*t, \alpha^*\tau) \cdot F(t,t) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau \leq \\ \leq \left[\frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{\xi} + C_0 \right] \cdot \int_0^\infty \mu(\alpha^*\tau, \alpha^*\tau) F(\tau,\tau) Q_\eta(\tau) d\tau + \\ + \left[\frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{\xi} + C_0 \right] \cdot \int_0^\infty \mu(\alpha^*t, \alpha^*t) F(t,t) H_\lambda(t) dt \leq$$

$$\leq C^* \int_0^\infty \mu(\alpha^*u, \alpha^*u) F(u,u) [H_\lambda(u) + Q_\eta(u)] du = o(\Delta_{\lambda,\eta}),$$

где

$$C^* = \max \left\{ \frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{\xi} + C_0, \frac{8M\varphi(x_0,y_0)}{\xi} + C_0 \right\}.$$

Итак,

$$I(\lambda, \eta) \leq \varepsilon \cdot \Delta_{\lambda,\eta} + o(\Delta_{\lambda,\eta}).$$

Откуда

$$I(\lambda, \eta) = o(\Delta_{\lambda,\eta}). \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) следует теорема

(2.1). Покажем, как из теоремы (2.1) получить одну теорему И. П. Натансона.

Пусть $\phi_\lambda(t)$ и $\Psi_\eta(\tau)$ — две непрерывные, положительные, четные, 2π -периодические функции, для которых

$$\int_{-\pi}^\pi \phi_\lambda(t) dt = \int_{-\pi}^\pi \Psi_\eta(\tau) d\tau = 1.$$

Каждой функции $f(t,\tau)$, заданной и непрерывной на всей плоскости и имеющей по каждому из аргументов период 2π , соотнесем интеграл

$$f_{\lambda,\eta}(x,y) = \int_{-\pi-\pi}^\pi \int_{-\pi-\pi}^\pi f(t,\tau) \phi_\lambda(t-x) \Psi_\eta(\tau-y) dt d\tau. \quad (2.14)$$

Введем обозначения

$$N_\lambda = \int_0^\pi t^2 \phi_\lambda(t) dt, \quad M_\eta = \int_0^\pi \tau^2 \Psi_\eta(\tau) d\tau,$$

и допустим, что для любого $\delta > 0$ (и $< \pi$) будет

$$\int_\delta^\pi \phi_\lambda(t) dt = o(N_\lambda), \quad \int_\delta^\pi \Psi_\eta(\tau) d\tau = o(M_\eta).$$

В таком случае имеет место

Теорема (2.2) (И. П. Натансона)*. Если $f(t,\tau)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то справедлива асимптотическая формула

$$f_{\lambda,\eta}(x,y) = f(x,y) + N_\lambda f''_{xx}(x,y) + M_\eta f''_{yy}(x,y) + o(N_\lambda + M_\eta). \quad (2.15)$$

Действительно, приводя интеграл (2.14) к виду

$$f_{\lambda,\eta}(x,y) = \int_{-\pi-\pi}^\pi \int_{-\pi-\pi}^\pi f(x+t, y+\tau) \phi_\lambda(t) \Psi_\eta(\tau) dt d\tau,$$

убеждаемся, что он представляет из себя частный вид оператора (2.1) при $n=2$, $F(t,\tau) = t^2 + \tau^2$,

$$\alpha_{\kappa,\lambda,\eta} = p_{\kappa,\lambda,\eta} \begin{cases} 1, \kappa=1, \\ 0, \kappa=2, 3, \dots; \end{cases} \quad H_\lambda(t) = \begin{cases} \phi_\lambda(t), |t| \leq \pi; \\ 0, |t| > \pi; \end{cases} \quad Q_\eta(\tau) = \begin{cases} \Psi_\eta(\tau), |\tau| \leq \pi \\ 0, |\tau| > \pi, \end{cases}$$

* См. [3], теорема 2.

и, как нетрудно подсчитать, в этом случае

$$\Delta_{\lambda,\eta} = \frac{1}{2}(N_\lambda + M_\eta). \quad (2.16)$$

Так как функция $f(t, \tau)$ во всей плоскости непрерывна и 2π -периодическая по каждому аргументу, то она ограничена, т. е. $\varphi = \text{const}$.

Итак, 1) условие теоремы (2.1) выполнено при $n=2$. Проверим 2) условие теоремы (2.1).

Так как $\mu \equiv 1$, то

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\alpha^* t, \alpha^* \tau) F(t, \tau) H_\lambda(t) Q_\eta(\tau) dt d\tau = N_\lambda o(M_\eta) + M_\eta \cdot o(N_\lambda) = o(\Delta_{\lambda,\eta});$$

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) F(u, v) [H_\lambda(u) + Q_\eta(v)] du = o(N_\lambda) + o(M_\eta) = o(\Delta_{\lambda,\eta}).$$

Таким образом, применяя теорему (2.1) с учетом (2.16) и $n=2$, получим (2.15).

(2. II). Теперь рассмотрим оператор

$$\Phi_{\lambda,\lambda}(f; x, y) = \lambda^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{\kappa=1}^\infty p_{\kappa,\lambda,\lambda} f(x + \alpha_{\kappa,\lambda,\lambda} t, y + \alpha_{\kappa,\lambda,\lambda} \tau) \right] h(\lambda t) q(\lambda \tau) dt d\tau, \quad (2.17)$$

где $\lambda \geq 1$ — параметр, вещественные числа $p_{\kappa,\lambda,\lambda}$, $\alpha_{\kappa,\lambda,\lambda}$ ($\kappa = 1, 2, \dots; \lambda \geq 1$) обладают свойствами (2.1°), и кроме того $|R_{n,\lambda,\lambda}| \geq d > 0$, где d не зависит от λ , а $h(u)$ и $q(u)$ — две положительные, четные функции такие, что

$$\int_{-\infty}^\infty h(u) du = \int_{-\infty}^\infty q(v) dv = 1, \quad w_n = \int_0^\infty \int_0^\infty (u^2 + v^2)^{\frac{n}{2}} h(u) q(v) du dv < +\infty,$$

где n — четное.

Оператор (2.17) есть частный вид оператора (2.1), когда

$$\lambda = \eta \geq 1, \quad H_\lambda(t) = \lambda h(\lambda t), \quad Q_\lambda(\tau) = \lambda q(\lambda \tau),$$

т. е. $H_\lambda(t) Q_\lambda(\tau)$ есть ядро типа Фейера $\lambda^2 h(\lambda t) q(\lambda \tau)$, а $F(t, \tau) = (t^2 + \tau^2)^{n/2}$.

Тогда

$$\Delta_{\lambda,\lambda} = \frac{w_n}{\lambda^n}. \quad (2.18)$$

Теорема (2.3). Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию 1) теоремы (2.1). Если существуют и конечны интегралы

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) (u^2 + v^2)^{\frac{n}{2}} h(u) q(v) du dv, \quad \int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) u^n [h(u) + q(v)] du, \quad (2.19)$$

то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda,\lambda}} [\Phi_{\lambda,\lambda}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] = 4 \cdot \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-2m} v^{2m} h(u) q(v) du dv.$$

Доказательство. В силу условий (2.19) теоремы для любого $\delta > 0$ будем иметь:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\alpha^* t, \alpha^* \tau) F(t, \tau) H_\lambda(t) Q_\lambda(\tau) dt d\tau \leq \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) (u^2 + v^2)^{\frac{n}{2}} h(u) q(v) du dv = o\left(\frac{w_n}{\lambda^n}\right),$$

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) F(u, v) [H_\lambda(u) + Q_\lambda(v)] du \leq \frac{2^{n/2}}{\lambda^n} \int_0^\infty \mu(\alpha^* u, \alpha^* v) u^n [h(u) + q(v)] du = o\left(\frac{w_n}{\lambda^n}\right).$$

Таким образом, выполнены условия (2.2) и (2.3). Следовательно, по теореме (2.1)

$$\Phi_{\lambda,\lambda}(f; x_0, y_0) = f(x_0, y_0) +$$

$$+ 4R_{n,\lambda,\lambda} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty t^{n-2m} \tau^{2m} h(\lambda t) q(\lambda \tau) dt d\tau + o\left(\frac{w_n}{\lambda^n}\right) = f(x_0, y_0) + 4R_{n,\lambda,\lambda} \cdot \frac{1}{n!} \times$$

$$\times \frac{1}{\lambda^n} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-2m} v^{2m} h(u) q(v) du dv + o\left(\frac{w_n}{\lambda^n}\right).$$

Откуда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda,\lambda}} [\Phi_{\lambda,\lambda}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] = 4 \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} f_{x^{n-2m} y^{2m}}^{(n)}(x_0, y_0) \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-2m} v^{2m} h(u) q(v) du dv,$$

что и требовалось доказать.

(2. III). Рассмотрим еще оператор

$$A_{\lambda,\lambda}(f; x, y) = \left(\frac{3\sqrt{3}\lambda}{4\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{\kappa=1}^\infty p_{\kappa,\lambda,\lambda} f(x + \alpha_{\kappa,\lambda,\lambda} t, y + \alpha_{\kappa,\lambda,\lambda} \tau) \right] \frac{dt d\tau}{(1 + \lambda^3 |t|^3)(1 + \lambda^3 |\tau|^3)},$$

где $\lambda \geq 0$ — параметр, вещественные числа $p_{\kappa,\lambda,\lambda}$ и $\alpha_{\kappa,\lambda,\lambda}$ ($\kappa = 1, 2, \dots; \lambda \geq 0$) обладают свойствами (2.1°) при $n=2$, и кроме того, $|R_{2,\lambda,\lambda}| \geq d > 0$, где d не зависит от λ .

Этот оператор с ядром типа Абеля—Пуассона также является частным случаем оператора (2.1), если за $F(t, \tau)$ выбрать функцию вида

$$F(t, \tau) = \begin{cases} t^2 + \tau^2, & 0 \leq t, \tau \leq 1 \\ 2 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

В этом случае, как нетрудно подсчитать,

$$\Delta_{\lambda, \lambda} \approx 2 \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \right)^2 \frac{\ln \lambda}{\lambda^2}.$$

Справедлива следующая

Теорема (2.4). Пусть измеримая ограниченная во всей плоскости функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) имеет непрерывные производные до 2-го порядка включительно. Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{R_{2, \lambda, \lambda} \ln \lambda} [A_{\lambda, \lambda}(f; x_0, y_0) - f(x_0, y_0)] = \frac{27}{8\pi^2} \left[f''_{x^2}(x_0, y_0) + f''_{y^2}(x_0, y_0) \right].$$

Действительно, проверив выполнимость условий (2.2) и (2.3), из теоремы (2.1), получаем требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков В. А. и Фомин Г. А. О сходимости операторов вида $L_n(f; x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) dt}{L^n(t)}$. Уч. зап. Калининского Государственного пед. института имени М. И. Калинина, т. XXVI, 1958, стр. 3—9.
2. Гаджиев А. Д., Джафаров А. С., Лабскер Л. Г. Об асимптотическом значении приближения функций семейством линейных операторов. Изв. АН Азерб. ССР, 1962, № 3.
3. Натансон И. П. Об одном классе двойных сингулярных интегралов. ДАН СССР, 1961, т. XXX, № 5.
4. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

Л. Г. Лабскер və А. Ч. Наныєв

Икигат сингулјар интегралларын бəзи синифлэри һаггында

ХҮЛАСƏ

Бу ишдə икигат сингулјар интегралларын ики синфинə бахылып вə онларла икидəјишəнли дифференциалланан функцијаларын јахынлашмасы өјрəнилип.

Л. М. ИМАНОВ, Ч. О. КАДЖАР

СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫЙ СПЕКТР, ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ И ДИПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ МОЛЕКУЛЫ ЭТИЛОВОГО СПИРТА

Как сообщалось в предыдущих работах, сверхвысокочастотный спектр молекулы этилового спирта исследовался в диапазоне 20,7—31,7 мГц при помощи радиоспектрометра с электрической молекулярной модуляцией. Впервые было обнаружено более ста линий, идентифицировано четыре перехода BQ ветви ($\Delta k_{-1}=1, \Delta k_1=-1$) и определены значения $A-C=26755,8$ и $x=-0,909148$.

В настоящей работе приводится таблица частот обнаруженных линий, определяются эффективные вращательные постоянные, предварительная структура и значение μ_b составляющего дипольного момента молекулы.

В табл. 1 приведены частоты, порядок эффекта Штарка, значение ΔJ и относительная интенсивность линий, которая условно обозначается буквами C, CC и CCC . Через CCC обозначаются наиболее интенсивные линии (с интенсивностью $\geq 10^{-6} \text{ см}^{-1}$), а через C обозначаются переходы, интенсивность которых $\leq 10^{-7} \text{ см}^{-1}$. В промежуточном случае интенсивность обозначена через CC .

В исследуемый диапазон в основном попадают переходы с эффектом Штарка второго порядка. Смещение штарковых компонентов таких переходов незначительно, за исключением линий BQ ветви. Однако наблюдались также линии с эффектом Штарка первого порядка.

Многие спектральные линии имеют дублетную структуру с расщеплением 3–10 мГц. Эти линии, очевидно, относятся к первому возбужденному крутильно-колебательному состоянию. Переходы, связанные с μ_a , составляющей дипольного момента обнаружить не удалось. По известным значениям $A-C$ и x из перехода $2_{12}-3_{03}$ ($\nu=28074,8 \text{ мГц}$) было определено значение $A+C=43077,4 \text{ мГц}$.

Величины эффективных вращательных постоянных приводятся в табл. 2.

Частоты переходов, определенные по этим вращательным постоянным, хорошо согласуются с измеренными (табл. 3). Отметим, что частоты переходов $6_{24}-5_{33}$ и $6_{25}-6_{35}$, а также большинство линий табл. 1 измерены волномером. В то время как частоты остальных

Таблица 1

Обнаруженные линии молекулы C_2H_5OH

Частота (мгц)	ΔJ	Порядок эффекта Штарка	Интен- сивность	Частота (мгц)	ΔJ	Порядок эффекта Штарка	Интен- сивность
1	2	3	4	1	2	2	4
20764	± 1	1	C	23424		2	CCC
20814	± 1	2	C	23425		1	C
20832				23458	± 1	1	CC
20904	± 1	2	C	24287		1	C
20966	± 1	1	C	24329		1	C
21006		2	C	24331		1	C
21044	± 1	2	C	24364		1	C
21277				24370	± 1	2	CCC
21282		2	CC	24381			
21600		2	CC	25305		1	CC
21895				25625	± 1	2	CCC
21905	± 1	2	CC	25783			C
21912				25828			
22006	± 1	1	CC	25836		2	C
22436		2	C	25978			CC
22470			C	25982	± 1		
22518				26086			CCC
22521	± 1	2	CC	26096	-1		CCC
22776		2	CC	26118			CCC
22808			CC	26148			CC
23123	± 1	2	CC	26286			CC
23126				26296			C
22974	± 1	1	CC	26407	± 1	2	C
22978				26437		1	CC
23121			CC	26500	∓ 1	2	CC
23124				26510			
23178	-1		CCC	26755,8	0	2	CCC
23220			CC	26918	± 1	2	CC
23221			CC	27097		2	C
23390	± 1	2	CC	27148	∓ 1	1	CCC
27268			C	28873			CC
27363			CC	28903			CC
27366				28950	± 1	2	C
27441			CC	29248			
27444				29260			
27481			CC	29261			CC
27486				29268			
27701				29317			
27650			CC	29322			CC
27676				29334			
27789			CC	29440			
27796				29799		1	C
28013,5	0	2	CCC	29978,8	0	2	CCC
28074,8	$+1$	2	CCC	29992			C
28128		1	CC	30035			CC
28194		2	CC	30513		1	CCC
28385	± 1		C	30959			CC
28550			C	30968			
28768				31206			C
28777			CC	31223			
				32742,6	0	2	CCC

переходов табл. 3 измерены множителем эталонной частоты с точностью $\pm 0,2$ мгц.

Варьируя структурные параметры молекулы, принятые при предварительном расчете ее сверхвысокочастотного спектра, добиваемся

равенства вращательных постоянных, определенных из структуры с эффективным вращательным постоянным, определенным экспериментально (табл. 3).

Определенные таким образом структурные параметры приводятся в табл. 4.

Таблица 2

Значение вращательных постоянных

	Рассчитанные (в мгц)	Измеренные (в мгц)
A	34916,2	34916,6
B	9377,9	9376,2
C	8160,6	8160,8

Таблица 3

Переходы	Частоты, мгц	
	Измеренные	Расчетные
$1_{01}-1_{10}$	26755,8	26755,8
$2_{02}-2_{11}$	28013,5	28013,5
$3_{03}-3_{12}$	29978,8	29978,8
$4_{04}-4_{13}$	32742,6	32742,7
$6_{24}-5_{33}$	23178	23187,9
$6_{25}-5_{32}$	26096	26105,9
$2_{12}-3_{03}$	28074,8	28074,8

Таблица 4

Структурные параметры молекулы C_2H_5OH

Межатомные расстояния (в Å)	Валентные углы
r_{C-C} 1,533	$\angle COH$ $106^{\circ}00'$
r_{C-O} 1,420	$\angle CCO$ $107^{\circ}26'$
r_{C-H} 1,0922	$\angle CCH$ $109^{\circ}46'$
r_{O-H} 0,936	$\angle O$ $32^{\circ}44'$

Угол θ определяет направление главных осей инерции в молекуле при вышеуказанных молекулярных постоянных. Значения углов CCO и COH получаются близкими к углам HCO и COH молекулы метилового спирта.

Для нахождения дипольного момента было измерено с точностью до $\pm 0,2$ мГц смещение штарковских компонентов линий переходов $1_{01}-1_{10}$; $2_{02}-2_{11}$ ($M=2$); $3_{03}-3_{12}$ ($M=3$ и $M=2$). Градуировка поля в волноводе осуществлялась по линии $3_{13}-3_{12}$ ($M=3$ и $M=2$) молекулы формальдегида (CH_2OH), имеющей дипольный момент $2,34 D$. Рассчитанные значения смещений штарковских компонентов линий переходов $1_{01}-1_{10}$, $2_{02}-2_{11}$ и $3_{03}-3_{12}$ приводятся в табл. 5.

Таблица 5

Переходы	$\frac{\Delta\nu}{E^2} \cdot 10^6 \left[\frac{\text{мГц}}{(\text{в/см})^2} \right]$
$1_{01}-1_{10}$	$52,54 \mu_a^2 + 5,04 \mu_b^2$
$2_{02}-2_{11}$ ($M=2$)	$9,10 \mu_a^2 + 5,64 \mu_b^2$
$3_{03}-3_{12}$ ($M=3$)	$2,22 \mu_a^2 + 5,47 \mu_b^2$
$3_{03}-3_{12}$ ($M=2$)	$0,94 \mu_a^2 + 1,99 \mu_b^2$

Таблица 6

Переходы	$\frac{\Delta\nu}{E^2} \cdot 10^6 \left[\frac{\text{мГц}}{(\text{в/см})^2} \right]$	
	экспериментальное	расчетное
$1_{01}-1_{10}$	12,32	12,60
$2_{02}-2_{11}$ ($M=2$)	14,03	14,11
$3_{03}-3_{12}$ ($M=3$)	14,03	13,68
$3_{03}-3_{12}$ ($M=2$)	5,16	4,97

Из табл. 5 и экспериментально найденных значений $\frac{\Delta\nu}{E^2}$ находим $\mu_b = 1,58 \pm 0,04 D$ (так как оказывается, что $\mu_a \ll \mu_b$, то полагаем $\mu_a = 0$). Значения $\frac{\Delta\nu}{E^2}$, рассчитанные при $\mu_a = 0$ и $\mu_b = 1,58 D$, сопоставляются в табл. 6 с экспериментальными данными.

Этил спирти молекулунун ифрат јүксәктезликли спектри, фырланма сабитләри вә дипол моменти.

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ молекулунун $20,7-31,7 \text{ кмГц}$ тезлик диапазо- нунда мүшәһидә едилмиш вә тезлији өлчүлмүш јүздән чох хәтти- нин чәдвәли верилмишдир. Ујғунлашдырылмыш $1_{01}-1_{10}$, $2_{02}-2_{11}$ вә $2_{12}-3_{03}$ кечидләринин тезлијиндән молекулун эффектив фырланма сабитләри үчүн бу гіјмәтләр алынмышдыр: $A=34916,6$; $B=9376,2$ вә $C=8160,8 \text{ мГц}$.

Спектрин $^{13}\text{Q}_{1,-1}$ будағы хәтләринин штарк компонентләринин сү- рүшмәсинә әсасән молекулун дипол моментинин μ_b тәшкиледичиси тапылмышдыр. Онун орта гіјмәти $\mu_b = 1,58 \pm 0,04 D$ олуб, молекулун $\text{C}-\text{C}$ оху илә $57^\circ 16'$ -лик бучаг тәшкил едир.

И. А. МУХТАРОВ

МИКРОВОЛНОВЫЙ СПЕКТР МОЛЕКУЛЫ 1,1,2-ТРИФТОРЭТАНА

Наиболее перспективным методом изучения ряда физических явлений, связанных со структурой, изомерным состоянием, изотопическим замещением, внутренним вращением и другими параметрами молекулы, является метод радиоспектроскопии ввиду его высокой разрешающей способности.

За последнее время при помощи этого метода особенно интенсивно изучаются молекулы с внутренним вращением. В таких молекулах, кроме вращения в целом вокруг трех пространственных осей, имеет место еще внутреннее вращение отдельных групп атомов вокруг одинарных связей. Влияние подобного внутреннего вращения проявляется в виде расщепления линий поглощения вращательных переходов, смещения их и появления дополнительных сателлитов. Изучение этих явлений позволяет получить наиболее точную информацию о высоте потенциального барьера, о возможных поворотных изомерах, их относительной устойчивости и других физических параметрах молекулы. Молекулы с внутренним вращением, изученные до настоящего времени методом радиоспектроскопии, в основном относятся к типу молекул, состоящих из двух симметричных групп или из одной симметричной и одной асимметричной групп атомов, для которых создана приемлемая математическая расчетная теория [7].

Большой интерес представляют молекулы, состоящие из двух асимметричных групп. Заторможенное внутреннее вращение в таких молекулах приводит к наличию нескольких изомерных состояний. Подобного типа молекулы почти не изучены за исключением частного случая легкой асимметрии, получаемой при замене Н на Д [5, 8, 9]. Создание математической теории для молекул с двумя асимметрическими группами представляет определенные трудности.

Данная работа посвящена экспериментальному изучению методом радиоспектроскопии молекулы 1,1-, 2-трифторэтана ($\text{F}_2\text{HC}-\text{CH}_2\text{F}$). Эта молекула является одной из серии изученных нами молекул галогенозамещенных этана, состоящих из двух асимметричных групп атомов [2-4].

Структура и расчет. Предполагая, что для молекулы $\text{F}_2\text{HC}-\text{CH}_2\text{F}$ затененная конфигурация исключается [1], можно ожидать три изомерные конфигурации: одна — когда все три атома фтора находятся с одной стороны оси $\text{C}-\text{C}$ (рис. 1, $\alpha = 0$), две другие („гош“ — конфи-

гурации) получаются из первой поворотом группы CH_2F на 120° и 240° (рис. 1 $\alpha = 120^\circ$ и $\alpha = 240^\circ$).

На рис. 1 изображены проекции расположения атомов на плоскость, перпендикулярную оси $\text{C}-\text{C}$. На рис. 2 даны возможные формы зависимости потенциальной энергии от угла поворота.

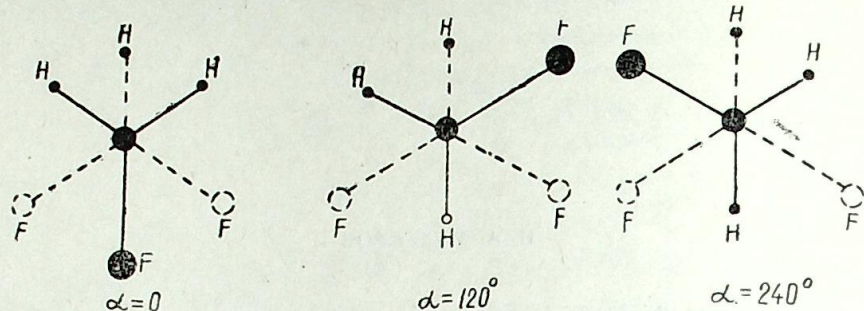


Рис. 1

Предварительный расчет в приближении жесткого асимметричного волчка показал:

а) линии поглощения вращательных переходов находятся в диапазоне частот $7 \div 30$ кмггц;

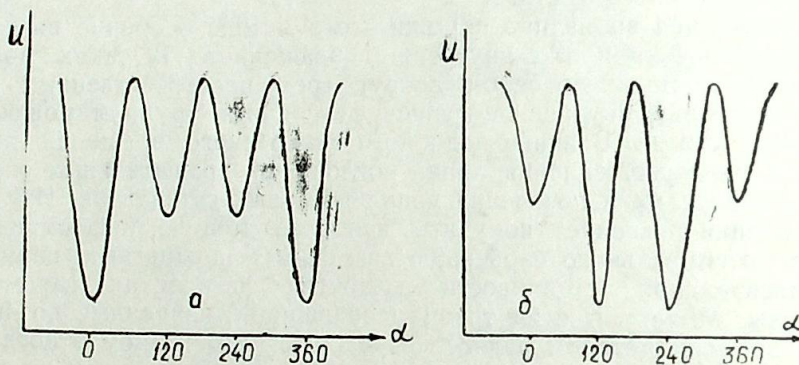


Рис. 2

б) при предположении одинаковой устойчивости линии конфигурации $\alpha = 0$ приблизительно в четыре раза интенсивнее линий конфигураций „гош“;

в) конфигурации „гош“ $\alpha = 120^\circ$ и $\alpha = 240^\circ$ энергетически идентичны (рис. 2), что приводит к двукратному вырождению соответствующих им линий. При снятии вырождения вследствие „туннельного эффекта“ расстояние между компонентами дублета зависит от высоты барьера.

В молекуле $\text{F}_2\text{HC}-\text{CH}_2\text{F}$ исключается ядерное квадрупольное расщепление линий, так как спин ядра фтора равен $1/2$. Линии, соответствующие изотопам фтора, также исключаются из-за отсутствия изотопов в естественной смеси.

Измерения и результаты эксперимента. Микроволновый спектр вращательных переходов молекулы $\text{F}_2\text{HC}-\text{CH}_2\text{F}$ изучался при помощи собранного нами радиоспектроскопа с электрической молекулярной модуляцией в диапазоне $7 \div 30$ кмггц. Использовались две ячейки

№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность	№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность	№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность
1	7385	Слабая	59	11 050	Средняя	106	13 179	Сильная
2	7574	•	60	11 082	Сильная	107	13 222	•
3	7577	•	61	11 076,6	Очень	•	13 232	Слабая
4	7736	•	•	•	сильная	108	13 330	Средняя
5	7770	•	62	11 109	Сильная	•	13 327	Сильная
6	7802	•	63	11 116	Средняя	109	13 418	•
7	7827	•	64	11 126	•	•	13 415	•
8	7894	Средняя	65	11 141	•	110	13 437	Средняя
9	7925	Слабая	66	11 163	•	•	13 434	•
10	8049	•	67	11 172	Сильная	111	13 491	•
11	8126	•	68	11 183	•	112	13 504	Сильная
12	8132	•	69	11 242	Средняя	113	13 526	Слабая
13	8190	Сильная	70	11 330	•	•	13 522	•
14	8220	•	71	11 357	•	114	13 663	Сильная
15	8225	Средняя	72	11 390	Сильная	115	13 692	Слабая
16	8361	•	73	11 440	Слабая	116	13 708	•
17	8525	Слабая	74	11 489	•	117	13 717	Средняя
18	8522	•	75	11 504	Сильная	118	13 744	•
19	8673	•	76	11 535	Слабая	119	13 938	Сильная
20	8682	Средняя	77	11 554	Средняя	120	13 981	Средняя
21	8708	Слабая	78	11 589	•	121	14 019	Сильная
22	8751	Сильная	79	11 597	•	122	14 068	•
23	9115	Слабая	80	11 681	Сильная	123	14 093	Сильная
24	9597	•	•	•	•	•	14 090	Средняя
25	9637	•	•	11 685	•	124	14 106	•
26	9 648	Средняя	81	11 7262	Сильная	125	14 194	Сильная
27	9 691	Слабая	82	11 813	•	126	14 246	Средняя
28	9 760	Средняя	83	11 880	Средняя	127	14 237	Сильная
29	9 765	Слабая	•	11 874	•	•	14 236	Средняя
30	9 787	•	•	11 870,5	Слабая	128	14 259	•
31	9 967	•	84	11 909,5	Средняя	129	14 280	•
32	9 959	Сильная	85	12 109	•	130	14 293	Сильная
33	9 899	Слабая	86	12 224	Слабая	•	14 298	Средняя
34	10 020	•	87	12 363	Средняя	131	14 328	Сильная
35	10 089	•	•	12 359	•	132	14 500	Сильная
36	10 203	•	88	12 393	•	133	14 548	Средняя
37	10 405	Средняя	89	12 414	Слабая	134	14 592	Сильная
38	10 606	Слабая	90	12 507	Сильная	135	14 601	Очень
39	10 642	Средняя	•	12 504	Средняя	•	•	сильная
40	10 639	•	91	12 582	•	136	14 620	•
41	10 653	•	92	12 611,5	•	137	14 635	Сильная
42	10 652	•	•	12 610	•	138	14 665	•
43	10 695	•	93	12 618	•	139	14 824	Очень
44	10 708	Сильная	94	12 649	•	•	•	сильная
45	10 743	Средняя	•	12 646	•	140	14 843	Средняя
46	10 737	•	95	12 702	Слабая	141	14 865	Сильная
47	10 757	•	•	12 696	Средняя	•	14 873	Очень
48	10 821	Сильная	96	12 813	•	•	•	сильная
49	10 811	•	•	12 811	Слабая	142	14 885	•
50	10 906	Средняя	97	12 825	Очень	143	14 905	Сильная
51	10 928	Слабая	•	•	сильная	144	14 945	Очень
52	10 956	Сильная	98	12 866	Средняя	•	•	сильная
53	10 980	Средняя	99	12 926	•	145	15 069	Сильная
54	10 977	•	100	12 919	Сильная	146	15 095	Средняя
55	10 997	Сильная	101	12 951	Средняя	147	15 370	Сильная
56	11 017	Средняя	102	13 009	•	•	15 382	Средняя
57	11 027	Слабая	•	13 006	•	148	15 400	•
58	11 042,5	Очень	•	13 004	•	149	15 431	•
•	•	сильная	103	13 017	•	150	15 595	•
•	•	•	104	13 029	Сильная	151	15 684	•
•	•	•	•	13 026	Слабая	152	15 739	•
•	•	•	105	13 162	Сильная	153	15 986	•
•	•	•	•	13 158	Средняя	•	•	•

№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность	№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность	№ п/п	Частота, Мгц	Интенсивность
154	16 033	Средняя	178	20 030	Средняя	202	25 934	Средняя
155	16 044	"	179	20 140	"	203	26 190	"
156	16 120	Сильная	180	20 184	"	204	26 210	"
157	16 203	Средняя	181	20 600	Сильная	205	26 304	Слабая
	16 307	"	182	20 755	Слабая	206	26 340	"
158	16 360	"	183	20 820	Средняя	207	26 564	Сильная
159	16 388	"	184	21 200	"	208	26 690	"
160	16 410	"	185	21 335	"	209	26 810	Средняя
161	16 471,6	"	186	21 380	Сильная	210	26 890	"
162	16 520	"	187	21 805	Средняя	211	27 347	Сильная
163	16 840	"		21 810	"	212	27 487,4	"
164	17 065	"	188	21 960	"	213	27 890	Средняя
165	17 125	"	189	22 100	"	214	27 935,2	"
	17 135	"	190	22 200	Сильная		27 998	"
166	17 216	"	191	22 400	"	215	29 440	Слабая
167	17 491	"	192	22 430	Средняя	216	29 011,4	Средняя
168	17 526	"	193	22 870	Сильная	217	29 150	"
169	17 740	"	194	22 013,4	"	218	29 500	"
170	17 944	"	195	23 460	Слабая	219	29 650	Сильная
171	18 192,2	"	196	24 000	Средняя	220	29 860	"
172	18 571,6	Слабая	197	24 715	"	221	29 940	"
173	18 879,1	"	198	24 825	"	222	30 100	Слабая
174	19 070	Средняя	199	24 825	"	223	30 325	Средняя
175	19 380	Сильная	200	24 920	"	224	30 420	"
176	19 666	"	201	25 508	"	225	30 910	Сильная
177	19 956	Средняя						

(для продукта в газовой фазе), изготовленные из 1,5 и 3 см прямоугольного волновода. Изучение проводилось при двух температурах: комнатной и температуре сухого льда и давлениях от 10^{-2} Нг до 10^{-3} Нг. Штарковские компоненты линий поглощения исследовались подачей на ячейку прямоугольного импульса частотой 65 кгц, амплитудой до 600 в, а также так называемым „постоянным штарком“, т. е. добавлением к модулирующему прямоугольному импульсу небольшой амплитуды большого постоянного напряжения (до 800 в).

Частота источника излучения стабилизировалась при помощи объемного резонатора, используемого одновременно для грубого измерения частоты излучения. Измерение частоты с точностью до 0,1 Мгц проводилось при помощи меток от гармоник 10 Мгц-го кварца, контролируемого эталоном частоты 200 кгц.

В диапазоне измерения экспериментально наблюдалось более 400 линий. Частоты наиболее интенсивных линий даны в таблице. По структуре штарковских компонентов идентифицирован ряд линий Q- и RP-ветви, которые соответствуют „гош“ конфигурации. На основании измеренных частот идентифицированных переходов $0_{00} - 1_{11} = 11909,5$ Мгц и $1_{01} - 2_{12} = 17526$ Мгц определены вращательные постоянные „гош“ конфигурации молекулы $F_2HC - CH_2F$:

$A = 9101,25$ Мгц и $C = 2808,25$ Мгц. Рассчитанная по этим значениям A и C частота перехода $2_{12} - 2_{21}$ $\nu = 18879$ Мгц хорошо совпадает с экспериментальным значением (см. таблицу) $\nu = 18879,1$ Мгц.

Обсуждение результатов. Результаты экспериментов позволяют сделать ряд предварительных выводов.

1. Как было отмечено, линии поглощения вращательных переходов, относящиеся к конфигурации $\alpha = 0$, в предположении одинаковой устойчивости должны быть в 4 раза интенсивнее, чем линии,

относящиеся к конфигурации „гош“. Однако интенсивности линий наблюдаемых для конфигурации „гош“, намного сильнее, чем расчетные, в то время как достаточно интенсивные линии для конфигурации $\alpha = 0$ не наблюдались. Это обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что изомер „гош“ этой молекулы более устойчив, чем изомер $\alpha = 0$. Изложенные соображения позволяют выбрать из возможных форм потенциальной энергии $U(\alpha)$ кривую типа изображенной на рис. 2б.

2. Структура штарковских компонентов идентифицированных линий показывает, что дипольный момент примерно в 1,2 раза меньше, чем рассчитанный по электроотрицательности атомов.

3. Линии, соответствующие переходам между уровнями с большими l, сильно смещены, что, вероятно, связано с центробежным возмущением и влиянием внутреннего вращения.

4. Наблюдаются пары идентичных линий (по интенсивности и штарккомпонентам). Это, очевидно, связано со снятием двукратного вырождения в изомере „гош“ вследствие туннельного эффекта.

Справедливость этого предположения выяснится в дальнейшем. Работа по исследованию молекулы 1,1-, 2-трифторэтана продолжается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мидзисума. Строение молекул и внутреннее вращение. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
2. Мухтаров И. А. „Изв. АН СССР, серия физ.“, 1958, т. XXII, № 9.
3. Мухтаров И. А. „Оптика и спектроскопия“, 1959, т. VI, 260.
4. Мухтаров И. А. „ДАН Азерб. ССР“, 1962, № 4.
5. Bak B., Detoni S., Nansen-Nygaard L., Nilsen I. a. Andersen R. Spectrochimica Acta, 1960, vol. 16, 376.
6. Gross P. C., Hainer K. M. a. King G. W. J. chem. phys., 1944, 12, 210.
7. Hecht K. a. Dennison. J. chem. phys., 1957, № 1, 26.
8. Kilb R. W., Chyn Chia Lin a. Wilson E. B. J. chem. phys., 1957, 26, 1588.
9. Wagner R. S. a. Deiley B. P. J. chem. phys., 1957, 1695, 26.

И. А. Мухтаров

1,1-, 2-үчфторетан молекулунун микродалгалар спектри

ХҮЛАСӘ

Мүэллифин һазырладыгы молекуллар модуласиялы радиоспектроскоп гурғусу илә $F_2HC - CH_2F$ -молекулунун 7,5–30 кмгһерс тезлик интервалында җазылмыш 225 хәттин тезлиин верилір. Штарк эффектин тәдгигинә әсасән уҗғунлашдырылмыш 2 хәттин гош изомер һалында олан молекуллар аид олдуғу мүәјјән едилмишдир. Уҗғунлашдырылмыш кечидләрин тезлијинә әсасән молекулун гош изомер һалы үчүн фырланма сабитләри A вә C тапылмышдыр.

Г. А. ЭФЕНДИЕВ, Ф. С. СУЛТАНОВ и Р. Н. ИСКЕНДЕРОВ

ТЕРМОЭДС ТОНКИХ СЛОЕВ ВІ

Как известно, термоэлементы, изготовленные в виде тонких слоев, обладают малой теплоемкостью и с их помощью температура измеряется более точно и быстро. Так как термоэдс тонких слоев зависит от толщины, то прежде чем применять эти элементы, следует изучить зависимость термоэдс от толщины слоя. Изучая термоэдс в тонких слоях, можно определять и среднюю длину свободного пробега электронов, что было сделано в работах [4—6].

Найдено, что термоэдс Mg в пределах толщины порядка $100 \div 700 \text{ Å}$ [3], Sb, Fe в пределах $\approx 40\text{—}1000 \text{ Å}$ [7], Al [8] в пределах $90\text{—}1500 \text{ Å}$ не изменяется и равняется соответственно значению массивных материалов. Термоэдс Bi [3, 5, 7], Ni, Co [7] с уменьшением толщины уменьшается, причем для Bi, Ni и Co [7] термоэдс ниже 140 Å остается постоянной.

В работе [4, 5] рассмотрена теория зависимости термоэдс от толщины, результаты сравниваются с собственными измерениями Bi и Pb. По этой теории следует, что термоэдс в тонких слоях зависит от средней длины свободного пробега электронов. А с другой стороны, длина свободного пробега зависит от толщины пленки и от энергии электронов. Авторы показали, что средняя длина свободного пробега для Bi при 25°C равна 2000 Å , а для Pb при 35°C — 84 Å , считая $\lambda \approx \frac{1}{E^2}$, где E означает энергию электронов.

В работе [6] также показано, что $\lambda \approx E^2$ и на основе этого дано выражение для термоэдс в тонком слое.

Наши исследования термоэдс тонких слоев мы начали с изучения Bi. Это вызвано тем, что Bi является одним из компонентов исследуемых нами двойных систем Bi—Se и Bi—Te, широко используемых в пленочных термоэлементах. Длина свободного пробега и термоэдс Bi намного больше, чем у обычных металлов. Поэтому исследование термоэдс Bi в зависимости от толщины представляет большой интерес.

Образцы получены испарением в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.). Подложкой служила стеклянная пластинка размером $20 \times 90 \text{ мм}^2$, тщательно очищавшаяся химическим способом. Для очистки поверхности подложки от

Г. А. ЭФЕНДИЕВ, Ф. С. СУЛТАНОВ и Р. Н. ИСКЕНДЕРОВ

ТЕРМОЭДС ТОНКИХ СЛОЕВ ВІ

Как известно, термоэлементы, изготовленные в виде тонких слоев, обладают малой теплоемкостью и с их помощью температура измеряется более точно и быстро. Так как термоэдс тонких слоев зависит от толщины, то прежде чем применять эти элементы, следует изучить зависимость термоэдс от толщины слоя. Изучая термоэдс в тонких слоях, можно определять и среднюю длину свободного пробега электронов, что было сделано в работах [4—6].

Найдено, что термоэдс Mg в пределах толщины порядка $100 \div 700 \text{ \AA}$ [3], Sb, Fe в пределах $\approx 40\text{—}1000 \text{ \AA}$ [7], Al [8] в пределах $90\text{—}1500 \text{ \AA}$ не изменяется и равняется соответственно значению массивных материалов. Термоэдс Ві [3, 5, 7], Ni, Co [7] с уменьшением толщины уменьшается, причем для Ві, Ni и Co [7] термоэдс ниже $140 \text{ \AA}$ остается постоянной.

В работе [4, 5] рассмотрена теория зависимости термоэдс от толщины, результаты сравниваются с собственными измерениями Ві и Pb. По этой теории следует, что термоэдс в тонких слоях зависит от средней длины свободного пробега электронов. А с другой стороны, длина свободного пробега зависит от толщины пленки и от энергии электронов. Авторы показали, что средняя длина свободного пробега для Ві при 25°C равна $2000 \text{ \AA}$, а для Pb при 35°C — $84 \text{ \AA}$, считая $\lambda \approx \frac{E}{E^2}$, где E означает энергию электронов.

В работе [6] также показано, что $\lambda \approx E^2$ и на основе этого дано выражение для термоэдс в тонком слое.

Наши исследования термоэдс тонких слоев мы начали с изучения Ві. Это вызвано тем, что Ві является одним из компонентов исследуемых нами двойных систем Ві—Se и Ві—Te, широко используемых в пленочных термоэлементах. Длина свободного пробега и термоэдс Ві намного больше, чем у обычных металлов. Поэтому исследование термоэдс Ві в зависимости от толщины представляет большой интерес.

Образцы получены испарением в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.). Подложкой служила стеклянная пластинка размером $20 \times 90 \text{ мм}^2$, тщательно очищавшаяся химическим способом. Для очистки поверхности подложки от

адсорбированных газов ее подогревали в вакууме при температуре 100°C . Во время испарения подложка имела температуру около 70°C . Испарение производилось из танталовой лодочки. Лодочки несколько раз были прокалены в вакууме. Образцы, полученные таким путем, не загрязняются материалом испарителя [4]. Полученные образцы имели толщину в пределах $80\text{--}20\,000\text{ \AA}$. Толщину образцов определяли расчетным путем [1]. Термоэдс измеряли непосредственно после получения образца и после каждого последующего отжига. Образцы отжигались при температурах $100, 150, 200^{\circ}\text{C}$ в течение $15\text{--}60\text{ мин}$.

Принципиальная схема установки, которую мы использовали для измерения термоэдс в тонком слое с непрерывно меняющейся толщиной, показана на рис. 1. Стеклаянная пластинка с нанесенной на нее пленкой зажимается между латунными печками P_1 и P_2 , создающих падение температуры. Печки питаются стабилизированным током. Образец нагревается по всей длине — по краям, а спад температуры происходит поперек. Для измерения термоэдс и температуры применены

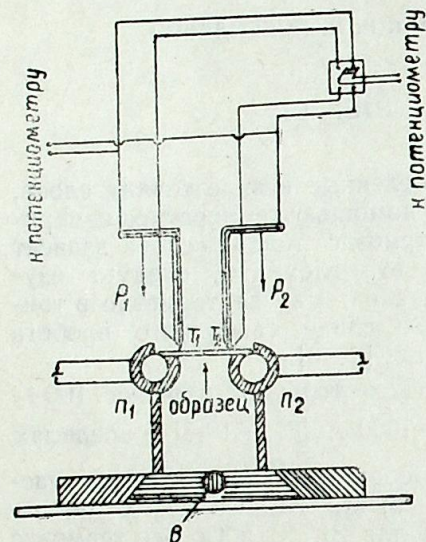


Рис. 1

Принципиальная схема установки для измерения термоэдс в тонком слое. P_1 и P_2 — печки; T_1 и T_2 — зонды-термопары; P_1 и P_2 — грузики; B — маховик.

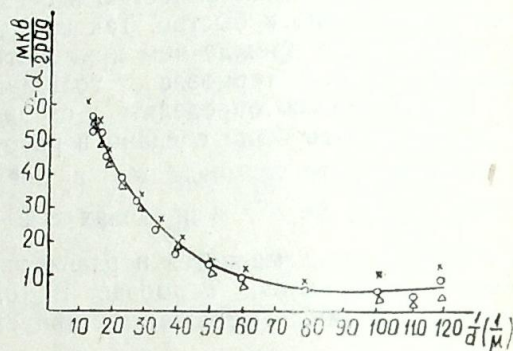


Рис. 2

Зависимость термоэдс от обратной величины толщины слоя Δ — без отжига; $\circ$ — час отжига при 100°C ; $\times$ — час отжига при 150°C .

медно-константановые термопары T_1 и T_2 . Термопары перпендикулярно зажимаются на поверхности образца специальными грузиками P_1 и P_2 , которые позволяют регулировать давление контакта. Расстояние между термопарами постоянно и равно 8 мм . Для устранения случайных внешних воздействий установка помещена внутри коробки. Маховики, смонтированные на наружной стороне стенки коробки, позволяют двигать образцы и дают возможность измерять термоэдс любой координаты образца.

При измерении горячие контакты имели температуру $40\text{--}50^{\circ}\text{C}$, падение температуры равнялось $4\text{--}6^{\circ}\text{C}$. Как температуру, так и термоэдс измеряли компенсационным способом потенциометром ППТВ. Все измерения проводились в атмосфере. Результаты наших измерений приведены на рис. 2, где по оси абсцисс поставлено значение обратной величины толщины $1/d$ в мк^{-1} , по оси ординат коэффициент термоэдс в мкВ/град . При таком выборе координат можно хорошо проследить изменения термоэдс в более тонком участке слоя.

В работе [2] приводятся измерения термоэдс V_i на слоях толщиной $2\text{--}42\text{ мк}$, где термоэдс в пределах ошибки постоянна и равна значению термоэдс массивного V_i . Из наших данных следует, что термоэдс вплоть до $\approx 0,2\text{--}0,15\text{ мк}$ остается постоянной и равной значению массивного V_i . В интервале толщин $1500\text{--}1000\text{ \AA}$ термоэдс уменьшается незначительно, а затем с уменьшением толщины более резко.

При толщинах меньше чем $150\text{ \AA}$ она опять остается постоянной. На рис. 2 показано также влияние отжига на значение термоэдс. Как видно, отжиг на значение термоэдс заметно не влияет. В толщинах меньше чем $60\text{ \AA}$ термоэдс измерить не удалось. После отжига эта толщина несколько увеличивается ($\approx 80\text{ \AA}$). По-видимому, при указанных толщинах сплошной слой не образуется, а после отжига из-за рекристаллизации при нескольких больших толщинах начинаются микротрещины.

На рис. 3 для сравнения, наряду с нашими данными, показаны данные работ [3, 4]. Как видно, кривая, построенная по нашим измерениям, сходна с кривыми указанных авторов, а разбросы в наших измерениях относительно меньше. По нашим измерениям термоэдс имеет отрицательный знак, что наблюдается и другими авторами.

В работе [6] выведено выражение для термоэдс в тонком слое и показано, что

$$a = - \left\{ \frac{u}{\xi} \left[1 + \left(\frac{d \log \lambda}{d \log E} \right)_{E=\xi} \right] + \alpha_0 \right\} + \frac{3}{8} \frac{u}{\xi} \lambda_0 \left(\frac{d \log \lambda}{d \log E} \right)_{E=\xi} \cdot \frac{1}{d}, \quad (1)$$

где

$$u = \frac{1}{e} \frac{\pi^2}{3} k^2 T;$$

ξ — энергия Ферми;

λ_0 — средняя длина свободного пробега электронов в массивном материале;

λ — средняя длина свободного пробега электронов в тонком слое;

d — толщина слоя;

E — энергия электронов;

α_0 — термоэдс эталонного металла.

Заменой:

$$a = - \left\{ \frac{u}{\xi} \left[1 + \left(\frac{d \log \lambda}{d \log E} \right)_{E=\xi} \right] + \alpha_0 \right\} \quad (2)$$

$$b = \frac{3}{8} \frac{u}{\xi} \lambda_0 \left(\frac{d \log \lambda}{d \log E} \right)_{E=\xi} \quad (3)$$

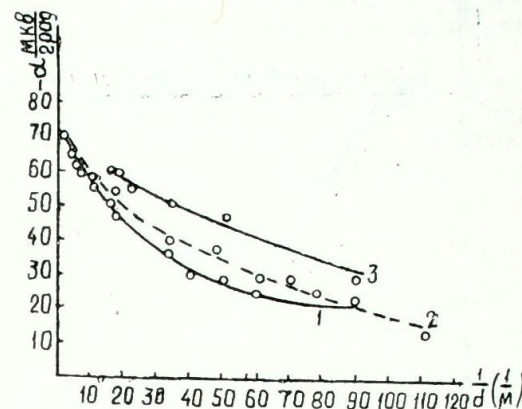


Рис. 3

График для сравнения термоэдс тонких слоев по данным разных авторов 1 — наши данные; 2 — Юсти и др.; 3 — Ки-коина и др.

получено

$$\alpha \cdot d = ad + b,$$

(4)

т. е. произведение толщины на термоэдс от толщины слоя зависит линейно.

Формула (1) выведена при условии, что время релаксации, соответствующее тепловому движению ионов, мало отличается от времени релаксации, соответствующего дефектам решетки.

График зависимости $\alpha \cdot d$ от d по нашим измерениям показан на рис. 4, где явно получена прямая линия, для толщин до $\approx 250 \text{ \AA}$. По-видимому, в толщинах меньше чем $250 \text{ \AA}$ условия, поставленные при выводе формулы (1), не соблюдаются. Точка пересечения прямой части графика с осью $\alpha \cdot d$ дает значение $b = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ в.см.град}^{-1}$. Зная b , на основе выражения (3) можно высказать некоторые соображения о зависимости λ от E .

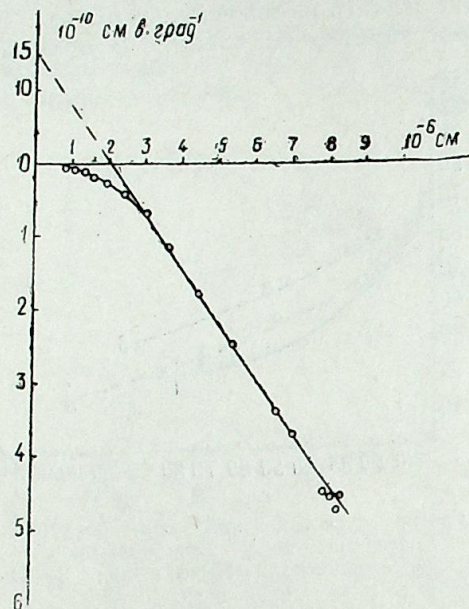


Рис. 4
Зависимость $\alpha \cdot d$ от d для тонких слоев Вi

Выводы

1. В тонких слоях Вi с уменьшением толщины уменьшается термоэдс. Граница перехода от массивного слоя к тонкому

находится в интервале толщины $1500-2000 \text{ \AA}$.

2. Коэффициент термоэдс в зависимости от толщины меняется в пределах от $\alpha = -65 \text{ мкв/град}$ до $\alpha = -10 \text{ мкв/град}$.

3. Полученные результаты подтверждают теорию, связывающую термоэдс с длиной свободного пробега электронов в тонких слоях.

Авторы выражают свою благодарность проф. А. Р. Регелю за обсуждение результатов работы и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векшинский С. А. Новый метод металлографического исследования сплавов, 1944.
2. Кайданов В. И., Регель А. Р. „Ж. техн. физ.“, 1958, 28, 2.
3. Кикоин А. К., Федоров Г. Д. Труды Уральского политехнического института, 72, 1957.
4. Justi E., Kohler M., Lautz L. Z. Naturforsch., 6 a, 456, 1951.
5. Justi E., Kohler M., Lautz L., Z. Naturforsch., 6 a, 544, 1951.
6. Mayer H. Structure and properties of thin films, p. 225, 1959.
7. Reimer L. Z. Naturforsch., 12 a, 1957.
8. Savornin I. et. Couchlet, C. R. Acad. Sci, 234, 1952.

Н. Э. Эфендиев, Ф. С. Султанов, Р. Н. Искандеров

Назик Вi тэбэгэлэриндэ термoeнг

ХҮЛАСЭ

Бу ишдэ бухарландырылыб чөкдүрмэ үсүлү илэ алынмыш дэјишэн галынлыглы ($80-20000 \text{ \AA}$) Вi-тэбэгэлэриндэ термoeнг өјрөнілмишдир. Термoeнг өлчмэк үчүн хүсуси чибаз дүзэлдилмишдир. Бурада нүмунэ ики печ арасында јерлэшир, нүмунэдэ енинэ температур дүшкүсү јарадылыр. Температур вэ термoeнг компенсасија үсүлү илэ өлчүлүр. Хүсуси гинтлэрин көмөји илэ нүмунэни һэрәкәт етдирмәклә, истәнилән координатда термoeнг-и өлчмэк олур.

Мүәјјән олуңмушдур ки, тэбэгәнин галынлығы $0,15 \text{ мк}$ гәдәр азалдыгда, галынлыгдан асылы олараг термoeнг әмсалы зәиф дәјишир, галынлығын сонракы азалмасы илэ исә кәскин олараг дүшүр. Галынлығын $150 \text{ \AA}$ -дән ашагы гијмәтлэриндэ термoeнг әмсалы јенидән сабит галыр.

Термoeнг әмсалы галын јердә ($\sim 2000-20000 \text{ \AA}$) $-65 \frac{\text{мкв}}{\text{дәр}}$, назик

јердә ($80 \text{ \AA}$) исә $-10 \frac{\text{мкв}}{\text{дәр}}$ олур. һәмчинин көстәрилмишдир ки, дәм просеси назик Вi тэбэгәсинин термoeнг-нә тәсир етмир, белә ки, билаваситә учурмадан сонра алынн нүмунэдә термoeнг әмсалынын гијмәти мүхтәлиф дәм просеслэриндән кечирилмиш нүмунәдән алынмыш гијмәтләрлә, демәк олар ки, үст-үстә дүшүр.

Алынн нәтичәләр термoeнг-и електронларын сәрбәст јолунун орта узунлуғу илэ әлагәләндирән нәзәријјәнин доғрулуғуну сүбүт едир.

С. М. АЗИМОВ

ЗВЕЗДЫ—СПУТНИКИ В СИСТЕМАХ ЗАТМЕННЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД

В развитии звездной астрономии и космогонии большую роль играет изучение тесных двойных звезд—затменных переменных. Изучение этих звездных систем, содержащих необычайное многообразие звезд различных типов, представляет исследователям большие возможности в отношении изучения физических характеристик звезд и ряда явлений, имеющих важное значение для космогонических проблем (протяженные атмосферы у звезд-спутников и т. д.).

Системы затменных переменных, в которых одним из компонентов (а в редких случаях и оба, например AR Lac) являются звезды субгигант, составляют системы с, по классификации В. А. Крата. Классическими представителями подобных систем являются β Per, δ Lib, Z Her, RS Vul и др. В этих системах яркий компонент (более массивная звезда) обычно является звездой спектрального класса В или А, реже F, спутник же (менее массивная звезда) является субгигантом позднего спектрального класса G или K. Интересной особенностью рассматриваемого типа субгигантов является то, что большинство из них оказываются корпускулярно-неустойчивыми: в них наблюдается истечение газа, происходящее из атмосферы менее массивной звезды—субгиганта. Кроме этого, субгиганты, входящие в системы затменных переменных звезд, обладают большей светимостью по сравнению с одиночными субгигантами (т. е. массы их слишком малы для наблюдаемых у них светимостей). Это, по-видимому, связано с особым строением атмосферы этих объектов. Полная характеристика таких тесных пар дается в работе [2], в которой указывается на возможный путь происхождения и развития этих систем.

Эта статья является продолжением нашей предыдущей работы, посвященной изучению звезд—спутников в системах затменных переменных двойных звезд [1].

Здесь мы рассмотрим систему U Cer, U Sge и S Cnc и определим спектрофотометрическим путем ряд физических параметров их атмосфер. Главные компоненты систем U Cer, U Sge и S Cnc являются звездами спектрального класса В 8 V (для U Cer и U Sge) и В 9 V (для S Cnc), а спутники являются типичными субгигантами спектрального класса G5 III—IV, G5 IV и G8 IV соответственно.

С. М. АЗИМОВ

ЗВЕЗДЫ—СПУТНИКИ В СИСТЕМАХ ЗАТМЕННЫХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД

В развитии звездной астрономии и космогонии большую роль играет изучение тесных двойных звезд—затменных переменных. Изучение этих звездных систем, содержащих необычайное многообразие звезд различных типов, представляет исследователям большие возможности в отношении изучения физических характеристик звезд и ряда явлений, имеющих важное значение для космогонических проблем (протяженные атмосферы у звезд-спутников и т. д.).

Системы затменных переменных, в которых одним из компонентов (а в редких случаях и оба, например AR Iac) являются звезды субгигант, составляют системы с, по классификации В. А. Крата. Классическими представителями подобных систем являются β Per, δ Lib, Z Her, RS Vul и др. В этих системах яркий компонент (более массивная звезда) обычно является звездой спектрального класса В или А, реже F, спутник же (менее массивная звезда) является субгигантом позднего спектрального класса G или K. Интересной особенностью рассматриваемого типа субгигантов является то, что большинство из них оказываются корпускулярно-неустойчивыми: в них наблюдается истечение газа, происходящее из атмосферы менее массивной звезды—субгиганта. Кроме этого, субгиганты, входящие в системы затменных переменных звезд, обладают большей светимостью по сравнению с одиночными субгигантами (т. е. массы их слишком малы для наблюдаемых у них светимостей). Это, по-видимому, связано с особым строением атмосферы этих объектов. Полная характеристика таких тесных пар дается в работе [2], в которой указывается на возможный путь происхождения и развития этих систем.

Эта статья является продолжением нашей предыдущей работы, посвященной изучению звезд—спутников в системах затменных переменных двойных звезд [1].

Здесь мы рассмотрим систему U Cer, U Sge и S Cnc и определим спектрофотометрическим путем ряд физических параметров их атмосфер. Главные компоненты систем U Cer, U Sge и S Cnc являются звездами спектрального класса В 8 V (для U Cer и U Sge) и В 9 V (для S Cnc), а спутники являются типичными субгигантами спектрального класса G5 III—IV, G5 IV и G8 IV соответственно.

Блеск указанных систем меняется от 6^m90 до 10^m30 для U Сер, от 6^m48 до 9^m70 для U Sge и от 8^m60 до 11^m41 для S Спс. Все вышеперечисленные системы имеют полную фазу затмения в главном минимуме. Это позволяет изучить физическую природу атмосферы каждого компонента в отдельности.

§ 1. Наблюдения и обработка полученных спектрограмм

Материал наблюдения для U Сер, U Sge и S Спс получен нам осенью 1959 и 1960 г. и зимой 1961 г. в Абастуманской астрофизической обсерватории на 700 мм менисковом телескопе. Инструмент, методика наблюдения и обработка спектрограмм приводятся в работе [1]. Спектры фотографировались на пластинке Кодак О а О, Агфа Астро и Илфорд зенит (несенсибилизированные).

Для полной оценки физических условий в атмосферах компонентов систем U Сер, U Sge и S Спс, спектры были получены в разных фазах изменения блеска. Всего получено 58 спектрограмм из них 29 для U Сер и для U Sge и 18 для S Спс. Выдержка менялась от 5^m до 1 ч. Стандартные звезды и их координаты для каждой системы в отдельности приводятся в табл. 1.

U С е р				Т а б л и ц а 1	
Название	BD (1855 г.)		m_v	m_{ptg}	Sp.
	α	δ			
1. BD+81°30	00h52m29s+81°10',9		8m,7	8m,202	B 9 V
2. BD+81°34	00 59 35 +81 0,4		8,7	9,76	G 8 III
U S g e					
1. BD+19°3976	19h13m36s+19°27',5		8m,0	7m,919	A 0 V
2. BD+19°4000	19 17 28	19 50,1	6,5	6,301	B 9 V
3.	19 10 44	19 6,0		9,870	G 0 V
S C п с					
1. BD+19°2097	8h37m29s+19°34',3		8m,2	8m,830	A 7 V
2. BD+20°89	8 35 32 +19 19		9m,4	10m89	F 8 V

Звездные величины этих звезд определены нами привязкой к Плеядам с учетом атмосферного ослабления.

По полученным спектрограммам определены относительный и абсолютный спектрофотометрические градиенты, спектрофотометрическая температура и бальмеровский скачок. Найдены эквивалентные ширины водородных линий от H_β до H_{14} включительно для U Сер А (индексом А обозначена была яркая звезда, а В—спутник), а для U Sge и S Спс А от H_γ до H_{12} , а также H_γ к линии ионизованного U, λ 4227 Å нейтрального кальция и G полосы $\lambda\lambda$ 4300—4315 Å (в спектре U Сер В и S Спс В). Список полученных эквивалентных ширины для каждой системы приводится в табл. 2, где в первом и втором столбиках даются номера полученных спектрограмм и фаза изменения блеска в долях периода системы, а в следующих столбиках—линии поглощения и их эквивалентные ширины (W_λ).

Таблица 2

U Сер

№ пласт.	Фаза в долях периода	Эквивалентная ширина (W_λ), Å											
		H_β	H_γ	H_δ	$H + H_e$	H_8	H_9	H_{10}	H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	K (Cal)
1995 (I)	0,0014	—	1,45	2,53	7,87	2,01	3,45	2,92	—	—	—	—	5,56
1995 (II)	0,9962	—	1,60	1,35	13,48	—	—	—	—	—	—	—	10,76
2011 (I)	0,0170	—	1,52	2,70	17,47	—	—	—	—	—	—	—	16,08
2011 (II)	0,0201	—	2,50	2,84	12,10	—	—	—	—	—	—	—	13,48
2034 (I)	0,5874	13,67	8,80	9,43	10,73	7,50	6,60	5,30	4,16	3,48	1,89	0,854	—
2041 (I)	0,3829	—	8,87	10,52	13,44	10,35	9,05	7,65	5,96	—	—	—	—
2041 (II)	0,3834	—	9,78	9,97	12,37	10,95	—	—	—	—	—	—	—
2064	0,9728	5,0	6,09	7,05	8,48	7,13	5,40	4,80	4,42	2,34	1,45	—	1,70
2099 (I)	0,9818	6,30	5,53	5,51	5,64	—	—	—	3,05	1,94	1,50	—	4,27
2099 (II)	0,9795	—	6,19	5,97	5,17	5,24	4,87	4,20	—	—	—	—	2,13
2114	0,9824	—	7,00	7,82	7,60	—	—	—	—	—	—	—	3,13
1996 (I)	0,0170	—	—	—	15,96	—	—	—	—	—	—	—	15,03
1996 (II)	0,0201	—	—	—	15,67	—	—	—	—	—	—	—	17,00
2116	0,0067	—	—	—	15,96	—	—	—	—	—	—	—	17,05
2117 (I)	0,0148	—	2,32	2,48	13,20	—	—	—	—	—	—	—	13,72
2117 (II)	0,0192	—	—	—	14,67	—	—	—	—	—	—	—	17,12
2182 (I)	0,7277	8,55	9,30	10,27	12,50	12,43	11,72	7,70	5,83	—	—	—	—
2182 (II)	0,7288	8,14	8,94	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1388	0,0045	3,85	4,13	24,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1389	0,0110	1,47	7,94	25,72	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1935	0,0115	12,93	4,36	16,32	14,00	—	—	—	—	—	—	—	—
1937	0,0383	—	10,50	12,37	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2057	0,9950	1,73	2,04	13,13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2165 (I)	0,6752	13,39	13,20	14,65	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2165 (II)	0,6758	13,50	13,55	15,62	13,63	12,15	8,25	5,85	3,91	—	—	—	—
2074 (I)	0,3176	13,50	15,20	—	13,28	12,20	8,85	5,77	3,18	—	—	—	—
2074 (II)	0,3181	13,45	15,85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2074 (III)	0,3186	13,53	15,80	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2074	0,3186	13,60	14,10	12,13	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2019	0,4705	13,47	14,10	14,91	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2090 (I)	0,4710	13,47	13,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2090 (II)	0,5236	13,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Из этой таблицы видно, что эквивалентная ширина водородных линий с увеличением номера квантового числа сначала растет, а затем, достигнув максимального значения, медленно убывает. Такое поведение водородных линий объясняется эффектом Штарка. При увеличении номера линии в серии растет число расщепленных компонентов верхнего терма, следовательно, растет и ширина самой линии. Уменьшение же эквивалентной ширины с увеличением квантового числа n после указанного максимума есть результат того, что дальнейшее убывание силы осциллятора приводит уже к сильному умень-

Таблица 3

U Cep							
Sp №	Фаза	$\Delta\varphi$	φ	T_c	ΔD	D	m_{ptg}
2064	0 ^p .9728	$+0,070 \pm 0,06$	$0,870 \pm 0,06$	20000 ± 1000	$+0,017$	0,343	7 ^m .824
2099(I)	0,9725	$+0,095 \pm 0,05$	$0,840 \pm 0,05$	20000 ± 1000	$+0,017$	0,343	8,202
2099(II)	0,9818	$-0,028 \pm 0,06$	$0,968 \pm 0,06$	17000 ± 500	$-0,028$	0,332	8,357
2114(I)	0,9824	$-0,207 \pm 0,07$	$1,147 \pm 0,07$	13000 ± 500	$-0,028$	0,332	8,477
1853	0,9856	—	—	—	$+0,005$	0,365	8,727
2114(II)	0,9899	—	—	—	$-0,042$	0,318	8,727
2115	0,9953	—	—	—	$+0,066$	0,426	8,840
1935	0,9962	$+0,31 \pm 0,10$	$3,55 \pm 0,10$	4000 ± 200	$+0,056$	0,416	9,868
1935(II)	0,0014	$+1,105 \pm 0,05$	$2,745 \pm 0,05$	5300 ± 300	—	—	9,940
2116	0,0067	$+1,044 \pm 0,08$	$2,816 \pm 0,08$	5000 ± 300	—	—	10,135
1996	0,0109	$+0,081 \pm 0,06$	$3,780 \pm 0,06$	3800 ± 200	—	—	10,033
2117(I)	0,0148	$+0,070 \pm 0,05$	$3,790 \pm 0,05$	4000 ± 300	—	—	9,923
1996	0,0149	$+0,161 \pm 0,08$	$3,699 \pm 0,08$	4000 ± 200	—	—	9,595
2011(I)	0,0170	$+1,035 \pm 0,07$	$1,035 \pm 0,07$	500 ± 500	0,014	—	10,300
2117(II)	0,0192	$+1,025 \pm 0,10$	$2,835 \pm 0,10$	5000 ± 300	—	—	9,903
2011(II)	0,0201	$+0,514 \pm 0,06$	$3,346 \pm 0,06$	4300 ± 300	—	—	10,100
2041(I)	0,3829	$+0,140 \pm 0,09$	$0,762 \pm 0,09$	25000 ± 1000	—	—	7,187
2041(II)	0,3832	$+0,117 \pm 0,06$	$0,823 \pm 0,06$	20000 ± 1000	—	—	7,232
2034	0,5874	$+0,180 \pm 0,07$	$0,760 \pm 0,07$	25000 ± 1000	—	—	6,897

U Sge							
Sp №	Фаза	$\Delta\varphi$	φ	T_c	ΔD	D	m_{ptg}
1388	0 ^p .0045	$-0,108 \pm 0,161$	$2,668 \pm 0,161$	5500 ± 500	$+0,49$	0,109	9 ^m .707
1389	0,0110	$+0,405 \pm 0,140$	$2,155 \pm 0,140$	6500 ± 500	$-0,020$	0,042	9,422
1390	0,0172	$-0,325 \pm 0,097$	$1,325 \pm 0,097$	11000 ± 500	$+0,040$	0,510	8,282
1357	0,7856	—	—	—	$-0,001$	0,469	6,481
1399	0,2214	—	—	—	$-0,018$	0,452	6,781
1937	0,0383	$-0,028 \pm 0,117$	$1,028 \pm 0,117$	15500 ± 300	—	—	8,169
1935	0,0115	$-0,189 \pm 0,083$	$2,749 \pm 0,083$	5400 ± 200	—	—	9,680
2182(II)	0,7277	$+0,071 \pm 0,115$	$0,869 \pm 0,115$	20000 ± 500	$+0,017$	0,387	6,526
2182(III)	0,7288	$+0,046 \pm 0,02$	$0,894 \pm 0,02$	19000 ± 500	$+0,011$	0,371	6,501

S Cnc							
Sp №	Фаза	$\Delta\varphi$	φ	T_c	ΔD	D	m_{ptg}
2178	0 ^p .9943	$-1,01 \pm 0,12$	$3,12 \pm 0,12$	$4600 \pm$	—	—	11 ^m .410
2180	0,0076	$-0,58 \pm 0,08$	$2,69 \pm 0,08$	$5300 \pm$	—	—	11,390
2057	0,9950	$-0,65 \pm 0,07$	$2,76 \pm 0,07$	$5000 \pm$	—	—	11,410
2019(I)	0,4705	$+0,44 \pm 0,05$	$0,92 \pm 0,05$	$18000 \pm$	—	—	8,642
2090(I)	0,5236	$+0,45 \pm 0,07$	$0,91 \pm 0,07$	$18000 \pm$	—	—	8,655
2165(I)	0,6752	$+0,53 \pm 0,05$	$0,83 \pm 0,05$	$20000 \pm$	—	—	8,655
2165(II)	0,6758	$+0,63 \pm 0,15$	$0,73 \pm 0,15$	$25000 \pm$	—	—	8,630
2074(I)	0,3176	$0,22 \pm 0,05$	$1,14 \pm 0,05$	$13000 \pm$	—	—	6,755
2074(II)	0,3181	$+0,56 \pm 0,07$	$0,300 \pm 0,07$	$20000 \pm$	—	—	8,605
2019(II)	0,4705	$+0,55 \pm 0,07$	$0,81 \pm 0,07$	$20000 \pm$	—	—	8,615

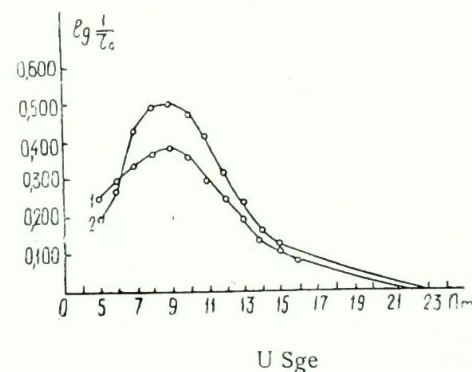
шению оптической толщи в центральных частях линии. Начиная с некоторого n , оптическая толща становится меньше единицы, т. е. линии образуются в оптически тонком слое. Таким образом, несмотря на продолжающееся (с ростом n) расширение крыльев линии, глуби-

ны их в центральных частях убывают, что ведет к убыванию и эквивалентной ширины.

§ 2. Фотометрирование непрерывного спектра звезд в системах U Cep, U Sge и S Cnc и оценка физических условий в их атмосферах

Непрерывные спектры указанных систем промерены нами в области $\lambda 4600-3600 \text{ \AA}$ и определены относительные и абсолютные спектрофотометрические градиенты, спектрофотометрическая температура и бальмеровский скачок для разных фаз изменения блеска этих систем. Спектрофотометрический градиент и бальмеровский скачок определены способом наименьших квадратов [1]. Полученные результаты приведены в табл. 3, в которой в первом и во втором столбцах даны номера полученных спектрограмм и фаза в долях периода данной системы, а в остальных помещены относительный и абсолютный градиенты, спектрофотометрическая температура, разница бальмеровского скачка исследуемой и стандартной звезд, величина скачка у исследуемой звезды и ее блеск, причем значение скачка системы S Cnc из-за слабости бальмеровского континуума в спектре этой системы не определено.

Результаты полученных скачков для U Cep и U Sge показывают, что в значении скачка этих объектов с изменением фазы затмения происходит противоположное изменение, т. е. когда начинается покрытие яркой звезды относительно холодным спутником, скачок сначала убывает (как это было отмечено нами в случае RV Per [1]), а потом, с приближением полной фазы затмения, происходит обратное явление (т. е. скачок увеличивается). Это явление можно объяснить следующим образом: когда центральные части горячей звезды данной системы постепенно закрываются более холодным спутником, излучение идет от частей, более близких к краю диска из оптически более тонкого слоя (т. е. из верхних, поверхностных слоев яркой звезды, причем при этом влияние излучения спутника мало), а это должно отражаться на значении скачка, потому что скачок данной серии характеризует излучение, выходящее из разных глубин фотосферы звезды (с приближением к краю звездного диска должно



U Sge
1— n_m 22,00, фаза 0^p.726;
2— n_m 23,4, фаза 0^p.037

Такое явление перед полным закрытием происходит в обратном направлении, а именно, скачок появляется снова. Это значит, что снова как бы возникает оптически толстый слой. Этот эффект может быть вследствие поглощения света главной звезды в хромосфере спутника. Перед полным закрытием горячей звезды ее более холодным спутником излучение главной звезды проходит через хромосферу последнего, а это ведет к образованию оптически толстого слоя (к появлению скачка). Это кроме того, должно влиять и на интенсивность водородных линий бальмеровской серии, так как число водородных атомов во втором квантовом состоянии в хромосфере спутника достаточно велико. Такое усиление водородных линий хорошо заметно в спектре U Cep при фазе 0^p.983 и U Sge при фазе 0^p.011 (табл. 2).

Таблица 4

U Cep

Фаза	Линия	$\lg \frac{P_e}{T} N_{02} H$		Пределы $\beta \lambda, \text{\AA}$	$\lg P_e$			$\lg N_{02}$		$\lg N_{02} H$		$\lg H$		N_e (электронная плотность), cm^{-3}		
		по эквивалентной ширине	по контуру		по n_m	по контуру	по кальции			по эквивалентной ширине	по контуру	по эквивалентной ширине	по контуру	по n_m	по контуру	по кальции
Sp B 8 V Max. Sp G 5 III-IV Min.	I_{γ}	15,389	15,538	6,64—13,28	1,623	2,609	—	8,127	17,331	17,530	9,254	9,403	$3,38 \times 10^{13}$	—	—	—
	I_{δ}	15,573	15,699	5,44—13,60	—	—	—	—	17,565	17,691	9,438	9,584	$2,30 \times 10^{14}$	—	—	—
	I_{δ}	14,367	14,891	3,32—6,64	—	0,085	0,557	7,551	17,983	18,507	10,432	10,956	$1,75 \times 10^{12}$	—	$5,20 \times 10^{12}$	$0,664 \times 10^{13}$
Sp B 9 V Max. Sp G 8 IV Min.	I_{γ}	15,692	16,175	9,96—33,20	1,759	2,762	—	8,656	17,503	17,986	8,847	9,370	$0,6 \times 10^{14}$	—	—	—
	I_{δ}	15,810	16,138	10,88—30,0	—	—	—	—	17,621	17,949	8,965	9,293	$3,54 \times 10^{14}$	—	—	—
	I_{δ}	14,272	14,777	3,32—7,5	—	0,832	0,65	9,196	17,128	17,638	7,932	8,437	10^{13}	—	$0,664 \times 10^{13}$	$0,664 \times 10^{13}$
Sp B 9 V Max. Sp G 5 IV Min.	I_{γ}	15,071	15,580	6,64—16,60	1,233	2,667	—	7,795	17,279	17,738	9,434	9,943	$1,58 \times 10^{13}$	—	—	—
	I_{δ}	15,232	15,757	5,44—19,04	—	—	—	—	17,390	17,905	9,595	10,120	$2,62 \times 10^{14}$	—	—	—
	I_{δ}	14,764	14,727	3,32—9,96	—	0,187	1,059	11,475	18,276	18,239	6,801	6,764	$2,23 \times 10^{12}$	—	$1,66 \times 10^{13}$	$1,66 \times 10^{13}$

Для полной оценки физических условий в атмосфере компонентов систем U Cep, U Sge и S Cnc нами были определены: число водородных атомов во втором квантовом состоянии, высота однородного поглощающего слоя (H), электронные концентрации и давление. Число водородных атомов и высота однородного поглощающего слоя в атмосфере компонентов U Cep, U Sge и S Cnc определены по эквивалентной и давлению определены тремя способами, описанными в работе [1]. При вычислении указанных параметров значение эффективной температуры для каждого компонента систем U Cep, U Sge и S Cnc было взято из работы Р. С. Кэннона и В. В. Моргана [3]. Значение квантового числа последней линии балмеровской серии, по которой определяются электронные плотность и давление, находится из центральных интенсивностей наблюдаемых линий. Пусть r_0 — центральная интенсивность линии, отнесенная к интенсивности непрерывного спектра. Построив кривую зависимость $\lg \frac{1}{r_0}$ от n_m по наблюдаемым линиям и экстраполируя ее до значения $\lg \frac{1}{r_0} = 0$, найдем квантовое число последней линии n_m . Например, из графической зависимости $\lg \frac{1}{r_0}$ от n_m

для U Sge A находим $n_m = 12$ и 23,4 при фазе 0,9726 и 0,9037 соответственно (рисунок). Таким же образом мы получим $n_m = 19,5$ и 18,5 для U Cep A и S Cnc A соответственно.

Эквивалентные ширины линий H и K ионизованного кальция исправлены за самопоглощение, а также учтено влияние H_e на H [1]. Результаты вычислений даются в табл. 4.

Выводы

Из анализа полученных результатов следует, что главные компоненты рассматриваемых систем являются нормальными звездами главной последовательности, а спутники находятся выше главной последовательности (на диаграмме—спектр—светимость). Из табл. 4 мы видим, что значения электронной концентрации и числа водородных атомов в атмосфере спутников U Sge и S Cnc очень большие, в то время как в атмосфере спутника U Cep эти величины на порядок меньше. Это наводит на мысль о том, что не все звезды субгиганты обладают притяженной атмосферой, т. е. среди них наблюдаются такие, в чьих атмосферах плотность газа достаточно велика. Значение высоты однородного слоя этих звезд также подтверждает наше предположение. Например, по табл. 4 высота получается $6,5 \times 10^6 \text{ см}$ и $1,8 \times 10^8 \text{ см}$ для U Sge B и S Cnc B соответственно, в то время как для U Cep B она равна $6 \times 10^{10} \text{ см}$. Такая большая плотность газа в атмосфере субгиганта была получена нами также для спутника RV Per [1].

Приношу глубокую благодарность проф. В. А. Крату за ценные советы и указания при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азимов С. М. Изв. АН Азерб. ССР, 1962, № 2.
2. Крат В. А. О развитии звезд. ч. II. Изв. ГАО, 1952, т. XXX, вып. 2, № 149.
3. Мустель Э. Р. Звездные атмосферы, 1960.

Тутулан гоша улдуз системләрində пәйкләр

ХҮЛАСӘ

Тутулан гоша улдуз системләринин өйрәнилмәси улдуз астрономия-ясынын вә космогониянын инкишафында бөйүк әһәмијјәт кәсб едир. Тутулан гоша улдузлары өйрәнмәклә онларын јаранмасы вә инкишафы һаггында гијмәтли мә'луматлар ала биләрик. Бу мә'луматлар космогониянын бир сыра мараглы мәсәләләринин һәлли үчүн сон дәрәчә зәруридир.

Тутулан гоша улдуз системләрində истәнилән физики хусусијјәтә малик улдуза тәсадүф едилір. Белә системләрин өйрәнилмәси улдузларын һансы јолла әмәлә кәлмәси вә инкишаф етмәси һаггында дүзкүн фикир јүрүтмәјә имкан верир.

Тутулан гоша улдузларын кениш тәснифаты В. А. Крат тәрәфиндән верилмишдир [2]. Бу тәснифата кәрә, спектрал гоша улдузлар 7 синфә *a, b, c, d, e, f*, вә *g* бөлүнүр.

Мүәјјән синфә дахил олан улдуз системини тәшкил едән һәр бир компонент улдуз инкишафынын мүәјјән мәрһәләсини тәшкил едир.

Тутулан гоша улдузлар, ади улдузлардан фәргли олараг, бир сыра физики кәмијјәтләрин (сыхлыг, температур вә с.) улдуз атмосферини һүндүрлүјүндән асылы олараг дәјишмәсини билаваситә өйрәнмәјә имкан верир.

Верилән мәгаләдә там тутулма фазасы олан ИСер, U Sge вә SCpe гоша улдуз системләринин спектрофотометрик тәдгиги верилір; бу системләри тәшкил едән улдузларын һәр бири үчүн улдуз атмосферини характеризә едән физики параметрләр тә'јин едилір (температур, сыхлыг вә с.). Көстәрилән системләр В. А. Крат тәснифатында „с“ синфинә дахилдир.

„С“ синфинә дахил олан системләрин мәркәзи улдузлары нисбәтән исти (В вә ја А, бә'зән исә F спектрал синфинә мәхсус), пәйкләри исә G вә ја К типли субнәһәнк улдуз олур.

Бу синфә мәхсус системләрдә пәйкләр чох заман корпускулјар дајаныгсыз олур. Бу сәбәбдән пәйк атмосферләрində газ ахыны мүшәһидә олунур. Бундан әлавә тутулан гоша улдуз системләринә дахил олан субнәһәнк пәйкләр адисубнәһәнкләрдән фәргли олараг чох бөйүк ишыглылыға маликдир. Бу нөв субнәһәнкләрин ишыглылыгы онларын күтләси илә һеч чүрә изаһ олуна билмир. Онларын күтләләринин күнәш күтләси тәртибиндә олмасына бахмајараг ишыглылыглары чох бөйүкдүр. Бу зиддијјәт күтлә-ишыглылыг асылылыгынын позулмасына кәтирир. Ишыглылыгын бөйүк олмасы бу нөв улдузларда атмосферин ади субнәһәнк-улдуз атмосферләрində фәргли олдуғуну көстәрир.

Бу нөв субнәһәнкләрдә атмосферин аномал гурулуша малик олмасы мүәллиф тәрәфиндән UСер, USge, SCnc вә RV Per системләринә дахил олан субнәһәнк компонентләрин (пәйкләрин) спектрофотометрик јолла өйрәнилмәсиндә алынән нәтичәләрин арашдырылмасы илә бир даһа тәсдиг олунур.

Һәмин системләрдә ујғун мәркәзи улдузлар исә спектр—ишыглылыг диаграмында баш ардычыллыға дахил олан, спектрал синифләри B8V(ИСерА, ИSgeА вә RVPegА үчүн) вә B9V(SCncА үчүн) олан ади улдузлардыр.

Пәйк атмосферләрində бөйүк электрон консентрасиясынын ($10^{13} - 10^{14} \text{ см}^{-3}$) мүшәһидә олунмасы көстәрир ки, бу нөв субнәһәнкләрдә

физики шәраит В типли улдуз атмосферләрində мөвчуд олдуғу ки-мидир.

Субнәһәнк пәйкләр үчүн алынән физики характеристикалар көстәрир ки, сојуг G вә К типли субнәһәнкләр чох күман ки, ади субнәһәнкләрә гәдәр олан инкишаф мәрһәләсиндәдир.

Гоша улдуз системләрində пәйкләрин бөйүк атмосфер сыхлыгына малик олмасы еһтимал ки, ахырынчы илә әлагәдардыр.

М. М. МУСТАФАЕВ

ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЖУЩЕГО ОРГАНА ФРЕЗ-БАРАБАНА ПОГРУЗЧИКА СИЛОСА НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

В механизации подготовки и раздачи кормов большое место занимает погрузка и выгрузка силосной массы из траншей и буртов.

Перспективы широкого использования погрузчиков силоса непрерывного действия заставляют заняться научным исследованием в этой области. С этой целью в 1958 г. в лаборатории электромеханизации погрузочно-разгрузочных и транспортных работ на животноводческих фермах Всесоюзного института электрификации сельского хозяйства (ВИЭСХ) разработана принципиальная схема машин непрерывного действия, предназначенных для загрузки силоса из наземных буртов, заглубленных и полузаглубленных траншей с пандусными въездами. Схемой организации выполнения технологического процесса предусматривается послойное срезание силоса в вертикальной плоскости и погрузка его на транспортные средства (тракторный прицеп, автомобиль или конную повозку). Общий вид опытного образца погрузчика силоса непрерывного действия показан на рис. 1.

Проведенные исследования существующих конструкций опытных образцов показывают, что они еще несовершенны. Наиболее существенным недостатком этой машины является ее большая энергоемкость, объясняющаяся тем, что на работу резания расходуется значительная часть энергии (P привода барабана ≈ 14 квт).

Для выяснения причин этого явления необходимо изучить процесс резания погрузчика непрерывного действия, т. е. выяснить ход процесса—определить усилия, возникающие на лезвии ножа, установить, отчего зависит затрачиваемая на резание работа и каким образом можно ее уменьшить.

Не вызывает никакого сомнения, что при огромном количестве силосуемых масс, перерабатываемых в Советском Союзе, даже небольшое снижение потребляемой мощности даст значительную экономию средств.

Выбор значения углов. Для нормальной работы ножей необходимо, чтобы подрезание ими силосной массы производилось резанием, в противном случае возникает так называемое обволакивание лезвия.

М. М. МУСТАФАЕВ

ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЖУЩЕГО ОРГАНА ФРЕЗ-БАРАБАНА ПОГРУЗЧИКА СИЛОСА НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

В механизации подготовки и раздачи кормов большое место занимает погрузка и выгрузка силосной массы из траншей и буртов.

Перспективы широкого использования погрузчиков силоса непрерывного действия заставляют заняться научным исследованием в этой области. С этой целью в 1958 г. в лаборатории электромеханизации погрузочно-разгрузочных и транспортных работ на животноводческих фермах Всесоюзного института электрификации сельского хозяйства (ВИЭСХ) разработана принципиальная схема машин непрерывного действия, предназначенных для погрузки силоса из наземных буртов, заглубленных и полуглубленных траншей с пандусными въездами. Схемой организации выполнения технологического процесса предусматривается послойное срезание силоса в вертикальной плоскости и погрузка его на транспортные средства (тракторный прицеп, автомобиль или конную повозку). Общий вид опытного образца погрузчика силоса непрерывного действия показан на рис. 1.

Проведенные исследования существующих конструкций опытных образцов показывают, что они еще несовершенны. Наиболее существенным недостатком этой машины является ее большая энергоемкость, объясняющаяся тем, что на работу резания расходуется значительная часть энергии (P привода барабана ≈ 14 квт).

Для выяснения причин этого явления необходимо изучить процесс резания погрузчика непрерывного действия, т. е. выяснить ход процесса—определить усилия, возникающие на лезвии ножа, установить, отчего зависит затрачиваемая на резание работа и каким образом можно ее уменьшить.

Не вызывает никакого сомнения, что при огромном количестве силосуемых масс, перерабатываемых в Советском Союзе, даже небольшое снижение потребляемой мощности даст значительную экономию средств.

Выбор значения углов. Для нормальной работы ножей необходимо, чтобы подрезание ими силосной массы производилось резанием, в противном случае возникает так называемое обволакивание лезвия.

Оно происходит в результате скопления вырванных лапой (боковыми гранями) из силосной массы стеблей, которые, оставаясь непрерывными и двигаясь вместе с лапой, вызывают ее выталкивание в обратном направлении вращения.

Предполагается, что основным фактором, определяющим наличие или отсутствие обволакивания, является значение угла скоса лезвия лапы γ , т. е. угла, образуемого линией лезвия с направлением вращения.

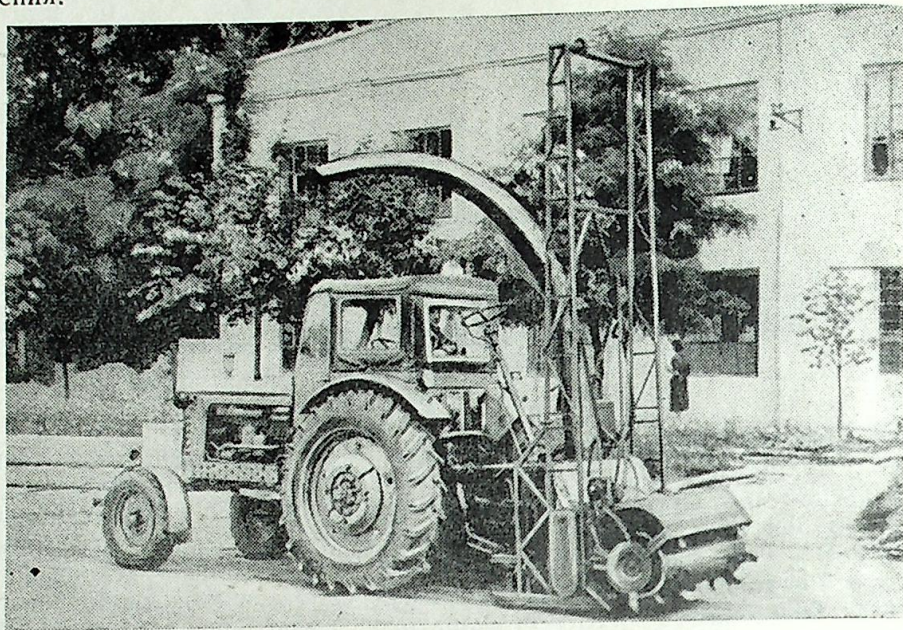


Рис. 1

Выбор угла γ может быть произведен на основании зависимости при

$$\gamma < (90 - \varphi) \quad (1)$$

имеет место подрезание силосной массы со скольжением при

$$\gamma > (90 - \varphi) \quad (2)$$

Такое отсутствует, где φ —угол трения силосной массы о лезвие лапы.

При движении лезвия лапы $m-m$ в силосной массе по направлению стрелки v (рис. 2) перерезываемая масса— O будет увлекаться лезвием и начнет перемещаться также по направлению v ; реакция силосной массы будет сила R , прямо противоположная перемещению v ; если, как это изображено на чертеже γ , $(90 - \varphi)$, сила R проходит внутри угла трения, то, согласно известному положению механики, скольжение массы на лезвии невозможно.

Аналогично подтверждается справедливость выражения (1) (рис. 3).

Предположим, что в начальный момент масса O будет увлечена лезвием в совместное движение в направлении v ; как и в предыдущем случае, сопротивление силосной массы R пройдет обратно v ; но по условию $\gamma < (90 - \varphi)$ или $\varphi < (90 - \gamma)$, поэтому сила пройдет вне угла трения, и, следовательно, перерезываемая масса должна начать скользить вдоль лезвия лапы.

С момента возникновения относительного движения массы (стебли) на лезвии его траекторией, очевидно, должно быть направление $O-a$, границы угла трения, так как лишь в этом случае возможно динамическое равновесие действующих сил.

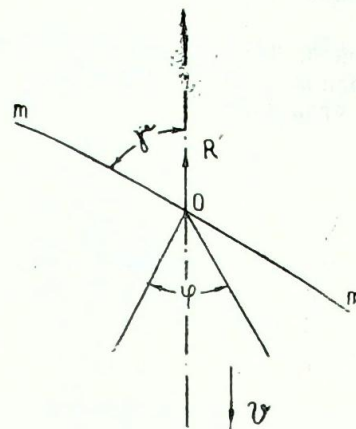


Рис. 2

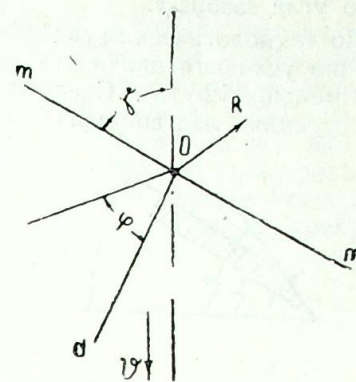


Рис. 3

Угол трения φ^* силосной массы по лезвию определяется опытным путем. $\varphi = 42 - 45^\circ$. Подставляя значение φ в выражение (1), находим γ или 2γ . При известном $\varphi = 42 - 45^\circ$ имеем: $\gamma < 48 - 45^\circ$ или $2\gamma < 90 - 96^\circ$. Применение малых углов раствора γ , которые обеспечили бы отсутствие обволакивания лезвия в любых условиях работы, невыгодно потому, что с уменьшением угла 2γ увеличивается пропуск неподрезанной лапами силосной массы.

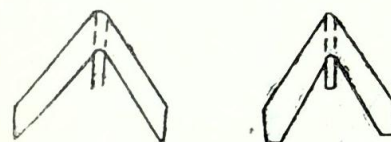


Рис. 4

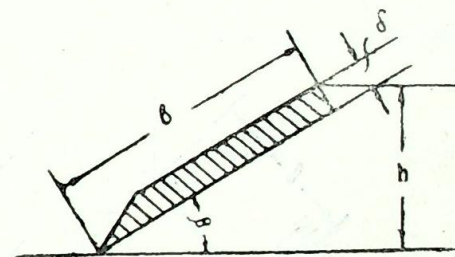


Рис. 5

Конец крыла должен иметь отрезок, параллельный направлению движения лапы; это необходимо для того, чтобы ширина захвата лапы не уменьшалась с износом лезвия.

На рис. 4 (а, в) изображены типичные очертания обреза крыла: h —высота подъема пласта силоса равна, примерно, $1/3$ глубины хода лап:

$$h = 0,3 \sim 0,4 \cdot a \quad (3)$$

$$h = b \cdot \sin \beta \quad (\text{рис. 5}) \quad \text{или} \quad b = \frac{(0,3 \sim 0,4) \cdot a}{\sin \beta}, \quad (4)$$

где b —ширина крыла лапы;

β —угол, образуемый плоскостью крыла лапы с дном борозды.

* Углы трения φ определялись движением силосной массы по гладкой металлической поверхности.

Заточка лезвия производится в соответствии с принятыми значениями углов крошения (рис. 6) и может быть верхней, нижней или комбинированной. Заточка лап не может быть сделана произвольно, она обуславливается, во-первых, необходимостью обеспечить лезвию достаточную прочность и, во-вторых, сохранением у лезвия соответствующего угла зазора ϵ .

По технологическим свойствам материала, идущего на изготовление лап, по условиям прочности угол заострения лезвия i не может быть взят меньше $12 \div 15^\circ$. Среднее значение угла зазора в существующих конструкциях лап составляет $\epsilon \geq 10^\circ$.

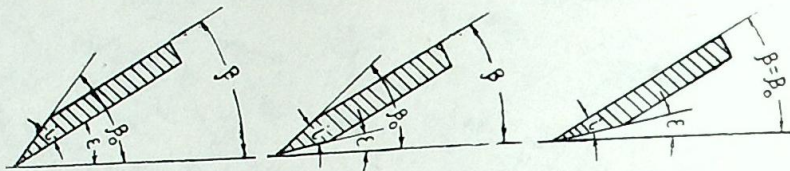


Рис. 6

а—верхняя заточка; б—комбинированная заточка; в—нижняя заточка.

Из чертежа (рис. 6) имеем зависимость $\beta_0 = i + \epsilon$. Подставляя в нее значения i и ϵ , находим:

$$\beta_{0\min} = i + \epsilon = 12 + 10 = 22^\circ.$$

Таким образом, тип заточки лезвия определяется соотношением значения углов β и β_0 ; для лап, имеющих $\beta < 15^\circ$, заточка должна быть верхней, при $15^\circ < \beta < 25^\circ$ — комбинированной и для $\beta \geq 25^\circ$ — нижней.

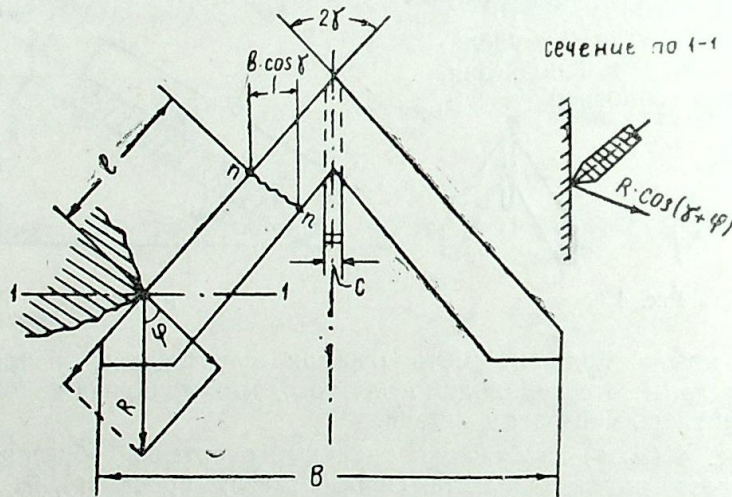


Рис. 7

Прочность лап. Выбор сечения лапы. Одним из наиболее распространенных видов деформации является изгиб и поломка крыла лапы в сечении $n-n$ (рис. 7). Сечение крыла может быть принято как прямоугольник с высотой b и толщиной δ ; неточность, возникающая из такого допущения, невелика (в действительности при наличии заточки сечение имеет более сложную форму) и может быть компенсирована введением в расчетные формулы уменьшенного на 3—4 мм

значения b . Ширина крыла b определяется технологическими соображениями согласно зависимости

$$b = \frac{R \cdot a}{\sin \beta}, \text{ где } R = \frac{h}{a}.$$

Таким образом, свободным размером, выбор которого производится из условий прочности лапы, является ее толщина. При возникновении сосредоточенной нагрузки на конце крыла лапы сечение $n-n$ будет работать на косой изгиб и кручение. Сила R может быть принята износе направление реакции R должно быть перпендикулярно реактивной поверхности (см. сечение 1—1 рис. 7). Изгиб крыла будет происходить от момента $M_{\text{изг.}} = R \cdot \cos \varphi \cdot l$, плоскость действия которого повернута относительно осей сечения крыла на угол β . Кручением и сечением от момента

$$M_{\text{кр}} = R \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} b \cdot \sin \beta$$

по малости возникающих при этом напряжений можно пренебречь. Плечо l находится из рис. 7:

$$l = \frac{1}{\sin \gamma} \left(\frac{B-c}{2} - b \cos \gamma \right) \quad (5)$$

Его значение при постоянных B , c и b — определяется величиной угла γ . Плечо l , а следовательно, и величина $M_{\text{изг.}}$ увеличиваются с уменьшением γ . При постоянных γ , c и b плечо l и момент $M_{\text{изг.}}$ растут пропорционально ширине захвата лапы B .

Суммарное напряжение при косом изгибе прямоугольного сечения [5] равно:

$$R_c = \frac{M_b \cdot \frac{\delta}{2}}{I_b} + \frac{M_\delta \cdot \frac{b}{2}}{I_\delta} = R \cdot \cos \varphi.$$

$$l \left(\frac{\frac{b}{2} \cdot \cos \beta}{I_b} + \frac{\frac{\delta}{2} \cdot \sin \beta}{I_\delta} \right) = M_{\text{изг.}} \left(\frac{1}{w_b} \cdot \cos \beta + \frac{1}{w_\delta} \cdot \sin \beta \right). \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что при постоянной величине сечения $b \times \delta$ и нагрузке $M_{\text{изг.}}$ величина суммарного напряжения определяется значением угла крошения β , т. е. $R_c = f(\beta)$.

Значения слагающих напряжений от изгиба в плоскостях, совпадающих с направлениями главных осей сечения R_b и R_δ , соответственно характеризуются членами:

$$\frac{1}{w_b} \cdot \cos \beta \text{ и } \frac{1}{w_\delta} \cdot \sin \beta.$$

Изменение R_b происходит по косинусоиду и R_δ по синусоиду (рис. 8). Значение $R_{c \max}$ может быть найдено дифференцированием выражения (6).

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{w_b} \cdot \cos \beta + \frac{1}{w_\delta} \cdot \sin \beta \right) = 0,$$

$$\frac{1}{w_b} \cdot \sin \beta = \frac{1}{w_\delta} \cdot \cos \beta,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_b}{w_\delta} = \frac{b}{\delta} \quad \text{и} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{\delta}.$$

Отношение $\frac{b}{\delta}$ для существующих конструкций лап составляет около 10, чему соответствует $\beta \approx 84^\circ$. Предельные значения β , применяющиеся в практике, не превосходят $45-50^\circ$, следовательно, возникновение $R_{c \max}$ при обычных расчетах не имеет места. Величины расчетных нагрузок, сосредоточенных, как в разобранным примере, или сплошных с изменением удельных давлений по закону треугольника, возникающих при работе лап на сильноуплотненных массах, остаются неизвестными.

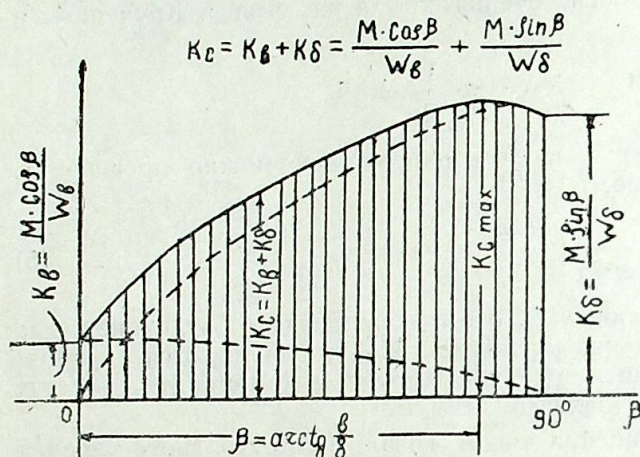


Рис. 8

величины предельных расчетных нагрузок. Выражение (6) может быть переписано следующим образом:

$$\frac{R_c}{\Omega \cdot l} = R_0, \quad (7)$$

$$\text{где} \quad R_0 = R \cdot \cos \varphi \quad \text{и} \quad \Omega = \left(\frac{\cos \beta}{w_b} + \frac{\sin \beta}{w_\delta} \right).$$

Полагая $R_c = \text{const}$ и подставляя в выражение (7) величины l и Ω для существующих конструкций, находим значение силы R_0 , которая при проектировании новых лап может быть принята за расчетную нагрузку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горячкин В. П. Собр. соч., т. II, III и V, Сельхозгиз, 1937.
2. Попов Ю. Ф. Геометрия режущей части инструментов, М., 1948.
3. Синеоков Г. Н. Рабочие органы культиваторов. Теория, конструкция и производство с.-х. машин, т. IV, Сельхозгиз, 1936.
4. Синеоков Г. Н. Сборник науч.-исслед. трудов ВИСХОМ. „Почвообрабатывающие орудия“, вып. 2, ОНТИ, 1937.
5. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов М., 1934.

М. М. Мустафаев

Фасиләсиз ишләјән силос јүкләјичи машинларын фрез-барабаны кәсичи органынын параметрләринин әсасландырылмасы

ХУЛАСӘ

Һејвандарлығда чох әмәк тәләб едән ишләрин механикләшдирилмәси мәсәләси ән актуал мәсәләләрдән биридир. О чүмләдән јемләрин һазырланмасы вә пайланмасынын механикләшдирилмәсиндә хәндәкләрдән вә силос тајаларындан силос күтләсинин доғранылыб нәглијјат вәситәләринә јүкләнмәси хүсүсән әсас јер тутур.

Бу сәһәдә бә’зи машинларын олмасына бахмајарағ онлар һазыркы тәләбаты өдәмир вә аз мәнсулдардыр. Бу мәғсәдлә Үмүмиттифағ Кәнд Тәсәррүфатыны Електрикләшдирмә Институту силос тајаларындан вә хәндәкләрдән силос күтләсинин доғрајыб нәглијјат вәситәләринә јүкләмәк үчүн фасиләсиз ишләјән силосјүкләјичи машин тәклиф етмишдир.

Апарылан тәчрүбә вә тәдғигат ишләри кәстәрир ки, һәммин машин иш заманы чох күч тәләб едир вә кәсичи органларын бә’зи параметрләринин конструктив һазырланмасы үзүндән иш просеси чәтинләшир вә мәнсулдарлығ азалыр (фрез-барабан дајаныр, кәсичи аләт сырадан чыхыр вә с.).

Буна көрә дә мәғаләдә кәсичи органларын бә’зи параметрләринин тәдғиги вә тә’јини мәсәләләриндән бәһс едилир. Һәмчинин мәғаләдә фрез-барабаны кәсичи органларынын әсас параметрләри олан γ , β , i вә с. бучағларынын тә’јини үсулу верилир ки, бу да кәләчәкдә һәммин машинларын тәкмилләшдирилмәсиндә вә һазырланмасында истифадә олуна биләр. Бундан башға, мәғаләдә кәсичи органларынын пәнчәләринин мөһкәмлији вә ен кәсијинин сечилмәси мәсәләси дә нәзәрдән кечирилир. Кәсичи органларын пәнчәләринин һазырланмасы үчүн бә’зи типик конструксиялар да тәклиф олунур.

Р. И. ТАЛЫШИНСКИЙ, Ф. А. БАЙРАМОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОФАЗНОГО КОНДЕНСАТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ КОНДИЦИОНЕРА «АЗЕРБАЙДЖАН»

Для привода компрессора кондиционера „Азербайджан“ применяется конденсаторный двигатель, состоящий из двух узлов: статора и ротора. Статор и ротор собираются в герметическом корпусе компрессора холодильного агрегата комнатного кондиционера.

Однофазный конденсаторный двигатель имеет на статоре две обмотки, сдвинутые в пространстве на 90 электрических градусов. Главная обмотка непосредственно включается в сеть. Для создания сдвига фаз по времени вспомогательная обмотка включается в сеть последовательно с конденсатором. Схемы замещения однофазных двигателей с двумя обмотками, сдвинутыми в пространстве на 90°, описаны у Ю. С. Чечега [1].

На рис. 1 показана принципиальная схема конденсаторного двигателя. Применяя метод симметричных составляющих для однофазной системы имеем:

напряжение фазы Γ (главная обмотка)

$$\dot{U}_{\Gamma} = \dot{U}_{\Gamma 1} + \dot{U}_{\Gamma 2} = \dot{I}_{\Gamma 1} \dot{z}_{\Gamma 1} + \dot{I}_{\Gamma 2} \dot{z}_{\Gamma 2}; \quad (1)$$

напряжение фазы B (вспомогательная обмотка)

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} = \dot{I}_{B1} \dot{z}_{B1} + \dot{I}_{B2} \dot{z}_{B2}. \quad (2)$$

Здесь

$z_{\Gamma 1}$ и $z_{\Gamma 2}$ —полные сопротивления прямой и обратной последовательностей по оси обмотки Γ (рис. 2, а, б);

z_{B1} и z_{B2} —то же по оси обмотки B (рис. 2, в, г).

На схемах замещения прямой и обратной последовательностей для главной и вспомогательной обмоток, показанных на рис. 2:

x_c —реактивное сопротивление конденсатора C ;

r_c —активное сопротивление конденсатора C ;

$x_{s\Gamma}$ и x_{sB} —индуктивные сопротивления рассеяния статорных обмоток Γ и B ;

Р. И. ТАЛЫШИНСКИЙ, Ф. А. БАЙРАМОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОФАЗНОГО КОНДЕНСАТОРНОГО ДВИГАТЕЛЯ КОНДИЦИОНЕРА «АЗЕРБАЙДЖАН»

Для привода компрессора кондиционера „Азербайджан“ применяется конденсаторный двигатель, состоящий из двух узлов: статора и ротора. Статор и ротор собираются в герметическом корпусе компрессора холодильного агрегата комнатного кондиционера.

Однофазный конденсаторный двигатель имеет на статоре две обмотки, сдвинутые в пространстве на 90 электрических градусов. Главная обмотка непосредственно включается в сеть. Для создания сдвига фаз по времени вспомогательная обмотка включается в сеть последовательно с конденсатором. Схемы замещения однофазных двигателей с двумя обмотками, сдвинутыми в пространстве на 90°, описаны у Ю. С. Чечева [1].

На рис. 1 показана принципиальная схема конденсаторного двигателя. Применяя метод симметричных составляющих для однофазной системы имеем:

напряжение фазы Γ (главная обмотка)

$$\dot{U}_{\Gamma} = \dot{U}_{\Gamma 1} + \dot{U}_{\Gamma 2} = I_{\Gamma 1} \dot{z}_{\Gamma 1} + I_{\Gamma 2} \dot{z}_{\Gamma 2}; \quad (1)$$

напряжение фазы B (вспомогательная обмотка)

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} = I_{B1} \dot{z}_{B1} + I_{B2} \dot{z}_{B2}. \quad (2)$$

Здесь

$z_{\Gamma 1}$ и $z_{\Gamma 2}$ —полные сопротивления прямой и обратной последовательностей по оси обмотки Γ (рис. 2, а, б);

z_{B1} и z_{B2} —то же по оси обмотки B (рис. 2, в, г).

На схемах замещения прямой и обратной последовательностей для главной и вспомогательной обмоток, показанных на рис. 2:

x_c —реактивное сопротивление конденсатора C ;

r_c —активное сопротивление конденсатора C ;

$x_{s\Gamma}$ и x_{sB} —индуктивные сопротивления рассеяния статорных обмоток Γ и B ;

$r_{s\Gamma}$ и r_{sB} —активные сопротивления статорных обмоток Γ и B ;
 $x_{R\Gamma}$ и $r_{R\Gamma}$ —индуктивное и активное сопротивления роторной обмотки, приведенные к числу фаз статора и числу витков статорной обмотки Γ ;

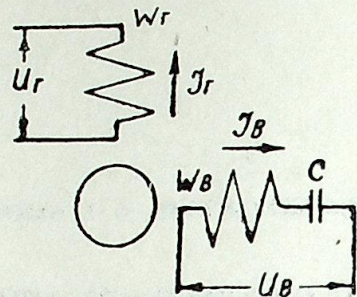


Рис. 1
 Принципиальная схема конденсаторного двигателя.

x_{RB} и r_{RB} —индуктивное и активное сопротивления роторной обмотки, приведенные к числу фаз статора и числу витков статорной обмотки B ;

$x_{m\Gamma}$ и $r_{m\Gamma}$ —индуктивное и активное сопротивления фаз Γ , соответствующие потоку воздушного зазора;

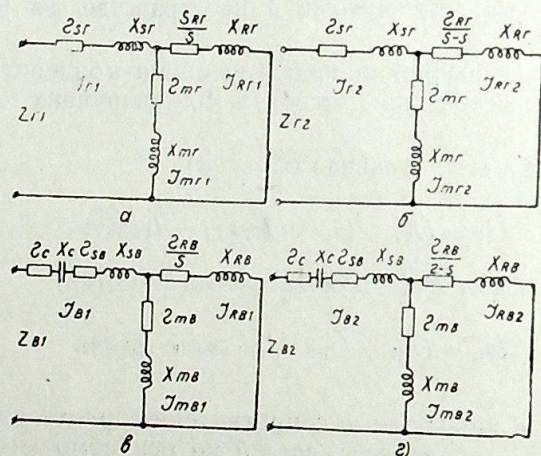


Рис. 2
 Схемы замещения конденсаторного двигателя.

x_{mB} и r_{mB} —то же фазы B ;

s —скольжение ротора по отношению к полю прямой последовательности;

$2-s$ —то же по отношению к полю обратной последовательности.

Сопротивления фазы B могут быть выражены через сопротивления фазы Γ и коэффициент трансформации K . Индуктивности обмоток, а следовательно, и их индуктивные сопротивления рассеяния зависят от числа витков, геометрических размеров и расположения в пазу.

При одинаковой конфигурации, если вспомогательная обмотка расположена в пазах выше, чем главная обмотка, то, как известно из опыта, а также из детальных расчетов [2]:

$$x_{sB} = \left(\frac{w_B}{w_\Gamma} \right)^2 a x_{s\Gamma} = k^2 a x_{s\Gamma}, \quad (3)$$

где a —коэффициент пропорциональности, изменяющийся в пределах 0,75—0,8.

Если главная обмотка находится в верхней части паза, а вспомогательная ниже, тогда в уравнение (3) следует ввести вместо a обратную ей величину.

Так как индуктивные сопротивления x_m и x_R пропорциональны эффективным числам витков, то

$$x_{RB} = k^2 x_{R\Gamma} \quad (4)$$

$$x_{mB} = k^2 x_{m\Gamma} \quad (5)$$

На рис. 3 показаны схемы замещения, где параллельное разветвление ротор—ветвь намагничивания заменено одним эквивалентным сопротивлением. Ниже приведены эквивалентные сопротивления для всех четырех случаев:

$$x'_{R\Gamma 1} = \frac{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{s} \right)^2 x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma} r_{m\Gamma}^2 + x_{m\Gamma} x_{R\Gamma} (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})}{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{s} + r_{m\Gamma} \right)^2 + (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})^2} \quad (6)$$

$$r'_{R\Gamma 1} = \frac{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{s} \right)^2 r_{m\Gamma} + \frac{r_{R\Gamma}}{s} (r_{m\Gamma}^2 + x_{m\Gamma}^2) + r_{m\Gamma} x_{R\Gamma}^2}{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{s} + r_{m\Gamma} \right)^2 + (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})^2} \quad (7)$$

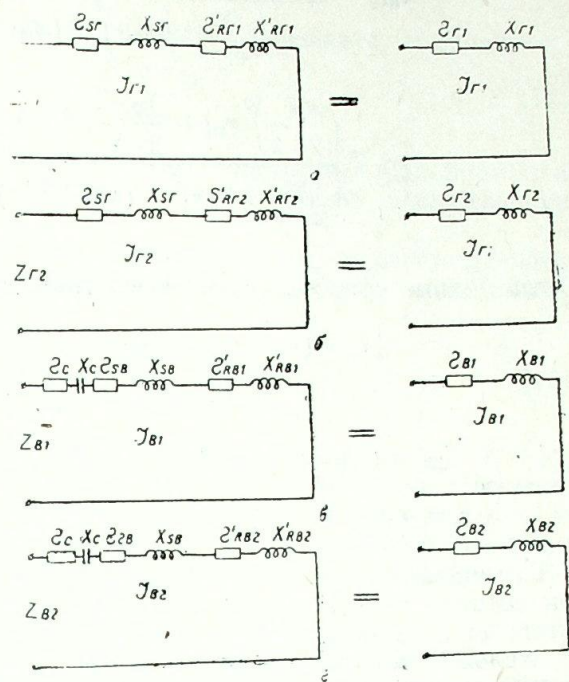


Рис. 3
 Преобразованные схемы замещения конденсаторного двигателя.

$$x'_{R\Gamma_2} = \frac{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{2-s}\right)^2 x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma} r_{m\Gamma}^2 + r_{m\Gamma} x_{R\Gamma} (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})}{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{2-s} + r_{m\Gamma}\right)^2 + (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})^2} \quad (8)$$

$$r'_{R\Gamma_2} = \frac{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{2-s}\right)^2 r_{m\Gamma} + \frac{r_{R\Gamma}}{2-s} (r_{m\Gamma}^2 + x_{m\Gamma}^2) + r_{m\Gamma} x_{R\Gamma}^2}{\left(\frac{r_{R\Gamma}}{2-s} + r_{m\Gamma}\right)^2 + (x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma})^2} \quad (9)$$

Тогда полные сопротивления схемы замещения

$$\dot{z}_{\Gamma_1} = (r_{s\Gamma} + r'_{R\Gamma_1}) + j(x_{s\Gamma} + x'_{R\Gamma_1}) = r_{\Gamma_1} + jx_{\Gamma_1} \quad (10)$$

$$\dot{z}_{\Gamma_2} = (r_{s\Gamma} + r'_{R\Gamma_2}) + j(x_{s\Gamma} + x'_{R\Gamma_2}) = r_{\Gamma_2} + jx_{\Gamma_2} \quad (11)$$

$$\dot{z}_{B_1} = (r_{sB} + r_c + r'_{RB_1}) + j(x_{sB} - x_c + x'_{RB_1}) = r_{B_1} + jx_{B_1} \quad (12)$$

$$\dot{z}_{B_2} = (r_{sB} + r_c + r'_{RB_2}) + j(x_{sB} - x_c + x'_{RB_2}) = r_{B_2} + jx_{B_2} \quad (13)$$

Оптимальным режимом конденсаторного двигателя является такой, при котором токи обратной последовательности равны нулю, т. е. отсутствует поле обратной последовательности. Токи в главной и вспомогательной обмотках сдвинуты на 90° , и приведенное значение тока во вспомогательной обмотке равно току в главной обмотке.

$$\dot{I}_B k = j \dot{I}_\Gamma \quad (14)$$

Очевидно, в этом случае результирующее поле будет чисто круговым.

Из схемы замещения на рис. 3 а и б видно, что в этом случае

$$\dot{I}_\Gamma = \dot{I}_{\Gamma_1} = \frac{\dot{U}}{\dot{z}_{\Gamma_1}} \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} = \frac{\dot{U}}{\dot{z}_{B_1}}$$

Подставив значения $\dot{I}_\Gamma$ и $\dot{I}_B$ в уравнение (14), получим:

$$j \frac{\dot{U}}{\dot{z}_{\Gamma_1}} = \frac{\dot{U}}{\dot{z}_{B_1}} k,$$

откуда

$$k \dot{z}_{\Gamma_1} = j \dot{z}_{B_1}$$

или учитывая, что

$$\dot{z}_{\Gamma_1} = r_{\Gamma_1} + jx_{\Gamma_1} \quad \text{и} \quad \dot{z}_{B_1} = r_{B_1} + jx_{B_1}$$

имеем

$$k(r_{\Gamma_1} + jx_{\Gamma_1}) = j(r_{B_1} + jx_{B_1})$$

Раскрывая скобки и приравнявая действительные и мнимые части, получаем:

$$kx_{\Gamma_1} = r_{B_1} \quad (15)$$

$$kr_{\Gamma_1} = -x_{B_1}. \quad (16)$$

Из уравнения (15) следует

$$k = \frac{r_{B_1}}{x_{\Gamma_1}}.$$

Или, подставив значения r_{B_1} и x_{Γ_1} из схемы замещения, получим

$$k = \frac{r_c + r_{sB} + r'_{RB_1}}{x_{s\Gamma_1} + x'_{R\Gamma_1}} \quad (17)$$

Это уравнение дает нам зависимость коэффициента трансформации K от параметров схемы замещения конденсаторного двигателя при круговом поле.

Подставляя в уравнение (16) значения x_{B_1} , r_{Γ_1} , соответствующие схемам замещения, определяем реактивное сопротивление конденсатора при круговом поле

$$x_c = x_{sB_1} + x'_{RB_1} + \frac{r_c + r_{sB} + r'_{RB_1}}{x_{s\Gamma_1} + x'_{R\Gamma_1}} (r_{s\Gamma_1} + r'_{R\Gamma_1}) \quad (18)$$

В уравнения (17) и (18) входят величины r'_{RB_1} , $r'_{R\Gamma_1}$, x'_{RB_1} и $x'_{R\Gamma_1}$, которые зависят от скольжения, т. е. зависят от величины нагрузки.

Так как эти величины значительно больше, чем r_c , r_{sB} и $r_{R\Gamma}$, то значения коэффициента трансформации и емкости, которые обеспечивают наличие чисто кругового поля, в сильной мере зависят от нагрузки двигателя.

Таким образом, для каждого значения нагрузки круговое поле может быть получено только при определенном значении k и x_c .

Параметры двигателя—первичное и вторичное активные сопротивления, первичное и вторичное реактивные сопротивления рассеяния, так же как и потери в железе и на трение—могут быть определены из опытов холостого хода и короткого замыкания. Реальный двигатель не имеет неизменных параметров, т. е. величины активного и реактивного сопротивлений зависят от величины частоты и тока. Первичное и вторичное сопротивления изменяются с изменением температуры, которая, в свою очередь, является функцией плотности тока, а также окружающей температуры. Поэтому при расчете важно брать те условия, которые бывают в условиях опыта.

Как было сказано выше, реактивное сопротивление рассеяния является функцией величины тока; по этой причине измерения реактивных сопротивлений при опыте короткого замыкания следует производить в основном при тех же значениях тока, что и при холостом ходе.

Из схем замещений (рис. 2 а, б) можно написать

$$\dot{U}_\Gamma = \dot{U}_{\Gamma_1} + \dot{U}_{\Gamma_2} = \dot{I}_{\Gamma_1} \dot{z}_{\Gamma_1} + \dot{I}_{\Gamma_2} \dot{z}_{\Gamma_2} \quad (1)$$

В случае чисто однофазного питания главной обмотки при холостом ходе ($s=0$)

$$\dot{I}_{\Gamma_{10}} = \dot{I}_{\Gamma_{20}}.$$

Тогда

$$\dot{U}_{\Gamma_0} = \dot{I}_{\Gamma_{10}} (\dot{z}_{\Gamma_{10}} + \dot{z}_{\Gamma_{20}}) = \frac{\dot{I}_{\Gamma_0}}{2} (\dot{z}_{\Gamma_{10}} + \dot{z}_{\Gamma_{20}}) = \frac{\dot{I}_{\Gamma_0}}{2} \dot{z}_{\Gamma_0}$$

или

$$\dot{z}_{\Gamma_0} = \frac{2\dot{U}_{\Gamma_0}}{\dot{I}_{\Gamma_0}} \quad (19)$$

Из схем замещений (рис. 2 а, б) имеем

$$\dot{z}_{\Gamma_0} = \left(2r_{\Gamma m} + r_{\Gamma r} + \frac{r_{R\Gamma}}{2}\right) + j(2x_{s\Gamma} + x_{m\Gamma} + x_{R\Gamma}). \quad (20)$$

В случае однофазного питания вспомогательной обмотки без конденсатора при холостом ходе также имеем

$$\dot{z}_{B_0} = \left(2r_{sB} + r_{mB} + \frac{r_{RB}}{2}\right) + j(2x_{sB} + x_{mB} + x_{RB}). \quad (21)$$

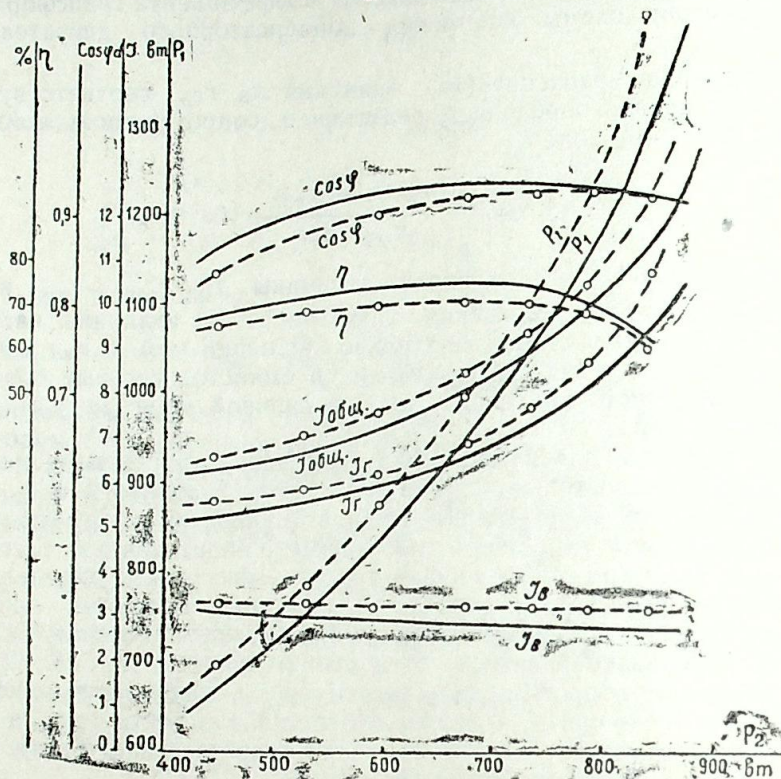


Рис. 4

Нагрузочные характеристики конденсаторного двигателя: — расчетные характеристики; --- опытные характеристики.

При опытах короткого замыкания из схем замещений (рис. 2) можно написать.

Для главной обмотки

$$\dot{z}_{\Gamma k} = \dot{z}_{\Gamma 2k} = \dot{z}_{\Gamma k} = (r_{s\Gamma} + r_{\Gamma r}) + j(x_{s\Gamma} + x_{\Gamma r}) \quad (22)$$

$$\dot{z}_{\Gamma k} = \frac{\dot{U}_{\Gamma k}}{I_{\Gamma k}}$$

Для вспомогательной обмотки

$$\dot{z}_{Bk} = \dot{z}_{B2k} = \dot{z}_{Bk} = (r_{sB} + r_{RB}) + j(x_{sB} + x_{RB}) \quad (23)$$

$$\dot{z}_{Bk} = \frac{\dot{U}_{Bk}}{I_{Bk}}$$

В уравнениях (20), (21), (22), (23), приравняв действительные и мнимые части и решая их с учетом уравнений (3) и (4), определяем $x_{s\Gamma}$, x_{sB} , $r_{m\Gamma}$, r_{mB} , $x_{m\Gamma}$, x_{mB} , $x_{R\Gamma}$, x_{RB} , $r_{R\Gamma}$, r_{RB} .

Параметры схем замещений конденсаторного двигателя кондиционера „Азербайджан“ ($U_n=127в$; $P_n=700 вт$; $\cos \varphi=0,93$; $\eta=70\%$; $2p=4$) с $K=1,8$, рассчитанные по вышеизложенному методу, приводятся ниже:

$r_{s\Gamma}=1,25 \text{ ом}$	$x_{s\Gamma}=2,4 \text{ ом}$	$r_{m\Gamma}=2,76 \text{ ом}$
$r_{R\Gamma}=1,62 \text{ ом}$	$x_{R\Gamma}=1,6 \text{ ом}$	$x_{m\Gamma}=24,25 \text{ ом}$
$r_{sB}=5,85 \text{ ом}$	$x_{sB}=6,0 \text{ ом}$	$r_{mB}=8,95 \text{ ом}$
$r_{RB}=5,7 \text{ ом}$	$x_{RB}=5,17 \text{ ом}$	$x_{mB}=77,77 \text{ ом}$

На рис. 4 представлены нагрузочные характеристики конденсаторного двигателя мощностью 700 вт с коэффициентом трансформации воздуха „Азербайджан“, полученные опытным путем и путем расчета по параметрам. Из сравнений кривых видно, что величины, полученные расчетным путем, хорошо согласуются с опытными. Значения к. п. д., полученные расчетным путем, несколько выше опытных. Такое отличие объясняется тем, что при определении к. п. д. опытным путем методом входа и выхода учитывались вентиляционные потери и потери на трения, имевшие место при стендовых испытаниях.

Учитывая, что с увеличением токов пути рассеяния насыщаются и реактансы, определяемые потоками рассеяния, соответствующие большим токам, имеют меньшие значения (см. рис. 5), расхождения между расчетными и опытными кривыми на рис. 4, соответствующие высоким значениям нагрузки, более значительны.

Проведенное исследование показало, что конденсаторный двигатель, служащий для привода холодильного агрегата кондиционера „Азербайджан“, работает в режиме, близком к оптимальному, при этом к. п. д. составляет 70% и $\cos \varphi$ около 0,93.

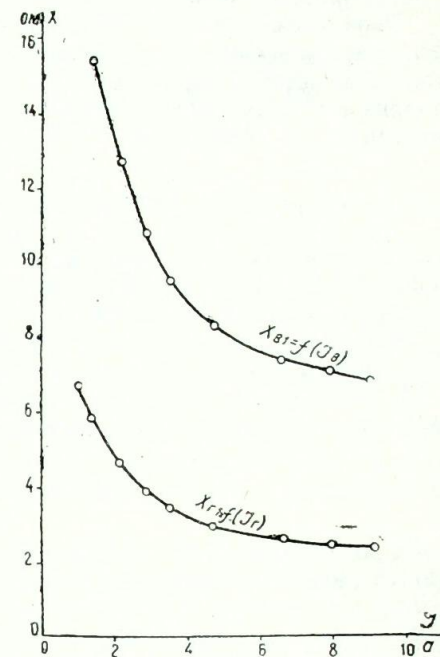


Рис. 5

Зависимость индуктивного сопротивления главной и вспомогательной обмоток от тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чечет Ю. С. Электрические микромашины автоматических устройств. Госэнергоиздат, 1957.
2. Suhr T. W. Ionard an Accurate Evaluation of Single-Phase induction Motor Constants, Transactions AIEE, 1952, part III, p. 221.

„Азәрбајчан“ типли кондиционерин бирфазлы конденсатор мұһәррикинин тәдиги

ХУЛАСӘ

Ишин әсас мәгсәди бирфазлы конденсатор мұһәррикләринин тәтбиг олунма вә јүк характеристикаларынын һесаблинама үсулларынын аращдырылмасындан ибарәтдир.

Бирфазлы конденсатор мұһәррикинин әвәз схемләриндәки көстәричиләрин тәјинолунма гадасы мұәјјән едилмиш вә бу гадә „Азәрбајчан“ типли кондиционердә сојудучу агрегатын интигалы олан конденсатор мұһәррикинин әвәз схемләри көстәричиләринин тәчрүбә јолу ла тәјининә тәтбиг едилмишдир.

Әвәз схемләри көстәричиләринин тәјининдә, мұһәррикин ејни конфигурацијалы әсас вә көмәкчи долағларынын статормуваларында мұхтәлиф вәзијәтдә јерләшмәсиндән асылы олараг дәјишән индуктив сәпәләнмә мұғавимәтини нәзәрә алан (3) ифадәсиндән истифадә едилмишдир:

$$x_{SB} = \left(\frac{W_B}{W_r} \right)^2 a x_{SG} = k^2 a x_{SG} \quad (3)$$

Јуванын үст һиссәсиндә јерләшән долағын индуктив сәпәләнмә мұғавимәти алт һиссәдә јерләшән долағын ујғун мұғавимәтиндән a әмсалы дәфә бөјүкдүр. a әмсалы 0,773 гәбул едилмишдир.

Мәгаләдә һәмчинин, конденсатор мұһәррикләриндә даирәви магнит саһәсинин алынмасы шәртләри мұәјјән едилмишдир.

1) даирәви магнит саһәси шәраитиндә трансформасија әмсалынын әвәз схемләринин көстәричиләриндән асылылығы:

$$k = \frac{r_c + r_{SB} + r'_{SBI}}{x_{SGI} + x'_{RGI}} \quad (17)$$

2) даирәви магнит саһәси шәраитиндә конденсаторун реактив мұғавимәтинин әвәз схемләринин көстәричиләриндән асылылығы:

$$x_c = x_{SBI} + x'_{RBI} + \frac{r_c + r_{SB} + r'_{RBI}}{x_{SGI} + x'_{RGI}} (r_{SGI} + r'_{RGI}) \quad (18)$$

Әвәз схемләринин көстәричиләринә әсасән һесаблинан јүк характеристикалары, (4) әјриләриндән көрүндүјү кими, тәчрүбәдән алынған әјриләрә олдугча мұвафиг кәлир.

Н. А. МАМЕД-ЗАДЕ

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАЗБИВКИ СТУПЕНЕЙ КАСКАДА ДЕРИВАЦИОННЫХ ГЭС НА ВОДОТОКАХ С УБЫВАЮЩИМИ К УСТЬЮ РАСХОДАМИ

Существующие методы проектирования каскада деривационных ГЭС в качестве исходных данных принимают водотоки с возрастающими от истока к устью расходами. Преобладающее число водотоков характеризуется именно возрастанием расходов вдоль них. Однако встречаются также их участки, когда расходы вдоль них все время падают. В качестве примера можно привести участки рек и ирригационных каналов, на всем протяжении которых происходит непрерывный забор воды на цели водоснабжения, ирригации и т. д.

Напорные характеристики участков таких водостоков не дают возможности разбить их на ступени каскада деривационных ГЭС существующими приемами [1, 3, 4], ввиду чего они требуют специального рассмотрения.

Приступая к обоснованию метода разбивки таких водотоков, предварительно отметим, что забираемый вышележащей ступенью расход должен быть меньше или равен расходу водотока в месте водозабора нижележащей ступени, так как разность расходов в точках забора воды в выше- и нижележащей ступенях уходит, как указывалось, на цели ирригации, водоснабжения и т. д.

Принимая равенство расхода вышележащей ступени расходу водотока в точке водозабора нижележащей ступени, суммарную мощность каскада из n ступеней можно записать в виде (см. рисунок):

$$\sum_{i=1}^n N_i = 9,81 \cdot \eta [H_1 \cdot Q_0 + (H_2 - H_1) Q_1 + \dots + (H_{n-1} - H_{n-2}) Q_{n-2} + (H_n - H_{n-1}) Q_{n-1}] \text{ квт.} \quad (1)$$

Считаем, что падение участка водотока задано ($H_n = \text{const}$), и расход в конце участка известен ($Q_0 = \text{const}$). Поскольку энергетические методы разбивки водотоков на ступени каскада деривационных ГЭС исходят из условия максимума суммарной мощности каскада, определим максимум выражения (1), представляющего функцию $n-1$ переменных. Получим следующую систему из $n-1$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{H_2 - H_1}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial H_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{H_3 - H_2}$$

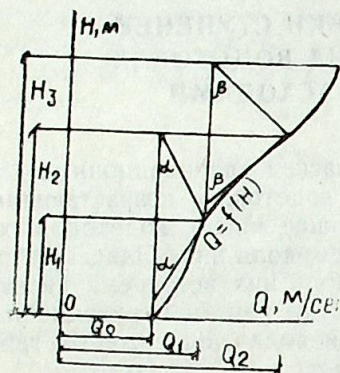
$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial Q_{n-2}}{\partial H_{n-2}} = \frac{Q_{n-2} - Q_{n-3}}{H_{n-1} - H_{n-2}}$$

$$\frac{\partial Q_{n-1}}{\partial H_{n-1}} = \frac{Q_{n-1} - Q_{n-2}}{H_n - H_{n-1}}$$

(2)

Решение системы (2) возможно как графически, так и аналитически. Покажем сначала графическое решение на примере разбивки водотока на три ступени. Графическое решение основано на „методе треугольников“ для функции многих переменных [1] и для функции одной переменной, предложенной в [2]. Согласно (2), система уравнений при разбивке водотока на три ступени имеет вид:



$$\frac{\partial Q_1}{\partial H_1} = \frac{Q_1 - Q_0}{H_2 - H_1}$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial H_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{H_3 - H_2}$$

(3)

Не останавливаясь на геометрической интерпретации левых и правых частей уравнений системы (2), которая хорошо дана в [1], мы покажем уже готовое графическое решение системы уравнений (3). На нашем рисунке решение системы (3) соответствует двум взаимно связанным равнобедренным треугольникам, боковые стороны которых (одна из них касательная) пересекаются с напорной характеристикой в точках деления ступеней.

Разбивка водотока на число ступеней, отличная от трех, ведется в соответствии с системой (2) и особых трудностей не представляет.

Ниже покажем решение поставленной задачи для некоторых конкретных видов напорной характеристики, имеющих вид:

$$Q = Q_0 + \alpha H^\gamma$$

(4)

При разбивке водотока на две ступени получим:

$$H_1 = H_0 \frac{\gamma}{1 + \gamma}$$

(5)

На три ступени:

$$H_1 = H_0 \frac{\gamma}{1 + \gamma - \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^\gamma} \cdot \frac{\gamma}{1 + \gamma}$$

(6)

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{1 + \gamma}{\gamma}$$

(7)

На четыре ступени:

$$H_1 = H_0 \frac{\gamma}{1 + \gamma - \left[\frac{\gamma}{1 + \gamma - \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^\gamma} \right]^\gamma}$$

(8)

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{1 + \gamma}{\gamma}$$

(9)

$$H_3 = H_2 \cdot \frac{1 + \gamma - \left(\frac{\gamma}{1 + \gamma} \right)^\gamma}{\gamma}$$

(10)

Не приводя решения для большего числа ступеней, укажем лишь, что сложность формул все время возрастает. Анализ полученных выражений показывает, что напоры ступеней зависят только от показателя степени γ и H_0 — полного падения всего участка и не зависят от Q_0 и α .

Следовательно, изменение обеспеченности расчетных расходов водотока не влияет на напоры ступеней, а только на расходы.

Для прямолинейной напорной характеристики ($\gamma=1$) положение точки деления по оси H m -й ступени при разбивке на n ступеней определяется по формуле:

$$H_m = \frac{m}{n} \cdot H_0$$

(11)

Напор этой ступени (считая снизу вверх):

$$H_m - H_{m-1} = \frac{m}{n} H_0 - \frac{m-1}{n} H_0 = \frac{H_0}{n}$$

(12)

Следовательно, напоры ступеней равны между собой. Мощность m -й ступени равна

$$N_m = 9,81 \cdot \gamma \cdot \frac{H_0}{n} \left(Q_0 + \alpha H_0 \frac{m}{n} \right),$$

(13)

при $n \geq 2$.

Суммарная мощность каскада из n ступеней равна

$$\sum_{i=1}^n N_i = \left(H_0 \cdot Q_0 + \frac{\alpha \cdot H_0^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \right) \cdot 9,81 \cdot \gamma.$$

(14)

Предельная суммарная мощность каскада (при $n \rightarrow \infty$) равна:

$$\sum N_{пред} = \left(H_0 \cdot Q_0 + \frac{\alpha H_0^2}{2} \right) \cdot 9,81 \cdot \gamma$$

(15)

Геометрически выражение (15) представляет площадь трапеции высотой H_0 , верхним основанием Q_0 и нижним основанием $(Q_0 + \alpha \cdot H_0)$.

Как известно, энергетические методы не дают решения оптимального числа ступеней, а лишь приемлемые варианты разбивки для дальнейшего технико-экономического обоснования выбора одного из них. Приведенный выше метод дает возможность составления подобных вариантов разбивки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамед-заде Н. А. Энергетический метод разбивки горных водотоков на ступени каскада деривационных ГЭС. Изв. АН Азерб ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1959, № 6.
2. Сейфулла Д. О. Анализ энергетического процесса гидроэлектрических станций по особым режимным точкам их характеристик. ГЭС, 1958, № 8.
3. Семенов В. В. Гидроэнергетические основы расчета схемы каскада ГЭС. Труды МЭИ, вып. 12, 1952.
3. Чилингарян Л. А. К вопросу разбивки горных водотоков на ступени каскада деривационных ГЭС. Изв. АН Арм. ССР, серия техн. наук, 1957, т. X, № 2.

Н. Ә. Мәммәдзаде

Сәрфи мәнсәбә доғру азалан су ахынларынын деривасија СЕС пиллэләринә бөлүнмәсинин енеркетик үсулу

ХҮЛАСӘ

Деривасија СЕС-нин лајинәси заманы чајларын сәрфи мәнбәдән мәнсәбә доғру артдығы мәлүмдур вә онларын әксәријјәти белә хүсусијјәт дашыјыр.

Лакин бә'зән чајларын елә һиссәләринә раст кәлмәк олур ки, онларын ахыны боју сәрфләр кет-кедә азалыр. Су тәһизаты, суварма вә с. мәгсәдләр үчүн истифадә едилән чај һиссәләри вә суварма каналлары буна мисал ола биләр.

Көстәрилән ишдә белә су ахынларынын деривасија СЕС пиллэләринә бөлүнмәсинин үмуми үсулу вә басгы характеристикаларынын мүәјјән шәкилләри үчүн хүсуси һәлли верилір. Бу үсулун тәтбиги пиллэләрә бөлүнмә вариантларыны тәртиб етмәјә, даһа сонра техники-игтисади мүгајисәсинә кечиб, онлардан әлвериләсини сечмәјә имкан јарадыр.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазијјат вә техника елмләри серијасы, 1962, № 4
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 4

И. Ф. КАСИМОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РЕЗЬБЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ СВИНЧИВАНИИ ЗАМКОВОЙ РЕЗЬБЫ, С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА

Проведенными ранее исследованиями [1] установлено, что заедание замковой резьбы возникает в результате глубинного вырывания металла с поверхностей витков резьбы.

Процесс глубинного вырывания можно представить как контактное схватывание трущихся поверхностей витков резьбы, приводящее к образованию прочных связей, которые при относительном скольжении могут разрушаться путем вырывания металла у одного из них. Контактное схватывание облегчается пластической деформацией поверхностных слоев, чему способствуют повышение температуры и возникающее удельное давление между поверхностями.

Повышение температуры в резьбовом соединении имеет место в буровой в процессе спуско-подъемных операций. При свинчивании и развинчивании буровых труб отмечаются случаи испарения смазки, а также появление цветов побежалости на резьбе.

Температура на поверхности витка резьбы ранее нами была определена для случая стационарного температурного режима по формуле, выведенной на основе метода, предложенного Боуденом и Ридлером [2]:

$$T - T_0 = \frac{\beta_1 P v}{2\pi l \sqrt{\lambda r \alpha \delta (R + R_0)}}, \quad (1)$$

где P — нагрузка, кг;

v — скорость скольжения, м/сек;

l — механический эквивалент тепла, кгм/ккал;

μ — коэффициент трения;

R, R_0, r — наружный, внутренний и средний радиусы резьбы, м;

δ — ширина участка соприкосновения витков резьбы, $\delta_{\max} = \delta_2$, здесь

δ_2 — рабочая высота витка, м;

λ — коэффициент теплопроводности, ккал/м ч $^{\circ}\text{C}$;

α — коэффициент теплоотдачи, ккал/м² ч $^{\circ}\text{C}$;

T — температура трущегося тела, град;

T_0 — температура окружающей среды, град.

Рассмотрим аналогичную задачу определения температуры на поверхности витка резьбы при нестационарном режиме, пользуясь методом, предложенным Б. П. Стоюхиным [3, 4].

Для точечных источников, равномерно распределенных по элементу поверхности ds , интенсивность тепла равна dq и за время dt создаст температуру $d\vartheta$.

Следовательно, по [3]:

$$d\vartheta = \frac{1}{2} \frac{dq}{c\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi F_0 t}} \quad (2)$$

где

$$dq = q ds dt = q r dr d\varphi dt \quad (\text{рис. 1}).$$

Температура всей контактирующей площади замковой резьбы в процессе относительного скольжения будет:

$$\vartheta(r, t) = \frac{1}{2} \frac{q}{\rho c \sqrt{\pi F_0}} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^t r dr d\varphi \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad (3)$$

после интегрирования получим:

$$\vartheta(r, t) = \frac{q(R^2 - R_0^2)}{\rho c} \sqrt{\frac{\pi t}{F_0}} \quad (4)$$

Заменяя в формуле (4) q его значением

$$q = \mu \frac{q_1 v}{l}, \quad (5)$$

где

$$q_1 = \frac{\kappa_1 P}{\pi l S \operatorname{tg} \varphi}, \quad (6)$$

получим

$$\vartheta(r, t) = \mu \frac{q_1 v}{l} (R^2 - R_0^2) \sqrt{\frac{\pi t}{\lambda c \rho}}, \quad (7)$$

где q_1 —среднее удельное давление на площади контакта, кг/см^2 ;
 κ_1 —коэффициент неравномерности распределения нагрузки по виткам резьбы; для замковой резьбы $\kappa_1 = 0,25$;
 P —вес буровой свечи, кг ;
 D —внутренний диаметр резьбы муфты, м ;
 S —шаг резьбы, м ;
 φ —угол уклона резьбы, град ;

n —число оборотов, совершаемых соединением; $n = \frac{2\delta}{\kappa S}$ здесь;

k —конусность резьбы;

c —удельная теплоемкость, $\text{ккал/кг } ^\circ\text{C}$;

ρ —плотность материала бурового замка, кг/см^3 ;

t —время, сек .

Анализируя структуру формул (1) и (7), можно прийти к заключению, что на повышение температуры в большей степени влияет изменение нагрузки и скорости, чем изменение физических параметров материала—удельной теплоемкости, теплопроводности, теплоотдачи и плотности (c, λ, α, ρ), так как первые из них входят в формулы (1) и (7) в первой степени, а вторые всего лишь в степени $1/2$.

Из формул (1) и (7) видно, что такие физические параметры, как теплопроводность, удельная теплоемкость, теплоотдача и плотность материала являются равнозначными по своему влиянию на температуру. Увеличение этих параметров взаимодействующих тел соответствует снижению температуры. Из формул (1) и (7) следует, что материалы с большой теплопроводностью $\lambda \rightarrow \infty$ могут не иметь температурных всплесков, и что если контактирующие поверхности состоят из разных материалов, то температурная вспышка возникает ранее или только у того материала, у которого теплопроводность меньше. Этим и можно объяснить уменьшение контактного схватывания трущихся поверхностей замковой резьбы, которые имеют металлические покрытия (оцинковка, омеднение).

По формулам (1) и (7) определим температуру, возникающую на поверхностях витка резьбы в процессе свинчивания ниппеля с муфтой бурового замка 3III-178.

Расчет произведен для первого, наиболее нагруженного витка муфты [2].

$P = 250 \text{ кг}$, $v = 0,44 \text{ м/сек}$, $\alpha = 30 \text{ ккал/м}^2 \text{ ч } ^\circ\text{C}$, $\lambda = 27 \text{ ккал/м ч } ^\circ\text{C}$, $\mu = 0,3$, $R_0 = 0,0693 \text{ м}$, $\beta = 0,5$, $I = 427 \text{ кгм/ккал}$, $c = 0,0116 \text{ ккал/кг } ^\circ\text{C}$.

На рис. 2 приведены кривые изменения температуры на поверхности витка резьбы, полученные путем расчета по формулам (1)—кривая 1 и (7)—кривая 2, с использованием приведенных данных.

Как видно из рис. 2, в начале свинчивания на поверхности может возникнуть значительная температура, величина которой резко уменьшается после первого оборота. Так как максимальная температура по обеим формулам получается почти одного порядка, то определение температуры на поверхности замковой резьбы можно произвести без учета нестационарности температурного режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сароян А. Е., Касимов И. Ф. АНХ, 1959, № 3.
2. Сароян А. Е., Касимов И. Ф., Расулов Р. А. „Нефть и газ“, № 1 1961.
3. Стоюхин Б. П. „Машиностроение и приборостроение“, 1958, № 4.
4. Стоюхин Б. П. „Машиностроение и приборостроение“, 1959, № 1.

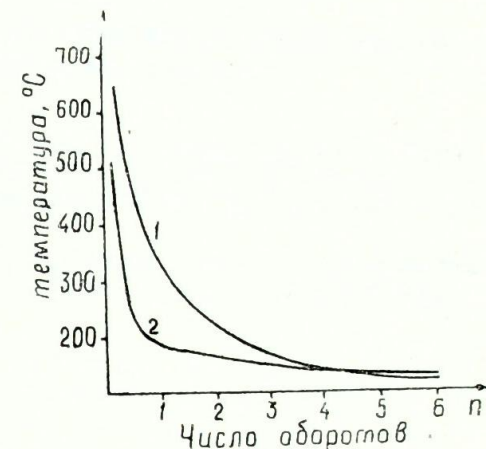


Рис. 2

Газма шамы гыфыл јивинин сәтһиндә јаранан температурун гејри-стационар режимдә тәјјини

ХУЛАСӘ

Мәгаләдә газма шамынын гыфыл јивини буругда бағладыгда јивин сәтһиндә јаранан температуру гејри-стационар режимдә тәјјин етмәк үчүн функционал асылылыг верилир.

Стационар вә гејри-стационар режимләрдә апарылан һесаблама-лар максимал температурун тәҗрибән ејни олдуғуну көстәрмишдир.

А. А. АББАСОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ ВЫТЕСНЕНИИ НЕФТИ ГОРЯЧИМ АГЕНТОМ ИЗ ПЛАСТА

Задача распределения температуры при вытеснении нефти горячим агентом из пласта решена нами ранее при частных случаях, когда пренебрегается наличие температурного поля в окружающих пласт породах [1, 2].

Процесс нагревания изотропного нефтяного пласта и окружающих его пород при плоско-радиальном течении горячего агента описывается следующими уравнениями:

$$c_1 \rho_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{v}{m} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right), \quad \begin{pmatrix} 0 \leq r \leq R_r, \\ 0 \leq z \leq h \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right), \quad \begin{pmatrix} 0 \leq r \leq R_r, \\ h \leq z \leq z_r \end{pmatrix} \quad (2)$$

Начальные и граничные условия сформулируем так:

$$T_1(r, z, 0) = T_2(r, z, 0) = T_0 = \text{const} \quad (3)$$

$$T_1(0, z, t) = T_n = \text{const}; \quad T_2(r, z, t) = \infty \quad (4)$$

$$T_1(R_r, z, t) = T_2(R_r, z_1, t) = T_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1(r, 0, t)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$T_1(r, h, t) = T_2(r, h, t); \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1(r, h, t)}{\partial z} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(r, h, t)}{\partial z} \quad (7)$$

$$T_2(r, z_r, t) = T_0, \quad (8)$$

где T_i — температура в текущей точке;

λ_i, c_i, ρ_i — соответственно теплопроводность, теплоемкость и плотность;

$i=1, 2$. Индекс 1 соответствует величинам, характеризующим нефтяной пласт, а 2—окружающую среду;

T_n —температура нагнетаемого агента;

T_0 —начальная температура пласта и окружающих пород;

v —скорость фильтрации по радиальному направлению;

m —пористость нефтяного пласта;

R_r, z_r —координаты границы распространения температурного поля по направлению r и z .

Легко видеть, что уравнения (1)—(2) и граничные условия (3)—(8) записаны в предположении наличия осевой и горизонтальной симметрии, причем ось симметрии z совпадает с осью нагнетательной скважины, а начало системы координат выбрано на оси z в середине нефтяного пласта.

Введем безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \frac{T_i - T_0}{T_n - T_0}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad x_r = \frac{R_r}{R}; \quad y = \frac{z}{R}; \quad y_r = \frac{z_r}{R}; \\ a &= \frac{h}{R}; \quad \lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad n = \frac{P_e}{2} = \frac{q c_1 \rho_1}{8 \pi h m \lambda_1}; \quad \tau = \frac{\lambda_1 t}{c_1 \rho_1 R^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где P_e —параметр Пекле;

τ —параметр Фурье;

R —расстояние между нагнетательной и эксплуатационной скважинами;

$q = \text{const}$ —расход нагнетаемого агента.

Подставив (9) в (1)—(8) и пренебрегая для упрощения членом $\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau}$, получим:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{1-2n}{x} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\begin{aligned} 0 \leq x \leq x_r \\ 0 \leq y \leq a \end{aligned} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\begin{aligned} 0 \leq x \leq x_r \\ a \leq y \leq y_r \end{aligned} \right) \quad (11)$$

$$\theta_1(x, y, 0) = \theta_2(x, y, 0) = 0 \quad (12)$$

$$\theta_1(0, y, \tau) = 1; \quad \theta_2(x, y, \tau) \neq \infty \quad (13)$$

$$\theta_1(x_r, y, \tau) = \theta_2(x_r, y, \tau) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_1(x, a, \tau)}{\partial y} = 0$$

$$\theta_1(x, a, \tau) = \theta_2(x, a, \tau); \quad \lambda \frac{\partial \theta_1(x, a, \tau)}{\partial y} = \frac{\partial \theta_2(x, a, \tau)}{\partial y} \quad (15)$$

$$\theta_2(x, y_r, \tau) = 0. \quad (17)$$

Применим для решения уравнений (10) и (11) при граничных условиях (12)—(17) приближенный метод—метод осреднения. При этом принимая плавность температуры, заменим $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2}$ в уравнениях (10) и (11) значением, средним по сечению:

$$f_1(y) = \frac{2}{x_r^2} \int_0^{x_r} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} x dx \quad (18)$$

$$f_2(y) = \frac{2}{x_r^2} \int_0^{x_r} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} x dx \quad (19)$$

Тогда решение приближенных уравнений с учетом граничных условий будет иметь вид:

$$\theta_1 = 1 - \frac{x^{2n}}{x_r^{2n}} + \frac{f_1(y)}{4(1-n)} \left[x_r^{2(1-n)} x^{2n} - x^2 \right] \quad (20)$$

$$\theta_2 = \frac{f_2(y)}{4} (x_r^2 - x^2) \quad (21)$$

Подставляя значение $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2}$ из (20) и (21), соответственно в (18) и (19), получим:

$$f_1(y) = C_1 e^{k_1 y} + C_2 e^{-k_1 y} \quad (22)$$

$$f_2(y) = C_3 e^{k_2 y} + C_4 e^{-k_2 y}, \quad (23)$$

где

$$k_1 = \frac{2\sqrt{2(1+n)}}{x_r}; \quad k_2 = \frac{2\sqrt{2}}{x_r}$$

Из условий (15) и (17) получим:

$$C_1 = C_2; \quad C_4 = -e^{2k_2 y_r} \cdot C_3.$$

Тогда

$$\theta_1 = 1 - \frac{x^{2n}}{x_r^{2n}} + \frac{e^{k_1 y} + e^{-k_1 y}}{4(1-n)} \left[x_r^{2(1-n)} x^{2n} - x^2 \right] C_1 \quad (24)$$

$$\theta_2 = \frac{e^{k_2 y} - e^{(2y_r - y)k_2}}{4} (x_r^2 - x^2) C_3 \quad (25)$$

В этих решениях остались еще неизвестными обе произвольные постоянные C_1 и C_3 . Для определения их исходим из граничного условия (16). Подставив в него (20) и (21), получим:

$$1 - \frac{x^{2n}}{x_r^{2n}} + \frac{e^{k_1 a} + e^{-k_1 a}}{4(1-n)} \left[x_r^{2(1-n)} x^{2n} - x^2 \right] C_1 = \frac{e^{k_2 a} - e^{(2y_r - a)k_2}}{4} (x_r^2 - x^2) C_3 \quad (26)$$

$$\lambda \frac{k_1 (e^{k_1 a} - e^{-k_1 a})}{4(1-n)} \left[x_r^{2(1-n)} x^{2n} - x^2 \right] C_1 = \frac{k_2 [e^{k_2 a} + e^{(2y_r - a)k_2}]}{4} (x_r^2 - x^2) C_3 \quad (27)$$

Определяем C_1 и C_3 из (26) и (27) на основании известного аналитического метода—определения неизвестной постоянной под условием, что среднее квадратическое отклонение будет минимум [см., например, 3]. При этом принимаем, что

$$y_r = a + A(x - x_r), \quad (28)$$

где A — неизвестная постоянная, подлежащая определению. Таким образом, для определения C_1 и C_3 , получим:

$$C_1 = \frac{M_1 M_3 - M_2 M_4}{M_3^2 - M_2 M_5}; \quad C_3 = \frac{M_1 M_5 - M_3 M_4}{M_3^2 - M_2 M_5}, \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{x_r^2}{2} p_{11} - \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r}{p} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right] p_{12} - \frac{x_r^4}{4} p_{13} + \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r^3}{p} - \frac{3x_r^2}{p^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{6x_r}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right) + \frac{6}{p^4} \right] p_{14} - \frac{x_r^{1+n}}{1+n} p_{15} + \left\{ e^{px_r} \left[\frac{x_r^n}{p} - \frac{nx_r^{n-1}}{p^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n(n-1)x_r^{n-2}}{p^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n! x_r}{p^n} + (-1)^n \frac{n!}{p^{1+n}} \right] - \frac{(-1)^n n!}{p^{1+n}} \right\} p_{16} + \\ &\quad + \frac{x_r^{3+n}}{3+n} p_{17} - \left\{ e^{px_r} \left[\frac{x_r^{n+2}}{p} - \frac{(n+2)x_r^{1+n}}{p^2} + \frac{(n+2)(n+1)x_r^n}{p^3} - \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{n+1} \frac{(n+2)! x_r}{p^{2+n}} + (-1)^{n+2} \frac{(n+2)!}{p^{3+n}} \right] - (-1)^{n+2} \frac{(n+2)!}{p^{3+n}} \right\} p_{18}; \\ M_2 &= \frac{x_r^2}{2} p_{21} - \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r}{p} - \frac{1}{p^2} \right) + \frac{1}{p^2} \right] p_{22} + \left[e^{2px_r} \left(\frac{x_r}{2p} - \frac{1}{4p^2} \right) + \frac{1}{4p^2} \right] p_{23} - \\ &\quad - \frac{x_r^4}{4} p_{24} + \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r^3}{p} - \frac{3x_r^2}{p^2} + \frac{6x_r}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right) + \frac{6}{p^4} \right] p_{25} - \left[e^{2px_r} \left(\frac{x_r^3}{2p} - \frac{3x_r^2}{4p^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3x_r}{4p^3} - \frac{3}{8p^4} \right) + \frac{3}{8p^4} \right] p_{26} + \frac{x_r^6}{6} p_{27} - \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r^5}{p} - \frac{5x_r^4}{p^2} + \frac{20x_r^3}{p^3} - \frac{60x_r^2}{p^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{120x_r}{p^5} - \frac{120}{p^6} \right) + \frac{120}{p^6} \right] p_{28} + \left[e^{2px_r} \left(\frac{x_r^5}{2p} - \frac{5x_r^4}{4p^2} + \frac{5x_r^3}{2p^3} - \frac{15x_r^2}{4p^4} + \frac{15x_r}{4p^5} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{15}{8p^6} \right) + \frac{15}{8p^6} \right] p_{29}; \\ M_3 &= \frac{x_r^4}{4} p_{31} - \frac{x_r^{1+n}}{1+n} p_{32} + \left\{ e^{px_r} \left[\frac{x_r^n}{p} - \frac{nx_r^{n-1}}{p^2} + \frac{n(n-1)x_r^{n-2}}{p^3} - \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{n! x_r}{p^n} + (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}} \right] - (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}} \right\} p_{33} - \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r^3}{p} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3x_r^2}{p^2} + \frac{6x_r}{p^3} - \frac{6}{p^4} \right) + \frac{6}{p^4} \right] p_{34} + \frac{x_r^{3+n}}{3+n} p_{35} - \frac{x_r^6}{6} p_{36} - \left\{ e^{px_r} \left[\frac{x_r^{n+2}}{p} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(n+2)x_r^{n+1}}{p^2} + \frac{(n+2)(n+1)x_r^n}{p^3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{(n+2)! x_r}{p^{n+2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{n+2} \frac{(n+2)!}{p^{n+3}} \right] - (-1)^{n+2} \frac{(n+2)!}{p^{n+3}} \right\} p_{37} + \left[e^{px_r} \left(\frac{x_r^5}{p} - \frac{5x_r^4}{p^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{20x_r^3}{p^3} - \frac{60x_r^2}{p^4} + \frac{120x_r}{p^5} - \frac{120}{p^6} \right) + \frac{120}{p^6} \right] p_{38}; \end{aligned}$$

$$M_4 = \frac{x_r^{1+n}}{1+n} p_{41} - \frac{x_r^4}{4} p_{42} - \frac{x_r^{2n}}{2n} p_{43} + \frac{x_r^{3+n}}{3+n} p_{44};$$

$$M_5 = \frac{x_r^{3+n}}{3+n} p_{51} - \frac{x_r^{2n}}{2n} p_{52} - \frac{x_r^6}{6} p_{53}; \quad p = 2AK_2;$$

$$p_{11} = \frac{x_r^2(1+k_2)e^{k_2a}}{4}; \quad p_{12} = \frac{x_r^2(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{4};$$

$$p_{13} = \frac{(1+k_2)e^{k_2a}}{4}; \quad p_{14} = \frac{(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{4};$$

$$p_{15} = \frac{x_r^{3-n}(1+k_2)e^{k_2a}}{4}; \quad p_{16} = \frac{x_r^{3-n}(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{4};$$

$$p_{17} = \frac{x_r^{1-n}(1+k_2)e^{k_2a}}{4}; \quad p_{18} = \frac{x_r^{1-n}(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{4};$$

$$p_{21} = \frac{x_r^4(1+k_2)^2 e^{2k_2a}}{16}; \quad p_{22} = \frac{x_r^4(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-Ax_r)}}{8};$$

$$p_{23} = \frac{x_r^4(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-2Ax_r)}}{16}; \quad p_{24} = \frac{x_r^2(1+k_2)^2 e^{2k_2a}}{8};$$

$$p_{25} = \frac{x_r^2(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-Ax_r)}}{4}; \quad p_{26} = \frac{x_r^2(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-2Ax_r)}}{8};$$

$$p_{27} = \frac{(1+k_2)^2 e^{2k_2a}}{16}; \quad p_{28} = \frac{(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-Ax_r)}}{8};$$

$$p_{29} = \frac{(1-k_2)^2 e^{2k_2(a-2Ax_r)}}{16};$$

$$p_{31} = \frac{x_r^2(1+k_2)}{8(3-n)} p_{01}; \quad p_{32} = \frac{x_r^{5-n}(1+k_2)}{8(3-n)} p_{01};$$

$$p_{33} = \frac{x_r^{5-n}(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{8(3-n)} p_{02}; \quad p_{34} = \frac{x_r^2(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{8(3-n)} p_{02};$$

$$p_{35} = \frac{x_r^{3-n}(1+k_2)}{8(3-n)} p_{01}; \quad p_{36} = \frac{1+k_2}{8(3-n)} p_{01};$$

$$p_{37} = \frac{x_r^{n-1}(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{8(3-n)} p_{02}; \quad p_{38} = \frac{(1-k_2)e^{k_2(a-2Ax_r)}}{8(3-n)} p_{02};$$

$$p_{41} = \frac{x_r^{3-n}}{2(3-n)} p_{02}; \quad p_{42} = \frac{1}{2(3-n)} p_{02}; \quad p_{43} = \frac{x_r^{2(2-n)}}{2(3-n)} p_{02};$$

$$p_{44} = \frac{x_r^{1-n}}{2(3-n)} p_{02}; \quad p_{51} = \frac{x_r^{3-n}}{2(3-n)^2} p_{03}; \quad p_{52} = \frac{x_r^{2(3-n)}}{4(3-n)^2} p_{03};$$

$$p_{53} = \frac{1}{4(3-n)^2} p_{03};$$

$$p_{01} = (1+\lambda k_1) e^{a(k_1+k_2)} + (1-\lambda k_1) e^{a(k_2-k_1)};$$

$$p_{02} = (1 + \lambda k_1) e^{ak_1} + (1 - \lambda k_1) e^{-ak_1};$$

$$p_{03} = (1 + \lambda k_1)^2 e^{2ak_1} + 2(1 - \lambda^2 k_1^2) + (1 - \lambda k_1)^2 e^{-2ak_1}$$

Перейдем к определению $x_r(\tau)$ и A . Для этого составим уравнение баланса тейла, вносимого горячим агентом в пласт:

$$2T_n a v_1 n \tau = \int_0^a \int_0^{x_r} \Delta T_1 x dx dy + \frac{v_2}{m} \int_a^{y_r} \int_0^{x_r} \Delta T_2 x dx dy \quad (30)$$

$$\varphi_1 = - \frac{1}{v_2} \int_0^{\tau} \varphi_2 d\tau, \quad (31)$$

где

$$\varphi_1 = \int_a^{y_r} \int_0^{x_r} \Delta T_2 x dx dy; \quad \varphi_2 = \int_0^{x_r} \left. \frac{\partial \Delta T_1}{\partial y} \right|_{y=a} x dx; \quad v_1 = \frac{c_{mn} \rho_{mn}}{c_1 \rho_1};$$

$$v_2 = \frac{c_2 \rho_2}{c_1 \rho_1}; \quad c_{mn}, \rho_{mn} - \text{теплоемкость и плотность теплоносителя.}$$

Выражение (31) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно x_r , решение которого принципиально можно найти, однако для применения в практических расчетах оно будет неприемлемым. Поэтому для решения уравнения (31) применимо предположение, сделанное в статье [2].

Таким образом, при принятых допущениях и после некоторых преобразований из (30) и (31) получаем уравнения для определения x_r и A :

$$\frac{2T_n a v_1 n \tau}{\Delta T_n} = \frac{a(n-1)x_r^2}{2(1+n)} + \frac{x_r^4(e^{k_1 a} - e^{-k_1 a})}{8(1+n)k_1} C_1 + \frac{D}{m} \quad (32)$$

$$D = \frac{k_1 x_r^4 (e^{-k_1 a} - e^{k_1 a})}{16(1+n)} C_1, \quad (33)$$

где

$$D = \frac{v_2 C_3}{4k_2} \left\{ \frac{4x_r^2}{p} \left[e^{k_2 a} \left(x_r - \frac{2}{p} \right) + \frac{2e^{k_2(a-Ax_r)}}{p} \right] - \frac{x_r^2}{p} \left[e^{k_2 a} \left(x_r - \frac{1}{p} \right) + \frac{e^{k_2(a-2Ax_r)}}{p} \right] - \frac{x_r^4}{4} e^{k_2 a} - \frac{4}{p} \left[e^{k_2 a} \left(x_r^3 - \frac{6x_r^2}{p} + \frac{24x_r}{p^2} - \frac{48}{p^3} \right) + \frac{48e^{k_2(a-Ax_r)}}{p^3} \right] + \frac{1}{p} \left[e^{k_2 a} \left(x_r^3 - \frac{3x_r^2}{p} + \frac{6x_r}{p^2} - \frac{6}{p^3} \right) + \frac{48e^{k_2(a-2Ax_r)}}{p^3} \right] \right\}.$$

Зная x_r и A , можно вычислить u_r , а следовательно, θ_1 и θ_2 , чем и заканчиваем решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов А. А. Распределение температуры при вытеснении нефти горячими жидкостями из пласта. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук, 1961, № 2.
2. Аббасов А. А., Кисель В. А. К вопросу распределения температуры при вытеснении нефти горячим агентом из пласта. Научные записки УкрНИИпроекта, вып. 4, 1961.
3. Лейбензон Л. С. Собр. трудов, т. 3, Изд-во АН СССР, 1955.

А. Э. Аббасов

Лайдан нефтин исти акент илэ сыхышдырылмасы заманы температурун пайланмасы

ХҮЛАСӘ

Лайдан нефтин исти акент илэ сыхышдырылмасы заманы температурун пайланмасына даир бир чох мәсәләләр һәлл едилмишдир. Бурада исә һәмин мәсәләләрден фәргли олараг нефт лајыны әһатә едән лајда да температурун јайылмасы нәзәрә алыныр.

Хүсуси һал олараг истилик ахынынын диференсиал тәнликләриндә температурларын замана көрә дәјишмәсини нәзәрә алан һәлләри сыфыр көтүрүлмүшдүр. Мәсәлә орталашдырма үсулу илэ һәлл едиләрәк нефтли лајы әһатә едән сүхур гатында лајын галынлығы үзрә температурун јайылма сәрһәддини көстәрән функцијанын шәкли габагчадан сечилмишдир.

Температурун радиал истигамәтдә јайылма сәрһәддини вә гәбул олунмуш функцијаја дахил олан намә'лум әмсалы тапмаг үчүн истилик балансындан истифадә едилир ки, бунунла да мәсәләнин һәлли битмиш олур.

М. Т. АБАСОВ

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНОЙ НЕФТЕНАСЫЩЕННОСТИ НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАЗРАБОТКИ ГАЗОНЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В [1] задача разработки газонефтяных залежей при наличии связи их с законтурной водяной областью для простоты рассматривалась при условии, когда вытеснение газированной нефти водой происходит по поршневой схеме.

Теоретическим исследованиям процесса вытеснения газированной нефти водой посвящен ряд работ [2, 3, 5, 7—10, 14—16 и др.].

В работах [3, 5, 7, 8, 14] показано, что при поддержании начальных пластовых давлений (на некотором расстоянии от первоначального положения контура нефтеносности) основное время эксплуатации залежи газированная жидкость, вытесняемая краевой водой, ведет себя как несжимаемая. При этом начальное пластовое давление залежи может быть выше или равным давлению насыщения. Задача вытеснения газированной нефти водой решалась при этом с учетом реальных свойств пластовых жидкостей, неполноты вытеснения нефти и двухфазного течения, а также при упругом режиме законтурной водяной области.

В работе [10] показано, что и при снижении пластового давления к началу заводнения ниже давления насыщения примерно на 20% и при малом изменении давления по протяженности газированная жидкость ведет себя как несжимаемая.

В работе [17] дается метод расчета нефтеотдачи при вытеснении газированной нефти водой. Рассматривается задача для случая нулевой вязкости газа и показывается, что при обычных значениях отношения вязкостей газа и нефти погрешность, возникающая вследствие того, что вязкость газа отлична от нуля, оказывается весьма незначительной [16]. При возрастающем или постоянном пластовом давлении и при вытеснении газированной нефти водой область, в которую внедрилась вода, отделяет от газированной нефти быстро расширяющуюся область, в которой находится нефть и почти неподвижный газ. Граница ее интенсивно продвигается и вскоре вытеснение газированной нефти сменяется вытеснением однородной жидкости в присутствии почти неподвижного газа. Тогда в целом рассматриваемое трехкомпонентное течение можно с достаточным приближением представить

М. Т. АБАСОВ

ВЛИЯНИЕ ОСТАТОЧНОЙ НЕФТЕНАСЫЩЕННОСТИ НА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ РАЗРАБОТКИ ГАЗОНЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

В [1] задача разработки газонефтяных залежей при наличии связи их с законтурной водяной областью для простоты рассматривалась при условии, когда вытеснение газированной нефти водой происходит по поршневой схеме.

Теоретическим исследованиям процесса вытеснения газированной нефти водой посвящен ряд работ [2, 3, 5, 7—10, 14—16 и др.].

В работах [3, 5, 7, 8, 14] показано, что при поддержании начальных пластовых давлений (на некотором расстоянии от первоначального положения контура нефтеносности) основное время эксплуатации залежи газированная жидкость, вытесняемая краевой водой, ведет себя как несжимаемая. При этом начальное пластовое давление залежи может быть выше или равным давлению насыщения. Задача вытеснения газированной нефти водой решалась при этом с учетом реальных свойств пластовых жидкостей, неполноты вытеснения нефти и двухфазного течения, а также при упругом режиме законтурной водяной области.

В работе [10] показано, что и при снижении пластового давления к началу заводнения ниже давления насыщения примерно на 20% и при малом изменении давления по протяженности газированная жидкость ведет себя как несжимаемая.

В работе [17] дается метод расчета нефтеотдачи при вытеснении газированной нефти водой. Рассматривается задача для случая нулевой вязкости газа и показывается, что при обычных значениях отношения вязкостей газа и нефти погрешность, возникающая вследствие того, что вязкость газа отлична от нуля, оказывается весьма незначительной [16]. При возрастающем или постоянном пластовом давлении и при вытеснении газированной нефти водой область, в которую внедрилась вода, отделяет от газированной нефти быстро расширяющуюся область, в которой находится нефть и почти неподвижный газ. Граница ее интенсивно продвигается и вскоре вытеснение газированной нефти сменяется вытеснением однородной жидкости в присутствии почти неподвижного газа. Тогда в целом рассматриваемое трехкомпонентное течение можно с достаточным приближением представить

как два двухкомпонентных, разделенных областью однокомпонентного [16].

Вопросы фильтрации двухкомпонентных несжимаемых и нерастворимых жидкостей рассматривались в работах [6, 12, 18, 20].

Экспериментальному изучению процесса вытеснения газированной нефти водой посвящены работы [4, 10, 19, 24—26]. В [4, 19, 24—26] изучались в основном вопросы нефтеотдачи и механизм движения.

Подробный анализ этих исследований произведен в [10, 21]. Основным недостатком работ [19, 24—26], как указано в [10], является либо вообще несоблюдение условий динамического подобия [19, 24, 25], либо, как в [26], был произвольно отброшен один из критериев подобия, а именно:

$\frac{\sigma}{k \text{ grad } P}$. В этих же работах не рассматривался

вопрос о влиянии способа создания начальной газонасыщенности на показатели процесса. В работах [24—26] начальная газонасыщенность создавалась путем продувки образца внешним газом, а в [19] — выделением газа из раствора. Между тем в работе [18] показано, что только пренебрежение указанным выше критерием подобия может привести к значительным погрешностям в определении нефтеотдачи при вытеснении нефти водой, а в исследованиях [10, 29] установлено влияние способа создания газонасыщенности на характеристики течения газированной жидкости и на вытеснение газированной нефти водой. Правда, сами авторы утверждают, что до сих пор остается еще невыясненным, какой из способов создания газонасыщенности более соответствует пластовым условиям.

Наиболее полно, с учетом указанных выше недостатков в условиях динамического подобия, экспериментальное исследование процесса вытеснения газированной нефти водой изучалось в [10]. Проверка результатов опыта [10, 25, 26] с указанными выше теоретическими исследованиями [5, 14, 16] показала их приемлемое совпадение. Проведенные в [30] визуальные наблюдения также подтвердили основные особенности механизма вытеснения газированной нефти водой.

Выявленные особенности позволили уточнить расчеты по вытеснению газированной нефти водой при сохранении постоянным значения текущего пластового давления к началу заводнения ($P_{\text{тек}} \leq P_{\text{нас}}$) на основании известной теории двухкомпонентного течения, что и было сделано в [5, 10].

В [10] были проведены экспериментальные исследования по определению остаточной газонасыщенности, по-существу, при вытеснении газированной жидкости нефтью при давлениях ниже давления насыщения, а также — фазовых проницаемостей водо-нефтяных смесей при наличии неподвижного газа $p_r = 0; 0,084; 0,16$. Указанные опыты подтвердили ранее установленную в [23, 25, 26] опытах зависимость величины остаточной газонасыщенности от ее начального содержания, а также выявили зависимость ее от способа создания газонасыщенности. Некоторые данные о фазовых проницаемостях при фильтрации трех компонентных систем и водо-нефтяных смесей в присутствии неподвижного свободного газа имеются и в работах [27, 22, 32]. Проведенные в [10] опыты установили значительное влияние на фазовые проницаемости наличия в пласте неподвижного свободного газа.

Как указывалось выше, задача о вытеснении газированной нефти водой рассматривалась в [14, 8] вначале с учетом неполноты вытеснения нефти водой, а затем и двухфазного течения в водо-нефтяной области [5, 10]. Физическая картина вытеснения в обоих подходах разная. Различие это становится особенно существенным, если вытес-

нение происходит при возрастающем или постоянном пластовом давлении.

Механизм процесса вытеснения газированной нефти водой при пропитания находится на достаточно давления в залежи (когда контуртеносности, при низких значениях большого удалении от контура нефтяной области и т. д.) еще недостаточно проницаемости законтурной водячае на первых порах можно исходно хорошо изучен. В этом случае вытеснения нефти водой [8].

Согласно вышеизложенному, двухфазное течение в водной области можно приближенно учитывать как при продолжающемся падении пластового давления, так и при сохранении его величины постоянным по времени.

Ниже приводятся расчетные формулы для первого случая. При решении задачи принимается, что в промежуточной зоне остается непроницаемая нефтенасыщенность $\rho_{\text{осм}}$, снижающая фазовую держивается постоянное давление P_0 , равное первоначальному давлению в залежи; в зоне газонефтяного контакта вытеснение газированной нефти газом газовой шапки или же, наоборот, вытеснение газа и газа) происходит вначале поршневым способом, а затем по мере проникновения газа из одной области в другую.

Выпишем балансовые уравнения для газа, нефти и воды:

$$q_{\text{гр}} P_{\text{ам}} = - \frac{d}{dt} (V_{\text{г}} P); \quad (1)$$

$$q_{\text{гн}} \cdot P_{\text{ам}} = - \frac{d}{dt} [(1 - \rho) V_{\text{н}} P + \alpha V_{\text{н}} \rho P] + \alpha \rho_{\text{осм}} P \frac{d(V_{\text{н}} + V_{\text{г}})}{dt}; \quad (2)$$

$$q_{\text{н}} = - \frac{d}{dt} (\rho V_{\text{н}}) + \rho_{\text{осм}} \frac{d(V_{\text{н}} + V_{\text{г}})}{dt}; \quad (3)$$

$$q_{\text{в}} = (1 - \rho_{\text{осм}}) \frac{\partial V_{\text{в}}}{\partial t}, \quad (4)$$

где $q_{\text{гр}}$, $q_{\text{гн}}$ — отборы газа, соответственно, из газовой и нефтяной областей залежи в единицу времени;

$q_{\text{н}}$ — отбор нефти в единицу времени;

$q_{\text{в}}$ — количество воды, поступающее из контурной области в единицу времени;

$P_{\text{ам}}$ — атмосферное давление;

P — текущее среднее пластовое давление;

ρ — средняя нефтенасыщенность нефтяной части залежи;

α — коэффициент растворимости газа;

$V_{\text{г}}$, $V_{\text{н}}$ — текущие объемы пор, соответственно, газовой и нефтяной областей залежи;

t — время разработки.

С другой стороны, для воды имеем:

$$q_{\text{в}} = A(V_{\text{в}})(P_0 - P), \quad (5)$$

где P_0 — начальное пластовое давление;

$A(V_{\text{в}})$ — переменный коэффициент, зависящий от геометрии пласта и гидропроводности.

Выражение для газового фактора запишется:

$$\Gamma = \frac{q_{гн}}{q_n} = \frac{P}{P_{ам}} \frac{1}{\varepsilon} [\psi(\rho) + \alpha], \quad (6)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu_g}{\mu_n};$$

μ_g, μ_n — вязкости, соответственно, газа и нефти;
 $\psi(\rho)$ — отношение фазовых проницаемостей для газа и нефти;
 $\alpha = \chi \varepsilon$.

Из условия задачи имеем:

$$V_o = V_{во} + V_{но} + V_{г.о} = V_b + V_n + V_r = \text{const}, \quad (7)$$

где V_o — общий объем пор пласта;
 $V_{во}, V_{но}, V_{г.о}$ — первоначальные значения соответствующих объемов.
 Рассмотрим случай, когда задаются $q_{гг} = \text{const}$ и $q_n = \text{const}$.
 Приравняв уравнения (4) и (5), получим:

$$\frac{dV_b}{dt} = A(V_b) \frac{P_o - P}{1 - \rho_{осм}}. \quad (8)$$

Интегрируя (3) и (1) и учитывая (7), получим:

$$V_n = \frac{\gamma_1(t) - V_b \rho_{осм}}{\rho}; \quad (9)$$

$$P = \frac{\gamma_2(t)}{V_o - \frac{\gamma_1(t)}{\rho} - V_b \frac{\rho - \rho_{осм}}{\rho}}; \quad (10)$$

где

$$\gamma_1 = V_{но} + V_{во} \rho_{осм} - q_n t;$$

$$\gamma_2 = V_{г.о} P_o - q_{гг} P_{ам} t.$$

Подставляя (10) в (8), имеем:

$$\frac{dV_b}{dt} = \frac{A(V_b)}{1 - \rho_{осм}} \left[P_o - \frac{\gamma_2(t)}{V_o - \frac{\gamma_1(t)}{\rho} - V_b \frac{\rho - \rho_{осм}}{\rho}} \right] \frac{\rho - \rho_{осм}}{\rho}. \quad (11)$$

Из совместного рассмотрения уравнений (2) и (6) получим:

$$\frac{q_n}{V_n \varepsilon} [\psi(\rho) + \alpha] = \frac{d\rho}{dt} + (1 + \chi \rho) \left[\frac{1}{V_n} \frac{dV_n}{dt} + \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \right] + \frac{\chi \rho_{осм}}{V_n} \frac{dV_b}{dt}, \quad (12)$$

где

$$\chi = \chi - 1$$

Дифференцируя (9) и (10), соответственно, получим:

$$\frac{1}{V_n} \frac{dV_n}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{q_n}{\rho V_n} - \frac{\rho_{осм}}{\rho V_n} \frac{dV_b}{dt}, \quad (13)$$

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dt} = - \frac{q_{гг} P_{ам}}{\gamma_2(t)} - \frac{P}{\gamma_2(t)} \left[\frac{q_n}{\rho} + \frac{V_n}{\rho} \frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho - \rho_{осм}}{\rho} \frac{dV_b}{dt} \right]. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (12) и учитывая (11), после несложных преобразований получим:

$$\frac{d\rho}{dt} = g_1(t, \rho, V_b), \quad (15)$$

где

$$g_1 = \frac{\rho(V_o - V_n - V_b)}{V_o + \chi \rho V_n - V_b} \left\{ \gamma_3(t, \rho, V_b) + \frac{q_n}{V_n} \left[\frac{\psi(\rho)}{\varepsilon} - \frac{\left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) (V_o - V_n) + \chi V_n}{V_o - V_n - V_b} \right] \right\};$$

$$\gamma_3 = \frac{A(V_b)}{1 - \rho_{осм}} (P_o - P) - \frac{\chi(\rho - \rho_{осм}) - \rho_{осм} \frac{V_o - V_b}{\rho V_n}}{V_o - V_n - V_b} - q_{гг} P_{ам} \frac{1 + \chi \rho}{\gamma_2(t)}.$$

Уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{dV_b}{dt} = g_2(t, \rho, V_b), \quad (16)$$

где

$$g_2 = \frac{A(V_b)}{1 - \rho_{осм}} (P_o - P).$$

Уравнения (15) и (16) составляют замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и решаются одним из численных методов интегрирования.

Таким образом, зная $\rho(t)$ и $V_b(t)$, можно определить остальные показатели разработки: $V_n, V_r, P, Q_{гн}(t) = \int q_{гн} \cdot dt$, а также $Q_b(t) = \int q_b \cdot dt$.

Если же нефтяная часть залежи не разрабатывается, т. е. $q_n = 0$, то из уравнений (15) и (16) получим:

$$\frac{d\rho}{dt} = g_3(t, \rho, V_b); \quad (17)$$

$$\frac{dV_b}{dt} = g_2(t, \rho, V_b), \quad (18)$$

где

$$g_3 = \frac{\rho(V_o - V_n - V_b)}{V_o + \chi \rho V_n - V_b} \gamma_3(t, \rho, V_b);$$

$$V_n = \frac{V_{н.о} + (V_{б.о} - V_b) \rho_{осм}}{\rho};$$

$$P = \frac{\gamma_2(t)}{V_o - \frac{V_{но} + V_{во} \rho_{осм}}{\rho} - V_b \frac{\rho - \rho_{осм}}{\rho}}.$$

Следует отметить, что, зная ρ, V_b и V_n , можно определить коэффициент нефтеотдачи $\eta(t)$:

$$\eta(t) = 1 - \frac{V_n}{V_{н.о}} \rho - \frac{V_b - V_{б.о} \rho_{осм}}{V_{но}}. \quad (19)$$

В заключение отметим, что вышеизложенный подход позволяет приближенно учитывать влияние неполного вытеснения нефти водой во всех случаях, рассмотренных в [1], т. е. с учетом опережающего проникновения газа из одной области в другую, с учетом реальных свойств нефти и газа, при неподвижном газонефтяном контакте, с учетом градиента давления в нефтяной области залежи и т. д.

В случае учета опережающего проникновения газа из одной области в другую уравнения [1] и [2] изменятся:

$$q_{gr} P_{am} = -\frac{d}{dt}(V_r P) - P \left[\frac{1}{\varepsilon} \psi(\rho) - 1 \right] \rho \frac{dV_r}{dt}, \quad (20)$$

$$q_{gn} P_{am} = -\frac{d}{dt} [(1 + \bar{\varepsilon} \rho) V_n P] + \rho_{осм} P \frac{d[V_n + V_r]}{dt} + P \left[\frac{1}{\varepsilon} \psi(\rho) - 1 \right] \rho \frac{dV_r}{dt}. \quad (21)$$

Для сокращения объема статьи ниже приводятся расчетные формулы еще для одного случая при учете реальных свойств нефти. Выпишем основные уравнения для газа, нефти и воды:

$$q_{gr} P_{am} = -\frac{d}{dt}(V_r P) \beta, \quad (22)$$

$$q_{gn} P_{am} = -\frac{d}{dt} \left[(1 - \rho) V_n P + \frac{\rho V_n}{a(P)} \frac{S(P)}{\beta} \right] \beta - \rho_{осм} \frac{S(P)}{a(P)} \frac{dV_n}{dt}, \quad (23)$$

$$q_n = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\rho V_n}{a(P)} \right] + \frac{\rho_{осм}}{a(P)} \frac{d[V_n + V_r]}{dt}, \quad (24)$$

$$q_w = (1 - \rho_{осм}) \frac{dV_w}{dt}, \quad (25)$$

где β — температурная поправка газа;
 $a(P)$ — объемный коэффициент нефти;
 $S(P)$ — средняя растворимость газа в нефти.
 Выражение для газового фактора запишется:

$$\Gamma = \frac{q_{gn}}{q_n} = -\frac{\beta}{P_{осм}} \left[\psi(\rho) \bar{\mu}(P) a(P) P + \frac{S(P)}{\beta} \right], \quad (26)$$

где $\bar{\mu}(P)$ — отношение вязкостей газа и нефти.

При решении задачи используется приближенный прием, заключающийся в аппроксимации как отдельных зависимостей, так и произведений зависимостей отдельных параметров от давления ломаными линиями [1, 14].

$$\frac{S(P)}{\beta} = L_1 P + D_1; \quad a(P) = b_1 P + c_1;$$

$$\frac{S(P)}{\beta a(P)} = l_1 P + d_1;$$

$$a_1(P) = P \cdot a(P) = E_1 P + F_1;$$

$$\bar{\mu}(P) \cdot a(P) \cdot P = N_1 P + M_1.$$

Решение получается в виде системы трех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV_r}{dP} = g_4(\rho, P, V_n, V_r), \quad (27)$$

$$\frac{dV_n}{dP} = g_5(\rho, P, V_n, V_r), \quad (28)$$

$$\frac{d\rho}{dP} = g_6(\rho, P, V_n, V_r), \quad (29)$$

где

$$g_4 = \frac{V_r g_2 \frac{1 - \rho_{осм}}{1 - \gamma_5} - \frac{\bar{q} V_n}{\beta} \left[\frac{b_1 \rho}{a(P)} - \frac{\gamma_6}{P \left[1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)} \right]} \right] - V_r a(P)}{a_1(P) + \frac{1}{1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)}} \left[\frac{\bar{q}}{\beta} - \frac{P g_2 (1 - \rho_{осм})}{q_n} \right]};$$

$$g_5 = \frac{P \left\{ 1 + \frac{\bar{q} \rho_{осм}}{\beta a_1(P) \left[1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)} \right]} \right\} \frac{dV_r}{dP} + V_r + \frac{\bar{q} V_n}{\beta a(P)} \left[\frac{b_1 \rho}{a(P)} - \frac{\gamma_6}{P \left[1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)} \right]} \right]}{\frac{\bar{q}}{\beta a(P)} \frac{1 - \rho_{осм}}{1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)}}};$$

$$g_6 = \frac{1}{P V_n \left[1 - \frac{\gamma_5}{a_1(P)} \right]} \left\{ V_n \gamma_6 + \left[P(1 - \rho) - \frac{\gamma_5}{a(P)} (\rho - \rho_{осм}) \right] \frac{dV_n}{dP} - \frac{\rho_{осм}}{a(P)} \gamma_5 \frac{dV_r}{dP} \right\};$$

$$\gamma_4 = \psi(\rho) \bar{\mu}(P) P a(P) + \frac{S(P)}{\beta};$$

$$\gamma_5 = \frac{S(P)}{\beta} - \frac{\gamma_4}{P_{ам}};$$

$$\gamma_6 = 1 - \rho(1 - l_1) + \frac{\gamma_4}{P_{ам}} \frac{b_1 \rho}{a^2(P)};$$

$$\bar{q} = \frac{q_{gr} P_{ам}}{q_n}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов М. Т., Кулиев А. М. АНХ, 1961, № 1, 2; „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 1.
2. Архангельский В. А. Движение газированных нефтей в системе скважина — пласт. Изд-во АН СССР, 1958.
3. Афанасьева А. В., Розенберг М. Д. Тр. ВНИИ, вып. XXI, 1959.
4. Богомолова А. Ф., Кочешков А. А., Крылов А. П., Кусаков М. М. Тр. ВНИИ, вып. 25, 1959.
5. Боксерман А. А., Розенберг М. Д. Тр. ВНИИ, вып. 19, 1959.
6. Бузинов Н. С., Чарный И. А. „Изв. АН СССР, ОТН“, 1957, № 7.
7. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. „ДАН СССР, новая серия“, 1952, т. XXXV, № 6.
8. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Тр. ВНИИ, вып. VI, Гостоптехиздат, 1954.

9. Гусейнов Г. П. Некоторые вопросы гидродинамики нефтяного пласта. Азербейшр, 1961.

10. Кундин С. А. Исследование процесса вытеснения газированной нефти водой. Канд. дисс., ВНИИ, 1961.

11. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Гостоптехиздат, 1953.

12. Пирвердян А. М. Тр. АЗНИИ ДН, вып. I, 1954.

13. Пирсон С. Учение о нефтяном пласте. Гостоптехиздат, 1961.

14. Розенберг М. Д. Тр. ВНИИ, вып. X, 1957.

15. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.

16. Эфрос Д. А. ДАН СССР, 1958, т. 121, № 1.

17. Эфрос Д. А. Тр. ВНИИ, вып. 25, 1959.

18. Эфрос Д. А., Оноприенко В. П. Тр. ВНИИ, вып. 12, 1957.

19. Bass D. T., Grawford P. B. Experimental water-flooding recoveries above and below the bubble point. Trans. AIMME, vol. 207, p. 293, 1956.

20. Buckley S. E., Zeverett M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIMME, vol. 146, p. 107, 1942.

21. Codreanu D. Consideratii critice asupra cercetarilor privind dislocarea unui amestec de gaze si titei de catre apa. Petrol so gaze. № 11, 1958.

22. Corey A. T., Rathjens C. H., Henderson. H., Wille M. Three-phase relative permeability. Trans. AIMME vol. 207, p. 349, 1956.

23. Dardaganian Stephan G. Higher residual gas saturation. Petrol Engr., 30, № 12, 1958.

24. Dyes A. B. Production of water-driven reservoirs below their bubble point. J. Petrol Technol., 1954, № 10, vol. 6.

25. Holmgren C. R., Morse R. A. Effect of free gas saturation on oil recovery by water flooding. Trans. AIMME, 1951, vol. 192.

26. Kyte J. R., Stancliff R. J., Stephan S. C., Rapoport L. A. Mechanism of water-flooding in the presence of free gas. Trans. AIMME, vol. 207, p. 215, 1956.

27. Leverett M. C., Lewis W. B. Steady flow of gas-oil-water mixtures through uncconsolidated sands. Trans. AIMME, vol. 142, p. 107, 1941.

28. Osoba G. S., Rixordson I. G., Kerver I. K., Hafford I. A. Laboratory measurements of relative permeability. Trans. AIMME, vol. 192, p. 147, 1951.

29. Stewart C. R., Graig F. F., Morse R. A. Determination of limestone performance characteristics by model flow tests. J. Petrol. Technol., vol. 5, № 4, 1953.

30. Van Meurs P. The use of transparent three dimensional models for studying the mechanism of flow processes in oil reservoirs. J. Petrol Technol., № 10, 1957.

31. Wysocki R. D., Botset H. G. The flow of gas—liquid mixtures through uncconsolidated sands.

32. Willie M. J., Cardner C. F. The generalized Kozeny—Carman equation. World Oil, vol. 146, № 4, 5, 1958.

М. Т. Абасов

Галыг нефтлэ дойманын газ-нефт јатагларынын ишләнмәсинин гидродинамик көстәричиләринә тәсири

Мәгаләдә газлашмыш нефтин су илә сыхышдырма просесинин нәзәри вә тәҷрүби тәдҗигинин ғыса тәһлили верилир. Мәгаләдә көстәрилир ки, лај тәзјигини замандан асылы олараг азалдығы вә сабит галдығы һалларда аралыг зонада икифазлы ахыны нәзәрә алмаг мүмкүндүр.

Сонра, галыг нефтлэ дойманы нәзәрә алмагла газ-нефт јатагларынын ишләнмәси мәсәләси тәдҗиг олуноур.

Мәгаләдә газ-нефт јатагларынын ишләнмәсинин мүхтәлиф вариантлары үчүн гидродинамки һесабат дүстурлары верилир.

А. Ф. КАСИМОВ, В. М. МЕХТИЕВ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ВРЕМЕНИ ВЫТЕСНЕНИЯ ОДНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ В КОЛОННЕ ТРУБ С УЧЕТОМ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ

Определение закона продвижения поверхности раздела двух последовательно движущихся вязких жидкостей в колонне труб имеет, наряду с теоретическим, и практическое значение. Так, при последовательной перекачке жидкостей по одному трубопроводу в конечном пункте каждая жидкость в отдельности принимается в соответствующие емкости, для чего необходимо определить время появления следующей жидкости. Зная это время, представляется возможным определить изменение концентрации смеси во времени. Кроме того, при проведении гидравлического разрыва нефтяных пластов имеет место последовательная закачка нескольких жидкостей, где также приходится определять время появления толкающей жидкости в забое скважины.

Вопросу определения времени вытеснения одной вязкой жидкости другой посвящен ряд работ ([1, 4, 6] и др.). При этом, если в одной из них время продвижения поверхности раздела определено без учета различия физических свойств жидкостей (удельный вес, вязкость), то в другой — с учетом этого важного фактора; но во всех этих работах течение принято установившимся, что в ряде случаев может привести к существенным ошибкам.

Заметим, что как и в аналогичных работах (см., например, [1]) задача решается при следующих условиях: эпюра распределения скоростей на границе раздела жидкостей принимается такой же, как и при движении однородной жидкости при тех же граничных условиях; пренебрегается влиянием начального участка; давление в начале и конце трубопровода принимается постоянным. Отметим, что ввиду осевой симметрии вместо поверхности раздела можно говорить о линии раздела жидкостей.

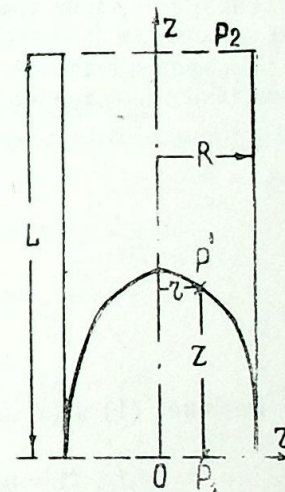


Рис. 1

Дифференциальные уравнения движения толкающей и вытесняемой жидкостей в вертикальной круглой цилиндрической трубе имеют следующий вид (рис. 1):

$$\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \eta_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad 0 \leq r \leq R \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial t} = \eta_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2)$$

где: v_1, v_2 — текущая скорость соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей;

z — текущее расстояние точки раздела поверхности от начала трубопровода;

r — расстояние точки от оси трубы;

R — радиус трубы;

t — время;

ρ_1, ρ_2 — плотность соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей;

η_1, η_2 — вязкость соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей;

p — давление.

Отметим, что величина $\frac{\partial p}{\partial z}$ в (1) и (2) соответственно выражается как $-\frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{z}$ и $-\frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{L - z}$, что говорит о

прямолинейном законе изменения давления вдоль колонны труб (здесь p_1, p_2 — давления в начале и в конце трубопровода соответственно; L — длина трубопровода; γ_1, γ_2 — удельный вес соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей).

Дифференциальные уравнения (1) и (2) решаются при следующих начальных и граничных условиях:

$$v_1(0, t) \neq \infty \quad (3)$$

$$v_2(0, t) \neq \infty \quad (4)$$

$$v_1(R, t) = 0 \quad (5)$$

$$v_2(R, t) = 0 \quad (6)$$

$$v_1(r, 0) = 0 \quad (7)$$

$$v_2(r, 0) = 0 \quad (8)$$

Решения (1) и (2) найдем в следующем виде:

$$v_1(r, t) = u_1(r, t) + \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{4\eta_1 z} (R^2 - r^2) \quad (9)$$

$$v_2(r, t) = u_2(r, t) + \frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{4\eta_2(L - z)} (R^2 - r^2) \quad (10)$$

В этих выражениях второй член в правой части является выражением скорости при установившемся движении, первый член характеризует неустановившееся течение.

Таким образом, на основе (9) и (10) выражения (1) и (2) примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \nu_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) \quad (12)$$

где ν_1, ν_2 — кинематическая вязкость соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей.

Последние выражения решаются при следующих граничных условиях:

$$u_1(0, t) \neq \infty \quad (13)$$

$$u_2(0, t) \neq \infty \quad (14)$$

$$u_1(R, t) = 0 \quad (15)$$

$$u_2(R, t) = 0 \quad (16)$$

$$u_1(r, 0) = -\frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{4\eta_1 z} (R^2 - r^2) \quad (17)$$

$$u_2(r, 0) = -\frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{4\eta_2(L - z)} (R^2 - r^2) \quad (18)$$

Применив метод Фурье [3], получаем решения уравнений (11) и (12) в следующем виде:

$$u_1(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j I_0(\lambda_j r) e^{-\nu_1 \lambda_j^2 t} \quad (19)$$

$$u_2(r, t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j I_0(\lambda_j r) e^{-\nu_2 \lambda_j^2 t} \quad (20)$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка первого рода; λ_j — характеристическое число, определяемое следующим образом:

$$I_0(\lambda_j R) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (21)$$

A_j, B_j определяются из граничных условий (17) и (18):

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j I_0(\lambda_j r) = -\frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{4\eta_1 z} (R^2 - r^2) \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j I_0(\lambda_j r) = -\frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{4\eta_2(L - z)} (R^2 - r^2) \quad (23)$$

или

$$A_j = -2 \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\eta_1 z R \lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} \quad (24)$$

$$B_j = -2 \frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{\eta_2 (L - z) R \lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} \quad (25)$$

где I_1 — функция Бесселя первого порядка первого рода.

Таким образом, используя (19), (20), (24) и (25), из (9) и (10) находим выражение скорости для любой точки соответственно толкающей и вытесняемой жидкостей:

$$v_1(r, t) = \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{4\eta_1 z} \left[(R^2 - r^2) - \frac{8}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} e^{-\gamma_1 \lambda_j^2 t} \right] \quad (26)$$

$$v_2(r, t) = \frac{p' - p_2 - \gamma_2(L - z)}{4\eta_2(L - z)} \left[(R^2 - r^2) - \frac{8}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} e^{-\gamma_2 \lambda_j^2 t} \right] \quad (27)$$

Следуя [1], приравнявая (26) и (27), определим давление на линии контакта толкающей и вытесняемой жидкостей:

$$p' = \frac{\eta_2(L - z)(p_1 - \gamma_1 z)[(R^2 - r^2) - F_1(r, t)] + \dots}{\eta_2(L - z)[(R^2 - r^2) - F_1(r, t)] + \dots} + \frac{\eta_1 z[p_2 + \gamma_2(L - z)][(R^2 - r^2) - F_2(r, t)]}{\eta_1 z[(R^2 - r^2) - F_2(r, t)]}, \quad (28)$$

где

$$F_1(r, t) = \frac{8}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} e^{-\gamma_1 \lambda_j^2 t}$$

$$F_2(r, t) = \frac{8}{R} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\lambda_j r)}{\lambda_j^3 I_1(\lambda_j R)} e^{-\gamma_2 \lambda_j^2 t}$$

Подставив (28) в (26) и вводя следующие безразмерные величины

$$x = \frac{r}{R}; \quad y = \frac{z}{L}; \quad \tau = \frac{\gamma_1}{R^2} t; \quad i = \frac{p_1 - p_2}{\gamma_1 L}; \quad \varphi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}; \quad \beta = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \nu$, получим:

$$\frac{dy}{d\tau} = A \frac{[i - \varphi - (1 - \varphi)y][(1 - x^2) - \bar{F}_1(x, \tau)][(1 - x^2) - \bar{F}_2(x, \tau)]}{\beta(1 - y)[(1 - x^2) - \bar{F}_1(x, \tau)] + y[(1 - x^2) - \bar{F}_2(x, \tau)]}, \quad (29)$$

здесь

$$\bar{F}_1(x, \tau) = 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(k_j x)}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} e^{-\kappa_j^2 \tau};$$

$$\bar{F}_2(x, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\kappa_j x)}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} e^{-\nu \kappa_j^2 \tau};$$

$$A = \frac{gR^4}{4L\nu_1^2}; \quad \kappa_j = \lambda_j R.$$

Для упрощения численных расчетов, а также с целью получения качественных результатов принимаем $\nu_1 = \nu_2$ (при этом имеет место $\varphi = \beta$), тогда последнее выражение примет вид:

$$\frac{dy}{d\tau} = A \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)y}{\varphi + (1 - \varphi)y} \left[(1 - x^2) - 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\kappa_j x)}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} e^{-\kappa_j^2 \tau} \right] \quad (30)$$

Интегрирование (30) в пределах от $y(0)$ до $y(\tau)$ дает:

$$y + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)y}{i - \varphi} = -A \left[(1 - x^2) \tau - 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{I_0(\kappa_j x)}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} (1 - e^{-\kappa_j^2 \tau}) \right] \quad (31)$$

Для определения времени появления τ_n толкающей жидкости в конечном сечении трубы, т. е. при $x=0$ $y=1$ из (31) имеем следующее трансцендентное уравнение:

$$\tau_n + 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa_j^2 \tau_n}}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} = 8 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa_j^3 I_1(\kappa_j)} - \frac{1}{A} \left(1 + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - 1}{i - \varphi} \right) \quad (32)$$

Как видно из (32), выражение для определения τ_n получено в виде бесконечного ряда. И потому представляет интерес определение τ_n приближенным методом, дающим относительно простое решение. С этой целью для решения указанной в заглавии задачи применим способ Баренблатта [2]. В последнем случае выражения (1) и (2) решаются с граничными условиями (5)–(8); что касается недостающих условий, то они, как будет показано ниже, вытекают из интегральных соотношений.

Ввиду симметричности движения относительно оси трубы отыскиваем решение выражения для скорости в следующем виде:

$$v_1(r, t) = A_1(t) + B_1(t)r^2 + C_1(t)r^4 \quad (33)$$

$$v_2(r, t) = A_2(t) + B_2(t)r^2 + C_2(t)r^4 \quad (34)$$

Используя граничные условия (5) и (6), получим:

$$A_1(t) = -B_1(t)R^2 - C_1(t)R^4 \quad (35)$$

$$A_2(t) = -B_2(t)R^2 - C_2(t)R^4, \quad (36)$$

тогда (33) и (34) представятся как:

$$v_1(r, t) = -(R^2 - r^2)B_1(t) - (R^4 - r^4)C_1(t) \quad (37)$$

$$v_2(r, t) = -(R^2 - r^2)B_2(t) - (R^4 - r^4)C_2(t) \quad (38)$$

Заметим, что граничные условия (7) и (8) в данном случае переходят к следующим условиям:

$$A_1(0) = B_1(0) = C_1(0) = 0 \quad (39)$$

$$A_2(0) = B_2(0) = C_2(0) = 0 \quad (40)$$

Остальные четыре интегральные постоянные определяются из условия интегральных соотношений, для чего правую и левую части уравнений (1) и (2) умножим на rdr , r^2dr и проинтегрируем от 0 до R .

$$\left. \begin{aligned} \int_0^R \frac{\partial v_1}{\partial t} r dr &= \nu_1 \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) r dr + \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \int_0^R r dr \\ \int_0^R \frac{\partial v_1}{\partial t} r^2 dr &= \nu_1 \int_0^R \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) r^2 dr + \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \int_0^R r^2 dr \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Решение приводится лишь для v_1 ; v_2 находится аналогичным образом.

Раскрывая интегралы в (41), по частям получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^R r v_1 dr &= v_1 R \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} + \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \cdot \frac{R^2}{2} \\ \frac{d}{dt} \int_0^R r^2 v_1 dr &= v_1 R^2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} + v_1 \int_0^R v_1 dr + \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \cdot \frac{R^3}{3} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Подставив значение v_1 из (37) в (42), после интегрирования с учетом граничных условий (5) имеем:

$$\left. \begin{aligned} B_1'(t) + \frac{8v_1}{R^2} B_1(t) + \frac{4R^2}{3} C_1'(t) + 16v_1 C_1(t) &= -\frac{2}{R^2} \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \\ B_1'(t) + \frac{10v_1}{R^2} B_1(t) + \frac{10R^2}{7} C_1'(t) + 24v_1 C_1(t) &= -\frac{5}{2R^2} \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Итак, имеем неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения, решением которых будут:

$$B_1(t) = M e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} + N e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} + m_1 \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{2\eta_1 z} \quad (44)$$

$$C_1(t) = -\frac{3}{4R^2} \left(m_2 M e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} + m_3 N e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} \right) \quad (45)$$

здесь $k_1 = -5,770\,246$; $k_2 = -58,229\,754$; $m_1 = -0,5$; $m_2 = 0,357\,920$; $m_3 = 1,086\,524$.

Интегральные постоянные M и N определяются из условия (39). Таким образом, выражениями для определения $B_1(t)$ и $C_1(t)$ будут:

$$B_1(t) = \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{2\eta_1 z} \left(m_4 e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} - m_5 e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} + m_1 \right) \quad (46)$$

$$C_1(t) = -\frac{3}{R^2} \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{8\eta_1 z} m_6 \left(e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} - e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} \right) \quad (47)$$

здесь $m_4 = 0,745\,620$; $m_5 = 0,245\,620$; $m_6 = 0,266\,872$.

Наконец, подставив значения $B_1(t)$ и $C_1(t)$ из последних выражений в (37), получим выражение для определения скорости любой точки толкающей жидкости:

$$\begin{aligned} v_1(r, t) = & -\frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{2\eta_1 z} \left[\left(m_4 e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} - m_5 e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} + m_1 \right) (R^2 - r^2) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4R^2} m_6 \left(e^{\frac{k_1 v_1}{R^2} t} - e^{\frac{k_2 v_1}{R^2} t} \right) (R^4 - r^4) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} v_2(r, t) = & -\frac{p' - p_2 - \gamma_2(L-z)}{2\eta_2(L-z)} \left[\left(m_4 e^{\frac{k_1 v_2}{R^2} t} - m_5 e^{\frac{k_2 v_2}{R^2} t} + m_1 \right) (R^2 - r^2) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4R^2} m_6 \left(e^{\frac{k_1 v_2}{R^2} t} - e^{\frac{k_2 v_2}{R^2} t} \right) (R^4 - r^4) \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Из равенства (48) и (49) легко определится p' , и, подставив последнее в (48), получим выражение для $\frac{dy}{d\tau}$. Но, как было отмечено выше, исследуется случай $v = 1$, при котором выражение для p' аналогично выражению (28) при $v_1 = v_2$. Таким образом, подставив p' из (28) при $v_1 = v_2$ в (48), для скорости жидкости получим следующее выражение (в безразмерных величинах):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} = & -2A \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)y}{\varphi + (1 - \varphi)y} \left[(\kappa_1 m_7 e^{\kappa_1 \tau} - \kappa_2 m_8 e^{\kappa_2 \tau} + m_1)(1 - x^2) - \right. \\ & \left. - \frac{3}{4} (\kappa_1 m_9 e^{\kappa_1 \tau} - \kappa_2 m_{10} e^{\kappa_2 \tau})(1 - x^4) \right] \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь $m_7 = -0,129\,218$; $m_8 = 0,004\,218$; $m_9 = 0,046\,249$; $m_{10} = -0,004\,583$.

Интегрирование (50) в пределах от $y(0)$ до $y(\tau)$ дает:

$$\begin{aligned} y + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)y}{i - \varphi} = & 2A \left\{ [m_7(e^{\kappa_1 \tau} - 1) - m_8(e^{\kappa_2 \tau} - 1)] + \right. \\ & \left. + m_1 \tau \right\} (1 - x^2) - \frac{3}{4} [m_9(e^{\kappa_1 \tau} - 1) - m_{10}(e^{\kappa_2 \tau} - 1)] (1 - x^4) \end{aligned} \quad (51)$$

Определим время появления толкающей жидкости в концевом сечении трубы при $x = 0$ $y = 1$ из (51); после ряда алгебраических преобразований имеем:

$$n_1 e^{\kappa_1 \tau_n} + n_2 e^{\kappa_2 \tau_n} + m_1 \tau_n = \frac{1}{2A} \left(1 + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - 1}{i - \varphi} \right) + n_3. \quad (52)$$

Здесь $n_1 = -0,094\,531$; $n_2 = 0,000\,781$; $n_3 = 0,093\,750$.

Прежде чем сравнивать результаты расчета по определению значения τ_n по точному решению—выражение (32) и по способу Баренблатта—выражение (52), определим τ_n по методу осреднения Слезкина—Тарга (см., напр., [5]).

Левую часть (1) и (2) определим следующим образом:

$$\xi_1(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial v_1}{\partial t} dr \quad (53)$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{R} \int_0^R \frac{\partial v_2}{\partial t} dr \quad (54)$$

Тогда решениями (1) и (2) с учетом (53) и (54) будут:

$$v_1(r, t) = \frac{1}{4v_1} \left[\xi_1(t) - \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} \right] r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (55)$$

$$v_2(r, t) = \frac{1}{4v_2} \left[\xi_2(t) - \frac{p' - p_2 - \gamma_2(L-z)}{\rho_2(L-z)} \right] r^2 + C_5 \ln r + C_6 \quad (56)$$

Найдя C_3 , C_4 , C_5 и C_6 из граничных условий (3)–(6), получим:

$$v_1(r, t) = \frac{1}{4v_1} \left[\frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{\rho_1 z} - \xi_1(t) \right] (R^2 - r^2) \quad (57)$$

$$v_2(r, t) = \frac{1}{4v_2} \left[\frac{p' - p_2 - \gamma_2(L-z)}{\rho_2(L-z)} - \xi_2(t) \right] (R^2 - r^2) \quad (58)$$

Подставив значения $v_1(r, t)$ и $v_2(r, t)$ из последних выражений в (53) и (54) соответственно, получим для $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых дают:

$$\xi_1(t) = C_7 e^{-6 \frac{v_1}{R^2} t} \quad (59)$$

$$\xi_2(t) = C_8 e^{-6 \frac{v_2}{R^2} t} \quad (60)$$

Здесь C_7 и C_8 — интегральные постоянные.

Подставив последние выражения соответственно в (57) и (58) и используя граничные условия (7) и (8), получим следующие выражения для скорости любой точки толкающей и вытесняемой жидкости, соответственно:

$$v_1(r, t) = \frac{p_1 - p' - \gamma_1 z}{4\eta_1 z} (1 - e^{-6 \frac{v_1}{R^2} t}) (R^2 - r^2) \quad (61)$$

$$v_2(r, t) = \frac{p' - p_2 - \gamma_2(L-z)}{4\eta_2(L-z)} (1 - e^{-6 \frac{v_2}{R^2} t}) (R^2 - r^2) \quad (62)$$

Как и в предыдущих случаях, подставив выражение для p' из (28) при $v_1 = v_2$ в (61), для скорости жидкости имеем следующее дифференциальное уравнение (в безразмерных величинах):

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = A \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)(1 - e^{-6\tau})}{\varphi + (1 - \varphi)y} (1 - x^2) \quad (63)$$

Интегрирование последнего выражения в пределах от $y(0)$ до $y(\tau)$ дает:

$$y + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - \varphi - (1 - \varphi)y}{i - \varphi} = -A \left[\tau + \frac{1}{6} (e^{-6\tau} - 1) \right] (1 - x^2)$$

Время появления толкающей жидкости в концевом сечении определится из последнего выражения при $x = 0$ $y = 1$:

$$6\tau_n + e^{-6\tau_n} = 1 - \frac{6}{A} \left(1 + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - 1}{i - \varphi} \right) \quad (64)$$

С целью сравнения значения τ_n с таковым при случае, когда движение принимается стационарным, запишем выражение для τ_n из [4] в вышеприведенных безразмерных величинах:

$$\tau_n = -\frac{1}{A} \left(1 + \frac{i}{1 - \varphi} \ln \frac{i - 1}{i - \varphi} \right) \quad (65)$$

Таким образом, имеем четыре выражения для определения времени появления толкающей жидкости в концевом сечении колонны труб, а именно: выражение (32), выведенное по точному решению, выражение (52), найденное приближенно по способу Баренблатта, выражение (64) — по методу осреднения, наконец, выражение (65), где движение принято стационарным.

Представляет интерес сравнение результатов расчета по точному решению (32) с (65) и также с (52) и (64) найденными приближенными способами. Результаты расчетов по определению τ_n для случаев $A = 958$ и $\varphi = 0,9; 0,95; 1,0$ при различных значениях i представлены на рис. 2—5.

Как видно из рис. 2 и 3, значения времени появления толкающей жидкости в концевом сечении колонны труб, определенные приближенными способами весьма мало отличаются от таковых, определяемых по точному решению. Заметим, что при $\varphi = 1$ значения τ_n , определенные по (52) и (32), совпадают (рис. 3).

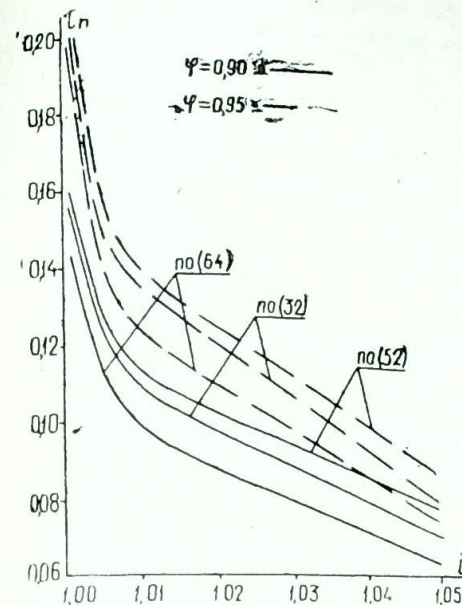


Рис. 2

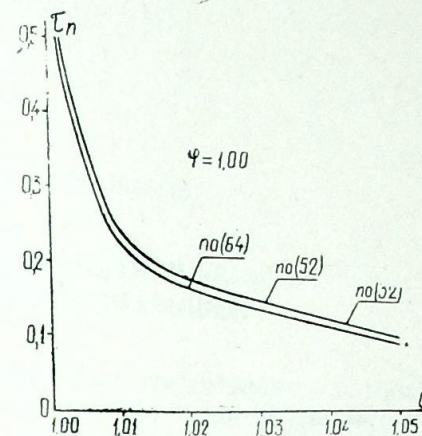


Рис. 3

Что касается значения τ_n для случая, когда движение считается стационарным, то они отличаются от таковых, определяемых по точному решению (рис. 4 и 5).

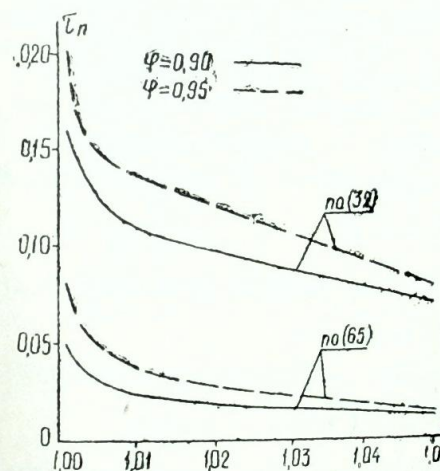


Рис. 4

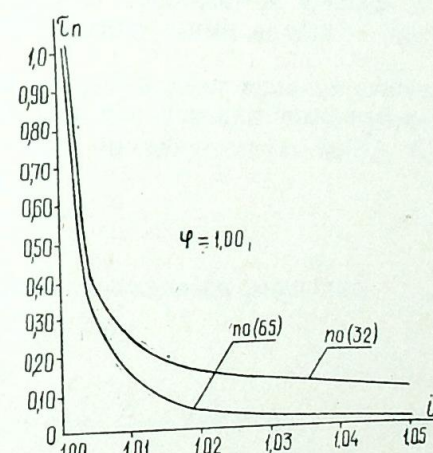


Рис. 5

Авторы выражают благодарность проф. А. Х. Мирзаджанзаде за ценные советы при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аббасов А. А., Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 3.
2. Баренблатт Г. И. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.

А. А. ШАМСИЕВ, А. М. АБДУЛ-ЗАДЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КИНЕМАТИКИ ДОЛОТ СО СМЕЩЕННЫМИ ОСЯМИ ШАРОШЕК

Движение шарошки со смещенными осями относительно оси долота на величину w и выходом вершины на величину h , можно рассматривать как винтовое, т. е. как совокупность поступательного и вращательного движения вокруг оси, параллельной поступательному движению. Ось, вокруг которой тело шарошки в данный момент поворачивается и параллельно которой перемещается поступательно, является мгновенной винтовой осью, или мгновенной осью вращения—скольжения (рис. 1).

Мгновенная винтовая ось находится в плоскости, перпендикулярной к прямой, проходящей через точки E и D , и пересекает ее в точке P . Отрезок ED есть кратчайшее расстояние между осями долота и шарошки и по величине равно w .

Таким образом, в теле шарошки в каждый момент времени существует ось, все точки которой имеют скорости, направленные параллельно угловой скорости ω . Найдем хотя бы одну такую точку C с вектор-радиусом r_c , чтобы скорость ее

$$\bar{v}_c = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c$$

была параллельна вектору $\bar{\omega}$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\bar{\omega} \times [\bar{v}_0 + (\bar{\omega} \times \bar{r}_c)] = 0.$$

Раскрывая произведение, получим:

$$\bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) = \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \bar{\omega} (\bar{\omega} \cdot \bar{r}_c) - \bar{r}_c \bar{\omega}^2 = 0. \quad (1)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, если положить $\bar{\omega} \cdot \bar{r}_c = 0$, т. е. за точку C принять основание перпендикуляра, опущенного из полюса O_0 на искомую ось; тогда согласно соотношению (1) найдем:

$$\bar{r}_c = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2}. \quad (2)$$

Вектор-радиус этой точки относительно неподвижного начала O будет

$$\bar{r}_c = \bar{r}_0 + \bar{r}_c = \bar{r}_0 + \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_0}{\omega^2}. \quad (3)$$

А. А. ШАМСИЕВ, А. М. АБДУЛ-ЗАДЕ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КИНЕМАТИКИ ДОЛОТ СО СМЕЩЕННЫМИ ОСЯМИ ШАРОШЕК

Движение шарошки со смещенными осями относительно оси долота на величину ϖ и выходом вершины на величину h , можно рассматривать как винтовое, т. е. как совокупность поступательного и вращательного движения вокруг оси, параллельной поступательному движению. Ось, вокруг которой тело шарошки в данный момент поворачивается и параллельно которой перемещается поступательно, является мгновенной винтовой осью, или мгновенной осью вращения—скольжения (рис. 1).

Мгновенная винтовая ось находится в плоскости, перпендикулярной к прямой, проходящей через точки E и D , и пересекает ее в точке P . Отрезок ED есть кратчайшее расстояние между осями долота и шарошки и по величине равно ϖ .

Таким образом, в теле шарошки в каждый момент времени существует ось, все точки которой имеют скорости, направленные параллельно угловой скорости ω . Найдем хотя бы одну такую точку C с вектор-радиусом $\vec{r}_c$, чтобы скорость ее

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_c$$

была параллельна вектору $\vec{\omega}$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$\vec{\omega} \times [\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)] = 0.$$

Раскрывая произведение, получим:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) = \vec{\omega} \times \vec{v}_0 + \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c) - \vec{r}_c \omega^2 = 0. \quad (1)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, если положить $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_c = 0$, т. е. за точку C принять основание перпендикуляра, опущенного из полюса O_0 на искомую ось; тогда согласно соотношению (1) найдем:

$$\vec{r}_c' = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}. \quad (2)$$

Вектор-радиус этой точки относительно неподвижного начала O будет

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \vec{r}_c' = \vec{r}_0 + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2}. \quad (3)$$

Но легко заметить, что и все точки с вектор-радиусом $\vec{r}' = \vec{r}_c + \lambda_1 \vec{\omega}$, где λ_1 — произвольный скаляр, также удовлетворяют уравнению (1), а это означает, что геометрическое место точек, скорости кото-

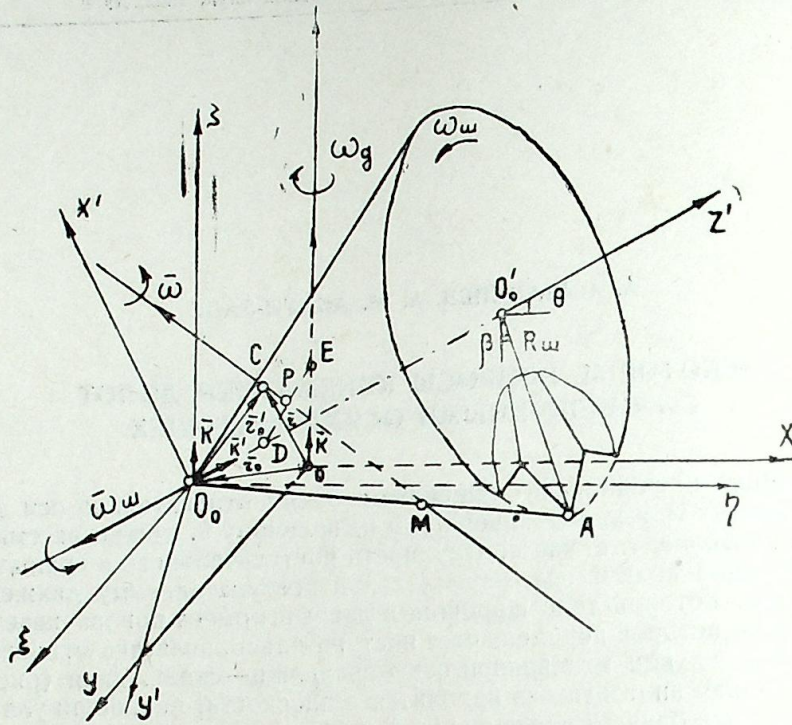


Рис. 1

рых параллельны вектору угловой скорости, представляет прямую линию с уравнением

$$(\vec{r}' - \vec{r}_c) \times \vec{\omega} = 0$$

или, переходя к вектор-радиусам по отношению к неподвижной системе

$$(\vec{r} - \vec{r}_c) \times \vec{\omega} = 0. \quad (4)$$

Переходя к проекциям на неподвижные оси, получим уравнения мгновенной винтовой оси в виде:

$$\frac{x - x_c}{\omega_x} = \frac{y - y_c}{\omega_y} = \frac{z - z_c}{\omega_z}, \quad (5)$$

где координаты точки C определяются по (3) так:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_y v_{oz} - \omega_z v_{oy}) \\ y_c &= y_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_z v_{ox} - \omega_x v_{oz}) \\ z_c &= z_0 + \frac{1}{\omega^2} (\omega_x v_{oy} - \omega_y v_{ox}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь x_0, y_0, z_0 координаты и v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} проекции скорости полюса O_0 [1]:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot \cos \omega_g t \\ y_0 &= \sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot \sin \omega_g t \\ z_0 &= R_{\omega} \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \cdot \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

$$\left. \begin{aligned} v_{ox} &= -\omega_g \cdot \sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot \sin \omega_g t \\ v_{oy} &= \omega_g \cdot \sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot \cos \omega_g t \\ v_{oz} &= -R_{\omega} \cdot \omega_{\omega} \cdot \cos \beta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Угловая скорость ω будет:

$$\omega = \sqrt{\omega_g^2 + \omega_{\omega}^2 - 2 \omega_g \omega_{\omega} \cdot \cos \theta}.$$

Но учитывая ранее выведенную формулу в [1], можно написать:

$$\omega_{\omega} = k \cdot \omega_g,$$

где

$$k = \frac{1}{2} \left\{ -F(\varphi) \pm \sqrt{[F(\varphi)]^2 - 4P(\varphi)} \right\},$$

тогда

$$\omega = \omega_g \cdot \sqrt{k^2 - 2k \cos \theta + 1}. \quad (8)$$

Проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на неподвижные оси получим следующим образом.

Вводя единичные векторы $\vec{k}$ — оси долота O_z и $\vec{k}'$ — оси шарошки O'_z , можем представить:

$$\vec{\omega} = \omega_g \cdot \vec{k} - \omega_{\omega} \cdot \vec{k}'. \quad (9)$$

Отсюда легко найдем проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ на неподвижные оси O_{xyz}

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\omega_{\omega} \cdot \cos \alpha_3 \\ \omega_y &= -\omega_{\omega} \cdot \cos \beta_3 \\ \omega_z &= \omega_g - \omega_{\omega} \cdot \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\}$$

или, учитывая (3) из [1],

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\omega_{\omega} \cdot \sin \theta \cdot \sin \omega_g t \\ \omega_y &= \omega_{\omega} \cdot \sin \theta \cdot \cos \omega_g t \\ \omega_z &= \omega_g - \omega_{\omega} \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Подставляя найденные значения (7), (7'), (8), (10), в (6) получим координаты точки C:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} (k^2 + 3k \cos \theta) - R_{\omega} \cdot k^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi}{k^2 - 2k \cos \theta + 1} \cos \omega_g t \\ y_c &= \frac{\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} (k^2 + 3k \cos \theta) - R_{\omega} \cdot k^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi}{k^2 - 2k \cos \theta + 1} \sin \omega_g t \\ z_c &= R_{\omega} \sin \theta \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где учтено $\cos \beta = \sin \theta$.

Уравнение винтовой оси в неподвижной системе будет:

$$\frac{x - \lambda \cdot \cos \omega_g t}{-k \cdot \sin \theta \cdot \sin \omega_g t} = \frac{y - \lambda \cdot \sin \omega_g t}{k \cdot \sin \theta \cdot \cos \omega_g t} = \frac{z - R_{\text{ш}} \cdot \sin \theta \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right)}{1 - k \cdot \cos \theta},$$

где для краткости положено:

$$\lambda = \frac{\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} (k^2 + 3k \cos \theta) - R_{\text{ш}} k^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \varphi}{k^2 - 2k \cos \theta + 1} \quad (12)$$

С другой стороны, мгновенная винтовая ось проходит через образующую скользящего зуба O_0A . Составляя уравнения образующей линии скользящего зуба O_0A , можем найти координаты точки M пересечения ее с мгновенной винтовой осью.

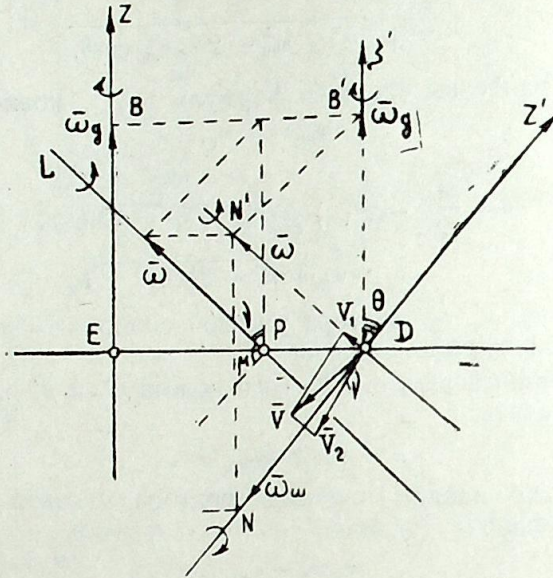


Рис. 2

Уравнение образующей линии скользящего зуба O_0A будет:

$$\frac{x - x_0}{x_A - x_0} = \frac{y - y_0}{y_A - y_0} = \frac{z - z_0}{-z_0}, \quad (13)$$

где x_A, y_A и x_0, y_0, z_0 соответственно координаты точки A и полюса O_0 . Из совместного решения уравнений (5) и (13) находим координаты точки M скользящего зуба, через который в данный момент проходит мгновенная винтовая ось:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{(x_A - x_0)(x_c \cdot \text{ctg } \omega_g t + y_c - y_0) + x_0(y_A - y_0)}{y_A - y_0 + (x_A - x_0) \cdot \text{ctg } \omega_g t} \\ y_M &= \frac{(y_A - y_0)(y_c \cdot \text{tg } \omega_g t + x_c - x_0) + y_0(x_A - x_0)}{x_A - x_0 + (y_A - y_0) \cdot \text{tg } \omega_g t} \\ z_M &= \frac{z_0(x_A - x_c - z_c \cdot p \cdot \sin \omega_g t)}{x_A - x_0 - z_0 \cdot p \cdot \sin \omega_g t} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$p = \frac{k \cdot \sin \theta}{1 - k \cos \theta}.$$

Подставляя значения $x_0, y_0, z_0, x_A, y_A, x_c, y_c, z_c$, после некоторых упрощений получим:

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \lambda \cos \omega_g t + \frac{(\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} - \lambda)(R_{\text{ш}} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi - H \cdot \sin \theta)}{R_{\text{ш}} \cdot \cos \varphi} \sin \omega_g t \\ y_M &= \lambda \sin \omega_g t + \frac{(\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} - \lambda)(H \cdot \sin \theta - R_{\text{ш}} \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi)}{R_{\text{ш}} \cdot \cos \varphi} \cos \omega_g t \\ z_M &= R_{\text{ш}} \cdot \sin \theta \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \times \\ &\quad \times \frac{q \cdot \sin \omega_g t + (\sqrt{\omega^2 + h^2 \cdot \sin^2 \theta} - \lambda + R_{\text{ш}} \cdot \cos \varphi) \cos \omega_g t}{q \cdot \sin \omega_g t + R_{\text{ш}} \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega_g t} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где обозначено:

$$q = H \cdot \sin \theta - R_{\text{ш}} \left[\cos \theta \cdot \sin \varphi + \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \frac{k \cdot \sin^2 \theta}{1 - k \cdot \cos \theta} \right].$$

Положение точки P на линии ED определим следующим образом (рис. 2). Перенесем угловую скорость вращения долота ω_g в точку D , прибавляя при этом соответствующее поступательное движение скоростью $\bar{v}$, получим вращение около оси $D\xi'$, на которой и отложим величину $\overline{DB'}$, равную и параллельную $\overline{ED} = \omega_g$. Сложив вращения $\overline{DB'}$ и $\overline{DN}$ по правилу параллелограмма, получим вращение около оси DN' , совершающееся с угловой скоростью ω . Если спроектируем ломаную $DB'N'$ на прямую DN' , то величина ω получится из формулы:

$$\omega = \omega_g \cdot \cos \nu + \omega_{\text{ш}} \cdot \cos \mu, \quad (16)$$

где углы ν и μ определяются из формулы:

$$\frac{\omega_{\text{ш}}}{\omega_g} = \frac{\sin \nu}{\sin \mu} \quad (17')$$

$$\mu = 180^\circ - (\theta + \nu) \quad (17'')$$

$$\cos \nu = \frac{\omega_x \cdot 0 + \omega_y \cdot 0 + \omega_z \cdot z_e}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \cdot \sqrt{0 + 0 + z_e^2}} = \frac{1 - k \cos \theta}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \theta + 1}}$$

$$\nu = \arccos \frac{1 - k \cdot \cos \theta}{\sqrt{k^2 - 2k \cos \theta + 1}}. \quad (17)$$

Вектор $\bar{v}$ перпендикулярен к ED и лежит на плоскости $DB'N'N$, имеющей с ней общую точку D . Разложим скорость $\bar{v}$ на v_1 , направленную по DN' , и на v_2 перпендикулярно к DN' .

Углы $\bar{v} \wedge \bar{v}_2$ и $\bar{v} \wedge \omega_g$ с взаимно перпендикулярными сторонами равны, поэтому имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= v \cdot \cos \nu \\ v_1 &= v \cdot \sin \nu \end{aligned} \right\} \quad (18')$$

Но так как $v = \omega_g ED$, то, подставив в равенство (18') вместо v равную ему величину, получим:

$$\left. \begin{aligned} v_2 &= \omega_g \cdot \omega \cdot \cos \nu \\ v_1 &= \omega_g \cdot \omega \cdot \sin \nu \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

Поступательное движение со скоростью v_2 , слагаясь с вращением около оси DN' как перпендикулярное к оси вращения, дает вращение около некоторой мгновенной оси PL параллельной DN' с той же угловой скоростью ω .

Так как скорость для точек линии ED изменяется по мере удаления от оси DN' , то всегда можно найти такую точку P , в которой эта скорость ($DP \cdot \omega$) численно будет равна v_2 , но противоположно направлена, и так как эти скорости направлены в разные стороны, то они взаимно уничтожатся, и точка P в данный момент будет неподвижна. Для определения точки P из равенства $v_2 = DP \cdot \omega$ имеем:

$$DP = \frac{v_2}{\omega} = \frac{\omega_g \cdot \omega \cdot \cos \nu}{\omega_g \cdot \cos \nu + \omega_{ш} \cos \mu}, \quad (19')$$

следовательно

$$EP = ED - DP = ED - \frac{\omega_g \cdot \omega \cdot \cos \nu}{\omega_g \cdot \cos \nu + \omega_{ш} \cdot \cos \mu} = \frac{\omega_{ш} \cdot \omega \cdot \cos \mu}{\omega_g \cdot \cos \nu + \omega_{ш} \cdot \cos \mu}. \quad (19'')$$

Деля (19') на (19'') и учитывая (17'), получим:

$$\frac{EP}{LP} = \frac{\sin \nu \cdot \cos \mu}{\sin \mu \cdot \cos \nu} = \frac{\operatorname{tg} \nu}{\operatorname{tg} \mu}$$

или

$$DP = -EP \cdot \frac{\operatorname{tg} (\theta + \nu)}{\operatorname{tg} \nu}. \quad (19)$$

На основе сказанного можно сделать следующие выводы.

Мгновенная винтовая ось, вокруг которой в данный момент времени шарошка поворачивается и параллельно которой она перемещается, сама находится в сложном движении. При повороте шарошки с одного зуба на другой мгновенная винтовая ось не проходит через одну и ту же неподвижную точку в разные моменты времени. Кроме того, при повороте точка P перемещается вдоль линий ED и меняются значения угла ν , образованного между мгновенной винтовой осью и осью долота O_2 .

Это показывает, что ни одна точка скользящего зуба шарошки при повороте не будет катиться без скольжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамсиев А. А., Абдул-заде А. М. О кинематике долот со смещенными осями шарошек. АНХ, 1961, № 11.

А. Э. Шәмсијев, Э. М. Әбдүлзаде

Шарошка охлары кәнара чыхан балта кинематикасынын бә'зи мәсәлэләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә шарошкалары сүрүшән балтанын ани винт охунун тәнлији, онун шарошканын доғураны илә кәсишдији нөгтәләрин коорди-

натларынын ифадәси чыхарылмыш вә белә балталарын иши тәһлил едилмишдир.

Нәтичәдә көстәрилмишдир ки, шарошканын верилмиш анда әтра-винт оху өзү мурәккәб һәрәкәтдә олур. Шарошка бир дишдән дишәр үзәринә дөнәркән ани винт оху мүхтәлиф заман анларында ејни тәрпәнмәз нөгтәдән кечмир вә ани винт оху илә балтанын оху ара-һеч бир нөгтәси шарошка дөнәркән сүрүшмәдән фырланмыш.

МҮНДӘРИЧАТ

Р. Һ. Мәммәдов. Функцияларын хәтти мүсбәт операторлар аиләси васи- тәсилә җахынлашмасынын тәртиби вә асимптотик гијмәти һаггында бә'зи үмуми нәтичәләр	3
Г. М. Чәфәрли. Бир синиф ортонормал мултипликатив системә көрә Фурје сырасынын җығылмасы һаггында	17
Л. Г. Лабскер вә А. Ч. Һачыјев. Икигат сингулјар интегралларын бә'- зи синифләри һаггында	37
Л. М. Иманов, Г. О. Гачар. Етил спирти молекулунун ифрат јүксәк- тезликли спектри, җырланма сабитләри вә дипол моменти	55
Һ. А. Мухтаров. 1,1-, 2-үчфторетан молекулунун микродалғалар спектри	59
Һ. Ә. Әфәндијев, Ф. С. Султанов, Р. Һ. Искәндәров. Назик Ві табәгәләриндә термoeһг	65
С. М. Әзимов. Тутулан гоша улдуз системләриндә пејкләр	71
М. М. Мустафајев. Фасиләсиз ишләјән силос јүкләјичи машинларын фрез-барабаны кәсичи органынын параметрләринин әсасландырылмасы	81
Р. И. Талышински, Ф. А. Бајрамова. «Азәрбајҗан» типли конди- сионерин бирфазлы конденсатор мүһәррикинин тәдгиги	89
Һ. Ә. Мәммәдзәдә. Сәрфи мәнсәбә доғру азалан су ахынларынын дер- васија СЕС пилләләринә бөлүнмәсинин енержетик үсулу	97
И. Ф. Гасымов. Газма шамы ғыфыл јивинин сәтһиндә јаранан температу- рун гејри-стасионар режимдә тә'јини	101
А. Ә. Аббасов. Лајдан нефтин исти акент илә сыхышдырылмасы заманы температурун пајланмасы	105
М. Т. Абасов. Галыг нефтлә дојманын газ-нефт јатагларынын ишләнмә- синин гидродинамик кәстәричиләринә тә'сири	113
Ә. Ф. Гасымов, В. М. Мейдијев. Өзлү мајенин диҗәр өзлү маје илә ғарарлашмамыш һалда бору кәмәриндә сыхышдырмасы тә'јининә даир	121
А. Ә. Шәмсијев, Ә. М. Әбдүләдә. Шарошка охлары кәнара чыхан балта кинематикасынын бә'зи мәсәләләри	131

Чапа имзаланмыш 24/VIII 1962-чи ил. Қағыз форматы $70 \times 108^{1/16}$. Қағыз вәрәги 4,38.
Чап вәрәги 11,99. Нәс.-нәшријат вәрәги 11,17. ФГ 14266. Сифариш 762. Тиражы 660.
Гижмәти 80 гәп.

Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасы Мәтбәәси, Бакы, Фәһлә проспекти, 96.