

АЗƏРБАЈЧАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

3

1962

АЗƏРБАЈЧАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Бакы—Баку

А. С. ДЖАФАРОВ

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЕМЕЙСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе рассматриваются некоторые вопросы приближения функций при $\nu \rightarrow \infty$ операторами вида ($\nu > 0$),

$$L_{\nu, m}^{(1)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) G_{\nu, m}(x-t) dt$$

$$L_{\nu, m}^{(n)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, \dots, t_n) G_{\nu, m} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_i - t_i)^2} \right) dt_1 \dots dt_n \quad (n \geq 2),$$

где

$$G_{\nu, m}(t) = (-1)^{m+1} b_{\nu}^{-1} \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} K_{\nu} \left(\frac{t}{j} \right).$$

При $n=1$ предположим, что $K_{\nu}(t)$ определены на всей вещественной оси и $b_{\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\nu}(t) dt < \infty$. При $n \geq 2$ будем предполагать, что $K_{\nu}(t)$ — функции, определенные при $t \geq 0$, для которых $b_{\nu} = s \int_0^{\infty} t^{n-1} K_{\nu}(t) dt < \infty$, s — поверхность единичной сферы $\sigma: \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$.

В дальнейшем удобно операторы $L_{\nu, m}^{(n)}$ записывать в следующем виде:

$$L_{\nu, m}^{(1)}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1 + t) G_{\nu, m}(t) dt,$$

$$L_{\nu, m}^{(n)}(f) = (-1)^{m+1} b_{\nu}^{-1} \int_0^{\infty} \int_{\sigma} t^{n-1} K_{\nu}(t) \sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x_1 + jt\xi_1, \dots, x_n + jt\xi_n) d\sigma_{\xi} dt \quad (n \geq 2),$$

где $d\sigma_{\xi}$ $(n-1)$ -мерный элемент площади сферы σ .

Очевидно, что при $f \equiv 1$

$$L_{\nu, m}^{(n)}(f) \equiv 1 \quad (1)$$

Выражение

$$\omega_m(\delta, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p, \varphi} \sup_{\substack{p, \varphi \\ h^2 + \dots + h_n^2 \leq \delta}} \frac{1}{\alpha(m\delta)} \left\| \Delta_H^m f \right\|_{p, \varphi}^{(n)}$$

739230
 Центральная научная
 БИБЛИОТЕКА
 Академии наук Персизской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескерев, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

назовем модулем непрерывности порядка m функции f относительно метрики класса $L_{p,\varphi}^{(n)}$, где $H=(h_1, \dots, h_n)$ ($h_1, \dots, h_n$ — вещественные числа), $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ фиксированная функция, $p=(p_1, \dots, p_n)$ ($1 \leq p_k \leq \infty$ $k=1, \dots, n$).

$$\left\| \frac{f}{\varphi} \right\|_{p,\varphi}^{(n)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f}{\varphi} \right|^{p_1} dx_1 \right)^{p_2/p_1} \dots d x_n)^{1/p_n} < \infty.$$

При этом, как обычно, полагаем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{\infty} dx \right)^{\frac{1}{\infty}} = \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x)|$$

(совокупность таких функций f обозначаем $L_{p,\varphi}^{(n)}$)

$$\Delta_n f = \Delta_n (\Delta_n^{m-1} f) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} f(x_1 + j h_1, \dots, x_n + j h_n)$$

Лемма 1. Если $f \in L_{p,\varphi}^{(n)}$ (при $p_k = \infty$ дополнительно требуется, чтобы $f(x_1, \dots, x_n)$ была непрерывной на всем евклидовом пространстве точек $(x_1, \dots, x_n) \in E_n$ и

$$\lim_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty} \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} = 0 \quad (2)$$

для любого натурального m

$$\omega_m(\delta, f)_{p,\varphi}^{(n)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

Нижеприводимые теоремы 1 — 3 данной работы сформулированы для случая, когда n — любое натуральное число, но доказательство приводится для случая $n \geq 2$. Доказательство этих теорем в случае $n=1$ почти такое же, как и в случае $n \geq 2$.

Теорема 1. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{p,\varphi}^{(n)}$ (при $p_k = \infty$ дополнительно предполагается, что $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна на E_n и выполняется равенство (1)).

Далее для $v \geq 1$

$$\frac{1}{b_v} \int_0^{\infty} (t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) dt) \leq M, \quad (3)$$

где M не зависит от v и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{b_v} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) dt = 0.$$

Тогда

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \|L_{v,m}(f) - f\|_{p,\varphi}^{(n)} = 0.$$

Доказательство. На основании (1) имеем:

$$L_{v,m}(f) - f(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-1)^{m+1}}{b_v} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{n-1} K_v(t) \Delta_n^m f d\sigma_{\xi} dt,$$

где $T=(t\xi_1, \dots, t\xi_n)$. Отсюда при помощи обобщенного неравенства Минковского находим

$$\begin{aligned} \|L_{v,m}(f) - f\|_{p,\varphi}^{(n)} &\leq \frac{1}{b_v} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \|\Delta_n^m f\|_{p,\varphi}^{(n)} d\sigma_{\xi} dt \leq \\ &\leq \frac{s}{b_v} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) \omega_m(t, f)_{p,\varphi}^{(n)} dt, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } \alpha(t) = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} \frac{\varphi(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)}{\varphi(x_1, \dots, x_n)} \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} < t$$

На основании леммы при условиях теоремы для заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$\omega_m(t, f)_{p,\varphi}^{(n)} < \varepsilon \quad \text{при } 0 < t < \delta$$

Тогда на основании (3)

$$\begin{aligned} \frac{s}{b_v} \int_0^{\delta} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) \omega_m(t, f)_{p,\varphi}^{(n)} dt &\leq \\ &\leq \varepsilon \frac{s}{b_v} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) dt \leq \varepsilon M. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, так как

$$\begin{aligned} \omega_m(t, f)_{p,\varphi}^{(n)} &\leq 2^m \|f\|_{p,\varphi}^{(n)} \\ \frac{s}{b_v} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) \omega_m(t, f)_{p,\varphi}^{(n)} dt &\leq \\ &\leq \frac{2^m s}{b_v} \int_0^{\infty} t^{n-1} |K_v(t)| \alpha(mt) dt \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6)$$

при $v \rightarrow \infty$ из (4), (5) и (6) следует утверждение теоремы.

Мы скажем, что $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{p,\varphi}^{(n)}$ входит в класс $A_{p,\varphi,\beta,m}^{(n)}[\Phi]$ (где $\beta > 0$ положительное число), если для натурального числа $m \geq \beta$ любых положительных $\delta > 0$, $\eta > 0$ выполняются следующие условия*

$$\omega_m(\delta, f)_{p,\varphi}^{(n)} \leq c \Phi(\delta);$$

$$\eta^{-\beta} \Phi(\eta) \leq B(\delta) \delta^{-\beta} \Phi(\delta) \quad 0 < \delta < \eta, \quad (7)$$

где $\Phi(\delta)$ — неубывающая функция при $\delta \geq 0$ — положительное число, не зависящее от δ и f , а $B(\delta) \geq 1$ ограничена на любой конечной части полуоси $(0, \infty)$.

Отметим, что если

$$f \in L_{p,\varphi}^{(n)} \text{ и } 0 < \delta < \eta, \text{ то } \eta^{-m} \omega_m(\eta, f)_{p,\varphi}^{(n)} \leq 2^m \alpha^2(m\delta) \delta^{-m} \omega_m(\delta, f)_{p,\varphi}^{(n)}$$

Поэтому для любого натурального m

$$f \in A_{p,\varphi,m,n}^{(n)}[\omega_m(f)_{p,\varphi}^{(n)}].$$

* Аналогичное условие вводилось ранее С. Б. Стечкиным (3).

Лемма 2. Условие (7) и следующее условие: существует ограниченная на любой конечной части полуоси $[0, \infty)$, функция $D(y) \geq 1$ такая, что для любых положительных y_1, y_2 выполняется неравенство

$$\Phi(y_1) \leq (y_1 y_2^{-1} + 1)^\beta D(y_2) \Phi(y_2), \quad (8)$$

равносильны.

Действительно, пусть сначала выполняется (7). Докажем выполнимость неравенства (8).

Если окажется, что $0 < y_2 < y_1$, тогда так как $(y_1 y_2^{-1} + 1)^\beta > \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\beta$, то на основании (7) будем иметь

$$\Phi(y_1) \leq y_1^\beta B(y_2) y_2^{-\beta} \Phi(y_2) \leq \left(\frac{y_1}{y_2} + 1\right)^\beta B(y_2) \Phi(y_2).$$

А если $0 < y_1 < y_2$, то так как $\left(\frac{y_1}{y_2} + 1\right)^\beta > 1$, $B(y_2) \geq 1$, а $\Phi(y_1)$ неубывающая функция, очевидным образом имеем

$$\Phi(y_1) \leq \left(\frac{y_1}{y_2} + 1\right)^\beta B(y_2) \Phi(y_2).$$

Таким образом, за $D(y)$ можно взять функцию $B(y)$. Теперь докажем обратное, т. е. предположим, что выполняется (8) и покажем выполнимость (7).

Пусть $0 < y_2 < y_1$. Тогда $(y_1 y_2^{-1} + 1)^\beta \leq 2^\beta y_1^\beta y_2^{-\beta}$ и из (8) получаем, что

$$y_1^{-\beta} \Phi(y_1) \leq 2^\beta D(y_2) y_2^{-\beta} \Phi(y_2).$$

Поэтому в качестве $B(\delta)$ можно взять $2^\beta D(\delta)$.

Теорема 2. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in A_{p, \varphi, \beta, m}^{(n)}[\Phi]$ $m \geq \beta$ — целое число, для которого

$$\frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) dt \leq M, \quad \text{где } M \text{ не зависит от } \nu \geq 1.$$

$$\delta_\nu = \left(\frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) dt\right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty \quad (\nu \geq 1)$$

и $\delta_\nu \rightarrow 0$, когда $\nu \rightarrow \infty$.

Тогда при $\nu \geq 1$

$$\|L_{\nu, m}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq c \Phi(\delta_\nu),$$

где c не зависит от $\nu \geq 1$ и f .

Доказательство. Поступая так же как в доказательстве теоремы 1 будем иметь:

$$\|L_{\nu, m}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \frac{s}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) \omega_m(t, f)_{p, \varphi} dt$$

Отсюда в силу условия теоремы и в силу определения

$f \in A_{p, \varphi, \beta, m}^{(n)}[\Phi]$ и леммы [3] (полагая $\eta = t$, $\delta = \delta_\nu$), имеем

$$\|L_{\nu, m}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq \frac{s}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) \Phi(t) dt \leq s B^2(\delta_\nu) \Phi(\delta_\nu) I_\nu, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) \left(\frac{t}{\delta_\nu} + 1\right)^\beta dt = \\ &= \frac{1}{b_\nu} \int_0^{\delta_\nu} + \frac{1}{b_\nu} \int_{\delta_\nu}^\infty \leq \frac{2^\beta}{b_\nu} \int_0^{\delta_\nu} t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) dt + \\ &+ \frac{2^\beta}{b_\nu \delta_\nu^\beta} \int_{\delta_\nu}^\infty t^{n+\beta-1} |K_\nu(t)| \alpha(mt) dt \leq 2^\beta (M+1) \end{aligned}$$

Поэтому и так как $B(\delta)$ ограничена в любой конечной части полуоси $[0, \infty)$, из (9) получаем, что для $\nu \geq 1$

$$\|L_{\nu, m}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq c \Phi(\delta_\nu).$$

Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{p, \varphi}^{(n)}$ и она имеет производную

$$\frac{\partial^r f}{\partial l^r} \in L_{p, \varphi}^{(n)} \quad (r \geq 0)$$

l — любое направление $\in E_n$,

$$\frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} |K_\nu(t)| \alpha([m+r]t) dt \leq M,$$

где M не зависит от $\nu \geq 1$,

$$\delta_\nu^* = \left(\frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n+m+r-1} |K_\nu(t)| \alpha([m+r]t) dt\right)^{\frac{1}{m+r}} < \infty \quad (\nu \geq 1)$$

и $\delta_\nu^* \rightarrow 0$, когда $\nu \rightarrow \infty$.

Тогда при $\nu \geq 1$

$$\|L_{\nu, m+r}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq c \frac{1}{\delta_\nu^*} \sup_l \omega_m\left(\frac{1}{\delta_\nu^*}, \frac{\partial^r f}{\partial l^r}\right)_{p, \varphi}^{(n)},$$

где c не зависит от ν и f .

Доказательство. В условиях теоремы 3 можно применить теорему 2 и в результате получим, что

$$\|L_{\nu, m+r}(f) - f\|_{p, \varphi}^{(n)} \leq c \omega_{m+r}\left(\frac{1}{\delta_\nu^*}, f\right)_{p, \varphi}$$

Остается теперь применить следующее свойство модуля непрерывности:

$$\omega_{m+r}(\delta, f)_{p, \varphi}^{(n)} \leq \frac{1}{\delta^r} \sup_l \omega_m\left(\delta, \frac{\partial^r f}{\partial l^r}\right)_{p, \varphi}^{(n)}$$

Следующая теорема уточняет в случае $n=1$ и $m=1$ теорему 2.

Теорема 4. Пусть $f(x) \in A_{p, \varphi, \beta, 2}^{(1)}[\Phi]$ ($0 < \beta \leq 2$)

$$\frac{1}{b_\nu} \int_0^\infty |K_\nu(t)| \alpha(t) dt \leq M \quad (b_\nu = 2 \int_0^\infty K_\nu(t) dt),$$

где M не зависит от $\nu \geq 1$

$$\delta_v = \left(\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^\beta |K_v(t)| \alpha(t) dt \right)^{\frac{1}{\beta}} < \infty \quad (v \geq 1)$$

и $\delta_v \rightarrow 0$, когда $v \rightarrow \infty$. Тогда $\|L_{v,1}(f) - f\|_{p,\varphi}^{(1)} \leq c \Phi(\delta_v)$, где c не зависит от $v \geq 1$ и f .

Доказательство. Очевидно, что

$$L_{v,1}(f) - f = \frac{1}{b_v} \int_0^\infty [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] K_v(t) dt$$

и поэтому

$$\|L_{v,1}(f) - f\|_{p,\varphi}^{(1)} \leq b_v^{-1} \int_0^\infty |K_v(t)| \alpha(t) \omega_2(t, f)_{p,\varphi}^{(1)} dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{b_v} \int_0^\infty |K_v(t)| \alpha(t) \Phi(t) dt \leq B^2(\delta_v) \Phi(\delta_v) I_v,$$

где

$$I_v = \frac{1}{b_v} \int_0^\infty |K_v(t)| \alpha(t) \left(\frac{t}{\delta_v} + 1 \right)^\beta dt.$$

Так же как в доказательстве теоремы 2 легко показать, что

$$I_v \leq 4(M+1)$$

и поэтому доказательство теоремы 4 заканчивается.

Теорема 2.5. Пусть $f(x) \in L_{p,\varphi}^{(1)}$ и она имеет производную $f'(x) \in L_{p,\varphi}^{(n)}$. M и δ_v удовлетворяют условию теоремы 4 при $\beta=2$. Тогда

$$\|L_{v,1}(f) - f\|_{p,\varphi}^{(1)} \leq c \frac{1}{\delta_v} \omega_1(\delta_v, f')_{p,\varphi}^{(1)} \quad (\delta_v = \int_0^\infty t^2 |K_v(t)| \alpha_1(t) dt),$$

где c не зависит от m, v и f .

Эта теорема следует из теоремы 4 тем же путем, как теорема 3 получилась из теоремы 2.

Проверим теперь выполнимость условий, входящих в вышеуказанные теоремы, для более конкретных ядерных функций $K_v(t)$, а именно — рассматривая ядерные функции вида $K_v(t) = K(vt)$ или же $K_v(t) = L^v(t)$. Эти условия заменим условиями, наложенными на $K(t)$ и $L(t)$. Конкретно говоря, при некоторых условиях, наложенных на $K(t)$ и $L(t)$, мы должны показать, что если $K_v(t) = K(vt)$ или же $K_v(t) = L^v(t)$, то выполняется следующее:

а) существует M , не зависящее от $v \geq v_0$, такое, что

$$\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n-1} K_v(t) \alpha(mt) dt \leq M$$

б) если $\delta > 0$, то

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n-1} K_v(t) \alpha(mt) dt = 0 \quad (m — натуральное число)$$

в) при $v \rightarrow \infty$ и $\beta > 0$

$$\delta_v^\beta = \frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K_v(t) \alpha(mt) dt$$

стремится к нулю как некоторая положительная степень $\frac{1}{v}$.

Пусть сначала $K_v(t) = K(vt)$ где $K(t)$ является четной функцией на вещественной оси, натуральное число n и функция $\alpha(mt)$ такие, что для них конечен интеграл

$$\int_0^\infty t^{n-1} K(t) \alpha(mt) dt.$$

Тогда

$$b_v = \frac{s}{v^n} \int_0^\infty t^{n-1} K(t) dt = A^{-1} v^{-n}$$

$$\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n-1} K(vt) \alpha(mt) dt = A v^n \int_0^\infty t^{n-1} K(vt) \alpha(mt) dt =$$

$$= A \int_0^\infty \tau^{n-1} K(\tau) \alpha\left(\frac{m}{v} \tau\right) d\tau \leq A \int_0^\infty \tau^{n-1} K(\tau) \alpha(\tau) d\tau = M, \text{ если } v \geq m.$$

Таким образом, в этом случае условие а) выполнено. Пусть $\delta > 0$

$$\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n-1} K(vt) \alpha(mt) dt = A v^n \int_0^\infty t^{n-1} K(vt) \alpha(mt) dt \leq$$

$$\leq A \int_{\delta v}^\infty \tau^{n-1} K(\tau) \alpha(\tau) d\tau, \text{ если } v \geq m,$$

что и показывает, что условие б) также выполнено.

Если дополнительно предполагать, что конечен интеграл

$$\int_0^\infty t^{n+\beta-1} K(t) \alpha(t) dt,$$

где $\beta > 0$, то

$$\delta_v^\beta = \frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K(vt) \alpha(mt) dt =$$

$$= A v^n \int_0^\infty \tau^{n+\beta-1} K(v\tau) \alpha(mt) d\tau \leq A v^{-\beta} \int_0^\infty \tau^{n+\beta-1} K(\tau) \alpha(\tau) d\tau, \text{ если } v \geq m,$$

или же при $v \geq m$ существует константа c , такая, что $\delta_v \leq c v^{-1}$.

Таким образом, в случае, когда $K_v(t) = K(vt)$ в условиях, наложенных на $K(t)$, а), б), в) выполнены.

Теперь перейдем к случаю, когда $K_v(t) = L^{-v}(t)$, где $L(t)$ удовлетворяет условиям: $L(0) = 1$, четная, монотонно возрастает на $[0, \infty)$ и та-

кая, что существует несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{dt}{L(t)}$. А $\alpha(t)$ такая, что

существует $\mu \geq 0$, что на $[0, \infty)$ отношение $\frac{\alpha(t)}{L^\mu(t)}$ является ограниченным сверху числом N .

Пусть $\varepsilon < 1$ произвольное положительное число.

$$b_v^{-1} \int_0^\infty t^{n-1} L^{-v}(t) \alpha(mt) dt = b_v^{-1} \int_0^\varepsilon t^{n-1} L^{-v}(t) \alpha(mt) dt + b_v^{-1} \int_\varepsilon^\infty \quad (10)$$

Так как в силу свойств функции $\alpha(t)$

$$b_v \int_0^\varepsilon t^{n-1} L^{-v}(t) \alpha(mt) dt \leq \frac{\alpha(m\varepsilon)}{s} \quad (11)$$

С другой стороны, в силу свойств $L(t)$ существует такое ν_0 , что отношение $\frac{t^{n-1}}{L^{\nu_0}(t)}$ является ограниченным сверху числом M .

Поэтому и так как $b_v > s \frac{\delta^n}{nL^\nu(\delta)}$ при любом $\delta > 0$, то, полагая $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, находим

$$b_v^{-1} \int_\varepsilon^\infty t^{n-1} L^{-v}(t) \alpha(mt) dt \leq \frac{2^n n L^\nu \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)}{s \varepsilon^n} \frac{MN}{L^{\nu-\nu_n-\nu_0}(\varepsilon)} \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{L(t)} \quad (12)$$

Отношение $\frac{L \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)}{L(\varepsilon)} < 1$. Следовательно, (10)–(12) показывают, что для рассматриваемого случая выполнено а). В свою очередь (12) показывает, что б) также выполнено.

Для того, чтобы проверить выполнимость в) в случае, когда $K_v(t) = L^v(t)$, а $L(t)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, докажем следующую лемму.

Лемма 3. Если функция $L(t)$ обладает всеми свойствами, указанными выше, и, кроме того, дифференцируема на $(0, \infty)$, в точке $t=0$ имеет производную справа и такова, что

I) существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{L'(t)}{t^{\beta-1}} = A \neq 0$, $1 \leq \beta$,

II) найдутся такие числа $\gamma \geq 0$ и $\mu \geq 0$, что $\frac{|L'(t)|}{L^\gamma(t)}$ и $\frac{\alpha(t)}{L^\mu(t)}$ ограничены на всей вещественной оси, где $\alpha(t) \geq 1$ ($\alpha(0)=1$) непрерывная на числовой оси, то при любых натуральных n и k

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{s^{\nu k}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+k\beta-1} \alpha(t)}{L^\nu(t)} dt = \frac{B_k}{A^k}, \quad (13)$$

где $B_k = n(n+\beta) \dots [n+(k-1)\beta]$.

Доказательство. Интегрирование по частям дает

$$1 = \frac{s}{b_\nu} \int_0^\infty t^{n-1} L^{-v}(t) dt = \frac{s}{b_\nu} \frac{t^n L^{-v}(t)}{n} \Big|_0^\infty + \frac{s}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^n}{n} \frac{L'(t) dt}{L^{\nu+1}(t)} = \frac{s^\nu}{b_\nu n} \int_0^\infty \frac{t^{n+\beta-1}}{L^\nu(t)} \frac{L'(t) dt}{t^{\beta-1} L(t)}. \quad (14)$$

На основании условия I) леммы можно сказать, что существует такое $\delta > 0$, что при $0 \leq t \leq \delta$ имеем

$$\frac{L'(t)}{t^{\beta-1} L(t)} \geq \frac{A}{2}.$$

Поэтому из (14) будем иметь

$$1 > \frac{s A_\nu}{2 b_\nu n} \int_0^\delta \frac{t^{n+\beta-1} dt}{L^\nu(t)} + \frac{s^\nu}{b_\nu n} \int_\delta^\infty \frac{t^{n+\beta-1}}{L^\nu(t)} \frac{L'(t) dt}{t^{\beta-1} L(t)}$$

Так как подынтегральные выражения последнего неравенства положительны, то из него следует, что

$$\frac{s^\nu}{b_\nu n} \int_0^\delta \frac{t^{n+\beta-1} dt}{L^\nu(t)} < \frac{2}{A} \quad (15)$$

Перепишем (14) следующим образом:

$$1 = A \frac{s^\nu}{b_\nu n} \int_0^\infty \frac{t^{n+\beta-1} dt}{L^\nu(t)} + \frac{s^\nu}{b_\nu n} \int_0^\infty \frac{t^{n+\beta-1} \alpha(t)}{L^\nu(t)} \left[\frac{L'(t)}{\alpha(t) t^{\beta-1} L(t)} - A \right] dt.$$

Используя (15) и условие II) леммы, мы аналогично тому как мы это сделали в доказательстве а), покажем, что при $\nu \rightarrow \infty$ второе слагаемое последнего тождества стремится к нулю. Тем самым равенство доказано при $k=1$.

Перейдем теперь к случаю, когда k — произвольное натуральное число.

Применяя опять интегрирование по частям, имеем

$$\int_0^\infty \frac{t^{n+k\beta-1} dt}{L^\nu(t)} = \frac{t}{n+(k-1)\beta} \frac{1}{L^\nu(t)} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^{n+(k-1)\beta}}{n+(k-1)\beta} \frac{\nu L'(t) dt}{L^{\nu+1}(t)},$$

или

$$\frac{[n+(k-1)\beta] s^{\nu k}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+(k-1)\beta-1} dt}{L^\nu(t)} = \frac{s^{\nu k}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+k\beta-1} \alpha(t)}{L^\nu(t)} \frac{L'(t) dt}{t^{\beta-1} L(t) \alpha(t)}. \quad (16)$$

Исходя из этого соотношения, лемма 3 доказывается по индукции. Действительно пусть сначала $\alpha(t) \equiv 1$ и равенство (13) справедливо при $k=r-1$. Тогда из (13) получаем, что

$$\frac{s^{\nu r}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+r\beta-1} dt}{L^\nu(t)} \leq N, \quad (17)$$

где N не зависит от ν . С другой стороны, из (16)

$$\frac{[n+(r-1)\beta] s^{\nu r}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+(r-1)\beta-1} dt}{L^\nu(t)} = \frac{s^{\nu r}}{b_\nu} A \int_0^\infty \frac{t^{n+r\beta-1} dt}{L^\nu(t)} + \frac{s^{\nu r}}{b_\nu} \int_0^\infty \frac{t^{n+r\beta-1}}{L^\nu(t)} \left[\frac{L'(t)}{t^{\beta-1} L(t)} - A \right] dt.$$

Так же как выше, если пользоваться неравенством (17), легко убедиться, что второй интеграл, стоящий в правой части последнего равенства при $\nu \rightarrow \infty$, стремится к нулю. Таким образом, получаем, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{[n+(r-1)\beta]s^{vr}}{b_v} \int_0^\infty \frac{t^{n+(r-1)\beta-1} dt}{L^v(t)} =$$

$$= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{s^{vr} A}{b_v} \int_0^\infty \frac{t^{n+r\beta-1}}{L^v(t)} dt,$$

что и показывает, что при $\alpha(t) \equiv 1$ (13) справедливо также при $k=r$.

Для $\alpha(t) \equiv 1$ лемма доказана.

После этого доказывается случай $\alpha(t) \neq 1$ из (16), если ее написать в следующем виде

$$\frac{[n+(k-1)\beta]s^{vk}}{b_v} \int_0^\infty \frac{t^{n+(k-1)\beta-1}}{L^v(t)} dt =$$

$$= \frac{s^{vk} A}{b_v} \int_0^\infty \frac{t^{n+k\beta-1} \alpha(t) dt}{L^v(t)} + \frac{s^{vk}}{b_v} \int_0^\infty \frac{t^{n+k\beta-1} \alpha(t)}{L^v(t)} \left[\frac{L'(t)}{t^{\beta-1} L(t) \alpha(t)} - A \right] dt.$$

Так же как выше доказывается, что второй интеграл правой части последнего при $v \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Лемма 3 доказана полностью.

Лемма 3 при $n=1$, $\beta=2$, $\alpha(t) \equiv 1$ доказана в [1].

Следующая лемма при помощи предыдущей леммы дает возможность в случае, когда $k_v(t) = L^{-v}(t)$, оценить сверху δ_v , что и дает возможность утверждать в) для рассматриваемого случая.

Лемма 4. Пусть $L(t)$, $\alpha(t)$ и β удовлетворяют условиям предыдущей леммы.

$a > 0$, $\lambda = \frac{a}{\beta}$, k — наименьшее целое число, не меньшее λ . Тогда если $p = \frac{k}{\lambda}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\delta_v^\beta = \frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n+a-1} L^{-v}(t) \alpha(t) dt = \int_0^\infty \left[\frac{1}{b_v^{1/p}} t^{\frac{n-1}{p} + \lambda\beta} \right.$$

$$\left. L^{-\frac{v}{p}}(t) \alpha(t) \right] \left[\frac{1}{b_v^{1/q}} t^{\frac{n-1}{q}} L^{-\frac{v}{q}}(t) \right] dt \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n+k\beta-1} L^{-v}(t) \alpha^{\frac{k}{\lambda}}(t) dt \right)^{\frac{\lambda}{k}} \left(\frac{1}{b_v} \int_0^\infty t^{n-1} L^{-v}(t) dt \right)^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{s^{1/q}} \left(b_v^{-1} \int_0^\infty t^{n+k\beta-1} L^{-v}(t) \alpha^{\frac{k}{\lambda}}(t) dt \right)^{\lambda/k}$$

Отметим, что из вышеуказанных теорем следуют многие известные результаты, но указывать их мы не будем.

Пусть теперь функция $f(x_1, \dots, x_n)$ измерима и почти везде органичена в n -мерном евклидовом пространстве E_n и вне некоторого шара с центром в начале координат и радиуса r_0 тождественно равняется нулю.

Рассматривая семейства операторов вида

$$L_{v,1}(f; x) = \frac{1}{b_v} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty f(x_1+t_1, \dots, x_n+t_n) K_v \left(\sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2} \right) dt_1 \dots dt_n,$$

где $K_v(t) \geq 0$ при любом $v > 0$, мы для заданного $\varepsilon > 0$ будем находить такое $R > 0$, что для всех вещественных $x_1, \dots, x_n$ и $v > 0$, удовлетворяющих неравенству $x_1^2 + \dots + x_n^2 + \frac{1}{v_2} \geq R$, выполнялось неравенство

$$|L_v(f; x)| \leq \varepsilon.$$

Допустим, что $0 < \beta \leq 1$ такое, что интеграл

$$b_v^{-1} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K_v(t) dt$$

конечен при любом $v > 0$. Далее пусть $M > 0$ и $r > 0$. Построим функцию $F_{r\beta}(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом:

$$F_{r\beta}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} M - \frac{M}{r^\beta} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\beta/2}, & \text{если } x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{если } x_1^2 + \dots + x_n^2 > r^2 \end{cases}$$

Очевидно, что для произвольного вещественного $x_1, \dots, x_n$, $t_1, \dots, t_n$

$$|F_{r\beta}(x_1+t_1, \dots, x_n+t_n) - F(x_1, \dots, x_n)| \leq \frac{M}{r^\beta} (t_1^2 + \dots + t_n^2)^{\beta/2} \quad (18)$$

Если $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq r^2$, то из (18) для любых вещественных $t_1, \dots, t_n$ имеем:

$$0 \leq F_{r\beta}(x_1+t_1, \dots, x_n+t_n) \leq \frac{M}{r^\beta} (t_1^2 + \dots + t_n^2)^{\beta/2}$$

Тогда получим, что

$$L_v(F; x) = \frac{1}{b_v} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty F_{r\beta}(x_1+t_1, \dots, x_n+t_n) K_v \left(\sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2} \right) dt_1 \dots dt_n \leq$$

$$\leq \frac{1}{b_v} \int_{-\infty}^\infty \dots \int_{-\infty}^\infty \frac{M}{r^\beta} \left(\sum_{j=1}^n t_j^2 \right)^{\beta/2} K_v \left[\left(\sum_{j=1}^n t_j^2 \right)^{1/2} \right] dt_1 \dots dt_n$$

Замена $t_1, \dots, t_n$ полярными координатами при $n \geq 2$ дает

$$L_{v,1}(F; x) = \frac{M}{b_v r^\beta} \int_0^\infty \int_{\sigma} t^{n-1} K_v(t) t^\beta d\sigma_\xi dt =$$

$$= \frac{Ms}{b_v r^\beta} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K_v(t) dt. \quad (19)$$

Очевидно, что при условиях, наложенных на $f(x_1, \dots, x_n)$, можно подобрать M и r так, чтобы почти при всех вещественных $x_1, \dots, x_n$ выполнялось неравенство

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \leq F(x_1, \dots, x_n) \quad (20)$$

Действительно, пусть $\alpha = \frac{M}{r^\beta} > 0$, любое вещественное число и пусть

$k = \sup_{-\infty < x_1, \dots, x_n < \infty} |f(x_1, \dots, x_n)|$. Подберем M из $F(x_1, \dots, x_n) = k$ условия при $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$.

Тогда, очевидно, $M = \alpha r_0 + k$ и тем самым r можно найти из условия $\frac{M}{r^\beta} = \alpha$

Таким образом, $r = \left(r_0^\beta + \frac{k}{\alpha}\right)^{1/\beta}$

Очевидно, выполняется неравенство (20). Поэтому из выражения оператора $L_{v,1}(f)$, ясно, что

$L_{v,1}(f) \leq L_{v,1}(F)$ (так как $K_v(t) \geq 0$ при $t \geq 0$). На основании (19) окончательно имеем, что для всех $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих неравенству $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq r^2 = \left(r_0^\beta + \frac{k}{\alpha}\right)^{2/\beta}$,

выполняется неравенство

$$|L_{v,1}(f; x)| \leq \frac{\alpha s}{b_v} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K_v(t) dt \quad (21)$$

С другой стороны, при любых вещественных $x_1, \dots, x_n$ на основании неравенства Гельдера имеем

$$\begin{aligned} |L_{v,1}(f; x)| &\leq \frac{1}{b_v} \|K_v(\sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2})\|_q^{(n)} \|f\|_p^{(n)} = \\ &= \frac{s^{1/q}}{b_v} \|f\|_p^{(n)} \left(\int_0^\infty t^{n-1} K_v^q(t) dt \right)^{1/q}. \end{aligned} \quad (22)$$

Отметим, что тем же способом можно показать, что неравенства (21) и (22) справедливы и при $n=1$, но в этом случае нужно принять, что $s=2$.

Теперь допустим, что $b_v^{-1} \int_0^\infty t^{n+\beta-1} K_v(t) dt \leq \varphi(v)$,

$$b_v^{-1} \left(\int_0^\infty t^{n-1} K_v^q(t) dt \right)^{1/q} \leq \psi(v),$$

причем $\varphi(v)$ невозрастающая $\psi(v)$ неубывающая функция при $0 < v < \infty$.

Из (21) и (22) соответственно имеем

$$|L_{v,1}(f; x)| \leq \alpha s \varphi(v)$$

при

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq r^2 = \left(r_0^\beta + \frac{k}{\alpha}\right)^{2/\beta},$$

$$|L_{v,1}(f; x)| \leq s^{1/q} \|f\|_p^{(n)} \psi(v), \quad (24)$$

при любых вещественных $x_1, \dots, x_n$.

Пользуясь неравенствами (23) и (24), для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти такое $R > 0$, что для $x_1^2, \dots, x_n^2, v > 0$, удовлетворяющих неравенству

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + \frac{1}{v^2} \geq R,$$

выполнялось неравенство

$$|L_v(f; x)| \leq \varepsilon$$

Предположим, далее, что $K_v(t) = K(vt)$ (при $n=1$ мы, кроме вышеуказанных общих условий, предположим, что она четная, а при $n \geq 2$ опять считаем, что $K(t)$ определена для всех $t \geq 0$).

$$\text{Тогда} \quad \varphi(v) = A \frac{1}{v^\beta}, \quad (25)$$

$$\psi(v) = B v^{n/p}, \quad (26)$$

где

$$A = \frac{\int_0^\infty \tau^{n+\beta-1} K(\tau) d\tau}{s \int_0^\infty \tau^{n-1} K(\tau) d\tau}, \quad B = \frac{\left(\int_0^\infty \tau^{n-1} K^q(\tau) d\tau \right)^{1/q}}{s^{1/p} \int_0^\infty \tau^{n-1} K(\tau) d\tau}$$

Так, если $K(t) = (t^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}}$, можно предположить, что $0 < \beta < 1$.

Допустим, что $v = \frac{1}{x_{n+1}}$.

Тогда

$$L_{v,1}(f) = U(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}),$$

где U гармоническая функция в $x_{n+1} > 0$, для которого

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \|U(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - f(x_1, \dots, x_n)\|_p^{(n)} = 0$$

В этом случае неравенства (25) и (26) перепишутся в следующем

виде:

$$|U(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})| \leq \alpha A^* x_{n+1}, \quad (27)$$

$$\text{если} \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq r^2 = \left(r_0^\beta + \frac{k}{\alpha}\right)^{2/\beta} x_{n+1} > 0;$$

$$|U(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})| \leq \frac{B^* \|f\|_p^{(n)}}{x_{n+1}^{n/p}}, \quad (28)$$

если $x_1, \dots, x_n$ любые вещественные числа, а $x_{n+1} > 0$,

где

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{\int_0^\infty \tau^{n+\beta-1} (\tau^2 + 1)^{-\frac{n+1}{2}} d\tau}{\int_0^\infty \tau^{n-1} (1 + \tau^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\tau} \\ B^* &= \frac{\left(\int_0^\infty \tau^{n-1} (1 + \tau^2)^{-\frac{(n+1)q}{2}} d\tau \right)^{1/q}}{s^{1/p} \int_0^\infty \tau^{n-1} (1 + \tau^2)^{-\frac{n+1}{2}} d\tau}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Отметим, что все интегралы, входящие в выражение A^* и B^* , легко выражаются через гамма-функции Эйлера, так как при $\alpha > 0, \gamma > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} dx}{(1+x)^{\alpha+\gamma}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \quad (\text{см. [2]; 3.172}).$$

$$\text{Если } n \geq 2, s = 2 \frac{\frac{n}{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Неравенства (27) и (28) можно рассматривать как некоторое обоснование принципа Сен-Венана для задачи Дирихле в полупространстве $x_{n+1} > 0$.

Действительно, пусть $f_1(x_1, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n)$ входят в класс $L_p^{(n)}$ и такие, что вне сферы с радиусом r_0 и центром в начале координат тождественно равны $f_1(x_1, \dots, x_n) = f_2(x_1, \dots, x_n)$, ограничена по модулю в E_n почти всюду числом k . Далее пусть

$$U_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ и } U_2(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

гармонические функции, граничные значения которых в смысле $L_p^{(n)}$ соответственно суть $f_1(x_1, \dots, x_n)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n)$. Написав неравенства (3.10) и (3.11) для

$$U(x_1, \dots, x_{n+1}) = U_1(x_1, \dots, x_{n+1}) - U_2(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) - f_2(x_1, \dots, x_n).$$

Заданному $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое конкретное число R , что для всех вещественных $x_1, \dots, x_n$ и всех $x_{n+1} > 0$, удовлетворяющих неравенству

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 \geq R^2,$$

выполнялось неравенство

$$|U_1(x_1, \dots, x_{n+1}) - U_2(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскаков В. А. и Фомин Г. А. О сходимости операторов вида $L_n(f; x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)dt}{L_n(t)}$. Уч. зап. Калининского гос. пед. института им. М. И. Калинина. Труды кафедры мат. анализа, т. XXVI, 1958.
2. Рыжик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
3. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. Изв. АН СССР, серия матем., 1959, 15, стр. 219—242.

Э. С. Чэфэров

Функцияларын хэтти интеграл операторларла яхынлашмасынын тэртиби наггында

ХҮЛАСЭ

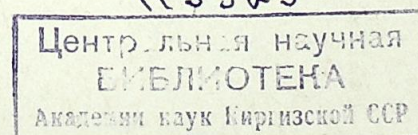
Ишдэ бир вэ ја чохдэјишэнли функцияларын кафи дэрэчэдэ үмү- нүвэси олан хэтти интеграл операторлар аилэси илэ мүүжэн инте- граллы нормаларда яхынлашдырылмасынын мүмкүн олмасы вэ белэ яхынлашманын сүр'эти барэдэ теоремлэр исбат олунмушдур. Бу я- хынлашма сүр'эти эсасэн яхынлашдырылан функциянын дифференциал

хассэлэриндэн вэ бахылан операторлар нүвэсинин хүсусијјэтлэриндэн асылдыр.

Ишдэ һэмин теоремлэрин шэртлэри нисбэтэн аз үмүми олан нүвэ- лэр үчүн јохланылмышдыр.

Даһа сонра ишдэ бир синиф интеграл операторлар аилэсинин сыфра јакынлығы мәсэлэси өјрөнилмишдир. Хүсуси һалда бу ахырынчы нэ- тичэлэрдэн јарымфэзада гармоник вэ сэрһэд функциясы мүүжэн шэрт- лэри өдэјэн функциялар үчүн Сен-Венан принципинин мүүжэн эсас- ландырылмасы алыныр.

738230



А. Д. ГАДЖИЕВ, А. С. ДЖАФАРОВ, Л. Г. ЛАБСКЕР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно много работ, посвященных изучению асимптотического значения приближения функций различными семействами операторов. Не останавливаясь на них, мы впоследствии укажем некоторые результаты, которые как частные случаи следуют из доказанной нами здесь теоремы 1.

В настоящей работе исследуется асимптотическое значение приближения функций семейством линейных интегральных операторов вида

$$L_{\lambda}(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] K_{\lambda}(t) dt, \quad (1)$$

где $\lambda \geq 0$ параметр, а вещественные числа $p_{k,\lambda}, \alpha_{k,\lambda}$ (не нарушая общности, можно предположить, что все $\alpha_{k,\lambda} \geq 0$) ($k=1, 2, \dots$) и ядро $K(t)$ обладают следующими свойствами:

$$1^{\circ}. \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \leq M < \infty, \text{ где } M \text{ не зависит от } \lambda; \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} = 1, \text{ для каж-}$$

дого $\lambda \geq 0$; $\sup_{k,\lambda} \{\alpha_{k,\lambda}\} = \alpha^* < \infty$.

Если n фиксированное натуральное число, то $|R_{n,\lambda}| \geq \eta > 0$, где η не зависит от λ , а $R_{s,\lambda} = 0$ для всякого четного $s < n$ ($s \neq 0$); здесь $R_{n,\lambda} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n.$$

2°. $K_{\lambda}(t)$ — четная неотрицательная функция при $-\infty < t < \infty$ для всех $\lambda \geq 0$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(t) dt = 1.$$

А. Д. ГАДЖИЕВ, А. С. ДЖАФАРОВ, Л. Г. ЛАБСКЕР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ЗНАЧЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМ СЕМЕЙСТВОМ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Известно много работ, посвященных изучению асимптотического значения приближения функций различными семействами операторов. Не останавливаясь на них, мы впоследствии укажем некоторые результаты, которые как частные случаи следуют из доказанной нами здесь теоремы 1.

В настоящей работе исследуется асимптотическое значение приближения функций семейством линейных интегральных операторов вида

$$L_{\lambda}(f, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] K_{\lambda}(t) dt, \quad (1)$$

где $\lambda \geq 0$ параметр, а вещественные числа $p_{k,\lambda}, \alpha_{k,\lambda}$ (не нарушая общности, можно предположить, что все $\alpha_{k,\lambda} \geq 0$) ($k=1, 2, \dots$) и ядро $K(t)$ обладают следующими свойствами:

1°. $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \leq M < \infty$, где M не зависит от λ ; $\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} = 1$, для каждого $\lambda \geq 0$; $\sup_{k,\lambda} \{\alpha_{k,\lambda}\} = \alpha^* < \infty$.

Если n фиксированное натуральное число, то $|R_{n,\lambda}| \geq \eta > 0$, где η не зависит от λ , а $R_{s,\lambda} = 0$ для всякого четного $s < n$ ($s \neq 0$); здесь $R_{n,\lambda} =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n.$$

2°. $K_{\lambda}(t)$ — четная неотрицательная функция при $-\infty < t < \infty$ для всех $\lambda \geq 0$, такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda}(t) dt = 1.$$

и существует неотрицательная неубывающая на $[0, \infty]$ функция $\Phi(t)$, для которой $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\Phi(t)}{t^n} = 1$

и существует интеграл $\Delta_\lambda = \int_0^\infty \Phi(t) K_\lambda(t) dt < +\infty$.

Очевидно, чтобы оператор (1) имел смысл, функция $f(x)$ должна быть такой, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t)$$

сходится при каждом фиксированном значении $t \in (-\infty, \infty)$.

Отметим, что числа $p_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ ($k=1, 2, \dots$), выбранные следующим образом

$$p_{k,\lambda} = \begin{cases} (-1)^{k+1} C_n^k, & k=1, 2, \dots, n, \\ 0, & k=n+1, n+2, \dots; \end{cases} \quad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} k, & k=1, 2, \dots, n, \\ 0, & k=n+1, n+2, \dots, \end{cases}$$

обладают свойствами 1°.

Теорема 1°. Пусть:

1. Измеримая функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 имеет производные до $(n-1)$ -го порядка включительно, а в точке x_0 имеет правую и левую конечные n -ые производные $f_+^{(n)}(x_0)$ и $f_-^{(n)}(x_0)$, и кроме того, пусть

$$|f(x)| \leq \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $1 \leq \varphi(x) < \infty$ на $(-\infty, \infty)$.

2. Для любого $\delta > 0$ при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* t) \Phi(t) K_\lambda(t) dt = O(\Delta_\lambda), \quad (2)$$

$$\text{где } \mu(t) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |y| \leq t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)}{R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad (3)$$

где знак $+$ или $-$ в правой части берется в зависимости от того, n — четное или нечетное².

¹ Теорема 1 в частном случае, при

$$p_{k,\lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots; \end{cases} \quad \alpha_{k,\lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots \end{cases}$$

$n=1$, $\Phi(t)=t$ и ограниченности $f(x)$ на всей числовой оси, доказана Р. Г. Мамедовым [3].

² Заметим, что из условий, наложенных на функцию $f(x)$ в теореме, следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t)$$

при каждом фиксированном значении $t \in (-\infty, \infty)$.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| |f(x + \alpha_{k,\lambda} t)| = \varphi(x) \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \frac{|f(x + \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x + \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x)} \leq M \varphi(x) \mu(\alpha^* t).$$

Доказательство. Рассуждения проведем для нечетного n . Случай, когда n четное, исчерпывается аналогично.

Рассмотрим разность $L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)$.

В силу свойств 1° и 2° легко подсчитать, что

$$L_\lambda(f; x_0) - f(x_0) = \int_0^\infty B_\lambda(t) K_\lambda(t) dt, \quad (4)$$

где

$$B_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} [f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t) + f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t) - 2f(x_0)].$$

Теперь учитывая, что n — нечетное, по формуле Тейлора имеем:

$$f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \alpha_{k,\lambda} t + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \alpha_{k,\lambda}^{n-1} t^{n-1} + \\ + \frac{f_+^{(n)}(x_0) + \beta_1(\alpha_{k,\lambda} t)}{n!} \alpha_{k,\lambda}^n t^n$$

и

$$f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t) = f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!} \alpha_{k,\lambda} t + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \alpha_{k,\lambda}^{n-1} t^{n-1} - \\ - \frac{f_-^{(n)}(x_0) + \beta_2(\alpha_{k,\lambda} t)}{n!} \alpha_{k,\lambda}^n t^n,$$

где β_1 и β_2 стремятся к нулю при $t \rightarrow +0$ равномерно относительно k и λ . Откуда, в силу свойства 1° чисел $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$,

$$B_\lambda(t) = \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} R_{n,\lambda} t^n + \gamma_\lambda(t) \cdot t^n, \quad (5)$$

где $\gamma_\lambda(t) = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} p_{k,\lambda} \alpha_{k,\lambda}^n [\beta_1(\alpha_{k,\lambda} t) - \beta_2(\alpha_{k,\lambda} t)] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +0$ равномерно по λ .

Введем в рассмотрение функцию $\sigma_\lambda(t)$, определяемую следующим образом:

$$\sigma_\lambda(t) = \frac{B_\lambda(t)}{\Phi(t)} - R_{n,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (6)$$

Тогда

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{|B_\lambda(t)|}{\Phi(t)} + C_0 \leq$$

$$\leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| \left\{ \frac{|f(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)} \cdot \frac{\varphi(x_0 + \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} + \frac{|f(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)|}{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\varphi(x_0 - \alpha_{k,\lambda} t)}{\varphi(x_0)} + 2 \frac{|f(x_0)|}{\varphi(x_0)} + C_0 \right\} \leq \frac{\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |p_{k,\lambda}| [2\mu(\alpha_{k,\lambda} t) + 2] + C_0,$$

где

$$C_0 = (\alpha^*)^n \cdot M \left| \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \right|.$$

Из определения функции $\mu(t)$ видно, что она не меньше единицы и не убывает на $[0, \infty)$.

Поэтому

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(t)} \mu(\alpha^* t) \cdot M + C_0. \quad (7)$$

В силу (6) и (5) заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sigma_\lambda(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \gamma_\lambda(t) = 0$$

равномерно относительно λ .

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\sigma_\lambda(t)| < \varepsilon \text{ при } 0 \leq t < \delta, \lambda \geq 0. \quad (8)$$

При $t > \delta$ из (8) получим:

$$|\sigma_\lambda(t)| \leq \frac{4\varphi(x_0)}{\Phi(\delta)} \mu(\alpha^* t) M + C_0 \leq C \mu(\alpha^* t), \quad (9)$$

где постоянная C не зависит от t и λ .

Определяя $B_\lambda(t)$ из (6) и подставляя в (4), получим

$$L_\lambda(f; x_0) - f(x_0) = R_{n,\lambda} \frac{f_+^{(n)}(x_0) - f_-^{(n)}(x_0)}{n!} \Delta + \int_0^\infty \sigma_\lambda(t) \Phi(t) K_\lambda(t) dt. \quad (10)$$

Имея ввиду (8), (9) и (2), оценим интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^\infty \delta_\lambda(t) \Phi(t) K_\lambda(t) dt.$$

$$|I(\lambda)| \leq \int_0^\delta |\sigma_\lambda(t)| \Phi(t) K_\lambda(t) dt + \int_\delta^\infty |\sigma_\lambda(t)| \Phi(t) K_\lambda(t) dt <$$

$$< \varepsilon \int_0^\infty \Phi(t) K_\lambda(t) dt + C \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) \Phi(t) K_\lambda(t) dt = \varepsilon \cdot \Delta_\lambda + o(\Delta_\lambda).$$

В силу произвольности ε

$$|I(\lambda)| = o(\Delta_\lambda) \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), закончим доказательство теоремы.

Теперь рассмотрим некоторые частные случаи операторов (1).

$$L_\lambda(f; x) = \frac{1}{D_\lambda} \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] \frac{|t|^\alpha}{L^\lambda(t)} dt, \quad (12)$$

где $D_\lambda = \int_{-\infty}^\infty \frac{|t|^\alpha dt}{L^\lambda(t)}$, $\alpha \geq 0$ — вещественное число; $\lambda \geq 1$; $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ обладают свойствами 1°, а функция $L(t)$ такова, что

- a) $L(0) = 1$;
- b) $L(t)$ — четная;
- c) $L(t)$ монотонно возрастает на $[0, \infty)$;
- d) существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|t|^\alpha dt}{L(t)};$$

e) $L(t)$ дифференцируема на $[0, \infty)$, в точке $t=0$ имеет производную справа;

f) существует такое число $\beta \gg 1$, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{L'(t)}{t^{\beta-1}} = A \neq 0;$$

g) существует такое число $\nu \geq 0$, что отношение $\frac{|L'(t)|}{L^\nu(t)}$ ограничено на $[0, \infty)$.

Оператор (13) получается из оператора (1) при $K_\lambda(t) = \frac{|t|^\alpha}{D_\lambda L^\lambda(t)}$.

За функцию же $\Phi(t)$ можно выбрать t^n .

$$\text{Тогда} \quad \Delta_\lambda = \frac{1}{D_\lambda} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+n}}{L^\lambda(t)} dt. \quad (13)$$

Справедлива следующая лемма, доказанная А. С. Джафаровым в работе [2].

Л е м м а³. Пусть функция $L(t)$ удовлетворяет указанным выше условиям а) — г). Тогда для любого натурального m :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2\lambda^m}{D_\lambda} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha+m\beta} dt}{L^\lambda(t)} = \frac{B_m}{A^m},$$

где $B_m = (\alpha+1)(\alpha+1+\beta) \dots [\alpha+1+(m-1)\beta]$.

³ В частном случае, когда $\alpha=0$, $\beta=2$, $\lambda=k$, $m=1$, эта лемма доказана В. А. Баскаковым и Г. А. Фоминым (См. [1]).

Для операторов (13) справедлива следующая
 Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1 и, кроме того, $\varphi(x)$ такова, что для функции $\mu(t) = \sup_{-\infty < x < \infty, |y| < t} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}$ существует λ_0 , для которого отношение

$$\frac{\mu(\alpha^* t) t^n}{L^{\lambda_0}(t)} \leq C, t \in [0, \infty)^4, \quad (14)$$

причем n и β таковы, что $\frac{n}{\beta}$ является натуральным числом m .

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^{n/\beta}}{R_{n,\lambda}} [L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)] = \frac{B_{n|\beta}}{2A^{n/\beta}} \cdot \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак $+$ или $-$ в правой части берется в зависимости от того n -четное или нечетное.

Доказательство. Покажем выполнение соотношения

$$\frac{1}{D_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) \frac{t^{n+\alpha}}{L^\lambda(t)} dt = o(\Delta_\lambda), \quad (15)$$

где Δ_λ определяется равенством (13), $\delta > 0$ — любое.

Так как $D_\lambda > \frac{2x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)L^\lambda(x)}$ при любом $x > 0$, то, полагая $x = \frac{\delta}{2}$ и ис-

пользуя условие (14) теоремы, находим

$$\frac{1}{D_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) \frac{t^{n+\alpha}}{L^\lambda(t)} dt < \frac{(\alpha+1)L^\lambda\left(\frac{\delta}{2}\right)}{2 \frac{\delta^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}}} C \cdot \int_0^\infty \frac{t^\alpha dt}{L^{\lambda-\lambda_0}(t)} \leq$$

$$\leq \frac{2^\alpha (\alpha+1) \cdot C \cdot L^\lambda\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\delta^{\alpha+1} L^{\lambda-\lambda_0-1}(\delta)} \int_0^\infty \frac{|t|^\alpha}{L(t)} dt = \frac{2^\alpha (\alpha+1) C L^{\lambda_0+1}(\delta) D_1}{\delta^{\alpha+1}} \left[\frac{L\left(\frac{\delta}{2}\right)}{L(\delta)} \right]^\lambda$$

Отношение $\frac{L\left(\frac{\delta}{2}\right)}{L(\delta)} < 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{D_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) \frac{t^{n+\alpha}}{L^\lambda(t)} dt = O(\theta^\lambda), \text{ где } 0 < \theta < 1.$$

А так как на основании леммы выполняется асимптотическое равенство

⁴ Напомним, что $\alpha^* = \sup_{\kappa, \lambda} \{\alpha_{\kappa, \lambda}\}$.

$$\Delta_\lambda \approx \frac{B^m}{2A^{m/\lambda}}, \quad (16)$$

то (15) доказано.

Следовательно, в силу теоремы 1 и (16), теорема 2 доказана. В частности, если

$$p_{\kappa, \lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots, \end{cases} \quad \alpha_{\kappa, \lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$\beta=2, \quad \alpha=0, \quad \lambda=\kappa \quad (\kappa=1, 2, \dots),$$

а $f(x)$ ограничена на всей числовой оси и имеет в точке x_0 конечную вторую производную, то из теоремы 2 получается один результат В. А. Баскакова и Г. А. Фомина (см. [1], теорему 2):

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa [L_\kappa(f; x_0) - f(x_0)] = \frac{f''(x_0)}{2A}.$$

II.

$$L_\lambda(f; x) = \lambda \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{\kappa=1}^\infty p_{\kappa, \lambda} f(x + \alpha_{\kappa, \lambda} t) \right] F(t) dt, \quad (17)$$

где $\lambda \geq 1$; $p_{\kappa, \lambda}$, $\alpha_{\kappa, \lambda}$ обладают свойствами 1°, а функция $F(t)$ — четная неотрицательная и такая, что

$$\int_{-\infty}^\infty F(t) dt = 1, \quad \chi_n = \int_0^\infty t^n F(t) dt < \infty.$$

Оператор (18) получается из оператора (1) при

$$K_\lambda(t) = \lambda F(\lambda t), \quad \Phi(t) = t^n.$$

В рассматриваемом случае

$$\Delta_\lambda = \lambda \int_0^\infty t^n F(\lambda t) dt = \frac{\chi_n}{\lambda^n}. \quad (18)$$

Для операторов (17) имеет место следующая

Теорема 3⁵. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1 и, кроме того, $\varphi(x)$ такова, что для функции $\mu(t) = \sup_{-\infty < x < \infty, |y| < t} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)}$ существует и конечен интеграл

$$\int_0^\infty \mu(\alpha^* t) t^n F(t) dt.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{R_{n,\lambda}} [L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)] = \chi_n \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!},$$

где знак $+$ или $-$ в правой части берется в зависимости от того n — четное или нечетное.

⁵ В случае, когда $p_{\kappa, \lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots, \end{cases} \quad \alpha_{\kappa, \lambda} = \begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=2, 3, \dots, \end{cases} \quad n=1, \quad \Phi(t)=t$ и $f(x)$ органичена на $(-\infty, \infty)$, эта теорема получена Р. Г. Мамедовым в [3], а при дополнительном условии — дифференцируемости $f(x)$ в точке x_0 , еще раньше — П. Л. Бутчером [4].

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно показать, что для любого $\delta > 0$

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) t^n F(\lambda t) dt \rightarrow 0 \text{ при } \lambda \rightarrow +\infty,$$

где Δ_λ определяется равенством (18).

Но это действительно так, потому что

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) t^n F(\lambda t) dt < \frac{1}{\chi_n} \int_0^\infty \mu(\alpha^* t) t^n F(t) dt,$$

а интеграл справа, в силу условия теоремы, стремится к нулю при $\lambda \rightarrow +\infty$.

III. Теперь рассмотрим случай, когда $K_\lambda(t)$ — ядро Абеля-Пуассона и $n=1$. Тогда

$$L_\lambda(f; x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{k=1}^\infty p_{k,\lambda} f(x + \alpha_{k,\lambda} t) \right] \frac{dt}{1 + \lambda^2 t^2}, \quad (19)$$

где $\lambda \geq 0$; а $p_{k,\lambda}$, $\alpha_{k,\lambda}$ обладают свойствами 1°.

Функцию $\Phi(t)$ определим следующим образом

$$\Phi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Тогда

$$\Delta_\lambda = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Phi(t) dt}{1 + \lambda^2 t^2} \approx \frac{1}{\pi} \frac{\ln \lambda}{\lambda}. \quad (21)$$

Для рассматриваемых операторов (19) имеет место

Теорема 4. Пусть измеримая функция $f(x)$, ограниченная на всей числовой оси, имеет в точке x_0 конечные левую и правую производные: $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$.

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\ln \lambda} \cdot \frac{L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)}{R_{1,\lambda}} = \frac{1}{\pi} [f'_+(x_0) - f'_-(x_0)].$$

Действительно из (21) легко усмотреть, что

$$\frac{\lambda}{\Delta_\lambda} \cdot \int_0^\infty \frac{\Phi(t) dt}{1 + \lambda^2 t^2} = O\left(\frac{1}{\ln \lambda}\right),$$

где $\Phi(t)$ определено в (20), и поэтому выполняется условие (2) теоремы 1 ($\mu(t) \equiv 1$), что и доказывает теорему 4.

Примечание 1. Если для чисел $p_{k,\lambda}$ и $\alpha_{k,\lambda}$ в 1°, $R_{s,\lambda} = 0$ не для всех четных $s < n$ ($s \neq 0$), а только лишь для четных s , $2s_0 < s < n$, то доказательством, аналогичным доказательству теоремы 1, можно получить асимптотическое равенство вида

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{R_{n,\lambda} \Delta_\lambda} \left[L_\lambda(f; x_0) - \sum_{r=0}^{s_0} R_{2r,\lambda} \frac{f^{(2r)}(x_0)}{(2r)!} \int_{-\infty}^\infty t^{2r} K_\lambda(t) dt \right] =$$

$$= \frac{f_+^{(n)}(x_0) \pm f_-^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Примечание 2. Теорема 1 дает возможность указать общий принцип для нахождения асимптотического значения семейства операторов вида

$$L_\lambda(x) = \int_{-\infty}^\infty \Phi_\lambda(t, x) dK_\lambda(t, x)$$

для фиксированного значения x (в предположении, что этот интеграл существует).

Пусть

$$\Phi_\lambda(t, x) = \sum_{k=1}^n \varphi_{k,\lambda}(x) \psi_{k,\lambda}(t) + W_\lambda(t, x)$$

и пусть выполнены условия:

$$1) \int_{-\infty}^\infty \psi_{k,\lambda}(t) dK_\lambda(t, x) = \theta_{k,\lambda};$$

$$2) \text{ для некоторого } s \ (1 \leq s \leq n) \ \theta_{s,\lambda} \neq 0;$$

$$3) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{k,\lambda}(x) \theta_{k,\lambda}}{\theta_{s,\lambda}} = 0 \quad (k = s+1, \dots, n)$$

(при $s=n$ это условие отсутствует);

$$4) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_{s,\lambda}} \int_{-\infty}^\infty W_\lambda(t, x) dK_\lambda(t, x) = 0;$$

$$5) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{s,\lambda}(x) = H(x).$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_{s,\lambda}} \left[L_\lambda(x) - \sum_{k=1}^{s-1} \varphi_k(x) \theta_{k,\lambda} \right] = H(x)$$

Последнее содержит в себе ранее известные результаты (так например, теорему Вороновской о полиномах С. Н. Бернштейна и др.), об асимптотическом значении приближения функций семейством операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баскакова В. А. и Фомин Г. А. О сходимости операторов вида:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{\Delta_n} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x+t) dt}{L^n(t)}. \text{ Уч. зап. Калининского гос. пед. ин-та им. М. И. Калинина, 1958, т. XXVI.}$$

2. Джафаров А. С. О порядке приближения функций семейством линейных интегральных операторов. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1962, № 3.

3. Мамедов Р. Г. О порядке приближения функций линейными интегральными операторами в точках Лебега данного порядка. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 3.

4. Butzer P. L. Representation and approximation of functions by general singular integrals. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet., A. 63 (1960), 1—24.

Функцијанын бә'зи хәтти операторлар аиләси илә
јахынлашмасынын асимптотик гијмәти һаггында

ХҮЛАСӘ

Бу ишдә функцијаларын (1) типли хәтти интеграл операторлар аиләси васитәси илә јахынлашмасынын асимптотик гијмәти өјрәнилир.

Бу операторлар үчүн ашағыдакы теорем исбат олунар.

1-чи теорем. *Тутаг ки:*

1. Өлчүлән $f(x)$ функцијасынын x_0 нөгтәсинин әтрафында $(n-1)$ -чи тартибә гәдәр төрәмәләри вә x_0 нөгтәсиндә сонлу n -чи сағ вә сол төрәмәләри:

$f_+^{(n)}(x_0)$ вә $f_-^{(n)}(x_0)$ вар вә бундан башга $|f(x)| \leq \varphi(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ бура-
да $|\leq \varphi(x) < +\infty$ $(-\infty < x < \infty)$

2. Истәнилән $\delta > 0$ вә $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\int_0^\infty \mu(a*t) \Phi(t) K_\lambda(t) dt = o(\Delta_\lambda)$$

бурада

$$\mu(t) = \sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ |y| < t}} \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(x)} < \infty$$

Онда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{L_\lambda(f; x_0) - f(x_0)}{R_{n,\lambda} \cdot \Delta_\lambda} = \frac{f_+^{(n)}(x_0) + f_-^{(n)}(x_0)}{n!}$$

олур. Бурада n -ин тәк вә ја чүт олмасындан асылы олараг—јахуод + кәтүрүлүр.

Сонра хүсуси һал кими (12), (17), (19) типли операторлара бахы-
лыр вә онлар үчүн 1-чи теоремин шәртләри јохланылыр.

М. Г. ДЖАВАДОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ
ПАРАМЕТРОМ

В настоящей заметке строится асимптотика решения следующей задачи:

$$L_\varepsilon U \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = f(t, x), \quad (1)$$

$$U|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ —малый параметр, $f(t, x)$ —заданная функция.

При построении асимптотики мы будем пользоваться методом М.И. Вишика и Л. А. Люстерника [1].

Следуя работе [1], асимптотику ищем в виде

$$\begin{aligned} U(t, x) = & (w_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i w_i) + (v_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^1) + (v_0^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^2) + \\ & + (\varphi_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \varphi_i^1) + (\varphi_0^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \varphi_i^2) + z_\varepsilon^n(t, x), \end{aligned} \quad (4)$$

где функции w_i определяются первым итерационным процессом, функции v_i^1 и v_i^2 — вторым итерационным процессом, функции φ_i^1 и φ_i^2 — поправочные члены, а $z_\varepsilon^n(t, x)$ — остаточный член.

Первый итерационный процесс. Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$U(t, x) = w_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i w_i$$

Подставив значение $U(t, x)$ из последнего равенства в уравнение (1) и собрав члены с одинаковыми степенями по ϵ , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} &= f(t, x), \quad \text{при } i=0 \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^4 w_{i-1}}{\partial x^4}, \quad \text{при } i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Функция $w_0(t, x)$ определяется из следующей задачи:

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = f(t, x) \quad (6)$$

$$w_0|_{t=0} = 0,$$

$$w_0|_{x=0} = 0, \quad w_0|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Если предполагать, что $f(t, x)$ — достаточно гладкая функция своих аргументов (условия, накладываемые на $f(t, x)$ будут сформулированы ниже), то, очевидно, решение последней задачи можно записать так:

$$w_0(t, x) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{kn}{l}\right)^2(t-\tau)} \sin \frac{kn}{l} x \sin \frac{kn}{l} \xi \right\} f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Остальные функции $w_i(t, x)$ определяются из следующих задач:

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} = f_i(t, x) \quad (8)$$

$$w_i|_{t=0} = 0,$$

$$w_i|_{x=0} = 0, \quad w_i|_{x=l} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Отметим, что в уравнении (8) в правой части стоят известные функции $f_i(t, x)$, и эти уравнения отличаются от уравнения (6) только правой частью. Тогда, очевидно, если $f(t, x)$ имеет $2n+1$ непрерывных производных относительно x , сама функция и ее производные до $2n$ -го порядка включительно обращаются в нуль на концах отрезка $[0, l]$, и кроме того, если $f(t, x)$ имеет $2n-2$ непрерывных производных по t , то из задачи (8), (2), (6) определяются все функции $w_1, w_2, \dots, w_n$.

Очевидно, сумма $w_0 + \sum_{i=1}^n \epsilon^i w_i$, полученная первым итерационным процессом, вообще говоря, не удовлетворяет всем граничным условиям (3).

Для поглощения невязки в граничных условиях вблизи границы $x=0$ и $x=l$ построим функции типа пограничного слоя. Эти функции определяются вторым итерационным процессом.

Второй итерационный процесс. Сначала этот процесс опишем вблизи границы $x=0$. Для этого в уравнении $L_\epsilon v=0$ сделаем замену переменных $\frac{x}{\sqrt{\epsilon}} = y, x = \sqrt{\epsilon} y$. В новых переменных уравнение $L_\epsilon v=0$ имеет следующий вид:

$$L_\epsilon v \equiv \epsilon^{-1} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \epsilon \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (9)$$

Приближенное решение уравнения (9) ищем в следующем виде:

$$v(t, x) = v_0^1 + \sum_{i=1}^n \epsilon^i v_i^1. \quad (10)$$

Подставив выражение функции $v(t, x)$ из (10) в уравнение (9) и собирая члены с одинаковыми степенями ϵ , получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{v}_0^1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \bar{v}_0^1}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^4 \bar{v}_i^1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \bar{v}_i^1}{\partial y^2} &= -\frac{\partial \bar{v}_{i-1}^1}{\partial t} \quad i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Теперь определим функции $\bar{v}_0^1, \bar{v}_1^1, \dots, \bar{v}_n^1$ типа пограничного слоя. Функция $\bar{v}_0^1$ определяется как решение уравнения

$$\frac{\partial^4 \bar{v}_0^1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \bar{v}_0^1}{\partial y^2} = 0, \quad (12)$$

которое удовлетворяет условию

$$\frac{\partial}{\partial x} (w_0 + \bar{v}_0^1) \Big|_{x=0} = 0. \quad (13)$$

(12) есть обыкновенное уравнение с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение имеет два корня, отличных от нуля (-1 и 1). Тот факт, что один из этих корней положительный, а другой отрицательный, обеспечивает регулярность вырождения. Тогда решение уравнения (12) типа пограничного слоя имеет вид

$$\bar{v}_0^1 \left(t, \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right) = c_0(t) e^{\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}},$$

где $c_0(t)$ определяется из условия (13). Очевидно

$$c_0(t) = \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Очевидно сумма $w_0 + \bar{v}_0^1$, вообще говоря, не удовлетворяет условию

$$(w_0 + \bar{v}_0^1) \Big|_{x=0} = 0. \quad (14)$$

Поэтому к этой сумме прибавим функцию $\bar{\varphi}_0^1(t)$ так, чтобы полученная сумма $w_0 + \bar{v}_0^1 + \bar{\varphi}_0^1$ удовлетворяла условиям (13) и (14) одновременно.

Очевидно,

$$\bar{\varphi}_0^1(t) = -V_\epsilon \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

Теперь определим функцию $\bar{v}_1^1$. Она есть решение уравнения

$$\frac{\partial^4 \bar{v}_1^1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \bar{v}_1^1}{\partial y^2} = -\frac{\partial \bar{v}_0^1}{\partial t}, \quad (15)$$

при условии

$$\frac{\partial}{\partial x}(w_1 + \bar{v}_1)|_{x=0}=0 \quad (16)$$

Правая часть уравнения имеет вид:

$$\frac{\partial v_0^1}{\partial t} = V_\varepsilon e^{-\frac{x}{V_\varepsilon}} \int_0^1 \left\{ \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kn}{l} e^{-\left(\frac{kn}{l}\right)^2} \int_0^1 f(\tau, \xi) \sin \frac{kn}{l} \xi d\xi \right\} d\tau = V_\varepsilon \psi(t) e^{-\frac{x}{V_\varepsilon}}$$

Поэтому решение типа пограничного слоя уравнения (15), удовлетворяющее условию (16) будет иметь вид:

$$\bar{v}_1 \left(t, \frac{x}{V_\varepsilon} \right) = \left\{ V_\varepsilon \left(\frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=0} - \frac{\psi(t)}{2} \right) - x \frac{\psi(t)}{2} \right\} e^{-\frac{x}{V_\varepsilon}}$$

Аналогично $\bar{v}_0^1$, к функции $\bar{v}_1^1$ прибавим поправочный член $\bar{\varphi}_1^1(t)$, так, чтобы сумма $w_1 + \bar{v}_1^1 + \bar{\varphi}_1^1$ удовлетворяла всем граничным условиям при $x=0$.

Умножим все функции $\bar{v}_1^1$ и $\bar{\varphi}_1^1$ на сглаживающую функцию $\alpha(x)$, т. е. на бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице при $x \leq \frac{1}{3}l$ и равную нулю при $x \geq \frac{2}{3}l$. Полученные функции обозначим через $v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1$ и $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \dots, \varphi_n^1$.

Таким же образом определяются все функции разложения (10).

Для того, чтобы определить функции типа пограничного слоя вблизи границы $x=l$ в уравнении $L_\varepsilon v=0$ надо сделать замену переменных $\frac{l-x}{V_\varepsilon} = y$ и повторить все рассуждения.

Таким образом, мы определили все функции разложения (4). Теперь оценим остаточный член $z_\varepsilon^n(t, x)$.

Очевидно, $z_\varepsilon^n(t, x)$ удовлетворяет всем начальным и граничным условиям (2), (3).

Подействуем оператором L_ε на обе части равенства (4). Получим

$$L_\varepsilon z_\varepsilon^n = L_\varepsilon u - L_\varepsilon \left\{ \sum_{i=0}^n \varepsilon^i w_i + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (v_i^1 + v_i^2) + \sum_{i=0}^n \varepsilon^i (\varphi_i^1 + \varphi_i^2) \right\} \quad (7)$$

Преобразуем каждый член последнего равенства

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \left(w_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i w_i \right) &= \frac{\partial w_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} \right) = \\ &= f - \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i+1} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \varepsilon^{n+1} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} = \\ &= f - \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \frac{\partial^4 w_{i-1}}{\partial x^4} + \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^{i+1} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \varepsilon^{n+1} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f - \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i+1} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \sum_{i=0}^n \varepsilon^{i+1} \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \varepsilon^{n+1} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} = \\ &= f + \varepsilon^{n+1} \frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Теперь преобразуем второй член.

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \left(v_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^1 \right) &= \varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(v_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^1 \right) = \\ &= \frac{\partial \bar{v}_0^1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} \left\{ \frac{\partial^4 \bar{v}_i^1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 \bar{v}_i^1}{\partial y^2} + \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_i^1}{\partial t} \right\} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\partial \bar{v}_0^1}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \varepsilon^{i-1} \frac{\partial \bar{v}_{i-1}^1}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \frac{\partial \bar{v}_i^1}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon^i \frac{\partial \bar{v}_i^1}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon^i \frac{\partial \bar{v}_i^1}{\partial t} + \varepsilon^n \frac{\partial \bar{v}_n^1}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}} = \\ &= \varepsilon^n \frac{\partial \bar{v}_n^1}{\partial t} + O(\varepsilon^{n+1}). \end{aligned}$$

Известно, что

$$\bar{v}_i^1 = V_\varepsilon \psi(t) e^{-\frac{x}{V_\varepsilon}} = V_\varepsilon \bar{v}_i^1.$$

Тогда последнее равенство можно записать так:

$$L_\varepsilon \left(v_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^1 \right) = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{v}_n^1}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}}$$

Аналогичным образом показывается, что

$$L_\varepsilon \left(v_0^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i v_i^2 \right) = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{v}_n^2}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$L_\varepsilon \left(\varphi_0^1 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \varphi_i^1 \right) = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{\varphi}_n^1}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}},$$

$$L_\varepsilon \left(\varphi_0^2 + \sum_{i=1}^n \varepsilon^i \varphi_i^2 \right) = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial \bar{\varphi}_n^2}{\partial t} + O(\varepsilon)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Если подставить полученные выражения для членов (17), получим

$$L_{\varepsilon} z_{\varepsilon}^n = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} r(t, x, \varepsilon),$$

где $r(t, x, \varepsilon)$ — ограниченная функция. Поэтому последнее равенство можно записать так

$$L_{\varepsilon} z_{\varepsilon}^n = O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}). \quad (18)$$

Имеет место следующая

Теорема. Если $z_{\varepsilon}^n(t, x)$ удовлетворяет уравнению (18), то она стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ как $\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}$ в смысле метрики пространство $L_2(Q)$.

Доказательство. Умножим обе стороны уравнения (18) на $z_{\varepsilon}^n(t, x)$ и проинтегрируем его по $Q \begin{pmatrix} 0 \leq t \leq T \\ 0 \leq x \leq l \end{pmatrix}$.

Путем элементарных вычислений получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx + \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial z_{\varepsilon}^n}{\partial x} \right)^2 dx dt + \varepsilon \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial^2 z_{\varepsilon}^n}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx dt + \frac{1}{2} O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}); \end{aligned}$$

или

$$\int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx \leq \int_0^t \int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx dt + O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}).$$

По лемме Гронуола имеем

$$\int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx = O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}).$$

Если проинтегрировать последнее неравенство по t , получим

$$\int_0^T \int_0^l (z_{\varepsilon}^n)^2 dx dt = O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}),$$

что и доказывает нашу теорему, т. е.

$$z_{\varepsilon}^n(t, x) = O(\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}).$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если функция $f(t, x)$ удовлетворяет наложенным в начале условиям, то решение задачи (1), (2), (3) представимо в виде (4), где $z_{\varepsilon}^n(t, x)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ как $\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}$ в смысле метрики $L_2(Q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМГ, т. XII, вып. 5 (77), 1957.

М. Н. Чавадов

Кичик параметрдэн асылы дөрддэрэчэли бир тэнлик үчүн
гојулмуш гарышыг мәсэләнин арашдырылмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә (1) тәнлији үчүн гојулмуш гарышыг мәсэләнин һәллини кичик параметрә нәзәрән асимптотикасы верилир. Исбат едилир ки, әкәр $f(t, x)$ функцијасы мүәјјән шәртләри өдасә, онда (1), (2), (3) мәсәләнин һәлли (4) шәклиндә олур. Белә ки, галыг һәдд — $z_{\varepsilon}^n(t, x)$ кичик параметр сыфра јахынлашанда $L_2(Q)$ фәзасынын метрикасы мәнасында $\varepsilon^{n+\frac{1}{2}}$ сүр'әтлә сыфра јахынлашыр.

Г. К. НАМАЗОВ

К ТЕОРИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей статье получено решение первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами, непрерывное вместе со своими первыми производными во всех точках области. При этом мы применяем методы работы О. А. Олейник [4, 5]. Эта задача рассмотрена И. В. Гирсановым в том случае, когда коэффициенты уравнения и поверхности разрыва не зависят от времени [2].

Рассмотрим в цилиндре $Q = D \times [0, T]$ линейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i} + C(x, t)U + F(x, t), \quad (1)$$

где D — ограниченная область пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) терпят разрывы первого рода на конечном числе n -мерных поверхностей, оставаясь достаточно гладкими в остальных точках Q . Эти поверхности разбивают область Q на подобласти Q_i $i = 1, 2, \dots, m+1$. Поверхности, которые разграничивают области Q_i и Q_k , обозначим через γ_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, m$. Пусть в некоторой окрестности любой точки множества $\gamma = \sum \gamma_{ik}$ возможно невырожденное преобразование координат $\tau = t$, $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при котором поверхность разрыва коэффициентов переходит в кусок плоскости $y^n = 0$.

Предположим, что $A_{ij} = A_{ji}$, $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \rho \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ($\rho > 0$) и

$C(x, t) \leq 0$ для любых действительных чисел $\xi_1, \dots, \xi_n$ и всех точек $(x, t) \in \bar{Q}$, Γ — граница области D . Будем искать непрерывную функцию $U(x, t)$ в $\bar{Q}$, обладающую непрерывными производными первого порядка в Q , удовлетворяющую уравнению (1) в $Q - \gamma$, начальному условию

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

Г. К. НАМАЗОВ

К ТЕОРИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей статье получено решение первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами, непрерывное вместе со своими первыми производными во всех точках области. При этом мы применяем методы работы О. А. Олейник [4, 5]. Эта задача рассмотрена И. В. Гирсановым в том случае, когда коэффициенты уравнения и поверхности разрыва не зависят от времени [2].

Рассмотрим в цилиндре $Q = D \times [0, T]$ линейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i(x, t) \frac{\partial U}{\partial x_i} + C(x, t)U + F(x, t), \quad (1)$$

где D — ограниченная область пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Пусть коэффициенты уравнения (1) терпят разрывы первого рода на конечном числе n -мерных поверхностей, оставаясь достаточно гладкими в остальных точках Q . Эти поверхности разбивают область Q на подобласти Q_i $i = 1, 2, \dots, m+1$. Поверхности, которые разграничивают области Q_i и Q_k , обозначим через γ_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, m$. Пусть в некоторой окрестности любой точки множества $\gamma = \sum \gamma_{ik}$ возможно невырожденное преобразование координат $\tau = t$, $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, при котором поверхность разрыва коэффициентов переходит в кусок плоскости $y^n = 0$.

Предположим, что $A_{ij} = A_{ji}$, $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq p \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ ($p > 0$) и

$C(x, t) \leq 0$ для любых действительных чисел $\xi_1, \dots, \xi_n$ и всех точек $(x, t) \in \bar{Q}$, Γ — граница области D . Будем искать непрерывную функцию $U(x, t)$ в $\bar{Q}$, обладающую непрерывными производными первого порядка в Q , удовлетворяющую уравнению (1) в $Q - \gamma$, начальному условию

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

граничному условию.

$$U|_s = \varphi(x, t), \quad s = \Gamma \times [OT], \quad (3)$$

где φ и ψ — любые непрерывные функции такие, что $\psi|_{t=0} = \varphi|_{\Gamma}$. Обозначим через $C^{(n)}(G)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\lambda > 0$ в области G .

Теорема 4. Пусть функции $A_{ij}(x, t)$, $B_i(x, t)$, $C(x, t)$, $F(x, t) \in C^{(n, \lambda)}(\bar{Q}_r)$ ($r = 1, \dots, m+1$) имеют непрерывные производные порядка $l \geq n+1$ в некоторой окрестности поверхности разрыва $\gamma_{pq}(p, q = 1, 2, \dots, m)$, причем поверхности γ_{pq} непрерывно дифференцируемы до порядка $l+2$, а поверхность Γ такова, что каждой ее точки можно коснуться некоторым шаром, лежащим вне D . Тогда существует хотя бы одно решение задачи (1)–(3).

Доказательство. Цилиндр Q покроем конечным числом достаточно малых областей Ω_r , $r = 1, 2, \dots, N_0$ таких, что в областях Ω_r , содержащих точки γ , возможен переход к локальным координатам $y_1^r, \dots, y_n^r$, τ с указанными выше свойствами. Пусть при этом в пересечении ω_1 и ω_j при переходе от одной системы координат $y_1^i, \dots, y_n^i$, τ к другой $y_1^j, \dots, y_n^j$, τ ($i, j = 1, 2, \dots, N_0$) выполняется равенство $y_n^i = y_n^j$.

Возьмем гладкие функции $f_r(x, t)$, $r = 1, 2, \dots, N_0$, равные нулю вне Ω_r и в некоторой окрестности границы Ω_r такие, что $0 \leq f_r(x, t) \leq 1$ и $\sum_{r=1}^{N_0} f_r(x, t) \equiv 1$ в Q .

Рассмотрим следующие функции:

$$A_{ij}^h = \sum_{r=1}^{N_0} f_r(A_{ij})_r^h, \quad B_i^h = \sum_{r=1}^{N_0} f_r(B_i)_r^h, \quad C^h = \sum_{r=1}^{N_0} f_r(C)_r^h, \quad F^h = \sum_{r=1}^{N_0} f_r(F)_r^h,$$

где $(\bar{\varphi})_r^h$ есть усреднение функции $\bar{\varphi}$ с радиусом усреднения h в области Ω_r по переменным $y_1^r, \dots, y_n^r$, τ .

Решение краевой задачи (1)–(3) мы получим как предел при $h \rightarrow 0$ решений $U_h(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial U_h}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n B_i^h \frac{\partial U_h}{\partial x_i} + C^h U_h + F^h \quad (4)$$

при краевых условиях

$$U_h|_{t=0} = \varphi, \quad U_h|_s = \psi. \quad (5)$$

Согласно принципу максимума последовательность $\{U_h\}$ равномерно ограничена по h в Q . Так как коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условию Гельдера в $\bar{Q}_r$, $r = 1, 2, \dots, m+1$ с некоторым показателем $\lambda > 0$, то из априорных оценок работы [7] получим компактность U_h и всех производных, входящих в уравнение (4). Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{U_{h_k}\}$ из последовательности $\{U_h\}$, которая сходится во всех точках $Q - \gamma$ к некоторой функции $U(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1) в $Q - \gamma$. Исследуем поведение этой предельной функции $U(x, t)$ в окрестности Ω точки P_0 , принадлежащей γ . Пусть Ω содержится в области Ω . Перейдем в Ω_r к локальным координатам $y_1, \dots, y_n$, τ и положим, что P_0 является началом координат. Тогда уравнение (4) будет иметь вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + C^h U_h + F^h, \quad (6)$$

где

$$\alpha_{ij}^h = \sum_{k,s=1}^n A_{ks}^h \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_s}, \quad \beta_j^h = \sum_{k,s=1}^n A_{ks}^h \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_k \partial x_s} + \sum_{k=1}^n B_k^h \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

Делим обе части уравнения (6) на α_{nn}^h и запишем его в виде:

$$\alpha_0^h \frac{\partial U_h}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} + \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h, \quad (7)$$

где

$$\alpha_0^h = \frac{1}{\alpha_{nn}^h}, \quad \tilde{\alpha}_{ij}^h = \frac{\alpha_{ij}^h}{\alpha_{nn}^h}, \quad \tilde{\beta}_i^h = \frac{\beta_i^h}{\alpha_{nn}^h}, \quad \tilde{C}^h = \frac{C^h}{\alpha_{nn}^h}, \quad \tilde{F}^h = \frac{F^h}{\alpha_{nn}^h}$$

Коэффициенты уравнения (7) имеют в окрестности точек γ равномерно ограниченные по h производные до порядка l по переменным $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, τ при условии, что в этой окрестности коэффициенты уравнения (1) имеют ограниченные производные до порядка l по обе стороны поверхности разрыва, и функции $y_i(x_1, \dots, x_n, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $l+2$ раза дифференцируемы.

Рассмотрим функции

$$\Phi_k(y, \tau) = \left(\tau^2 - \frac{\alpha}{k} \right)^2 \prod_{i=1}^n \left(y_i^2 - \left(\frac{\alpha}{k} \right)^2 \right)$$

в области

$$R_k = \left\{ \left| \tau \right| < \frac{\alpha}{k}, \left| y_i \right| \leq \frac{\alpha}{k} \right\},$$

где $\alpha > 0$ произвольное малое число.

Умножим уравнение (7) на $\Phi_1 U_h$ и проинтегрируем его по R_1 , тогда

$$\iint_{R_1} \Phi_1 \alpha_0^h \frac{\partial U_h}{\partial \tau} U_h dQ = \iint_{R_1} \Phi_1 \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^2} U_h dQ + \iint_{R_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_1 \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} U_h dQ + \iint_{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_1 \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} U_h dQ + \iint_{R_1} \Phi_1 \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) U_h dQ.$$

Отсюда после интегрирования по частям имеем:

$$\iint_{R_1} \Phi_1 \left[\frac{\partial U_h}{\partial y_n} \right]^2 dQ + \iint_{R_1} \Phi_1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial y_j} dQ + \iint_{R_1} \Phi_1 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial y_n} dQ = - \iint_{R_1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_n} U_h dQ -$$

$$\begin{aligned}
& - \int \int_{R_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_1 \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial y_i} U_h dQ - \int \int_{R_1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \alpha_{ij}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_j} U_h dQ - \quad (8) \\
& - \int \int_{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_1 \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial y_n} U_h dQ - \int \int_{R_1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \alpha_{in}^h \frac{\partial U_h}{\partial y_n} U_h dQ + \\
& + \int \int_{R_1} \Phi_1 \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) U_h dQ + \frac{1}{2} \int \int_{R_1} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_1 \alpha_0^h) U_n^2 dQ.
\end{aligned}$$

Так как выражения: $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i} \Big| \sqrt{\Phi_1}$, $i=1, 2, \dots, n$ ограничены, то после применения неравенства

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad (*)$$

в правой части (8) получим:

$$\sum_{i=1}^n \int \int_{R_1} \left(\frac{\partial U_h}{\partial y_i} \right)^2 dQ < C_1. \quad (9)$$

Через C_i обозначаем константы, не зависящие от h .

Для установления интегральной оценки производной $\frac{\partial U_h}{\partial \tau}$ умножим уравнение (7) на $\Phi_1 \frac{\partial U_h}{\partial \tau}$ и проинтегрируем по

$$\begin{aligned}
& \int \int_{R_2} \Phi_2 \alpha_0^h \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ = \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^2} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \quad (10) \\
& + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial U_h}{\partial \tau} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) dQ.
\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
& \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^2} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ = - \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial U_h}{\partial y_n} \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n} dQ - \int \int_{R_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ = \\
& = \frac{1}{2} \int \int_{R_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U_h}{\partial y_n} \right)^2 dQ - \int \int_{R_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ
\end{aligned}$$

и применяя неравенство (*) в правой части (10), получим:

$$\int \int_{R_2} \Phi_2 \alpha_0^h \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ \leq \varepsilon \int \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ +$$

$$+ \frac{C_2}{\varepsilon} \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \right)^2 dQ + C_\varepsilon. \quad (11)$$

С другой стороны, дифференцируя уравнение (7) по y_k , $k=1, 2, \dots, \dots, n-1$, умножим на $\Phi_2 \frac{\partial U_h}{\partial y_k}$ и, интегрируя по R_2 ,

имеем:

$$\begin{aligned}
& \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \alpha_0^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_k \partial \tau} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ = \\
& = \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial^3 U_h}{\partial y_n^2 \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij}^h \frac{\partial^3 U_h}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_2 \alpha_{in}^h \frac{\partial^3 U_h}{\partial y_i \partial y_k \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial y_k} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial y_k} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \beta_i^h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h) \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям последнее равенство, легко видеть, что

$$\begin{aligned}
& \int \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n \partial y_k} \right)^2 dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} dQ = - \int \int_{R_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_n} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ - \\
& - \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial y_j} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ - \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_j} \alpha_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ - \quad (12) \\
& - \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial y_i} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ - \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial y_k} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \sum_{i=1}^n \Phi_2 \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial y_k} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ + \int \int_{R_2} \Phi_2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \beta_i^h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial}{\partial y_k} (\tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h) \frac{\partial U_h}{\partial y_k} dQ - \int_{R_2} \Phi_2 \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial y_k} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{R_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_2 \alpha_0^h \left(\frac{\partial U_h}{\partial y_k} \right)^2 dQ.$$

Поскольку $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i} \Big|_{V \Phi_2, i=1, 2, \dots, n}$ ограничены, то после применения (*) в (12) получим:

$$\int_{R_2} \int_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \Phi_2 \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \right)^2 dQ \leq C_4 + \varepsilon_1 \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ. \quad (13)$$

Пользуясь оценкой (13), из (11) получим:

$$\int_{R_2} \int \Phi_2 \alpha_0^h \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right) dQ \leq \varepsilon \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \frac{C_2 C_4}{\varepsilon} +$$

$$+ \frac{C_2 \varepsilon_1}{\varepsilon} \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + C_5. \quad (14)$$

Выберем здесь $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon^2}{C_2}$, тогда

$$\int_{R_2} \int \Phi_2 \alpha_0^h \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ < 2\varepsilon \int_{R_2} \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + C_5. \quad (15)$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то из (15) следует, что

$$\int_{R_2} \int \Phi_2 \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ < C_6 \text{ и } \int_{R_3} \int \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ < C_7. \quad (16)$$

Из неравенства (13) видно, что

$$\int_{R_2} \int_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \Phi_2 \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \right)^2 dQ < C_8 \text{ и } \int_{R_3} \int_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_k} \right)^2 dQ < C_9. \quad (17)$$

Далее, принимая во внимание оценки (9), (16) и (17), из уравнения (7) получим:

$$\int_{R_3} \int \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial y_n^2} \right)^2 dQ < C_{10}. \quad (18)$$

Дифференцируя уравнение (7) по τ , умножая на $\Phi_2 \frac{\partial U_h}{\partial \tau}$ и интегрируя его по области R_3 , будем иметь:

$$\int_{R_3} \int \Phi_3 \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \alpha_0^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau^2} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ = \int_{R_3} \int \Phi_3 \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n^2} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial \tau} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \frac{\partial \beta_i^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial \tau} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \frac{\partial U_h}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h) dQ.$$

Отсюда после проведения интегрирования по частям нетрудно видеть, что

$$\int_{R_3} \int \Phi_3 \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n} \right)^2 dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ji}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_i} \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_j} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_i} \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n} dQ = - \int_{R_3} \int \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_n} \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ -$$

$$- \int_{R_3} \int \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_i} (\Phi_3 \alpha_{ij}^h) \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ -$$

$$- \int_{R_3} \int \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial y_i} (\Phi_3 \alpha_{in}^h) \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{ij}^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \beta_i^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_i} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ +$$

$$+ \int_{R_3} \int \Phi_3 \sum_{i=1}^n \frac{\partial \beta_i^h}{\partial \tau} \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial \tau} \frac{\partial U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_3} \int \Phi_3 \frac{\partial U_h}{\partial \tau} (\tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h) dQ - \quad (19)$$

$$-\int_{R_3} \Phi_3 \frac{\partial \alpha_0^h}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \frac{1}{2} \int_{R_3} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_3 \alpha_0^h) \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau} \right) dQ.$$

Пользуясь тем, что $\frac{\partial \Phi_3}{\partial y_i} \sqrt{\Phi_3}$, $i=1,2,\dots,n$ органичны, с помощью неравенства (*) из (19) получим:

$$\sum_{i=1}^n \int_{R_i} \left(\frac{\partial^2 U_h}{\partial \tau \partial y_i} \right)^2 dQ < C_{11} \quad (20)$$

Пусть теперь производные вида

$$\frac{\partial^l U_h}{\partial \tau^{l_0} \partial y_1^{l_1} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}}}, \frac{\partial^l U_h}{\partial \tau^{l'_0} \partial y_1^{l'_1} \dots \partial y_{n-1}^{l'_{n-1}} \partial y_n}, \frac{\partial^l U_h}{\partial \tau^{l''_0} \partial y_1^{l''_1} \dots \partial y_{n-1}^{l''_{n-1}} \partial y_n^2} \quad (21)$$

равномерно ограничены в норме пространства $L_2 (R_{2l})$, где $l_0 + l_1 + \dots + l_{n-1} = l$, $l'_0 + l'_1 + \dots + l'_{n-1} + 1 = l$ и $l''_0 + l''_1 + \dots + l''_{n-1} + 2 = l$. Пользуясь методом индукции, покажем, что это верно для производных порядка $l+1$. Для этого применим к обеим частям уравнения (7) дифференциальный оператор

$$L^l \equiv \frac{\partial^l}{\partial \tau^{l_0} \partial y_1^{l_1} \dots \partial y_{n-1}^{l_{n-1}}}$$

и проинтегрируем полученное выражение по области R_{2l} , предварительно умножая его на $\Phi_{2l} D^l U_h$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h L^l \left(\alpha_0^h \frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right) dQ &= \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_n^2} dQ + \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h L^l \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \right) dQ + \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h L^l \left(\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} \right) dQ + \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h L^l \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) dQ. \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \alpha_0^h \frac{\partial}{\partial \tau} (L^l U_h)^2 dQ + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h \sum_{k=0}^{l-1} P_k L^k \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right) dQ = \\ = \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 L^l U_h}{\partial y_i \partial y_j} D^l U_h dQ + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} P_{ijs}^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial y_i \partial y_j} dQ + \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_i \partial y_n} dQ + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} P_{ins}^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial y_i \partial y_n} dQ + \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h \frac{\partial^2 L^l U_h}{\partial y_n^2} dQ + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h \sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_i} dQ + \quad (22) \\ &+ \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} L^l U_h \sum_{i=1}^n \sum_{s=0}^{l-1} P_{is}^h D^s \left(\frac{\partial U_h}{\partial y_i} \right) dQ + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h D^l (\tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h) dQ, \end{aligned}$$

где функции P_k^h , P_{ijs}^h , P_{ins}^h и P_{is}^h равномерно ограничены по h . Интегрируя по частям, преобразуем следующие интегралы:

$$I_1 = \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \alpha_0^h \frac{\partial}{\partial \tau} (L^l U_h)^2 dQ = - \int_{R_{2l}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_{2l} \alpha_0^h) (D^l U_h)^2 dQ,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 L^l U_h}{\partial y_i \partial y_j} D^l U_h dQ = \\ &= - \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_i} \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_j} dQ - \\ &- \int_{R_{2l}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{2l} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{ij}^h}{\partial y_i} \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_j} D^l U_h dQ - \int_{R_{2l}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_j} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_i} D^l U_h dQ, \\ I_3 &= \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} D^l U_h \frac{\partial^2 L^l U_h}{\partial y_n^2} dQ = - \int_{R_{2l}} \Phi_{2l} \left(\frac{\partial L^l U_h}{\partial y_n} \right)^2 dQ - \\ &- \int_{R_{2l}} \frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_n} D^l U_h \frac{\partial L^l U_h}{\partial y_n} dQ. \end{aligned}$$

Подставляя выражения I_1 , I_2 и I_3 в (22), пользуясь ограниченностью $\frac{\partial \Phi_{2l}}{\partial y_i} \sqrt{\Phi_{2l}}$, $i=1,2,\dots,n$, неравенством (*) и предположением индукции, получим:

$$\int_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial y_i} \right)^2 dQ < C_{12}. \quad (23)$$

Применяя оператор L^l к (7), умножая на $\Phi_{2l+1} \frac{\partial L^l U_h}{\partial \tau}$ и интегрируя его по области R_{2l+1} , будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \alpha_0^h \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=0}^{l-1} P_i^h L^i \left(\frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right) \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} dQ = \\
& = \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_n^2} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} P_i^h \frac{\partial^2 D^s U_h}{\partial y_i \partial y_j} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_n} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} P_{ins}^h \frac{\partial^2 D^s U_h}{\partial y_i \partial y_n} \times \\
& \times \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} D^l \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) dQ. \quad (24)
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \alpha_0^h \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ \leq C_{13} + \varepsilon_2 \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ + \\
& + \frac{C_{14}}{\varepsilon_2} \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_i \partial y_j} \right)^2 dQ, \quad (25)
\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ любое число.

Применяя к обеим частям уравнения (7) оператор $\frac{\partial}{\partial y_k} D^l$, $k=1, 2, \dots, n-1$, умножим его на $\Phi_{2l+1} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l U_h$ и интегрируем по области R_{2l+1} тогда

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l \left(\alpha_0^h \frac{\partial U_h}{\partial \tau} \right) dQ + \\
& + \int_{R_{2l}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_n} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l \left(\dots \right. \\
& \dots \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 U_h}{\partial y_i \partial y_j} \left. \right) dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial^3 L^i U_h}{\partial y_k \partial y_n^2} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) dQ.
\end{aligned}$$

Преобразуя здесь первые три интеграла, получим

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial \alpha_0}{\partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial \tau} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \sum_{s=0}^l q_s^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial \tau \partial y_k} dQ = \\
& = \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial^3 L^i U_h}{\partial y_k \partial y_n^2} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^3 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_{in}^h \frac{\partial^3 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_k \partial y_n} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} q_{ijs}^h \frac{\partial^3 D^s U_h}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{s=0}^{l-1} q_{ins}^h \frac{\partial^3 L^s U_h}{\partial y_i \partial y_n \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_k} D^l \left(\sum_{i=1}^n \tilde{\beta}_i^h \frac{\partial U_h}{\partial y_i} + \tilde{C}^h U_h + \tilde{F}^h \right) dQ.
\end{aligned}$$

Мы имеем

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{s=0}^l q_s^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial \tau \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ = \frac{1}{2} \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} q_l^h \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \right)^2 dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{s=0}^{l-1} q_s^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial \tau \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ = - \frac{1}{2} \int_{R_{2l+1}} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_{2l+1} q_l^h) \left(\frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} \right)^2 dQ + \\
& + \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{s=0}^{l-1} q_s^h \frac{\partial^2 L^s U_h}{\partial \tau \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ, \\
I_5 &= \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_k \partial y_n^2} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ = - \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_k \partial y_n} \right)^2 dQ - \\
& - \int_{R_{2l+1}} \frac{\partial \Phi_{2l+1}}{\partial y_n} \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ, \\
I_6 &= \int_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_{2l+1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^3 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ = \\
& = - \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{\alpha}_{ij}^h \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_j \partial y_k} dQ - \\
& - \int_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{\alpha}_{ij}^h}{\partial y_j} \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_k} dQ - \int_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{2l+1}}{\partial y_j} \frac{\partial^2 D^l U_h}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial D^l U_h}{\partial y_k} dQ,
\end{aligned}$$

Тогда:

$$z = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{r_i} = 1 - \frac{n}{2(l+1)} - \frac{1}{4} > 0,$$

если $l \geq \left[\frac{2}{3}n \right] + 1$. Следовательно, функции ξU_h , где $\xi(x, t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю в некоторой окрестности $\Omega(R_{2(l+1)})$ точки P_0 , принадлежат пространству $H_{\infty}^{(z(l+1), \dots, z(l+1), 2z)}$ и их нормы в этом пространстве равномерно ограничены по h . Это означает, что функция U_h удовлетворяет условию Гельдера с некоторым показателем и константой, не зависящей от h . Значит $U = \lim_{h \rightarrow 0} U_h$

непрерывна в окрестности Ω точки P_0 по всем переменным. Аналогично, если $l \geq n+1$, то все первые производные $U(x, t)$ непрерывны в некоторой окрестности поверхности разрыва. Легко видеть также, что все производные вида

$$\frac{\partial^k U}{\partial \tau^{k_0} \partial y_1^{k_1} \dots \partial y_{n-1}^{k_{n-1}}}$$

непрерывны, если $l \geq n + k + 1$. Пользуясь уравнением (1), как в [5], получим существование всех производных до порядка $l - n - 1$ в окрестности точки P_0 при $u_n \leq 0$ и $u_n \geq 0$.

Теорема 5. Решение задачи (1)–(3) единственно.

Доказательство. Для этого покажем, что решение $U(x, t)$ соответствующей однородной задачи тождественно равно нулю.

В самом деле, в силу параболичности уравнения (1) и $C \leq 0$, функция $U(x, t)$ не достигает своего наибольшего положительного и наименьшего отрицательного значения внутри Q_i ($i=1, 2, \dots, m+1$). Так как градиент функции $U(x, t)$ непрерывен, то по теореме 1 работы [1] эти значения функция $U(x, t)$ принимать не может и в точках $(x_i, t_i) \in S_{ik}$, [$i, k=1, \dots, m$], если она отлична от постоянной.

Теорема 1 работы [2] справедлива и для областей с гладкой подвижной боковой границей, касательная плоскость которой ни в одной точке не перпендикулярна к оси t . По нашему предположению, области Q_i ($i=1, 2, \dots, m+1$) этому условию удовлетворяют.

Выражаю глубокую благодарность проф. О. А. Олейник за руководство.

ЛИТЕРАТУРА

1. Выборны Р. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа. „ДАН СССР“, 1957, 111, № 4.
2. Гирсанов И. В. О решении некоторых краевых задач для параболических и эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. „ДАН СССР“, 1960, 135, № 6.
3. Никольский С. М. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38, 1954, 244–278.
4. Олейник О. А. Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. „ДАН СССР“, 1959, 124, № 6.
5. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами. „Изв. АН СССР, серия матем.“ 1961, 25, 3–20.
6. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., Изд. физ.-мат. лит., 1961.
7. Friedman A. Boundary estimates for second order parabolic equations and their applications. J. Math. a. mech., 1958, 7, 5, 777–791.

$$\begin{aligned} I_7 &= \iint_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{2l+1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^3 D^i U_h}{\partial y_i \partial y_k \partial y_n} \frac{\partial L^i U_h}{\partial y_k} dQ = \\ &= - \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_k} dQ \\ &- \iint_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi_{2l+1}}{\partial y_i} \alpha_{in}^h \frac{\partial^2 D^i U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial L^i U_h}{\partial y_k} dQ - \iint_{R_{2l+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_{2l+1} \frac{\partial \alpha_{in}^h}{\partial y_i} \frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_k \partial y_n} \frac{\partial L^i U_h}{\partial y_k} dQ. \end{aligned}$$

Учитывая в (26) значения I_4, I_5, I_6, I_7 и пользуясь неравенством (*), получим:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n-1} \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial^2 L^i U_h}{\partial y_i \partial y_k} \right)^2 dQ < C_{15} + \varepsilon_3 \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ, \quad (27)$$

где $\varepsilon_3 > 0$ любое число.

Далее, из (25) и (27) следует, что

$$\begin{aligned} \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sigma_0^h \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ &\leq C_{13} + \varepsilon_2 \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ \\ &+ \frac{C_{14} C_{15}}{\varepsilon_2} + \frac{C_{14} \varepsilon_3}{\varepsilon_2} \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial D^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ. \end{aligned} \quad (28)$$

Выбирая $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2^2}{C_{14}}$, имеем

$$\iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \sigma_0^h \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ \leq C_{16} + 2\varepsilon_2 \iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial D^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ, \quad (29)$$

где $C_{16} = C_{13} + \frac{C_{14} C_{15}}{\varepsilon_2}$. Так как $\varepsilon_2 > 0$ можно выбрать сколь угодно малым и при этом C_{16} лишь увеличится, то

$$\iint_{R_{2l+1}} \Phi_{2l+1} \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ < C_{17} \text{ и } \iint_{R_{2(l+1)}} \left(\frac{\partial L^i U_h}{\partial \tau} \right)^2 dQ < C_{18}. \quad (30)$$

Наконец, дифференцируя уравнение (7) и пользуясь полученными оценками, нетрудно показать, что

$$\iint_{R_{2(l+1)}} \left(\frac{\partial^2 L^{l-1} U_h}{\partial y_n^2} \right)^2 dQ < C_{19}. \quad (31)$$

Таким образом, мы показали, что все производные вида (21) до порядка $l+1$ включительно равномерно ограничены по h в норме пространства $L_2(R_{2(l+1)})$, если коэффициенты уравнения (1) имеют ограниченные производные порядка l в окрестности точек γ по обе стороны поверхностей разрыва.

Теперь применим теорему вложения С. И. Никольского (см. [3, теорема 12]). Возьмем $m = n + 1, p = 2, p' = \infty$.

Ики тәркибли кәсилән әмсаллы параболик тәнликләр нәзәријјәсинә даир

ХҮЛАСӘ

Сон заманлар кәсилән әмсаллы тәнликләр үчүн гојулмуш мәсәләләрин тәдгигинә хусуси фикир верилір.

Мәгаләдә кәсилән әмсаллы (1) тәнлијинин (2), (3) шәртләрини өдәјән, өзү вә биринчи тәртиб төрәмәләри Q цилиндриндә кәсилмәз олан һәллинә бахылыр.

О. А. Олєјникин [4] вә [5] ишләриндә инкишаф етдирдији үсуллардан истифадә едәрәк, И. Г. Грсиановун [2] ишиндә бахылан (1) тәнлијинин әмсалларынын вә бу әмсалларын кәсилдији сәтһләрин замандан асылы олмамасы шәрти арадан галдырылараг, 1 вә 2 теоремләри исбат едилмишдир.

Ф. Г. НАСИБОВ

О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ В СМЫСЛЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

§ 1.

Хорошо известны теоремы Джексона о порядке наилучших приближений непрерывных функций посредством многочленов в конечном промежутке вещественной оси. В дальнейшем эти результаты были обобщены в различных направлениях и в некотором смысле они были уточнены в работах С. М. Никольского [3], [4], А. Ф. Тимана [7], [8], В. Nagy [5] и других авторов.

Не входя в подробности указанных результатов, мы приведем лишь одну теорему А. Ф. Тимана [8], относящуюся к порядку наилучшего приближения периодических (2π -периода) функций в пространстве $L_p (1 \leq p \leq \infty)$.

В дальнейшем величина

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

называется нормой функции $f(x) \in L_p$.

А величина

$$\omega_k(f; \nu)_p = \sup_{|h| \leq \nu} \left\| \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i f(x+ih) \right\|_p$$

называется модулем гладкости k -го порядка функции $f(x) \in L_p (1 \leq p \leq \infty)$.

Кроме того, под наилучшим приближением 2π -периодической функции $f(x) \in L_p$ посредством тригонометрических полиномов порядка $\leq n$ подразумевается следующая величина:

$$E_n^*(f)_p = \inf_{(T_n)} \|f(x) - T_n(x)\|_p = \inf_{(T_n)} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Теорема А (А. Ф. Тиман [8]). Если

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_{r,\delta}(x-t) dt, \quad (1)$$

$$\text{где } r > 0, \quad D_{r,\delta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{\delta\pi}{2}\right)}{k^r}, \quad (2)$$

$$\|f\|_p < +\infty (1 \leq p \leq \infty), \text{ то при } n \rightarrow \infty$$

$$E_n^*(F)_p = O\left[\frac{1}{n^r} \omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_p\right]. \quad (3)$$

Как известно, если функции $F(x)$ и $f(x)$ связаны между собой равенством (1), то $f(x)$ называется производной r -го порядка от функции $F(x)$ в смысле Вейля-Никольского. И при доказательстве этой теоремы автор опирается на определение (1) и пользуется результатами В. Nagy [5].

Для не периодического случая определение дробной производной дается следующим образом.

Говорят, что функция $f(t)$ является неопределенным интегралом s -го порядка от функции $\varphi(t)$, если между ними существует связь

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-1}^x (x-t)^{s-1} \varphi(t) dt, \quad (4)$$

где $s > 0$ — любое вещественное число. Кроме того, функцию $\varphi(t)$ называют производной s -го порядка от функции $f(t)$ в смысле Римана-Лиувилля [2], [6].

В этой работе мы рассматриваем функции, которые имеют дробные производные в смысле Римана-Лиувилля, устанавливаем порядок приближения таких функций посредством алгебраических многочленов в пространстве $L_p (1 \leq p \leq \infty)$, который в свою очередь является аналогом указанной теоремы А. Ф. Тимана для не периодического случая. При этом мы пользуемся нижеприведенной теоремой И. И. Ибрагимова [2].

Теорема Б. (И. И. Ибрагимов [2]). Если

$$V_s(x-c; a, b) = [a(x-c) + b \cdot |x-c|] \cdot |x-c|^s,$$

$|c| < 1, s > -2$, то справедливо

$$E_n[V_s(x-c; a, b)]_L \leq \frac{(1-c^2)^{\frac{s+2}{2}} \cdot G(s, a, b)}{n^{s+2}} + O\left[\frac{\ln n}{n^{s+3}}\right], \quad (5)$$

где a и b любые действительные числа и

$$G(s, a, b) = \frac{8}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| a \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \sin t \int_0^{+\infty} \frac{u^{s+2} du}{(e^u - e^{-u})(u^2 + t^2)} + \right.$$

$$\left. + b \cdot \cos \frac{\pi s}{2} \cdot \cos t \int_0^{+\infty} \frac{u^{s+2} du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + t^2)} \right| dt. \quad (6)$$

Считаю своим приятным долгом выразить признательность проф. И. И. Ибрагимову за постановку задачи и руководство при выполнении данной работы.

§ 2.

Доказываем следующие теоремы.

Теорема 1. Если

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^x (x-t)^s \varphi(t) dt, \quad (7)$$

$s > 0$ — любое вещественное число,

$$\|\varphi\|_p = \|\varphi\|_{L_p(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad (8)$$

$n \geq 1$ — любое натуральное число, то

$$E_n(f)_p = \inf_{(P_n)} \|f(x) - P_n(x)\|_{L_p(-1,1)} \leq \frac{C_s}{n^{s+1}} \|\varphi\|_p, \quad (9)$$

где $P_n(x)$ алгебраический многочлен степени $\leq n$.

Доказательство. Покажем, что $f(x)$ может быть представлен в виде

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^1 D_s(x-t) \varphi(t) dt, \quad (10)$$

где

$$D_s(t) = \frac{1}{2} [|t|^s + t \cdot |t|^{s-1}].$$

В самом деле, пусть

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^1 D_s(x-t) \varphi(t) dt = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^x D_s(x-t) \varphi(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_x^1 D_s(x-t) \varphi(t) dt = \frac{1}{2\Gamma(s+1)} \int_{-1}^x [|x-t|^s + (x-t) \cdot |x-t|^{s-1}] \varphi(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2\Gamma(s+1)} \int_x^1 [|x-t|^s + (x-t) \cdot |x-t|^{s-1}] \varphi(t) dt = I_1 + I_2.$$

В интеграле I_1 , в силу того, что $t \leq x$, имеем

$$I_1 = \frac{1}{2\Gamma(s+1)} \int_{-1}^x [(x-t)^s + (x-t)^s] \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^x (x-t)^s \varphi(t) dt = f(x).$$

Кроме того, легко видеть, что $I_2 = 0$, так как в нем $t \geq x$. Таким образом, $\psi(x) = I_1 + I_2 = f(x)$.

Пусть теперь $P_n(2x)$ есть алгебраический многочлен степени $\leq n$, наименее уклоняющейся от функции

$$V_s(x; 2^{s-1}, 2^{s-1}) = V_s(x) = 2^{s-1} \cdot [|x|^s + x \cdot |x|^{s-1}]$$

в метрике L_1 . Положим

$$U_n(f; x) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1}^1 \varphi(t) P_n(x-t) dt.$$

Очевидно, что $U_n(f; x)$ есть некоторый алгебраический многочлен, степени $\leq n$.

Заметим, что не нарушая общности, можно считать, что $\varphi(t) = 0$, при $|t| > 1$. В самом деле, в противном случае мы рассмотрели бы функцию:

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t \in [-1, 1]; \\ 0, & \text{если } |t| > 1. \end{cases}$$

Очевидно, имеем:

$$|U_n(f; x) - f(x)| = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left| \int_{-1}^1 [P_n(x-t) - D_s(x-t)] \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-1+x}^{1+x} |P_n(t) - D_s(t)| |\varphi(x-t)| dt$$

так как $-1 \leq x \leq +1$, то $-2 \leq -1+x \leq 0$ и $0 \leq 1+x \leq 2$.

Поэтому

$$|U_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| \cdot |\varphi(x-t)| dt.$$

Отсюда находим, что

$$\left\{ \int_{-1}^1 |U_n(f; x) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq \frac{1}{\Gamma(s+1)} \left\{ \int_{-1}^1 \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| \cdot |\varphi(x-t)|^p dx dt \right\}^{1/p}.$$

В силу обобщенного неравенства Минковского, из последнего следует, что

$$\begin{aligned} \|U_n(f; x) - f(x)\|_p &\leq \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| \times \\ &\times \left\{ \int_{-1}^1 |\varphi(x-t)|^p dx \right\}^{1/p} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| \cdot \left\{ \int_{-1-t}^{1-t} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| \cdot \left\{ \int_{-2}^2 |\varphi(x)|^p dx \right\}^{1/p} dt \end{aligned}$$

Из $\varphi(x) = 0$ при $|x| > 1$ следует, что

$$\left(\int_{-2}^2 |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_{-1}^1 |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|\varphi\|_p \text{ и благо-}$$

даря этому

$$\begin{aligned} \|U_n(f; x) - f(x)\|_p &\leq \frac{\|\varphi\|_p}{\Gamma(s+1)} \cdot \int_{-2}^2 |P_n(t) - D_s(t)| dt = \\ &= \frac{2\|\varphi\|_p}{\Gamma(s+1)} \cdot \int_{-1}^1 |P_n(2x) - D_s(2x)| dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Имея в виду, что

$$D_s(2x) = \frac{1}{2} [2^s \cdot |x|^s + 2^s \cdot x \cdot |x|^{s-1}] = 2^{s-1} [|x|^s + x \cdot |x|^{s-1}] = V_s(x),$$

и применяя теорему Б при $a=b=2^{s-1}$, $c=0$, $s-1 > -1 > -2$ из (11) получаем

$$\|U_n(f; x) - f(x)\|_p \leq \frac{2\|\varphi\|_p}{\Gamma(s+1)} \cdot \left[\frac{G(s; 2^{s-1}, 2^{s-1})}{n^{s+1}} + \frac{\ln n}{n^{s+2}} \right], \quad (12)$$

причем $G(s; 2^{s-1}, 2^{s-1})$, в силу формулы (6), имеет вид:

$$\begin{aligned} G(s; 2^{s-1}, 2^{s-1}) &= G(s) = \\ &= \frac{2^{s+1}}{\pi} \int_0^{+\infty} \left| \sin \frac{\pi(s-1)}{2} \cdot \operatorname{sh} t \right| \cdot \int_0^{+\infty} \frac{u^{s+1} du}{(u^2 + t^2) \cdot \operatorname{sh} u} + \cos \frac{\pi(s-1)}{2} \times \\ &\times \cos t \int_0^{+\infty} \frac{u^{s+1} du}{(u^2 + t^2) \cdot \operatorname{ch} u} | dt. \end{aligned}$$

Очевидно, неравенство (12) может быть представлено в следующем виде:

$$\|U_n(f; x) - f(x)\|_p \leq \frac{\|\varphi\|_p}{n^{s+1}} \cdot C_s, \quad (13)$$

где положено

$$C_s = \frac{2}{\Gamma(s+1)} [1 + G(s)].$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Если $s > 0$ — любое вещественное число, $f^{s+1}(x)$ является $(s+1)$ -ой производной от $f(x) \in L_p(-1, 1)$ в смысле Римана-Лиувилля и $f^{(s+1)}(x) \in L_p(-1, 1)$, то для наилучшего приближения функции $f(x)$ посредством алгебраических многочленов степени $\leq n$ на отрезке $[a', b']$, лежащей внутри интервала $(-1, 1)$, имеет место неравенство

$$E_n(f)_{L_p(a', b')} \leq \frac{A_s}{n^{s+1}} \cdot \omega_2 \left(\frac{1}{n}; f^{(s+1)} \right)_{L_p(a', b')}, \quad (14)$$

где положено, что $\frac{1}{n} = \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$ и $\delta_0 = \min(a' + 1, 1 - b')$.

Доказательство. Известно, что [1], [9], если $\varphi_{h,2}(x)$ есть вторая функция Стеклова функции $\varphi(x)$, то справедливы неравенства:

$$a) \|\varphi(x) - \varphi_{h,2}(x)\|_p \leq \frac{1}{2} \omega_2(\varphi; h)_p;$$

$$б) \|\varphi_h^{(n)}(x)\|_p \leq \frac{1}{h^2} \cdot \omega_2(\varphi; 2h)_p.$$

Функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = [f(x) - f_{h,2}(x)] + f_{h,2}(x) = \Phi_h(x) + f_{h,2}(x).$$

Применяя теорему 1 к функциям Φ_h и $f_{h,2}$ находим:

$$E_n(f)_p \leq F_n(f - f_{h,2})_p + E_n(f_{h,2})_p \leq \frac{C_s}{2 \cdot n^{s+1}} \cdot \omega_2\left(\varphi, \frac{1}{n}\right)_p + \\ + \frac{C_{s+2}}{n^{s+3}} \cdot n^2 \omega_2\left(\frac{2}{n}; \varphi\right)_p \leq \frac{A_s}{n^{s+1}} \cdot \omega_2\left(\frac{1}{n}; \varphi\right)_p,$$

где положено $h = \frac{1}{n}$ и $\varphi \equiv f^{(s+1)}$, причем нормы берутся на (a', b') .

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Гостехиздат, 1947.
2. Ибрагимов И. И. О наилучших приближениях многочленами функций s -я производная которой имеет разрыв первого рода. Изв. АН Азерб. ССР, 1953, № 3.
3. Никольский С. М. Труды математического ин-та им. Стеклова, 15 (1945).
4. Никольский С. М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. Изв. АН СССР, серия матем., 10 (1946).
5. Nagy B. Berichte über die vetchandl. d. Söchsischen Akad. der Wiss. zu. Leiprig. Nath.—phys. kl., 1938.
6. Рима н Б. Сочинения. ОГИЗ—Гостехиздат, 1948.
7. Тима н А. Ф. Усиление теоремы Джексона о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами на конечном отрезке вещественной оси. ДАН СССР, 1951, № 78.
8. Тима н А. Ф. О теоремах Джексона. Укр. матем. журн., 1958, т. X, № 3.
9. Тима н А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, 1960.

Ф. Н. Насибов

Риман-Лиувилл мэ'нада кэсир төрэмэси олан
функциянын эн јахшы јахынлашмасынын тэртиби наггында

ХҮЛАСЭ

Бу ишдэ Риман-Лиувилл мэ'нада кэсир төрэмэси олан функциянын чэбри чоххэддилэрлэ L_p -мэ'нада эн јахшы јахынлашмасынын тэртиби өјрөнилр (9) вэ (14) бэрабэрсизликлэри), о чүмлэдэн ашагыдакы теорем исбат олунар:

2-чи теорем. Экар $s > 0$ —истэнилэн һэги эдэддирсэ, $f^{(s+1)}(x) \in L_p(-1, 1)$ функциясынын Риман-Лиувилл мэ'нада $(s+1)$ -чи төрэмэсидирсэ вэ $f^{(s+1)}(x) \in L_p(-1, 1)$ исэ, онда $f(x)$ функциясынын $(-1, 1)$ интервалынын дахилиндэ јерлэшэн $[a', b']$ парчасында дэ-рчэси $\leq n$ олан чэбри чоххэддилэрлэ эн јахшы јахынлашмасы үчүн

$$E_n(f)_{L_p(a', b')} \leq \frac{A_s}{n^{s+1}} \cdot \omega_2\left(\frac{1}{n}; f^{(s+1)}\right)_{L_p(a', b')} \quad (14)$$

бэрабэрсизлији доғрудур, бурада $\frac{1}{n} = \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$, $\delta_0 = \min(a' + 1, 1 - b')$,

A_s n -дэн асылы олмајан сабитдир вэ $\omega_2(\delta; f^{(s+1)})_p$ $f^{(s+1)}(x)$ -ин 2-чи тэртиб кэсилмэзлик модулу дур.

Л. М. ИМАНОВ, Я. М. АББАСОВ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В ПРОПИЛОВЫХ СПИРТАХ

ВВЕДЕНИЕ

Создание точной теории диэлектрической поляризации дипольных жидкостей требует накопления большого экспериментального материала по изучению диэлектрической релаксации в широком интервале частот и температур. При этом особый интерес представляет определение максимального значения показателя поглощения, частоты, соответствующей этому значению, и ширины кривой поглощения для жидкостей с учетом структурных особенностей их молекул, а также исследование изменения этих параметров в зависимости от температуры и концентрации. Результаты подобных исследований являются весьма ценными для изучения структуры жидкостей и могут быть использованы для глубокого понимания природы диэлектрической релаксации в твердых диэлектриках, в частности в полимерных материалах, широко применяемых в различных областях современной техники. Однако, хотя изучение диэлектрической дисперсии и поглощения в дипольных жидкостях имеет более чем 60-летнюю историю, в настоящее время не представляется возможным указать жидкость, для которой можно построить полные экспериментальные кривые дисперсии и поглощения при комнатной температуре.

Это обстоятельство связано с тем, что область аномальной дисперсии полярных жидкостей находится в диапазоне микрорадиоволн и охватывает, как правило, интервал более чем 100-кратного изменения частоты, соответствующей максимуму кривой поглощения— f_0 . А каждая установка, созданная по принципу того или другого метода, позволяет получить данные на весьма узком участке столь широкого диапазона электромагнитных волн. Кроме того, большая часть измерений, выполненных до 30-х годов, в особенности для таких сильно поглощающих жидкостей, как вода, спирты и др., потеряла свою ценность из-за примитивности применявшейся аппаратуры.

Положение области дисперсии в шкале электромагнитных волн определяется значением макроскопического времени релаксации— τ . Величина времени релаксации, характеризующая скорости развития процесса поляризации при наложении внешнего поля, сильно зависит от температуры. Поэтому можно ожидать, что для многих жидкостей

Л. М. ИМАНОВ, Я. М. АББАСОВ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В ПРОПИЛОВЫХ СПИРТАХ

ВВЕДЕНИЕ

Создание точной теории диэлектрической поляризации дипольных жидкостей требует накопления большого экспериментального материала по изучению диэлектрической релаксации в широком интервале частот и температур. При этом особый интерес представляет определение максимального значения показателя поглощения, частоты, соответствующей этому значению, и ширины кривой поглощения для жидкостей с учетом структурных особенностей их молекул, а также исследование изменения этих параметров в зависимости от температуры и концентрации. Результаты подобных исследований являются весьма ценными для изучения структуры жидкостей и могут быть использованы для глубокого понимания природы диэлектрической релаксации в твердых диэлектриках, в частности в полимерных материалах, широко применяемых в различных областях современной техники. Однако, хотя изучение диэлектрической дисперсии и поглощения в дипольных жидкостях имеет более чем 60-летнюю историю, в настоящее время не представляется возможным указать жидкость, для которой можно построить полные экспериментальные кривые дисперсии и поглощения при комнатной температуре.

Это обстоятельство связано с тем, что область аномальной дисперсии полярных жидкостей находится в диапазоне микрорадиоволн и охватывает, как правило, интервал более чем 100-кратного изменения частоты, соответствующей максимуму кривой поглощения— f_0 . А каждая установка, созданная по принципу того или другого метода, позволяет получить данные на весьма узком участке столь широкого диапазона электромагнитных волн. Кроме того, большая часть измерений, выполненных до 30-х годов, в особенности для таких сильнопоглощающих жидкостей, как вода, спирты и др., потеряла свою ценность из-за примитивности применявшейся аппаратуры.

Положение области дисперсии в шкале электромагнитных волн определяется значением макроскопического времени релаксации— τ . Величина времени релаксации, характеризующая скорости развития процесса поляризации при наложении внешнего поля, сильно зависит от температуры. Поэтому можно ожидать, что для многих жидкостей

при низких температурах область дисперсии сместится в диапазон радио- или звуковых частот, где полные кривые дисперсии и поглощения могут быть построены довольно точно по данным, полученным на одной или двух сравнительно несложных установках.

Этот способ был использован Р. Х. Коулом и его сотрудниками для изучения диэлектрической релаксации в чистых спиртах [20], галоидалкилах [9] и их растворах [23]. Им удалось сместить область дисперсии в интервал от нескольких $\mu\text{с}$ до десятков мс и построить полную кривую дисперсии и адсорбции. Однако эти данные относятся к температурам, значительно ниже комнатной.

Используя то обстоятельство, что

$$2\pi f_0\tau=1,$$

где параметр τ сильно зависит от температуры, дисперсионные явления можно изучить, снимая температурную зависимость комплексной диэлектрической проницаемости на фиксированной частоте. Подбирая соответствующим образом частоты внешнего поля, можно подробно исследовать диэлектрическую релаксацию в весьма широком интервале температур и проследить за изменениями значения времени релаксации, формы кривой поглощения и максимального значения показателя поглощения.

Кроме того, изучение температурной зависимости диэлектрической проницаемости, даже при одной фиксированной частоте, позволяет выявить фазовые переходы и структурные изменения. Этим методом можно получить весьма важные сведения об образующих вещества частицах. В частности, можно установить наличие вращательной подвижности молекул в твердом состоянии вещества и форм движения макромолекул в полимерных материалах.

Впервые явление сохранения вращательной свободы молекулы при переходе в твердое состояние наблюдалось на примере льда [17, 18]. То, что вблизи 0°C статическая диэлектрическая проницаемость льда весьма близка к значению в воде, указывает на конечность времени релаксации диполей льда. Позднее сохранение вращательной свободы диполей в полярных кристаллах было изучено для многих других веществ [10, 22, 28].

И. Курчатов и Г. Щепкин [10] установили, что у высокотемпературной кристаллической модификации HCl диэлектрическая проницаемость весьма близка к значению в жидком состоянии. Свою вращательную свободу молекулы теряют при температуре намного ниже температуры замерзания, переходя в низкотемпературную кристаллическую модификацию.

Изучая температурную зависимость статической диэлектрической проницаемости и комплексной диэлектрической проницаемости при $\lambda=3,2\text{ см}$ некоторых тетразамещенных метанов, Ч. Смайс и его сотрудники [27] определили, что в t -бутилхлориде, t -бутилбромиде и ряде других веществ в твердом состоянии наблюдается несколько состояний в зависимости от температуры. Авторы отмечают интересное явление: в некоторых твердых фазах время релаксации оказалось меньше, чем в жидкости.

Исходя из анализа данных температурной зависимости диэлектрической релаксации в длинноцепных эфирах этил- и винилстеарата, М. Бродхарст и Э. Фицджеральд [19] пришли к заключению о наличии в этих объектах метастабильной кристаллической структуры. Предполагается, что ориентационная поляризация имеет место в той части образца, которая замерзает в так называемой вертикальной структуре и обусловлена реориентацией дипольных молекул вокруг их

длинноцепной оси. А уменьшение равновесной поляризации в определенном интервале температур с течением времени авторы связывают с постепенным переходом вертикальной структуры в наклонную с более низкой энергией.

Диэлектрические исследования позволили установить возможность существования метастабильной структуры также в циклогексаноле [25]. А в образцах триагексана наличие резкого скачка диэлектрической проницаемости при двух температурах, в которых показатель поглощения имеет острый скачок, указывает на существование двух фазовых переходов.

Исследование частотно-температурной зависимости диэлектрических коэффициентов успешно было применено Г. П. Михайловым и его сотрудниками для изучения диэлектрической релаксации в высокомолекулярных соединениях. В частности, у полиэтилена обнаружены три вида диэлектрических релаксационных потерь, указывающих на существование трех различных форм молекулярного движения [12—14]. По мнению авторов, высоко- и среднечастотная релаксация обусловлены процессами в аморфных областях полиэтилена и связываются ориентацией полярных радикалов и поворотом сегментов полимерной молекулы.

Наличие низкочастотной релаксации объясняется сохранением подвижности дипольных радикалов в кристаллической фазе. В пользу последнего заключения говорит тот факт, что у некристаллизующихся полимеров [11, 15] наблюдаются только два вида теплового движения, приводящие к дипольно-эластическим и дипольно-радикальным диэлектрическим потерям. Результаты диэлектрических исследований полиэтилена подтверждаются также данными изучения механических свойств [26]. При измерении зависимости от температуры модуля сдвига и логарифмического декремента затухания у полиэтилена были обнаружены три области дисперсии и три участка аномальной адсорбции соответственно.

В работе [15] изучалось влияние строения звена макромолекулы полимеров в гомологическом ряду ацеталей поливинилового спирта на положение максимума диэлектрических дипольно-эластических потерь. Установлено, что увеличение радикала поливинилацеталей на группу CH_2 понижает температуру, при которой имеет место дипольно-эластический максимум. Эти выводы находятся в хорошем согласии с результатами исследований П. П. Кобеко и Н. М. Кумшацкой [6], которые обнаружили понижение температуры максимума потерь в гомологическом ряду эфиров метакриловой кислоты при увеличении их радикала на группы CH_2 , а также установили, что изостроение элементов макромолекулы повышает температуры максимума дипольно-эластических потерь.

Список работ, посвященных изучению диэлектрической релаксации в твердых веществах можно продолжить. Однако и из приведенного перечня работ видно, какие важные структурные сведения, характеризующие поведение молекулы твердого тела и дополняющие результаты исследований методов структурного анализа, можно получить путем изучения диэлектрических свойств в широком интервале температур.

Исследование температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости полярных жидкостей позволит получить весьма ценные данные о структуре жидкостей, а также о природе диэлектрической релаксации и потерь. Однако в настоящее время число работ, посвященных этому вопросу, весьма ограничено. По всей вероятности, это связано с тем обстоятельством, что существующие ме-

тоды, применяемые в диапазоне мгц-вых и более высоких частотах не позволяют определять диэлектрические коэффициенты при больших значениях показателя потерь, которые в области температурного максимума могут быть и больше единицы. Именно этим может быть объяснено то, что в работах [8, 10] не были определены значения мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости, являющейся гораздо более чувствительной характеристикой изменения свойств вещества, чем ее действительная часть.

Предлагаемая статья посвящена изучению частотно-температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости $\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon''$ *n*-пропилового и изопропилового спиртов на фиксированных частотах диапазона $10^3 \div 10^8$ гц в интервале температур $+20 \div -160^\circ\text{C}$.

Из этих двух спиртов нормальный пропиловый спирт является одной из немногих дипольных жидкостей, о которых в литературе имеются данные об исследовании частотно-температурной зависимости диэлектрической релаксации.

Температурная зависимость диэлектрических коэффициентов *n*-пропанола на частотах 50 и 10^3 гц измерена П. П. Кобеко с сотрудниками [7], а на частоте $3,2 \cdot 10^7$ гц и более высоких Мидзусима [24]. Наши данные для этого спирта заполнял пропущенный в этих работах интервал частот, они позволяют проверить некоторые результаты измерений Мидзусима.

Результаты измерения и их обсуждение

Измерения произведены методом, предложенным одним из авторов [3], на куметре типа КВ-1. С помощью этого метода легко удовлетворяются два основных требования, которые предъявляются мето-

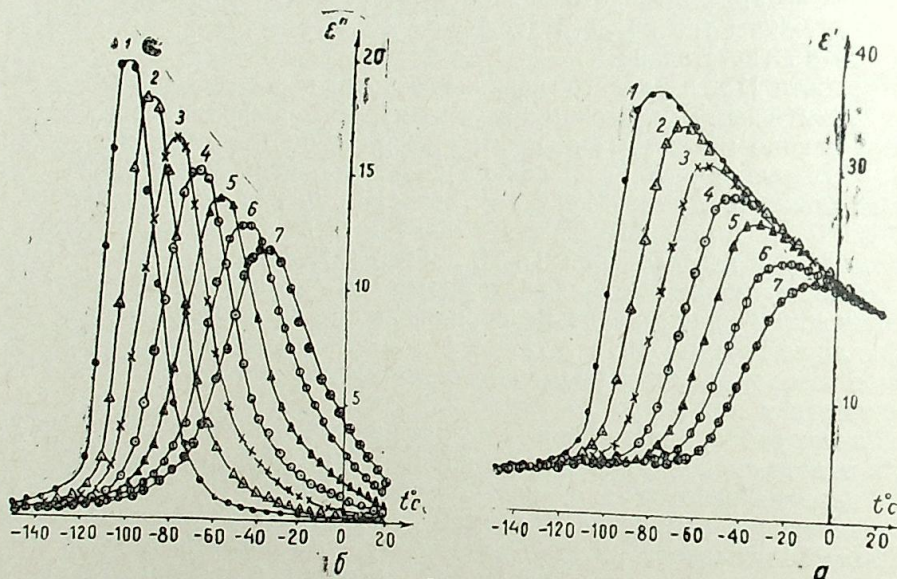


Рис. 1

а—температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' *n*-пропилового спирта; б—температурная зависимость показателя поглощения ϵ'' *n*-пропилового спирта. При частотах: 1—0,3; 2—0,8; 3—2,0; 4—5,0; 5—9,0; 6—20 и 7—32 мгц.

дам, используемым для измерения диэлектрической релаксации в широком интервале температур: а) он широкополосен в смысле измерения диэлектрических потерь, позволяет одновременное определение

диэлектрической проницаемости и показателя поглощения при широком интервале изменения показателя потерь— $\text{tg}\delta$, т. е. при $10^{-3} \leq \text{tg}\delta \leq 1$; б) легко осуществляется термоизоляция задающей и измерительной частей установки при изменении температуры образца в измерительном конденсаторе в больших пределах.

Полное описание методики измерения и конструкции измерительного конденсатора даны в нашей предыдущей работе [5]. Пропиловые спирты соответствующим образом очищались и сушились. После этих операций каждый из спиртов дважды подвергался фракционированной

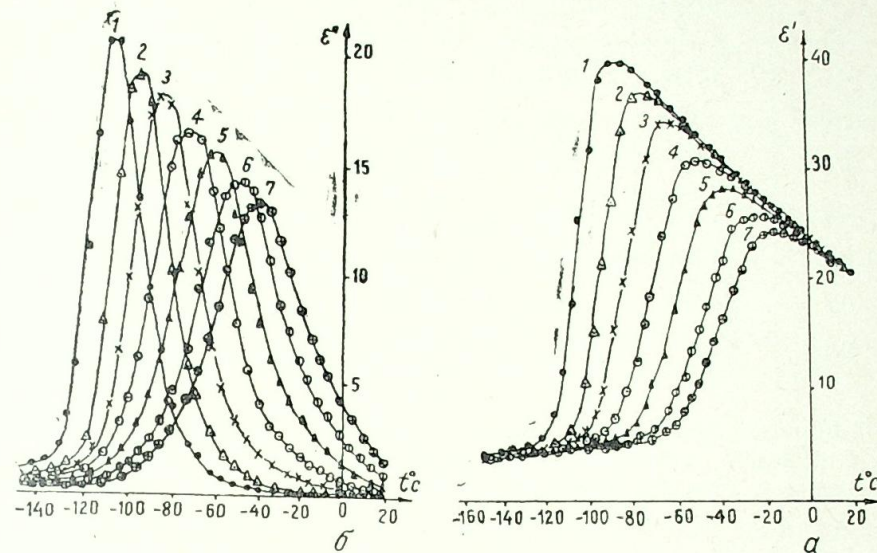


Рис. 2

а—температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' изопропилового спирта; б—температурная зависимость показателя поглощения ϵ'' изопропилового спирта. При частотах: 1—0,3; 2—0,8; 3—2,0; 4—5,0; 5—9,0; 6—20 и 7—32 мгц.

перегонке. Вторая перегонка произведена на колонке, имеющей платиновую насадку примерно 100 ТТ. Принятая для работы средняя фракция была собрана в интервале $0,1^\circ$. Степень чистоты образцов определена по значениям температуры кипения, показателя преломления, удельного веса и удельной электропроводности. Полученные данные хорошо согласуются с литературными [16, 20].

Изучалась температурная зависимость диэлектрической проницаемости— ϵ' и показателя поглощения— ϵ'' *n*-пропилового и изопропилового спиртов на семи фиксированных частотах указанного диапазона, т. е. на частотах 0,3, 0,8, 2,0, 5,0, 9,0, 20 и 32 мгц (см. рис. 1 и 2). Каждое значение, приведенное на этих графиках, является средним из девяти измерений, выполненных тремя различными конденсаторами. Наибольшее отклонение отдельных значений от среднего не больше 3—5% для ϵ' и 7—9% для ϵ'' .

Изменение температуры и термостатирование в любой точке интервала $+20 \div -160^\circ\text{C}$ осуществлялись специальным терморегулятором, работающим по принципу автоматической регулировки подачи паров жидкого азота [4] в измерительный конденсатор. Скорость охлаждения составляла $0,1 \div 0,3$ град/мин.

Изменение температуры со скоростью $0,1$ град/мин производилось в области температуры, где происходило резкое изменение диэлектрических коэффициентов.

Как видно из приведенных рисунков, на всех указанных частотах в температурной зависимости диэлектрических коэффициентов наблюдается сильная дисперсия и поглощение. Основные величины, характеризующие дисперсию и абсорбцию, приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

n - Пропиловый спирт						
f_0 , мггц	$\tau \cdot 10^8$, сек	$\epsilon''_{\text{макс.}}$	T_0° , К	$\text{tg } \delta_{\text{макс.}}$	T_1° , К	ΔT
32,0	0,50	13,4	233,5	1,08	218,0	50,8
20,0	0,80	14,8	224,7	1,16	210,0	47,1
9,0	1,77	15,5	212,0	1,19	199,5	42,5
5,0	3,19	16,4	202,5	1,16	179,0	40,0
2,0	7,96	18,1	190,5	1,31	180,0	34,0
0,8	19,0	19,0	180,0	1,37	169,0	29,8
0,3	53,1	20,6	160,0	1,45	159,0	27,3

В первых столбцах таблиц даны величина частоты— f_0 , при которой снимались температурные зависимости, во вторых—времена релаксации— τ , соответствующие этим частотам, в третьих и четвертых—

Таблица 2

Изопропиловый спирт						
f_0 , мггц	$\tau \cdot 10^8$, сек	$\epsilon''_{\text{макс.}}$	T_0° , К	$\text{tg } \delta_{\text{макс.}}$	T_1° , К	ΔT
32,0	0,50	11,9	238,0	1,12	222,0	50,3
20,0	0,80	12,9	229,0	1,18	214,5	46,3
9,0	1,77	14,1	217,0	1,23	204,0	39,5
5,0	3,19	15,3	207,4	1,27	193,0	37,3
2,0	7,96	16,7	195,3	1,31	182,5	34,0
0,8	19,0	18,5	185,0	1,32	175,5	29,5
0,3	53,1	20,1	174,0	1,35	162,0	25,0

максимальные значения показателя поглощения— $\epsilon''_{\text{макс.}}$ и температуры— T_0 , соответствующие им, в пятых и шестых—максимальные значения показателя потерь— $\text{tg } \delta_{\text{макс.}}$ и соответствующие им температуры— T_1 и, наконец, в последних столбцах приводятся значения ширины кривой поглощения на уровне половины максимума— ΔT .

Из таблиц видно, что с уменьшением частоты максимумы кривых поглощения и потерь, а также область дисперсии смещаются в сторону более низких температур, причем на всех частотах максимумы

кривых потерь сдвинуты относительно максимумов кривых поглощения в область низких температур. С уменьшением частоты обращает на себя внимание увеличение $\epsilon''_{\text{макс.}}$ и $\text{tg } \delta_{\text{макс.}}$, сужение кривых поглощения и потерь и возрастание величины уменьшения диэлектрической проницаемости в области дисперсии. Все эти факты обусловлены повышением равновесного значения дипольного момента единицы объема и уменьшением скорости установления равновесного состояния с понижением температуры. На рис. 3 показана зависимость времени релаксации от температуры. На оси ординат отложен $\lg \tau$, а по оси абсцисс $100/T$. Время релаксации при температуре T определено как $1/2nf_0$, где f_0 и T —частота и температура, при которых наблюдается максимум показателя поглощения.

Прямолинейность графика указывает на то, что время релаксации в данном интервале температур может быть представлено следующим образом:

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{U}{RT}},$$

где U —энергия активации и R —универсальная газовая постоянная. Энергия активации, определенная из наклона прямых, оказалась равной 5,7 и 5,9 ккал/моль соответственно для n -пропилового и изопропилового спиртов.

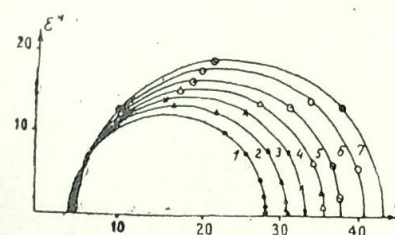


Рис. 4
Круговые диаграммы для n -пропилового спирта при температурах: 1—25; 2—39; 3—50; 4—61; 5—72; 6—84 и 7—94°C.

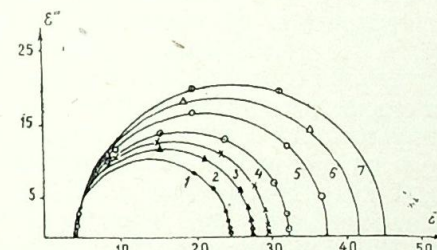


Рис. 5
Круговые диаграммы для изопропилового спирта при температурах: 1—20; 2—34; 3—46; 4—58; 5—77; 6—90 и 7—101°C.

На рис. 4 и 5 построены круговые диаграммы при нескольких температурах. То, что точки хорошо укладываются на полуокружности с центром на действительной оси, указывает на то, что при этих температурах процесс диэлектрической релаксации характеризуется одним временем релаксации или очень узким набором времен релаксаций и может быть описан известной формулой Дебая [2]:

$$\epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{1 + i\omega\tau},$$

откуда следует, что связь между ϵ'' и ϵ' выражается уравнением

$$\left[\epsilon' - \frac{\epsilon_0 + \epsilon_\infty}{2} \right]^2 + \epsilon''^2 = \left(\frac{\epsilon_0 - \epsilon_\infty}{2} \right)^2,$$

изображающим на плоскости ϵ'' ϵ' полуокружность ($\epsilon'' > 0$) с центром на оси ϵ' . Точки пересечения полуокружности с осью абсцисс ϵ_0 и ϵ_∞ соответствуют предельным статическому и высокочастотному значениям диэлектрической проницаемости [21]. В табл. 3 приведены значения ϵ_0 и ϵ_∞ для соответствующих температур.

Таблица 3

n-Пропиловый спирт			Изопропиловый спирт		
t	ϵ_0	ϵ_∞	t	ϵ_0	ϵ_∞
-25	28,4	4,24	-20	24,6	3,85
-39	32,0	4,40	-34	27,6	3,98
-50	33,2	4,51	-46	29,8	4,11
-61	35,6	4,70	-58	32,6	4,20
-72	37,9	4,83	-77	37,7	4,40
-84	40,9	5,00	-90	41,9	4,50
-94	43,3	5,10	-101	45,4	4,61

Полученные значения для ϵ_∞ значительно больше, чем любое разумное значение, которое может быть принято для квадрата показателя преломления. Это указывает на существование одной или нескольких дополнительных областей дисперсии.

Отклонения на высокочастотных частях круговых диаграмм на рис. 4 и 5 при низких температурах обусловлены, по-видимому, началом второй области дисперсии. Наличие дополнительных областей дисперсии при более низких температурах или вблизи температуры застеклования в изученных нами спиртах было установлено Коулом и его сотрудниками [20]. Однако авторы считают, что это свойственно такой низкой температуре. Существование дополнительных областей дисперсии при более высоких температурах показывает, что оно связано со строением спиртов, которые сохраняют свою цепочную структуру благодаря водородной связи, даже при температурах выше комнатной. Этот вопрос более подробно будет рассмотрен в нашей следующей статье.

Выводы

Изучена температурная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости n-пропилового и изопропилового спиртов на семи частотах диапазона $10^5 \div 10^8$ гц в интервале температур $+20 \div -160^\circ\text{C}$. На всех изученных частотах в температурной зависимости диэлектрических коэффициентов установлено наличие сильной дисперсии и поглощения.

С уменьшением частоты обращает на себя внимание увеличение максимальных значений показателей поглощения и потерь, сужение кривых поглощения и потерь, а также возрастание величины уменьшения диэлектрической проницаемости в области дисперсии.

Температурная зависимость времени релаксации в изученном интервале температур изображается экспоненциальным законом. Из наклона прямых $\lg \tau = \varphi \left(\frac{1}{T} \right)$ определена энергия активации, которая оказалась равной 5,7 и 5,9 ккал/моль n-пропилового и изопропилового спиртов соответственно. Температура, соответствующая данному значению времени релаксации, определялась из положения максимума кривой поглощения.

Установлено наличие дополнительных областей дисперсии при температурах значительно выше, чем температуры застеклования. Диэлектрическая релаксация в изученной области хорошо описывается известным уравнением Дебая, соответствующим одному времени релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров Б. И., Кобеко П. П. и Кувшинский Е. В. „Ж. техн. физ.“, 1936, 6, 1311.
2. Дебай П. Полярные молекулы. М., 1931.
3. Иманов Л. М. „ДАН Азерб. ССР“, 1957, № 12; „Изв. АН Азерб. ССР“, 1959, № 2.
4. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-мат. и техн. наук“, 1961, № 5.
5. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. „Уч. зап. АГУ, серия физ.-мат. и хим. наук“, 1961, № 6.
6. Кобеко П. П., Кумшацкая Н. М. Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе, М., 1956.
7. Кобеко П. П., Кувшинский Е. В. и Шишкин Н. И. „Ж. техн. физ.“ 1938, VIII, 8, 715.
8. Командин А. В. и Бонеевская А. К. „Ж. техн. физ.“, 1959, XXXIII, 5, 976.
9. Коул Р. „Изв. АН СССР“, 1960, XXIV, 1.
10. Курчатова И. В. и Щепкин Г. Я. „Ж. эксперим. и теор. физ.“, 1932, 2, 245.
11. Михайлов Г. П. „Ж. техн. физ.“, 1951, XXI, 1395.
12. Михайлов Г. П. и Борисова Т. И. „Ж. техн. физ.“, 1953, XXIII, 12, 2159.
13. Михайлов Г. П., Кабин С. П., Сажин Б. И. „Ж. техн. физ.“, 1955, XXV, 4, 590.
14. Михайлов Г. П., Лобанов А. М. и Сажин Б. И. „Ж. физ.“ 1954, XXIV, 1953.
15. Эрлих И. М. и Щербак П. Н. „Ж. техн. физ.“, 1955, XXV, 9, 1515.
16. Справочник химика, т. 2, Госхимиздат, 1951.
17. Baur E. Cehcers Phys., 1944, № 20, 1, 21.
18. Bernstein L. Physicalish Jabellen, Bd. 3., B. Spunger, 1935.
19. Broadhurst M. G., FtGerald E. R. J. chem. phys. 1960, 33, 210.
20. Coule R. U. a. o. J. chem. phys. 1955, 23, 1756, 1762, 1767; 1951, 19, 1484.
21. Coule K. a. Coule R. J. chem. phys., 1941, 9, 341.
22. Colin C., Mansel D. J. shem. phys., 1960, 32, 1316.
23. Denney D. T. J. chem. phys., 1957, 27, 259.
24. Mizushima S. Phys. z., 1927, 28, 418.
25. Reinisch L. J. chim. phys. et phys. chim. biol., 1959, 56, 108.
26. Sehmeder u. Wolf K. Kolloid. z., 1954, 134, 2/3.
27. Smyth C. F. a. o. J. chem. phys., 1951, 21, 1.
28. White A. H. a. Bishop J. Amer. chem. soc., 1940, 62, 8.

Л. М. Иманов. Я. М. Аббасов

Пропил спиртләрində диелектрик релаксасијасы

ХҮЛАСӘ

$10^5 \div 10^8$ гц диапазондагы једди тезликдә, $+20 \div -160^\circ\text{C}$ температур интервалында n-пропил вә изопропил спиртләринин комплекс диелектрик әмсалынын температур асылылығы өјрәнилмишдир.

Бүтүн өрәнилән тезликләрдә диелектрик әмсалларынын температур асылылыгында күчлү дисперсија вә удманын олмасы мүүјјән олунмушдур.

Тезлијин азалмасы илә удма көстәричиси вә иткинин максимум гијмәтләринин артмасы, удма вә итки әјриләринин даралмасы вә еләчә дә дисперсија областында диелектрик әмсалынын азалма гијмәтинин артмасы диггәти чәлб едир.

Өјрәнилән температур интервалында релаксација вахтынын температур асылылыгы экспоненциал ганунла ифадә олунур.

$\lg \tau = \varphi\left(\frac{1}{T}\right)$ дүз хәттинин мејлиндән тапылан фәаллашма енержиси n -пропил вә изопропил спиртләри үчүн ујғун олараг 5,7 вә $5,9 \frac{\text{ккал}}{\text{мол}}$ олмушдур.

Релаксација вахтынын $\tau = \frac{1}{2\pi f}$ гијмәтинә ујғун олан температур удма әјрисинин максимумунун вәзијјәтиндән тәјин олунмушдур.

Шүшәләшмә температурандан даһа јүксәк температурларда да әләвә дисперсија областларынын олмасы мүүјјән олунмушдур. Өјрәнилән областда диелектрик релаксацијасы бир релаксација вахтына ујғун олан мәлүм Дебај тәнлији илә јахшы ифадә олунур.

М. И. ИГЛИЦЫН, А. М. ПАШАЕВ

БЕСКОНТАКТНОЕ ИЗМЕРЕНИЕ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВ НА ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследования физических свойств полупроводников обусловлены измерением таких параметров, как удельное сопротивление, время жизни носителей заряда, подвижность их и т. д. Очень часто бывает необходимо измерить и активное сопротивление полупроводниковых материалов на высокой частоте. Эти измерения не требуют гальванического контакта с образцом и удобны для экспрессных исследований кристаллов, спрессованных порошкообразных таблеток и поликристаллических материалов, когда наличие высокоомных прослоек между зернами определяет величину активного сопротивления при измерениях на постоянном токе. Так, в работе [6] измерение активного сопротивления гексагонального селена показало, что отношение сопротивлений на постоянном и переменном [200 мГц] токах равно 10^4 , что подтверждает гипотезу о двухслойности его структуры. Такие измерения сопряжены с некоторыми техническими затруднениями из-за конструктивных особенностей высокочастотной аппаратуры, но весьма удобны для оперативного контроля малых по размерам кристалликов, идущих на изготовление полупроводниковых приборов в производственных условиях. Кроме того, отсутствие контактов делает эти измерения заманчивыми для полупроводников, где контактные явления, существенно влияют на результаты.

В литературе очень мало исследований по указанному вопросу. Все предложенные методики основаны на измерениях с помощью куметров типа КВ—I, УК—I. В работе [6] описан простой метод измерения активного сопротивления полупроводников на высокой частоте обычным куметром. В этой работе в расчетную формулу для определения активного сопротивления входят величины C , ΔC , Q , ΔQ , где ΔC —приращение емкости для настройки в резонанс измерительного контура, ΔQ —разность добротностей контура без и с образцом. И от точности их отсчета зависит точность измерения. Но при малых вносимых потерях величина ΔQ мала и плохо отсчитывается по шкале добротностей. Вопросам измерений больших потерь в диэлектриках с помощью куметров посвящены работы [1], [3], [4], [5], когда добротность измерительного контура становится меньше 30—50. При

малых вносимых потерях, что особенно интересно для полупроводникового приборостроения, когда размеры кристалликов малы, стандартные куметры непригодны из-за малой чувствительности к определению ΔQ — разности добротностей.

Ниже описывается прибор для измерения активного сопротивления полупроводников по методу измерения импедансов в резонансных контурах с дифференциальным отсчетом разности добротностей ΔQ [7].

Сущность метода

В основу метода положен принцип измерения добротности последовательного колебательного контура, в цепь которого исследуемый образец включается благодаря емкостной связи.

Блок-схема прибора показана на рис. 1.

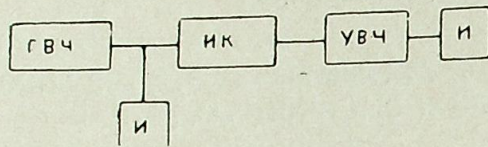


Рис. 1

Блок-схема прибора: ГВЧ — генератор высокой частоты; ИК — измерительный контур; УВЧ — усилитель высокой частоты; И — индикатор.

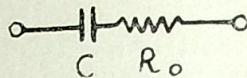


Рис. 2

Эквивалентная схема держателя образца с включенным образцом.

Эквивалентная схема держателя образца с включенным образцом представлена на рис. 2.

Выбор схемы последовательного колебательного контура обусловлен тем, что сопротивление образца включается последовательно с другими элементами измерительного контура, а это позволяет исключить из расчетной формулы емкость C . Выбор частоты обусловлен следующими основными факторами:

- 1) получение надежной связи с образцом;
- 2) влияние скин-эффекта должно быть минимальным;
- 3) удобство конструкции.

Мы остановились на диапазоне частот $f = 8 \div 13$ мГц. Полная эквивалентная схема измерительного контура показана на рис. 3.

Так как $r_m \ll r_k$, $L_m \ll L_k$, $R_{вх} \gg \omega L_k$, то схему можно представить так [2] (рис. 4).

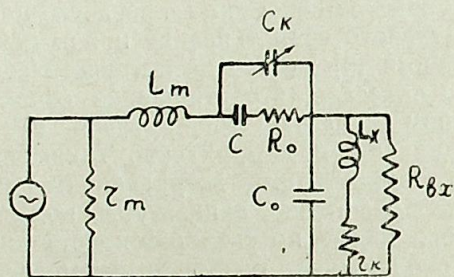


Рис. 3

Эквивалентная схема измерительного контура

L_m — индуктивность проводов; r_m — сопротивление нагрузки генератора, равное 0,01–0,1 ом; $R_{вх}$ — входное сопротивление прибора-индикатора (Л. В); C — емкость держателя и образца; R_0 — активное сопротивление образца; C_k — переменная емкость; L_k — индуктивность катушки; r_k — ее потери; C_0 — межвитковая емкость катушки.

Здесь

$$r'_k = \frac{r_k}{(1 - \omega^2 L_k C_0)^2} = \frac{r_k}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2}$$

$$L'_k = \frac{L_k}{1 - \omega^2 L_k C_0} = \frac{L_k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_k C_0}}.$$

Схема без образца представлена на рис. 5.

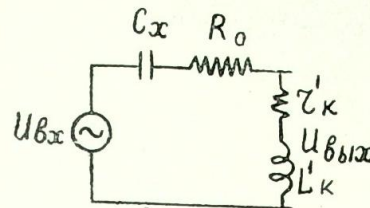


Рис. 4

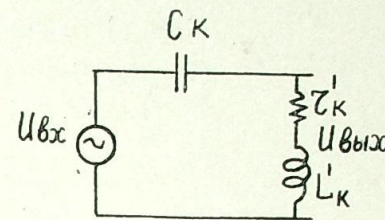


Рис. 5

Измеряя выходное напряжение контура, можно судить о его добротности. В этом можно убедиться из следующих вычислений.

Ток в контуре

$$I_k = \frac{U_{вх}}{r'_k + R_0 + j\omega L'_k + \frac{1}{j\omega C_k}} = \frac{U_{вх}}{z'_k + j\omega L'_k},$$

где $z'_k = R' + \frac{1}{j\omega C_k}$; $U_{вых} = I_k j\omega L'_k$ — измеряется вольтметром.

Отношение

$$k = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{I_k \cdot j\omega L'_k}{I_k (z'_k + j\omega L'_k)}$$

$$k = \frac{1}{1 + \frac{z'_k}{j\omega L'_k}} = \frac{1}{1 + \frac{R' + \frac{1}{j\omega C_k}}{j\omega L'_k}} = \frac{j\omega L'_k}{j\omega L'_k + R' + \frac{1}{j\omega C_k}} = \frac{-\omega^2 L'_k C_k}{-\omega^2 L'_k C_k + R' j\omega C_k + 1} =$$

$$= \frac{-\omega^2 L'_k C_k}{(1 - \omega^2 L'_k C_k) + jR'\omega C_k} = \frac{-\omega^2 L'_k C_k [(1 - \omega^2 L'_k C_k) - jR'\omega C_k]}{(1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + (R'\omega C_k)^2} =$$

$$= \left[\frac{-\omega^2 L'_k C_k (1 - \omega^2 L'_k C_k)}{(1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + (R'\omega C_k)^2} \right] + j \left[\frac{\omega^3 R' L'_k C_k^2}{(1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + (R'\omega C_k)^2} \right] = A + jB$$

Переходим от комплексных величин к модулю:

$$|k| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\frac{(\omega^2 L'_k C_k)^2 (1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + (\omega^3 R' L'_k C_k^2)^2}{[(1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + R'\omega C_k]^2}} =$$

$$= \frac{\omega^2 L'_k C_k}{\sqrt{(1 - \omega^2 L'_k C_k)^2 + (R'\omega C_k)^2}}$$

Исследуем полученное выражение на максимум. Пусть $\omega^2 L_k = a$, $(R'\omega)^2 = b$. Переменная — C_k .

$$c_k = \frac{1}{a} = \frac{1}{\omega^2 L_k},$$

$$k = \frac{\omega^2 L'_k c_k}{V(1 - \omega^2 L'_k c_k)^2 + (R' \omega c_k)^2} = \frac{1}{V \sqrt{\frac{(R')^2}{\omega^2 (L'_k)^2}}} = \frac{\omega L'_k}{R'} = Q,$$

Расчетная формула для измерения активного сопротивления выводится из следующих соображений. Добротность контура до включения образца будет равна

$$Q = \frac{\omega L_k'}{r_k'} = \frac{1}{\omega C_k' r_k'},$$

ибо потери контура в основном определяются активными потерями в катушке индуктивности. После включения образца добротность контура станет

$$Q' = \frac{\omega L_k'}{R_0 + r_k'}$$

где R_0 —активное сопротивление измеряемого образца. Отсюда нетрудно определить активное сопротивление

$$R_0 = \omega L'_k \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q} \right) = \frac{\omega L_k}{1 - \omega^2 L_k c_0} \frac{\Delta Q}{Q Q'}, \quad \text{где } \Delta Q = Q - Q'$$

или, если пренебречь $\omega^2 L_k C_0$, что можно сделать на частотах $f=8\div 13$ мГц,

$$R_0 = \omega L_k \cdot \frac{\Delta Q}{QQ'}$$

$$R_0 = \omega L_k \frac{\Delta U_{\text{ВЫХ}} \cdot U_{\text{ВХ}}}{U_{\text{ВЫХ}} \cdot U'_{\text{ВЫХ}}}.$$

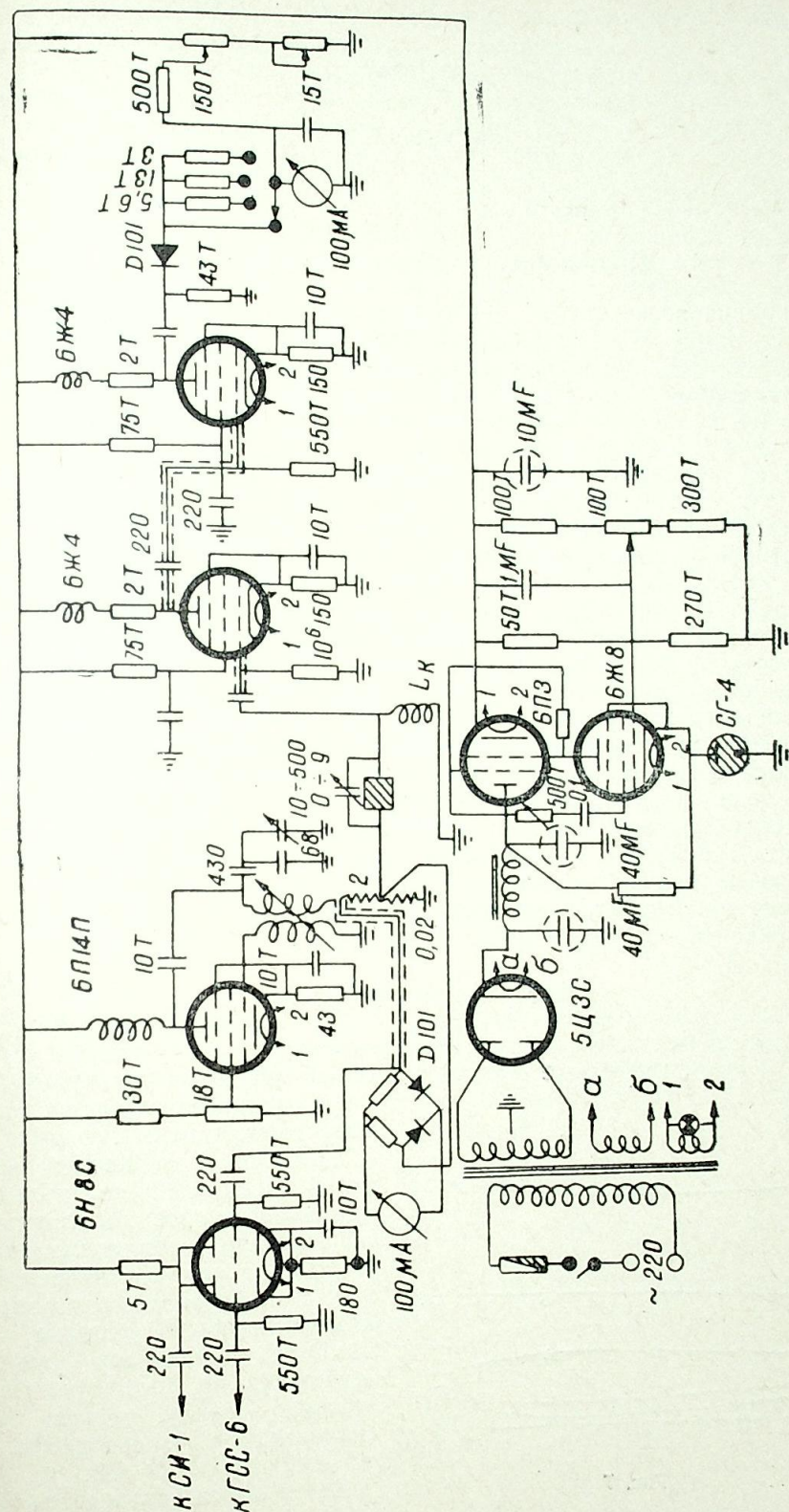


Рис. 6

Активное сопротивление можно представить и так

$$R_0 = 6,28 f \cdot L_k \frac{\Delta Q}{Q Q'}$$

$$R_0 = 6,28 f \cdot L_k \frac{\Delta U_{\text{вх}} \cdot U_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}} \cdot U'_{\text{вх}}},$$

где $U_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} - U'_{\text{вх}}$

Принципиальная схема прибора

Принципиальная схема прибора показана на рис. 6. Генератор собран на лампе 6П14П по параллельной схеме питания. Регулировка амплитуды колебаний производится изменением экранного напряжения потенциометром $R=18$. Нагрузкой является сопротивление $R=0,02$ ома — малое по величине — для уменьшения потерь в измерительном контуре и обратной связи на генератор.

Входной индикатор собран по мостиковой схеме на высокочастотных диодах типа Д101; он служит для контроля входного напряжения, которое поддерживается постоянным во время измерений.

Основным блоком прибора является измерительный контур, состоящий из $R=0,02$ ома, держателя образца, конденсатора, подключенного параллельно держателю, и катушки индуктивности L_k . Причем, конструкция компенсирующей емкости обеспечивает перекрытие значений емкости от близких к нулю значений до десяти пф.

Выходное напряжение с измерительного контура подается на вход двухкаскадного усилителя на лампах 6Ж4 с общим коэффициентом усиления $K=15$. Усилитель скорректирован по высокой частоте.

Главным достоинством прибора следует считать наличие компенсирующей цепочки и дифференциального отсчета ΔQ , благодаря которым расширяется диапазон измерений активного сопротивления.

Частота генератора f измеряется посредством смесителя на лампе 6Н8С.

Питание производится от типового стабилизированного выпрямителя, собранного на одном шасси с прибором.

Методика измерений

Измерительный контур настраивается на определенную частоту f_1 . Входное напряжение поддерживается постоянным. По показанию входного индикатора отсчитывается добротность Q .

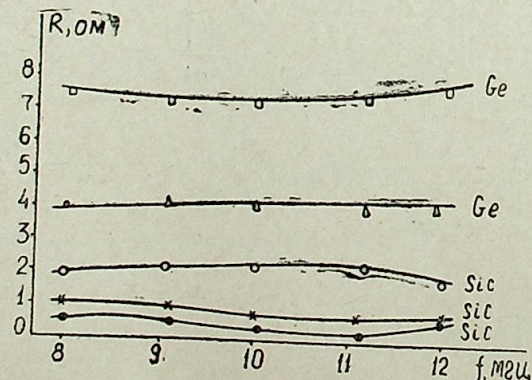


Рис. 7

Вносится в держатель образец, который не только увеличивает потери в контуре, но и расстраивает последний. Компенсируется показание входного индикатора благодаря компенсирующей цепочке, и выходной индикатор переключается на более чувствительную — шкалу отсчета Q ; (например, $100 \mu A$ соответствует добротности $Q=30$).

Затем, вновь устраняется образец из держателя, контур

подстраивается на частоту f_1 и берется непосредственно отсчет ΔQ . Такой дифференциальный метод увеличивает точность отсчета. Отсчитав Q , ΔQ , и зная индуктивность контура L_k и частоту f_1 , можно вычислить активное сопротивление R_0 по вышеприведенной формуле.

Приемлемость данной методики определялась на профилированных образцах германия и карбида кремния. Результаты измерения на различных частотах диапазона $f=8-13$ мГц дают небольшой разброс измеренных величин для одних и тех же образцов, что видно из рис. 7.

В дальнейшем представляется интересным проведение ряда исследований по данной методике для выяснения возможности определения удельного сопротивления по высокочастотным измерениям активного сопротивления полупроводников.

Авторы благодарят проф. Г. Б. Абдуллаева за внимание к работе, Шуняева за участие в создании прибора, а также принимавших участие в обсуждении И. Н. Туркина и О. Карагоза. Монтаж прибора сделан С. И. Болотиним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурдак Н. М., Нетушил А. В. Труды Моск. ордена Ленина энергетического ин-та, вып. IX, 1952.
2. Валитов Р. А., Сретенский В. Н. Радиоизмерения на сверхвысоких частотах. 1955.
3. Иманов Л. М. ДАН Азерб. ССР, 1957, т. XIII, № 12.
4. Иманов Л. М. Изв. АН Азерб. ССР, серия физико-техн. и хим. наук, 1959, № 2.
5. Нетушил А. В. "Электричество", 1955, № 11.
6. Сидякин В. Г. и Скорик Е. Т. Приборы и техника эксперимента, 1960 № 2.
7. Термен Ф., Петтит Дж. Измерительная техника в электронике. ИЛ, 1955.

М. И. Иглисин, А. М. Пашаев

Жарымкечиричиләрдә актив мугавимәтин жүксәк тезликдә контактсыз үсулла өлчүлмәси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә жарымкечиричиләрин актив мугавимәтини жүксәк тезликдә (8—13 мГц) контактсыз үсулла өлчмәк үчүн гурулмуш чиһазын тәсвири верилмишдир. Бу үсулла актив мугавимәти тапмаг үчүн ардычыл рәгс контурунун резонанс һаггында кејфијјәт әмсалы Q -нү өлчмәк лазымдыр. Өлчү дүстүрү беләдир:

$$R = \omega L_k \frac{\Delta Q}{Q Q'}$$

Мүәллифләр чиһазын гурулушунда компенсасијадан истифадә етмиш вә бу үсулун дәгиглијини хејли артырмышлар. Бундан башга мәгаләдә контактсыз үсулун әһәмијјәти гејд едилир, нәзәри тәһлили верилир. Чиһаз Ge вә SiC кристалларында јохланылмышдыр.

Б. М. АСКЕРОВ

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Как известно из квантовой механики, чтобы получить плотность потока вещества (массы) или электрического заряда нужно вектор плотности тока вероятности умножить на массу или заряд одной частицы (см., например, [2]). Однако плотность потока энергии нельзя получить просто умножением энергии одной частицы на ток вероятности. Для определения плотности потока энергии в квантовой механике в чистом ψ состоянии нужно исходить из определения плотности энергии в этом же состоянии и воспользоваться уравнением Шредингера.

В общем случае плотность энергии можно определить в виде

$$U = \frac{1}{2} [\psi^* \hat{H} \psi + \psi \hat{H}^* \psi^*], \quad (1)$$

где ψ — есть решение уравнения Шредингера с данным гамильтонианом $\hat{H}$.

Предполагая, что $\hat{H}$ от времени t явно не зависит, возьмем производное от U по t и используем уравнение Шредингера. Тогда получим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{i}{2\hbar} \left(\left| \hat{H} \psi \right|^2 - \psi^* \hat{H}^2 \psi \right) + \text{к. с.} \quad (2)$$

Рассмотрим следующие конкретные случаи:

1. Свободная частица. В этом случае гамильтониан

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (3)$$

Из (2) и (3) после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \operatorname{div} \left((\vec{\nabla} \psi^*) \nabla^2 \psi - \psi^* \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) \right) + \text{к. с.} \right] \quad (4)$$

Из сравнения (4) с уравнением непрерывности

Б. М. АСКЕРОВ

КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ

Как известно из квантовой механики, чтобы получить плотность потока вещества (массы) или электрического заряда нужно вектор плотности тока вероятности умножить на массу или заряд одной частицы (см., например, [2]). Однако плотность потока энергии нельзя получить просто умножением энергии одной частицы на ток вероятности. Для определения плотности потока энергии в квантовой механике в чистом ψ состоянии нужно исходить из определения плотности энергии в этом же состоянии и воспользоваться уравнением Шредингера.

В общем случае плотность энергии можно определить в виде

$$U = \frac{1}{2} \left[\psi^* \hat{H} \psi + \psi \hat{H}^* \psi^* \right], \quad (1)$$

где ψ — есть решение уравнения Шредингера с данным гамильтонианом $\hat{H}$.

Предполагая, что $\hat{H}$ от времени t явно не зависит, возьмем производное от U по t и используем уравнение Шредингера. Тогда получим:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{i}{2\hbar} \left(\left| \hat{H} \psi \right|^2 - \psi^* \hat{H}^2 \psi \right) + \text{к. с.} \quad (2)$$

Рассмотрим следующие конкретные случаи:

1. Свободная частица. В этом случае гамильтониан

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (3)$$

Из (2) и (3) после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \operatorname{div} \left((\vec{\nabla} \psi^*) \nabla^2 \psi - \psi^* \nabla (\nabla^2 \psi) \right) + \text{к. с.} \right] \quad (4)$$

Из сравнения (4) с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div } \vec{W} = 0, \quad (5)$$

для плотности потока энергии следует:

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \left[\psi^* \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) - \nabla^2 \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] + k. c. \right\} \quad (6)$$

Легко показать, что в случае плоской волны вида $e^{i\vec{k}\vec{r}}$, (6) дает

$$\vec{W} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{\hbar \vec{k}}{m} = \epsilon_0 \vec{v} \quad (7)$$

2. Частица в поле скалярного потенциала $U(\vec{r})$.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) \quad (8)$$

В этом случае для плотности потока энергии имеем

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \left[\psi^* \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) - \nabla^2 \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] + \frac{i}{\hbar} \left[\psi^* \vec{\nabla} (U\psi) - (U\psi) (\vec{\nabla} \psi^*) \right] + k. c. \right\} \quad (9)$$

Отсюда видно, что если функция ψ вещественна, то, как следовало ожидать, поток энергии равен нулю.

3. Электрон в электромагнитном поле. Гамильтониан электрона в произвольном электромагнитном поле имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{i\hbar e}{mc} \vec{A} \vec{\nabla} - \frac{i\hbar e}{2mc} \text{div } \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 - e\varphi \quad (10)$$

где $(-e)$ заряд электрона;

$\vec{A}$ вектор-потенциал;

φ — потенциал электростатического поля.

Подставляя (10) в (2), после несложных, но громоздких преобразований, в силу (5), для плотности потока энергии в электромагнитном поле получим выражение (при этом были использованы формулы преобразования в векторном анализе [3])

$$\begin{aligned} \vec{W} - \varphi \vec{J} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \left[\psi^* \vec{\nabla} (\nabla^2 \psi) - \nabla^2 \psi (\vec{\nabla} \psi^*) \right] - \right. \\ & - \frac{\hbar^2 e}{2m^2 c} \left[\psi^* (\nabla^2 \psi) \vec{A} + \psi \vec{\nabla} (\vec{A} \vec{\nabla} \psi) - (\vec{A} \vec{\nabla} \psi) (\vec{\nabla} \psi^*) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \psi^* \vec{\nabla} \left((\vec{\nabla} \vec{A}) \psi \right) - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{A}) \psi \vec{\nabla} \psi^* \left. \right] - \\ & - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar e}{mc} \right)^2 \psi^* (\vec{A} \vec{\nabla} \psi) \vec{A} - \frac{i\hbar e^2}{4m^2 c^2} A^2 \left[\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right] + \\ & + \frac{e^3}{2m^2 c^3} (\psi^* \psi A^2 \vec{A}) + k. c. \left. \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь

$$\vec{J} = -\frac{i\hbar e}{2m} \left[\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi \right] - \frac{e^2}{mc} \psi^* \psi \vec{A} \quad (12)$$

квантовомеханическое выражение для электрического тока.

Общую формулу (11) применим к случаю, когда магнитное поле направлено по оси z $\vec{H}(0, 0, H)$, а постоянное электрическое поле по оси x $\vec{E}(E, 0, 0)$. Как известно из квантовой механики в таких скрещенных электрическом и магнитном полях электрон имеет стационарные состояния, т. е. известны волновые функции.

Если выберем калибровку вектор-потенциала в виде $A_x = 0$, $A_y = Hx$, $A_z = 0$, то гамильтониан электрона будет иметь вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[P_x^2 + (P_y + m\omega_0 x)^2 + P_z^2 \right] + eEx, \quad (13)$$

где $\omega_0 = eH/mc$ циклотронная частота. Собственные функции оператора (13):

$$\psi_{nk_y k_z}(x, y, z) = \varphi_n(x - x_0) e^{i(k_y y + k_z z)} \quad (14)$$

Здесь n, k_y, k_z квантовые числа, $\varphi_n(x - x_0)$ — нормированная волновая функция осциллятора с главным квантовым числом n , колеблющегося около положения равновесия

$$x_0 = -\frac{\hbar k_y}{m\omega_0} - \frac{eE}{m\omega_0^2} \quad (15)$$

$$\varphi_n(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (16)$$

где $\alpha = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0} \right)^{1/2}$, $\xi = \frac{x - x_0}{\alpha}$, а $H_n(\xi)$ полиномы Эрмита.

Тогда из (11) и (14) для y -го компонента плотности потока энергии получим

$$\begin{aligned} W_y - \varphi j_y = & - \left(x + \frac{\hbar k_y}{m\omega_0} \right) \left[\frac{\hbar^2 \omega_0}{2m} \left(\frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} - (k_y^2 + k_z^2) \varphi_n \right) - \right. \\ & \left. - \hbar \omega_0^2 k_y x \varphi_n - \frac{m\omega_0^3}{2} x^2 \varphi_n \right] \varphi_n. \quad (16) \end{aligned}$$

Воспользуясь свойствами полиномов H_n

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi); \quad \frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} = 4n(n-1)H_{n-2}(\xi)$$

и рекуррентной формулой для φ_n

$$\xi \varphi_n(\xi) = n\varphi_{n-1}(\xi) + \frac{1}{2}\varphi_{n+1}(\xi),$$

в силу (15), из (17) с точностью до линейного члена по электрическому полю имеем:

$$W_y - \varphi j_y = \left[(n + 1/2) \hbar \omega_0 + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \right] \frac{j_y}{(-e)} \quad (18)$$

Здесь j_y квантовомеханическая плотность электрического тока

$$j_y = -e\omega_0 \left(x - x_0 - \frac{eE}{m\omega_0^2} \right) \varphi_n^2(x - x_0), \quad (19)$$

которая получается из (12) в представлении (14).

Квадратная скобка в (18) представляет собой собственные значения энергии электрона в магнитном поле, направленном по оси z .

Следует отметить, что если обобщить выражение (11) для квантово-механического ансамбля, то с его помощью и с помощью соотношений Онсагера можно рассчитать изотермические термомагнитные явления [1].

В заключение выражаю искреннюю благодарность профессору А. И. Ансельму и доценту Ю. М. Сеидову за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ансельм А. И. и Аскеров Б. М. ФТТ, 1961, т. 3, № 12.
2. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М., 1961.
3. Лагалли М. Векторное исчисление. М., 1936.

Б. М. Эскеров

Квант механикасында энерги селинин сыхлыгы үчүн ифадә

ХҮЛАСӘ

Магаләдә энерги селинин сыхлыгы үчүн тәмиз квант һалына уҗгун ифадә верилир. Сәрбәст зәррәчик зәррәчик скалјар потенциал саһәдә вә электрон ихтијары электромагнит саһәсиндәки һалларына бахылыр.

З. А. АЛИЯРОВА, Ш. М. АЛЕКПЕРОВА, И. Х. ГЕЛЛЕР

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОБРАТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В СЕЛЕНОВЫХ ВЫПРЯМИТЕЛЯХ

Исследованию температурной зависимости вольтамперных характеристик селеновых выпрямителей посвящен ряд работ [1, 6, 11].

Изучая температурную зависимость как прямого, так и обратного сопротивлений селеновых выпрямителей, А. В. Шаравский показал, что в области малых напряжений температурный коэффициент обратного сопротивления селенового выпрямителя в интервале температур от -183° до 65°C отрицателен, при высоких напряжениях (20 в) положителен. При некоторых промежуточных значениях напряжений наблюдается переход отрицательного температурного коэффициента в положительный. Точка инверсии коэффициента обратного сопротивления с повышением напряжений смещается в сторону высоких температур.

Д. Н. Наследовым выявлено, что если для роста электропроводности с напряжением удовлетворяется формула Френкеля

$$\sigma = \sigma_0 e^{a\sqrt{U}}, \quad (1)$$

то при напряжении $a\sqrt{U} > U_0$ температурный коэффициент обратного сопротивления (K) селеновых выпрямителей претерпевает инверсию, где U_0 — энергия активации носителей.

Д. Н. Наследов доказывает, что перемена K есть результат совместного действия температуры и электрического поля.

Далее это явление было подробно исследовано Г. Б. Абдуллаевым в селеновых выпрямителях с искусственными запирающими слоями и М. Алиевым в селеновых выпрямителях, содержащих различные количества примесей брома. Этими авторами появление точки инверсии в температурной зависимости обратного сопротивления и ее смещение объясняется совместным действием эффекта сильного поля и температуры.

В работе [8] исследована температурная зависимость обратного сопротивления селеновых выпрямителей с промежуточными тонкими изолирующими слоями. В этих выпрямителях также наблюдалась перемена знака K обратного сопротивления.

Теоретически инверсия K обратного сопротивления в полупроводниковых выпрямителях, в том числе и в селеновых, доказана в работах [9, 10], где для обратного тока выведено уравнение

$$j = A \exp \left(- \frac{q \varphi - BU^{\alpha(1-m)}}{kT} \right), \quad (2)$$

где B , α , m — постоянные величины;
 m — меньше единицы и равно показателю степени напряжения в законе изменения емкости перехода от напряжения;
 φ — энергия активации процесса образования неосновных носителей.

Из (2) следует, что температурная зависимость обратного сопротивления должна претерпевать инверсию при напряжении, определяемом равенством

$$BU_k^{\alpha(1-m)} = q \varphi \quad (3)$$

В последнее время разрабатываются селеновые выпрямители на повышенную плотность тока, но температурные зависимости их обратного и прямого токов не исследованы.

Целью настоящей работы является исследование температурной зависимости вольтамперных характеристик селеновых выпрямителей, пропускающих в прямом направлении трехкратную плотность тока, и улучшение их температурной характеристики обратного тока.

Для увеличения плотности тока в прямом направлении в селеновых выпрямителях основывались на следующих соображениях.

По теории Шокли полная плотность тока через $p-n$ переход равна [12]:

$$I = I_s \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right). \quad (4)$$

где I_s — ток насыщения, который обусловлен неосновными носителями тока.

Теория Шокли учитывает рекомбинацию только в p и n областях и хорошо оправдывает себя для резкого $p-n$ перехода в германии при комнатной температуре.

В некоторых полупроводниковых выпрямителях ток насыщения не наблюдается, величина обратного тока зависит от напряжения. В селеновых выпрямителях это объясняют уменьшением энергии активации неосновных носителей тока под влиянием приложенного поля к выпрямителю.

Дальнейшее развитие теории Шокли с учетом рекомбинации носителей в области объемного заряда приводят к следующему виду вольтамперной характеристики [13].

$$I = I_0 \left(e^{\frac{qU}{kT}} - 1 \right), \quad (5)$$

где I_0 — предэкспоненциальный множитель, $|U| \gg \frac{kT}{q}$

В этой формуле при положительном напряжении можно пренебречь единицей по сравнению с экспоненциальным числом

$$I = I_0 e^{\frac{qU}{kT}};$$

При этом в прямом направлении уничтожается $p-n$ переход, сопротивление выпрямителя определяется главным образом сопротивлением селена. Поэтому введение примесей в толщу селена можно управлять током в прямом направлении. Так удалось получить селеновые выпрямители с трехкратным током в прямом направлении. В этих выпрямителях с ростом температуры до 80°C обратный ток растет, затем убывает (рис. 1), при низких температурах обратный ток растет более резко, чем в обычных элементах (рис. 1, кривая 1).

Такое увеличение обратного тока в рабочем интервале температур приводит к ухудшению выпрямительных свойств.

Для получения выпрямителей с более равномерными температурными зависимостями обратного тока исходили из того, что равновесная концентрация неосновных носителей в полупроводнике с примесной проводимостью изменяется с температурой примерно как $\exp \left(- \frac{\Delta E}{kT} \right)$.

При некоторой температуре собственная проводимость материала выпрямителя становится сравнимой с примесной проводимостью и выпрямление резко ухудшается. Верхняя предельная температура t_{max} выше для полупроводников с более широкой запрещенной зоной ΔE .

Так как обратный ток обусловлен токами проводимости — потоком электронов из p -области в n -область и потоком дырок из n -области в p -область,

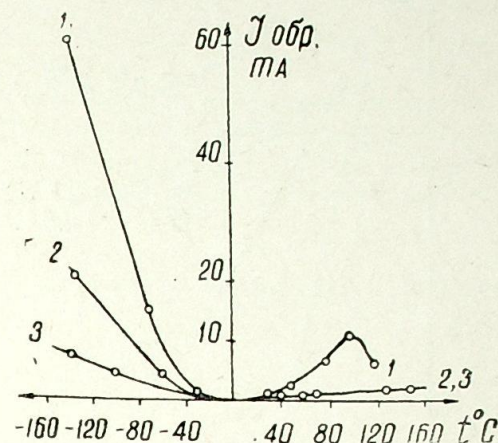


Рис. 1

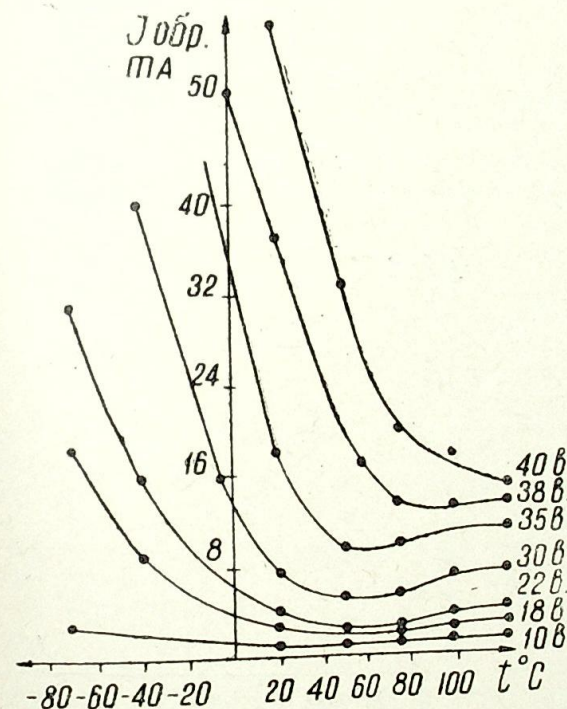


Рис. 2

то надо ожидать, что с уменьшением концентрации примесей в $p-n$ переходе увеличивается энергия активации примесей, ΔE , вследствие чего улучшается температурная зависимость обратного тока.

Опыты показывают, что температурные характеристики селеновых выпрямителей и фотоэлементов зависят не только от количества примесей, но также от наличия и природы промежуточных слоев между селеном и верхним электродом [2, 4].

Исходя из вышеуказанного в селеновых выпрямителях, допускающих трехкратный ток в прямом направлении, на базовый тех-

нический селен (чистотой 99,996%) нанесли 1 μ селена с чистотой 99,9996%.

Для улучшения температурной характеристики обратного тока селеновых выпрямителей, содержащих примеси галлия, на селен нанесли искусственные слои CdSe или CdS, затем их покрыли сплавом Cd + Sn + 0,02% Ti.

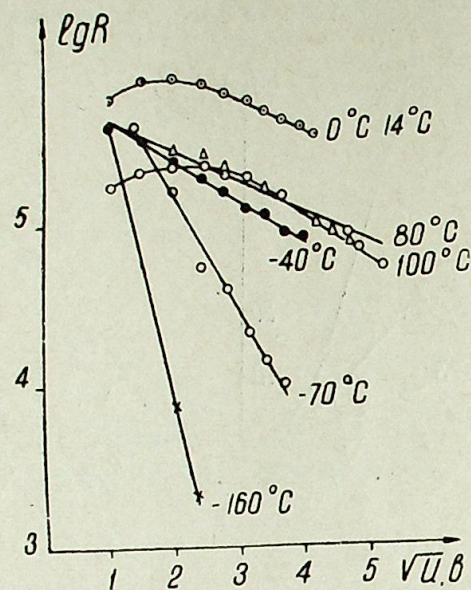


Рис. 3

запирающими слоями из CdSe при разных напряжениях. В ходе кривых наблюдается точка инверсии температурного коэффициента обратного сопротивления.

При малых напряжениях (до 4 в) с ростом температуры обратный ток растет и температурный коэффициент имеет отрицательный знак. При напряжении более 4 в с повышением температуры обратный ток сперва убывает, достигая минимума, затем растет. Перемена знака K зависит от величины напряжения, т. е. с увеличением напряжения точка инверсии смещается в сторону высоких температур. При 40 в с увеличением температуры во всем интервале обратный ток уменьшается.

Аналогичное явление наблюдается в селеновых выпрямителях с искусственным запирающим слоем из CdS.

Из (3) видно, что напряжение, при котором происходит инверсия, зависит от энергии активации примесей ϕ . Энергия активации примесей в селене, вычисленная из прямой ветви вольтамперной характеристики, совпадает со значением, найденным в работе [10] и составляет 0,5 эв.

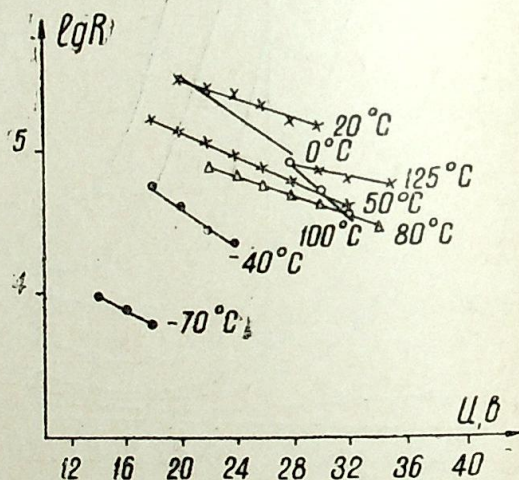


Рис. 4

Благодаря малой величине энергии активации, изменение знака K наблюдается даже при малых напряжениях. Анализ полученных данных показывает, что в образцах со слоем из CdS и CdSe от 1 по 26 в зависимость между $\ln \sigma$ и $\sqrt{U}$ линейна, что указывает на справедливость формулы Френкеля (1).

На рис. 3 показана зависимость обратного сопротивления выпрямителя со слоем CdSe от напряжения.

За пределами указанного интервала формула Френкеля нарушается. Чем ниже температура, тем сильнее происходит отступление от формулы Френкеля. По формуле Френкеля из тангенса угла прямой $\lg R = f(\sqrt{U})$ при различных температурах вычислили α , которое линейно зависит от $\frac{1}{T}$.

Таким образом, температурная зависимость α выражается следующей формулой:

$$\alpha = a' \frac{10^3}{T} + a''$$

где $a' = 0,03 \text{ в}^{-1/2} \text{ град}^{-1}$; $a'' = 0,25 \text{ в}^{-1/2}$ для CdSe
 $a' = 0,02 \text{ в}^{-1/2} \text{ град}^{-1}$; $a'' = 0,22 \text{ в}^{-1/2}$ для CdS

В зависимости от интервала температуры при напряжениях от 8 до 20 в $\lg R$ становится линейной функцией от U , т. е. вступает в силу закон Пуля:

$$\sigma = \sigma_0 e^{\beta U}; \quad (6)$$

Эта зависимость для образца со слоем CdSe представлена на рис. 4. Чем выше температура, тем больше интервал, в котором наблюдается эта закономерность. В образцах со слоем CdS при низких температурах эта область отсутствует.

При больших напряжениях увеличение электропроводности с полем усиливается, линейная зависимость наблюдается между $\lg R$ и U^2 (рис. 5).

С понижением температуры эта зависимость наблюдается уже при малых напряжениях. При -183° линейная зависимость $\lg R = f(U^2)$ начинается уже при напряжении 8 в.

В селеновых выпрямителях, содержащих различные количества примесей брома, при -183° линейная зависимость между $\lg R$ и U^2 начинается при 20 в [1], в то время, как в наших опытах эта зависимость наблюдалась при 8 в. Это объясняется следующим образом.

В работе [3] выявлено, что примеси галлия увеличивают электропроводность селена почти в 200 раз. Следовательно, уменьшение сопротивления толщи селена приводит к перераспределению падения напряжения на образце, т. е. на долю $p-n$ перехода приходится

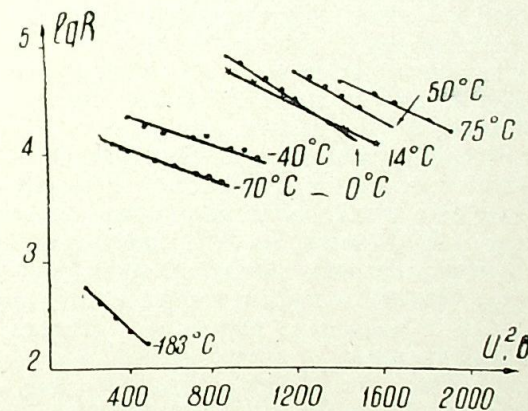


Рис. 5

большее падение напряжения, вследствие чего эффект сильного поля проявляет себя при меньших приложенных напряжениях.

А. Ф. Иоффе показал, что примеси являются источником, откуда поле легко черпает дополнительные электроны. Чем больше примесей, тем эффективнее действие сильного поля [5].

Сравнение полученных данных показывает, что в выпрямителях с $p-n$ переходом, содержащем меньшее количество примесей, рост электропроводности по формуле

$$\sigma = \sigma_0 e^{\gamma U^2}$$

начинается с 12 в.

Н. Л. Писаренко [7] с учетом процессов ионизации при столкновении и прилипании в полупроводниках установил зависимость роста концентрации электронов от примеси при наличии поля, которая выражается формулой:

$$n = \frac{n_1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma} \right)^2 + \frac{4v_0}{\gamma} \right]^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right);$$

$$\gamma = \frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_s}; \quad v = \frac{n_0}{n_i};$$

где n_0 —концентрация носителей тока в слабых полях;

n_i —концентрация примесей;

$\bar{\lambda}_i$ —средняя вероятность ионизации;

λ_s —средняя вероятность прилипания.

При увеличении напряженности поля первым начинает действовать механизм термоэлектронной ионизации. С понижением температуры подвижность электронов увеличивается, вследствие уменьшения интенсивности тепловых колебаний.

Электрону представляется возможность накопить большую кинетическую энергию в свободном пути. При более сильных полях наряду с механизмом термоэлектронной ионизации вступает в силу ударная ионизация ускоренными электронами и превалирует над первым механизмом. Это приводит к более сильному росту электропроводности с полем.

Исследовались также температурные характеристики прямого сопротивления этих элементов. Прямое падение напряжения, соответствующее трехкратной плотности тока (75 ма/см^2), с ростом температуры уменьшается до 80°C , затем увеличивается.

Результаты по измерению прямой ветви вольтамперной характеристики показывают, что зависимость между $\lg I_{\text{пр}}$ и U в интервале $0,1 \div 0,6 \text{ в}$ является линейной. Тангенс угла наклона определяется выражением

$$\text{tg} \alpha = \frac{q}{\beta k T},$$

откуда можно определить β .

При комнатной температуре для образцов со слоем CdSe $\beta = 2,7$, со слоем CdS $\beta = 2,6$.

Выводы

1. Уменьшение концентрации примесей в области $p-n$ перехода в селеновых выпрямителях приводит к улучшению температурной зависимости обратного тока.

2. В селеновых выпрямителях с искусственными слоями из CdSe и CdS, содержащими примеси галлия, в области высоких температур наблюдается минимум кривой температурной зависимости обратного тока, который с ростом напряжения смещается в сторону высоких температур.

К недостаткам селеновых выпрямителей с примесью Ga следует отнести то, что в области низких температур эффект сильного поля проявляет себя раньше, чем в обычных селеновых выпрямителях без примесей галлия.

В заключение приносим глубокую благодарность проф. Г. Б. Абдуллаеву за предложенную тему и обсуждение результатов и У. И. Умарову за помощь при изготовлении образцов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Алиев М. Г., Геллер И. Х. ФТТ, 1, 11, 1959.
2. Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б., Насиров Я. Н. Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук, 1960, № 6.
3. Алиев Г. М., Абдуллаев Г. Б., Баркинхоев З. Г., Керимов И. Г. ДАН Азерб. ССР, 1960, № 7.
4. Гримм В. Р., Наследов Д. Н. ЖТФ, 26, 4, 1956.
5. Иоффе А. Ф. Изв. АН СССР, 1938, № 5—6.
6. Наследов Д. Н. ЖТФ, 15, 22, 1940.
7. Писаренко Н. Л. Изв. АН СССР, 1938, № 5—6.
8. Соловьев Р. А. Научно-техн. информ. бюллетень, 7, 1960.
9. Фистуль В. И., Оржевский О. Б. ФТТ, 2, 9, 1960.
10. Фистуль В. И., Оржевский О. Б. ФТТ, 3, 4, 1961.
11. Шаравский П. В. ЖТФ, 10, 22, 1940.
12. Шокли. Теория электронных полупроводников. ИЛ, 1950.
13. Sah C. T., Noyse R. N., Shockley W. Proc. IRE, 45, 9, 1228, 1957.

З. А. Элижарова, Ш. М. Элэкбэрова, И. Х. Келлер

Селен дүзлэндиричилэриндә экс чэрэянын температур асылылыгынын тэдгиги

ХҮЛАСӘ

Селен дүзлэндиричилэриндә экс чэрэянын гижмәти $p-n$ кечиддә ашгарларын мигдарындан вә һәмчинин селенлә үст электрод арасында јерләшән сүн'и тәбәгәдән асылыдыр.

Буну нәзәрә алараг, селен дүзлэндиричилэриндә экс чэрэянын температурдан асылылыг характеристикасыны јахшылашдырмаг үчүн бир сыра элементләрдә әсас селенин үзәринә 1μ галынлығында нисбәтән тәмиз селен, бир сыра элементләрдә исә назик CdSe вә ја CdS тәбәгәси чәкилмишди.

Биринчи нөв элементләрдә экс чэрәјан 80°C -ә гәдәр тәхминән сабит галыр, сонра артыр, икинчи нөв элементләрдә исә температур артдыгча чэрәјан әввәлчә азалыр, минимум гижмәт алдыгдан сонра артыр. Кәркинлик артдыгча минимум нөгтә температурун јүксәк гижмәтинә доғру јерини дәјишир. Бу һадисә гүввәтли саһә эффектинин вә температурун биркә тә'сири илә изаһ едилир.

М. Я. БАКИРОВ, Р. Б. ГАСЫМОВ

СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОЭЛЕМЕНТЫ СО СЛОЕМ СЕЛЕНИДА РТУТИ

Электроннографическим исследованием [2, 3] установлено, что в селеновых фотоэлементах $p-n$ переход образуется в том случае, если металлы верхнего электрода на поверхности селена создают селенистые соединения.

Наши ранние исследования [1, 2, 4], а также исследования различных авторов [8, 9, 10] показывают, что в селеновых фотоэлементах $p-n$ переход можно создать также путем нанесения на селен тонкого слоя электронного полупроводника. Это привело к созданию многослойных селеновых фотоэлементов, которые во многом отличаются от обычных селеновых фотоэлементов.

Как известно, возникновение вентильного фотоэффекта обусловлено образованием пары: электрон—дырка, т. е. переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости, которые определяются шириной запрещенной зоны полупроводника.

Если ширина запрещенной зоны мала, то концентрация термических возбужденных электронов и дырок будет весьма заметна. Это приведет к нежелательному току утечки через $p-n$ переход, величина которого будет расти при повышении температуры.

Если в селеновых фотоэлементах в качестве n -материала взять полупроводники, резко отличающиеся по ширине запрещенной зоны от селена, то это должно сказываться на спектральную и температурную характеристики элементов.

В данной работе излагаются результаты исследования селеновых фотоэлементов со слоем селенида ртути.

Исходными материалами при изготовлении образцов служили:

1) технический селен p -типа с концентрацией дырок 10^{15} см^{-3} , подвижностью при комнатной температуре $0,052 \frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}$, шириной запрещенной зоны $\sim 2 \text{ эв}$.

2) селенида ртути n -типа с концентрацией электронов 10^{17} см^{-3} , подвижностью при комнатной температуре $90\,000 \frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}$, шириной запрещенной зоны $0,3 \text{ эв}$, что соответствует результатам работы [6].

Для изготовления образцов на поверхность закристаллизованного гексагонального селена на алюминиевой подложке путем возгонки в

М. Я. БАКИРОВ, Р. Б. ГАСЫМОВ

СЕЛЕНОВЫЕ ФОТОЭЛЕМЕНТЫ СО СЛОЕМ СЕЛЕНИДА РТУТИ

Электронографическим исследованием [2, 3] установлено, что в селеновых фотоэлементах $p-n$ переход образуется в том случае, если металлы верхнего электрода на поверхности селена создают селенистые соединения.

Наши ранние исследования [1, 2, 4], а также исследования различных авторов [8, 9, 10] показывают, что в селеновых фотоэлементах $p-n$ переход можно создать также путем нанесения на селен тонкого слоя электронного полупроводника. Это привело к созданию многослойных селеновых фотоэлементов, которые во многом отличаются от обычных селеновых фотоэлементов.

Как известно, возникновение вентильного фотоэффекта обусловлено образованием пары: электрон—дырка, т. е. переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости, которые определяются шириной запрещенной зоны полупроводника.

Если ширина запрещенной зоны мала, то концентрация термических возбужденных электронов и дырок будет весьма заметна. Это приведет к нежелательному току утечки через $p-n$ переход, величина которого будет расти при повышении температуры.

Если в селеновых фотоэлементах в качестве n -материала взять полупроводники, резко отличающиеся по ширине запрещенной зоны от селена, то это должно сказываться на спектральную и температурную характеристики элементов.

В данной работе излагаются результаты исследования селеновых фотоэлементов со слоем селенида ртути.

Исходными материалами при изготовлении образцов служили:

1) технический селен p -типа с концентрацией дырок 10^{15} см^{-3} , подвижностью при комнатной температуре $0,052 \frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}$, шириной запрещенной зоны $\sim 2 \text{ эв}$.

2) селенида ртути n -типа с концентрацией электронов 10^{17} см^{-3} , подвижностью при комнатной температуре $90\,000 \frac{\text{см}^2}{\text{в} \cdot \text{сек}}$, шириной запрещенной зоны $0,3 \text{ эв}$, что соответствует результатам работы [6].

Для изготовления образцов на поверхность закристаллизованного гексагонального селена на алюминиевой подложке путем возгонки в

вакууме 10^{-5} мм рт. ст. был нанесен слой HgSe толщиной $\sim 1 \mu$. HgSe, используемый нами при изготовлении фотоэлементов, был получен синтезом.

В качестве верхнего электрода был взят Cd.

На рис. 1 представлена типичная вольтамперная характеристика элемента в режиме диода при $|V| \gg \frac{kT}{q}$ и $|V| \sim \frac{kT}{q}$.

Из рис. 1 видно, что напряжение отсечки составляет 0,35 в. Внутреннее последовательное сопротивление, определяемое по линейному участку прямой ветви, $r=18 \text{ ом}$. Обратный ток не имеет насыщения.

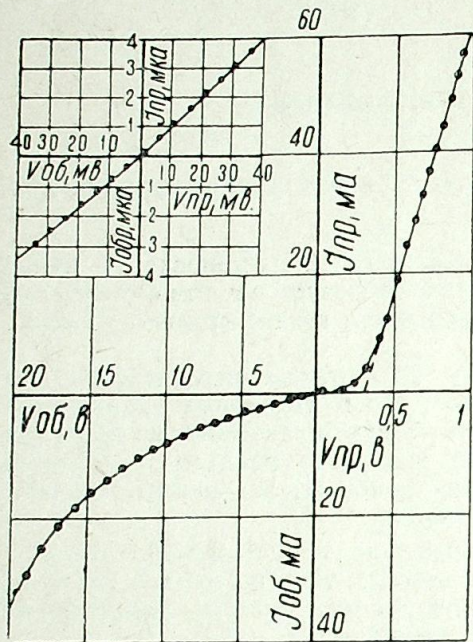


Рис. 1

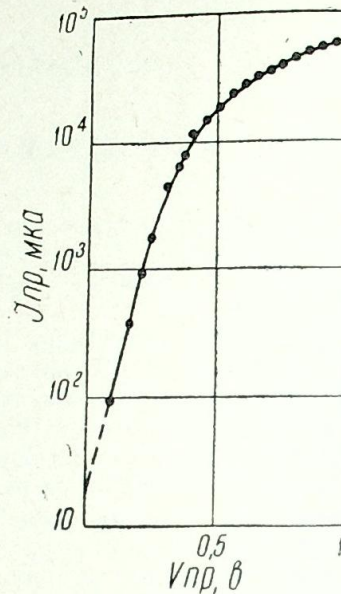


Рис. 2

При напряжениях порядка $\frac{kT}{q}$ зависимость прямого и обратного токов от напряжения — линейная и дифференциальное сопротивление при нулевом напряжении $R_0=10^4 \text{ ом}$, что соответствует результатам работ [5, 7].

На рис. 2 приводится зависимость прямого тока $I_{пр}$ от прямого напряжения $V_{пр}$ в полулогарифмическом масштабе.

В интервале напряжений 0,1—0,5 в имеется прямолинейный участок, который описывается формулой

$$I_{пр} = I_0 \exp\left(\frac{qV_{пр}}{\beta kT}\right), \quad (1)$$

где

$$I_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ а/см}^2 \quad \beta = 2,1.$$

На рис. 3 представлены кривые спектрального распределения тока короткого замыкания фотоэлемента, приведенные к равноэнергетическому уровню. Для сравнения на этом же рисунке приведены спектральные характеристики обычного селенового фотоэлемента.

Как видно из рис. 3 длина волны, соответствующая максимуму спектральной чувствительности для обычного фотоэлемента и для фотоэлемента со слоем HgSe, равна 0,56 μ , т. е. совпадают. В фотоэлементах со слоем HgSe в области 0,8—1,4 μ наблюдается заметное повышение чувствительности ($\sim 20\%$).

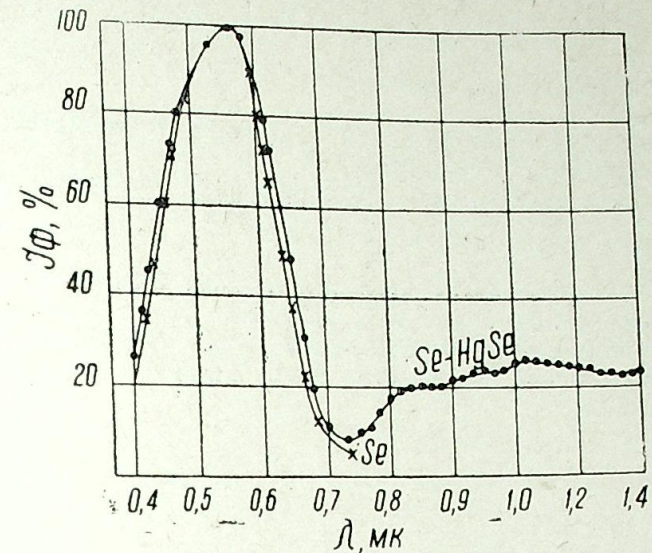


Рис. 3

Исходя из спектральной характеристики, можно заключить, что селеновые фотоэлементы со слоем HgSe могут применяться в инфракрасной технике.

Анализ спектральной характеристики показывает, что возникновение фотоэффекта в селеновых фотоэлементах со слоем HgSe обусловлено образованием пар как в селене, так и в HgSe.

На рис. 4 изображена зависимость тока короткого замыкания $I_{кз}$ и ЭДС холостого хода $V_{хх}$ фотоэлемента от освещенности E интегральным светом вольфрамовой лампы при световой температуре 2840° К.

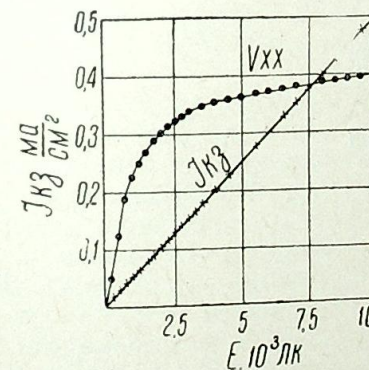


Рис. 4

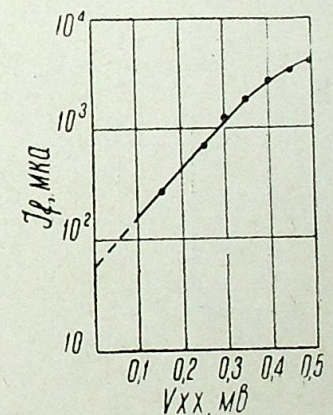


Рис. 5

Из рис. 4 видно, что зависимость $I_{кз}$ от E в исследуемом интервале освещенности линейная. С увеличением E $V_{хх}$ сначала растет линейно,

а затем стремится к насыщению, и довольно хорошо описывается известными формулами:

$$\left. \begin{aligned} I_{\text{кз}} &= \frac{k\Phi}{1 + \frac{r}{R}} \\ V_{\text{хх}} &\sim k\Phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где k — интегральная чувствительность;

Φ — световой поток;

r — сопротивление толщи полупроводников и контактов;

R — сопротивление p — n перехода.

Интегральная чувствительность, измеренная при световой температуре источника света 2840°K , равна $300 \frac{\text{мкА}}{\text{лм}}$.

На рис. 5 представлена зависимость тока носителей, созданных светом и разделенных полем p — n перехода, $I_f = -I_{\text{кз}}$ от $V_{\text{хх}}$ в полупрологарифмическом масштабе. Эта зависимость в рассматриваемом интервале освещенности описывается формулой

$$I_f = I_0 \exp \left(\frac{qV_{\text{хх}}}{\beta kT} \right) \quad (3)$$

Таблица

$I_{\text{np}} = f(V_{\text{np}})$			$I_f = f(V_{\text{хх}})$		
$R_0, \text{ом}$	$I_0, \frac{\text{а}}{\text{см}^2}$	β	$R_0, \text{ом}$	$I_0, \frac{\text{а}}{\text{см}^2}$	β
10^4	$3 \cdot 10^{-6}$	2,1	$3,4 \cdot 10^4$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	3,6

Численные значения I_0 и β , определяемые из этой характеристики соответственно равны:

$$\begin{aligned} I_0 &= 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ а/см}^2, \\ \beta &= 3,6. \end{aligned}$$

Вычисленное значение R_0 по формуле

$$R_0 = \frac{\beta kT}{qI_0} \quad (4)$$

равно $3,4 \cdot 10^4 \text{ ом}$.

В таблице приводится сравнение значений I_0 , β и R_0 , полученных из вольтамперной характеристики элемента в режиме диода и из зависимости I_f от $V_{\text{хх}}$ в режиме фотоэлемента.

Как видно из таблицы, численные значения I_0 , β и R_0 , полученные из вольтамперной характеристики элемента в режиме диода и из зависимости I_f от $V_{\text{хх}}$ в режиме фотоэлемента, различаются и причины расхождения не выяснены.

На рис. 6 приведена температурная зависимость тока короткого замыкания $I_{\text{кз}}$ и э. д. с. холостого хода $V_{\text{хх}}$ для обычного селенового фотоэлемента (пунктирные линии) и для фотоэлемента со слоем HgSe (сплошные линии).

Как видно из рис. 6, в обоих образцах с увеличением температуры от 0 до 100°C э.д.с. падает линейно. Температурный коэффициент э.д.с. холостого хода, определяемый из этой характеристики для образцов со слоем HgSe равен $-2,7 \cdot 10^{-3} \text{ в/град}$, а для обычных элементов — $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ в/град}$.

В образцах со слоем HgSe с повышением температуры ток короткого замыкания уменьшается, а в обычных образцах уменьшение фототока наблюдается лишь выше 80°C .

Авторы благодарят лаборантку Л. Г. Приходько за помощь при проведении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б., Насиров Я. Н. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1960, № 6.
2. Абдуллаев Г. Б., Бакиров М. Я., Гасымов Р. Б. „ДАН Азерб. ССР“, 1961, № 8.
3. Бакиров М. Я., Абдуллаев Г. Б., Гасымов Р. Б., Насиров Я. Н. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1960, № 4.
4. Бахышов А. Э., Ахундов Г. А. „Изв. АН Азерб. ССР“, 1961, № 4.
5. Бельский А. Ф. и Блум А. Н. ЖТФ, 24, 826, 1954.
6. Елпатьевская О. Д. ЖТФ, 28, 12, 1958.
7. Касабов И. Доклады Болгарской АН*, 1955, № 1.
8. Ditzel G., Görlich P., Krosch A. Jenaer Jahrbuch, t. 1, 1958.
9. Lakschmann T. K. Proc. of the IRE, 9, 1646, 1960.
10. Tubota H., Suzuki H. J. Phys., Soc. Japan, 14, № 1, 1959.

М. Я. Бакиров, Р. Б. Гасымов

Чивэ-селен тэбэгэли селен фотоэлементлэри

ХҮЛАСЭ

Селен фотоэлементлэриндэ p — n кечид о заман эмэлэ кэлир ки, үст электрод материалы илэ селенин сэрһэддиндэ n —типли бирлэшмэ жарансын.

Тэдгигатлар көстэрир ки, селенин үзэринэ сүн'и сурэтдэ n -типли жарымкечиричи чэкмэклэ дэ p — n кечид жаратмаг мүмкүндүр. Бу, чох-тэбэгэли селен фотоэлементлэри хазырламаг үчүн имкан жаратмышдыр.

Бу вахта гэдэр апарылан тэдгигатларда n -тэбэгэ олараг елэ жарымкечиричи көтүрүлүрдү ки, онун гадаган олунмуш золағынын ени селенин гадаган олунмуш золағынкына јахын олсун. Мә'лумдур ки, вентил фотоэффекти о заман эмэлэ кэлир ки, ишыг системдэ электрон вэ дешикдэн ибарэт чүт јаратсын, башга сөзлэ, ишыг электрону валент золағындан кечиричи золаға кечирсин. Электронун кечиди жарымкечиричинин гадаган олунмуш золағынын ениндэн асылыдыр. Экэр гадаган олунмуш золаг кичик оларса истилик нэтичэсиндэ јаранан јүклэрин концентрасијасы чох олар. Бу да p — n кечиддэн кечэн зэрэрли „утечка“ чэрэјаныны эмэлэ кэтирир.

Бу чэрэјанын гијмэти температур артдыгча чохалыр. Экэр селен фотоэлементлэриндэ n -тэбэгэ үчүн истифадэ олунмадда селенин гадаган олунмуш золағындан чох фэргли олан жарым-

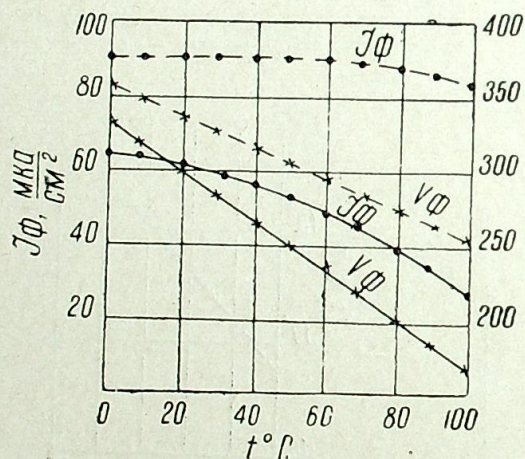


Рис. 6

кечиричи көтүрүлсө, онда бу чүр фотоэлементларин спектрал вэ температур характеристикалары ади селен фотоэлементларинин характеристикаларындан кэскин фэрглэнэчэкдир.

Бу ишдэ кичик гадаган олунмуш золаглы HgSe ($\Delta E = 0,3 \text{ эв}$) тэбэгали селен фотоэлементларинин тэдгигиндэн алынган нэтичэлэр верилир.

Тэдгигатлар көстэрир ки, HgSe тэбэгали селен фотоэлементларин спектрин инфрагырмызы ниссэсиндэ (0,8—1,4 мн) кифајэт дэрэчэдэ һэсасдыр. Спектрал характеристиканын тэһлили көстэрир ки, HgSe тэбэгали фотоэлементлардэ фотоеффектин эмэлэ кэлмэси чүтлэрин һэм селендэ, һэм дэ HgSe -дэ јаранмасы илә алагэдардыр.

HgSe тэбэгали селен фотоэлементларин ади селен фотоэлементларинэ нисбэтэн температура аз давамлыдыр.

Р. И. КАЖЛАЕВА, А. А. КУЛИЕВ, Н. И. ИБРАГИМОВ

САМОДИФФУЗИЯ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ТЕЛЛУРЕ

Теллур как в элементарном состоянии, так и в виде теллуридов тяжелых металлов широко используется в полупроводниковой технике. Поэтому изучению электрических, тепловых и других свойств теллура и теллуридов посвящено много работ. Однако диффузия примесей в теллуре еще не изучена—имеется всего лишь одна работа [4].

Проведение таких работ позволяет выяснить процессы, происходящие в полупроводниковых приборах, изготовленных из теллура. Кроме того, одним из методов введения примесей в полупроводник является диффузия.

В настоящем сообщении приводятся результаты опытов по определению коэффициента самодиффузии теллура методом снятия слоев [3].

Как известно, одним из распространенных методов изучения диффузии в твердых телах является метод снятия тонких слоев. Точность этого метода в некоторой степени зависит от параллельности и точности измерения толщины снимаемых слоев. Обычно снятие слоев осуществляется на шлифовальном круге, токарном станке или на наждачной бумаге.

При этом параллельность снимаемых слоев зависит от навыка экспериментатора, а при использовании станков ошибки сопряжены с потерей снятого вещества. С целью устранения вышеуказанных недостатков нами собрано приспособление, изображенное на рис. 1. Оно состоит из плиты 1, втулки 2, укрепленной на плите. Во внутрь втулки одета пришлифованная подвижная стойка 3, на которой укреплено шарнирное колено 4, оканчивающееся головкой 5 с коническим отверстием. В это отверстие вставляется самоцентрирующийся патрон 6, служащий для закрепления образца 7. Сверху на головке 5 и конусе патрона 6 сделаны риски для фиксации положения патрона. Такая система позволяет перемещать образец по поверхности плиты (с тонкой наждачной бумагой) так, чтобы обрабатываемая поверхность всегда была параллельна поверхности плиты.

Измерение снимаемого слоя производится на компораторе ИЗА—2. Для этого патрон с образцом вставляется в коническое отверстие приставки, укрепленной на измерительной плите компоратора. При этом положение патрона в приставке также фиксируется по рискам. Во избежание усадки конуса при последовательных измерениях стержень патрона имеет два конуса, причем нижний из них имеет большую конусность. При снятии слоев используется верхний конус, при

измерениях толщины—нижний (см. рис. 1). Плита компоратора освещается лампами дневного света.

Проверка правильности работы такого приспособления была проведена следующим образом. Были изготовлены образцы цилиндрической формы из теллура

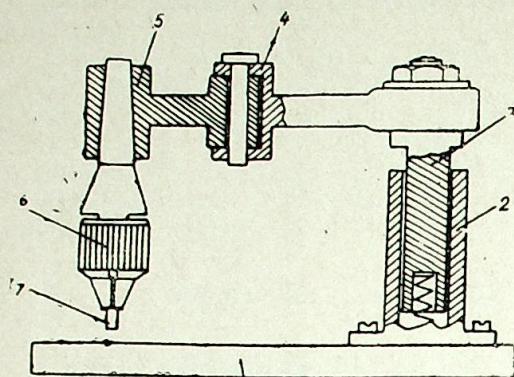


Рис. 1

Приспособление для снятия тонких слоев

из теллура ($\Phi=7,6$ мм). Для определения толщины снимаемого слоя в образцы был введен радиоактивный теллур—127. Это позволило более точно определить количество вещества в снятом слое. По измерениям интенсивности излучения снятого слоя (установка Б—2), сравниваемого с эталоном, и по показаниям компоратора была построена зависимость интенсивности излучения от толщины снятого слоя. Как и следовало ожидать (рис. 2), имеется линейная зависимость между толщиной снятого слоя и активностью. При измерениях ошибки складываются: из ошибки измерения толщины ($\pm 1\mu$), ошибки взвешивания эталона ($\pm 0,1$ мг) и ошибки счета интенсивности излучения (2—3%). Проверочный эксперимент показал, что при соблюдении методики измерения (образец не должен сниматься из патрона, положения патрона должны быть строго фиксированы) достигается достаточно высокая точность снятия параллельных слоев и измерения их толщины.

Исходным материалом для изучения самодиффузии служил предварительно очищенный технический теллур.

Теллур подвергался пятикратной дистилляции под вакуумом 10^{-3} мм рт. ст. при температуре 600°C . После каждой дистилляции остаток и верхняя часть конденсата выбрасывались и производился спектральный анализ возогнанного теллура. Анализы показали, что теллур при повторении дистилляции значительно очищается от многих примесей за исключением кремния, содержание которого с увеличением числа возгонов увеличивается.

Из полученного таким образом чистого теллура изготавливались образцы для проведения опытов.

Теллур помещали в стеклянную ампулу диаметром 7—8 мм и расплавляли при 460°C . Затем, выключалась печь и теллур кристаллизовался при охлаждении печи. Полученные слитки имели цилиндрическую форму. Торцевые стороны этих слитков шлифовались на опи-

санном приспособлении, а затем путем вакуумного испарения на эти образцы наносился тонкий слой радиоактивного теллура—127. Готовые образцы подвергались диффузионному отжигу при 360, 374, 395, 411 и 420°C в эвакуированных ампулах. Температура регулировалась потенциометром ЭПВ—01 с точностью $\pm 2^\circ\text{C}$. Время диффузионного отжига изменялось от 95 до 140 часов в зависимости от температуры. После диффузионного отжига определялось распределение радиоактивного теллура в теллуре (образце) путем снятия тонких слоев. Измерения интенсивности радиоактивного излучения теллура производились на установке Б—2 при постоянных геометрических условиях.

Коэффициент диффузии определялся по формуле [3].

$$C=A \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

На рис. 3 показано изменение коэффициента диффузии в зависимости от температуры.

Зависимость $\ln D - \frac{1}{T}$ имеет прямолинейный характер, что указывает на единый механизм перемещения атомов теллура в кристаллическом теллуре.

Из наклона $\ln D - \frac{1}{T}$ была вычислена теплота активации при самодиффузии теллура, которая оказалась равной $23,20$ ккал/г. ат. Температурная зависимость коэффициента самодиффузии теллура может быть выражена следующей формулой:

$$D=3,5 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-\frac{23200}{RT}} \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}$$

Следует отметить, что несмотря на близость структур кристаллического селена и теллура, при диффузии селена и теллура в собственную решетку механизмы перемещения отличаются [1], однако корреляция между теплотой активации и теплотой плавления [2] в этих элементах сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтакс Б. И. ЖТФ, 27, 10, 1957.
2. Бугаков В. З. Диффузия в металлах и сплавах. ГИТТЛ, М., 1949.
3. Бэррер Р. Диффузия в твердых телах, ИЛ, 1948.
4. Мюнх С. Ann. d. Phys., 14, № 6/8, 1954.

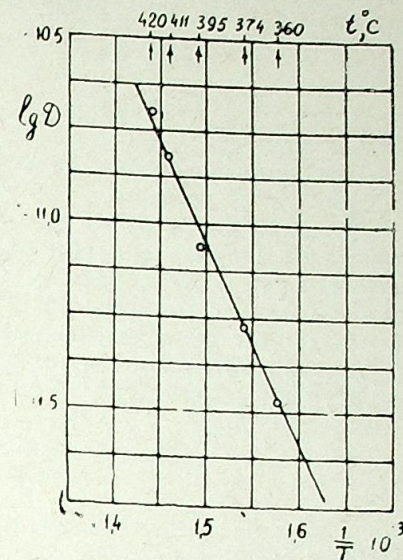


Рис. 3
Температурная зависимость коэффициента самодиффузии теллура.

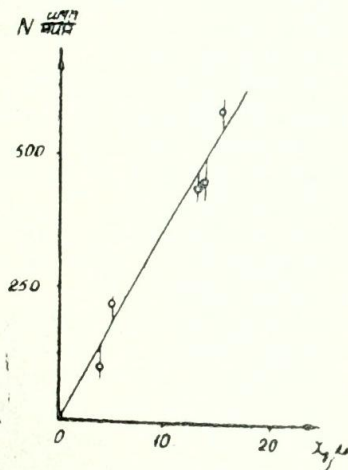


Рис. 2
Зависимость интенсивности излучения радиоактивного теллура—127 от толщины снятого слоя.

Поликристал теллурда теллурун өзүнә
диффузијасынын тәдгиги

ХҮЛАСӘ

Теллур вә теллуридләр жарымкечиричиләр техникасында кениш тәтбиг олунур.

Буна көрә онларын физики-кимјәви хассәләринин өјрәнилмәсинә хусуси фикир верилир.

Бу ишдә дистиллә вә зона әритмә үсулу илә тәмизләнмиш поликристал теллурда теллурун өзүнә диффузијасы өјрәнилмишдир. Теллурун өзүнә диффузијасы радиоактив теллур изотопунун ($\text{Te}-127$) тәтбиги илә лајчыхарма үсулу илә тәјин едилмишдир. Ишдә назик лај чыхармаг үчүн һазырланмыш гурғу тәсвир едилир.

Алынған нәтичәләрдән теллурун өзүнә диффузија әмсалынын температурдан асылылығы

$$D=3,5 \cdot 10^{-4} e^{-\frac{23200}{RT}} \frac{\text{см}^2}{\text{сан}}$$

алынмышдыр.

М. М. РАСУЛОВ

К РАСЧЕТУ ПРОЦЕССА ТОРМОЖЕНИЯ АСИНХРОННОГО
ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПРИ ПИТАНИИ ОТ СИНХРОННОГО
ГЕНЕРАТОРА СОИЗМЕРИМОЙ МОЩНОСТИ

В [1] была изложена методика расчета электромеханических переходных процессов при пуске асинхронного электродвигателя от синхронного генератора соизмеримой мощности.

Настоящая статья посвящается методике расчета процесса торможения асинхронного электродвигателя при питании от синхронного генератора соизмеримой мощности. Наиболее эффективным способом торможения, широко используемым в автономных системах переменного тока, является торможение противотоком. Процесс торможения противотоком в рассматриваемой системе питания существенно отличается от процесса торможения, когда электродвигатель питается от сети бесконечной мощности. Расчет процесса торможения противотоком в такой системе затруднителен в связи со сложностью решения систем дифференциальных уравнений, описывающих переходные процессы в рассматриваемых машинах.

Прилагаемая ниже методика основывается на возможности использования статических характеристик системы генератор—электродвигатель для расчета электромеханических режимов при торможении противотоком. Обоснованием для такой возможности является тот факт, что в период торможения противотоком, так же как и при пуске, в асинхронном электродвигателе возникают переходные токи, которые создают электромагнитный пульсирующий момент, среднее значение которого близко к нулю. Если учесть при этом, что в процессе торможения противотоком механические переходные процессы протекают значительно медленнее, чем электромагнитные переходные процессы в системе генератор—электродвигатель, за исключением цепи возбуждения синхронного генератора, то влиянием последних можно пренебречь и пользоваться выражениями моментов электродвигателя в установившемся режиме его работы.

Если обмотка возбуждения генератора имеет большую постоянную времени, то учет электромагнитных переходных процессов в цепи возбуждения генератора может быть произведен методом, изложенным в [1]. Из теории электропривода известно, что режим торможения противотоком осуществляется путем реверсирования на ходу

вращающегося поля. При этом рабочая точка электродвигателя из положения a на двигательной части перемещается на тормозную "противоточную" часть характеристики (рис. 1).

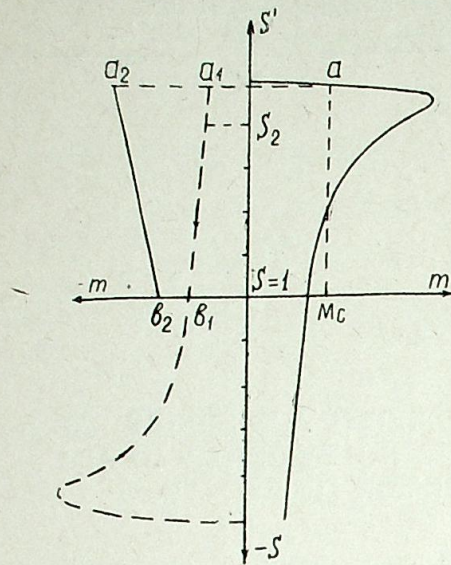


Рис. 1
Тормозная характеристика электродвигателя

У короткозамкнутого электродвигателя торможение обычно происходит на естественной характеристике, причем момент его во время торможения меняется по кривой a_1, b_1 . У электродвигателя с контактными кольцами с дополнительным сопротивлением в цепи ротора момент меняется по кривой a_2, b_2 . Как следует из рис. 1, характеристика момента электродвигателя в тормозной части приближается к прямой линии и поэтому может быть аппроксимирована посредством прямой.

Рассмотрим методику расчета торможения для двух случаев: 1) скорость вращения первичного двигателя генератора в период торможения электродвигателя принимается постоянной и 2) скорость вращения первичного двигателя генератора в период торможения изменяется.

Скорость вращения первичного двигателя постоянна

Аппроксимируем противоточную часть характеристики — момент электродвигателя уравнением вида:

$$m_s = A - Bs.$$

Определим коэффициенты A и B :
при $s=1$

$$m_n = A - B,$$

при $s=2$

$$m_T = A - 2B,$$

отсюда

$$A = 2m_n - m_T, \quad B = m_n - m_T.$$

Так как в режиме торможения противотоком:

$$s = \frac{\omega_0 + \omega}{\omega_0},$$

то уравнение движения электропривода в тормозном режиме примет вид

$$-2m_n + m_T + (m_n - m_T)s - m_c = T_s \frac{ds}{dt}. \quad (1)$$

Здесь

$$m_n = \frac{NE_d^2}{(a+b+c)^{M_n}}, \quad (2)$$

$$m_T = \frac{2NE_d^2}{(4a+2b+c)^{M_n}}, \quad T_s = \frac{C_1 D_s^2 \omega_0}{4g M_n} \quad (3)$$

Следуя методике, изложенной в [1], для учета электромагнитного переходного процесса в цепи возбуждения синхронного генератора проводим расчет торможения в два этапа. На первом этапе полагаем, что электродвигатель изменяет свое скольжение от $s_1=2$ до s_2 за время протекания переходного процесса в цепи возбуждения синхронного генератора ($t_1=4T_d'$) под влиянием э.д.с. холостого хода E_{d_1} . На втором этапе расчета полагаем, что электродвигатель тормозится от s_2 до $s=1$ под влиянием установившегося значения э.д.с. холостого хода E_{d_1} . Э.д.с. E_{d_1} определяется из решения дифференциального уравнения цепи обмотки возбуждения синхронного генератора:

$$E_{d_1}^2 = 0,25 (E_{d_0} + E_{d_1})^2 + 0,5 E_{dy}^2. \quad (4)$$

Здесь

$$E_{d_0} = \frac{U}{1 + \frac{(x_d - x_d')(x + x_q)}{r^2 + (x + x_d)(x + x_q)}}.$$

Моменты и соответствующие им коэффициенты на первом этапе расчета обозначим индексом 1, а на втором — индексом 2. Рассмотрим изменение статического момента сопротивления.

1) $m_c = \text{const}$. Определим скольжение электродвигателя по окончании переходного процесса в цепи возбуждения синхронного генератора, т. е. за время $t_{T1}=4T_d'$. Решив уравнение

$$-(A_1 - B_1 s) - m_c = T_s \frac{ds}{dt} \quad (5)$$

относительно s , получим:

$$s_2 = \frac{A_1 + m_c}{B_1} \left[1 - e^{-\frac{4B_1 T_d'}{T_s}} \right] + 2e^{-\frac{4B_1 T_d'}{T_s}} \quad (6)$$

Определим время торможения в интервале изменения скольжения от s_2 до $s=1$.

$$t_{T2} = T_s \int_{s_2}^1 \frac{ds}{B_2 s - (A_2 + m_c)} = \frac{T_s}{B_2} \ln \frac{B_2 - A_2 - m_c}{B_2 s_2 - A_2 - m_c} \quad (7)$$

Общее время торможения: $t_T = t_{T1} + t_{T2}$. Если величина T_d' мала, то временем протекания электромагнитных переходных процессов можно пренебречь и считать, что $t_T \approx t_{T2}$.

$$t_T \approx \frac{T_s}{B} \ln \frac{B - A - m_c}{2B - A - m_c}, \quad (8)$$

где

$$A = A_2 \text{ и } B = B_2.$$

2) $m_c = \beta'(1-s)$. Уравнение движения электропривода в этом случае имеет вид:

$$-(A - Bs') - \beta'(s-1) = T_s \frac{ds}{dt}. \quad (9)$$

Из (9) определим s_2 :

$$s_2 = \frac{A_1 - \beta'}{B_1 - \beta'} - \frac{A_1 + \beta' - 2B_1}{B_1 - \beta'} e^{4 \frac{B_1 - \beta'}{T_3} T_d'} \quad (10)$$

Тогда

$$t_{T_2} = \frac{T_3}{B_2 - \beta'} \ln \frac{B_2 - A_2}{(B_2 - \beta')s_2 - (A_2 - \beta')} \quad (11)$$

Общее время торможения:

$$t_T = 4T_d' + \frac{T_3}{B_2 - \beta'} \ln \frac{B_2 - A_2}{(B_2 - \beta')s_2 - (A_2 - \beta')} \quad (12)$$

Если постоянная времени цепи возбуждения синхронного генератора мала и влиянием T_d' можно пренебречь, то время торможения в рассмотренном случае будет определяться только вторым членом $-t_{T_2}$ [при $s_2=2$].

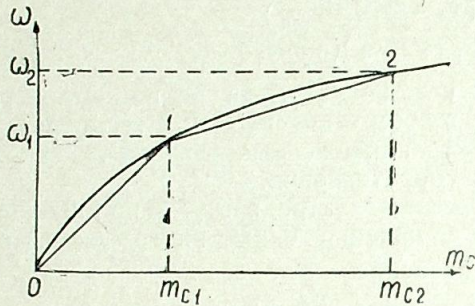


Рис. 2

Вентиляторная характеристика статического момента сопротивления.

3) $m_c \equiv \omega^2$. Вентиляторная характеристика статического момента сопротивления представлена на рис. 2. Для приближенного решения задачи в аналитической форме аппроксимируем кривую статического момента сопротивления двумя прямыми: прямой 0—1 в интервале изменения скорости от 0 до ω_1 , и прямой 1—2 в интервале изменения скорости от ω_1 до ω_2 . Для интервала 0— ω_1 можно написать: $m_c = \theta\omega = \theta'(s-1)$, где $\theta = \frac{m_{c1}}{\omega_1}$; $\theta' = \frac{m_{c1}}{\omega_1} \omega_0$. В интервале $\omega_1 - \omega_2$: $m_c = \alpha - \delta\omega = \alpha - \delta\omega_0(s-1) = \alpha - \delta'(s-1)$.

Определим коэффициенты α и δ . При $\omega = \omega_1$: $\alpha - \delta\omega_1 = m_{c1}$. При $\omega = \omega_2$: $\alpha - \delta\omega_2 = m_{c2}$.

Следовательно

$$\delta = \frac{m_{c1} - m_{c2}}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \delta' = \frac{m_{c1} - m_{c2}}{\omega_2 - \omega_1} \omega_0; \quad \alpha = m_{c1} + \frac{m_{c1} - m_{c2}}{\omega_2 - \omega_1} \omega_1'.$$

Расчет времени торможения проводится в несколько этапов. В интервале изменения скорости $\omega_2 - \omega_1$ имеем:

$$-(A_1 - B_1 s) - \alpha + \delta'(s-1) = T_3 \frac{ds}{dt} \quad (13)$$

Полагая $t_{T_1} = 4T_d'$, из (13) определяем s_2' :

$$s_2' = \frac{A_1 + \alpha + \delta'}{B_1 + \delta'} \left(1 - e^{4 \frac{B_1 + \delta'}{T_3} T_d'} \right) + 2 e^{4 \frac{B_1 + \delta'}{T_3} T_d'} \quad (14)$$

Тогда

$$t_{T_3} = T_3 \int_{s_2'}^{s_1} \frac{ds}{(B_2 + \delta')s - (A_2 + \alpha + \delta')} = \frac{T_3}{B_2 + \delta'} \ln \frac{(B_2 + \delta')s_1 - (A_2 + \alpha + \delta')}{(B_2 + \delta')s_2' - (A_2 + \alpha + \delta')} \quad (15)$$

В интервале $\omega_1 - 0$, т. е. к концу торможения уравнение движения электропривода принимает вид:

$$-(A_2 - B_2 s) - \theta'(s-1) = T_3 \frac{ds}{dt} \quad (16)$$

Из (16) определим t_3 :

$$t_{T_3} = T_3 \int_{s_1}^1 \frac{ds}{(B_2 - \theta')s + (\theta' - A_2)} = \frac{T_3}{B_2 - \theta'} \ln \frac{B_2 - A_2}{(B_2 - \theta')s_1 + (\theta' - A_2)} \quad (17)$$

Общее время торможения:

$$t_T = t_{T_1} + t_{T_2} + t_{T_3}$$

Если T_d мала и влиянием электромагнитных переходных процессов в цепи возбуждения можно пренебречь, то время торможения:

$$t_T = t_{T_2} + t_{T_3}$$

СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ПЕРВИЧНОГО ДВИГАТЕЛЯ ИЗМЕНЯЕТСЯ

Для приведения указанной системы к линейной системе воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией кривой момента электродвигателя $m_3 = f(s)$ [2]. Для этого кривую момента $m_3 = f(s)$ в «противоточной» части разбиваем на ряд интервалов (рис. 3); в пределах каждого интервала $(s_{n-1} - s_n)$ скорость вращения можно принять постоянной, а механическую характеристику аппроксимировать уравнением в виде:

$$m_3 = A_n - B_n s, \quad (18)$$

где

$$A_n = \frac{m_n s_{n-1} - m_{n-1} s_n}{s_{n-1} - s_n}, \quad B_n = \frac{m_n - m_{n-1}}{s_{n-1} - s_n}$$

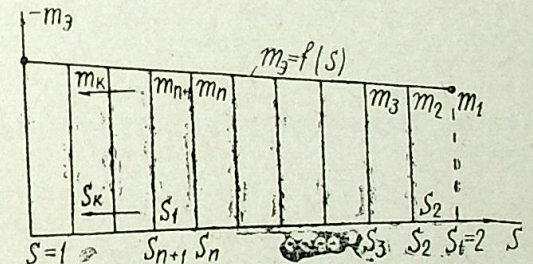


Рис. 3

Здесь m_n, m_{n-1} — относительные значения моментов, s_n и s_{n-1} — соответствующие им скольжения, определяемые по механической характеристике электродвигателя в ее «противоточной» части при номинальной скорости вращения генератора. Обозначим относительное изменение скорости вращения через коэффициент K_f :

$$K_f = \frac{\omega}{\omega_0}$$

В [2] были получены выражения для моментов электродвигателя с учетом изменения скорости вращения первичного двигателя; для независимой системы возбуждения синхронного генератора:

$$m_{\text{эф}} = \frac{3K_f E_d^2 r_2'}{9,81 \omega_0 s' \left[\left(r_1 + c_1 \frac{r_2'}{s} \right)^2 + K_f^2 (x_d + x_1 + c_1 x_2')^2 \right]} M_n, \quad (19)$$

для системы самовозбуждения

$$m_{\text{эф}} = \frac{3K_f K^2 [aK_f - br_{\text{вв}}']^2 r_2'}{9,81 \omega_0 s' \left[\left(r_1 + c_1 \frac{r_2'}{s} \right)^2 + K_f^2 (x_d + x_1 + c_1 x_2')^2 \right]} M_n \quad (20)$$

Так как торможение электродвигателя происходит в интервале изменения скольжения $s=2$ до $s=1$, то всегда

$$\left(r_1 + c_1 \frac{r_2'}{s} \right)^2 \ll (x_d + x_1 + c_1 x_2')^2,$$

поэтому влиянием члена $\left(r_1 + c_1 \frac{r_2'}{s} \right)^2$ в знаменателях выражений (19)

и (20) можно пренебречь и моменты электродвигателя (для независимой системы возбуждения и для системы самовозбуждения) соответственно записать в следующем виде:

$$m_{\text{эф}} = \frac{m_{\text{э}}}{K_f} \quad (21)$$

$$m_{\text{эф}} = \frac{(aK_f - br_{\text{вв}}')^2}{K_f (a - br_{\text{вв}}')^2} m_{\text{э}} \quad (22)$$

Так как изменение момента $m_{\text{э}}$ равносильно изменению коэффициентов A_n и B_n , то равенство (18) может быть записано в виде:

$$m_{\text{эф}} = A_{fn} - B_{fn} s.$$

Соответственно уравнение движения электропривода для n -го интервала примет вид:

$$-(A_{fn} - B_{fn} s) - m_c = K_{fn} T_{\text{э}} \frac{ds}{dt} \quad (23)$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{dt}{K_{fn} T_{\text{э}}} = \frac{ds}{B_{fn} s - (A_{fn} + m_c)}, \quad (24)$$

откуда время торможения для n -го интервала при $m_c = \text{const}$ определится как:

$$\Delta t_n = \frac{K_{fn} T_{\text{э}}}{B_{fn}} \ln \left[\frac{B_{fn} s_n - (A_{fn} + m_c)}{B_{fn} s_{n-1} - (A_{fn} + m_c)} \right]. \quad (25)$$

При учете электромагнитного переходного процесса в роторе синхронного генератора первый интервал принимаем равным $2-s_2$, а э.д.с. $E_d = E_{d1}$.

Тогда скольжение s_2 , соответствующее окончанию электромагнитного переходного процесса в цепи возбуждения синхронного генератора, определится из уравнения (23)

$$s_2 = \frac{A_{f1} + m_c}{B_{f1}} \left[1 - e^{-\frac{B_{f1} + \delta'}{K_{f1}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \right] + 2e^{-\frac{B_{f1} + \delta'}{K_{f1}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \quad (26)$$

При определении времени разгона для последующих интервалов после s_2 принимаем э.д.с. $E_d = E_{d2} = E_{\text{дсн}}$; $t_T = 4T_d' + \sum_2^n \Delta t_n$ при $m_c = \beta'(s-1)$

$$\Delta t_n = \frac{K_{fn} T_{\text{э}}}{B_{fn} - \beta'} \ln \left[\frac{(B_{fn} - \beta') s_n - (A_{fn} - \beta')}{(B_{fn} - \beta') s_{n-1} - (A_{fn} - \beta')} \right], \quad (27)$$

$$s_2 = \frac{A_{fn} - \beta'}{B_{fn} - \beta'} \left(1 - e^{-\frac{B_{fn} - \beta'}{K_{fn}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \right) + 2e^{-\frac{B_{fn} - \beta'}{K_{fn}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \quad (28)$$

Аналогично при определении времени разгона для последующих интервалов после s_2 принимаем $E_d = E_{\text{дсн}} = E_{d2}$; $t_T = 4T_d' + \sum_2^n \Delta t_n$.

Момент статического сопротивления $m_c \equiv \omega_2$ (рис. 2).

Принимая $t_1 = 4T_d'$, определим s_2' из уравнения движения электропривода:

$$-(A_{f1} - B_{f1} s) - \alpha + \delta'(s-1) = K_{f1} T_{\text{э}} \frac{ds}{dt}, \quad (29)$$

где

$$s_2 = \frac{A_{f1} + \alpha + \delta'}{B_{f1} + \delta'} \left[1 - e^{-\frac{B_{f1} + \delta'}{K_{f1}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \right] + 2e^{-\frac{B_{f1} + \delta'}{K_{f1}} \cdot \frac{T_d'}{T_{\text{э}}}} \quad (30)$$

Время торможения между s_2' и s_1 для n -го интервала определяется выражением:

$$\Delta t_n = \frac{K_{fn} T_{\text{э}}}{B_{fn} + \delta'} \ln \frac{(B_{fn} + \delta') s_n - (A_{fn} + \alpha + \delta')}{(B_{fn} + \delta') s_{n-1} - (A_{fn} + \alpha + \delta')} \quad (31)$$

В интервале $\omega_1 = 0$ или $s_1 = 1$ (рис. 3), т. е. к концу торможения уравнение движения электропривода принимает вид:

$$-(A_{fk} - B_{fk} s') - \theta'(s-1) = K_{fk} T_{\text{э}} \frac{ds}{dt} \quad (32)$$

Из (32) для k -го интервала имеем:

$$\Delta t_k = \frac{K_{fk} T_{\text{э}}}{B_{fk} - \theta'} \ln \frac{(B_{fk} - \theta') s_k - (A_{fk} - \theta')}{(B_{fk} - \theta') s_{k-1} - (A_{fk} - \theta')} \quad (33)$$

Здесь

$$A_{fk} = f(E_{d2}),$$

$$A_{fk} = f(E_{d2});$$

$$B_{fk} = f(E_{d_2}), \quad B_{fk} = f(E_{d_2});$$

Общее время торможения

$$t_T = t_{T_1} + \sum_1^n t_n + \sum_n^K \Delta t_k$$

Коэффициент K_{fn} определяется из уравнения движения первичного двигателя [2]:

$$T_{дг} \frac{dK_f}{dt} = c - DK_f - \nu m_{эf}, \quad (34)$$

где

$$T_{дг} = \frac{c D_A^2 \omega_{дн}}{4g M_n}, \quad c = \frac{\omega_{до}}{\omega_{до} - \omega_{дн}},$$

$$D = \frac{\omega_{дн}}{\omega_{до} - \omega_{дн}}, \quad \nu = \frac{M_{эн} n_{эо}}{\eta_{эг} M_{дн} n_{до}}, \quad m_{эf} = \frac{M_{эf}}{M_{эн}}.$$

Для n -го интервала имеем:

$$K_{fn} = \frac{c - \nu m_{f(n-1)}}{D} \left[1 - e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}} \right] + K_{f(n-1)} e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}} \quad (35)$$

В зависимости от системы возбуждения коэффициенты A_{fn} и B_{fn} определяются следующим образом.

Для системы независимого возбуждения:

$$A_{fn} = \frac{A_n}{K_{fn}}, \quad B_{fn} = \frac{B_n}{K_{fn}};$$

$$K_{fn} = \frac{c - \nu}{D} \frac{m_{n-1}}{K_{f(n-1)}} \left(1 - e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}} \right) + K_{f(n-1)} e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}}. \quad (36)$$

Для системы самовозбуждения:

$$A_{fn} = \frac{(aK_{fn} - br'_{вв})^2}{K_{fn}(a - br'_{вв})^2} = j_n A_n, \quad B_{fn} = \frac{(aK_{fn} - br'_{вв})^2}{K_{fn}(a - br'_{вв})^2} = j_n B_n;$$

$$K_{fn} = \frac{c - \nu}{D} \frac{m_{n-1}}{K_{f(n-1)}} \cdot \frac{(aK_{f(n-1)} - br'_{вв})^2}{(a - br'_{вв})^2} \left(1 - e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}} \right) +$$

$$+ K_{f(n-1)} e^{-\frac{D}{T_{дг}} \Delta t_{n-1}} \quad (37)$$

Для K -го интервала получаем выражения, аналогичные вышеприведенным.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА

Экспериментальная проверка предложенной методики расчета проводилась на лабораторной установке, состоящей из синхронного генератора, приводимого во вращение от электродвигателя постоянного тока, и асинхронного электродвигателя с фазным ротором, кольца ко-

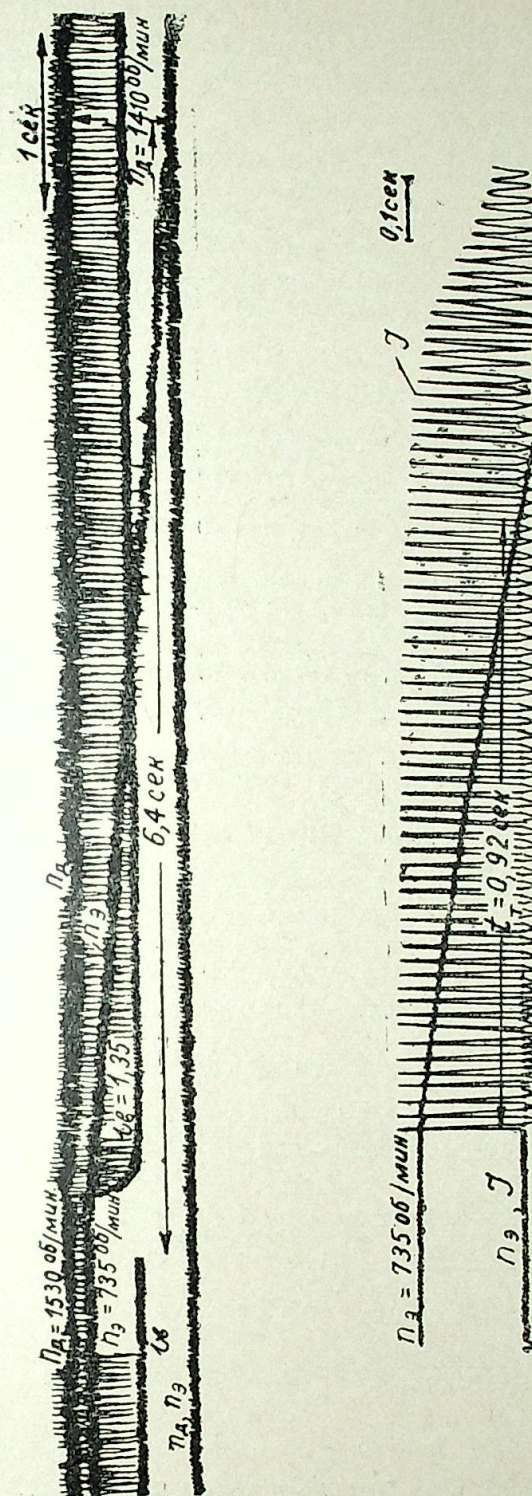


Рис. 4
Осциллограммы процесса торможения
а—питание от синхронного генератора, б—питание от сети бесконечной мощности

торого были закорочены. Данные указанных машин приведены в приложении.

Были сняты осциллограммы процесса торможения противотоком как при питании асинхронного электродвигателя от синхронного генератора, так и от сети бесконечной мощности. Одновременно записывались обороты электродвигателя и генератора, а также ток возбуждения генератора.

На рис. 4а и б приведены осциллограммы процесса торможения для указанных двух случаев. Сопоставление опытных данных с расчетными, приведенными в приложении, показывает достаточную для практических целей точность приведенной методики расчета. Данная методика может быть также использована для расчета процесса торможения асинхронного электродвигателя при питании его от сети бесконечной мощности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассчитать время торможения противотоканием асинхронного электродвигателя, питающегося от синхронного генератора соизмеримой мощности.

Данные синхронного генератора

Тип МСА-72/4А. Мощность—15 кВА, $U_n=230$ В, $I_n=37,6$ А, $i_{вн}=24$ А, $\eta_g=0,875$, $\cos\varphi_n=0,8$, $i_{вн}=9,7$ А, $x_d=5,61$ Ом, $T_d=0,05$ сек, $n=1500$ об/мин, соединение обмоток λ .

Данные асинхронного электродвигателя

Тип МТ-41-8, $P_n=11$ кВт, $U_n=220$ В, $I_n=52$ А, $\eta=0,86$, $\cos\varphi_n=0,67$, $n=715$ об/мин, соединение фаз Δ , $M_k=3$.

Параметры электродвигателя, пересчитанные к эквивалентной звезде

$r_1=0,146$ Ом, $x_1=0,202$ Ом, $r_2'=0,16$ Ом, $x_2'=0,368$ Ом, $x_m=6$ Ом, $C D_3^2=9,4$ кг·м² (вместе с генератором постоянного тока на валу). Кольца электродвигателя закорочены, другой нагрузки нет.

Параметры первичного двигателя

$P_n=30$ кВт, $n_{дн}=1500$ об/мин, $n_{до}=1530$ об/мин (по опытным данным для режима работы электродвигателя с $m_c=0$, $C D_{дг}^2=8$ кг·м²).

Скорость вращения первичного двигателя генератора изменяется

Рассчитываем общие параметры и коэффициенты: $T_3=1,25$ сек, $T_{дг}=1,64$ сек, $C=5,1$, $D=5$, $\gamma=0,51$, $i_b=1,35 i_{вн}$, $r_{вв}'=0,5$. Величиной T_b как малой пренебрегаем.

По выражению (19) при $K_f=1$ рассчитываем кривую $m_3=f(s)$ и разбиваем ее на 10 интервалов:

s_n	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1
m_n	0,143	0,151	0,159	0,168	0,179	0,191	0,204	0,223	0,238	0,26	0,286

Момент $m_c=0$. 1-й интервал.

Коэффициенты: $K_{f1}=1,02$, $j_1=1,045$, $A_1=0,313$, $B_1=0,08$.

По (25)

$$\Delta t_1 = \frac{1,02 \cdot 1,25}{1,04 \cdot 0,08} \cdot \ln \left(\frac{0,08 \cdot 1,9 - 0,313}{0,08 \cdot 2 - 0,313} \right) = 0,83 \text{ сек.}$$

2-й интервал по (37)

$$K_{f2} = \frac{5,1 - 0,51}{5} \cdot \frac{0,151}{1,02} \cdot \left(\frac{1,83 \cdot 1,02 - 0,83 \cdot 0,58}{1,83 - 0,83 \cdot 0,58} \right)^2 \left(1 - e^{-\frac{5}{1,64} \cdot 0,83} \right) + 1,02 e^{-\frac{5}{1,64} \cdot 0,83} = 1,005$$

Коэффициенты: $j_2=1,009$, $A_2=0,3$, $B_2=0,08$.

$$\Delta t_2 = \frac{1,005 \cdot 1,25}{1,009 \cdot 0,08} \ln \left(\frac{0,08 \cdot 1,8 - 0,3}{0,08 \cdot 1,9 - 0,3} \right) = 0,8 \text{ сек, и т. д., см. ниже.}$$

Интервалы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_{f_n}	1,02	1,005	1,004	1,003	1,002	1,007	0,9992	0,9819	0,9774	0,9751
Δt_n	0,83	0,8	0,76	0,69	0,67	0,63	0,59	0,554	0,51	0,47

$$\text{Общее время торможения } t_T = \sum_{n=1}^{10} \Delta t_n = 6,5 \text{ сек (рис. 4 а)}$$

Если скорость вращения первичного двигателя принимаем постоянной, то расчет ведем в следующем порядке.

Определяем моменты m_n и m_T : $m_n=0,286$, $m_T=0,143$.

Так как T_d мала, то для расчета используем выражение (8). При $m_c=0$:

$$t_T = \frac{1,25}{0,143} \ln \frac{0,286}{0,143} = 6 \text{ сек.}$$

В этом случае время t_T получается несколько меньше, чем при учете изменения скорости.

Расчет торможения электродвигателя при питании от сети бесконечной мощности. Определяем m_n и m_T : $m_n=1,75$, $m_T=0,94$; $A=2m_n - m_T=2,56$, $B=m_n - m_T=0,81$.

Время торможения при $m_c=0$

$$t_T = \frac{1,25}{0,8} \ln \frac{0,81 - 2,56}{1,62 - 2,56} = 0,96 \text{ сек.}$$

Как видно из рис. 4, расчетные данные хорошо согласуются с опытными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадымов Я. Б., Расулов М. М. К расчету электромеханических переходных процессов при пуске асинхронного электродвигателя синхронного генератора соизмеримой мощности. "Электричество", 1960, № 2.
2. Кадымов Я. Б., Расулов М. М. Пуск асинхронного электродвигателя от синхронного генератора соизмеримой мощности. "Электричество", 1960, № 11.
3. Касьянов В. Т. Асинхронная машина при переменной частоте. "Электричество", 1949, № 2.

С. Г. МАМЕДОВ

ЛИНИИ Н и К Са II СЛАБОЙ ХРОМОСФЕРНОЙ ВСПЫШКИ 8 СЕНТЯБРЯ 1960 ГОДА

Линии Н и К Са II в спектре хромосферных вспышек предоставляют некоторые дополнительные возможности для выяснения картины явления вспышек. Поэтому изучение линий Н и К в спектрах слабых вспышек, где их особенности легче поддаются интерпретации, чем в спектрах сильных вспышек, на наш взгляд представляет интерес для физики вспышек. В то же время методика их анализа еще недостаточно разработана, а выводы, полученные разными авторами, противоречивы.

В. А. Крат и В. М. Соболев [2] для определения оптической толщины пользовались следующей формулой (в предположении, что контуры линий обусловлены эффектом Доплера):

$$\alpha = \frac{\Delta\lambda_n(0,2)}{\Delta\lambda_k(0,2)} = \left\{ \frac{\ln\left(-\frac{\ln[1-0,2(1-e^{-A})]}{A}\right)}{\ln\left(-\frac{\ln[1-0,2(1-e^{-2A})]}{2A}\right)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Здесь: $\Delta\lambda_n(0,2)$ и $\Delta\lambda_k(0,2)$ —ширины эмиссионного контура Н и К соответственно, на высоте, равной 20% от центральной интенсивности:

A —оптическая толщина в центре линии Н. Так как веса подуровней, переходами с которых создаются линии Н и К, относятся как 1:2, то оптическая толщина в линии К вдвое больше оптической толщины в линии Н, что авторы приняли во внимание при выводе данной формулы. Авторы протабулировали α от 0,2 до 20. Причем, влияние „подложки“ (невозмущенного контура, на который накладывается эмиссионный контур вспышки) не принималось во внимание. Чистый эмиссионный контур получался вычитанием из возмущенного контура „подложки“. Для нескольких слабых вспышек таким методом было получено $A \approx 20$. Отсюда количество атомов Са II в основном состоянии $N_1 = 1,4 \cdot 10^{14}$. Несмотря на то, что в качественном отношении такой метод должен давать правильные результаты, пренебрежение поглощением света „подложки“ в линии вспышки не оправдано и методика может быть заметно улучшена.

А. Б. Северный и Э. Р. Мустель [4] для линий Н и К вспышки 13 июня 1950 г. (балл 2) приняли, что контуры обусловлены совмест-

ным действием доплер-эффекта и затухания излучения и применили формулу, учитывающую „подложку“:

$$I_{\lambda} = P_{\lambda} (1 - e^{-\tau_{\lambda}}) + I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}},$$

здесь I_λ — интенсивность в контуре линии;

P_λ — функция источника для вспышки;

I_{λ}^c — интенсивность невозмущенного контура („подложки“);

τ_{λ} — оптическая толщина.

Так как полагается $\tau_{\lambda_0} \gg 1$, то $P_\lambda = I_{\lambda_0}$. Тогда

$$I_{\lambda} = I_{\lambda_0} (1 - e^{-\lambda_0}) + I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}}$$

Подбором N_1 (число атомов на нижнем уровне) и $\Delta_{\text{д}}$ авторы добиваются наилучшего согласия теоретического контура с наблюдаемым

Таким путем найдено: для Н: $\Delta\lambda_d = 0,4\text{\AA}$; $N_1 = 7,3 \cdot 10^{16}$; для К: $\Delta\lambda_d = 0,5\text{\AA}$; $N_1 = 7,2 \cdot 10^{16}$. Количество атомов на возбужденном состоянии N_2 определяется по формуле:

$$I_{\lambda} = \frac{N_2 I_{\text{KI}} h_{\nu_{\text{IK}}} \lambda_0}{16 \pi^3 (\lambda - \lambda_0)^2}, \quad (1)$$

которая применяется к точке контура, где $\tau_k < 1$. Выразив I_k в абсолютных единицах, определяют N_2 . Получены: $(N_2)_k = 1,25 \cdot 10^{14}$; $(N_2)_n = 0,64 \cdot 10^{14}$.

Т. В. Казачевская [1] для линий Н и К вспышки балла 2 также принимает доплер-эффект и эффект затухания излучения. Предполагается $T_k = 10000^\circ$, $v_1 = 0$; и соответственно $\Delta\lambda_d = 0,0266\text{\AA}$.

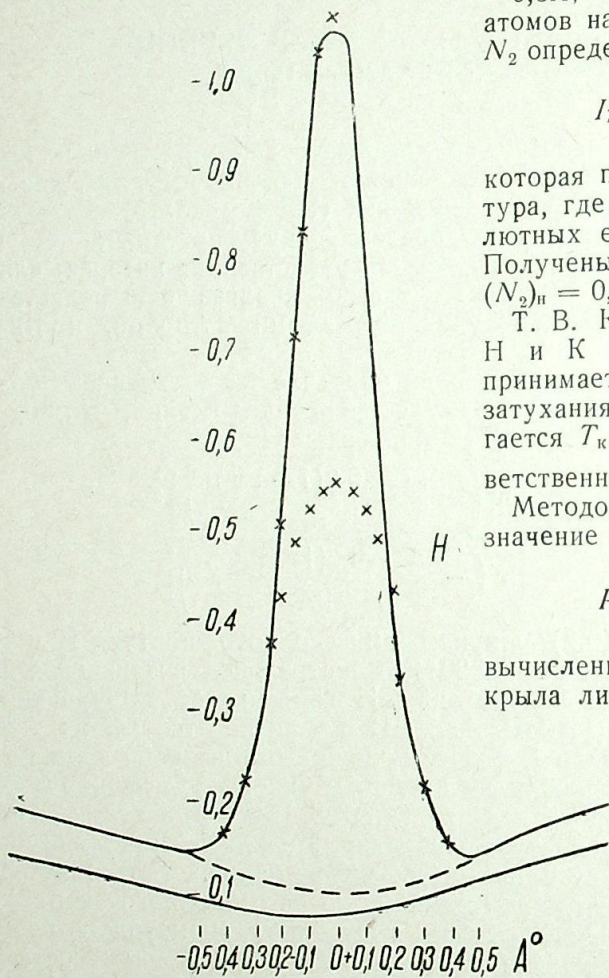
Методом проб находится такое значение N_1 , при котором величина:

$$P_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} - I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}}}{1 - e^{-\tau_{\lambda}}},$$

вычисленная для нескольких точек крыла линии (условие: $\tau_k < 1$) осталась постоянной. τ_0 предполагается $\gg 1$. Таким путем было получено $N_1 = 10^{17}$ (как видно из рис. 1, теоретический контур не согласуется с наблюдаемым в центральных частях контура). Количество атомов на возбужденном состоянии вычисляется при помощи формулы (1).

Получено $(N_2)_H = 3,84 \cdot 10^{13}$ и $(N_2)_K = 7,7 \cdot 10^{13}$ ПОМО

В. А. Кратом на дифракционном спектрографе пулковского горизон-



найти в [3]. Вспышка находилась недалеко от центра диска в группе пятен. Момент экспозиции $7^{\text{h}}0,9^{\text{m}}$ всемирного времени близок к моменту максимума яркости вспышки. Мощность вспышки оценивается баллом 1. Кроме H и K одновременно на спектрограммах были получены линии H_{β} , H_{γ} , H_{ϵ} , H_{δ} и H_{ζ} . Экспонированные пластинки проявлялись при стандартных условиях проявителем Чибисова.

Контуры строились обычным способом в единицах соседнего непрерывного спектра центра диска.

Предположим, что наблюдаемый контур является доплеровским (что оправдывается дальнейшими вычислениями). Чтобы определить τ_0 и $\Delta\lambda_d$ непосредственно по контуру линий, мы использовали формулу, учитывающую "подложку":

$$i_x I_x e^{-\tau_0} e^{-\frac{x^2}{\Delta \lambda_D^2}} + P_\lambda \left(1 - e^{-\tau_0} e^{-\frac{x^2}{\Delta \lambda_D^2}} \right), \quad (2)$$

Здесь i_x — интенсивность наблюдаемого контура на расстоянии x от центра линии;

I_x — интенсивность контура "подложки";
 P_0 — функция источника

P_λ — функция источника вспышки;

τ_0 — оптическая толща в центре линии.
В отношении контраста

В отношении контуров „подложки“ линий Н и К следует сказать следующее. Из-за уменьшения количества атомов Са II в слоях, залегающих под вспышкой (или же в слоях самой вспышки, если она ложится в Н и К приподнят по вторичной ионизации, весь контур „подложки“ в Н и К приподнят по сравнению с соседним невозмущенным контуром. И поэтому в качестве контура „подложки“ мы взяли не соседний невозмущенный контур, экстраполированный до центра по крыльям контуров в месте вспышки.

Напишем формулу (2) для двух точек контура с x_1 и x_2 для линии Н:

$$i_{x_1}(H) = I_{x_1}(H) e^{-\tau_{0e} \frac{x_1^2}{\Delta \lambda_D^2}} + P_\lambda(n) \left(1 - e^{-\tau_0 e \frac{x_1^2}{\Delta \lambda_D^2}} \right) \quad (3)$$

$$i_{x_2}(H) = I_{x_2}(H) e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta \tau_{\Pi}^2}} + P_{\lambda}(H) \left(1 - e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta \tau_{\Pi}^2}} \right) \quad (4)$$

Исключим из них $P_k(n)$:

$$\frac{i_{x_1}(H) - I_{x_1}(H) e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_1^2}{\Delta \lambda_D^2}}}{i_{x_2}(H) - I_{x_2}(H) e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta \lambda_D^2}}} = \frac{1 - e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_1^2}{\Delta \lambda_D^2}}}{1 - e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta \lambda_D^2}}}$$

Далее:

$$\begin{aligned} \text{Далее:} \quad & -\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2} - \frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2} + I_{x_2}(h)e^{-\tau_0} \left(e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} + e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} \right) \\ i_{x_1}(h) - I_{x_1}(h)e^{-\tau_0} & - i_{x_1}(h)e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} + I_{x_2}(h)e^{-\tau_0} \left(e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} + e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} \right) \\ & = i_{x_2}(h) - I_{x_2}(h)e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} - i_{x_2}(h)e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} + I_{x_2}(h)e^{-\tau_0} \left(e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} + e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} \right) \end{aligned}$$

Так как линии Н и К в центральных участках имеют очень пологую форму, то для не слишком отдаленных друг от друга x_1 и x_2 , можно положить $I_{x_1} \approx I_{x_2}$.

ным действием доплер-эффекта и затухания излучения и применили формулу, учитывающую „подложку“:

$$I_{\lambda} = P_{\lambda} (1 - e^{-\tau_{\lambda}}) + I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}},$$

здесь I_{λ} — интенсивность в контуре линии;

P_{λ} — функция источника для вспышки;

I_{λ}^c — интенсивность невозмущенного контура („подложки“);

τ_{λ} — оптическая толща.

Так как полагается $\tau_{\lambda_0} \gg 1$, то $P_{\lambda} = I_{\lambda_0}$. Тогда

$$I_{\lambda} = I_{\lambda_0} (1 - e^{-\tau_{\lambda}}) + I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}}$$

Подбором N_1 (число атомов на нижнем уровне) и $\Delta\lambda_d$ авторы доби-
ваются наилучшего согласия теоретического контура с наблюдаемым

Таким путем найдено: для Н: $\Delta\lambda_d = 0,4 \text{ \AA}$; $N_1 = 7,3 \cdot 10^{16}$; для К: $\Delta\lambda_d = 0,5 \text{ \AA}$; $N_1 = 7,2 \cdot 10^{16}$. Количество атомов на возбужденном состоянии N_2 определяется по формуле:

$$I_{\lambda} = \frac{N_2 I_{\lambda}^c h \nu_{\lambda} \lambda_0}{16\pi^3 (\lambda - \lambda_0)^2}, \quad (1)$$

которая применяется к точке контура, где $\tau_{\lambda} < 1$. Выразив I_{λ} в абсолютных единицах, определяют N_2 . Получены: $(N_2)_K = 1,25 \cdot 10^{14}$; $(N_2)_H = 0,64 \cdot 10^{14}$.

Т. В. Казачевская [1] для линий Н и К вспышки балла 2 также принимает доплер-эффект и эффект затухания излучения. Предполагается $T_K = 10000^\circ$, $v_1 = 0$; и соответственно $\Delta\lambda_d = 0,0266 \text{ \AA}$.

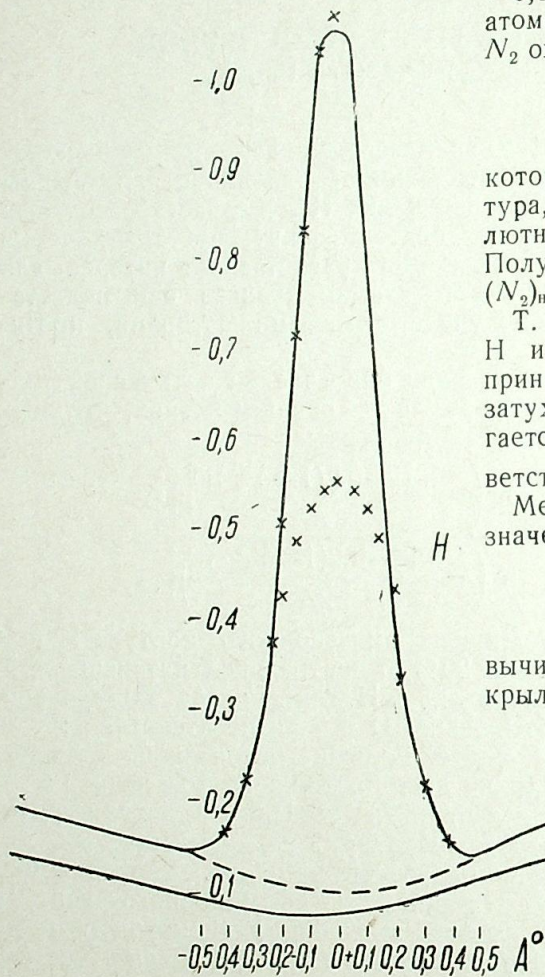
Методом проб находится такое значение N_1 , при котором величина:

$$P_{\lambda} = \frac{I_{\lambda} - I_{\lambda}^c e^{-\tau_{\lambda}}}{1 - e^{-\tau_{\lambda}}},$$

вычисленная для нескольких точек крыла линии (условие: $\tau_{\lambda} < 1$) осталась постоянной. τ_0 предполагается $\gg 1$. Таким путем было получено $N_1 = 10^{17}$ (как видно из рис. 1, теоретический контур не согласуется с наблюдаемым в центральных частях контура). Количество атомов на возбужденном состоянии вычисляется при помощи формулы (1).

Получено $(N_2)_H = 3,84 \cdot 10^{13}$ и $(N_2)_K = 7,7 \cdot 10^{13}$.

Линии Н и К Са II вспышки 8 сентября 1960 г. наблюдались В. А. Кратом на дифракционном спектрографе пулковского горизон-



тального солнечного телескопа. Описание этого спектрографа можно найти в [3]. Вспышка находилась недалеко от центра диска в группе пятен. Момент экспозиции 7^h 0,9^m всемирного времени близок к максимуму яркости вспышки. Мощность вспышки оценивается чены линии Н_β, Н_γ, Н_δ, Н_ε и Н_ζ. Экспонированные пластинки проявлялись при стандартных условиях проявителем Чибисова.

Контур строился обычным способом в единицах соседнего непрерывного спектра центра диска.

Предположим, что наблюдаемый контур является доплеровским (что оправдывается дальнейшими вычислениями). Чтобы определить τ_{λ} и $\Delta\lambda_d$ непосредственно по контуру линий, мы использовали формулу, учитывающую „подложку“:

$$i_x I_{\lambda} e^{-\tau_0 e^{-\frac{x^2}{\Delta\lambda_d^2}}} + P_{\lambda} \left(1 - e^{-\tau_0 e^{-\frac{x^2}{\Delta\lambda_d^2}}} \right), \quad (2)$$

Здесь i_x — интенсивность наблюдаемого контура на расстоянии x от центра линии;

I_{λ} — интенсивность контура „подложки“;

P_{λ} — функция источника вспышки;

τ_0 — оптическая толща в центре линии.

В отношении контуров „подложки“ линий Н и К следует сказать следующее. Из-за уменьшения количества атомов Са II в слоях, лежащих под вспышкой (или же в слоях самой вспышки, если она залегает глубоко), вследствие вторичной ионизации, весь контур „подложки“ в Н и К приподнят по сравнению с соседним невозмущенным контуром. И поэтому в качестве контура „подложки“ мы взяли не соседний невозмущенный контур, экстраполированный до центра по крыльям контуров в месте вспышки.

Напишем формулу (2) для двух точек контура с x_1 и x_2 для линии Н:

$$i_{x_1}(H) = I_{x_1}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}} + P_{\lambda}(H) \left(1 - e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}} \right) \quad (3)$$

$$i_{x_2}(H) = I_{x_2}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}} + P_{\lambda}(H) \left(1 - e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}} \right) \quad (4)$$

Исключим из них $P_{\lambda}(H)$:

$$\frac{i_{x_1}(H) - I_{x_1}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}}}{1 - e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}}} = \frac{i_{x_2}(H) - I_{x_2}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}}}{1 - e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}}}$$

Далее:

$$i_{x_1}(H) - I_{x_1}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}} - i_{x_1}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}} + I_{x_2}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}} = i_{x_2}(H) - I_{x_2}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}} - i_{x_2}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_d^2}}} + I_{x_1}(H) e^{-\tau_0 e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_d^2}}}$$

Так как линии Н и К в центральных участках имеют очень пологую форму, то для не слишком отдаленных друг от друга x_1 и x_2 , можно положить $I_{x_1} \approx I_{x_2}$.

Поэтому получим:

$$[i_{x_2}(\kappa) - I_{x_1}(\kappa)] e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} + [I_{x_2}(\kappa) - i_{x_1}(\kappa)] e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} + i_{x_1}(\kappa) - i_{x_2}(\kappa) \quad (5)$$

Введем такие обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= i_{x_2}(\kappa) - I_{x_1}(\kappa) \\ b_1 &= I_{x_2}(\kappa) - i_{x_1}(\kappa) \\ c_1 &= i_{x_1}(\kappa) - i_{x_2}(\kappa) \end{aligned}$$

$e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} = y$, выберем $x_2 = qx_1$; $q > 1$; тогда:

$$e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} = e^{-\frac{q^2 x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} = \left(e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} \right)^{q^2} = y^{q^2}$$

а также $e^{-\tau_0} = x$; мы получаем:

$$e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}} = x y; \quad e^{-\tau_0} e^{-\frac{x_2^2}{\Delta\lambda_D^2}} x^{q^2} = x y^{q^2}$$

Обозначим далее: $x^y = z$; тогда: $x^{y^{q^2}} = x^{y \cdot y^{q^2-1}} = (x^y)^{y^{q^2-1}} = z^{y^{q^2-1}}$

Поставив эти обозначения в (5), имеем:

$$a_1 z + b_1 z^{y^{q^2-1}} + c_1 = 0. \quad (6)$$

Зная, что $\tau_\lambda(\kappa) = 2\tau_\lambda(\kappa)$, мы таким же путем получим соответствующее уравнение для линии К для тех же x -ов:

$$a_2 z^2 + b_2 z^{2y^{q^2-1}} + c_2 = 0, \quad (7)$$

где,

$$\begin{aligned} a_2 &= i_{x_2}(\kappa) - I_{x_1}(\kappa) \\ b_2 &= I_{x_2}(\kappa) - i_{x_1}(\kappa) \\ c_2 &= i_{x_1}(\kappa) - i_{x_2}(\kappa) \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем два уравнения с двумя неизвестными z и y :

$$a_1 z + b_1 z^{y^{q^2-1}} + c_1 = 0$$

$$a_2 z^2 + b_2 z^{2y^{q^2-1}} + c_2 = 0$$

Отсюда:

$$z^{y^{q^2-1}} = -\frac{a_1 z + c_1}{b_1}; \quad z^{2y^{q^2-1}} = -\frac{a_2 z^2 + c_2}{b_2}$$

$$\left(-\frac{a_1 z + c_1}{b_1} \right)^2 = -\frac{a_2 z^2 + c_2}{b_2}$$

Получается обычное квадратное уравнение

$$(a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2) z^2 + 2a_1 b_1 c_1 z + b_2 c_1^2 + b_1^2 c_2 = 0$$

с корнями

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 b_2 c_1 \pm \sqrt{(a_1 b_2 c_1)^2 - (a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2)(b_2 c_1^2 + b_1^2 c_2)}}{a_1^2 b_2 + a_2 b_1^2}$$

Зная z , мы можем вычислять y и соответственно $\Delta\lambda_D$:

$$y = \left[\frac{\lg \left(-\frac{a_1 z + c_1}{b_1} \right)}{\lg z} \right]^{\frac{1}{q^2-1}} = \left[\frac{\lg \left(-\frac{a_2 z^2 + c_2}{b_2} \right)}{2 \lg z} \right]^{\frac{1}{q^2-1}} = e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}}$$

По полученным y и z определяем τ_0 :

$$\tau_0 = -\frac{\lg z}{y \lg e}$$

Центральные интенсивности линий Н и К у рассматриваемой вспышки равны. Поэтому, для выявления предполагаемого рассеивающего слоя над вспышкой [2], мы применили данный метод к крыльям линий Н и К, где, по предположению [2], нет влияния рассеивающего слоя. Составляем уравнение для расстояний: $x_1 = 0,260 \text{ \AA}$, $x_2 = 0,370 \text{ \AA}$,

$q^2 = 2$. Находим $z = 0,504$; $y = 0,192 = e^{-\frac{x_1^2}{\Delta\lambda_D^2}}$; $\Delta\lambda_D = 0,2 \text{ \AA}$. $\tau_0 = 3,6$. Для этих значений $\Delta\lambda_D$ и τ_0 вычисляем $P_\lambda(\kappa)$ и $P_\lambda(\kappa)$. Соответственно получено: $P_\lambda(\kappa) = 0,55$; $P_\lambda(\kappa) = 0,46$. Вычисленные по этим значениям центральные интенсивности получились $i_0(\kappa) = 0,55$, $i_0(\kappa) = 0,46$, т. е. меньше, чем наблюдаемые центральные интенсивности (в случае, если бы над вспышкой находился поглощающий слой, вычисленные центральные интенсивности должны быть больше наблюдаемых). Для этих значений P_λ , $\Delta\lambda_D$ и τ_0 мы построили теоретический контур, который, как видно из рис. 1, очень хорошо согласуется с крыльями наблюдаемого контура.

Теперь, принимая полученный контур за „подложку“ мы вычислили τ_0 , P_λ , $\Delta\lambda_D$ для оставшейся части контура. Получены: $\tau_0(\kappa) = 0,5$, $\Delta\lambda_D = 0,14 \text{ \AA}$, $i_0(\kappa) = 1,07$, $i_0(\kappa) = 1,1$, а наблюдаемая $i_0(\kappa) = i_0(\kappa) = 1,05$. Как видим из рис. 1, вычисленный теоретический контур точно согласуется с наблюдаемым.

Таким образом получается, что вспышка состоит из двух слоев, с разной температурой и оптической толщиной. Для слоя с $\tau_0 = 3,6$ получим количество атомов в основном состоянии: $N_1 = 2 \cdot 4 \cdot 10^{13}$, а для слоя с $\tau_0 = 0,5$ $N_1 = 3 \cdot 4 \cdot 10^{12}$. По эквивалентным ширинам вычисления дают количество атомов в возбужденном состоянии (с учетом самопоглощения): для слоя с $\tau_0 = 3,6$ $(N_2)_H = 4 \cdot 10^{10}$, $(N_2)_K = 7 \cdot 10^{10}$, для слоя с $\tau_0 = 0,5$ $(N_2)_H = 10^{10}$, $(N_2)_K = 1,7 \cdot 10^{10}$. Как мы видим, отношение $(N_2)_H$ к $(W_2)_K$ равно приблизительно 1:2, что доказывает правильность разделения вспышки на два слоя.

Количество излучающих атомов можно получать и следующим образом [4].

Интенсивности излучения при длине волны λ в крыле линии, где самопоглощением можно пренебречь, равна:

$$I_\lambda = \frac{N_K A_{ki} h \nu_{ik}}{4 \pi} \varphi_\lambda. \quad (7)$$

Здесь $I_\lambda = I_\lambda^c r_\lambda$, где r_λ — остаточная интенсивность вспышки (т. е. $I_{\text{всп}} - I_{\text{подл}}$);

I_λ^c — абсолютная интенсивность непрерывного спектра при длине волны λ центра диска;

φ_λ — коэффициент поглощения на данной длине волны, при совместном действии эффекта Допплера и затухания излучения может быть принят в виде

$$\varphi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta\lambda_D} \left[e^{-\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda_D}\right)^2} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left(1 - 2 \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D} F\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_D}\right) \right) \right]$$

При наличии одного лишь доплер-эффекта вторыми слагаемыми можно пренебречь. Из [5] для Н и К находим: $I_\lambda^c = 1,92 \cdot 10^{14}$. $\Delta\lambda_D$ вместо $0,2 \text{ \AA}$ возьмем $0,18 \text{ \AA}$, так как в этом случае полученное значение по этому методу, а также по эквивалентным ширинам совпадают. Для слоя с $\tau_0 = 3,6$ имеем $(N_2)_n = 4,2 \cdot 10^{10}$, $(N_2)_k = 9 \cdot 10^{10}$. Что хорошо согласуется с результатами, полученными по эквивалентным ширинам. Это тоже доказывает правильность полученных оптических толщ, доплеровских ширин двухслойности рассматриваемой вспышки.

Расчеты показывают, что на расстоянии от центра $\Delta\lambda_D = 0,37 \text{ \AA}$, где определялась оптическая толщина, при $\Delta\lambda_D = 0,20 \text{ \AA}$, а также постоянной затухания, равной $0,1-0,01$ (что в среднем имеет место в солнечной атмосфере), коэффициент поглощения, обусловленный затуханием излучения в двадцать раз меньше, чем коэффициент поглощения, обусловленный эффектом Допплера; поэтому затуханием излучения можно пренебречь.

Интересно отметить, что отношение количества атомов в нормальном состоянии для верхнего слоя с $\Delta\lambda_D = 0,14 \text{ \AA}$ вдвое меньше $\left(\frac{N_2}{N_1} = 0,0029\right)$, чем для нижнего слоя с $\Delta\lambda_D = 0,20 \text{ \AA}$ $\left(\frac{N_2}{N_1} = 0,0016\right)$.

Это может быть указанием на то, что верхний слой горячее нижнего, если причиной возбуждения уровня 4^2P атомов CaII является электронный удар. По подсчетам В. А. Крата и В. М. Соболева [2] в слабых вспышках атомы CaII ионизируются в основном электронным ударом; в таком случае, так как линии Н и К резонансные, то уровень 4^2P CaII должен возбуждаться также в основном электронным ударом. По-видимому, в данном случае более горячие металлические волокна расположены в верхних слоях вспышки, т. е. ближе к короне. Естественно предположить, что слои вспышки не отделены друг от друга резкой границей, и поэтому в этой вспышке P_λ растет с высотой.

В заключение считаем своим долгом выразить благодарность В. А. Крату за руководство работой, а также В. М. Соболеву за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Казачевская Т. В. „Изв. КрАО“, 1958, т. XX.
2. Крат В. А. и Соболев В. М. „Изв. ГАО“, 1958, т. XXI, вып. 3, № 162.
3. Крат В. А. и Крат Т. В. „Изв. ГАО“, 1958, т. XXII.
4. Северный А. Б. и Мустель Э. Р. „Изв. КрАО“, 1955, т. XII.
5. Унзольд А. Физика звездных атмосфер. М., 1949.

С. Н. Мамматов

1960-чы ил 8 сентябр эиф хромосфер алышмасынын Н вэ К Са II хэтлэри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә, 8 сентябр 1960-чы илдә Пулково рәсәдханасынын Күнәш спектрографында мүшәһидә олунмуш эиф хромосфер алышмасынын Н вэ К Са II емиссия хэтлэринин тәдгиги верилир. Бу хэтлэрин оптик дәринлијини τ_0 вэ Допплер-енини $\Delta\lambda_D$ һесабламаг үчүн дәгиг дүстур чыхарылыр. Бу дүстурун јухарыда гејд олунмуш алышмаја тәтбиги ашагыдакы нәтичәни вермишдир:

1. Алышма ики тәбәгәдән ибарәтдир; фотосферә јахын тәбәгә үчүн: $\tau_0 = 3,6$; $N_1 = 2 \cdot 4 \cdot 10^{13}$; $(N_2)_n = 4 \cdot 10^{10}$; $(N_2)_k = 7 \cdot 10^{10}$; $\Delta\lambda_D = 0,20 \text{ \AA}$; үст тәбәгә (тача јахын тәбәгә) үчүн: $\tau_0 = 0,5$; $N_1 = 3 \cdot 4 \cdot 10^{12}$; $(N_2)_n = 10^{10}$; $(N_2)_k = 1,7 \cdot 10^{10}$ $\Delta\lambda_D = 0,14 \text{ \AA}$ тапылмышдыр.
2. Мәнбә функцијасы P_λ , күчлү алышмаларын әксинә, алышма дахилиндә јүксәклик артдыгча (тача јахынлашдыгча) артыр.

С. М. АЗИМОВ

СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ RY Per

Затменная переменная RY Персея была открыта Цераским в 1906 г. В дальнейшем для нее получена кривая блеска и установлен период системы, равный 6,86257 дням [7].

Визуальная кривая блеска была определена [12,8] на основе наблюдений Найланда [7], а фотографическая кривая блеска была получена Гапошкиным и Валбергом [14].

Система RY Per состоит из главной компоненты (более массивная звезда) спектрального класса $B 8 V$ и из вторичной компоненты спектрального класса $F 8 IV$. Причем радиус главной компоненты меньше радиуса спутника.

В этой системе главная звезда находится на главной последовательности на диаграмме Ресселя—Герцшпрунга, а спутник находится выше главной последовательности. Блеск системы меняется в пределах от $8,^m39$ (максимум) до $10,^m51$ (минимум). При первичном минимуме главная компонента полностью затмевается вторичной компонентой и видна звезда спектрального класса $F 8 IV$ (спутник). Во вторичном минимуме спутник частично затмевается главной звездой.

Физическая природа атмосфер компонент RY Per из-за слабости блеска до сих пор не была изучена. Настоящая работа посвящена изучению этого объекта спектрофотометрическим методом и определению ряда характеристик атмосфер звезд компонент (поверхностной температуры, спектрофотометрического градиента, скачка у предела серии Бальмера, электронного давления и плотности, числа поглощающих атомов водорода, однажды ионизованных и нейтральных атомов кальция, высоты атмосферы главной и вторичной звезд и т. д.).

Спектрофотометрические исследования таких объектов возможны только при наличии мощных светосильных телескопов.

§ 1. Наблюдение и обработка спектрограмм

Наблюдательный материал был получен нами, в основном осенью 1959—1960 гг. и частично зимой 1961 г. в Абастуманской астрофизической обсерватории Грузинской ССР.

Спектры RY Per фотографировались на 70-см рефлекторе системы Максудова с 8-градусной объективной призмой (дисперсия составила 166 Å/мм около H_γ). Расширение спектра по прямому восхождению

С. М. АЗИМОВ

СПЕКТРОФОТОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ RV Per

Затменная переменная RV Персея была открыта Цераским в 1906 г. В дальнейшем для нее получена кривая блеска и установлен период системы, равный 6,86357 дням [7].

Визуальная кривая блеска была определена [12,8] на основе наблюдений Найланда [7], а фотографическая кривая блеска была получена Гапошкиным и Валбергом [14].

Система RV Per состоит из главной компоненты (более массивная звезда) спектрального класса $B 8 V$ и из вторичной компоненты спектрального класса $F 8 IV$. Причем радиус главной компоненты меньше радиуса спутника.

В этой системе главная звезда находится на главной последовательности на диаграмме Расселя—Герцшпрунга, а спутник находится выше главной последовательности. Блеск системы меняется в пределах от $8^{\text{m}}39$ (максимум) до $10^{\text{m}}51$ (минимум). При первичном минимуме главная компонента полностью затмевается вторичной компонентой и видна звезда спектрального класса $F 8 IV$ (спутник). Во вторичном минимуме спутник частично затмевается главной звездой.

Физическая природа атмосфер компонент RV Per из-за слабости блеска до сих пор не была изучена. Настоящая работа посвящена изучению этого объекта спектрофотометрическим методом и определению ряда характеристик атмосфер звезд компонент (поверхностной температуры, спектрофотометрического градиента, скачка у предела серии Бальмера, электронного давления и плотности, числа поглощающих атомов водорода, однажды ионизованных и нейтральных атомов кальция, высоты атмосферы главной и вторичной звезд и т. д.).

Спектрофотометрические исследования таких объектов возможны только при наличии мощных светосильных телескопов.

§ 1. Наблюдение и обработка спектрограмм

Наблюдательный материал был получен нами, в основном осенью 1959—1960 гг. и частично зимой 1961 г. в Абастуманской астрофизической обсерватории Грузинской ССР.

Спектры RV Per фотографировались на 70-см рефлекторе системы Максутава с 8-градусной объективной призмой (дисперсия составила $166 \text{ \AA/мм}$ около H_γ). Расширение спектра по прямому восхождению

на 0,2—0,8 мм достигалось расстройством хода часового механизма. Такой метод расширения дает более равномерное почернение спектра по высоте. Снимки делались на пластинках Кодак О а О и Агфа Астро (не сенсibilизированные). Употреблялся метолгидрохиноновый проявитель со временем проявления 8 мин при температуре +18°C.

Калибровка спектрограмм производилась в астрофизической лаборатории Абастуманской обсерватории на спектрографе ИСП—51 со ступенчатой щелью.

Таблица 1

Название	BD (1855 г.)		m_v	S_p
	α	δ		
1) ВД+47°699	2h 38m 39s	+47°25',6	8 ^m ,00	B8V
2) ВД+47°700	2 38 42,5	+47 51,4	7,7	B9V
3) ВД+46°616	2 33 48	+46 30,1	8,4	F6V
4) ВД+46°626	2 35 31	+46 42	9,2	G0V
Биннендик	Плеяды		m_{ptg}	
1) Б. 1407	3h 38m 51s	+22°28',7	8 ^m ,28	A0V
2) Б. 23823	3 40 23	+22 21,4	7,92	B9V
3) Б. 182	3 36 49,4	+22 44,7	9,2	G0V
4) Б. 310	3 37 40	+22 40,8	9,4	G0V

Таблица 2

№ пл.	И. Д. 24	Фаза в долях периода	Время экспозиции
1342	368214,554	0,8140	06 ^m
1343	36822,883	0,0701	0,5
1405	36849,637	0,9258	10
1919	37235,359	0,9570	20
1959(a)	37249,307	0,9910	25
1959(б)	37249,333	0,9948	35
1965(a)	37250,291	0,1343	10
1965(б)	37250,297	0,1353	05
1986	27256,195	0,9946	40
1987	37256,220	0,9983	40
1988	37256,263	0,0045	40
1983	37256,296	0,0092	30
1997(a)	37259,413	0,4623	15
1997(б)	37259,423	0,4648	10
2000	37263,338	0,0350	05
2131	37311,175	0,0049	40
2132	37311,199	0,0085	30

Калибровочные шкалы, спектр RY Per и спектр сравнения проявлялись совместно.

В табл. 1 приведен список звезд сравнения и звезд в Плеядах для привязки стандартных звезд, а в табл. 2 приведен список полученных спектрограмм.

Все спектрограммы обработаны на саморегистрирующем микрофотометре с автоматическим самописцем (установленном в лаборатории отдела Физики Солнца ГАО АН СССР в Пулковке) при увеличении в 50 раз и при ширине щели от 0,15 до 0,40 мм, на пластинке этому соответствует 0,01—0,03 мм так, что из спектра вырезались участки шириной соответственно около 1,8—5,1 Å H_γ и 1,5—4,2 Å у перевода почернений в интенсивности мы пользовались характеристикой, общей для интервала непрерывного спектра $\lambda\lambda$ 4600—3600 Å. В качестве стандарта были взяты следующие звезды сравнения: 1) ВД+47°699 (8,9^m); 2) ВД+47°700 (7^m,7); 3) ВД+46°616 (8,4^m); 4) ВД+46°626 (9,2^m). 1) и 3) были основными стандартами, а 2) и 4) были взяты для проверки постоянства блеска звезд сравнений.

Благодаря близкому расположению стандартных звезд от переменной (разница в α составляет всего ~2^m а в δ ~30'), облегчается учет атмосферного ослабления и фотометрической ошибки поля. Звездные величины стандартных звезд были определены привязкой к Плеядам с учетом влияния атмосферного ослабления. Значение коэффициента атмосферного ослабления взято из работ М. В. Долидзе [3] и Н. В. Быстровой [2], который получен ими для 11 точек участка непрерывного спектра $\lambda\lambda$ 4600—3790 Å.

По полученным спектрограммам определены относительный и абсолютный спектрометрические градиенты, спектрофотометрическая температура, скачок у предела серии Бальмера, найдены эквивалентные ширины водородных линий от H_γ по H_{14} включительно и 4227 Å нейтрального кальция, линий Mg II 4481 Å, He I 4026 Å, G—полосы 4305 Å и для некоторых линий металлических атомов.

Для проведения непрерывного спектра применялся метод Миннерта [6], разработанный им для металлических линий.

На основании модели Шустера-Шварцшильда выражение для остаточных интенсивностей r_λ в единицах интенсивности непрерывного спектра, записывается в виде:

$$r_\lambda = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + NHS_\lambda};$$

где I — интенсивность в данном месте линии;

I_0 — интенсивность непрерывного спектра в соответствующей длине волны.

S_λ — атомный коэффициент поглощения в линии;

N — число поглощающих атомов в 1 см²;

H — высота однородного поглощающего слоя атмосферы. Для крыльев широких линий коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом, записывается в виде:

$$S_\lambda = \frac{P_e}{T} \cdot \frac{C}{\Delta\lambda^n}, \quad (1)$$

где P_e — электронное давление;

T — температура;

C — некоторое постоянное;

$\Delta\lambda$ — расстояние от центра линии в Å, $n = 5/2$ для водородных линий и 2 для металлических линий.

Отсюда для остаточных интенсивностей в случае Штарк-эффекта получим:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{C_0}{\Delta\lambda^{5/2}}};$$

или, если интенсивность непрерывного спектра меняется в пределах линии:

$$\frac{I}{I_0 + m\Delta\lambda} = \frac{1}{1 + \frac{C_0}{\Delta\lambda^{5/2}}} \quad (2)$$

где m — изменения интенсивности непрерывного спектра на некотором $\Delta\lambda$, которое можно найти (не зная I_0) с достаточной точностью из сравнения обоих крыльев линии и $C_0 = N_{02} H \frac{P_e}{T}$.

Выражение (2) может быть переписано в виде:

$$I - m\Delta\lambda = I_0 C_0 \frac{1}{\Delta\lambda^{5/2}} \quad (3)$$

Если нанести на график $I - m\Delta\lambda$ как функцию от $1/\Delta\lambda^{5/2}$, то для достаточно малых $1/\Delta\lambda^{5/2}$ должна получиться прямая, пересечение которой с осью ординат дает интенсивность I_0 — непрерывного спектра на месте линии, а наклон ее постоянную C_0 . Последнюю мы использовали для нахождения числа водородных атомов N_{02} во втором квантовом состоянии.

Об этом будет сказано ниже. Непрерывный спектр, определенный вышеуказанным методом, всегда проходит немного выше, чем непрерывный спектр, полученный при проведении его по серединам отбросов за счет зерна эмульсии.

Считая, что металлические линии могут оказывать некоторое поглощающее действие, мы сравнивали эквивалентные ширины некоторых линий, полученные при проведении непрерывного спектра по серединам отбросов, с эквивалентными ширинами, полученными графическим методом. В результате оказалось, что для спектра $B 8 V$ первые отличаются от вторых лишь на 3—5%, а для $F 8 IV$ — от 10 до 15%, т. е. в случае спектра $B 8 V$ непрерывный спектр, проведенный по серединам отбросов, за счет зерна эмульсии совпадает с точностью в пределах ошибки с графически определенным непрерывным спектром, а в случае спектра $F 8 IV$, он проходит выше огибающей отбросов. Поэтому мы решили проводить линию непрерывного спектра в спектре $B 8 V$ по серединам отбросов, а в спектре $F 8 IV$, как огибающую верхов отбросов из-за линий и зерна эмульсии, причем случайно выскакивающие пики исключались. Однако здесь надо учесть, что зернистость пластинки сильно зависит от плотности изображения. Если всегда проводить непрерывный спектр одинаково по верхам, то иногда можно получить несколько неправильный результат. Это будет тогда, когда спектры звезды сравнения и исследуемой звезды имеют почернения, значительно отличающиеся друг от друга. Это обстоятельство не играет роли тогда, когда сравниваемые звездные спектры имеют примерно одинаковое почернение. В противном случае нужно у более слабой звезды несколько срезать верхи отбросов за счет зерна эмульсии.

§ 2. Фотометрирование непрерывного спектра

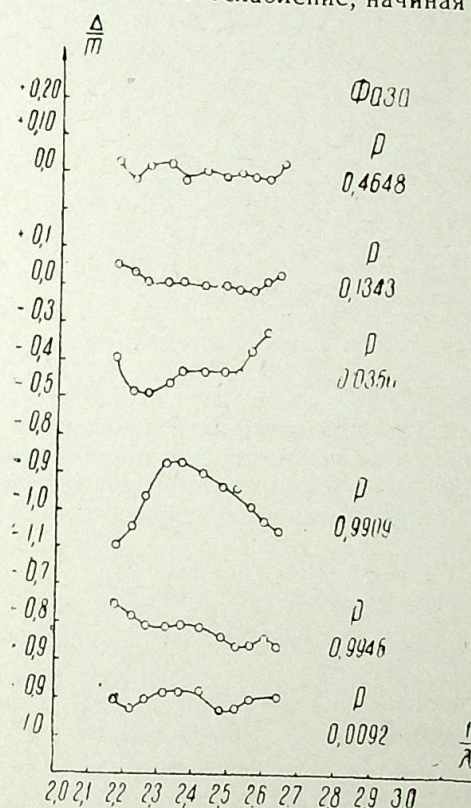
Для изучения относительного распределения энергии в непрерывном спектре $RY Per$ в области λ 4600—3790 Å были выбраны 11

λ (в $m\mu$)	$100/\lambda$	λ (в $m\mu$)	$1000/\lambda$
460	2,17	403	2,48
450	2,22	397	2,52
443	2,26	391	2,56
431	2,32	385	2,60
423	2,36	379	2,64
413	2,42		

На рис. 1 дается относительное распределение энергии в непрерывном спектре $RY Per$. Из этого рисунка видно, что характер распределения энергии в непрерывном спектре сильно меняется от фазы затмения, т. е. интенсивность непрерывного спектра в области λ 4600—4200 Å заметно ослабляется, причем такое ослабление, начиная с первого контакта, постепенно усиливается и достигает до максимального значения при фазе 0^h,9909. Ослабление при полной фазе затмения сравнительно незначительное. Это наводит на мысль, что, по-видимому, в системе $RY Per$ присутствует поток газа, вращающийся вокруг системы (источником является звезда $RY Per B$) и при фазах 0^h,9909 и 0^h,0350, находясь между наблюдателем и горячей звездой, оказывает селективное ослабление в указанной области непрерывного спектра звезды.

Кроме этого, присутствие некоторых резких линий поглощения наряду с широкими линиями в спектре $RY Per$ также подтверждает это предположение. Резкие линии, вероятно, образуются в медленно вращающейся оболочке звезды, а широкие в быстро вращающемся обращающем слое звездной атмосферы. Скорость вращения звезды $B 8 V$, полученная [11] по водородным линиям и по гелию еще раз подтверждает наше предположение.

Значение скорости вращения звезды $B 8 V$ для водородных линий получается в два раза меньше, чем для гелиевых (110 км/сек и 200 км/сек, соответственно). Это значит, что водородные линии образуются в слое, вращающемся медленно вокруг звезды (газовом потоке), в то время, как линии гелия образуются в быстровращающемся обращающем слое звезды. Таким образом, причина наблюдаемого



ослабления непрерывного спектра связана с расположением газового потока, который присутствует в системе RV Per.

Для определения относительных спектрофотометрических градиентов

$$\Delta\varphi = -2,303 \frac{d \lg \frac{I_u}{I_c}}{d \lambda / \lambda}, \quad (4)$$

мы составили систему условных уравнений в виде:

$$x + \frac{1}{\lambda_i} y = \lg \frac{I_u}{I_c} \quad (5)$$

Решение их, способом наименьших квадратов дает величину y которая, очевидно, отличается от $\Delta\varphi$ множителем 2,303. Зная относительный спектрофотометрический градиент исследуемой звезды и абсолютный градиент звезды сравнения можно определить абсолютный градиент и спектрофотометрическую температуру первой. Абсолютный градиент для стандартных звезд спектрального класса $B 8 V$ и $F 6 V$ был взят из работы Барбьера и Шалонжа [9]. Абсолютные градиенты стандартных звезд в участке спектра $\lambda \lambda 4600-3700 \text{ \AA}$ равны 0,91 и 2,11, соответственно. После того, как определены абсолютные значения градиента исследуемой звезды, используя таблицу абсолютных

спектрофотометрических градиентов Иенсена [4], находим для $\lambda 4000 \text{ \AA}$ спектрофотометрическую температуру звезды. Полученные таким образом градиенты и температуры даются в табл. 4.

Известно, что скачок у предела серии Бальмера обычно определяется логарифмом отношений интенсивностей непрерывного спектра до и после предела:

$$D = \lg \frac{I_{\lambda > 3650}}{I_{\lambda < 3650}}.$$

Для определения этой величины мы поступили следующим образом: изменяя интенсивность непрерывного спектра в единицах интенсивности стандартной звезды до и после предела серии составили две системы условных уравнений:

$$x_0 + \frac{1}{\lambda_i} y = \lg \frac{I_u}{I_c},$$

решение которых способом наименьших квадратов дает искомую величину ΔD , т. е. разницу скачка исследуемой и стандартной звезды. Зная ΔD и D_0 —скачок стандарта, мы нашли скачок в D для исследуемой звезды. Значение скачка D_0 было взято из работы [8].

Результаты вычисления даны в табл. 3, из которой видно явное изменение с фазой затмения спектрофотометрической температуры и скачка у предела бальмеровской серии. Происхождение этих изменений, с фазой затмения легко объяснить, если представить себе картину затмения: когда горячая звезда еще не закрыта относительно холодным спутником (до первого контакта), излучение доходит до нас, в основном, от горячих слоев звездного диска, а при закрытии (после первого контакта) яркой звезды картина излучения меняется, т. е. теперь излучение идет от поверхностных слоев звездного диска (потому, что центральная часть закрыта холодным спутником), где

температура относительно мала. Спектрофотометрическая температура, определенная перед вторым контактом (или же между третьим и четвертым контактами), по этой причине должна быть равна поверхностной температуре главной звезды (в случае полного затмения).

Таблица 3

$S_p \text{ №}$	Фаза в долях периода	$\Delta\varphi$ от сп. фот. градиент	φ абсол. градиент	T_c сп. фот. температура	$D-D_0$ Бальмеровский скачок	D Бальмер. скач.	m_{ptg}
1959(a)	0p,9910	$+0,33 \pm 0,06$	$2,44 \pm 0,06$				
1959(b)	0,9948	$+0,17 \pm 0,05$	$2,28 \pm 0,06$	6600 ± 500	$+0,166$	0,306	$10^m,321$
1986	0,9946	$+0,07 \pm 0,04$	$2,18 \pm 0,04$	6300 ± 300	—	—	10,426
1987	0,9983	$+0,19 \pm 0,03$	$2,30 \pm 0,03$	6500 ± 500	—	—	10,429
1988	0,0045	$+0,45 \pm 0,05$	$2,56 \pm 0,05$	6250 ± 250	—	—	
1989	0,0092	$+0,21 \pm 0,04$	$2,32 \pm 0,04$	5500 ± 500	$-0,019$	0,121	10,509
2131	0,0049	$-0,05 \pm 0,05$	$2,06 \pm 0,05$	6000 ± 300	—	—	10,171
2132	0,0085	$+0,16 \pm 0,05$	$2,17 \pm 0,05$	7000 ± 500	$+0,022$	0,162	10,400
2000	0,0350	$+0,40 \pm 0,07$	$1,31 \pm 0,07$	6500 ± 500	$+0,037$	0,127	10,271
1919	0,9570	—	—	11000 ± 1000	$-0,055$	0,275	8,905
1342	0,8140	—	—	—	$+0,006$	0,336	8,505
1405	0,1373	$+0,07 \pm 0,08$	$0,98 \pm 0,08$	—	$+0,003$	0,333	—
1965	0,1343	$-0,11 \pm 0,08$	$0,80 \pm 0,08$	17000 ± 1000	0,000	0,330	8,43
1997	0,4648	$0,00 \pm 0,04$	$0,91 \pm 0,04$	20000 ± 1000	$-0,025$	0,305	8,391
				18000 ± 2000	$-0,005$	0,325	8,430

В нашем случае, при фазе 0p,035, для поверхностной температуры получается 11000°K . Эта температура характерна для звезд спектрального класса $B 8$. Все это подтверждает нашу оценку спектрального класса RV Per по двумерной классификации в системе МК. С другой стороны, переход от центра звездного диска к краю должен отражаться и на значении скачка у предела серии. Этот скачок характеризует излучение, выходящее из разных глубин фотосферы, и при приближении к краю диска остается излучение, идущее только лишь от поверхностных слоев. Поэтому скачок должен убывать ($D \rightarrow 0$).

Таким образом, изменения спектрофотометрической температуры и скачка у предела бальмеровской серии с фазой затмения происходят из чисто геометрического эффекта, т. е. в одном случае наблюдаются более горячие, а в другом более холодные слои звезды. Это позволяет определить поверхностную температуру звезды при наличии относительно холодного спутника.

§ 3. Фотометрия спектральных линий RV Per и оценка физических условий в ее атмосфере

Для изучения физических условий в атмосфере RV Per нами были определены эквивалентные ширины линий поглощения водорода и некоторых других элементов, которые даются в табл. 4. Это позволяет нам определить ряд физических параметров, которые полностью характеризуют структуру звездной атмосферы, т. е. число поглощающих атомов в атмосфере звезды, высоту однородного поглощающего слоя, электронные плотности и давление, степень ионизации и т. д.

Число поглощающих атомов водорода во втором квантовом состоянии определяется формулами:

$$1) N_{02} Hf \ll W_\lambda = \frac{\pi e^2 \lambda^2}{mc^2} N_{02} Hf \quad (\text{оптически тонкий слой}) \quad (6)$$

$$2) N_{02} Hf \gg 1 \quad W_\lambda^2 = \pi^2 c \lambda^2 N_{02} Hf R_0 \quad (\text{оптически толстый слой}), \quad (7)$$

Таблица 4

[illegible]

где W_λ — эквивалентная ширина линии, в см;
 λ — длина волн, в см;
 N_{02} — число водородных атомов во втором квантовом состоянии в столбе атмосферы с сечением в 1 см^2 ;
 f — сила осциллятора;
 R_0 — центральная глубина линии.

Эти формулы позволяют определить нижнюю и верхнюю границы значения числа поглощающих атомов. Более вероятно, что первые члены серии Бальмера больше соответствуют схеме оптически толстого слоя, т. е. можно воспользоваться формулой (7), а высшие члены серии соответствуют схеме оптически тонкого слоя — формула (6). Таким образом, для главной серии Рундберга

$$\lg N_{02}H = 16,2 \quad (N_{02}Hf \ll 1)$$

В формулах (6) и (7) учитываются лишь доплер-эффект и затухание излучения. Эквивалентные ширины же сильных линий водорода зависят и от эффекта межмолекулярного электрического поля, т. е. в конечном итоге от плотности ионов. В этом случае [5] зависимость между полным поглощением и числом атомов, активно участвующих в поглощении, имеет вид

$$W\lambda^{5/2} = C R_0^{3/2} \frac{P_e}{T} N_{02} H, \quad (8)$$

где P_e — электронное давление;
 T — эффективная температура;
 C — известная постоянная.

По этой формуле, зная W_λ и R_0 , можно определить произведение $N_{02}H \frac{P_c}{T}$.

Результаты вычислений для линий H_γ и H_δ даются в табл. 6. Оценку $N_{02}H \frac{P_e}{T}$ можно произвести так же, используя формулу (3), т. е. графически определенному значению коэффициента Штарк-эффекта $C_0 = C \frac{P_e}{T} N_{02}H$ (см. табл. 5).

Данные табл. 5 показывают, что значения $\frac{P_e}{T} N_{O_2} H$, полученные по эквивалентной ширине и по графическому определенному значению постоянной Штарк-эффекта, хорошо сходятся между собой.

Для определения электронного давления мы использовали формулу, которая легко получается из теоретического выражения для крыльев сильных водородных линий [6].

$$P_e = R_\lambda \Delta \lambda^{5/2} \kappa_\lambda T_0 \left(1 + \frac{3}{2\beta_0} \right) \frac{1}{321C} \quad (9)$$

где R_λ — глубина линии в данной точке;
 $\Delta\lambda$ — расстояние от центра линии, в $\overset{\circ}{A}$ χ_λ — коэффициент непрерывного поглощения;
 T_0 — поверхностная температура;
 β_0 — величина, характеризующая потемнение диска к краю, значение которой находится либо экспериментально (коэффициент потемнения), либо теоретически по формуле:

Таблица 5

Фаза	Линия	$\lg N_{O_2} H \frac{P_e}{T}$		Пределы $\Delta\lambda$, в Å	$\lg P_e$		$\lg N_{O_2} H$	$\lg H$ (см)		N_e (электрон. плотн.) в $1/\text{см}^3$		
		по экв. ширине	по контуру, т.е. $C_0 = \frac{P_e}{N_{O_2} H \cdot T}$		по n_m	по контуру		по экв. ширине	по контуру	по n_m	по контуру	по кальции
$S_p B8V$	H_α	15,441	15,440	13—30	1,997	2,07	17,042	8,528	8,528	9,2·10 ¹³	—	—
Мак.	H_β	15,374	15,391	13—30	—	2,507	16,975	8,462	8,479	9,2·10 ¹⁴	—	—
$S_p F8IV$	H_γ	15,203	15,295	13—20	—	1,412	17,561	7,242	7,334	—	5,2·10 ¹³	2,56·10 ¹⁴
Мин.	H_δ	15,244	15,254	13—19	—	—	17,602	7,283	7,293	—	—	—

$$\beta_0 = \frac{3/8 \cdot \frac{c_2}{\lambda T}}{1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}} \cdot \frac{x}{x_\lambda}$$

где $\frac{x}{x_\lambda}$ — отношение коэффициента поглощения полного излучения к коэффициенту непрерывного поглощения. Это отношение в нашем случае близко к единице, поэтому в дальнейших расчетах мы его принимаем равным единице. Очевидно, что произведение $R_\lambda \Delta\lambda^{5/2}$ должно оставаться постоянным на протяжении всего крыла. В табл. 6 указываются пределы, для которых найдено среднее значение $R_\lambda \Delta\lambda^{5/2}$.

Значение коэффициента непрерывного поглощения для водородных атомов в данной длине волны было взято из работы Д. Гринштейна [13]. Таким образом по формуле (9) мы получили $P_e = 320$ бар для $T_0 = 1100^\circ\text{K}$. Электронное давление, определенное по формуле (9), сводится к тому месту атмосферы, где возникают крылья линий.

Оценка электронного давления для звезды $B 8 V$ может быть сделана непосредственно методом нахождения квантового числа по Инглиса—Теллера

$$\lg P_e = 1,19 + \lg T - 7,5 \lg n_m \quad (10)$$

Для $RU Per A$ $n_m = 17,4$ при фазе $0^\circ,4648$. Отсюда мы получаем $P_e = 99$ бар для значения эффективной температуры 12800°K (значение эффективной температуры взято из работы [5]).

Это значение электронного давления относится к тому месту атмосферы, где образуется граница серии. Среднее значение электронного давления, полученное двумя методами будет около $P_e = 209$ бар.

Для определения электронного давления спутника мы применили формулу (9) и формулу ионизации Саха [1]. Так как для звезды позднего спектрального класса и при меньшей дисперсии определение n_m невозможно, то применение формулы (10) к ней не имеет смысла.

В логарифмическом виде формула Саха записывается так:

$$\lg \frac{N_{r+1}}{N_r} = -z_r \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \lg T - \lg P_e - 0,48 + \lg \frac{2U_{r+1}}{U_r} \quad (11)$$

где z_r — потенциал ионизации в электрон-вольтах;

U_r — сумма по состояниям r раз ионизованного атома;

$\frac{N_{r+1}}{N_r}$ — отношение $r+1$ раз ионизованных атомов к числу r раз ионизованных атомов того же сорта. Это отношение определено по H и K линиям ионизованного, и по линии $\lambda 42274 \text{ Å}$ нейтрального кальция. Число нейтральных и ионизованных атомов кальция определено по формуле (6).

Эквивалентные ширины H и K линий освобождены от влияния самопоглощения, т.е. зная наблюдаемые значения $\lg \frac{W_k}{W_n} = 0,15$ и используя теоретическую кривую роста мы нашли исправленные величины W_k и W_n . Это дает нам право использовать формулу (6) для вычисления числа ионизованных атомов кальция. Кроме этого исправлена эквивалентная ширина H линии от влияния H_ϵ .

Таким образом, из исправленного значения полного поглощения получена $\lg \frac{N_1}{N_0} = 1,962$, откуда при помощи (11) мы нашли электронное давление $\lg P_e = 1,209$ и $2,372$ условно для температуры 5000°K и 6000°K , соответственно. После этого мы вычислили электронную концентрацию по известной формуле кинетической теории газов $P_e = n_e k T$.

Зная электронное давление и температуру можно вычислить плотность водородных атомов N_{02} . Для этого необходимо воспользоваться комбинацией формул ионизации и возбуждения [1], предполагая число протонов равным числу электронов. Последнее верно, так как водород весьма обилен. Тогда можно пользоваться формулой:

$$\lg N_{02} = 2 \lg P_e - 3,5 \lg T + \frac{5040}{T} \Delta\varepsilon + 16,942 \quad (12)$$

При этом возможные отклонения от термодинамического равновесия скажутся несильно, так как значение $\Delta\varepsilon = 3,38$ невелико.

Вычисления сделаны для $T = 12800^\circ\text{K}$ и $\lg P_e = 2,320$ и для $T = 6000^\circ\text{K}$ и $\lg P_e = 1,869$, откуда имеем $\lg N_{02} = 8,513$ и $\lg N_{02} = 10,319$, для главной звезды и спутника соответственно.

По известным значениям $\lg N_{02} H$ и $\lg N_{02}$ нашли высоту однородного слоя атмосферы. Результаты вычисления даются в табл. 6.

Заключение

Анализ полученных результатов еще раз подтверждает, что атмосфера главной звезды системы *RY Per* имеет нормальное строение. Для спутника же получаются противоречивые результаты.

С одной стороны, значения спектрофотометрического градиента и балмеровского скачка показывают, что спутник является гигантом, а с другой, значения электронной плотности и числа водородных атомов получаются очень большими (что имело бы место для звезды спектрального класса *B 8* главной последовательности). Это противоречие устраняется, если принять, что линии поглощения образуются в глубоких слоях атмосферы спутника, где электронная плотность и число водородных атомов достаточно велико. В этих слоях условия для возникновения линий такие же как и в атмосфере звезд спектрального класса *B 8*.

В заключение хочу выразить благодарность профессору В. А. Кра-ту за ценные советы и указания при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аллер Л. Астрофизика, ч. 1. ИЛ, 1955.
2. Быстрова Н. В. Изв. ГАО. XX, 5, 158, 1958.
3. Долидзе М. В. Бюлл. Абастуман. Астроф. obs., 1958, № 22.
4. Курс астрофизики и звездной астрономии, ч. 1, 1951.
5. Мустель Э. Р. Звездные атмосферы, 417, 1960.
6. Унзольд А. Физика звездных атмосфер. ИЛ, 1949.
7. А. Н., 176, 172, 1907; 183, 182, 1910; 231, 207, 1927; В. А. Н., 2, 231, 1924.
8. В. А. Н., 3, 135, 1926.
9. Barbier D., Chalange D. Ann. d'Ap. 4, 31, 1941.
10. Barbier D., Chalange D. Ann. d'Ap., 10, 195, 1957.
11. Contr. Medonol obs., № 129, 1946.
12. Contr. Princeton obs., № 3, 1913.
13. Greenstein J. Ap. J., 95, 161, 1942.
14. Pub. A. A. S., 10, 72, 1940; Harvard Bull., № 915, 1941.

С. М. Әзімов

RY Per системинин спектрофотометрик тэдгиги

ХҮЛАСА

Мәгаләдә тутулан—дәјишән *RY Per* системини тәшкил едән, спектрофизики тәбиәтинин спектрофотометрик өҗрәнилмәсиндән вә еләчә дәризә едән физики параметрларин мүфтәлиф үсулларла тәҗин едилмәсиндән бәһс олунур.

RY Per системинин һәр бир компоненти үчүн енержинин нисби фотометрик температур, Балмер серијасы сәрһәддиндә енержи сычратәҗин олунур.

Энержинин нисби пајланмасы графиндә (1-чи шәкил) кәсилмәз спектрин (44 4600—4200 Å-ә уҗун облаstda) тутулма фазасындан асылы олараг күчлү сурәтдә эәифләмәси *RY Per* системиндә газ ахыны-пејкин атмосферидир.

Спектрофотометрик градиентин вә енержи сычрајышынын тутулма фазасындан асылы олараг дәјишмәси (4-чү чәдвәл) исә мүшәһидә олунан шүаланманын улдуз фотосферинин мүхтәлиф гатларына мән-сус олмасы илә изаһ олунур. Тутулан—дәјишән *RY Per* системинин һәр бир компоненти үчүн электрон сыхлығы, электрон тәзјиги, удулма хәтләрини јарадан атомларын сајы вә бирчинсли удучу гатын һүндүр-лүҗү тәҗин едилир.

Бу системин икинчи улдузу үчүн (*F 8 IV*) алынан зиддијјәтли нәтичәларин арадан галдырылмасы үчүн, аномал атмосфера малик олан бу нөв нәһәнк улдузларда, удулма хәтләринин бөјүк электрон сыхлығы-на малик олан гатларда јарандыгы фәрз едилир, башга сөзлә десәк, удулма хәтләри пејк атмосферинин фотосфера јахын елә гатларында јараныр ки, бу гатларда удулма хәтләринин јаранмасы үчүн лазым олан физики шәраит *B 8* типли улдуз атмосфериндә мөвчуд олан физики шәраитә јахындыр.

М. Б. КЕРИМБЕКОВ

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ДРОЖАНИЯ СОЛНЕЧНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Реальные флуктуационные процессы очень часто с достаточной степенью точности можно описывать с помощью стационарных случайных функций и использовать корреляционный анализ для определения их скрытых параметров, которые невозможно определить графически [3, 4, 5, 6].

Например, в случае процесса дрожания, используя последовательность $\xi(t)$ отклонений детали от среднего положения, можно построить корреляционную функцию:

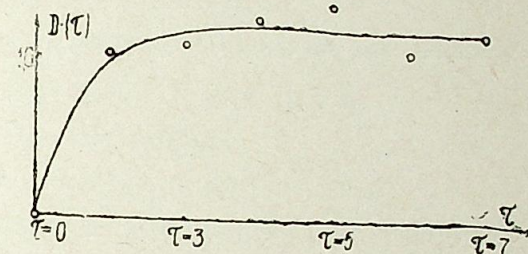


Рис. 1

$$B\xi(\tau) = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)} \quad (1)$$

и с ее помощью исследовать скрытые параметры, например, периоды, время корреляции и т. д.

Однако процесс дрожания может быть и не стационарным. В таком случае для описания этого процесса мы используем **структурные функции**, введенные впервые в работах Колмогорова [1, 2]. Основная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в следующем.

В случае, когда $\xi(t)$ представляет собой нестационарную случайную функцию, т. е. когда $\overline{\xi(t)}$ меняется со временем, можно вместо $\xi(t)$ рассматривать разность:

$$F\tau = \xi(t + \tau) - \xi(t)$$

При не слишком большом τ медленные изменения функции $\xi(t)$ не повлияют на значение этой разности и она может оказаться **стационарной** функцией времени. Подставляя значение функции $F\tau$ вместо $\xi(t)$ в равенстве (1) и делая алгебраические преобразования, получим выражение для структурной функции

М. Б. КЕРИМБЕКОВ

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ДРОЖАНИЯ СОЛНЕЧНОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Реальные флуктуационные процессы очень часто с достаточной степенью точности можно описывать с помощью стационарных случайных функций и использовать корреляционный анализ для определения их скрытых параметров, которые невозможно определить графически [3, 4, 5, 6].

Например, в случае процесса дрожания, используя последовательность $\xi(t)$ отклонений детали от среднего положения, можно построить корреляционную функцию:

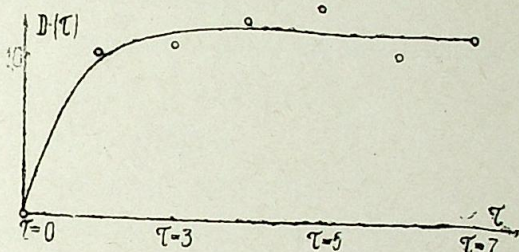


Рис. 1

$$B\xi(\tau) = \overline{\xi(t) \cdot \xi(t + \tau)} \quad (1)$$

и с ее помощью исследовать скрытые параметры, например, периоды, время корреляции и т. д.

Однако процесс дрожания может быть и не стационарным. В таком случае для описания этого процесса мы используем **структурные функции**, введенные впервые в работах Колмогорова [1, 2]. Основная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в следующем.

В случае, когда $\xi(t)$ представляет собой нестационарную случайную функцию, т. е. когда $\xi(t)$ меняется со временем, можно вместо $\xi(t)$ рассматривать разность:

$$F\tau = \xi(t + \tau) - \xi(t)$$

При не слишком большом τ медленные изменения функции $\xi(t)$ не повлияют на значение этой разности и она может оказаться **стационарной** функцией времени. Подставляя значение функции $F\tau$ вместо $\xi(t)$ в равенстве (1) и делая алгебраические преобразования, получим выражение для структурной функции.

$$D\xi(\tau) = |\xi(t+\tau) - \xi(t)|^2$$

Приступая к изучению флуктуационного процесса, в стационарно-структурную функцию (а не корреляционную).

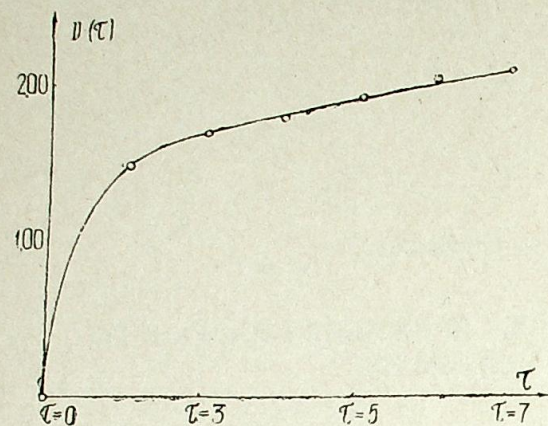


Рис. 2

Практическое построение структурной функции к тому же более надежно, поскольку на значение $L\xi(\tau)$ не оказывают влияния ошибки в определении среднего значения $\xi(t)$. Если же исследуемый процесс окажется стационарным, то можно легко перейти от структурных функций к корреляционным. (Если процесс стационарен то: $\xi(t) = \xi(t+\tau)$.) На основе свойств корреляционной функции:

$$|\xi(t)|^2 = |\xi(t+\tau)|^2 = B\xi(0)$$

Подставляя эти значения в равенство 1) получим:

$$L\xi(\tau) = |\xi(t+\tau) - \xi(t)|^2 = |\xi(t+\tau)|^2 + |\xi(t)|^2 + |\xi(t)|^2 - 2\xi(t+\tau) \cdot \xi(t),$$

т. е.

$$L\xi(\tau) = 2[B\xi(0) - B\xi(\tau)]$$

В том случае когда $B\xi(\infty) = 0$ (а на практике это условие всегда выполняется):

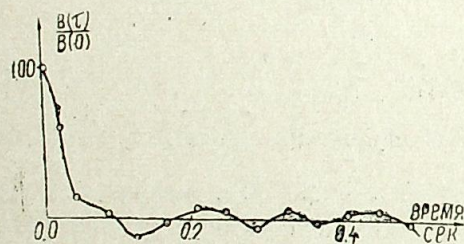


Рис. 3

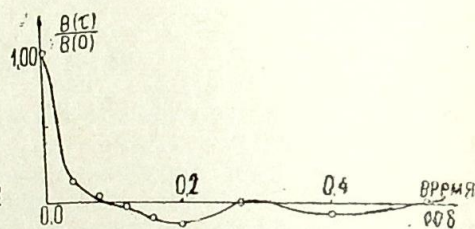


Рис. 4

$D\xi(\infty) = 2B\xi(0)$. Указанное соотношение (постоянство $D\xi(\tau)$ при больших значениях τ) позволяет выразить корреляционные функции через структурные функции:

$$B\xi(\tau) = \frac{1}{2} D\xi(\infty) - \frac{1}{2} D\xi(\tau)$$

Приведем графики структурных функций (рис. 2 и 3), вычисленные нами для двух типичных случаев дрожания изображения.

Для построения структурных функций была использована последовательность величин $\xi(t)$ на 300 кадрах. Интервал времени между ними — 0,04 сек.

Как видно из рис. 1 и 2, при больших значениях аргумента τ структурная функция $L\xi(t)$ стремится к постоянной величине. Используя это условие, можно легко перейти от структурных функций к корреляционным.

Приводим графики нормированных корреляционных функций $\frac{B\xi(\tau)}{B\xi(0)}$ (рис. 3 и 4), эти графики указывают на следующие особенности процесса дрожания:

- 1) время корреляции на обеих кривых около 0,08 сек что означает отсутствие какой-либо связи между отдельными отклонениями, происходящими через указанный интервал времени;
- 2) наличие периодической компоненты дрожания не сказывается на результатах;

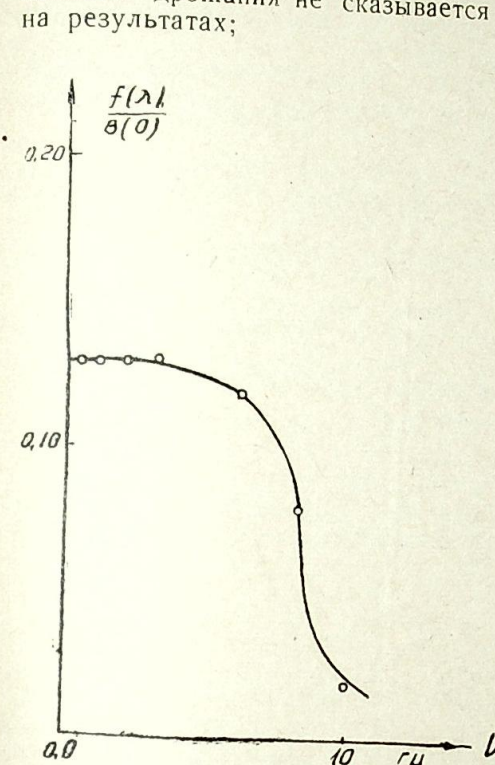


Рис. 5

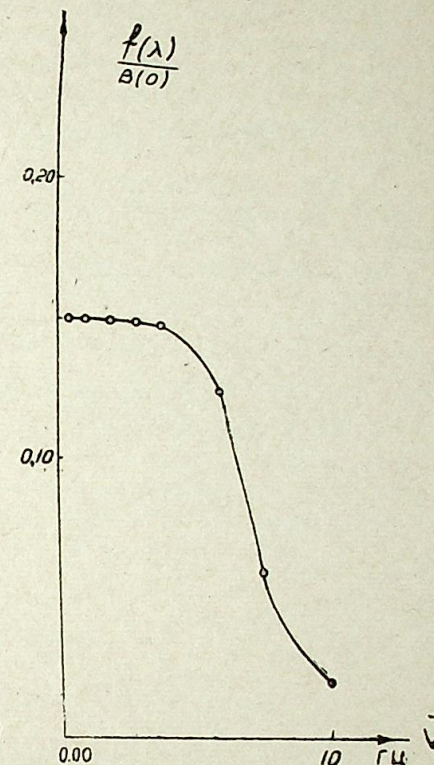


Рис. 6

- 3) спектральная плотность дрожания $\frac{f(\lambda)}{B(0)}$ уменьшается при увеличении частоты ν (см. рис. 5 и 6). Последнее говорит в пользу гипотезы о распаде крупных неоднородностей на мелкие элементы.

В заключение выражаем благодарность В. А. Крату за ценные советы при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. ДАН СССР, 30, 299, 1941.
2. Колмогоров А. Н. ДАН СССР, 32, 19, 1941.
3. Обухов А. М. Труды Геофизического института № 24 (151) 1945.
4. Обухов А. М. Укр. матем. журн., 6, № 1, 1954.

М. Б. Кәримбәјов

Күнәш хәјалы титрәмәсинин тәдгиги һаггында

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә мұәллиф Күнәш хәјалынын титрәмәси просесини тәдгиг етмәк үчүн структур анализ методу тәтбиг едир. Бу үсул илк дәфә А. Н. Колмогоров тәрәфиндән [6—7] тәтбиг едилмишдир.

Мұәллиф күнәш хәјалы титрәмәсинин мұшаһидәсини Пулководакы үфги Күнәш телескопунда апармышдыр.

Јухарыда көстәрилән методун тәтбиг едилмәси титрәмә просесинин типик һалы үчүн ашағыдакы әсас нәтичәләри чыхармаға имкан верди:

1. Алынән әјриләрдә коррелјасија вахты 0,08 санијәјә јахындыр. Бу да ајры-ајры кәнара чыхмалар арасында әлағә олмадығыны көстәрир.

2. Титрәмәнин периодик компонентинин олмасы нәтичәјә тә'сир етмир.

3. Титрәмәнин спектрал сыхлығы $\frac{f(\lambda)}{B(0)}$, γ —тезлији артанда азалыр.

Бу, сонунчу ири гејри-бирчинслиликләрин хырда элементләрә бөлүнмәси һаггындакы фәрзијјәнин хејринәдир.

А. Б. ЦАТУРЯНЦ, А. Р. МАМЕДОВ

КОЭФФИЦИЕНТ ДРОССЕЛИРОВАНИЯ МЕТАНА

Адиабатическое расширение газа приводит, как известно, к снижению температуры его. Примерами процессов расширения газов, близкого подходящих к адиабатическому, являются расширение газа у штуцеров скважин, задвижек и вентилях, призабойной зоны скважины, различных узлов установок низкотемпературной сепарации и т. д.

Величина снижения температуры за счет внезапного расширения газа определяется перепадом давления и коэффициентом дросселирования, зависящим для данного газа от давления и температуры.

Дифференциальный коэффициент дросселирования, представляющий собой отношение бесконечно малого изменения температуры к изменению давления, может быть определен как из опытов по определению конечных изменений температуры (интегральный эффект), так и из известного в термодинамике [2, 3] соотношения:

$$\epsilon = \frac{dT}{dP} = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - V}{C_p}, \quad (1)$$

где P , T , V , C_p —давление, температура, объем, теплоемкость системы, соответственно.

Для углеводородных газов экспериментальные данные о коэффициенте дросселирования весьма скудны и относятся к сравнительно невысоким давлениям. Если бы было известно точное уравнение состояния газов, то вычисление термодинамических свойств его, в том числе и коэффициента дросселирования (по уравнению 1), не представляло бы никакого труда. Однако вычисление коэффициента дросселирования даже по уравнению Битти—Бриджмена, считающегося одним из самых точных уравнений состояния, не дает удовлетворительных результатов—полученные расчетом значения оказываются сильно заниженными [5]. Это является результатом, того, что каждое из известных уравнений состояния справедливо лишь для определенного интервала давления и температуры, за пределами которого оно может привести к значительным ошибкам. Уравнение Битти—Бриджмена, например, дает надежные результаты при давлениях всего до 100 атм [3]. Совершенно неудовлетворительно передает оно и теплоемкость при постоянном давлении, необходимую для расчетов коэффициента дросселирования по уравнению (1).

По этой причине для определения термодинамических параметров вместо уравнений состояния применяют PVT -соотношения, найденные экспериментальным путем.

Из данных, полученных расчетным путем, наиболее полными являются результаты работы Г. Т. Левченко [4], охватывающие область давлений $0 \div 1000 \text{ атм}$ и температур от -70° до $+200^\circ\text{C}$. Для получения данных о дифференциальном дроссель-эффекте метана Г. Т. Левченко воспользовался выражением (1) и экспериментальными данными [9, 10]. Им по PVT , полученными Квальнесом, Гедди и Мичельсом [9, 10]. Им по тем же данным вычислены отсутствующие в литературе и необходимые при расчете по уравнению (1) значения теплоемкости метана (C_p) при высоких давлениях.

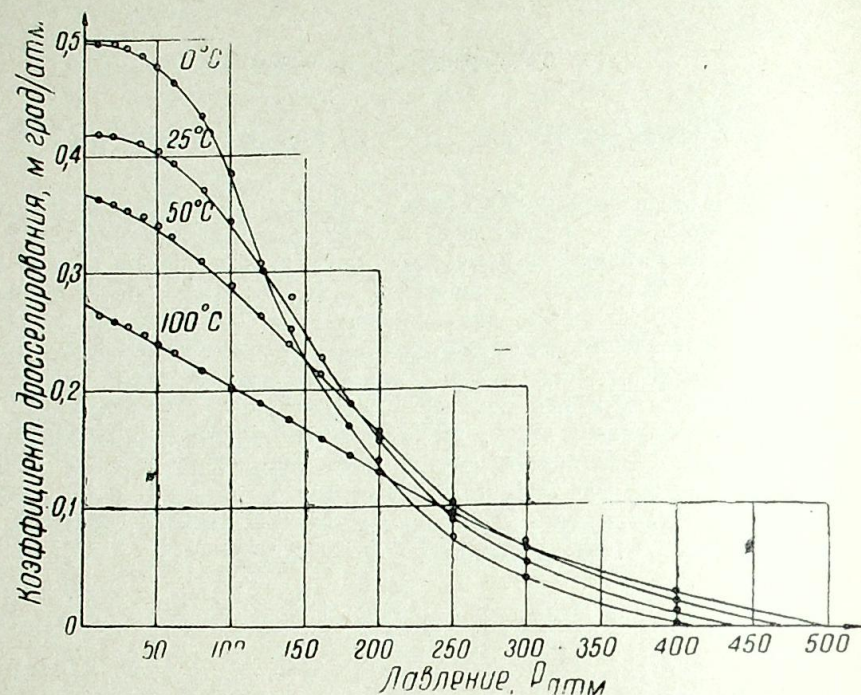


Рис. 1

Г. Т. Левченко приводит сравнение полученных им расчетных данных с экспериментальными данными Буденгольца, Седжа и Леси [8] для температур 25°C , 50°C , 100°C и давлений до 100 атм . Из сравнения видно, что совпадение сопоставляемых данных вначале хорошее, однако при давлении уже 100 атм намечается некоторое расхождение при всех температурах. Отсутствие экспериментальных данных при более высоких давлениях не дает возможности проследить за точностью данных автора в количественном отношении при более высоких давлениях.

Однако есть основание полагать, что с увеличением давления отмеченное выше расхождение возрастает и при высоких давлениях приводит к искажению зависимости дифференциального дроссель-эффекта от давления и температуры уже и в качественном отношении. Известно, что с увеличением давления и температуры коэффициент дросселирования газов уменьшается, становится равным нулю при определенных значениях давления и температуры (точка инверсии); затем при-

нимает отрицательное значение, означающее нагревание газа при его дросселировании; из анализа зависимости коэффициента дросселирования от параметров газа видно [3, рис. 24], что с понижением температуры инверсионная точка смещается в сторону высоких давлений, т. е. температура инверсии уменьшается с увеличением давления.

Из анализа же данных Г. Т. Левченко, представленных графически на рис. 1 получается, что давление отвечающее нулевому значению коэффициента дросселирования (инверсионная точка), с увеличением температуры смещается в сторону больших давлений, что противоречит вышеизложенному о характере инверсионной кривой.

Качественная неточность данных Г. Т. Левченко при высоких давлениях, по-видимому, является результатом количественных ошибок, что в свою очередь, возможно, является как следствием графического дифференцирования для нахождения производной $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ в уравнении

(1), так и качества принятых исходных данных PVT .

Общепризнанными, как наиболее полные и точные, являются экспериментальные данные, известные в литературе в виде графиков Брауна, отображающих зависимость коэффициентов сжимаемости газов от приведенного давления для различных значений приведенной температуры [7].

В работе [6] нами показано, что значительная, представляющая практический интерес, область графиков Брауна с большой точностью может быть описана простыми эмпирическими зависимостями.

Для области приведенных температур $\tau = 1,3 \div 1,8$ получены следующие эмпирические зависимости:

$$z = 1 - \pi \cdot 10^{0,735 - 1,195\tau} \quad (2)$$

для приведенных давлений $\pi = 0 \div 2,5$;

$$z = 1 - (16,679 - 4,68\tau - \pi) \cdot 10^{-0,438 - 0,593\tau} \quad (3)$$

для приведенных давлений $\pi > 4,5$.

Из уравнения состояния

$$PV = zRT \quad (4)$$

при постоянном давлении получаем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{zR}{P} + \frac{RT}{P} \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в (1), получаем:

$$\mu = \frac{RT^2}{C_p P} \left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p \quad (6)$$

Из выражений (2) и (3) определим $\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p$ для интервала приведен-

ных температур $\tau = 1,2 \div 1,8$ и двух указанных выше интервалов приведенных давлений.

Получаем:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p = \frac{2,75 \cdot P \cdot 10^{0,735 - 1,195\tau}}{P_{кр} \cdot T_{кр}} \quad (7)$$

для приведенных давлений $\pi = 0 \div 2,5$.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial T}\right)_p = \frac{10^{0,438-0,593\tau} (27,45-6,39\tau-1,365\pi)}{T_{кр}} \quad (8)$$

для приведенных давлений $\pi > 4,5$.

Подставляя выражения (7) и (8) в выражение (6), получаем зависимость коэффициентов дросселирования от P и T для указанных областей давления, соответственно;

$$\lambda = \frac{2,75 \cdot RT^2 \cdot 10^{0,735-1,195\tau}}{C_p \cdot T_{кр} \cdot P_{кр}} \quad (9)$$

$$\mu = \frac{RT^2 \cdot 10^{-0,438-0,593\tau} (27,45-6,39\tau-1,365\pi)}{C_p \cdot P \cdot T_{кр}} \quad (10)$$

Выражения (9) и (10), содержащие теплоемкость при постоянном давлении, газовую постоянную и критические параметры газа, могут быть использованы для подсчета коэффициента дросселирования любого газа. Универсальность полученных зависимостей является результатом применения именно графиков Брауна, построенных на основании закона соответственных состояний в безразмерных параметрах π и τ и являющихся универсальными для определения коэффициента сжимаемости газов.

С помощью уравнений (9) и (10) нами были рассчитаны коэффициенты дросселирования метана для давлений до 400 атм при температурах 0°, 25°, 50°, 70°, 100°, 150°, 200°C. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

Т-ра, °C	0	25	50	70	100	150	200
Дав- ление, атм							
10	0,570	0,423	0,375	0,298	0,228	1,143	0,073
20	0,550	0,457	0,371	0,294	0,226	0,143	0,073
30	0,5327	0,447	0,359	0,288	0,221	0,143	0,073
40	0,510	0,433	0,351	0,282	0,219	0,140	0,072
50	0,49	0,420	0,340	0,276	0,215	0,138	0,0716
60	0,462	0,407	0,330	0,274	0,210	0,137	0,0716
80	0,405	0,384	0,320	0,263	0,264	0,133	0,0703
100	0,368	0,363	0,306	0,253	0,199	0,131	0,0694
120	0,350	0,342	0,295	0,245	0,193	0,128	0,0684
200	0,172	0,161	0,165	0,157	0,143	0,103	0,066
250	0,124	0,114	0,109	0,107	0,094	0,064	0,0378
300	0,0932	0,084	0,0757	0,0711	0,063	0,040	0,0200
350	0,070	0,0615	0,0535	0,048	0,041	0,022	0,0074
400	0,0515	0,044	0,0364	0,0315	0,0248	0,009	—0,0002

Отметим, что приведенные температуры $\tau=1,3-1,8$ означают для метана предел температур от -25° до +70°C, т. е. полученные коэффициенты дросселирования метана являются достоверными только в этой области температур. За пределами указанной области рассчитанные значения коэффициентов дросселирования могут употребляться лишь для суждения о качественной стороне зависимости коэффициентов дросселирования температур.

Подставляя в уравнение (9) критические параметры метана— $P_{кр}=45,8$ атм, $T_{кр}=190,5^\circ\text{K}$, универсальную газовую постоянную $R=1,987$

$\frac{\text{ккал}}{\text{кг. моль}^\circ\text{C}}$ для каждой из перечисленных выше значений температур получаем выражение вида:

$$\mu = \frac{A}{C_p} \quad (11)$$

Аналогичным образом из выражения (10) получаем:

$$\mu = \frac{B-C \cdot P}{C_p \cdot P}, \quad (12)$$

где A , B и C —коэффициенты, зависящие от температуры.

Для определения коэффициентов дросселирования по полученным выражениям необходимо иметь зависимость теплоемкости метана при постоянном давлении C_p от давления и температуры. Нами были использованы данные по теплоемкости метана, полученные расчетным путем Г. Т. Левченко [4] для широкого интервала температур (до 200°C) и давлений (до 1000 атм).

Указанные данные теплоемкости можно представить приближенно в виде следующих зависимостей:

$$C_p = C_{p_0} + \alpha P, \quad (13)$$

для давлений до 200 атм;

$$C_p = C_{p_{200}} - \beta(P-200), \quad (14)$$

для давлений свыше 200 атм

где α , β —коэффициенты, зависящие от температуры;

C_{p_0} —теплоемкость при давлении 1 атм;

$C_{p_{200}}$ —теплоемкость при давлении 200 атм.

В табл. 2 приводятся полученные нами эмпирические выражения для определения коэффициентов уравнений (11), (12), (13), (14)— A , B , C , α , β , C_{p_0} , $C_{p_{200}}$, зависящих от температуры, а также значения их, подсчитанные для ряда значений температуры.

Таблица 2

Температура, °C	0	25	50	70	100	150	200
Коэффициенты							
$A = 10^{0,7-0,00365 t}$	5,01	4,06	3,30	2,78	2,16	1,42	0,93
$B = 747-1,98 t$	747	697,5	648,0	608,4	549,0	450	351
$C = 1,237-0,00153 t$	1,237	1,199	1,161	1,130	1,084	1,008	0,931
$\alpha = \frac{0,159}{t^{0,528}}$	(0,047)*	0,03	0,02	0,017	1,014	—	—
$\beta = \frac{3,329}{t^{1,857}}$	(0,0103)*	0,00845	0,00233	0,00125	0,0006447	—	—
$C_{p_0} = \frac{100}{12,5-0,017 t}$	8,00	8,30	8,60	8,85	9,28	—	—
$C_{p_{200}} = \frac{20,77}{t^{0,116}}$	(14,45)*	14,3	13,2	12,7	12,2	—	—

* экстраполированные значения

Окончательно получаем следующие зависимости коэффициента дросселирования метана от температуры и давления.

1. Для температур до +70°C и давлений до 120 атм (τ —до 1,8; π —до 2,5)

$$\mu = \frac{10^{0,7-0,00365t}}{12,5-0,017t} + \frac{0,159}{t^{0,528}} \cdot P \quad (15)$$

2. Для температур до + 70°C и давлений выше 200 атм τ —до 1,8; $\pi > 4,5$)

$$\mu = \frac{747-1,98t-(1,237-0,00153t)P}{\left[\frac{20,77}{t^{0,116}} - \frac{3,329}{t^{1,855}} (P-200) \right] \cdot P} \quad (16)$$

Выражения (15), (16) весьма удовлетворительно передают данные о коэффициенте дросселирования метана в зависимости от давления и температуры, представленные в табл. 1.

Зависимость коэффициента дросселирования метана от давления и температуры в соответствии с выражениями (15), (16) графически представлена на рис. 2.

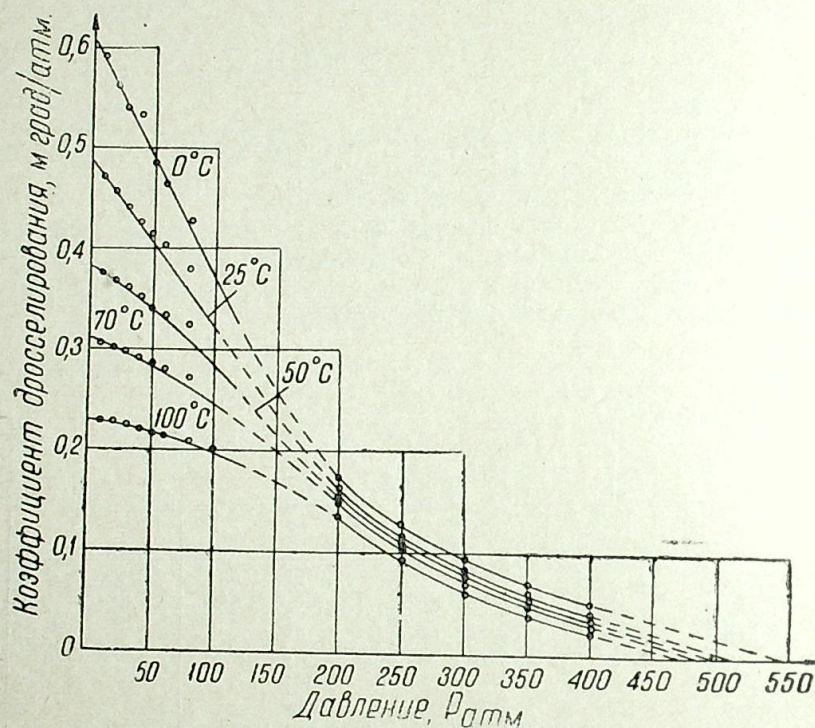


Рис. 2

Из рис. 1, содержащего данные Г. Т. Левченко, видно, что качественные (а следовательно и количественные) ошибки начинаются уже при сравнительно низких давлениях. Например, изотерма 25°C пересекает изотерму 0°C при давлении 125 атм. Это значит, что коэффициент дросселирования при давлениях выше 125 атм при 0°C меньше, чем при 25°C. Аналогичную картину получаем при сравнении остальных изотерм рис. 1 друг с другом, а начиная с 250—300 атм. Данные Г. Т. Левченко показывают, что коэффициент дросселирования увеличивается с ростом температуры уже на всем взятом им интервале изменения температур, чего быть не может. В результате, как указано выше, по данным Г. Т. Левченко давление нулевого значе-

ния коэффициента дросселирования—точка инверсии—с ростом температуры увеличивается (рис. 1), что также неверно.

В отличие от данных Г. Т. Левченко полученные нами результаты показывают, что, как и следовало ожидать, давление точек инверсии с уменьшением температуры увеличивается, что наглядно видно из рис. 2.

В табл. 3 приводятся ряд примеров для количественной оценки полученных зависимостей коэффициента дросселирования от давления и температуры, для чего дается сравнение подсчитанных по выражениям (15), (16) и фактических значений коэффициентов дросселирования и перепадов температуры. Фактические данные заимствованные из работы [1] и получены на промышленной установке низкотемпературной сепарации.

Таблица 3

№ п/п	Данные опыта						Результаты подсчета		
	$P_{нач}, атм$	$P_{кон}, атм$	$t_{нач}, ^\circ C$	$t_{кон}, ^\circ C$	$\Delta t, ^\circ C$	$\Delta P, атм$	$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta P}$	$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta P}$	$t_{кон}, ^\circ C$
1	116	40	30	+2	28	76	0,369	0,3692	+1,94
2	130	44	32	+3	29	86	0,337	0,367	+0,6
3	150	43	33	-6	39	113	0,350	0,377	42,6* —9,6*

* При температурах ниже 0°C в интервале давления от 50 до 33 атм производилась экстраполяция.

Как видно из табл. 3, опытные и подсчитанные перепады температуры не намного отличаются друг от друга.

Несколько меньше значения опытных перепадов температуры и соответствующих коэффициентов дросселирования по сравнению с подсчитанными вполне закономерны и являются результатом влияния более высокой температуры окружающей среды на конечную температуру дросселируемого газа.

Отсутствие экспериментальных данных при более высоких давлениях исключает пока возможности полной количественной оценки полученных зависимостей.

Однако для косвенной оценки их в области высоких давлений представляют интерес следующие данные: в начале разработки горизонта VII—VIIа Карадага, при пластовом давлении 350—400 атм перепады давления на забое скважин составляли 30—40 атм; при умеренных давлениях, до 100—120 атм, когда коэффициент дросселирования равен примерно 0,3° C/атм, указанные перепады давления дали бы заметное изменение температуры; многократные же замеры температуры забоя работающих скважин в начале разработки VII-х горизонтов Карадага показывали температуру, практически равную температуре простаивающих скважин на той же глубине; это указывало на то, что в области высоких давлений коэффициент дросселирования газа становится незначительным. Как видно из табл. 1, при температуре 70°C и давлении 400 атм коэффициент дросселирования метана равен 0,0315° C/атм, т. е. при перепаде 30—40 атм изменение температуры при дросселировании газа на забое скважин составит всего лишь 0,9—1,2° C, что равно точности применяющихся в настоящее время максимальных термометров.

Приведенный пример, таким образом, косвенно характеризует полученные данные, подтверждая порядок величины их в области высоких давлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А. И. Низкотемпературная сепарация природного газа. Гостоптехиздат, 1961.
2. Герш С. Я. Глубокое охлаждение, ч. 1. Госэнергоиздат, 1957.
3. Карапетянц М. Х. Химическая термодинамика. Госхимиздат, 1953.
4. Левченко Г. Т. Термодинамические свойства сжатого метана. „Журн. физ. хим.“ 1944, т. XVIII, вып. 10.
5. Гиличеев М. Д. Физико-химические свойства индивидуальных углеводородов, вып. 11. Гостоптехиздат, 1947.
6. Сатурянц А. Б. Труды АЗНИИ, вып. IX, 1960.
7. Brown D. Am. gas Journal. Gas Handbook Issul. September, 15, 1957.
8. Budenholzer, Sage a. Laccy. Ind. Eng. Chem., 31, 369, 1939.
9. Kvalnesa a. Wadby. Journ. Am. Chem. Sos., 53, 395, 1931.
10. Michels a. Nederbragt. Physica, 3, 569, 1936.

А. Б. Сатурянс, А. Р. Маммэдов

Метанын дросселләмэ эмсалы

ХҮЛАСЭ

Карбоһидрокен газлары, о чүмләдән метан үчүн дросселләмэ эмсалы хаггында тэчрүби гијмэтләр нисбәтән алчаг тэзјигләрде олуб, олдугча чүз'идир.

Дросселләмэнин дифференциал эмсалы температурун чох кичик һәдд дахилиндә дәјишмәсинин бу чүр тэзјиг дәјишмәсинә олан нисбәтиндән ибарәт олуб, термодинамикада мә'лум олан (1) асылылыгындан тә'јин олунур.

Әкәр дәгиг һал тәнлији мә'лум олсајды, о заман дросселләмэ эмсалынын (1) ифадәси үзрә һесаблинамасы һеч бир чәтинлик төрәтмәзди.

Гејд етмәк лазымдыр ки, һәтта дәгиг бир һал тәнлији киими сајылан Битти-Бричмен тәнлији кифајәтләндиричи нәтичәләр вермир. Бу сәбәбдән дә термодинамик параметрләри, хусуси һалда дросселләмэ эмсалыны тә'јин етмәк үчүн тэчрүби үсулла тапылан *PVT* мүнәсибәтләриндән истифадә едирләр.

Г. Т. Левченконун метан үчүн һесабладығы дросселләмэ эмсалынын гијмәтләриндән мә'лум олур ки, температур јүксәк олдугча инверсия нөгтәсинин (дросселләмэ эмсалынын мүәјјән тэзјиг вә температурда сыфра бәрәбәр олан гијмәти бу гијмәтдән јухары газ кенишләндикдә гызыр ашағы гијмәтдә исә сојујур; тэзјиги јүксәк олур, бу исә дүзкүн дејилдир.

Мәгаләдә биз метанын дифференциал дросселләмэ эмсалынын температур вә тэзјигдән олан асылылыгынын емпирик ифадәсини тә'јин етмәкдән өтрү (1) тәнлијиндән вә мә'лум олан мәшһур Браун графикинин көмәји илә газларын сыхылма эмсалынын чеврилмиш тэзјиг вә температурдан олан асылылыглары үчүн әввәлдә тапдығымыз емпирик ифадәләрдән истифадә едәрәк, нәтичәдә аналитик үсулла метанын дифференциал дросселләмэ эмсалынын тэзјиг вә температурдан асылы олан емпирик ифадәләрини вермишик.

МҮНДӘРИЧАТ

Ә. С. Чәфәров. Функцијаларын хәтти интеграл операторларла јахынлашмасынын тәртиби хаггында	3
А. Ч. һачыјев, Ә. С. Чәфәров, Л. Г. Лабскер. Функцијаларын бәзи хәтти операторларла јахынлашмасынын асимптотик гијмәти хаггында	19
М. һ. Чавадов. Кичик параметрдән асылы дөрддәрәчәли бир тәнлик үчүн гојулмуш гарышыг мәсәләнин арашдырылмасы	29
Г. К. Намазов. Ики тәртибли кәсилән эмсаллы параболик тәнликләр нәзәријәсинә даир	37
Ф. һ. Нәсиров. Риман-Лаувилл мә'нада кәсир төрәмәси олан функцијаларын ән јахшы јахынлашмасынын тәртиби хаггында	51
Л. М. Иманов, Ј. М. Аббасов. Пропил спиртләриндә диелектрик релаксијасы	59
М. И. Иглисин, А. М. Пашајев. Јарымкечиричиләрдә актив мугавимәтин јүксәк тезликдә контактсыз үсулла өлчүлмәси	69
Б. М. Әскәров. Квант механикасында енержи селинин сыхлыгы үчүн ифадә	77
З. А. Әлијарова, Ш. М. Әләкбәрова, И. Х. Келлер. Селен дүзләндиричиләриндә әкс чәрәјанын температур асылылыгынын тәдгиги	81
М. Ј. Бәкиров, Р. Б. Гасымов. Чивә-селен тәбәғәнин селен фотолементләри	89
Р. И. Кажлајева, Ә. А. Гулијев, Н. И. Ибраһимов. Поликристал теллурун өзүнә диффузијасынын тәдгиги	95
М. М. Рәсулов. Синхрон кенераторундан гидаланмыш асинхрон електрик мугәррикинин тормозланмасы просесинин һесаблинамасына даир	99
С. һ. Мәммәдов. 1960-чы ил 8 сентјабр зәиф хромосфер алышмасынын <i>H</i> вә <i>K</i> Са II хәтләри	111
С. М. Әзимов. <i>Ry Per</i> системинин спектрофотометрик тәдгиги	119
М. Б. Кәримбәјов. Күнәш хәјалы титрәмәсинин тәдгиги хаггында	133
А. Б. Сатурянс, А. Р. Мәммәдов. Метанын дросселләмэ эмсалы	137

СОДЕРЖАНИЕ

А. С. Джафаров. О порядке приближения функций семейством линейных интегральных операторов	3
А. Д. Гаджиев, А. С. Джафаров, Л. Г. Лабскер. Об асимптотическом значении приближения функций некоторым семейством линейных операторов	19
М. Г. Джавадов. Исследование смешанной задачи для одного уравнения четвертого порядка с малым параметром	29
Г. К. Намазов. К теории параболических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами	37
Ф. Г. Насибов. О порядке наилучших приближений функций, имеющих производную в смысле Римана-Лиувилля	51
Л. М. Иманов, Я. М. Аббасов. Диэлектрическая релаксация в пропиловых спиртах	59
М. И. Иглицын, А. М. Пашаев. Бесконтактное измерение активного сопротивления полупроводников на высокой частоте	69
Б. М. Аскеров. Квантовомеханическое выражение плотности потока энергии	77
З. А. Алиева, Ш. М. Алекперова, И. Х. Геллер. Исследование температурной зависимости обратного сопротивления в селеновых выпрямителях	81
М. Я. Бакиров, Р. Б. Гасымов. Селеновые фотоэлементы со слоем селенида ртути	89
Р. И. Кажлаева, А. А. Кулиев, Н. И. Ибрагимов. Самодиффузия в поликристаллическом теллуре	95
М. М. Расулов. К расчету процесса торможения асинхронного электродвигателя при питании от синхронного генератора соизмеримой мощности	99
С. Г. Мамедов. Линии Н и К Са II слабой хромосферной вспышки 8 сентября 1960 года	111
С. М. Азимов. Спектрофотометрическое исследование	119
М. Б. Керимбеков. Об исследованиях дрожания солнечного изобращения	133
А. Б. Цатурянц, А. Р. Мамедов. Коэффициент дросселирования метана	137