

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕЛМЛƏР АКАДЕМИЈАСЫНЫН

ХƏБƏРЛƏРИ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ВƏ ТЕХНИКА ЕЛМЛƏРИ СЕРИЈАСЫ



СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

2

1962

АЗƏРБАЙҶАН ССР ЕА НƏШРИЈЈАТЫ
ИЗДАТЕЛЬСТВО АН АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Бақы — Баку

Г. К. НАМАЗОВ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = f(x) \quad (1)$$

на отрезке $[a, b]$, коэффициенты и правая часть которого достаточно гладкие функции на этом отрезке всюду, кроме точки $x = c$ ($a < c < b$), где они и их производные терпят разрывы первого рода. Пусть $p(x) \geq p_0 > 0$ и $r(x) \leq r_0 < 0$.

Построим последовательность уравнений с гладкими коэффициентами, которые вне окрестности $(c-h, c+h)$ равномерно сходятся к соответствующим коэффициентам уравнения (1). Мы покажем, что в зависимости от вида построенных последовательностей уравнений решения допредельных краевых задач y_h с граничными условиями

$$y_h(a) = 0, \quad y_h(b) = 0 \quad (2)_h$$

стремится при $h \rightarrow 0$ к некоторой предельной функции $y(x)$, которая является решением уравнения (1) внутри $d_1 = [a, c]$ и $d_2 = [c, b]$ при граничных условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (2)$$

и с различными условиями в точке $x = c$.

Так, например, имеют место следующие утверждения:

1) Решения y_h уравнений

$$P_h \frac{d^2y_h}{dx^2} + q_h \frac{dy_h}{dx} + r_h y_h = f_h,$$

удовлетворяющие граничным условиям $(2)_h$, где гладкие функции p_h , q_h , r_h и f_h равномерно по h ограничены на отрезке $[a, b]$ и равномерно сходятся при $h \rightarrow 0$ к соответствующим функциям p , q , r и f вне окрестности $(c-h, c+h)$, стремятся к некоторой функции $y(x)$, удовлетворяющей уравнению (1) на d_1 и d_2 , граничным условиям (2) и условиям сопряжения вида

$$[y]_c = 0, \quad \left[\frac{dy}{dx} \right]_c = 0$$

17 39230
Центральная научная
библиотека
Академии наук Азербайджанской ССР

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: З. И. Халилов (редактор), Г. Б. Абдуллаев, С. А. Алескеров, Ч. М. Джуварлы, И. И. Ибрагимов, С. М. Кулиев (зам. редактора), Г. Ф. Султанов, А. А. Эфендизаде, А. М. Мамедов (ответственный секретарь).

Адрес: г. Баку, Коммунистическая, 10. Редакция «Известий Академии наук Азербайджанской ССР (серия физико-математических и технических наук)».

Здесь и в дальнейшем всюду через $[\varphi]_c$ обозначаем скачок функции $\varphi(x)$ в точке $x=c$.

2) Решения y_h уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(p_h \frac{dy_h}{dx}\right) + \bar{q}_h \frac{dy_h}{dx} + r_h y_h = f_h$$

при граничных условиях $(2)_h$, где p_h , r_h и f_h определены как и выше, $\bar{q}_h$ равномерно ограничена и равномерно сходится при $h \rightarrow 0$ к $q - \frac{dp}{dx}$, вне окрестности $(c-h, c+h)$ стремятся к функции $y(x)$, которая является решением задачи (1)–(2) с условиями сопряжения вида

$$[y]_c = 0, \quad \left[p \frac{dy}{dx}\right]_c = 0.$$

3) Решения y_h уравнений

$$\frac{d^2}{dx^2}(p_h y_h) + \frac{d}{dx}(\bar{q}_h y_h) + \bar{r}_h y_h = f_h$$

при граничных условиях $(2)_h$, стремятся к решению задачи (1), (2) с условиями сопряжения вида

$$[py]_c = 0, \quad \left[\frac{d}{dx}(py) + qy\right]_c = 0,$$

где $\bar{q}_h$ и $\bar{r}_h$ — равномерно ограниченные последовательности, которые равномерно сходятся к соответствующим функциям $q - 2\frac{dp}{dx}$ и $r - \frac{dq}{dx} - \frac{d^2p}{dx^2}$ вне окрестности $(c-h, c+h)$.

4) Решения y_h уравнений

$$\frac{d^2}{dx^2}(p_h y_h) + q_h \frac{dy_h}{dx} + r_h y_h = f_h$$

при граничных условиях (2) , стремятся к решению краевой задачи (1), (2) с условием сопряжения вида

$$[py]_c = 0, \quad \left[\frac{d}{dx}(py) + qy\right]_c = \alpha_0,$$

где α_0 зависит от специального вида p_h и q_h . Заметим, что в предыдущих примерах предел y_h не зависит от специального выбора光滑енных коэффициентов.

Доказательство этих утверждений приводится ниже при рассмотрении задачи с некоторыми более общими условиями сопряжения в точке $x=c$.

Таким же путем можно решить краевые задачи и для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами с различными условиями сопряжения на линиях разрыва коэффициентов.

Такой подход к изучению разрешимости краевых задач для уравнений с разрывными коэффициентами был предложен О. А. Олейник [3, 4].

В работе М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1] получено представление в виде асимптотического ряда решения краевых задач для эллиптического уравнения, у которого коэффициенты быстро меняются в ε -окрестности некоторой поверхности S . Первым членом этого

ряда является решение уравнения с разрывными на S коэффициентами и некоторыми условиями сопряжения на S .

2. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с граничными условиями сопряжения.

$$\left. \begin{aligned} y(c-0) &= y(c+0) \\ K_1 \frac{dy(c-0)}{dx} - K_2 \frac{dy(c+0)}{dx} + \alpha y(c) &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, α и β — заданные постоянные.

Обозначим через P^h , Q^h , R^h , F^h , α^h и β^h усреднения с радиусом h (см. [6]), соответственно следующих функций $K(x)p(x)$, $K(x)[q(x) - p'(x)]$, $K(x)r(x)$, $K(x)f(x)$, $\bar{\alpha}(x)$ и $\bar{\beta}(x)$,

$$\text{где } K(x) = \begin{cases} \frac{K_1}{p(c-0)} & \text{при } a \leq x < c \\ \frac{K_2}{p(c+0)} & \text{при } c \leq x \leq b \end{cases} \quad \bar{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } a \leq x < c \\ \alpha_2 & \text{при } c \leq x \leq b, \end{cases}$$

$$\bar{\beta}(x) = \begin{cases} \beta_1 & \text{при } a \leq x < c \\ \beta_2 & \text{при } c \leq x \leq b, \end{cases}$$

причем, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ и $\beta_1 - \beta_2 = \beta$.

Мы получим решение задачи (1), (2), (3) как предел, при $h \rightarrow 0$ решений уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(P^h_{(x)} \frac{dy_h}{dx}\right) + Q^h_{(x)} \frac{dy_h}{dx} + \left(\frac{d\alpha^h}{dx} + R^h\right) y_h = F^h + \frac{d\beta^h}{dx} \quad (4)$$

при граничных условиях

$$y_h(a) = 0, \quad y_h(b) = 0. \quad (5)$$

Для доказательства этого утверждения умножим уравнение (4) на $y_h(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$. Получим

$$\begin{aligned} - \int_a^b P^h_{(x)} \left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx + \int_a^b \left(Q^h - 2\alpha^h\right) \frac{dy_h}{dx} y_h dx + \int_a^b R^h y_h dx = \\ = \int_a^b F^h y_h dx - \int_a^b \beta^h \frac{dy_h}{dx} dx. \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством

$$2AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{1}{\varepsilon} B^2, \quad (6)$$

которое верно для любого $\varepsilon > 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b P^h \left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b R^h y_h^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \left(Q^h - 2\alpha^h\right)^2 y_h^2 dx + \\ + \frac{1}{2} \int_a^b y_h^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b |F^h|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \left(\frac{dy_h}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |\beta^h|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(P_0 - \varepsilon) \int_a^b \left(\frac{dy_h}{dx} \right)^2 dx - \left(R_0 + \frac{1}{2\varepsilon} \max |Q^h - 2\alpha^h|^2 - \frac{1}{2} \right) \int_a^b y_h^2 dx \leq \\ \leq \frac{1}{2} \int_a^b |F^h|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |\beta^h|^2 dx,$$

где $P_0 = p_0 \min \left\{ \frac{K_1}{p(c-0)}, \frac{K_2}{p(c+0)} \right\}$, $R_0 = r_0 \max \left\{ \frac{K_1}{p(c-0)}, \frac{K_2}{p(c+0)} \right\}$.

Выберем $\varepsilon = \frac{P_0}{2}$, тогда при $R_0 < -\frac{N}{P_0} - \frac{1}{2}$,

где $N > \max |Q^h - 2\alpha^h|^2$,

получим $\int_a^b y_h^2 dx < M_1$, $\int_a^b \left(\frac{dy_h}{dx} \right)^2 dx < M_2$,

здесь M_1 и M_2 от h не зависят.

Следовательно, семейство $\{y_h\}$ компактно в смысле нормы пространства непрерывных функций. Значит можно выделить подпоследовательность из этого семейства, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции $y(x)$, определенной на $[a, b]$. Так как коэффициенты и правая часть уравнения (1) — гладкие функции вместе с производными внутри d_1 и d_2 , то, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения линейного уравнения от параметра, предельная функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению (1) внутри каждого отрезка, не содержащего точку $x = c$. Кроме того, $p(x) \geq p_0 > 0$ и $r(x) \leq r_0 < 0$.

Таким образом, для того, чтобы $y(x)$ была решением требуемой задачи остается доказать, что она удовлетворяет второму условию сопряжения.

Покажем, что $\frac{dy}{dx}$ стремится к определенному конечному пределу при $x \rightarrow c$ справа и слева.

Для этого интегрируем уравнения (4) от a до $c - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое число.

Тогда

$$P^h \frac{dy_h}{dx} \Big|_{x=c-\varepsilon} + \int_a^{c-\varepsilon} (Q^h - \alpha^h) \frac{dy_h}{dx} dx - P_{(a)}^h \frac{dy_{(a)}}{dx} + \alpha^h(x) y_h^{(x)} \Big|_{x=c-\varepsilon} = \\ = \int_a^{c-\varepsilon} F^h dx + \beta^h \Big|_{x=c-\varepsilon} - \beta_{(a)}^h$$

Отсюда при $h \rightarrow 0$ получим

$$P \frac{dy}{dx} \Big|_{x=c-\varepsilon} = \int_a^{c-\varepsilon} F dx + P_{(a)} \frac{dy_{(a)}}{dx} - \int_a^{c-\varepsilon} (Q - \bar{\alpha}) \frac{dy}{dx} dx - \alpha_1 y(c-\varepsilon).$$

Так как правая часть последнего равенства стремится к конечному пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, то $\frac{dy}{dx}$ имеет конечный предел при $x \rightarrow c$ слева.

Аналогично можно показать, что $\frac{dy}{dx}$ имеет конечный предел при $x \rightarrow c$ справа.

Далее из тождества

$$P_{(x)}^h \frac{dy_h}{dx} \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma} + \int_{c-\sigma}^{c+\sigma} (Q^h - \alpha^h) \frac{dy_h}{dx} dx + \alpha^h y_h \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma} = \\ = \int_{c-\sigma}^{c+\sigma} F^h dx + \beta^h \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma},$$

где $\sigma > 0$ сколь угодно малое число, следует, что второе условие сопряжения для $y(x)$ также выполняется.

Единственность построенного выше решения задачи (1), (2), (3) вытекает из следующей леммы доказанной в [2] для общего эллиптического уравнения второго порядка.

Лемма. Пусть отличная от постоянной непрерывная функция $z(x)$ на отрезке $[l_1, l_2]$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$Lz \equiv p(x)z''(x) + q(x)z'(x) + r(x)z(x) \leq 0,$$

где $p(x) > 0$, $r(x) \leq 0$. Кроме того, пусть $y(l_1) \leq 0$, $(y(l_1) \geq 0)$ и $y(x) > y(l_1)$ ($y(x) < y(l_1)$) для всех $x \in (l_1, l_2)$, тогда

$$\liminf_{x \rightarrow l_1} \frac{y(x) - y(l_1)}{|x - l_1|} > 0, \quad \left(\liminf_{x \rightarrow l_1} \frac{y(x) - y(l_1)}{|x - l_1|} < 0 \right).$$

Действительно, пусть задача (1), (2), (3) имеет два различных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Тогда функция $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (1), граничным условиям (2) и однородным условиям сопряжения (3). Согласно принципу максимума $|z(x)|$ не достигает своего максимального значения в d_1 и d_2 . Применяя лемму и учитывая условие сопряжения (3) для $z(x)$ легко убедиться, что в точке $x = c$ $|z|$ также не достигает своего максимума. Но так как $z(a) = z(b) = 0$, то $z \equiv 0$, т. е. $y_1(x) \equiv y_2(x)$.

3. Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть требуется построить разрывное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничному условию (2) и условиям сопряжения

$$K_1 y|_{x=c-0} = K_2 y|_{x=c+0} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}(Ky) \Big|_{x=c-0} + \delta_1 y \Big|_{x=c-0} = \frac{d}{dx}(Ky) \Big|_{x=c+0} + \delta_2 y \Big|_{x=c+0} = x, \quad (8)$$

где δ_1 , δ_2 и x известные константы, а

$$K(x) = \begin{cases} \frac{K_1}{p(c-0)} p(x) & \text{при } a \leq x < c \\ \frac{K_2}{p(c+0)} p(x) & \text{при } c < x \leq b. \end{cases}$$

Обозначим через $P_{(x)}^h, Q_{(x)}^h, R_{(x)}^h, \delta_{(x)}^h$ и $x_{(x)}^h$ усреднения с радиусом усреднения h соответствующих функций: $P_{(x)} = \bar{K}_{(x)} p_{(x)}, Q_{(x)} = \bar{K}_{(x)}(q - 2p'), R_{(x)} = \bar{K}_{(x)}(r - q' - p'')$.

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\delta_1}{P(c-0)} - \frac{Q(c-0)}{P(c-0)} & \text{при } a \leq x < c \\ \frac{\delta_2}{P(c+0)} - \frac{Q(c+0)}{P(c+0)} & \text{при } c < x \leq b \end{cases} \quad \text{и } x_{(x)} = \begin{cases} x_1 & \text{при } a \leq x < c \\ x_2 & \text{при } c < x \leq b, \end{cases}$$

где $\bar{K}_{(x)} = \begin{cases} \frac{K_1}{p(c-0)} & \text{при } a \leq x < c \\ \frac{K_2}{p(c+0)} & \text{при } c < x \leq b, \quad r - q' - p'' \leq r_0 < 0, x_1 - x_2 = x. \end{cases}$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dx} (P^h y_h) + \frac{d}{dx} \left[(Q^h + \delta^h P^h) y_h \right] - \delta^h \frac{d}{dx} (P^h y_h) + R^h y_h = F^h + \frac{dx^h}{dx} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$y_h(a) = 0, y_h(b) = 0. \quad (10)$$

Решение задач (1), (2), (7), (8) может быть получено как предел решения задачи (9), (10) при $h \rightarrow 0$.

Производя замену $v_h(x) = P_{(x)}^h y_h(x)$ мы приходим к следующей задаче для v_h

$$\frac{d^2 v_h}{dx} + \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{Q^h}{P^h} + \delta^h \right) v_h \right] - \delta^h \frac{d v_h}{dx} + \frac{R^h}{P^h} v_h = F^h + \frac{dx^h}{dx} \quad (11)$$

$$v_h(a) = 0, v_h(b) = 0 \quad (12)$$

Теперь установим некоторые интегральные оценки для v_h и $\frac{d v_h}{dx}$.

Для этого умножим уравнение (11) на $v_h(x)$ и проинтегрируем его от a до b . Тогда получим:

$$\begin{aligned} & - \int_a^b \left(\frac{d v_h}{dx} \right)^2 dx - \int_a^b \left(\frac{Q^h}{P^h} + \delta^h \right) \frac{d v_h}{dx} v_h dx - \int_a^b \delta^h v_h \frac{d v_h}{dx} dx + \\ & + \int_a^b \frac{R^h}{P^h} v_h^2 dx = \int_a^b F^h v_h dx - \int_a^b x^h \frac{d v_h}{dx} dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\frac{d v_h}{dx} \right)^2 dx - \bar{R}_0 \int_a^b v_h^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \left(\frac{d v_h}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b \left(\frac{Q^h}{P^h} + 2\delta^h \right)^2 v_h^2 dx + \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \int_a^b \left(\frac{d v_h}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^b |x^h|^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b v_h^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b |F^h|^2 dx. \end{aligned}$$

$$\text{Выберем } \varepsilon = \frac{1}{2}, \bar{R}_0 < -\bar{N} - \frac{1}{2}, \text{ где } \bar{R}_0 = \bar{r}_0 \max \left\{ \frac{K_1}{p(c-0)}, \frac{K_2}{p(c+0)} \right\}$$

$$\bar{N} \geq \max_{a < x < b} \left(\left| \frac{Q^h}{P^h} \right|^2 + 4 \left| \frac{Q^h}{P^h} \right| |\delta^h| + |\delta^h|^2 \right),$$

тогда

$$\int_a^b \left(\frac{d v_h}{dx} \right)^2 dx < M_3, \int_a^b v_h^2 dx < M_4,$$

где константы M_3 и M_4 от h не зависят.

Таким образом можно утверждать, что существует подпоследовательность $\{v_{h_k}\}$ последовательности $\{v_h\}$, которая равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Обозначим через $v(x)$ предел этой подпоследовательности. Очевидно, $v(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Q}{P} v \right) + \frac{R}{P} v = f \quad (13)$$

на каждом отрезке, не содержащем точку $x = c$, и граничному условию

$$v(a) = 0, v(b) = 0.$$

Проинтегрируем (9) от a до $x < c$, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d v_h^{(x)}}{dx} + \left(\frac{Q_{(x)}^h}{P_{(x)}^h} + \delta_{(x)}^h \right) v_h &= \int_a^x F_{(x)}^h dx + x_{(x)}^h - x_{(a)}^h + \\ &+ \int_a^x \delta^h \frac{d v_h}{dx} dx + \frac{d v_h(a)}{dx} + \left(\frac{Q^h(a)}{P^h(a)} + \delta_{(a)}^h \right) v_h(a). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $h \rightarrow 0$ и $x \rightarrow c$ $\frac{d v_h(x)}{dx}$ стремится к некоторому

конечному пределу. Но так как $\frac{d v_h}{dx}$ стремится $\frac{d v}{dx}$ на каждом отрезке не содержащем точки $x = c$, то $\frac{d v_{(x)}}{dx}$ стремится к конечному пределу

при $x \rightarrow c$ слева. Аналогично можно доказать, что $\frac{d v}{dx}$ стремится к определенному пределу при x , стремящемся к точке $x = c$ справа.

Далее, для сколь угодно малого числа $\sigma > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d v}{dx} \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma} + \left(\frac{Q^h}{P^h} + \delta^h \right) v_h \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma} &= x^h \Big|_{x=c-\sigma}^{x=c+\sigma} + \\ &+ \int_{c-\sigma}^{c+\sigma} F^h dx + \int_{c-\sigma}^{c+\sigma} \frac{R^h}{P^h} v_h dx + \int_{c-\sigma}^{c+\sigma} \delta^h \frac{d v_h}{dx} dx. \end{aligned}$$

Так как интегралы, входящие в правую часть последнего равенства, стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$ и $\sigma \rightarrow 0$, то

$$\frac{d v}{dx} \Big|_{x=c+0} + \frac{\delta_2}{P(c+0)} v(x) \Big|_{x=c+0} = \frac{d v}{dx} \Big|_{x=c-0} + \frac{\delta_1}{P(c-0)} v(x) \Big|_{x=c-0} - x.$$

Тогда из $v_h(x) = P^h(x)u_h(x)$ следует, что $u_h(x)$ стремится к функции $u(x)$ на $[a, b]$, которая удовлетворяет уравнению (1) внутри (a, c) и (c, b) , граничному условию (2) и условиями сопряжения (7), (8). Единственность $v(x)$ и следовательно $u(x)$ следует из леммы при

$$\text{условии } \frac{\delta_1}{P(c-0)} - \frac{\delta_2}{P(c+0)} > 0$$

4. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}(py) + q \frac{dy}{dx} + ry = f \quad (14)$$

на отрезке $[-1, 1]$ с условием (2), коэффициенты и правая часть которого достаточно гладкие функции всюду, кроме точки $x=0$. Пусть $p \geq p_0 > 0$ и $r \leq r_0 < 0$.

Покажем, что при сглаживании коэффициентов уравнения (14) с помощью быстро изменяющихся функций решения допредельных задач стремится к некоторой функции $u(x)$, которая определена $[-1, 1]$, удовлетворяет уравнению (14), граничным условиям (2), а условия сопряжения для нее зависят от вида этих быстро изменяющихся функций.

Обозначим через $p(x, \varepsilon)$, $q(x, \varepsilon)$, $r(x, \varepsilon)$ и $f(x, \varepsilon)$ быстро изменяющиеся функции при $0 < x < \varepsilon$, которые являются гладкими продолжениями функций p , q , r и f от значения $x < 0$ к значению $x > \varepsilon$, соответственно. Функция $g(x, \varepsilon)$ называется быстро изменяющейся по x для $0 < x < \varepsilon$, если она представима в виде

$$g(x, \varepsilon) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon g_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots + \varepsilon^n g_n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (15)$$

причем $\frac{dg_0}{dt} \neq 0, \left(t = \frac{x}{\varepsilon}\right)$. Нам достаточно, чтобы $n=2$.

Теперь, рассмотрим решение уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}(p(x, \varepsilon)y_\varepsilon) + q(x, \varepsilon) \frac{dy_\varepsilon}{dx} + r(x, \varepsilon)y_\varepsilon = f(x, \varepsilon) \quad (16)$$

при граничных условиях

$$y_\varepsilon(-1) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0. \quad (17)$$

Производя замену $v_\varepsilon = p(x, \varepsilon)y_\varepsilon$, получим:

$$\frac{d^2 v_\varepsilon}{dx^2} + q(x, \varepsilon) \frac{dv_\varepsilon}{dx} + \frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon = f(x, \varepsilon), \quad (18)$$

$$v(-1) = 0, \quad v(1) = 0 \quad (19)$$

Предположим, что выполняется условие

$$q(x, \varepsilon) \left(\frac{1}{p(x, \varepsilon)} \right) + \frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} \leq \sigma_0 < 0$$

окрестности точки $x=0$. Это условие имеет место, если:

- 1) $q(x) > 0$, а $p(x)$ монотонно возрастает в окрестности точки $x=0$;
- 2) $q(x) < 0$, а $p(x)$ монотонно убывает в окрестности точки $x=0$.

Из принципа максимума следует, что $|v_\varepsilon(x)| < M$, где M не зависит от ε .

Далее умножая (18) на $v_\varepsilon(x)$ и интегрируя по $[-1, 1]$, получим

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \left(\frac{dv_\varepsilon}{dx} \right)^2 dx + \int_{-1}^1 \frac{q(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} \frac{dv_\varepsilon}{dx} v_\varepsilon dx + \int_{-1}^1 \left[\frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} + \right. \\ & \left. + q(x, \varepsilon) \left(\frac{1}{p(x, \varepsilon)} \right)^2 \right] v_\varepsilon^2 dx + \int_{-1}^1 f(x, \varepsilon) v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv_\varepsilon}{dx} \right)^2 dx & \leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \left| \frac{q(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} \right|^2 v_\varepsilon^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{dv_\varepsilon}{dx} \right)^2 dx + \\ & + \int_{-1}^1 |f(x, \varepsilon)| |v_\varepsilon| dx. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon < 2$, тогда будем иметь

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dv_\varepsilon}{dx} \right)^2 dx < M,$$

где M от ε не зависит.

Следовательно, последовательность $\{v_\varepsilon\}$ равномерно ограничена в норме $w_2^1[-1, 1]$. Значит, существует подпоследовательность этой последовательности, которая равномерно сходится к непрерывной функции $v(x)$, определенной на отрезке $[-1, 1]$.

Из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dv_\varepsilon}{dx} \Big|_{x=-\sigma} + \frac{q(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon(x) \Big|_{x=-\sigma} & = \int_{-1}^{-\sigma} \frac{v_\varepsilon(x)}{p(x, \varepsilon)} \frac{dq(x, \varepsilon)}{dx} dx + \\ & + \int_{-1}^{-\sigma} \left(f(x, \varepsilon) - \frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon \right) dx + \frac{dv_\varepsilon(-1)}{dx}, \end{aligned}$$

где $\sigma > 0$ любое малое число. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=-\sigma} + \frac{q}{p} v \Big|_{x=-\sigma} = \int_{-1}^{-\sigma} \frac{v(x)}{p(x)} \frac{dq}{dx} dx + \int_{-1}^{-\sigma} \left(f - \frac{r}{p} v \right) dx + \frac{dv}{dx} \Big|_{x=-1}$$

Далее, устремляя σ к нулю, будем иметь

$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{q}{p} v \Big|_{x=0} = \int_{-1}^0 \frac{v(x)}{p(x)} \frac{dq}{dx} dx + \int_{-1}^0 \left(f - \frac{r}{p} v \right) dx + \frac{dv(-1)}{dx},$$

Этим мы показали, что $\frac{dv}{dx}$ стремится к определенному пределу $x \rightarrow 0$ слева. Аналогично можно показать, что $\frac{dv}{dx}(x)$ стремится к конечному пределу при $x \rightarrow 0$ справа.

Перепишем уравнение (18) в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dv_\varepsilon}{dx} + \frac{q(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon \right) = \frac{v_\varepsilon}{p(x, \varepsilon)} \frac{dq(x, \varepsilon)}{dx} + f(x, \varepsilon) - \frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon$$

и проинтегрируем по отрезку $[0, \varepsilon)$, тогда

$$\left[\frac{dv_\varepsilon}{dx} + \frac{q(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon \right]_{x=0}^{x=\varepsilon} = \int_0^\varepsilon \frac{v_\varepsilon}{p(x, \varepsilon)} dq(x, \varepsilon) + \int_0^\varepsilon \left(f(x, \varepsilon) - \frac{r(x, \varepsilon)}{p(x, \varepsilon)} v_\varepsilon \right) dx. \quad (20)$$

Рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \frac{v_\varepsilon(x)}{p(x, \varepsilon)} dq(x, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{v(\varepsilon t)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} dq(\varepsilon t, \varepsilon) = \int_0^1 \frac{v(\varepsilon t) - v(0)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} dq(\varepsilon t, \varepsilon) + v(0) \int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon}$$

Имеем

$$|I_{1\varepsilon}| = \left| \int_0^1 \frac{v(\varepsilon t) - v(0)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} dq(\varepsilon t, \varepsilon) \right| \leq \max |v(\varepsilon t) - v(0)| \int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)}$$

и так как

$$\int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} = \int_0^1 \frac{|dq_0(t) + \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t)|}{p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)} \leq \int_0^1 \frac{dq_0}{p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)} + \varepsilon \int_0^1 \frac{|dq_1(t)|}{p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2} + \varepsilon^2 \int_0^1 \frac{|dq_2(t)|}{p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2},$$

то

$$\int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} \rightarrow \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t)},$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$|I_{1\varepsilon}| \leq \max |v(\varepsilon t) - v(0)| \int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

С другой стороны

$$I_{2\varepsilon} = v(0) \int_0^1 \frac{dq(\varepsilon t, \varepsilon)}{p(\varepsilon t, \varepsilon)} = v(0) \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)} + \varepsilon v(0) \int_0^1 \frac{dq_1(t)}{p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)} + \varepsilon^2 v(0) \int_0^1 \frac{dq_2(t)}{p_0(t) + \varepsilon p_1(t) + \varepsilon^2 p_2(t)},$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{2\varepsilon} = v(0) \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t)}.$$

Таким образом, получили, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = v(0) \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t)}.$$

Переходя к пределу в (20) при $\varepsilon \rightarrow 0$ будем иметь

$$\frac{dv(+0)}{dx} + \frac{q(+0)}{p(+0)} v(0) - \frac{dv(-0)}{p(-0)} v(0) = v(0) \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t)} \quad (21)$$

Выражая v_ε через y_ε , получим

$$\frac{d}{dx}(py) \Big|_{x=-0}^{x=+0} + qy \Big|_{x=-0}^{x=+0} = p(+0)y(+0) \int_0^1 \frac{dq_0(t)}{p_0(t)}. \quad (22)$$

Из построения следует, что

$$y(-1)=0, y(1)=0, py|_{x=-0} = py|_{x=+0} \quad (23)$$

Как видно, в условие (22) входит интеграл, который зависит от сглаживающих функций q_0 и p_0 .

Выражаю благодарность моему научному руководителю профессору О. А. Олейник за постоянную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. и Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнения большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями. УМН, вып. 4 (94), 1960.
2. Олейник О. А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. Матем. сб., 30 (72), 1952.
3. Олейник О. А. Решение основных краевых задач для уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 6.
4. Олейник О. А. Краевые задачи для линейных уравнений эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами. Изв. АН СССР, 1961, т. 125, № 1.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1952.
6. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

Кәсилән әмсаллы ади дифференциал тәнликләре аид сәрһәд мәсәләләри

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә, әсас е'тибары илә, ашағыдакы мәсәләјә бахылыр:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = f(x) \quad (1)$$

тәнлијинин әмсаллары вә сағ тәрәфи $x=c$ ($a < c < b$) нөгтәсиндән башга $[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә кафи гәдәр һамар функцијалардыр. Бу функцијалар үчүн $x=c$ нөгтәси 1-чи тип кәсилмә нөгтәсидир вә

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \leq r_0 < 0.$$

Әмсаллары һамар олан елә тәнликләр ардычыллығы гурулур ки, $(c-h, c+h)$ әтрафындан кәнарда әмсаллар мүнтәзәм олараг (1) тәнлијинин ујғун әмсалларына јахынлашыр.

Исбат едилир ки, гурулан тәнликләр ардычыллығынын формасындан асылы олараг

$$y_h(a) = 0, \quad y_h(b) = 0$$

шәртләрини өдәјән y_h һәлли $d_1 = [a, b]$ вә $d_2 = [c, d]$ парчала-рында (1) тәнлијинин

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

сәрһәд шәртләрини вә $x=c$ нөгтәсиндә мүхтәлиф гошмалыг шәртләрини өдәјән $y(x)$ функцијасына јахынлашыр.

Бундан әлавә

$$\frac{d^2}{dx^2}(py) + q\frac{dy}{dx} + ry = f \quad (2)$$

тәнлијинә дә бахылыр вә аналожи тәдгигатлар апарылыр.

Р. Н. МӘММӘДОВ

ПЕРИОДИК ФУНКЦИЈАЛАРЫН m -СИНГУЛЈАР ИНТЕГРАЛЫНЫН ҮМҮМИЛӘШМИШ ЛЕБЕГ НӨГТӘЛӘРИНДӘ ВӘ $L_p(-\pi, \pi)$ ФӘЗАСЫНДА ЈЫҒЫЛМАСЫНЫН ТӘРТИБИ ЊАГГЫНДА

Фәрз едәк ки, $K_\lambda(t)$ 2π -периодлу вә һәгиги λ параметриндән асылы олан функцијадыр. Бу функција васитәси илә тә'јин олунан

$$W_\lambda^{[m]}(f; x) = (-1)^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] K_\lambda(t) dt \quad (1)$$

ифадәсинә 2π -периодлу $f(t)$ функцијасынын m -сингулјар интегралы дејәчәјик, бурада m —гејд олунмуш ихтијары натурал әдәддир.

(1) ифадәсинин мә'насы олмасы үчүн $f(t)$ вә $K_\lambda(t)$ функцијалары мүүјјән шәртләри өдәмәлидир. 2π -периодлу, өлчүлән вә мүтләг гиј-мәтинин p -чи дәрәчәси $[-\pi, \pi]$ парчасы үзрә интегралланан $f(t)$ функцијалары чохлауғуну $L_p(-\pi, \pi)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, һәр бир $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ функцијасы үчүн

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ифадәси сонлу әдәддир. $f(t) \in L_\infty(-\pi, \pi)$ олдугда

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)| < +\infty$$

һесаб едилдик.

Ајдындыр ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) вә $K_\lambda(t) \in L_1(-\infty, \infty)$ олдугда (1) ифадәси санки һәр јердә сонлудур вә $W_\lambda^{[m]}(f; x) \in L_p(-\pi, \pi)$ олур.

Доғрудан да

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+kt) K_\lambda(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+kt) K_\lambda(t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} |K_\lambda(t)| dt \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+kt)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|K_\lambda\|_{L_1} \|f\|_{L_p} \end{aligned}$$

олур.

Периодик функцијаларын (1) сингулјар интеграллары илэ јахын лашмасынын бә'зи мәсәлэләри И. П. Натансон [5] вә М. Әфәндијева [6] тәрәфиндән өјрәнилмишдир.

Инди кәләчәкдә лазым олан бир сыра анлајышлар тә'јин едәк. $f(x)$ функцијасынын m тәртибли, h аддымлы сонлу фәргини

$$\Delta_t^m f(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kh) \quad (2)$$

илә ишарә едәк.

$f(t)$ функцијасы x нөгтәсиндә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_t^m f(x) dt = 0 \quad (3)$$

мүнасибәтини өдәјирсә, онда x нөгтәсинә һәмин функцијанын m нөгтәси дејилир. Бу нөгтәләри $x[m, d]$ илә ишарә едәчәјик. $m=1$ оlanda (3) бәрабәрлији әвәзинә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h [f(x+t) - f(x)] dt = 0$$

мүнасибәтини аларыг. Ахырынчы бәрабәрлијин өдәнилдији $t=x$ нөгтәләриндә $f(t)$ -нин гејри-мүәјјән интегралынын төрәмәси $f(x)$ -ә бәрабәр олур.

$f(t)$ функцијасы үчүн x нөгтәсиндә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta_t^m f(x)| dt = 0 \quad (4)$$

бәрабәрлији өдәнилисә, онда x нөгтәсинә һәмин функцијанын p тәртибли Лебег m -нөгтәси дејилир. һәр бир $p \geq 1$ үчүн

$$\left| \frac{1}{h} \int_0^h |\Delta_t^m f(x)| dt \right| \leq \left(\frac{1}{h} \int_0^h |\Delta_t^m f(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси кәстәрир ки, $f(t)$ функцијасынын p тәртибли Лебег m -нөгтәләри һәмин функцијанын ејни заманда m -нөгтәсидир. $m=1$ оlanda (4) әвәзинә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|^p dt = 0$$

бәрабәрлији алыныр. Ахырынчы бәрабәрлијин өдәнилдији $t=x$ нөгтәләри $f(t)$ функцијасынын p тәртибли Лебег нөгтәләридир. $p=1$ оlanda ади Лебег нөгтәләри алыныр.

Ашағыдакы ишарәни гәбул едәк:

$$\varphi_m(f, x, t) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} [f(x+kt) + f(x-kt)].$$

Ајдындыр ки, $f(t)$ функцијасынын $x[m, d]$ нөгтәләриндә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_m(f, x, t) dt = 0$$

бәрабәрлији өдәнилисә. Еләчә дә, $f(t)$ функцијасынын һәр бир p тәртибли Лебег m -нөгтәсиндә

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi_m(f, x, t)|^p dt = 0$$

бәрабәрлији өдәнилисә.

Биз әввәлләр [3] бүтүн әдәди ох үзәриндә тә'јин олунмуш m -сингулјар интеграллары $x[m, d]$ нөгтәсиндә, p тәртибли Лебег m -нөгтәсиндә вә $L_p(-\infty, \infty)$ фәзасында јығылмасынын тәртибини өјрәнилмишдик.

Бу ишдә периодик функцијаларын (1) сингулјар интегралынын $x[m, d]$ нөгтәләриндә, p тәртибли Лебег m -нөгтәләриндә вә $L_p(-\pi, \pi)$ фәзасында јығылмасынын тәртиби тәдгиг едилір. Мәгаләнин әсас мәзсә муну исбатсыз шәкилдә [4] ишиндә чап олунмушдур. Әввәлчә (1)-сингулјар интегралларынын $f(t)$ функцијасынын $x[m, d]$ нөгтәләриндә) јығылмасынын тәртибини тәдгиг едәк.

1-чи теорем. *Тутаг ки, $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ вә мүсбәт $K_\lambda(t)$ функцијасы ашағыдакы шәртләри өдәјир.*

$$1^\circ. \text{ Чүм функцијадыр, } 2^\circ. \int_{-\pi}^{\pi} K_\lambda(t) dt = 1, \quad 3^\circ. \gamma_\lambda = \int_0^{\pi} t K_\lambda(t) dt \rightarrow 0 (\gamma \rightarrow$$

$\rightarrow \infty)$, $4^\circ. K_\lambda(t)$ функцијасы $[0, \pi]$ парчасында монотон артандыр, $5^\circ. \lambda \rightarrow \infty$ -да һәр бир $\delta > 0$ үчүн $K_\lambda(\delta) = O(\gamma_\lambda^\alpha)$, бурада $0 \leq \alpha \leq 1$.

Бу тәләбләр дахилиндә, $f(t)$ функцијасы x нөгтәсиндә $h \rightarrow 0$ -да

$$\int_0^h \varphi_m(f, x, t) dt = O(h^{\alpha+1}) \quad (5)$$

шәртини өдәјирсә, онда $\lambda \rightarrow \infty$ -да һәмин x нөгтәсиндә

$$|W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x)| = O(\gamma_\lambda^\alpha) \quad (6)$$

вә ја

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_\lambda^\alpha} [W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x)] = 0$$

мүнасибәти өдәнилисә.

Исбаты: $0-2^\circ$ шәртләринә әсасән

$$W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x) = (-1)^{m+1} \int_0^{\pi} \varphi_m(f, x, t) K_\lambda(t) dt \quad (7)$$

мүнасибәтини аларыг. (7) ифадәсини һәр бир $\delta > 0$ үчүн

$$(-1)^{m+1} [W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x)] = \int_0^{\delta} \varphi_m(f, x, t) K_\lambda(t) dt +$$

$$+ \int_{\delta}^{\pi} \varphi_m(f, x, t) K_\lambda(t) dt = A_1 + A_2$$

кими жазмаг олар. A_1 вэ A_2 нэдлэринин һэр бирини аҗрылыгда тэдгиг едэк.

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi_m(f, x, \tau) d\tau$$

гәбул етсәк, $\int_{\beta}^{\delta} \varphi_m(f, x, t) K_{\lambda}(t) dt$ ифадәсини һәр бир $0 < \beta < \delta < \pi$ үчүн ашағыдакы кими жазмаг олар:

$$\int_{\beta}^{\delta} \varphi_m(f, x, t) K_{\lambda}(t) dt = \int_{\beta}^{\delta} K_{\lambda}(t) d\psi(t) = \psi(\delta) K_{\lambda}(\delta) - \psi(\beta) K_{\lambda}(\beta) + \int_{\beta}^{\delta} \psi(t) d[-K_{\lambda}(t)]. \quad (8)$$

(5) шәртинә көрә, һәр бир $\varepsilon < 0$ үчүн елә $\delta_0 > 0$ тапмаг олар ки, $0 < \delta \leq \delta_0$ оlanda

$$|\psi(\delta)| < \varepsilon \delta^{\alpha+1} \quad (9)$$

өдәнилер. (9) бәрабәрсизлижинә әсасән (8) бәрабәрлијиндән

$$\left| \int_{\beta}^{\delta} \varphi_m(f, x, t) K_{\lambda}(t) dt \right| < \varepsilon \left(\beta^{\alpha+1} K_{\lambda}(\beta) + \delta^{\alpha+1} K_{\lambda}(\delta) + \int_{\beta}^{\delta} t^{\alpha+1} d[-K_{\lambda}(t)] \right)$$

алыныр. 4° шәртинә көрә

$$\delta^{\alpha+1} K_{\lambda}(\delta) \leq (\alpha+1) \int_0^{\delta} t^{\alpha} K_{\lambda}(t) dt$$

бәрабәрсизлијини жазмаг олар. Буна көрә дә һәр бир $0 < \beta < \delta < \pi$ үчүн

$$\left| \int_{\beta}^{\delta} \varphi_m(f, x, t) K_{\lambda}(t) dt \right| < \varepsilon (\alpha+1) \left(2 \int_0^{\delta} t^{\alpha} K_{\lambda}(t) dt + \int_{\beta}^{\delta} t^{\alpha} K_{\lambda}(t) dt \right)$$

олар.

Беләликлә, һәр бир λ вә $0 < \delta \leq \delta_0$ үчүн $\beta \rightarrow 0$ -да

$$|A_1| < 3(\alpha+1) \varepsilon \int_0^{\delta} t^{\alpha} K_{\lambda}(t) dt \leq \frac{3(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}} \gamma_{\lambda}^{\alpha} \cdot \varepsilon \quad (10)$$

алынар, бурада $0 \leq \alpha \leq 1$.

Инди A_2 -нын ифадәсини гижмәтләндирәк.

Асанча јохламаг олар ки,

$$|A_2| \leq \int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)| |K_{\lambda}(t)| dt \leq 2|f(x)| \int_0^{\pi} K_{\lambda}(t) dt + \left[2 \|f\|_{L_1} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} K_{\lambda}(\delta) \right]$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бурадан 5° шәртинә әсасән һәр бир $\delta > 0$ үчүн

$$\lambda \rightarrow \infty \text{-да } A_2 = O(\gamma_{\lambda}^{\alpha}) \quad (11)$$

аларыг.

(10) вә (11) мүнәсибәтләриндән чыхыр ки, (6) доғрудур. Исбат етдијимиз теорем һаггында бир сыра гејдләр едәк.

1-чи гејд. Чәмләнән $f(t)$ функцијасы мәнһуд олдугда теоремин доғру олмасы үчүн 5° шәрти әвәзинә $\int_0^{\pi} K_{\lambda}(t) dt = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha})$ шәртини тәләб етмәк олар.

2-чи гејд. $K_{\lambda}(t)$ функцијасынын чүт олмасыны тәләб етмәдикдә, ашағыдакы әләвә шәртләр дахилиндә теорем јенә доғрудур.

6°. $K_{\lambda}(t)$ функцијасы $[-\pi, 0]$ парчасында монотон артандыр. 7°. $\lambda \rightarrow \infty$ -да һәр бир $\delta > 0$ үчүн

$$K_{\lambda}(-\delta) = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha})$$

мүнәсибәти доғрудур, бурада $0 < \alpha < 1$. Бу заман (5) әвәзинә

$$\int_0^h [\Delta_t^m f(x)] dt = o(h^{\alpha+1})$$

шәртини, γ_{λ} әвәзинә исә

$$\gamma_{\lambda} = \int_{-\pi}^{\pi} |t| K_{\lambda}(t) dt$$

кәмијјәтини көтүрмәк лазимдыр.

3-чү гејд. Исбат етдијимиз теоремдә γ_{λ} әвәзинә $\gamma_{\lambda} = \int_0^{\rho} t K_{\lambda}(t) dt$

кәмијјәтини дә көтүрмәк олар, бурада ρ һәр һансы бир кичик мүсбәт едәддир вә $0 < \rho < \pi$. Бу һалда, нисбәтән үмуми нәтичә алыныр.

§ 3.

Инди дә (1) m -сингулјар интегралынын p тәртибли Лебег m -нөг-тәләриндә јығылмасы тәртибини тэдгиг едәк.

2-чи теорем. Тутаг ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) вә мүсбәт $K_{\lambda}(t)$ функцијасы 1-чи теоремин 1°–5° шәртләрини өдәјир. $h \rightarrow 0$ -да $f(t)$ функцијасы x нөгтәсиндә

$$\int_0^h |\varphi_m(f, x, t)|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \quad (12)$$

мүнәсибәтини өдәјирсә, бурада $0 < \alpha < 1$, онда һәмин x нөгтәсиндә $\lambda \rightarrow \infty$ -да

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha}) \quad (13)$$

мүнәсибәти доғрудур.

Исбаты. (7) бәрабәрлијинә әсасән

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}} \left(\int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)|^p K_{\lambda}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

вә ја

$$2^{\frac{p}{q}} |W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)|^p \leq \int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)|^p K_{\lambda}(t) dt$$

бәрабәрсизлији алыныр. Сағ тәрәфдәки интегралы ихтијари $\delta > 0$ үчүн

$$\int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)|^p K_{\lambda}(t) dt = \int_0^{\delta} |\varphi_m(f, x, t)|^p K_{\lambda}(t) dt +$$

$$+\int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)|^p K_{\lambda}(t) dt \| B_1 + B_2$$

кими жазаг.

$$\theta(t) = \int_0^t |\varphi_m(f, x, \tau)|^p d\tau$$

гэбул етсэк, $\int_{\beta}^{\delta} K_{\lambda}(t) d\theta(t)$ ифадэсини

$$\int_{\beta}^{\delta} K_{\lambda}(t) d\theta(t) = \theta(\delta) K_{\lambda}(\delta) - \theta(\beta) K_{\lambda}(\beta) + \int_{\beta}^{\delta} \theta(t) d[-K_{\lambda}(t)]$$

кими жаза билэрик.

(12) шэртинэ көрө, ихтијари $\varepsilon > 0$ эдэди үчүн елэ δ_0 тапмаг олар ки, $0 < \delta < \delta_0$ оlanda

$$|\theta(\delta)| < \varepsilon \delta^{\alpha+1}$$

өдэнилер. Бу бэрабэрсизлији нэзэрэ алсаг, ихтијари λ вэ $0 < \delta < \delta_0$ үчүн 1-чи теоремин исбатында көстэрилдији кими

$$|B_1| < \frac{3(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}} \gamma_{\lambda}^{\alpha} \cdot \varepsilon \quad (14)$$

аларыг.

Инди B_2 һэддини тэдгиг едэк. Минковски бэрабэрсизлијини $B_2^{1/p}$ -јэ тэтбиг етсэк

$$|B_2^{1/p}| < \left[2 \|f\|_{L_p} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} [K_{\lambda}(\delta)]^{\frac{1}{p}} + 2 |f(x)| \left(\int_0^{\pi} K_{\lambda}(t) dt \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

олар. Ахырынчы бэрабэрсизликдэн 5° шэртинэ эсасэн ихтијари $\delta > 0$ үчүн $\lambda \rightarrow \infty$ -да аларыг:

$$B_2 = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha}) \quad (15)$$

(14) вэ (15) мүнәсибэтлэриндэн чыхыр ки,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_{\lambda}^{\alpha}} |W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)|^{\frac{1}{p}} = 0$$

олур. Бунунла да 2-чи теорем исбат олунур.

2-чи теоремин бир сыра шэртлэрини јүнкүллэшдирмэк олар.

3-чү теорем. Тутаг ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ вэ $K_{\lambda}(t)$ функцијасы $1^{\circ}-2^{\circ}$ шэртлэрини өдэјир. Бундан элавэ, фэрз едэк ки, $K_{\lambda}(t)$ функцијасы-

нын, $\gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda} = \int_0^{\pi} t K_{\lambda}^{*}(t) dt$ кәмијјәтилэ $3^{\circ}-5^{\circ}$ шэртлэрини өдэјән

$K_{\lambda}^{*}(t)$ мажоранты ($|K_{\lambda}(t)| \leq K_{\lambda}^{*}(t)$) вар. Бу һалда, $h \rightarrow 0$ -да $f(t)$ функцијасы x нөгтәсиндә (12) шэртини өдэјирсә, онда һәмин x нөгтәсиндә $\lambda \rightarrow \infty$ -да

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o\left(\frac{\alpha}{\gamma_{\lambda}^{\frac{1}{p}}}\right), (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (16)$$

мүнәсибәти доғрудур.

Бу теорем 2-чи теоремә аналожи исбат олунур. Доғрудан да,

$$|K_{\lambda}(t)| \leq K_{\lambda}^{*}(t), -\pi \leq t \leq \pi,$$

олдуғуну нэзэрэ алсаг, (7) бэрабэрлијинэ эсасән

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| \leq \int_0^{\pi} |\varphi_m(f, x, t)| K_{\lambda}^{*}(t) dt$$

олар. Бундан сонрақы мүнәкимә 2-чи теоремин исбатындақы мүнәкимәнин ејнидир.

Нәтичә. $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ вэ $K_{\lambda}(t)$ функцијасы 3-чү теоремин (1-чи теоремин) шэртлэрини өдэјирсә, онда $f(t)$ функцијасынын бүтүн p тәртибли Лебег m -нөгтәләриндә (m -нөгтәләриндә)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} W_{\lambda}^{[m]}(f; x) = f(x)$$

бэрабэрлији доғрудур.

Нәтичә теоремдән $\alpha = 0$ һесаб етмәклә алыныр.

§ 4.

Фэрз едэк ки, $\{\varphi_k(r)\}_{k=1}^{\infty}$ ардычылығы $E = \{r\}$ чохлағу үзәриндә тәјин олунмуш функцијалардан тәшкил олунмушдур вэ $r_0 \in E$ чохлағунун

лимит нөгтәсидир. Тутаг ки, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r)$ сырасы E чохлағу үзәриндә мütлэг јығыландыр вэ

$$U_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos kt \geq 0, r \in E \text{ вэ } -\pi \leq t \leq \pi.$$

2π периодлу f функцијасы үчүн

$$I_r^{[m]}(f; x) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] U_r(t) dt \quad (17)$$

кими m -сингулјар интеграл тәјин едэк.

$I_r^{[m]}(f; x)$ сингулјар интегралы илә функцијаларын јахынлашмасы тәртиби бир сыра һалларда мүүлһиф тәрәфиндән (бах [2]) өјрәнилмишдир. һәмин мәгаләдән мәлумдур ки,

$$\beta(r) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t U_r(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \varphi_{2k+1}(r)}{(2k+1)^2}$$

олур.

Көстәрмәк олар ки, јухарыда исбат етдијимиз теоремләр $r \rightarrow r_0$ -да (17) сингулјар интегралы үчүн дә доғрудур. Бу теоремләрдән бирини (17) m -сингулјар интегралы үчүн сөјлөјәк.

4-чү теорем. Тутаг ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ вэ $r \rightarrow r_0$ -да $U_r(t)$ функцијасы үчүн 1-чи теоремин $3^{\circ}-5^{\circ}$ шэртлэри өдэнилер. $f(t)$ функцијасы x нөгтәсиндә $h \rightarrow 0$ -да $3^{\circ}-5^{\circ}$ шэртләриндә иштирак едән $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ эдәди үчүн

$$\int_0^h |\varphi_m(f, x, t)|^p dt = o(h^{\alpha+1})$$

мүнәсибәтини өдэјирсә, онда һәмин x нөгтәсиндә

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{I_r^{[m]}(f; x) - f(x)}{[\beta(r)]^{\alpha/p}} = 0 \quad (18)$$

бэрабэрлији доғрудур.

Хүсуси халда, $E=(0,1)$, $r_0=1$
вэ

$$U_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} = P_r(t)$$

гэбул етсэк, онда Пуассон нүвэли

$$P_r^{[m]}(f; x) = \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] P_r(t) dt \quad (19)$$

m -сингулјар интегралыны аларыг.
Пуассон нүвэси үчүн

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\beta(r)}{(1-r) \ln \frac{1+r}{1-r}} = 1$$

олдугу мэлүмдур (бах [2]). Бурадан ајдындыр ки, һәр бир $0 \leq \alpha \leq 1$ эдәди үчүн 4-чү теоремин бүтүн шәртләри өдәнилир. Беләликлә, (19) сингулјар интегралы үчүн ашағыдакы теорем алырыг.

5-чи теорем. $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ функцијасы x нөгтәсиндә $0 \leq \alpha \leq 1$ эдәди илә (12) шәртини өдәјирсә, онда һәмин нөгтәдә Пуассонун (19) сингулјар интегралы үчүн

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{P_r^{[m]}(f; x) - f(x)}{\left[(1-r) \ln \frac{1+r}{1-r} \right]^{\frac{\alpha}{p}}} = 0$$

бәрабәрлији доғрудур.

§ 5.

Јухарыдакы теоремләрин исбаты методу илә (1) m -сингулјар интегралын $L_p(-\pi, \pi)$ фәзасында да јығылмасы тәртибини мүәјјән етмәк олар.

Ашағыдакы ишарәни гәбул едәк:

$$Q(t) = \| \varphi_m(f, x, t) \|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} | \varphi_m(f, x, t) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

6-чы теорем. Тутаг ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) вә мүсбәт $K_\lambda(t)$ функцијасы 1-чи теоремдәки 1°–5° шәртләрини өдәјир.
 $h \rightarrow 0$ -да ашағыдакы

$$\int_0^h Q(t) dt = O(h^{\alpha+1}) \quad (20)$$

шәрти өдәнилирсә, онда һәмин α ($0 \leq \alpha \leq 1$) эдәди үчүн $\lambda \rightarrow \infty$ -да

$$\| W_\lambda^{[m]}(f, x) - f(x) \|_{L_p} = O(\gamma_\lambda^\alpha) \quad (21)$$

мүнасибәти доғрудур.

Исбаты. (7) бәрабәрлијинә көрә

$$\| W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x) \|_{L_p} \leq \int_0^\pi Q(t) K_\lambda(t) dt$$

олар. Бурадан, һәр бир $0 < \delta < \pi$ эдәди үчүн

$$\| W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x) \|_{L_p} \leq \int_0^\delta Q(t) K_\lambda(t) dt + \int_\delta^\pi Q(t) K_\lambda(t) dt = C_1 + C_2$$

аларыг.

$$\mu(t) = \int_0^t Q(\tau) d\tau$$

илә ишарә етсәк, (20) шәртинә көрә һәр бир $\varepsilon > 0$ эдәди үчүн елә $\delta_0 > 0$ тапа биләрик ки, $0 < \delta \leq \delta_0$ олдугда

$$| \mu(\delta) | < \varepsilon \delta^{\alpha+1}$$

олсун. Бу бәрабәрсизликдән истифадә етсәк

$$| C_1 | < 3(\alpha+1) \varepsilon \int_0^\delta t^\alpha K_\lambda(t) dt$$

вә ихтијари λ үчүн $0 < \delta \leq \delta_0$ олдугда

$$| C_1 | < \frac{3(\alpha+1)}{2^{1-\alpha}} \gamma_\lambda^\alpha \cdot \varepsilon \quad (22)$$

аларыг.

$f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) 2 π -периодлу функција олдуғундан

$$Q(t) \leq 2^{m+1} \| f \|_{L_p}$$

олур. Буна көрә дә,

$$C_2 \leq \int_0^\pi Q(t) K_\lambda(t) dt \leq 2^{m+1} \| f \|_{L_p} \int_0^\pi K_\lambda(t) dt$$

вә 5° шәртинә көрә һәр бир $\delta > 0$ үчүн $\lambda \rightarrow \infty$ -да

$$C_2 = O(\gamma_\lambda^\alpha) \quad (23)$$

алырыг.

(22) вә (23) мүнасибәтләриндән теоремин доғрулуғу ајдындыр. 6-чы теоремин бир сыра шәртләрини јүнкүлләшдирмәк олар.

7-чи теорем. Тутаг ки, $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ вә $K_\lambda(t)$ функцијасы 1°–2° шәртләрини өдәјир. Бундан элавә, фәрз едәк ки, $K_\lambda(t)$ функција-сынын $\gamma_\lambda = \int_0^\pi t K_\lambda^*(t) dt$ кәмијјәтилә 3°–5° шәртләрини өдәјән $K_\lambda^*(t)$

мажоранты вар. Бу халда $h \rightarrow 0$ -да (20) шәрти өдәнилирсә, онда $\lambda \rightarrow \infty$ -да (21) мүнасибәти доғрудур.

3-чү гејд. Исбат етдијимиз теоремләрдә балача о-ну бөјүк О илә әвәз етдикдә дә доғрудур.

4-чү гејд. Биз (1) m -сингулјар интегралын $x[m, d]$ нөгтәләриндә, p тәртибли Лебег m -нөгтәләриндә вә $L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) фәзасында јығылма тәртиби һағгында $0 \leq \alpha \leq 1$ үчүн (5), (12) вә (20) шәртләри өдәнилдәкдә бәзи тәклифләр сөјләдик.

Һәмин шәртләр $\alpha > 1$ олдугда өдәнилдикдә дә ујғун тәклифләр сөјләмәк олар.

$1 < \alpha \leq N$ олдугда γ_λ әвәзинә $\tau_\lambda = \int_0^\pi t^N K_\lambda(t) dt$ кәмијјәтини көтүрсәк,

(6), (13) вә (21) мүнасибәтләри әвәзинә $\lambda \rightarrow \infty$ -да ујғун оларат

$$| W_\lambda^{[m]}(f; x) - f(x) | = O(\tau_\lambda^{\frac{\alpha}{N}})$$

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o(\tau_{\lambda}^{\frac{\alpha}{Np}})$$

$$\|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)\|_{L_p} = o(\tau_{\lambda}^{\frac{\alpha}{N}})$$

аларыг.

5-чи гејд. Сөјләдјимиз тәклифләр ујғун олараг чоҳдәјишән функцијаларын үмуми сингулјар интегралларла јахынлашмасы үчүн дә доғрудур.

ӘДӘБИЈАТ

1. Коровкин П. П. Линейные операторы и теория приближений, М., 1959.
2. Мамедов Р. Г. О порядке и об асимптотическом значении приближения функций линейными положительными операторами, „Изв. АН Азерб. ССР“, 1961, №2.
3. Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов, „ДАН СССР“, 1961, №12.
4. Мамедов Р. Г. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов периодических функций, „ДАН Азерб. ССР“, 1962, №1.
5. Натансон И. П. О точности представления непрерывных периодических функций сингулярными интегралами, „ДАН СССР“, т. 73, 1950, т. 73, № 2.
6. Эфендиева М. Р. Об аппроксимации в среднем суммируемых функций посредством сингулярных интегралов, Труды АПИ им. В. И. Ленин, 1959, вып. 8.

Р. Г. Мамедов

О порядке сходимости m -сингулярных интегралов периодической функции в обобщенных точках Лебега и в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$.

РЕЗЮМЕ

Пусть $K_{\lambda}(t) - 2\pi$ -периодическая функция, зависящая от непрерывного вещественного параметра λ . Условимся выражение

$$W_{\lambda}^{[m]}(f; x) = (-1)^{m+1} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] K_{\lambda}(t) dt \quad (1)$$

называть m -сингулярным интегралом для 2π -периодической функции $f(t)$, где $m \geq 1$ — любое фиксированное натуральное число.

В работе доказывается следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(t) \in L(-\pi, \pi)$ и положительная функция $K_{\lambda}(t) (-\pi \leq t \leq \pi)$ удовлетворяет условиям:

- 1° Она четная на $[-\pi, \pi]$; 2° $\int_{-\pi}^{\pi} K_{\lambda}(t) dt = 1$; 3° $\gamma_{\lambda} = \int_0^{\pi} t K_{\lambda}(t) dt \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$; 4° $K_{\lambda}(t)$ монотонно убывает на $[0, \pi]$; 5° $K_{\lambda}(\delta) = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для каждого $0 < \delta < \pi$, где $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если при $h \rightarrow 0$ удовлетворяется условие

$$\int_0^h \varphi_m(f, x, t) dt = o(h^{\alpha+1}) \quad (5)$$

при данном значении x , где $0 \leq \alpha \leq 1$ — то же самое, что и в условии 5°, то в этой точке x удовлетворяется соотношение

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o(\gamma_{\lambda}^{\alpha}) \quad (6)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\gamma_{\lambda}^{\alpha}} [W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)] = 0.$$

Теорема 2. Пусть $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) и положительная функция $K_{\lambda}(t)$ удовлетворяет условиям 1°–5° теоремы 1.

Если при $h \rightarrow 0$ функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h |\varphi_m(f, x, t)|^p dt = o(h^{\alpha+1}) \quad (12)$$

при данном значении x , то в этой точке удовлетворяется соотношение

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o(\gamma_{\lambda}^{\frac{\alpha}{p}}) \quad (13)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

Теорема 3. Пусть $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) и $K_{\lambda}(t)$ удовлетворяет условиям 1°–2° теоремы 1.

Кроме того, пусть для $K_{\lambda}(t)$ существует мажоранта

$$K_{\lambda}^*(t) (|K_{\lambda}(t)| \leq K_{\lambda}^*(t)),$$

удовлетворяющая условиям 3°–5° при $\gamma_{\lambda} = \gamma_{\lambda}^* = \int_0^{\pi} t K_{\lambda}^*(t) dt$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если при $h \rightarrow 0$ удовлетворяется условие (12) в точке x , то для этой точки справедливо соотношение

$$|W_{\lambda}^{[m]}(f; x) - f(x)| = o(\tau_{\lambda}^{\frac{\alpha}{p}}) \quad (16)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$.

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r)$ сходится абсолютно на множестве $E = \{r\}$ и r_0 есть предельная точка множества E . Положим

$$U_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \cos kt \geq 0, \quad r \in E \text{ и } -\pi \leq t \leq \pi.$$

Определим m -сингулярный интеграл

$$I_r^{[m]}(f; x) = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(x+kt) \right] U_r(t) dt \quad (17)$$

для 2π -периодических функций $f(t)$.

Теорема 4. Пусть $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) и функция $U_r(t)$ удовлетворяет условиям 3°–5° теоремы при $r \rightarrow r_0$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если при $h \rightarrow 0$ функция $f(t)$ удовлетворяет условию (12), то справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{I_r^{[m]}(f; x) - f(x)}{[\beta(r)]^{\frac{\alpha}{p}}} = 0.$$

Из этой теоремы следует, что справедливо равенство

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{P_r^{[m]}(f; x) - f(x)}{\left[(1-r) \ln \frac{1+r}{1-r} \right]^{\frac{\alpha}{p}}} = 0$$

для m -сингулярного интеграла (19) $P_r^{[m]}(f; x)$ с ядром Пуассона, во всех точках x , где имеет место условие (12) (теорема 5).

О порядке сходимости m -сингулярных интегралов в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Пусть $f(t) \in L_p(-\pi, \pi)$ ($p \geq 1$) и неотрицательная функция $K_\lambda(t)$ удовлетворяет условиям 1°–5° теоремы 1.

Если при $h \rightarrow 0$ удовлетворяется условие (20), то справедливо соотношение (21).

Далее доказывается теорема 7 (обобщение теоремы 6).

В конце работы указывается возможность распространения доказанных теорем на любые $1 < \alpha \leq N$, где N — некоторое натуральное число.

Ш. И. ВЕКИЛОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

Как известно, граничные задачи теории логарифмического потенциала, т. е. задачи Дирихле и Неймана, для контуров с угловыми точками решены Карлеманом [4] и Радоном [2]. Решение основных граничных задач статистической теории упругости для контуров с угловыми точками дано в работах Л. Г. Магнарадзе [1]. Основные граничные задачи теории установившихся колебаний упругого изотропного тела для областей с угловыми особенностями исследовал М. И. Цандеков. [3].

Изучение различных стационарных процессов в кусочно-постоянных средах приводит к рассмотрению краевых задач для уравнения Лапласа. Так, например, задача о стационарном распределении тепла в телах, составленных из кусков с различными физическими свойствами, удовлетворяет уравнению Лапласа в этих средах, и некоторыми дополнительными условиями, а именно, условиями равенства температуры и потока тепла на границе раздела двух сред.

В настоящей работе изучается задача Дирихле в составной области с угловыми точками на контуре.

Пусть задана односвязная ограниченная область g с границами Γ и внутри нее замкнутая кривая γ , имеющая непрерывную кривизну, разбивающая область g на подобласти g_1 (лежащую внутри γ) и g_2 . Требуется определить функцию $U(x, y)$, непрерывную в $g + \Gamma$, гармоническую в областях g_1 и g_2 и удовлетворяющую условию

$$U|_{\Gamma} = f(p) \quad (1)$$

$$K_1 \left(\frac{dU}{dn_p} \right)_{\gamma^-} - K_2 \left(\frac{dU}{dn_p} \right)_{\gamma^+} + h(p)U = \varphi(p), \quad (2)$$

где n_p — внутренняя нормаль для области g_1 ;

$K_i > 0$ — некоторые постоянные;

γ^- и γ^+ означают, что берутся предельные значения, соответственно, с внутренней и с внешней по отношению к g_1 сторон контура γ ;

$f(p)$, $h(p)$ и $\varphi(p)$ — заданные непрерывные функции на Γ и на γ , причем $h(p) \geq 0$ при всех $p \in \gamma$. Относительно контура Γ , ограничивающего об-

ласть g , предполагаем, что он состоит из конечного числа дуг непрерывной кривизны, пересекающихся в точках $P_1, P_2, \dots, P_n$ (рис. 1).

Беря начала отсчета на контуре Γ не в угловой точке P_n , а на кривой γ — в произвольной ее точке. В дальнейшем, выбирая определенные направления, будем обозначать через s и t как сами точки контура Γ и γ , так и криволинейные их абсциссы. Касательные в угловых точках образуют углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, каждый из которых отсчитывается от 0 до 2π в определенном направлении. Например, если при-

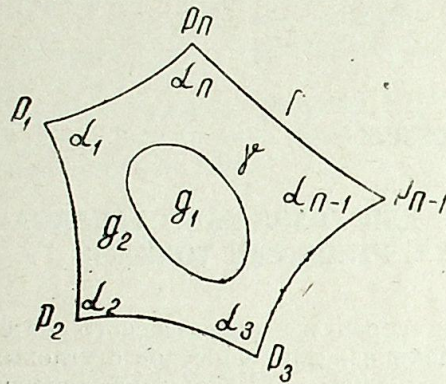


Рис. 1

Однако одно из ядер приведенных систем интегральных уравнений в окрестности угловых точек неограничено, и поэтому теория Фредгольма к этой системе неприменима. Но пользуясь результатами Карлемана можно строить новую систему интегральных уравнений, для которых в некотором круге радиуса больше единицы теория Фредгольма применима.

Докажем, что при выполнении всех указанных условий может существовать только одно решение задачи. В самом деле, предположим противное и обозначим через $V(P)$ разность двух решений задачи. Функция $V(P)$ является решением соответствующей однородной задачи. В силу условия $V_\Gamma = 0$, функция $V(P)$ в замкнутой области $(g + \Gamma)$ не сможет быть постоянной, отличной от нуля. Если $V(P) \neq 0$, то по принципу максимума, $V(P)$ принимает свое наибольшее положительное или наименьшее отрицательное значения в некоторой точке M

контура γ . В силу теоремы Келдыша-Лаврентьева производная $\frac{dV}{dn}$ в точке M отлична от нуля и имеет разные знаки по обе стороны границы γ :

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{M-} > 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{M+} < 0 \quad \text{если} \quad V(M) = V_{\max} > 0,$$

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_{M-} < 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{M+} > 0 \quad \text{если} \quad V(M) = V_{\min} < 0.$$

Так как $K_1 > 0$ и $h(p) \geq 0$ при $p \in \gamma$, то в точке M невозможно выполнение равенства

$$K_1 \left(\frac{dV}{dn}\right)_{M-} - K_2 \left(\frac{dV}{dn}\right)_{M+} + h(M) V_M = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(P) \equiv 0$ в области $(g + \Gamma)$. Решение ищем в виде суммы потенциала простого слоя с плотностью на Γ и потенциала двойного слоя с плотностью на γ

$$U(P) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \mu(t) \frac{\cos \varphi}{r} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \delta(t) \ln \frac{1}{r} dt, \quad (3)$$

где r есть расстояние от переменной точки контура интегрирования до произвольной точки P , лежащей внутри или вне контура $\Gamma + \gamma$, φ — есть угол между внутренней нормалью в точке t и вектором r , идущим от точки t к точке P . Пользуясь формулами предельных значений, известных из общей теории потенциала, поставленная задача сводится к решению систем интегральных уравнений ($\lambda = -1$)

$$\left. \begin{aligned} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) \frac{\cos \varphi}{\pi r} dt - \lambda \int_{\gamma} \delta(t) \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} dt &= \frac{f(s)}{\pi} \\ \delta(s) - \lambda \int_{\Gamma} \mu(t) A \frac{d}{dn_s} \left[\frac{\cos \varphi}{\pi r} \right] dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} \left[A \frac{\cos \varphi}{r} + \right. & \\ \left. + h_1(t) \ln \frac{1}{r} \right] \delta(t) dt &= \frac{\varphi(s)}{\pi(K_1 + K_2)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Причем справедливость первого уравнения требуется всюду, кроме $s = s_i$. Ядро

$$K_2(s, t) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r_{st}} \quad s \in \Gamma \text{ и } t \in \gamma$$

и

$$K_3(s, t) = A \frac{d}{dn_s} \left[\frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{\pi r_{st}} \right], \quad t \in \gamma \text{ и } t \in \Gamma,$$

где $A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}$, является непрерывной функцией относительно своих аргументов.

$$\text{Ядро} \quad K_4(s, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ A \frac{\cos(r_{ts}, n_s)}{r_{ts}} + h_1(t) \ln \frac{1}{r_{st}} \right\} \quad s \in \gamma, t \in \gamma,$$

где $h_1(t) = \frac{h(t)}{K_1 + K_2}$, не регулярное, потому что на диагонали $t = s$ оно становится логарифмическим бесконечным, но первая итерация его ограничена.

$$\text{Ядро} \quad K_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\cos(r_{ts}, n_t)}{r_{st}} \quad s \in \Gamma \text{ и } t \in \Gamma$$

в окрестности угловых точек (s_i, s_i) неограниченно возрастает.

Исследуем поведение ядра $K_1(s, t)$ в окрестности угловой точки (s_i, s_i) . Она непрерывна за исключением $t = s_i$. При фиксированном s , отличном от s_i , $K(s, t)$ будет функцией t , для которого $t = s_i$ является точкой разрыва первого рода. Для $s = s_i$ и $t = s_i$, имеющих одинако-

¹ Иногда систему (4) будем писать в виде одного уравнения.

$$\Phi(s) - \lambda \int_{\Gamma + \gamma} K(s, t) \Phi(t) dt = F(s) \quad (5)$$

вый знак, т. е. для точек s и t , лежащих по одну сторону от угловой точки, очевидно, ядро $K_1(s, t)$ является непрерывным.

Пусть $s-s_i < 0$ и $t-s_i > 0$ и $s_i-s=\sigma$, $t-s_i=\tau$. Обозначив координаты дуговых абсцисс s и t через $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ и $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, соответственно (рис. 2) получим:

$$K_1(s, t) = \frac{-(x(\sigma) - \xi(\tau))\xi'(\tau) + (y(\sigma) - \eta(\tau))\eta'(\tau)}{(x(\sigma) - \xi(\tau))^2 + (y(\sigma) - \eta(\tau))^2} \quad (6)$$

Разлагая входящие в эти равенства функции по формуле Тейлора и ограничиваясь производными второго порядка, получим:

$$\left. \begin{aligned} x(\sigma) &= x(0) + x'(0)\sigma + x''(\theta_1)\frac{\sigma^2}{2}, \\ \xi(\tau) &= \xi(0) + \xi'(0)\tau + \xi''(\theta_2)\frac{\tau^2}{2}, \\ y(\sigma) &= y(0) + y'(0)\sigma + y''(\theta_3)\frac{\sigma^2}{2}, \\ \eta(\tau) &= \eta(0) + \eta'(0)\tau + \eta''(\theta_4)\frac{\tau^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi'(\tau) &= \xi'(0) + \xi''(\theta_2)\tau, \\ \eta'(\tau) &= \eta'(0) + \eta''(\theta_4)\tau, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где θ_1, θ_3 находятся между нулем и σ ; θ_2, θ_4 — между нулем и τ .

Согласно (7) и (8) ядро $K_1(s, t)$ примет следующий вид [4]:

$$K_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma \sin \alpha + \omega_3(\sigma, \tau)}{\sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau \cos \alpha + \omega_3(\sigma, \tau)}, \quad (9)$$

где $\omega_r(\sigma, \tau)$ — является однородной формой r -ой степени относительно своих аргументов, коэффициенты которых ограничены в окрестности точки $\sigma = \tau = 0$.

Равенство (9) можно написать в виде

$$K_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma \sin \alpha_i}{\sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau \cos \alpha_i} + R(s, t), \quad (10)$$

где

$$R(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega_2(\sigma, \tau)\Delta - \omega_3(\sigma, \tau)\sin \alpha_i}{\Delta^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_3(\sigma, \tau)}{\Delta} \right\}}, \quad (11)$$

$$\Delta = \sigma^2 + \tau^2 - 2\sigma\tau \cos \alpha_i \quad (12)$$

Очевидно, можно подобрать такое число $K > 0$, что при $\sigma\tau > 0$ имело бы место $\Delta > k(\sigma^2 + \tau^2)$. Тогда из выражения (11) видно, что функция $R(s, t)$ в окрестности $\sigma = \tau = 0$ ограничена.

Мы рассмотрели случай положительных σ и τ . Совершенно аналогично будет обстоять дело и в случае отрицательных σ и τ , иначе говоря, здесь мы переставляем местами точки s и t . Очевидно, такая перестановка не влияет на результат вычисления.

Поэтому, в обоих случаях имеем при

$$(s - s_i)(t - s_i) < 0:$$

$$K_1(s, t) = \frac{\sin \alpha_i}{\pi} \frac{|s - s_i|}{|s - s_i|^2 + |t - s_i|^2 - 2|s - s_i||t - s_i|\cos \alpha_i} + R(s, t) \quad (13)$$

где $R(s, t)$ ограниченная функция в окрестности $s=t=s_i$.

Введем ядра $g_i(s, t)$, определяемые на контуре Γ следующим образом:

$$1^\circ. \quad g_i(s, t) = \frac{\sin \alpha_i}{\pi} \frac{|s - s_i|}{|s - s_i|^2 + |t - s_i|^2 - 2|s - s_i||t - s_i|\cos \alpha_i},$$

когда $|s - s_i| \leq \delta$, $|t - s_i| \leq \delta$, $(t - s_i)(s - s_i) \leq 0$. За δ берем число меньшее, чем $\frac{s_{i+1} - s_i}{2}$.

$$2^\circ. \quad g_i(s, t) = 0 \text{ во всех остальных точках } \Gamma.$$

Положим

$$G(s, t) = \sum_{i=1}^n g_i(s, t) \quad (14)$$

$$K_1(s, t) = \frac{\cos \varphi}{\pi r} = G(s, t) + M(s, t) \quad (15)$$

$M(s, t)$ является ограниченной и непрерывной всюду функцией за исключением конечного числа отрезков, параллельных координатным осям. С обеих сторон этих отрезков $M(s, t)$ принимает определенные значения (которые, вообще говоря, между собой не равны), за исключением конечного числа точек, которым соответствуют точки (s_i, s_i) . При $t \neq s_i$, $s = s_i$ функция $M(s, t)$ непрерывна.

Пусть K_i положительные числа, меньше единицы. Рассмотрим интеграл

$$I_1 = \int_{\Gamma} |g_i(s, t)| |t - s_i|^{-K_i} dt. \quad (16)$$

Оценивая его, получаем [4]:

$$I_1 < \frac{\sin K_i |\pi - \alpha_i|}{\sin K_i \pi} |s - s_i|^{-K_i} \quad (\text{при } |s - s_i| < \delta), \quad (17)$$

а при $K = 0$ ($i = 1, n$):

$$I_1 = \int_{\Gamma} |g_i(s, t)| dt < \frac{|\pi - \alpha_i|}{\pi} \quad \text{при } |s - s_i| < \delta. \quad (18)$$

Предположим, что $f(s)$ в области $|s - s_i| < \delta$ удовлетворяет неравенству

$$|f(s)| < A_i |s - s_i|^{-K_i} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где A_i постоянные числа.

Интегральное уравнение

$$\varphi(s) - \lambda \int_{\Gamma} G(s, t) \varphi(t) dt = f(s) \quad (19)$$

имеет решение, разлагающееся в степенной ряд, по степеням λ , сходящимся при $|\lambda| < R'$, где R' наименьшее из чисел

$$\frac{\sin K_i \pi}{\sin K_i |\pi - \alpha_i|} \quad (i = \overline{1, n}) \quad (20)$$

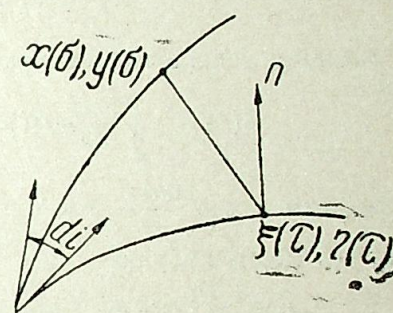


Рис.

Пусть R наименьшее среди чисел

$$\frac{\pi}{|\pi - \alpha_i|} \quad (i = \overline{1, n}),$$

т. е. $R = \frac{\pi}{\theta}$, где $\theta = \max_{1 \leq i \leq n} |\pi - \alpha_i|$

Так как $\lim R' = R$, когда $K_1, K_2, \dots, K_n \rightarrow 0$, то имеем следующее: если $f(s)$ является ограниченной, то решение (19) для $|\lambda| < R$ будет голоморфной функцией.

Можно составить резольвенту $G(s, t, \lambda)$ ядра $G(s, t)$ и доказать, что она как функция своего первого и второго аргумента удовлетворяет двум интегральным уравнениям [4], посредством которых решения интегрального уравнения (19) при $|\lambda| < R$ выразится явным образом по следующей формуле.

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, t, \lambda) f(s) ds \quad (21)$$

Возьмем теперь первое уравнение системы (4)

$$\mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} \frac{\cos \varphi}{\pi r} \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} \delta(t) dt = f(s)$$

и заменим ядро $\frac{\cos \varphi}{\pi r}$, где точки s и t находятся на границе Γ , через $G(s, t) + M(s, t)$, получим

$$\mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} [G(s, t) + M(s, t)] \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} \delta(t) dt = f(s) \quad (22)$$

Определим функцию $L_1(s, t, \lambda)$ из интегрального уравнения

$$L_1(s, t, \lambda) = M(s, t) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) L_1(\tau, t, \lambda) d\tau \quad (23)$$

с ядром $G(s, t)$ и с правой частью $M(s, t)$ где точки s и t принадлежат контуру Γ .

Также определим функцию $L_2(s, t, \lambda)$ из интегрального уравнения

$$L_2(s, t, \lambda) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r} + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) L_2(\tau, t, \lambda) d\tau \quad (24)$$

с ядром $G(s, t)$ и с правой частью $\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r}$, где точка s находится на контуре Γ , а t на контуре γ .

Далее введем функцию $P(s)$, определяемую следующим образом:

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) p(\tau) d\tau \quad (25)$$

Подставляя значения $M(s, t), \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{r}$ и $f(s)$ из (23), (24) и (25) в (22), получим:

$$\begin{aligned} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} [G(s, t) + L_1(s, t, \lambda) - \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) L_1(\tau, t, \lambda) d\tau] \mu(t) dt - \\ - \lambda \int_{\gamma} [L_2(s, t, \lambda) - \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) L_2(\tau, t, \lambda) d\tau] \delta(t) dt - p(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) p(\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Благодаря абсолютной интегрируемости, изменение порядка интегрирования приводит к выводу:

$$\begin{aligned} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) \delta(t) dt - p(s) - \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) \{ \mu(\tau) - \\ - \lambda \int_{\Gamma} L_2(\tau, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(\tau, t, \lambda) \delta(t) dt - p(\tau) \} d\tau = 0 \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) \delta(t) dt - p(s) \equiv Q(s, \lambda)$$

Тогда

$$Q(s, \lambda) - \lambda \int_{\Gamma} G(s, t) Q(t, \lambda) dt = 0 \quad (26)$$

Согласно вышеуказанного, уравнение (26) не имеет отличных от нуля решений, при $|\lambda| < R$, т. е. $Q(s, \lambda) \equiv 0$.

Таким образом получаем следующую систему интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \mu(s) - \lambda \int_{\Gamma} L_1(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_2(s, t, \lambda) \delta(t) dt &= p(s), \\ \delta(s) - \lambda \int_{\gamma} L_3(s, t, \lambda) \mu(t) dt - \lambda \int_{\gamma} L_4(s, t, \lambda) \delta(t) dt &= \varphi(s), \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L_3(s, t, \lambda) &\equiv \frac{A}{\pi} \frac{d}{dn} \frac{\cos \varphi}{r}, \\ L_4(s, t, \lambda) &\equiv \frac{A}{\pi} \frac{\cos \varphi}{r}, \end{aligned} \right\} \quad s \in \gamma.$$

Так что все конечные решения системы (4) удовлетворяют системе (27) и наоборот. К полученной системе уравнений (27) метод Фредгольма применим.

Запишем эту систему в виде одного уравнения

$$\Phi(s) - \lambda \int_{\Gamma + \gamma} L(s, t, \lambda) \Phi(t) dt = F_1(s) \quad (27)$$

и положим

$$\begin{aligned} D_L(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Gamma + \gamma} \dots \int_{\Gamma + \gamma} L(s_1, \dots, s_n) ds_1 \dots ds_n, \\ D_L(s, t, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\Gamma + \gamma} \dots \int_{\Gamma + \gamma} L \left(\begin{matrix} s, s_1, \dots, s_n \\ t, s_1, \dots, s_n \end{matrix} \right) ds_1 \dots ds_n; \end{aligned}$$

эти функции при $|\lambda| < R$ голоморфные.

Нули $D_L(\lambda)$ в области $|\lambda| < R$ не сгущаются. Согласно общей теории, если λ не является корнем уравнений $D(\lambda) = 0$, то уравнение (27) имеет единственное непрерывное решение $\Phi(s)$, которое определяется формулой

$$\Phi(s) = F_1(s) + \lambda \int_{\Gamma + \gamma} \frac{D_L(s, t, \lambda)}{D_L(\lambda)} F_1(t) dt. \quad (28)$$

Пусть

$$\Gamma(s, t, \lambda) = \frac{D_L(s, t, \lambda)}{D_L(\lambda)},$$

Тогда (28) напишется так:

$$\Phi(s) = F_1(s) + \lambda \int_{\Gamma+\gamma} \Gamma(s, t, \lambda) F_1(t) dt, \quad (28')$$

или в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \mu(s) &= p(s) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t, \lambda) p(t) dt + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_2(s, t, \lambda) \varphi(t) dt \\ \delta(s) &= \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t, \lambda) p(t) dt + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_4(s, t, \lambda) \varphi(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (28'')$$

Как известно, $p(s)$ определяется как решение уравнения

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, \tau) p(\tau) d\tau,$$

т. е.

$$p(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, t, \lambda) f(t) dt,$$

тогда

$$\mu(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, t, \lambda) f(t) dt + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t, \lambda) \{f(t) +$$

$$+ \lambda \int_{\Gamma} G(t, t_1, \lambda) f(t_1) dt_1\} dt + \lambda \int_{\gamma} \Gamma_2(s, t, \lambda) \varphi(t) dt;$$

$$\delta(s) = \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t_1, \lambda) \{f(t) + \lambda \int_{\Gamma} G(t, t_1, \lambda) f(t_1) dt_1\} dt +$$

$$+ \lambda \int_{\gamma} \Gamma_4(s, t, \lambda) \varphi(t) dt;$$

$$\mu(s) = f(s) + \lambda \int_{\Gamma} G(s, t, \lambda) + \Gamma_1(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t_1, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 \} f(t) dt +$$

$$+ \lambda \int_{\gamma} \Gamma_2(s, t, \lambda) \varphi(t) dt;$$

$$\delta(s) = \varphi(s) + \lambda \int_{\Gamma} \left[\Gamma_3(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t_1, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1 \right] f(t) dt +$$

$$+ \lambda \int_{\gamma} \Gamma_4(s, t, \lambda) \varphi(t) dt.$$

Пусть

$$K(s, t, \lambda) = \begin{cases} G(s, t, \lambda) + \Gamma_1(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_1(s, t_1, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1, & \text{при } s, t \in \Gamma \\ \Gamma_2(s, t, \lambda), & \text{при } s \in \Gamma, t \in \gamma \\ \Gamma_3(s, t, \lambda) + \lambda \int_{\Gamma} \Gamma_3(s, t_1, \lambda) G(t_1, t, \lambda) dt_1, & \text{при } s \in \gamma, t \in \Gamma \\ \Gamma_4(s, t, \lambda) & \text{при } s \in \gamma, t \in \gamma \end{cases}$$

тогда решение системы (27) с помощью резольвенты можно писать в виде:

$$\Phi(s) = F(s) + \lambda \int_{\Gamma+\gamma} K(s, t, \lambda) F(t) dt. \quad (29)$$

Если $\lambda = \lambda_0$ является корнем уравнения $D_L(\lambda) = 0$, то согласно общей теории, в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ имеет место разложение

$$K(s, t, \lambda) = \frac{A_m(s, t)}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \frac{A_{m-1}(s, t)}{(\lambda - \lambda_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1(s, t)}{\lambda - \lambda_0} + B(s, t, \lambda), \quad (30)$$

где $B(s, t, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ регулярная функция. Такое представление резольвенты имеет место для всех значений комплексного параметра λ , достаточно близких к плюсу λ_0 .

Воспользуемся теперь интегральным уравнением резольвенты $K(s, t, \lambda)$, которую перепишем в виде:

$$K(s, t, \lambda) - L(s, t, \lambda) = (\lambda - \lambda_0) \int_{\Gamma+\gamma} L(s, t_1, \lambda) K(t_1, t, \lambda) dt_1 + \\ + \lambda_0 \int_{\Gamma+\gamma} L(s, t_1, \lambda) K(t_1, t, \lambda) dt_1 \quad (31)$$

Подставляя в (31) вместо $K(s, t, \lambda)$ ее выражение из (29) и отождествляя коэффициенты при $(\lambda - \lambda_0)$ в левой и правой частях полученной формулы, найдем:

$$A_m(s, t) = \lambda_0 \int_{\Gamma+\gamma} L(s, t_1, \lambda) A_m(t_1, t) dt, \quad (32)$$

следовательно, функция $A_m(s, t)$, для любого значения $t \in \Gamma + \gamma$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению, соответствующему (27) относительно s , при $\lambda = \lambda_0$. Так как $A_m(s, t) \not\equiv 0$, то существует $t = \theta_1 \in \Gamma + \gamma$, такое, что $A_m(s, \theta_1)$ как функция s , не равно тождественно нулю, и будет решением уравнения:

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_{\Gamma+\gamma} L(s, t, \lambda) \varphi(t) dt. \quad (32)$$

Ввиду того, что λ_0 вещественное число, вещественная и мнимая части функции $A_m(s, \theta_1)$, также являются решением уравнения (32) и $A_m(s, \theta_1) \not\equiv 0$. Поэтому одна из этих частей ($\alpha_m(s)$) так же тождественно не равна нулю.

$$\alpha_m(s) = \lambda_0 \int_{\Gamma+\gamma} L(s, t, \lambda) \alpha_m(t) dt.$$

Так как уравнения (27) и (5) эквивалентны, то $\alpha_m(s)$ также будет решением уравнения (5).

Пусть

$$\alpha_m(s) = \begin{cases} \alpha_m^{(1)}(s) & \text{при } s \in \Gamma \\ \alpha_m^{(2)}(s) & \text{при } s \in \gamma \end{cases}$$

Составим сложный потенциал по $\Gamma + \gamma$.

$$U(p) = \int_{\Gamma} \alpha_m^{(2)}(t_1) \frac{\cos(r_{t,p}, n_{t_1})}{r_{t,p}} dt + \int_{\gamma} \alpha_m^{(2)}(t_1) \ln \frac{1}{r_{t,p}} dt_1$$

Функция $U(p)$ будет решением однородной краевой задачи. Но, нами доказано, что однородная краевая задача не имеет отличного от нуля решения, т. е. $U(p) \equiv 0$ в D . Поэтому

$$\left(\frac{dU}{dn_s} \right)_+ = \left(\frac{dU}{dn_s} \right)_- = 0 \quad s \in \gamma$$

Но, как нам известно, при $s \in \gamma$

$$\left(\frac{dU}{dn_s} \right)_+ = -\alpha_m^{(2)}(s) + \int_{\Gamma} \alpha_m^{(1)}(t_1) \frac{d}{dn_s} \frac{\cos(r_{t,s}, n_{t_1})}{r_{t,s}} dt_1 + \\ + \int_{\gamma} \alpha_m^{(2)}(t_1) \frac{\cos(r_{t,s}, n_s)}{r_{t,s}} dt = 0,$$

$$\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_+ = \alpha_m^{(2)}(s) + \int_{\Gamma} \alpha_m^{(1)}(t_1) \frac{d}{dn_s} \frac{\cos(r_{t,s}, n_{t_1})}{r_{t,s}} dt_1 + \\ + \int_{\Gamma} \alpha_m^{(2)}(t_1) \frac{\cos(r_{t,s}, n_s)}{r_{t,s}} dt = 0.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$\alpha_m^{(2)}(s) \equiv 0.$$

Тогда из системы (4) имеем

$$\alpha_m^{(1)}(s) = \lambda_0 \int_{\Gamma} K_1(s, t) \alpha_m^{(2)}(t) dt \quad s \in \Gamma, \quad (33)$$

т. е. $\alpha_m^{(1)}(s)$ при $s \in \Gamma$ удовлетворяет уравнению:

$$\varphi(s) = \lambda_0 \int_{\Gamma} K_1(s, t) \varphi(t) dt. \quad (34)$$

Карлеман доказал, что уравнение (34) не имеет отличного от нуля решения, поэтому $\alpha_m^{(1)}(s) \equiv 0$ при $s \in \Gamma$.

Таким образом, $\alpha_m(s) \equiv 0$ при $s \in \Gamma + \gamma$.

Полученное противоречие показывает, что $\lambda_0 = -1$ не является собственным значением системы (27). Поэтому система (27) и, следовательно, система (4) имеет единственное (непрерывное) решение.

Подставляя найденное решение $\{\mu(t), \delta(t)\}$ системы (4) в выражение (3), получим функцию $U(x, y)$, являющуюся решением поставленной задачи.

Замечание. Полученные результаты можно распространить на случай, когда внутри контура Γ лежат n замкнутых кривых $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, гладких в смысле Ляпунова, и таких, что $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$ ($i, j = \overline{1, n}$); на каждой из них заданы условия сопряжения

$$U_{\gamma_i}^+ = U_{\gamma_i}^- \\ K_1 \left(\frac{dU}{dn} \right)_{\gamma_i}^- - K_2 \left(\frac{dU}{dn} \right)_{\gamma_i}^+ + hU = \varphi.$$

При этом некоторые из контуров γ_i могут лежать внутри других.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнарадзе А. Г. Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками. Труды Матем. ин-та АН Груз. ССР, т. 4, 1938.
2. Радион И. О краевых задачах для логарифмического потенциала. УМН, т. 1, вып. 3—4 (13—14), 1946.
3. Цандеков М. И. Основные граничные задачи теории установившихся колебаний упругого изотропного тела для областей с угловыми особенностями. Труды Тбилисского гос. ун-та, т. 56, 1955.
4. Carleman T. Über das Neumann-Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken. Uppsala, 1916.

Ш. И. Вэкилов

Бучаг нөгтэлэри олан хиссэлэрдэн тэшкил олулмуш областда
Лаплас тэнлији үчүн Дирихле мәсэләси

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә ашағыдакы мәсәләжә бахылыр:

Тутаг ки, гапалы һамар γ әјриси сонлу сәјда бучаг нөгтэлэри олан гапалы Γ әјриси илә әһатә олулмуш мәһдуд g областыны харичи g_2

вә дахили g_1 областларына ајырмашдыр, белә ки $g = g_1 + g_2 + \gamma$, g_1 вә g_2 областында һармоник, $g + \Gamma$ гапалы областында кәсилмәз, Γ әјриси үзәриндә

$$U(s) = f(s)$$

вә γ әјриси үзәриндә

$$K_1 \left(\frac{dU}{dn} \right)_- - K_2 \left(\frac{dU}{dn} \right)_+ + h(s)U = \varphi(s).$$

шәртини өдәјән U функцијасынын тапылмасы тәләб олулур. Максимум вә минимум принципдән вә Келдыш—Лаврентјев теореминдән истифадә едәрәк һәллин јеканәлији исбат едилир. Мәсәләннин һәлли садә вә икигәт ләј потенцијалынын чәми шәклиндә ахтарылмагла, сингулар интеграл тәнликләр системинин һәллине кәтирилир. Бу системә эквивалент олан Фредһолм интеграл тәнликләр системи гурулур вә онун јеканә һәллинин варлығы исбат едилир.

Л. М. ИМАНОВ, Я. М. АББАСОВ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В БУТИЛОВЫХ СПИРТАХ

Настоящая статья является продолжением нашей работы [1], посвященной изучению частотно-температурной зависимости диэлектрической релаксации в пропиловых спиртах.

Температурная зависимость диэлектрических коэффициентов бутиловых спиртов изучалась только для изобутилового спирта. П. П. Кобеко, Е. В. Кувшинский и Н. И. Шишкин [2] построили температурные кривые дисперсии и поглощения на частотах 50 и 1000 гц, а в работе Мидзусима [10] измерения произведены на частотах $6 \cdot 10^6$ гц и более высоких.

В данной работе приводятся результаты измерения температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости *n*-бутилового и изобутилового спиртов на семи фиксированных частотах диапазона $10^5 \div 10^8$ гц в интервале температур $+20 \div -160^\circ\text{C}$.

Результаты измерения и обсуждение

Измерения, как и в случае пропиловых спиртов, произведены на частотах: 0,3; 0,8; 2,0; 5,0; 9,0; 20 и 32 мгц. На рис. 1 и 2 представлены температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' и показателя поглощения ϵ'' .

Как видно из рис. 1 и 2, на всех указанных частотах в температурной зависимости диэлектрических коэффициентов тоже наблюдается сильная дисперсия и поглощение. Основные величины, характеризующие дисперсию и абсорбцию, приведены в табл. 1 (для *n*-бутилового спирта) и табл. 2 (для изобутилового спирта).

В таблицах даны: величины частот f_0 , при которых снимались температурные зависимости; время релаксации— τ , соответствующее этим частотам; максимальные значения показателя поглощения— $\epsilon''_{\text{макс}}$ и температуры— T_0 , соответствующие им; максимальные значения показателя потерь— $\text{tg}\delta_{\text{макс}}$ и соответствующие им температуры— T_1 ; значения ширины кривой поглощения на уровне половины максимума.

Из табл. 1, 2 видно, что, как и в пропиловых спиртах, с уменьшением частоты максимум кривых поглощения и потерь, а также область дисперсии в целом смещаются в сторону более низких температур. Здесь тоже с уменьшением частоты обращает на себя внима-

Л. М. ИМАНОВ, Я. М. АББАСОВ

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В БУТИЛОВЫХ СПИРТАХ

Настоящая статья является продолжением нашей работы [1], посвященной изучению частотно-температурной зависимости диэлектрической релаксации в пропиловых спиртах.

Температурная зависимость диэлектрических коэффициентов бутиловых спиртов изучалась только для изобутилового спирта. П. П. Кобеко, Е. В. Кувшинский и Н. И. Шишкин [2] построили температурные кривые дисперсии и поглощения на частотах 50 и 1000 гц, а в работе Мидзусима [10] измерения произведены на частотах $6 \cdot 10^6$ гц и более высоких.

В данной работе приводятся результаты измерения температурной зависимости комплексной диэлектрической проницаемости *n*-бутилового и изобутилового спиртов на семи фиксированных частотах диапазона $10^5 \div 10^8$ гц в интервале температур $+20 \div -160^\circ\text{C}$.

Результаты измерения и обсуждение

Измерения, как и в случае пропиловых спиртов, произведены на частотах: 0,3; 0,8; 2,0; 5,0; 9,0; 20 и 32 мггц. На рис. 1 и 2 представлены температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' и показателя поглощения ϵ'' .

Как видно из рис. 1 и 2, на всех указанных частотах в температурной зависимости диэлектрических коэффициентов тоже наблюдается сильная дисперсия и поглощение. Основные величины, характеризующие дисперсию и абсорбцию, приведены в табл. 1 (для *n*-бутилового спирта) и табл. 2 (для изобутилового спирта).

В таблицах даны: величины частот f_0 , при которых снимались температурные зависимости; время релаксации— τ , соответствующее этим частотам; максимальные значения показателя поглощения— $\epsilon''_{\text{макс}}$ и температуры— T_0 , соответствующие им; максимальные значения показателя потерь— $\text{tg}\delta_{\text{макс}}$ и соответствующие им температуры— T_1 ; значения ширины кривой поглощения на уровне половины максимума.

Из табл. 1, 2 видно, что, как и в пропиловых спиртах, с уменьшением частоты максимум кривых поглощения и потерь, а также область дисперсии в целом смещаются в сторону более низких температур. Здесь тоже с уменьшением частоты обращает на себя внима-

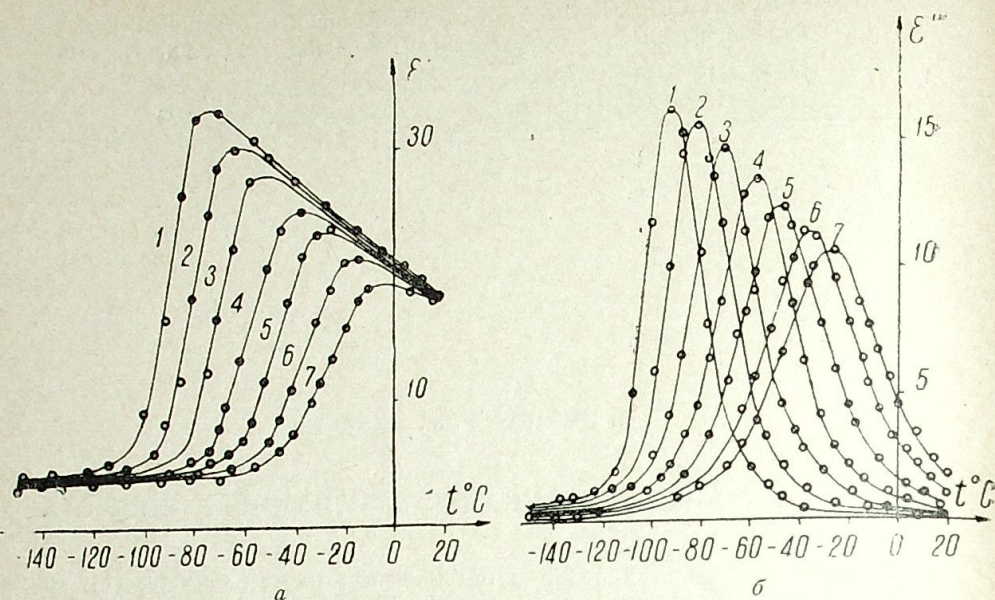


Рис. 1

а—температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' *n*-бутилового спирта.
б—температурная зависимость показателя поглощения ϵ'' *n*-бутилового спирта, при частотах: 1—0,3; 2—0,8; 3—2,0; 4—5,0; 5—9,0; 6—20 и 7—32 мГц.

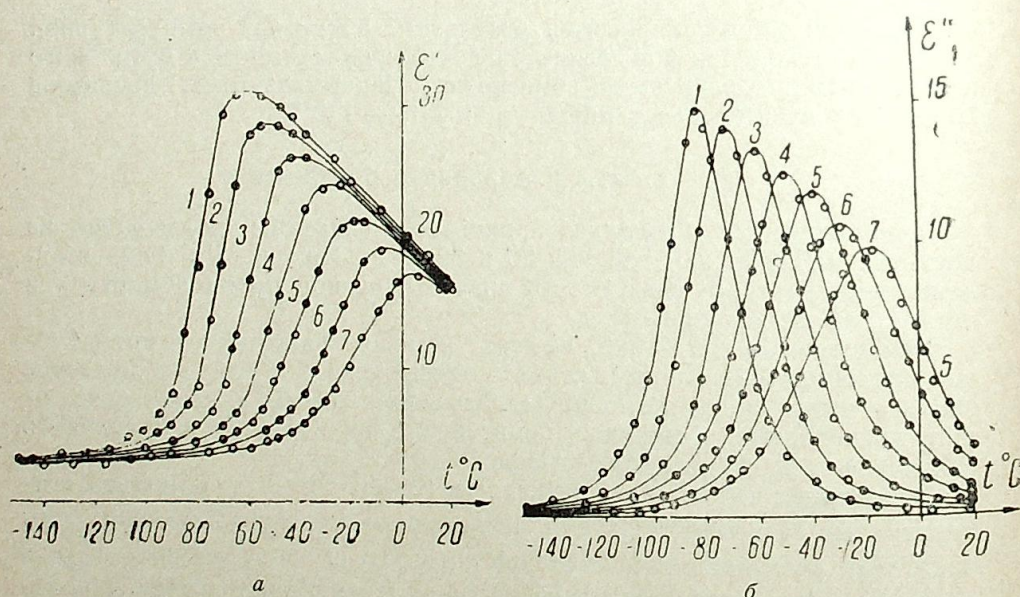


Рис. 2

а—температурная зависимость диэлектрической проницаемости ϵ' изобутилового спирта;
б—температурная зависимость показателя поглощения ϵ'' изобутилового спирта при частотах: 1—0,3; 2—0,8; 3—2,0; 4—5,0; 5—9,0; 6—20 и 7—32 мГц.

ние увеличение $\epsilon''_{\text{макс}}$ и $\text{tg}\delta_{\text{макс}}$, сужение кривых поглощения и потерь и возрастание величины уменьшения диэлектрической проницаемости в области дисперсии.

Таблица 1

$f_0 \cdot 10^{-6}$	$\tau \cdot 10^8$, сек	$\epsilon''_{\text{макс}}$	$T_0^\circ \text{K}$	$\text{tg}\delta_{\text{макс}}$	$T_1^\circ \text{K}$	ΔT
32,0	0,50	10,6	247,0	1,08	231,5	48,3
20,0	0,80	11,9	238,0	1,11	224,5	44,2
9,0	1,77	12,4	225,0	1,15	214,0	40,0
5,0	3,19	13,5	216,4	1,18	203,0	37,0
2,0	7,96	14,8	204,0	1,22	192,5	32,2
0,8	19,0	15,8	193,0	1,25	185,0	30,3
0,3	53,10	16,4	181,8	1,29	175,0	26,5

Таблица 2

$f_0 \cdot 10^{-6}$	$\tau \cdot 10^8$, сек	$\epsilon''_{\text{макс}}$	$T_0^\circ \text{K}$	$\text{tg}\delta_{\text{макс}}$	$T_1^\circ \text{K}$	ΔT
32,0	0,50	9,8	257,0	1,06	239,0	52,0
20,0	0,80	10,7	246,5	1,09	231,0	50,0
9,0	1,77	11,8	235,0	1,13	219,0	45,8
5,0	3,19	12,5	226,0	1,14	210,0	39,4
2,0	7,96	13,4	213,0	1,17	201,0	36,4
0,8	19,0	14,2	202,5	1,22	190,5	35,2
0,3	53,1	15,0	191,0	1,25	182,0	30,5

На рис. 3 представлена зависимость $\lg \tau = \varphi(1/T)$, где для сравнения приведены и данные для пропиловых спиртов. Энергия активации, определенная из наклона прямых для бутиловых спиртов, оказалась равной 6,4 и 6,9 ккал/моль, соответственно.

Из сопоставления данных времени релаксации ясно, что при данной температуре значение τ для пропиловых спиртов меньше, чем у бутиловых. Также для обоих спиртов максимумы кривых поглощения изостроения сдвинуты в сторону высоких температур относительно максимумов для соответствующих нормальных спиртов. Кроме того, наклон прямых $\lg \tau = \varphi(1/T)$ у изоспиртов, следовательно, и энергия активации, больше, чем для нормальных спиртов (табл. 3).

Эти выводы хорошо согласуются с результатами исследований П. П. Кобеко и Н. М. Кумшацкой [3] для гомологического ряда эфиров метакриловой кислоты и, также, И. М. Эрлиха и П. Н. Щербака [6] для гомологического ряда ацеталей поливинилового спирта, которые обнаружили смещение максимумов кривых потерь для изостроения полимеров в области высоких температур. Также энергия

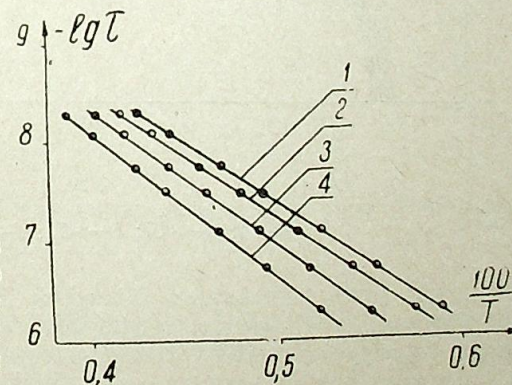


Рис. 3

Температурная зависимость времени релаксации τ спиртов:
1—*n*-пропилового; 2—изопропилового;
3—*n*-бутилового; 4—изобутилового.

активации, в частности, для поливинилизобутираля получается больше, чем у поливинилбутираля.

На рис. 4 и 5 построены диаграммы Коул—Коула при нескольких температурах. Хорошая укладываемость точек на полуокружности с центром на действительной оси указывает на то, что при этих температурах процесс диэлектрической релаксации характеризуется практически одним временем релаксации.

В табл. 4 приведены значения предельных статической и высокочастотной диэлектрической проницаемости — ϵ_0 и ϵ_∞ , найденные из круговых диаграмм.

Как видно из табл. 4, значения ϵ_∞ для бутиловых спиртов тоже значительно больше квадрата показателя преломления.

Отклонения на высокочастотных частях круговых диаграмм (на рис. 4 и 5), соответствующих низким температурам, обусловлены, по-видимому, началом второй области дисперсии.

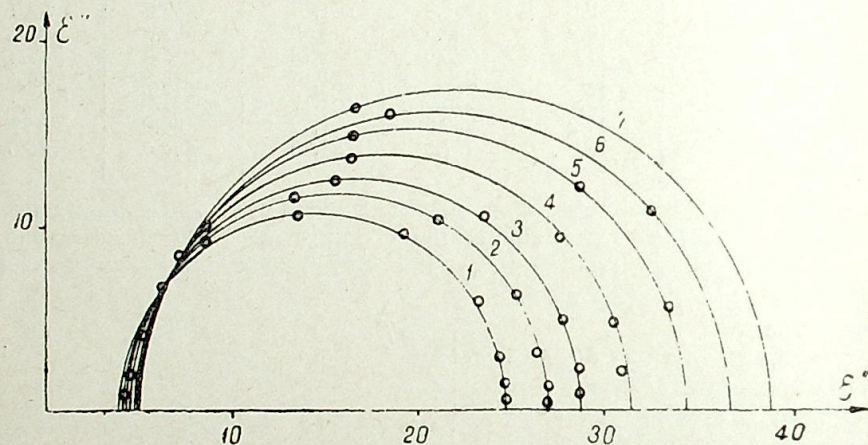


Рис. 4

Круговые диаграммы изобутилового спирта при температурах (°C): 1— -25; 2— -37; 3— -46; 4— -57; 5— -71; 6— -80 и 7— -92.

Наличие дополнительных областей дисперсии при более низких температурах, т. е. вблизи температуры застеклования, в бутиловых спиртах было установлено также Коулом и его сотрудниками [7].

Существование дополнительных областей дисперсии при более высоких температурах, как было отмечено нами ранее [1], показывает, что оно связано со строением спиртов, которые сохраняют свою цепочную структуру, благодаря водородной связи, даже при температурах, выше комнатной.

Можно попытаться дать объяснение существованию нескольких областей дисперсии, исходя из представлений Я. И. Френкеля о структуре жидкого состояния [5].

Согласно Я. И. Френкелю, для жидкостей, в особенности вблизи температуры затвердевания, характерно наличие ближнего порядка.

В отличие от ближнего порядка, имеющегося в кристаллических телах, в жидкостях эти микрообразования, окружающие данную молекулу, образуются и разрушаются в относительно короткое время. В случае молекулярных жидкостей, образованных дипольными молекулами, ближний порядок кроме постоянства в среднем числа соседей

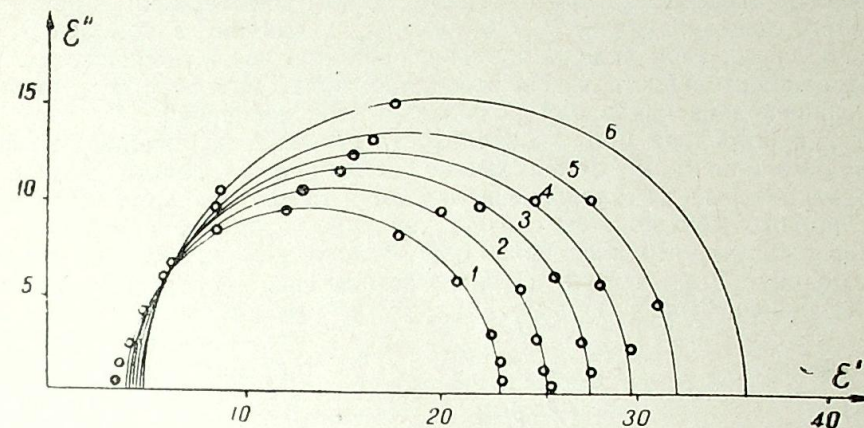


Рис. 5

Круговые диаграммы *n*-бутилового спирта при температурах (°C): 1— -16; 2— -27; 3— -39; 4— -49; 5— -60 и 6— -81.

Таблица 4

П-бутиловый спирт			Изобутиловый спирт		
<i>t</i> , °C	ϵ_0	ϵ_∞	<i>t</i> , °C	ϵ_0	ϵ_∞
-25	25,0	3,94	-16	23,0	3,70
-37	27,2	4,10	-27	25,3	3,82
-46	29,0	4,20	-39	27,4	3,97
-57	31,4	4,35	-49	29,5	4,16
-71	34,5	4,50	-60	31,7	4,38
-80	36,4	4,66	-81	35,7	4,57
-92	38,9	4,85			

при переходе от одной молекулы к следующей выражается также в более и менее правильной относительной ориентации соседних молекул.

Средняя длительность оседлой жизни молекулы в комплексе, т. е. средняя продолжительность времени τ_m , в течение которого она колеблется около одного и того же положения равновесия, по теории Френкеля определяется формулой:

$$\tau_m = \tau_{m0} e^{\frac{U_0}{RT}},$$

где τ_{m0} —период колебания, а U_0 —энергия, которая необходима для перехода через потенциальный барьер, отделяющий исходное положение равновесия от соседнего.

Принимая во внимание, что каждая молекула, входящая в микрообразование, может участвовать в ориентационной поляризации после освобождения можно ожидать, что при значениях периода приложенного внешнего поля, сравнимых с продолжительностью жизни микроструктуры, будет наблюдаться диэлектрическая дисперсия релаксационного характера. При частотах поля, входящие в комплексы, не скорость диссоциации $1/\tau_m$, молекулы, входящие в комплексы, не успевают внести свои вклады в ориентационную часть поляризации.

Продолжительность жизни ассоциированных комплексов τ_m может быть определена как время релаксации этой дисперсии.

Так как средняя продолжительность времени, в течение которой свободные молекулы — молекулы, не входящие в данный момент в ассоциированные комплексы, — колеблются около положения равновесия, намного меньше, чем соответствующее время для комплексов, можно ожидать, что дисперсии, обусловленные реориентацией свободных молекул и ее частей, а также резонансная дисперсия, вызванная вращательным колебанием молекул, будут наблюдаться на более вы-

соких частотах, чем дисперсия, связанная с существованием микроструктур.

Микрообразования в спиртах имеют цепочную структуру, где молекулы соединены водородной связью.

На основании спектроскопических, рентгеновских и других исследований можно предполагать, что в жидких спиртах наряду со структурными комплексами в виде цепочек имеются и свободные мономерные молекулы.

Ввиду того, что энергия водородной связи в 2—3 раза больше,

чем энергия связи ван-дер-ваальсовых сил и диполь-дипольного взаимодействия, имеющих между „свободными“ молекулами, естественно ожидать, что низкочастотные дисперсии связаны с диссоциацией цепочек.

То, что значения для энергии связи, найденные из наклона прямых $\lg \tau = \varphi(1/T)$ (табл. 3), довольно близки к энергии водородной связи ($\sim 6,0$ ккал/моль), дает основание полагать, что изученная нами низкочастотная дисперсия обусловлена именно диссоциацией цепочек.

Исходя из этого, приравнявая найденные значения для времени релаксации τ к продолжительности жизни цепочек τ_m , можно определить скорость диссоциации комплексов как $K_d = 1/\tau_m$.

Вычисленные таким путем значения, скорости диссоциации на рис. 6 представлены в зависимости от температуры.

По данным Коула и других не трудно установить, что скорость изменения времени релаксации второй области дисперсии в зависимости от температуры очень близка к соответствующей скорости низкочастотной дисперсии.

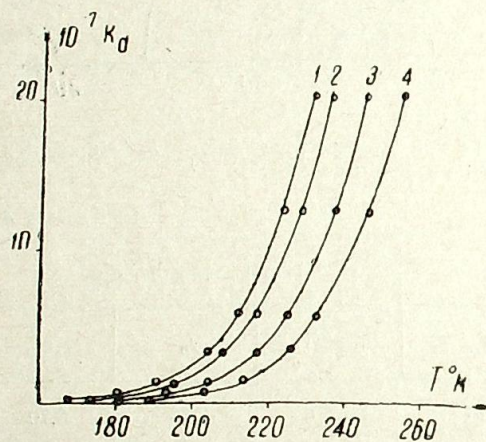


Рис. 6
Температурная зависимость скорости диссоциации цепочек спиртов — K_d
1—*n*-пропиловый; 2—изопропиловый;
3—*n*-бутиловый и 4—изобутиловый.

Поэтому можно полагать, что вторая область дисперсии также обусловлена поведением молекул, входящих в цепочки, в частности, находящихся на концах цепочек.

Анализ результатов исследований М. Мага и К. Бро [4], относящихся к высшим спиртам, приводит к заключению, что третья и другие области дисперсии соответствуют релаксации быстро ориентирующихся молекул, т. е. свободных молекул и гидроксильных групп.

Вращательные колебания около водородной связи, наблюдаемые в далекой инфракрасной области, могут внести вклад в диэлектрическую проницаемость. Резонансная дисперсия, обнаруженная Эррера [8] (в области $50\div 150$ μ), может быть объяснена именно наличием таких колебаний.

Выводы

Изучена температурная зависимость комплексной диэлектрической проницаемости *n*-бутилового и изобутилового спиртов на семи частотах диапазона $10^5\div 10^8$ гц в интервале температур $+20\div -160^\circ\text{C}$. Поведение этих спиртов в указанных интервалах частот и температур совершенно аналогично поведению пропиловых спиртов; с уменьшением частоты наблюдается увеличение максимальных значений показателей поглощения и потерь, сужение кривых поглощения и потерь, а также возрастание величины уменьшения диэлектрической проницаемости в области дисперсии.

Из наклона прямых $\lg \tau = \varphi\left(\frac{1}{T}\right)$ определена энергия активации,

которая оказалась равной 6,4 и 6,9 ккал/моль для *n*-бутилового и изобутилового спиртов, соответственно.

Путем построения круговых диаграмм было установлено наличие дополнительных областей дисперсии при температурах значительно выше температур застеклования. Диэлектрическая релаксация в изученной области может быть изображена известным уравнением Дебая, соответствующим одному времени релаксации.

Дается объяснение существования нескольких областей дисперсии релаксационного характера, исходя из представления Я. И. Френкеля о структуре жидкого состояния, согласно которому для жидкостей, в особенности вблизи температуры затвердевания, характерно наличие ближнего порядка.

Предполагается, что изученные нами низкочастотные дисперсии в пропиловых и бутиловых спиртах обусловлены диссоциацией микрообразований, существующих в спиртах, даже при более высоких температурах в виде цепочек. Приравниванием продолжительности этих цепочек к времени релаксации указанной дисперсии определена скорость диссоциации цепочек для всех четырех спиртов при различных температурах. С понижением температуры скорость диссоциации уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иманов Л. М., Аббасов Я. М. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“. 1962, № 3.
2. Кобеко П. П., Кувшинский Е. В. и Шижкин Н. И. ЖТФ, 1938, т. VIII, вып. 8.
3. Кобеко П. П., Кумшацкая Н. М. Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе.
4. Мага М. и Бро К. „Изв. АН СССР“, серия физич., 1960, № 1.
5. Френкель Я. И. „Изв. АН СССР, серия физич.“, 1937, № 3.

6. Эрлих И. М. и Шербак П. Н. ЖТФ, 1955, XXV, вып. 9.
7. Dannagser B. and Cole R. The Journ. Chem. Phys., 23, № 10, 1955
8. Errera. Journ. Physique, 5, 304 (1924).
9. Cole K. and Cole R. The Journ. Chem. Phys., 9, 341 (1941).
10. Mizushima S. Phys. Z., 28, 418 (1927).

Л. М. Иманов, J. М. Аббасов

Бутил спиртләрində диелектрик релаксасија

ХҮЛАСӘ

$10^5 \div 10^8$ *hc* диапазонундакы једди тезликдә *n*-бутил вә изобутил спиртләринин комплекс диелектрик әмсалынын $+20^\circ \div -160^\circ\text{C}$ интервалында температур асылылығы өјрәнилмишдир. Көстәрилән тезлик вә температур интервалында һәммин спиртләрин өзләрини апармасы тамамилә пропи́л спиртләрində олдуғу кимидир; тезлијин азалмасы илә удма вә итки көстәричисинин максимум гијмәтләринин артмасы, удма вә итки әјриләринин даралмасы вә еләчә дә дисперсија областында диелектрик әмсалынын азалма гијмәтинин артмасы мүшәһидә олунур.

$\lg \tau = \varphi \left(\frac{1}{T} \right)$ дүз хәттинин мејлиндән тапылан фәаллашма енержиси *n*-бутил вә изобутил спиртләри үчүн ујғун оларағ 6,4 вә 6,9 ккал/мол олмушдур.

Даирәви диаграмгурма јолу илә мүәјјән олунмушдур ки, шүшәләнмә температурундан даһа јүксәк температурларда да әләвә дисперсија областлары вардыр. Өзү дә өјрәнилән областда диелектрик релаксасија бир релаксасија вахтына ујғун олан мә'лум Дебај тәнлији илә ифадә олуна билир.

Френкелин мәјеләрин гурулушу һаггындакы тәсәввүрүнә көрә бир нечә дисперсија областынын олмасы әсасландырылыр.

Белә күман едилир ки, бизим тәдгиг етдијимиз дисперсија спиртләрдә зәнчир шәклиндә олан микрогурулушун орта јашама мүддәти илә мүәјјән едилир. Бу јашама мүддәтини релаксасија вахтына бәрәбәр гәбул едиб, бахылан спиртләрдә молекулјар зәнчирләрин диссоциасија сүр'әтинин температурдан асылылығы өјрәнилмишдир. Температурун азалмасы илә диссоциасија сүр'әти кичилир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ

Физика-ријазиијат вә техника елмләри серијасы, 1962, № 2.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР

Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 2.

К. П. МАМЕДОВ, З. Д. НУРИЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ И ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЯ СЛОЯ СЕЛЕНА, НАНЕСЕННОГО НА АІ ПОДКЛАДКУ.

Селен широко применяется в полупроводниковой технике. Поэтому всестороннему исследованию его физических свойств при различных условиях уделено и уделяется большое внимание.

В связи с тем, что основные физические свойства селена, в частности электрические, сильно зависят от состояния структуры, в том числе от степени кристаллизации, то структурному исследованию также посвящено значительное число работ. Большой интерес к структурному исследованию селена прежде всего обусловлен тем, что все широко применяемые в технике селеновые приборы подвергаются различным термообработкам на разных стадиях их изготовления. Все приводимые термообработки обычно сводятся к кристаллизации, обеспечивающей хорошую характеристику прибора. Кристаллизацией селена (переходом его из аморфного состояния в кристаллическое) резко уменьшается его электросопротивление.

Из сказанного следует, что исследование кристаллизации и изменение электросопротивления при данном режиме термообработки селена представляет первостепенное значение для выбора оптимальных условий изготовления селеновых приборов.

В работах, посвященных структурному исследованию селена, отмечается, что кроме аморфного состояния, селен может находиться в различных кристаллических состояниях и что более устойчивым кристаллическим состоянием является гексагональная модификация.

В работе М. Слеттера [5] приводятся рентгенографические данные металлического селена, указывается на гексагональность структуры, дается $a = 4,34 \text{ \AA}$ и $\frac{c}{a} = 1,14$, не указывая метода получения кристалла.

В работе Г. С. Жданова и Ю. В. Шарвина [2] показано, что в результате отжига аморфного селена при 210°C в течении 2—4 часов получается его гексагональная модификация. По известной формуле рассчитана интенсивность ряда интерференций селена, которая сравнивается с интенсивностью экспериментально наблюдаемых интерференций. Межплоскостные расстояния, рассчитанные при $a = 4,34 \text{ \AA}$, $c = 4,95 \text{ \AA}$, хорошо согласуются с экспериментальными результатами. Как пока-

зывает расчет и экспериментальные результаты, наиболее интенсивными являются интерференции $10\bar{1}0$ и $10\bar{1}1$.

Ряд работ Хенкелса посвящен электрическим свойствам моно- и поликристаллического селена. В частности, в [8] указывается, что в случае монокристалла электросопротивление не затронуто вопросы структурной термообработки (отжига). В этих работах не затронуты вопросы структуры и поэтому не объяснена причина последнего замечания, которая, по-видимому, может быть обусловлена совершенствованием структуры в результате повторения циклов кристаллизации.

В работах Г. Кребса [6] уделено внимание на связь между структурой и электрическими свойствами селена, где особо отмечается влияние примесей на оба эти фактора.

Аморфный селен представляется состоящим из длинных цепочек, как в высокополимерном веществе, где в результате термообработки, цепи разрываются в более короткие цепочки с радикальными концами и снова полимеризуются в длинные цепи в решетке гексагонального селена.

Резюме работ Кребса можно выразить его же словами: "...для выяснения больших подробностей необходимо комбинировать исследование структуры селена рентгеновскими лучами с изучением его электрических свойств."

Интересными с точки зрения структуры и электрических свойств селена являются результаты, полученные оптическими исследованиями Е. Биллига [4]. Им установлено, что для аморфного и кристаллического селена ширина запрещенной зоны ($2,05 \text{ эВ}$) почти одинакова. На основании этого предполагается, что цепочная структура кристаллического селена остается и в аморфной фазе. Край полосы поглощения на сравнительно больших монокристаллах, на поликристалле и аморфном селене также близок, что соответствует идентичности расстояний между атомами в цепочке во всех трех состояниях. Однако в случае монокристаллов край полосы поглощения более определен и остр ($\lambda_0 = 612 \text{ Å}$). Низкая электропроводность аморфного селена объясняется потенциальным барьером, существующим между цепочками.

Особый интерес представляет работа К. Хасимото и др. [7], где ставится вопрос об исследовании связи между кристаллизацией и электрическим сопротивлением селеновых пленок. На кривой функции $A = f(T)$ (T — температура термообработки) установлено наличие двух минимумов. Первый получается при 90°C , что, по мнению авторов, соответствует моменту образования максимального числа центров кристаллизации, второй минимум (около 150°C) соответствует моменту максимальной скорости роста величин кристаллов.

Кристаллизации тонких пленок селена посвящено несколько электронографических исследований. В частности, А. И. Андриевским и др. [1] изучена кристаллизация пленок селена толщиной порядка $600\text{--}800 \text{ Å}$ и указывается, что в температурном интервале $30\text{--}160^\circ\text{C}$ образуются различные модификации кристаллического селена.

Резюмируя результаты опубликованных исследований, можно отметить, что почти во всех работах структурного характера выясняется кристалличность, полученная после определенной термообработки. Далее, отдельные работы, в которых изучена кристаллизация селена в зависимости от режима термообработки, проведены рентгено-фотографическим методом. В них нет возможности проследить за ходом структурных изменений, происходящих в условиях данного режима термообработки, а выявляется только конечное состояние, не обращая внимания на то, когда и при какой стадии термообработки произошла

данная кристаллизация. В работах же, посвященных исследованию электрических свойств селена в зависимости от различной термообработки, где также говорится о кристаллизации, нет непосредственного контроля за изменением структуры или ходом кристаллизации.

Целью настоящей работы является изучение кинетики кристаллизации (т. е. перехода из аморфного состояния в поликристаллической гексагональный селен) с одновременным измерением электросопротивления данного образца селена при различных температурных режимах. Это может восполнить пробел, имеющийся в приведенных выше работах о связи между кристалличностью и электрическими свойствами селена.

Такая постановка задачи возможна благодаря применению рентгенодифрактометра УРС — 50 — И, где есть возможность с помощью ионизационного счетчика проследить за изменением интенсивности отдельных интерференционных линий, на основе которой можно судить о ходе кристаллизации. В работе излагаются результаты исследования слоя селена, нанесенного на Al подкладку.

Экспериментальная часть

Идея работы сводится к тому, что с изменением степени кристаллизации — переходом из аморфной фазы в кристаллическую — интенсивность интерференционных линий будет расти*. Одновременно известно, что электросопротивление кристаллического селена намного меньше,

Таблица 1

hkl	Слаттери [5]		Жданов [2]			Наши данные	
	d	I	d	$I_{\text{набл.}}$	$I_{\text{расч.}}$	d	I
$10\bar{1}0$	3,77	8	3,6	ср.	55	3,79	58
$10\bar{1}1$ (0002)	3,01	10	2,9	о. с.	100	3,02	100
$11\bar{2}0$	2,17	2	2,17	ср. сл.	17	2,18	22
$10\bar{1}2$	2,07	2,5	2,07	с.	39	2,07	34
$11\bar{2}1$	1,997	2	1,99	ср.	28	2,00	23
$20\bar{2}0$	1,880	0,2	1,89	—	3	—	—
$20\bar{2}1$	1,77	1,7	1,77	ср.	30	1,769	19
$11\bar{2}2$, 0003	1,638	1,5	1,65	ср. сл.	23	1,643	11
$10\bar{1}3$, $20\bar{2}2$	1,505	1,5	1,51	ср.	25	1,504	10
$12\bar{3}0$	1,425	1,5	1,43	ср. сл.	22	1,432	10

чем аморфного. Следовательно, с увеличением степени кристаллизации сопротивление слоя селена должно уменьшаться. Таким образом, общая постановка работы сводится к получению серий кривых измене-

* Интенсивности приведены без учета факторов.

ния интенсивности и электросопротивления в зависимости от условия термообработки, т. е. к построению серий кривых:

$$\left. \begin{aligned} I &= f_1(\tau, T) \\ R &= f_2(\tau, T) \end{aligned} \right\},$$

где τ и T время и температура, соответственно.

Интенсивности* нескольких интерференционных линий гексагонального селена, полученные нами, даны в табл. 1. Для сопоставления приводятся также экспериментальные и расчетные данные, имеющиеся в литературе [2,5].

На основании сказанного, в качестве характерных интерференционных линий были выбраны линии $10\bar{1}0$ и $10\bar{1}1$ или, вернее, увеличение интенсивности этих линий с увеличением степени кристаллизации в данном температурном режиме.

Температурный режим создается и регулируется двумя печами, одна из которых имеет плоскую форму и устанавливается вместе с плоским образцом на специальном теплоизолированном кристаллодержателе, а другая выполнена в виде цилиндра. Цилиндрическая внешняя печь также теплоизолирована от гониометра диффрактометра, охватывает весь кристаллодержатель и устраняет теплопотери основной — внутренней печи. Внешняя печь имеет соответствующий разрез для прохождения пучка рентгеновских лучей.

Использован K_α дублет Cu излучения. K_β излучение отфильтровано Ni фильтром толщиной $\sim 0,02$ мм. При таком фильтре K_β излучение почти отсутствует в спектре, что проверялось на дифракционном спектре, полученном от грани (110) монокристалла $NaCl$. Пучок рентгеновских лучей диафрагмируется двумя щелями шириной 0,5 мм, а высота щелей подбирается так, чтобы интенсивность наиболее сильной интерференционной линии находилась в линейной области характеристики ионизационного счетчика.

Схема эксперимента приведена на рис. 1.

Образец, состоящий из Al пластинки, на которую нанесен слой технического селена толщиной $\sim 100 \mu$, имеет форму прямоугольного шлифа площадью 1×4 см. Толщина слоя селена оценивалась по ослаблению интенсивности интерференции от Al [3]. Такая форма образца позволяет рентгенографи-

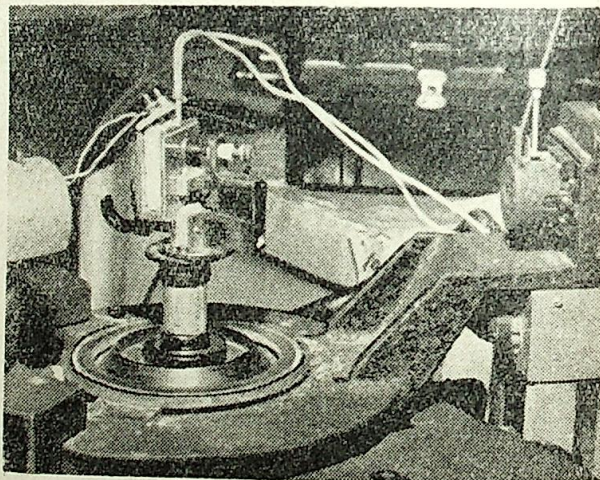


Рис. 2

* Интенсивности приведены без учета факторов.

ровать один участок, а из соседнего участка измерять электросопротивление слоя селена с помощью мегомметра МОМ — 3. Температура образца измеряется дифференциальной термопарой медь — константа. Фотография образца вместе с внутренней печью в сборе дана на рис. 2.

Кристаллизация проведена при двух температурных режимах: при различных постоянных температурах и при постоянной скорости нагрева образцов.

Кривые режима получения постоянных температур, при которых проведена кристаллизация, представлены на рис. 3. На оси абсцисс отложено время (в минутах), а на оси ординат — температура. Из кривых следует, что желаемая постоянная температура достигается за 2—2,5 минуты, а кристаллизация проведена при температурах 70, 90, 170, 180, 200 и $216^\circ C$.

При температурах ниже $120^\circ C$ процесс кристаллизации идет медленно и это позволяет проследить за изменением интенсивности нескольких интерференционных линий. В работе о ходе кристал-

зации ведется суждение по изменению интенсивности двух интерференций $10\bar{1}0$ и $10\bar{1}1$ которым соответствуют углы отражения $2\theta = 23^\circ 24'$ и $29^\circ 30'$ при комнатной температуре. Запись интенсивности отражения и электросопротивления ведется в следующем порядке; до включения печи отсчитывается показание МОМ — 3 и записывается фон рассеяния от аморфного селена на электронном потенциометре ЭПП-09 рентгендиффракто-

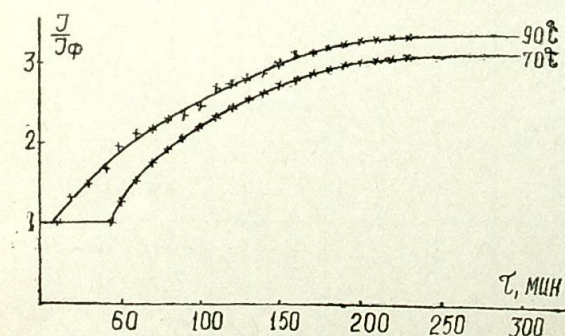


Рис. 4

метра УРС — 50 — И, когда счетчик гониометра ГУР — 3 с постоянной скоростью (2 или 4 град/мин.) пробегает в интервале углов $2\theta = 20 \div 31^\circ$ (отсутствие интерференционных линий указывает на аморфность). С включением печи отсчитывается время и через равные промежутки времени (10—15 минут) повторяется снятие показаний МОМ — 3 и запись на ЭПП — 09.

Процесс продолжается до тех пор, пока интенсивность двух интерференционных линий, возникающих на этом интервале, и показание МОМ — 3 больше не меняются. Результаты изменения интенсивности этих интерференционных линий (вернее отношение I/I_ϕ), полученных

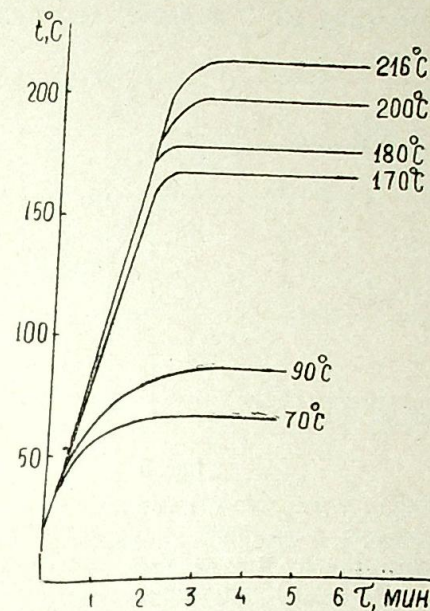


Рис. 3

рентгендиффрактометра УРС — 50 — И, когда счетчик гониометра ГУР — 3 с постоянной скоростью (2 или 4 град/мин.) пробегает в

при температурах кристаллизации 70 и 90°C, приведены на рис. 4. Из кривых следует, что при этих температурах процесс кристаллизации продолжается 4—5 часов. Причем интенсивность линии при кристаллизации 90°C больше, чем при 70°C, что указывает на степень кристаллизации при указанных температурах.

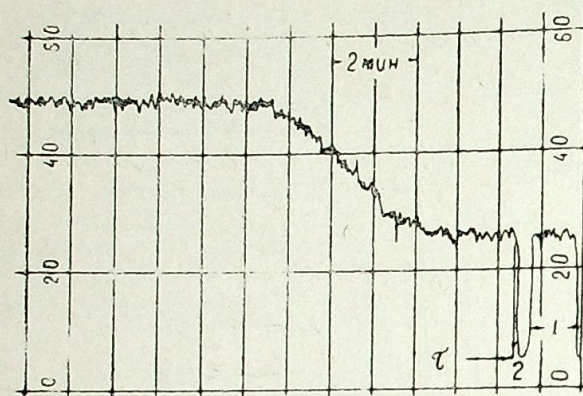


Рис. 5

Ввиду того, что с изменением температуры положение линии слегка смещается, в данных экспериментах ширина щели счетчика берется 0,5 мм (а в предыдущих — 0,25 мм), что обеспечивает полный охват отраженного пучка лучей.

Для иллюстрации хода изменения интенсивности на рис. 5 и 6 приведены две записи на ЭПП — 09, полученные при 170 и 216°C. В правой части показаны отдельные кусочки фона рассеяния от аморфного селена до включения печи, когда счетчик установлен в положении $2\theta = 29^\circ 30'$. Участок после провала на записи соответствует интенсивности рассеяния после включения печи в неизменном положении счетчика. Лента на ЭПП — 09 протягивается с постоянной скоростью (2 см/мин.) так, что на оси абсцисс будет отложено время.

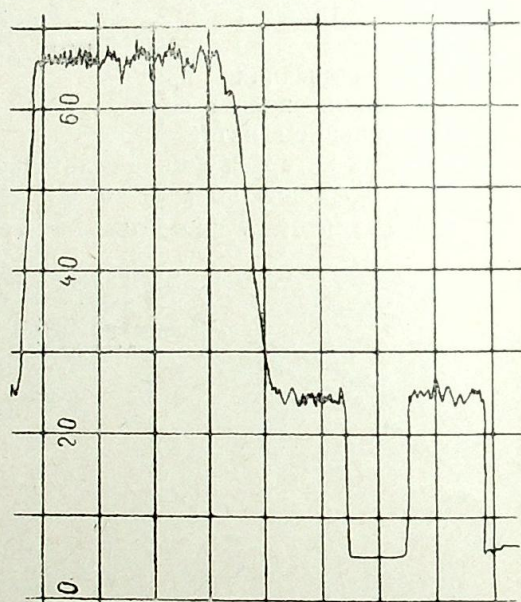


Рис. 6

В частности на рис. 6 за ходом изменения интенсивности линии прослеживается в течение 5—6 минут, где после 2,5 минуты интенсивность больше не меняется. Если образец оставить при этой температуре сколько угодно долго, заметного изменения интенсивности не происходит. После этого печь выключается и образец остывает до комнатной температуры. Запись интенсивности всех интерференционных линий селена при комнатной температуре показывает, что интенсивность линии 1011 увеличивается незначительно (за счет температур-

ного фактора). Следовательно, кристаллизация происходит в процессе нагрева, а не в процессе остывания нагретого образца. Кроме того, повторяя нагрев того же образца при одинаковых условиях несколько раз можно убедиться, что интенсивность линий больше не меняется. Таким образом наблюдаемое изменение интенсивности (а следовательно и кристаллизация) происходит именно за первые 2—2,5 минуты первого цикла нагрева.

Из приведенных записей видно, что как время, так и степень кристаллизации при указанных температурах различные — с ростом температуры скорость и степень кристаллизации растут. Сказанное хорошо иллюстриру-

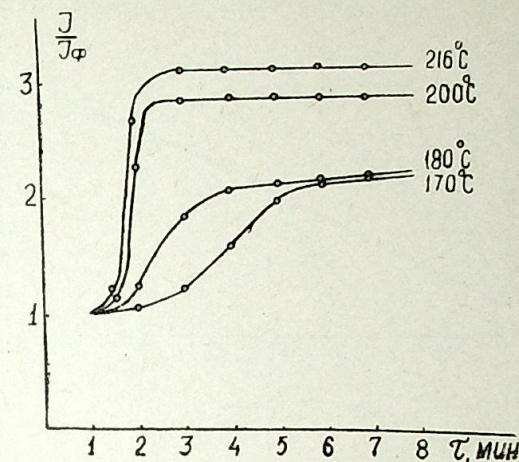


Рис. 7

ется кривыми изменения интенсивности линии 1011, приведенными на рис. 7. На оси абсцисс отложено время (в минутах), на оси ординат отношение I/I_ϕ , полученные при температурах 170, 180, 200 и 216°C.

На рис. 8 приведены кривые изменения сопротивления, отмеченные в процессе кристаллизации с помощью МОМ — 3. На оси абсцисс отложено время, а на оси ординат — $\lg R$ (ибо область изменения сопротивления слишком большая). Сопоставление кривых рис. 8 и 7 указывает на наличие корреляции между ходами кривых изменения интенсивности и электросопротивления.

Из сопоставления кривых режима нагрева (рис. 3) и кинетики кристаллизации (рис. 7) следует, что часть кристаллизации происходит до достижения постоянной температуры, при которой предполагается, что происходит кристаллизация. Для того, чтобы выяснить подробный ход процесса был выбран второй режим нагрева — нагрев

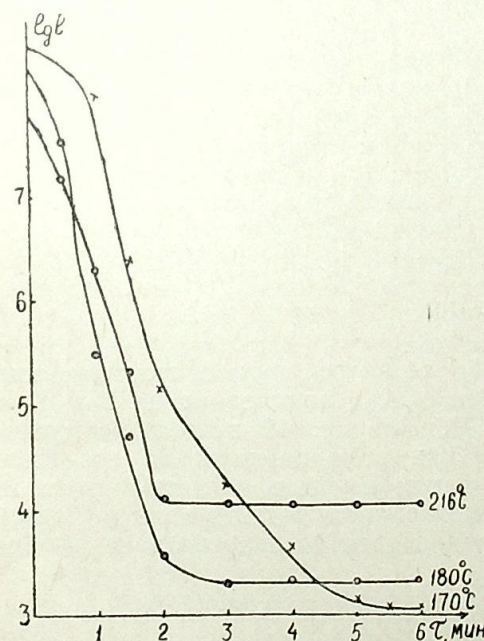


Рис. 8

образца с постоянной скоростью повышения температуры от комнатной до 217°C. Подобраны три режима — нагрев до 217°C за 15, 30 и 60 минут. Кривые режима нагрева приведены на рис. 9. На оси абсцисс отложено время (в минутах), а на оси ординат — температура. В этих условиях также изучено изменение сопротивления образца и изменение интен-

сивности линий 1011. Весьма характерной оказалась кривая изменения интенсивности линии при 30 минутном нагреве образца до 217°С.

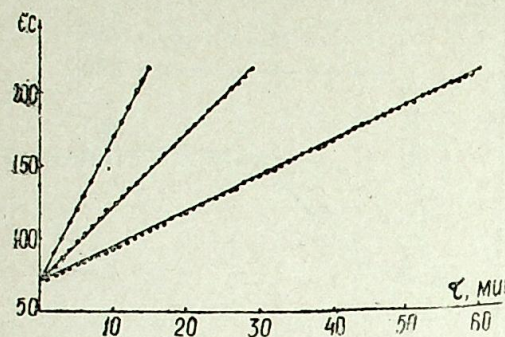


Рис. 9

Запись на ЭПП-09 для этого режима приведена на рис. 10; (опять с правой стороны показан фон до нагрева, а за нулевым фоном прибора интенсивность рассеяния после включения печи). На этой записи можно считать, что на оси абсцисс отложена температура, а на оси ординат — интенсивность линии 1011 (при неподвижном счетчике). На записи отчетливо видно два температурных интервала (100—130°С и 180—200°С), где скорость изменения интенсивности более резкая. По-видимому, в этих температурных интервалах скорость кристаллизации больше, чем в соседних. Эти результаты проиллюстрированы

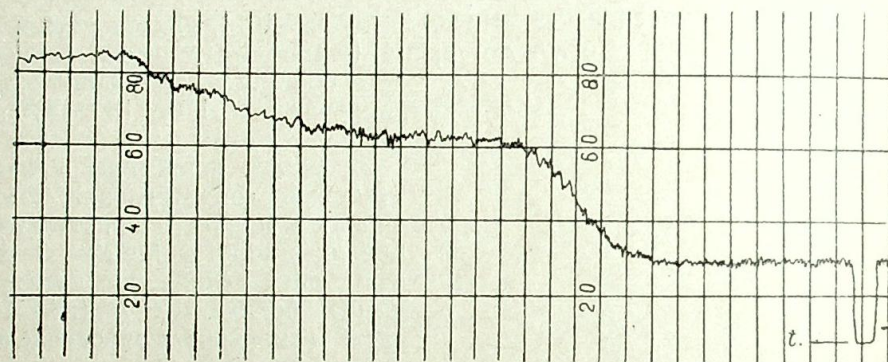


Рис. 10

кривыми, приведенными на рис. 11, где на оси абсцисс отложена температура, на оси ординат — отношение I/I_0 , полученные за 15, 30 и 60 минут нагрева образца до 217°С. На рис. 12 приведены кривые изменения сопротивления образца при этом режиме. На последних кривых также можно видеть две температурные области с резкими изменениями сопротивления. Это также подтверждает наличие корреляции между степенью кристаллизации и электросопротивлением селена.

Обсуждение экспериментальных результатов

Основные экспериментальные результаты по кинетике кристаллизации слоя селена, нанесенного на Al подкладку, можно сформулировать следующим образом: время рентгенодиффрактометрически наблюдаемой максимальной кристаллизации резко зависит от температуры, меняясь с 5 часов при 70°С до 2—2,5 минуты при температуре 217°С; степень кристаллизации также зависит в основном от температуры и наибольшая степень кристаллизации достигается при 217°С. Скорость кристаллизации не постоянна при постоянной скорости нагрева образца,

в двух температурных областях (100—130 и 180—200°С) обнаруживается сравнительно большая скорость кристаллизации и имеется корреляция между ходами увеличения степени кристаллизации и умень-

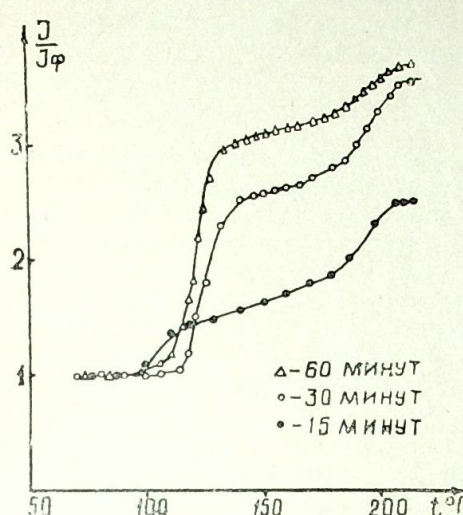


Рис. 11

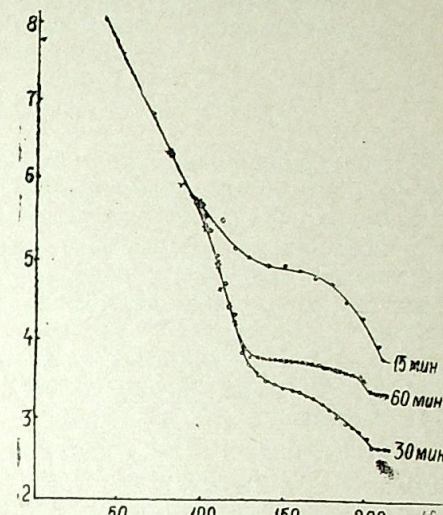


Рис. 12

шения электросопротивления исследованного слоя селена. Неравномерность кристаллизации отмечается также в работе [7].

Для качественного объяснения полученных результатов можно пользоваться общепринятым суждением о механизме кристаллизации селена. Известно, что аморфный селен состоит из произвольно расположенных длинных цепей атомов селена. Кристаллизация представляет собою процесс разрыва этих цепей в более короткое и укладки последних в определенную решетку, в данном случае в гексагональную. При каждой температуре энергия „тепловых квантов“ в состоянии разрывать цепочки определенной длины в аморфном селене. При сравнительно низких температурах подвижность цепочек, полученных в результате разрыва, будет меньше и следовательно кристаллизация будет незначительной. С повышением температуры растет энергия „тепловых квантов“ и возникает возможность разрыва цепей на более короткие цепочки, подвижность которых также большая. Это может привести к более высокой степени кристаллизации. Неравномерность скорости кристаллизации в двух температурных областях (100—130° и 180—200°С), по-видимому, может быть объяснена как бы „резонансным поглощением тепловых квантов“ в указанных температурных областях, в результате которого скорость разрыва (а также упаковки) цепочек увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский А. И., Набитович И. Д. и Крипкевич П. И. „ДАН СССР“, т. 124, № 2, 1959.
2. Жданов Г. С. и Шарвин Ю. В. ЖФХ, т. 19, вып. 3, 1945.
3. Мамедов К. П., Геллер И. Х. и Мехтиев К. М. „Заводская лаборатория“, № 4 1 60.
4. Billig E. Proc. Phys. Soc., 65, № 387 в. 216, 1951.
5. Slattery M. Phys. Rev., 25, № 3, 333, 1925.
6. Krebs H. Leitschrift für Physik., 126, 769—780, 1949.
7. Hashimoto K., Yokoyama S., Hirakawa K., Okazaki A. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., № 5, 151—156, 1955.
8. Henkels H. J. Appl. Phys., 22, № 7, 916, 1951.

**Алюминий лөвһәси үзәринә чәкилмиш селен тәбәгәсинин
кристаллашма просесинин вә електрик мугавимәтинин
дәјишилмәсинин тәдгиги**

ХҮЛАСӘ

Селен жарымкечиричиләр техникасында кениш истифадә едилән материаллардан бири олдуғуна көрә, онун мүхтәлиф шәрантләрден асылы олараг, бир чох физики хассәләринин дәјишмәси һәртәрәfli тәдгиг едилир. Селенин гурулушу вә мүхтәлиф температур режиминдә алынмыш кристаллыг дәрәчәси, һабелә температур режиминдә асылы олараг електрик хассәсинин дәјишмәси ајрылыгда кениш тәдгиг едилмишдир. Лакин бу тәдгигатларда билаваситә кристаллашма просесинин кедиши вә һәмин нүмунәләрин кристаллашма просесиндә електрик параметрләринин дәјишмәси тәдгиг едилмәмишдир. Бу мәсәленин бөјүк әһәмијәти вардыр.

Тәдгим едилән ишин мәгсәди ејни нүмунәнин һәм кристаллашма, һәм дә електрик мугавимәтинин дәјишмә кинетикасыны өјрәнмәкдир. Тәдгигатын рентген дифрактометр УРС-50-и үзәриндә апарылмасы мәсәләни бу шәкилдә гојуб һәлл етмәјә имкан вермишдир.

Просес ики температур шәраитиндә: сабит температурларда 70, 90, 170, 180, 200 вә 216°С-дә вә отаг температурундан 217°С-ә гәдәр нүмунәни сабит сүр'әтлә гыздырмаг (15, 30 вә 60 дәгигә әрзиндә) шәраитиндә өјрәнилмишдир. Кристаллашма дедикдә, бурада, селенин аморф һалдан поликристаллик һексагонал фазаја кечмәси нәзәрдә тулуур. Бу просес селенин бир вә ја бир нечә интерференсија хәттинин әмәлә кәлмәси вә интенсивлијинин артмасы илә характеризә едилир. Мүхтәлиф температур режимләриндә ујғун нүмунәләрдә алыннан интерференсија хәтләринин интенсивлијинин дәјишмәси илә ејни заманда мугавимәтин дәјишмәси дә гејд олунмушдур.

Тәчрүбәдән алыннан әјриләри арашдырараг ашағыдакы үмуми нәтичәјә кәлмәк олар:

Нүмунәләрдә рентген дифрактометрик һисс олунан кристаллашма дәрәчәси температурдан асылыдыр. Максимум кристаллашма 216—217°С-дә алыныр. Мүхтәлиф температурларда максимум кристаллашма вахты температурдан кәскин сурәтдә асылыдыр. 70°С-дә кристаллашма 5 саат мүддәтиндә кедирсә, 216—217°С-дә 2—3 дәгигәдә кедир.

Аморф селенин кристаллашма сүр'әти нүмунәнин сабит сүр'әтлә гызмасы заманы сабит дејилдир. Ики температур интервалында (100—130°С вә 180—200°С) кристаллашма сүр'әти даһа чохдур. Кристаллашма просесиндә Al тәбәгәси үзәринә чәкилмиш Se-нин електрик мугавимәтинин азалмасы вә интерференсија хәтләринин интенсивлијинин артмасы арасында мүәјјән корелјасија (ујғунлуг) вардыр.

А. С. АЛИ-ЗАДЕ, Д. А. КУЛИЕВ

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ГРОВОВЫХ
ЯВЛЕНИЙ В ШЕМАХИНСКОЙ ПОЛЕВОЙ ЛАБОРАТОРИИ**

К концу грозового сезона 1960 г. были завершены строительство и монтаж основного оборудования полевой лаборатории по изучению грозовых процессов Энергетического института Академии наук Азербайджанской ССР.

Лаборатория расположена недалеко от Астрофизической обсерватории, в 25 км к северу от гор. Шемахи, в предгорьях Пиркули, на высоте 1510 м над ур. м. [5].

На рис. 1 приведена фотография общего вида полевой лаборатории. Над зданием лаборатории установлена двухъярусная металлическая вышка, защищенная от ударов молнии.

В нижнем ярусе установлена фотокамера с временной разверткой: верхний ярус представляет собой застекленную кабину для визуального наблюдения во время грозы с круговым обзором, здесь же установлен микрофон для отдачи команд сотрудникам лаборатории от диспетчера с целью координации работы приборов и согласованного ведения необходимых записей.

Следует отметить, что ввиду завершения строительно-монтажных работ с опозданием, наладка и пуск соответствующих приборов производились по мере возможности, чем и объясняется включение приборов в разное время.

Материалы о постановке изучения грозовых процессов и методике исследования изложены в статье [1].

Основные задачи исследования, поставленные перед лабораторией в 1960 г., были следующие.

1. Изучение грозоносности района расположения лаборатории, который является характерным для горных местностей республики. Получение данных о количестве грозовых дней за год, продолжительности гроз, места формирования и движения грозовых облаков, частоты и характера грозовых разрядов (между облаками и облаком и землей) и др.

Наблюдение за указанными характерными данными производилось как визуально, так и с помощью прибора, регистрирующего число положительных и отрицательных разрядов, изготовленного в нашей лаборатории.

2. Исследование электрических параметров воздуха:

а) измерение величины напряженности электрического поля воздуха и изучение характера его изменения в зависимости от состояния погоды и времени суток;

б) измерение величины проводимости воздуха и изучение взаимосвязи между изменением проводимости воздуха и напряженности электрического поля.

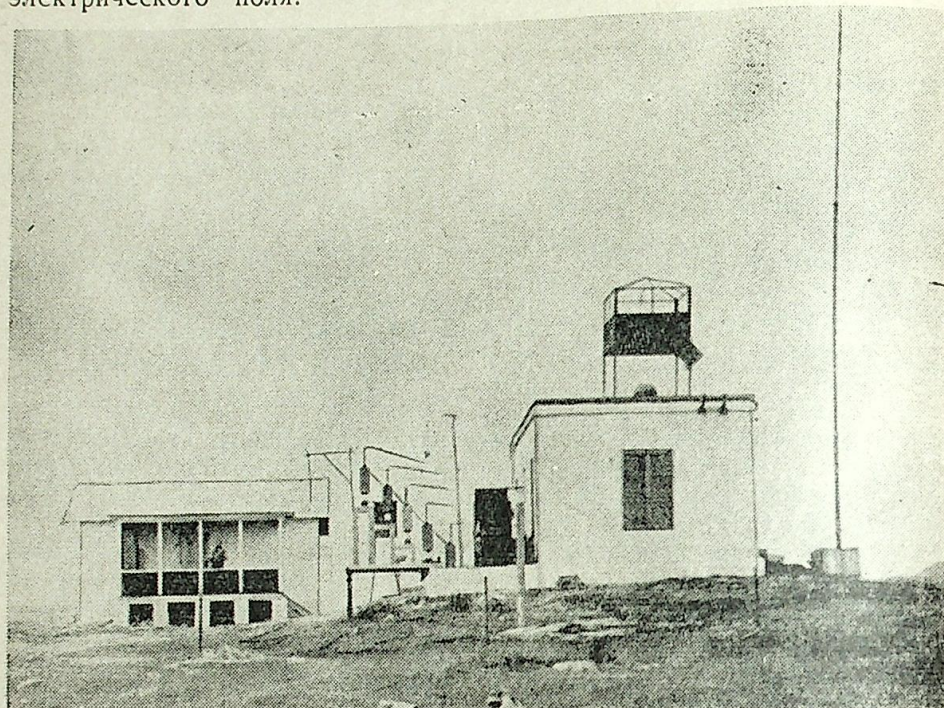


Рис. 1

Измерение и регистрация этих параметров осуществлялись с помощью соответствующих приборов, разработанных и сконструированных собственными силами лаборатории [2].

Исследование этих вопросов имеет как теоретическое, так и практическое значение для изучения атмосферного электричества и природы грозового процесса.

3. Выяснения характера и установления закономерности протекания развития разряда молнии в воздушном промежутке.

Для регистрации электрических параметров разряда молнии к антенным проводам подключались два катодных осциллографа типа КО—20—3 и два двухлучевых осциллографа с механической разверткой типа 2КМ₂—2.

Первые два осциллографа дают нам возможность изучить характер развития канала разряда во всех его стадиях, а с помощью последних двух осциллографов изучаются параметры многоимпульсных разрядов: число импульсов в разряде, время продолжительности полного разряда, интервалы между импульсами, полярность каждого импульса и т. д.

Для выяснения физической природы развития разряда применяется быстровращающаяся фотокамера, разработанная силами лаборатории [2].

С помощью этого прибора предполагается выяснить картину развития лидерной стадии; в частности механизма продвижения головки

лидерного стримера первого импульса разряда, характера протекания стадий лидера и главного канала и др.

Изучение этих вопросов позволяет внести определенную ясность в понимании механизма развития отдельных стадий как грозового, так и искрового разряда в длинном промежутке.

Все четыре осциллографа и прибор, регистрирующий число грозовых разрядов, подключались к антенным проводам (медь диаметром 4 мм), подвешенным на различных высотах к трем металлическим

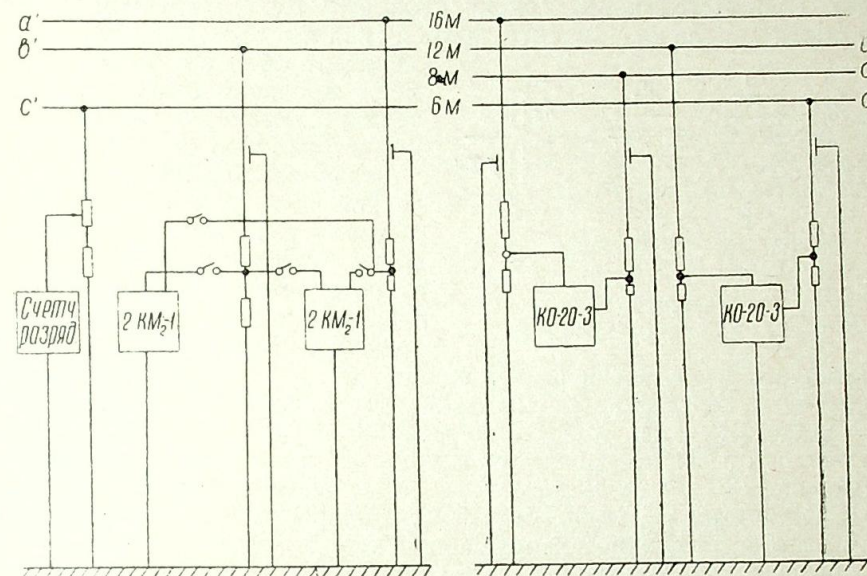


Рис. 2

Схема подключения осциллографов и счетчиков разрядов к антенным проводам.

мачтам одинаковой высоты (18 м), расположенным под прямым углом и изолированным от мачт посредством гирлянды орешковых изоляторов (см. рис. 2).

Таблица 1

№ антенны	1	2	3	4	5	6	7
l (м)	100	100	100	100	60	60	60
h (м)	16	12	8	6	16	12	8
d (мм)	4	4	4	4	4	4	4
C (нф)	580	590	620	640	350	360	370

Данные всех антенн приведены в табл. 1, причем емкости антенн определены из условия:

$$C = 0,24 \cdot \frac{\epsilon \cdot l}{\lg \frac{4h}{d}} \text{ нф};$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная; для воздуха $\epsilon = 1$;
 l — длина антенны, см;

h —высота подвеса, см.

d —диаметр провода, см.

Каждый осциллограф подключался к антенному проводу через соответствующий делитель напряжения, в зависимости от индуцируемого на антеннах потенциала.

Выбор типа и расчет делителей производились с учетом общих требований к последним; был выбран смешанный тип делителя—емкостно-омический. Омическая часть делителя является жидкостной, выно-омический. Омическая часть делителя является жидкостной, выно-омический. Омическая часть делителя является жидкостной, выно-омический.

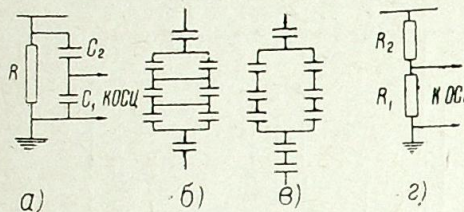


Рис. 3

Емкостная часть делителя выполнена из ряда последовательно и параллельно включенных высоковольтных конденсаторов типа ПОВ емкостью 390 пф и на рабочее напряжение 15 кВ.

Расчет делителя производился исходя из максимально возможного напряжения (100 кВ), индуцируемого на антенном проводе, и из предельного напряжения, подаваемого на пластины явления осциллографа.

При этом коэффициент деления делителя был равен 100.

В качестве конденсатора C_1 , подключаемого к осциллографу, использован конденсатор, типа КБ—0,01, емкостью 0,01 мф и на напряжение 5 кВ. При этом емкость второй части делителя $C_2=100$ пф. Для получения указанной емкости были использованы конденсаторы типа ПОВ, соединенные по смешанной схеме (рис. 3, б).

Для антенны высотой 12 м в качестве конденсатора C_1 был также использован конденсатор типа КБ—0,01, а в качестве конденсатора C_2 была собрана следующая схема (рис. 3, в). Общая емкость этой схемы составляет 110 пф, а рабочее напряжение 75 кВ.

В качестве делителя напряжения для автоматического включения осциллографа КО—20—3 был использован омический делитель, выполненный из проволочных керамических сопротивлений типа ПЭ—150. Для зажигания осциллографа КО—20—3 №1 и №2 используются антенны высотой соответственно 8 и 6 м и длиной 100 м, расчетное индуцированное напряжение на которых составит 30÷40 кВ. Так, как для включения реле зажигания осциллографа достаточно подать напряжение 40÷400 В, любой полярности, то коэффициент деления делителя

$$K = \frac{40\,000}{400} = 100$$

В качестве сопротивления R_2 использованы два последовательно соединенных сопротивления ПЭ—150 по 50.000 Ом каждое. Общее сопротивление 100 ком (рис. 3, г).

Сопротивление R_1 равно 1000 Ом также выполнено из проволочного сопротивления ПЭ—50. Оба сопротивления подвешиваются прямо на вводе антенны в лаборатории на расстоянии 20 см от стены.

Делители напряжения для осциллографов 2КМ₂—1 выбраны такие же как и для осциллографов КО—20—3.

Для блокировки измерительной аппаратуры от возможного появления чрезмерно большого потенциала, при близких мощных разрядах и прямых ударах молнии у вводов ставятся защитные воздушные промежутки между рабочим и заземлительным проводом (см. рис. 2).

Краткие технические характеристики регистрирующих приборов, включенных по схеме, представленной на рис. 2, приводятся ниже.

Катодный осциллограф типа КО—20—3 с автоматическим зажиганием предназначен для регистрации волны индуцированных на антеннах напряжений при грозовых разрядах.

Подключенные через соответствующие делители напряжения к антеннам а и в (см. рис. 2), подвешенными на высотах 16 м и 12 м, два осциллографа дают возможность регистрировать разряд при различных развертках времени (осциллографы устанавливаются на различные скорости развертки по времени), что необходимо для изучения механизма отдельных стадий разряда, протекающих с различными скоростями.

В приборе предусмотрено 8 ступеней временных разверток. Луч перемещается на 10 см, по оси времени, за время от 0,15 до 100 мксек, что соответствует максимальной скорости фотозаписи порядка 600 км/сек.

Кроме этого, подключение двух осциллографов КО—20—3 позволяет, при перекрытии защитного промежутка на верхней антенне, из-за появления чрезмерно больших величин напряжений, регистрацию производить другим осциллографом, подключенным к нижней антенне.

Импульсы напряжения для автоматического зажигания осциллографов поступают от антенны с и d (см. рис. 2).

Два двухлучевых катодных осциллографа типа 2КМ₂—1 с механической разверткой, производящие запись сравнительно медленной скоростью, подключенные через делители напряжения к антеннам а и в, дают возможность определить: величины индуцированной волны напряжения на антеннах, многократность, полярность, полную продолжительность разряда, интервалы времени между импульсами в разряде и др.

В осциллографе 2КМ₂—1 развертка по времени осуществляется механическим способом и отсутствует специальное устройство для зажигания, вследствие этого за все время прохождения грозы эти приборы находятся в работе, под постоянным действием электронного луча.

Допустимая продолжительность непрерывной работы на этих осциллографах не более 40÷45 мин; наличие двух осциллографов допускает поочередное их включение продолжительностью по 40 мин.

При чувствительности отклонения луча в 0,5 мм/В, осциллограф одновременно позволяет развернуть на фотоленту электрические импульсы длительностью от 0,01 до 0,4 сек. В схеме подключения осциллографов 2КМ₂—1 предусматривается возможность перехода к разным по высоте антеннам в зависимости от регистрации дальних или близких гроз.

Для регистрации числа и полярности грозовых разрядов в нашей лаборатории был разработан и изготовлен прибор — грозоотметчик, — описание которого дано в статье [2].

Этот прибор подключается к антенне, подвешенной на высоте 6 м от земли, через омическое сопротивление 3÷4 мгом.

Преимуществом данного прибора перед другими грозоотметчиками является то, что при незначительном расходе энергии в 0,05 Вт, прибор отмечает не только число разрядов, но и их полярность. Кроме того, прибор позволяет производить длительные замеры в любых полевых условиях.

В комплексе действующих приборов, кроме приведенных на рис. 2, использовались и следующие приборы:

- а) прибор для измерения проводимости воздуха;
б) прибор для измерения напряженности электрического поля воздуха.

Измерение положительной и отрицательной проводимости воздуха производилось двумя приборами, действующими по одному и тому же принципу — заряда цилиндрического конденсатора. Описание и принципиальная схема этих приборов даны в статье [2].

Важным условием для нормальной работы прибора является то, что длина цилиндра и скорость протягиваемого через цилиндр воздуха должны быть подобраны так, чтобы заряженные частицы, имеющие минимальную подвижность, за время пролета внутри цилиндра успевали бы отлагаться на стержне [4]. Для данного прибора скорость протягиваемого воздуха (специальным вентилятором) в цилиндр составляет $3 \div 4$ м/сек. При установке прибора помещаются в цилиндрическом корпусе сверху покрытым крышкой, предохраняющей от попадания дождя, пыли, насекомых и пр.

Приборы установлены на высоте 4 м от земли, на стене, с наружной стороны лаборатории.

Стержень цилиндра прибора через контактные часы и усилитель постоянного тока, собранный по мостовой схеме на лампе 6Н7, соединяется с шлейфом осциллографа МПО—2 с чувствительностью 4 мм/ма.

Питание датчиков проводимости осуществляется от аккумуляторной батареи, а питание осциллографа МПО—2 — от сети переменного тока 220 в.

Измерения проводимости и напряженности электрического поля воздуха производились три раза в сутки в определенные часы (8, 13 и 19 час), а во время грозы приборы работали непрерывно.

Прибор для измерения проводимости был включен в работу с 10 августа, причем замер производился только отрицательной проводимости воздуха, так как положительная проводимость на шлейфе с чувствительностью 4 мм/ма достаточного отклонения не давала, а другого более чувствительного шлейфа в наличии не было.

АНАЛИЗ МАТЕРИАЛОВ НАБЛЮДЕНИЙ И ВЫВОДЫ

1. Грозоносность района лаборатории

Все отмеченные за указанный период грозы разбиты на две группы:

- а) близкие грозы — удаленность в радиусе не более $3 \div 5$ км;
б) дальние грозы — удаленность в радиусе более 5 км;

Грозоносность района расположения лаборатории приведена в табл. 2. Наблюдение проводилось визуально и с помощью грозоотметчика.

Общая продолжительность близких гроз за указанный период — около 20 час; дальних гроз — около 18 час. Следует отметить, что такое соотношение продолжительности близких и дальних гроз получилось из-за близкой грозы (4. IX—1960 г.), редкой по продолжительности — порядка 10 час.

Полученные нашей лабораторией данные о количестве грозовых дней за сезон приближаются к цифрам Шемахинской метеостанции.

Так, Шемахинская метеостанция* зафиксировала за шесть месяцев (апрель—сентябрь) 1950 г. — 15 гроз; 1951 г. — 18 гроз; 1954 г. — 21

* Ввиду значительной удаленности и разного характера местности, данные Шемахинской метеостанции не полностью характеризуют грозоносность района расположения лаборатории.

грозу; 1955 г. — 18 гроз; 1958 г. — 23 грозы, 1959 г. — 19 гроз; 1960 г. — 18 гроз.

Как это явствует из наблюдений полевой лаборатории, распределение гроз между дневным и ночным временем происходило примерно поровну.

Таблица 2

Месяцы	Ближние	Дальние	Продолжительность грозы, часы		Ночные	Дневные
			ближние	дальние		
Апрель	1	2	0,7	4,5	2	1
Май	—	5	—	4,0	4	1
Июнь	3	4	6,0	7,0	2	5
Июль	1	1	3,5	1,0	1	1
Август	—	1	—	1,3	—	1
Сентябрь	1	1	10,0	0,5	1	1
Итого	6	14	20,2	18,3	10	10

В основном формирование дневных гроз протекало в 10—14 час. Все наблюдавшиеся грозы относились к местным. Исключение составляла лишь фронтальная гроза, прошедшая 20. VII 1960 г.

Следует особо подчеркнуть, что формирование значительного числа гроз происходило в районе г. Картдаг — одной из вершин Большого Кавказского хребта — высотой 2100 м над ур. м., на расстоянии 10—15 км к северо-западу от лаборатории.

Сформировавшись над Картдагом, грозовые облака, затем двигались над районом лаборатории, преимущественно, в восточном и северо-восточном направлении.

Наибольшее число гроз отмечено в июне — 7 (3 — близких и 4 — дальних). На июнь же месяц падает и наибольшая продолжительность гроз — 19 час. Между отдельными месяцами (за исключением августа месяца с одной дальней грозой) количество гроз распределено примерно одинаково.

2. Измерение напряженности электрического поля

Как уже было отмечено, измерение электрического поля производилось три раза в день: в 8 часов утра, в 13 часов и 19 часов. Для удобства анализа по данным измерений построены кривые процентного распределения напряженности поля, величина которых превышает значения, обозначенные на оси абсцисс. Кривые рис. 4 показывают изменение напряженности поля в яс-

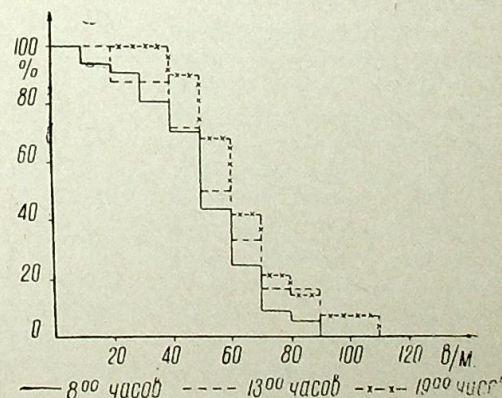


Рис. 4
Изменение напряженности электрического поля у поверхности земли при ясной погоде с 17—VII по 24. IX 1960 г.

ную погоду, а кривые рис. 5 в пасмурную (дождь, туман, сплошная облачность и т. д.).

Причем по оси ординат отложено количество измерений в процентах от общего числа, а по оси абсцисс — напряженность электрического поля в в/м .

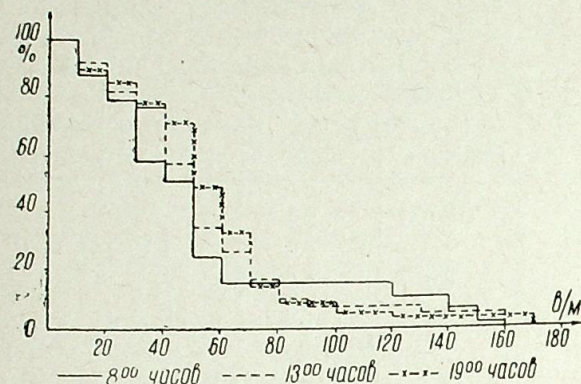


Рис. 5

График изменения напряженности электрического поля у поверхности земли в облачную погоду с 17. VII по 24. IX 1960 г.

30%, от общего числа замеров) составляла $30\div 70 \text{ в/м}$.

Измерения величины напряженности электрического поля воздуха в ясную погоду показывают, что в условиях горной местности ее значение несколько меньше, чем это имеет место для низменности.

3. Измерение отрицательной проводимости воздуха

Измерение проводимости воздуха было начато с 10. VIII 1960 г. Причем, до 2. IX 1960 г. измерение проводилось один раз в сутки (в 13 час), а с 3. IX 1960 г. до 24. IX 1960 г. — три раза в сутки (8, 13 и 19 час).

На основе измеренных данных построены кривые (рис. 6 и 7). Из этих кривых явствует, что величина проводимости в разное время колеблется от $1 \cdot 10^{-5}$ до $60 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$. Средняя величина проводимости составляет $15 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$.

Аналогичные измерения, проводимые Г. Бендорфом, И. Имянитовым, Н. Красногорской дают среднюю величину проводимости $20 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, что совпадает с результатами наших измерений [3].

В период от 24 до 29. VIII 1960 г. наблюдалось некоторое увеличение проводимости (см. рис. 7).

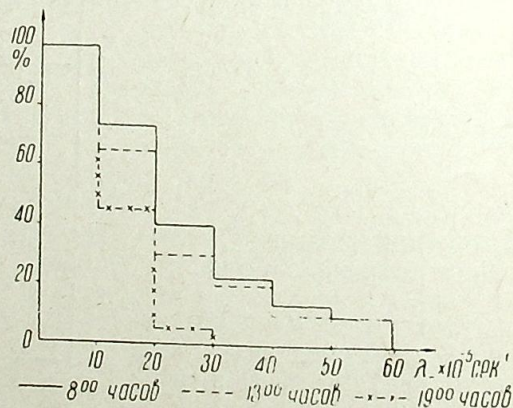


Рис. 6

График изменения отрицательной проводимости воздуха (с 3. IX по 24. IX 1960 г.).

В эти дни погода в районе расположения лаборатории была пасмурная (сплошная облачность и незначительный дождь), температура воздуха была ниже обычной на $2-3^\circ$ и составляла $15-16^\circ\text{C}$ и 27. VIII 60 г. в 19 часов напряженность электрического поля была отрицательной (-30 в/м).

4. Измерение напряженности электрического поля у поверхности земли во время грозы

Измерение величины электрического поля во время грозы проводилось два раза: 25. VII 1960 г. с 17 ч 30 м до 18 ч и 4. IX 1960 г. с 17 ч 48 м до 19 ч 02 м.

В первом случае отмечались только величины напряженности электрического поля через каждые 5 мин, а во второй раз регистрировались как величины напряженности поля, так и расстояние до близких разрядов, а также полярность разрядов и время удара молнии.

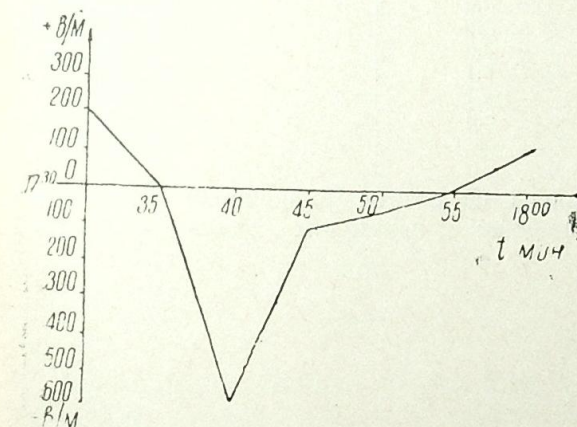


Рис. 8

Изменение напряженности электрического поля у поверхности земли во время грозы с 17. 30 до 18 час 25. VII 1960 г.

Далее кривая изменения напряженности электрического поля в зависимости от времени (рис. 8). Из этой кривой можно заключить, что грозовое облако проходило в районе лаборатории и в передней части несло положительный заряд, величина напряженности электрического поля достигала $+200 \text{ в/м}$, затем постепенно уменьшалась и в 17 ч 35 м стала равной нулю, затем стала отрицательной и в 17 ч 40 м — составила -600 в/м и увеличиваясь достигла нуля в 17 ч 55 м; затем, опять увеличиваясь, оставалась все время положительной.

Эта гроза прошла приблизительно в 5 км от места расположения лаборатории. Для второго случая, на основании регистрации напряженности электрического поля по времени через каждую минуту, а также фиксации времени ударов молнии по секундомеру (с определением расстояния) и полярности грозоотметчиком (см. табл. 3 и 4), построена кривая (рис. № 9) изменения напряженности электрического поля в зависимости от времени, с нанесением точек на оси времени, соответствующих полярности и времени разряда молнии.

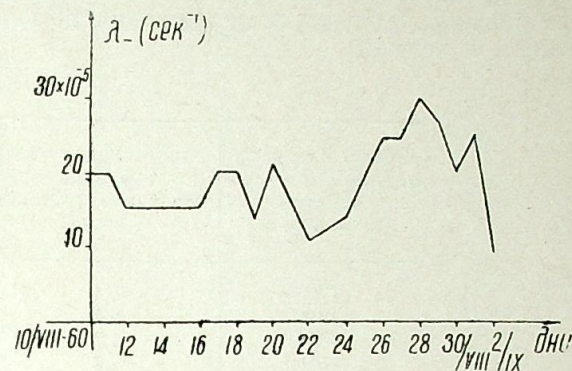


Рис. 7

Изменение отрицательной проводимости воздуха (с 10. VIII—2. IX 1960 г.) по дням (в 3 час).

Из рис. 9 видно, что каждому пиковому значению кривой величины напряженности электрического поля соответствует определенный разряд. Это наталкивает на мысль, что разряду облака предшествует сильное увеличение напряженности электрического поля между облаком и землей.

Т а б л и ц а 3

Время разрядов молнии (по секун- домеру) (часы и мин.)	Расстояние от ла- боратории до ме- ста удара молнии (в км)	Полярность разряда молнии по грозоотмет- чику
17 ⁵⁵	4,1	} Полярность не отмечалась
17 ⁵⁸	2,7	
17 ⁵⁹	1,7	
18 ⁰⁰	2,4	
18 ⁰³	2,0	
18 ⁰⁴	2,0	
18 ⁰⁷	1,7	
18 ¹⁰	2,4	
18 ¹²	1,7	
18 ¹³	4,1	
18 ¹⁴	1,7	-
18 ¹⁸	4,1	+
18 ²¹	1,7	-
18 ²²	3,0	-
18 ²⁷	3,0	-
18 ³⁰	3,0	+
18 ³²	5,1	+
18 ³⁴	4,1	+
18 ⁴⁰	6,8	+

В некоторых случаях наблюдается резкое уменьшение напряженности электрического поля и даже изменение знака последней.

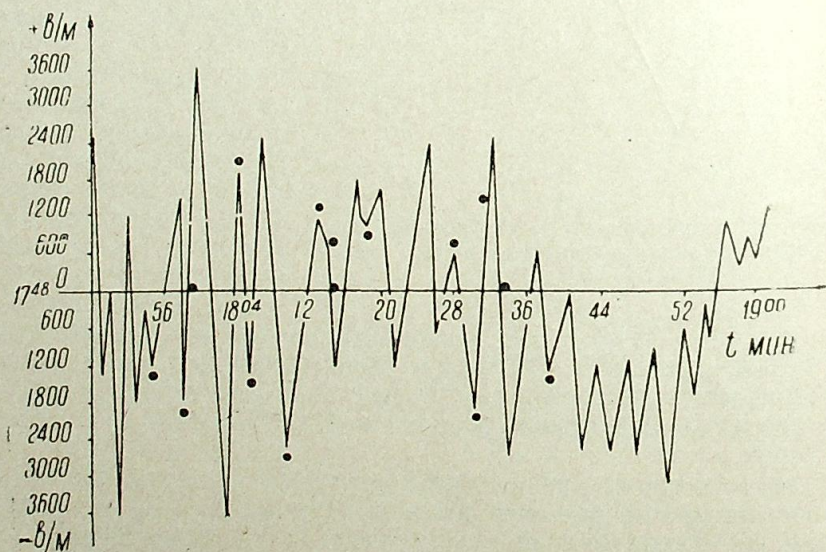


Рис. 9
Изменение напряженности эл. поля у поверхности земли во время грозы 17⁴⁸—19⁰⁷
часов 4—IX. 1960 г.

Таблица 4

Время (часы, мин.)	Напряженность элек- трического поля (в/м)	Время (часы, мин.)	Напряженность элек- трического поля (в/м)
17 48	+2500	18 ²⁶	— 750
49	—1250	27	— 500
17 50	0	28	0
51	—3750	29	—1250
52	+1250	18 ³⁰	—1750
53	—1750	31	—1000
54	— 250	32	+1250
17 55	—1250	33	+2500
56	0	34	0
57	+1500	18 ³⁵	—1500
58	—1750	36	—2500
59	0	37	+ 750
18 00	+1000	38	+ 250
01	+3750	39	— 250
02	—1000	18 ⁴⁰	—1250
03	—3750	41	0
04	+2000	42	—2500
18 05	+ 500	43	—2000
06	— 250	44	—1250
07	—1250	18 ⁴⁵	—2500
08	+2500	46	—1250
09	—1250	47	—2250
18 10	—2500	48	—2500
11	+ 750	49	—2500
12	+1250	18 ⁵⁰	—1250
13	+1000	51	—2250
14	—1250	52	—3000
18 15	—1250	53	—1000
16	+1750	54	—1700
17	+1250	18 ⁵⁵	— 250
18	+1000	56	— 500
19	+1250	57	+1000
18 20	+1500	58	+ 350
21	0	59	+ 500
22	0	19 ⁰⁰	+ 400
23	—1250	01	+ 500
24	+2500	02	+ 900
18 25	+1500		

Кроме того, величина напряженности электрического поля во время грозы, как это явствует из кривой, может изменяться с большой частотой и в очень широких пределах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ализаде А. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1960, № 2.
2. Ализаде А. С. „Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-матем. и техн. наук“, 1961, № 4.
3. Бендорф Г. Атмосферное электричество. 1934.
4. Имянитов И. М. Приборы и методы для изучения электричества атмосферы. 1957.
5. Отчет лаборатории грозовых процессов Энергетического института АН Азерб. ССР за 1960 год.

Шамаһы чөл лабораториясында ғасырға һадисәләринин бә'зи мәсәләләринин тәдғиги

ХҮЛАСӘ

1960-чы илин август аҗында илдырым вә онунла әләғәдар атмосфер електрик һадисәләрини өҗрәнән чөл лабораториясынын вә чиһазларын гурулмасы бә'зи сәбәбә көрә мүҗҗән олуған вахтдан кеч баша чатдырылды. Бу сәбәбдән 1960-чы илдә лабораториянын тәдғигат програмына даһил олан мәсәләләрин җалһыз бир һиссәсинин тәдғиги мүмкүн олду.

Ғасырға, илдырым вә бунларла әләғәдар олан атмосфер електрик һадисәләринин тәдғиги лабораторияда гурулан бир нечә геҗдедичи вә өлчү чиһазлары васитәси илә апарылмышдыр. Бу чиһазларын бир һиссәси бизим лабораторияда ишләнмиш вә һазырланмыш, бир һиссәси исә бизим сифаришимизлә Москвада һазырланмышдыр. Лабораториямызда ишләниб һазырланмыш чиһазларын ишләмә принципләри вә схемләри бундан әввәлки мәғаләмиздә [1] изаһ едилмишдир.

Тәдғигатын тамам олмамасына баһмаҗарағ, лабораториянын олдуғу раҗонун ғасырғалылығына, һаванын електрик саһәси кәркинлиҗинә вә електрик кечиричилиҗинә, һәмчинин онларын вахтдан вә һавадан асылы оларағ дәҗишмәсинә аид бә'зи марағлы материаллар әлдә едилмишдир. Бунлара уҗғун оларағ һаванын електрик кечиричилиҗи $1 \cdot 10^{-5} \text{ сан}^{-1}$; $60 \cdot 10^{-5} \text{ сан}^{-1}$ интервалында дәҗишир. Ади һаванын електрик кечиричилиҗинин орта гиҗмәти исә $15 \cdot 10^{-5} \text{ сан}^{-1}$ олур. Ади һавада електрик саһәси кәркинлиҗинин гиҗмәти $+100 \text{ в/м}$ олдуғу һалда, тутғун (булудлу, думанлы) һавада бу кәркинлиҗин гиҗмәти $+170 \text{ в/м}$ -ә гәдәр олур. Ғасырғалы вахтда исә електрик саһәсинин кәркинлиҗинин гиҗмәти чох бөҗүк ($+3600 \text{ в/м}$ ÷ -3000 в/м) интервалда дәҗишир.

Електрик саһәси кәркинлиҗи һәм гиҗмәтчә, һәм дә ишарәчә дәҗишилир. Белә ки, бу дәҗишилмә гиҗмәтчә аз вахт ичәрисиндә чох бөҗүк интервалы әһатә едир. Лабораториянын олдуғу раҗонда ғасырға һадисәләрини аҗдынлашдыран материаллар да әлдә едилмишдир.

Һаванын вәзиҗјәтиндән асылы оларағ бу гиҗмәтләри вә онларын дәҗишилмәсини 4, 5, 6, 7, 8 вә 9-чу шәкилләрдә көрмәк олар.

Ф. Г. ГУСЕЙНОВ, М. И. КАЛАНТАРОВ, И. Д. ИСМАЙЛОВ

СПОСОБЫ ТОРМОЖЕНИЯ ГЕНЕРАТОРОВ МАЛОЙ МОЩНОСТИ

Обеспечение динамической устойчивости сельских ГЭС, работающих в параллель с мощной электрической системой, является одним из актуальных вопросов.

Особо большое значение имеет предотвращение разброса генератора вследствие внезапного сброса нагрузок при отсутствии регулятора скорости турбины.

Разрешение этого вопроса имеет также важное значение для ГЭС, работающих изолированно, так как при внезапном сбросе нагрузки генераторов сельских ГЭС, при отсутствии регуляторов скорости вращения генератора достигает весьма большой величины, в результате чего возможно появление опасных для изоляции обмоток статора перенапряжений, а также появление опасных для агрегата механических усилий.

Нами в лабораторных условиях и на генераторах Кахской и Алычской ГЭС были проведены исследования с целью выяснения возможных способов торможения генераторов при разбросе, для чего были изучены два способа: 1) торможение генератора путем включения его на специальное нагрузочное сопротивление и 2) электродинамическое торможение для генераторов малых мощностей с использованием токов Фуко, наводимых в маховике.

Нагрузочное сопротивление включается в цепь генератора при возникновении разброса и отключается в наиболее благоприятный момент после ликвидации причин разброса.

С помощью нагрузочных сопротивлений представляется возможным также повышение устойчивости сельских электрических станций, работающих в системе.

Следует отметить, что принципы торможения генераторов кратковременным включением активных нагрузочных сопротивлений для повышения динамической устойчивости в литературе известны.

Включением нагрузочных сопротивлений одновременно с возникновением короткого замыкания можно обеспечить торможение генератора в период наибольшего избытка мощности и, таким образом, сохранить устойчивость.

Нагрузочным сопротивлением могут служить металлические и водяные сопротивления, а также заземлители.

Известно, что водяные реостаты требуют постоянного ухода и часто приходится менять электроды из-за ржавчины (коррозии). Кроме того, сопротивление водяных реостатов, особенно заземлителей, не является постоянной величиной, что не желательно. Учитывая эти факторы, в качестве нагрузочных сопротивлений нами были применены стандартные чугунные сопротивления.

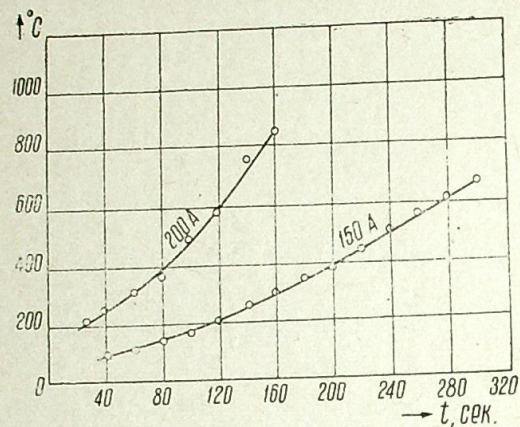


Рис. 1

тока 150 и 200 а. Температура нагрева сопротивлений измерялась термопарой. Как видно из кривых, в качестве допустимого тока для таких сопротивлений можно принять 200 а, при продолжительности 80—100 сек.

На Кахской ГЭС, работающей изолированно, опыты производились на генераторе типа С—250—750, $U=400$ в и $I=362$ а. Нагрузочным сопротивлением служили три ящика стандартных чугунных сопротивлений, соединенных звездой. Включение и выключение производилось ручным способом, с помощью рубильников, имеющих на щитке генератора. Нагрузочные сопротивления включались в различные промежутки времени, при этом осциллографировались ток и напряжение генератора. Из опыта установили, что при использовании нагрузочного сопротивления большую роль играет время их включения.

Для определения времени включения нагрузочных сопротивлений можно воспользоваться следующим выражением [3]:

$$t = T_d \ln \frac{R_d - 1}{n_d - n}$$

где T_d —постоянная времени разгона

$$T_d = \frac{\omega_d - \omega_0}{\omega_0} T_a$$

T_a —постоянная времени разгона;

n_d —предельная относительная скорость гидротурбины;

n —относительная скорость, которая означает отношение мгновенной угловой скорости к нормальной $\frac{\omega}{\omega_0}$.

Для гидравлических турбин $T_d < T_a$.

Для определения предельного значения скорости использовано следующее уравнение:

$$\omega = \omega_0 + (\omega_d - \omega_0)(1 - e^{-t/T_d}).$$

Что касается выбора нагрузочных сопротивлений, то очевидно, их величина обуславливается нагрузкой генератора при торможении.

В наших опытах перед включением нагрузочных сопротивлений, т. е. когда генератор работал на нагрузку, напряжение составляло 400 в, ток 100 а. После

включения нагрузочных сопротивлений установившееся значение тока, потребляемого нагрузочными сопротивлениями, составляло 160 а, а напряжение генератора упало до 200 в.

Из рис. 2 видно, что в зависимости от продолжительности разгона агрегата увеличивается напряжение на клеммах генератора и ток нагрузочных сопротивлений в момент их включений. Поэтому соответствующим выбором нагрузочных сопротивлений можно достигнуть режимов торможения генераторов.

Аналогичная работа нами проводилась на Алычской ГЭС (мощностью 200 квт), работающей в параллель с Ньюгадинской ГЭС (мощностью 775 квт).

Для автоматического включения нагрузочных сопротивлений устройство было собрано по схеме, указанной на рис. 3.

Устройство состоит из нагрузочных звездно соединенных сопротивлений, мощность торможения составляет при $U_\phi = 220$ в, $P = 120$ квт. Сопротивление, включенное между фазами, составляет примерно 2,40 ом. Напряжение катушки контактора равняется 380 в; реле напряжения ЭН—528/60; реле промежуточное ЭП, рубильник P_1 .

Введение в схему рубильника (P_1) было вызвано необходимостью предотвратить сравнительно частое включение и выключение нагрузочного сопротивления, из-за небольших маховых масс генератора и быстрого изменения напряжения на его зажимах.

При сбросах нагрузки при повышении напряжения на зажимах генератора до 270 в), схема действует без вмешательства обслуживающего персонала и замыкает контакты нагрузочных сопротивлений, предотвращая разнос генератора.

В дальнейшем обслуживающий персонал принимает необходимые меры и размыкает P_1 . Для действия схемы при последующих возможных разносах рубильник повторно замыкается обслуживающим персоналом.

Проведенные лабораторные испытания показали, что четкая работа реле напряжения происходит при меньших значениях коэффициента возраста, т. е. при установке реле в пределах Г—40 и Г—50. Поэтому для обеспечения напряжения трогания в 270 в и напряженная

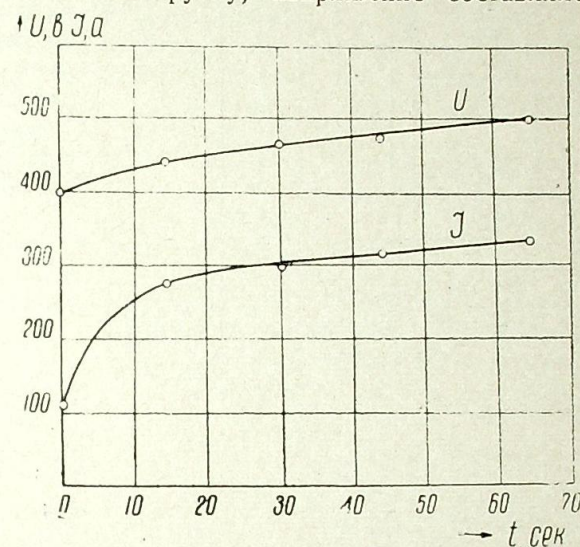


Рис. 2

в 200 в в цепи катушки реле было включено добавочное сопротивление величиной 6 ком.

На рис. 4 показаны кривые изменения частоты и напряжения генератора, полученные из осциллограммы. Как видно из этого рисунка

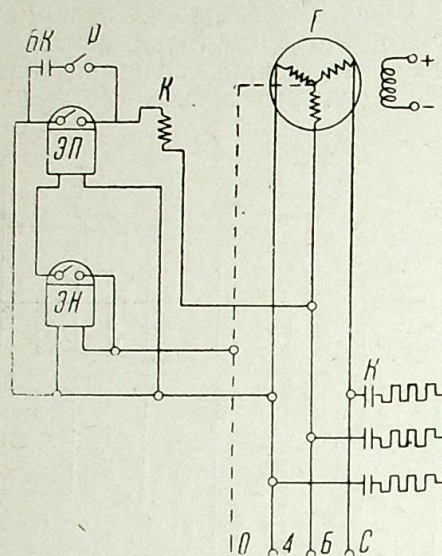


Рис. 3

Установка сопротивлений для торможения маломощных генераторов удобна тем, что ее можно установить на любой сельской ГЭС.

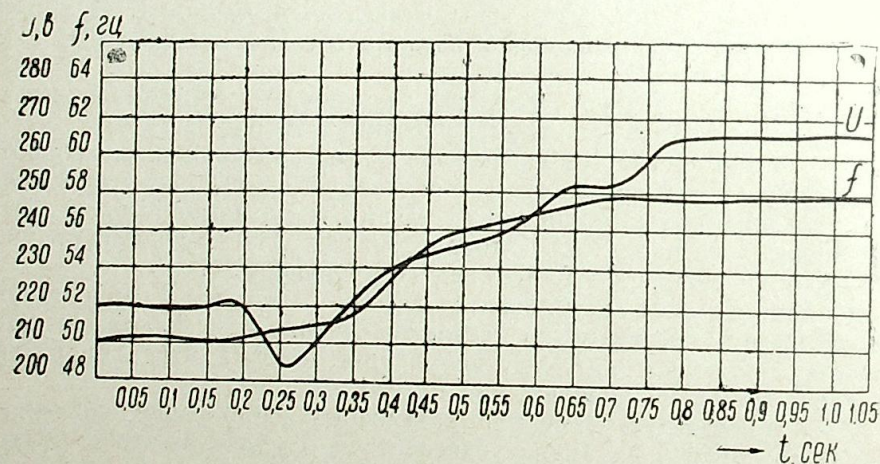


Рис. 4

Вместе с тем установки нагрузочных сопротивлений в сельских ГЭС имеют ряд недостатков, заключающиеся в необходимости выбора нагрузочных сопротивлений для определенных конкретных значений сбрасываемой нагрузки: в невозможности при других меньших (при частичных сбросах) значения нагрузки избежать частых включений и отключений, из-за малых маховых масс агрегата и быстрого изменения напряжения.

после сброса нагрузки, примерно, через 0,5 сек, частота генератора увеличивается, примерно, до 116% и составляет 58 гц; включение нагрузочных сопротивлений предотвращает дальнейшее увеличение частоты генератора.

Фазовое напряжение генератора увеличивается до 120% и составляет 264 в за этот же промежуток времени. Температура нагрева нагрузочных сопротивлений во время опыта не превышала 250°C.

Проведенные испытания показали, что торможение генераторов сельских ГЭС при разбросах путем включения нагрузочных сопротивлений, является одним из эффективных средств улучшения условий их работы.

Такое положение нежелательно для параллельно работающих ГЭС, так как нарушается режим их устойчивой работы. Учитывая эти недостатки, нами был предложен способ электродинамического торможения для генераторов малых мощностей путем создания токов Фуко на маховике.

Электродинамический тормоз состоит конструктивно из сегментного статора с магнитным полюсом и сплошного ротора.

Принцип работы электродинамического тормоза заключается в том, что постоянный ток, протекающий от возбуждателя генератора к обмотке возбуждения сегментного статора, создает постоянный магнитный поток статора, который пересекает сплошное тело вращающегося маховика ротора, индуцируя в нем э. д. с.

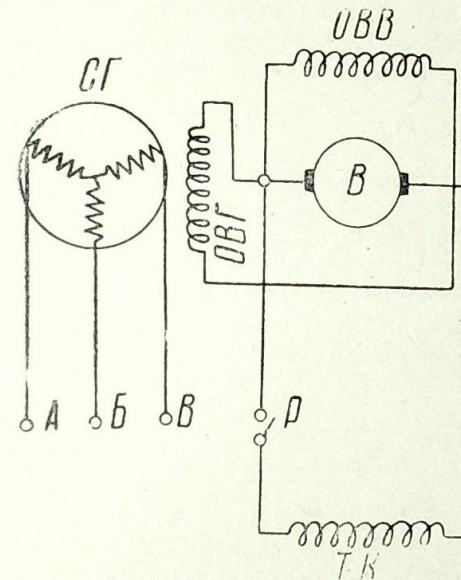


Рис. 5

Под действием этой э. д. с. в сплошном теле маховика протекают токи, которые, вступая во взаимодействие с магнитным потоком статора, создают тормозной момент.

Электродинамический тормоз можно применить в средненапорных ГЭС с горизон-

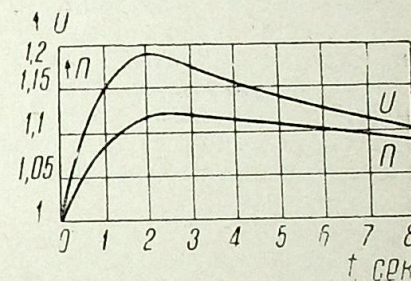


Рис. 6

тально расположенными турбоагрегатами, для которых устанавливается маховое кольцо.

В результате проведенных в 1959 г. работ был изготовлен и смонтирован электродинамический тормоз, который в 1960 г. был установлен на Алычской ГЭС.

Электродинамический тормоз, установленный на Алычской ГЭС, находился на специальном фундаменте и питался от возбуждения генератора ($P_{\text{возб.}} = 4,4 \text{ кВт}$) (рис. 5).

Зазор между полюсным наконечником электромагнита и маховиком генератора, из-за непрочности каркаса, был установлен 4 мм, против расчетного 2 мм.

Напряжение возбуждателя при нормальном режиме работы генератора составило 20 в.

Опыты проводились в режиме холостого хода и при разных значениях нагрузки.

При холостом ходе включение электродинамического тормоза позволило осуществить полное торможение генератора, при этом частота снижалась до 44 гц (опыты проводились при напряжении возбуждателя $U_{\text{возб.}} = 20 - 30 \text{ в}$; ток, потребляемый тормозом, в момент включения его колебался в пределах (18—30 а).

Проведенные опыты показали, что при нагрузке генератора 50 а, что соответствует 20% его загруженности, разнос генератора предотвращается.

При нагрузке генератора более 40% тормозной эффект, создаваемый электродинамическим тормозом опытного образца, оказывается недостаточным, для чего требуется соответствующее конструктивное изменение.

На рис. 6 приводятся результаты обработки осциллограммы, из которых видно, что при нагрузке, сбрасываемой тормозом $I = 50$ а, в первоначальный момент его включения, в течение 2 сек напряжение и скорость вращения принимали соответствующие значения $1,19 U_n$ и $1,12 n_n$.

За период торможения в 6 сек напряжение генератора принимает значение $1,12 U_n$, а скорость вращения $1,09 n_n$. Включение тормоза производилось спустя 1,2 сек после полного сброса нагрузки генератора.

Выводы

1. Торможение генератора сельскохозяйственных ГЭС мощностью до 200 квт при разнсах путем включения нагрузочных сопротивлений может явиться эффективным средством повышения устойчивости их работы. При этом способе торможения основную роль играет правильный выбор нагрузочных сопротивлений и время их включения.

В качестве нагрузочных сопротивлений могут служить металлические, водяные реостаты, а также специальные заземляющие устройства.

2. Из результата опытов и четырехмесячных испытаний электродинамического тормоза, установленного на Алычской ГЭС, следует, что он является одним из радикальных средств торможения маломощных генераторов средненапорных ГЭС с горизонтальным расположением гидротурбин.

Применение этого способа торможения с автоматическим управлением позволит в дальнейшем автоматизировать работу ГЭС и обеспечить устойчивую работу сельских ГЭС в параллель с энергосистемой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азарьев Д. И. Повышение пропускной способности электропередачи. „Электричество“, 1955, № 6.
2. Греков А. В. Исследование схем повышения динамической устойчивости электрических систем путем включения нагрузочных сопротивлений. Автореферат, Ташкент, 1956.
3. Рюденберг Р. Переходные процессы в электротехнических схемах. М., 1955

Ф. Н. Нусејнов, М. И. Кэлэнтэров, И. Д. Исмајлылов

Кичик күчлү кенераторлары тормозламаг үсуллары ХҮЛАСЭ

Автоматик сүр'әт тэнзимләјичиси олмајан кәнд су-электрик стансијаларында јүк дөврәси ачылдыгда кенератор һәддиндән артыг сүр'әтлә һәрләнмәјә башлајыр вә статор клемләриндә кәркинлик кәскин сурәтдә артыр. Беләликлә, тәһлүкәли вәзијјәт әмәлә кәлир ки, бунун да гаршысы алынмалыдыр.

Мәгаләдә, һәр һансы бир сәбәбдән кенераторун јүкү гәфлэтән јох олдуғу анда кенераторун статор дөврәсинә актив мүғавимәт гошмагла тормозламаг вә еләчә дә назим чархда Фуко чәрәјанлары јаратмагла электродинамик тормозламаг үсулларындан данышылыр.

Мәгаләдә кенераторлары тормозламаг мәгсәди илә актив мүғавимәтләрин сечилмәси вә онларын дөврәјә гошулмасы вахтындан, еләчә дә Алыч су-электрик стансијасында кенераторун электродинамик үсулла тормозламаг тәчрүбәсинин нәтијәсиндән бәһс едилір.

А. Г. АБИЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ НАСТРОЕК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ТРУБЧАТОЙ ПЕЧИ АТМОСФЕРНОЙ УСТАНОВКИ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ПЕРЕКРЕСТНОЙ СВЯЗИ

На основе результатов работы [1] в настоящей статье рассматривается задача определения оптимальной настройки с учетом внутренней перекрестной связи с обратными знаками.

Из классической теории регулирования известно, что при расчете системы регулирования на устойчивость достаточно пользоваться нормальными (обычными) частотными характеристиками объекта и регулятора. При расчете систем регулирования на заданную степень затухания пользуются расширенными частотными характеристиками.

Степень затухания ψ называют отношение разности двух соседних направленных в одну сторону амплитуд к первой (большей) из них, т. е.

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} \quad (1)$$

В настоящее время не существует единого взгляда на то, какая именно степень затухания является оптимальной. Опыт эксплуатации показывает, что может удовлетворять во многих случаях практики, особенно в большинстве случаев при регулировании тепловых процессов $\psi = 0,75$ [2, 3]. Степень затухания при вычислении расширенных амплитудно-фазовых характеристик взята равной $\psi = 0,75$.

Это означает, что для наиболее плохо затухающей составляющей переходного процесса каждая последующая амплитуда будет в два раза меньше ей предшествующей.

Степени затухания $\psi = 0,75$ соответствует степень колебательности $m = 0,221$. Связь между ψ и m изображается формулой:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m} \quad (2)$$

$$m = \frac{\ln(1 - \psi)}{2\pi} \quad (3)$$

Расширенная амплитудно-фазовая характеристика выражает зависимость от частоты отношения амплитуд и фазового сдвига выходных и входных затухающих колебаний.

Для вычисления расширенных амплитудно-фазовых характеристик по известным передаточным функциям достаточно заменить оператор p на $p = i\omega$ ($i = \sqrt{-1}$) в выражении передаточной функции.

Расширенная амплитудно-фазовая характеристика по каналу „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи в южной стороне“:

$$W_{11}(m; i\omega) = \frac{5,10^{-2}e^{39,78\omega}}{(1 - 1,04 \cdot 10^2 \omega - 7,57 \cdot 10^4 \omega^2 + 2,32 \cdot 10^6 \omega^3) + (4,71 \cdot 10^2 \omega - 3,52 \cdot 10^4 \omega^2 - 3,04 \cdot 10^6 \omega^3)i} e^{-i180\omega} \quad (4)$$

По каналу „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи в северной стороне“

$$W_{12}(m; i\omega) = \frac{4,10^{-2}e^{39,78\omega}}{(1 - 1,17 \cdot 10^2 \omega - 10,37 \cdot 10^4 \omega^2 + 5,7 \cdot 10^6 \omega^3) + (5,31 \cdot 10^2 \omega - 4,82 \cdot 10^4 \omega^2 - 7,46 \cdot 10^6 \omega^3)i} e^{-i180\omega} \quad (5)$$

В показательной форме по каналу „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи в южной стороне“

$$W_{11}(m; i\omega) = \frac{5,10^{-2}e^{39,78\omega}}{\sqrt{(1 - 1,04 \cdot 10^2 \omega - 7,57 \cdot 10^4 \omega^2 + 2,32 \cdot 10^6 \omega^3)^2 + (4,71 \cdot 10^2 \omega - 3,52 \cdot 10^4 \omega^2 - 3,04 \cdot 10^6 \omega^3)^2}} \times e^{i \arctg \frac{4,71 \cdot 10^2 \omega - 3,52 \cdot 10^4 \omega^2 - 3,04 \cdot 10^6 \omega^3}{1 - 1,04 \cdot 10^2 \omega - 7,57 \cdot 10^4 \omega^2 + 2,32 \cdot 10^6 \omega^3} + 180\omega} \quad (6)$$

Расширенная амплитудно-частотная характеристика

$$\Theta_{11}(m; \omega) = \frac{5,10^{-2}e^{39,78\omega}}{\sqrt{(1 - 1,04 \cdot 10^2 \omega - 7,57 \cdot 10^4 \omega^2 + 2,32 \cdot 10^6 \omega^3)^2 + (4,71 \cdot 10^2 \omega - 3,52 \cdot 10^4 \omega^2 - 3,04 \cdot 10^6 \omega^3)^2}} \quad (7)$$

Фазо-частотная характеристика

$$F_{11}(m; \omega) = \arctg \frac{4,71 \cdot 10^2 \omega - 3,52 \cdot 10^4 \omega^2 - 3,04 \cdot 10^6 \omega^3}{1 - 1,04 \cdot 10^2 \omega - 7,57 \cdot 10^4 \omega^2 + 2,32 \cdot 10^6 \omega^3} + 180\omega \quad (8)$$

По каналу „расход газа в южной стороне—температура сырья на выходе из печи в северной стороне“

$$W_{12}(m; i\omega) = \frac{4,10^{-2}e^{39,78\omega}}{\sqrt{(1 - 1,17 \cdot 10^2 \omega - 10,37 \cdot 10^4 \omega^2 + 5,7 \cdot 10^6 \omega^3)^2 + (5,31 \cdot 10^2 \omega - 4,82 \cdot 10^4 \omega^2 - 7,46 \cdot 10^6 \omega^3)^2}} \times e^{i \arctg \frac{5,31 \cdot 10^2 \omega - 4,82 \cdot 10^4 \omega^2 - 7,46 \cdot 10^6 \omega^3}{1 - 1,17 \cdot 10^2 \omega - 10,37 \cdot 10^4 \omega^2 + 5,7 \cdot 10^6 \omega^3} + 180\omega} \quad (9)$$

Расширенная амплитудно-частотная характеристика

$$\Theta_{12}(m; \omega) = \frac{4,10^{-2}e^{39,78\omega}}{\sqrt{(1 - 1,17 \cdot 10^2 \omega - 10,37 \cdot 10^4 \omega^2 + 5,7 \cdot 10^6 \omega^3)^2 + (5,31 \cdot 10^2 \omega - 4,82 \cdot 10^4 \omega^2 - 7,46 \cdot 10^6 \omega^3)^2}} \quad (10)$$

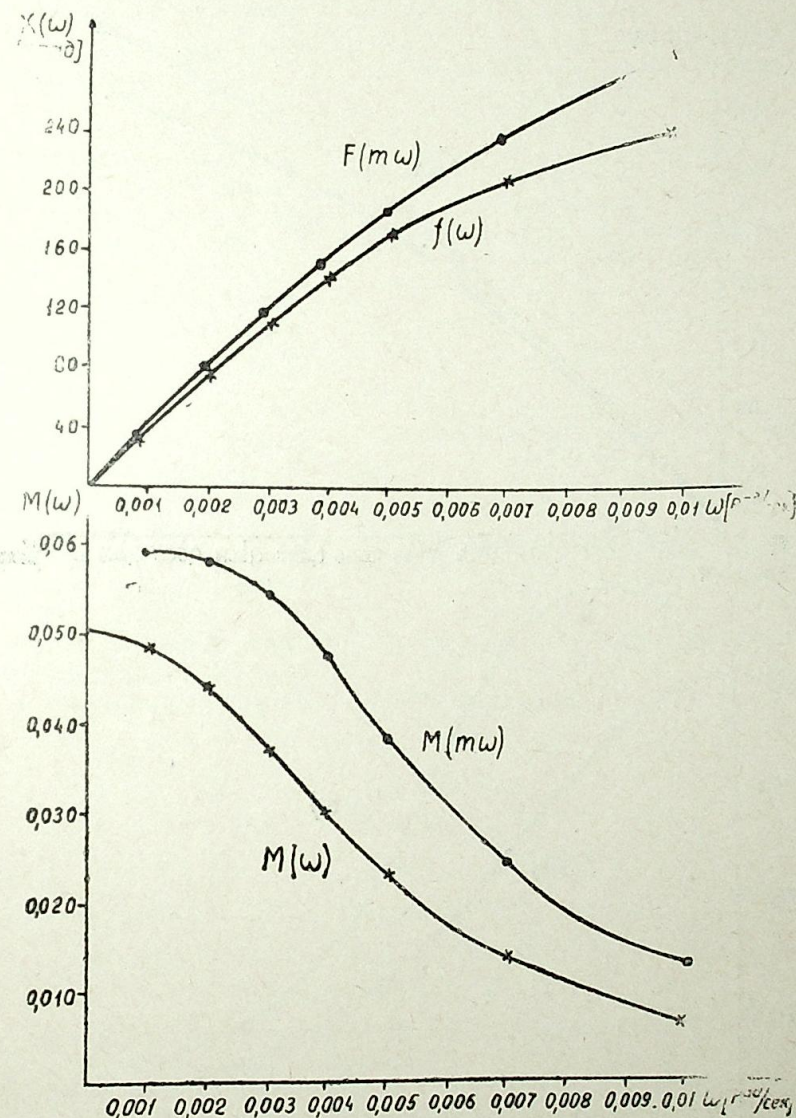


Рис. 1
Расширенная амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика по каналу «расход газа в южной стороне — температура сырья на выходе из печи в южной стороне».

Расширенная фазо-частотная характеристика

$$F_{12}(m; \omega) \arctg \frac{5,31 \cdot 10^2 \omega - 4,82 \cdot 10^4 \omega^2 + 7,46 \cdot 10^6 \omega^3}{1 - 1,17 \cdot 10^2 \omega - 10,37 \cdot 10^4 \omega^2 + 5,7 \cdot 10^6 \omega^3} + 180 \omega, \quad (11)$$

где $\theta_{11}(m; \omega), F_{11}(m; \omega), \theta_{12}(m; \omega), F_{12}(m; \omega)$ — вещественные функции m и ω .
Результаты вычислений при различных ω сведены в таблицу.

Построенные расширенные амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики представлены на рис. 1 и 2.

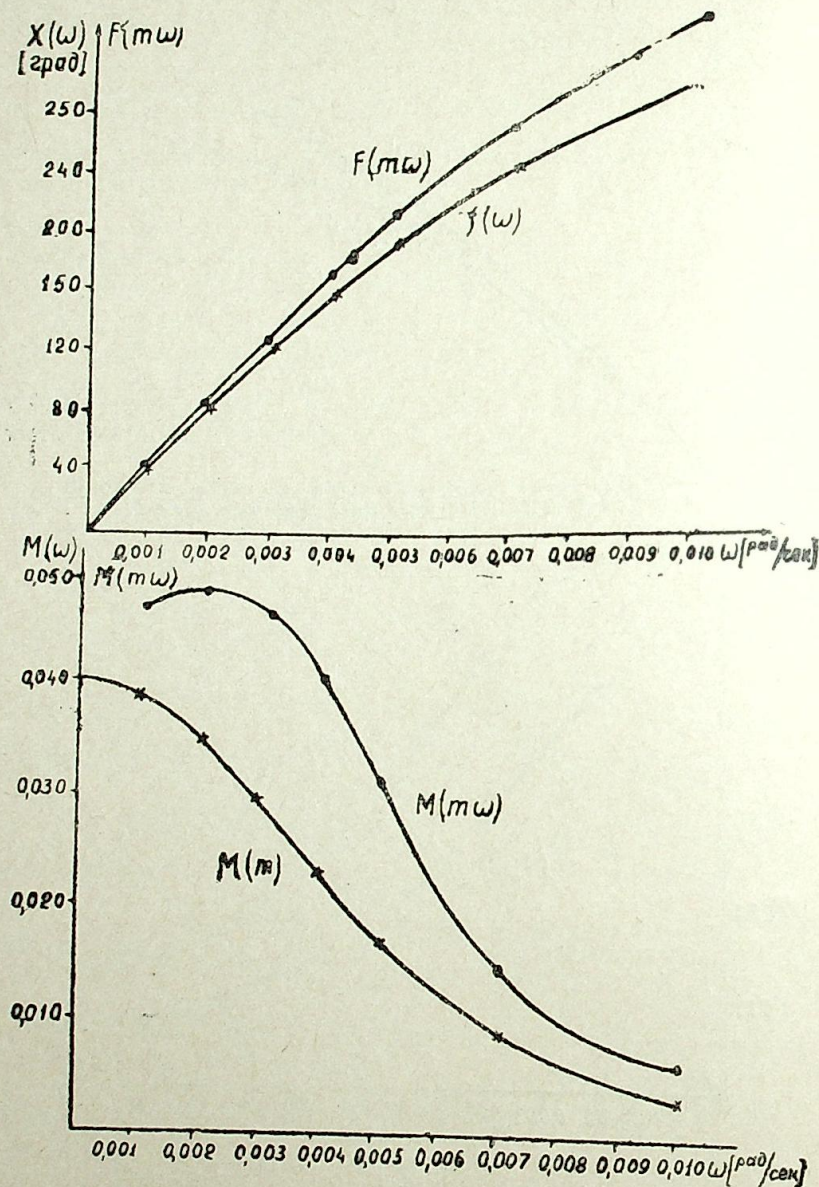


Рис. 2

Расширенная амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристика по каналу «расход в южной стороне — температура сырья на выходе из печи в северной стороне».

Методика расчета расширенных амплитудно-фазовых характеристик «эквивалентных каналов» регулирования*

Анализ технологической схемы показывает, что трубчатая печь является полной симметричной системой [1].

Структурная схема трубчатой печи как объекта автоматического регулирования представлена на рис. 3 (а).

В случае симметричной схемы мы имеем равенства

$$W_{11}(p) = W_{22}(p); \\ W_{12}(p) = W_{21}(p).$$

Структурная схема трубчатой печи и ее динамические характеристики показывают, что в объекте имеется два идентичных канала, имеющих между собой связи через внутренние каналы с обратными знаками.

Поскольку одна сторона печи симметрична с другой стороной, структурную схему ее как объект регулирования для решения поставленной задачи можно представить для одной стороны печи (рис. 3 б).

Так как объект является чисто симметричным, входные и выходные величины идентичны, т. е. $X_1 = X_2$; $Y_1 = Y_2$

$$Y_{\text{экв.1}} = Y_1 - Y_2, \quad (12)$$

$$X_1 = X_2 = X_{\text{экв.1}} \quad (13)$$

$$Y_1 = W_{11}(p) X_1 \quad (14)$$

$$Y_2^* = -W_{12}(p) X_2. \quad (15)$$

Подставив (14) и (15) в уравнение (12), получим

$$Y_{\text{экв.1}} = W_{11}(p) X_1 + W_{12}(p) X_2 = [W_{11}(p) + W_{12}(p)] X_{\text{экв.1}}. \quad (16)$$

$$W_{\text{экв.1}}(p) = W_{11}(p) + W_{12}(p). \quad (17)$$

Для определения расширенной амплитудно-фазовой характеристики для «эквивалентного» канала, т. е. основного канала с учетом внутренней перекрестной связи с обратными знаками, в определенной передаточной функции эквивалентного канала оператор p заменяем на $p = \omega(i - m)$.

При этом расширенная частотная характеристика «эквивалентного» канала имеет вид:

$$W_{\text{экв.1}}(m; i\omega) = W_{11}(m; i\omega) + W_{12}(m; i\omega). \quad (18)$$

* «Эквивалентным» каналом регулирования условно называем основной канал регулирования трубчатой печи в сочетании с внутренним перекрестным каналом.

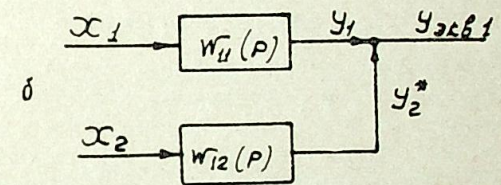
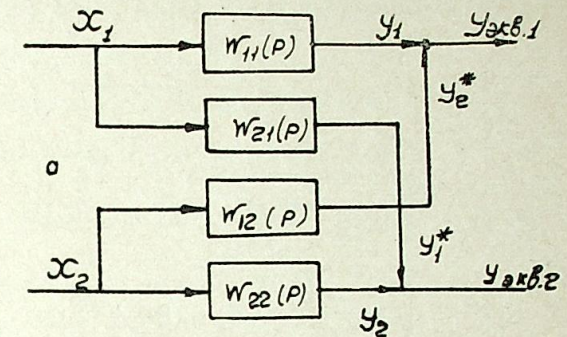


Рис. 3

Структурные схемы объекта регулирования.

Представим его в показательной форме

$$W_{\text{экл}}(m; i\omega) = M_{11}(m; i\omega) e^{-iF_{11}(m; \omega)} + M_{12}(m; \omega) e^{-iF_{12}(m; \omega)}, \quad (19)$$

$$W_{\text{экл}}(m; i\omega) = M_{11}(m; \omega) \cos F_{11}(m; \omega) - i M_{11}(m; \omega) \sin F_{11}(m; \omega) + \\ + M_{12}(m; \omega) \cos F_{12}(m; \omega) - i M_{12}(m; \omega) \sin F_{12}(m; \omega) = M_{11}(m; \omega) \cos F_{11}(m; \omega) - \\ - M_{12}(m; \omega) \cos F_{12}(m; \omega) + i [M_{11}(m; \omega) \sin F_{11}(m; \omega) - \\ - M_{12}(m; \omega) \sin F_{12}(m; \omega)], \quad (20)$$

$$M_{11}(m; \omega) \cos F_{11}(m; \omega) + M_{12}(m; \omega) \cos F_{12}(m; \omega) = a, \quad (21)$$

$$M_{11}(m; \omega) \sin F_{11}(m; \omega) + M_{12}(m; \omega) \sin F_{12}(m; \omega) = b, \quad (22)$$

$$W_{\text{экл}}(m; i\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} e^{-i \arctg \frac{b}{a}}, \quad (23)$$

где

$$\sqrt{a^2 + b^2} = M_{\text{экл}}(m; \omega); \quad \arctg \frac{b}{a} = F_{\text{экл}}(m; \omega).$$

Тогда окончательно расширенная амплитудно-фазовая характеристика для „эквивалентного“ канала принимает такой вид:

$$W_{\text{экл}}(m; i\omega) = M_{\text{экл}}(m; \omega) e^{-i \arctg F_{\text{экл}}(m; \omega)} \quad (24)$$

Результаты вычислений при различных ω сведены в таблицу.

Полученные в результате обычные и расширенные частотные характеристики основного, перекрестного и эквивалентного каналов дают возможность провести расчет оптимальных параметров постройки систем регулирования температуры сырья на выходах из печи с учетом внутренней перекрестной связи.

Расчет оптимальных настроек систем автоматического регулирования „эквивалентного канала“ регулирования, т. е. основного канала с учетом внутренней перекрестной связи*

Как сказано выше, рассматриваемая атмосферная трубчатая печь как объект автоматического регулирования является объектом с взаимосвязанными выходными величинами, т. е. является идентичной двухканальной системой с чисто симметричными внутренними перекрестными связями.**

Методы расчета и исследования систем автоматического регулирования таких объектов частично разработаны и частично находятся в стадии разработки. В настоящей статье мы ограничимся лишь выяснением того, к какому частному случаю можно отнести возникающую здесь задачу и указанием пути ее решения.

Как известно из классической теории регулирования, существует два основных способа регулирования объектов с несколькими взаимосвязанными величинами: связанное и несвязанное.

При связанном регулировании различных регулируемых величин одного агрегата регуляторы имеют взаимные связи друг с другом,

* Расчет оптимальной настройки системы автоматического регулирования трубчатой печи без учета внутренней связи был доложен на 8-й конференции аспирантов АН Азерб. ССР.

** Термины заимствованы из литературы [4].

которые осуществляют взаимодействие между собой вне технологического процесса. Эти связи также в зависимости от структурной схемы объекта могут быть одностороннего или двустороннего действия, статические или динамические.

Несвязанное регулирование объекта с двумя взаимосвязанными величинами является самой простой по структуре системой. Каждый регулятор независимо друг от друга, воздействуя на свой регулируемый орган, поддерживает постоянное значение своей регулируемой величины.

В промышленной практике используются оба способа регулирования процессов с двумя взаимосвязанными параметрами: автономного и несвязанного регулирования. Структурная схема атмосферной трубчатой печи и ее динамические характеристики показали, что в рассматриваемом объекте степень связи на регулируемые параметры по перекрестным каналам, существенна с отрицательными знаками, но не сильнее, чем по основным, поэтому пришли к выводу, что не следует применять схему автономного регулирования. Многолетняя производственная практика систем несвязанного регулирования для широких объектов доказывает надежность и работоспособность такой системы.

Как известно, основным преимуществом систем несвязанного регулирования является относительная простота и дешевизна этих систем, значительно меньшее количество регуляторов, чем в системах автономного регулирования. Эксплуатация, наладка и настройка такой системы регулирования на промышленной установке становится значительно проще.

Преимущества систем несвязанного регулирования заставляют искать пути распространения области их применения на объекты с несколькими взаимосвязанными параметрами, в частности, с двумя взаимосвязанными параметрами при сохранении удовлетворительного качества регулирования.

Удовлетворительное качество регулирования объектов с двумя взаимосвязанными параметрами получится и в результате расчета оптимальной настройки систем регулирования с учетом внутренней перекрестной связи.

Ниже рассчитываем систему несвязанного регулирования с двумя взаимосвязанными величинами, с учетом внутренней перекрестной связи.

Структурная схема замкнутой системы регулирования представлена на рис. 4.

Частным случаем при расчете несвязанного регулирования объекта с двумя взаимосвязанными параметрами является симметричность схемы, т. е.

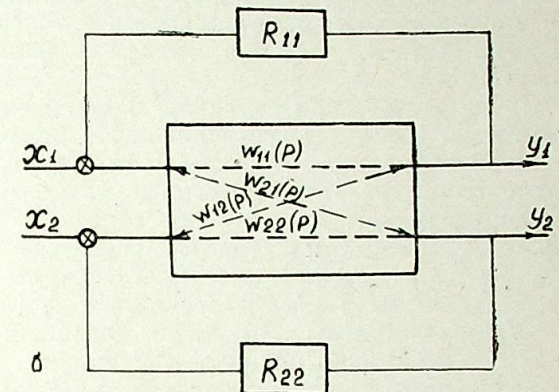


Рис. 4
Структурные схемы системы регулирования трубчатой печи.

$$W_{11}(p) = W_{22}(p); \quad W_{12}(p) = W_{21}(p); \quad R_{11} = R_{22}.$$

Рассчитываем оптимальную настройку астатического регулятора с двумя параметрами настройки, т. е. ПИ регулятора, обеспечивающего заданное значение степени колебательности процесса ($m = 0,221$) регулирования, для "эквивалентного" канала регулирования по методике, предложенной Е. Г. Дудниковым*.

Как известно, для расчета параметров настройки регулятора необходимо знать динамические характеристики объекта и регулятора, а также рабочую характеристику регулирующего органа. Поскольку о характеристике регулирующего органа никаких данных не имеется, будем считать, что она войдет в рассчитываемую характеристику регулятора.

При расчете настройки предполагается, что выбранный (исследуемый) регулятор представляет собой идеальный изотропный пневматический регулятор. Чтобы процесс регулирования обладал требуемым качеством, замкнутая система регулирования должна иметь соответствующую амплитудно-фазовую характеристику $W_{з.с}(i\omega)$. В рассматриваемом случае амплитудно-фазовая характеристика замкнутой системы $W_{з.с}(i\omega)$ является функцией амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) объекта $W_{об}(i\omega)$ и АФХ регулятора $W_p(i\omega)$.

Однако $W_{об}(i\omega)$ обычно не поддается изменению, и воздействие на $W_{з.с}(i\omega)$ можно осуществить, изменяя $W_p(i\omega)$.

Регуляторы имеют специальные настроечные устройства, изменяя положение которых можно в известных пределах деформировать амплитудно-фазовую характеристику регулятора $W_p(i\omega)$, придавая ей нужную форму, и этим воздействовать на $W_{з.с}(i\omega)$.

Задача расчета оптимальной настройки состоит в том, что по заданному качеству процесса и характеристикам объекта вычисляются параметры настройки регулятора.

Под оптимальной настройкой в используемом методе (2, 3) понимается такая настройка регулятора, при которой процесс регулирования в системе удовлетворяет следующим критериям качества.

1. Определенной степени затухания

$$\psi = \frac{Y_n - Y_{n+2}}{Y_n}, \quad (25)$$

где Y_n и Y_{n+2} — n и $(n+2)$ -я амплитуда наиболее плохо затухающего парциального колебания процесса регулирования.

2. Минимальному значению интегральной оценки

$$I = \int_0^{\infty} [Y(t) - Y(\infty)]^2 dt, \quad (26)$$

где $Y(t)$ — значение регулируемой величины в момент времени; $Y(\infty)$ — ее значение, соответствующее новому состоянию равновесия. Оценка I может быть вычислена, если известны амплитудно-фазовые характеристики регулируемого объекта и регулятора.

Таким образом, оптимальными процессами регулирования называются такие, которые имеют при заданном значении степени затухания наименьшую площадь процесса регулирования.

* Эта работа была доложена в Энергетическом институте АН Азерб. ССР на секции по автоматике 10 января 1961 г.

Как известно, интеграл линейного дифференциального уравнения системы автоматического регулирования имеет вид:

$$Y = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (27)$$

Характер колебаний системы зависит от корней p_k характеристического уравнения. Наложим на корень p_k ограничение следующего вида:

$$p_k = -m\omega + i\omega, \quad (28)$$

где m — положительное число.

Этому корню соответствует колебательная составляющая переходного процесса в виде

$$Y = \sum_{k=1}^n A_k e^{-m_k \omega_k t} e^{i\omega_k t} \quad (29)$$

Определим настройки регулятора, при которых для любого затухающего парциального колебания процесса в диапазоне пропускаемых системой частот выделяется условие

$$\psi_k = \frac{Y_n - Y_{n+2}}{Y_n} = 1 - e^{-2\pi m_k} \geq \psi_{\min} = 1 - e^{-2\pi m_{\min}} \quad (30)$$

или, другими словами, условие

$$m_k \geq m_{\min}, \quad (31)$$

т. е. те настройки, при которых все корни характеристического уравнения в комплексной плоскости расположены слева от мнимой оси внутри контура, изображенного на рис. 5.

Для решения поставленной задачи используется метод частотных характеристик. Чтобы получить выбранную степень затухания процесса регулирования, определяется расширенная амплитудно-фазовая характеристика регулируемого объекта [2, 3].

Если в комплексной плоскости расширенная амплитудно-фазовая характеристика $W_{р.с}(iz)$ разомкнутой системы регулирования проходит через точки $(-1, i0)$ при некотором значении z и не охватывает этой точки при других значениях этого параметра, можно доказать также, как это было сделано при доказательстве критерия Найквиста-Михайлова, что в этом случае одна пара сопряженных комплексных корней характеристического уравнения замкнутой системы лежит на контуре D ,

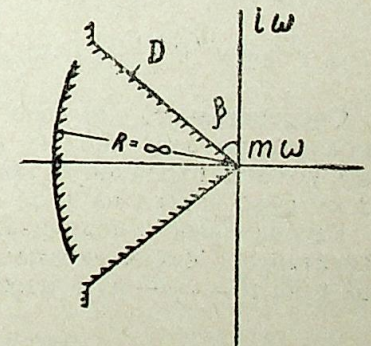


Рис. 5
Граница области распределения корней характеристического уравнения замкнутой системы при заданной степени затухания процесса.

причем действительная и мнимая составляющая этой пары корней входят из уравнения

$$W_{p.c.}(iz) = 1, \quad (32)$$

где $z = -m\omega + i\omega$.

Задаваясь различными значениями z , лежащими на контуре D , на основании уравнения (30) в пространстве параметров настройки регуляторов можно выделить области настроек, соответствующие внутренней области контура. Это построение, очевидно, является D -разбиением Неймарка пространства параметров настройки регулятора по отношению к области в плоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы регулирования. Рассматриваемая нами система регулирования состоит из регулируемого объекта и регулятора, которые представляют собой детектирующие системы. При замыкании этой системы (путем отсоединения регулятора от регулирующего органа) расширенная амплитудно-фазовая характеристика $W_{p.c.}(m; i\omega)$ разомкнутой системы может быть выражена равенством

$$W_{p.c.}(m; i\omega) = W_{об}(m; i\omega) \cdot W_p(m; i\omega) = 1. \quad (33)$$

Это является исходным уравнением для расчета настройки замкнутой линейной системы автоматического регулирования, находящейся на границе заданной степени затухания. Как указывалось выше, имеет вид

$$W_{об}(m; i\omega) \cdot W_p(m; i\omega) = 1 \quad (34)$$

или

$$W_p(m; i\omega) = W_{об}^*(m; i\omega), \quad (35)$$

где $W_p(m; i\omega)$ — расширенная амплитудно-фазовая характеристика регулятора;

$W_{об}^*(m; i\omega) = \frac{1}{W_{об}(m; i\omega)}$ — обратная (инверсная) расширенная амплитудно-фазовая характеристика объекта

$$W_p(m; i\omega) = \frac{1}{W_{об}(m; i\omega)} = \Theta_{об}(m; \omega) e^{-iF_{об}(m; \omega)} \quad (36)$$

Следовательно, для того, чтобы процесс регулирования системы имел степень затухания не ниже заданного значения, регулятор должен усилить входящие в него возмущения в $\Theta_{об}(m; \omega)$ раз и сдвинуть их по фазе вперед на угол $F_{об}(m; \omega)$.

Расширенная амплитудно-фазовая характеристика астатического регулятора с двумя параметрами настройки определяется также заменой p на $p = \omega(i - m)$ в передаточной функции регулятора*.

$$W_p(m; i\omega) = \frac{S_1(-m\omega + i\omega) + S_0}{-m\omega + i\omega} \quad (37)$$

или

* Передаточная функция изодромного регулятора равна $W_p(p) = -\frac{S_1 p + S_0}{p}$.

$$W_p(m; i\omega) = \frac{\sqrt{(S_0 - S_1 m\omega)^2 + S_1^2 \omega^2}}{\omega \sqrt{m^2 + 1}} e^{i \left[\arctg \frac{S_1 \omega}{S_0 - S_1 m\omega} - \arctg \left(-\frac{1}{m} \right) \right]} = \frac{\sqrt{(S_0 - S_1 m\omega)^2 + S_1^2 \omega^2}}{\omega \sqrt{m^2 + 1}} e^{i \left[\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{S_1 \omega}{S_0 - S_1 m\omega} - \arctg m \right]} \quad (38)$$

Из уравнений (36) и (38) определяются величины

$$\Theta_{об}(m; \omega) = \frac{\sqrt{(S_0 - S_1 m\omega)^2 + S_1^2 \omega^2}}{\omega \sqrt{1 + m^2}} \quad (39)$$

$$F_{об}(m; \omega) = \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{S_1 \omega}{S_0 - S_1 m\omega} - \arctg m. \quad (40)$$

Решая уравнения (39) и (40) относительно S_0 и S_1 получают расчетные формулы для определения параметров настройки регулятора, обеспечивающих заданное значение степени затухания процесса регулирования:

$$S_1 = \Theta_{об}(\omega; m\omega) [m \sin F_{об}(\omega; m\omega) - \cos F_{об}(\omega; m\omega)], \quad (41)$$

$$S_0 = \omega(1 + m^2) \Theta_{об}(\omega; m\omega) \sin F_{об}(\omega; m\omega). \quad (42)$$

Уравнения (41) и (42) являются исходными для определения значений параметров настройки S_1 и S_0 , а также наиболее низкой частоты ω парциального колебания, соответствующей заданному значению m в рабочем диапазоне частот регулятора.

Для выбора оптимальных параметров настройки пропорционально-интегрального (изодромного) регулятора по расширенной амплитудно-фазовой характеристике объекта необходимо строить линию равного затухания в плоскости параметров (настроечных параметров регулятора внутри области устойчивости), которая выполняется по выражениям (41) и (42).

Из выражений (41) и (42) следует, что каждому вектору расширенной амплитудно-фазовой характеристики объекта соответствует определенная точка на линии равного затухания в плоскости параметров настройки регулятора.

Расчеты параметров настройки S_0 и S_1 сведены в таблицу 1.

График $S_0 = f(S_1)$ изображен на рис. 6.

В качестве оптимальной настройки приняты

$$S_1 = 44,00^\circ \text{C}/\% \text{ макс. расхода,}$$

$$S_0 = 0,071^\circ \text{C}/\% \text{ сек.}$$

$$W_p = 0,0038 \text{ рад/сек}$$

В работах [2, 3] показано, что если двигаться по кривой равного затухания от меньших значений частот к большим, то амплитуды колебаний регулируемой величины уменьшаются. Однако по мере приближения к оси абсцисс процесс затягивается, а при значении S_0 , лежащем на оси абсцисс и равном нулю, $T_1 = \infty$, процесс регулирования, определяемый этой точкой, характеризуется наименьшими отклонениями регулируемой величины, но имеет остаточную неравномерность. Переход через вершину влево по кривой равного затухания

недопустим, так как начинается одновременное уменьшение параметров S_0 и S_1 , что ведет к резкому ухудшению качества процесса регулирования. Предполагается, что в качестве оптимальной настрой-

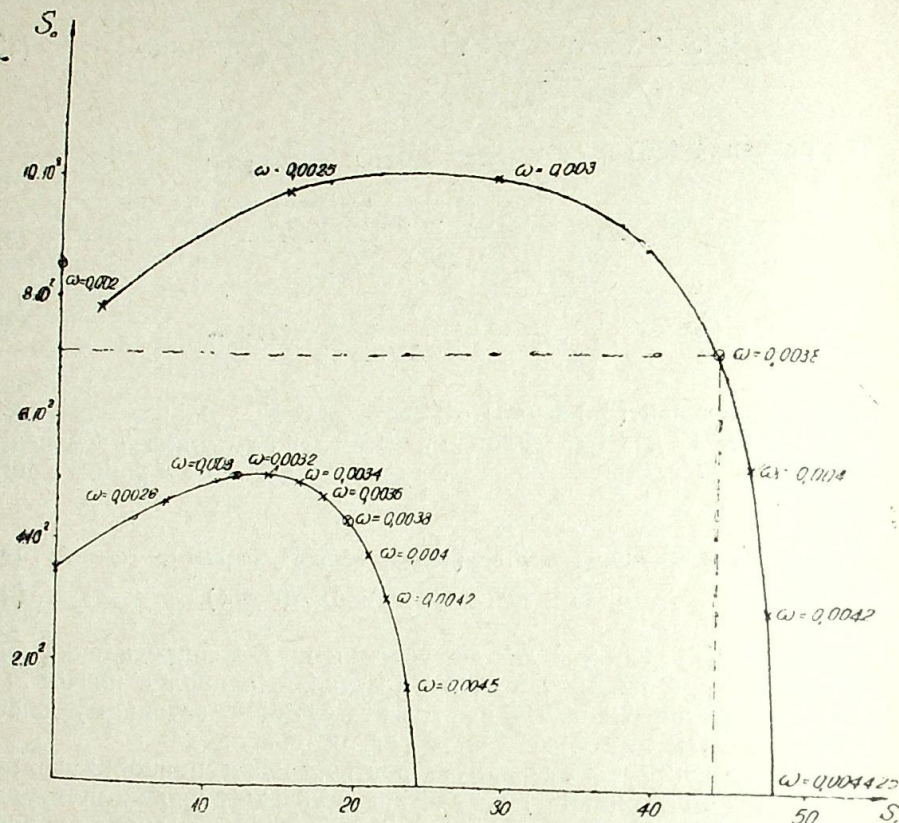


Рис. 6
Линия равного затухания внутри области устойчивости. Области параметров настройки изотермического регулятора для $m=0,221$ (1—без учета; 2—с учетом внутренней связи).

Таблица

ω рад/сек	0,002	0,0025	0,003	0,0038	0,004	0,0042	0,004425
$\theta_{11}(m; \omega)$	0,0583	0,0568	0,055	0,0496	0,0478	0,0459	0,0437
$F_{11}(m; \omega)$	77°27'	98°11'	117°01'	146°20'	154°18'	160°30'	168°15'
$\theta_{12}(m; \omega)$	0,0484	0,0472	0,0466	0,0420	0,0404	0,0389	0,0372
$F_{12}(m; \omega)$	84°30'	107°10'	128°41'	162°55'	172°19'	180°00'	189°05'
$M_{11}(m; \omega)$	17,15	17,60	18,18	20,16	20,92	21,79	22,88
$M_{12}(m; \omega)$	20,69	21,19	21,46	23,81	24,75	25,71	26,88
$M_{э\kappa\beta}(m; \omega)$	37,77	38,11	39,43	43,85	45,11	46,45	48,15
$F_{э\kappa\beta}(m; \omega)$	81°18'	101°50'	123°11'	156°00'	164°05'	171°53'	180°
S_1	2,54	16,13	28,84	44,00	46,11	47,43	48,15
S_0	0,0783	0,0977	0,1037	0,0710	0,0518	0,0029	0

ки берется точка, находящаяся на правой ветви кривой равного затухания вблизи от вершины. Вблизи оптимальных значений вариация параметров в некоторых пределах не оказывает существенного влияния на качество переходного процесса.

Расчет частотных характеристик замкнутой системы при рассчитанной настройке и построение графика переходного процесса будут изложены в следующей статье.

Выводы

В результате проведенных теоретических анализов пришли к следующему заключению.

1. Анализ структурной схемы системы автоматического регулирования рассматриваемой трубчатой печи показывает, что она является чисто симметричной системой, т. е. $W_{11}(p) = W_{22}(p)$; $W_{12}(p) = W_{21}(p)$; $R_{11} = R_{22}$.

2. На основе полученных расширенных частотных характеристик основного, перекрестного и «эквивалентного» канала рассчитаны оптимальные настройки систем автоматического регулирования, построены линии равного затухания в пространстве настроечных параметров ПИ регулятора без учета и с учетом внутренней перекрестной связи с отрицательными знаками.

3. Построенные линии равных затуханий показывают, что область устойчивости при учете отрицательных внутренних перекрестных связей намного увеличивается. Это является следствием имеющих в объекте как бы внутренних «отрицательных обратных связей» при замкнутых контурах обеих сторон печи.

4. С помощью метода расширенных частотных характеристик получены настроечные параметры изотермического регулятора ($S_1=44,00$; $S_0=0,071$) для осуществления оптимального процесса регулирования.

5. Результаты данной работы во многих случаях могут быть типовыми для других аналогичных печей, имеющих в установках нефтеперерабатывающей и химической промышленности.

ЛИТЕРАТУРА

- Абилов А. Г. Экспериментальное исследование динамических характеристик однокамерной двухпоточной трубчатой печи атмосферной установки. «Изв. АН Азерб. ССР», 1961, № 6.
- Автоматизация производственных процессов. Изд. АН СССР, 1955.
- Дудников Е. Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов Госэнергоиздат, 1956.
- Красовский А. А. О двухканальных системах автоматического регулирования с антисимметричными связями «Автоматика и телемеханика», 1957, т. XVIII, № 2.

Э. Н. Эбилов

Дахили чарпаз элагэни нэзэрэ алараг атмосфер
гургусундакы борулу собанын оптимал
сазланмасынын тэ'јини

ХҮЛАСЭ

Мэгалэдэ дахили чарпаз элагэни нэзэрэ алараг атмосфер гургусундакы бир камералы вэ ики ахымлы борулу собанын оптимал сазланмасынын несабланмасы верилмишдир.

Оптимал сазланманын һесабыланмасы проф. Е. Г. Дудников тәрәфиндән верилмиш кенишләнмиш тезлик характеристикалары үсулундан истифадә едәрәк апарылмышдыр.

Бахдығымыз борулу соба бир тәнзим объекти нөгтеји-нәзәринчә дахили чарпаз әлагәси олан ики идентик каналлы бир системдир. Өзү дә бу систем там симметрик олан бир системдир, јә'ни

$$W_{11}(p) = W_{22}(p); \quad W_{12}(p) = W_{21}(p).$$

Нәзәри мулаһизәләрдән ајдын олмушдур ки, оптимал сазланманын һесабыланмасында дахили чарпаз әлагәнин нәзәрә алынмасы мүтләғлазымдыр.

Бу мәгсәдлә мәғаләдә „эквивалент“ каналын, јә'ни дахили чарпаз әлагәни нәзәрә алан әсас каналын, кенишләнмиш тезлик характеристикасынын һесабыланмасы үсулу верилмишдир.

„Эквивалент“ канал үчүн алдығымыз кенишләнмиш тезлик характеристикасындан, јә'ни $W_{\text{екв}}(m; i\omega) = W_{11}(m; i\omega) + W_{12}(m; i\omega)$ истифадә едәрәк, сечдији миз изодром тәнзимләјичисинин оптимал сазланма параметрләри мүстәвисиндә бәрәбәр сөнмә хәтти гурулмушдур. Оптимал сазланма параметрләри ашағыдакылар көтүрүлмүшдүр, јә'ни $S_1 = 44,00^\circ\text{C}/\%$ макс. пајланма; $S_0 = 0,071^\circ\text{C}/\%$ саб.

К. Н. ДЖАЛИЛОВ

ВОПРОСЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ И ОБВОДНЕНИЯ СКВАЖИН В МАКРОНЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Гидродинамические исследования перемещения контура нефтеносности и процесса обводнения скважин в зависимости от начальной формы контура нефтеносности и расположения скважин по отношению к нему, от наклона пласта и различия в вязкостях нефти и воды в однородной среде проводились рядом авторов. Задача о перемещении контура нефтеносности и обводнении скважины в неоднородной среде, состоящей из отдельных пропластиков с разными проницаемостями, решена В. Н. Шелкачевым, исходя из предположения, что жидкость по пропласткам движется послойно [6].

По характерным линиям (по главной и нейтральной) особенности стягивания контура нефтеносности в макронеоднородной среде исследовались М. А. Гусейнзаде [1].

В дальнейшем вышеуказанные вопросы рассматривались нами [2] и совместно с Н. Д. Джафаровым [3].

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы перемещения контура нефтеносности по любой линии тока и процесса обводнения скважины в макронеоднородной среде.

Рассмотрим следующие случаи.

1. Контур нефтеносности стягивается к скважине в бесконечном пласте, состоящем из двух зон, разделяющихся бесконечной прямолинейной границей (см. рис. 1).

В этом случае комплексные потенциалы примут вид [1]:

$$\left. \begin{aligned} F_1(z) &= -\frac{q}{2\pi} [\ln z + \lambda \ln(z-l)] + c_1 \\ F_2(z) &= -\frac{q}{2\pi} (1-\lambda) \ln z + c_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

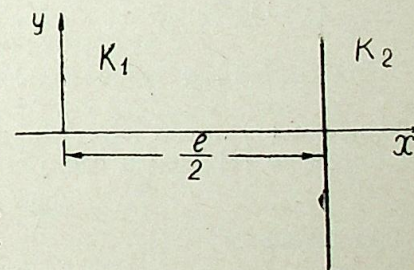


Рис. 1

Отсюда потенциальные функции и уравнения семейства линий тока будет:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{q}{4\pi} \{ \ln(x^2 + y^2) + \lambda[(x-l)^2 + y^2] \} + \varphi_{10} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} &= c_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{q}{4\pi} (1-\lambda) \ln(x^2 + y^2) + \varphi_{20} \\ (1-\lambda) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= c_2 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2};$$

$\frac{l}{2}$ — расстояние скважины от границы раздела зон;

κ_1, κ_2 — соответственно проницаемости первой и второй зон.

В зависимости от значений κ_1 и κ_2 могут оказаться следующие частные случаи.

а) при $\kappa_1 \geq \kappa_2$ ($\lambda \geq 0$) формула продвижения контура нефтеносности получается в дифференциальной форме:

$$dt = -\frac{\pi m l^2}{(1-\lambda)q} \left(\frac{\cos \rho}{\sin^3 \rho} - \cos \frac{2c_1}{1+\lambda} \frac{\cos \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \rho}{\sin^3 \rho} + \sin \frac{2c_1}{1+\lambda} \frac{\sin \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \rho}{\sin^3 \rho} \right) d\rho \quad (4)$$

При различных значениях λ (например, при $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$)

уравнение (4) легко интегрируется.

Согласно [4], вводя следующие обозначения

$$y = x \operatorname{tg} \theta_1, \quad y = (x-l) \operatorname{tg} \theta_2$$

и подставляя в

$$m \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

находим:

$$dt = -\frac{2\pi m l^2}{q} \frac{\operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \theta_2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2}{(\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1)^3} d\theta_2, \quad (5)$$

где

$$\theta_1 + \lambda \theta_2 = c_1$$

Принимая $(1+\lambda)\theta_2 - c_1 = \rho$, $\lambda = \frac{1}{2n-1}$ (n — натуральное число), из 5) получим:

$$t = -\frac{2\pi m l^2}{q} \frac{2n-1}{2n} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\frac{\cos \rho}{\sin^3 \rho} - \cos \frac{2n-1}{n} C_1 \frac{\cos \frac{n-1}{n} \rho}{\sin^3 \rho} + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{2n-1}{n} C_2 \frac{\sin \frac{n-1}{n} \rho}{\sin^3 \rho} \right) d\rho,$$

где

$$\rho_1 = (1+\lambda)d - c_1, \quad \rho_2 = (1+\lambda)\beta - c_1 \quad (6)$$

d и β определяются из уравнений:

$$\frac{\sin[(1-\lambda)\alpha + c_1]}{\sin[(1+\lambda)\alpha - c_1]} = \frac{2x_1}{l} - 1; \quad \frac{\sin[(1-\lambda)\beta + c_1]}{\sin[(1+\lambda)\beta - c_1]} = \frac{2x}{l} - 1. \quad (7)$$

Отсюда при $n = 2(\lambda = \frac{1}{3}, \kappa_1 = 2\kappa_2)$

$$t = \frac{3}{4} \frac{\pi m l^2}{q} \left\{ \frac{\sin^2 \frac{3c_1 - \rho}{4}}{\sin^2 \rho} - \frac{3}{4} \sin \frac{3c_1 - \rho}{2} \operatorname{ctg} \rho + \frac{3}{4} \cos \frac{3c_1 - \rho}{2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \left[\cos \frac{3c_1}{2} \operatorname{Intg} \frac{\rho}{4} - \sin \frac{3c_1}{2} \operatorname{Intg} \left(\frac{\rho}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} \quad (8)$$

При $n = 3(\lambda = \frac{1}{5}, \kappa_1 = \frac{3}{2}\kappa_2)$

$$t = \frac{5}{6} \frac{\pi m l^2}{q} \left\{ \frac{\sin^2 \frac{5c_1 - \rho}{6}}{\sin^2 \rho} - \frac{5}{6} \sin \frac{5c_1 - \rho}{3} \operatorname{ctg} \rho + \frac{5}{6} \cos \frac{5c_1 - \rho}{3} + \right. \\ \left. + \frac{5}{36} \left[\cos \frac{5c_1}{3} \ln \frac{(2 \cos \frac{1}{3} \rho - 1)(-1 + \cos \frac{1}{3} \rho)}{(2 \cos \frac{1}{3} \rho + 1)(1 + \cos \frac{1}{3} \rho)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{3} \sin \frac{5c_1}{3} \ln \frac{\sqrt{3} - 2 \sin \frac{1}{3} \rho}{\sqrt{3} + 2 \sin \frac{1}{3} \rho} \right] \right\} \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} \quad (9)$$

В формулах (8) и (9) соответствующие ρ_1, ρ_2 и α, β находятся из (6), (7).

б) Если $\kappa_1 < \kappa_2$ ($\lambda < 0$), тогда при четных n в первой зоне будем иметь [3]:

$$t = \frac{\pi m l^2}{2(1-\lambda)q} \left[\frac{a \cos \rho - 2bn \sin \rho - 1}{\sin^2 \rho} - (1-n^2)a \operatorname{Intg} \frac{\rho}{2} + \right. \\ \left. + 2bn \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^i \frac{(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2) \dots [n^2 - (2i)^2]}{(2i+1)!(2i-1)!} \sin^{2i-1} \rho - \right.$$

$$-2a \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-2} \left\{ (-1)^{i+2} \frac{n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(2i+4)^2](-1)^{i+1}}{(2i+4)! 2^{2i}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{2i+1}{s} \frac{\cos(2i+1-2s)}{2i+1-2s} \rho \right\} \Bigg|_{\rho_1}^{\rho_2}, \quad (10)$$

где

ρ_1 и ρ_2 — пределы интегрирования

$$\rho_1 = (1-\lambda)\alpha_1 - c_1, \quad \rho_2 = (1-\lambda)\beta_1 - c_1, \quad 1 < \lambda \leq 0$$

$$n = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}, \quad a = \cos \frac{2c_1}{1-\lambda}, \quad b = \sin \frac{2c_1}{1-\lambda}$$

α_1, β_1 определяются из следующих соотношений:

$$\frac{\sin[(1+\lambda)\alpha_1 + c_1]}{\sin[(1-\lambda)\alpha_1 - c_1]} = \frac{2x_1}{l} - 1; \quad \frac{\sin[(1-\lambda)\beta_1 + c_1]}{\sin[(1-\lambda)\beta_1 - c_1]} = \frac{2x}{l} - 1;$$

x_1 и x — координаты начального и конечного положений частицы жидкости $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$.

При нечетных n :

$$t = \frac{\pi m l^2}{2(1-\lambda)q} \left[\frac{a - b n \sin 2\rho - 1}{\sin^2 \rho} + a(n^2 - 1) \ln \sin \rho - \frac{b n (n^2 - 1) \rho}{3} - \right. \\ \left. - 2a \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{i+1} \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 3^2) \dots [n^2 - (2i+3)^2]}{(2i+2)! 2i} \sin^{2i} \rho + \right. \\ \left. + 2b n \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{i+1} \frac{(n^2 - 1)(n^2 - 3^2) \dots [n^2 - (2i+1)^2]}{(2i+3)!} \left\{ \frac{\binom{2i}{i} \rho}{2^{2i}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^i}{2^{2i-1}} \sum_{s=0}^{i-1} (-1)^s \binom{2i}{s} \frac{\sin(2i-2s)\rho}{2i-2s} \right\} \right] \Bigg|_{\rho_1}^{\rho_2} \quad (11)$$

Отсюда при $n=2, 3, 4, 5, \dots$, получаются простые расчетные формулы (см. [3]).

Из второго выражения формулы (2) в точке (0,0) находим:

$$c_1 = 0$$

Для второй зоны получается следующая формула:

$$t = \frac{\pi m \sec^2 \frac{c_2}{1-\lambda}}{(1-\lambda)q} x^2 \Bigg|_{x_1}^x,$$

где

$$\frac{l}{2} \leq x \leq x_1, \quad c_2 = 0$$

Подробное исследование по этим формулам проводилось в работе [3]. Легко получаются формулы для однородного пласта (т. е. при $\lambda = 0$).

В выражениях (8), (9), (10) и (11) первоначальную форму контура нефтеносности можно принимать в виде прямой линии, окружности и т. д. при разных расположениях по отношению границы раздела двух зон.

Приравнявая x к нулю, из (6), (7), (8) и (9) находим зависимость между временем t и углом обводнения θ с момента прорыва воды к скважине и, пользуясь выражением

$$\frac{Q_v}{Q} = \frac{\theta}{\pi},$$

можем определить $\frac{Q_v}{Q}$ от t .

2. Контур нефтеносности в бесконечном пласте с проницаемостью κ_1 стягивается к скважине, которая расположена внутри кругового включения с проницаемостью κ_2 . Радиус круговой зоны принимается равным единице (см. рис. 2).

Комплексные потенциалы для первой зоны примут вид [1]:

$$F_1(z) = -\frac{q}{2\pi} [(1+\lambda) \ln(z-l) - \lambda \ln z],$$

$$F_2(z) = -\frac{q}{2\pi} \left[\ln(z-l) - \lambda \ln \left(z - \frac{1}{l} \right) \right],$$

где $0 \leq l \leq 1$.

Отсюда

$$\varphi_1 = -\frac{q}{4\pi} \{ (1+\lambda) \ln[x-l)^2 + y^2] - \lambda \ln(x^2 + y^2) \},$$

и

$$(1+\lambda) \operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c_1$$

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \ln[x-l)^2 + y^2] - \lambda \ln \left[\left(x - \frac{1}{l} \right)^2 + y^2 \right] \right\}$$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x-l} - \lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x - \frac{1}{l}} = c_2$$

Эти выражения легко приводятся к вышеуказанным видам и в зависимости от формы начального контура нефтеносности можно исследовать

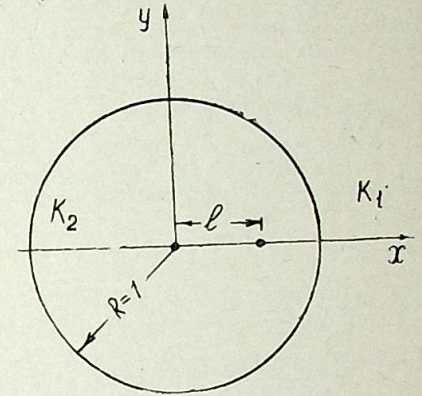


Рис. 2

особенности стягивания контура нефтеносности по любой линии тока и процесса обводнения скважины.

Выводу формул для указанных случаев и результатам расчетов будут посвящены отдельные статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнзаде М. А. Подземная гидродинамика. Труды МИХ и ГП им. Губкина, вып. 33, 1961.
2. Джалилов К. Н. О раздельном отборе нефти и подошвенной воды в неоднородных пластах. Изв. АН Азерб. ССР серия геол. геогр. наук и нефти, 1962, № 2.
3. Джалилов К. Н., Джафаров Н. Д. Вопросы перемещения контура нефтеносности и обводнения неравнодебитных скважин. Изв. АН Азерб. ССР, серия геол. геогр. наук и нефти, 1962, № 2.
4. Карпычев В. А. О раздельном отборе нефти и подошвенной воды в пластах платформенного типа. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1960, № 1.
5. Тимофеев А. Ф. Интегрирование функций. Огиз—Гостехиздат, 1948.
6. Щелкачев В. Н. Особенности прогрессирующего обводнения скважины в однородно-и неоднороднослоистом наклонных пластах. Труды МНИ им. И. М. Губкина, вып. т. XX, 1957.

Г. Н. Чалилов

Нефт контурунун һәрәкәти вә гујуларын бирчинсли олмајан лајда сулашмасы мәсәләләри

ХУЛАСӘ

Нефт контурунун һәрәкәти вә гујуларын сулашмасы мәсәләләри бирчинсли лајда мұәјјән һаллар үчүи тәдгиг едилмишдир. Кечиричиликләри мұхтәлиф тәбәгәләрдән ибарәт лајда сулашма просеси В. Н. Шелкачов тәрәфиндән арашдырылмышдыр. Бу мәсәләнин һәллиндә мајенин тәбәгәләр үзрә мұстәвиләр бојунча һәрәкәт етдији фәрз едилмишдир.

Нефт контурунун һәрәкәти мәсәләсини бирчинсли олмајан лајда характерик (баш вә нејтрал) хәтләр үзрә М. Ә. Гусейнзадә һәлл етмишдир. Бу мәсәләләрин һәллине сонралар мәгаләнин мұәллифи вә Н. Ч. Чәфәров тәрәфиндән бахылмышдыр.

Һәмин мәгалә маје һиссәчикләринин истәнилән чәрәјан хәтти үзрә һәрәкәти вә гујунун бирчинсли олмајан лајда сулашма просесинин арашдырылмасына һәср едилмишдир. Әсас ики һала бахылыр: 1. Дүз хәтт сонсуз лајда кечиричиликләри мұхтәлиф олан ики һиссәјә ајырымышдыр. 2. Сонсуз лајда кечиричилији фәргли олан даирәви областын олдуғу фәрз едилир. Нефт гујусу даирәви областын дахилиндә јерләшмишдир. Бу бахылан һалларда нефт контурунун башланғыч вәзијәти мұхтәлиф шәкилдә гәбул олунмагла истәнилән чәрәјан хәтти бојунча вә гујунун сулашмасы просеси тәдгиг едилә биләр.

С. М. КУЛИЕВ, А. М. АБДУЛ-ЗАДЕ, А. А. ШАМСИЕВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПОД ЗУБЬЯМИ ШАРОШКИ ДОЛОТА

При бурении скважин шарошечными долотами процесс разрушения породы носит весьма сложный характер, обусловливаемый рядом обстоятельств, зависящих от конструкции долота, режима и условий бурения.

В настоящей статье приводятся результаты исследования некоторых особенностей существа явлений, происходящих при повороте шарошек вокруг опорного зуба. Для упрощения задачи принимаем, что шарошки долота представляют собою совершенные конусы с зубьями, нарезанными вдоль образующей, и, что при бурении образуется плоский забой, т. е. при устойчивом положении шарошки два ряда опорных зубьев находятся в горизонтальной плоскости (рис. 1).

При перекачивании шарошки по такому забою ее ось будет совершать вертикально колебательное движение по выражению [2]:

$$z_k = R_{ш} \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \theta - \delta_{nt}, \quad (1)$$

где $R_{ш}$ — радиус основания шарошки;

θ — угол между осями долота и шарошки;

φ — угол поворота шарошки вокруг опорного зуба:

$$-\frac{\pi}{z} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{z}$$

z — число зубьев на периферийном венце;

δ_{nt} — глубина внедрения периферийной точки зуба в породу (точка π).

Любая i точка опорного зуба при колебательном движении шарошки совершает движение в плоскости zox , проведенной через ось долота и образующую опорного зуба, по уравнению:

$$z_i = (R_{ш} - R_i) \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \theta - \delta_{nt} \quad (2)$$

Процесс вертикального колебательного движения шарошки разделим на два периода.

В первый период $\left(-\frac{\pi}{z} < \varphi < 0\right)$ шарошка и ее вершина поднимается вокруг опорного зуба. При этом порода будет деформироваться,

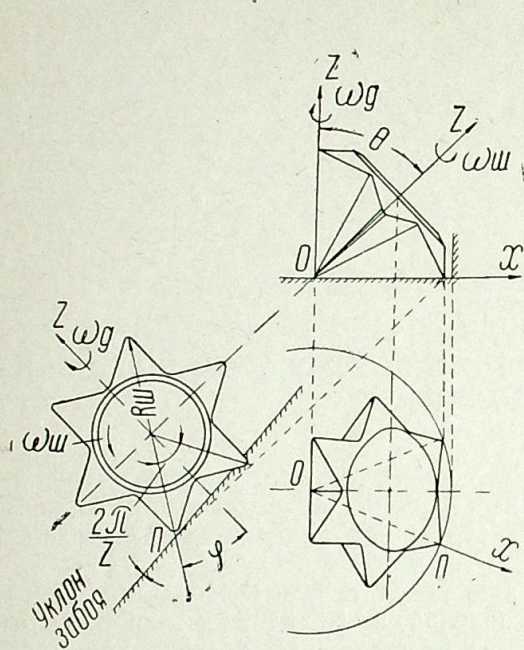


Рис. 1

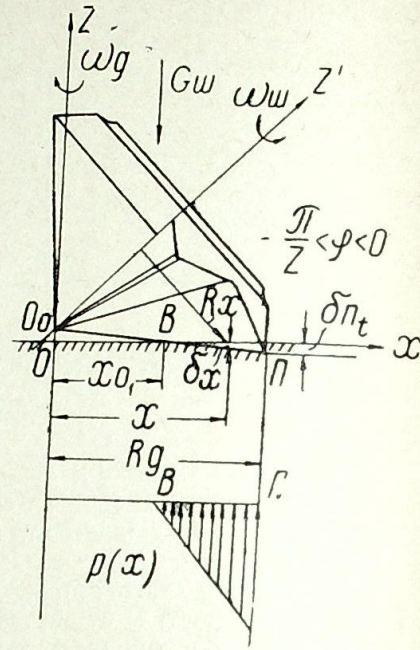


Рис. 2

начиная от точки II, и скорость деформации будет в этой точке максимальной, уменьшаясь по направлению к вершине шарошки (рис. 2)

Во втором периоде $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{z}\right)$ шарошка и ее вершина опускаются вниз. Наибольшая скорость деформации будет у вершины зуба; при этом, в зависимости от сопротивляемости породы внедрению σ и значения удельного давления p , точка II может занимать различные положения. Если у вершины шарошки:

- $\sigma > p$; точка II поднимается вверх;
- $\sigma = p$; точка II остается в том же положении;
- $\sigma < p$; точка II продолжает внедряться в породу.

Рассмотрим оба периода в отдельности.

Примем, что забой представляет собою упруго-вязкую породу, и между деформацией δ_x и удельным давлением на площади контакта существует соотношение [1].

$$\frac{d\delta_x}{dt} = k \frac{dp_x}{dt} + \nu p_x, \quad (3)$$

где k и ν — физические константы породы;
 k — коэффициент упругости;
 ν — коэффициент текучести.

Если площадку такой породы нагрузить в течение весьма короткого времени τ до удельного давления p_1 , то величина деформации δ_1 , площади к концу этого промежутка времени может быть оценена

интегрированием соотношения (3) в пределах от 0 до τ . Учитывая, что при $t=0$, $\delta=0$, $p=0$ получаем:

$$\delta_1 = kp_1 + \int_0^\tau \nu p dt \quad (4)$$

При малом значении коэффициента текучести ν интегралом, стоящем в правой части равенства (4), можно пренебречь.

Тогда при быстро меняющихся нагрузках

$$\delta \approx kp,$$

т. е. порода ведет себя как упругое основание.

Величина деформации породы δ_x на x -м сечении площади контакта в первом периоде будет:

$$\delta_{x_1} = \delta_{n_1} - (R_{ш} - R_x) \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \theta \quad (6)$$

Выразим R_x и $R_{ш}$ соответственно, через x и радиус долота R_d . Из рис. 2 определяем:

$$x = R_x (\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha),$$

откуда:

$$R_x = \frac{x}{\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (7)$$

следовательно:

$$R_{ш} = \frac{R_d}{\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (8)$$

где α — половина угла конуса шарошки.

При малом времени канта зуба с породой, подстановка (8) и (7) в (6), а затем в (5) дает:

$$p_{x_1} = \frac{1}{k} \left[\delta_{n_1} - a (R_d - x) \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \right], \quad (9)$$

где

$$a = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \quad (10)$$

Из условия равновесия осевой нагрузки $G_{ш}$ и реакции забоя имеем:

$$G_{ш} \int_{x_{0_1}}^{R_d} \delta_z p_{x_1} dx = 0 \quad (11)$$

где δ_z — текущее значение тупизны зуба (реакциями на боковых гранях зуба пренебрегаем);

x_{0_1} — предел площади контакта зуба с породой.

Учитывая, что в точке B давление равно нулю, определяем x_{0_1} :

$$0 = \frac{1}{k} \left[\delta_{n_1} - a (R_d - x_{0_1}) \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) \right],$$

откуда

$$x_{0_1} = R_d - \frac{\delta_{n_1}}{a \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right)} \quad (12)$$

При подъеме шарошки точка B будет стремиться к центру со скоростью:

$$v = \frac{dx_0}{dt} = - \frac{\left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right) v_{n1} + \delta_{n1} k_n \omega_d \cdot \sin \varphi}{a \left(\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{z} \right)^2}, \quad (13)$$

где v_{n1} — скорость внедрения точки π в породу;

k_n — передаточное отношение шарошки;

ω_d — угловая скорость вращения долота;

$\omega_{ш}$ — угловая скорость вращения шарошки вокруг своей оси.

В первом периоде максимальная глубина внедрения зуба в породу будет при $\varphi=0$, поэтому интегрируя соотношение (11), имеем:

$$G_{ш} = \frac{\delta_z}{k} \int_{x_0}^{R_d} \left[\delta_{n1} - a(R_d - x) \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) \right] dx = \frac{\delta_z \delta_{n1}^2}{2ak \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right)},$$

откуда определяем глубину внедрения периферийной точки зуба:

$$\delta_{n1} = \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} \quad (14)$$

При этом величины деформации δ_{x1} , давления p_{x1} и x_0 будут:

$$\delta_{x1} = \left[\sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} - a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_d - x) \right] \quad (15)$$

$$p_{x1} = \frac{1}{k} \left[\sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} - a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_d - x) \right] \quad (16)$$

$$x_0 = R_d - \sqrt{\frac{2kG_{ш}}{\delta_z a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right)}} \quad (17)$$

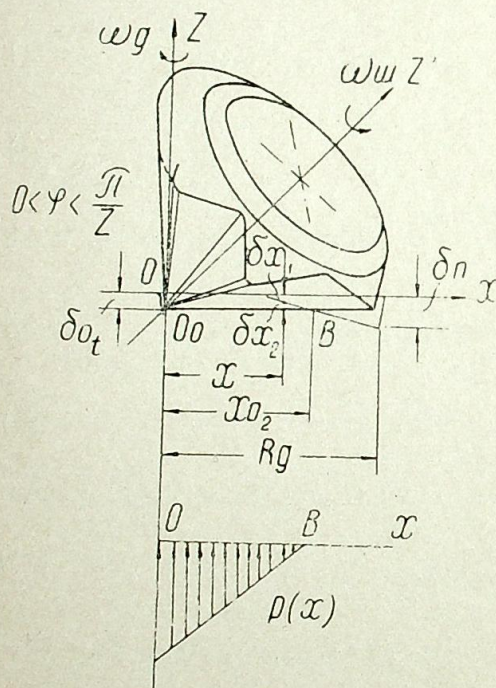


Рис. 3

Во втором периоде произойдет обратное явление. Деформация в любом сечении к концу второго периода будет (рис. 3):

$$\delta_{x2} = \delta_{02} - \delta_{x1}, \quad (18)$$

где δ_{02} — деформация породы при вершине зуба.

Учитывая (15), выражение (18) можно написать так:

$$\delta_{x2} = \delta_{02} - \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} + a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_g - x), \quad (19)$$

откуда определится значение удельного давления.

$$p_{x2} = \frac{1}{k} \left[\delta_{02} - \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} + a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_d - x) \right]. \quad (20)$$

Из условия $p(x_2)=0$ находим

$$0 = \frac{1}{k} \left[\delta_{02} - \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} + a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_d - x) \right]$$

$$x_{02} = \frac{\delta_{02} - \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}}}{a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right)} + R_d \quad (21)$$

Деформация породы δ_{02} при вершине зуба будет:

$$G_{ш} = \int_0^{x_{02}} \delta_z p_{x2} dx = 0$$

$$G_{ш} = \frac{\delta_z}{k} \int_0^{x_{02}} \left[\delta_{02} - \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} + a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) (R_d - x) \right] dx.$$

Интегрируя находим:

$$\delta_{02} = 2 \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} - a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) R_d \quad (22)$$

Величины деформации δ_{x2} удельного давления p_{x2} и x_0 будет:

$$\delta_{x2} = \sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} - a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) x \quad (23)$$

$$p_{x2} = \frac{1}{k} \left[\sqrt{\frac{2ka}{\delta_z} \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}} - a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) x \right] \quad (24)$$

$$x_{02} = \sqrt{\frac{2kG_{ш}}{\delta_z a \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right)}} \quad (25)$$

При единичном акте долота с забоем углубление зуба будет:

$$\delta = \sqrt{\frac{8k \sin \theta \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) G_{ш}}{\delta_z (\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha)}} - \frac{R_g \left(1 - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta \cdot \operatorname{ctg} \alpha} \quad (26)$$

Полученные формулы (15), (16), (24) и (26) выведены для больших скоростей вращения и выражают зависимость напряженного состояния и деформации породы забоя от конструкции долота ($\theta, z, \alpha, R_g, \delta_r$) и режима бурения $G_{ш}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Трение качения. ПММ, вып. 2, 1938.
2. Федоров В. С. Проектирование режимов бурения. Гостоптехиздат, 1958.

С. М. Гулијев, Ә. М. Әбдүлзаде, А. Ә. Шәмсијев

Балта шарошкаларынын дишлери алтында кәркинлијин пайланмасы

ХҮЛАСӘ

Мәгаләдә нефт гујуларынын газылмасында тәтбиг олуна шарош-калы балталарын дишлеринин сүхурла тәмасда олмасы просесинә бахылыр.

Гујудибн сүхуру бир нөв еластики гәбул едиләрәк, шарошканын дајаг диши үзәриндә чеврилмәси заманы контакт сәһәсиндә кәркинлијин пайланмасы гануну $p(x)$ вә сүхурун деформасија гијмәти δ мүәјјән едилмишдир.

АЗӘРБАЈҶАН ССР ЕЛМЛӘР АКАДЕМИЈАСЫНЫН ХӘБӘРЛӘРИ
Физика-ријазиијат вә техника елмләри сәријасы, 1962, № 2
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ ССР
Серия физико-математических и технических наук, 1962, № 2

М. С. МАМЕДЗАДЕ

СЕЛЕВЫЕ ПОТОКИ БАССЕЙНА р. КИШЧАЙ И МЕРЫ БОРЬБЫ С НИМИ

В 1959 г. Советом по изучению производительных сил республики Академии наук Азербайджанской ССР была организована комплексная экспедиция по изучению эрозии почв и селевых потоков в бассейне р. Кишчай и разработке мер борьбы с ними. Комплексная экспедиция состояла из почвенно-эрозионного, гидрологического, климатически-синоптического, геолого-геоморфологического, гидротехнического, геоботанического, топографического отрядов и отряда по экономическому обследованию.

Комплексное изучение эрозии почв и селевых потоков было вызвано тем, что процессы образования их связаны рядом природных условий. Только такой подход к этому сложному явлению природы может дать положительные результаты для правильного решения вопроса борьбы с эрозией почв селевыми потоками.

Эти исследования показали, что проблема изучения структурных селей и методов борьбы с ними ввиду сложности явления недостаточно изучена. Между тем, вред, приносимый народному хозяйству селями, настолько велик, что изучение этого вопроса как с научно-теоретической стороны, так и со стороны проведения практических мероприятий следует считать делом совершенно необходимым.

Исследование селей идет по двум путям: изучение естественных условий бассейнов, в которых формируются структурные сели, наблюдения за их прохождением, и теоретическое изучение их формирования и движения.

Возникновение селей связано с вполне определенными геологическими и геоморфологическими условиями бассейна, а также с характером денудационных процессов, протекающих в них в силу климатических, гидрологических и иных особенностей района. Поэтому, первая часть проведенных исследований была посвящена изучению комплекса этих естественно-исторических условий формирования селевого бассейна р. Кишчай.

Результат этих комплексных исследований сводится к следующему.

Бассейн р. Кишчай расположен на восточной половине южного склона Большого Кавказа. Поток выходит на Нухинскую наклонную

равнину около гор. Нуха, расположенного на его конусе выноса (рис. 1).

Река Кишчай образуется от слиянии ряда горных потоков, главными притоками которых являются: рр. Дамарчик, Чухадурмаз, Сарыгюней и Кайнар. За основную реку принимается Дамарчик. Общая длина р. Кишчай 34 км, площадь водосбора 265 км² (включая конус выноса полностью); 150 км² площади бассейна расположено в горной, а остальная в равнинной части.

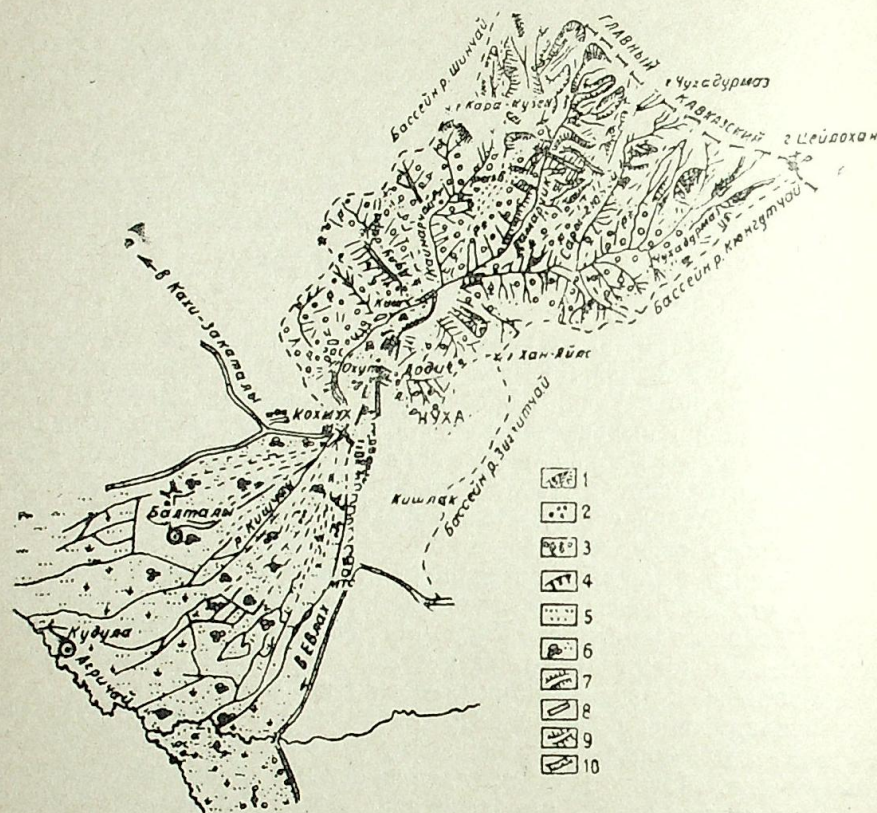


Рис. 1

Схема бассейна р. Кишчай. Составил М. С. Мамедзаде
1—селеобразующие очаги; 2—пастбища; 3—леса; 4—обрывистые участки;
5—пашни; 6—речные селевые отложения; 7—прошлые селезащитные
дамбы гор. Нухи; 8—существующие защитные бетонные дамбы; 9—пред-
лагаемая каменно-набросная плотина, возводимая взрывным способом;
10—предлагаемый канал, соединяющий реки Дамарчик и Сары-гюней,
проходящий через седловину г. Шоватор (взрывным способом).

Согласно данным С. Г. Рустамова, среднегодовой сток в бассейне изменяется от 0,5 до 45 л/сек; средний градиент по бассейну 1/40 м. л/сек. Интенсивное возрастание стока происходит в зоне 800—1800 м. Выше и ниже рост стока замедляется.

Неоднородность питания составляющих реку притоков вызывает большую неравномерность во внутригодовом режиме стока. Для рек, расположенных на высоте 1500 м, максимальное значение стока наблюдается в апреле и мае, а выше 2000 м — в июне.

Расчетные величины максимальных расходов 1%-й обеспеченности для р. Кишчай составляют $600 \text{ м}^3/\text{сек.}$

Селеобразующими очагами бассейна являются:

а) оголенные поверхности склонов на высоте свыше 3000 м, которые совершенно лишены растительного покрова и изобилуют обломочным материалом различных форм и крупности, находящихся в неустойчивом равновесии;

б) древнеледниковые делювио-пролювиальные отложения, прикрывающие мощной толщей коренные породы глинистых сланцев и песчаников отрога Кочумрух;

в) обнажения коренных пород на крутых склонах долин, дающих под воздействием процессов физического выветривания также обломочный материал;

г) селевые террасы, выносы боковых долин и оврагов и русловые отложения.

Таким образом, общая площадь очагов составляет 124,2 км², или 63,6% площади бассейна [12].

По данным А. А. Алиева, геологическое строение бассейна р. Кишчай представляет сложно дислоцированный район с развитием в основном отложений юрского и мелового возраста. Лишь в долине реки и в предгорной полосе широко развиты четвертичные и современные накопления. Юрские глинисто-сланцевые отложения развиты в основном в верховьях рр. Дамарчик и Чухадурмаз. Все пласты сильно изогнуты, сложно дислоцированы и разбиты кливажем. Из-за интенсивной тектонической напряженности все пласты опрокинуты на юг.

В гидрогеологическом отношении эти пласты относятся к группе с трещинным типом водопроницаемости. Из-за плохой водопроницаемости всех коренных отложений в бассейне преобладает плоскостной смыв [1].

Водонепроницаемость поверхности бассейна значительно увеличивает также интенсивность поверхностного стока, обеспечивающего в сочетании с резким рельефом быструю концентрацию ливневых вод с продуктами выветривания.

Геоморфологическое устройство бассейна определяется геологическим строением и действием экзогенных процессов. В зависимости от резкого контраста физико-географических условий отмечается изменение формы долин и террас по длине реки. По форме и строению речные долины здесь представлены клюзообразными, ущельеобразными, У-образными и ящикообразными долинами. Речные террасы сохранились, в основном, в нижнем течении р. Кишчай, но они отмечаются также в среднем и редко в верхнем течении рек. В верховьях р. Кишчай имеются многочисленные кары, троговые долины и морены.

Согласно данным Б. А. Будагова [3], в бассейне выделяются следующие вертикальные пояса: высокогорный, переходный, среднегорный, низкогорный и предгорный.

Высокогорный пояс является основным местом накопления мощных рыхлых отложений и главнейшим очагом селеобразования. Переходный (1800—3000 м) и среднегорный (800—1800 м) пояса также принимают определенное участие в дополнительном подпитывании селей.

Низкогорный пояс в образовании и прохождении селей почти никакого участия не принимает.

В бассейне р. Кишчай выделяются 5 климатических зон: зона умеренно-теплого климата с сухой зимой, зона умеренно-теплого климата с равномерным распределением осадков, зона холодного климата с влажной зимой с двумя подтипами и, наконец, зона климата горной тундры.

Режим температуры воздуха в зависимости от взаимодействия атмосферных процессов с местными условиями бывает различным. Обычно значительные изменения в режиме температуры воздуха наблюдается в долинных и предгорных частях, что объясняется распространением здесь холодного воздуха и интенсивным охлаждением и нагреванием воздушных масс над этим бассейном. Изменение температуры подчинено (как и в других горных районах) закономерности вертикальной поясности. В холодное время года очень низкие температуры обуславливаются вторжением арктического воздуха, а высокая температура связана с выносом тропического воздуха с южных районов. Иногда, в летние месяцы, в предгорных и горных районах отмечаются интенсивная солнечная радиация в течение продолжительного времени, что оказывает разрушительное действие на обнаженные коренные породы и приводит к засухе и суховеям.

В бассейне р. Кишчай выпадает большое количество осадков. Здесь, в среднем за год, сумма осадков составляет в низовьях 700—800 мм, а в верховьях 1200 мм. В бассейне наблюдается два максимума и один минимум. Первый максимум приходится на конец весны и начало лета (май—июнь), второй—на начало осени (сентябрь), а минимум на зиму (январь).

Число дней с осадками в бассейне р. Кишчай довольно велико, наименьшее число дней с осадками отмечается в предгорных районах, которое с высотой значительно увеличивается. Число дней с обильным количеством осадков—до 20 мм и более в горных районах ровно 14—18, а в предгорных —8—15. Более интенсивно осадки выпадают в теплом полугодии.

Вследствие сложной орографии бассейна р. Кишчай режим ветра весьма разнообразен. Господствующими ветрами являются горно-долинные, направление которых контролируется экспозицией склонов и расположением долин. Долинные ветры иногда достигают 8—10 м/сек, которые способствуют перемещению мощных воздушных масс по долинам и приводят к формированию мощных кучево-дождевых облаков, вследствие чего возникают грозы и выпадают ливневые осадки. Этот процесс также характерен для теплой половины года [4].

В бассейне р. Кишчай 62,6% общей площади почвенного покрова—средне- и сильно эродированы. Среди почвенных разностей бассейна, в наибольшей степени подвержены эрозии горно-луговые и горно-лесные остепненные почвы. Так, от общей площади горно-луговых—71,3%, горно-лесных остепненных—100%, представлены средне- и сильно смытыми почвами.

Основной причиной развития эрозионных процессов в горно-луговой зоне (отм. 1800—2300 м), кроме интенсивных денудационных процессов, вызывающих распространение овражной эрозии, является также и чрезмерная пастьба скота.

Так, на яйлагах, расположенных в бассейне р. Кишчай, пастьба скота превышает установленную норму в 4—5 раз, что вызывает к уничтожению корневой системы и разрыхлению почвенного покрова [2].

В бассейне р. Кишчай выражены два основных пояса растительности горно-лесной и горно-луговой. Горно-лесной пояс расположен в пределах 2000—2300 м и выше сменяется альпийской и субальпийской горно-луговой зоной, горно-степной растительностью.

В нижнем поясе горно-лесной зоны, до высоты 1000 м, преобладают породы грузинского дуба, леса средней зоны, от отм. 1000 м, отличаются наиболее высокими древостоями и хорошей производительностью. Лесообразующей породой в них является бук восточный. В верхней горно-лесной полосе кроме буковых и грабо-буковых пород развиты восточный дуб и березняки [11].

Интенсивные проявления эрозионных процессов и селевых потоков приносят огромный ущерб народному хозяйству бассейна р. Кишчай. Под постоянной угрозой селевого потока находится значительная часть гор. Нухи. В городе, в зоне деятельности селевого потока, расположен Нухинский шелкокомбинат, располагающий основными средствами в размере 3,6 млн. руб. с ежегодным выпуском 7 млн м шелковой ткани товарной стоимости 28,4 млн руб. На 1959—1965 гг. предусматривается расширение производства и увеличение выпуска шелковой ткани в 1,2 раза по сравнению 1958 г.

Общая стоимость построенных населенных пунктов, промышленных, коммунальных и сельскохозяйственных предприятий, школ, медицинских и культурных учреждений, лесных массивов, находящихся в зоне деятельности селевого потока, составляет свыше 15,8 млн руб. [10].

Однако в случае сильного селевого потока, кроме прямого ущерба населению и хозяйству района, возникнут большие затруднения в восстановлении производительных мощностей. Так, только по шелкокомбинату, если на восстановление потребуется 5 лет, убытки за счет потери прибылей составляет около 150—180 млн руб., кроме того, за этот же период прекратится выпуск шелковой ткани порядка 34—40 млн м на общую стоимость 200—250 млн руб.

В соответствии с проведенными исследованиями рекомендуются следующие комплексные меры по борьбе с эрозией почв и селевыми потоками в бассейне р. Кишчай.

В бассейне р. Кишчай большое распространение имеют осыпи и россыпи, которые принимают активное участие в процессах селеобразования. Для ликвидации осыпей рекомендуется посадка ивы, березы, лоха и др. и возведение легких укрепительных сооружений и т. д.

Для защиты горно-луговой зоны от эрозионных процессов основным мероприятием является регулирование пастьбы скота. На яйлагах же Дамарчик, Кям, Шевотар, Чухадурмаз, Данавеч необходимо полное запрещение пастьбы скота. На остальных яйлагах—Кызыл-баре, Беюк-Чалангез и других необходимо установить правильную систему пастьбы скота, т. е. внедрять загонную систему.

Для сохранения лесных массивов и для повышения их защитного противоденудационного значения в бассейне р. Кишчай необходимо провести следующие лесомелиоративные мероприятия: облесение полян, реконструкция малоценных насаждений и создание новых лесонасаждений на площади 1297 га, перевод пастбищ в сенокосные угодья—202,5 га и улучшение сенокосных угодий 101 га [2].

Создание лесонасаждений и реконструкция малоценных лесов ориентировочно выразится в 900 тыс. руб. на протяжении 10 лет.

В бассейне р. Кишчай лесопосадочные работы в первую очередь следует провести в верховьях рр. Чухадурмаз, Сарыгюней и Кайнар. Лесомелиоративными мероприятиями должны быть охвачены также

полосы „с. Лоды—Юхарыбаш“, „Шутдара—Дулуздара“ и „Дулуздара сс. Киш-Охут“ [2].

В результате проведенных комплексных исследований установлено, что в бассейне р. Кишчай самые мощные сели приурочены к высокогорным зонам, т. е. формируются выше альпийских и субальпийских зон. Дальнейшими исследованиями выявлено, что значение леса в регулировании стока указанного бассейна весьма ограничено, почему одними лесомелиоративными мероприятиями в этой бассейне нельзя достичь полной ликвидации селей; для этого необходимо проведение комплексных мероприятий гидротехнического и горно-мелиоративного характера. Проведение крупных горно-мелиоративных работ в бассейне р. Кишчай весьма сложное и почти недоступное мероприятие и связано с большими затратами средств, которые вряд ли могут оправдаться экономикой Нухинского района [5].

Поэтому, наряду с предусмотрением фитомелиоративных работ и хозяйственных мероприятий рекомендуются также мероприятия гидротехнического характера.

Известно, что основным фактором, приближающим характер любого горного потока к селевому, является наличие в нем весьма значительного количества мелкозема, песка, гальки, гравия и камней. Чем большее количество их содержится в потоке и чем выше их концентрация, тем резче выступают все селевые качества потока.

Известно также, что по режиму движения различают турбулентные и структурные сели. Внешнее принципиальное отличие между этими потоками заключается в следующем: при прохождении турбулентного селя, даже при значительном количестве переносимых материалов, полностью поддерживается режим водного потока. Структурный же сель представляет собой полужидкую пластичную массу, содержащую воду как один из своих компонентов, и движущуюся, несмотря на разнообразие состава, как структурное целое. Вода, входящая в состав такого потока, при его формировании теряет свою самостоятельность, определяющую скорость потока. Она лишь, являясь составной частью, придает ей подвижность и обеспечивает текучесть консистенции.

Таким образом, гидродинамические расчеты структурного селя резко отлична от гидродинамических расчетов водных потоков, и структурный сель ввиду наличия такого режима обладает большой разрушительной силой, превышающей разрушительную силу турбулентных селей в несколько сот раз.

В настоящее время нет совершенного научного труда, который в полной мере отражал бы основные достижения науки и практики в области познания генезиса и динамики структурных селей. Это обстоятельство и является основной причиной того, что проводимые в настоящее время противоселевые мероприятия являются малоэффективными.

Нами установлено, что кинетическая энергия структурного селя во много раз превосходит кинетическую энергию других видов паводков, при равных объемных расходах. Это превосходство заключается в следующем:

1) в случае прохождения структурного селя энергия потока складывается из совокупности кинетической энергии всей массы, включая и каменно-глыбовые части, и с возрастанием скорости потока кинетическая энергия его приобретает большое значение;

2) при движении структурного селя образовывается область ядра потока, где явление диссипации энергии отсутствует, что и придает потоку большую разрушительную силу.

В силу вышеприведенных доводов заключаем, что правильное ведение борьбы со структурными селями обеспечит безопасность защищаемых объектов также от воздействия других видов потока. И так как бассейн р. Кишчай является структурно-селеносным, то рекомендуемые противоселевые мероприятия гидротехнического характера рассчитаны на предотвращение разрушительного воздействия структурных селей.

Как меры борьбы со структурными селями бассейна р. Кишчай

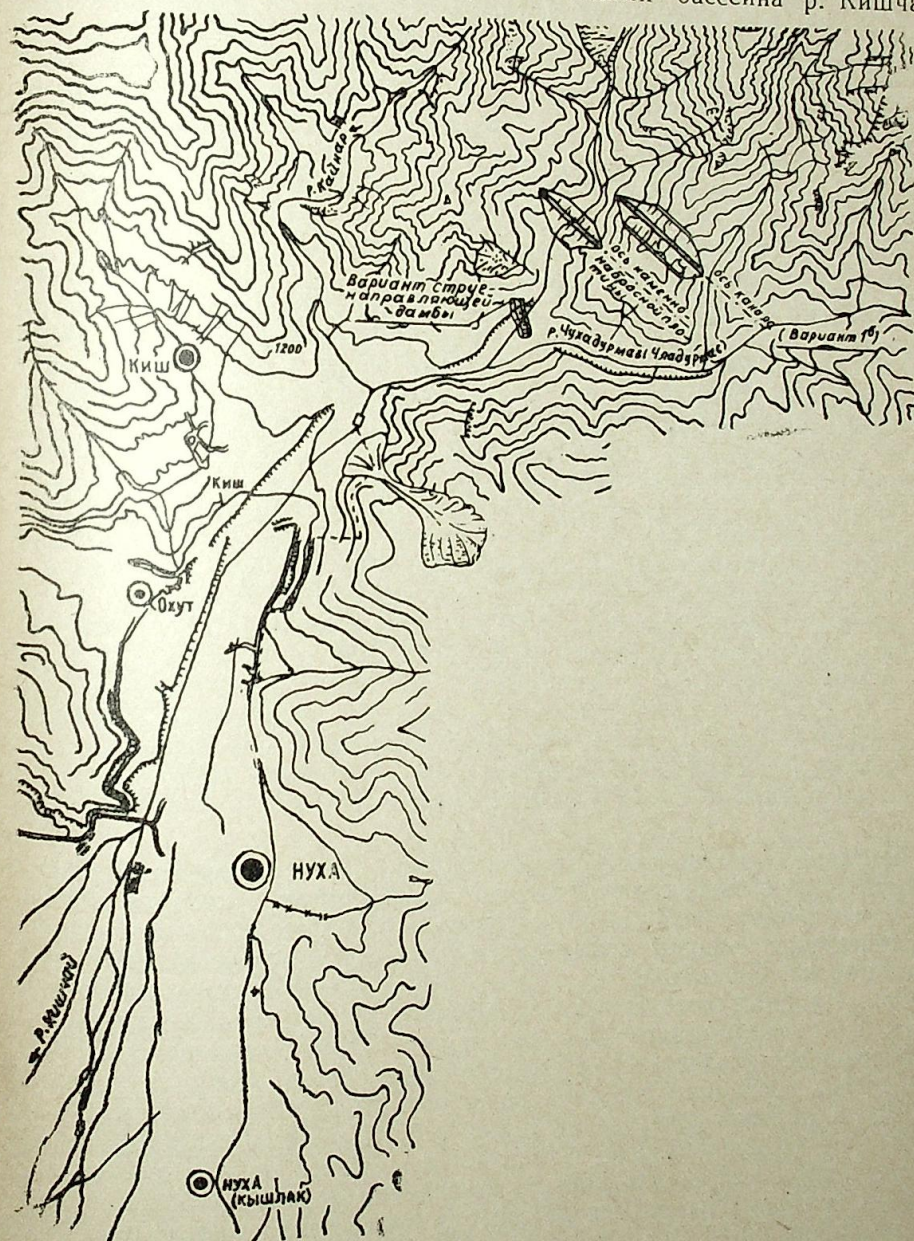


Рис. 2

Схематический план бассейна р. Кишчай и схема противоселевых мероприятий

разработаны несколько вариантов гидротехнических сооружений, из которых рекомендованы нами к осуществлению два конкурирующих варианта (рис. 2, 3).

Структурно-селеносным притоком бассейна р. Кишчай в основном является р. Дамарчик, которая и является главной угрозой для гор. Нухи и прилегающих населенных пунктов. Поэтому в одном варианте рекомендуется отвод расходов р. Дамарчик в русло р. Сарыгюней, посредством возведения высоко-напорной каменно-набросной (высотой 240 м) плотины и отводного канала в створе Пири-Кая.

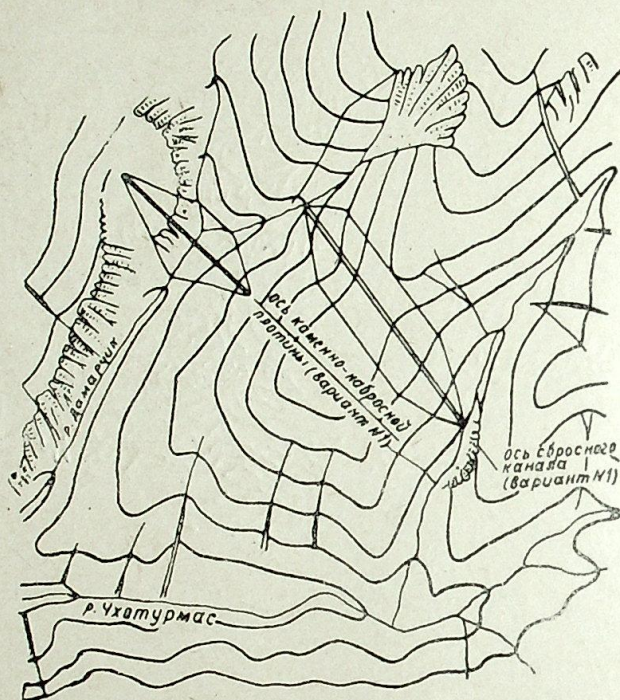


Рис. 3

Схема каменно-набросной плотины и отводного канала

При таком отводе путь, проделываемый селом, удлиняется, на поворотах градиентные слои охватывают ядро потока, которое приводит к частичному разрушению структуры, где и происходит частичное выпадение твердого материала и значительное уменьшение скорости потока. По выходе же в русло р. Сарыгюней поток, встречая сильное сопротивление складок местности, вторично замедляет скорость до минимального значения и доходя до второго поворота, полностью останавливается. Отложения селя, после этого, постепенно размываясь расходами соседних рек, уносятся на конус выноса. Организация и производство строительных работ по этому варианту очень просты, не требуют большого количества рабочей силы или механических средств. Преимущество этого варианта заключается в том, что он сроком на 50—100 лет обеспечит полную безопасность защищаемых объектов.

В другом варианте рекомендуется изменение направления потока р. Дамарчик в сторону скального подножья г. Ханайлаг, посредством мощной струенаправляющей дамбы. Возведение этой дамбы предпочтается на привершинном участке конуса выноса р. Кишчай, у местечка „Кызлар—Каласы“.

При этом структурный селя, ударяясь под косым углом о струенаправляющую дамбу, будет направлен к скальному подножью г. Ханайлаг, где встретив непреодолимое сопротивление последнего, приостановится, произойдет возрастание глубины и трансформация потока ниже дамбы. Однако ввиду уменьшения скорости потока до минимальных значений и малых уклонов конуса выноса, продвижение его прекратится, даже не достигнув пределов с. Киш.

Следует отметить, что существующие селезащитные дамбы гор. Нухи без осуществления предлагаемого варианта не могут работать эффективно. В настоящее время эти дамбы работают против воздействия турбулентных селей. При прохождении же структурного селя эти дамбы не обеспечат безопасности города. Поэтому для обеспечения их надежной работы необходимо также строительство предлагаемой дамбы.

Для поднятия экономики, сохранения лесных богатств бассейна наиболее рациональным является газификация гор. Нухи, что в некоторой степени предотвратит селевые потоки и эрозию почв. Согласно ориентировочным подсчетам Б. Т. Назировой на проведение газопровода до гор. Нухи потребуется около 1,2 млн руб. Фактический расход топлива промышленными предприятиями, государственными учреждениями, и также на бытовые нужды населения гор. Нухи, по данным 1958 г., составил мазута 9855 т и дров 73868 м³ на общую сумму 833,87 тыс. руб. На переброску потребовалось по ориентировочным расчетам около 15 тысяч машино-рейсов, как жидкого топлива от железнодорожной ст. Евлах на расстояние 80 км, а также и дров из близлежащих районов. Предполагаемая потребность промышленными предприятиями и на бытовые нужды населения при замене мазута и дров на нефтяной газ ориентировочно составит 18560 тыс м³. Исходя из преискурантной стоимости газа для промышленных предприятий, учреждений и на нужды населения, стоимость потребного газа составит 477,57 тыс. руб.

Таким образом, общегодовой экономический эффект с переходом на газ составит свыше 350 тыс. руб., что несомненно даст возможность покрыть затраты на капитальные вложения в ближайшие 3—4 года.

Переход на газ даст возможность высвободить автотранспорт от перевозки как жидкого топлива, так и дров, а также в значительной степени сохранит лесные массивы от рубки и тем самым в некоторой степени предотвратит угрозу селевого потока и эрозии почв [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев А. А. Отчет СОПСА АН Азерб. ССР за 1959 г. по теме „Эрозия почв и селевые потоки бассейна р. Кишчай и разработка мер борьбы с ними“. Разд. 1, гл. 2, 3.
2. Алекперова К. А. и Мустафаев Х. М. Там же, разд. 1, гл. 7, 9.
3. Будагов Б. А. Там же, разд. 1, гл. 3.
4. Мадатзаде А. А. Там же, разд. 1, гл. 4.
5. Мамедзаде М. С. Там же, разд. II, гл. 2.

6. Мамедзаде М. С. Кандидатская диссертация. Азерб. ин-т нефти и химии, 1959.
7. Мамедзаде М. С. Некоторые физико-механические свойства структурных селевых потоков. ДАН Азерб. ССР, 1957, т. XIII, № 3.
8. Мамедзаде М. С. Сели восточной периферии зоны Бабадага и их гидравлические особенности. Труды ЭНИН АН Азерб. ССР, 1958, т. 2.
9. Мамедзаде М. С. Селевые потоки и меры борьбы с ними. "Природа" 1959, № 12.
10. Назирова Б. Т. Там же, разд. I, гл. 10.
11. Прилипко Л. И. и Гаджиев В. Там же, разд. I, гл. 6.
12. Рустамов С. Г. Там же, разд. I, гл. 1, 5 и 8.

М. С. Мамедзаде

Кишчај һөвзәсиндә сел һадисәләри вә онларла мүбаризә тәдбирләри һаггында

ХҮЛАСӘ

Кишчај һөвзәсиндә апарылан тәдгигат ишләри көстәрир ки, структур селләри өјрәнмә гә онларла мүбаризә үсуллары ән мүһүм мәсәләләрдән бири олмагла бәрабәр, ејни заманда чох чәтиндир. Бунунла әлағәдар олараг, тәбиәтин бу мүрәккәб тәзаһүрләри индијә кими лазыми гәдәр өјрәнилмәмишдир. Анчаг сел һадисәләриндән халг тәсәррүфатына дәјән зәрәрләр бөјүкдүр ки, бу мәсәләнин һәм елми-һәзәри тәрәфдән вә һәм дә тәчрүби тәдбирләр көрмәк мәгсәди үчүн өјрәнилмәси ән бөјүк әһәмијјәтә маликдир.

Сел һадисәләринин баш вермәси селәмәләкәтирән һөвзәнин кеоложи, кеоморфоложи вә иглим хүсусијјәтләри илә әлағәдардыр. Она көрә дә Кишчај һөвзәсинин сел һадисәләрини өјрәнмәк үчүн әввәлчә, онун комплексли тәбии тарихи өјрәнилмишдир.

Апарылмыш комплекс тәдгигатлардан ајдын олур ки, Кишчај һөвзәсиндә ән бөјүк сел јүксәк дағлыг һиссәләрдә—јухары алп вә субалп зоналарда әмәлә кәлир. Сонракы тәдгигатлардан ајдын олур ки, су ахымыны низама салмаг үчүн јалныз мешәнин әһәмијјәти илә кифәјәтләnmәк олмәз.

Селләрин чиди сурәтдә гаршысыны алмаг үчүн комплекс гидро-техники вә дағ-мелиоратив ишләри дә апармаг лазымдыр. Кишчај һөвзәсиндә бөјүк дағ-мелиоратив ишләринин апарылмасы мүрәккәбдир вә бу ишә чох вәсаит тәләб олундуғундан Нуха рајону игтисадијјаты үчүн әлверишсиздир. Она көрә дә гидротехники тәдбирләрлә јанашы олараг фито-мелиоратив тәдбирләрин дә апарылмасы мәсләһәт көрүлүр. Нәрәкәт режиминә көрә селләр турбулент вә структур характерә маликдир.

Кишчај һөвзәсиндән структур селләр кечдији үчүн селләрә гаршы тәклиф едилән мүбаризә тәдбирләри, онларын гаршысыны алмаға јөнәлдилмишдир.

Кишчај һөвзәсиндә селләрин гаршысыны алмаг үчүн бир нечә гидротехники тәдбирләр һазырланмышдыр. Бунлардан икисинин һәјата кечирилмәси мәсләһәт көрүлүр. Кишчај һөвзәсиндә структур сел әсас олараг Дамарчында әмәлә кәлир вә бу да Нуха үчүн әсас горхулу сел мәнбәјидир.

Буна көрә дә, 1-чи вариантда Дамарчын чајынын сујуну һүндүрлүјү 240 м олан бәнд васитәси илә Сарыкүнәјә ајырмаг мәсләһәт көрүлүр. Белә һалда селин кечдији мәсәфә узаныр, дөнкәләрдә селин структурасы позулур вә тәркибиндә олан кәтирмә материалларын бир һиссәси чөкүр. Бу исә структур селин дағылмасына вә сүрәтинин

азалмасына сәбәб олур. Сел ахынтысы Сарыкүнәј чајына чыхдыгда 2-чи дәфә мүгавимәтә раст кәлир вә онун сүрәти даһа чох азалыр. Белә бир вариантын һәјата кечирилмәси чох садә олуб, чохлу ишчи гүввәси вә механизм тәләб етмир. Анчаг бу ишләрин апарылмасы үчүн вәсаит тәләб олунур. Бу бәнд тикиләрсә, Нуха вә әтрафда олан кәндләри 50—100 ил мүддәтиндә сел һадисәләриндән мүдафиә етмәк олар.

2-чи вариантда Дамарчын чајынын сујунун истигамәтини бөјүк истигамәтверичи бәнд васитәси илә Ханјајлаг дағынын әтәјинә доғру јөнәлтмәк мәсләһәт көрүлүр. Бу бәнд Кишчајын кәтирмә конусунун јухарысында Гызлар галасы дејилән јердә тикилмәлидир. Бу вариант ләрәк өз истигамәтини дәјишәр вә дағыдычы гүввәсини зәифләдәр.

Һал-һазырда Кишчајда јерләшән бәндләрин еффеktiv олараг ишләмәси үчүн мәсләһәт көрүлән вариантлардан бирини һәјата кечирмәк лазымдыр. Чүнки тикилмиш бәндләр әсас олараг турбулент селләрин гаршысыны алыр. Структур сел кечсә, бу бәндләр шәһәри селдән мүдафиә едә билмәјәчәкләр. Она көрә дә 2-чи вариантын һәјата кечирилмәси мәсләһәт көрүлүр.

Нуха шәһәринин игтисадијјатыны јүксәлтмәк вә мешәләрини сахламаг үчүн газ кәмәринин чәкилмәсинин бөјүк әһәмијјәти вардыр. Халдандан Нухаја чәкилән 63 км-лик газ кәмәри әһалинин учуз јаначаға олан тәләбини өдәјә биләр.

Јевлахдан Нухаја маје јаначаг (мазут) кәтирмәк үчүн 15000 машын рејси тәләб олунур. Һесабламалара көрә мазут вә одун әвәзинә 18560 мин м³ газ лазымдыр.

Бу исә јахын 3—4 ил әрзиндә сәнајәјә гојулачаг мәсарифи өдәјәчәкдир. Нухаја газын чәкилмәси мешәләрин гырылмасынын гаршысыны алмагла бәрабәр ерозија вә селләрин гаршысыны алмаға көмәк едә биләр.

ХРОНИКА

ПОСТАНОВКА НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ ПО ЭНЕРГЕТИКЕ В РУМЫНИИ

Непосредственное знакомство с румынскими энергетиками* дает возможность отметить большие изменения в энергетическом хозяйстве братского народа, особенно в области электрификации страны за последние десять лет, когда страной начал управлять сам народ.

Несмотря на наличие в РНР колоссальных энергетических ресурсов, как топливных, так и водных, энергостроительство в стране до 1950 г. находилось в крайне неудовлетворительном состоянии.

Например, если за предыдущую десятилетку — с 1938 по 1948 г. — выработка электроэнергии в стране возрасла с 1100 млн. до 1500 млн. *квтч*, то за период с 1950 по 1960 г. выработка электроэнергии возрасла с 2100 млн. до 7700 млн. *квтч*. Соответственно выросла и установленная мощность электростанций РНР.

На 1 января 1961 г. установленная мощность действующих в стране электростанций равна 1840 *мвт*, из коих мощность ГЭС составляет 200 *мвт*, а остальные относятся к тепловым электростанциям. Из 7700 млн *квтч* выработки 1960 г. 800 млн. *квтч* падает на долю ГЭС. 45% выработки тепловых электростанций относится к тепловым, работающим на природном газе, и 25% тепловым электростанциям, работающим на низкосортном топливе (торф, бурый уголь), а остальные относятся к выработкам электростанций, работающим на мазуте и дизельном топливе.

В перспективном плане РНР обеспечивается возрастающие темпы развития энергостроительства, электрификации и электротехнической промышленности. При доведении в 1965 г. установленной мощности электростанций РНР до 4 млн. *квтч*, выработка электроэнергии достигнет 18,5 млрд. *квтч*,

из коих 2 млрд. *квтч* предусматривается для передачи соседним республикам.

Выработка электроэнергии в 1975 г. в размере 65,7 млрд. *квтч* и к этому сроку намечено завершить сплошную электрификацию страны.

Создание единой высоковольтной сети в РНР стало возможно в результате строительства за последние 10 лет нескольких тепловых электростанций крупной мощности на угле и природном газе, и ряда гидроэлектростанций, что позволило увеличить протяженность линии электропередач напряжением 110 *кв* с 120 *км* до 2900 *км*.

В настоящее время 80% выработки электроэнергии в стране производится электростанциями, объединенными единой высоковольтной сетью.

Крупные тепловые и гидроэлектростанции оснащаются в основном советским и чехословацким оборудованием. Среди установленных на электростанциях турбогенераторов имеются турбины с высокими параметрами пара, давлением 120 *атм*, при температуре 570°С с водородным охлаждением генераторов.

Тепловые электростанции обеспечивают предприятия электроэнергией и теплом.

На р. Быстрице в Биказе построена ГЭС суммарной установленной мощностью 210 *мвт*, которая является самой крупной гидроэлектростанцией в Румынии. Высота плотины ее 120 м и длина деривационного напорного турбопровода 5 *км*. Турбины работают на напоре 149 м, объем водохранилища рассчитан на многолетнее регулирование. Средний расход воды 50 *м³/сек*.

В настоящее время в работе находятся четыре агрегата по 27,5 *мвт*. Будут установлены еще 2 агрегата мощностью по 50 *мвт*. Каскад нижнего бьефа этой гидро-

* В бытность мою в командировке в Румынской народной республике (РНР) с 17 декабря 1960 г. по 15 января 1961 г.

станции состоит из 9 гидроэлектростанций. Общая мощность всех электростанций в каскаде будет равна 400 мвт с годовой выработкой 1300 млн. квтч. Строительством этого каскада решается и вопрос орошения площади 300 тыс га.

Вопросами составления перспективного плана электростроительства и электроснабжения, проектированием и исследованием энергетических и гидротехнических объектов занимается крупный в Бухаресте Институт проектирования и исследования по энергетике, насчитывающий более 1000 сотрудников, из которых около 500 являются инженерами и техниками.

В настоящее время в этом институте проектируется ряд крупных тепловых и гидроэлектростанций и линий электропередач на напряжение 110, 220 и 380 кв.

Линия напряжения 380 кв является межсистемной, которая соединит энергосистемы Румынии, Чехословакии, Венгрии и др.

Проектированием линий электропередач и сетей напряжением 35 кв и ниже занимаются в соответствующих областях местные проектные организации.

Потенциальные гидроэнергетические ресурсы всех рек Румынии, включая и Дунай, исчисляются около 10 млн. квт, из которых примерно 5 млн. квт являются промышленными. Половина промышленных гидроэнергетических ресурсов находится на Дунае в той части, которая разделяет Румынию от Югославии.

Предполагается строительство крупной гидроэлектростанции для снабжения электроэнергией потребителей Румынии и Югославии.

Электромеханический институт Министерства тяжелой промышленности РНР находится в городе Бухаресте и основан в 1951 г. Этот институт занимается в основном созданием и усовершенствованием электротехнических аппаратуры и материалов.

В институте имеются следующие отделы: отдел сильных токов; отдел автоматики и устойчивости к климатическим условиям; отдел полупроводников и отдел технического контроля.

В составе каждого отдела имеется несколько лабораторий. В отделе сильных токов имеются лаборатории: электрических машин и трансформаторов; высоких напряжений и предохранителей; низкого напряжения; электроприводов. В отделе электротехнических материалов имеются лаборатории: керамических феритовых и магнитных материалов и химическая лаборатория, последняя занимается химическим анализом изоляционных материалов, а также гальваническими элементами. В отделе полупроводников существует лаборатория кремния и лаборатория использования полупроводников.

Планы работы соответствующих лабораторий составляются на основе заявок от

производственных и научных организаций.

Институт находится на государственном бюджете, но имеется тенденция постепенного перевода на хозрасчет. Институт имеет около 300 работников, из которых примерно 100 являются инженерами.

Все лабораторные установки созданы силами коллектива института. Координация работы института производится Академией.

Основное внимание института в 1960 г. было направлено на улучшение качества производства электротехнических аппаратур и материалов.

Институтом достигнуто следующее:

1) Улучшение качества контактов приборов включения низкого напряжения, путем проката серебра на медь. Создана оригинальная установка для одновременного испытания 10 контактных приборов. Эта установка в течение трех дней производит 10 тысяч отключений каждого контактного прибора. Таким образом за короткое время с помощью этой установки определяется степень прочности этих контактов. Испытание показало, что разработанные институтом материалы выдерживают около 10 000 отключений и выключений.

2) Институт разработал способ, при котором охлаждение мощных трансформаторов (от 10 мва и выше) производится более интенсивно. На уровне основания трансформатора устанавливается вентилятор, который продувает воздух снизу вверх по поверхности резервуара трансформатора. Этот способ охлаждения создает возможность значительно сократить поверхность естественного охлаждения трансформатора, что дает большую экономию металлических труб и трансформаторного масла.

3) Разработаны разрядники напряжения единой серии. Для разрядников, устанавливаемых на линиях, наименьший импульсный ток принимается 3 ка, а для установки на шинах станции 5 ка. Налаживание производства этих разрядников дает возможность отказаться от импорта их в страну. Для испытания этих разрядников институтом сооружается генератор импульсных токов.

4) Институтом создан оригинальный стенд для испытания кабелей до напряжения 30 кв.

5) Проведена работа по замене азбоцементных гасительных камер из азбоцементной керамической. Институтом разработана технология изготовления различных форм такой камеры.

6) Разработана единая серия статических конденсаторов для компенсации реактивной мощности в сетях. Преимущества этих конденсаторов заключается в их меньшем габарите и взаимозаменяемости деталей для всех батарей конденсаторов.

7) Полученные институтом новые составы феритовых и магнитных материалов содействуют улучшению качества громкоговорителей и других аппаратур.

Энергетический институт Академии РНР организован 12 лет назад и в настоящее время состоит из трех секций: общей энергетики, электроэнергетики и теплоэнергетики.

Секция общей энергетики занимается выявлением энергетических ресурсов страны и определением динамики потребления энергии. В этой секции выполнены работы по определению теплоэнергетических ресурсов по нефти, газу, углю и торфу, а также прогноз динамики потребления электроэнергии для уровня 1965 и 1975 гг. В 1960 г. отдел занимался составлением энергобаланса для уровня 1980 г., вопросами использования низкосортного угля и исследованием вопроса резервных мощностей в энергосистеме с точки зрения их технико-экономической эффективности.

Секция электроэнергетики в своем составе имеет лабораторию электрических сетей; лабораторию техники высоких напряжений; лабораторию электрических машин и лабораторию автоматизации энергетических устройств.

Лаборатория электрических сетей занимается вопросами устойчивости энергетических систем, заземлением трансформаторов и сетей и коммутационным перенапряжением.

Лаборатория автоматизации занимается разработкой автоматического распределения, экономической эффективности мощностей в сетях и созданием счетно-решающей машины, для решения дифференциальных линейных уравнений.

Профессор Пауль Димо разработал метод расчета коммутационных перенапряжений в сетях с изолированными нейтральными для случая, когда одна фаза заземляется. Этот метод основан на резонансе при учете реактанса линий и машин. В настоящее время в этой лаборатории занимаются изучением вопросов динамической и статической устойчивости, колебания частоты и напряжения в сетях.

Во вновь созданной лаборатории техники высоких напряжений в настоящее время занимаются созданием высоковольтной лабораторной базы. Для этой цели проектируется установка генератора импульсных напряжений на 1800 кв и других установок. В дальнейшем лаборатория будет заниматься изучением параметров молний, грозовой деятельности районов Румынии, разработкой грозозащитных мероприятий линий и подстанций, а также определением мокро- и сухоразрядных напряжений изоляторов и выяснением возможности перевода линии электропередач на повышенное напряжение.

В лаборатории электрических машин занимаются определением окислительных сил трансформаторов больших мощностей, созданием специальных машин с переменным импедансом, возбуждением электрических машин низкой частоты и т. д.

В теплотехнической секции института занимаются вопросами газоконденсаторной

установки, уменьшения состава серы в углях процесса горения угля в котлах и т. д.

Бухарестский политехнический институт после большой реформы в 1948 г. превратился в мощное учебное заведение. В настоящее время в этом институте наряду с другими имеются в частности факультеты: электротехнический, энергетический и электросвязи.

На электротехническом факультете готовятся кадры по специальностям электрических машин и аппаратур и по автоматизации производственных процессов.

На энергетическом факультете готовятся кадры по электроэнергетике, теплоэнергетике, гидроэнергетике и гидравлическим машинам.

На факультете электросвязи готовятся кадры по специальностям телефонной связи, радиосвязи, промышленной электроники, технической физики, централизации и сигнализации железных дорог.

Существуют следующие формы обучения:

Группы дневного обучения; группы вечернего обучения, где студенты занимаются без отрыва от производства, и заочного обучения.

На вечернее и заочное отделения института принимаются абитуриенты с производственным стажем. На дневном отделении срок обучения 5 лет, из которых полгода отводится для выполнения дипломной работы.

В институте работает около 700 профессоров, доцентов и ассистентов, которые наряду с педагогической работой ведут научно-исследовательскую работу. Темы научно-исследовательской работы института связываются с нуждами страны и оформляются соответствующими договорами с предприятиями.

Выполнение институтом хозяйственных работ проводится совместно силами и средствами института и предприятий. Благодаря такой работе институту удалось значительно улучшить оснащение своих лабораторных баз научным и учебным оборудованием.

К проведению научно-исследовательских работ широко привлекаются студенты и раз в год устраивается студенческая научная сессия.

За последнее время институтом построено ряд учебных лабораторных и других корпусов.

В настоящее время в институте проводится большая работа по созданию лабораторных баз на современном уровне техники. Из шести электротехнических лабораторий четыре созданы за последние два года.

В преподавательском составе института имеются специалисты, привлеченные с производства для чтения цикл-лекций по отдельным специальностям.

Электротехническая промышленность в настоящее время сильно развивается. В Ру-

мынии создан ряд крупных заводов, выпускающих электротехническое оборудование и материалы. Помимо обеспечения потребности страны, электрические машины, трансформаторы и другие оборудования, производимые в Румынии, экспортируются в Индию, Китай, Корею, Чехословакию, ГДР и другие страны.

Один из крупных заводов электротехнической промышленности РНР выпускает электрические машины от 25 до 70 000 *кв*а и аппаратуру высокого напряжения до 220 *кв*: воздушные и масляные выключатели предохранители, трансформаторы тока и напряжения, а также дизельэлектровозы.

Завод работает в кооперации со многими предприятиями. Так, по изготовлению ди-

на напряжением 42 *кв* и затем прикладывается к электродам.

Нефтяная эмульсия с содержанием воды 45% и соли 45 *кг* на тонну перед поступлением в резервуар электрообезвоживающей установки подогревается до 70° С. После первого воздействия электрических полей на эмульсию процентное содержание воды доходило до 4%, а соли до 10 *кг* на тонну. Перед вторым пропуском через установки нефтяная эмульсия смешивается с пресной водой до 8—9% содержания. При этом оставшиеся соли эмульсии в значительной мере растворяются. После этого процесса нефтяная эмульсия вторично пропускается через электрообезвоживающую установку и процент содержания воды сни-

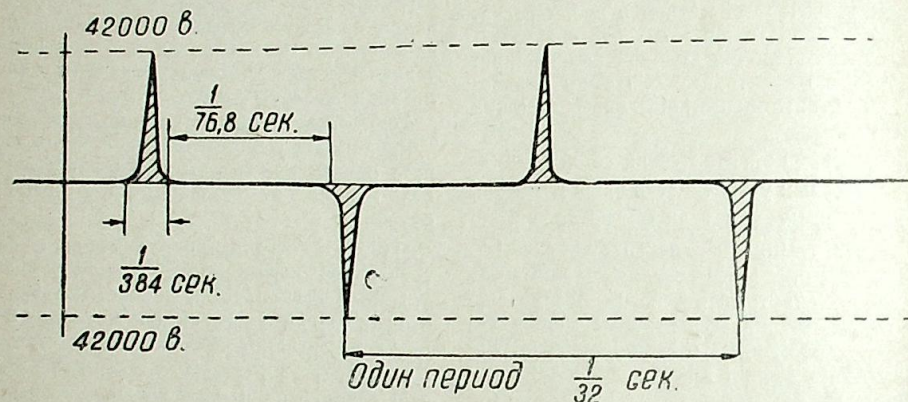


Рис. 1

зельэлектровозов завод кооперируется с 68 предприятиями и выполняет заказы по точному графику. Завод работает в контакте с научно-исследовательским Электротехническим институтом Министерства тяжелой промышленности. На заводе имеется большая лаборатория для испытания высоковольтной аппаратуры.

Состояние вопроса обезвоживания и обессоливания нефти электрическим методом. В настоящее время вся нефть, эмульсия которой является относительно стойкой, обезвоживается и обессоливается электрическим методом.

Одна из двух действующих здесь установок является американской (система Брей), которая эксплуатируется с 1937 г. Эта установка смонтирована самим автором.

Прикладываемое к электродам установки напряжение имеет форму, изображенную на рис. и создается специальным агрегатом (электродвигатель—генератор). Генератор при частоте 32 *гц* вырабатывает шестифазные токи, четыре из которых соединены с электродами и две фазы остаются без нагрузки. Фазное напряжение генератора равняется 75 *в* которое трансформируется

жается до 1,4—2%, а соли до 1,5 *кг* на тонну.

Дальнейшее доведение нефтяной эмульсии до нормального содержания воды производится включением в эмульсию химиката — нафтанового мыла в количестве 0,4 *кг* на тонну нефти. После этого нефть ставится на отстой на 48 часов.

Суточный расход электроэнергии установки равен 800 *квтч*. Скорость движения нефтяной эмульсии через электроды равна 0,54 *м/мин*. В целях предотвращения короткого замыкания, т. е. образования цепочек из водяных капелек между электродами, один из электродов подвергается вращательному движению.

Вторая установка, действующая с 1957 г., осуществлена по проекту румынского инженера Никодимеску. Проектная производительность ее равна 2 тыс. *т* эмульсии в сутки. Но из-за большого содержания воды в нефтяной эмульсии установка дает 1200 *т* в сутки.

По заявлению автора проекта установки, после первого пропуска нефтяной эмульсии через электрообезвоживающую установку содержание воды снижается до 0,11—0,4%, а соли до 0,4 *кг* на тонну.

Эффективное значение напряжения между электродами равно 35 *кв*, при частоте 50 *гц* и синусоидальной форме волны. В настоящей установке упразднен агрегат (электродвигатель-генератор), создающий пирамидальную форму волны напряжения*. Суточный расход электроэнергии установки равен 1400 *квтч*. В настоящее время в Ру-

мынии действует 6 электрообезвоживающих установок.

Стоимость электрического способа обезвоживания составляет 20—30% от стоимости термохимического способа.

Проф. А. С. АЛИЗАДЕ

* Следует отметить, что замена пирамидальной формы волны обычной синусоидальной должна привести к ухудшению процесса обезвоживания и возникновению опасности появления пожара, что имело место на этой установке.

МҮНДӘРИЧАТ

Г. К. Намазов. Кәсилән әмсаллы ади дифференциал тәңликләре анд сәр- хәд мәсәләләри	3
Р. Һ. Мәммәдов. Периодик функцијаларын m -сингулар интегралынын үмүмиләшмиш лебег нөгтәләриндә вә $Lp(-\pi, \pi)$ фәзасында ығылмасынын тәрти- би һагында	15
Ш. И. Вәкилов. Бучаг нөгтәләри олан һиссәләрдән тәшкил олунмуш об- ластда Лаплас тәңлији үчүн Дирихле мәсәләси	27
Л. М. Иманов, Я. М. Аббасов. Бутил спиртләриндә диелектрик релакса- сия	39
К. П. Мәммәдов, З. Ч. Нуријева. Алюминиум лөвһәси үзәринә чә- килмиш селен тәбғәсинин кристаллашма просесинин вә електрик мугавимәти- нин дәјишилмәсинин тәдгиги	45
А. С. Әлизадә, Д. А. Гулијев. Шамаһы чөл лабораторијасында ғасыр- ға һадисәләринин бәзи мәсәләләринин тәдгиги	57
Ф. Һ. Һүсәјнов, М. И. Кәләнтәров, И. Д. Исмајылов. Кичик күч- лү кенераторлары тормозламағ үсуллары	69
Ә. Һ. Әбилов. Дахили чарпаз әләғәни нәзәрә аларағ атмосфер гурғусун- дакы боруду собанын оптимал сазланмасынын тәјини	75
Г. Н. Чәлилов. Нефт контурунун һәрәкәти вә гујулары бирчинсли олма- јан лајда сулашмасы мәсәләләри	89
С. М. Гулијев, Ә. М. Әбдүлзадә, А. Ә. Шәмсијев. Балта шарош- кғларынын дишләри алтында кәркинлијин пајланмасы	95
М. С. Мәммәдзадә. Кишчай һөвзәсиндә сел һадисәләри вә онларла мү- баризә тәдбирләри һагында	101
Хроника	113

СОДЕРЖАНИЕ

Г. К. Намазов. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами	3
Р. Г. Мамедов. О порядке сходимости m -сингулярных интегралов перио- дической функции в обобщенных точках Лебега и в пространстве $Lp(-\pi, \pi)$	15
Ш. И. Векилов. Решение задачи Дирихле для уравнения лапласа с сос- тавной области с угловыми точками	27
Л. М. Иманов, Я. М. Аббасов. Диэлектрическая релаксация в бути- ловых спиртах	39
К. П. Мамедов, З. Д. Нуриева. Исследование процесса кристаллиза- ции и изменения электросопротивления слоя селена, нанесенного на Al под- кладку	45
А. С. Али-заде, Д. А. Кулиев. Исследование некоторых вопросов грозо- вых явлений в Шемахинской полевой лаборатории	57
Ф. Г. Гусейнов, М. И. Калантаров, И. Д. Исмаилов. Способы торможения генераторов малой мощности	69
А. Г. Абилов. Определение оптимальных настроек систем автомати- ческого регулирования трубчатой печи атмосферной установки с учетом внут- ренней перекрестной связи	75
К. Н. Джалилов. Вопросы перемещения контура нефтеносности и об- воднения скважин в макронеоднородном пласте	89
С. М. Кулиев, А. М. Абдулзаде, А. А. Шамсиев. Распределение напряжений под зубьями шарошки долота	95
М. С. Мамедзаде. Селевые потоки бассейна р. Кишчай и меры борьбы с ними	101
Хроника	113

Чапа имзаланмыш 1/VI 1962-чи ил. Кағыз форматы $70 \times 108^{1/16}$. Кағыз вәрәги 3,75.
Чап вәрәги 10,28. Нәс.-нәшријјат вәрәги 9,7. ФГ 06906. Сифариш 270. Тиражы 660.
Гижмәти 80 гәп.

Азәрбајчан ССР Елмләр Академијасы Мәтбәәси, Бакы, Фәһлә проспекти, 96.